

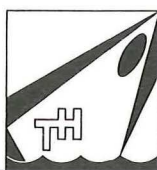
Theoretische beschouwingen bij het  
analyseren van logboekgegevens.

ir.J. Gerritsma

Rapportnr.-41-P

7 november 1952

Publicatie: "Schip en Werf"



Delft University of Technology  
Ship Hydromechanics Laboratory  
Mekelweg 2  
2628 CD DELFT  
The Netherlands  
Phone 015 -786882

# SCHIP EN WERF

14-DAAGS TIJDSCHRIFT, GEWIJD AAN SCHEEPSBOUW, SCHEEPVAART EN HAVENBELANGEN

ORGaan VAN { DE VEREENIGING VAN TECHNICI OP SCHEEPVAARTGEBIED  
DE CENTRALE BOND VAN SCHEEPSBOUWMEESTERS IN NEDERLAND  
HET INSTITUUT VOOR SCHEEPVAART EN LUCHTVAART  
HET NEDERLANDSCH SCHEEPSBOUWKUNDIG PROEFSTATION

IN „SCHIP EN WERF” IS OPGENOMEN HET MAANDBLAD „DE TECHNISCHE KRONIEK”

**REDACTIE:**

Ir. J. W. HEIL w. i., ir. G. DE ROOIJ s. i., Prof. ir. L. TROOST en G. ZANEN

**Redactie-adres:**

Heemraadssingel 194, Rotterdam, Telefoon 52200

**ERE-COMITÉ:**

A. F. BRONSING, Oud-Directeur der N.V. Stoomvaart-Maatschappij „Nederland”, Amsterdam; N. W. CONIJN, Directeur Werf „Gusto” Firma A. F. Smulders, Schiedam; ir. M. H. DAMME, Directeur der N. V. Werkspoor, Amsterdam; J. W. B. EVERTS, Lid van de Raad van Bestuur der Koninklijke Paketvaart Maatschappij, Amsterdam; P. GOEDKOOP Dzn., Directeur Nederlandsche Dok- en Scheepbouw-Maatschappij (v.o.f.), Amsterdam; M. C. KONING, Lid van de Raad van Bestuur der Kon. Paketvaart Mij., Amsterdam; Prof. ir. B. C. KROON, Hoogleraar aan de Technische Hoogeschool; W. H. DE MONCHY, Directeur der Holland-Amerika Lijn, Rotterdam; C. POT, Directeur der N.V. Electrotechn. Industrie v/h W. Smit & Co., Slikkerveer; W. VAN DER VORM, Directeur der N.V. Scheepvaart & Steenkolen Maatschappij, Rotterdam; ir. H. C. WESSE-LING, Commissaris der N.V. Koninklijke Maatschappij „De Schelde”, Vlissingen; S. VAN WEST, Directeur der N.V. Dok- en Werf-Maatschappij „Wilton-Fijenoord”, Schiedam.

Jaar-Abonnement (bij vooruitbetaling) / 16,—, buiten Nederland / 20,—, losse nummers / 1,—  
UITGEVERS: WYT-ROTTERDAM

Postrekening 58418, Telefoon 35250 (4 lijnen), Pieter de Hoochweg 111

**MEDEWERKERS:**

J. BAKKER, ir. V. BARAKOVSKY, ir. L. W. BAST, ir. W. VAN BEELEN, Prof. Dr. ir. C. B. BIEZENO, W. VAN DER BORN, Prof. Dr. ir. W. F. BRANDSMA, ir. A. H. TEN BROEK, ir. B. E. CANKRIEN, P. F. DE DEKKER, ir. C. A. P. DELLAERT, L. F. DERT, J. P. DRIESSEN, G. FIGEE, ir. W. GERRITSEN, TH. VAN DER GRAAF, J. F. GUGELOT, F. C. HAANEBRINK, W. A. HOEK, P. INTVELD, Prof. ir. H. E. JAEGER, ir. J. JANSZEN, F. A. A. JASPERSE, ir. M. C. DE JONG, ir. C. KAPSENBERG, J. VAN KERSEN, Prof. Dr. ir. J. J. KOCH, ir. H. J. KOOY jr., ir. W. KROPHOLLER, ir. W. H. KRUYFF, Prof. ir. A. J. TER LINDEN, Mr. G. J. LYKLAMA & NIJEHOLT, F. C. MATZINGER, Dr. ir. W. M. MEIJER, ir. J. C. MILBORN, J. J. MOERKERK, ir. A. J. MOLLINGER, Dr. ir. W. J. MULLER, A. A. NAGELKERKE, Ing. L. VAN OUWERKERK J.M.Lzn., ir. J. S. PEL, J. C. PIEK, ir. K. VAN DER POLS, B. POT, Mr. Dr. ir. A. W. QUINT, ir. W. H. C. E. RÖSINGH, ir. J. ROTGANS, ir. D. T. RUYSS, C. J. RIJNEKE, ir. W. P. G. SARIS, ir. R. F. SCHELTEMA DE HEERE, ir. A. M. SCHIPPERS, Dr. P. SCHOENMAKER, ir. R. SMID, ir. H. C. SNETHLAGE, Ing. C. A. TETTELAAR, Prof. ir. E. J. F. THIERENS, C. VERMEY, C. VEROLME, ir. J. VERSCHOOR, Ing. E. VLIJ, A. H. H. VOETELINK, H. DE VRIES, IJ. L. DE VRIES, J. W. WILLEMSSEN, ir. J. H. WILTON, Mr. J. WITKOP, Prof. ir. C. M. VAN WIJNGAARDEN, ir. A. H. IJSSELMUIDEN.

NEGENTIENDE JAARGANG

Overnemen van artikelen enz. is zonder toestemming van de uitgevers verboden

7 NOVEMBER 1952 — No. 23

## THEORETISCHE BESCHOUWINGEN BIJ HET ANALYSEREN VAN LOGBOEKGEGEVENS

DOOR

Ir J. GERRITSMa

**I. Inhoud**

In dit artikel wordt een afleiding gegeven van de formules, welke gebruikt kunnen worden bij het analyseren van logboekgegevens (zie VII no. 1 en 2).

Enige statistische methoden worden in 't kort behandeld en toegelicht aan de hand van voorbeelden.

**II. Het vermogen dat door de schroef opgenomen wordt**

Om een schatting te kunnen maken van het vermogen, dat door de schroef opgenomen wordt, kan men uitgaan van de  $K_m$ - $\Lambda$ -karakteristiek van de schroef. In figuur 1 is, voor een concreet geval, een dergelijke kromme getekend.

Deze  $K_m$ -kromme kan met elke gewenste graad van nauwkeurigheid door de volgende formule worden benaderd.

$$K_m = a_0 + a_1\Lambda + a_2\Lambda^2 + \dots + a_n\Lambda^n \dots (1)$$

waarin  $a_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) constant is.

Voor de kromme van figuur 1 bijv., bleek een 3e graads parabool een vrijwel volkomen aanpassing te geven, over het gehele gebied van  $\Lambda$ , dat door de kromme bestreken wordt (zie V voorbeeld 2).

Formule (1) wordt nu verder uitgewerkt.

We kunnen nl. schrijven:

$$K_m = \frac{M}{\rho D^3 n^2} = p \frac{APK}{(0,1N)^3} \dots (2)$$

$$\text{waarin } p = \frac{6^2 \times 75}{2\pi \rho D^3}$$

$$\text{immers } APK = \frac{2\pi M_n}{75} \text{ dus } M = \frac{75 APK}{2\pi}$$

waaruit men gemakkelijk (2) afleidt.

$$\text{Verder is } \Lambda = \frac{v_e}{nD} = \frac{v(1-\psi)}{nD}$$

$$\text{of } \Lambda = \Lambda' (1-\psi) \dots (3)$$

$$\text{waarin } \Lambda' = \frac{v}{nD} \dots (4)$$

Substitutie van (2) en (3) in (1) geeft:

$$p \frac{APK}{(0,1N)^3} = a_0 + a_1\Lambda'(1-\psi) + a_2\Lambda'^2(1-\psi)^2 + \dots + a_n\Lambda'^n(1-\psi)^n \dots (5)$$

Uit (4) volgt:

$$\Lambda' = \frac{v}{nD} = \frac{v}{nH} \cdot \frac{H}{D} = (1-s_s) \frac{H}{D} \dots (6)$$

Uit (5) en (6) volgt:

$$p \frac{APK}{(0,1N)^3} = a_0 + a_1(1-s_s)(1-\psi) \frac{H}{D} + a_2(1-s_s)^2(1-\psi)^2 \left(\frac{H}{D}\right)^2 + \dots + a_n(1-s_s)^n(1-\psi)^n \left(\frac{H}{D}\right)^n \dots (7)$$

Formule (7) kan nog in de volgende vorm geschreven worden:

$$\frac{APK}{(0,1N)^3} = c_1S_s + c_2S_s^2 + \dots + c_nS_s^n + c \dots (8)$$

waarin  $N$  = aantal omwentelingen per minuut;

$S_s$  = schijnbare slip in %.

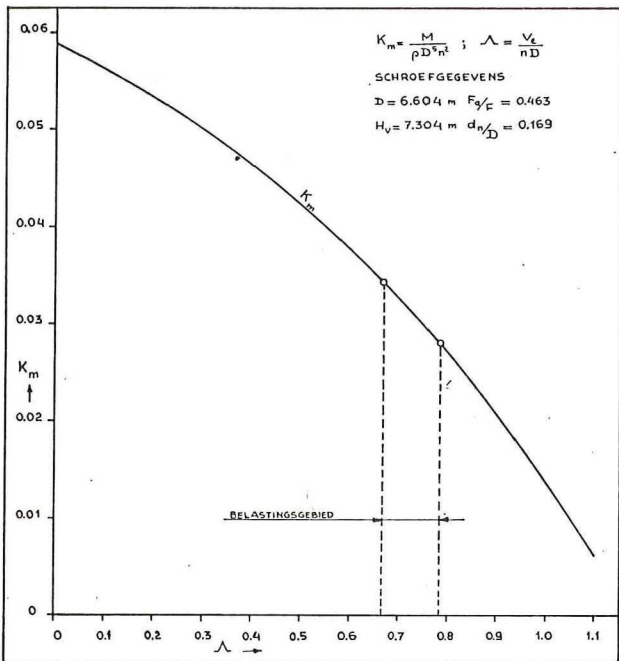


Fig. 1

$$\begin{aligned}
 \text{en } c_1 &= \frac{1}{10^2 p} \left\{ -a_1(1-\psi) \frac{H}{D} - 2a_2(1-\psi)^2 \left(\frac{H}{D}\right)^2 - \dots - na_n(1-\psi)^n \left(\frac{H}{D}\right)^n \right\} \\
 c_2 &= \frac{1}{10^4 p} \left\{ a_2(1-\psi)^2 \left(\frac{H}{D}\right)^2 + 3a_3(1-\psi)^3 \left(\frac{H}{D}\right)^3 + \dots + a_n \frac{n(n-1)}{2!} (1-\psi)^n \left(\frac{H}{D}\right)^n \right\} \\
 c_n &= \frac{(-1)^n}{10^{2n} p} \left\{ a_n(1-\psi)^n \left(\frac{H}{D}\right)^n \right\} \\
 c &= \frac{1}{p} \left\{ a_0 + a_1(1-\psi) \frac{H}{D} + a_2(1-\psi)^2 \left(\frac{H}{D}\right)^2 + \dots + a_n(1-\psi)^n \left(\frac{H}{D}\right)^n \right\}.
 \end{aligned}$$

Onder dienstomstandigheden zal de schepsschroef slechts een klein gedeelte van de  $K_m$ -kromme bestrijken; dit gedeelte is in figuur 1 aangegeven.

In dit interval, dat voor de praktijk voldoende groot is, blijkt de  $K_m$ -kromme slechts onbelangrijk van een rechte lijn af te wijken. Soms is het belastingsgebied van de schroef groter (bijv. bij sleepboten).

Ook kan de  $K_m$ -kromme voor sommige schroeven een vrij sterke kromming vertonen (men zie de systematische schroefserie-diagrammen van Wageningen).

In die gevallen zal een benadering met een 2e graads parabool voldoende nauwkeurig zijn.

Voor het meest voorkomende geval, de benadering door een rechte lijn, wordt de formule:

$$\frac{APK}{(0,1N)^3} = c_1 S_s + c \dots \dots \dots (9)$$

$$\text{waarin } c_1 = - \frac{1}{10^2 p} \left\{ a_1(1-\psi) \frac{H}{D} \right\} = - \frac{20 \pi \rho D^4 H}{60^3 \times 75} \cdot a_1(1-\psi)$$

$$\begin{aligned}
 c &= \frac{1}{p} \left\{ a_0 + a_1(1-\psi) \frac{H}{D} \right\} = \\
 &= \frac{2000 \pi \rho D^3}{60^3 \times 75} \left\{ a_0 + a_1(1-\psi) \frac{H}{D} \right\}
 \end{aligned}$$

De afgeleide formule zullen we in het vervolg aanduiden met de naam: regressieformule.

III. Toepassing van de regressieformule op de gegevens van tankproeven

a. Het bepalen van de regressieformule indien voortstuwings- en overbelastingsproeven beschikbaar zijn

We veronderstellen, dat de coëfficiënt  $c_1$  en de term  $c$  van formule (9) constant aangenomen mogen worden. Hierbij wordt de eventuele variatie in  $\psi$  dus verwaarloosd; het verkregen resultaat zal uitmaken of deze aanname geoorloofd is.

De coëfficiënt  $c_1$  en de term  $c$  kunnen met de methode van de kleinste kwadraten bepaald worden.

Voor het bepalen van de richtingscoëfficiënt  $c_1$  van de regressieformule, is het nodig dat voldoende spreiding van de schijnbare slip voorhanden is; deze eis wordt in V nader bekeken.

Bij een overbelastingsproef (waarbij meestal tot een overbelastinggraad van  $\pm 1,8$  gevaren wordt) is steeds voldoende spreiding van de schijnbare slip voorhanden om de analyse te doen slagen.

Met behulp van de gegevens van negen uitgevoerde tankproeven (voor alle negen schepen is een voortstuwings- en een overbelastingsproef uitgevoerd) is voor elk van die schepen de regressieformule bepaald.

De resultaten van de berekeningen zijn verzameld in tabel 1.

In V is één geval als voorbeeld geheel uitgewerkt (voorbeeld 1).

TABEL 1

		$\frac{APK}{(0,1N)^3} = c_1 S_s + c$		$\frac{APK}{(0,1N)^3} = 10^{-5} H_v D^4 (c_1' S_s + c')$				
No.	aantal schroeven	$c_1$	$c$	aantal gegevens	R	F %	$c_1'$	$c'$
1	1	0,19	13,1	22	0,993	0,93	1,40	94
2	1	0,00043	0,0412	13	0,991	0,39	0,90	88
3	1	0,0047	0,480	12	0,981	0,69	0,87	89
4	1	0,12	5,79	20	0,996	0,70	1,67	84
5	1	0,023	2,27	14	0,997	0,30	0,89	87
6	2	0,072	2,91	23	0,994	0,59	3,04	122
7	2	0,015	0,468	16	0,966	1,65	3,87	118
8	2	0,14	4,82	32	0,994	1,22	3,93	134
9	2	0,11	4,51	19	0,992	0,97	3,30	136

Opmerking: voor de betekenis van R en F zie V.

Om een indruk te krijgen van de gevonden afwijkingen is in figuur 2 de regressielijn van schip 1 getekend. De aangegeven punten stellen de gebruikte gegevens voor.

Uit tabel 1 kan de volgende conclusie getrokken worden:

De aanname, dat het verband tussen  $K_m$  en  $\Delta$  lineair is, en de aanname, dat  $c_1$  en  $c$  constant zijn, beïnvloeden de gevonden waarden voor APK slechts onbetekenend.

Vergelijken we de constanten  $c_1$  en  $c$  van de verschillende schepen met elkaar, dan blijken deze sterk te kunnen variëren.

In verband met formule (9) kan men, om deze sterke variatie op te heffen, de formule ook als volgt schrijven:

$$\frac{APK}{(0,1N)^3} = 10^{-5} H_v D^4 (c_1' S_s + c') \dots \dots (10)$$

De constanten  $c_1'$  en  $c'$  worden dan als in tabel 1 is aangegeven.

Bij al deze berekeningen is de gemiddelde virtuele spoed gebruikt; hierop werd ook de  $S_s$  gebaseerd (voor de bepaling van deze spoed zie VII no. 3).

De vraag kan nu gesteld worden of de afgeleide regressievergelijking zijn geldigheid behoudt indien de diepgang varieert.

Door variatie van de diepgang achter zal:

1.  $\psi$  variëren;
2. de  $K_m$ -kromme van vorm veranderen indien de indompeling van de schroef te klein wordt.

Om de gevolgen van deze variaties quantitatief te onderzoeken zijn voor een enkelschroef turbineschip normale voortstuwingsproeven en overbelastingsproeven uitgevoerd bij verschillende diepgangen.

Tabel 2 geeft een overzicht van de uitgevoerde proeven.

TABEL 2

No.	Aard van de proef	Diepgang in m	Snelheid in knopen
I	Voortstuwingsproef	9,18	9 — 12,5
	Overbelastingsproef	9,18	11,0
II	Voortstuwingsproef	7,50	9,5 — 13
	Overbelastingsproef	7,50	11,25
III	Voortstuwingsproef	6,00	10 — 13
	Overbelastingsproef	6,00	11,5

De diameter van de schroef is 5,639 m; berekend werd dat  $H_v = 6,113$  m. Hierop is, bij de berekeningen, de schijnbare slip gebaseerd.

Tabel 3 geeft de voor de verschillende toestanden geldende regressie-vergelijkingen.

TABEL 3

$\frac{APK}{(0,1N)^3} = c_1 S_s + c$						
No.	$c_1$	c	aantal gegevens	R	F %	T m
I	0,088	5,02	17	0,992	0,47	9,18
II	0,092	5,00	19	0,994	0,66	7,50
III	0,080	5,37	20	0,998	0,46	6,00
I+II+III	0,078	5,31	56	0,976	1,45	6,00—9,18

Uit deze tabel blijkt, dat verandering van de diepgang invloed heeft op de coëfficiënten van de regressievergelijking. Het verschil tussen de vergelijkingen voor de toestanden I en II is echter gering.

We zullen nu in de eerste plaats nagaan of de verandering van de coëfficiënten een belangrijke invloed heeft op de bepaling van  $\frac{APK}{(0,1N)^3}$ .

Daartoe wordt in de vier gevonden vergelijkingen van tabel 3 gesubstitueerd:  $S_s = 10\%$  en  $S_s = 20\%$ .

De met de vergelijking I + II + III gevonden waarde voor  $\frac{APK}{(0,1N)^3}$  wordt vergeleken met die volgens de vergelijkingen I, II en III. De resultaten zijn verenigd in tabel 4.

TABEL 4

Vergelijking	$S_s = 10\%$		$S_s = 20\%$	
	$\frac{APK}{(0,1N)^3}$	afwijking in %	$\frac{APK}{(0,1N)^3}$	afwijking in %
I+II+III	6,09	0,0	6,87	0,0
I	5,90	-3,1	6,78	-1,3
II	5,92	-2,8	6,84	-0,4
III	6,17	+1,3	6,97	+1,5

Bij  $S_s = 20\%$  blijken de verschillen gering te zijn; bij  $S_s = 10\%$  zijn ze iets groter.

Voor het beschouwde schip ligt de slip onder dienstomstandigheden in de buurt van 20% ( $S_s$  gebaseerd op  $H_v$ ).

Onze conclusie wordt:

Zolang de schroef voldoende ondergedompeld is, heeft variatie van de diepgang achter, betrekkelijk weinig invloed op de uitkomst van de regressievergelijking.

Ondanks deze conclusie is onderzocht of invoering van de diepgang als verklarende variabele, nog verbetering kan brengen. Het is moeilijk om de invloed van T kwalitatief vast te stellen, doch statistisch werd vastgesteld, dat in het geval van het beschouwde schip, de volgende formule een redelijke verbetering geeft:

$$\frac{APK}{(0,1N)^3} = c_1 S_s + eT^{-1} + c \dots \dots \dots (11)$$

Passen we deze formule toe op de proeven I + II + III dan geeft dit als resultaat:

$$\frac{APK}{(0,1N)^3} = 0,085 S_s + 3,74 T^{-1} + 4,66$$

$$\begin{aligned} \text{aantal gegevens} &= 56 \\ R &= 0,992 \\ F &= 0,72\% \end{aligned}$$

b. Het bepalen van de regressieformule indien alléén een voortstuwingsproef beschikbaar is

Bij een normale voortstuwingsproef varieert de schijnbare slip weinig. In dat geval is te verwachten dat de richtingscoëfficiënt  $c_1$  van de regressievergelijking niet nauwkeurig te bepalen is met de, in het voorgaande, beschreven methode.

Uit tabel 1 blijkt, dat de term  $c_1 S_s$  betrekkelijk klein is ten opzichte van  $c_1 S_s + c$ ; bijv. voor schip 1 is bij  $S_s = 15\%$ :

$$\begin{aligned} c_1 S_s &= 0,19 \times 15 = 2,85 \\ c &= 13,10 \end{aligned}$$

$$\frac{APK}{(0,1N)^3} = c_1 S_s + c = 15,95 \text{ dus } c_1 S_s = 17,9\%$$

$$\text{van } \frac{APK}{(0,1N)^3}$$

Indien we dus de coëfficiënt  $c_1$  schatten, dan zal een eventuele fout in de schatting betrekkelijk weinig invloed hebben op de te bepalen waarde van  $\frac{APK}{(0,1N)^3}$ ; bijv. een fout van 10%

in  $c_1$  geeft bij  $S_s = 15\%$  een fout van 1,8% in  $\frac{APK}{(0,1N)^3}$

Uit (9) blijkt dat:

$$c_1 = \frac{-20\pi\rho D^4 H}{60^3 \times 75} \cdot a_1 (1 - \psi)$$

Willen we dus  $c_1$  schatten dan betekent dit, bij bekende schroefafmetingen een schatting van  $a_1(1 - \psi)$ .

Het is gebleken dat toepassing van de zeer eenvoudige formules van Taylor:

$$\begin{aligned} \psi &= -0,20 + 0,55 \delta \text{ voor dubbelschroefschepen} \dots (12) \\ \psi &= -0,05 + 0,5 \delta \text{ voor enkelschroefschepen} \dots \end{aligned}$$

nauwkeurig genoeg is om  $\psi$  te schatten; dit ligt ook voor de hand daar  $\psi$  in de formule voorkomt in de vorm  $1 - \psi$ , zodat een fout in  $\psi$  een veel kleinere fout in  $1 - \psi$  tengevolge heeft.

Om een schatting van  $a_1$ , de helling van de  $K_m$ -kromme, te kunnen maken, is deze grootte bepaald voor de B3 en B4 serieschroeven van Wageningen.

Daartoe is de gemiddelde helling van de  $K_m$ -kromme bepaald voor het stuk tussen  $\Delta_{\text{optimaal}}$  en  $0,75 \Delta_{\text{optimaal}}$  (zie figuur 3).

$\Delta_{\text{optimaal}}$  kon met de  $B_p$ - $\delta$ -diagrammen bepaald worden. Het bestreken gebied is ruimschoots voldoende voor de verschillende belastingstoestanden.

De waarden van  $a_1$  zijn, afhankelijk van  $H_v/D$  en  $F_A/F$ , uitgezet in de figuren 4 en 5.

Als voorbeeld zullen we van schip 1 tabel 1, de coëfficiënt  $c_1$  schatten.

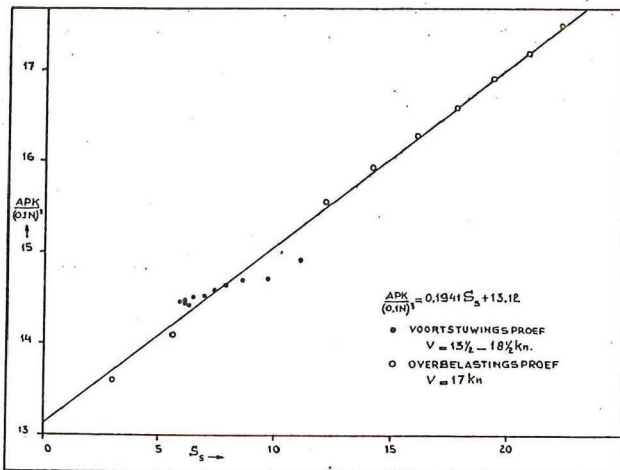


Fig. 2

Gegevens:

- D = 6,604 m
- H<sub>v</sub> = 7,304 m
- D'H<sub>v</sub> = 13883
- z = 4
- F<sub>0</sub>/F = 0,463
- H<sub>v</sub>/D = 1,106
- ψ<sub>TAYLOR</sub> = 0,278

Met fig. 5 vinden we a<sub>1</sub> = - 0,0490.  
 dus:

$$c_1 = - \frac{20 \pi \rho D^4 H_v}{60^3 \times 75} \cdot a_1 (1 - \psi) = \frac{20 \pi \times 104,5 \times 13883}{60^3 \times 75} \cdot 0,0490 (1 - 0,278) = 0,20$$

De term c volgt nu uit het gemiddelde van de waarden

$$c = \frac{APK}{(0,1N)^3} - c_1 S_s$$

We baseren ons alleen op de voortstuwingsproef, zodat we krijgen:

Berekening van c

S <sub>s</sub> %	0,20 S <sub>s</sub>	$\frac{APK}{(0,1N)^3}$	c
5,9	1,18	14,47	13,29
6,1	1,22	14,44	13,22
6,1	1,22	14,48	13,26
6,3	1,26	14,42	13,16
6,5	1,30	14,51	13,21
7,0	1,40	14,52	13,12
7,4	1,48	14,59	13,11
7,9	1,58	14,64	13,06
8,6	1,72	14,70	12,98
9,7	1,94	14,72	12,78
11,1	2,22	14,94	12,72

$$\Sigma c = 143,91$$

$$\bar{c} = 13,08 \quad \text{afgerond } \bar{c} = 13,1$$

De regressievergelijking wordt:

$$\frac{APK}{(0,1N)^3} = 0,20 S_s + 13,1$$

De gevonden vergelijking is toegepast op alle waarden van S<sub>s</sub> en (0,1N)<sup>3</sup> van de voortstuwings- en de overbelastingsproef. Het resultaat is daardoor vergelijkbaar met de in tabel 1 vermelde waarde van F.

We vinden nu F = 0,99 % van APK.  
 Tabel 1 geeft F = 0,93 % van APK. Het verschil is vrijwel nihil.

Eenzelfde berekening is gemaakt voor alle tankproeven van tabel 1.

Tabel 5 geeft de resultaten.

TABEL 5

$$\frac{APK}{(0,1N)^3} = c_1 S_s + c$$

c<sub>1</sub> is geschat, c is bepaald uit de gegevens van de voortstuwingsproef.

No.	c <sub>1</sub>	c	F %	F % tabel 1
1	0,20	13,1	0,99	0,93
2	0,00041	0,0416	0,58	0,39
3	0,0054	0,468	0,84	0,69
4	0,12	5,79	0,70	0,70
5	0,024	2,26	0,46	0,30
6	0,082	2,75	1,40	0,59
7	0,017	0,436	1,98	1,65
8	0,13	4,94	1,39	1,22
9	0,11	4,55	0,99	0,97

De geschatte regressievergelijkingen blijken over het algemeen weinig verschillen te vertonen met de regressievergelijkingen volgens de 1e methode.

Het uiteindelijke resultaat: het schatten van APK uit (0,1N)<sup>3</sup> en S<sub>s</sub> is, te oordelen naar de middelbare fout, zeer goed.

Onze conclusie kan dus zijn, dat de regressievergelijking met voldoende nauwkeurigheid uit een normale voortstuwingsproef bepaald kan worden, indien geen overbelastingsproef ter beschikking staat.

IV. Het bewerken van bedrijfsgegevens

De afgeleide formules kunnen gebruikt worden om het vermogen dat onder dienstomstandigheden ontwikkeld wordt te schatten. Daartoe dient men te beschikken over een regressievergelijking die bepaald wordt met behulp van een aantal betrouwbare metingen van het vermogen, de snelheid en het toerental.

Het vermogen kan bijv. met een torsiemeter gemeten worden. Het askoppel dat daarmee gemeten wordt bevat dan het askoppel dat nodig is om de wrijving in de asblokken e.d. te overwinnen.

Dit wrijvingskoppel kan, in het voor het bedrijf belangrijke gebied, constant aangenomen worden.

De regressieformule krijgt dan de volgende gedaante:

$$\frac{APK_m}{(0,1N)^3} = c_1 S_s + d_1 N^{-2} + c \dots \dots (13)$$

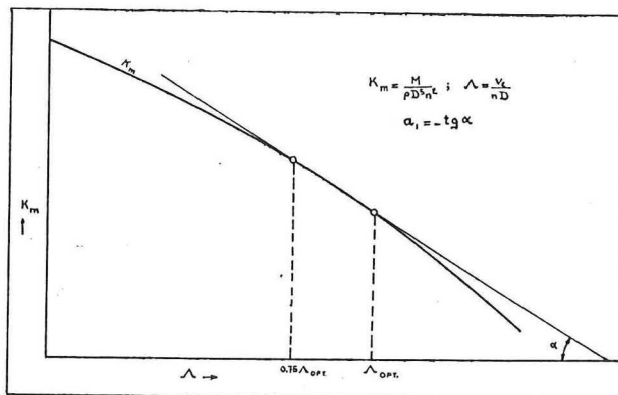


Fig. 3



zodat het vermogen dat nodig is om de wrijving te overwinnen gelijk is aan  $0,001 d_1 N$  pk.

Zoals in V behandeld zal worden, is het noodzakelijk, dat er voldoende spreiding van slip en toerental voorhanden is.

Deze spreiding is bijv. als volgt te verkrijgen:

Men voert progressieve meetvaarten uit bij een toerental dat varieert van  $N_{\text{maximum}}$  tot  $\pm 0,75 N_{\text{maximum}}$ .

Deze meetvaarten worden uitgevoerd bij verschillende uitwendige omstandigheden. Dus bijv. met wind achter en in de wind; de schijnbare slip zal dan voldoende variëren.

Bij dubbelschroefschepen kan de belasting van één der schroeven opgevoerd worden door de schroeven met verschillend toerental te laten draaien. In dat geval wordt voor elk der schroeven een regressievergelijking opgesteld.

De normale gegevens uit logboeken bezitten over het algemeen een kleine spreiding.

In dat geval kan men eventueel de coëfficiënt  $c_1$  schatten zoals reeds besproken is.

Ook het vermogen, dat nodig is om de wrijving te overwinnen, kan, zonder dat grote fouten gemaakt worden, geschat worden.

Dit vermogen wordt algemeen aangenomen op  $\pm 3\%$  van het gemiddelde bedrijfsvermogen.

Kent men ongeveer het toerental bij dit vermogen (bijv. uit de bedrijfsprognose) dan volgt de coëfficiënt  $d_1$  uit:

$$\text{wrijvingsvermogen} = 0,001 d_1 N.$$

Zoals reeds bij de behandeling van de tankregressievergelijking besproken is, kan het invoeren van de diepgang als verklarende variabele in sommige gevallen een verbetering geven.

De bedrijfsregressievergelijking zal in het algemeen verschillen vertonen met de tankregressievergelijking. Enkele van de mogelijke oorzaken zullen we de revue laten passeren.

De coëfficiënt  $c_1$  en de term  $c$  bevatten de grootheden  $a_0$ ,  $a_1$  en  $\psi$  (zie formule (9)).

$a_0$  en  $a_1$  zijn afhankelijk van de  $K_m$ -kromme; het is dus te verwachten dat indien de  $K_m$ -krommen voor de schroefschroef en de modelschroef verschillend zijn, ook  $a_0$  en  $a_1$  aan verandering onderhevig zijn.

Een verschil in de  $K_m$ -kromme kan de volgende oorzaken hebben:

1. Schaaleffect; hierdoor zal vnl.  $a_0$  beïnvloed worden, de helling van de kromme (dus  $a_1$ ) zal weinig aan schaaleffect onderhevig zijn.
2. Stampen en slingeren van het schip; door deze bewegingen ontstaan loodrecht op de translatiebeweging van het schip, snelheidscomponenten, die de gemiddelde instroomrichting in de schroef periodiek van richting doen veranderen.

Ook zal door stampen de indompeling van de schroef variëren. Het lijkt aannemelijk dat hierdoor de  $K_m$ -kromme beïnvloed zal worden.

Het resulterende effect zou men wellicht kunnen bestuderen (indien dergelijke proeven mogelijk zijn) met behulp van overbelastingsproeven in kunstmatig opgewekte golven, of met vrijvarende schroefproeven waarbij aan het schroefmodel een beweging wordt gegeven die overeenkomt met het stampen van een schip.

De invloed van de diepgang is bij het bespreken van de tankproeven reeds ter sprake gekomen.

Het is duidelijk, dat bij een kleine diepgang achter, de bewegingen van het schip relatief een grotere invloed zullen hebben.

Verskil in het volgstreamgetal (door schaaleffect, aangroeiing, verschil in diepgang, enz.) heeft eveneens invloed op  $c_1$  en  $c$ ; immers zowel in  $c_1$  als in  $c$  komt het volgstreamgetal voor in de vorm  $1 - \psi$ . Om bijv. de invloed van de aangroeiing (die een verandering van  $\psi$  tengevolge heeft) op de vergelijking te kunnen vaststellen, kan het daarom aanbevolen worden om in de tijd tussen twee dokkingen een aantal regressievergelijkingen op te stellen.

Uit de bovenstaande opmerkingen kan opgemaakt worden dat het wenselijk is om naast de genoemde gegevens van snelheid, toerental en vermogen te beschikken over gegevens die een indruk geven onder welke omstandigheden gemeten wordt, dus bijvoorbeeld:

diepgang achter  
de mate waarin het schip stampt en slingert  
het aantal dagen dat het schip uit het dok is.

De mogelijkheid bestaat nu om een redelijke schatting te maken van het onder dienstomstandigheden ontwikkelde vermogen indien de snelheid ten opzichte van het water en het toerental (en dus de schijnbare slip) bekend zijn.

Dit dienstvermogen kan men vergelijken met het vermogen volgens de voortstuwingsproef bij dezelfde snelheid en diepgang.

Uit deze beide vermogens volgt dan het toeslagpercentage op  $APK_{\text{tank}}$ .

Uit enige analyses van toeslagen bleek dat, voor een bepaald schip, het gemiddelde toeslagpercentage toeneemt bij afnemen van de snelheid. Dit zal o.a. het gevolg zijn van het feit dat een bepaalde weersgesteldheid relatief meer toeslag eist bij een kleine snelheid dan bij een grote snelheid.

Om een indruk te krijgen van de verdeling van de toeslagen kan men deze overzichtelijk rangschikken in een zg. frequentietabel (zie figuur 6).

De „meest voorkomende” toeslag voor een bepaald snelheidsinterval kan bijv. berekend worden door het rekenkundig gemiddelde van de toeslagen in de betreffende kolom te bepalen.

Het rekenkundig gemiddelde heeft echter als nadeel dat het sterk beïnvloed kan worden door enkele sterk afwijkende toeslagen (zie VII no. 2 en de discussiebijdrage van Dr Conn in 1).

Een betere grootheid is daarom de „waarschijnlijkste waarde”, welke met behulp van waarschijnlijkheidspapier bepaald kan worden.\*

Dit papier heeft een zodanige verdeling dat de integraal van de Gausskromme een rechte lijn wordt.

Het gebruik van dit hulpmiddel wordt uitvoerig besproken en toegelicht in VII no. 2.

Als voorbeeld volgt hier de bepaling van de waarschijnlijkste toeslag voor een concreet geval.

Voorbeeld 12 kn.  $< V < 12,5$  kn.

Toeslag %	Frequentie	$\Sigma$ Frequentie	Frequentie %	$\Sigma$ Frequentie %
15 < 20	1	1	0,63	0,63
20 < 25	2	3	1,27	1,90
25 < 30	11	14	6,96	8,86
30 < 35	25	39	15,82	24,68
35 < 40	47	86	29,75	54,43
40 < 45	39	125	24,68	79,11
45 < 50	17	142	10,76	89,87
50 < 55	13	155	8,23	98,10
55 < 60	3	158	1,90	100,00
	$\Sigma = 158$		$\Sigma = 100,00\%$	

De waarden van  $\Sigma$  frequentie in % zijn uitgezet op waarschijnlijkheidspapier, zie figuur 7. Door deze punten is een lijn gestrookt; het snijpunt van deze lijn en de lijn  $\Sigma$  frequentie = 50 % geeft de waarschijnlijkste toeslag (in dit geval 39,5 %).

Het berekenen van de toeslag voor elk geval is een tijdrovend werk, dat echter nuttig kan zijn indien men de invloed van weer en aangroeiing wil bestuderen. Het is ook mogelijk om per snelheidsinterval, het waarschijnlijkste toerental te bepalen (zie ook VII no. 2). Met de snelheid en het toerental is daarna het vermogen met de regressieformule te bepalen, waarna de toeslag volgt uit de vergelijking met het tankvermogen.

\* Dit papier is in de handel verkrijgbaar.

TOESLAG PERCENTAGE	SNELHEID IN KNOPEN				
	10 < 10,5	10,5 < 11	11 < 11,5	11,5 < 12	ENZ
0 < 5					
5 < 10					
10 < 15					
15 < 20					
20 < 25					
ENZ					

Fig. 6

V. Afleiding van enige formules uit de correlatierekening

Voor een uitgebreide behandeling van de correlatierekening wordt verwezen naar de in de literatuurlijst vermelde leerboeken.

Volledigheidshalve volgt hier voor enige eenvoudige gevallen de afleiding van de door ons gebruikte formules.

De meervoudige correlatie

Gegeven zijn N stellingen waarnemingen van de variabelen Y, X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, ..., X<sub>n</sub>. Hierbij is Y de te verklaren variabele en X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, ..., X<sub>n</sub> de verklarende variabelen.

Gevraagd wordt, uit de vergelijking:

$$Y^* = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + \dots + b_nX_n \dots (1)$$

de constanten b<sub>0</sub>, b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, ..., b<sub>n</sub>, zó te bepalen, dat de som van de kwadraten van de verschillen tussen de gemeten waarden Y en de door de regressievergelijking (1) gegeven waarden Y, zo klein mogelijk is.

De voorwaarde wordt dus:

$$\sum_1^N (Y - Y^*)^2 = \sum_1^N \delta^2 \text{ moet minimaal zijn} \dots (2)$$

Hierin is dus Y - Y\* = δ.

(N.B. In het vervolg wordt  $\sum_1^N$  aangeduid met Σ.)

Voorwaarde (2) wordt in verband met (1):

$$\Sigma \delta^2 = \Sigma (Y - b_0 - b_1X_1 - b_2X_2 - \dots - b_nX_n)^2 \text{ moet minimaal zijn} \dots (3)$$

In vergelijking (3) wordt gesubstitueerd:

$$\begin{cases} Y = y + \bar{Y} \\ X_1 = x_1 + \bar{X}_1 \\ X_n = x_n + \bar{X}_n \end{cases} \text{ waarin } \begin{cases} \bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{N} \\ \bar{X}_1 = \frac{\Sigma X_1}{N} \\ \bar{X}_n = \frac{\Sigma X_n}{N} \end{cases} \dots (4)$$

Dit geeft:

$$\Sigma \delta^2 = \Sigma (y - b_0' - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n)^2 \text{ moet minimaal zijn} \dots (5)$$

hierin is:

$$b_0' = b_0 + b_1\bar{X}_1 + b_2\bar{X}_2 + \dots + b_n\bar{X}_n - \bar{Y}$$

Beschouwen we b<sub>0</sub>', b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, ..., b<sub>n</sub> als lopende coördinaten dan leidt de eis:

Σδ<sup>2</sup> = minimaal, tot de volgende voorwaarden:

$$\frac{\delta(\Sigma \delta^2)}{\delta b_0'} = 0, \frac{\delta(\Sigma \delta^2)}{\delta b_1} = 0, \frac{\delta(\Sigma \delta^2)}{\delta b_2} = 0, \dots, \frac{\delta(\Sigma \delta^2)}{\delta b_n} = 0, (6)$$

In verband met (5) geeft dit:

$$\begin{aligned} \Sigma (y - b_0' - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n) &= 0 \\ \Sigma (y - b_0' - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n)x_1 &= 0 \\ \Sigma (y - b_0' - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n)x_2 &= 0 \\ \Sigma (y - b_0' - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n)x_n &= 0 \end{aligned} (7)$$

Uit (4) volgt:

$$\begin{aligned} \Sigma y &= 0, \text{ immers } y = Y - \bar{Y} \\ \text{dus } \Sigma y &= \Sigma (Y - \bar{Y}) = \Sigma Y - \Sigma \bar{Y} \\ \text{of } \Sigma y &= \Sigma Y - N\bar{Y} = \Sigma Y - \Sigma Y = 0 \end{aligned}$$

Evenzo is:

$$\begin{aligned} \Sigma x_1 &= 0 \\ \Sigma x_2 &= 0 \\ \Sigma x_n &= 0 \end{aligned}$$

De vergelijkingen (7) kunnen dus als volgt geschreven worden:

$$\Sigma b_0' = 0 \quad \text{dus } b_0' = 0$$

en

$$\begin{aligned} \Sigma yx_1 &= b_1\Sigma x_1^2 + b_2\Sigma x_1x_2 + \dots + b_n\Sigma x_1x_n \\ \Sigma yx_2 &= b_1\Sigma x_1x_2 + b_2\Sigma x_2^2 + \dots + b_n\Sigma x_2x_n \\ \Sigma yx_n &= b_1\Sigma x_1x_n + b_2\Sigma x_2x_n + \dots + b_n\Sigma x_n^2 \dots (8) \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen staan bekend onder de naam: normaalvergelijkingen. Uit de normaalvergelijkingen zijn de regressie-coëfficiënten b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, ..., b<sub>n</sub> op te lossen.

Daarna volgt:

$$b_0 = \bar{Y} - b_1\bar{X}_1 - b_2\bar{X}_2 - \dots - b_n\bar{X}_n \dots (9)$$

Om het gevonden resultaat te kunnen beoordelen wordt de correlatie-coëfficiënt R gebruikt.

Deze is als volgt gedefinieerd:

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_y^2} \dots (10)$$

Hierin is:

$$\sigma_\delta = \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{N}} \text{ de standaard deviatie van de reeks } \delta$$

$$\text{en } \sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{N}} \text{ de standaard deviatie van de reeks } y \quad (11)$$

Is Σδ<sup>2</sup> = 0, dan voldoen alle stellingen waarnemingen, Y, X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, ..., X<sub>n</sub> aan de regressievergelijking (1). Het verband tussen de grootheden Y, X<sub>1</sub>, X<sub>2</sub>, ..., X<sub>n</sub> is functioneel.

Is Σδ<sup>2</sup> = Σy<sup>2</sup> dan ontbreekt het verband tussen de variabelen volgens (1) geheel.

We zullen nu de formule voor R uitwerken.

Daartoe schrijven we:

$$\begin{aligned} \Sigma \delta^2 &= \Sigma (y - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n)^2 \\ &= \Sigma y(y - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n) \\ &\quad - b_1\Sigma x_1(y - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n) \\ &\quad - b_2\Sigma x_2(y - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n) \\ &\quad - b_n\Sigma x_n(y - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n) \dots (12) \end{aligned}$$

In verband met de normaalvergelijkingen (8) wordt dit:

$$\Sigma \delta^2 = \Sigma y(y - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n) \dots (13)$$

Formule (10):

$$R^2 = 1 - \frac{\sigma_\delta^2}{\sigma_y^2} \text{ wordt:}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma \delta^2}{\Sigma y^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\Sigma y(y - b_1x_1 - b_2x_2 - \dots - b_nx_n)}{\Sigma y^2}$$

$$R^2 = \frac{b_1\Sigma yx_1 + b_2\Sigma yx_2 + \dots + b_n\Sigma yx_n}{\Sigma y^2}$$

$$\text{of } R = \sqrt{\frac{b_1\Sigma yx_1 + b_2\Sigma yx_2 + \dots + b_n\Sigma yx_n}{\Sigma y^2}} \dots (14)$$



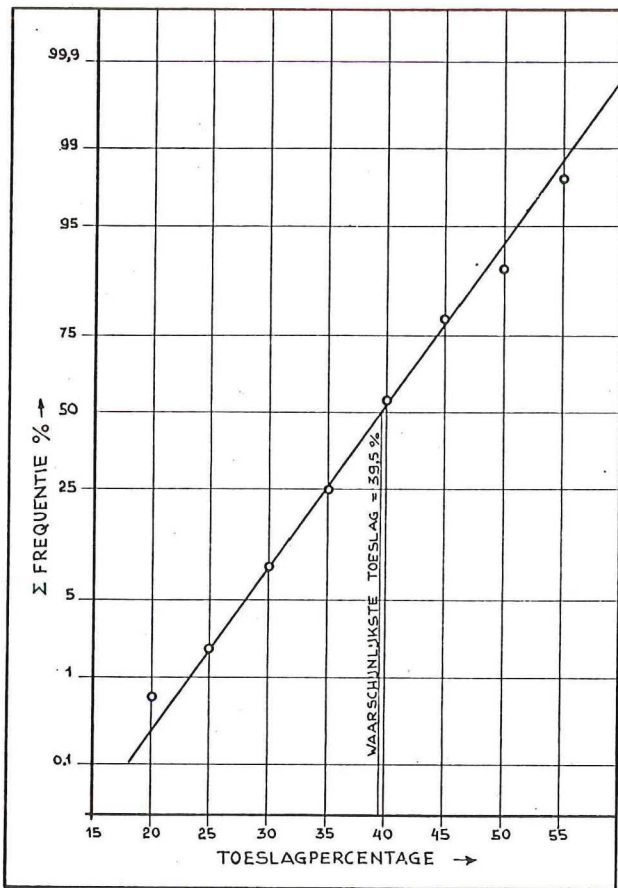


Fig. 7

Men kan bewijzen dat steeds:

$$R^2 \leq 1 \quad \text{dus} \quad -1 \leq R \leq 1$$

In het geval van de meervoudige correlatie wordt alleen betekenis toegekend aan de positieve wortel zodat

$$0 \leq R \leq 1.$$

Hoe meer de waarde  $R = 1$  benaderd wordt, hoe beter de aanpassing aan het veronderstelde verband volgens (1) is.

Is  $R$  zeer klein, dan betekent dit nog niet, dat er geen correlatie bestaat tussen de beschouwde variabelen; het is mogelijk dat een ander mathematisch model (bijv. een logaritmisch verband) een betere beschrijving geeft.

Voor het veel voorkomende geval van de enkelvoudige lineaire regressie worden de volgende formules uit het  $n$  dimensionale geval afgeleid.

De regressievergelijking is dan  $Y^* = b_0 + b_1 X_1$  en de normaalvergelijking  $\Sigma y_{x_1} = b_1 \Sigma x_1^2$

$$\text{of } b_1 = \frac{\Sigma y_{x_1}}{\Sigma x_1^2}$$

verder is  $b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1$

$$\text{en } R = \sqrt{\frac{b_1 \Sigma y_{x_1}}{\Sigma y^2}} = \sqrt{\frac{(\Sigma y_{x_1})^2}{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma y^2}} = \frac{\Sigma y_{x_1}}{\sqrt{\Sigma x_1^2 \cdot \Sigma y^2}}$$

**Kromlijngige regressie (enkelvoudig)**

Als regressievergelijking kiezen we nu een parabool van de  $n^e$  graad:

$$Y^* = b_0 + b_1 X + b_2 X^2 + \dots + b_n X^n$$

Analoog aan de vorige afleiding krijgen we als voorwaarde:  $\Sigma \delta^2 = \Sigma (y - b_1 x - b_2 x^2 - \dots - b_n x^n)^2$  moet minimaal zijn.

Dit leidt tot de volgende vergelijkingen.

$$\Sigma yx = b_1 \Sigma x^2 + b_2 \Sigma x^3 + \dots + b_n \Sigma x^{n+1}$$

$$\Sigma yx^2 = b_1 \Sigma x^3 + b_2 \Sigma x^4 + \dots + b_n \Sigma x^{n+2}$$

⋮

$$\Sigma yx^n = b_1 \Sigma x^{n+1} + b_2 \Sigma x^{n+2} + \dots + b_n \Sigma x^{2n}$$

waaruit  $b_1, b_2, \dots, b_n$  op te lossen zijn.

Verder volgt  $b_0$  uit:

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X} - b_2 \bar{X}^2 - \dots - b_n \bar{X}^n$$

Een maat voor de strooiingen om de regressielijn is de correlatie-index welke op dezelfde wijze als  $R$  gedefinieerd wordt namelijk:

$$\rho = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{\delta}^2}{\sigma_y^2}}$$

Analoog aan het reeds afgeleide geval krijgen we

$$\rho = \sqrt{\frac{b_1 \Sigma yx + b_2 \Sigma yx^2 + \dots + b_n \Sigma yx^n}{\Sigma y^2}}$$

Ook hier is  $\rho$  maximaal gelijk aan 1. Hoe dichter  $\rho$  bij deze waarde ligt, hoe beter de aangenomen regressievergelijking voldoet.

Geeft bijv. een 2e graads parabool geen voldoende aanpassing dan kan een 3e graads parabool gebruikt worden. Een bezwaar van de methode is, dat men nu alle coëfficiënten  $b_i$  opnieuw berekenen moet. Dit bezwaar kan ondervangen worden indien men gebruik maakt van orthogonale polynomia. Hiervoor wordt verwezen naar VII no. 6.

**Opmerkingen**

1. Uit de afleidingen blijkt, dat men in vele gevallen van een reeks getallen  $\bar{X}$  moet bepalen:

$$\Sigma x^2 \text{ waarin } x = X - \bar{X}$$

Men kan dus eerst  $\bar{X}$  bepalen:  $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$

en daarna  $x = X - \bar{X}$

en hieruit  $x^2$  en  $\Sigma x^2$ .

Deze methode is omslachtig en soms onnauwkeurig, daar  $\bar{X}$  niet in een ongelimiteerd aantal decimalen uitgedrukt kan worden.

Met de meeste rekenmachines die tegenwoordig in gebruik zijn kan men van een reeks getallen tegelijk de som van de kwadraten en de som in één bewerking berekenen.

Men kan dan o.a. van de volgende rekenschema's gebruik maken, die een grote besparing aan rekenwerk geven, nl.:

$$\Sigma x^2 = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{N}$$

Evenzo voor twee reeksen  $X$  en  $Y$ :

$$\Sigma xy = \Sigma XY - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{N}$$

Het bewijs van deze formules is eenvoudig en blijft hier achterwege.

Verskillende methoden die aan de voorgaande verwant zijn, worden toegepast indien men niet over een rekenmachine beschikt die tegelijkertijd  $\Sigma X$  en  $\Sigma X^2$  berekent. Hiervoor wordt verwezen naar VII no. 5.

2. De correlatiecoëfficiënt is een maat voor de aanpassing aan de regressievergelijking.

Dit wordt aan de hand van enige figuren voor het geval van 1 of van 2 verklarende variabelen nader toegelicht.

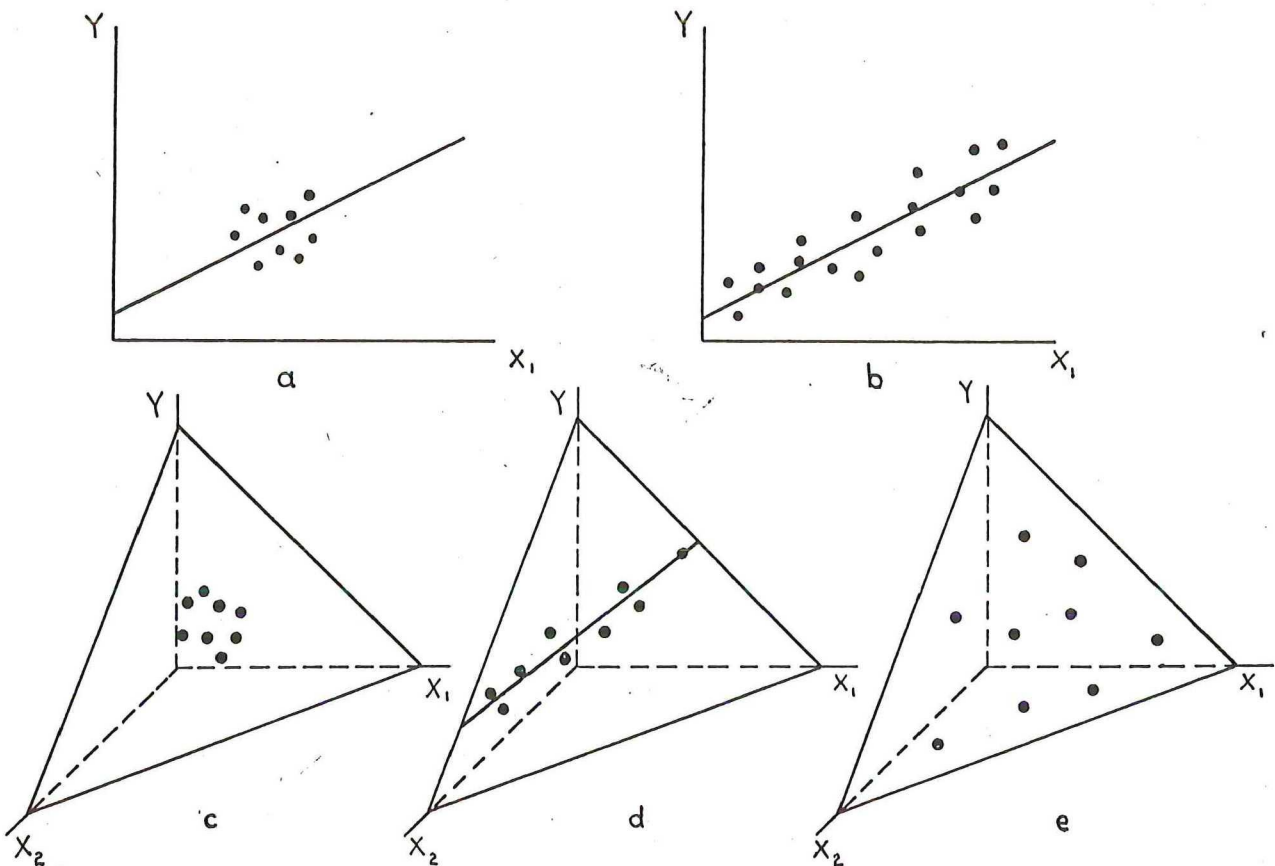


Fig. 8

a. Eén verklarende variabele:  $Y^* = b_0 + b_1 X_1$ .

In fig. 8a is een puntenverzameling getekend, waarvan  $\Sigma \delta^2$  weinig verschilt van  $\Sigma y^2$  (zie de definitie van R.), wat zich uit in een lage correlatiecoëfficiënt.

Het is duidelijk dat men in dat geval weinig of geen waarde aan de richtingscoëfficiënt  $b_1$  kan hechten.

Dit geval doet zich voor bij het bepalen van de regressievergelijking uit de gegevens van een voortstuwingsproef. De schijnbare slip varieert daar zeer weinig. Daarom is voor dat geval de methode ontwikkeld waarbij  $c_1$  uit de formule

$$\frac{APK}{(0,1N)^3} = c_1 S_s + c \text{ geschat wordt.}$$

Om dus een betrouwbare schatting van  $b_1$  en  $b_0$  te kunnen maken, is het nodig dat  $\Sigma y^2$  voldoende groot is ten opzichte van  $\Sigma \delta^2$  (zie fig. 8b).

b. Twee verklarende variabelen:  $Y^* = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2$

Een analoog geval kan zich voordoen bij twee verklarende variabelen. Vertonen de gemeten waarden een te kleine spreiding ten opzichte van de afwijkingen van de regressievergelijkingen (fig. 8c) dan kan weinig of geen waarde gehecht worden aan de bepaalde  $b_0$ ,  $b_1$  en  $b_2$ .

Er doet zich hier nog een moeilijkheid voor:

Bestaat tussen de verklarende variabelen  $X_1$  en  $X_2$  een hoge correlatie (z.g. intercorrelatie) dan moet het resultaat evenzeer gewantwoord worden. (Onder hoge correlatie tussen  $X_1$  en  $X_2$  wordt verstaan: hoog ten opzichte van de totale correlatiecoëfficiënt, zie ook VII no. 4).

Immers dan liggen de meetpunten gegroepeerd om een lijn

die in het te bepalen vlak ligt, zie fig. 8d. Ook dan zijn  $b_0$ ,  $b_1$  en  $b_2$  niet juist te bepalen.

Om in het geval van twee verklarende variabelen een schatting van  $b_0$ ,  $b_1$  en  $b_2$  te kunnen maken moet dus aan de volgende voorwaarden voldaan zijn.

1.  $X_1$  en  $X_2$  moeten voldoende spreiding bezitten.
2. De correlatie tussen  $X_1$  en  $X_2$  mag in het algemeen niet hoger zijn dan de correlatie tussen  $Y$  en  $X_1$ ,  $X_2$ .
3. Een andere wijze om het gevonden resultaat te beoordelen is de „middellbare fout”.

Deze wordt als volgt berekend:

$$\text{middellbare fout} = \sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{N - p}}$$

waarin  $N$  = het aantal waarnemingen  
 $p$  = het aantal vrijheidsgraden.

Voor het enkelvoudige geval is  $p = 2$ ; voor twee verklarende variabelen is  $p = 3$  enz.

De middellbare fout kan uitgedrukt worden in % van de gemiddelde  $Y$ , dus:

$$F = \frac{\sqrt{\frac{\Sigma \delta^2}{N - p}}}{\bar{Y}} \times 100 \%$$

Voor een uitvoerige behandeling van de afleidingen wordt verwezen naar de diverse handboeken op dit gebied. De hier gegeven afleidingen moeten beschouwd worden als een eerste inleiding op het gebied van de correlatierekening.

## Voorbeelden

## 1. Enkelvoudige correlatie

Afleiding van de regressieformule uit de gegevens van een normale voortstuwingsproef + een overbelastingsproef.

Het gezochte verband is  $\frac{APK}{(0,1N)^3} = c_1 S_s + c$ .

Stel  $\frac{APK}{(0,1N)^3} = Y$  en  $S_s = X_1$ .

APK	$(0,1N)^3$	Y	$X_1$	$\frac{APK^*}{(0,1N)^3}$	$\delta$
3236	224	14,47	5,9	14,25	- 44
3626	251	14,44	6,1	14,30	- 37
4032	278	14,48	6,1	14,30	- 57
4474	310	14,42	6,3	14,34	- 29
4999	345	14,51	6,5	14,38	- 38
5602	386	14,52	7,0	14,48	- 13
6255	429	14,59	7,4	14,56	- 9
6975	476	14,64	7,9	14,65	- 2
7810	531	14,70	8,6	14,79	+ 43
8816	599	14,72	9,7	15,00	+ 169
10183	682	14,94	11,1	15,27	+ 231
5535	407	13,60	3,0	13,70	+ 41
6237	443	14,10	5,6	14,21	+ 58
6975	476	14,64	7,9	14,65	- 2
7745	512	15,13	10,1	15,08	- 24
8549	549	15,56	12,2	15,49	- 45
9385	589	15,95	14,2	15,88	- 32
10244	629	16,28	16,1	16,25	- 23
11115	670	16,59	17,8	16,57	- 13
12008	710	16,92	19,4	16,89	- 16
12912	751	17,19	20,9	17,18	- 10
13859	792	17,51	22,3	17,45	- 39

aantal gegevens 22.

De bewerkingen zijn uitgevoerd met een rekenmachine die de som van de kwadraten en de som van een reeks getallen in één bewerking uitvoert.

$$\Sigma Y^2 = 5092,2232 \quad \Sigma Y = 333,90 \quad \Sigma y^2 = \Sigma Y^2 - \frac{(\Sigma Y)^2}{22} = 24,5312$$

$$\Sigma X^2 = 3090,37 \quad \Sigma X = 232,1 \quad \Sigma x^2 = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{22} = 641,71$$

$$\Sigma YX = 3647,199 \quad \Sigma_{xy} = \Sigma XY - \frac{\Sigma X \Sigma Y}{22} = 124,554$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y}{22} = 15,18 \quad a = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2} = 0,1941$$

$$\bar{X} = \frac{\Sigma X}{22} = 10,6 \quad b = \bar{Y} - a\bar{X} = 13,12$$

$$R = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \cdot \Sigma y^2}} = 0,993 \quad \Sigma \delta^2 = 104113$$

$$\overline{APK} = 7753$$

$$F = \frac{\sqrt{\frac{104113}{22 - 2}}}{7753} \times 100 = 0,93 \%$$

De formule wordt:

$$\frac{APK}{(0,1N)^3} = 0,19 S_s + 13,1$$

N.B. In dit geval is  $\delta$  berekend uit het verschil tussen APK en  $APK^*$ .

## 2. Kromlijngige regressie

Benadering van een  $K_m$ -kromme door een 3e graads parabool.

$$\text{Stel } 10^4 K_m = Y \\ 10 \Lambda = X$$

Het gezochte verband is

$$Y^* = b_0 + b_1 X^1 + b_2 X^2 + b_3 X^3$$

De bewerkingen zijn uitgevoerd met een rekenmachine die van een reeks getallen de som van de kwadraten en de som in één bewerking uitvoert.

Aantal gegevens = 12.

Y	X	$X^2$	$X^3$	$Y^*$
588	0	0	0	588
561	1	1	1	561
532	2	4	8	532
500	3	9	27	500
463	4	16	64	463
422	5	25	125	422
377	6	36	216	377
326	7	49	343	326
270	8	64	512	269
206	9	81	729	207
136	10	100	1000	137
61	11	121	1331	60

$$\begin{aligned} \Sigma Y &= 4442 & \bar{Y} &= 370,2 \\ \Sigma X &= 66 & \bar{X} &= 5,5 \\ \Sigma X^2 &= 506 & \bar{X}^2 &= 42,2 \\ \Sigma X^3 &= 4356 & \bar{X}^3 &= 363,0 \\ \Sigma X^4 &= 39974 & \Sigma YX &= 17676 \\ \Sigma X^5 &= 381876 & \Sigma YX^2 &= 109640 \\ \Sigma X^6 &= 3749966 & \Sigma YX^3 &= 799554 \end{aligned}$$

$$\Sigma x^2 = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{12} = 143$$

$$\Sigma x^3 = \Sigma X^3 - \frac{\Sigma X \Sigma X^2}{12} = 1573$$

$$\Sigma x^4 = \Sigma X^4 - \frac{(\Sigma X^2)^2}{12} = 16016$$

$$\Sigma x^5 = \Sigma X^5 - \frac{\Sigma X^2 \Sigma X^3}{12} = 198198$$

$$\Sigma x^6 = \Sigma X^6 - \frac{(\Sigma X^3)^2}{12} = 2168738$$

$$\Sigma yx = \Sigma YX - \frac{\Sigma Y \Sigma X}{12} = 6755$$

$$\Sigma yx^2 = \Sigma YX^2 - \frac{\Sigma Y \Sigma X^2}{12} = 77664,3$$

$$\Sigma yx^3 = \Sigma YX^3 - \frac{\Sigma Y \Sigma X^3}{12} = 812892$$

De regressievergelijkingen luiden:

$$\begin{aligned} \Sigma yx &= b_1 \Sigma x^2 + b_2 \Sigma x^3 + b_3 \Sigma x^4 \\ \Sigma yx^2 &= b_1 \Sigma x^3 + b_2 \Sigma x^4 + b_3 \Sigma x^5 \\ \Sigma yx^3 &= b_1 \Sigma x^4 + b_2 \Sigma x^5 + b_3 \Sigma x^6 \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} b_1 &= - 24,98 \\ b_2 &= - 1,23 \\ b_3 &= - 0,078 \end{aligned}$$

$$b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{X}_1 - b_2 \bar{X}^2 - b_3 \bar{X}^3 = 587,7$$

