

GETIJBEREKENING DOOR INTEGRATIE LANGS KARAKTERISTIEKEN

door

Dr ir J.C.Schönfeld.

I N H O U D

1.	Inleiding.	p.	1
2.	Wiskundige voorbereiding.	"	9
3.	Wiskundige bepaling van de voortplanting.	"	15
4.	De karakteristieke golfcomponenten.	"	20
5.	Constructie van een karakteristiek.	"	27
6.	Elementaire constructies met karakteristieken.	"	39
7.	Enkelvoudige geulen.	"	50
8.	Samengestelde systemen.	"	62
9.	Complicaties bij de vakindeling van een samengesteld systeem.	"	72
	Aanhangsels (inhoudsopgave).	"	83
	Literatuuropgave.	"	201
	Lijst van bijlagen.	"	203



1. Inleiding.

In ons proefschrift, tevens rapport van de Rijkswaterstaat, getiteld "Propagation of Tides and similar waves", hebben we de getijden en andere lange golven in zeearmen, rivieren en kanalen behandeld door een wiskundige analyse der z.g. "karakteristieken". Op grond van die analyse zijn we gekomen tot een bepaalde fysische voorstelling van de voortplanting van de lange golven, waarbij we het begrip "karakteristieke golfcomponent" hebben ingevoerd.

In hoofdstuk 12 van de genoemde publicatie hebben wij verder een methode aangegeven voor de praktische toepassing van de theorie op onregelmatig gevormde geulen en netwerken van geulen.

Hier zullen wij een nadere uitwerking van die praktische methode geven. Daarbij zullen we uitgaan van de hierboven aangeduide fysische voorstelling van de voortplanting. We geven daar nu eerst een beschrijving van.

Volgens de elementaire theorie van de golfbewegingen (zie b.v. ons proefschrift, par. 1.2, alsmede de nota C.S.D. 53-2) is elke golfbeweging die zich in één dimensie kan uitbreiden, in het algemeen het resultaat van de interferentie van twee, in tegengestelde richtingen lopende golven.

Bij de meer verfijnde beschouwingswijze die wij hierna zullen bespreken, wordt de getij- of andere golfbeweging in een rivier, zeearm of kanaal opgevat als samengesteld uit twee z.g. karakteristische golfcomponenten. De ene, de oplopende golfcomponent, plant zich voort in de richting van de zee naar binnen (naar boven) toe; de andere, de aflopende golfcomponent, plant zich voort in de richting naar de zee toe.

De golfcomponenten zijn, onder andere als gevolg van de wrijving, bij hun voortplanting onderhevig aan verzwakking, en ook

wel aan versterking. In het algemeen oefenen zij invloed uit op elkan-
ders voortplanting en verzwakking of versterking.

We zullen van een plaats spreken, wanneer we een bepaald dwars-
profiel van de rivier op het oog hebben. Verder zullen we spreken over
de plaatselijke bewegingstoestand op een bepaald tijdstip, en deze den-
ken we dan gekenmerkt door de gemiddelde stroomsnelheid en waterstand
in het dwarsprofiel van die bepaalde plaats, op het beschouwde tijdstip.
De bewegingstoestand kan even goed ook gekenmerkt worden door de ener-
giehoogte en de afvoer, omdat deze twee grootheden geheel bepaald zijn
wanneer we op de beschouwde plaats stroomsnelheid en waterstand kennen;
ook het omgekeerde is waar: stroomsnelheid en waterstand zijn bepaald
wanneer energiehoogte en afvoer gegeven zijn.

De bewegingstoestand op zekere plaats en op zeker tijdstip,
is steeds het resultaat van de samenwerking van de twee golfcomponen-
ten op die plaats en op dat tijdstip.

Wij beschouwen nu eerst een stationnaire stromingstoestand
(permanentie) in de gehele rivier. De samen- werking van de golfcompo-
nenten is dan zodanig, dat de stromingstoestand op elke willekeurige
plaats constant blijft; we kunnen dan eigenlijk niet van golfbeweging
spreken. We zullen de golfcomponenten in zo'n geval werkeloos noemen.

Veronderstel nu dat ergens, b.v. aan het benedeneinde van
de rivier, wordt opgestuwd, of op een andere soortgelijke wijze inge-
grepen. Er zal dan in verloop van tijd in de gehele rivier verande-
ring in de stromingstoestand moeten komen. Deze verandering wordt
overgebracht door de oplopende golfcomponent. Er ontstaat zodoende een
golfbeweging. De oplopende golfcomponent is nu niet langer werkeloos,
doch wordt werkzaam.

De werkzame oplopende golfcomponent veroorzaakt overal be-

paalde veranderingen in de waterstand en in de stroomsnelheid. Veronderstel nu evenwel dat de werkzame oplopende golfcomponent ergens op een afsluiting of een stuw met een overstort stuit, zodat daar geen verandering in de afvoer mogelijk is. Er zal dan op die plaats ook op de aflopende golfcomponent worden ingegrepen, zodat deze werkzaam wordt en wel zodanig dat de daardoor veroorzaakte verandering in de afvoer juist de verandering compenseert die door de oplopende component veroorzaakt wordt. Door het werkzaam worden van de aflopende component, zal de invloed van de afsluiting of van de stuw in verloop van tijd steeds verder naar zee toe merkbaar worden. Dit is het verschijnsel van de terugkaatsing. In het beschouwde geval is er sprake van volledige, positieve terugkaatsing.

Evenzo zal er terugkaatsing ontstaan wanneer de oplopende golfcomponent een minder volledig obstakel ontmoet, b.v. een stuw met een doorlaatopening onder water. Door de weerstand die zulk een obstakel de stroom biedt, bestaat er in het algemeen een verval tussen de bovenstroomse en de benedenstroomse zijde, afhankelijk van de doorgelaten stroom. De oplopende component zal nu weliswaar naar het bovenstroomse pand worden doorgelaten, doch slechts in verzwakte mate als gevolg van de weerstand van het obstakel. Daardoor kan de verandering in de afvoer die de oplopende component in het benedenstroomse pand veroorzaakt, slechts voor een deel door het bovenstroomse pand worden opgenomen, zodat aan de benedenzijde de aflopende golfcomponent werkzaam wordt en daardoor het overige deel van de verandering van de afvoer compenseert. In dit geval is er dus sprake van gedeeltelijke terugkaatsing ter plaatse van het obstakel.

Wanneer een rivier zich plotseling vernauwt of verwijdt, zal er ook weer gedeeltelijke terugkaatsing plaats vinden bij de vernauwing of verwijding, en dan zal de aflopende golfcomponent

werkzaam worden.

De aflopende golfcomponent wordt evenwel ook reeds werkzaam bij afwezigheid van plaatselijke terugkaatsingen, als gevolg van een gewijzigde ontwikkeling van de oplopende golfcomponent, wegens de weerstand van het bed van de rivier of geleidelijke veranderingen in het dwarsprofiel. De weerstand van het bed veroorzaakt immers evengoed dissipatie (vernietiging) van energie als een plaatselijk obstakel. Het verschil is alleen daarin gelegen, dat het obstakel een dissipatie veroorzaakt die nagenoeg op één plaats geconcentreerd is, terwijl de weerstand van het bed een dissipatie veroorzaakt die continu langs de rivier verdeeld is. Als gevolg hiervan zal overal waar de oplopende golfcomponent werkzaam is, ook de aflopende golfcomponent werkzaam worden als gevolg van wat we verdeelde terugkaatsing kunnen noemen. Voor geleidelijke profielveranderingen geldt een soortgelijke beschouwing.

We kunnen dit verschijnsel ook aldus beschrijven: De golfcomponenten beïnvloeden elkanders gedrag. Zodra nu één der golfcomponenten werkzaam wordt en zich dus anders gaat gedragen dan voorheen, zal ook de andere golfcomponent niet langer werkeloos kunnen blijven en ook werkzaam worden.

In het algemeen zullen in elke golfbeweging beide golfcomponenten werkzaam zijn.

Van de getijbeweging op een enkele, onvertakte rivier kunnen we ons nu het volgende beeld vormen:

Van zee uit dringt de getijbeweging de mond van de rivier binnen. Als gevolg hiervan fluctueert de oplopende golfcomponent aan de mond, en deze fluctuaties worden naar boven toe voortgeplant. Zij worden ten gevolge van de wrijving op hun weg verzwakt en sterven tenslotte uit; het deel van de rivier waar dit laatste geschiedt, beschouwt

men als het grensvak van het getijgebied. Overal waar de fluctuaties van de oplopende golfcomponent doordringen, verwekken of versterken zij fluctuaties van de aflopende componenten. De aflopende golfcomponent begint daardoor na het betreden van het getijgebied geleidelijk te fluctueren, en deze fluctuaties nemen toe bij het verder naar beneden lopen. Tenslotte bereikt de aflopende golfcomponent de mond, en fluctueert daar veelal vrijwel even krachtig als de oplopende golfcomponent. De fluctuaties van de oplopende golfcomponent bij de mond zijn doorlopend zó aangepast aan de niveauveranderingen in zee, dat de beide golfcomponenten in de mond een verticaal getij veroorzaken dat gelijk is aan dat in zee.

Het beeld dat wij ons hierboven vormden van de gedeeltelijke terugkaatsing, vereist nog enige aanvulling, daar in het algemeen de aflopende golfcomponent ook boven de plaats van terugkaatsing werkzaam zal zijn. We hebben dus bij de plaats van de gedeeltelijke terugkaatsing te maken met twee toelopende golfcomponenten, n.l. de oplopende golfcomponent beneden de plaats van terugkaatsing en de aflopende golfcomponent boven die plaats, en met twee weglopende golfcomponenten, n.l. de oplopende golfcomponent boven en de aflopende golfcomponent beneden de plaats van terugkaatsing. De aflopende golfcomponent aan de benedenzijde is gedeeltelijk het gevolg van overdracht van de aflopende golfcomponent van de bovenzijde, en gedeeltelijk van terugkaatsing van de oplopende golfcomponent aan de benedenzijde. Zo is elk van beide weglopende golfcomponenten het resultaat van overdracht en terugkaatsing van de toelopende componenten.

Laten we een en ander nog iets nader beschouwen voor de gedeeltelijke terugkaatsing op een plaats waar het profiel van de rivier verandert, dus een overgang tussen twee vakken van de rivier. De bewe-

ging aan weerszijden van de overgang zal zodanig zijn dat de afvoer, en ook evenzo de energie- hoogte, boven en beneden gelijk is. De weglopende golfcomponenten zijn nu hierdoor bepaald, dat de naar beneden weglopende golfcomponent tesamen met de van beneden toelopende golfcomponent eenzelfde energie- hoogte en een zelfde afvoer geeft, als de naar boven weglopende golfcomponent met de van boven toelopende golfcomponent.

Een overeenkomstig beeld kan men zich vormen van wat er bij een knooppunt van drie of meer geulen geschiedt. In elk der geulen is een op het knooppunt toelopende golfcomponent en een van het knooppunt weglopende golfcomponent. Elk der toelopende golfcomponenten wordt gedeeltelijk teruggekaatsd en gedeeltelijk overgedragen naar de andere geulen. De weglopende golfcomponent in ieder der geulen is het resultaat van de gedeeltelijke terugkaatsing van de in die geul toelopende golfcomponent en van gedeeltelijke overdracht van de in de andere geulen toelopende golfcomponenten. De weglopende golfcomponenten zijn op ieder oogenblik juist zo sterk, dat voldaan wordt aan de voorwaarden dat de energiehoogte in alle geulen dezelfde waarde heeft en dat de som van de afvoeren van de geulen naar het knooppunt nul is.

Bij een getijbeweging of een translatiegolf in een kanaal kunnen wij in principe dezelfde voorstelling gebruiken. We kunnen daarbij dan ofwel per definitie de ene golfcomponent als oplopende en de andere als aflopende aanduiden, ofwel de twee golfcomponenten door in dat geval meer zinnvolle namen aanduiden, b.v. zoiets als heenlopend en teruglopend of N- waarts lopend en Z- waarts lopend, enz.

2. Wiskundige voorbereiding.

De x- as wordt gelegd in de as van de rivier en wel met de positieve richting naar zee toe.

De rivier wordt schematisch verdeeld gedacht in een stroomvoerend bed, en nevenliggende kommen zoals platen, uiterwaarden en kribvelden die verondersteld worden wel deel te nemen aan het rijzen en dalen van de waterspiegel doch niet aan het afvoeren van water in de lengterichting van de rivier. Schematisch kan het dwarsprofiel dus worden voorgesteld als aangegeven in fig. 1.

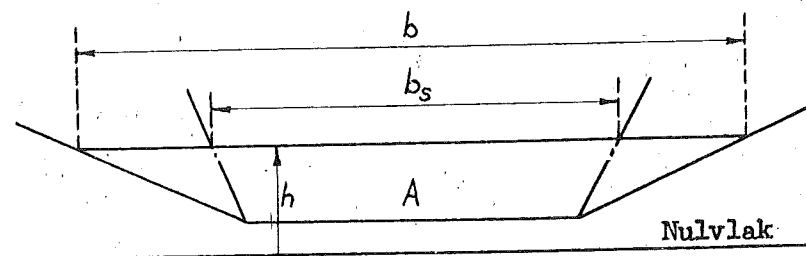


Fig. 1. Schematische voorstelling van een dwarsprofiel.

Het oppervlak van het dwarsprofiel van het stroomvoerende bed zal door A worden voorgesteld. Dit oppervlak neemt toe en af met het rijzen en dalen van de waterspiegel, en is dus een functie van de hoogte h van de waterspiegel boven het nulvlak (b.v. N.A.P.). In het algemeen zullen vorm en afmetingen van het dwarsprofiel ook nog van plaats tot plaats verschillen, en zo is A dus ook een functie van x . Onder de stroomvoerende breedte b_s verstaan we de breedte van het stroomvoerende profiel op de waterspiegel. We kunnen daarom stellen:

$$b_s = \frac{\partial A}{\partial h}$$

Onder de bergende breedte b verstaan we de breedte van de waterspiegel van het gehele profiel, dus de nevenliggende kommen inbegrepen. Ook b_s en b zijn in het algemeen functies van h en x .

Aangezien de waterstand h door de getijbeweging nog varieert met de tijd en van plaats tot plaats, dus een functie van t en x is, kunnen A , b_s en b tenslotte ook als functies van t en x worden opgevat. Ons uitgangspunt is echter dat A , b_s en b gegeven functies van h en x zijn.

Laat Q de afvoer zijn; deze is positief in geval van eb en negatief in geval van vloed. Laat verder v de gemiddelde stroomsnelheid in het bed van de rivier zijn, dan is dus

$$v = Q:A.$$

Verder voeren we nog de energiehoogte H in, die bepaald wordt door

$$H = h + \frac{v^2}{2g};$$

hierin is $v^2/2g$ de z.g. snelheidshoogte.

De getijbeweging wordt beheerst door twee differentiaalvergelijkingen, de bewegingsvergelijking en de continuïteitsvergelijking. Deze zullen in het kort worden afgeleid.

De twee vergelijkingen kunnen worden afgeleid door toepassing van de wet van behoud van massa, en de wet van behoud en verandering van stootvermogen (impulsie, hoeveelheid van beweging). We passen deze wetten echter niet toe op een afgesloten hoeveelheid water, maar op het water dat zich bevindt in het vak van de waterloop tussen het dwarsprofiel bij x en het dwarsprofiel bij $x+dx$. Dan zullen we echter rekening moeten houden met het transport van water naar en van het vak, en met de massa en het stootvermogen van dit getransporteerde water.

Eerst stellen we een balans op voor de massa in het beschouwde vak. Door variatie van de waterspiegel, verandert ook het totale volumen van het in het vak geborgen water. Zien we af van verschillen in waterstand tussen het stroomvoerende bed en de nevenliggende kommen, dan is de variatie van de waterstand in het gehele vak in een tijd dt te stellen op $(\partial h / \partial t) dt$. Het

bergend oppervlak is $b dx$, en de toename van het geborgen volumen is dus $b dx (\partial h / \partial t) dt$. De dichtheid ρ stellen we constant, en dus stelt

$$\rho b dx \frac{\partial h}{\partial t} dt$$

de toename van de massa in het vak voor. Deze is een gevolg van het transport van water, en dus van massa, door het stroomvoerende bed.

Door het dwarsprofiel bij x stroomt in een tijd dt een volumen $Q dt$, en dus een massa $\rho Q dt$ in het vak naar binnen. Door het dwarsprofiel bij $x+dx$ stroomt een massa $[\rho Q + \rho (\partial Q / \partial x) dx] dt$ naar buiten. Het verschil tussen de twee transporten is ^{een} resulterend transport ter grootte $-\rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx dt$ naar binnen.

De wet van behoud van massa vereist dat het resulterende transport van massa naar het vak, gelijk is aan de toename van massa in het vak:

$$\rho b dx \frac{\partial h}{\partial t} dt = -\rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx dt.$$

Na delen door $\rho dx dt$ volgt met een kleine omwerking

$$(1) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} = 0.$$

Deze vergelijking, die gewoonlijk de oortinuiteitsvergelijking genoemd wordt, drukt eigenlijk de wet van behoud van massa uit.

Vervolgens stellen we een balans op van het stootvermogen in de x -richting, van het water in het vak van het stroomvoerende bed tussen de twee dwarsprofielen bij x en $x+dx$.

De massa van het beschouwde water is $\rho A dx$, en de gemiddelde snelheid v , dus $\rho A v dx$ is het stootvermogen van dat water. De toename van dit stootvermogen in een tijd dt is

$$\frac{\partial (\rho A v dx)}{\partial t} dt = \rho \left(A \frac{\partial v}{\partial t} + v b_s \frac{\partial h}{\partial t} \right) dx dt,$$

waarin $b_s \partial h / \partial t$ voor $\partial A / \partial t$ gezet is. Deze toename wordt veroorzaakt, ten eerste doordat er in het vak water bijkomt of doordat er water uit weg gaat, welk water stootvermogen heeft en dus meevoert naar of van het vak. Ten tweede door de impuls van de krachten die op het water werken.

Door het dwarsprofiel bij x wordt in een tijd dt een volumen $Q dt$

aan water getransporteerd. Het stootvermogen per eenheid van volumen van dit water is ρv . Het transport van stootvermogen naar het vak, door het profiel bij x , is dus $\rho Qv dt$; bij $x+dx$ is er een transport $[\rho Qv + \rho \{ \partial(Qv) / \partial x \} dx] dt$ uit het vak naar buiten. Het resulterende transport van stootvermogen naar het vak toe is dus

$$-\rho \frac{\partial(Qv)}{\partial x} dx dt = -\rho \left(Q \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dt.$$

Op de watermassa in het beschouwde vak werkt de zwaartekracht;

wanneer er een verhang in de waterspiegel is, werkt er dientengevolge een horizontale verhangkracht $-\rho g (\partial h / \partial x) A dx$ in de positieve x -richting.

De impuls van deze kracht in de tijd dt is

$$-\rho g \frac{\partial h}{\partial x} A dx dt.$$

Verder werkt er langs de bodem een wrijvingskracht. Bovendien is er een transport van stootvermogen in de x -richting, van of naar de kribvelden of andere nevenliggende kommen, ten eerste doordat het water dat van of naar die kommen stroomt voor lediging of vulling, een snelheidscomponent in de x -richting heeft en dus stootvermogen transporteert, en ten tweede doordat door de turbulentie water tussen het stroomvoerende bed en de kommen wordt uitgewisseld, welk water in het algemeen meer positief of negatief stootvermogen uit het stroomvoerende bed naar de kommen, dan in omgekeerde richting transporteert. Dit totale transport van stootvermogen van of naar de kommen dient ter compensatie van wrijving en opstuwingen in de kommen, en is dus gelijkwaardig met een wrijvingskracht die zou werken in het grensvlak tussen het stroomvoerende bed en de nevenliggende kommen. Ten slotte zijn er ook nog plaatselijke weerstanden, b.v. in bochten of in vernauwingen en verwijdingen, die evenwel moeilijk van de andere weerstanden te scheiden zijn. We zullen daarom alle weerstanden samenvatten door een z.g.n. weerstandsverhang i_r , in te voeren, dat gedefinieerd ^{wordt} als het verhang dat juist evenwicht zou maken met de gezamenlijke weerstandskrachten. Voor de resultante van deze krachten kan dus $-\rho g i_r A dx$ gesteld worden. De impuls van deze resultante in de tijd dt is dan

$$-\rho g i_r A dx dt.$$

Het weerstandaverhang i_r wordt nader bepaald door de formule

$$i_r = w |Q|Q,$$

waarin w de weerstand per eenheid van lengte van de rivier is. (zie Aanh. 1,2). Deze is nog een functie van h . Verder stelt $|Q|$ de absolute waarde van Q voor, en $|Q|Q$ is dus het kwadraat van Q , doch met het teken van Q zelf: $|Q|Q = Q^2$ bij eb, en $|Q|Q = -Q^2$ bij vloed.

Volgens de wet van verandering van stootvermogen moet de som van de impulsen van de krachten, tezamen met het resulterende transport van stootvermogen naar het beschouwde vak, gelijk zijn aan de toename van het stootvermogen in dat vak. Dit geeft, na delen door $\rho dx dt$,

$$A \frac{\partial v}{\partial t} + v b_s \frac{\partial h}{\partial t} = - (Q \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial Q}{\partial x}) - g A \left(\frac{\partial h}{\partial x} + i_r \right).$$

Hiervan trekken we v maal (1) af. We vinden dan, na delen door gA en invoeeren van de energiehogte H ,

$$(2) \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{b-b_s}{gA} \frac{\partial h}{\partial t} + i_r = 0.$$

Dit wordt gewoonlijk de bewegingsvergelijking genoemd. Voor een meer gedetailleerde en nader gemotiveerde afleiding verwijzen we naar Aanh. 11

De hierboven afgeleide vergelijkingen zijn uitgedrukt in de differentiaalquotienten van H en Q , en die van h en v . De laatste zullen we nu elimineren. Differentiatie van $H = h + \frac{v^2}{2g}$ en $Q = Av$ naar t geeft

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = A \frac{\partial v}{\partial t} + b_s v \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Oplossen naar $\partial h / \partial t$ en $\partial v / \partial t$ geeft

$$(3) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1-\varepsilon} \left[\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{v}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} \right]$$

$$(4) \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{1-\varepsilon} \left[\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{b_s}{A} v \frac{\partial H}{\partial t} \right],$$

waarin

$$(5) \quad \varepsilon = v^2 : g \frac{A}{b_s}.$$

Substitutie van (3) en (4) in (2) en (1) levert ons vervolgens

$$(6) \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{m}{1-\varepsilon} \left(1 + \frac{b-b_s}{b_s} \varepsilon \right) \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{bmv}{1-\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial t} + i_r = 0$$

$$(7) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{b}{1-\varepsilon} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{bmv}{1-\varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial t} = 0.$$

Hierin is m ingevoerd voor

$$m = \frac{1}{gA}$$

De grootheid m is de factor van de traagheid, of kortweg traagheid per eenheid van lengte van de rivier (zie Aanh.1,3).

De zijn er nu weliswaar in geslaagd de differentiaalquotienten van h en v te elimineren, doch h en v zelf zijn in (6) en (7) eigenlijk nog niet geëlimineerd. Immars, in (6) en (7) komen, behalve v , ook nog de grootheden m , b en b_s voor die nog van h afhangen, en de grootheid ε die van h en v afhangt, terwijl ook i_r nog, behalve van Q , van h afhangt.

We kunnen evenwel A als een gegeven functie van de plaats x en de waterstand h opvatten, en dan zijn h en v in principe dus op te lossen uit de twee vergelijkingen

$$h + \frac{v^2}{2g} = H$$

$$A(h, x) = Q,$$

waarbij we h en v dan vinden als functies van H , Q en x . Dit oplossen, dat **praktisch** soms moeilijk exact uit te voeren is, behoeft, zoals in het vervolg zal blijken, in het algemeen ook slechts globaal te geschieden. Daarom zullen we voorlopig volstaan met h en v , en dus ook m , b , b_s , ε en i_r , in principe als gegeven functies van H , Q en x op te vatten. Dan stellen (6) en (7) dus twee vergelijkingen in H en Q voor, met t en x als onafhankelijk veranderlijken.

3. Wiskundige bepaling van de voortplanting.

Wij gaan nu verder uit van de volgende definitie van het begrip voortplanting:

We zullen van voortplanting spreken, wanneer een gebeurtenis op een bepaalde plaats en op een bepaald tijdstip van invloed is op wat er op een andere plaats enige tijd later gebeurt.

Beschouw, om dit toe te lichten, de bewegingstoestand H_1, Q_1 op een bepaalde plaats x_1 ten tijde t_1 , en de bewegingstoestand H_2, Q_2 op een andere plaats x_2 op een later tijdstip t_2 . We zullen dan van voortplanting kunnen spreken, wanneer we een direct verband kunnen leggen tussen de twee beschouwde bewegingstoestanden. Wij zullen dit dan zo uitdrukken, dat er zich een fysische werking heeft voortgeplant van de plaats x_1 naar de plaats x_2 , in het tijdsinterval t_1 tot t_2 .

Wij kunnen voor de twee bewegingstoestanden geheel algemeen stellen

$$H_2 - H_1 = \frac{\partial H}{\partial x} (x_2 - x_1) + \frac{\partial H}{\partial t} (t_2 - t_1)$$

$$Q_2 - Q_1 = \frac{\partial Q}{\partial x} (x_2 - x_1) + \frac{\partial Q}{\partial t} (t_2 - t_1),$$

mits $x_2 - x_1$ en $t_2 - t_1$ klein zijn. We kunnen dit herleiden tot

$$H_2 - H_1 = \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \right) (x_2 - x_1)$$

$$Q_2 - Q_1 = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial t} \right) (x_2 - x_1),$$

waarin

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

de snelheid van voortplanting is.

Er zal een verband te leggen zijn tussen de twee bewegings-
toestanden, wanneer we een vergelijking in $(H_2 - H_1)$ en $(Q_2 - Q_1)$ kun-
nen opstellen, of (daar $x_2 - x_1$ een constante is) een vergelijking
waarin de differentiaalquotienten van H en Q alleen in de com-
binaties

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} \quad \text{en} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

voorkomen.

Om dit te bereiken vermenigvuldigen we de continuïteitsver-
gelijking (7) met een aanstonds nog nader te bepalen factor Z , en
trekken haar dan van de krachtvergelijking (6) af:

$$\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{bmv + bZ}{1 - \varepsilon} \frac{\partial H}{\partial t} - Z \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{m(1 + \frac{b - b_s \varepsilon}{b}) + bmvZ}{1 - \varepsilon} \frac{\partial Q}{\partial t} + i_r = 0.$$

Dit komt in de verlangde vorm, n.l.

$$(8) \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t} + i_r = Z \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial Q}{\partial t} \right),$$

wanneer c en Z als functies van H , Q en x zodanig bepaald wor-
den dat voldaan wordt aan de twee voorwaarden

$$(9) \quad \frac{1}{c} = - \frac{bmv + bZ}{1 - \varepsilon}$$

$$(10) \quad \frac{Z}{c} = - \frac{m(1 + \frac{b - b_s \varepsilon}{b_s}) + bmvZ}{1 - \varepsilon}$$

Hierbij zijn v , m , b , b_s en ε dus weer opgevat als gegeven functies
van H , Q en x .

Uit (9) en (10) is c gemakkelijk te elimineren, en dan vin-
den we de volgende vierkantsvergelijking voor Z :

$$(11) \quad Z^2 - \frac{m}{b} \left(1 + \frac{b - b_s \varepsilon}{b_s} \right) = 0.$$

De wortels hiervan zullen we door Z^+ en Z^- voorstellen. Zij zijn:

$$(12) \quad Z^+ = + \sqrt{\frac{m}{b}} \sqrt{1 + \frac{b-b_s}{b_s} \varepsilon}$$

en

$$(13) \quad Z^- = - \sqrt{\frac{m}{b}} \sqrt{1 + \frac{b-b_s}{b_s} \varepsilon}.$$

Uit (9) en (10) kunnen we ook Z elimineren, en dan vinden we voor c de vierkantsvergelijking

$$(14) \quad c^2 - 2vc - \frac{1-\varepsilon}{bm} = 0.$$

De wortels hiervan, c^+ en c^- , zijn ook te bepalen door substitutie van (12) of (13) in (9), of in (10). We vinden dan

$$(15) \quad c^+ = v + \frac{1}{\sqrt{bm}} \sqrt{1 + \frac{b-b_s}{b_s} \varepsilon}$$

bij Z^- , en

$$(16) \quad c^- = v - \frac{1}{\sqrt{bm}} \sqrt{1 + \frac{b-b_s}{b_s} \varepsilon}$$

bij Z^+ .

Omtrent het teken van c^+ , c^- , Z^+ en Z^- kan worden opgemerkt: Een der grootheden c^+ of c^- is nul, indien de laatste term in (14) juist nul is, dus als

$$\varepsilon = 1 \quad \text{en dus} \quad \pm v = v_c \equiv \sqrt{g \frac{A}{b_s}}$$

is. De snelheid v_c is de kritische snelheid; wanneer deze bereikt wordt, wordt de stroming kritisch genoemd. Indien de kritische snelheid overschreden is, spreekt men van schietend water of superkritische stroming. In dat geval zijn c^+ en c^- ofwel beide positief, ofwel beide negatief, en wel steeds van hetzelfde teken als v . In de getijbeweging is v steeds kleiner en meestal zelfs belangrijk kleiner dan v_c .

Men spreekt dan van vloeiend water of subkritische stroming. In dit geval is c^+ positief, en c^- negatief. Verder is Z^+ steeds positief, en Z^- steeds negatief.

Bij superkritische stroming planten de beide golfcomponenten zich in de richting van de stroom voort, zij het ook de ene sneller en de andere langzamer dan de stroom. Op fysische en mathematische consequenties daarvan zullen we hier ter plaatse niet verder ingaan (zie echter Aanh. 6,4) en daar de getijbeweging praktisch altijd subkritisch is, zal er in het hierna volgende, waar dit nodig is, steeds van worden uitgegaan dat c^+ evenals Z^+ positief, en c^- evenals Z^- negatief is.

Daar er twee waarden van Z met bijbehorende waarden van c zijn die aan de gestelde voorwaarden voldoen, zijn er ook twee vergelijkingen van het type (8):

$$(17) \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{c^+} \frac{\partial H}{\partial t} + i_r = Z^- \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{c^+} \frac{\partial Q}{\partial t} \right]$$

$$(18) \quad \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{c^-} \frac{\partial H}{\partial t} + i_r = Z^+ \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{c^-} \frac{\partial Q}{\partial t} \right].$$

Deze vergelijkingen zijn gelijkwaardig met (6) en (7), daar (6) en (7) ook weer uit (17) en (18) kunnen worden afgeleid. Immers, men kan (7) verkrijgen door (17) en (18) af te trekken en het verschil door $(Z^+ - Z^-)$ te delen, en (6) door $1:Z^-$ maal (17) van $1:Z^+$ maal (18) af te trekken en het verschil door $(1:Z^+ - 1:Z^-)$ te delen.

Beschouw nu een geometrisch punt dat zeewaarts langs de rivier naar beneden gaat met een snelheid c^+ . In een tijd dt verplaatst het punt zich over een afstand $dx = c^+ dt$. De variaties van H en Q die in dit punt door een meebewegende waarnemer zouden worden vastgesteld, bedragen

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial t} dt = \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{c^+} \frac{\partial H}{\partial t} \right) dx.$$

$$dQ = \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial t} dt = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{c^+} \frac{\partial H}{\partial t} \right) dx,$$

en blijkens (17) mogen we hiervoor stellen:

$$(19) \quad dH + i_r dx = Z^- dQ, \text{ mits } dx = c^+ dt.$$

Evenzo vinden we in een punt dat zich van de zee af naar boven beweegt met de negatief te rekenen snelheid c^- ,

$$(20) \quad dH + i_r dx = Z^+ dQ, \text{ mits } dx = c^- dt,$$

door toepassing van (18). De vergelijkingen (19) en (20) zijn gelijkwaardig met (17) en (18). We zullen ons dan ook in de volgende paragraaf met (19) en (20) bezig houden in plaats van met (17) en (18).

We geven daarbij een interpretatie volgens de karakteristieke golfcomponenten.

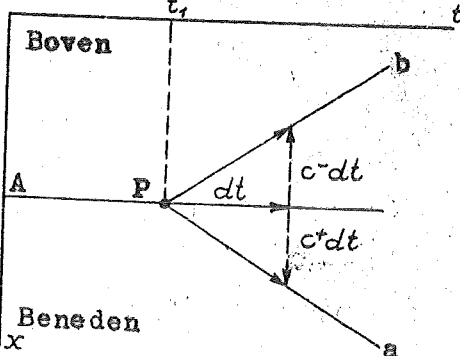
4. De karakteristieke golfcomponenten.

Alvorens nader in te gaan op de uit de bewegingsvergelijkingen afgeleide vergelijkingen (19) en (20), zullen we eerst de eigenschappen van de karakteristieke golfcomponenten nader definiëren met behulp van twee diagrammen, het ene voor de voortplanting van de golfcomponenten, en het andere voor de uitwerking der golfcomponenten op de bewegingstoestanden in de rivier.

De eigenschappen van de aflopende golfcomponent worden bepaald door de grootheden c^+ en Z^+ , en die van de oplopende golfcomponent door de grootheden c^- en Z^- .

Elke golfcomponent wordt gedacht als een reeks continu elkaar volgende punten, die langs de rivier naar beneden of naar boven lopen. Zulke punten zullen we golfpunten noemen. Een aflopend golfpunt beweegt zich langs de rivier naar beneden met de snelheid c^+ , en een oplopend golfpunt beweegt zich naar boven met de negatief te rekenen snelheid c^- . De grootheden c^+ en c^- worden de karakteristieke voortplantingssnelheden genoemd. Onder de voortplanting van een golfcomponent wordt de beweging der golfpunten verstaan.

De bewegingen der golfpunten worden grafisch weergegeven in een tx - diagram (fig. 2). De nader te beschouwen punten in dit diagram, en in enige andere hierna nog te bespreken diagrammen, zullen we beeldpunten noemen. Een beeldpunt, b.v. P in fig. 2, komt overeen met een bepaalde plaats A (coördinaat x), en een bepaald tijdstip t_1 .



a: beweging aflopend golfpunt.

b: beweging oplopend golfpunt.

Fig. 2. Schema van de bewegingen van de golfpunten.

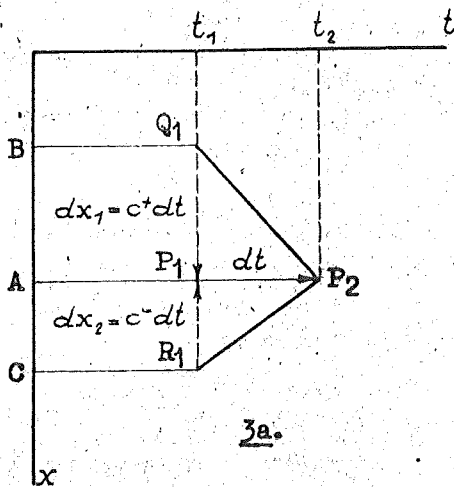
Beweging der golfpunten. Het aflopende golfpunt dat zich ten tijde t_1 in A bevindt, loopt van A af naar beneden zodanig dat $dx = c^+ dt$ is. Dit wordt in het tx - diagram weergegeven door een verschuiving van P uit in een richting a, bepaald door de waarde van c^+ (zie fig. 2). Evenzo wordt de beweging van het oplopende golfpunt dat zich ten tijde t_1 in A bevindt, weergegeven door een verschuiving in het tx - diagram in een richting b, bepaald door de waarde van c^- (zie fig. 2).

De lijn die vanuit het beeldpunt P in het tx -diagram beschreven wordt, geeft het reisprogramma van het beschouwde aflopende, respectievelijk oplopende golfpunt weer. Zulk een lijn wordt een subkarakteristiek genoemd. De lijn die het reisprogramma van een aflopend (oplopend) golfcomponent weergeeft, zullen we een aflopende (oplopende) subkarakteristiek, of ook wel een plus- (min-) subkarakteristiek noemen.

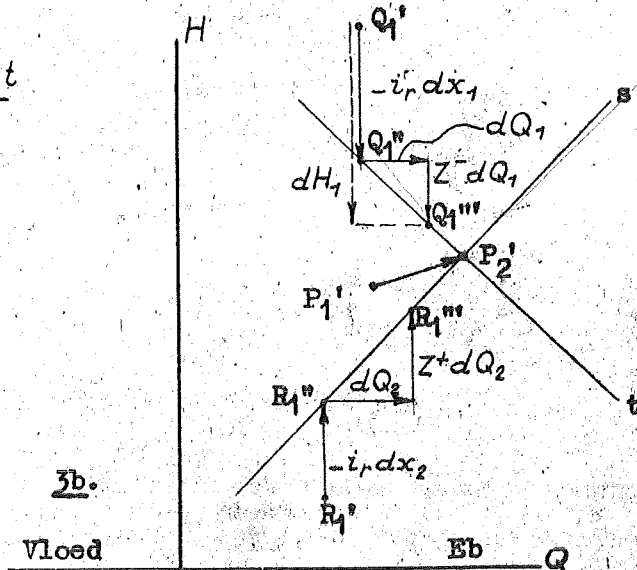
Uitwerking der golfpunten. Beschouw een aflopend golfpunt dat zich verplaatst van B naar A (zie fig. 3a) in een tijd dt ; dan is

$$dx_1 = c^+ dt,$$

waarin dx_1 de afstand van B naar A is. Dit is de voorwaarde voor de geldigheid van (19). We zullen daarom (19) voor dit geval nader gaan uitwerken.



3a.



3b.

3. Overdracht van golfbeweging door een aflopend en door een oplopend golfpunt.

Laat dH_1 het verschil zijn tussen de energiehogte in A ten tijde t_2 , en de energiehogte in B ten tijde t_1 ; laat dQ_1 het verschil tussen de overeenkomstige afvoeren zijn. Dan is volgens (19):

$$dH_1 = -i_r dx_1 + Z^- dQ_1$$

Laat Q_1' het beeldpunt zijn van de bewegingstoestand in B ten tijde t_1 . Ga nu van Q_1' uit over een afstand $i_r dx_1$ naar beneden; dit geeft het punt Q_1'' . Ga vervolgens over een willekeurige afstand dQ_1 naar rechts, en dan over een afstand $|Z^-|dQ_1$ naar beneden (we gaan naar beneden omdat Z^- negatief is); dit geeft het punt Q_1''' . Trek nu een rechte lijn t door Q_1'' en Q_1''' . Welke waarde van dQ_1 we ook kiezen, we krijgen steeds een punt op de lijn t . Dit betekent dat ook het gezochte beeldpunt P_2' voor de bewegingstoestand in A ten tijde t_2 , op t moet liggen.

Beschouw nu ook het oplopende golfpunt dat ten tijde t_2 het beschouwde aflopende golfpunt in A ontmoet. Laat dit oplopende golfpunt ten tijde t_1 in C zijn geweest. Dan is

$$dx_2 = c^- dt,$$

waarin dx_2 de afstand van C tot A is (negatief te rekenen omdat A boven C ligt; ook c^- is negatief). Nu is dus de voorwaarde voor de geldigheid van (20) vervuld. Laat het verschil in energiehogte tussen A ten tijde t_2 en C ten tijde t_1 door dH_2 worden aangegeven, en het overeenkomstige verschil in afvoer door dQ_2 ; dan is volgens (20):

$$dH_2 = i_r |dx_2| + Z^+ dQ_2.$$

Handelen we hiermee op overeenkomstige wijze als bij het aflopende golfpunt, dan vinden we een lijn s . Het beeldpunt P_2' moet op deze lijn s liggen.

Daar P_2' zowel op t als op s moet liggen, is P_2' dus het snijpunt van t en s .

Het blijkt dus dat de bewegingstoestand in A ten tijde t_2 vol-

gens (19) en (20) geheel bepaald is door de bewegingstoestanden in B en C ten tijde t_1 .

We zullen dit nu aldus uitdrukken, dat de plaatselijke bewegingstoestand op zeker tijdstip bepaald is door de samenwerking van de twee golfpunten (het aflopende en het oplopende) die elkaar op dat tijdstip op de beschouwde plaats ontmoeten.

(in het algemeen gebogen) niet getekende,
De lijn $Q_1' P_2'$ geeft de bewegingstoestanden weer die het aflopende golfpunt op zijn weg ontmoet. Zulk een lijn wordt een aflopende (of plus-) contra- subkarakteristiek genoemd. Een lijn zoals $R_1' P_2'$, die de bewegingstoestanden weergeeft die een oplopend golfpunt op zijn weg ontmoet, wordt een oplopende (of min-) contra- subkarakteristiek genoemd.

De contra- subkarakteristiek $Q_1' P_2'$ (zie fig. 3b) hoort bij de subkarakteristiek $Q_1 P_2$ (zie fig. 3a). Zulk een combinatie van een subkarakteristiek en de bijbehorende contra- subkarakteristiek zal worden aangeduid als een karakteristiek. *) Aangezien de subkarakteristiek de beweging van een golfpunt weergeeft, en de contra- subkarakteristiek de reeks bewegingstoestanden die het golfpunt ontmoet, zo kan de karakteristiek als de volledige weergave van de geschiedenis van het golfpunt worden opgevat.

We beschouwen nu de ontwikkeling van de bewegingstoestand ter plaatse A nog eens nader. De verandering in de bewegingstoestand die in het tijdvak van t_1 tot t_2 geschiedt, wordt weergegeven door vector hier

*) Men kan aan de karakteristiek ook een directe meetkundige voorstelling verbinden. Daartoe voeren we een vierdimensionale $HQtx$ -ruimte in. Een bepaalde getijbeweging, dus een bepaalde oplossing van de differentiaalvergelijkingen, wordt daarin weergegeven door een oppervlak. De karakteristieken zijn bepaalde lijnen op zulk een integraal-oppervlak. De subkarakteristiek is de projectie van de karakteristiek op het tx -vlak, en de contra-subkarakteristiek is de projectie van de karakteristiek op het HQ -vlak.

$P_1'P_2'$ in het HQ -diagram (zie fig. 3b en 4).

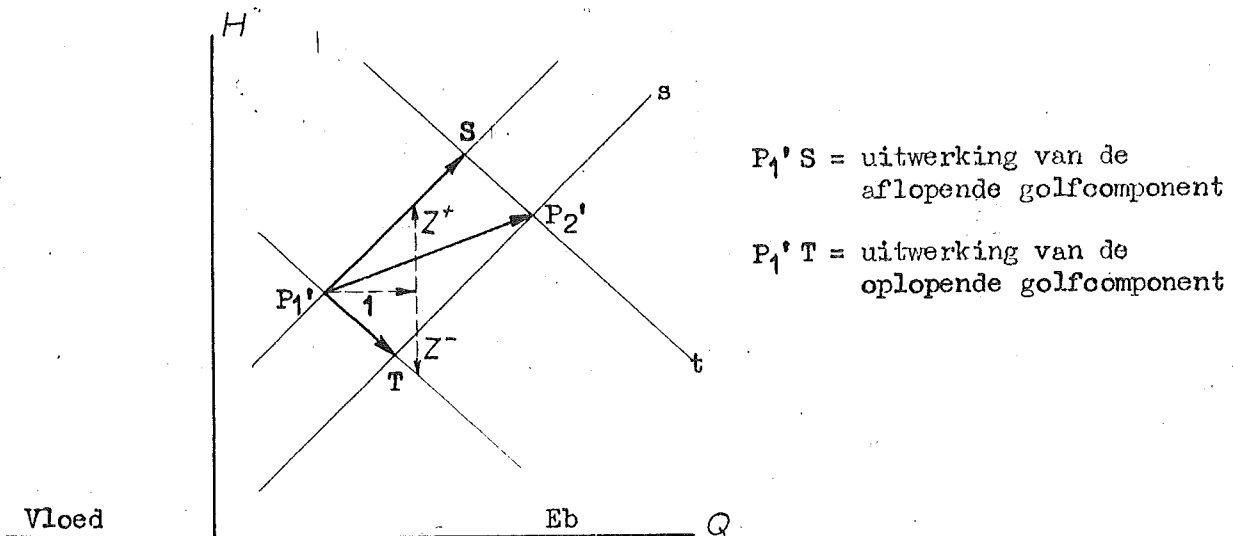


Fig. 4 Schema van de uitwerking der golfcomponenten op de plaatselijke bewegingstoestand.

Nu is het beeldpunt P_2' bepaald als snijpunt van de lijnen t en s , waarbij t samenhangt met het aflopende en s met het oplopende golfpunt. We ontbinden $P_1'P_2'$ vectorisch in de richtingen t en s . De lengte van de ontbondene $P_1'S$ is dan bepaald door de ligging van de lijn t , en de lengte van de ontbondene $P_1'T$ door de ligging van de lijn s . We zullen de ontbondene $P_1'S$ dan ook opvatten als de uitwerking van de aflopende golfcomponent ter plaatse A , en de ontbondene $P_1'T$ als de uitwerking van de oplopende golfcomponent.

Valt de vector $P_1'P_2'$ juist in de richting s , dan is er dus geen ontbondene in de richting t , zodat de uitwerking van de oplopende golfcomponent dan nul is; we noemen de oplopende golfcomponent in dit geval werkeloos. Valt de vector $P_1'P_2'$ juist in de richting t , dan noemen we evenzo de aflopende golfcomponent werkeloos. Valt P_2' met P_1' samen, dan zijn beide ontbondenen nul, dus beide golfcomponenten werkeloos. Er is dan een permanentie op de beschouwde plaats.

We kunnen de betekenis van de hier gegeven voorstelling van

zaken en de fysische betekenis van de grootheden Z^+ en Z^- (die de hellingen van de lijnen s en t bepalen) als volgt nog nader toelichten:

Beschouw een plotselinge ingreep ter plaatse A op het beneden A gelegen deel van de rivier. Deze ingreep kan zich naar beneden alleen voortplanten door middel van de aflopende golfcomponent, zodat het beeldpunt van de bewegingstoestand in A zich in de richting s zal verplaatsen. Dit betekent dat een ingreep die een plotselinge verhoging van de afvoer met een bedrag ΔQ veroorzaakt, noodzakelijk ook een verhoging van de energiehogte in A met een bedrag $Z^+ \Delta Q$ zal geven. De grootheid Z^+ stelt dus de toename in energiehogte per eenheid van toename in de afvoer voor, bij een plotselinge ingreep naar beneden toe. (zie (20)).

Bij een ingreep op het boven A gelegen riviergedeelte zal een plotselinge afvoervermindering een opstuwung, dus een toename van de energiehogte ten gevolge hebben. Een afvoervermeerdering ΔQ heeft een negatief te rekenen energiehogtevermeerdering $Z^- \Delta Q$ (bedenk dat Z^- negatief is) ten gevolge. Zo is dus Z^- de energiehogtevermeerdering per eenheid van toename der afvoer, bij een ingreep naar boven toe. (zie (19)).

We zien dus dat een plotselinge afvoerverandering met een plotselinge verandering van de energiehogte gepaard gaat die daarmee evenredig is. Dit is analoog met het geval van een afvoerverandering door een buis of soortgelijk element met weerstand; ook daar is een evenredige verandering van de energiehogte aan in- of uit-gang het gevolg. De grootheid Z^+ of Z^- geeft de mate aan waarin de rivier zich met een energiehogteverandering verzet tegen een plotselinge afvoerverandering. We zullen daarom Z^+ of Z^- een karakteristieke (factor van) golftegenstand noemen. We hebben het woord "tegenstand" gekozen, en niet "weerstand", om tot uitdrukking te brengen dat deze grootheden geen verband houden met de wrijvingsweerstand in het bed van de rivier; de golftegenstand is integendeel een combinatie-effect van de traagheid en de berging in de rivier.

De voorgaande beschouwingen zijn strikt genomen slechts geldig voor infinitesimaal kleine tijdsintervallen dt en afstanden dx .

In het algemeen zullen de karakteristieken (subkarakteristieken en contra-subkarakteristieken), zomede de lijnen die de ontwikkeling van de bewegingstoestand op een bepaalde plaats weergeven, gebogen zijn. De rechte lijnen die we in de fig. 2, 3 en 4 trokken, zijn dan ook eigenlijk op te vatten als raaklijnen aan de genoemde gebogen lijnen.

We zullen in de volgende paragraaf de hiervoor gegeven beschouwingen zodanig gaan wijzigen, dat we ze op eindige tijdsintervallen en eindige vaklengten kunnen toepassen. Dit is noodzakelijk om tot een praktische methode van getijberekening te komen.

5. Constructie van een karakteristiek.

Een getijberekening wordt uitgevoerd door constructies van karakteristieken, in verschillende combinaties. In deze paragraaf zullen we de constructie van een stuk van een karakteristiek op zichzelf nagaan, om dan in par. 6 de toepassing op enkele elementaire vraagstukken te behandelen. Daarna gaan we dan in par. 7, 8 en 9 over tot de meer samengestelde problemen.

We beschouwen een vak AB van de rivier met een lengte l , en zullen nagaan hoe de karakteristiek voor de tocht van een golfpunt door het vak geconstrueerd kan worden.

Laten we eerst een aflopend golfpunt beschouwen dat, b.v. op het tijdstip t_1 , het vak bij het boveneinde A betreedt, en het enige tijd later, op het tijdstip t_2 , bij het benedeneinde B weer verlaat. De tocht van dit golfpunt door AB wordt weergegeven door een karakteristiek k .

Is $\overline{c^+}$ de gemiddelde snelheid van het golfpunt bij het doorlopen van AB, gedefinieerd door

$$\overline{c^+} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c^+ dt.$$

(te integreren langs k), dan is

$$l = \overline{c^+} (t_2 - t_1).$$

Laten nu P en S de uiteinden van de bij k , behorende subkarakteristiek s zijn (P hoort bij het betreden en S bij het verlaten van het vak), dan kunnen we S door uit te gaan van P, of P door uit te gaan van S construeren, door in het tx -vlak een lijn l onder een helling $\overline{c^+}$ op t met de t -as te trekken (zie fig. 5). Het snijpunt van l met de lijn b , resp. a , evenwijdig met de t -as, is het punt S, resp. P. De lijn l is de koorde van de subkarakteristiek s .

Voor het bepalen van $\overline{c^+}$ zullen we een aantal vereenvoudigin-

gen invoeren, waarvan we in Aanh.2 een nadere motivering geven. Deze

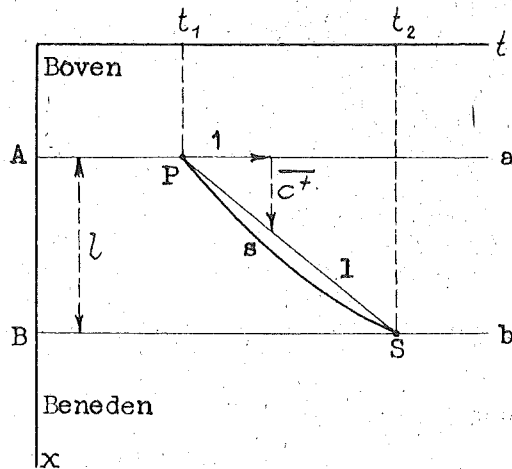


Fig. 5 Constructie van een subkarakteristiek (aflopend golfpunt).

vereenvoudigingen zijn:

In de eerste plaats beschouwen we het vak als een vak met een constant profiel. Is dus b.v. B het bergend oppervlak van het vak bij een bepaalde waterstand h , dan zullen we $b = B \cdot l$ als de bergende breedte bij die waterstand opvatten. Uitgaande van een gemiddeld profiel, kunnen we m en w als functies alleen van h bepalen, en ook de totale traagheid $M = l \times m$ en de totale weerstand $W = l \times w$ zijn dan functies alleen van h .

In een rivier met een sterk verhang is het doelmatiger B , M en W niet als functies van h , maar als functies van de diepte $h - h_b$ te bepalen (h_b is hoogte van de bodem boven het nulvlak).

Een verdere vereenvoudiging bestaat nu daarin, dat we voor het bepalen van \bar{c}^+ uitgaan van de waarden van b en m die behoren bij

$$H_g = \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_2 ,$$

waarbij H_1 de waarde van H in A bij het betreden, en H_2 de waarde van H in B bij het verlaten van het vak is. Evenzo zullen we ook van de waarde

$$Q_g = \frac{1}{2} Q_1 + \frac{1}{2} Q_2$$

voor Q uitgaan; Q_1 behoort bij A en t_1 , en Q_2 bij B en t_2 . Bij de uitvoering van de constructie zullen H_1 en Q_1 gegeven zijn, doch H_2 en Q_2 moeten geschat worden. We komen op deze schatting verderop nog terug.

Het bepalen van b en m uit de waarden H_g en Q_g van H en Q kan doorgaans met voldoende nauwkeurigheid geschieden door eenvoudig het verschil tussen H en h even te verwaarlozen, en de waarden van b en m te nemen die behoren bij de waarde $h = H_g$.

Mocht dit in een bijzonder geval tot een te grote fout leiden (dit kan zich b.v. voordoen wanneer b sterk met h varieert) dan wordt een betere benadering verkregen in twee stappen, aldus:

1. We bepalen de waarde van A die behoort bij $h = H_g$; daarna kunnen we $v = Q_g : A$ en de snelheidshoogte $v^2 : 2g$ uitrekenen.

2. We corrigeren H_g met de snelheidshoogte: $h_g = H_g - v^2 : 2g$. Hierna bepalen we b en m bij $h = h_g$.

Dit verfijningsproces is meestal overbodig omdat het effect van de correctie die het geeft bijna steeds schuil gaat onder de fouten die het gevolg zijn van onnauwkeurigheden in allerlei gegevens.

Tenslotte zullen we in (15) de factor onder het tweede wortelteken met 1 benaderen, daar ε bij getijden praktisch steeds zeer klein is.

Na deze vereenvoudiging verkrijgen we de formule

$$(21) \quad \overline{c^2} = v + c_0,$$

waarin

$$(22) \quad c_0 = \frac{1}{\sqrt{bm}} = \frac{l}{\sqrt{BM}},$$

en

$$(23) \quad v = \frac{Q_g}{A}.$$

De grootheid c_0 wordt als een functie van h_g ($\approx H_g$) opgevat, en A kan eveneens als een functie van h_g worden opgevat, doch kan veelal ook

door een constante middelwaarde benaderd worden.

Integratie van (19) langs k levert

$$(24) \quad H_2 - H_1 + H_r = \bar{Z} (Q_2 - Q_1)$$

waarin

$$\bar{Z} = \frac{1}{Q_2 - Q_1} \int_A^B Z^- dQ$$

en

$$(25) \quad H_r = \int_A^B i_r dx.$$

We zullen trachten tot praktisch bruikbare formules voor deze grootheden te komen.

Voor \bar{Z} voeren we overeenkomstige vereenvoudigingen in als voor \bar{c}^+ . Zo krijgen we een formule

$$(26) \quad \bar{Z} = -Z_0,$$

waarin

$$(27) \quad Z_0 = \sqrt{\frac{m}{b}} = \sqrt{\frac{M}{B}}$$

als een functie van $h_g (\approx H_g)$ wordt opgevat.

De term H_r kan worden opgevat als de waarde van het totale weerstandsverval over het vak AB, zoals dit bepaald zou worden door een met het golfpunt meebewegende waarnemer. Dit verval zullen we benaderen met de formule

$$(28) \quad H_r = W \bar{S},$$

waarin

$$W = \int_A^B w dx$$

de totale weerstand van het vak AB is (zie Aanh. 1,2),

die we als functie van $h_g (\approx H_g)$ opvatten, terwijl \bar{S} nader gedefinieerd zal zijn als het gemiddelde van de grootte $S = |Q|Q$ langs k :

$$(29) \quad \bar{S} = \frac{1}{l} \int_A^B |Q|Q \, dx.$$

Om deze integraal te kunnen uitwerken, zullen we aannemen dat Q lineair met x verloopt. Een discussie van de toelaatbaarheid van deze veronderstelling, en van het verwaarlozen van de variatie van w langs het vak, is gegeven in Aanh. 2.

We stellen dus

$$Q = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} Q_2 - \frac{x - x_2}{x_2 - x_1} Q_1,$$

waarin x_1 de coördinaat van A en x_2 die van B is ($x_2 - x_1 = l$). Dan is

dus

$$dx = \frac{l}{Q_2 - Q_1} dQ$$

en substitutie hiervan in (29) en uitwerken van de integratie geeft

$$\bar{S} = \frac{1}{Q_2 - Q_1} \int_A^B |Q|Q \, dQ = \frac{1}{Q_2 - Q_1} \int_A^B |Q|^{\frac{1}{2}} d(Q^2) = \frac{1}{Q_2 - Q_1} \int_A^B |Q|^{\frac{1}{2}} d|Q^2| = \frac{1}{Q_2 - Q_1} \int_A^B |Q|^2 d|Q|$$

waaruit volgt

$$(30) \quad \bar{S} = \frac{1}{3} \frac{|Q_2|^3 - |Q_1|^3}{Q_2 - Q_1} = \frac{1}{3} \frac{|Q_2| - |Q_1|}{Q_2 - Q_1} (Q_2^2 + |Q_1| \cdot |Q_2| + Q_1^2).$$

In het geval dat Q_2 en Q_1 hetzelfde teken hebben (dit geval komt het vaakste voor), kan (30) tot

$$(31) \quad \bar{S} = \frac{1}{3} \frac{Q_1}{|Q_1|} (Q_2^2 + Q_1 Q_2 + Q_1^2)$$

herleid worden.

Indien er onderweg tussen A en B kentering is, dus als Q_2 een ander teken heeft dan Q_1 , geldt $|Q_2| : |Q_1| = -Q_2 : Q_1$, en dan kan \bar{S} met de formale

$$(32) \quad \bar{S} = \frac{1}{3} \frac{Q_1}{|Q_1|} \frac{Q_1^3 + Q_2^3}{Q_1 - Q_2}$$

bepaald worden.

Laat P' in het HQ -diagram (fig. 6) het beeldpunt met de coördinaten H_1 en Q_1 zijn, dat dus de bewegingstoestand ter plaatse A weergeeft op het ogenblik dat het beschouwde aflopende golfpunt het vak betreedt; we

nemen aan dat H_1 en Q_1 en dus ook P' gegeven zijn. Wij stellen ons ten doel H_2 en Q_2 , dus de waarden van H en Q ter plaatse B op het oogenblik dat het aflopende golfpunt daar aankomt, te bepalen. Het is daartoe niet voldoende alleen dat aflopende golfpunt te beschouwen. Het is noodzakelijk daarnaast ook rekening te houden met het oplopende golfpunt dat tegelijk met het beschouwde aflopende golfpunt in B aankomt, ofwel van een randvoorwaarde gebruik te maken (zie par. 6). Hier zullen we ons echter ertoe beperken na te gaan wat het aflopende golfpunt ons omtrent H_2 en Q_2 kan leren.

We vangen aan met het maken van een schatting voor H_2 (waarover we aanstonds nog meer zullen zeggen); daarmee bepalen we H_g , en hieruit volgen de waarden van Z_0 en W . Deze grootheden die we nu als gegeven beschouwen, substitueren we via (26) en (28) in (24). Dit geeft, met invoeren van (30):

$$(33) \quad H_2 = H_1 - Z_0(Q_2 - Q_1) - \frac{1}{3} W \frac{|Q_2|^3 - |Q_1|^3}{Q_2 - Q_1}$$

Daar H_1 en Q_1 evenals Z_0 en W gegeven zijn verondersteld, komt (33) neer op een verband tussen H_2 en Q_2 . Zetten we H_2 als H -coördinaat en Q_2 als Q -coördinaat grafisch uit, dan wordt (33) weergegeven door een kromme p (zie fig. 6) in het HQ -diagram. Het beeldpunt S' met de coördinaten H_2 en Q_2 , moet op deze kromme liggen.

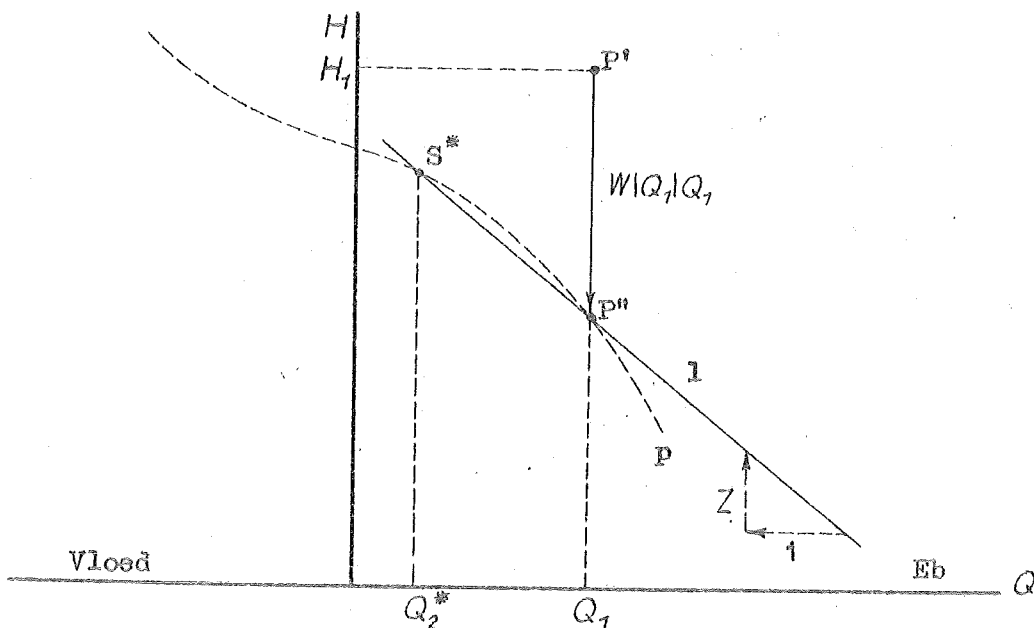


Fig. 6. Constructie in verband met een contra-subkarakteristiek (aflopend golfpunt).

Voor zover Q_2 hetzelfde teken heeft als Q_1 , kan voor (33)

$$(34) \quad H_2 = (H_1 + Z_0 Q_1 - \frac{1}{3} W |Q_1| Q_1) - (Z_0 + \frac{1}{3} W |Q_1|) Q_2 - \frac{1}{3} \frac{|Q_1|}{Q_1} W Q_2^2$$

geschreven worden. Dit stelt een parabool voor (het gedeelte van p in fig. 6, dat rechts van de H-as ligt). Deze parabool gaat door het punt P'' met de coördinaten $H = (H_1 - W |Q_1| Q_1)$ en $Q = Q_1$.

Bij het passeren van de H-as gaat de door (34) bepaalde parabool over in een derdegraadskromme die door

$$(35) \quad H_2 = (H_1 + Z_0 Q_1 - \frac{1}{3} W |Q_1| Q_1) - (Z_0 + \frac{1}{3} \frac{|Q_1|}{Q_1} W \frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1 - Q_2}) Q_2$$

bepaald is.

We merken nog op, dat p niet de contra-glijkarakteristiek is; deze immers, gaat niet van P'' naar S', maar van P' naar S'.

Het uitzetten van de kromme p om het beeldpunt S' te bepalen, zou nogal tijdrovend zijn. Daarom gaan we nu voor p een rechte lijn als benadering invoeren. We maken daartoe ook van Q_2 een schatting; deze stellen we door Q_2^* voor. Laat nu S* het door Q_2^* bepaalde punt op p zijn (zie fig. 6). We trekken dan ter benadering van p de koorde P'' S*. In de omgeving van S*, immers, ligt deze koorde dicht bij de kromme p zelf.

De formule voor de koorde P'' S* is

$$(36) \quad H = (H_1 - W |Q_1| Q_1) - Z(Q_2 - Q_1),$$

waarin

$$Z = Z_0 + W Q_m,$$

als Q_m voor

$$Q_m = \frac{\bar{S}^* - |Q_1| Q_1}{Q_2^* - Q_1}$$

wordt ingevoerd; hierin stelt \bar{S}^* de waarde van \bar{S} volgens (30), (31) of (32) voor, als Q_2^* voor Q_2 wordt gesubstitueerd. Indien Q_2^* hetzelfde teken heeft als Q_1 , volgt dus uit (31) $\bar{S}^* = \frac{1}{3} Q_1 / |Q_1| (Q_2^{*2} + Q_1 Q_2^* + Q_1^2)$ en

$$(37) \quad Q_m = \left| \frac{2}{3} Q_1 + \frac{1}{3} Q_2^* \right|$$

In het geval dat Q_2^* een ander teken heeft dan Q_1 , volgt uit (32):

$$Q_m = \frac{Q_1}{|Q_1|} \left[\frac{Q_1^2}{Q_1 - Q_2^*} - \frac{1}{3} \frac{Q_1^3 + Q_2^{*3}}{(Q_1 - Q_2^*)^2} \right] = \frac{1}{3} \frac{Q_1}{|Q_1|} (Q_1 - Q_2^*) \left[1 - 3 \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2^*} + 6 \left(\frac{Q_1}{Q_1 - Q_2^*} \right)^2 - 2 \left(\frac{Q_1}{Q_1 - Q_2^*} \right)^3 \right].$$

Uit de aanname dat Q_2^* een ander teken heeft dan Q_1 , volgt dat

$|Q_1| \cdot (Q_1 - Q_2^*) : Q_1 = |Q_1 - Q_2^*|$. We voeren nu de hulpgrootheid

$$(38) \quad p = \frac{Q_1}{Q_1 - Q_2^*} = \frac{|Q_1|}{|Q_1 - Q_2^*|}$$

in, en de functie

$$q(p) = \frac{1}{3} - p + 2p^2 - \frac{2}{3}p^3$$

daarvan. We krijgen dan

$$(39) \quad Q_m = q \cdot |Q_1 - Q_2^*|.$$

De functie q is in een tabel in bijlage 2 weergegeven. Om dus in het geval van kentering onderweg Q_m te bepalen, gaan we Q_2 schatten (Q_2^*), vervolgens met (38) p berekenen, dan met de tabel q bepalen, en tenslotte met (39) Q_m uitrekenen.

Door de koorde in plaats van de kromme zelf te nemen, maken we, als Q_2 van Q_2^* verschilt, een fout in H_2 die in het geval dat Q_1 en Q_2^* hetzelfde teken hebben,

$$|\delta H_2| = \frac{1}{3} W \cdot |Q_2 - Q_1| \cdot |Q_2 - Q_2^*|$$

bedraagt (zie Aanh. 2). In het geval dat Q_2^* een ander teken heeft dan Q_1 , is de fout zelfs nog kleiner. Bij niet te grote waarden van $Q_2 - Q_1$ en een enigszins behoorlijke schatting Q_2^* voor Q_2 , is deze fout te verwaarlozen.

Een betere benadering voor de kromme p in de omgeving S^* zou verkregen worden door in plaats van de koorde, de raaklijn aan p in S^* te nemen. De formule voor deze raaklijn is

$$H = (H_1 - W S_r) - (Z_0 + W Q_r)(Q_2 - Q_1),$$

waarin, in het geval van gelijk teken van Q_2^* en Q_1 ,

$$S_r = \frac{Q_1}{|Q_1|} \left[Q_1^2 - \frac{1}{3} (Q_1 - Q_2^*)^2 \right]$$

$$Q_r = \left| \frac{1}{3} Q_1 + \frac{2}{3} Q_2^* \right|,$$

en in het geval van ongelijk teken

$$S_r = \frac{Q_1}{|Q_1|} \left(\frac{1}{3} - p^2 + \frac{4}{3} p^3 \right) (Q_1 - Q_2^*)^2$$

$$Q_r = \left(\frac{2}{3} - p + \frac{2}{3} p^3 \right) \cdot |Q_1 - Q_2^*|$$

genomen moet worden. Met de raaklijn wordt, als Q_2 van Q_2^* verschilt, in H_2 een fout gemaakt die ongeveer

$$|dH_2| \approx \frac{1}{3} W (Q_2 - Q_2^*)^2$$

bedraagt. Dit is bij kleine waarden van $Q_2 - Q_2^*$ een kleinere fout dan die we met de koorde maken.

De formules voor de raaklijn zijn evenwel ingewikkelder dan die voor de koorde, en daar de koorde praktisch voldoende nauwkeurig is, zullen we hiermee en niet met de raaklijn werken.

De constructie voor de contra-subkarakteristiek verloopt nu volgens (36) als volgt:

Ga van P' uit over de afstand $W|Q_1|Q_1$ naar beneden; dit geeft het punt P'' . Trek nu door het punt P'' de lijn l' onder een helling Z op 1 met de Q -as. Het te construeren punt S' ligt dan op deze lijn. De constructie voor de karakteristiek k zal steeds gecombineerd moeten worden met één of meer andere constructies, b.v. de constructie volgens fig. 8, teneinde het punt S' op l' nader te bepalen, omdat we voor de volledige bepaling van de bewegingstoestand ter plaatse B, ook de variatie van de oplopende golfcomponent moeten kennen. We komen hierop nog terug in de volgende paragraaf.

Om verwarring te voorkomen merken we nog op dat de gezochte contra-subkarakteristiek een kromme is die door de punten P' en S' gaat; de lijn l' , die dient om het punt S' te bepalen, is dus geen koorde van de contra-subkarakteristiek.

Nadat het beeldpunt S' geconstrueerd is, kunnen de geschatte

waarden van H_2 en Q_2 geverifieerd worden. Ingeval er een groot verschil blijkt te zijn tussen de geschatte en de geconstrueerde waarden van H_2 en Q_2 , kan de constructie worden overgedaan, doch nu uitgaande van de zojuist geconstrueerde waarden van H_2 en Q_2 in plaats van de aanvankelijk geschatte waarden. Dit wordt zonedig zoveel maal herhaald tot er binnen de gestelde nauwkeurigheidsgrenzen overeenstemming is tussen de waarden van H_2 en Q_2 waarvan men bij de constructie uitgaat, en de waarden die door de constructie gevonden worden. Indien de lengte l van het vak niet te groot is, zal dit reeds terstond of na zeer weinig herhalingen het geval zijn als gevolg van de wijze waarop de geschatte waarden in de constructie verwerkt zijn.

Bij een vaklengte van 5 a 10 km zal blijkens de ervaring, bij een enigzins behoorlijke schatting van H_2 en Q_2 bij de aanvang, de uitkomst van de eerste constructie reeds binnen de gestelde grenzen nauwkeurig zijn. Men kan dit controleren door, uitgaande van die uitkomst, de constructie te herhalen; het is echter voldoende in de loop van een berekening hiertoe zo nu en dan een steekproef te nemen, in het bijzonder in die gevallen dat de uitkomst van een eerste constructie betrekkelijk sterk afwijkt van de aanvankelijke schattingen.

Heeft men reeds een deel van het getij berekend door karakteristieke integratie, dan geeft het tot zover gevonden resultaat een indruk van de wijze waarop de karakteristieken zich ontwikkelen, en hierdoor kan men tot een behoorlijke schatting geraken. Ook waarnemingen omtrent het te berekenen getij, of een reeds eerder bepaalde globale oplossing daarvoor, kunnen goede richtlijnen voor de schatting zijn. Ziet men geen enkele richtlijn voor de schatting, dan kan men altijd H_1 en Q_1 als eerste schatting voor H_2 en Q_2 substitueren; men zal dan misschien de constructie een keer meer moeten herhalen.

De karakteristiek voor een oplopend golfpunt dat door het vak

AB loopt, kan op soortgelijke wijze geconstrueerd worden als de karakteristiek voor een aflopend golfpunt. Laat t_1 nu het tijdstip zijn waarop het punt van de oplopende golfcomponent bij B het vak betreedt, en t_2 het tijdstip waarop het golfpunt het vak bij A weer verlaat. Dan is in dit geval

$$l = (\overline{-c^-})(t_2 - t_1),$$

waarin $(\overline{-c^-})$ bepaald wordt uit

$$\overline{-c^-} = -v + c_0,$$

waarbij c_0 en v door (22) en (23) bepaald zijn. De grootheden H_g en Q_g worden weer uit de bekende waarden H_1 en Q_1 van H en Q bij het betreden van het vak, en schattingen voor de waarden bij het verlaten van het vak, H_2 en Q_2 , afgeleid. De constructie van de subkarakteristiek verloopt dan als aangegeven in fig. 7.

In het HQ -diagram wordt een op (20) berustende constructie uitgevoerd, analoog aan die van fig. 6. We integreren dus (20), voeren $\overline{Z^+} = Z_0$ en W als gegeven, namelijk uit H_g bepaalde grootheden in, en benaderen \overline{S} weer met (30), (31) of (32). De vergelijking in H_2 en Q_2 die we dan krijgen, stelt een kromme p in het HQ -diagram voor (fig. 8), die we gaan benaderen door een koorde m' bepaald door de vergelijking

$$(40) \quad H_2 = (H_1 + W|Q_1|Q_1) + Z(Q_2 - Q_1),$$

waarin weer

$$Z = Z_0 + WQ_m,$$

is; Q_m wordt met behulp van een schatting Q_2^* van Q_2 uit (37) of (39) bepaald, op overeenkomstige wijze als bij de aflopende golfcomponent.

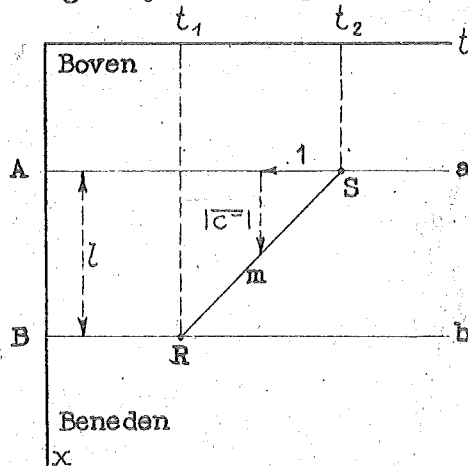


Fig. 7. Constructie van een subkarakteristiek (oplopend golfpunt).

De constructie van deze hulplijn m' , in verband met de oplopende contra-subkarakteristiek, wordt uitgevoerd als aangegeven in fig. 8.

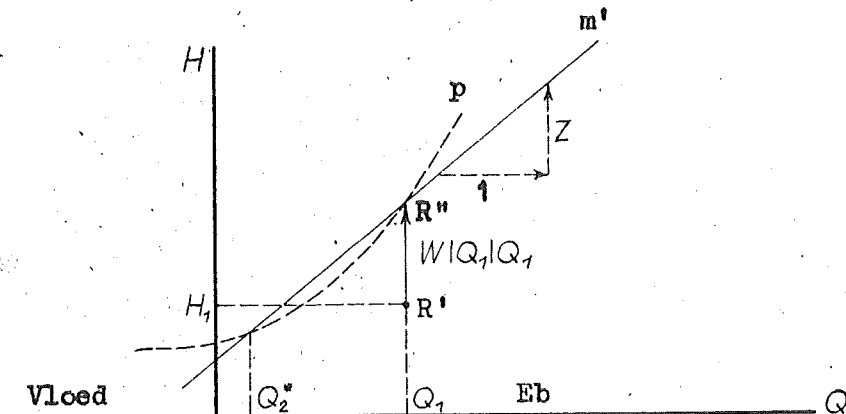


Fig. 8. Constructie in verband met een contra-subkarakteristiek (oplopend golfpunt).

De richting van de verschuiving $W|Q_1|Q_1$ hangt af van de bewegingsrichting van het golfpunt (aflopend of oplopend) en van de stroomrichting (eb of vloed). De hellingsrichting van de lijn l' of m' hangt van de bewegingsrichting van het golfpunt af.

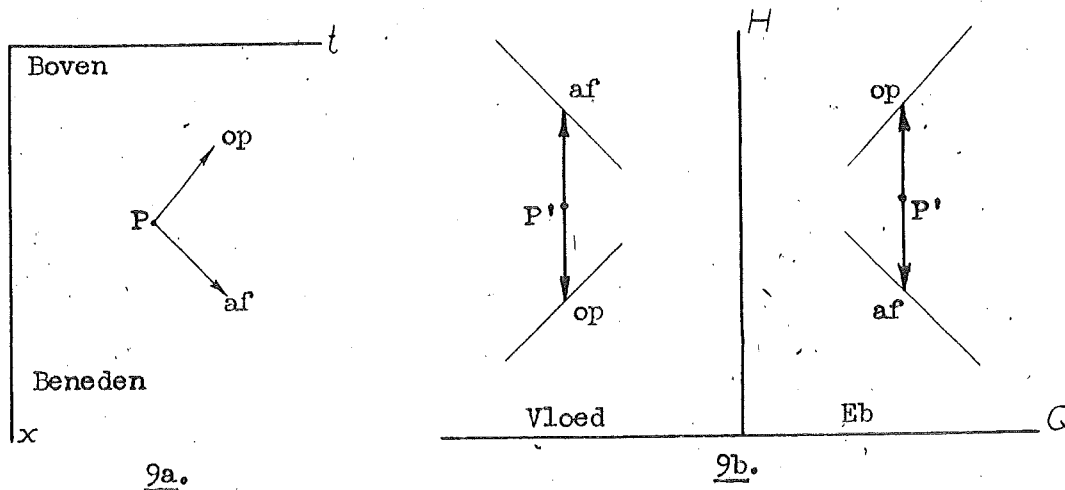


Fig. 9. Schema van de constructies van een subkarakteristiek (fig. 9a) en van een contra-subkarakteristiek (fig. 9b).

In fig. 9a en b zijn de constructies voor een karakteristiek voor verschillende gevallen schematisch weergegeven.

Bij de constructie van een karakteristiek kan gebruik gemaakt worden van nomogrammen. Deze zijn in Aanhangsel 3 beschreven.

6. Elementaire constructies met karakteristieken.

In de vorige paragraaf hebben we de constructie van een karakteristiek behandeld. We gingen daarbij uit van de bewegingstoestand bij het ene uiteinde van een vak van een rivier op het tijdstip dat een golfpunt hiervandaan vertrekt, en we hebben gezien dat de bewegingstoestand bij het andere uiteinde op het tijdstip dat het golfpunt daar aankomt, bepaald is door een beeldpunt dat gevonden zal worden op een lijn l' of m' . (zie fig. 6 of 8). In deze paragraaf zullen we aangeven hoe dit beeldpunt op die lijn verder bepaald kan worden.

We gaan hierbij tevens nader in op de opzet van een getijberekening in de meest eenvoudige gevallen. Om de gedachte te bepalen beschouwen we daartoe het getij in een enkelvoudige geul die aan het ene uiteinde is afgesloten en die met het andere uiteinde in zee mondt.

Het getij in deze geul is, behalve natuurlijk door de differentiaalvergelijkingen, nader bepaald door de volgende voorwaarden:

Ten eerste mag onder zekere restricties, waarop we in par. 7 nog terugkomen, het verticale getij aan de mond als gegeven worden beschouwd. We nemen dus aan dat H daar als functie van t gegeven is.

Ten tweede is bij het afgesloten uiteinde de afvoer Q steeds nul.

Ten derde voeren we nog als gegeven een dubbele beginvoorwaarde in, d.w.z. we nemen aan dat H en Q voor zeker tijdstip langs de geul gegeven zijn. In de volgende paragraaf zullen we nog nader aangeven hoe we in de praktijk aan dit gegeven kunnen komen. Hier zullen we ons er toe beperken de fysische betekenis van de beginvoorwaarden toe te lichten:

We beschouwen de getijbeweging in de geul tussen een tweetal tijdstippen t_0 en t_1 . Het tijdstip t_1 speelt in de nu volgende beschouwing een zeer ondergeschikte rol, en kan willekeurig ver in de toekomst gedacht worden.

De getijbeweging in het tijdvak van t_0 tot t_1 kunnen we opvatten als causaal bepaald door ten eerste de twee randvoorwaarden aan de uiteinden, elk gegeven voor het tijdvak van t_0 tot t_1 , en ten tweede een dubbele beginvoorwaarde in het gehele kanaal voor het tijdstip t_0 . Deze beginvoorwaarde houdt in, dat de waarden van H en Q ten tijde t_0 op alle plaatsen langs de geul gegeven zijn; de beginvoorwaarde geeft dus als het ware een momentopname van het verticale en van het horizontale getij weer.

De bewering dat de beschouwde getijbeweging causaal bepaald wordt door de randvoorwaarden, zal wel niet moeilijk te aanvaarden zijn. De getijbeweging in zee, immers, kan als de eigenlijke bron van de getijbeweging, dus als eerste oorzaak worden opgevat, terwijl de afsluiting aan het eind de oorzaak is van het ontstaan van een teruggekaatste getijgolf.

Meer toelichting is wellicht nodig bij de bewering dat de beginvoorwaarde een causaal karakter heeft. Men zou immers zo kunnen redeneren, dat de bewegingsteestand ten tijde t_0 het gevolg is van de werking van de door de randvoorwaarden weergegeven oorzaken, voorzover deze voor het tijdstip t_0 gewerkt hebben, en dat dus eigenlijk alleen de randvoorwaarden fysisch bepalend voor de getijbeweging zouden zijn en de beginvoorwaarde niet meer zou zijn dan een wiskundig hulpmiddel om de getijbeweging te bepalen. Toch is er reden om aan de beginvoorwaarde een meer principiële betekenis te hechten dan uit zulk een wijze van beschouwen zou volgen.

De fysische betekenis van de beginvoorwaarde moet hierin gezien worden, dat deze voorwaarde weergeeft juist datgene waarin de voor het tijdstip t_0 gewerkt hebbende oorzaken nog invloed hebben op de getijbeweging na het tijdstip t_0 . Om dit in te zien, kan men het feit

overwegen, dat men zich allerlei ontwikkelingen van de randvoorwaarden vóór t_0 kan voorstellen die alle tot dezelfde toestand ten tijde t_0 geleid zouden hebben; doch zulke verschillen in ontwikkeling vóór het tijdstip t_0 , zijn van geen enkele invloed op de beweging ná t_0 .

Bovendien is het denkbaar dat de vorm van de geul vóór het tijdstip t_0 veranderingen heeft ondergaan. Doch ook de invloed daarvan op de getijbeweging ná het tijdstip t_0 , wordt geheel weergegeven door de beginvoorwaarde.

Omtrent de invloed die een beginvoorwaarde op de latere getijbeweging heeft, is een belangrijke algemene opmerking te maken. We beschouwen daartoe in gedachte twee gelijke geulen en laten vanaf het tijdstip t_0 aan de uiteinden gelijke randvoorwaarden werken; de begin-toestand ten tijde t_0 veronderstellen we verschillend in de twee geulen. De getijbewegingen in de twee geulen zullen zich dan zodanig ontwikkelen, dat het verschil tussen die twee bewegingen in verloop van tijd steeds geringer wordt, daar de invloed van de beginvoorwaarde door de demping geleidelijk uitsterft.

We beginnen de waterloop te verdelen in een aantal vakken elk met een lengte van b.v. 5 à 10 km, zodanig dat alle vakken dezelfde maatgevende voortplantingstijd hebben. Deze maatgevende voortplantingstijd bepalen we als volgt:

Laat h_m een waterstand zijn in het interval waarin h kan variëren bij de te ondernemen berekening. Het is gewenst deze maatgevende waterstand niet te laag te nemen, teneinde de aanstonds te bepalen looptijd τ_m niet te overschatten (zie ook p. 46). Bij voorkeur wordt h_m gekozen tussen de middenstand en de waterstand bij de vloedkentering.

Laat l de lengte van het vak zijn; laten verder B_m en A_m de waarden van het bergend oppervlak en van het stroomvoerend profiel zijn bij de maatgevende waterstand h_m . Dan is

$$M_m = l m_m = \frac{l}{g A_m}$$

een maatgevende waarde van de traagheidsfactor van het vak.

Het gemiddelde van de voortplantingssnelheden c^+ en $-c^-$

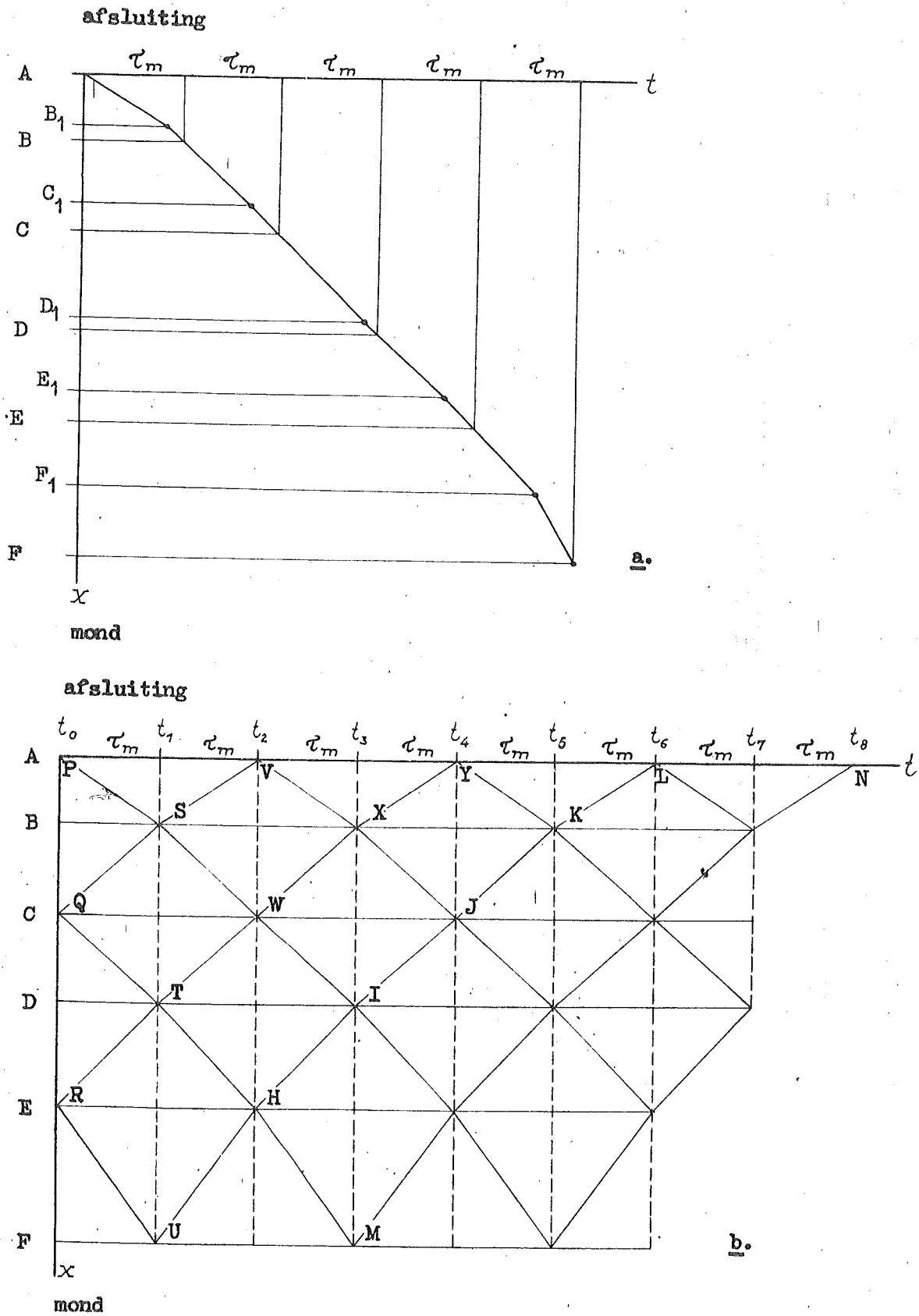


Fig. 10. Weg-tijd-diagrammen.
a. Looptijd diagram voor de vakindeling; B₁, C₁ enz. voorlopige indeling; B, C, enz. definitieve indeling.
b. Schematisch netwerk van subkarakteristieken.

is c_0 volgens (22); een maatgevende waarde van c_0 is dan

$$c_m = \frac{1}{\sqrt{b_m m_m}}$$

waarin $b_m = B_m \cdot l$. De maatgevende looptijd τ_m van het vak is dan

$$\tau_m = \frac{l}{c_m} = \sqrt{B_m M_m}$$

De vereiste vakindeling kan b.v. als volgt verkregen worden:

We gaan uit van een of andere voorlopige vakindeling. Hiervoor bepalen we de looptijden der vakken, en daaruit door sommatie de looptijd vanaf het gesloten uiteinde van de geul tot elk der vakuiteinden. Deze gesommeerde looptijd zetten we in een tx -diagram uittegen de afstand van het uiteinde van het vak tot het gesloten uiteinde (fig. 10a); dit doen we voor alle uiteinden van de voorlopige vakken. Hierna verdelen we de looptijd van het gesloten uiteinde tot de mond in een geschikt aantal delen, en dan vinden we uit het looptijd-diagram de nieuwe vakindeling.

Van elk der nieuwe vakken bepalen we vervolgens B , M en W als functies van $h(\approx H)$.

Het tijdvak waarover de berekening zich uitstrekt, verdelen we in intervallen ter grootte van de looptijd van één vak, en nu kunnen we schematisch een netwerk van subkarakteristieken opzetten als aangegeven in fig. 10b op pag. 42.

We stellen ons ten doel de getijbeweging bij de plaatsen A, C enz. te bepalen op de tijdstippen t_0, t_2, t_4 enz., en bij de plaatsen B, D enz. op de tijdstippen t_1, t_3, t_5 enz., dus juist op de knooppunten van de schematische subkarakteristieken. (De intervallen $t_0 t_1, t_1 t_2, t_2 t_3$ enz. zijn onderling gelijk).

We veronderstellen dus ten eerste dat H in de beeldpunten U, M enz. (zie fig. 10b) gegeven is, ten tweede dat $Q=0$ in de beeldpunten P, V,

Y, L, N enz., en ten derde dat H en Q gegeven zijn in de beeldpunten P Q en R.

De berekening bestaat nu daarin dat we, uitgaande van de knooppunten P en Q (zie fig. 10b), de met PS en QS overeenkomende karakteristieken construeren, en daaruit de bewegingstoestand die bij S behoort bepalen. Evenzo gaan we van Q en R naar T. Van R uit construeren we de bij RU behorende karakteristiek en dit geeft ons, tesamen met het gegeven verticale getij aan de mond, de volledige bij U behorende bewegingstoestand. Vanuit S en T gaan we dan naar W en van T en U uit naar H. Tenslotte gaan we van S uit naar V, waar we bij de constructie gebruik maken van de eindpuntsvoorwaarde $Q = 0$.

We hebben dus drie soorten constructies:

1. constructie voor de ontmoeting van twee golfpunten; deze geeft de beeldpunten S , T , W enz.
2. constructie van een golfpunt dat de mond bereikt; dit geeft ons de beeldpunten U enz.
3. constructie voor een golfpunt dat het afgesloten uiteinde bereikt; dit geeft ons de beeldpunten V enz.

We bespreken deze drie constructies achtereenvolgens.

Ontmoeting van twee golfpunten. Dit is de meest voorkomende constructie, en we zullen deze dan ook het eerst bespreken.

We beschouwen een willekeurig tweetal vakken die aan elkaar grenzen, die we als AB en BC zullen aanduiden zonder dat dit speciaal de vakken AB en BC van fig. 10 behoeven te zijn. De overgang bij B tussen de twee vakken wordt verondersteld vrij van dissipatie van energie te zijn, zodat de energiehogte H en de afvoer Q aan het eind van het vak AB dezelfde zijn als aan het begin van het vak BC (zie ook Aanh. 6,1).

Laten de bewegingstoestanden in A en C ten tijde t_0 tevoren geconstrueerd, of als beginvoorwaarde aangenomen zijn. We kunnen dan de bewegingstoestand in B op het tijdstip $t_1 = t_0 + \tau_m$ gaan bepalen.

Daartoe maken we gebruik van een viertal diagrammen, een tx -diagram en een HQ -diagram als hoofddiagrammen, en een Ht - en een Qt -diagram als hulpdiagrammen. De vier diagrammen zijn in fig. 11 weergegeven.

In deze diagrammen construeren we de geschiedenissen van de twee golfpunten die elkaar in B ten tijde t_1 ontmoeten.

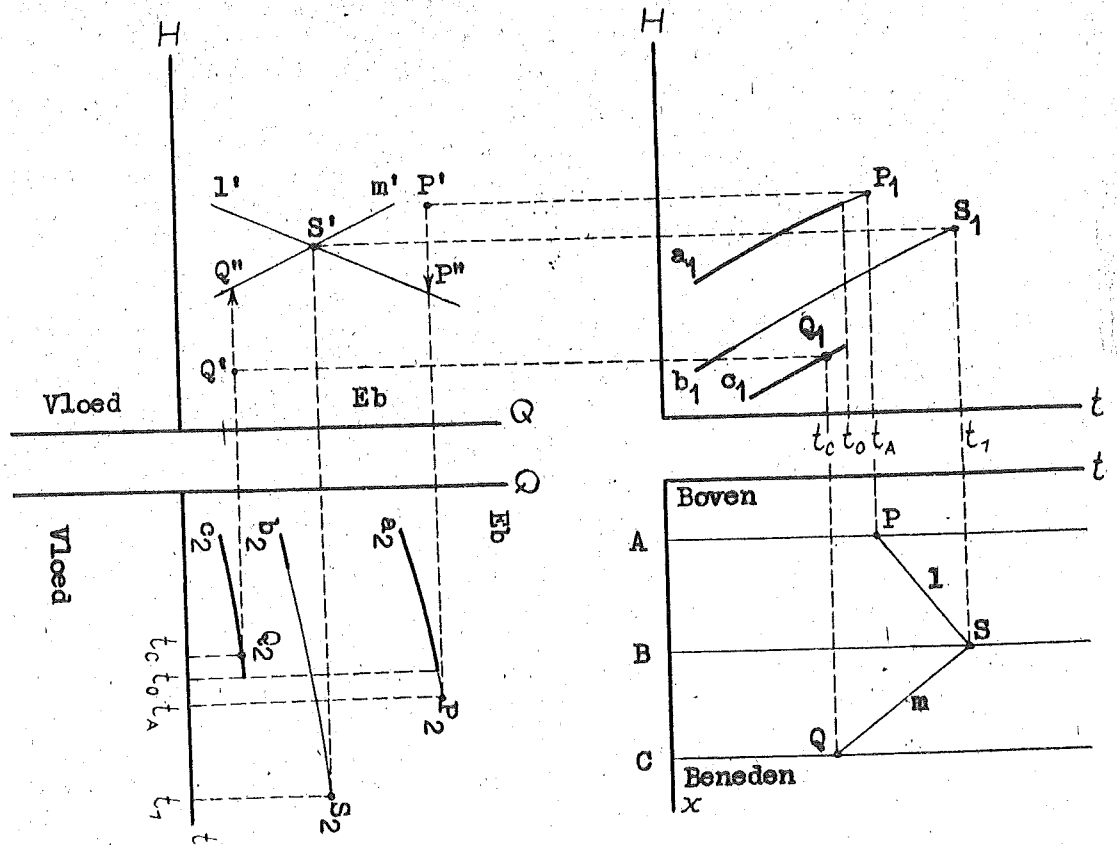


Fig. 11. Constructie voor de ontmoeting van twee golfpunten op een overgang tussen twee vakken.

Allereerst construeren we in het tx -diagram de subkarakteristiek 1 voor de tocht van het aflopende golfpunt door AB en de subkarakteristiek m voor de tocht van het oplopende golfpunt door BC. Zo vinden we het tijdstip t_A waarop het aflopende golfpunt A heeft verlaten, en het tijdstip t_C waarop het oplopende golfpunt C heeft verlaten.

Bij de constructie van 1 maken we gebruik van een schatting van H en Q behorende bij P en van H en Q behorende bij S, en de daaruit bepaalde gemiddelden Hg en Qg . Evenzo moeten we voor de constructie van m ook nog de bij Q behorende waarden van H en Q schatten. Bij deze schattingen kunnen we uitgaan van de reeds bekende gedeelten van de hierna te bespreken krommen a_1 , b_1 en c_1 in het Ht -diagram en a_2 , b_2 en c_2 in het Qt -diagram. De aldus bepaalde vermoedelijke, bij het beeldpunt S behorende waarden van H en Q , kan men bovendien met enige routine ook nog controleren door schattenderwijs op de constructie van het beeldpunt S' vooruit te lopen.

We stelden voorop dat we H en Q in A en in C op het tijdstip reeds kenden. We moeten nu H en Q in A op het iets afwijkende tijdstip t_A bepalen. Dit doen we met behulp van het Ht -, resp. Qt -diagram, door daarin een lijn a_1 resp. a_2 te trekken die het verloop van H resp. Q in A met de tijd weergeeft. Deze lijnen zijn, als we nog in het begin van de berekening zijn, te trekken door schatting van $\partial H/\partial t$ resp. $\partial Q/\partial t$. Als we al verderop in de berekening zijn kunnen we a_1 en a_2 trekken doordat we dan niet alleen H en Q in A ten tijde t_0 kennen, doch ook op het voorgaande tijdstip $t_0 - 2\tau_m$ en misschien wel op nog meer voorgaande tijdstippen; de bepaling van H en Q ten tijde t_A komt dan neer op een grafische extrapolatie of interpolatie.

Aangezien extrapoleren in het algemeen grover is dan interpoleren, is het gewenst slechts in beperkte mate te extrapoleren. Daarom verdient het aanbeveling de tijdsteek τ_m tamelijk klein te kiezen.

Op soortgelijke wijze bepalen we nu ook H en Q in C ten tijde t_C met behulp van de krommen c_1 en c_2 .

We kunnen nu ook in het HQ -diagram het beeldpunt P' voor de bewegingstoestand in A op het ogenblik t_A waarop het aflopende golfpunt vertrekt, bepalen, en evenzo het beeldpunt Q' voor de bewegingstoestand in C op het ogenblik t_C .

Met behulp van de reeds gemaakte schatting van H_g langs PS, resp. langs QS, kunnen Z_0 en W langs deze twee karakteristieken bepaald worden. Verder schatten we de ligging van S' en de daarbij behorende waarde van Q , en bepalen met behulp daarvan de waarde van Q_m langs PS, resp. QS.

Uitgaande van het beeldpunt P' voeren we nu de constructie voor de aflopende contra-subkarakteristiek uit op de wijze van fig. 6, en uitgaande van het beeldpunt Q' de constructie voor de oplopende contra-subkarakteristiek op de wijze van fig. 8. De doorsnijding van de lijnen l' en m' bepaalt dan het beeldpunt S' dat de bewegingstoestand in B ten tijde t_1 weergeeft, en dus ook S_1 en S_2 .

Nu het beeldpunt S' geconstrueerd is, kan geverifieerd worden of onze voorafgaande schattingen van H en Q voldoende correct zijn geweest. Mocht dit niet het geval blijken te zijn, dan voeren we de constructie opnieuw uit, ditmaal uitgaande van de waarden van H en Q die door de eerste constructie gevonden zijn. Met enige routine is het echter niet moeilijk zo nauwkeurig te schatten dat een herhaling van de constructie doorgaans onnodig is, mits de vaklengten niet te groot zijn.

Aankomst van een golfpunt aan de mond. Laat EF het vak zijn bij de mond F, en laat de bewegingstoestand in E op een tijdstip t_0 reeds tevoren berekend, of als beginvoorwaarde gegeven zijn. Onze taak is nu de bewegingstoestand in F ten tijde $t_1 = t_0 + \tau_m$ te bepalen; hierbij is H dan gegeven door de eindpuntsvoorwaarde aan de mond.

We beginnen met uitgaande van het beeldpunt U (plaats F, tijdstip t_1) in het tX -diagram, de subkarakteristiek voor de tocht van het aflopende golfpunt te construeren, zodat we het tijdstip van vertrek van dit golfpunt uit E leren kennen: t_E . Door middel van krommen e_1 en e_2 , die door voorgaande constructies zijn gevonden, bepalen we in de hulpdiagrammen de bewegingstoestand in E bij het vertrek van het golfpunt (beeldpunten R_1 , R_2 en R' ; zie fig. 12).

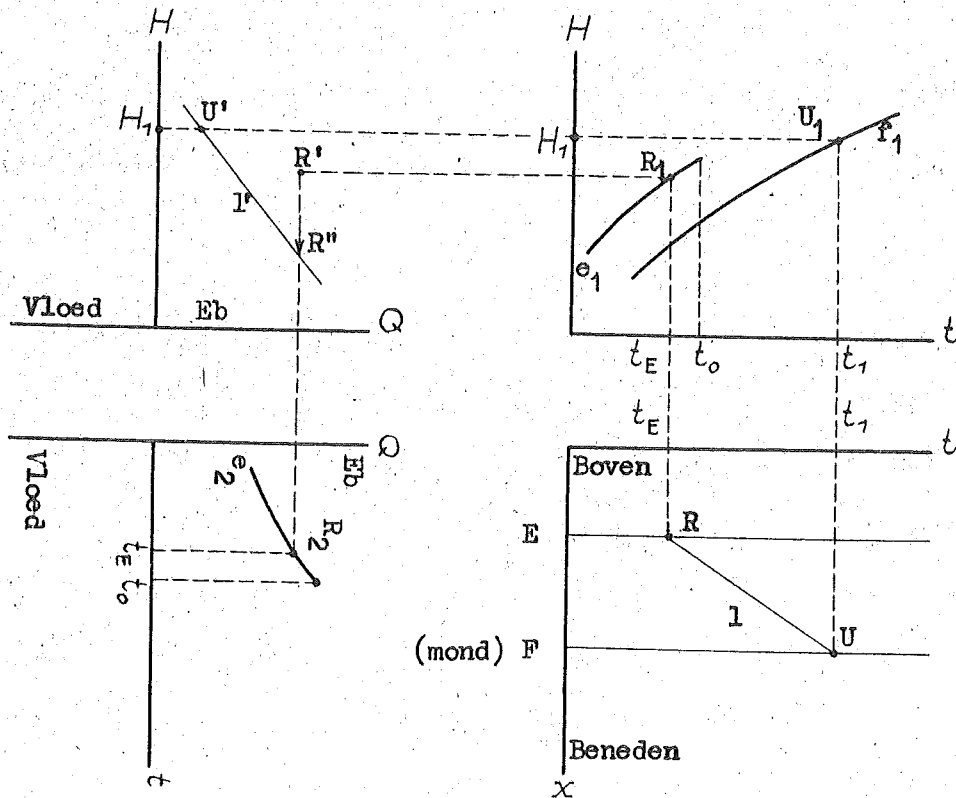


Fig. 12. Constructie voor de aankomst van een golfpunt (aflopend) op een plaats van gegeven verticaal getijd (mond).

Vanuit het beeldpunt R' construeren we nu weer de contra-sub-karakteristiek voor de tocht van het aflopende golfpunt door EF . We kennen H als functie van t aan de mond (kromme f_1 in het Ht -diagram), en dus met name de waarde H_1 van H in F ten tijde t_1 . Daardoor kan het beeldpunt U' op de constructielijn l' bepaald worden.

Aankomst van ^{een} golfpunt aan het afgesloten uiteinde. De constructie hiervoor vertoont grote overeenkomst met de hiervoor behandelde constructie, met dit verschil dat we de ligging van het beeldpunt op de constructielijn in het HQ -diagram nu bepalen uit de voorwaarde $Q=0$; verder hebben we met een oplopend in plaats van met een aflopend golfpunt te maken.

De lijn b_2 in het Qt -diagram van fig. 13 is de afvoerkromme

voor de plaats B. De afvoerkromme voor de plaats A is de t -as in het Qt -diagram (Q steeds nul). De lijn b_1 in het Ht -diagram geeft de energiehoogte in B weer. De constructie is verder uit de figuur voldoende duidelijk.

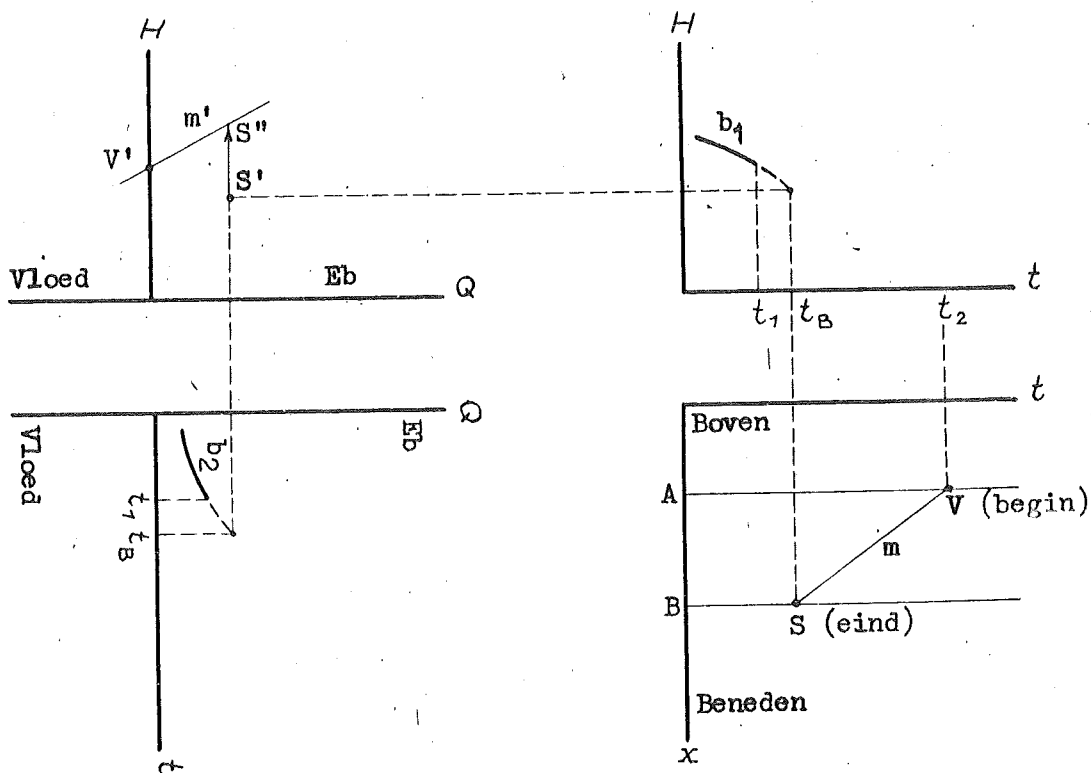


Fig. 13. Constructie voor de aankomst van een golfpunt (oplopend) op een plaats waar de stroom nul is (afsluiting).

Door herhaalde toepassing van de drie behandelde constructies kan nu de bewegingstoestand voor alle knooppunten van het globale karakteristieke netwerk bepaald worden. We kunnen b.v. systematisch als volgt te werk gaan (zie fig. 10b): eerst S , dan V , dan T , W , X en Y en vervolgens U , H , I , J , K en L ; hierna nemen we steeds een gehele reeks van mond tot uiteinde, dus van M tot N enz.

7. Enkelvoudige geulen.

We zullen nu het verloop van een getijberekening verder nagaan voor enige gevallen dat we met een enkelvoudige geul te maken hebben.

Berekening in een enkelvoudige zeearm. Allereerst beschouwen we een enkelvoudige zeearm die aan het landwaartse einde is afgesloten, zodat daar de stroom constant nul is. Het zeewaartse einde staat in open verbinding met de zee.

Het is enigzins willekeurig wat we als mond van de zeearm beschouwen, daar er in het algemeen geen scherpe overgang is tussen de oeverlijnen van de zeearm, en de kustlijn van de zee. Als mond wordt nu opgevat een voldoende ver zeewaarts gelegen dwarsprofiel, waarbij de volgende overweging geldt:

Bij een verandering in het regime van de zeearm, zal deze andere stromen uit zee gaan opnemen of naar zee afvoeren. Dit heeft invloed op de verticale getijbeweging, doch deze invloed zal in het algemeen naar zee toe afnemen. De beweging in zee zal ook nog enige invloed van de verandering van het regime ondergaan. De waterbeweging in zee kan evenwel niet meer als eendimensionale beweging worden behandeld; zij is twee-dimensionaal. Voortzetten van de berekening in zee geeft dan ook een zeer aanzienlijke complicatie. Deze uitbreiding van de berekening is in het algemeen niet verantwoord, omdat de veranderingen in de beweging in zee gering zijn. We zullen die veranderingen dan ook verwaarlozen, en wanneer we nu een voldoende ver zeewaarts gelegen plaats in de zeearm als mond opvatten, dan zal de aanneme dat het verticale getij aldaar onafhankelijk is van de stromen door die mond, in het algemeen wel dicht bij de waarheid zijn. Dit moet natuurlijk geverifieerd worden, door een schatting te maken van de verandering in de getijstromen door de mond en de invloed die dit heeft op de verticale getijbeweging in zee.

We gaan er dus van uit dat het verticale getij aan de mond gegeven is, dus dat H als functie van t bekend is.

We zullen verder twee gevallen nader beschouwen, namelijk het geval van een periodiek getij en het geval van een stormvloed. In beide gevallen voegen we aan de twee randvoorwaarden ($Q = 0$ aan het landwaartse einde en $H =$ gegeven functie van t aan het zeewaartse einde) nog een dubbele beginvoorwaarde toe. De motieven die ons bij de bepaling daarvan zullen leiden, zijn enigzins verschillend voor het periodieke getij en voor de stormvloed. We bespreken dit met verwijzing naar onze beschouwingen over beginvoorwaarden uit de vorige paragraaf.

Periodiek getij in de zeearm. De gegevens waar we bij onze berekening van uitgaan zijn in de eerste plaats de gegeven eindpuntsvoorwaarde $Q = 0$ aan de afsluiting, en de eindpuntsvoorwaarde H als gegeven periodieke functie van t aan de mond.

Het periodieke getij is verder bepaald door de voorwaarde dat de getijbeweging op alle plaatsen in de zeearm periodiek in de tijd is. Deze periodiciteitsvoorwaarde kan niet direct in de karakteristieke integratie worden ingevoerd. De wijze waarop we nu te werk moeten gaan, volgt uit de volgende beschouwing:

Eigenlijk stelt het periodieke getij een fictief geval voor, omdat een zuiver periodiek getij nooit optreedt. Toch kunnen we ons in principe wel omstandigheden voorstellen, waarin een periodiek getij zou ontstaan. Daartoe behoeven we slechts te veronderstellen dat het getij aan de mond van de zeearm vanaf een zeker tijdstip t_0 periodiek verloopt; dan zal, onverschillig wat de begintoestand ten tijde t_0 is, na enige tijd de invloed van die begintoestand niet meer merkbaar zijn, en dan is het getij in de hele zeearm praktisch periodiek.

Het periodieke getij is dus te berekenen, door uit te gaan van een willekeurig gekozen beginvoorwaarde. We moeten dan eerst de getijbeweging uitrekenen over een interval T_0 , waarin de invloed van de beginvoorwaarde voldoende ver uitsterft; daarna rekenen we nog over de periode T van het getij verder, om het periodieke getij te leren kennen.

Temidden van de mogelijk te kiezen beginvoorwaarden is er één zodanig, dat als we daarvan uit zouden gaan, de bewegingstoestand ten tijde $t_0 + T$ die we zouden vinden, weer gelijk zou zijn aan die beginvoorwaarde ten tijde t_0 . Bij deze ideale beginvoorwaarde zou dus de uitsterftijd T_0 tot nul zijn teruggebracht. Naarmate de werkelijk gekozen begintoestand minder van deze ideale begintoestand afwijkt, zal de uitsterftijd T_0 korter zijn, en dus de berekening minder lang duren.

We zullen er daarom naar streven met de te kiezen beginvoorwaarde de ideale begintoestand zo goed mogelijk te benaderen. Het meer of minder goed slagen hiervan, is echter niet van invloed op de nauwkeurigheid, doch alleen op de duur van de berekening. Ook een grove schatting van de begintoestand is dus bij gebrek aan beter geheel toelaatbaar, doch wellicht zullen we trachten door een verhang- en bergingsberekening (zie aanh. 5) tot een zo goed mogelijke schatting te komen.

We gaan nu dus de berekening uitvoeren op de in de vorige paragraaf bij fig. 10b besproken wijze, uitgaande van de geschatte beginvoorwaarde. We construeren dus bijvoorbeeld achtereenvolgens de punten S en V, dan T, W, X en Y, vervolgens de karakteristiek UL, hierna MN, enz. .

Geleidelijk aan komen we met de berekening steeds verder in de tijd. Zodra we een volle periode berekend hebben, gaan we vergelijken of de uitkomsten aan het eind van de periode kloppen met de waarden aan

het begin van die periode. In het algemeen zal dit niet het geval zijn; dit wijst er dan op dat onze beginvoorwaarden niet geheel overeenkomstig de ideale beginvoorwaarden zijn geweest. Om dit weg te werken, is het voldoende de berekening nog verder voort te zetten (dus iets meer dan één periode te berekenen).

We blijven daarbij de uitkomsten die we verkrijgen steeds vergelijken met de uitkomsten van juist één periode tevoren. Het blijkt dan dat we na enige tijd geen betekende verschillen meer vinden. Dit is schetsmatig aangegeven in fig. 14.

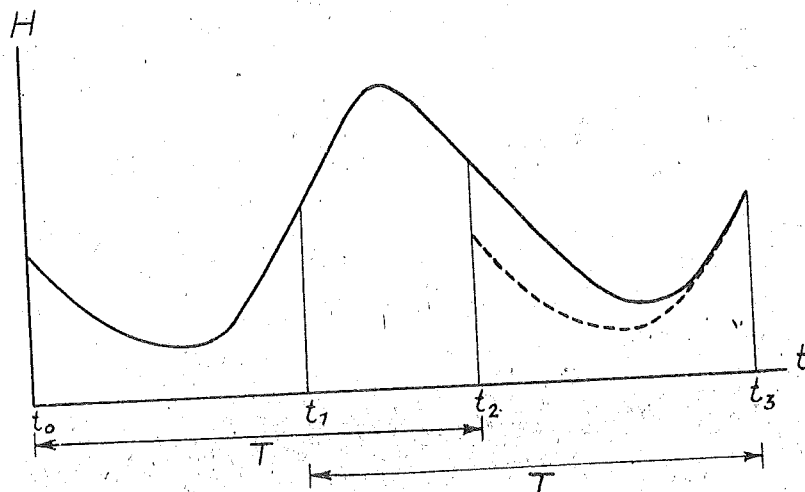


Fig. 14. Bepaling van een periodiek getij door uitdemping van de aangenomen beginvoorwaarde.

Fig. 14 stelt b.v. het berekende verticale getij aan het afgesloten uiteinde voor. De berekening is begonnen met het tijdstip t_0 . Een periode T later, op het tijdstip t_2 , blijkt er nog een betekend verschil tussen begin en eind van de periode te zijn. Dit is duidelijk te zien door vergelijking van de getrokken met de gestippelde kromme; deze laatste geeft het begin van de getrokken kromme weer, doch verschoven over de periode T . Op het tijdstip t_3 blijkt het verschil tussen getrokken en gestippelde kromme praktisch verdwenen te zijn. De berekende

kromme tussen de tijdstippen t_1 en t_3 ($t_1 = t_3 - T$) geeft dan het gevraagde periodieke getij weer.

Het tijdsinterval van t_0 tot t_1 is het uitsterfinterval, waarin de invloed van de afwijkingen tussen de gekozen en de ideale beginvoorwaarde als het ware uitsterft. Dit is te vergelijken met de aanlooptijd die in een getijmodel verloopt alvorens de beweging praktisch zuiver periodiek is.

Een grove schatting van de beginvoorwaarde brengt een langere uitsterftijd $T_0 = t_1 - t_0$ mee dan een nauwkeurige schatting, en dit betekent iets langer rekenen. Daarom moet een nodeloos grove schatting vermeden worden.

In Aanh. 4 hebben we een schatting van de duur van het inloopinterval gemaakt. Het blijkt dat de eb in het algemeen de grootste "damping" van fouten geeft, zodat we de berekening het beste kunnen beginnen tussen het inzetten van de eb en de maximale eb.

De berekening levert ons de verticale en horizontale getijden in de uiteinden der vakken, dus op de plaatsen A, B, enz.. Willen we het getij op een andere plaats kennen, b.v. op de plaats E_1 (zie fig. 10), dan kan dit wellicht het gemakkelijkste bereikt worden door, uitgaande van de getijden in de naastbijgelegen plaats waar we het getij kennen (E in fig. 10), een bergings- en een verhangberekening in het tussenliggende vak (EE_1 in fig. 10) uit te voeren (zie aanh. 5).

Stormvloed in de zeearm. Bij een stormvloed verloopt de berekening in hoofdzaak juist als bij een periodiek getij. Een punt, echter, dat nadere toelichting vereist, is de beginvoorwaarde, omdat hier nu meer van afhangt dan bij het periodieke getij. Hierbij zijn nog verschillende gevallen te onderscheiden.

Wanneer we een min of meer fictieve stormvloed (b.v. super-

stormvloed) willen berekenen, uitgaande van de veronderstelling dat er vóór het werkzaam worden van de storm een (eveneens fictieve) periodieke getijbeweging is, dan kunnen we een tijdstip t_0 bepalen zodanig, dat de storm geacht kan worden vanaf dit tijdstip merkbaar te zijn (er is natuurlijk enige willekeur in de bepaling van dit tijdstip) en dan ontle-
nen we de bewegingstoestand op dit tijdstip als beginvoorwaarde aan de berekening van het periodieke getij, die we veronderstellen reeds eerder gemaakt te zijn.

In andere gevallen zullen we de berekening aanvangen met een zo goed mogelijk geschatte beginvoorwaarde op een tijdstip t_0 dat zo vroeg ligt ten opzichte van de tijd waarop de hoogste waterstanden optreden, dat we er zeker van kunnen zijn dat de invloed van de fouten in de schatting van de beginvoorwaarde uitgestorven is bij het bereiken van de stormvloedstanden. We kunnen dus niet, als bij het periodieke getij, op een willekeurig tijdstip beginnen, uitgaande van een in principe willekeurige beginvoorwaarde, maar we moeten ons van te voren rekenschap geven van de nauwkeurigheid waarmee we de begintoestand kunnen schatten, en van de grootte van het uitsterf-interval.

Bij een stormvloed kan het verder nog nodig zijn de invloed van de wind in rekening te brengen, alsmede het afvoeren van water over kaden of dijken naar onderlopende polders toe. De differentiaalvergelijkingen (1) en (2) moeten dan worden aangevuld tot

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial H}{\partial t} + q_i = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{b-b_s}{gA} \frac{\partial h}{\partial t} + i_r + i_s = 0.$$

Hierin stelt q_i de inunderende afvoer per eenheid van lengte van de rivier voor, en i_s het windverhang.

De inunderende afvoer q_i kan worden bepaald met de formule

$$q_i = \mu^{2/3} \sqrt{2/3 g} (h - h_0)^{3/2},$$

waarin h_0 de hoogte van de kruin van de dijk of de kade voorstelt, en μ een contractiecoëfficiënt is (zie Aanh. 6,2).

Het windverhang i_s is in principe bepaald door de formule

$$i_s = \frac{\tau_s b_w}{\rho g A}$$

waarin τ_s de door de wind op de waterspiegel uitgeoefende schuifspanning, b_w de breedte waarover de wind aangrijpt, en θ de hoek tussen de windrichting en de geul-as is, zodanig dat $\theta = 0$ als de wind in de vloedrichting waait. In smalle waterlopen moet bovendien nog een van θ afhankelijke reductie worden toegepast in verband met de beschuttende invloed van de oevers.

De schuifspanning τ_s is te bepalen uit de windsnelheid v_w , waarbij we evenwel een correctie moeten aanbrengen omdat alleen de relatieve snelheid t.o.v. het water van belang is. We stellen dus

$$\tau_s = \frac{g \rho_a (v_w + v \cos \theta)^2}{C_w^2}$$

waarin ρ_a de dichtheid van de lucht is en C_w een coëfficiënt van het type van Chézy voor de schuifspanning langs de waterspiegel (zie lit. 20).

Men kan C_w op rond $1500 \text{ m}^{1/2}/\text{sec}$ stellen.

Bovendien moet op de bodemschuifspanning een correctie worden aangebracht in verband met de invloed van de wind op de snelheidsverdeling in het water. Dit kan met de formule

$$i_r = \frac{(v + v_w \cos \theta)^2}{C^2 a_s},$$

worden weergegeven (zie lit. 20).

Past men op de met de termen q_i en i_s aangevulde differentiaalvergelijkingen de karakteristieke transformatie volgens par. 3 toe, dan vindt men

$$dH + i_r dx + i_s dx = Z^-(dQ + q_i dx) \quad \text{mits } dx = c^+ dt$$

$$dH + i_r dx + i_s dx = Z^+(dQ + q_i dx) \quad \text{mits } dx = c^- dt$$

in plaats van (19) en (20). Integratie hiervan geeft ons

$$H_2 - H_1 + H_p + H_s = \bar{z}_0 (Q_2 - Q_1 + Q_i),$$

waarbij het -teken voor de afgaande, en het +teken voor de opgaande

karakteristiek geldt. Verder stelt

$$H_s = \int i_s dx$$

het totale windverval over het vak, en

$$Q_i = \int q_i dx$$

de totale inunderende afvoer uit het vak voor.

Bij het uitwerken van de weerstand, corrigeren we Q_1 zowel als Q_m met een bedrag

$$\delta Q = A v_w \cos \theta.$$

Verder voeren we ter bepaling van het windverval een hulpfunctie

$$u = \frac{\rho_a}{\rho} \frac{l}{C_w^2 a_w}, \quad \text{waarin } a_w = A/b_w,$$

in. Deze is een functie van de waterstand h . Het windverval wordt dan:

$$H_s = u (v_w')^2 \cos \theta$$

waarin

$$v_w' = v_w + \frac{Q}{A} \cos \theta$$

Dit is dus als een bekende term op te vatten. Veelal zal het gerechtvaardigd zijn de wederzijdse correcties van de windsnelheid en de stroomsnelheid achterwege te laten. Tenslotte kan voor Q_i gesteld worden

$$Q_i = D_i (h_g - h_0)^{3/2},$$

waarin

$$D_i = u^{2/3} \sqrt[2/3]{g l}$$

de zijdelingse doorlating uit het vak is. In aanh. 6,3 is beschreven hoe we te werk kunnen gaan als deze formule voor Q_i te grof is.

De constructies van fig. 6 en 8, samengevat in fig. 9b, worden nu gewijzigd zoals aangegeven is in fig. 15. Hierbij is aangenomen dat de windkracht in opgaande richting werkt, wat het normale geval is.

Voor andere bijzondere problemen, zoals een inunderende afvoer door een dijkbraak, verwijzen we naar aanh. 6,3.

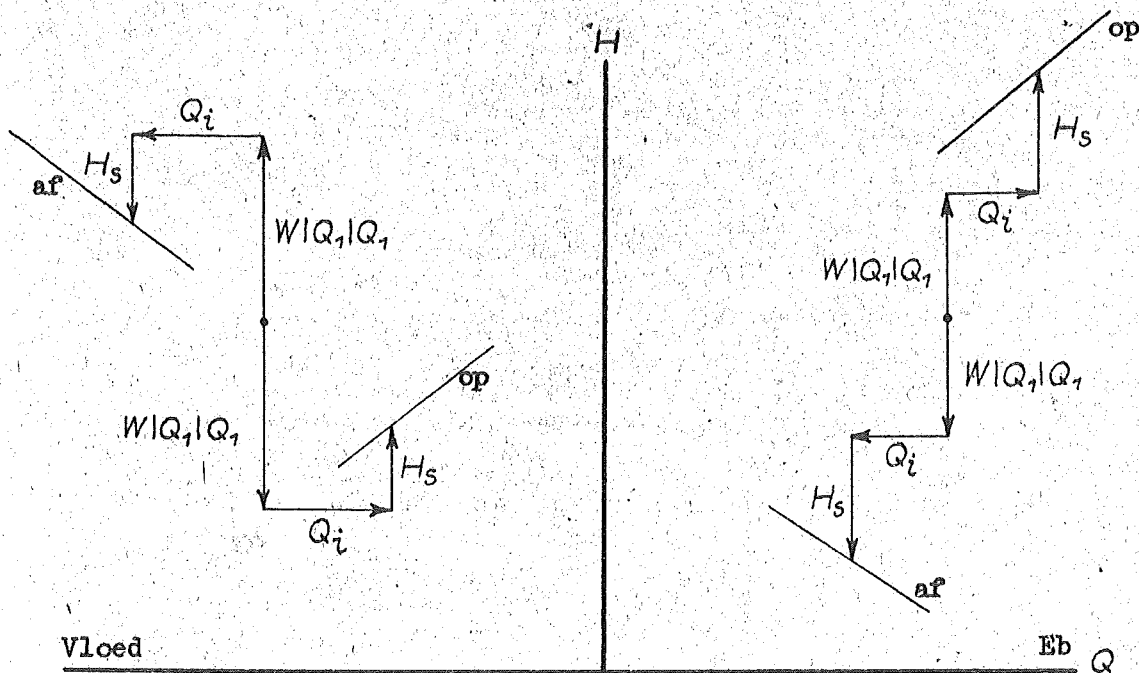


Fig. 15. Schema van de constructie van een contra-subkarakteristiek, indien er een windkracht werkt, en er een inundatie-afvoer uit de rivier is.

Kanaal tussen twee zeeën. In een open kanaal tussen twee zeeën (b.v. het ontworpen Panama sea-level canal) wordt de getijbeweging aan beide uiteinden opgewekt door het verticale getij van de zee aldaar. We hebben dus aan elk uiteinde een gegeven verticaal getij. Voor het overige kan de berekening juist zo worden opgezet als de berekening in een zeearm.

Getijrivier. We beschouwen een onvertakte, in zee uitmondende rivier zonder stuwen. Het getij wordt dan vanaf de mond voortgeplant de rivier op, waarbij het geleidelijk aan uitsterft.

De voorwaarde aan de mond is van dezelfde aard als bij de zeearm. Ook het beginvoorwaardeprobleem pakken we op overeenkomstige wijze aan.

De afsluitingsvoorwaarde $Q=0$ wordt nu vervangen door de voorwaarde dat het getij naar boven toe uitsterft. Hierbij moet de bovenafvoer gegeven zijn.

Om het uitsterven na te gaan, berekenen we van te voren eerst de permanentie bij de gegeven bovenafvoer, dus de vervallen in de vakken in het vermoedelijke overgangsg gebied (dat is het gebied waar het getij uitsterft), bij die bovenafvoer. Deze permanentie wordt weergegeven in het HQ -diagram door een reeks beeldpunten, alle met dezelfde abscis, n.l. de bovenafvoer, en met ordinaten die de energiehogten op de eindpunten der vakken weergeven.

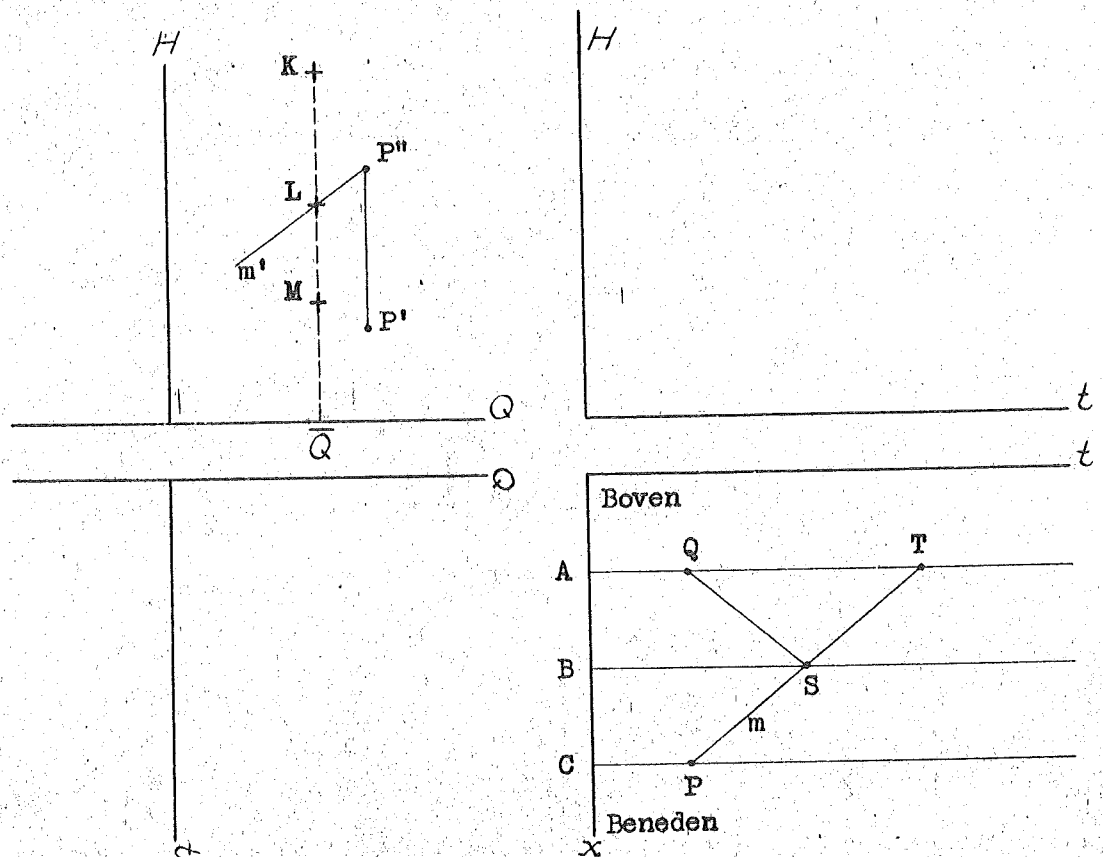


Fig.16. Constructie voor de getijbeweging die uitsterft bij het oplopen van een rivier. (De Ht -en Qt -diagrammen zijn om der wille van de overzichtelijkheid niet verder uitgewerkt.)

In fig. 16 is K het beeldpunt voor de plaats A bij de bovenafvoer \bar{Q} . Evenzo behoort het beeldpunt L bij de plaats B , en het beeldpunt M bij de plaats C . Deze beeldpunten geven dus de permanentie weer.

Vervolgens gaan we de getijberekening uitvoeren:

Laat er bij C nog getijbeweging zijn, en laat P' het beeldpunt

van de bewegingstoestand in C op zeker tijdstip (zie beeldpunt P in het tx -vlak) zijn, dat door voorafgaande constructie van beneden af bepaald is. Van P(P') uit construeren we nu de oplopende karakteristiek PS(P'S'). Wanneer dan de constructielijn m' van de contra-subkarakteristiek juist door het beeldpunt L blijkt te gaan, dan betekent dit dat de getijbeweging bij B praktisch uitgestorven is, althans op het tijdstip waarop het beschouwde golfpunt in B aankomt. Het beeldpunt S' valt dan samen met het beeldpunt L.

Gaat de lijn m' niet door L, dan is de getijbeweging in B nog niet uitgestorven. We moeten dan het beeldpunt S' bepalen door de karakteristiek QS(Q'S') te construeren, waarbij Q' samenvalt met K. Daarna kunnen we het oplopende golfpunt door middel van de karakteristiek ST(S'T') verder vervolgen om op dezelfde wijze na te gaan of de getijbeweging is uitgestorven bij aankomst in A.

Strikt genomen is de getijbeweging nergens uitgestorven. We zullen daarom tevreden zijn als de getijbeweging zo zwak is dat ze beneden de waarnemingsgrenzen voor waterstanden en afvoeren komt te liggen. We zien dit daaraan, dat de lijn m' het punt L op zeer kleine afstand passeert.

Is de rivier gestuwd, en wordt de bovenafvoer zodanig doorgelaten dat er geen invloed van het benedenpeil op de afvoer is (b.v. afvoer over overstort), dan hebben we in plaats van de afsluitingsvoorwaarde $Q=0$ van de zeearm, een gegeven afvoer als eindpuntsvoorwaarde. Deze afvoer is hetzij constant, hetzij een gegeven functie van tijd. De constructie voor de aankomst van een golfpunt bij de stuw verloopt op overeenkomstige wijze als voor de aankomst bij de mond, doch met gebruikmaken van het Qt -diagram in plaats van het Ht -diagram. Dit is in fig. 17 nader verduidelijkt.

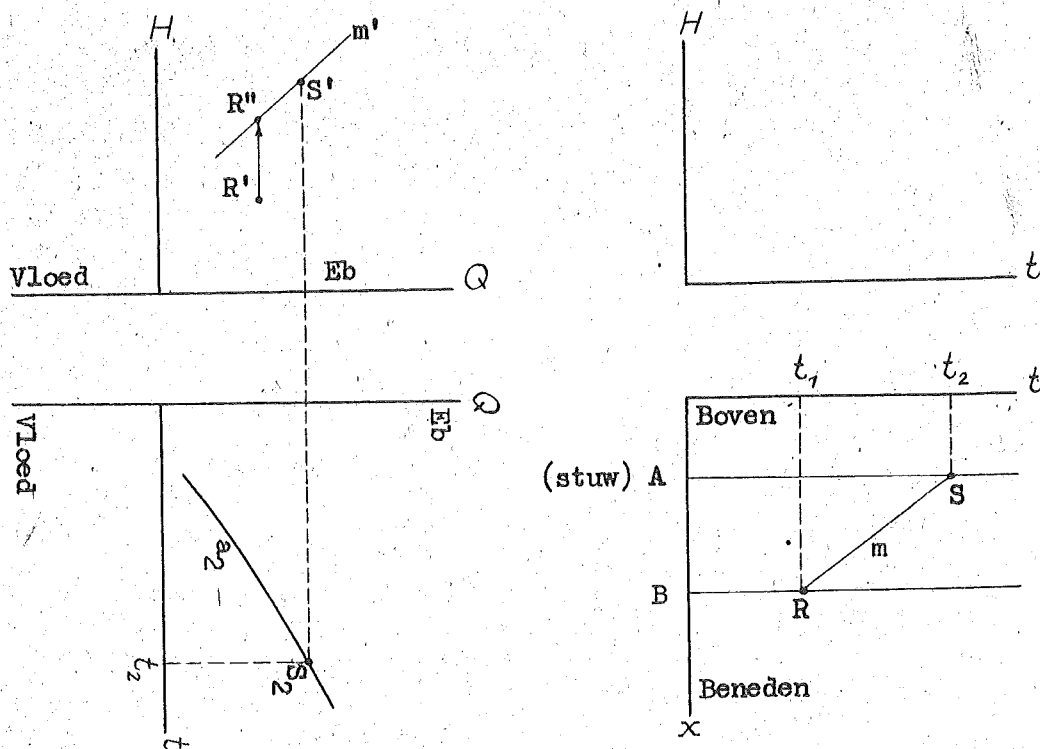


Fig. 17. Constructie voor de aankomst van een golfpunt (oplopend) op een plaats van gegeven afvoer (stuw met afvoer onafhankelijk van het benedenpeil).

Voor het geval van een stuw met een afvoer die ook nog de invloed van het benedenpeil ondergaat, zodat de getijbeweging tot boven de stuw doordringt, verwijzen we naar par. 8.

In bijlage 2 is bij wijze van voorbeeld een fragment van een getijberekening opgenomen.

8. Samengestelde systemen.

Getijberekeningen in samengestelde systemen van zeearmen en benedenrivieren vergen in het algemeen meer werk dan berekeningen in enkelvoudige geulen. Hiervoor kunnen twee redenen aanwezig zijn:

In de eerste plaats komt men in samengestelde systemen tot grotere aantallen vakken dan in enkelvoudige rivieren. Met het aantal vakken neemt de hoeveelheid rekenwerk toe.

In de tweede plaats moeten bepaalde voorwaarden op de knooppunten der geulen in acht worden genomen, om de onderlinge beïnvloeding van de geulen juist weer te geven. Deze noodzaak om de geulen in onderlinge samenhang te behandelen, kan een complicatie van de berekening vormen. In de ene methode van getijberekening is die complicatie echter groter dan in de andere.

Nu is het aantrekkelijke van de karakteristieke methoden in dit verband gelegen in het feit, dat de knooppuntsvoorwaarden zo gemakkelijk in rekening gebracht kunnen worden, dat dit op zichzelf geen noemenswaardige complicatie geeft.

Een indirecte complicatie kan echter in sommige gevallen, vooral bij ingewikkelde systemen optreden, in verband met de vakindeling van de waterlopen waaruit het systeem bestaat. Bij de meer eenvoudige systemen, samengesteld uit een klein aantal waterlopen, is deze complicatie meestal te vermijden, en dan kan de tijd die de berekening vergt, evenredig met het aantal vakken gesteld worden.

We zullen nu in deze paragraaf twee voorbeelden van eenvoudige samengestelde systemen behandelen. In de volgende paragraaf zullen we dan ingaan op de moeilijkheden waar we bij ingewikkelde systemen mee te maken kunnen krijgen.

Rivier met twee monden. In het delta-gebied volgens fig. 18 is GK een stuk van de benedenloop van een rivier, die zich bij K splitst

in de takken KM en KN, die beide in zee uitmonden. Laat de getijbeweging ongeveer bij G uitgestorven zijn.

We beginnen met de drie rivieren, uitgaande van het knooppunt K, in vakken van ongeveer gelijke voortplantingstijd te verdelen; de onvertakte rivier stroomopwaarts van K wordt verdeeld in de vakken KA, AJ, JH, en HG, en de beide takken KM en KN in de vakken KB, BL en LM, resp. KC, CD, DE, EF en FN.

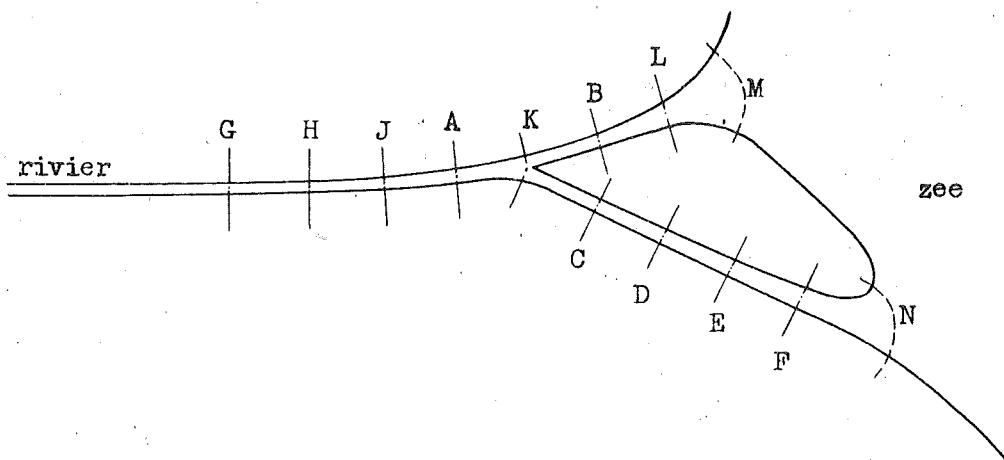


Fig. 18. Rivier met twee monden.

In M hebben we een gegeven verticaal getij, evenals in N, en ongeveer bij G moet de afvoer overgaan in de bovenafvoer van de rivier. Aan deze voorwaarden moeten we nu nog drie voorwaarden voor het knooppunt K toevoegen. Wanneer bij K bij het overgaan van water van één der geulen naar een andere geul, geen energie gedissipeerd wordt, geldt voor de energiehogten bij K:

$$H_a = H_b$$

$$H_a = H_c$$

waarin H_a , H_b , resp. H_c de energiehogte bij K in de geul AK, BK, resp. CK voorstelt. Verder geldt voor de afvoeren:

$$Q_a = Q_b + Q_c$$

Dit zijn de drie knooppuntsvoorwaarden bij K. Voor een meer uitvoerige behandeling van de knooppuntsvoorwaarden verwijzen we naar aanh. 6,1.

Evenals bij de gevallen die in de vorige paragraaf besproken werden, moeten we ook in dit geval beginvoorwaarden opstellen.

Voor elk der drie geulen GK, KM en KN richten we een stel diagrammen (HQ -, tx -, Ht - en Qt - diagrammen) in. Hierin verlopen de berekeningen geheel volgens de richtlijnen uit de vorige paragraaf, tot dat we in één der vakken AK, KB of KC een naar K toe lopend golfpunt moeten nagaan; dan krijgen we te maken met de knooppuntsvoorwaarden.

Om deze knooppuntsvoorwaarden in rekening te brengen beschouwen we steeds drie golfpunten die gelijktijdig uit elk der vakken AK, KB en KC in K aankomen. We krijgen dan de volgende constructie:

Ontmoeting van drie golfpunten op een knooppunt. We stellen

ons ten doel de bewegingstoestanden in elk der vakken op een zeker tijdstip t_2 te bepalen, en construeren daartoe de geschiedenis van de drie golfpunten die elkaar op dat tijdstip in K ontmoeten.

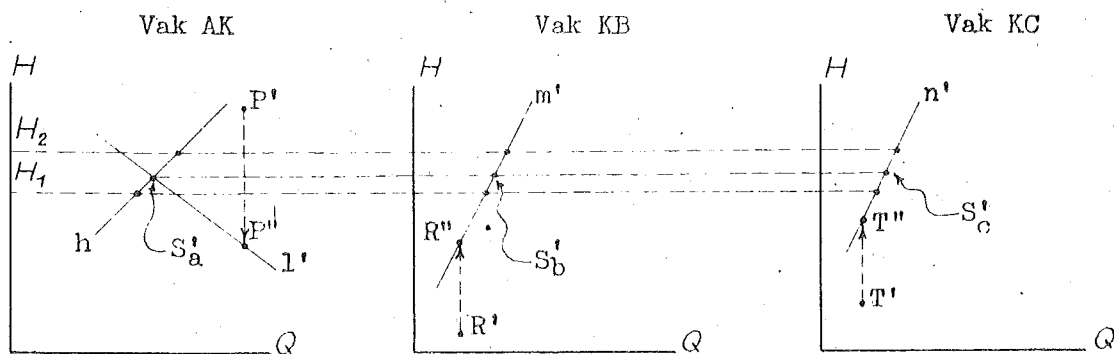


Fig. 19. Constructie voor de ontmoeting van drie golfpunten op een knooppunt van waterlopen (vertakkingspunt).

We voeren in elk der vakken eerst een constructie van de subkarakteristiek, en daarna van de contra-subkarakteristiek uit, juist op dezelfde wijze als voor een overgang tussen twee vakken (zie fig. 12). In het vak AK volgen we dus een aflopend golfpunt, en in het vak KB, evenals in het vak KC, een oplopend golfpunt.

Laat l' in fig. 19 het resultaat van de constructie voor het

aflopende golfpunt in AK zijn, en laten m' en n' evenzo de resultaten voor de oplopende golfpunten in KB en KC zijn. Voor twee waarden van H , H_1 en H_2 , sommeren we de door m' en n' gegeven waarden van Q_b en Q_c , en zetten deze in het HQ -diagram van AK uit. Door de gevonden beeldpunten te verbinden verkrijgen we de hulplijn h , die als het ware de resultante van de twee oplopende golfcomponenten uit KB en KC weergeeft. Het snijpunt S'_a van h en l' geeft de bewegingstoestand bij K in AK ten tijde t_2 weer, en de op gelijke hoogte gelegen beeldpunten S'_b en S'_c op m' en n' geven de toestanden in KB en KC weer.

Het verloop van de berekening is nu als volgt:

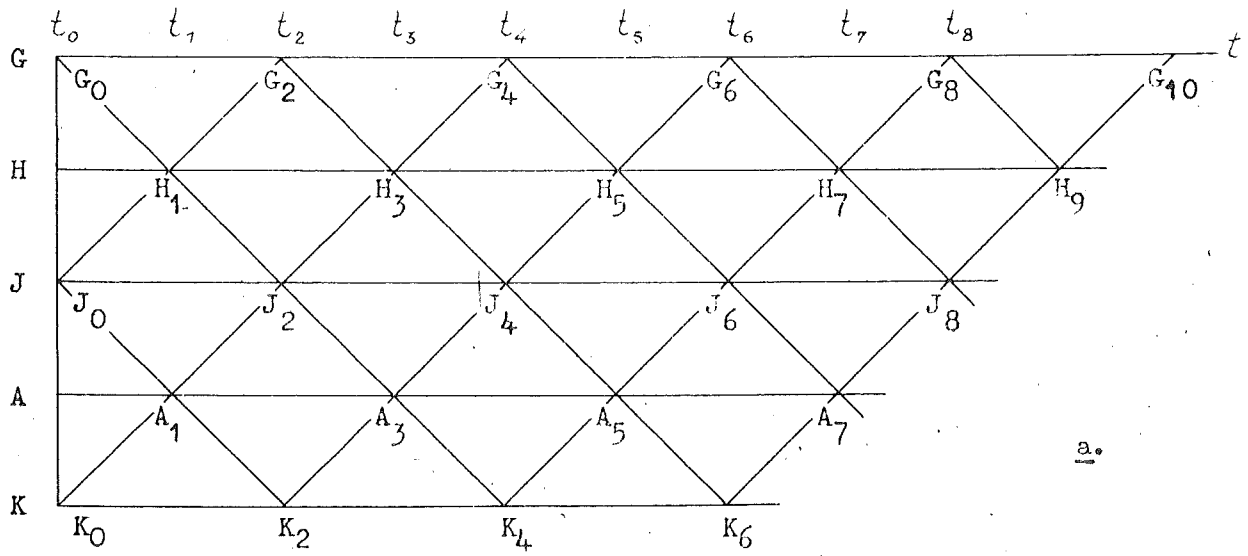
Laat de beginvoorwaarden in de drie geulen voor het tijdstip t_0 gegeven zijn. We rekenen dan volgens het schematische subkarakteristiekendiagram van fig. 20 (zie pag. 66), b.v. in de volgende volgorde:

Eerst rekenen we in de onvertakte rivier ongeveer van de beeldpunten G_0 en J_0 uit naar het beeldpunt H_1 , en van daar naar het beeldpunt G_2 . De berekening in de onvertakte rivier GK verloopt in hoofdzaak juist op dezelfde wijze als we beschreven in par. 6 bij de getijrivier (zie fig. 16). We gaan dus na of er op de plaats G nog getijbeweging merkbaar is, op dezelfde wijze als waarop we dit in par. 6 voor de plaats B nagingen. We zullen aannemen dat we steeds vinden dat in G de getijbeweging praktisch uitgestorven is.

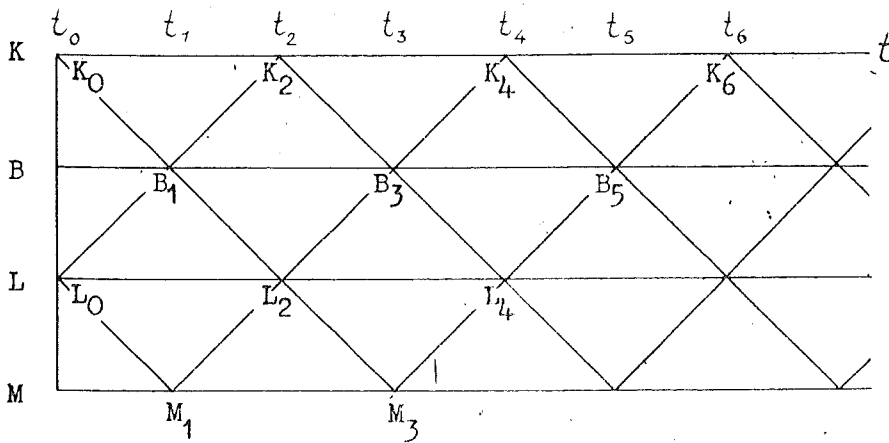
Op dezelfde wijze rekenen we ook langs de subkarakteristiek $K_0 A_1 J_2 H_3 G_4$ naar boven.

Vervolgens rekenen we in de tak KM van de beeldpunten K_0 en L_0 naar B_1 , en in de tak KN van de beeldpunten K_0 en D_0 naar C_1 .

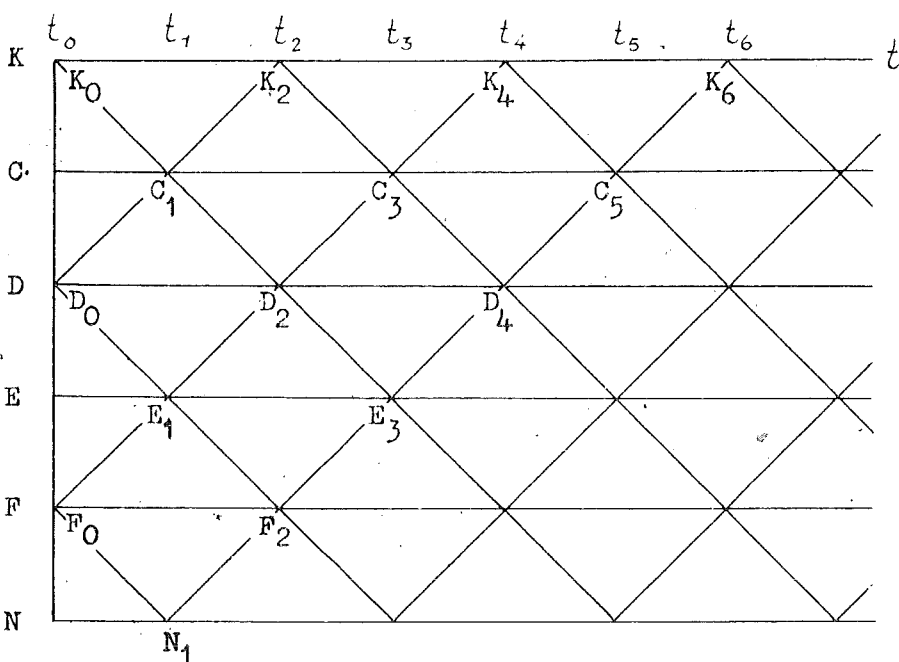
We gaan nu de knooppuntsvoorwaarden voor het tijdstip t_2 in rekening brengen, op de wijze als besproken werd bij fig. 19. We beschouwen dus drie golfpunten die op het tijdstip t_2 in K elkaar ontmoeten; dit zijn een aflopend golfpunt in de rivier GK, en twee oplopende golf-



a.



b.



c.

Fig. 20. Gang van een berekening in een drie-geulen-stelsel.

punten, één in de tak KM en één in de tak KN. De reis van het aflopende golfpunt door het vak AK wordt door de globale subkarakteristiek A_1K_2 weergegeven, en de reizen van de oplopende golfpunten door de vakken KB en KC worden door B_1K_2 en C_1K_2 weergegeven. Met behulp van de reeds berekende bewegingstoestanden op de plaatsen A, B en C op het tijdstip t_1 , kan dus de constructie volgens fig. 19 worden uitgevoerd, en daarmee vinden we de bewegingstoestanden in de drie geulen op het knooppunt K, op het tijdstip t_2 .

Hierna kan in de onvertakte rivier langs $K_2 A_3 J_4 H_5 G_6$ en zo nodig verder omhoog gerekend worden tot de grens van het getijgebied.

De berekeningen in de vakken KM en MN verlopen verder op soortgelijke wijze als in par. 6 beschreven werd bij de zeearm. We rekenen dus van L_0 naar M_1 met gebruik maken van de eindpuntsvoorwaarde aan de mond M (zie fig. 13). Hierna kan opgaand langs M_1 en L_2 naar B_3 gerekend worden. In de andere tak rekenen we langs $F_0 E_1 D_2$ naar C_3 .

Als we zover zijn, kunnen we de constructie van fig. 19 opnieuw toepassen, en zo vinden we dan de bewegingstoestanden in de drie geulen op het knooppunt K op het tijdstip t_4 .

Op overeenkomstige wijze klimmen we dan langs $N_1 F_2 E_3 D_4 C_5$ en $M_3 L_4 B_5$ omhoog, construeren K_6 , en klimmen weer verder omhoog langs $K_6 A_7 J_8 H_9 G_{10}$.

Het is duidelijk dat we op deze wijze zonder betekenend extra werk, de knooppuntsvoorwaarden in K systematisch in rekening brengen.

Doordringen van het getij op het riviergedeelte boven een stuw.

We beschouwen nu het geval dat we in de vorige paragraaf nog lieten rusten, n.l. het geval van een getijrivier met een stuw, waarbij het benedenpeil wel invloed heeft op het bovenwater, zodat het getij, zij het ook verzwakt, tot boven de stuw doordringt.

Laat in de rivier van fig. 21, die bij M in zee mondt, in K een

stuw zijn gelegd, en laat het getij boven K nog tot nabij A doordringen.

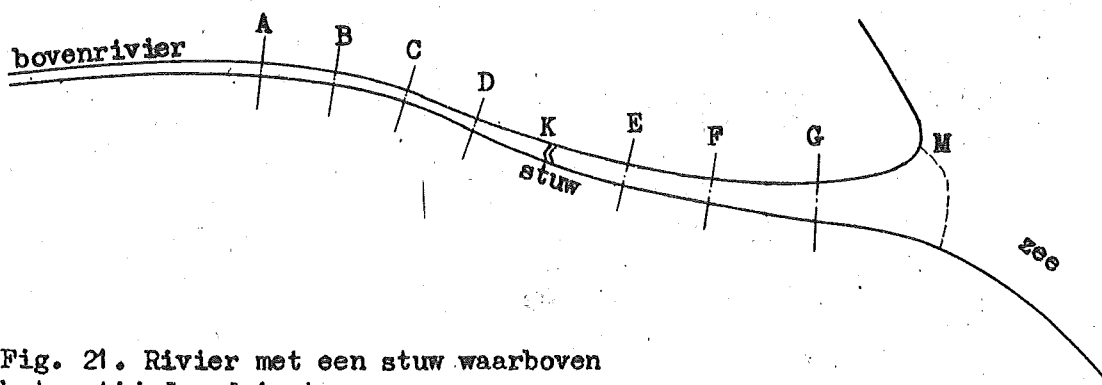


Fig. 21. Rivier met een stuw waarboven het getij doordringt.

We beginnen weer met een vakindeling van de rivier te ontwerpen, uitgaande van de plaats K waar de stuw ligt.

We beschouwen nu de rivier als samengesteld uit de benedenloop KM, en de bovenloop AK. Bij M hebben we een gegeven verticaal getij, en stroomopwaarts, ongeveer bij A, hebben we de voorwaarde dat het getij uitsterft.

Hieraan moeten we toevoegen een tweetal voorwaarden voor de stuw. De eerste voorwaarde houdt in dat de afvoer bij K uit het vak DK, gelijk is aan de toevoer bij K naar het vak KE. M.a.w. er is bij K geen discontinuïteit in de afvoer Q.

De tweede voorwaarde heeft betrekking op de weerstand die gemeerd is met het doorlaten van de stroom door de stuw. Deze voorwaarde moet dus worden afgeleid uit de constructie van het doorlatende deel van de stuw. In het algemeen zal deze voorwaarde in de vorm

$$H_a = H_b + H_r(Q, H_b, t)$$

gebracht kunnen worden. Wordt het water eenvoudig doorgelaten door een spleet voldoende diep onder water (zie fig. 22), dan kunnen we stellen

$$H_r = W_s |Q|Q,$$

waarin W_s de weerstandscoefficiënt van de doorlaatopening is; deze kun-

nen we bepalen volgens

$$W_s = \frac{\eta}{2g\mu^2 A_s^2},$$

waarin η een coëfficiënt voor vertragsingsverliezen, μ een contractiecoëfficiënt, en A_s het dwarsoppervlak van de spleet is.

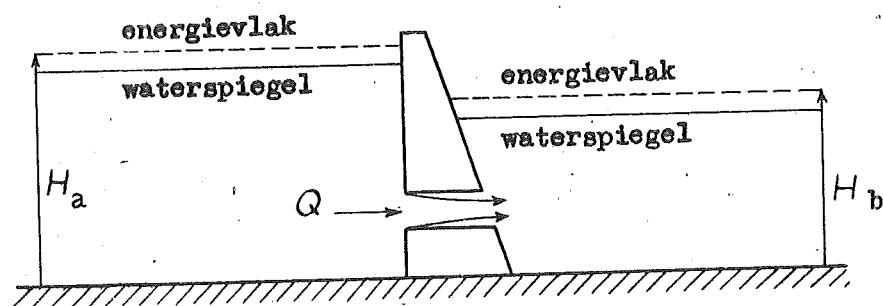


Fig. 22. Doorsnede van een stuw met doorlaatopening onder water.

We gaan weer, evenals bij de voorgaande vraagstukken, van beginvoorwaarden uit. In de benedenloop KM, zowel als in de bovenloop AK, verloopt de berekening dan verder op de wijze als uiteengezet in par. 6, behalve zodra we een golfpunt nagaan dat door het vak DK, of door het vak KE, naar de stuw K toeloopt; in dat geval moeten we de voorwaarden van de stuw in rekening brengen. Daartoe beschouwen we steeds gezamenlijk een golfpunt dat van beneden, en een golfpunt dat van boven af de stuw bereikt, en wel beide op hetzelfde tijdstip.

We zullen de constructie voor de bewegingstoestanden juist boven en juist beneden de stuw, op het tijdstip t_4 (zie fig. 23) bespreken. We nemen dus aan dat de berekening zover gevorderd is, dat de bewegingstoestanden op de plaatsen D en E tot het tijdstip t_3 bekend zijn, b.v. doordat we na de reeks punten T-U-V, van de mond in de benedenloop langs W-R geïntegreerd hebben. We zullen dan, na de constructie van de beeld-

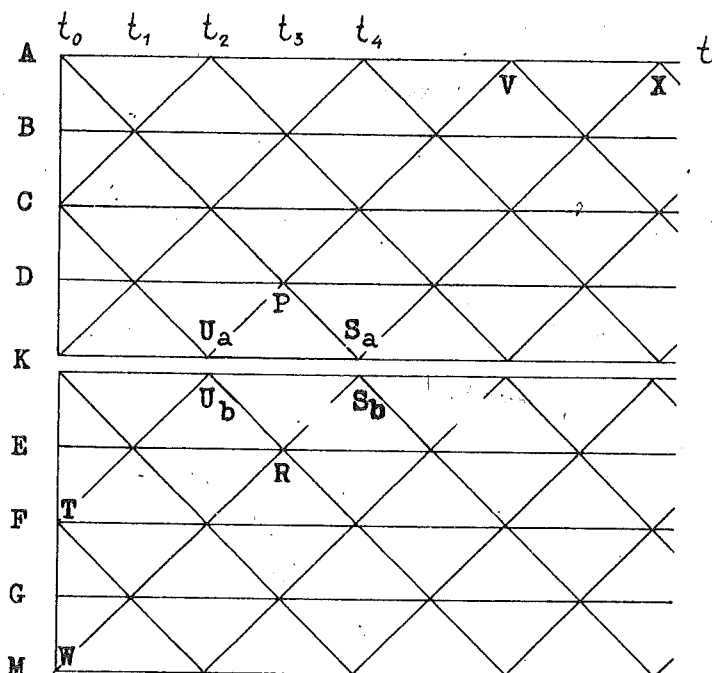


Fig. 23. Gang van een berekening op een rivier met stuw.

punten S_b (S'_b) en S_a (S'_a) bij de stuw, de integratie in de bovenloop vervolgen naar X.

De constructie voor de beeldpunten bij de stuw verloopt aldus:

Ontmoeting van twee golfpunten op een plaats met energieverval (stuw). Het begin van de constructie komt overeen met het begin van de constructie wanneer er geen energieverval bij de overgang van de twee vakken is (zie fig. 12). Na de subkarakteristieken, construeren we dus de contrasubkarakteristieken vanuit de beeldpunten P' en R'; dit geeft de lijnen l' en m' (zie fig. 24a). Hierna gaan we als volgt verder te werk:

Voor twee waarden Q_1 en Q_2 in de buurt van de naar schatting te verwachten afvoer ten tijde t_4 , wordt bij de waarde van H die door de lijn m' wordt bepaald, het bij de waarde Q_1 of Q_2 behorende energieverval van de stuw, H_r , opgeteld. Aldus vinden we twee waarden voor

H boven de stuw. Voor andere waarden van Q dan Q_1 en Q_2 interpoleren we lineair door de lijn k te trekken. Het snijpunt van k met l' ,

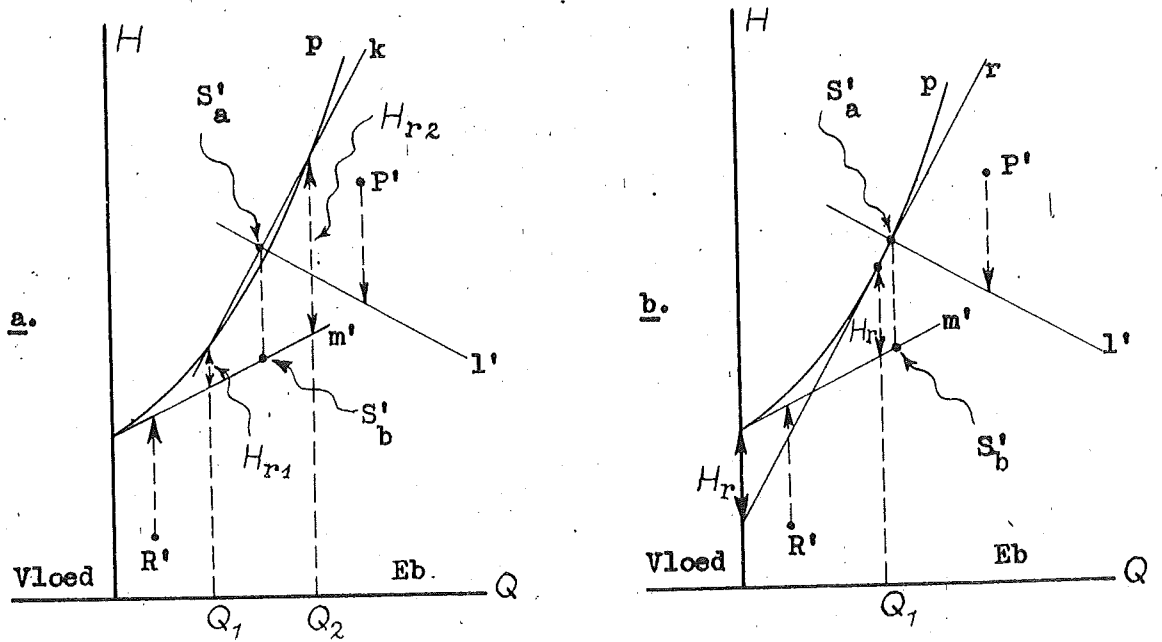


Fig. 24. Constructie bij een overgang tussen twee vakken met een extra weerstand (stuw met doorlaatopening).

S'_a geeft nu de bewegingstoestand ten tijde t_4 juist boven de stuw weer. Het punt S'_b recht onder S'_a op m' , geeft de toestand juist beneden de stuw weer.

Men kan natuurlijk ook, uitgaande van l' , de gegevens van de bovenstroomse golfcomponent naar beneden overbrengen; men vindt dan ineens S'_b als snijpunt van een uit l' afgeleide hulplijn k of r met m' .

De meetkundige plaats van de punten, die we vinden door het verval van de stuw boven de lijn m' uit te zetten, is een parabool p , die die aan de lijn m' raakt in het punt waar m' de H -as snijdt. De hulplijn k is een koorde van deze parabool.

In plaats van met de koorde k , kunnen we de constructie ook uitvoeren met een raaklijn r (fig. 24b), die we vinden door voor één waarde Q_1 het verval H_r boven m' uit te zetten, en eveneens langs de H -as beneden het snijpunt met m' .

9. Complicaties bij de vakindeling van een samengesteld systeem.

Karakteristieke integratie komt in het algemeen neer op het bepalen van de geschiedenis van golfpunten. Bij een numerieke of grafische methode kan men slechts een eindig aantal golfpunten behandelen, en we moeten dan een aantal golfpunten temidden van het in principe oneindig grote aantal golfpunten uitkiezen, zodanig dat de gekozen golfpunten voldoende nauwkeurig de getijbeweging weergeven.

Hoe meer golfpunten men gaat berekenen, des te nauwkeuriger kan men in beginsel de getijbeweging bepalen; doch ook het aantal constructies neemt dan toe, en daarmee de tijd die met de berekening gemoeid is. Het heeft praktisch ook geen zin het aantal te berekenen golfpunten onbeperkt groter te maken, omdat de daarmee te bereiken verfijningen in het niet gaan zinken bij de onvermijdelijke fouten die het gevolg zijn van onnauwkeurigheden in de gegevens van de berekening (afmetingen der rivier, coëfficiënt van Chézy, getijden in zee, bovenafvoeren, enz.)

Het is uit praktisch oogpunt ^{gewenst} de hoeveelheid rekenwerk die nodig is om een bepaalde nauwkeurigheid te bereiken, zo klein mogelijk te maken, of anders gezegd, om de golfpunten zo doelmatig mogelijk te kiezen. Bij de in deze nota beschreven methode wordt dit bereikt door middel van het schema van de globale subkarakteristieken, in verband met een van te voren vast te stellen vakindeling der rivieren. Zit dit schema goed in elkaar, dan sluiten de constructies zo dicht bij elkaar aan, dat de niet geheel te vermijden gapingen in het netwerk van de karakteristieken met kleine inter- en extrapolaties overbrugd kunnen worden.

Het schema van de globale subkarakteristieken komt neer op een indeling van de tijd ^{in intervallen} en een indeling van de rivieren in vakken. Het is vooral de vakindeling die bij ingewikkelde netwerken van geulen moeilijkheden oplevert. We zullen dit bespreken aan de hand van een aantal eisen die we aan de vakindeling kunnen stellen.

De eerste eis is, dat ieder knooppunt van drie of meer geulen,

en iedere plaats waar de getijbeweging op bijzondere wijze beïnvloed wordt (zoals een stuw of een grote profielsverandering), een vakuiteinde wordt.

De tweede eis bestaat daarin, dat alle vakken ongeveer dezelfde maatgevende looptijd hebben. Bij een periodiek getij heeft men liefst ook nog dat deze looptijd een geheel aantal keren op de getijperiode begrepen is.

De derde eis is, dat in een netwerk van geulen, in iedere maas een even aantal vakken geteld wordt. We kunnen deze eis als volgt toelichten:

De tijdstippen t_0 , t_2 , t_4 enz., zoals die b.v. in fig. 10b zijn aangegeven, zullen we "even" tijdstippen noemen, en de andere tijdstippen, t_1 , t_3 , t_5 enz., zullen we "oneven" tijdstippen noemen. Op plaatsen zoals A, C en E in fig. 10 vinden we de getijbeweging op de "even" tijdstippen, en op plaatsen zoals B, D en F vinden we haar op de "oneven" tijdstippen. We zullen de plaatsen dienovereenkomstig onderscheiden als "even" en "oneven" plaatsen.

Langs een geul wisselen even en oneven plaatsen elkaar af. Komen we op een knooppunt van geulen, dan zal, in verband met de constructie van fig. 19, het knooppunt voor alle geulen een even plaats moeten zijn, of voor alle geulen een oneven plaats. Het knooppunt kan echter niet een even plaats voor de vakindeling van de ene geul zijn, en tegelijk een oneven plaats voor de vakindeling van een andere geul. Dit betekent, dat, hoe we ook door het netwerk van vak tot vak heengaan, steeds even en oneven plaatsen elkaar moeten afwisselen. Dit houdt echter in, dat we bij rondgaan langs de geulen van een maas van een netwerk, een even aantal vakken moeten tellen. Indien dit klopt voor de enkelvoudige mazen zoals A B E A en B C D E B in fig. 25, dan klopt het ook voor samengestelde mazen als A B C D E A.

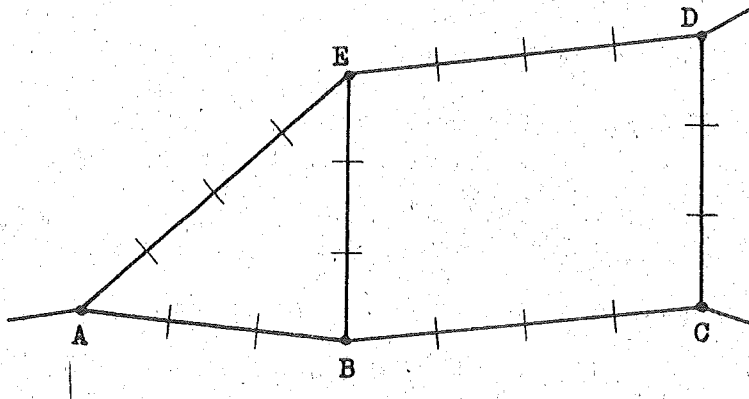


Fig. 25. Vakindeling bij een netwerk met twee enkelvoudige mazen.

Naast deze drie eisen moeten we er ten eerste nog rekening mee houden dat de lengte van de vakken niet te groot mag worden, opdat de benaderingen die ingevoerd werden voor de integratie (zie par. 5 en aanh. 2), toelaatbaar blijven. Ook de looptijd τ_m moet vrij klein zijn, opdat we voor elke getijkromme een zo groot aantal punten krijgen, dat de kromme daardoor voldoende ondubbelzinnig bepaald is.

Ten tweede moeten we er mee rekening houden, dat de hoeveelheid rekenwerk toeneemt met het aantal vakken, en ook met het aantal intervallen in de tijd. Daar dit laatste aantal ongeveer evenredig is met het eerste aantal, stijgt de hoeveelheid rekenwerk ongeveer evenredig met het kwadraat van het aantal vakken. Om de hoeveelheid rekenwerk zo veel mogelijk beperkt te houden, moeten we er dus naar streven het aantal vakken klein te houden, dat wil zeggen de lengte van de vakken zo groot te nemen als praktisch uitvoerbaar is in verband met de benaderingen bij de integratie, en met de drie eisen waaraan de vakindeling moet voldoen.

Indien deze laatste overweging niet gold, dan zou aan de drie eisen gemakkelijk voldaan kunnen worden door met een groot aantal vakken te werken. De wenselijkheid echter aan dit aantal paal en perk te stellen, kan er toe leiden een vakindeling te ontwerpen die niet volledig aan de drie eisen voldoet; de oonsequenties daarvan moeten dan door een of meer kunstgrepen worden ondervangen.

Beschouw als voorbeeld het stelsel der Benedenrivieren in fig. 26. Hier is een vakindeling aangegeven voor het gemiddelde getij, die in belangrijke mate aan de gestelde eisen voldoet, doch niet volledig. Laten we even de Kil en het Haringvliet bezuiden Tiengemeten buiten beschouwing, dan zijn alle knooppunten ook eindpunten van vakken. Alle vakken hebben nagenoeg een gemiddelde looptijd van 745 sec, dat is 12 maanminuten (dit betekent dus in iedere getijkromme 30 punten per getijperiode). De netwerkmaas bestaande uit Nieuwe Maas, Oude Maas en Noord telt $4+6+2 = 12$ vakken, en de netwerkmaas bestaande uit Haringvliet - Vuilegat, Hollandsdiep, Nieuwe Merwede, Benedenmerwede, Oude Maas en Spui telt $2+4+4+3+4+3 = 20$ vakken.

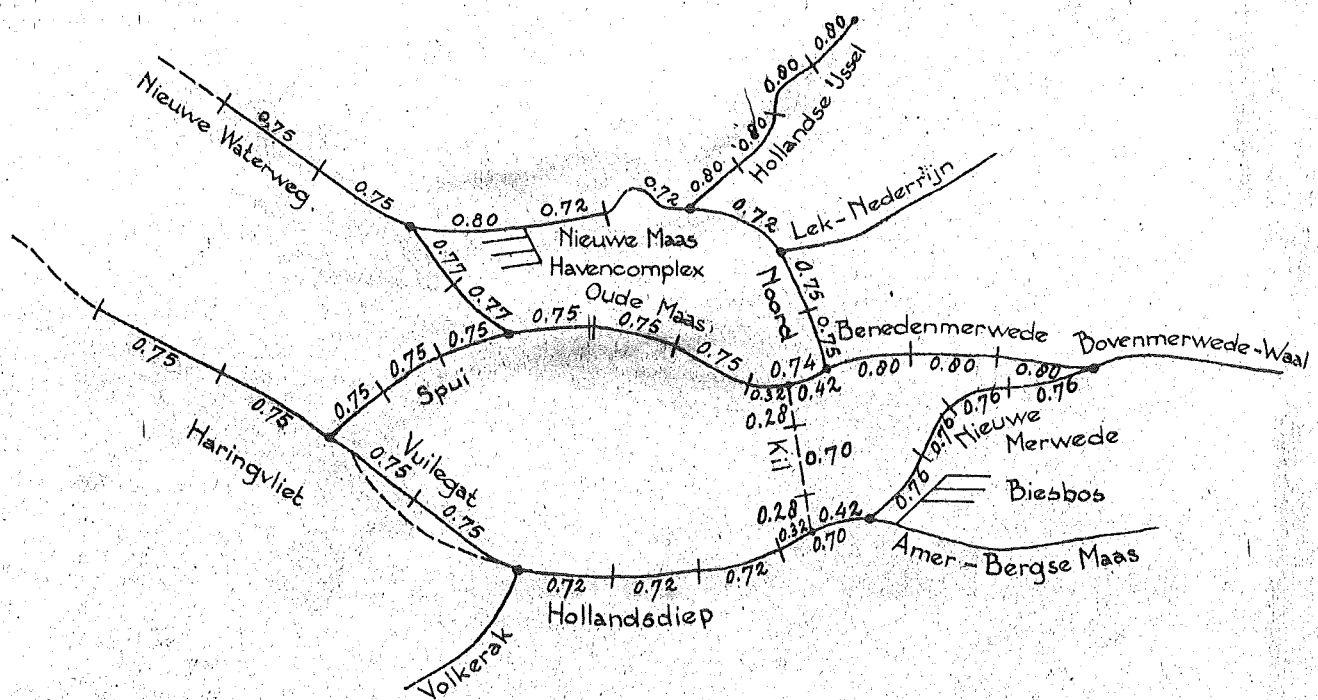


Fig. 26. Samengesteld netwerk (Benedenrivieren) met vakindeling; de getallen geven de gemiddelde looptijd bij normaal getij aan (de ksec als eenheid).

We zullen hier nu niet in gaan op elementen in het systeem, zoals de Rotterdamse havens, die zich, met gebruik maken van middelen als beschreven in aanh. 6,3, behoorlijk in het schema laten inpassen. We willen hier onze aandacht wijden aan elementen, zoals de Kil, die de toepassing van een overigens bevredigend schema in de weg staan.

We zouden een schema kunnen ontwerpen waarin ook de Kil ingepast was, wanneer we inplaats van een looptijd van 745 sec een looptijd van ongeveer 370 sec tot uitgangspunt zouden kiezen. Daarmee zou evenwel de hoeveelheid rekenwerk ongeveer verviervoudigen. In plaats daarvan kunnen we beter het schema met $\tau_m = 0,75$ ksec aanhouden, ten koste van enige plaatselijke complicaties, die we nu hier nader beschrijven voor de omgeving van de uitmonding van de Kil in het Hollandsdiep.

Constructie voor een secundair knooppunt. De Kil mondt in het Hollandsdiep uit ongeveer in het midden van het laatste vak van het Hollandsdiep. We delen de Kil nu in drie vakken, het middelste vak met een looptijd van ongeveer τ_m , en de vakken aan de uiteinden van ongeveer $\frac{1}{2} \tau_m$. Dit is in fig. 27a aangegeven. De schema's van de globale subkarakteristieken worden hierbij ontworpen als aangegeven in fig. 27b en c.

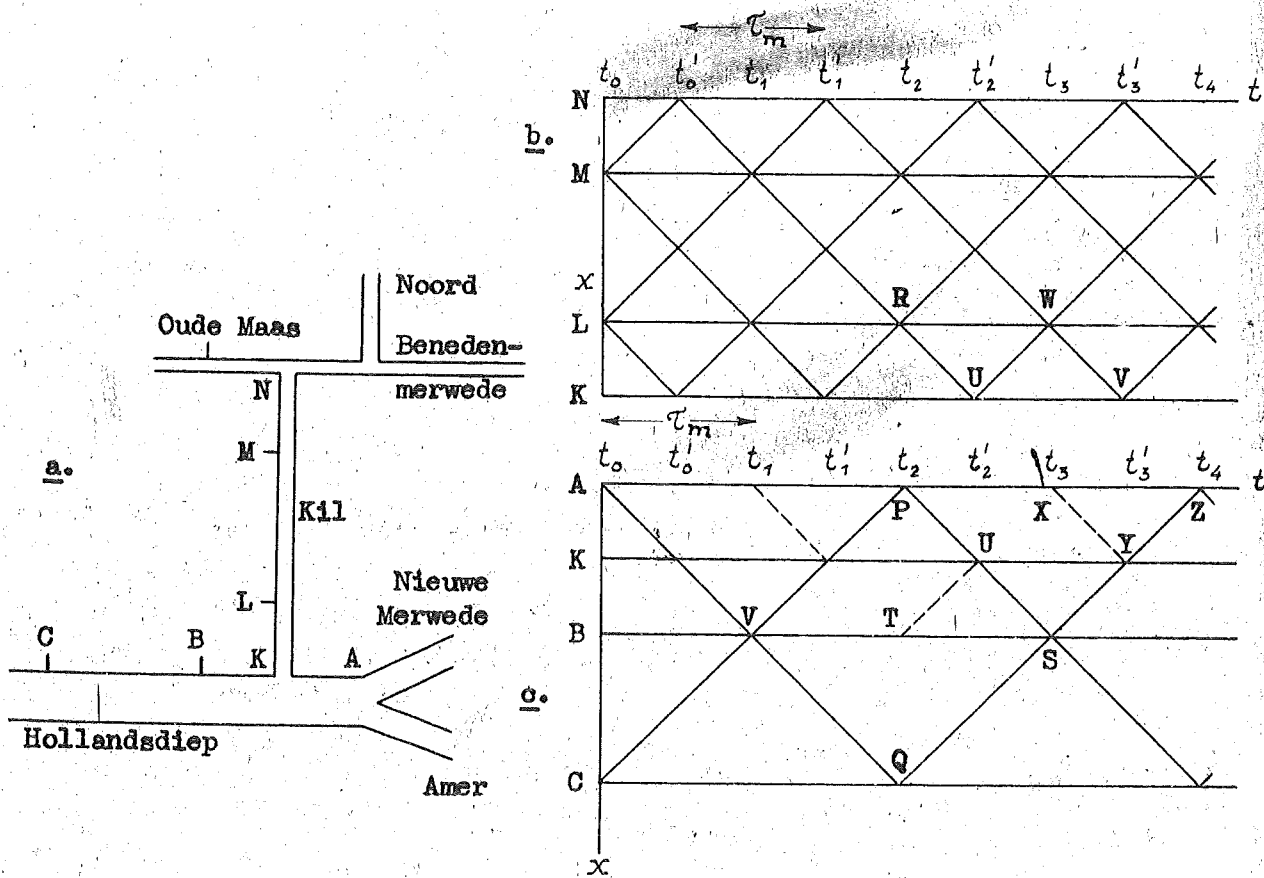


Fig. 27. Vakindeling van Kil en Hollandsdiep en schema's van globale subkarakteristieken.

We gaan een aflopend golfpunt na dat door het Hollandsdiep van A naar B loopt, en op het tijdstip t_3 (zie fig. 27c) in B een oplopend golfpunt ontmoet, dat het vak C B doorlopen heeft. Het gaat dus om de constructie van het beeldpunt S, en de daarmee overeenkomende beeldpunten in de andere diagrammen. De constructie van S, waarbij we dus rekening moeten houden met de afvoer van of naar de Kil, wordt in principe tweemaal, op verschillende wijze uitgevoerd.

Eerst construeren we de geschiedenis van het aflopende golfpunt ineens, met globaal in rekening brengen van de afvoer van of naar de Kil. Laat t'_2 (zie fig. 27c) het tijdstip zijn waarop het golfpunt de mond van de Kil passeert, en laat Q_K de stroom zijn die op dat tijdstip uit de Kil in het Hollandsdiep komt. De waarde van Q_K schatten we zo goed mogelijk op grond van het voorafgegaane rekenwerk met betrekking tot de Kil.

We integreren nu langs de karakteristiek van het beschouwde aflopende golfpunt, eerst van het betreden van het vak A B bij A tot de aankomst bij de mond van de Kil, en dan verder van het passeren van de mond van de Kil tot de aankomst in B. Stel de bewegingstoestand in A bij het betreden van het vak A B voor door H_1 en Q_1 , en de bewegingstoestand in B bij het verlaten van het vak door H_2 en Q_2 . Laat verder H_K de energiehogte in K bij het passeren zijn, Q_{Ka} de afvoer van het Hollandsdiep juist boven K, en Q_{Kb} de afvoer juist beneden K bij het passeren. Dan geeft integratie van (19) over het eerste stuk van de reis

$$(39) \quad H_K - H_1 + H_{r1} = \bar{Z}_1 (Q_{Ka} - Q_1),$$

en over het tweede stuk van de reis

$$(40) \quad H_2 - H_K + H_{r2} = \bar{Z}_2 (Q_2 - Q_{Kb});$$

hierin zijn H_{r1} en H_{r2} de weerstandsvervallen over de twee stukken van

dan zouden we reeds met deze eerste constructie tevreden kunnen zijn. We moeten echter ook de beweging in de Kil verder door berekening volgen. Daarom gaan we nu de constructie van het beeldpunt S' herhalen, zodanig dat de Kil volledig in de constructie betrokken wordt.

Daartoe beschouwen we de drie golfpunten die, uit de vakken A K, B K en L K komende, elkaar ten tijde t'_2 (zie fig. 27 b en c) in K ontmoeten. De geschiedenissen van de golfpunten die uit A en L komen, laten zich op de gebruikelijke wijze bepalen.

Het golfpunt dat van B komt, is omstreeks het tijdstip t'_2 uit B vertrokken (zie fig. 27 o). We kunnen de bewegingstoestand in B omstreeks dit tijdstip t'_2 bepalen, dankzij de eerste constructie van het beeldpunt S'. Immers, door die constructie kennen we nu H en Q in B ten tijde t_3 behoorlijk nauwkeurig, en daar we door voorafgegaan rekenwerk ook H en Q ten tijde t_7 kennen, is het mogelijk door interpoleren in de Ht- en Qt- diagrammen, H en Q op het gewenste tijdstip omstreeks t'_2 te bepalen.

Hierna zijn dus alle gegevens beschikbaar om de beeldpunten U (U') te construeren, in hoofdzaak op dezelfde wijze als in het geval dat in fig. 19 is behandeld. De constructies in de HQ- diagrammen zijn in fig. 29 weergegeven.

Uitgaande van de bij P en T (zie fig. 27 o) behorende beeldpunten P' en T', construeren we in het HQ- diagram van het Hollandsdiep de lijnen l' en m'. Uitgaande van het bij R (zie fig. 27 b) behorende beeldpunt R', construeren we in het HQ- diagram van de Kil de lijn n'. Door sommeren van overeenkomstige abscissen van de lijnen l' en n', bepalen we de hulplijn h in het diagram van het Hollandsdiep. Het snijpunt van h en m' is het beeldpunt U'_d voor de bewegingstoestand in het Hollandsdiep juist beneden de mond van de Kil, ten tijde t'_2 . De beeldpunten U'_a , resp. U voor de bewegingstoestand in het Hollandsdiep juist bo-

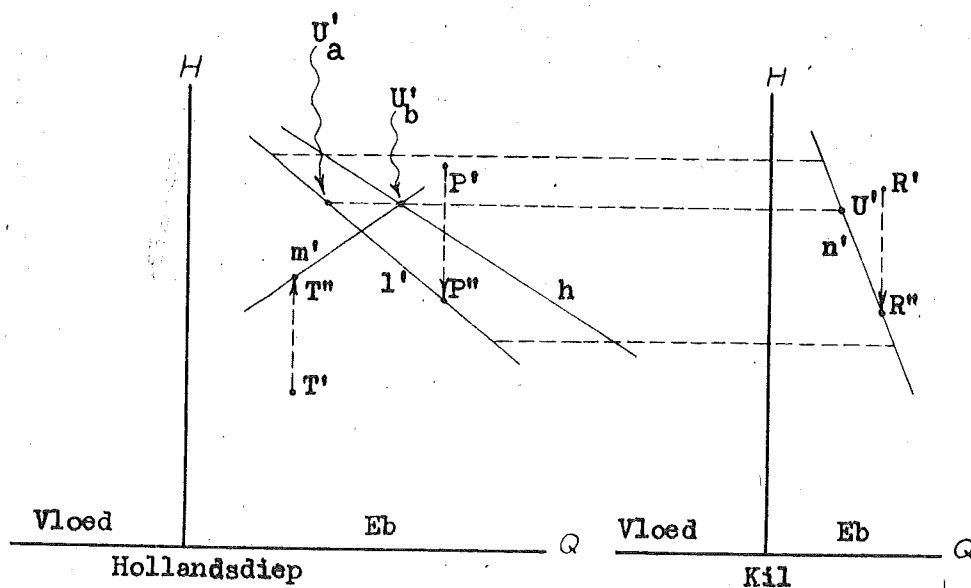


Fig. 29. Constructie voor de ontmoeting van drie golfpunten op een secundair knooppunt (verg. fig. 28).

ven de mond van de Kil, resp. de bewegingstoestand in de mond van de Kil, beide op het tijdstip t_2' , liggen op l' en n' terzelfder hoogte als U'_b .

Hierna wordt het beeldpunt S' opnieuw geconstrueerd, ditmaal uitgaande van de beeldpunten Q' en U'_b . Men kan dan controleren of de eerste constructie voldoende nauwkeurig is geweest. Mocht het verschil erg groot zijn, dan kan de tweede constructie herhaald worden, doch het is niet waarschijnlijk dat er een groot verschil gevonden zal worden, tenminste wanneer de zijgeul (de Kil) veel kleinere afvoeren heeft dan de hoofdgeul (het Hollandsdiep).

Bij een oplopend golfpunt dat door het vak B A loopt, gaan we op overeenkomstige wijze te werk als bij het aflopende golfpunt. We rekenen dus b.v. van S naar Z, eerst in één constructie, waarbij we dan gebruik maken van de knooppuntsvoorwaarden volgens fig. 19, voor de ontmoeting van het oplopende golfpunt in A met een aflopend golfpunt uit de Nieuwe Merwede

en een aflopend golfpunt uit de Amer. Daarna herhalen we de constructie door, uitgaande van S, W, en het door interpolatie te vinden beeldpunt X, naar het beeldpunt Y toe te rekenen, en dan van Y uit naar Z.

Bij de noordelijke mond van de Kil in de Oude Maas gaan we op overeenkomstige wijze te werk als bij de zuidelijke mond.

Aan elk van de beide monden van de Kil moet dus de bewegings-toestand ongeveer op de tijdstippen t'_0 , t'_1 , t'_2 enz., die tussen de tijdstippen t_0 , t_1 , t_2 enz. gelegen zijn, bepaald worden. De vakindeling van fig. 27a en het schema van globale subkarakteristieken van fig. 27b zijn met het oog hierop ontworpen.

Geulenstelsels in zeearmen en kustzeeën. De voortplanting van getijden en andere lange golven in kanalen, rivieren en smalle zeearmen, draagt een overwegend eendimensionaal karakter, en hierop is de in deze nota ontwikkelde methode gebaseerd.

In brede zeearmen en kustzeeën is de voortplanting meestal minder uitgesproken eendimensionaal van aard. Zulke wateren vertonen evenwel vaak een duidelijk ontwikkeld geulenstelsel, en de stromingen hebben dan min of meer gefixeerde richtingen. Dit doet zich b.v. voor in de Westerschelde en de Waddenzee. In zulke gevallen kan het systeem met min of meer succes geschematiseerd worden tot een netwerk van geulen, en dan is weer de hier behandelde methode toe te passen.

Het zal echter noodzakelijk zijn, vooral bij de hogere waterstanden waarbij op de platen veel water staat, zijdelingse stromen van geul tot geul, over de platen heen, in rekening te brengen. Dit is in principe bij de in deze nota behandelde methode heel goed mogelijk.

Naarmate evenwel de zijdelingse stromen van geul tot geul sterker worden, zal de toepassing in de praktijk moeilijker worden.

Hier wordt in wezen de grens bereikt van wat met methoden van eendimensionale voortplanting, en dus ook met de hier beschreven methode, te bereiken is.

Die grens is bepaald overschreden zodra we te maken hebben met zeeën of andere bekkens, waarin de stromen geheel van richting kunnen veranderen, en waarin rondgaande getijgolven (amfidromie) optreden, zoals b.v. in de Noordzee. In zo'n geval moet de voortplanting van de getijbeweging in het algemeen twee-dimensionaal behandeld worden. Daar staat dan meestal tegenover, dat het verticale getij klein is vergeleken met de gemiddelde diepte, en dat de weerstanden vrij klein zijn.

Het is mogelijk de theorie der karakteristieken zodanig uit te breiden, dat zij van toepassing wordt op de tweedimensionale voortplanting van lange golven. Wij hopen in de naaste toekomst gelegenheid te vinden hierop nader in te gaan.

AANHANGSELS.

A. 1.	<u>Vergelijkingen van een waterloop</u>	p.	85
1.1.	De differentiaalvergelijkingen	"	85
1.2.	De weerstand in een open waterloop	"	93
1.3.	Samengestelde geulen en profielen	"	103
A. 2.	<u>Invloed van enige verwaarlozingen</u>	"	110
A. 3.	<u>Grafische hulpmiddelen</u>	"	116
A. 4.	<u>Uitsterven van storingen en fouten</u>	"	121
A. 5.	<u>Bergings- en verhangberekeningen</u>	"	126
A. 6.	<u>Bijzondere integratieproblemen</u>	"	132
6.1.	Vervallen op vakovergangen en knooppunten	"	132
6.2.	Overlaten	"	142
6.3.	In rekening brengen van extra toe- en afvoeren	"	155
6.4.	Watersprongen en watervallen	"	164
A. 7.	<u>Numerieke integratie langs karakteristieken</u>	"	191

Aanhangsel 1.

Vergelijkingen van een waterloop.

1.1. De differentiaalvergelijkingen.

Het bed van een rivier of zeearm heeft, uit hydraulisch oogpunt, twee functies: een bergende en een afvoerende functie. Ten aanzien van de afvoerende functie kan dan verder nog onderscheid gemaakt worden tussen weerstand en traagheid in het bed.

De bergende functie van een vak van de waterloop wordt bepaald door de berging B , dat is het oppervlak van de waterspiegel (bergend oppervlak).

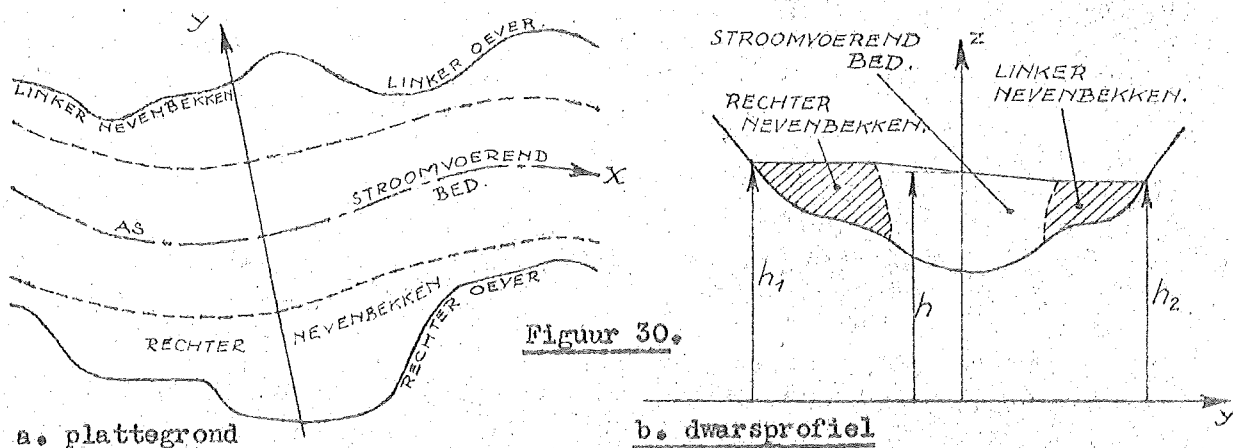
De afvoerende functie is vaak ongelijkmatig over het bed verdeeld. Er zijn dan diepe delen (geulen) die veel water afvoeren, en andere delen die weinig water (platen) of geen water (kribvelden) afvoeren. Teneinde hiermee rekening te houden heeft zich in de praktijk een schematisatie ontwikkeld waarbij het bed van de waterloop verdeeld gedacht wordt in een stroomvoerend bed waar de gehele afvoer door plaats vindt, en ter weerszijden daarvan nevenbekkens zonder afvoerende functie; beide delen van het bed dragen bij tot de bergende functie.

Het onderscheid tussen stroomvoerend bed en nevenbekkens is, als iedere schematisatie, niet geheel vrij van willekeur, doch niettemin is de bruikbaarheid in de praktijk gebleken. Bovendien zullen we hieronder in aanh. 1,3 nog aantonen dat het ook mogelijk is het stroomvoerend profiel op een rationele, meer theoretische wijze nader te definiëren.

We leggen nu in een horizontaal vlak, nulvlak, een lijn, die het midden van het stroomvoerende bed volgt; dit noemen we de as van de waterloop. Langs deze as, die in het algemeen gebogen is, leggen we een afstandsverdeling die we aangeven met de coördinaat x .

De (verticale) vlakken loodrecht op de as zijn de dwarsprofielen van de waterloop. In het dwarsprofiel leggen we verder twee coördinaat-assen door het snijpunt met de as van de waterloop als oorsprong, namelijk een z -as recht omhoog, en een y -as horizontaal zodanig dat het stelsel $x/y/z$ een rechtse schroefzin heeft.

De gemiddelde hoogte (boven het nulvlak) van de waterspiegel in het stroomvoerende profiel zij h , die van het rechter nevenbekken h_1 , en van het linker nevenbekken h_2 (zie fig. 30b).



Figuur 30.

Het oppervlak van het stroomvoerend profiel is per definitie

$$A = \iint_A dy dz,$$
 waarbij de integratie zich dus uitstrekt over het stroomvoerend profiel.
 De afvoer is

$$Q = \iint_A v_x dy dz.$$

Verder stelt

$$v = Q : A$$

de gemiddelde stroomsnelheid voor.

Het oppervlak ^A is bepaald door h , x en het dwarsverhang. De invloed van dit laatste is echter uiterst gering, zodat A praktisch alleen van h en x afhangt. De stroomvoerende breedte voldoet dan aan

$$b_s = \left(\frac{\partial A}{\partial h} \right) dx = 0$$

Vergelijking van de massa (continuïteitsvergelijking).

We beschouwen nu een riviervak, tussen de dwarsprofielen bij X en $X+dx$. Het oppervlak van de waterspiegel in dit vak heeft, voorzover in het stroomvoerende bed gelegen, een oppervlak $b_s dx$. Laat $b_1 dx$ het oppervlak van de tussen x en $x+dx$ gelegen rechter nevenbekkens en $b_2 dx$ van de linker nevenbekkens zijn. Het per tijdseenheid door stijging van de waterspiegel in het vak geborgen volumen water is

$$b_s \frac{\partial h}{\partial t} + b_1 \frac{\partial h_1}{\partial t} + b_2 \frac{\partial h_2}{\partial t},$$

waarbij de termen achtereenvolgens het in het stroomvoerende bed, in de rechter nevenbekkens, en in de linker nevenbekkens geborgen water weergeven.

De verschillen tussen h_1 , h_2 en h zijn ten eerste het gevolg van het dwarsverhang dat veroorzaakt wordt door centrifugaalkrachten en Corioliskrachten. We kunnen dit benaderen met de formule

$$h_1 - h = h - h_2 = \frac{b_s}{R} \frac{v^2}{2g} + \frac{\omega \sin \beta}{g} b_s v,$$

waarin R de straal van de bocht (positief bij bocht naar links, negatief bij bocht naar rechts), ω de rotatiesnelheid van de aarde en β de breedte (N.B. positief, Z.B. negatief) is.

In de tweede plaats vindt er bij stijging of daling van de waterspiegel overgang van water plaats van het stroomvoerende bed naar de nevenbekkens of omgekeerd, en hiermee kan een omzetting van snelheidshoogte in plaatshoogte of omgekeerd gepaard gaan. Hiervan trachten we met de formule

$$h_1 - h = h_2 - h = \chi \frac{v^2}{2g}$$

rekenschap te geven, waarbij χ een fractie van 1 zal zijn. Bovendien kunnen er nog dwarsverhangen (b.v. door neerbewegingen) in de nevenbekkens optreden. Daardoor zal de gemiddelde waterstand in die bekkens een verdere, meestal zeer geringe, wijziging evenredig met v^2 ondergaan; we veronderstellen dit verdisconteerd in de waarde van χ .

Na combinatie van bovenstaande twee formules, vinden we (met een kleine verwaarlozing in verband met de variatie van b_s met t) voor de geborgen waterhoeveelheid:

$$b \frac{\partial h}{\partial t} + (b_1 - b_2) \left[\frac{b_s}{R} \frac{v}{g} + \frac{\omega \sin \beta}{g} b_s \right] \frac{\partial v}{\partial t} + (b_1 + b_2) \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Door waarden uit de praktijk te beschouwen, vergewist men er zich gemakkelijk van, dat de termen met $\partial v / \partial t$ doorgaans te verwaarlozen klein zijn.

Met in acht nemen van een eventuele afvoer uit het bed van de waterloop over een kade of dijk, of door een dijkbraak, wordt de continuïteitsvergelijking dan

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} + q_i = 0,$$

waaruit, als $q_i = 0$ is, (1) van p. 11 volgt.

Vergelijking van het stootvermogen (bewegingsvergelijking).

We beschouwen nu het stootvermogen in de X -richting van het water in het stroomvoerende bed tussen x en $x+dx$. Het stootvermogen in een volumenelement met hoogte dz en breedte dy tussen de profielen x en $x+dx$, dus met een lengte $\frac{R-y}{R} dx$, bedraagt

$$\rho \frac{R-y}{R} v_x dx dy dz,$$

en het totale stootvermogen tussen de twee profielen is

$$\rho dx \int_A \frac{R-y}{R} v_x dy dz = \rho dx \left[Q - \frac{1}{R} \int_A y v_x dy dz \right].$$

De tweede term tussen haakjes is nul in geval van een symmetrische snelheidsverdeling. In een bocht evenwel, zullen het profiel en de snelheidsverdeling wellicht asymmetrisch zijn. Om dit in rekening te brengen, voeren we een coëfficiënt φ in, zodanig dat

$$-\int y v_x dy dz = \varphi b_s Q \frac{R}{|R|};$$

in het algemeen is φ positief en slechts een fractie van 1 (meestal minder

dan 0,1). Voor het totale stootvermogen kan nu

geschreven worden. $\rho dx \left(1 + \gamma \frac{bs}{|R|}\right) Q$

Het transport van stootvermogen in de x -richting door het dwarsprofiel x , is

$$\rho \iint_A v_x^2 dy dz.$$

Bij $x+dx$ vindt door een oppervlakte-element $dy dz$ een transport van water plaats ter grootte $v_x dy dz$. Dit water heeft per volumeneenheid een stootvermogen ρv_x in de x -richting. De x -richting bij $x+dx$ komt echter niet meer overeen met de x -richting bij x , als gevolg van de kromming van de as van de waterloop. Het stootvermogen bij $x+dx$ in de oorspronkelijke x -richting is dan ook niet ρv_x , doch $\rho (v_x \cos \theta - v_y \sin \theta)$, zoals blijkt uit fig. 31. Hierbij kan $\cos \theta \approx 1$ en $\sin \theta \approx \theta = dx/R$ gesteld worden. Aldus vinden we voor het transport van stootvermogen bij $x+dx$

$$\rho \iint_A v_x^2 dy dz - \rho \iint_A v_x v_y dy dz \frac{dx}{R},$$

waarbij voor de integralen nu de waarde genomen moet worden die zij bij $x+dx$ hebben. Het verschil tussen het transport bij $x+dx$ en dat bij x , wordt aldus:

$$\rho \left[\frac{\partial}{\partial x} \iint_A v_x^2 dy dz - \frac{1}{R} \iint_A v_x v_y dy dz \right] dx.$$

We zullen nu ten eerste een coëfficiënt β invoeren, zodanig dat

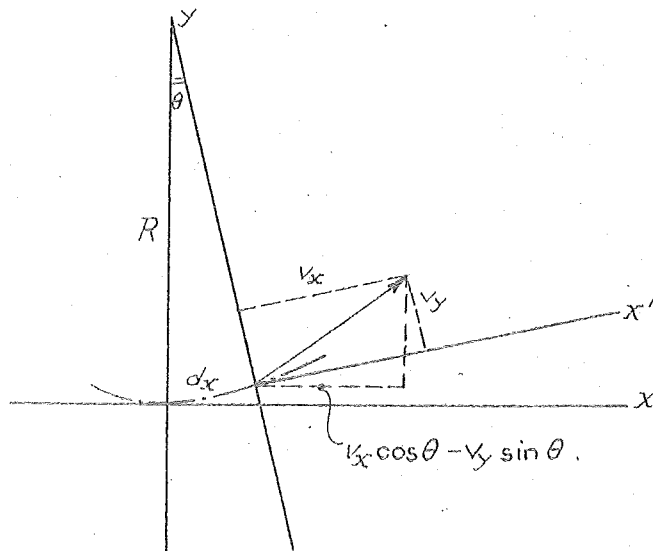
$$\iint_A v_x^2 dy dz = \beta v^2 A$$

Deze coëfficiënt β is altijd groter dan 1, doch in het algemeen niet meer dan enige procenten. Verder voeren we een coëfficiënt γ in, zodanig dat

$$\iint_A v_x v_y dy dz = \gamma v^2 A.$$

In het algemeen is γ zeer veel kleiner dan 1, omdat de dwarsnnelheden v_y klein zijn t.o.v. de langssnelheden v_x . Het verschil in transport van stootvermogen tussen $x+dx$ en x kan nu door

worden weergegeven. $\rho dx \left[\frac{\partial (\beta v^2 A)}{\partial x} - \frac{\gamma v^2 A}{R} \right]$



Figuur 31.

Tussen het stroomvoerende bed en de nevenbekkens vindt uitwisseling van stootvermogen plaats, ten eerste als gevolg van de turbulentie in het grensvlak, en ten tweede door de vullings- of ledigingastromen van het stroomvoerende bed naar de nevenbekkens of omgekeerd, alsmede eventueel door afvoer over kaden enz. Het transport van stootvermogen naar de nevenbekkens houdt verband met de waterbeweging en de wrijvingsverliezen in die bekkens. Een theoretische behandeling hiervan is niet eenvoudig, en daar de kwestie praktisch van ondergeschikt belang is, zullen we er ons mee verge-

noegen het zijdelingse transport van stootvermogen als een deel van de totale wrijvingsweerstand (zie hierna) in rekening te brengen.

Het transport van water uit het bed over kaden e.d. gaat gepaard met een transport van stootvermogen, dat we op

$$\eta \rho v q_i dx$$

zullen stellen, waarbij de coëfficiënt η door een nadere analyse van het stromingsbeeld nabij de overlatende kade bepaald zal moeten worden; de waarde van η zal meestal niet veel van 1 verschillen.

De krachten die op de watermassa in het stroomvoerende bed tussen de profielen x en $x+c/x$ werken, zijn te verdelen in krachten die op het gehele volumen inwerken, en krachten die langs het buitenoppervlak van de watermassa werken. De oppervlaktekrachten zijn de drukkrachten die langs het gehele buitenoppervlak werken, de wrijving die in hoofdzaak langs de bodem werkt, en de windkracht die langs de waterspiegel werkt. De belangrijkste volumekracht is de zwaartekracht; voor het stootvermogen in de (horizontale !) x -richting is deze verticaal werkende kracht alleen indirect van belang, in zoverre als de drukverdeling er door bepaald wordt. Tenslotte werkt nog een kleine Corioliskracht op het volumen.

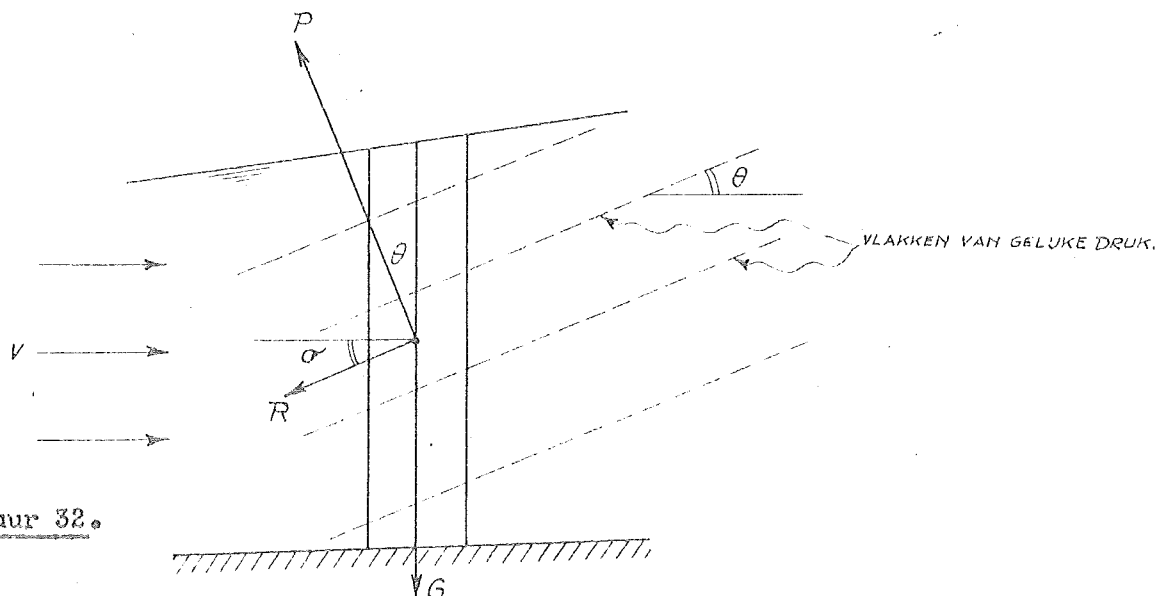
De verticale versnellingen kunnen gesplitst worden in versnellingen van de gemiddelde stroming, en versnellingen door turbulente fluctuaties. We zullen aannemen dat de waterspiegelverhangen zo klein zijn, dat de verticale versnellingen van de gemiddelde stroming te verwaarlozen zijn t.o.v. de versnelling van de zwaartekracht. Verder leert een schatting van de in de praktijk voorkomende turbulente versnellingen, dat ook deze in het algemeen t.o.v. g verwaarloosd mogen worden. Hieruit volgt dat we een quasi-hydrostatische drukverdeling mogen aannemen. De druk op een hoogte z is dus

$$p = p_0 + \rho g (h - z),$$

waarbij p_0 de druk van de lucht voorstelt. De vlakken van gelijke druk hebben dan een helling θ bepaald door

$$\tan \theta = - \frac{\partial p}{\partial x} : \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x};$$

deze is onafhankelijk van z (zie fig. 32). De resultante P van alle drukkrachten die op de buitenoppervlakte van de beschouwde watermassa werken, staat loodrecht op de vlakken van gelijke druk, en dus onder een hoek θ met de verticaal (fig. 32; in deze figuur is verondersteld een stroom naar rechts, dus een wrijvingskracht naar links; verder een positief verhang en dus een verhangkracht naar links; de stroom is dus vertraagd onder de gemeenschappelijke werking van wrijving en verhang).



Figuur 32.

Het gewicht van de watermassa,

$$G = \rho g A dx$$

werkt verticaal omlaag. Laat verder R de resultante der andere krachten zijn, werkend onder een hoek σ met de horizontaal (fig. 32). Het verwaarlozen van de verticale versnellingen brengt met zich mee, dat de drie krachten P , G en R in verticale richting in evenwicht moeten zijn, dus:

$$P \cos \theta = G + R \sin \sigma.$$

In horizontale richting geven de krachten een resultante

$$K = R \cos \vartheta + P \sin \theta = G \tan \theta + R (\cos \theta + \sin \sigma \tan \theta).$$

Nu zijn θ en σ beide in het algemeen klein, zodat we

$$K = G \tan \theta + R$$

mogen schrijven.

De wrijvingskracht werkt in de eerste plaats langs de bodem. Verder moeten we ook een turbulente schuifkracht in het grensvlak van stroomvoerend bed en nevenbekkens aannemen. Om deze laatste te bepalen, zouden we het krachtenspel in de nevenbekkens nader moeten analyseren. Dit is niet gemakkelijk, en het is ook de vraag of de verschillende gevallen (platen, kribvelden, dode armen) wel vanuit één gezichtspunt behandeld zouden kunnen worden. Daar de kwestie quantitatief niet erg belangrijk is, zullen we de kracht in het grensvlak als een niet nader gedetailleerd onderdeel van de totale wrijving in rekening brengen.

Tussen de overdracht van stootvermogen door vulling en lediging der nevenbekkens, en de turbulente kracht bestaat enig verband. Bij vulling van het nevenbekken b.v., zal het water in het bekken door het binnendringen van het water uit het bed, sneller gaan stromen. Hierdoor neemt de snelheidsgradiënt loodrecht op het grensvlak af, en dus ook de turbulente schuifkracht. Er is dus reden ook het transport van stootvermogen als onderdeel van de totale wrijving te behandelen.

De totale wrijvingskracht hangt in de eerste plaats van de ogenblikkelijke stromingstoestand af, dus van v (of Q). Bovendien is echter ook de versnelling ($\partial v / \partial t$ en $v \partial v / \partial x$) nog van enige invloed. Zoals we hierna in par. 1,2 nog nader zullen zien, laat zich de wrijvingskracht in een eenparige stroming voorstellen door

$$\rho g A i_r dx$$

waarin

$$i_r = w |Q| Q.$$

Van de invloed van de versnelling kunnen we ons gedeeltelijk rekenschap geven door een tweetal correctietermen aan i_r toe te voegen:

$$\frac{\lambda}{g} v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\mu}{g} \frac{\partial v}{\partial t}.$$

De laatste term vindt men afgeleid in ons artikel "Resistance and inertia of the flow of liquids in a tube or open canal" (Appl. sci. Res., V. A1, 1948, p. 169 - 197). De eerste term kan op een overeenkomstige wijze worden afgeleid. De coëfficiënten λ en μ hebben waarden van enige honderdsten.

De windkracht kan op

$$\rho g A i_s dx,$$

gesteld worden, waarin i_s bepaald wordt op de wijze als we reeds op

p. 56.

De Corioliskracht zullen we weergeven met

$$\text{waarin } \rho g A i_c dx, \quad i_c = - \frac{\omega \sin \beta}{g A} \int_A v_y dy dx + \frac{\omega \cos \beta \cos \alpha}{g A} \iint_A v_z dy dx.$$

Hierin is β de breedte en α de hoek tussen de y -as en het noorden. Het Coriolisverhang i_c is zeer klein; vooral de tweede term is uiterst klein wegens de kleine waarden die de verticale snelheid v_z aanneemt.

Voorren we tenslotte nog het barometrische verhang

$$i_a = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p_0}{\partial x}$$

in, dan kan voor de resulterende kracht

$$K = \rho g A dx \left[\frac{\partial h}{\partial x} + i_a + i_r + i_s + i_c + \frac{\lambda}{g} v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\mu}{g} \frac{\partial v}{\partial t} \right]$$

geschreven worden. Deze kracht is positief gerekend als hij in de negatieve x -richting werkt.

De kracht $-K$ is gelijk aan de toename per tijdseenheid van het stootvermogen in het beschouwde gebied, vermeerderd met het transport van stootvermogen uit dat gebied. Dit geeft ons de vergelijking

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[(1 + \varphi \frac{b_s}{|R|}) Q \right] + \frac{\partial}{\partial x} [\beta v^2 A] + A \left[\lambda v \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial t} \right] + \eta v q_i + g A \left[\frac{\partial h}{\partial x} + i_a + i_r + i_s + i_c - \varphi \frac{v^2}{gR} \right] = 0.$$

We behandelen nu $\varphi b_s / |R|$ als onafhankelijk van t , en β als constant, voeren $Q = Av$ in, en werken de differentiaties der producten uit. Vervolgens trekken we v maal de continuïteitsvergelijking af, delen door gA , en krijgen dan:

$$\left(1 + \varphi \frac{b_s}{|R|} + \mu \right) \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + (2\beta + \lambda - 1) \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{b - (1 + \varphi \frac{b_s}{|R|}) b_s}{A} \frac{v}{g} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} + (\beta - 1) v^2 \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_{dt=0} + (\eta - 1) \frac{v q_i}{gA} + i_a + i_r + i_s + i_c - \varphi \frac{v^2}{gR} = 0.$$

Daar de versnelling van Bernoulli, $v \partial v / \partial x$, betrekkelijk klein is, mogen we $(2\beta + \lambda - 1)$ met 1 benaderen.

Daar de term met $v \partial h / \partial t$ klein is, mogen we bij deze term φ verwaarlozen.

Daar β weinig van 1 verschilt, en $v^2 (\partial A / \partial x)$ klein is, mag de desbetreffende term verwaarloosd worden.

Aannemende dat q_i niet zeer groot is, en dat η weinig van 1 verschilt, mag de desbetreffende term verwaarloosd worden.

Op uitgestrekte zeeoppervlakken kan de barometrische gradiënt van betekenis zijn, doch in zeearmen en rivieren zal i_a in het algemeen te verwaarlozen zijn.

In zeearmen en rivieren zijn de dwarsnelheden v_y (en a fortiori de verticale snelheden v_z) zó klein, dat het Coriolisverhang i_c in het algemeen te verwaarlozen is.

Ten slotte zal ook φ meestal zó klein zijn dat de laatste term verwaarloosd mag worden.

We voeren nu nog een "coëfficiënt"

$$\gamma = 1 + \varphi \frac{b_s}{|R|} + \mu$$

in, en dan wordt de krachtvergelijking:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\gamma}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{b - b_s}{A} \frac{v}{g} \frac{\partial h}{\partial t} + i_r + i_s = 0.$$

De coëfficiënt γ is enige procenten groter dan 1. We kunnen het invoeren van deze coëfficiënt vermijden door de waarde van het stroomvoerende profiel A met enige procenten te verminderen (zie ook par. 1,3). Dit komt wel niet exact op hetzelfde neer, doch de fout is geheel te verwaarlozen.

Voeren we eindelijk de energiehogte $H = h + v^2 / 2g$ in (zie ook hieronder) dan vinden we

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{b - b_s}{A} \frac{v}{g} \frac{\partial h}{\partial t} + i_r + i_s = 0.$$

Dit gaat voor $i_s = 0$ in (2) van p. 13 over.

Vergelijking van het arbeidsvermogen.

Tot besluit van deze paragraaf geven we nog een korte afleiding van de energievergelijking.

De energie in het bed bestaat uit potentiële en kinetische energie. De potentiële energie per eenheid van lengte is (afgezien van bochten)

$$W_p = \rho g J_1 + p_0 A_b,$$

waarin A_b het oppervlak van het dwarsprofiel van het gehele bed is, en

$$J_1 = \iint_{A_b} z \, dy \, dz = \int_{z_0}^h b(z) z \, dz$$

het moment van de eerste orde (statisch moment) van dat dwarsprofiel, t.o.v. het nulvlak,

De kinetische energie per eenheid van lengte is (afgezien van bochten)

$$W_k = \iint_A \frac{1}{2} \rho (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) dy dz.$$

We verwaarlozen v_y^2 en v_z^2 t.o.v. v_x^2 , en krijgen dan

$$W_k = \frac{1}{2} \rho \beta A v^2$$

waarin β een reeds eerder ingevoerde coëfficiënt is.

De totale energieoverdracht door een dwarsprofiel bestaat uit arbeid door drukkrachten, transport van potentiële energie, en transport van kinetische energie. De arbeid door drukkrachten per eenheid van tijd is

$$P_a = \iint_A [p_0 + \rho g (h-z)] v_x dy dz.$$

Het transport van potentiële energie is

$$P_p = \iint_A \rho g z v_x dy dz.$$

Het transport van kinetische energie is

$$P_k = \iint_A \frac{1}{2} \rho (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) v_x dy dz.$$

Hierin zullen we weer v_y^2 en v_z^2 t.o.v. v_x^2 verwaarlozen, en dan vinden we

$$P_k = \frac{1}{2} \rho \alpha A v^3,$$

waarin α door

$$\iint_A v_x^3 dy dz = \alpha A v^3$$

bepaald is [voor α geldt: $\alpha - 1 \approx 3(\beta - 1)$]. We zullen verder aannemen dat α met 1 benaderd wordt.

De totale energieoverdracht wordt nu

$$P = \rho g H Q + p_0 Q,$$

waarin

$$H = h + \frac{\alpha v^2}{2g} \approx h + \frac{v^2}{2g}$$

de energiehoogte is.

Door de wrijving wordt per eenheid van lengte en per eenheid van tijd volgens par. 1,2 een energie

$$i_p dx = \rho g i_r Q$$

gedissipeerd. Evenwel, in de wrijving hebben we ook het transport van stootvermogen tussen stroomvoerend bed en nevenbekkens verdisconteerd, daarbij een zekere equivalentie van dit transport met de turbulente schuifkracht veronderstellend. De uitwisseling van water waarop de turbulente krachtwerking berust, behoeft niet gepaard te gaan met energieoverdracht. Een vullingsstroom evenwel voert kinetische energie aan, die door versterkte neerbewegingen gedissipeerd zal worden. Om consequent te blijven, moeten we de wrijvingsdissipatie dus met een bedrag

$$\frac{1}{2} \rho v^2 (b - b_s) \frac{\partial h}{\partial t}$$

corrigeren.

De zijdelingse afvoer q_i gaat gepaard met een energieverlies per eenheid van lengte en per eenheid van tijd, groot

$$p_i q_i = \rho g H q_i + p_0 q_i.$$

Of dit ten slotte geheel gedissipeerd zal worden of niet, doet hier niet ter zake, daar het voor de energiehuishouding van de waterloop geheel als verlies geldt.

De windkracht levert een vermogen, dat we per eenheid van lengte op

$$-h_{d_s} = -\rho g i_s Q$$

kunnen stellen.

De energiebalans van de waterloop wordt weergegeven door:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W_k}{\partial t} + \frac{\partial W_k}{\partial x} + \frac{1}{2} \rho v^2 (b - b_s) \frac{\partial h}{\partial t} + \rho c r + b_i q_i + \rho d_s = 0.$$

Hierin is (als we de barometrische gradiënt verwaarlozen)

$$\frac{\partial P}{\partial x} = (\rho g h + p_0) \frac{\partial h}{\partial x} + \rho g Q \frac{\partial h}{\partial x}.$$

Verder is

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} = \rho g \frac{\partial h}{\partial t} + p_0 \frac{\partial h}{\partial t} = (\rho g h + p_0) \frac{\partial h}{\partial t},$$

en (β met 1 benaderend)

$$\frac{\partial W_k}{\partial x} = \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{\partial v}{\partial x} + \rho Q \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Dit geeft ons de enige herleiding

$$(\rho g^{-1} + \rho_0) \left[\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} + g i_2 \right] - \rho g Q \left[\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{1}{F} \frac{\partial}{\partial t} + i_1 + i_3 \right] = 0.$$

De energievergelijking is dus klaarblijkelijk een lineaire combinatie van de continuïteitsvergelijking en de dynamische vergelijking, en dus afhankelijk van die twee vergelijkingen. Mathematisch opent de energievergelijking dan ook geen nieuwe gezichtspunten.

Aanhangsel 1.

1,2. De weerstand in een open waterloop.

We beschouwen de stroming in een waterloop met een willekeurig, doch constant dwarsprofiel. De stroming wordt turbulent verondersteld, daar dit in open waterlopen praktisch altijd het geval is.

In een turbulente stroming blijkt zich een gemiddelde snelheidsverdeling in te stellen, waarbij over een groot deel van het dwarsprofiel slechts betrekkelijk kleine snelheidsverschillen voorkomen, doch dicht bij de wanden (bodem, oevers) een sterke snelheidsvermindering naar de wand toe optreedt. In het algemeen blijkt dat de snelheid in een willekeurig punt van het profiel beschouwd kan worden als overwegend bepaald door de afstand tot de naastbijzijnde wand. We zullen daarom eerst de snelheidsverdeling bij een wand nader gaan beschouwen.

Vooraf het gebied vlak bij de wand is wat dit betreft van belang, en in verband daarmee is de kromming van de wand slechts van ondergeschikte invloed; we beschouwen dus de wand als vlak. Laat r de afstand tot de wand zijn, v de gemiddelde snelheid en τ de turbulente schuifspanning op de afstand r van de wand. We stellen dan volgens de theorie van Prandtl

$$(41) \quad \tau = l^2 \frac{dv}{dr} \frac{dv}{dr},$$

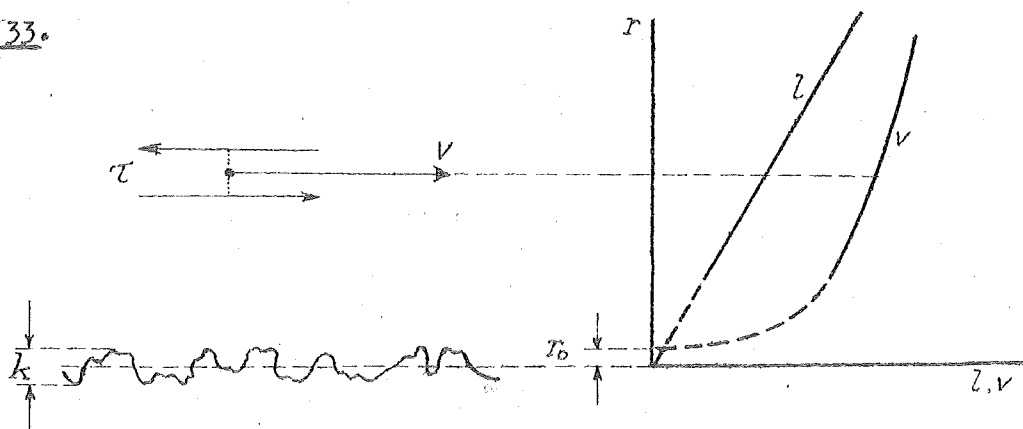
waarin l de zogenaamde "mengweg" voorstelt.

In de nabijheid van de wand wijkt τ slechts weinig af van de waarde τ_0 aan de wand, en we zullen voorshands $\tau = \tau_0$, dus constant stellen. In dat geval volgt uit gelijkvormigheidsoverwegingen, dat l evenredig met r moet variëren, althans op afstanden van de wand die groot zijn t.o.v. de oneffenheden (zie fig. 33). We extrapoleren nu het lineaire verloop van l tot het niveau waar dit verloop $l=0$ oplevert, en hier leggen we het nulpunt van de r -as. Dan geldt dus

$$(42) \quad l = \mathcal{H} r,$$

waarin \mathcal{H} de universele constante van Von Karman is, waarvan de waarde experimenteel gebleken is ongeveer 0,4 te zijn.

Fig. 33.



Integratie van (41) geeft ons nu de snelheidsverdeling:

$$(43) \quad v = \frac{1}{\mathcal{H}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{r}{r_0}.$$

Hierin is r_0 de integratieconstante; deze grootte stelt de waarde van r voor, waarbij $v=0$ wordt. De grootte van r_0 hangt in het algemeen af van de grootte der oneffenheden, en van de dikte van de z.g.n. laminaire grenslaag. Deze laatste zal in open waterlopen in het algemeen zoveel kleiner zijn dan de hoogte der oneffenheden, dat r_0 praktisch geheel door deze oneffenheden bepaald wordt. Experimenteel is gebleken, dat

$$r_0 = 0,03 k$$

waarin k de ruwheidsmaat van Nikuradse voorstelt. (Voor een kunstmatige, gelijkmatige zandruwheid als toegepast door Nikuradse, komt k overeen met de diameter der zandkorrels).

Op grotere afstanden van de wand zal τ belangrijk kleiner worden dan τ_0 . Desalniettemin blijkt zowel empirisch als door toepassing van de theorie van Von Karman, dat de afwijkingen van de logaritmische snelheidsverdeling daar toch nog niet groot zijn. Dit moet daaraan worden toegeschreven, dat voor grotere waarden van r , de menngweg kleinere waarden gaat aannemen dan uit (42) volgen. We zullen daarom bij onze nu volgende beschouwingen ook op grote afstanden van de wand gebruik maken van de formule

(44)
$$v = \frac{1}{\mathcal{K}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{r}{0,03k}$$

die uit (43) volgt.

Betrekkelijk smal profiel.

We beschouwen eerst een waterloop met een dwarsprofiel dat de vorm van een halve cirkel, of van een regelmatige veelhoek heeft (zie fig. 34a).

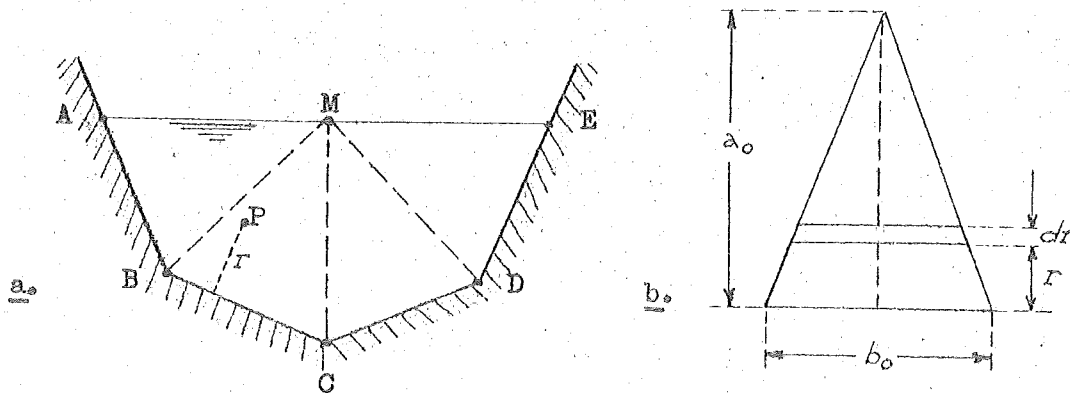


Fig. 34.

We stellen nu, dat de snelheid in een willekeurig punt bepaald wordt door (44), waarbij dan voor r de afstand tot de naastbijzijnde wand wordt genomen (dit is b.v. BC voor het punt P). We verdelen in verband hiermee het profiel in driehoeken ABM, BCM enz. Elk dezer driehoeken verdelen we vervolgens in stroken evenwijdig met de basis b_0 (zie fig. 34b); de breedte van zulk een strook is

$$b = \frac{a_0 - r}{a_0} b_0$$

waarbij a_0 de hoogte van de driehoek voorstelt. De totale afvoer door een driehoek is dan

$$Q_A = \int_0^{a_0} \frac{1}{\mathcal{K}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln \frac{r}{0,03k} \frac{a_0 - r}{a_0} b_0 dr = \frac{1}{2} a_0 b_0 \frac{1}{\mathcal{K}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \left[\ln \frac{a_0}{0,03k} - \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{2} a_0 b_0 \frac{1}{\mathcal{K}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln 7,4 \frac{a_0}{k}$$

en hieruit volgt

$$Q = A \frac{1}{\mathcal{K}} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln 7,4 \frac{a_0}{k}$$

voor de afvoer door het gehele profiel, waarvan A het oppervlak voorstelt.

Daar de stroming eenparig verondersteld is, moet de schuifspanning langs de wand gecompenseerd worden door een verhangkracht. Laat i_r het verhang zijn, dan werkt op een prismatische watermassa begrensd door de beschouwde driehoek, en een overeenkomstige driehoek in een dx verder gelegen dwarsprofiel, een verhangkracht $\rho g i_r \frac{1}{2} a_0 b_0 dx$, en een schuifkracht $\tau_0 b_0 dx$ langs de wand. Uit de gelijkheid dezer twee krachten volgt

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{2}} g a_0 i_r$$

Door dit te substitueren, krijgen we

$$Q = A \bar{v}$$

met voor de gemiddelde snelheid de formule

$$\bar{v} = C_f \sqrt{\frac{1}{2}} a_0 i_r$$

waarin

$$C_f = \frac{\sqrt{g}}{2L} \ln 7,4 \frac{a_0}{k}$$

De waarde hiervan varieert meestal tussen 30 en 80 m^{1/2}/sec.

Naar aanleiding van deze formules maken we twee opmerkingen:

Ten eerste kan men er zich gemakkelijk van overtuigen, dat vrij grote variaties in a_0 of k betrekkelijk weinig invloed op de waarde van C_f hebben.

Ten tweede vergelijken we de gemiddelde snelheid \bar{v} met de maximale snelheid, die we volgens onze formule (44) aantreffen in de top der driehoeken M, en welke

$$v_M = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{a_0}{\rho}} \ln \frac{a_0}{0,03k}$$

bedraagt. Deze is doorgaans niet meer dan ongeveer 20 % groter dan de gemiddelde snelheid (Dit sluit aan bij onze opmerking in het begin van deze paragraaf over de snelheidsverdeling in het profiel).

Het is nu op grond van deze opmerkingen mogelijk een eenvoudige uitbreiding van de afgeleide formules te geven voor het geval van een profiel dat enigszins van de regelmatige veelhoek afwijkt. Beschouw b.v. het profiel van fig. 35.

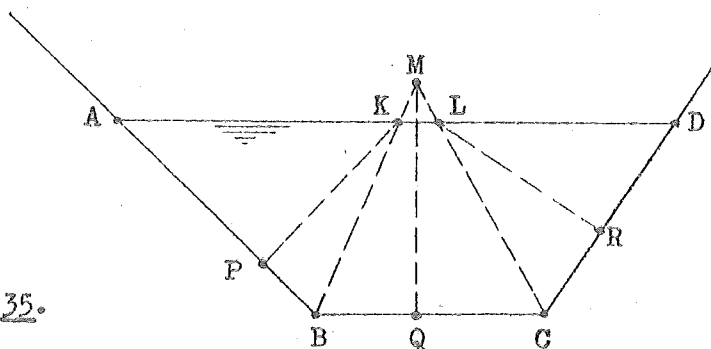


Fig. 35.

We verdelen dit profiel door de bissectrices MB en MC van de hoeken ABC en BCD te trekken. We kunnen nu in principe de totale afvoer vinden, door eerst achtereenvolgens de schuifspanningen langs AB, BC en CD uit het verhang i_r af te leiden (de schuifkrachten zijn dan evenredig met de oppervlakken ABK, BCLK en CDL), en daarna de gemiddelde snelheid in elk der gebieden ABK, BCLK en CDL te bepalen. Hierbij hangt dan de gemiddelde snelheid in ABK of CDL van de hoogte KP of LR af. De gemiddelde snelheid in BCLK is iets kleiner dan in de driehoek BCM het geval zou zijn, daar de snelheid bij de top M iets groter is dan de gemiddelde. In verband met onze tweede opmerking hierboven zal de gemiddelde snelheid in BCLK echter slechts zeer weinig verschillen van wat zij in BCM zou zijn.

Opgemerkt wordt nog even, dat, als gevolg van de schematisatie, links en rechts van BK of CL niet geheel dezelfde snelheden zouden optreden, wat natuurlijk in strijd is met de werkelijkheid. De afwijkingen zijn echter gering en voor de totale afvoer praktisch van geen belang.

We zullen de gemiddelde snelheden in ABK, BCLK en CDL intussen niet nader gaan afleiden, doch ineens onze beschouwing uitstrekken tot het gemiddelde in het gehele profiel.

Uit het verhang i_r is gemakkelijk de gemiddelde schuifspanning $\bar{\tau}_0$ langs de gehele natte omtrek ABCD te bepalen. Laat s de lengte van deze omtrek en A het oppervlak van het profiel zijn, dan geldt

$$\bar{\tau}_0 s = \rho g A i_r.$$

Hieruit volgt

$$\frac{\bar{\tau}_0}{\rho} = g a_r i_r,$$

waarin

$$a_r = \frac{A}{s}$$

de z.g.n. hydraulische straal van het profiel is.

We stellen nu de gemiddelde snelheid in het gehele profiel gelijk aan

$$\bar{v} = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{a_0}{\rho}} \ln 7,4 \frac{a_{om}}{k} = C_f \sqrt{a_r i_r}$$

met

$$C_f = \frac{\sqrt{g}}{A} \ln 7,4 \frac{a_{om}}{k},$$

waarin a_{om} een middelwaarde van de hoogtelijnen KP, MQ en LR voorstelt, die we zouden kunnen bepalen door op de boven aangegeven wijze de afvoeren der gebieden ABK, BCLK en CDL afzonderlijk te berekenen en dan op te tellen. Nu is de invloed van de hoogtelijnen betrekkelijk gering (zie onze eerste opmerking hierboven) en dus behoeven we de middelwaarde a_{om} ook niet zo heel precies te bepalen. We merken nu op dat bij een regelmatige veelhoek a_{om} gelijk aan $2a_r$ gesteld moet worden, en we zullen dit voor de minder regelmatige profielen overnemen. Zo krijgen we de formule

$$(45) \quad \bar{v} = C_f \sqrt{a_r i_r}$$

met

$$(46) \quad C_f = \frac{\sqrt{g}}{A} \ln 15 \frac{a_r}{k}$$

De formule (45) komt overeen met de oorspronkelijke formule van Chézy, doch met dit verschil dat C_f niet een constante is, doch nog een functie van de hydraulische straal. C_f is dus niet de constante van Chézy, maar we kunnen C_f wel de "coëfficiënt" van Chézy noemen.

Voorts is (46) de formule van Nikuradse.

Voor de afvoer kunnen we

$$Q = K_f \sqrt{i_r}$$

schrijven, waarin

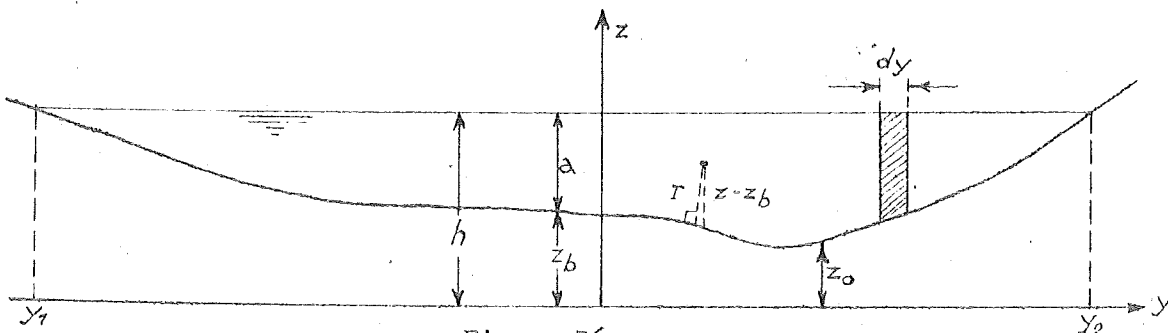
$$(47) \quad K_f = C_f A \sqrt{a_r}$$

We zullen K_f het afvoervermogen*) van het profiel noemen. Het afvoervermogen kan omschreven worden als de afvoer die door het profiel zou gaan bij een verhang 1.

De hydraulische straal a_r hangt bij een gegeven profiel nog af van de waterstand. Derhalve is ook K een functie van h .

Betrekkelijk breed profiel.

Bovenstaande overwegingen gelden speciaal voor profielen die min of meer met regelmatige veelhoeken overeenkomen, dat zijn dus doorgaans profielen waarvan de diepte en de helft van de breedte van dezelfde grootteorde zijn. Profielen waarvan de breedteafmetingen veel groter zijn dan de diepteafmetingen (fig. 36; het verschil tussen breedte en diepte kan in werkelijkheid nog veel groter zijn) kunnen beter op een andere wijze behandeld worden.



Figuur 36.

*) Deze grootheid (Engels: conveyance) is ingevoerd door Bakhtmeteff (Lit. 4).

We nemen aan dat het bodemverloop vloeiend is, zodat uit het overwegen van de breedteafmetingen over de diepteafmetingen geconcludeerd mag worden dat de bodemhellingen gering zijn. We benaderen daarom de afstand r van een punt P tot de wand (bodem) met de verticale afstand $z - z_b$ (waarbij z_b de hoogte van de bodem voorstelt; dit is nog een functie van y). We stellen dus voor de snelheid in P:

$$v = \frac{1}{\rho} \sqrt{\tau_0} \ln \frac{z - z_b}{0,03k}$$

We verdelen nu het profiel in verticale stroken, zoals er één in fig. 36 gearceerd is aangegeven. De afvoer door zulk een strook is $q \, dy$, waarbij q de afvoer per eenheid van breedte voorstelt. Deze afvoer vinden we door v naar z te integreren:

$$q = \int_{z_b}^h \frac{1}{\rho} \sqrt{\tau_0} \ln \frac{z - z_b}{0,03k} \, dz = \frac{a}{\rho} \sqrt{\tau_0} \left[\ln \frac{a}{0,03k} - 1 \right] = \frac{a}{\rho} \sqrt{\tau_0} \ln 12 \frac{a}{k}$$

Hierin is $a = h - z_b$ de plaatselijke diepte.

Laat i_r het verhang zijn dat de bodemwrijving compenseert. Dan is $\rho g a i_r \, dy \, dx$ de verhangkracht die werkt op het water tussen de gearceerde strook en een overeenkomstige strook in een dx verder gelegen dwarsprofiel. De op dat water werkende schuifkracht is $\tau_0 \, dy \, dx$. Uit de gelijkheid van deze twee krachten volgt

$$\sqrt{\tau_0} = \sqrt{g a i_r},$$

en dus

$$q = C_f a \sqrt{a i_r}$$

$$C_f = \sqrt{\frac{g}{\rho}} \ln 12 \frac{a}{k}$$

waarin

de plaatselijke coëfficiënt van Chézy is.

De totale afvoer Q door het gehele profiel vinden we door de integratie van q naar y :

$$Q = \int_{y_1}^{y_2} q \, dy = \int_{y_1}^{y_2} C_f a \sqrt{a i_r} \, dy$$

Hierin is i_r onafhankelijk van y . Verder is C_f nog een functie van a en dus van y ; ook is C_f nog een functie van de ruwheid n die eveneens in principe een functie van y kan zijn. Variaties van a en n hebben echter betrekkelijk weinig invloed op de waarde van C_f , en daarom zullen we voor C_f een middelwaarde nemen. We krijgen dan

$$Q = C_f \sqrt{i_r} \int_{y_1}^{y_2} a^{3/2} \, dy$$

We voeren nu een middelwaarde a_h van a in, bepaald door

$$\sqrt{a_h} = \frac{1}{A} \int_{y_1}^{y_2} a^{3/2} \, dy$$

Deze grootte a_h , die als het kwadraat van een gewogen gemiddelde van \sqrt{a} kan worden opgevat, zullen we de hydraulisch gemiddelde diepte noemen. We kunnen met behulp hiervan

$$(48) \quad \bar{v} = C_f \sqrt{a_h i_r}$$

voor de gemiddelde snelheid, en

$$(49) \quad K_f = C_f A \sqrt{a_h}$$

voor het afvoervermogen schrijven.

We moeten nu nog de middelwaarde van C_f die in (48) en (49) voorkomt, bepalen. Het ligt voor de hand deze af te leiden uit de middelwaarde a_h van a :

$$(50) \quad C_f = \sqrt{\frac{g}{\rho}} \ln 12 \frac{a_h}{k}$$

Dit is ook weer gerechtvaardigd omdat C_f slechts betrekkelijk weinig met a varieert.

Algemene wrijvingsformule voor open waterlopen.

De formules (45) en (46) zijn vooral gemotiveerd voor smalle profielen, dus voor profielen waarvan de diepte en de helft van de breedte van dezelfde grootteorde zijn.

De formules (48) en (50) daarentegen zijn vooral gemotiveerd voor brede profielen, dus voor profielen waarvan de breedte veel groter is dan de diepte.

De formules (45) en (48) vertonen een overeenkomstige structuur, evenals de formules (46) en (50). We kunnen de beide gevallen samenvatten door

$$(51) \quad \bar{v} = C_f \sqrt{a_c} i_r$$

en

$$(52) \quad C_f = \frac{\sqrt{g}}{\alpha} \ln C' \frac{a_c}{k}$$

Hierin stelt a_c een kenmerkende afmeting van het profiel voor; bij smalle profielen de hydraulische straal en bij brede profielen de hydraulisch gemiddelde diepte. Verder is C' een coëfficiënt welks waarde bij smalle profielen op 15 en bij brede profielen op 12 te stellen is. We zullen (51) de "gegeneraliseerde formule van Chézy", en (52) de "gegeneraliseerde formule van Nikuradse" noemen.

Het is enigzins onbevredigend dat we voor de brede profielen en voor smalle profielen verschillende formules hebben, onder andere omdat het twijfelachtig is welke formules we moeten toepassen in overgangsgevallen, dus op profielen die niet duidelijk tot een van beide categorieën behoren.

Nadere beschouwing leert ons nu, dat de uitkomsten der twee soorten formules veelal betrekkelijk weinig verschillen. Dit doet verwachten dat een bruikbaar compromis mogelijk zal zijn. Dit compromis zal natuurlijk van de vorm (51) en (52) moeten zijn.

In het algemeen blijkt de hydraulisch gemiddelde diepte a_h groter te zijn dan de hydraulische straal a_r . Nu is verder de gemiddelde diepte,

$$a_s = \frac{A}{b_s},$$

kleiner dan a_h of hoogstens even groot, en groter dan a_r of minstens even groot. Dit maakt de gemiddelde diepte dus bruikbaar als basis voor het compromis. Bovendien is de gemiddelde diepte als kenmerkende afmeting van het profiel praktisch zeer geschikt, omdat de bepaling ervan zeer eenvoudig is (eenvoudiger dan de bepaling van a_h of a_r). We komen er dus toe als "gewijzigde formule van Chézy"

$$(53) \quad \bar{v} = C_f \sqrt{a_s} i_r$$

in te voeren voor algemene praktische toepassing op open waterlopen. Hieruit volgt

$$(54) \quad K_f = C_f A \sqrt{a_s} = C_f b_s a_s^{3/2} = C_f A^{3/2} : b_s^{1/2}$$

voor het afvoervermogen.

Als compromis-formule voor C_f zullen we

$$(55) \quad C_f = \frac{\sqrt{g}}{\alpha} \ln 12 \frac{a_s}{k} = 7,8 \ln 12 \frac{a_s}{k} = 18 \lg 12 \frac{a_s}{k}$$

invoeren (lg = logarithmus decimalis, d.i. de gewone logarithme; met de opgegeven getallenwaarden wordt C_f in $m^{1/2}/sec$ uitgedrukt).

De vraag moet nu evenwel gesteld worden, of we door toepassing van (53) en (55) niet nodeloos fouten maken, die vermeden zouden kunnen worden door hetzij van (45) en (46), hetzij van (48) en (50) gebruik te maken.

Bij de beoordeling van deze tegenwerping moet men evenwel in het oog houden, dat het praktisch zeer moeilijk is de oneffenheden van de bodem enigzins nauwkeurig te bepalen; en zelfs al kent men deze oneffenheden, dan kan hieruit nog niet goed anders dan een globale waarde van k afgeleid worden, omdat de ruwheidsstructuur van de bodem meestal belangrijk afwijkt van de gelijkmatige zandruwheid van Nikuradse. De bepaling van de ruwheidsmaat k zal dan ook, in de praktijk in het algemeen geschieden door uit verhang, afvoer en profielafmetingen C_f te berekenen, en daaruit weer k af te leiden. Doch dit houdt in dat het aanvaarden van (55) alleen neerkomt op een iets gewijzigde, meer empirische definitie van de ruwheidsmaat k . Op de nauwkeurigheid der formules heeft dit praktisch geen invloed.

De tegen (53) aan te voeren argumenten worden nog meer verzwakt, doordat in de praktijk alle andere weerstanden dan de wrijving ook als wrijvingsweerstand in rekening worden gebracht, niettegenstaande zij niet dezelfde wetten volgen; hierdoor krijgt de weerstandsformule een nog meer uitgesproken empirisch karakter, en gaat het argument van de eenvoud nog zwaarder wegen.

Energiedissipatie door wrijving.

Alvorens op de andere weerstanden van een waterloop in te gaan, beschouwen we nog de door wrijving gedissipeerde energie.

Laat τ de schuifspanning op een afstand r van een wand zijn, d.w.z. de per oppervlakte-eenheid door het verder dan r van de wand gelegen water, op het dichterbij de wand gelegen water uitgeoefende kracht. De energiedissipatie per volumeneenheid is dan

$$\tau \frac{dv}{dr}$$

Bij de logarithmische snelheidsverdeling wordt dit

$$\tau \cdot \sqrt{\frac{v_0}{\rho}} \frac{1}{2r}$$

waarin τ_0 de waarde van τ voor $r=0$ is.

In het geval van het profiel van fig. 34, moet de schuifspanning τ op de afstand r van de wand evenwicht maken met de verhangkracht die werkzaam is over dat deel van het profiel dat op groter afstand r van de wand ligt. Dus

$$b\tau = \rho g i_r \frac{1}{2} b(a_0 - r) = \rho g i_r \frac{1}{2} \frac{b_0}{a_0} (a_0 - r)^2$$

De totale energiedissipatie in een gebied begrensd door de driehoek ABM en een overeenkomstige driehoek in een Δx verder gelegen profiel, bedraagt dus

$$\int_{\frac{n}{30}}^{a_0} \tau \frac{dv}{dr} \Delta x b dr = \rho g i_r \Delta x \int_{\frac{n}{30}}^{a_0} \frac{1}{2} \frac{b_0}{a_0} (a_0 - r)^2 \frac{dv}{dr} dr = \rho g i_r \Delta x \int_0^{v_M} \frac{1}{2} \frac{b_0}{a_0} (a_0 - r)^2 dv$$

$$= \rho g i_r \Delta x \int_0^{v_M} \frac{1}{2} \frac{b_0}{a_0} (a_0 - r)^2 v + \rho g i_r \Delta x \int_0^{a_0} v b dr = \rho g i_r Q_d \Delta x.$$

De dissipatie over het gehele profiel, per eenheid van lengte van de waterloop is dus

$$p_{dr} = \rho g i_r Q.$$

Het is niet moeilijk aan te tonen, dat dit ook voor een profiel als dat van fig. 36 geldt.

Algemene weerstandsformule voor open waterlopen.

We gaan nu over tot de behandeling van een waterloop met verwijdingen en vernauwingen, bochten, en kribben en dergelijke obstakels, die alle de weerstand vergroten.

Beschof een niet te groot vak van de waterloop, met een lengte l . Laat K_f het door (54) of een soortgelijke formule bepaalde afvoer Vermogen van het profiel zijn. Aangezien de afmetingen van het bed van dwarsprofiel tot dwarsprofiel variëren, zal K_f een functie van h en x zijn. Afgezien van de zojuist genoemde extra weerstanden, zal het verhang dat nodig is om de wrijving te compenseren,

$$i_r = \frac{Q^2}{K_f^2} = w_f Q^2$$

bedragen, waarbij

$$w_f = \frac{1}{K_f^2}$$

de weerstand per lengte-eenheid als gevolg van de wrijving (frictie), een functie van h en x is. In een permanentie, dus bij constante Q , wordt het vereiste verhang geleverd door verhang van de waterspiegel en de snelheidshoogte tesamen; dus i_r stelt het energieverhang voor. Leggen we de

oorsprong van de X-as bij het boveinde van het vak, dan is

$$\Delta H = \int_0^l i_r dx = Q^2 \int_0^l w_f dx = W_f Q^2$$

het energieverval over het vak door wrijving; hierbij stelt

$$(56) \quad W_f = \int_0^l w_f dx$$

de totale weerstand van het vak als gevolg van wrijving voor. Nu is de integrand w_f nog een functie van h en X . Beperken we ons tot het geval van een betrekkelijk kort vak, dan varieert h over het integratieinterval slechts weinig, en dan mag bij benadering w_f afhankelijk van de gemiddelde waterstand in het vak gesteld worden. Ook W_f wordt dan een functie van deze gemiddelde waterstand.

Uit W_f kunnen we een gemiddelde wrijvingsweerstand per lengte-eenheid,

$$w_{fm} = W_f : l,$$

en daaruit een middelwaarde van het afvoervermogen

$$\text{bepalen.} \quad K_{fm} = 1 : \sqrt{w_{fm}} = \sqrt{l : W_f}$$

Bij verwijdingen en vernauwingen treden vertragingen en versnelingen op. Dit heeft ten eerste invloed op de snelheidsverdeling, en daarmee op de wrijvingsweerstand; dit is in aanh. 1,1 reeds ter sprake gekomen. Bij een verwijding treden bovendien vertragingen op, die de in aanh. 1,1 behandelde vermindering van de wrijving veelal overtreffen. Bij een plotselinge vernauwing kunnen eveneens verliezen ontstaan door contractie van de stroming, en de daarachter optredende vertraging. We kunnen met verwijking naar aanh. 6,1 hier volstaan met te constateren dat een vertraging-verlies een extra verval

$$\Delta H = W_e Q^2$$

geeft, waarin W_e , de weerstand door vertraging (expansie), nog een functie van de waterstand is.

In een bocht heeft doorgaans de bodem een dwarsverhang*) van binnen naar buiten. Als gevolg hiervan zal naar verhouding langs de buitenbocht meer water worden afgevoerd dan langs de binnenbocht. Dit wordt weliswaar enigszins tegengewerkt doordat het verhang langs de binnenbocht iets groter is dan langs de buitenbocht, doch dit is meestal van ondergeschikt belang. Het maatgevende verhang wordt dus niet langs de as van de rivier gemeten, doch iets meer naar de buitenbocht. Meet men de lengte van de rivier langs de as, dan moet men dus een extra verval in rekening brengen.

Bovendien werken in een bocht middelpuntvliedende krachten, waardoor een gecompliceerd stromingsbeeld ontstaat, dat moeilijk exact te analyseren is. Dit is echter voor ons doel ook niet nodig, daar we kunnen volstaan met op te merken dat de gehele stroming onder invloed staat van verhangkrachten, wrijvingskrachten traagheidskrachten van het Bernoulli-type, en middelpuntvliedende traagheidskrachten. Zowel de wrijvingskrachten als de beide soorten traagheidskrachten zijn evenredig met het kwadraat der snelheden. Het extra energieverval in de bocht zal daarom evenredig met het kwadraat van de gemiddelde stroomsnelheid, en ook evenredig met het kwadraat van de afvoer gesteld mogen worden:

$$\Delta H = W_b Q^2.$$

Hierin zal de weerstand W_b afhankelijk zijn van verschillende geometrische factoren die de vorm van het bed in de bocht bepalen. Deze factoren zijn constant of afhankelijk van de waterstand, en W_b zal dus een functie van de waterstand zijn.

De extra weerstand door een krib kan men zich ontstaan denken doordat zich stroomafwaarts van de kribkop een soort zog vormt. Laat a de diepte beneden de krib zijn. De hoogte van het zog is dan eveneens a . Er is reden om ook de breedte van het zog evenredig met a te stellen. De door

*) Zie b.v. Lit. 1.

de kribkop uitgeoefende weerstandskracht zullen we dan op

$$F = \zeta \frac{1}{2} \rho v^2 a^2$$

stellen, waarin ζ een dimensieloze weerstandscoefficient is. Is A het stroomvoerend profiel naast de krib, dan heeft de kracht F een verval

$$\Delta H = W_k Q^2$$

tengevolge, waarbij

$$W_k = \frac{\zeta a^2}{2 g A^3}$$

een functie van de waterstand is.

De kribweerstand is ook nog wel op andere wijze, b.v. als ver-
tragsingsverlies, te behandelen, doch dit leidt eveneens tot een formule
waarin het verval evenredig met Q^2 , en de weerstand W_k een functie van de
waterstand is.

Andere obstakels, zoals pijlers van bruggen, zijn op overeenkom-
stige wijze als kribkopen te behandelen.

Tellen we nu alle vervallen in het vak op, dan vinden we voor
het totale energieverval

$$\Delta H = W Q^2,$$

waarin

$$W = W_k + \sum W_e + \sum W_b + \sum W_k$$

de som van alle weerstanden, dus de totale weerstand van het vak is.

Alle samenstellende weerstanden zijn afhankelijk van de plaatse-
lijke waterstanden. We namen evenwel aan dat het vak zo kort is, dat de
verschillende waterstanden in het vak weinig uiteenlopen. We substitueren
daarom bij benadering voor alle plaatselijke waterstanden het gemiddelde
dier waterstanden in het vak, zodat alle weerstanden functies hiervan wor-
den. Ook W wordt dan een functie van de gemiddelde waterstand.

Meestal overheerst de wrijvingsweerstand W_f over de andere weer-
standen. Men kan dan ter vereenvoudiging van de theorie de andere weerstan-
den, en dus ook de totale weerstand, in equivalente wrijvingsweerstand
gaan omrekenen. We leiden daartoe allereerst uit W een gemiddeld afvoer-
vermogen

$$(57) \quad K = \sqrt{L \cdot W}$$

af. Dit is een functie van de gemiddelde waterstand h . Het is kleiner dan
de hiervoor bepaalde middelwaarde K_{fm} van het door wrijving bepaalde af-
voervermogen.

Verder bepalen we op een of andere wijze een gemiddeld dwarspro-
fiel van rechthoekige, trapezoidale, parabolische of nog andere vorm; dat
is in principe willekeurig. Bij dat profiel is voor iedere waterstand h het
oppervlak van het profiel A , en de stroomvoerende breedte b_s te bepalen.
Uit de bij h behorende waarde van het zojuist beschouwde afvoervermogen K ,
is dan met de formule

$$(58) \quad K = C A^{5/2} : b_s^{1/2}, \quad \text{C te berekenen. Deze coëfficiënt}$$

analoog aan (54), een weerstandscoefficient van Chézy geeft behalve de wrij-
ving, ook de andere weerstanden weer, die in het algemeen op andere wijze
met de waterstand variëren dan de wrijvingsweerstand.

Men kan dan ook niet verwachten dat C logaritmisch met de ge-
middelde diepte varieert, zoals C_f volgens (55) doet. Op de Rijn b.v.
neemt C met afnemende waterstand eerst af, en later weer toe; wellicht een
gevolg van de zeer uiteenlopende invloed der kribben bij hoge, middelbare,
en lage waterstanden.

Het weerstandsbegrip.

We willen tot slot van deze paragraaf nog kort op de doelmatig-
heid van het invoeren van de weerstand W ingaan. Deze is namelijk ener-
zijds ondubbelzinnig door verval en afvoer bepaald, en dus als een empirisch
geheel gedefinieerde grootte op te vatten. Anderzijds behoeft men voor
een verhang- of getijberekening van de weerstanden in het vak niets meer te

weten dan de grootheid W , als functie van h . De weerstand W vormt dus de meest directe schakel tussen waarnemingen en berekeningen.

De coëfficiënt C ligt niet onduidelijk vast, omdat het min of meer willekeurig is hoe men het gemiddelde profiel van een vak bepaalt. De grootheid C , evenwel, heeft, hoe ze ook bepaald is, de eigenschap veel minder sterk met de waterstand te variëren dan de weerstand W . Daardoor is het mogelijk, indien W voor sommige waarden van h uit afvoeren en vervallen bepaald is, met behulp van de formules (57) en (58) voor andere waarden van h te inter- of extrapoleren. Ook kan met die formules een behoorlijke schatting van W gemaakt worden indien in het geheel geen directe gegevens over W bekend zijn.

Voor dit doel zouden we ook op de oorspronkelijke formule van Chézy (45) in plaats van op de gewijzigde formule (53) kunnen teruggrijpen, maar de laatste verdient om zijn eenvoud de voorkeur.

Aanhangsel 1.

1,3. Samengestelde geulen en profielen.

Onder een hydraulisch bergingselement verstaan we een systeem, dat onder toename, resp. afname van een verval of waterstand, water opneemt, resp. afgeeft. Een vak van een waterloop kan als zulk een bergingselement worden opgevat. We nemen aan dat het vak kort is, zodat de waterstanden boven en beneden in het vak weinig verschillen, en alle door de gemiddelde waterstand h benaderd mogen worden. Laat Q_a de afvoer aan het boveineind, en Q_b bij het benedeneind zijn. Dan geldt, (afgezien van een inunderende afvoer):

$$Q_a - Q_b = B \frac{dh}{dt}$$

Hierin is B de berging van het vak, dat is het oppervlak van de waterspiegel.

Onder een hydraulisch traagheidselement verstaan we een systeem, dat onder invloed van een verval water afvoert, en waarbij ten gevolge van de traagheid de toe- of afname van de afvoer van het verval afhangt. Laat ΔH het verval, en Q de afvoer zijn, dan geldt dus

$$\Delta H = M \frac{dQ}{dt}$$

De factor M is de hydraulische traagheid van het systeem.

Onder een hydraulisch weerstandselement verstaan we een systeem, dat onder invloed van een verval water afvoert, en waarbij de afvoer rechtstreeks van het verval afhangt. Bij een quadratische weerstandswet geldt

$$\Delta H = WQ^2$$

De factor W is de (quadratische) weerstand van het systeem.

Integreren we de dynamische vergelijking (2) over de lengte van een vak van een waterloop, onder verwaarlozing van de kleine term met $\partial h / \partial t$, dan vinden we voor het verval

$$H_a - H_b = \frac{d(MQ)}{dt} \pm WQ^2$$

Hierin is

$$M = \int_0^l \frac{dx}{gA}$$

de traagheid van het vak. Verder is W de weerstand van het vak (zie aanh. 1,2). Het + teken geldt voor eb en het - teken voor vloed. We hebben aangenomen dat de lengte van het vak klein is, zodat voor Q een middelwaarde mocht worden gesubstitueerd.

We beperken ons nu tot het geval van eb (de conclusies hiervoor zijn gemakkelijk op het geval van vloed over te dragen) en zien af van de variatie van M met t , die van ondergeschikte betekenis is. Dan wordt dus

$$(59) \quad H_a - H_b = M \frac{dQ}{dt} + WQ^2$$

Het vak van de waterloop is dus, wat zijn afvoerende functie betreft, op te vatten als een gecombineerd traagheids- weerstands- element.

Behalve door zijn weerstand, is een weerstandselement ook te kenmerken door zijn doorlating. Zo is bij een quadratische weerstand

$$Q = D\sqrt{H_r}$$

waarin H_r het weerstandsverval en

$$D = \frac{1}{\sqrt{W}} = \frac{K}{\sqrt{t}}$$

de doorlating is.

Is er een zijdelingse afvoer uit het vak, dan geldt hiervoor (bij volkomen overlaat; zie aanh. 6,2)

$$Q_i = D_i (h - h_0)^{3/2}$$

waarin h_0 de kruinhoogte van de overlaat, en

$$D_i = \mu \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g l}$$

de zijdelingse doorlating is (aangenomen is een zijdelingse afvoer over de volle lengte van het vak). De continuïteitsvergelijking wordt in dit geval

$$(60) \quad Q_a - Q_b = B \frac{dh}{dt} + D_i (h - h_0)^{3/2}.$$

Dit is als een analogon van (59) op te vatten.

Vakken in elkaars verlengde.

We beschouwen nu een vak 1 ($a_1 - b_1$), in welks verlengde benedenwaarts een vak 2 ($a_2 - b_2$) gelegen is, zodat het boven-einde a_2 van 2 met het benedeneinde b_1 van 1 overeenkomt. We vatten de combinatie op als een vak $a - b$, waarbij dus a met a_1 en b met b_2 overeenkomt. We veronderstellen dat de vakken kort zijn; we zien daarom bij het behandelen van de vervallen even af van de geborgen waterhoeveelheden door verandering van de waterstand, en stellen de afvoer van beide geulen gelijk. Het totale verval over de twee vakken samen, is de som van de vervallen over elk der geulen afzonderlijk. Voor de vakken afzonderlijk geldt

$$H_{a_1} - H_{b_1} = W_1 Q^2 + M_1 \frac{dQ}{dt}$$

$$H_{a_2} - H_{b_2} = W_2 Q^2 + M_2 \frac{dQ}{dt},$$

en door optellen vinden we voor de combinatie

$$H_a - H_b = W Q^2 + M \frac{dQ}{dt},$$

waarin

$$W = W_1 + W_2$$

en

$$M = M_1 + M_2.$$

De weerstanden en traagheden van de gecombineerde vakken moeten dus worden opgeteld.

We zien verder bij het behandelen van de geborgen waterhoeveelheden even af van de vervallen, en stellen de waterstanden in vak 1 en 2 gelijk. Het verschil in afvoer tussen $a (= a_1)$ en $b (= b_2)$ is het verschil tussen a_1 en b_1 vermeerderd met het verschil tussen a_2 en b_2 . Voor de vakken afzonderlijk geldt, als de overlaathoogte h_0 in beide dezelfde is,

$$Q_{a_1} - Q_{b_1} = D_{i_1} (h - h_0)^{3/2} + B_1 \frac{dh}{dt}$$

$$Q_{a_2} - Q_{b_2} = D_{i_2} (h - h_0)^{3/2} + B_2 \frac{dh}{dt},$$

en door optellen vinden we voor de combinatie

$$Q_a - Q_b = D_i (h - h_0)^{3/2} + B \frac{dh}{dt},$$

waarin

$$D_i = D_{i_1} + D_{i_2}$$

en

$$B = B_1 + B_2.$$

De zijdelingse doorlatingen en de bergingen van de gecombineerde vakken moeten dus worden opgeteld.

Vakken naast elkaar.

Vervolgens beschouwen we twee korte geulen 1 en 2 naast elkaar, zodat de boven-einden a_1 en a_2 samenvallen, en evenzo de benedeneinden b_1 en b_2 . We vatten de combinatie op als één systeem met boven-einde $a (= a_1 = a_2)$ en benedeneinde $b (= b_1 = b_2)$.

Voor het verval, dat voor beide geulen hetzelfde is, geldt

$$(61) \quad H_a - H_b = \Delta H = W_1 Q_1^2 + M_1 \frac{dQ_1}{dt}$$

$$H_a - H_b = \Delta H = W_2 Q_2^2 + M_2 \frac{dQ_2}{dt}$$

We beschouwen in het bijzonder het geval dat de weerstand overheersend is. Dan kan een eerste benadering voor de afvoer in elk der geulen gevonden worden, door de traagheid te verwaarlozen:

$$Q_1 \approx \sqrt{\frac{\Delta H}{W_1}}$$

Met behulp hiervan kan het traagheidsverval globaal bepaald worden:

$$M_1 \frac{dQ_1}{dt} \approx \frac{1}{2} \frac{M_1}{\sqrt{W_1}} \frac{1}{\sqrt{\Delta H}} \frac{d\Delta H}{dt}$$

Door dit in (61) te substitueren, vinden we als tweede benadering

$$Q_1 \approx \sqrt{\frac{\Delta H}{W_1} - \frac{1}{2} \frac{M_1}{W_1 \sqrt{W_1}} \frac{1}{\sqrt{\Delta H}} \frac{d\Delta H}{dt}}$$

of, met enige verwaarlozing,

$$(62) \quad Q_1 \approx \sqrt{\frac{\Delta H}{W_1} - \frac{1}{4} \frac{M_1}{W_1} \frac{1}{\Delta H} \frac{d\Delta H}{dt}}$$

Een overeenkomstige formule vinden we voor Q_2 , en door optellen vinden we dan de afvoer $Q = Q_1 + Q_2$ door beide geulen samen:

$$(63) \quad Q \approx \left(\frac{1}{\sqrt{W_1}} + \frac{1}{\sqrt{W_2}} \right) \sqrt{\Delta H} - \frac{1}{4} \left(\frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} \right) \frac{1}{\Delta H} \frac{d\Delta H}{dt}$$

We trachten de combinatie der twee geulen zo goed mogelijk weer te geven met een weerstand W , en een traagheid M ; we stellen dus

$$(64) \quad H_a - H_b = \Delta H \approx W Q^2 + M \frac{dQ}{dt}$$

Behandelen we deze vergelijking op dezelfde wijze als (61), dan vinden we in tweede benadering

$$(65) \quad Q \approx \sqrt{\frac{\Delta H}{W} - \frac{1}{4} \frac{M}{W} \frac{1}{\Delta H} \frac{d\Delta H}{dt}}$$

op dezelfde wijze als we (62) gevonden hebben. Nu moeten (64) en (65), daar zij beide tot in tweede benadering gelden, overeenkomen. Hieruit volgt dat W moet voldoen aan

$$(66) \quad \frac{1}{W} = \frac{1}{W_1} + \frac{1}{W_2} \quad \text{of} \quad D = D_1 + D_2,$$

d.w.z. dat de doorlatingen van de geulen gesommeerd moeten worden. Verder heeft de combinatie van de twee geulen naast elkaar, een effectieve traagheid M , die door

$$(67) \quad \frac{M}{W} = \frac{M_1}{W_1} + \frac{M_2}{W_2} \quad \text{of} \quad MD^2 = M_1 D_1^2 + M_2 D_2^2$$

bepaald is.

Indien de traagheid sterk overheerst, zodat de weerstand te verwaarlozen is, dan kan voor de afzonderlijke geulen

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{H_a - H_b}{M_1}$$

$$\frac{dQ_2}{dt} = \frac{H_a - H_b}{M_2}$$

geschreven worden. Door optelling is hieruit voor $Q = Q_1 + Q_2$

$$H_a - H_b = M \frac{dQ}{dt}$$

af te leiden, waarin M , de effectieve traagheid der combinatie, door

$$(68) \quad \frac{1}{M} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}$$

bepaald is.

De door (68) bepaalde waarde van M is kleiner dan de door (67) bepaalde, doch het verschil is niet zeer groot. Voorts blijkt de benadering (64) met (67) voor M , nog goed te voldoen ook als het traagheidsverval van dezelfde grootte-orde wordt als het weerstandsverval.

Voor de waterbalans van de twee geulen geldt

$$Q_{a1} - Q_{b1} = D_{i1} (h - h_0)^{3/2} + B_1 \frac{dh}{dt}$$

$$Q_{a2} - Q_{b2} = D_{i2} (h - h_0)^{3/2} + B_2 \frac{dh}{dt}$$

Voor de combinatie geldt $Q_a = Q_{a1} + Q_{a2}$ en $Q_b = Q_{b1} + Q_{b2}$,
en dus

$$Q_a - Q_b = D_i (h - h_0)^{3/2} + B \frac{dh}{dt},$$

waarin

$$D_i = D_{i1} + D_{i2}$$

en

$$B = B_1 + B_2.$$

De zijdelingse doorlatingen en de bergingen moeten dus opgeteld worden, evenals in het geval van twee geulen in elkaars verlengde. Hierbij is weer aangenomen, dat de overlaathoogte h_0 in beide geulen dezelfde is, wat in het algemeen niet het geval behoeft te zijn. Bij verschillende waarden van h_0 kunnen de twee doorlatingen niet opgeteld worden, doch hun samenstelling moet wel gebaseerd blijven op het optellen van de twee afvoeren Q_{i1} en Q_{i2} .

Parallel-, serie- en cascade-schakeling.

Tussen de vergelijkingen (59) en (60) bestaat een duidelijke analogie. Verder zou men op het eerste gezicht geneigd zijn ook een zekere analogie tussen naast elkaar plaatsing, en achter elkaar plaatsing van twee geulen te verwachten, vooral als men op de parallel- en serieschakeling in de elektrotechniek let. De verwachte analogie blijkt echter niet te bestaan; want terwijl men de weerstanden en traagheden bij naast elkaar geplaatste geulen geheel anders moet samenstellen dan bij achter elkaar geplaatste geulen, moeten berging en zijdelingse doorlating in beide gevallen op gelijke wijze worden samengesteld.

Bij nader inzien blijkt nu ook, dat de analogie van een geul met een elektrische geleider (z.g.n. tweepool) niet opgaat. De analogie zou slechts bestaan indien de geul geen berging had, dus als het in feite geen geul, maar een gesloten buis was.

Bij verdere beschouwing blijkt wel een analogie met meer gecompliceerde elektrische systemen, z.g.n. vierpolen te bestaan. Een getijgeul is n.l. op te vatten als een hydraulische vierpool, en dus het analogon van een elektrische vierpool. Hierbij komt de hydraulische traagheid met de zelfinductie, de hydraulische weerstand met de elektrische, en de berging met de capaciteit overeen (Lit. 19). De wetten van een getijgeulennetwerk zijn dus overdrachts- en schakelwetten van hydraulische vierpolen.

Door enige publicaties van Dr van Veen (Lit. 8, 9, 10) wordt de indruk gewekt dat een geulennetwerk analoog zou zijn met een gelijk geconfigureerd elektrisch netwerk, doch in feite is de analogie dus meer gecompliceerd.

De drie voornaamste schakelingen van twee vierpolen zijn een z.g.n. serieschakeling, een z.g.n. parallelschakeling, en een gemengde z.g.n. cascadeschakeling.

Twee geulen die naast elkaar liggen, voldoen aan

$$H_a = H_{a1} = H_{a2}$$

$$H_b = H_{b1} = H_{b2}$$

$$Q_a = Q_{a1} + Q_{a2}$$

$$Q_b = Q_{b1} + Q_{b2}$$

Dit zijn de schakelwetten van de parallelschakeling van twee vierpolen. Twee geulen die in elkaars verlengde liggen voldoen aan

$$H_a = H_{a1}$$

$$H_{b1} = H_{a2}$$

$$H_b = H_{b2}$$

$$Q_a = Q_{a1}$$

$$Q_{b1} = Q_{b2}$$

$$Q_b = Q_{b2}$$

Dit zijn de schakelwetten van de gemengde cascoadeschakeling van twee vierpolen.

De serieschakeling van twee geulen zou moeten voldoen aan

$$H_a = H_{a1} + H_{a2}$$

$$H_b = H_{b1} + H_{b2}$$

$$Q_a = Q_{a1} = Q_{a2}$$

$$Q_b = Q_{b1} = Q_{b2}$$

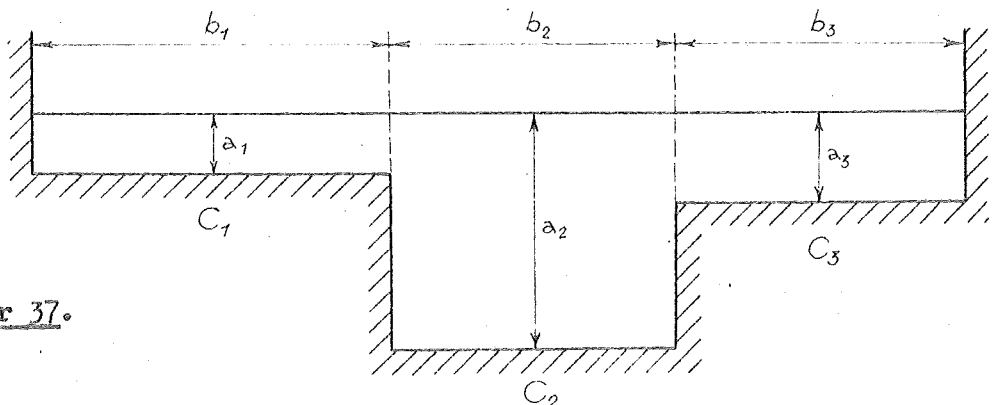
Het is echter onmogelijk twee open geulen volgens deze wetten aan elkaar te koppelen. *) Een serieschakeling van geulen bestaat dus niet.

Bij parallelschakeling (twee geulen naast elkaar) staan traagheden en weerstanden, zowel als bergingen en zijdelingse doorlatingen parallel.

Bij de cascoadeschakeling (twee geulen in elkaars verlengde) staan de traagheden en weerstanden in serie; zij moeten dus anders samengesteld worden dan bij geulen naast elkaar. De bergingen en zijdelingse doorlatingen staan echter parallel, en moeten dus juist zo samengesteld worden als bij geulen naast elkaar.

Samengestelde profielen.

De gedachtegang die we hierboven toepasten op geulen naast elkaar, kan ook worden toegepast op samengestelde profielen, b.v. op het profiel dat in fig. 37 is aangegeven.



Figuur 37.

*) Er zijn gesloten hydraulische systemen mogelijk, die aan analoge vergelijkingen als (59) en (60) voldoen, en die wel volgens de seriewetten geschakeld kunnen worden; zulke systemen hebben niet twee, doch vier aansluitpunten (volledige vierpool). Een open geul is gelijkwaardig met een vereenvoudigde vierpool waarvan twee aansluitingen steeds een constante potentiaal houden, zodat alleen de potentiaalwisselingen (verticaal getij) van de andere twee aansluitingen bestudeerd behoeven te worden. Een dergelijke vereenvoudigde vierpool mag niet worden opgevat als een tweepool, desnoods wel als een driepool, doch kan theoretisch nog steeds het beste als een vierpool behandeld worden. Voor de theorie zie Lit. 15.

Dit profiel is op te vatten als bestaande uit drie delen met de oppervlakken

$$A_1 = a_1 b_1, \quad A_2 = a_2 b_2, \quad A_3 = a_3 b_3,$$

en de afvoervermogens

$$K_1 = C_1 a_1^{3/2} b_1, \quad K_2 = C_2 a_2^{3/2} b_2, \quad K_3 = C_3 a_3^{3/2} b_3.$$

We beschouwen nu een vak met het gegeven dwarsprofiel, en met een willekeurige (desnoods zeer kleine) lengte l . Dit vak is op te vatten als een combinatie van drie geulen naast elkaar met de traagheden

$$M_1 = \frac{l}{g A_1}, \quad M_2 = \frac{l}{g A_2}, \quad M_3 = \frac{l}{g A_3},$$

en de doorlatingen

$$D_1 = \frac{K_1}{\sqrt{l}}, \quad D_2 = \frac{K_2}{\sqrt{l}}, \quad D_3 = \frac{K_3}{\sqrt{l}}.$$

Samenstelling van deze drie geulen volgens (66) en (67) geeft voor de doorlating van het vak

$$D = \frac{K_1 + K_2 + K_3}{\sqrt{l}},$$

en voor de traagheid

$$M D^2 = \frac{K_1^2}{g A_1} + \frac{K_2^2}{g A_2} + \frac{K_3^2}{g A_3}.$$

Hieruit kunnen we ten eerste het totale afvoervermogen van het profiel afleiden:

$$K = D \sqrt{l} = K_1 + K_2 + K_3.$$

Ten tweede leiden we een effectief stroomvoerend oppervlak A af, dat zodanig bepaald is dat

$$M = \frac{l}{g A}.$$

We moeten dan A bepalen uit

$$\frac{K^2}{A} = \frac{K_1^2}{A_1} + \frac{K_2^2}{A_2} + \frac{K_3^2}{A_3}.$$

Dit effectieve oppervlak A is groter dan elk der oppervlakken A_1 , A_2 of A_3 afzonderlijk, doch kleiner dan hun som $A_1 + A_2 + A_3$. We kunnen dit ook zo uitdrukken, dat het oppervlak van de hoofdgeul, A_2 , vermeerderd wordt met een fractie van de oppervlakken der nevengeulen, A_1 en A_3 .

Met deze gedachtegang is het dus mogelijk op een rationele wijze rekening te houden met het feit dat uiterwaarden, platen en dergelijke nevengeulen ten opzichte van de hoofdgeul een relatief zwakkere invloed hebben.

Voert men een coëfficiënt $\alpha = a_1 : a_2$ en een tweede coëfficiënt $\beta = C_1 b_1 : C_2 b_2$ in, dan geldt, zolang β en α niet te groot zijn, dat de nevengeul 1 aan het afvoervermogen van de hoofdgeul 2 een bedrag

$$\Delta K = \beta \alpha^{3/2} K_2,$$

aan het stroomvoerend profiel een bedrag

$$\Delta A = \beta (2\alpha^{3/2} - \alpha^2) A_2,$$

en aan de stroomvoerende breedte een bedrag

$$\Delta b_3 = \beta (3\alpha^{1/2} - 2\alpha) b_2$$

toevoegt. Soortgelijke bedragen worden door de andere nevengeul 3 toegevoegd.

Is de diepte a een willekeurige functie van de dwarscoördinaat y , dan kunnen we van sommaties op integralen overgaan. Aldus vinden we, als we voor C een middelwaarde nemen,

$$K = C \int_0^3 J_{0,5}^* dy,$$

waarin $J_{0,5}^*$ het moment van de orde 0,5 t.o.v. de waterspiegel voorstelt:

$$\frac{3}{2} J_{0,5}^* = \frac{3}{2} \iint (h-z)^{1/2} dy dz = \int_{y_1}^{y_2} a^{3/2} dy.$$

De formule voor K komt overeen met (49).

Het effectieve stroomvoerende profiel is dan voorts bepaald door

$$A = \left(\frac{3}{2} J_{0,5}^*\right)^2 : 2 J_1^*$$

waarbij J_1^* het moment van de orde 1 t.o.v. de waterspiegel,

$$2 J_1^* = 2 \iint_A (h-z) dy dz = \int_{y_1}^{y_2} \alpha_2 dy,$$

voorstelt.

spiegelbreedte $b_{1,0}$

α_0 geldt

Voor een trapeziumvormig profiel met bodembreedte b_0 , en diepte

$$K = C \alpha_0^{3/2} \left(\frac{3}{5} b_0 + \frac{2}{5} b_1\right),$$

en verder

$$A = \alpha_0 \frac{\left(\frac{3}{5} b_0 + \frac{2}{5} b_1\right)^2}{\frac{2}{3} b_0 + \frac{1}{3} b_1} \approx \alpha_0 \left(\frac{8}{15} b_0 + \frac{7}{15} b_1\right).$$

De stroomvoerende breedte b_s is iets kleiner dan b_1 , en door

$$b_s = \frac{\left(\frac{3}{5} b_0 + \frac{2}{5} b_1\right) \left(\frac{1}{15} b_0^2 + \frac{2}{3} b_0 b_1 + \frac{4}{15} b_1^2\right)}{\left(\frac{2}{3} b_0 + \frac{1}{3} b_1\right)^2} \approx \left(\frac{1}{15} b_0 + \frac{14}{15} b_1\right)$$

bepaald.

De waarden van A en b_s kunnen, om de factor γ schattenderwijs in rekening te brengen (zie aanh. 1,1), nog met enkele procenten verminderd worden (2% voor een rechte waterloop en $C \approx 50 \text{ m}^{1/2} / \text{sec.}$).

Aanhangsel 2.

Invloed van enige verwaarlozingen.

Invloed van de variatie van het dwarsprofiel langs een vak.

In par. 5 hebben we enige verwaarlozingen ingevoerd, ten einde een niet te ingewikkelde bepaling van c , Z en H_z mogelijk te maken.

In de eerste plaats hebben we het beschouwde vak van de waterloop geschematiseerd tot een vak met een constant profiel, dat overigens nog willekeurig van vorm kon zijn. De invloed van deze schematisatie kan worden geschat met een methode die wij in ons proefschrift par. 13,43 aangaven, en die we hieronder kort bespreken.

In werkelijkheid zijn de berging, de traagheid en de weerstand ongelijkmatig langs het vak verdeeld, als gevolg van het onregelmatig van plaats tot plaats variëren van het dwarsprofiel. Bij het schematiseren gaat men de totale berging, traagheid, of weerstand, als gelijkmatig langs het vak verdeeld in rekening brengen. Dit komt hierop neer dat berging, traagheid of weerstand vereffend worden, door b.v. van een plaats waar de bergende breedte b groot is, een deel der berging niet op die plaats in rekening te brengen, doch op een plaats waar b klein is. Men verplaatst als het ware gedeelten van de totale berging, traagheid of weerstand van het vak van plaatsen waar vergeleken met het gemiddelde een overschot is, naar plaatsen waar een tekort is.

Nemen we als voorbeeld de verplaatsing van een berging δB van x_1 naar x_2 , in een vak $0 \leq x \leq L$ ($0 \leq x_1 < x_2 \leq L$). De invloed hiervan kan geschat worden, door eerst de overdracht te beschouwen van een systeem bestaande uit drie regelmatige stukken geul, van 0 tot x_1 , van x_1 tot x_2 en van x_2 tot L , en een extra berging δB bij x_1 (fig. 38a), en dan vervolgens hiermee te vergelijken de overdracht van een systeem bestaande uit diezelfde stukken geul, doch nu met de extra berging bij x_2 (fig. 38b).



Figuur 38.

Om die overdracht meer in het algemeen te bestuderen, gaan we de differentiaalvergelijkingen van het stukje geul lineariseren (in dit verband is het al of niet lineair zijn der vergelijkingen van secundair belang), en vervolgens een zuiver sinusvormig getij beschouwen, met een hoekfrequentie ω . De overdracht van elk der twee systemen is dan algemeen namen te vatten in enkele complexe transmissiegrootheden. De grootste veranderingen in deze grootheden als gevolg van de verplaatsing van δB over de afstand $l = x_2 - x_1$, zijn dan relatief van de grootteorde

$$\frac{\delta B}{B} \frac{\omega^2 l}{c_\omega^2}$$

waarin B de berging van het gehele vak $0-L$ is, en c_ω de voortplantings-snelheid (fasesnelheid) van de sinusvormige golven met hoekfrequentie ω .

Op overeenkomstige wijze gaan we de invloed van een verplaatsing van een stukje traagheid δM , of van een stukje weerstand δW , over een afstand l na. Laat Q_m de voor de linearisatie maatgevende waarde van de afvoer zijn ($Q_m =$ bovenafvoer als deze overheerst, en $Q_m = 0,425$ maal amplitude getijstroom als er geen of weinig bovenafvoer is), zodat $R = 2WQ_m$ de gelineariseerde weerstand van het vak is. Voer dan θ door

$$\tan \theta = \frac{R}{\omega M}$$

in, dan is

$$\frac{\delta M}{M} \frac{\omega^2 l L}{c_\omega^2} \cos \theta \quad \text{resp.} \quad \frac{\delta W}{W} \frac{\omega^2 l L}{c_\omega^2} \sin \theta$$

de relatieve fout door een verplaatsing δM resp. δW over een afstand l .

Voor c_ω geldt

$$c_\omega = \frac{\sqrt{\cos \theta}}{\sqrt{MB \cos \frac{1}{2} \theta}}$$

Dit is meestal van dezelfde grootteorde als c_0 .

Als we voor ω de hoekfrequentie van het M2 getij nemen, wat het meest voor de hand zou liggen, dan zouden we de invloed der hogere harmonischen onderschatten. Het is daarom beter een fictief getij te beschouwen, waarvan ω bepaald is door

$\omega = |\dot{Q}|_{\max} : \hat{Q}$ of $\omega = |\dot{h}|_{\max} : \hat{h}$, waarbij \hat{Q} , resp. \hat{h} de amplitude van het horizontale, resp. verticale getij is, en $|\dot{Q}|_{\max}$, resp. $|\dot{h}|_{\max}$ de maximale waarde van $|\partial Q / \partial t|$, resp. $|\partial h / \partial t|$. Het is meestal voldoende voor ω het 1,5- à 2-voudige te nemen van de hoekfrequentie van het M2 getij.

Ter illustratie beschouwen we het geval van een vak met een lengte van 10 km, waarvan de bovenste helft van 5 km een bergende breedte heeft die 10% groter, en de benedenste helft een die 10% kleiner is dan het gemiddelde. Laat $c_\omega \approx 25$ km/h zijn; voor ω nemen we 1 rad/h (M4 getij).

We moeten dus een verplaatsing beschouwen van 10% der berging over een afstand van $l = 5$ km. De relatieve verandering in de overdracht van het vak hierdoor is

$$0,1 \frac{1^2 \cdot 5 \cdot 10}{25^2} = 0,008 = 8 \text{ } \text{‰}$$

Bij de beoordeling of een dergelijke fout toelaatbaar is of niet, moet enerzijds een vergelijking gemaakt worden met de onvermijdelijke fouten door onnauwkeurigheden in de gegevens, en anderzijds (zo mogelijk) met de voor de praktijk gewenste nauwkeurigheid rekening gehouden worden. Verder moet er nog op gelet worden of de fout in het ene vak dezelfde strekking heeft als in de naburige vakken (systematische cumulering van fouten) of niet (toevallige cumulering van fouten). Hierbij mag men aannemen dat de cumulering zich beperkt tot vakken die binnen afstanden overeenkomende met de relaxatietijd (zie aanh. 4) gelegen zijn.

Invloed van nietlineair verloop van H en Q langs een vak.

Verloopt H lineair met x langs de beschouwde karakteristiek, dan komt $H_g = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ overeen met het gemiddelde

$$\bar{H} = \frac{1}{l} \int_0^l H dx.$$

Een schatting van de fout die we maken door $H_g = \frac{1}{2}(H_1 + H_2)$ te nemen, kunnen we verkrijgen door voor H een quadratisch verloop met x aan te nemen:

$$H = H_1 + \frac{H_2 - H_1}{l} x + 4 \frac{H_p - H_g}{l^2} x(l-x);$$

hierin is H_p de waarde van H voor $x = \frac{1}{2} l$; dus halverwege de beschouwde karakteristiek. We vinden dan

$$\bar{H} = H_g + \frac{2}{3}(H_p - H_g).$$

De grootste afwijkingen van het lineaire verloop komen in de praktijk voor, indien het nagerekende golfpunt een golf uit de andere richting tegemoet loopt, met een sterk gekromde kop of voet. In dat geval vinden we het verschil $(H_p - H_g)$ ook als pijl bij een koorde van de Ht -kromme die een tijdsinterval 2τ (2 maal de vaklooptijd) onderspant. We stellen daarom

$$|H_p - H_g| = |\ddot{H}|_{\max} \tau^2$$

en vinden dan

$$\delta H_g = \frac{2}{3} |\ddot{H}|_{\max} \tau^2$$

voor de fout in H_g . Hierbij stelt $|\ddot{H}|_{\max}$ het maximum van $|\partial^2 H / \partial t^2|$ voor.

Verwaarlozen we de snelheidshoogte (zie hieronder), of althans de fout in de snelheidshoogte t.o.v. de fout in de waterstand, dan kan ook

$$\delta h_g = \frac{2}{3} |H|_{\max} \tau^2 \approx \frac{2}{3} |h|_{\max} \tau^2$$

gesteld worden. Deze fout heeft ten gevolge dat ook in c_0 , Z_0 , W en A fouten gemaakt worden. De fouten in c_0 en Z_0 zijn door

$$\frac{\delta c_0}{c_0} = \left(\frac{1}{b} \frac{db}{dh} - \frac{1}{a_s} \right) \frac{2}{3} |h|_{\max} \tau^2, \quad \frac{\delta Z_0}{Z_0} = \left(\frac{1}{b} \frac{db}{dh} + \frac{1}{a_s} \right) \frac{2}{3} |h|_{\max} \tau^2$$

bepaald. Hierin is $1/a_s$ meestal van weinig betekenis, doch $(1/b) db/dh$ kan soms vrij belangrijk zijn. De fout in W bedraagt

$$\frac{\delta W}{W} = \left| \frac{1}{W} \frac{dW}{dh} \right| \frac{2}{3} |h|_{\max} \tau^2 = \frac{\gamma}{a_s} \cdot \frac{2}{3} |h|_{\max} \tau^2.$$

De exponent γ (waarover in aanh. 3 meer) is ongeveer 3 à 4. Tenslotte is

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{1}{a_s} \cdot \frac{2}{3} |h|_{\max} \tau^2$$

de fout in A .

Bij de beoordeling van deze fouten mag men bedenken, dat, indien h zeer groot wordt, dit meestal ook slechts voor korte tijd is, en dat dan de maximale fouten zich ook slechts sporadisch in de getijberekening voordoen en dus weinig cumuleren.

Voor de bepaling van de stroomfactor $S = |Q|Q$ van de weerstand, is een lineair verloop van Q met x aangenomen. Om de fout hierdoor na te gaan, nemen we nu ook weer een quadratisch verloop aan:

$$Q = Q_1 + \frac{Q_2 - Q_1}{l} x + 4 \frac{Q_p - Q_g}{l^2} x(l-x).$$

Dan is

$$Q^2 \approx \left(Q_1 + \frac{Q_2 - Q_1}{l} x \right)^2 + 8 \left(Q_1 + \frac{Q_2 - Q_1}{l} x \right) \frac{Q_p - Q_g}{l^2} x(l-x),$$

en dus (als $Q > 0$):

$$\bar{S} \approx \frac{Q_1^2 + Q_1 Q_2 + Q_2^2}{3} + \frac{4}{3} Q_g (Q_p - Q_g),$$

ofwel

$$\delta \bar{S} = \frac{4}{3} |Q_g| \cdot |Q_p - Q_g|.$$

Hierin vullen we

$$|Q_p - Q_g| = |\ddot{Q}|_{\max} \tau^2$$

in, op overeenkomstige gronden als hierboven voor $H_p - H_g$ werden aangevoerd. Verder nemen we voor Q_g de maximale waarde $|Q|_{\max}$. De maximale waarde van \bar{S} zelf zal van de grootteorde $|Q|_{\max}^2$ zijn. We krijgen dus

$$\frac{\delta \bar{S}}{\bar{S}} = \frac{4}{3} \frac{|\ddot{Q}|_{\max} \tau^2}{|Q|_{\max}}.$$

Hierin zal $|\ddot{Q}|_{\max} / |Q|_{\max}$ ongeveer met het kwadraat van de boven ingevoerde hoekfrequentie ω overeenkomen. We stellen dus tenslotte

$$\frac{\delta \bar{S}}{\bar{S}} = \frac{4}{3} (\omega \tau)^2.$$

Bij de beoordeling van deze fout mogen we weer bedenken dat hij slechts sporadisch in zijn volle omvang optreedt.

Invloed van de nietlineaire termen van de eerste differentiaalorde.

Teneinde de verwaarlozing van $v^2 \cdot 2g$ bij de bepaling van c_0 , Z_0 en W , en de verwaarlozing van $\varepsilon = v^2 \cdot g a_s$ te beoordelen, is het gewenst eerst de termen in de differentiaalvergelijkingen nader te bezien en te classificeren.

In de eerste plaats kunnen we onderscheid maken tussen termen van de nulde en termen van de eerste differentiaalorde, d.w.z. termen waarin alleen H , Q , h en/of v zelf voorkomen, dan wel een eerste afgeleide naar t of x van H , Q , h of v voorkomt. Hieronder geven we de differentiaal-

vergelijkingen met onderstreept de termen van de eerste, en onderstippeld de termen van de nulde differentiaalorde:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{q_i} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{b-b_s}{gA} v \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{i_r + i_s} = 0.$$

Dit onderscheid is vooral van verstrekkende betekenis voor de theorie der karakteristieken, doch is ook voor het onderzoek naar de grootteorde der termen, waar we ons hier mee bezig houden, van belang.

We voeren nu middelwaarden b_m en m_m van b en m in, die eventueel nog wel met x variëren, doch als gemiddelden naar t zijn te beschouwen. We kunnen nu de termen van de eerste differentiaalorde splitsen in termen met constante coëfficiënten (hieronder enkel onderstreept), en termen met coëfficiënten die zowel negatief als positief kunnen zijn (hieronder dubbelonderstreept):

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \underline{b_m} \frac{\partial H}{\partial t} + \underline{(b-b_m)} \frac{\partial H}{\partial t} - \underline{b} \frac{v}{g} \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{q_i} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \underline{m_m} \frac{\partial Q}{\partial t} + \underline{(m-m_m)} \frac{\partial Q}{\partial t} - \underline{b} \frac{v}{gA} \frac{\partial h}{\partial t} + \underline{i_r + i_s} = 0$$

Nader onderzoek (zie ons proefschrift, par. 13,41) leert nu, dat de grootteorde van al de nietlineaire (dubbelonderstreepte) termen in verhouding tot die der lineaire (enkelonderstreepte) termen, samenhangt met de verhouding van verticaal getij tot gemiddelde diepte van de goul, die in grootteorde overeenkomt met de verhouding van stroomsnelheid tot voortplantingsnelheid. Zijn deze laatste twee verhoudingen klein, dan zijn ook in het algemeen de nietlineaire termen klein t.o.v. de lineaire termen. We zullen daarom de lineaire termen als termen van de nulde orde, en de nietlineaire als termen van de eerste orde van kleinheid opvatten.

Hierbij moet evenwel worden opgemerkt, dat soms de bergende breedte zo sterk met het stijgen van de waterstand toeneemt, dat men de term $(b-b_m) \partial H / \partial t$ welhaast als term van de nulde orde moet gaan beschouwen.

Aansluitend aan het voorgaande moet nog worden vermeld, dat ϵ t.o.v. 1 als grootheid van de tweede orde moet worden beschouwd, daar

$$v: c_0 \approx \sqrt{\epsilon}: 1.$$

Werken we in principe nauwkeurig tot in de nulde orde, dan mogen we voor b en m de constante middelwaarden b_m en m_m nemen, waardoor ook c_0 en Z_0 constanten worden. Verder mag dan v t.o.v. c_0 verwaarloosd worden bij de bepaling van c^+ en c^- .

Werken we in principe nauwkeurig tot in de eerste orde, dan mag nog wel ϵ t.o.v. 1 verwaarloosd worden in de bepaling van c_0 en Z_0 , doch de variaties van c_0 en Z_0 met h moeten in rekening gebracht worden, en ook moet v bij c_0 in rekening gebracht worden. Het zal echter uit de volgende alinea duidelijk worden, dat het nu nog wel geoorloofd is voor de bepaling van c_0 en Z_0 uit de waterstand, h met H gelijk te stellen, en voor de bepaling van v uit Q het oppervlak A constant te nemen.

Willen we tot in de tweede orde nauwkeurig werken, dan moeten we bij de bepaling van c_0 en Z_0 de grootheid ϵ in rekening brengen, en b en m van h afleiden, dus niet van H . Het is echter gemakkelijker c_0 en Z_0 van H af te blijven leiden, en dit is ook geoorloofd, mits we een correctie aanbrengen. Deze correctie kan gecombineerd worden met een correctie voor ϵ . Laat $c_0^{(1)}$ de waarde van c_0 en $Z_0^{(1)}$ van Z_0 zijn, die tot in eerste orde correct uit $H(=h)$ is afgeleid. Dan geldt tot in de tweede orde:

$$c_0^{(2)} = c_0^{(1)} \left[1 + \gamma \frac{v^2}{2g} \right] ; Z_0^{(2)} = Z_0^{(1)} \left[1 + \zeta \frac{v^2}{2g} \right].$$

Hierin is

$$\gamma = \frac{b}{A} + \frac{1}{2b} \frac{db}{dh} - \frac{3}{2a_s} \quad \text{en} \quad \xi = \frac{b}{A} + \frac{1}{2b} \frac{db}{dh} - \frac{1}{2a_s}$$

De bepaling van v in de uitdrukking voor c kan uit Q geschieden, door daar- bij A af te leiden uit $h \approx H$, daar v t.o.v. c_0 van kleinere orde is, en v dus slechts tot in de eerste orde correct behoeft te zijn.

Bij globale berekeningen mag men tot in de nulde orde werken, doch voor nauwkeurige berekeningen zal het meestal nodig zijn tot in de eerste orde te gaan. Soms (b.v. in een vak waar B zeer sterk met h varieert) kan het nodig zijn de correctie van de tweede orde aan te brengen.

Ook bij de weerstand W van een vak maken we een fout als we deze van H afleiden en dan $h=H$ stellen. Noemen we de aldus bepaalde waarde $W^{(1)}$, dan kan deze gecorrigeerd worden tot

$$W^{(2)} = W^{(1)} \left[1 + \omega \frac{v^2}{2g} \right]$$

Hierin is dan

$$\omega = \frac{\gamma^2}{a_s}$$

waarin γ een exponent is, waarop we in Aanh. 3 terugkomen.

Invloed van benaderingen in de constructie voor de weerstand.

We benaderen (zie hierboven) het verloop van Q met x langs de karakteristiek met een lineaire vorm, en dan is volgens (30):

$$\bar{S} = \frac{1}{3} \frac{|Q_2| - |Q_1|}{Q_2 - Q_1} (Q_2^2 + |Q_1| \cdot |Q_2| + Q_1^2)$$

Hierbij is Q_1 als gegeven te beschouwen, en dus \bar{S} een functie van Q_2 . Deze functie trachten we met een lineaire uitdrukking

$$\bar{S}_{ben} = \bar{S}^* + \bar{S}' (Q_2 - Q_2^*)$$

te benaderen, die voor een zekere, geschatte waarde Q_2^* van Q_2 de juiste waarde

$$\bar{S}^* = \frac{1}{3} \frac{|Q_2^*| - |Q_1|}{Q_2^* - Q_1} (Q_2^{*2} + |Q_1| \cdot |Q_2^*| + Q_1^2)$$

van S oplevert. We maken dan een fout

$$\delta \bar{S} = \bar{S}_{ben} - \bar{S} = \bar{S}^* - \bar{S} + \bar{S}' (Q_2 - Q_2^*),$$

wanneer Q_2 van Q_2^* afwijkt.

De grootheid \bar{S}' is een constante die nog nader bepaald moet worden. We beschouwen hierbij twee mogelijkheden:

Ten eerste kunnen we verlangen dat de benadering ook voor $Q_2 = Q_1$ de juiste waarde $|Q_1|/Q_1$ van \bar{S} oplevert. Dan is dus \bar{S}' door

$$\bar{S}^* + \bar{S}' (Q_1 - Q_2^*) = |Q_1|/Q_1$$

bepaald. Dit geeft de koorde van de kromme p (fig. 6).

Ten tweede kunnen we verlangen dat de benadering voor $Q_2 = Q_2^*$ ook voor de afgeleide van \bar{S} naar Q_2 de juiste waarde geeft. Dan is dus \bar{S}' door

$$\left(\frac{d\bar{S}}{dQ_2} \right)_{Q_2 \rightarrow Q_2^*} - \left(\frac{d\bar{S}_{ben}}{dQ_2} \right)_{Q_2 \rightarrow Q_2^*} = \bar{S}'$$

bepaald. Dit geeft de raaklijn aan de kromme p (fig. 6).

We zullen deze twee gevallen nader beschouwen, zowel voor het geval dat Q_2 en Q_2^* hetzelfde teken hebben als Q_1 , als dat ze een ander teken hebben; we zullen steeds aannemen dat Q_2 hetzelfde teken heeft als Q_2^* .

Laten Q_1 , Q_2 en Q_2^* alle positief zijn. Dan is volgens (31):

$$\bar{S} = \frac{1}{3} (Q_2^2 + Q_1 Q_2 + Q_1^2) \quad ; \quad \bar{S}^* = \frac{1}{3} (Q_2^{*2} + Q_1 Q_2^* + Q_1^2);$$

en dus:

$$d^2\bar{S} = (\bar{S}' - \frac{1}{3}Q_1 - \frac{1}{3}Q_2^* - \frac{1}{3}Q_2)(Q_2 - Q_2^*).$$

Nemen we de koorde, dan is

$$\bar{S}' = \frac{Q_1^2 - \frac{1}{3}(Q_2^{*2} + Q_1Q_2^* + Q_1^2)}{Q_1 - Q_2^*} = \frac{2}{3}Q_1 + \frac{1}{3}Q_2^*,$$

en dan wordt de fout

$$d^2\bar{S} = \frac{1}{3}(Q_1 - Q_2)(Q_2 - Q_2^*).$$

Deze neemt dus lineair toe met de afwijking van Q_2 t.o.v. Q_2^* .

Nemen we de raaklijn, dan is

$$\frac{d\bar{S}}{dQ_2} = \frac{2}{3}Q_2 + \frac{1}{3}Q_1 \quad \text{en dus} \quad \bar{S}' = \frac{2}{3}Q_2^* + \frac{1}{3}Q_1.$$

In dit geval is

$$d^2\bar{S} = -\frac{1}{3}(Q_2 - Q_2^*)^2.$$

De fout neemt nu dus quadratisch toe met $Q_2 - Q_2^*$, en is dus voor kleine waarden van $Q_2 - Q_2^*$ kleiner dan in het vorige geval.

Indien Q_1 , Q_2 en Q_2^* alle negatief zijn, dan vinden we dezelfde bedragen voor $d^2\bar{S}$, doch met tegengesteld teken.

Laat nu Q_1 negatief zijn, en laten Q_2 en Q_2^* positief zijn. Dan is volgens (32):

$$\bar{S} = \frac{1}{3} \frac{Q_2^3 + Q_1^3}{Q_2 - Q_1}; \quad \bar{S}^* = \frac{1}{3} \frac{Q_2^{*3} + Q_1^3}{Q_2^* - Q_1};$$

en dus:

$$d^2\bar{S} = \left[\bar{S}' - \frac{-Q_1^3 - Q_1(Q_2^{*2} + Q_2^*Q_2 + Q_2^2) + Q_2^{*2}Q_2 + Q_2^*Q_2^2}{3(Q_2 - Q_1)(Q_2^* - Q_1)} \right] (Q_2 - Q_2^*).$$

Nemen we de koorde, dan is

$$\bar{S}' = \frac{-Q_1^2 - \frac{1}{3} \frac{Q_2^{*3} + Q_1^3}{Q_2^* - Q_1}}{Q_1 - Q_2^*}.$$

Voer nu de hulpgrootheid

$$p = \frac{-Q_1}{Q_2^* - Q_1},$$

in, zodat

$$Q_1 = -p(Q_2^* - Q_1) \quad \text{en} \quad Q_2^* = (1-p)(Q_2^* - Q_1),$$

dan is

$$\bar{S}' = \left(\frac{1}{3} - p + 2p^2 - \frac{2}{3}p^3 \right) (Q_2^* - Q_1).$$

Voor de fout vinden we

$$d^2\bar{S} = -\frac{1}{3}(1-6p^2+4p^3)(Q_2^* - Q_1)(Q_2 - Q_2^*) - \frac{1}{3} \left[1 - 2p^3 \frac{Q_2^* - Q_1}{Q_2 - Q_1} \right] (Q_2 - Q_2^*)^2.$$

Voor kleine waarden van $Q_2 - Q_2^*$ is

$$d^2\bar{S} \approx -\frac{1}{3}(1-6p^2+4p^3)(Q_2^* - Q_1)(Q_2 - Q_2^*),$$

en daar voor $0 \leq p \leq 1$ geldt $-1 \leq 1-6p^2+4p^3 \leq 1$, is doorgaans

$$|d^2\bar{S}| < \frac{1}{3}(Q_2^* - Q_1) \cdot |Q_2 - Q_2^*|.$$

Nemen we de raaklijn, dan is

$$\bar{S}' = \frac{2Q_2^{*3} - 3Q_2^{*2}Q_1 - Q_1^3}{3(Q_2^* - Q_1)^2} = \left(\frac{2}{3} - p + \frac{2}{3}p^3 \right) (Q_2^* - Q_1),$$

en voor de fout wordt

$$d^2\bar{S} = -\frac{1}{3}(1-2p^3)(Q_2 - Q_2^*)^2 - \frac{2}{3}p^3 \frac{(Q_2 - Q_2^*)^2}{Q_2 - Q_1}$$

gevonden.

In het geval dat Q_1 positief, en Q_2^* evenals Q_2 negatief is, blijven bovenstaande formules gelden, behoudens een verandering van teken.

Aanhangsel 3.

Grafische hulpmiddelen.

Voor de constructie van een karakteristiek door een vak heen, moet men van het vak vier grootheden kennen, te weten c_0 , Z_0 en W als functies van $h(\approx H)$ en A_m , of, als we tot in de tweede orde werken (zie aanh. 2), A als functie van $h(\approx H)$.

De grootheden die men als functies van h of H moet kennen, kan men het beste in grafieken ter beschikking hebben. Het verdient daarbij aanbeveling W logaritmisch uit te zetten (zie bijlage 2).

Werkt men tot in de eerste orde, dan volstaat men met drie grafieken, voor c_0 , Z_0 en W , voor ieder vak, en een tabel waarin voor ieder vak de waarde van A_m voorkomt.

Werkt men tot in de tweede orde, dan voegt men een grafiek voor A als functie van $h(\approx H)$ toe. Bovendien moet men dan rekening houden met de correcties op c_0 , Z_0 en W voor de snelheidshoogte $v^2 : 2g$. Deze kan men als volgt aanbrenge:

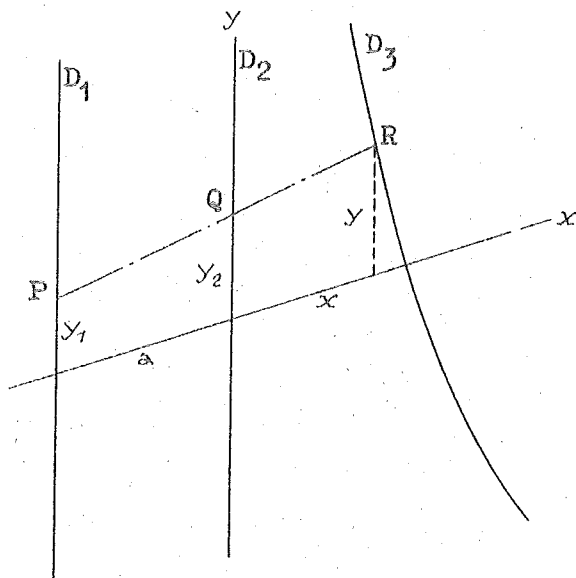
In de grafiek voor c_0 tegen H zet men in de eerste plaats de kromme uit voor $v^2 : 2g = 0$. Verder zet men ook c_0 tegen H uit voor enkele andere waarden van $v^2 : 2g$, b.v. voor $v^2 : 2g = 0,1$ m en $= 0,2$ m (zie aanh. 2). Voor willekeurige waarden van $v^2 : 2g$ kan men dan de bijbehorende waarde van c_0 gemakkelijk door schatting vinden.

Evenso gaat men te werk in de grafiek voor Z_0 . Ook in de grafiek voor W kan men deze werkwijze volgen.

Nomogram voor c^+ en c^- .

Het kan, vooral als men veel berekeningen in een systeem moet uitvoeren, van voordeel zijn nomogrammen te construeren, die ineens de grootheden c , Z en W Q_1^2 geven, als functies van H en Q_g , Q_m of Q_1 .

Voor c (c^+ of c^-) als functie van H en Q_g is een nomogram mogelijk met ten minste twee rechte dragers (zie fig. 39).



Figuur 39.

Laat de eerste drager D_1 op een afstand a links van de y -as liggen, laat de y -as zelf de tweede drager D_2 zijn, en laat er rechts van de y -as een derde drager D_3 liggen. We zullen dan op D_1 een schaal

$$y_1 = \pm \mu_1 Q_g$$

voor de afvoer, en op D_2 een schaal

$$y_2 = \mu_2 c$$

voor de voortplantingssnelheid $c = c^+$ of $c = -c^-$ uitzetten. Op D_3 moet een schaal voor h of H komen.

Beschouwen we eerst het geval dat we tot in de eerste orde werken. We hebben dan de formule

$$c = \pm c^\pm = c_0(h) \pm \frac{Q_g}{A_m}$$

Nu is de voorwaarde waaraan de coördinaten der punten P, Q en R voldoen als ze op één rechte liggen:

$$y_2 = \frac{a}{a+x} y + \frac{x}{a+x} y_1$$

Substitutie hierin van de schaalformules van D_1 en D_2 geeft:

$$\mu_2 c = \frac{a}{a+x} y + \frac{x}{a+x} \mu_1 Q_g$$

De eis dat deze formule overeen moet komen met de formule voor c geeft de voorwaarden

$$\frac{x}{a+x} \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1}{A_m} \quad \text{en} \quad \frac{a}{a+x} \frac{y}{\mu_2} = c_0(h),$$

waaruit volgt

$$x = \frac{\mu_2 a}{\mu_1 A_m - \mu_2} \quad \text{en} \quad y(h) = \frac{\mu_1 \mu_2 A_m}{\mu_1 A_m - \mu_2} c_0(h)$$

We krijgen dus een rechte drager op een constante afstand x van D_2 , met daarop een schaal voor y .

Willen we tot in de tweede orde werken, dan krijgen we de formule

$$c = c_0(H) + \frac{c_0(H) \gamma(H)}{2g[A(H)]^2} Q_g^2 \pm \frac{Q_g}{A(H)}$$

Teneinde dit uit te beelden, gaan we als volgt te werk:

We groeperen de formule voor c aldus:

$$c = c_0(H) \pm \left[1 \pm \frac{c_0(H) \gamma(H)}{2g A(H)} Q_g \right] \frac{Q_g}{A(H)}$$

Laat nu even Q_g een constante voorstellen; dan is aan de afbeeldingseis voldaan indien

$$\frac{x}{a+x} \frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{1}{A(H)} \left[1 \pm \frac{c_0(H) \gamma(H)}{2g A(H)} Q_g \right] \quad \text{en} \quad \frac{a}{a+x} \frac{y}{\mu_2} = c_0(H),$$

geldt, waaruit

$$x(H) = \frac{\mu_2 a}{\frac{\mu_1 A(H)}{1 \pm \frac{c_0(H) \gamma(H)}{2g A(H)} Q_g} - \mu_2} \quad \text{en} \quad y(H) = \mu_2 \left(1 + \frac{x(H)}{a} \right) c_0(H)$$

volgt. We krijgen dus voor de beschouwde waarde van Q_g een bepaalde drager voor H : bij een andere waarde van Q_g vinden we een iets andere drager.

We zullen daarom voor enkele waarden van Q_g de bijbehorende drager van H construeren, en dan zal het, daar deze dragers dicht bij elkaar liggen, geoorloofd zijn voor willekeurige waarden van Q_g af te lezen van die drager welks waarde van Q_g het dichtstbij ligt, of ook wel schattenderwijs tussen twee dragers in, af te lezen.

We merken nog op dat we voor c^+ en c^- hetzelfde nomogram kunnen gebruiken, mits we op de dragers voor Q_g volgens het andere teken instellen. We moeten dus steeds op de bovenste helft van de Q_g -schaal instellen bij een golfpunt dat met de stroom mee loopt (bij eb aflopend, bij vloed oplopend golfpunt) en op de onderste helft bij een golfpunt dat tegen de stroom in loopt (bij eb oplopend, bij vloed aflopend golfpunt).

Nomogram voor Z .

Voor Z kunnen we een overeenkomstig nomogram als voor c gebruik-

ken. De af te beelden formule is, als we tot in de eerste orde werken

$$Z = Z_0(h) + W(h)Q_m.$$

We zetten nu Q_m op D_1 , Z op D_2 , en weer h op D_3 uit. Deze laatste drager en zijn schaal zijn dan bepaald door

$$x(h) = \frac{\mu_2 a}{\frac{\mu_1}{W(h)} - \mu_2} \quad \text{en} \quad y(h) = \frac{\mu_1 Z_0(h)x(h)}{W(h)a}.$$

Dit geeft een rechte drager evenwijdig aan D_1 en D_2 als we voor W een constante nemen; anders is D_3 een gebogen drager.

Werken we tot in de tweede orde, dan is

$$Z = Z_0(H) + \frac{Z_0(H)\zeta(H)}{2g[A(H)]^2} Q^2 + W(H)Q_m.$$

We benaderen hierin Q^2 met Q_m^2 :

$$Z = Z_0(H) + \left[\frac{Z_0(H)\zeta(H)}{2g[A(H)]^2} Q_m + W(H) \right] Q_m.$$

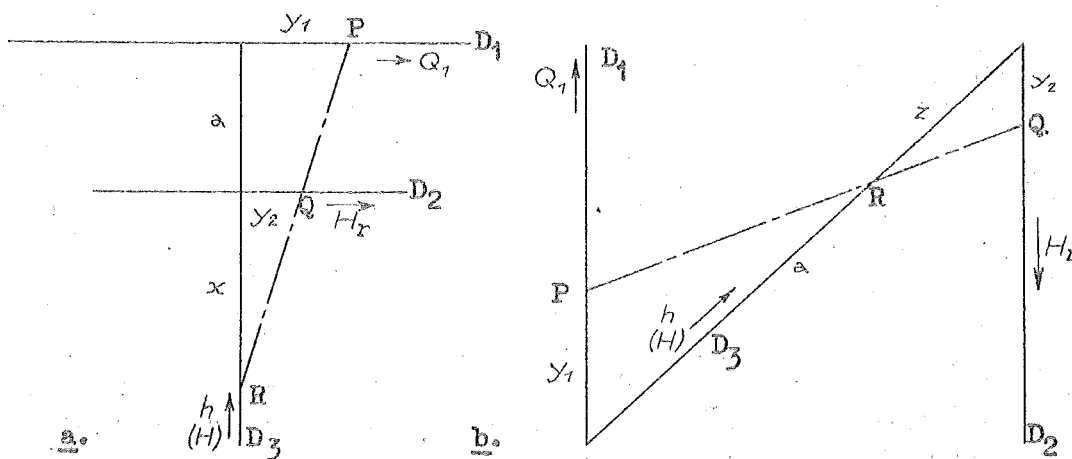
Voor enige waarden van Q_m zijn dan bijbehorende dragers voor H te construeren volgens

$$x(H) = \frac{\mu_2 a}{\frac{\mu_1}{W(H) + \frac{Z_0(H)\zeta(H)}{2g[A(H)]^2} Q_m} - \mu_2} \quad \text{en} \quad y(H) = \mu_2 \left(1 + \frac{x(H)}{a} \right) Z_0(H).$$

Hierbij leest men weer voor tussenliggende waarden van Q_m op de dichtsbijkomende drager voor H af, of men leest tussen twee dragers in af.

Nomogram voor H_r .

Voor het in rekening te brengen verval $H_r = W|Q_1|Q_1$, kan een nomogram geconstrueerd worden met drie dragers, waarvan twee evenwijdig zijn en de derde loodrecht op de andere staat (fig. 40 a).



Figuur 40.

Op de drager D_1 zetten we een quasiquadratische schaal voor Q_1 uit:

$$y_1 = \mu_1 |Q_1|Q_1.$$

Op D_2 komt een nog nader te bepalen schaal voor H_r , en op D_3 een nog nader te bepalen schaal voor h of H .

Indien we tot in de eerste orde werken, kan W als een functie van h ($\approx H$) worden beschouwd, dus

$$H_r = W(h) |Q_1|Q_1.$$

Nu is de voorwaarde voor het op een lijn liggen der punten P, Q en R:

$$y_2 = \frac{x}{a+x} y_1.$$

Laat nu

$$y_2 = \mu_2 H_r$$

de schaal voor H_r zijn, dan moet dus

$$\frac{x}{a+x} \frac{\mu_1}{\mu_2} = W(h)$$

zijn, waaruit

$$x = \frac{\mu_2 a}{\frac{\mu_1}{W(h)} - \mu_2}$$

volgt.

In het geval dat we tot in de tweede orde nauwkeurig willen werken, kan

$$W(h) = W(H) - \frac{dW}{dh} \frac{Q^2}{2gA^2}$$

gesteld worden. Nu kan in vele gevallen voor W , en evenzo voor A , een zeer goede exponentiële benadering gegeven worden, volgens

$$W = W_m \left(\frac{h-h_b}{h_0-h_b} \right)^{-\nu} \quad \text{en} \quad A = A_m \left(\frac{h-h_b}{h_0-h_b} \right)^{\mu}$$

Hierin stelt h_0 de middenstand en h_b de hoogte van de bodem in het diepste deel van de geul voor; verder stellen W_m en A_m de waarden van W en A in de middenstand voor; tenslotte zijn ν en μ coëfficiënten, welke waarden bijna steeds tussen 3 en 5, resp. 1 en 2 gelegen zijn. Uit de formules volgt

$$\frac{dW}{dh} = -\nu \frac{W_m}{h_0-h_b} \left(\frac{h-h_b}{h_0-h_b} \right)^{-\nu-1}$$

en

$$-\frac{dW}{dh} \frac{1}{2gA^2} = \nu \frac{W_m}{2gA_m^2 (h_0-h_b)} \left(\frac{h-h_b}{h_0-h_b} \right)^{-2\mu-\nu-1} = \alpha W^2,$$

waarin

$$\alpha = \frac{\nu}{2gA_m^2 (h_0-h_b) W_m} \left(\frac{h-h_b}{h_0-h_b} \right)^{\nu-1-2\mu}$$

Nu is $\nu - 1 - 2\mu$ meestal slechts klein. Voor een rechthoekig profiel b.v. is $\nu = 3$ en $\mu = 1$, dus $\nu - 1 - 2\mu = 0$. We zullen daarom α constant nemen:

$$\alpha = \frac{\nu}{2g(h_0-h_b)A_m^2 W_m} = \frac{\nu C_m^2}{2g l^2},$$

waarin C_m de waarde van C in de middenstand is.

We krijgen dus de formule

$$W(h) = W(H) [1 + \alpha W Q^2].$$

Hierin zullen we Q_1 voor Q stellen, en dan is

$$|H_r| = W(h) Q_1^2 = W(H) Q_1^2 [1 + \alpha W(H) Q_1^2].$$

We lossen vervolgens $W(H) Q_1^2$ op:

$$W(H) Q_1^2 = \sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} |H_r|} - \frac{1}{2\alpha} \approx |H_r| (1 - \alpha |H_r|).$$

Dit is af te beelden in het nomogram door voor H_r een nietlineaire schaal te kiezen:

$$|y_2| = \mu_2 \left[\sqrt{\frac{1}{4\alpha^2} + \frac{1}{\alpha} |H_r|} - \frac{1}{2\alpha} \right] \quad \text{of} \quad y_2 \approx \mu_2 H_r (1 - \alpha |H_r|).$$

De schalen voor Q_1 en h veranderen niet, met dien verstande dat nu H voor h gelezen moet worden.

De linkerhelft van het nomogram volgens fig. 40a is het spiegelbeeld van de rechterhelft; we kunnen desgewenst de linkerhelft weglaten en alleen de rechterhelft gebruiken ook als Q_1 negatief is, mits we dan ook H_r met het negatieve teken aflezen.

De schaal voor $h(H)$ kan ook tussen D_1 en D_2 worden aangebracht; we moeten dan de schaalverdeling op D_2 , of die op D_1 , van richting om-

keren. Ook is het mogelijk de drager D_3 onder een scheve hoek met de dragers D_1 en D_2 te zetten. Een nomogram dat op deze twee wijzigingen berust, is in fig. 40b afgebeeld. Hiervoor geldt

$$z = \frac{\mu_2 a}{\frac{\mu_1}{W(h)} + \mu_2} \quad \text{met } y_1 = \mu_1 Q_1^2 \quad \text{en } y_2 = \mu_2 |H_r|.$$

Eventueel zou men ook nog de dragers D_1 en D_2 schijfend kunnen maken, doch dit is minder gewenst omdat dan de schaal voor H_r niet langer lineair is.

Aanhangsel 4.

Uitsterven van storingen en fouten.

Vergelijkingen voor een storingsbeweging.

We beschouwen een bepaalde golfbeweging in een waterloop, dus een beweging die zich onder invloed van bepaalde randvoorwaarden (getijden in zee, bovenafvoeren), van een bepaalde begintoestand uit, op een bepaalde wijze in de tijd ontwikkeld.

Verder beschouwen we een tweede golfbeweging die afwijkt van de eerste doordat een of meer randvoorwaarden afwijken, of doordat de begintoestand afwijkt, of door de min of meer plotseling intredende werking van een uitwendige storingskracht. Het verschil tussen de twee golfbewegingen zullen we de storing noemen. Deze storing heeft zelf ook het karakter van een golfbeweging, en we zullen de demping van de storingsgolven globaal nagaan. Daarbij zullen we aannemen dat de storingen klein zijn t.o.v. de oorspronkelijke golfbeweging zelf.

De kwestie van de demping van storingen is praktisch in de eerste plaats van belang om na te gaan hoelang een fout in een geschatte begintoestand in de berekening doorwerkt (zie par. 7).

Ook kan het van belang zijn te weten hoe ver een rekenfout in de berekening doorwerkt. Zulk een fout heeft tengevolge dat een fictieve storingsgolf in de berekende golfbeweging plotseling zijn intrede doet, die in werkelijkheid natuurlijk achterwege is gebleven.

Voor de demping van een storingsgolf zijn de nietlineaire effecten van de eerst differentiaalorde (zie aanh. 2) van secundaire betekenis, en we zullen die effecten in het hier volgende globale onderzoek dan ook verwaarlozen. We stellen dus dat de oorspronkelijke golfbeweging voldoet aan de vergelijkingen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + m \frac{\partial Q}{\partial t} + w|Q|Q = 0,$$

waarin b en t verondersteld zijn gegeven functies van x te zijn. Laat Q de gestoorde golfbeweging zijn, dan voldoet deze aan

$$\frac{\partial Q^*}{\partial x} + b \frac{\partial H^*}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H^*}{\partial x} + m \frac{\partial Q^*}{\partial t} + w|Q^*|Q^* = 0.$$

Door aftrekken vinden we voor de stoorbeweging, die we door

$$H_s = H^* - H, \quad Q_s = Q^* - Q \quad \text{voorstellen,}$$

$$\frac{\partial Q_s}{\partial x} + b \frac{\partial H_s}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H_s}{\partial x} + m \frac{\partial Q_s}{\partial t} + r Q_s = 0$$

, waarin $r = 2wQ$.

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de veronderstelling dat Q_s klein is t.o.v. Q . We mogen w en Q en dus ook r bij de bepaalde beschouwde beweging als gegeven functies van t en x opvatten.

We zullen nu ons onderzoek splitsen in een onderzoek naar de demping van aanvankelijk locale storingen, en de demping van storingen die zich over het gehele systeem uitstrekken. Fouten gedurende de berekening zijn typische voorbeelden van storingen die aanvankelijk slechts op een plaats in het systeem voorkomen, en zich van daaruit gaan verspreiden. Daarentegen vormt b.v. een algemeen te hoge schatting van de waterstanden in de aangenomen begintoestand een voorbeeld van een storing die zich over het gehele systeem uitstrekt.

Uitsterven van locale storingen.

We gaan nu, om de demping van locale storingen te onderzoeken, op de vergelijkingen voor Q_s en H_s een karakteristieke transformatie toepassen (zie hierbij nota C.S.D. 53-2). We voeren daartoe de karakteristieke golfcomponenten F en G van de storing, en de coëfficiënten c_0 en Z_0 in volgens $F = \frac{1}{2} H_s + \frac{1}{2} Z_0 Q_s$, $G = \frac{1}{2} H_s - \frac{1}{2} Z_0 Q_s$, $Z_0 = \sqrt{m/b}$,

sodat omgekeerd $c_0 = 1/\sqrt{mb}$,
 $H_s = F+G$, $Q_s = (F-G)/Z_0$, $m = Z_0/c_0$, $b = 1/\sqrt{Z_0 c_0}$.

De vergelijkingen zijn nu te schrijven in de vorm

$$\frac{\partial H_s}{\partial t} + c_0 Z_0 \frac{\partial Q_s}{\partial X} = 0$$

$$Z_0 \frac{\partial Q_s}{\partial t} + c_0 \frac{\partial H_s}{\partial X} + Z_0 \frac{r}{m} Q_s = 0,$$

waaruit door optellen en aftrekken de nieuwe vergelijkingen

$$\frac{\partial F}{\partial t} + c_0 \frac{\partial F}{\partial X} + \frac{r}{2m} (F-G) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial t} - c_0 \frac{\partial G}{\partial X} + \frac{r}{2m} (G-F) = 0.$$

zijn af te leiden.

Volgen we een golfpunt dat met de snelheid C_0 naar zee loopt, dan geldt voor de variaties van F in dat golfpunt met verloop van tijd:

$$dF = -\frac{r}{2m} F dt + \frac{r}{2m} G dt.$$

Evenzo zal in een met de snelheid $-C_0$ naar boven lopend golfpunt

$$dG = -\frac{r}{2m} G dt + \frac{r}{2m} F dt$$

gelden.

We beschouwen nu een aanvankelijk tot een klein gebied beperkte storing. In het algemeen zal deze samengesteld zijn uit een golfcomponent F en een golfcomponent G . Daar deze componenten zich in tegengestelde richtingen voortplanten, zal de storing zich spoedig hebben opgelost in een naar beneden lopende storingsgolf, waarin voornamelijk de golfcomponent F , en een naar boven lopende storingsgolf, waarin voornamelijk de golfcomponent G werkzaam is.

In de naar beneden lopende golf is de component G zwak. ¹⁾ We verwaarlozen daarom G , en dan geldt voor de demping van F :

$$dF = -\frac{r}{2m} F dt.$$

Integratie hiervan geeft

$$F = F_0 e^{-\int_0^t \frac{r}{2m} dt},$$

waarin F_0 de waarde van F ten tijde $t=0$ is.

Nemen we voor r een middelwaarde, dan kan nog

$$F = F_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

geschreven worden, waarin

$$\tau = \frac{2m}{r} = \frac{m}{wQ} = \frac{C^2}{g} \frac{a_s}{v}$$

de z.g.n. relaxatietijd is.

Voor de demping van de naar boven lopende golf geldt een overeenkomstige globale formule.

Een indruk van de demping verkrijgt men uit de volgende getallen: na een tijd $t = \tau$ is volgens de afgeleide formule de storing tot een fractie e^{-1} , d.i. 37% van de oorspronkelijke grootte gereduceerd, na een tijd $t = 2\tau$ tot een fractie e^{-2} , d.i. 14%, en na een tijd $t = 3\tau$ tot een fractie e^{-3} , d.i. 5%.

Uit de formule voor τ blijkt verder dat de demping van storingen het grootst is bij grote stroomsnelheden, en bij kleine diepten. De sterkste demping treedt dus doorgaans op enige tijd na de maximale eb, en er is vrijwel geen demping omstreeks de kenteringen.

¹⁾ Het hier geponeerde kan plausibel gemaakt worden door de differentiaalvergelijking in G te integreren vanaf de voet van de storingsgolf en dan gebruik te maken van de aanname dat de storing aanvankelijk tot een klein gebied beperkt was, zodat de golf kort zal zijn.

Uitsterven van uitgestrekte storingen.

Om de demping van storingen die reeds terstond het gehele systeem bestrijken na te gaan, beschouwen we een kanaal met lengte L , dat aan het uiteinde $X=0$ afgesloten is, en aan het uiteinde $X=L$ in zee mondt, op welke plaats dus H gegeven is.

We zullen in het bijzonder het uitsterven van een fout in de beginvoorwaarde nagaan, en veronderstellen dus dat de bewegingen (H, Q) en (H^*, Q^*) aan dezelfde randvoorwaarden bij $X=0$ en $X=L$ voldoen. Dan voldoet de storingsbeweging (H_s, Q_s) dus aan de randvoorwaarden:

$Q_s = 0$ voor $X=0$; $H_s = 0$ voor $X=L$.
De bewegingen (H, Q) en (H^*, Q^*) gaan van verschillende begintoe-standen uit, en het verschil van die begintoestanden vormt de dubbele beginvoorwaarde voor de storingsbeweging (H_s, Q_s) . Deze beginvoorwaarden kunnen in Fourierreeksen naar X ontwikkeld worden. We stellen dus

$$\left. \begin{aligned} Q_s &= \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \sin \frac{\pi n}{2L} X \\ H_s &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \cos \frac{\pi n}{2L} X \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{voor } t=0, \\ (n = \text{oneven}) \end{array}$$

waarin γ_n en ψ_n reeksen gegeven constanten voorstellen. Bij het opstellen der Fourierreeksen hebben we er rekening mee gehouden dat de beginvoorwaarden met de randvoorwaarden moeten kloppen.

We trachten nu de stoorbeweging te vinden door superpositie van oplossingen van de vorm

$$Q_s = \phi(t) \sin \frac{\pi n}{2L} X \quad (n = \text{oneven}).$$

$$H_s = \psi(t) \cos \frac{\pi n}{2L} X.$$

Substitutie van deze uitdrukkingen in de vergelijkingen voor Q_s en H_s leert ons, dat ϕ en ψ moeten voldoen aan

$$\begin{aligned} \frac{\pi n}{2L} \phi + b \frac{d\phi}{dt} &= 0 \\ -\frac{\pi n}{2L} \psi + m \frac{d\psi}{dt} + r \psi &= 0, \end{aligned}$$

waaruit door eliminatie van ϕ , voor ψ

$$\frac{d^2 \psi}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{d\psi}{dt} + \left(\frac{\pi n c_0}{2L} \right)^2 \psi = 0$$

volgt. Elimineert men niet ϕ doch ψ , dan vindt men voor ϕ dezelfde vergelijking als die we nu voor ψ hebben gevonden.

De oplossing voor ψ (of ϕ) neemt verschillende vormen aan naar gelang $\pi n c_0 : 2L$ groter is dan $r : 2m$, dan wel kleiner.

In het eerste geval is de oplossing

$$\psi = e^{-\frac{t}{\tau}} (C \cos \omega t + C' \sin \omega t),$$

waarin

$$\tau = \frac{2m}{r} \quad \text{en} \quad \omega = \sqrt{\left(\frac{\pi n c_0}{2L} \right)^2 - \left(\frac{r}{2m} \right)^2}, \quad \left(\frac{\pi n c_0}{2L} > \frac{r}{2m} \right).$$

Hieruit valt af te leiden, dat voor grote waarden van n of kleine waarden van L , de storingen gedempt zijn volgens dezelfde relaxatie-tijd τ , als we hierboven vonden uit de theorie der karakteristieken, voor locale storingen.

In het tweede geval is de oplossing

$$\psi = C_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + C_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}}$$

waarin

$$\tau_1 = \frac{r}{2m} \left(\frac{2L}{\pi n c_0} \right)^2 \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n c_0 m}{Lr} \right)^2} \right]; \tau_2 = \frac{r}{2m} \left(\frac{2L}{\pi n c_0} \right)^2 \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi n c_0 m}{Lr} \right)^2} \right]; \left(\frac{\pi n c_0}{2L} \left(\frac{r}{2m} \right) \right)$$

De storing valt dus uiteen in twee gedempte componenten, waarvan de ene een relaxatietijd τ_1 en de andere een relaxatietijd τ_2 heeft. De minst gedempte component is die met de relaxatietijd τ_1 . Deze is vooral groot, wanneer L groot en n klein, in het bijzonder als $n = 1$ is. In dat geval is ten naastenbij:

$$\tau_1 \approx \frac{4}{\pi^2} \quad br L^2 = 0,4 br L^2 \quad \text{en} \quad \tau_2 \approx \frac{m}{r} = \frac{1}{2} \tau$$

Dit betekent dat τ_1 voor grote waarden van Lr veel groter wordt dan τ_2 .

Beperken we ons tot het geval dat $n = 1$ en

$\pi c_0 : 2L < r : 2m$ is, dan is

$$\phi = -\frac{2L}{\pi} b \frac{d\psi}{dt} = \frac{2L}{\pi} b \left[\frac{C_1}{\tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \frac{C_2}{\tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right]$$

Uit de beginvoorwaarden voor Q_s en H_s volgt nu:

$$\phi = \psi_1 \quad \text{en} \quad \psi = \psi_1 \quad \text{als} \quad t = 0$$

Hieruit volgt

$$C_1 = \frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} (\psi_1 - \tau_2 \frac{\pi}{2Lb} \psi_1), \quad C_2 = \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} (\tau_1 \frac{\pi}{2Lb} \psi_1 - \psi_1)$$

Is er aanvankelijk alleen een storing in de afvoeren, dus

$\psi_1 = 0$, dan is

$$\psi = \frac{\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2} \frac{\pi}{2Lb} \psi_1 (e^{-\frac{t}{\tau_2}} - e^{-\frac{t}{\tau_1}})$$

$$\phi = \psi_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right)$$

We nemen aan dat L groot en dus $\tau_2 \ll \tau_1$ is, en dan is het ten eerste duidelijk dat ψ betrekkelijk klein is vergeleken met ϕ , d.w.z. dat de storingen in de waterstand van ondergeschikt belang zijn en blijven t.o.v. de storingen in de afvoer. Ten tweede is het duidelijk dat de term met de relaxatietijd τ_1 bij de afvoeren klein is t.o.v. de term met de relaxatietijd τ_2 . Dit betekent dat de storing in hoofdzaak uitsterft met de betrekkelijk kleine relaxatietijd $\tau_2 = m : r$.

Is er aanvankelijk een storing alleen in de waterstanden, dan is $\psi_1 = 0$, en dan is

$$\psi = \psi_1 \left(\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_1}} - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\frac{t}{\tau_2}} \right)$$

$$\phi = \frac{1}{\tau_1 - \tau_2} \frac{2Lb}{\pi} \psi_1 (e^{-\frac{t}{\tau_1}} - e^{-\frac{t}{\tau_2}})$$

In dit geval zijn de storingen in de afvoeren van ondergeschikte betekenis, en voorts worden de storingen in de waterstanden in hoofdzaak gedempt met de betrekkelijk grote relaxatietijd $\tau_1 \approx 0,4 br L^2$.

Globale beschouwingen van het uitsterven van storingen.

Bovenstaande uitkomsten laten zich ook met een meer globale beschouwingwijze afleiden.

Allereerst beschouwen we een lang kanaal waarin aanvankelijk alleen een storing in de afvoer voorkomt, en wel zodanig dat Q_s constant is langs het gehele kanaal voor $t = 0$. We zullen even afzien van het gesloten uiteinde, en aannemen dat ook dit open is, en dan bestaat er een oplossing waarbij Q_s onafhankelijk van x is, en $H_s = 0$ blijft. Deze oplossing moet voldoen aan

$$m \frac{dQ_s}{dt} + r Q_s = 0,$$

waaruit volgt

$$Q_s = Q_{s0} e^{-\frac{t}{m}}$$

Dit is dus een beweging die uitsterft met de relaxatietijd m/r , d.w.z. T_2 . Nabij het afgesloten uiteinde voldoet deze oplossing natuurlijk niet, maar in een lang kanaal zal dat slechts van secundair belang zijn.

Om het geval dat er aanvankelijk alleen een storing in de waterstand is globaal te behandelen, denken we ons de gehele berging $B = bL$ van het kanaal geconcentreerd in een bekken uitmondend in het midden van het kanaal. De beide kanaalhelften moeten dan daarentegen a.h.w. als gesloten buizen zonder berging worden opgevat. De ene kanaalhelft gaat naar het gesloten uiteinde toe en deze kan daarom in het geheel geen water doorlaten; deze helft is om die reden verder niet meer van invloed. De andere kanaalhelft kan water overdragen van het bekken naar zee of omgekeerd. Deze kanaalhelft heeft een weerstand $R = \frac{1}{2} r L$; de traagheid verwaarlozen we.

Het aldus vereenvoudigde systeem gehoorzaamt aan de vergelijkingen

$$H_s = R Q_s \quad \text{en} \quad Q_s = -B \frac{dH_s}{dt},$$

waarin nu H_s de waterstand in het bekken t.o.v. die in zee, en Q_s de stroom naar zee voorstelt. De oplossing van deze vergelijkingen is

$$H_s = H_{s0} e^{-\frac{t}{RB}}$$

De relaxatietijd is dus

$$RB = 0,5 b r L^2,$$

d.w.z. nagenoeg gelijk aan de relaxatietijd T_1 , die we hierboven vonden.

Uit deze beschouwingen zien we dat in een lang kanaal het uitsterven van een storing in de afvoer in hoofdzaak beheerst wordt door de wisselwerking tussen traagheid (m) en weerstand (r), en het uitsterven van een storing in de waterstand door de wisselwerking tussen berging (b) en weerstand (r). Voor korte kanalen gaan deze beschouwingen niet op, daar dan de voortplantingstijden een belangrijke rol gaan spelen, d.w.z. dat de wisselwerking tussen traagheid en berging van belang wordt. In een kort kanaal hebben we te maken met de relaxatietijd $2m/r$ van de lokale storingen, die we hierboven reeds eerder behandeld hebben.

In een uitgestrekt netwerk zal het uitsterven van een beginvoorwaarde voor de waterstanden, evenals in een lang kanaal, in hoofdzaak beheerst worden door de wisselwerking van bergingen en weerstanden. Men kan zich hier rekenschap van geven door het systeem te schematiseren tot een aantal bergende bekkens, verbonden door ge-lineariseerde weerstanden.

Aanhangsel 5.

Bergings- en verhangberekeningen.

Het geval kan zich voordoen, dat een plaats waar we het getij willen kennen, niet een der uiteinden is van de vakken waarin we het rivierenstelsel verdeeld hebben. Daar de berekening slechts het getij op de vakuiteinden direct geeft, zal dus nog een aanvullende berekening nodig zijn voor zulk een plaats als hierboven bedoeld.

Laat b.v. AB (A boven B) een vak zijn, en P een plaats tussen A en B. Na uitvoeren van de getijberekening kennen we dus H en Q in A en B als functies van t . Hiervan uitgaande moeten dan H en Q in P bepaald worden. Dit kan in principe met behulp van karakteristieken geschieden, doch de hieronder te beschrijven methode leidt in het algemeen sneller tot het doel.

Directe integratie van de differentiaalvergelijkingen.

De continuïteitsvergelijking (zie (1) op p. 11) is

$$(69) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

Verder is

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = A \frac{\partial v}{\partial t} + v b_s \frac{\partial h}{\partial t},$$

waarmee we de bewegingsvergelijking tot

$$(70) \quad \frac{\partial H}{\partial x} + m \frac{\partial Q}{\partial t} - 2 b u Q \frac{\partial h}{\partial t} + w |Q| Q = 0$$

kunnen herleiden. Hierin is

$$u = \frac{1}{2gA^2} = \frac{1}{2} g m^2.$$

Deze grootte, die we de kinetische factor zullen noemen, treedt ook op in het verband tussen H , h en Q , dat we immers kunnen schrijven als

$$(71) \quad H = h + u Q^2.$$

De kinetische factor heeft de dimensies van een weerstand (w). Hij is een functie van h en x , evenals b , m en w .

We beschouwen nu een kort vak ab (boveneinde a en benedeneinde b) met lengte l . We leggen de oorsprong van de x as in a , en integreren nu voor een of ander willekeurig tijdstip de beide vergelijkingen (69) en (70) naar x , van a naar b . Dan is

$$\int_0^l \frac{\partial Q}{\partial x} dx = Q_b - Q_a$$

Verder voeren we de gemiddelde waterstand

$$hg = \frac{1}{2} (h_a + h_b)$$

in, en het bergend oppervlak

$$B(hg) = \int_0^l b(x, hg) dx$$

in, en stellen nu bij wijze van benadering

$$\int_0^l b \frac{\partial h}{\partial t} dx = B \frac{dhg}{dt}$$

hetgeen geoorloofd is, indien het vak ab voldoende kort is.
De integratie van de continuïteitsvergelijking (69) levert nu

$$(72) \quad Q_a - Q_b = B (hg) \frac{dhg}{dt} .$$

In de geïntegreerde bewegingsvergelijking is

$$\int_0^L \frac{\partial H}{\partial X} dX = H_b - H_a .$$

Verder voeren we de gemiddelde afvoer

$$Q_g = \frac{1}{2} (Q_a + Q_b)$$

in, en de traagheid van het vak,

$$M(hg) \int_0^L = m(x, hg) dx,$$

en stellen

$$\int_0^L m \frac{dQ}{dt} dX = M \frac{d}{dt} ,$$

Op overeenkomstige wijze stellen we

$$\int_0^L b u \frac{dh}{dt} = B \bar{u} Q_g \frac{dhg}{dt} ,$$

waarin \bar{u} het gemiddelde van u in het vak ab is,

$$\bar{u}(hg) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, hg) dx \approx \frac{gM^2}{2L^2} \approx \frac{1}{2} (u_a + u_b)$$

die we, evenals B , als functie van hg opvatten.
Tenslotte stellen we

$$\int_0^L w |Q| Q dX = W \bar{S} ,$$

waarin

$$W(hg) = \int_0^L w(x, hg) dx ,$$

en waarin voorts naar analogie van par. 5

$$\bar{S} = \frac{1}{3} (Q_a^2 + Q_a Q_b + Q_b^2) \frac{Q_a}{|Q_a|}$$

gesteld wordt als er op het beschouwde tijdstip geen kentering tussen a en b is, en

$$\bar{S} = \frac{1}{3} \frac{Q_a^3 + Q_b^3}{Q_a - Q_b} \frac{Q_a}{|Q_a|}$$

als er wel kentering is.

De integratie van de bewegingsvergelijking levert nu
(73)

$$H_a - H_b = M(hg) \frac{dQ_g}{dt} - 2B(hg) \bar{u}(hg) Q_g \frac{dhg}{dt} + W(hg) \bar{S} .$$

Tenslotte nemen we het gemiddelde van (71) tussen a en b:
(74)

$$Hg = hg + -\frac{1}{2} (N_a Q_a^2 + N_b Q_b^2) \approx hg + \bar{N} (hg) Q_g^2.$$

Berekening van het getij tussen de uiteinden van een vak.

We keren nu terug tot het probleem dat we in de aanvang van dit aanhangsel stelden. We zullen voor de oplossing gebruik maken van de vergelijkingen (72), (73) en (74), toegepast op een der ondervakken AP of PB, b.v. AP.

We zullen (72) en (73) gebruiken om H en Q in P te bepalen. Doch dan moeten we in het rechterlid van (72) hg kennen, en bovendien in het rechterlid van (73) ook nog Qg en \bar{S} . We zullen deze rechterleden bepalen door middel van schattingen. Desondanks zullen we dan toch voor H en Q in P voldoende nauwkeurige uitkomsten krijgen, vooropgesteld dat het beschouwde vak kort is.

We kennen H en Q in A en B. Uitgaande hiervan kunnen we een schatting maken van H en Q in P, en ook van Hg en Qg . Hiervan wordt hg uit Hg en Qg bepaald volgens (74); de wijze waarop dit kan geschieden zullen we verderop nog nader beschouwen.

Zodra we hg voor een aantal tijdstippen bepaald hebben, kunnen ook K, M, W en \bar{N} als functies van t gevonden worden. Dan differentieren we hg grafisch of numeriek naar t , waarna Q_p uit Q_g kan worden afgeleid.

De gevonden waarden van Q_a kunnen nog worden gecontroleerd, door de beschreven werkwijze ook op het vak PB toe te passen.

Vervolgens kunnen we \bar{S} uit Q_a en Q_p berekenen, en zonodig berekenen we ook Q_g opnieuw. Dan kan met (73) H_p uit H_a worden afgeleid. Dit kan nog weer worden gecontroleerd door (73) ook op PB toe te passen.

Indien voor enkele tijdstippen de berekende waarden van H_p nogal af mochten wijken van de geschatte waarden, dan kunnen voor die tijdstippen (72) en (73) opnieuw worden toegepast, nu met de berekende waarden van H_p en Q_p als uitgangspunt.

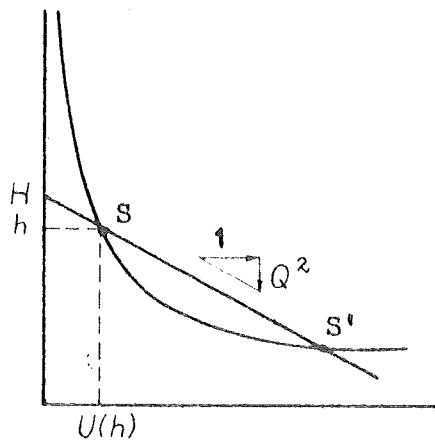
Bepaling van de waterstand uit energiehogte en afvoer.

De bepaling van hg uit (74) als Hg en Qg gegeven zijn, of van h uit (71) als H en Q gegeven zijn, kan op verschillende wijzen geschieden.

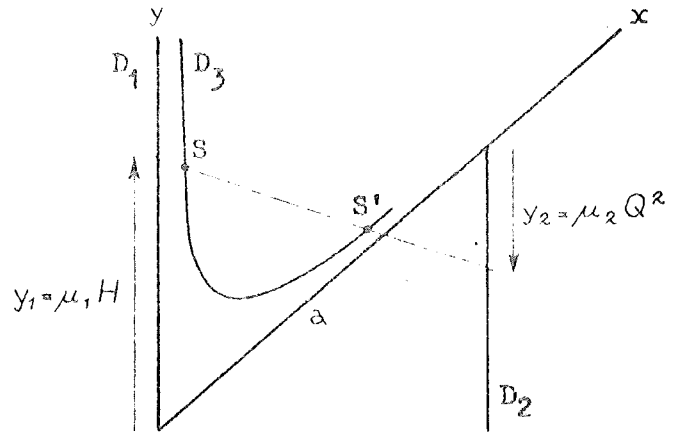
Langs grafische weg kan h bepaald worden door \bar{N} als functie van h uit te zetten (kromme k in fig. 4.1). Nu moet \bar{N} als functie van h bovendien voldoen aan

$$\bar{N} = \frac{H-h}{Q^2}$$

Deze vergelijking wordt weergegeven door de rechte lijn r. De gezochte waarde van h is bepaald door het snijpunt S van de rechte r en de kromme k.



Figuur 41



Figuur 42

In het algemeen zullen er twee snijpunten S en S¹ zijn. Dit komt doordat er bij gegeven afvoer en energiehoogte nog twee verschillende stromingstoestanden mogelijk zijn, en wel stromend water (punt S) en schietend water (punt S¹). Voor een nadere uiteenzetting over deze stromingstoestanden verwijzen we naar aanh. 6,4. Voor de toepassing van de behandelde grafiek bij verhangberekening verwijzen we voorts naar het artikel van ir Valken in "de Ingenieur" van 1952.

Men kan ook h uit H en Q bepalen met behulp van een nomogram (zie ons proefschrift, par. 14,32). Dit nomogram bestaat uit een rechte drager D₁ (zie fig. 42) waarop een lineaire schaal voor H ,

$$y_1 = \mu_1 H,$$

en een daarmee evenwijdige drager D₂ waarop een quadratische schaal voor Q is uitgezet:

$$y_2 = \mu_2 Q^2.$$

De derde drager D₃ voor h is gebogen, en beantwoordt aan de vergelijkingen:

$$x = \frac{Q}{\frac{\mu_2}{\mu_1} + 1} \quad ; \quad y = \frac{\mu_1 h}{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} U}$$

In het algemeen zijn er twee instelpunten S en S¹, waarvan het eerste met stromend, en het tweede met schietend water overeenkomt.

Er bestaat ook een numerieke methode om h te bepalen, die gebaseerd is op een iteratieproces. Als eerste benadering $h^{(1)}$ stellen we

$$h^{(1)} = H.$$

Hierbij bepalen we de bijbehorende waarde van U :

$$U^{(1)} = U(h^{(1)}).$$

De tweede benadering voor h wordt nu bepaald met

$$h^{(2)} = H - U^{(1)} Q^2.$$

Vervolgens bepalen we

$$U^{(2)} = U(h^{(2)}),$$

en daarmee de derde benadering

$$h^{(3)} = H - U^{(2)} Q^2.$$

Deze werkwijze kan onbeperkt worden voortgezet.

Het iteratieproces is altijd convergent, en voert tot de waarde van h voor stromend water (zie aanh. 6,4). Om de waarde van h voor schietend water te vinden, moeten we het proces omkeren. We bepalen dan eerst

$$U^{(1)} = \frac{H}{Q^2}$$

en daarmee de benadering $h^{(1)}$ door oplossen van

$$U^{(1)} = U(h^{(1)})$$

Vervolgens wordt

$$U^{(2)} = \frac{H - h^{(1)}}{Q^2}$$

bepaald en $h^{(2)}$ uit

$$U^{(2)} = U(h^{(2)})$$

opgelost. Ook dit proces is steeds convergent.

In het getijgebied zijn de stromingen zo sterk onderkritisch, en is daardoor de convergentie van het eerstgenoemde proces zo sterk, dat reeds $h^{(2)}$ meestal voldoende nauwkeurig is.

Opvolgende graden van benadering bij de differentiaalvergelijkingen.

Aansluitend aan de hierboven afgeleide reeks benaderingen voor h , bepaald uit H en Q , kan ook een reeks benaderingen van de differentiaalvergelijkingen worden opgesteld.

De eerste benadering $h^{(1)}$ die we hierboven afleidden, wordt verkregen door de kritische factor U te verwaarlozen. We krijgen dan als bewegingsvergelijkingen

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial H}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + m \frac{\partial Q}{\partial t} + w|Q|Q = 0.$$

Zoals we in aanh. 2 afleidden, behoren dan ook de variaties van m , en in de regel ook die van b verwaarloosd te worden.

In tweede benadering voeren we U in, doch we verwaarlozen de variaties van U .

Verder voeren we in de term van (70) met $\partial h / \partial t$, die van kleinere grootteorde is (zie aanh. 2) de eerste benadering van H in. Dan is:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial H}{\partial t} - 2bUQ \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + m \frac{\partial Q}{\partial t} - 2bUQ \frac{\partial H}{\partial t} + w|Q|Q = 0.$$

Hierin mogen b en m als functies van H worden opgevat.

In derde benadering brengen we de variaties van U in rekening. Verder substitueren we in de termen van kleinere orde, eerdere benaderingen van h . Het resultaat is dan

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b (1 + 2gmb_s U Q^2) \frac{\partial H}{\partial t} - 2bUQ \frac{\partial Q}{\partial t} = 0$$

$$\frac{dH}{dx} + m(1 + 2gmb\mu q^2) \frac{dq}{dt} - 2b\mu q \frac{dH}{dt} + w|q|q = 0.$$

Hierin moeten b en m als functies van h , althans van de tweede benadering $h^{(2)}$ worden opgevat; verder kan μ als functie van beschouwd worden.

In het algemeen zal slechts voor globale berekeningen met de eerste benadering genoeg genomen kunnen worden. De tweede benadering is voor meer nauwkeurige berekeningen bestemd. Voor de meest nauwkeurige berekeningen zal de derde benadering praktisch altijd voldoende zijn.

De verschillende benaderingen der differentiaalvergelijkingen illustreren duidelijk dat de continuïteits- en de bewegingsvergelijking in hoge mate analoog zijn opgebouwd.

Aanhangsel 6.

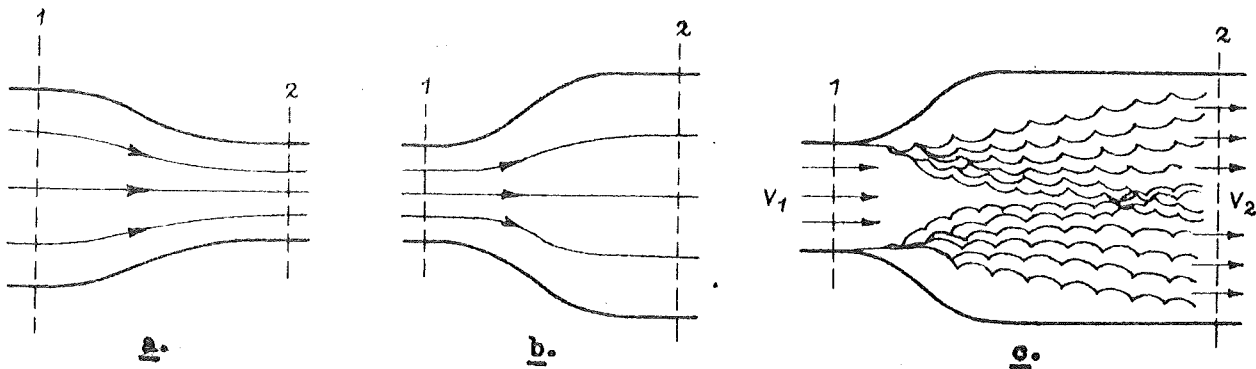
Bijzondere integratieproblemen.

6.1. Vervallen op vakovergangen en knooppunten.

Geleidelijke vernauwing.

Plotselinge verwijdingen of vernauwingen in een waterloop kunnen de oorzaak zijn van extra energieverliezen. We zullen die verliezen in dit aanhangsel nader gaan onderzoeken. We mogen ons hierbij beperken tot het geval van een permanente stroming, d.w.z. een stroming die niet in de tijd verandert, omdat we hier met een verschijnsel te maken hebben dat zich afspeelt in een gebied van relatief (vergeleken met de golf-lengte van het getij) kleine omvang, waarin de effecten van berging en traagheid van ondergeschikt belang zijn.

We beschouwen eerst een geleidelijke vernauwing. Het stromingsbeeld heeft dan een vloeiend verloop ongeveer als aangegeven in fig. 43a.



Figuur 43

Bij deze gladde versnelde stroming treden nagenoeg geen energieverliezen op. De totale energieoverdraacht (zie aanh. 1.1) door profiel 1 zal dus gelijk zijn aan die door profiel 2, d.w.z.

$$\rho_1 = \rho_2 \quad \text{of} \quad \rho g H_1 Q_1 = \rho g H_2 Q_2 .$$

De afvoer Q_2 is natuurlijk gelijk aan Q_1 (we veronderstelden immers een permanentie) en dan moet dus ook

$$H_1 = H_2$$

zijn. De gladde vermelde stroming verloopt dus zonder energieverval. De snelheid en dus ook de snelheidshoogte nemen hierbij toe, en de waterstand neemt af.

Vertragsverliezen bij een verwijding.

Bij een geleidelijke verwijding (fig. 43 b) is, althans in principe (afgezien van wrijving), een vertraagde stroming mogelijk die geheel het spiegelbeeld is van de overeenkomstige versnelde stroming. Zulk een gladde vertraagde stroming voldoet inderdaad aan de bewegingsvergelijkingen. Evenwel, de praktijk en ook de theorie wijzen uit dat de gladde vertraagde stroming, in tegenstelling tot de gladde versnelde stroming, onstabiel is.

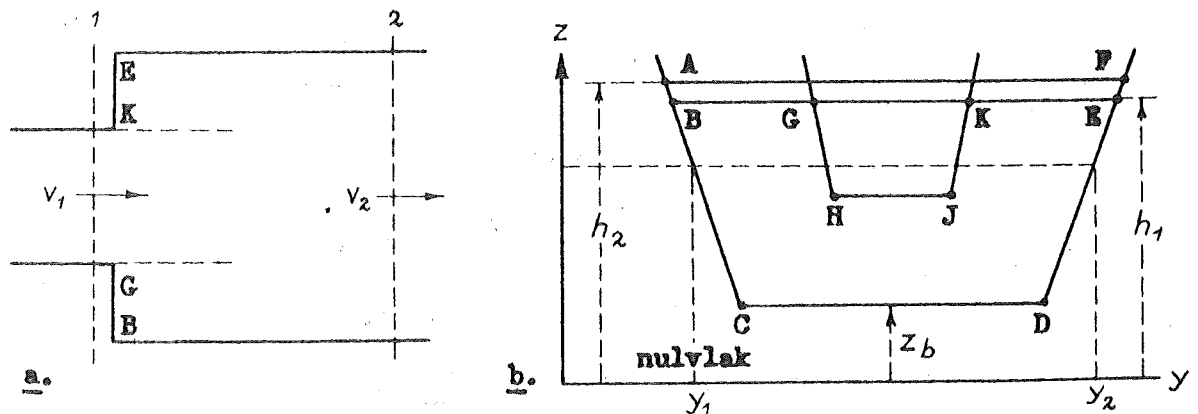
Daardoor zal zich bij een verwijding een ander stromingsbeeld vertonen dan bij een vernauwing en wel als volgt:

Bij het verlaten van het nauwe profiel zal de betrekkelijk snelle stroom aanvankelijk de neiging hebben onverminderd als een soort van straal voort te gaan. Deze straal komt dan echter tussen water dat in rust verkeert, en daardoor ontwikkeld zich langs elk der beide grensvlakken van de straal (zie de stippellijnen in fig. 43 c) een wervelgebied dat zich stroomafwaarts geleidelijk verbreedt en waarin het snelle water van de straal zich mengt met het rustende, of althans langzamer stromende water van de omgeving. De twee wervelgebieden vloeien op enige afstand stroomafwaarts samen, en dan ontstaat weer geleidelijk aan een stroming met gelijkmatige verdeling van de snelheden over het dwarsprofiel (profiel 2). Deze stroomvertraging gaat gepaard met dissipatie van energie in de wervelgebieden. We hebben dus

$$P_1 > P_2 \text{ en dus ook } H_1 > H_2$$

Er treedt derhalve een energieverval op.

Om dit energieverval nader te bepalen, beschouwen we allereerst een geheel plotselinge verwijding (fig. 44 a). Laat hierbij 1 het profiel onmiddellijk voor de verwijding zijn, en 2 een profiel dat zover stroomafwaarts ligt dat hier weer een gelijkmatige snelheidsverdeling is ontstaan.



Figuur 44

In profiel 1 zij de waterstand h_1 en in profiel 2 zij dit h_2 . Zoals hieronder zal blijken, is $h_2 > h_1$, d.w.z. de waterstand loopt op van 1 naar 2. Tussen het water in de straal en het rustende water daarnaast kan aanvankelijk geen verval bestaan; we zullen dus aannemen dat de waterstand langs KE en GB (zie fig. 44 a) h_1 bedraagt, evenals in het dwarsprofiel KG.

We stellen nu de vergelijking op voor het stootvermogen (impulsie, hoeveelheid van beweging) van het water tussen de profielen 1 en 2. Op dit water werken in het profiel 1, dus over het oppervlak GHJK (fig. 44 b), de drukken die overeenkomen met de waterstand h_1 . Ook langs de wand BGHJKEDC werken dergelijke drukken. De hieruit resulterende drukkrachten werken naar rechts. Daartegenover werkt in het profiel 2 (ACDF) een drukkracht naar links, resulterende uit de drukken behorende bij de waterstand h_2 . De resultante van alle drukkrachten is

$$F = \int_{z_b}^{h_1} \rho g (h_1 - z) (y_2 - y_1) dz - \int_{z_b}^{h_2} \rho g (h_2 - z) (y_2 - y_1) dz =$$

$$= -\rho g (h_2 - h_1) \int_{z_b}^{h_1} (y_2 - y_1) dz + \rho g \int_{h_1}^{h_2} (h_2 - z) (y_2 - y_1) dz =$$

$$= -\rho g (h_2 - h_1) [A_2 + \xi \Delta A]$$

Hierin stelt $\xi (h_2 - h_1)$ de afstand voor van het zwaartepunt van het oppervlak ABEF (waarvan we de grootte door ΔA voorstellen) tot de waterspiegel AF. Praktisch geldt steeds $0 < \xi \leq 1/2$.

Het transport van stootvermogen door het profiel 1 bedraagt $\rho A_1 V_1^2$ en door profiel 2 bedraagt het $\rho A_2 V_2^2$. Daar de stroming naar we aannemen, stationnair is, verandert de hoeveelheid stootvermogen tussen 1 en 2 niet, en dus moet de kracht F plus het verschil in transport van stootvermogen nul zijn:

$$\rho (A_1 V_1^2 - A_2 V_2^2) = \rho g (h_2 - h_1) [A_2 + \xi \Delta A]$$

In aanmerking nemende dat $Q = A_1 V_1 = A_2 V_2$ is, vinden we voor het waterstandsverschil

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{1 + \xi \frac{\Delta A}{A_2}} \frac{V_1 (V_1 - V_2)}{g}$$

Dit is steeds positief, d.w.z. h_2 is groter dan h_1 , omdat V_1 groter is dan V_2 .

Het energieverval wordt nu

$$H_1 - H_2 = \frac{V_1^2 - V_2^2}{2g} - (h_2 - h_1) = \frac{(V_1 - V_2) \left[V_1 - V_2 + \xi \frac{\Delta A}{A_2} (V_1 + V_2) \right]}{2g \left(1 + \xi \frac{\Delta A}{A_2} \right)}$$

Dit is steeds positief, d.w.z. H_1 is groter dan H_2 en het verschil is hoogstens

$$H_1 - H_2 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

namelijk in het geval dat ΔA te verwaarlozen is t.o.v. A_2 .

Bij een meer geleidelijke verwijding zal een deel van de kinetische energie, die bij een plotselinge verwijding verloren gaat, nog weer in potentiële energie kunnen worden omgezet. De waterstandsverhoging is dan groter en het energieverval kleiner dan bij de plotselinge verwijding. In het algemeen kunnen we voor het vertragsingsverlies bij een verwijding

$$H_1 - H_2 = \eta \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g}$$

stellen, waarin η een coëfficiënt is met een waarde die hoogstens 1 is. We kunnen ook

$$H_1 - H_2 = W_e Q^2$$

stellen, waarin

$$W_e = \frac{\eta}{2g} \left(\frac{1}{A_1} - \frac{1}{A_2} \right)^2$$

de weerstand van de verwijding is.

Bij de vertraging wordt een vermogen (d.i. energie per een-
van tijd) groot.

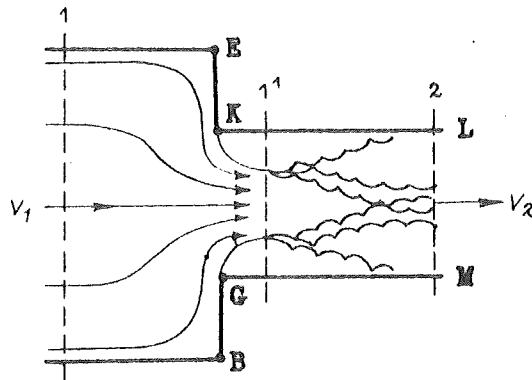
$$P = P_1 - P_2 = \rho g (H_1 - H_2) Q$$

gedissipeerd, d.w.z. de hydraulische energie wordt omgezet in warmte.

We zagen hierboven dat het stromingsbeeld van de versnelde strooming niet omkeerbaar was, als gevolg van onstabilliteit. Het stromingsbeeld van de vertraagde strooming is evenmin omkeerbaar omdat volgens de tweede hoofdwet der thermodynamika een proces waarbij volwaardige, b.v. hydraulische energie wordt omgezet in warmte (d.i. ongerichte en daardoor onvolwaardige energie), niet omgekeerd kan worden.

Contractieverliezen bij plotselinge vernauwing.

Bij een geleidelijke vernauwing treden geen energieverliezen op, zoals we hierboven reeds uiteenzetten. Bij een plotselinge vernauwing daarentegen, kunnen wel verliezen voorkomen. Bij de vernauwing van fig. 45 b.v. zullen de waterdeeltjes die de wand EK volgen bij het bereiken van de hoek K niet onmiddellijk in staat zijn de wand KL te gaan volgen, doch ze zullen doorschieten en dan geleidelijk afbuigen in de richting van KL. Zo ontstaat stroomafwaarts een samengetrokken stroom (straal; zie de stippellijnen in fig. 45).



Figuur 45

De samengetrokken stroom beweegt zich aanvankelijk te midden van rustend, of althans langzamer stromend water. Langs het grensvlak van de straal ontstaan daardoor wervels die menging van water en uitwisseling van stootvermogen bewerken, zodat op enige afstand stroomafwaarts (profiel 2) weer een gelijkmatige snelheidsverdeling is ontstaan.

Tussen profiel 1 en 1' is de stroom geleidelijk vermold, en daarom zal de energiehogte in profiel 1' gelijk zijn aan die in profiel 1, d.i. H_1 . Tussen 1' en 2 treden vertragingverschijnselen op. Laat μH_2 het dwarsoppervlak van de gecontracteerde straal zijn, dan is de snelheid in 1' op $v_2 : \mu$ te stellen. We mogen wel aannemen dat tussen 1' en 2 volledige vertragingverliezen optreden ($\eta = 1$), en dan geldt dus

$$H_1 - H_2 = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \frac{v_2^2}{2g} = \zeta_c Q^2,$$

waarin

$$W_c = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \frac{1}{2gA_1^2}$$

de weerstand van de vernauwing is.

Contractieverliezen bij insnoering.

Een geval dat met het vorige verwant is wordt gevormd door een plaatselijke vernauwing van korte lengte, waarachter weer een verwijding plaats vindt (fig. 46). Laat hier A_n het dwarsoppervlak van de opening, en μA_n dat van de gecontracteerde straal zijn. Dan is

$$V_1' = \frac{Q}{\mu A_n} = \frac{A_2}{\mu A_n} V_2$$

Tussen 1 en 1' verandert de energiehöhe niet, en daarna krijgen we een vertragsverlies groot

$$H_1 - H_2 = \left(\frac{A_2}{\mu A_n} - 1\right) \frac{V_2^2}{2g} = W_c Q^2$$

waarin

$$W_c = \frac{1}{2g} \left(\frac{1}{\mu A_n} - \frac{1}{A_2}\right)^2$$

de weerstand van de vernauwing is.

Is de vernauwing zo lang (fig. 46 b) dat de stroom na contractie zich eerst verspreid over het profiel A_n , en eerst daarna de vernauwing verlaat en zich uitspreidt over het profiel A_2 , dan is de weerstand van de vernauwing de som van een contractieweerstand en een gewone vertragsweerstand:

$$W_c = \frac{1}{2g} \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \frac{1}{A_n^2} + \frac{1}{2g} \left(\frac{1}{A_n} - \frac{1}{A_2}\right)^2$$

Deze is kleiner dan de weerstand in het vorige geval.

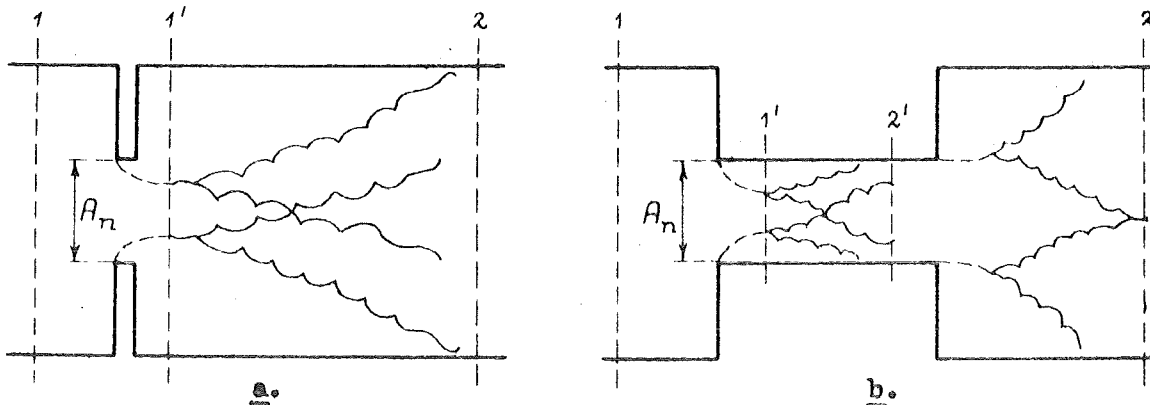
Indien A_2 groot is t.o.v. A_n , dan wordt de formule in het geval van een korte vernauwing

$$W_c = \frac{1}{2g\mu^2 A_n^2}$$

en in het geval van een lange vernauwing

$$W_c = \frac{(\gamma - \mu)^2 + \mu^2}{2g\mu^2 A_n^2}$$

De formules voor plaatselijke vernauwingen zijn o.a. te gebruiken voor een sluitgat en voor een stuw met een spleet onder water.



Figuur 46

In rekening brengen van overgangsvervallen.

Het is in het algemeen onjuist bij een overgang tussen twee vakken met verschillende gemiddelde profielen vertragsings- of contractieverliezen in rekening te brengen, omdat zulke verliezen zich in de regel niet speciaal op de aangenomen vakovergangen voordoen. Deze verliezen komen integendeel min of meer verdeeld langs de rivier voor, omdat de rivier uit een voortdurende afwisseling van vernauwingen en verwijdingen bestaat. De vertragsings- en contractieverliezen worden dan ook praktisch steeds verdisconteerd in de wrijving (zie aanh. 1,2). In het algemeen zal dus voor een overgang van twee vakken

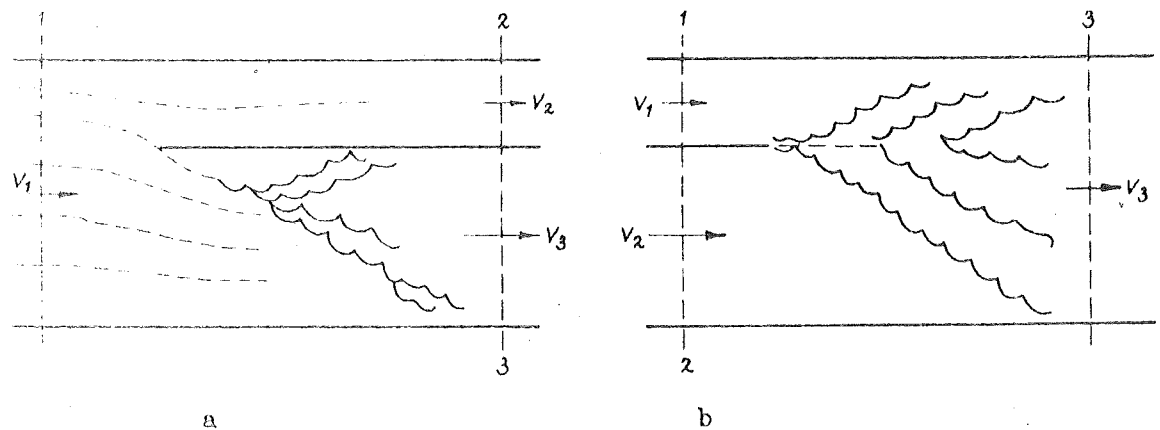
$$H_a = H_b \text{ en } Q_a = Q_b$$

gesteld moeten worden (H_a en Q_a energiehogte en afvoer onmiddellijk boven, H_b en Q_b onmiddellijk beneden de overgang.

Alleen indien zich een bijzonder groot obstakel op deze overgang bevindt, b.v. een stuw met opening onder water of een sluitgat, behoort men het energieverval aldaar afzonderlijk in rekening te brengen. Dit kan geschieden op de wijze van fig. 24.

Vertragsings- en contractieverliezen op een splitsing.

Op een splitsing of samenvloeiing van twee waterlopen kunnen ook energievervallen optreden tussen de waterlopen.



Figuur 47

Op een rechte stroomsplitsing zal in de tak met de kleinste snelheid een direct vertragsingsverlies, en in de tak met de grootste snelheid een contractieverlies optreden. Dan zijn dus op de splitsing van fig. 47 a de energievervallen

$$H_1 - H_2 = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \quad \text{en} \quad H_1 - H_3 = \left(\frac{1}{\mu} - 1\right)^2 \frac{V_3^2}{2g}.$$

Deze worden beide nul als $V_1 = V_2 = V_3$ is.

Aanpassingsverliezen op een samenvloeiing.

Bij een rechte samenvloeiing (fig. 47 b) zullen de aankomende stromen aanvankelijk recht voortgaan. Op het grensvlak zullen zich dan

als gevolg van het snelheidsverschil wervels vormen die een uitwisseling van de beweging bewerken. We kunnen dit geval op analoge wijze behandelen als een plotselinge verwijding. We beschouwen dus het stootvermogen van het water tussen de profielen 1 en 2 enerzijds, en het profiel 3 anderzijds.

Verwaarlozen we het verschil tussen $A_1 + A_2$ en A_3 , dan kan voor de kracht die op het beschouwde water werkt

$$F = -\rho g A_1 (h_2 - h_1) - \rho g A_2 (h_3 - h_2)$$

gesteld worden. Hierbij zullen we mogen aannemen dat $h_1 = h_2$ is.

Van links wordt per tijdseenheid een stootvermogen $\rho A_1 v_1^2 + \rho A_2 v_2^2$ aangevoerd, en naar rechts wordt een stootvermogen $\rho A_3 v_3^2$ afgevoerd. Daar het stootvermogen tussen 1-2 en 3 niet verandert, geldt

$$\rho A_1 v_1^2 + \rho A_2 v_2^2 - \rho A_3 v_3^2 = \rho g A_1 (h_3 - h_1) + \rho g A_2 (h_3 - h_2)$$

Gebruikmakende van de hulpformules $A_1 + A_2 = A_3$ en $A_1 v_1 + A_2 v_2 = A_3 v_3$, vinden we

$$h_3 - h_1 = h_2 - h_1 = \frac{(v_1 - v_3)(v_3 - v_2)}{g}$$

Dit is altijd positief omdat als $v_1 > v_3$, dan is $v_3 > v_2$, en als $v_1 < v_3$, dan is $v_3 < v_2$.

Voor de energievervallen vinden we nu

$$H_1 - H_3 = \frac{(v_1 - v_3)(v_1 - v_3 + 2v_2)}{2g}$$

en

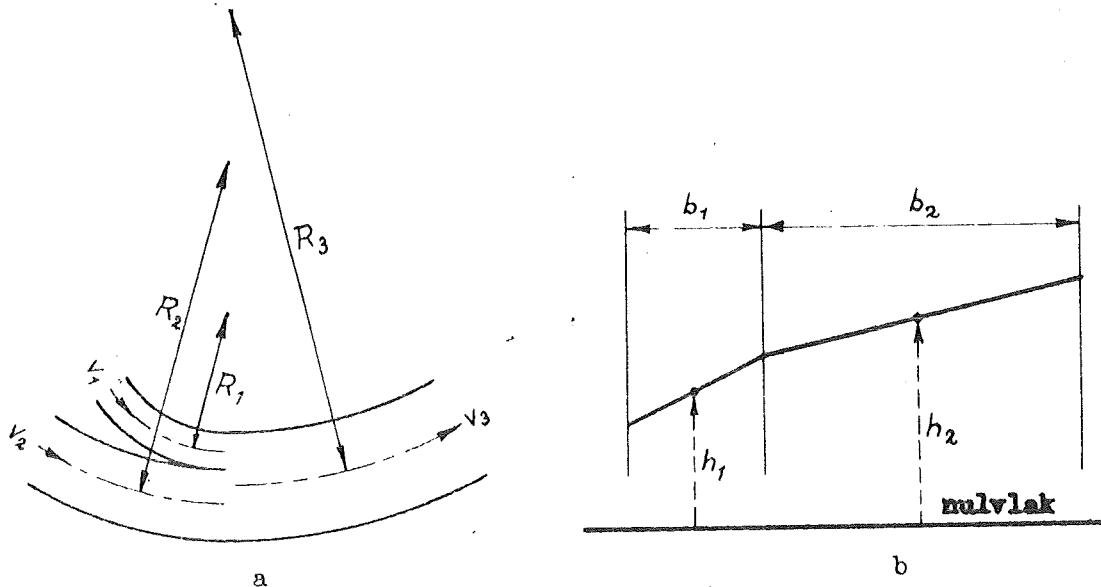
$$H_2 - H_3 = \frac{(v_2 - v_3)(v_2 - v_3 + 2v_1)}{2g}$$

In het geval dat $v_2 = 0$ wordt, gaat de formule voor $H_1 - H_3$ over in de formule voor een plotselinge verwijding van profiel A_1 naar A_3 .

Evenzo gaat de formule voor $H_2 - H_3$ over in de formule voor een plotselinge verwijding als $v_1 = 0$ is.

Bochtvervallen op knooppunten.

Veelal zijn een of meer der samenkomende waterlopen gebogen. De daaruit voortkomende middelpuntvliedende krachten hebben vervallen tussen de waterlopen ten gevolge. Deze zijn meestal zeer gering. Teneinde dit in voorkomende gevallen te kunnen verifiëren, zullen we een schatting van die vervallen trachten te maken.



Figuur 48

Laten R_1 en R_2 (zie fig. 48 a) de stralen van de bochten van de samenvloeiende takken en R_3 die van de benedenloop zijn; de stralen zullen positief gerekend worden bij bochten naar links, en negatief bij bochten naar rechts. Dan werkt op iedere volumeneenheid in de waterloop 1 gemiddeld een middelpuntvliedende kracht ter grootte $\rho v_1^2 = R_1$. Dit wordt gecompenseerd door een dwarsverhang.')

$$l_1 = \frac{v_1^2}{gR_1} \quad .$$

Evenzo werkt in de waterloop 2, resp. 3, een dwarsverhang

$$l_2 = \frac{v_2^2}{gR_2} \quad , \text{ resp. } \quad l_3 = \frac{v_3^2}{gR_3} \quad .$$

In waterloop 1 zal zich bij het samenvloeiingspunt een verhang instellen dat ongeveer het midden houdt tussen de verhangen l_1 en l_3 , en in waterloop 2 een verhang dat het midden houdt tussen l_2 en l_3 . Het gevolg hiervan zal zijn een waterstandsverschil tussen de waterlopen 1 en 2 (zie fig. 48 b), welks waarde op ongeveer

$$h_2 - h_1 = \frac{1}{4g} \left[\frac{b_1 v_1^2}{R_1} + \frac{b_2 v_2^2}{R_2} + \frac{(b_1 + b_2) v_3^2}{R_3} \right]$$

geschat kan worden. Houden we hiermee rekening, dan vinden we

$$h_3 - h_1 = \frac{(v_1 - v_3)(v_3 - v_2)}{g} - \frac{A_2}{A_3} (h_2 - h_1)$$

en

$$h_3 - h_2 = \frac{(v_1 - v_3)(v_3 - v_2)}{g} + \frac{A_1}{A_3} (h_2 - h_1)$$

voor de waterstandsverschillen en

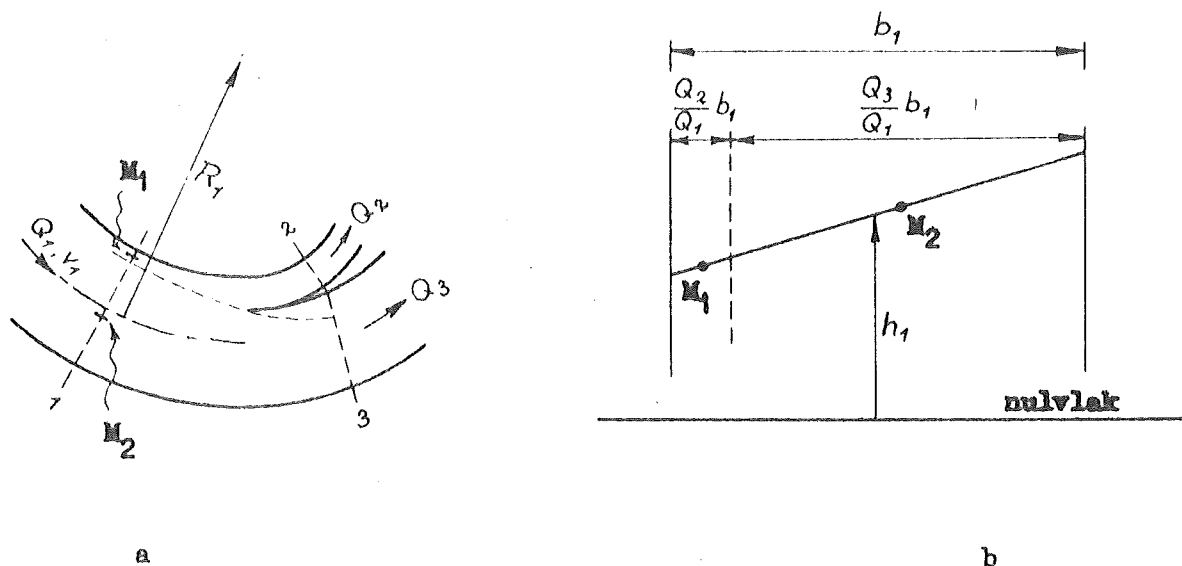
$$H_1 - H_3 = \frac{(v_1 - v_3)(v_1 - v_3 + 2v_2)}{2g} + \frac{A_2}{A_3} (h_2 - h_1)$$

en

$$H_2 - H_3 = \frac{(v_2 - v_3)(v_2 - v_3 + 2v_1)}{2g} - \frac{A_1}{A_3} (h_2 - h_1)$$

voor de energievervallen.

1) Het verschijnsel is in feite nog iets meer gecompliceerd doordat de waterdeeltjes bij de oppervlakte een grotere snelheid hebben en daardoor een grotere middelpuntvliedende kracht ondervinden dan de deeltjes bij de bodem. Het gevolg hiervan is een circulatiestroming waarbij ook nog schuifkrachten langs de bodem ontstaan, doch deze zijn meestal van ondergeschikt belang. Zie b.v. het artikel van ir. v. Bende-
gom in "De Ingenieur" nr. 4 van 24 Jan. 1947.



Figuur 49

Bij een splitsing van een waterloop met kromtestraal R_1 (zie fig. 49 a) verdelen we in gedachten de onverdeelde rivier in twee stroken evenredig met de afvoeren Q_2 en Q_3 van de twee takken (zie de stip-pellijn). In de hoofdrievier is een dwarsverhang

$$i_1 = \frac{v_1^2}{gR}$$

In M_1 , het midden van de linker strook, is dan de waterstand lager dan het gemiddelde in het gehele profiel, en wel

$$h_1 = \frac{1}{2} \frac{Q_3}{Q_1} b_1 \frac{v_1^2}{gR_1}$$

(zie fig. 49 b). Ook de energiehogte zal hier een overeenkomstig bedrag lager zijn, en dit zal ook het geval zijn in de linkertak (profiel 2). Evenzo zal in de rechtertak de energiehogte een bedrag

$$\frac{1}{2} \frac{Q_2}{Q_1} b_1 \frac{v_1^2}{gR_1}$$

hoger zijn dan als er geen bocht was.

In rekening brengen van knooppuntvervallen.

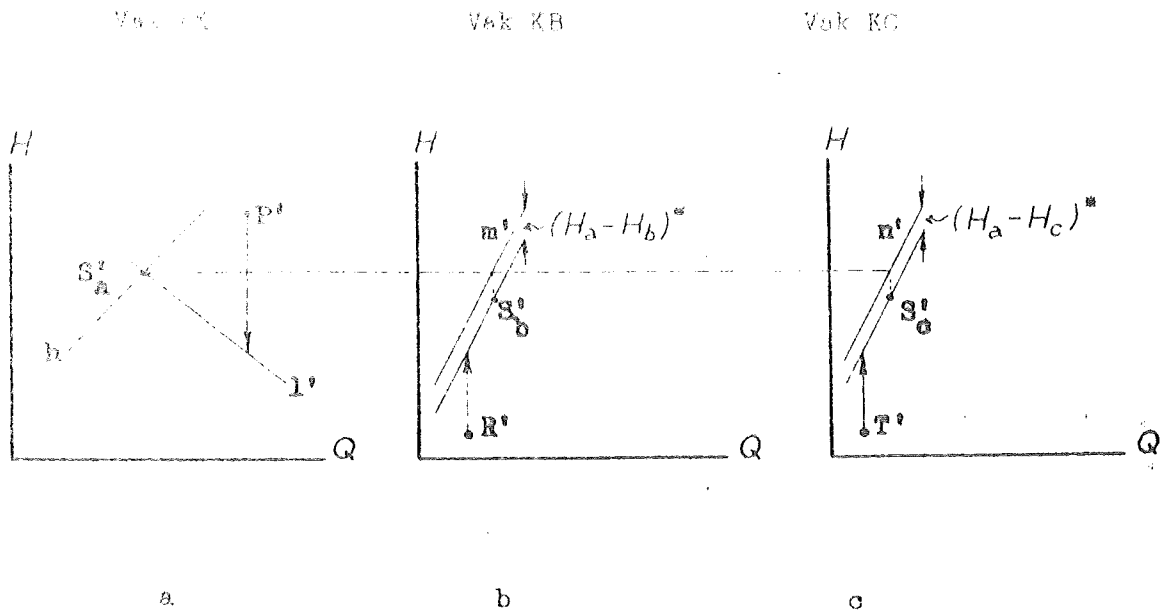
In de regel zal het profiel achter een samenvloeiing niet gelijk zijn aan de som van de profielen voor de samenvloeiing. Meestal zal evenmin het profiel voor een splitsing gelijk zijn aan de som van de profielen achter de splitsing. Dit geeft een verdere complicatie bij de behandeling van knooppunten.

Het zou ons veel te ver voeren, vooral ook het voor de praktijk vrij geringe gewicht der questie in aanmerking nemende, indien we alle gevallen die zich voor kunnen doen in details zouden gaan behandelen.

We volstaan er daarom mee op te merken, dat het in het algemeen mogelijk zal zijn, aannemende dat men het stromingsbeeld bij een knooppunt kent of zo goed mogelijk geschat heeft, de energievervallen te analyseren als een combinatie van samenvloeiingsverliezen, vertragingverliezen, contractieverliezen, en middelpuntvliedende verhangen.

Indien grote vervallen optreden die men nauwkeurig wil kennen, kan een modelproef te hulp worden geroepen. In getijsystemen zal het echter meestal geoorloofd zijn de energievervallen te verwaarlozen, en mocht men deze nog wel in rekening willen brengen, dan zal in het algemeen het geschatte voldoende nauwkeurig zijn. Deze kan dan als volgt in rekening worden gebracht:

We beschouwen de afplitsing van fig. 19. We voeren eerst de constructie voor de oplopende golfpunten in KB en KC, en voor het aflopende golfpunt in AK uit (zie fig. 19 en fig. 50).



Figuur 50 (zie ook fig. 19)

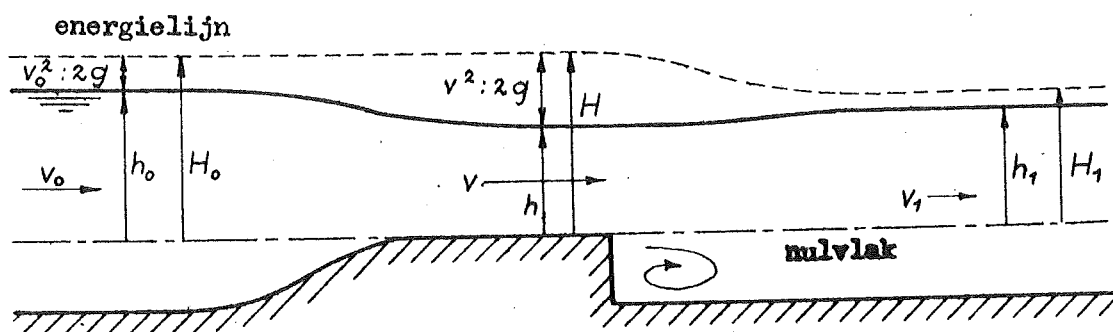
Vervolgens schatten we de afvoeren op het ogenblik van samentreffen der drie golfpunten op het knooppunt, en bepalen hiermee de energievervallen tussen AK en KB, en tussen AK en KC. De geconstrueerde lijnen in de HQ -diagrammen voor KB en KC verplaatsen we evenwijdig met zichzelf omhoog over afstanden overeenkomende met de energievervallen. Deze verplaatste lijnen m' en n' worden dan samengesteld in het HQ -diagram van AK, op de wijze als bij fig. 19 beschreven. De verkregen hulplijn h bepaalt met l' het beeldpunt S'_a . De beeldpunten S'_b en S'_c worden lager gevonden, als aangegeven door de stippellijn in fig. 50.

Aanhangsel 6.

6.2. Overlaten.

Volkomen en onvolkomen overlaat.

We beschouwen een als overlaat werkende drempel, sluishoofd, sluitgat, of andere plaatselijke insnoering van een waterloop (fig. 51). We veronderstellen dat de dwarsdoorsnede op de plaats van insnoering rechthoekig is, en dat de lengte van de insnoering in verhouding tot de diepte noch kort, noch zeer lang is. Er stelt zich dan in de insnoering een vrijwel horizontale stroming in. Het mulvlak leggen we voor dit geval op de bodem van de insnoering.



Figuur 51

Bij het toestromen naar de insnoering is de beweging van het water versneld. We zullen aannemen dat de vernauwing zo geleidelijk is dat hier geen contractieverliezen optreden. Er is dan geen energieverlies, zodat de energielijn (dat is de lijn die het verloop van de energiehooft weergeeft) tot in de insnoering horizontaal verloopt. De snelheid, en dus ook de snelheidshooft, neemt evenwel toe, waaruit volgt dat de waterspiegel daalt ($h < h_0$).

Voorbij de insnoering vertraagt de beweging en hier vindt dus een energieverlies plaats, zodat de energielijn daalt. De waterspiegel kan daarbij weer iets omhoog gaan. Het energieverval en de waterspiegeloploop zijn te behandelen met de theorie van aanh. 6.1, en we zullen daarop nu niet ingaan.

De snelheid in de insnoering en de afvoer daar doorheen zijn gemakkelijk te bepalen als functies van H_0 en h (te bedenken dat $H = H_0$):

$$v = \sqrt{2g(H_0 - h)} \quad , \quad Q = bh\sqrt{2g(H_0 - h)} \quad ;$$

hierin is b de breedte van de insnoering.

Laten we, bij gelijk blijvende H_0 , de benedenwaterstand h_1 dalen, dan zal ook de waterstand h op de overlaat dalen, en dan zal de snelheid v toenemen, daar $H_0 - h$ dan groter wordt.

Deze afname van h , en de bijbehorende toename van v , gaan evenwel niet onbepaald voort tot $h=0$ zou zijn geworden, omdat voor die tijd een toestand bereikt wordt waarbij de benedenwaterstand zijn invloed op de stroming in de insnoering verliest. We zullen dit trachten duidelijk te maken:

De insnoering heeft een dwarsdoorsnede groot hb , dus is $m = \gamma ghb$; verder is $b_s = b$, en dan vinden we dus uit (15) en (16), dat de aflopende, resp. oplopende golfpunten snelheden

$$c^+ = v + \sqrt{gh} \quad , \quad c^- = v - \sqrt{gh}$$

hebben. De aflopende golfpunten hebben steeds een positieve snelheid; zij lopen dus van het bovenwater, door de insnoering, naar het benedenwater. De oplopende golfpunten zullen, zolang v klein is, een negatieve snelheid hebben, d.w.z. van het benedenwater, door de insnoering, naar het bovenwater lopen, doch, zou v groter worden dan \sqrt{gh} (we zullen aanstonds zien dat dit niet kan, althans niet in het hier behandelde geval), dan zou c^- positief worden, d.w.z. dat de oplopende golfpunten niet meer tegen de stroom in van het benedenwater in het bovenwater zouden kunnen doordringen, doch dat ze door de stroom mee-gesleept zouden worden naar het benedenwater toe.

Laten we nu eens even veronderstellen dat er een stationnaire subkritische stroming op de overlaat is, dus een stroming waarin $v < \sqrt{gh}$ en $c^- < 0$ is. Stel nu dat de benedenwaterstand verlaagd wordt. Deze verlaging zal dan tot een golfverschijnsel aanleiding geven, waarbij de oplopende golfpunten er voor zorgen dat de invloed van de verlaging tot in de insnoering doordringt. Het golfverschijnsel (waarin natuurlijk ook de aflopende golfpunten een rol spelen) zal na enige tijd leiden tot een nieuwe stationnaire toestand, waarin de stroming in de insnoering zich aangepast heeft aan de nieuwe benedenwaterstand.

Wordt de benedenwaterstand steeds verder verlaagd, dan zal ook h steeds verder afnemen, en v toenemen. Dit vindt voortgang totdat $v = \sqrt{gh}$ wordt. De stroming op de overlaat is dan kritisch geworden, d.w.z. dat $c^- = 0$ is, en dat de oplopende golfpunten net niet meer de insnoering kunnen passeren. Wordt de benedenwaterstand dan nog verder verlaagd, dan zijn de oplopende golfpunten niet meer bij machte de waterstand in de insnoering nog verder te verlagen, zodat de kritische stromingstoestand door zal blijven voortbestaan.

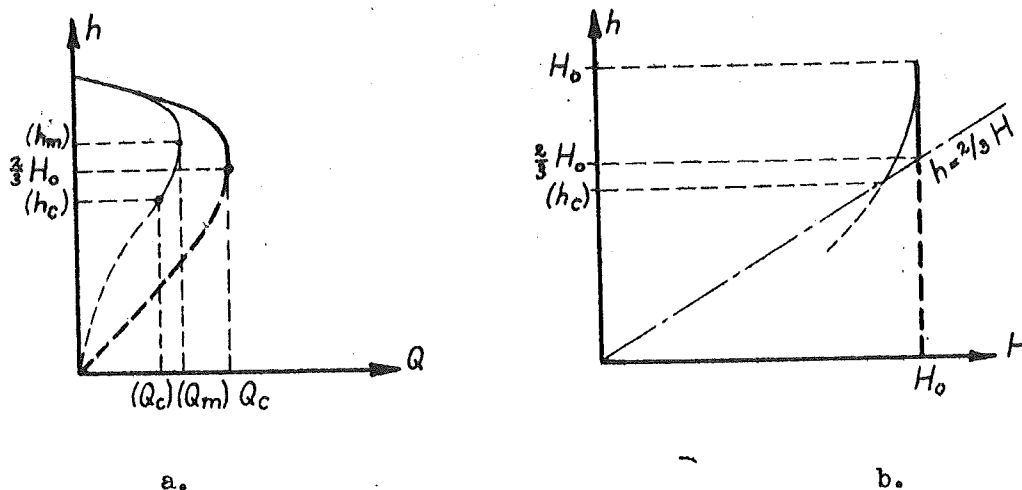
Wordt $v = \sqrt{gh}$, dan is, daar ook $v = \sqrt{2g(H_0 - h)}$ geldt, gemakkelijk af te leiden dat $h = h_c = \frac{2}{3} H_0$ moet zijn. De snelheid, resp. afvoer, bedraagt dan:

$$v_c = \sqrt{\frac{2}{3} g H_0} \quad Q_c = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} g} b H_0^{3/2}$$

Dit geldt dus voor een kritische overlaat, of, zoals men ook vaak zegt, volkomen overlaat; een overlaat waarop de stroming nog subkritische is, heet dan onvolkomen.

Bij het dalen van de benedenwaterstand gaat de afvoer Q toenemen. Bepalen we Q als functie van h bij gelijkblijvende H_0 , dan vinden we een verloop als aangegeven in fig. 52a, met een maximum dat juist ligt bij $h = \frac{2}{3} H_0$.

Het toenemen van de afvoer gaat dus door, totdat de kritische afvoer bereikt is. Daarna zou de afvoer weer gaan afnemen indien h verder zou dalen, doch dit is niet mogelijk zoals we boven betoogden. De kritische afvoer is dus tevens de maximale afvoer. Om dit reden wordt de kritische overlaat dan ook wel "overlaat met maximale afvoer" genoemd. Doch deze benaming is niet gelukkig omdat het maximaal zijn van de afvoer een geheel bijkomstige omstandigheid is, zoals blijken moge uit het volgende voorbeeld:



Figuur 52

Overlaat zonder contractieverliezen (dikke lijnen) en met (dunne lijnen).

Veronderstel dat er bij het begin van de overlaat contractieverliezen optreden. De energiehoogte H op de overlaat zal dan kleiner zijn dan de energiehoogte H_0 daarvoor, en het energieverval zal toenemen met toenemende V_1 , dus met afnemende h , ongeveer als aangegeven door de dunne lijn in fig. 52 b. De afvoer Q zal voorts kleiner zijn dan bij ontbreken der verliezen, en dus ongeveer verlopen als aangegeven door de dunne lijn in fig. 52a.

De kritische toestand wordt bereikt zodra $h = \frac{2}{3} H$ is geworden, en daar $H < H_0$ is, zal dus de kritische waterstand h_c kleiner zijn dan $\frac{2}{3} H_0$ (zie fig. 52 b).

De Q -kromme is bepaald door

$$Q = bh \sqrt{2g(H-h)}$$

waarin H nog als functie van h is op te vatten (zie fig. 52 b). Nu is

$$\frac{dQ}{dh} = b \sqrt{2g(H-h)} + \frac{1}{2} bh \sqrt{\frac{2g}{(H-h)}} \left[-1 + \frac{dH}{dh} \right]$$

Voor $h = h_c = \frac{2}{3} H$ wordt dit

$$\left(\frac{dQ}{dh} \right)_c = \frac{1}{2} bh \sqrt{\frac{2g}{H-h}} \frac{dH}{dh},$$

en daar dan (zie fig. 52 b) $dH/dh > 0$ is, is dus ook $(dQ/dh)_c > 0$.

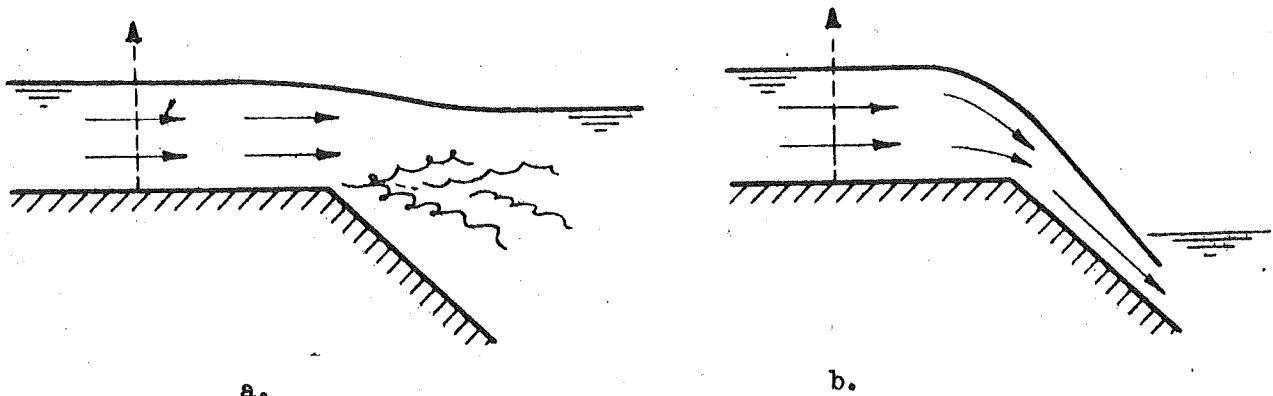
Hieruit volgt dat het maximum van Q bij een waarde h_m van h moet liggen die groter is dan h_c (zie fig. 52a).

In dit geval gaat dus bij dalende benedenwaterspiegel de afvoer eerst toenemen; vervolgens wordt een maximum bereikt en daarna gaat de afvoer weer afnemen, totdat de kritische afvoer wordt bereikt; bij nog verdere daling van de benedenwaterstand blijft de kritische afvoer voortbestaan.

Het zal uit deze beschouwing duidelijk zijn dat het kenmerkende van een volkomen overlaat gelegen is in het kritisch zijn van de stroming, d.w.z. dat de stroming ongevoelig is voor invloeden van beneden. Het maximaal zijn van de afvoer zal alleen als toevallige bijkomstigheid zich daarbij voordoen.

Invloed van de lengte der overlaat; scherpe overlaat.

Indien de benedenwaterstand onder de waterstand op de overlaat daalt, heeft dit, zoals we hiervoor zagen, geen invloed op de afvoer over de overlaat. Doch hieruit mag niet worden afgeleid, dat het stromingsbeeld op de overlaat geen verandering meer ondergaat. Integendeel zal de stroming op het eind van de overlaat nog een belangrijke wijziging ondergaan bij verder dalen van de waterstand. Dit is geïllustreerd door fig. 53a en b; de eerste dezer figuren stelt de stroming voor bij een benedenwaterstand die nog weinig verschilt van de kritische waterstand op de overlaat, en de tweede bij een veel lagere waterstand. In dit laatste geval duikt de straal naar beneden, d.w.z. dat er een waterval gevormd is, en dat de stroomdraden op het eind der overlaat sterk omlaag gekromd zijn.



Figuur 53
Stroming op het einde van een overlaat,
(a) zonder en (b) met een waterval.

In het gebied vlak bij de eindrand van de overlaat, waar bij duikende straal de stroomdraden gebogen zijn, treden aanmerkelijke verticale versnellingen op. In dit gebied zullen dus de vergelijkingen van de lange golfbeweging niet opgaan, en hier zijn dus ook de daarop gebaseerde beschouwingen over de kritische stroming niet van toepassing. Op enige afstand voor de eindrand (b.v. bij A) lopen de stroomdraden evenwel toch steeds nagenoeg horizontaal, en daar geldt de lange golftheorie, en daar treedt dus ook steeds nagenoeg de kritische stroming op.

Uit deze beschouwing volgt, dat onze theorie van de volkomen overlaat stand houdt, althans in de vorm van een zeer goede benadering, doch alleen indien de overlaat voldoende lang is.

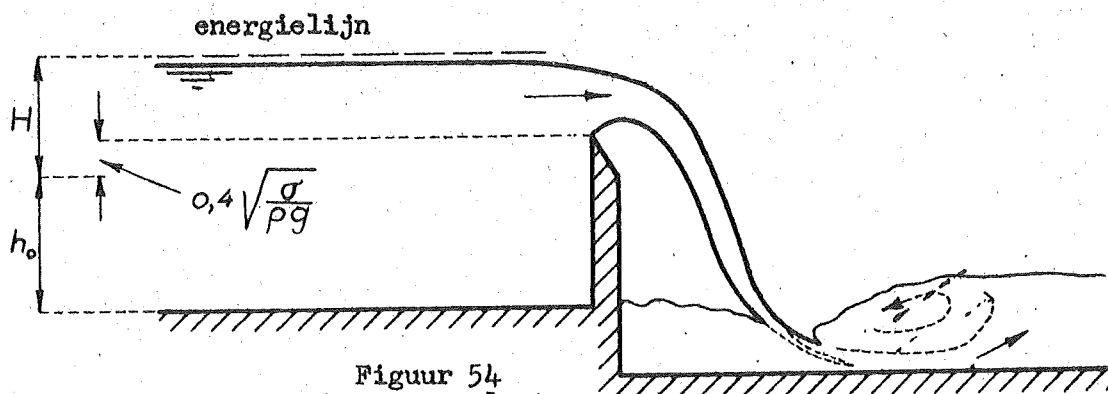
Immers, bij de aanvang van de overlaat hebben we een gebied waar nog stroomversnellingen kunnen optreden, en bij het einde van de overlaat een gebied waar zich verticale versnellingen kunnen voordoen. De ontwikkelde theorie zal alleen gelden indien de overlaat zo lang is dat de twee gebieden niet in elkaar lopen, doch daar tusschenin zich een horizontaal gelaagde stroming vormt.

Heeft de overlaat niet de vereiste lengte, dan blijft de benedenwaterstand, indien deze daalt langer invloed behouden dan bij een lange overlaat, en dan gaat eerst bij een grotere afvoer de overlaat volkomen worden. Stellen we dus in het algemeen voor de overlaat

$$(75) \quad Q = \mu^{2/3} \sqrt{2/3} g b H^{3/2},$$

dan zal bij een korte overlaat μ groter dan 1 zijn.

Indien we een overlaat hebben met scherpe overstortrand, zodat de lengte van de eigenlijke overlaat op nul gesteld moet worden, dan zal de toestroming, die van invloed is op de afvoer, afhangen van de verhouding van overstorthoogte en hoogte van de overlaat. Ook μ zal dan van deze verhouding afhangen.



Figuur 54
Scherpe overlaat.

Een empirische formule voor μ in dit geval is

$$\mu = 1 + \frac{1.5}{H/h_0 + 1.3 + \frac{30}{H/h_0 + 1.3}}$$

Hierin is h_0 de effectieve hoogte van de overlaat, dat is de werkelijke hoogte verminderd met een correctie voor capillaire opstijging ter grootte $0.4 \sqrt{\sigma / \rho g}$ (σ = oppervlaktespanning); voor water is $\sigma = 0.0707 \text{ N/m}$ en de correctie bedraagt dan 1,1 mm, hetgeen bij grotere overlaten te verwaarlozen is. Verder stelt H de energiehoogte boven de effectieve overlaathoogte voor.

De aangegeven formule stemt, voorzover de empirische gegevens reiken, tot op ongeveer 1 o/oo overeen met de bekende formule van Rehbock (1929), die we hier in de vorm

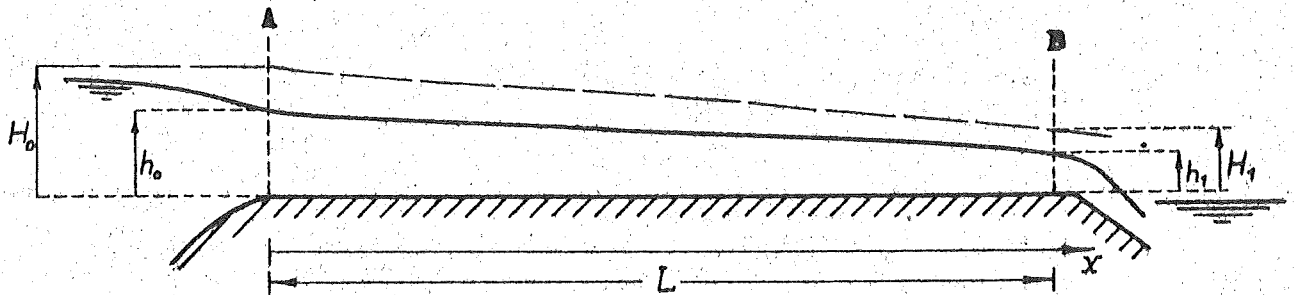
$$Q = \mu^*{}^{2/3} \sqrt{2/3} g b h^{3/2} \quad \text{met} \quad \mu^* = 1.045 + 0.74 h/h_0$$

brengen. De door ons voorgestelde formule leidt bovendien voor $H/h_0 = \infty$ tot de correcte waarde $\mu = 1$, hetgeen de formule van Rehbock niet doet.

Bij toepassing op een meetoverlaat is het werken met de formule van Rehbock eenvoudiger. Uit principieel oogpunt verdient echter naar onze mening de formule (75) de voorkeur.

Invloed van de lengte der overlaat; zeer lange overlaat met wrijving.

Bij zeer lange overlaten is evenals bij zeer korte overlaten een correctie nodig. Op een zeer lange overlaat gaat namelijk de wrijving een merkbare invloed krijgen. Er ontstaat dan een stromingstoestand als geschetst in fig. 55.



Figuur 55
Zeer lange overlaat met wrijving.

De stroming betreedt bij A de overlaat met een zekere energiehogte H_0 . Op de overlaat werkt de wrijving, en als gevolg daarvan daalt de energiehogte langs de overlaat tot een waarde H_1 op of dicht bij het einde der overlaat (bij B). Hier bij het einde zal de stromingstoestand kritisch moeten zijn.

De stroming op de overlaat wordt beheerst door de bewegingsvergelijking

$$g \frac{dh}{dx} + v \frac{dv}{dx} + \frac{g}{C^2} \frac{v^2}{h} = 0.$$

Hierin elimineren we v met behulp van $q = hv$, waarin q de afvoer per eenheid van breedte voorstelt. Na enig herleiden vinden we

$$\left(1 - \frac{qh^3}{q^2}\right) dh = \frac{g}{C^2} dx.$$

Dit integreren we over de lengte van de overlaat, waarbij dus x van 0 tot L loopt, en h van h_0 tot h_1 :

$$h_1 - h_0 - \frac{1}{4} \frac{g}{q^2} (h_1^4 - h_0^4) = \frac{g}{C^2} L$$

Nu is bij B de stroming kritisch, d.w.z. dat daar $h_1 = a_c$ en $v_1 = \sqrt{ga_c}$, en dus $q = a_c \sqrt{ga_c}$ is (q varieert niet met x). We krijgen dus na enig herleiden

$$(76) \quad \frac{g}{C^2} \frac{L}{a_c} = \frac{3}{4} - \frac{h_0}{a_c} + \frac{1}{4} \left(\frac{h_0}{a_c}\right)^4$$

Deze functie is te vinden in bijlage 5 (zie hiervoor verder aanh. 6,4).

Verder is

$$H_0 = h_0 + \frac{v_0^2}{2g} = h_0 + \frac{q^2}{2gh_0^3}$$

en dus

$$(77) \quad \frac{H_0}{a_c} = \frac{h_0}{a_c} + \frac{1}{2} \left(\frac{a_c}{h_0} \right)^2$$

Uit (76) en (77) volgt dan

$$(78) \quad \frac{g}{C^2} \frac{L}{H_0} = \frac{3(h_0 : a_c)^2 - 4(h_0 : a_c)^3 + (h_0 : a_c)^6}{2 + 4(h_0 : a_c)^3}$$

Tenslotte herleiden we de formule als volgt:

$$q = \sqrt{g a_c}^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g H_0^{3/2} \cdot \left(\frac{3}{2} \frac{a_c}{H_0} \right)^{3/2}$$

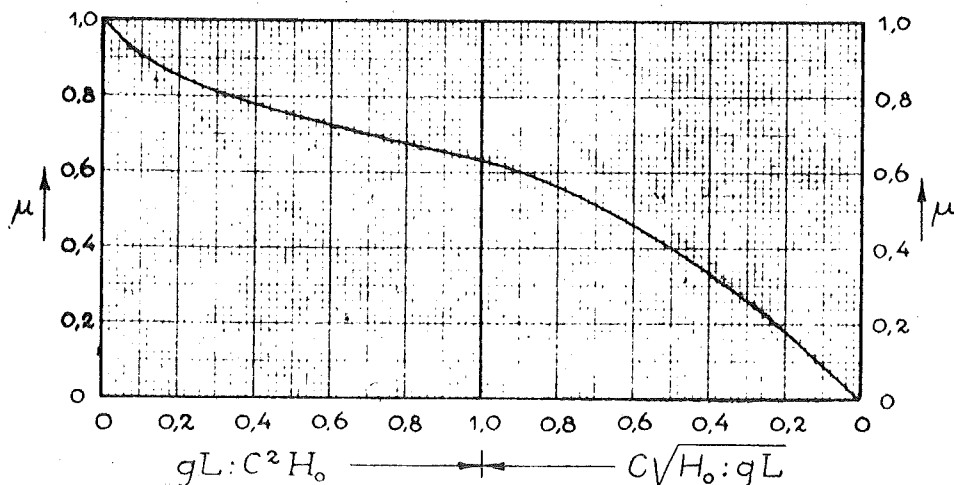
Hieruit volgt dat we de totale afvoer weer kunnen voorstellen met de formule (75), waarin dan de coëfficiënt μ in dit geval bepaald is door

$$\mu = \left(\frac{3}{2} \frac{a_c}{H_0} \right)^{3/2},$$

of, met gebruik maken van (77), door

$$(79) \quad \mu = \frac{h_0}{a_c} : \sqrt{\left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \left(\frac{h_0}{a_c} \right)^3 \right]^3}$$

We zien door (78) en (79) dat zowel de dimensieloze grootheid $gL : C^2 H_0$ als de (eveneens dimensieloze) coëfficiënt μ een functie is van de verhouding $h_0 : a_c$. Dit betekent dat μ ook als een functie van $gL : C^2 H_0$ opgevat kan worden. Deze functie is in fig. 56 grafisch weergegeven.



Figuur 56
Coëfficiënt voor zeer lange overlaat.

We zien hieruit, dat de wrijving op de overlaat te verwaarlozen is, zolang $gL : C^2 H_0$ zeer klein is t.o.v. 1. Nu zal de waarde van C in de buurt van $50 \text{ m}^2 / \text{sec}$ liggen, en dus $C^2 : g \approx 250$. De waarde van L kan dus enige malen H_0 bedragen voordat een betekende invloed van de weerstand optreedt.

Bij een zo lange overlaat dat $gL : C^2 H_0$ enige malen groter dan 1 wordt (een zeldzaam geval!), kan bij benadering (zie rechterhelft van fig. 56)

$$\mu = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} C \sqrt{\frac{H_0}{gL}} = 0,92 C \sqrt{\frac{H_0}{gL}}$$

gesteld worden, en dan gaat de formule voor de afvoer in

$$Q = \frac{1}{2} \frac{C^3}{\sqrt{L}} H_0^2$$

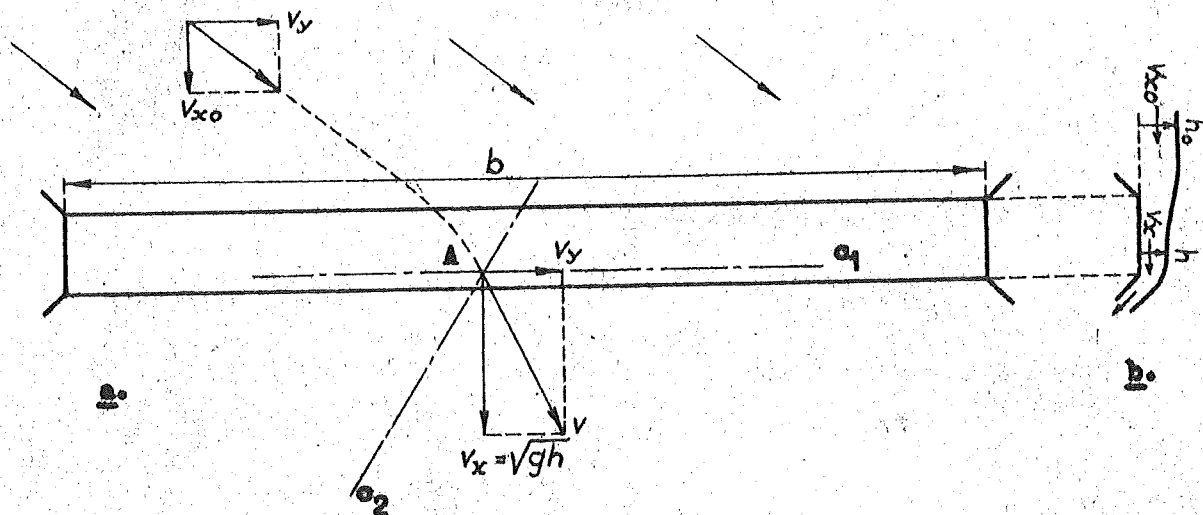
over. Een goede benaderingsformule voor μ is

$$\frac{1}{\mu} = 1 + \frac{gL / C^2 H_0}{1 + 0,8 \sqrt{gL / C^2 H_0}}$$

Deze formule is niet meer dan ongeveer 1% fout.

Scheve toestroming.

We beschouwen nu het geval van een brede overlaat (d.w.z. een overlaat waarvan de afmeting b dwars op de overlaat groot is) die scheef wordt aangestroomd, zoals aangegeven in de plattegrond van fig. 57a.



Figuur 57

Scheve toestroming bij een brede overlaat;
(a) plattegrond; (b) langsdoorsnede.

Daar de breedte groot is, zal er moeten worden aangenomen dat de dwarsverhagen praktisch nul zijn, en dat dus de snelheidscomponent v_y die langs de overlaat heen voert, onveranderd blijft bij het passeren. De snelheidscomponent v_x die over de overlaat heen voert zal daarentegen toenemen.

We beschouwen de stroming nu t.o.v. een assenstelsel dat een eenparige translatie met de snelheid v_y in de richting langs de overlaat heen uitvoert, en dat dus de dwarsbeweging van het water volgt. We nemen aan dat de wrijving te verwaarlozen is. De stroming zal zich dan t.o.v. het bewegende assenstelsel geheel voordoen als een rechte toestroming naar de overlaat.

De overlaat met scheve toestroming kan derhalve behandeld worden als een overlaat met rechte toestroming, door de dwarsnelheid v_y buiten beschouwing te laten. Hieruit volgt dus o.a. dat de overlaat volkomen wordt, zodra de snelheidscomponent v_x op de overlaat gelijk wordt aan \sqrt{gh} . De afvoer is dan

$$(80) \quad Q = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g b \left(h_0 + \frac{v_{x0}^2}{2g} \right)^{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g b \left(H_0 - \frac{v_y^2}{2g} \right)^{3/2}.$$

De stroming is dan evenwel niet kritisch doch superkritisch, omdat als $v_x = \sqrt{gh}$ is, $v > \sqrt{gh}$ is.

Reeds voordat een overlaat met scheve toestroming volkomen wordt, kan de stroming op de overlaat superkritisch worden, doch een deel van het beheersende gebied (zie aanh. 6,4) van een of ander punt A op de overlaat strekt zich dan nog in benedenstroomse richting uit. Zodra evenwel de kritische lijn c_1 evenwijdig aan de overlaat komt te lopen (dus als aangegeven in fig. 57a), dan is het grensgeval bereikt waarbij de invloed van het benedenwater ophoudt door te dringen. De voorwaarde hiervoor is inderdaad $v_x = \sqrt{gh}$.

De aanname dat de snelheid v_y bij het overschrijden van de overlaat niet verandert, zal in het algemeen onjuist zijn bij de zijdelingse begrenzingen van de overlaat. Het zal dus alleen verantwoord zijn (80) toe te passen indien b zo groot is dat de randeffecten een te verwaarlozen invloed op de totale afvoer uitoefenen.

Voor een zeer smalle overlaat (dus b klein) zal niet met (80) gewerkt moeten worden, doch zal veelmeer de volle energiehogte H_0 in rekening gebracht moeten worden, behoudens misschien een reductie voor contractieverliezen bij de toestroming.

Dwarsdoorsnede van de overlaat; doorlating.

Tot nu toe hebben we ons beperkt tot overlaten met een rechthoekig doorstroomprofiel. We zullen nu overgaan tot de bespreking van andere overlaten, doch zullen hierbij alleen ingaan op het geval van de voldoende lange doch niet zeer lange, recht aangestroomde, volkomen overlaat.

De stroming op de volkomen overlaat is kritisch. De voorwaarde hiervoor is $C = 0$. Zoals we reeds op p. 17 hebben afgeleid, doet zich dit voor zodra

$$v = \sqrt{g a_s} = \sqrt{g A : b_s}$$

wordt. Hieruit volgt

$$Q = A \sqrt{g a_s} = \sqrt{g A^3 : b_s}$$

voor de afvoer van de volkomen overlaat. Hierbij hangen A en b_s af van de waterstand op de overlaat, en dus is ook Q een functie van deze waterstand h .

De energiehogte op de overlaat is

$$H = h + V^2 : 2g = h + \frac{1}{2} a_s = h + \frac{1}{2} A : b_s.$$

Hieruit blijkt dat H evenals Q een functie van h is. Het moet daarom ook mogelijk zijn Q als functie van H te beschouwen. We gaan dit voor enkele bijzondere gevallen nader na.

Een interessante groep van overlaten wordt gevormd door degenen waarbij de breedte een machtsfunctie van de waterstand is. Laat bij zekere, in principe willekeurige waterstand h_0 de breedte b_0 zijn, dan is dus

$$b_s = b_0 \left(\frac{h}{h_0} \right)^m,$$

waarin de exponent m een willekeurige waarde kan hebben, mits groter dan -1 (de grond voor deze beperking zal verderop blijken).

In het geval dat m negatief is, zou b voor $h=0$ oneindig worden; dit betekent dat de machtsformule dan in feite alleen gelden kan boven een of andere positieve waterstand, die we in dat geval met onze tot nu toe willekeurige waarde h_0 aangeven (zie fig. 58 b).

Indien $m > 0$ is, (fig 58 a) vinden we voor het oppervlak van het dwarsprofiel

$$A = \int_0^h b_s dh = \frac{b_0 h_0}{m+1} \left(\frac{h}{h_0} \right)^{m+1}.$$

Indien $m < 0$ is (fig. 58 b) vinden we

$$A = A_0 + \int_{h_0}^h b_s dh = A_0 + \frac{b_0 h_0}{m+1} \left[\left(\frac{h}{h_0} \right)^{m+1} - 1 \right],$$

waarin A_0 het dwarsprofiel bij de waterstand h_0 is. We zullen nu verlangen dat dit oppervlak juist de grootte

$$A_0 = \frac{b_0 h_0}{m+1}$$

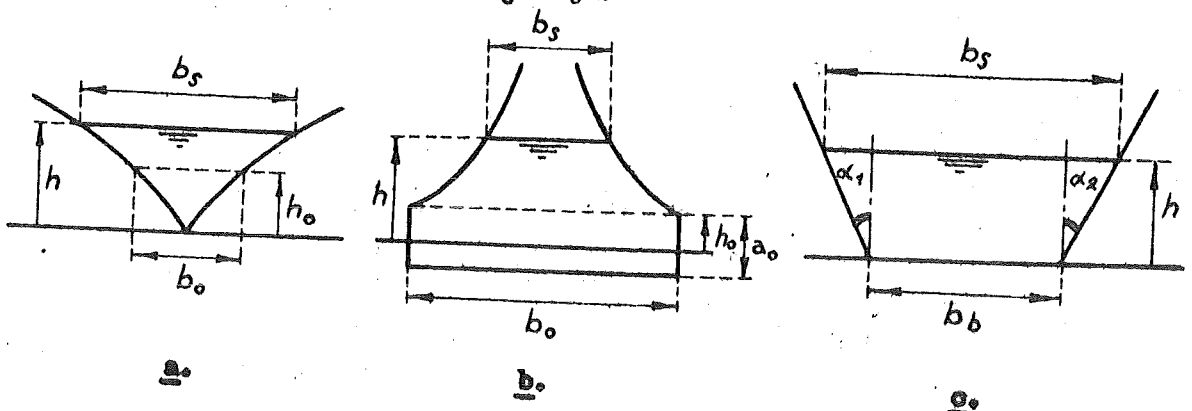
heeft. In dat geval wordt dus ook weer

$$A = \frac{b_0 h_0}{m+1} \left(\frac{h}{h_0} \right)^{m+1}.$$

In principe doet het er niet toe welke vorm het dwarsprofiel beneden het peil h_0 heeft, mits het oppervlak maar de vereiste waarde heeft. Geven we beneden het peil h_0 een rechthoekige vorm aan de dwarsdoorsnede (fig. 58 b), dan moet dus

$$a_0 = h_0 / (m+1)$$

de diepte bij de waterstand h_0 zijn.



Figuur 58

Het is duidelijk, dat we aan A_0 geen negatieve en evenmin een oneindig grote waarde kunnen geven. Dit betekent dat we onze beschouwingen dus moeten beperken tot het geval dat $m > -1$ is.

De stroomvoerende diepte van het profiel bij een willekeurige waterstand h (voor $-1 < m < 0$ moeten we ons beperken tot $h > h_0$) is

$$a_s = \frac{A}{b_s} = \frac{k}{m+1}$$

Hieruit volgt

$$H = k + \frac{1}{2} a_s = \frac{m+3/2}{m+1} h \quad h = \frac{m+1}{m+3/2} H.$$

Verder vinden we

$$Q = AV\sqrt{g a_s} = \sqrt{\frac{g}{m+1}} \frac{b_0}{m+1} \frac{h^{m+3/2}}{h_0^m} = \frac{\sqrt{g}}{(m+1)^{3/2}} \left(\frac{m+1}{m+3/2}\right)^{m+3/2} \frac{b_0}{h_0^m} H^{m+3/2}.$$

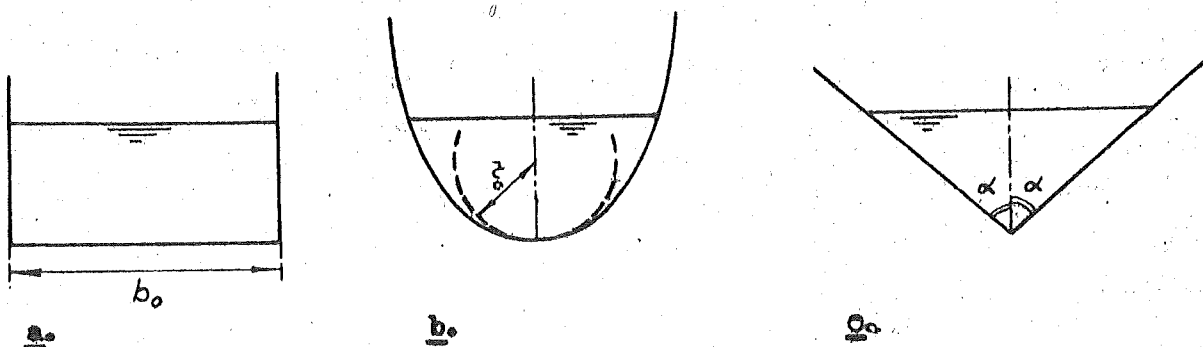
We brengen dit in de vorm

$$Q = DH^p,$$

waarin we p de exponent en D de doorlating van de overlaat zullen noemen, waarvoor de formules

$$p = m + \frac{3}{2} \quad ; \quad D = \frac{(p-3/2)^{p-3/2}}{p^p} \sqrt{g} \frac{b_0}{h_0^{p-3/2}}$$

gelden. De doorlating stelt de afvoer van de overlaat bij een energiehoogte ter grootte van de eenheid (dus 1 m in het kms -stelsel) voor.



Figuur 59

Als bijzondere gevallen van de machts-overlaten beschouwen we nog nader de overlaten met rechthoekig profiel (fig. 59a), parabolisch profiel (fig. 59 b) en V-vormig profiel (fig. 59 c). In deze gevallen is:

<u>Rechthoekig</u>	<u>Parabolisch</u>	<u>V-vormig</u>
$m = 0$	$m = 1/2$	$m = 1$
$p = 3/2$	$p = 2$	$p = 5/2$
$a_s = h$	$a_s = 2/3 h$	$a_s = 1/2 h$
$H = 3/2 h$	$H = 4/3 h$	$H = 5/4 h$
	$b_0 = \sqrt{8 r_0 h_0}$	$b_0 = 2 h_0 \tan \alpha$
$D = 2/3 \sqrt{2/3 g b_0}$	$D = 1/4 \sqrt{3/2 g b_0} \cdot \sqrt{h_0}$ $= 1/2 \sqrt{3 g r_0}$	$D = 8/25 \sqrt{2/5 g b_0} \cdot h_0$ $= 16/25 \sqrt{2/5 g b_0} \tan \alpha$

Deze groep kan nog uitgebreid worden, b.v. met een overlaat met kubische en een overlaat met lineaire afvoerkromme. De kubische overlaat ($p=3$) moet de vorm van fig. 58a hebben, zodanig dat b evenredig met $h^{3/2}$ toeneemt. De lineaire overlaat ($p=1$) moet de vorm van fig. 58 b hebben, zodanig dat b omgekeerd evenredig met $h^{1/2}$ afneemt, en zodanig dat $a_0 = 2 h_0$ is.

Veelal kan de afvoerkromme van een willekeurige overlaat zeer goed benaderd worden door een machts-formule. Als voorbeeld hiervan behandelen we de overlaat met trapezoidaal profiel (fig. 58 c). Hierbij is $b_s = b_b + \theta h$, waarin $\theta = \tan \alpha_1 + \tan \alpha_2$. Het oppervlak van het dwarsprofiel is dus $A = b_b h + 1/2 \theta h^2$. We krijgen dus

$$a_s = \frac{A}{b_s} = h \frac{1 + 1/2 \theta h / b_b}{1 + \theta h / b_b} \quad H = h \frac{3/2 + 5/4 \theta h / b_b}{1 + \theta h / b_b}$$

Hieruit kan h worden opgelost indien H als gegeven verondersteld wordt:

$$\frac{\theta h}{b_b} = -3/5 + 2/5 \frac{\theta H}{b_b} + \sqrt{9/25 + 8/25 \frac{\theta H}{b_b} + 4/25 \left(\frac{\theta H}{b_b}\right)^2}$$

Verder is

$$Q = \sqrt{g \frac{b_b^5}{\theta^3}} \sqrt{\left(\frac{\theta h}{b_b}\right)^3 \frac{(1 + 1/2 \theta h / b_b)^3}{1 + \theta h / b_b}}$$

Door hierin voor h te substitueren, krijgen we een formule van de vorm

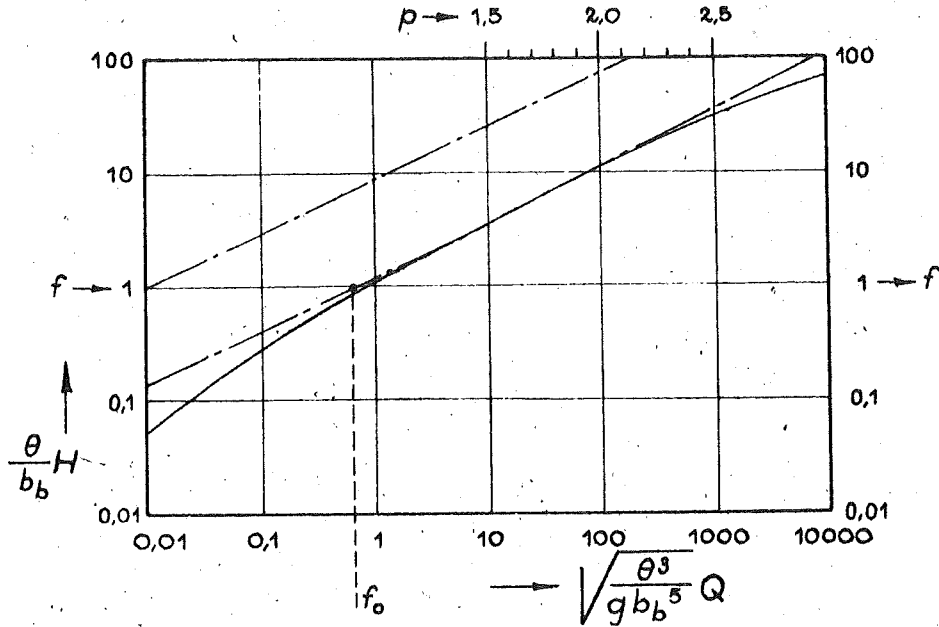
$$Q = \sqrt{g \frac{b_b^5}{\theta^3}} = f\left(\frac{\theta H}{b_b}\right)$$

De functie f is dubbel-logarithmisch uitgezet in bijlage 3. Met behulp van deze grafiek kan voor iedere waarde van H de bijbehorende afvoer gevonden worden.

Willen we in een of andere interval van H een machts-benadering toepassen, dan is deze gemakkelijk met behulp van bijlage 3 te vinden. We bepalen daartoe een rechte lijn die, hetzij rakend, hetzij even snijdend, in het gestelde interval een behoorlijke benadering van de kromme vormt (zie fig. 60).

Uit de helling van deze rechte, volgt dan de exponent p , en uit de waarde f_0 van f behorend bij het snijpunt met de f -as, volgt de doorlating:

$$D = f_0 \sqrt{g} b_b \left(\frac{\theta}{b_b} \right)^{p-3/2}$$



Figuur 60
Afvoerkromme van een trapezoidale
overlaat (zie ook bijlage 3).

Voor kleine waarden van H werkt de trapezoidale overlaat nagenoeg als een rechthoekige, en is dus $p \approx 3/2$. Voor grote waarden van H wordt de afvoerkromme van de V-vormige overlaat benaderd, dus $p \approx 5/2$.

Aanhangsel 6.

6.3. In rekening brengen van extra toe- en afvoeren.

Plaatselijke, zijdelings afvoerende overlaat.

We beschouwen een overlaat, b.v. over de dijk, welks breedte klein is t.o.v. de lengte van de riviervakken, zodat we de afvoer over die overlaat in rekening mogen brengen alsof deze op een plaats van de rivier onttrokken werd.

We beschouwen eerst het geval dat de overlaat gelegen is bij de overgang B tussen twee vakken AB en BC van de rivier. Laat Q_i de afvoer over de overlaat zijn, dan geldt, als de index i betrekking heeft op de bewegingstoestand juist boven, en b op de toestand juist beneden B:

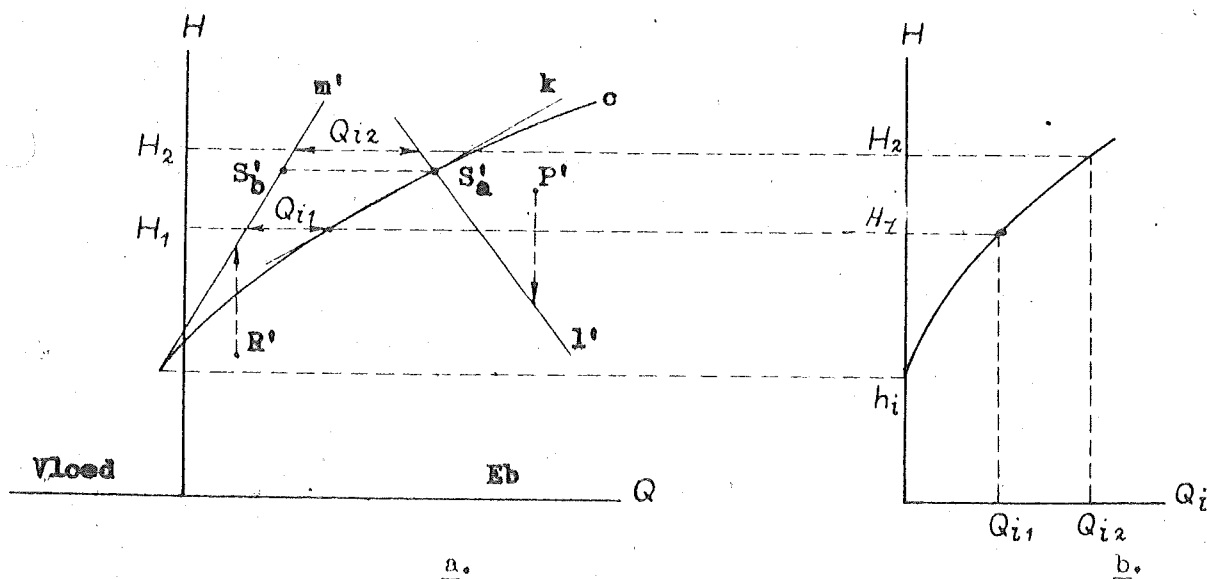
$$Q_a = Q_b + Q_i \quad H_a = H_b (H)$$

De afvoer Q_i bepalen we volgens aanh. 6.2 met

$$Q_i = D_i (H - h_{KC} - h_i)^{3/2},$$

waarin h_i de hoogte van de drempel van de overlaat is en h_{KC} een eventuele correctie voor scheve aanstroming van de overlaat, die evenredig gesteld kan worden met de snelheidshoogte in de rivier: $h_{KC} = \lambda h_k = \lambda V^2 / g$

We stellen ons ten doel de bewegingstoestanden juist boven en beneden B op zeker tijdstip t_1 te bepalen, door de golfpunten te beschouwen die, het ene van A en het andere van C komende, elkaar op dat tijdstip in B ontmoeten. Allereerst bepalen we dan in het HQ -diagram (zie fig. 61a) de constructielijnen S'_a voor de bij deze golfpunten behorende contra-subkarakteristieken. We weten dan dat het beeldpunt voor S'_a de bewegingstoestand ten tijde t_1 juist boven B op l' , en het beeldpunt S'_b voor beneden B op m' moet liggen.



Figuur 61

Constructie voor een overgang tussen twee vakken met een extra afvoer (overlaat).

De lijn m' geeft dus een verband weer tussen Q_b en H . Verder volgt Q_i als functie van H uit de vergelijking van de overlaat (fig. 61 b). Door combinatie dezer gegevens kan een verband tussen $Q_a (= Q_b + Q_i)$ en H geconstrueerd worden; dit wordt voorgesteld door de lijn C in fig. 61a. Waar deze lijn de hulplijn l' snijdt, moet dus het beeldpunt S'_a voor de bovenstroomse bewegingstoestand liggen.

Het is in de praktijk niet nodig de gehele lijn C te construeren. Het zal voldoende zijn voor twee waarden H_1 en H_2 (in de buurt van de vermoedelijke waarden van H) de bijbehorende waarden van Q_i in rekening te brengen, en dan de kromme C te benaderen met zijn koorde K .

Nadat het beeldpunt S'_a gevonden is als snijpunt van k en l' , wordt het beeldpunt S'_b bepaald op m' op gelijke hoogte als S'_a .

De constructie voor de plaatselijke overlaat komt in opzet geheel overeen met de constructie voor een plaatselijke weerstand (zie fig. 24), met dien verstande dat de rollen van H en Q verwisseld zijn.

Plaatselijke komberging.

Laat nu op de overgang B tussen de vakken AB en BC een haven, dode arm of ander bergend element met berging B_i uitmonden. In dat geval gelden weer de vergelijkingen

$$Q_a = Q_b + Q_i, \quad H_a = H_b (=H),$$

doch de zijdelingse afvoer Q_i is nu, in plaats van door de overlaatformule, door de bergingsformule

$$Q_i = B_i \frac{dh_i}{dt}$$

bepaald, waarin h_i de waterstand in de kom is. We stellen voor deze waterstand

$$h_i = H - h_{kc},$$

waarin h_{kc} een correctie is voor Bernoulli- en wrijvings-verliezen. De berging B_i kan eventueel nog een functie van de waterstand h_i zijn.

Bij het uitvoeren der getijberekening worden de bewegingstoestanden bij B bepaald op tijdstippen die over intervallen $2T$ uiteen liggen (vergelijk b.v. het schema van fig. 10 b, waar men zich bij B de extra komberging kan denken; men bepaalt dan achtereenvolgens beeldpunten S_a en S_b , X_a en X_b , K_a en K_b , enz., weergevende de bewegingstoestanden juist boven en beneden de toegang tot de kom). Afgezien van het eerste dezer tijdstippen (waarvoor we ons kunnen behelpen met een schatting van Q_i te maken), zal dus op ieder tijdstip waarop we de bewegingstoestanden bij B moeten bepalen, de afvoer naar de kom op een $2T$ eerder tijdstip bekend zijn; deze afvoer zullen we door Q_i^* voorstellen, en de afvoer op het bereikte tijdstip zelf door Q_i . Laat evenzo H^* , resp. H , de energiehoogte op het $2T$ eerdere tijdstip, resp. het tijdstip zelf voorstellen.

De gemiddelde afvoer in het voorafgegane interval $2T$ zullen we bij benadering op $\frac{1}{2}(Q_i^* + Q_i)$ stellen. Dan is, als we h_{kc} even verwaarlozen,

$$\frac{1}{2}(Q_i^* + Q_i) \cdot 2T = B_i (H - H^*),$$

waarin B_i de gemiddelde waarde van B_i over het interval $2T$ is. We kunnen nu dus voor Q_i de formule

$$Q_i = \frac{B_i}{T} H - \frac{B_i}{T} H^* - Q_i^*$$

afleiden.

Zonodig moet in bovenstaande formule H^* nog verminderd worden met de toename van h_{kc} over het interval 2τ , welke toename door schatting te bepalen zij. Afgezien van deze correctie, geeft fig. 62 het verband tussen Q_i en H weer.

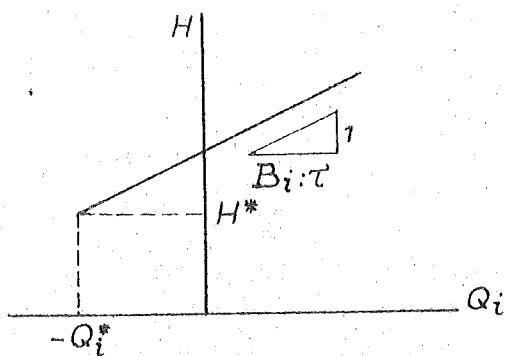


Fig. 62. Afvoerbepaling van een extra komberging.

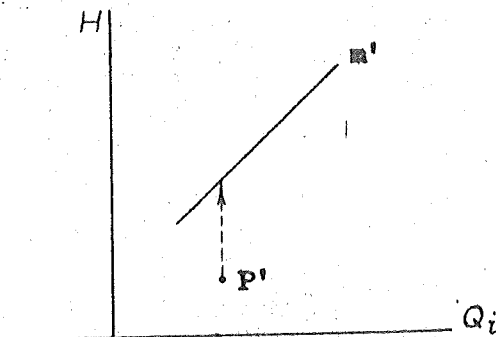


Fig. 63. Afvoerbepaling van een zijkanaal.

De constructies voor de bewegingstoestanden juist boven en beneden B worden uitgevoerd volgens dezelfde opzet als in fig. 61a gegeven is. De hulpgrafiek van fig. 61 b kan daarbij door die van fig. 62 vervangen worden.

Zijkanaal.

Teneinde een meer samenhangend overzicht te geven van de constructies voor extra toe- en afvoeren, bespreken we ook nog het geval dat op de overgang B der vakken AB en BC een zijkanaal uitmondt, waarvan het laatste vak DB moge zijn.

De extra afvoer uit (of toevoer naar) dit zijkanaal op zeker tijdstip vinden we, door het golfpunt te volgen dat uit dat zijkanaal van D af in B aankomt op dat gestelde tijdstip. Voor dit golfpunt kunnen we de constructie voor de contra-subkarakteristiek uitvoeren, zoals aangegeven in fig. 63.

Het zijkanaal kan nu analoog aan de overlaat en de komberging behandeld worden, waarbij fig. 63 in de plaats treedt van fig. 61 b.

Hieruit blijkt, dat de constructie volgens fig. 19 als een variant van die volgens fig. 61 is op te vatten.

Plaatselijke afvoer tussen vakuiteinden.

In het algemeen moet er naar gestreefd worden de vakindeling zodanig te ontwerpen, dat elke plaats waar extra toe- of afvoeren in rekening gebracht moeten worden, een overgang tussen twee vakken vormt. Het is echter niet altijd goed mogelijk dit te bereiken (zie par. 9), en zo kan zich dus het geval voordoen dat er een extra toe- of afvoer is op een plaats gelegen tussen de uiteinden van een vak.

In zulk een geval is er een verscheidenheid van mogelijkheden om dit in rekening te brengen. We zullen hiervan geen uitputtende behandeling trachten te geven, doch volstaan met een enkel voorbeeld.

Veronderstel dat zich op een plaats C van een vak AB een recht aangestroomde overlaat met doorlating D en drempelhoogte h_i bevindt; de plaats C ligt op de afstand l_1 van het bovenstroomse vakuuiteinde A en op de afstand l_2 van het benedenstroomse uiteinde B.

De bewegingstoestanden onmiddellijk boven en beneden C verschillen in de afvoer, doch niet in de energiehogte:

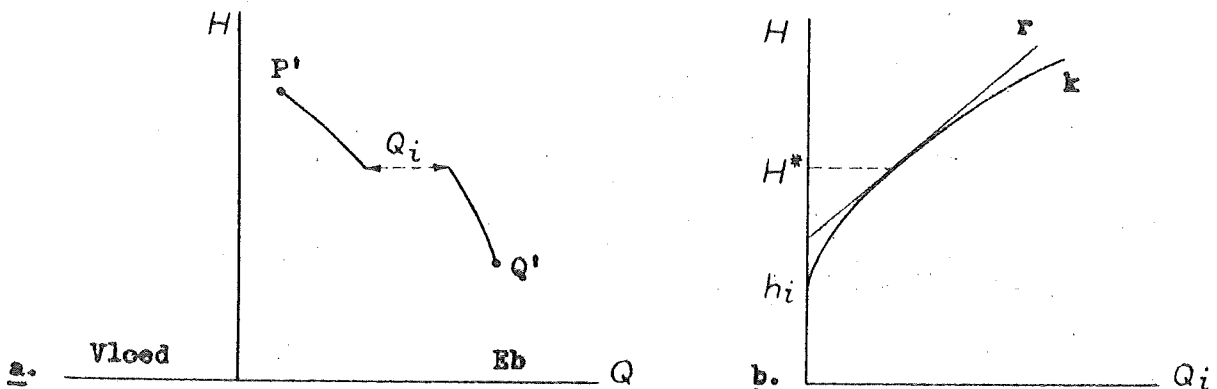
$$Q_a = Q_b + Q_i \qquad H_a = H_b (= H).$$

Hierin is

$$Q_i = D(H - h_i)^{3/2}$$

de afvoer van de overlaat (zie k in fig. 64 b).

We beschouwen nu de invloed van deze extra afvoer op de geschiedenis van een golfpunt dat door AB loopt; we nemen om de gedachten te bepalen, een aflopend golfpunt. Bij het passeren van C, zal dit golfpunt plotseling overgaan van de bewegingstoestand (Q_a, H) naar de bewegingstoestand (Q_b, H) . Dit betekent dat de contra-subkarakteristiek (fig. 64a) een sprong in de Q -richting ter grootte Q_i vertoont. Bij het construeren van de bewegingstoestand in B (beeldpunt Q'), uitgaande van die in A (beeldpunt P'), zal de sprong Q_i dus in rekening gebracht moeten worden.



Figuur 64
Plaatselijke afvoer (overlaat) tussen
de uiteinden van een vak.

We zullen het verloop van H langs de karakteristiek benaderen met een lineaire functie van X . Dan kunnen we dus stellen:

$$H = \frac{l_2}{l_1 + l_2} H_1 + \frac{l_1}{l_1 + l_2} H_2$$

Hierin is dan H_1 als gegeven, en H_2 als te construeren op te vatten.

We maken vervolgens een schatting H^* van H_1 , en benaderen nu de afvoercurve (zie k in fig. 64 b) van de overlaat met zijn raaklijn in het punt met hoogte H^* (zie r in fig. 64 b):

$$Q_i = D(H^* - h_i)^{3/2} + 3/2 D(H^* - h_i)^{1/2} (H - H^*)$$

Hierin substitueren we dan de bovengenoemde benadering voor H , waarna we vinden:

$$Q_i = D(H^* - h_i)^{3/2} + \frac{3}{2} D(H^* - h_i)^{1/2} \frac{l_2}{l_1 + l_2} (H_1 - H^*) + \frac{3}{2} D(H^* - h_i)^{1/2} \frac{l_1}{l_1 + l_2} \cdot (H_2 - H^*).$$

Hierin stelt de eerste term de vermoedelijke waarde van Q_i voor, zoals die uit de schatting H^* volgt, terwijl de volgende termen een nadere correctie op deze schatting tot uitdrukking brengen.

Niet alleen veroorzaakt de extra afvoer een discontinuïteit in de contra-subkarakteristiek, doch ook oefent deze afvoer een indirecte invloed uit op de voortplanting van het golfpunt en op de daarbij in rekening te brengen wrijvingsweerstand. Om dit op eenvoudige wijze zo goed mogelijk in aanmerking te nemen, zullen we de extra afvoer splitsen in een deel dat we veronderstellen dat reeds in A verdwijnt, en een ander deel dat eerst in B verdwijnt. De verdeling voeren we zo uit, dat het zwaartepunt van de twee gedeeltelijke afvoeren in C blijft liggen, met dien verstande dat we alleen de vermoedelijke waarde van Q_i verdelen, doch de correctie daarop geheel in B in rekening brengen.

We brengen dus bij het aflopende golfpunt allereerst op de wijze van fig. 15 het in A veronderstelde, niet van H_2 afhankende debiet

$$Q/A = \frac{l_2}{l_1 + l_2} D(H^* - h_i)^{3/2}$$

in rekening, en daarna op de wijze van fig. 61 het wel van H_2 afhankende debiet

$$Q_{iB} = \frac{l_1}{l_1 + l_2} D(H^* - h_i)^{3/2} + \frac{3}{2} \frac{l_2}{l_1 + l_2} D(H^* - h_i)^{1/2} (H_1 - H^*) + \frac{3}{2} \frac{l_1}{l_1 + l_2} D \cdot (H^* - h_i)^{1/2} (H_2 - H^*).$$

Bij een aflopend golfpunt gaan we op overeenkomstige wijze te werk, met dien verstande dat eerst op de wijze van fig. 15 een debiet in B, en daarna op de wijze van fig. 16 een debiet in A in rekening wordt gebracht.

Overlaat langs een vak.

Tot nu toe behandelden we extra afvoeren die beschouwd mochten worden als geconcentreerd op een plaats aan de rivier. We gullen nu overgaan tot de bespreking van een extra afvoer die over een zo grote lengte van de rivier plaats vindt, dat hij als continu verdeeld langs de rivier in rekening gebracht moet worden. We beperken ons evenwel tot een bespreking van een afvoer over een dijk of kade, welks kruin over de volle lengte van een te beschouwen riviervak AB overal dezelfde hoogte heeft.

De bewegingsvergelijkingen zijn in dit geval

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + b \frac{\partial h}{\partial t} + q_i = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - v \frac{b - b_s}{A} \frac{\partial h}{\partial t} + i_p = 0$$

waarin we voor de zijdelingse afvoer per eenheid van lengte

$$q_i = \frac{D}{l} \gamma \quad \text{waarin} \quad \gamma = \begin{cases} (h-h_i)^{3/2} & \text{als } h \geq h_i \\ 0 & \text{als } h \leq h_i \end{cases}$$

stellen. Hierin is $D = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} g l$ de doorlating van de gehele overlaat. Bij het opstellen van de formule is aangenomen de toestroming in de lengterichting van de rivier, dus in de richting loodrecht op de afvoeras van de overlaat. Verder voeren we

$$i_r = \frac{W}{l} |Q| Q$$

voor het weerstandsverhang in.

Op de bewegingsvergelijkingen passen we de karakteristieke transformatie toe (zie ook p. 57), met het resultaat

$$dH + i_r dx = -Z_0 (dQ + q_i dx) \quad \text{mits } dx = c^+ dt$$

$$dH + i_r dx = Z_0 (dQ + q_i dx) \quad \text{mits } dx = c^- dt$$

in plaats van (19) en (20). Integratie hiervan geeft

$$(81) \quad H_2 - H_1 \pm H_r = \mp \bar{Z}_0 (Q_2 - Q_1 \pm Q_i)$$

(met het bovenste teken voor een afgaande en het onderste teken voor een opgaande karakteristiek) waarin

$$H_r = \int_0^l i_r dx \quad Q_i = \int_0^l q_i dx,$$

beide geïntegreerd langs de karakteristiek, over de lengte van het riviervak. De grootheid H_r stelt het totale weerstandsverval langs het vak, en Q_i de totale afvoer over de overlaat uit het vak voor, zoals die gevonden zouden worden door een waarnemer die met het golfpunt meebeweegt.

Het weerstandsverval H_r brengen we op de in par. 5 besproken wijze in rekening. We stellen dus

$$(82) \quad H_r = W \bar{S},$$

waarin \bar{S} met

$$(83) \quad \bar{S} = \bar{S}_0 + Q_m (Q_2 - Q_1), \quad \text{waarin } \bar{S}_0 = |Q_1| Q_1,$$

nader bepaald is.

Voor de afvoer uit het vak kunnen we

$$(84) \quad Q_i = D \bar{\gamma}$$

afleiden, waarin $\bar{\gamma}$ het gemiddelde van γ is:

Bij het uitwerken van deze integraal zullen we ter vereenvoudiging een lineaire benadering voor h invoeren, dus b.v. in geval we een aflopend golfpunt beschouwen,

$$h = \frac{2-x}{2} h_1 + \frac{x}{2} h_2 ,$$

waarbij h_1 de waterstand bij het betreden, en h_2 die bij het verlaten van het riviervak voorstelt. Nu is dus af te leiden

$$dh = \frac{h_2 - h_1}{2} dx$$

en dus

$$\bar{y} = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} y dh .$$

Dit vinden we evenzo als we een oplopend golfpunt beschouwen. Bij het uitwerken van deze integraal moeten we nader onderscheid maken tussen 4 gevallen:

Geval A.

Is $h_1 < h_i$ en $h_2 < h_i$, dan is $\bar{y} = 0$

Geval B.

Is $h_1 < h_i$ en $h_2 > h_i$, dan kunnen we als volgt integreren:

$$\bar{y} = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_i}^{h_2} (h - h_i)^{3/2} dh = \frac{2}{5} \frac{(h_2 - h_i)^{5/2}}{h_2 - h_1}$$

Geval C.

Is $h_1 > h_i$ en $h_2 < h_i$, dan is

$$\bar{y} = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_i} (h - h_i)^{3/2} dh = \frac{2}{5} \frac{(h_1 - h_i)^{5/2}}{h_1 - h_2}$$

Geval D.

Is $h_1 > h_i$ en $h_2 > h_i$, dan is

$$\bar{y} = \frac{1}{h_2 - h_1} \int_{h_1}^{h_2} (h - h_i)^{3/2} dh = \frac{2}{5} \frac{(h_2 - h_i)^{5/2} (h_1 - h_i)^{5/2}}{h_2 - h_1}$$

Door deze formules is \bar{y} dus bepaald als functie van h_1 en h_2 .

De waterstand h_1 mogen we als gegeven veronderstellen, doch de waterstand h_2 daarentegen als nog te bepalen. We brengen de formules voor \bar{y} in een beter hanteerbare vorm door hiervoor een lineaire benadering in te voeren:

$$\bar{y} \approx y_0 + y_1 (h_2 - h_1) ;$$

hierin zijn y_0 en y_1 coëfficiënten, die we als volgt nader bepalen: Laat h_2^* een geschatte waarde van h_2 zijn, dan zullen we verlangen dat de lineaire formule voor kleine waarden van $h_2 - h_2^*$ de vereiste waarden van \bar{y} zeer dicht benadert. Nu is de fout van de lineaire formule:

$$\Delta \bar{y} = y_0 + y_1 (h_2 - h_1) - \bar{y} (h_1, h_2)$$

Met behulp van de formule van Taylor is hiervoor te schrijven:

$$\Delta \bar{y} = \left[\bar{y}_0 - \bar{y}_{h_2=h_2^*} + \bar{y}_1 (h_2^* - h_1) \right] + \left[\bar{y}_1 - \left(\frac{d\bar{y}}{dh_2} \right)_{h_2=h_2^*} \right] (h_2 - h_2^*) - \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\bar{y}}{dh_2^2} \right)_{h_2=h_2^*} (h_2 - h_2^*)^2 - \dots$$

Hieruit blijkt dat de fout klein van de orde $(h_2 - h_2^*)^2$ gemaakt kan worden, door \bar{y}_0 en \bar{y}_1 zodanig te bepalen dat

$$\bar{y}_1 (h_1, h_2^*) = \left(\frac{d\bar{y}}{dh_2} \right)_{h_2=h_2^*} ; \bar{y}_0 (h_1, h_2^*) = \bar{y}_{h_2=h_2^*} + \bar{y}_1 (h_2^* - h_1).$$

Als we dit uitwerken, kunnen we tot de volgende formules voor \bar{y}_1 en \bar{y}_0 komen:

Geval 1.
Is $h_1 > h_2^*$, dan is

$$\bar{y}_1 = x_1 \sqrt{h_1 - h_i} ; \bar{y}_0 = \gamma_1 \sqrt{h_1 - h_i}^3,$$

waarin x_1 en γ_1 functies zijn van de parameter

$$s_1 = (h_2^* - h_i) : (h_1 - h_i),$$

en wel

$$x_1 = \frac{1}{5} \left[3\sqrt{s_1} + \frac{1}{\sqrt{s_1+1}} + \frac{1}{(s_1+1)^2} \right] ; \gamma_1 = \frac{1}{5} \left[-\sqrt{s_1}^3 + 4\sqrt{s_1} + \frac{4}{\sqrt{s_1+1}} \right]$$

indien $h_2^* > h_i$, en

$$x_1 = \frac{2}{5} \frac{1}{(1-s_1)^2} ; \gamma_1 = \frac{4}{5} \frac{1}{1-s_1}$$

indien $h_2^* < h_i$ is.

Geval 2.
Is $h_1 < h_2^*$, dan is

$$\bar{y}_1 = x_2 \sqrt{h_2^* - h_i} ; \bar{y}_0 = \gamma_2 \sqrt{h_2^* - h_i}^3,$$

waarin x_2 en γ_2 functies zijn van de parameter

$$s_2 = (h_1 - h_i) : (h_2^* - h_i),$$

en wel

$$x_2 = \frac{1}{5} \left[3 + \frac{2s_2}{\sqrt{s_2+1}} - \frac{s_2}{(\sqrt{s_2+1})^2} \right] ; \gamma_2 = \frac{1}{5} \left[-1 + 4s_2 + \frac{4s_2^2}{\sqrt{s_2+1}} \right]$$

indien $h_1 > h_i$, en

$$x_2 = \frac{1}{1-s_2} \left[1 - \frac{2}{5} \frac{1}{1-s_2} \right] ; \gamma_2 = -1 + \frac{4}{5} \frac{1}{1-s_2}$$

indien $h_1 < h_i$ is.

De coëfficiënten x_1 , γ_1 , x_2 en γ_2 zijn grafisch weergegeven in bijlage 4. De schaalverdeling voor $s = s_1$ of $s = s_2$ is zodanig dat de afstand langs de s -schaal overeenkomt met de functie $s : (2-s)$.

We voeren nu tenslotte nog een schatting Δh_k voor het verschil in snelheidshoogte $(v_2^2 - v_1^2) : 2g$ in³ en krijgen dan

$$(85) \quad \bar{y} = \bar{y}_0 + \bar{y}_1 (H_2 - H_1), \text{ waarin } \bar{y}_0 = \bar{y}_0 + \bar{y}_0 \Delta h_k.$$

De formules (82) met (83) en (84) met (85) substitueren we in (81):

$$(H_2 - H_1) \pm W \bar{S}_0 \pm W Q_m (Q_2 - Q_1) = \bar{Z}_0 (Q_2 - Q_1) - \bar{Z}_0 D \bar{y}_0 - \bar{Z}_0 D \bar{y}_1 (H_2 - H_1).$$

Na enig omwerken is hiervoor te schrijven

$$(86) \quad (H_2 - H_1 \pm H_r^\dagger) = \bar{Z}^\dagger (Q_2 - Q_1 \pm Q_i^\dagger),$$

waarin

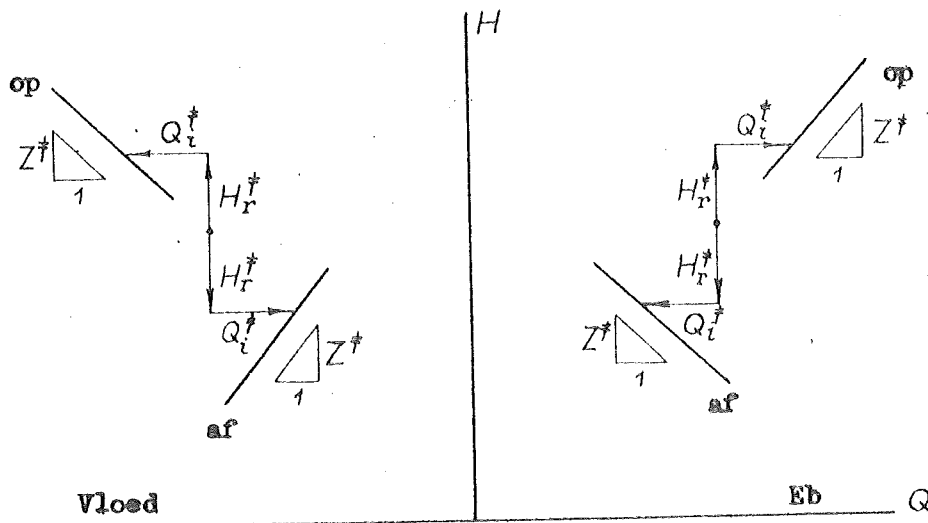
$$H_r^\dagger = \frac{W \bar{S}_0}{1 + \bar{Z}_0 D \bar{y}_1}; \quad Q_i^\dagger = \frac{D \bar{y}_0}{1 + \bar{y}_0 W Q_m}$$

en

$$\bar{Z}^\dagger = \frac{\bar{Z}_0 + W Q_m}{1 + \bar{Z}_0 D \bar{y}_1} = \frac{1 + \bar{y}_0 W Q_m}{\bar{y}_0 + D \bar{y}_1},$$

indien \bar{y}_0 voor $\gamma; \bar{Z}_0$ gesteld wordt.

De constructie volgens (86) verloopt nu als aangegeven in de schema's van fig. 65.



Figuur 65

Constructies voor vakken met continu verdeelde weerstand en zijdelingse afvoer.

De bovenstaande behandeling toont duidelijk een zekere symmetrie tussen de wrijvingsweerstand en een continu verdeelde zijdelingse afvoer.

Aanhangsel 6.

6.4. Watersprongen en watervallen.

Onderscheid tussen vloeiend en schietend water; patronen der subkarakteristieken.

Zoals in par. 3 en 4 werd uiteengezet, zijn er golfpunten die zich voortplanten met de door (15) bepaalde snelheid c^+ , en andere die zich voortplanten met de door (16) bepaalde snelheid c^- . Voor de fysische gevolgen van de voortplanting is het van essentieel belang de stromingsgevallen te onderscheiden naar het teken van c^+ en c^- . We onderscheiden dan drie gevallen:

- a. Het geval $v_c < v$ en dus $c^+ > c^- > 0$.
 - b. Het geval $-v_c < v < v_c$ en dus $c^+ > 0 > c^-$.
 - c. Het geval $v < -v_c$ en dus $0 > c^+ > c^-$.
- Hierbij stel v_c de door

$$v_c = \sqrt{g a_s} = \sqrt{g A : b_s}$$

bepaalde kritische stroomsnelheid voor.

We bespreken eerst het geval b, dus het geval dat de absolute waarde van de stroomsnelheid v beneden de kritische waarde v_c blijft, zodat voor de tekens van c^+ en c^- zal gelden:

$$c^+ > 0, \quad c^- < 0.$$

Dit betekent dat de golfpunten die zich met de snelheid c^+ bewegen, dit doen in de richting van de positieve x-as, en dat de golfpunten die zich met de snelheid c^- bewegen, dit doen in de richting tegengesteld aan die van de positieve x-as. Er zijn dus zowel aflopende als oplopende golfpunten.

Wordt $v > v_c$ (geval a), dan geldt

$$c^+ > c^- > 0$$

Dit betekent dat alle golfpunten zich bewegen in de richting van de positieve x-as, dus in de richting van de stroming. De beide soorten golfpunten onderscheiden zich dan slechts hierin, dat de golfpunten met snelheid c^+ zich sneller voortbewegen dan het water, en de golfpunten met snelheid c^- langzamer.

Wordt $v < -v_c$ (geval c), dan geldt

$$-c^- > -c^+ > 0$$

Dit betekent dat alle golfpunten in de richting van de negatieve x-as lopen, dat is dus evenals in het vorige geval in de richting van de stroming. Weer loopt de ene groep (c^-) sneller, en de andere groep (c^+) langzamer dan het water.

De subkarakteristieken vertonen in de drie gevallen een duidelijk verschillend patroon, zoals fig. 66 laat zien.

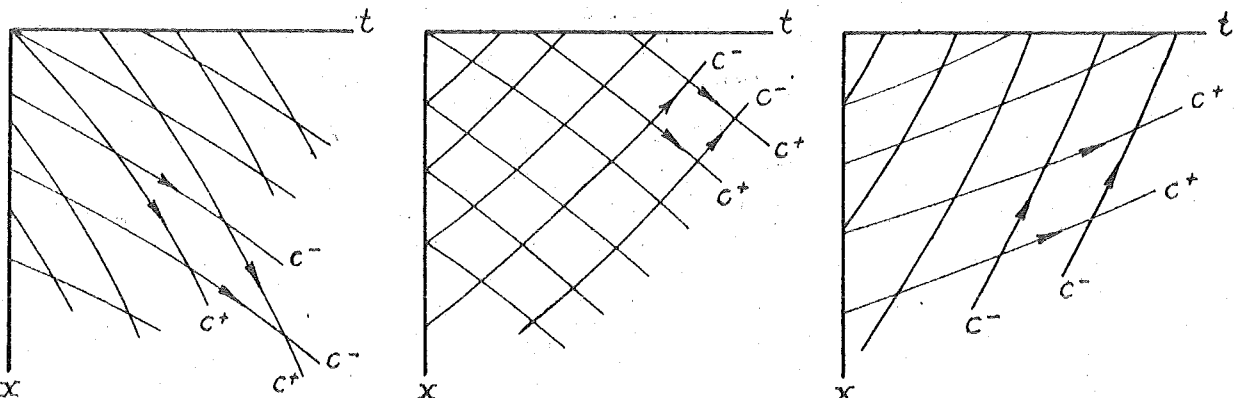


Fig. 66. Patronen van subkarakteristieken; (a) water schiet in positieve richting; (b) water vloeit (c) water schiet in negatieve richting.

Het geval c ($V < V_c$; fig. 66 c) is formeel te herleiden tot het geval a ($V > V_c$; fig. 66a), door de richting van de x-as om te keren. Dit betekent dat we verder kunnen volstaan met de eerste twee gevallen nader te onderzoeken.

In het eerste of derde geval ($|V| > V_c$) spreken we van superkritische of ongevoelige stroming, in het tweede geval ($|V| < V_c$) van subkritische of gevoelige stroming. In het eerste geval wordt ook wel van schietend water gesproken; men kan dan in het andere geval van vloeiend water spreken x).

Grijpen we op een bepaalde plaats op het regime van een subkritische stroming in, dan zullen de aflopende golfpunten de invloed van deze ingreep naar beneden toe, en de oplopende golfpunten naar boven toe voortplanten. De ingreep zal zich dus zowel bovenstrooms als benedenstrooms van de plaats van ingrijpen doen gevoelen.

Grijpen we daarentegen op een bepaalde plaats op het regime van een superkritische stroming in, dan zal de invloed van de ingreep alleen beneden de plaats van ingrijpen kunnen doordringen, omdat er geen golfpunten zijn die de invloed naar boven toe zouden kunnen voortplanten.

Plaatsen we dus een obstakel in een subkritische stroming dan zal zich aan de voorzijde van het obstakel een gebied van opstuwing vormen waarin de waterdeeltjes als gevolg van de opstuwing geleidelijk opzij gedrukt worden, zodat ze invloeiend verlopende banen langs het obstakel stromen. Plaatsen we echter een obstakel in een superkritische stroming, dan schieten de waterdeeltjes als het ware blindelings op het obstakel toe, botsen daar tegen aan, en worden dan met een schok opzij geworpen.

Onderscheid tussen vloeiend en schietend water; tweedimensionale voortplantingspatronen.

De bewegingspatronen van vloeiend en schietend water zijn dus wel essentieel verschillend. Dit wordt nog verder duidelijk indien we de golfvoortplanting in twee dimensies gaan beschouwen. We zullen hiervan, zonder op de theorie in te gaan, een beknopte uiteenzetting geven:

We hebben bij de behandeling in deze nota van de een-dimensionale lange golfvoortplanting (dat is b.v. de voortplanting van lange golven in de lengterichting van een kanaal), gevonden dat, indien er geen extra berging buiten het stroomvoerende bed is, de golfpunten zich bewegen met snelheid $V + \sqrt{ga}$ of met snelheid $V - \sqrt{ga}$, waarin V de stroomsnelheid en a de diepte voorstelt. Dit betekent dat een golfpunt als het ware door de stroming wordt meegesleept met de snelheid V , en dat het zich bovendien nog t.o.v. de stroming voortbeweegt met een snelheid \sqrt{ga} , hetzij met de stroom mee, hetzij daar tegenin.

Beschouwen we nu de voortplanting in een eenparige stroming in twee dimensies, dan zullen alle golfpunten die zich op zeker tijdstip t_0 op een zekere plaats P bevinden, in het tijdvak Δt tussen de tijdstippen t_0 en $t_0 + \Delta t$ worden meegesleept door de stroming over een afstand $V\Delta t$. Daarenboven zullen ze zich in verschillende richtingen t.o.v. de stroom verplaatsen over afstanden ter grootte $\sqrt{ga} \Delta t$. Alle bedoelde golfpunten zullen zich dus ten tijde t_1 verspreid hebben over de omtrek van een cirkel met straal $\sqrt{ga} \Delta t$, welks middelpunt M t.o.v. P over de afstand $V\Delta t$ in de stroomrichting verschoven is (fig. 67a). Zulk een cirkel vormt een golffront van Huygens.

x) De wel eens gebruikte term stromend water wordt als een minder juiste ontlening aan het Duits beschouwd.

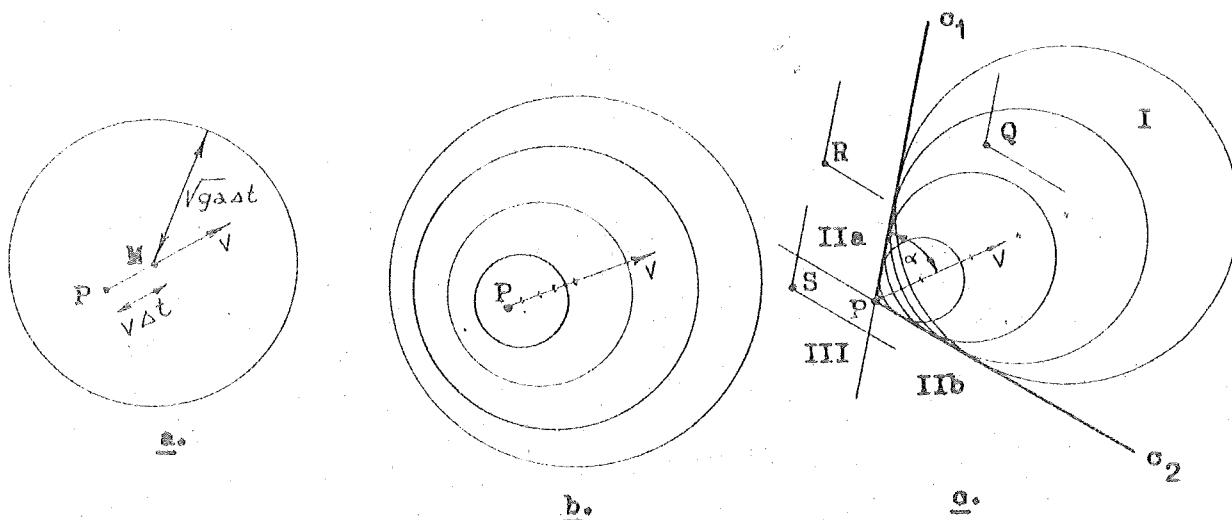


Fig. 67. Tweedimensionale golfvoortplanting; (a) golffront van Huygens; (b) uitbreiding van het golffront bij subkritische stroming; (c) idem bij superkritische stroming.

Met het voortschrijden van de tijd verwijdt zich het golffront, terwijl de golfpunten zich steeds verder van P verwijderen. De wijze waarop dit geschiedt, is evenwel essentieel verschillend naar gelang de stroming subkritisch ($v < \sqrt{g_a}$) dan wel superkritisch ($v > \sqrt{g_a}$) is.

Bij subkritische stroming (fig. 67 b) breidt het golffront zich rondom P in alle richtingen uit. Een van P uitgaande, door de beschouwde golfpunten overgedragen storing, zal zodoende in de gehele omgeving van P doordringen omdat ieder punt in die omgeving te eniger tijd wordt bereikt door het golffront.

Bij superkritische stroming (fig. 67 c) breidt het golffront zich aan de stroomafwaartse zijde van P uit in een gebied (I in fig. 67 c) begrensd door twee kritische lijnen c_1 en c_2 , die met de stroomrichting v elk een hoek α maken die door

$$\cos \alpha = \sqrt{g_a} : v$$

bepaald is. (bij het analoge geval van stroming van een samendrukbaar medium spreekt men in de aerodynamika van lijnen van Mack). Ieder punt in dit gebied (b.v. Q) wordt na enige tijd door het golfpunt bereikt (en later zelfs nog een tweede maal), doch in een of ander punt daarbuiten (b.v. R of S) zal het golffront nooit aankomen. Dit betekent dat een van P uitgaande storing slechts door zal dringen in het gebied dat aan de stroomafwaartse zijde tussen de kritische lijnen gelegen is. We zullen dit gebied (I in fig. 67 c) het afhankelijke gebied van P noemen.

Evenmin als een storing van P uit b.v. in R of S kan komen, omdat R en S buiten het afhankelijke gebied van P liggen, evenmin kan een storing b.v. van Q uit in P komen of van R uit, omdat P buiten het afhankelijke gebied van Q en ook buiten dat van R ligt. We zullen nu de omgeving van P door middel van de kritische lijnen c_1 en c_2 in vier sectoren verdelen, die we als drie gebieden als volgt zullen onderscheiden:

In de sector I liggen alle punten (b.v. Q) die door storingen van P uit bereikt worden. Geen enkele storing vanuit deze sector kan echter in P komen. Deze sector noemden we het afhankelijke gebied.

In de sectoren II en II-b liggen alle punten (b.v. R) die niet door storingsen van P uit bereikt kunnen worden, en van waaruit evenmin storingsen tot in P kunnen doordringen. Deze sectoren vormen wat we het afzijdige gebied van P zullen noemen.

In de sector III liggen alle punten (b.v. S) van waaruit storingsen in P kunnen doordringen. Geen enkele storing kan evenwel van P uit in deze sector doordringen. We zullen deze sector het beheersende gebied van P noemen.

Terwijl in een subkritische stroming alle punten in de omgeving van P zowel invloed uitoefenen op, alsook invloed ondergaan van P, zijn er daarentegen in een superkritische stroming wel punten in de omgeving van P die invloed ondergaan (I), of die invloed uitoefenen (III), of die noch het ene noch het andere doen (II), doch er zijn geen punten die zowel invloed uitoefenen als ondergaan.

Overgang schieten - vloeien.

De vergelijkingen (1) en (2) kunnen herleid worden tot vergelijkingen, waarin alleen h en v voorkomen, door de substituties:

$$\frac{dQ}{dx} = A \frac{dv}{dx} + b_s v \frac{dh}{dx} + v \left(\frac{dA}{dx} \right)_{dh=0}; \quad \frac{dH}{dx} = \frac{dh}{dx} + \frac{v}{g} \frac{dv}{dx}$$

Hiermee vinden we

$$(87) \quad \frac{dv}{dx} + \frac{v}{a_s} \frac{dh}{dx} + \frac{b}{A} \frac{dh}{dt} + kv = 0$$

$$(88) \quad \frac{dh}{dx} + \frac{v}{g} \frac{dv}{dx} + \frac{1}{g} \frac{dv}{dt} - v \frac{b-b_s}{gA} \frac{dh}{dt} + i_p = 0,$$

waarin

$$k = \frac{1}{A} \left(\frac{dA}{dx} \right)_{dh=0} \quad dh = 0$$

een soort trechtervorm-coëfficiënt van de rivier is, en $a_s = A/b_s$ de gemiddelde diepte van het stroomvoerende profiel. De waarde van k kan zowel door bodemhelling, als door convergeren of divergeren van de oevers bepaald zijn.

Lossen we uit (87) en (88) dh/dx op, dan vinden we daarvoor

$$(89) \quad \frac{dh}{dx} = \frac{-\frac{1}{g} \frac{dv}{dt} + v \frac{2b-b_s}{gA} \frac{dh}{dt} - i_p + k \frac{v^2}{g}}{1 - \frac{v^2}{ga_s}}$$

We zien hieruit dat in het algemeen dh/dx oneindig groot zou worden indien de stroming kritisch zou worden, en dus $v^2 = ga_s$. Dit zou inhouden dat bij een overgang van vloeien naar schieten of omgekeerd, de waterspiegel verticaal zou komen te staan. Nog voordat dit gebeurt, zal de waterspiegel al reeds zo steil worden dat de verticale versnellingen een betekende invloed gaan krijgen. Dit houdt in dat (87) en (88), waaruit (89) is afgeleid, niet langer mogen worden toegepast.

De invloed der verticale versnellingen zal voorkomen dat de waterspiegel verticaal komt te staan. De overgang tussen vloeien en schieten wordt dus niet gekenmerkt door een verticale waterspiegel, doch wel door een betrekkelijk zeer steile waterspiegel. Tussen vloeien en schieten bevindt zich dus in het algemeen een kritisch gebied waarin de verticale versnellingen van betekenis zijn.

Alleen in het geval dat de teller van (89) nul of zeer klein wordt, zullen ook in het kritische gebied de verticale versnellingen van ondergeschikt belang zijn.

Afgezien van dit laatste geval (teller van (89) nul of zeer klein, is dus het kritische gebied gekenmerkt door een steile waterspiegel. Dit betekent een verval over een betrekkelijk korte afstand. Het gebied waarin aanmerkelijke verticale versnellingen optreden zal dus, naar we verwachten (zie voor een nadere motivering hierna onder "vorm van de watersprong") betrekkelijk kort zijn. De betrekkelijk plotselinge overgang van een lager naar een hoger niveau zullen we een watersprong, en de overgang naar een lager niveau een waterval noemen.

Stilstaande watersprong (dwarsprofiel willekeurig).

We beschouwen nu eerst het geval van een watersprong in een waterloop, waarvan bodemligging en dwarsprofiel zo geleidelijk variëren met x , dat het dwarsprofiel aan het begin van de sprong en dat aan het eind van de sprong, niet noemenswaardig verschillen. We zullen daarom eenvoudigheidshalve aannemen, dat de waterloop een constant dwarsprofiel heeft en dat de bodem niet helt.

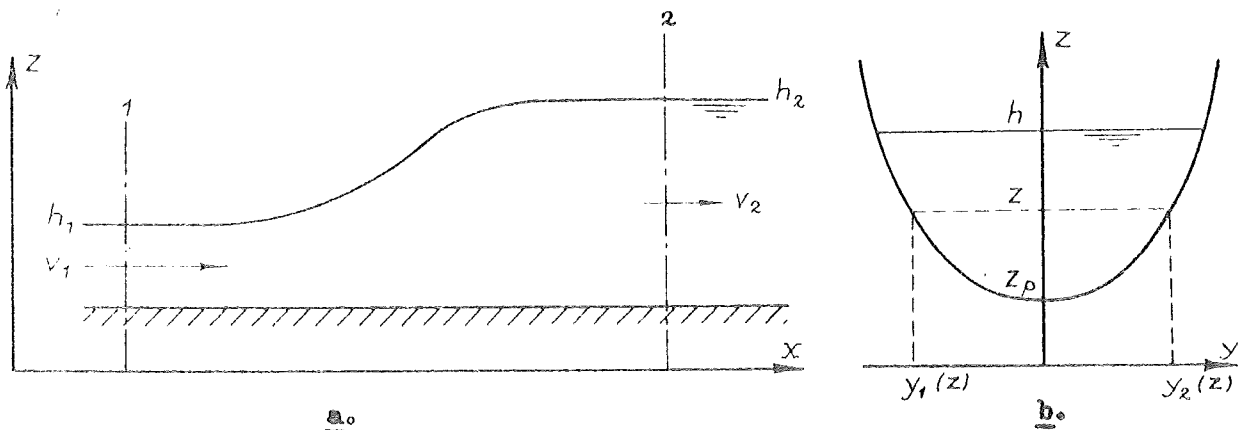


Fig. 68. Stilstaande watersprong; (a) langsprofiel van de sprong; (b) dwarsprofiel van de waterloop.

We nemen twee dwarsprofielen, 1 en 2, het ene voor en het andere achter de sprong, beide zover van de plaats van steilste waterspiegel verwijderd dat de verticale versnellingen in deze profielen nog slechts van ondergeschikt belang zijn. We passen op het gebied tussen de profielen 1 en 2 de wetten van de massa, het stootvermogen, en het arbeidsvermogen toe.

Het transport van massa per eenheid van tijd door profiel 1 bedraagt $\rho Q_1 = \rho A_1 v_1$, en door profiel 2 bedraagt dit $\rho Q_2 = \rho A_2 v_2$. Daar een permanente is aangenomen, zal tussen de profielen 1 en 2 geen toename of afname van massa optreden, waaruit volgt

$$(90) \quad Q_1 = Q_2 = Q$$

Het transport van stootvermogen (impulsie, hoeveelheid van beweging) in de x -richting, per eenheid van tijd, door een dwarsprofiel, bedraagt (zie fig. 68 b):

$$\int_{z_b}^h dz \int_{y_1}^{y_2} \rho v_x^2 dy \approx \rho \beta A v^2 ;$$

hierin is β de verhouding van het gemiddelde van het kwadraat van de snelheid tot het kwadraat van het gemiddelde; meestal verschilt β weinig van 1 en we zullen verder dan ook $\beta = 1$ stellen.

De totale in het dwarsprofiel werkzame drukkracht bedraagt

$\rho g S_1$, waarin

$$y_1 \int_{z_b}^h dz \int (y_2 - y_1) (h - z) dy = \int_{z_b}^h A dz$$

het statische moment van het dwarsprofiel t.o.v. de waterlijn voorstelt.

De resulterende overdracht van stootvermogen in de X -richting, per eenheid van tijd, of kortweg stootoverdracht door het dwarsprofiel, is de som van het transport van stootvermogen en de totale werkzame drukkracht. We stellen de stootoverdracht door $\rho g S$ voor, en dan is

$$S = y_1 + \frac{Av^2}{g} = y_1 + m Q^2,$$

waarin $m = \gamma \cdot gA$ de traagheid per lengte-eenheid is.

De afstand tussen de profielen 1 en 2 is klein, dus is de wrijvingsweerstand langs de bodem, werkende op het water tussen 1 en 2, klein. Het is in het algemeen geoorloofd deze weerstandskracht te verwaarlozen, tenzij er geen of zeer weinig water voor de sprong staat; dit laatste geval zullen we buiten beschouwing laten. Aangezien voorts het stootvermogen tussen 1 en 2 niet verandert omdat we aannamen dat er een permanentie heerst, moet geconcludeerd worden tot:

$$(91) \quad S_1 = S_2.$$

De totale arbeidsoverdracht door een dwarsprofiel, dat is de som van het transport van arbeidsvermogen (kinetisch en potentieel tezamen) per eenheid van tijd en het door de drukkrachten geleverde vermogen, bedraagt

$$P = \rho g H Q \quad \text{waarin} \quad H = h + \frac{v^2}{2g} = h + u Q^2,$$

zoals we in aanh. 6.1 reeds afleidden. We verwaarlozen de arbeid die geleverd wordt door de wrijvingskrachten. Doch wat we niet mogen verwaarlozen (zoals verderop ook blijken zal), is de inwendige energiedissipatie in de sprong, welks waarde per tijdseenheid door P_d zal worden voorgesteld. Daar voorts het arbeidsvermogen tussen 1 en 2 niet verandert, geldt

$$P_1 - P_2 = P_d \quad \text{en dus} \quad P_1 \geq P_2$$

omdat P_d niet negatief kan zijn. In verband met (90) kan hieruit

$$(92) \quad H_1 \geq H_2$$

worden afgeleid. Dit moet gelden onverschillig of $h_1 < h_2$ is (zoals getekend is in fig. 68a), dan wel $h_1 > h_2$, mits de stroomrichting die van profiel 1 naar profiel 2 blijft.

We kunnen nu de watersprong behandelen met de in fig. 69 afgebeelde diagrammen. Hiervan geven fig. 69 a en b de traagheid per lengte-eenheid m en de kritische factor u als functies van de waterstand h weer. Beide grootheden nemen af met rijzende waterstand. Voorts geeft de kromme c in fig. 69 c de energiehogte H als functie van h voor een bepaalde, willekeurige waarde van Q weer; deze functie wordt gevonden door een rechte r door het punt $z = z_b$ op de h -as onder een

helling 1 op 1 schuin omhoog te trekken, vervolgens voor verschillende waarden van h de abscis van de $m-h$ -kromme (fig. 69 a) met Q^2 te vermenigvuldigen en dan dit bedrag horizontaal, rechts van de schuine rechte r uit te zetten. Op overeenkomstige wijze wordt S als functie van h voor dezelfde waarde van Q uitgezet, als aangegeven in fig. 69 d; hiertoe wordt eerst y_1 als functie van h uitgezet (kromme a'), vervolgens voor verschillende waarden van h de abscis van de $h-n$ -kromme (fig. 69 b) met Q^2 vermenigvuldigt en dan dit bedrag l.o.v. a horizontaal naar rechts uitgezet, waardoor we de kromme k vinden.

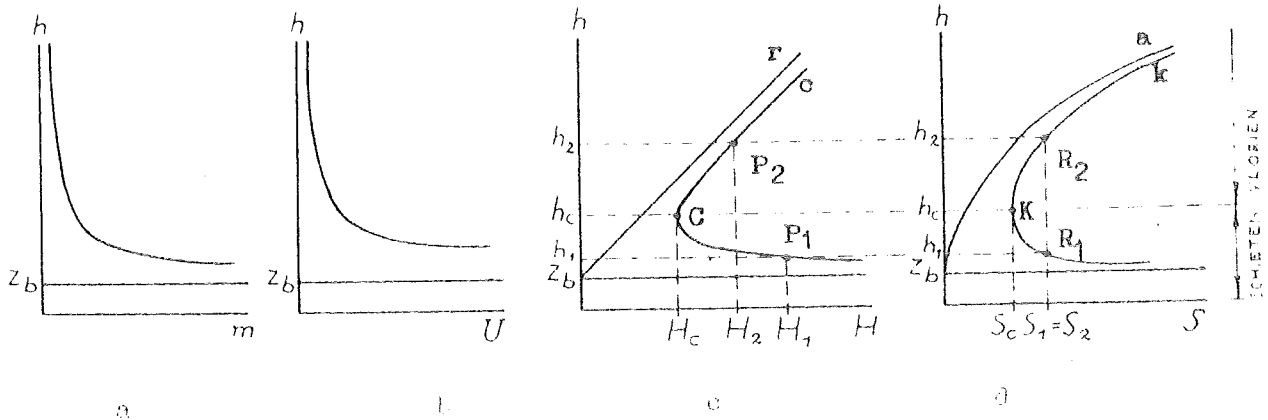


Fig. 69. Diagrammen voor een overgang van schieten naar vloeien in de vorm van een watersprong.

De afgeleiden van de functies $H(h)$ en $S(h)$ zijn

$$\left(\frac{\partial H}{\partial h}\right)_{dQ=0} = 1 - \frac{Q^2 b_s}{gA^3} \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_{dQ=0} = A - \frac{Q b_s}{gA^2}$$

Hieruit volgt allereerst

$$(93) \quad \frac{\partial H}{\partial h} = \frac{1}{A} \frac{\partial S}{\partial h}$$

Verder zien we dat beide functies een extremum bezitten voor die waarde h_c van h waarvoor de grootte $Q_c = AV\sqrt{ga_s} = \sqrt{gA^3 b_s}$ gelijk wordt aan Q^2 . De stroming is dan kritisch, daar dan v^2 gelijk is aan $gA : b_s = ga_s$. De grootte Q_c , die een functie is van h_1 , noemen we de kritische afvoer bij gegeven waterstand; de waarde h_c noemen we de kritische waterstand bij gegeven afvoer.

We moeten nu onderscheid maken tussen profielen waarbij Q_c monotoon met h toeneemt, en profielen waarbij dit niet het geval is. Bij de meeste profielen neemt Q_c vanaf de waarde nul bij $h = z_b$ (zie fig. 63 b) monotoon met h toe, en deze categorie zullen we dan ook eerst bespreken.

Uit het monotoon toenemen van Q_c met h (dus $dQ_c/dh > 0$) volgt dat er niet meer dan een kritische waterstand is voor een gegeven waarde van Q . Boven deze waterstand zijn $\partial H/\partial h$ en $\partial S/\partial h$ beide positief en daar beneden zijn ze negatief. Het extremum (punt C op c of K op k) is dus een minimum. Verder zal bij de waterstand boven de gegeven afvoer Q kleiner zijn dan de bij die waterstand behorende kritische afvoer Q_c , en bij elke waterstand h beneden h_c zal

$Q > Q_c$ zijn. Dit betekent dat we bij waterstanden boven h_c vloeiend, en bij waterstanden beneden h_c schietend water aantreffen.

Laat nu de stroming in een profiel 1 (fig. 58a) superkritisch zijn, dus $h_1 < h_c$. Deze stromingstoestand wordt weergegeven door het beeldpunt R_1 in fig. 69 d. Daar de waarde van S volgens (90) in profiel 2 dezelfde is als in profiel 1, wordt het beeldpunt R_2 voor de stromingstoestand in profiel 2 recht boven R_1 , eveneens op de kromme k gevonden.

De energiehoogten H_1 en H_2 zijn de abcissen van de beeldpunten P_1 en P_2 op kromme o . Nu geldt, met gebruik maken van (93):

$$H_2 - H_1 = \int_{h_1}^{h_2} \frac{dH}{dh} dh = \int_{h_1}^{h_2} \frac{1}{A} \frac{dS}{dh} dh = \int_{h_c}^{h_2} \frac{1}{A} \frac{dS}{dh} dh - \int_{h_c}^{h_1} \frac{1}{A} \frac{dS}{dh} dh.$$

Voorts is wegens (91):

$$S_2 - S_c = S_1 - S_c, \quad \int_{h_c}^{h_2} \frac{dS}{dh} dh = \int_{h_c}^{h_1} \frac{dS}{dh} dh.$$

Nu is verder $A(h) < A_c$ voor $h < h_c$ en $A(h) > A_c$ voor $h > h_c$, waaruit volgt dat, uitgaande van de veronderstelling $h_1 < h_c$ en $h_2 > h_c$,

$$\int_{h_c}^{h_2} \frac{1}{A} \frac{dS}{dh} dh < \frac{1}{A_c} \int_{h_c}^{h_2} \frac{dS}{dh} dh = \frac{1}{A_c} \int_{h_c}^{h_1} \frac{dS}{dh} dh < \int_{h_c}^{h_1} \frac{1}{A} \frac{dS}{dh} dh,$$

zodat $H_2 - H_1 < 0$ moet zijn. Dit is in overeenstemming met (92).

Zouden we $h_1 > h_2$ verondersteld hebben, dus een overgang van vloeiend naar schietend water, dan zouden we $H_2 - H_1 > 0$ gevonden hebben, hetgeen in strijd zou zijn met (92). In een waterloop waarin Q_c monotoon met h toeneemt (dit is meestal het geval) zal dus alleen een overgang van schieten naar vloeien in de vorm van een watersprong mogelijk zijn.

Watersprong en waterval in waterloop zonder bodembrede.

In het geval van een profiel waarbij Q_c in een of ander interval van waterstanden monotoon afneemt (dus $dQ_c/dh < 0$; hiervoor is nodig dat b_s sterk met h toeneemt), kunnen de krommen c en k ook een maximum vertonen, zoals fig. 70 aangeeft. Dan treffen we bij waterstanden boven h_c schietend, en beneden h_c vloeiend water aan. In dit geval vinden we voor een overgang van schieten naar vloeien, waarbij nu $h_1 > h_2$:

$$H_2 - H_1 = \int_{h_1}^{h_c} \frac{1}{A} \frac{dS}{dh} dh - \int_{h_2}^{h_c} \frac{1}{A} \frac{dS}{dh} dh.$$

Uit (91) volgt dan verder in verband met (91):

$$\int_{h_2}^{h_c} \frac{1}{A} \frac{dS}{dh} dh > \frac{1}{A_c} \int_{h_2}^{h_c} \frac{dS}{dh} dh = \frac{1}{A_c} \int_{h_1}^{h_c} \frac{dS}{dh} dh > \int_{h_1}^{h_c} \frac{1}{A} \frac{dS}{dh} dh.$$

Dit betekent dat $H_2 - H_1 < 0$, zodat aan (92) wordt voldaan. Zouden we een overgang van vloeien naar schieten aannemen, dus $h_1 < h_2$, dan zou niet aan (92) voldaan worden. In een waterloop waarin Q_c met h afneemt, kan zich dus een overgang van schieten naar vloeien in de vorm van een waterval voordoen.

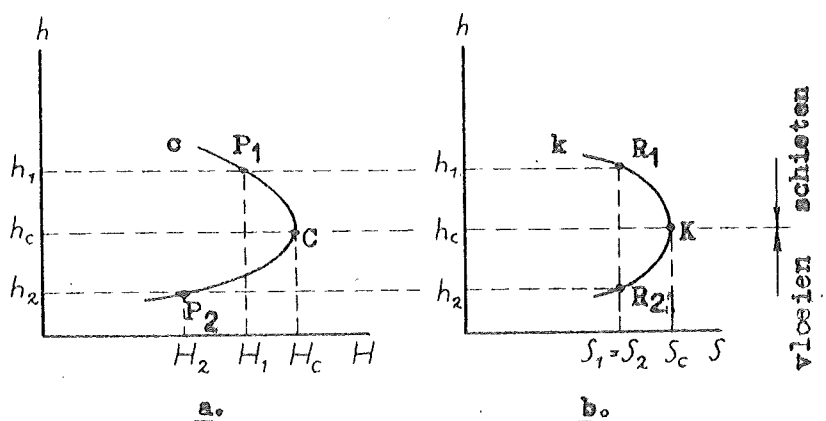


Fig. 70. Diagrammen voor een overgang van schieten naar vloeien in de vorm van een waterval.

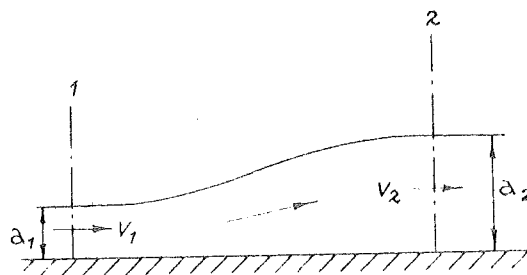
In beide categorieën van waterlopen blijkt dus alleen een overgang van schieten naar vloeien mogelijk te zijn. In het geval $dQ_c/dh > 0$ geschiedt dit in de vorm van een watersprong, in het geval $dQ_c/dh < 0$ in de vorm van een waterval. De onmogelijkheid van een plotselinge overgang van vloeien naar schieten volgt hierbij uit de energiewaarde (92). Zulk een overgang zal alleen mogelijk zijn bij een trede in de bodem, zodat het water bij het afgaan van de trede plotseling op een lager niveau komt te stromen. Daarbij komt dan een zeker bedrag aan energie vrij dat voldoende kan zijn om de superkritische stromingstoestand in het leven te roepen. We zullen hierop aanstonds nog terugkomen.

Stilstaande watersprong (dwarsprofiel rechthoekig).

We zullen de theorie van de watersprong nog nader beschouwen voor het geval van een waterloop met rechthoekig profiel met breedte b . Laat a de diepte van de waterloop zijn, dan is, als we het nulvlak in de bodem leggen:

$$Q = b a v \quad ; \quad H = a + \frac{v^2}{2g} \quad ; \quad S = \frac{1}{2} b a^3 + b a \frac{v^2}{g}$$

Laten a_1 en v_1 de diepte en stroomsnelheid voor, en a_2 en v_2 achter de sprong zijn (zie fig. 71).



Figuur 71
Watersprong in kanaal met rechthoekig dwarsprofiel.

De uitwerking van (90) geeft nu

(94) $v_1 a_1 = v_2 a_2$

Verder geeft ons het uitwerken van (91):

$$v_1^2 a_1 - v_2^2 a_2 = \frac{1}{2} g (a_2^2 - a_1^2)$$

Hierin substitueren we volgens (94) $v_1^2 a_1 = v_1 (v_2 a_2)$ en $v_2^2 a_2 = v_2 (v_1 a_1)$. Na enig herleiden vinden we dan

$$(95) \quad v_1 v_2 = \frac{1}{2} g (a_1 + a_2)$$

Uit (94) en (95) lossen we vervolgens v_1 en v_2 op:

$$v_1 = a_2 \sqrt{g \frac{a_1 + a_2}{2 a_1 a_2}} \quad ; \quad v_2 = a_1 \sqrt{g \frac{a_1 + a_2}{2 a_1 a_2}}$$

Hieruit volgt dan

$$(96) \quad \frac{1}{2} (v_1 + v_2) = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) \sqrt{\frac{g (a_1 + a_2)}{2 a_1 a_2}}$$

en

$$(97) \quad v_1 - v_2 = (a_2 - a_1) \sqrt{\frac{g (a_1 + a_2)}{2 a_1 a_2}}$$

Penslotte leiden we hieruit nog een formule voor het energieverval,

$$(98) \quad H_1 - H_2 = (a_1 - a_2) + \frac{(v_1 - v_2)(v_1 + v_2)}{2g} = \frac{(a_2 - a_1)^3}{4 a_1 a_2}$$

en een formule voor de afvoer per eenheid van breedte,

$$(99) \quad q = a_1 v_1 = a_2 v_2 = \sqrt{\frac{1}{2} g a_1 a_2 (a_1 + a_2)}$$

af. Van enige der afgeleide formules zal verderop nog gebruik worden gemaakt.

Waterval bij bodentrede, gevolgd door watersprong.

Zoals hierboven reeds werd uiteengezet, kan een overgang van vloeien naar schieten alleen verkregen worden door het water t.o.v. de bodem van de waterloop op een hoger energieniveau te brengen, en dit kan praktisch alleen bereikt worden door middel van een plotselinge verlaging van de bodem, djs een bodentrede als voorgesteld in fig. 72.

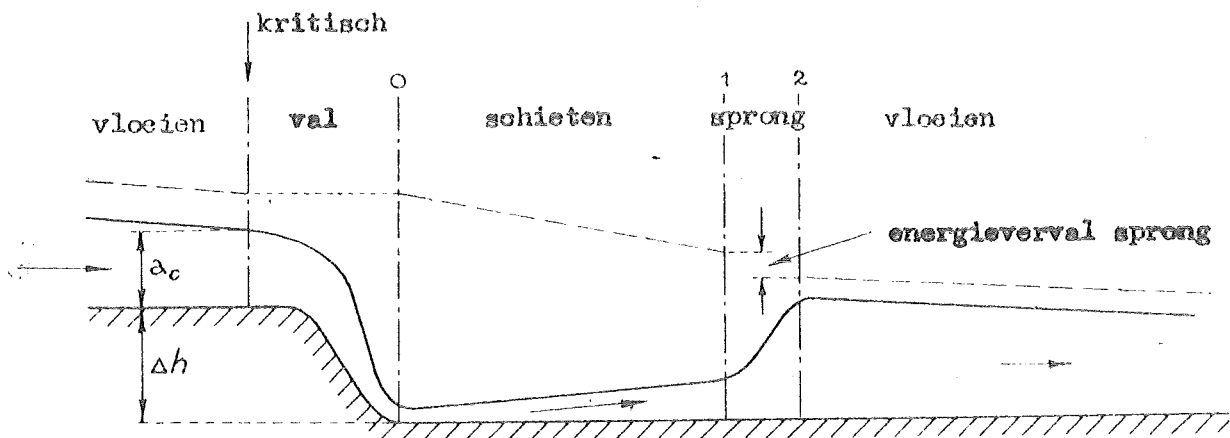


Fig. 72. Waterval bij een bodentrede, gevolgd door een watersprong (schematisch, zonder juiste lengteverhoudingen).

Op het einde van de trede treffen we een volkomen overlaat aan (zie aanh. 6.2). Hier is dus de diepte gelijk aan de kritische diepte a_c , die uit de gegeven afvoer per eenheid van breedte volgt:

$$a_c = \sqrt[3]{q^2/g}$$

De energiehogte boven de trede is $3/2 a_c$, en boven de benedenstroomse bodem (aannemende dat de val zonder energieverliezen verloopt)

$$H_0 = \Delta h + 3/2 a_c$$

Dit is uiteraard meer dan de kritische waarde $3/2 a_c$, zodat bij profiel 0 (zie fig. 72) het water zich schietend beweegt.

Door de grote stroomsnelheden en de geringe diepte is schietend water aan sterke wrijvingsverliezen onderworpen. Daardoor neemt de snelheid af en de diepte toe, en wordt de kritische toestand genaderd. In de kritische stromingstoestand bereikt de energiehogte het minimum dat bij de gegeven afvoer mogelijk is (zie fig. 69 c). De kritische toestand vormt dan ook de uiterste grens van het gebied waarover de superkritische stroming zich kan uitstrekken. Meestal wordt deze grens niet bereikt, doch breekt de superkritische stroming reeds eerder af. Dit kan ten eerste geschieden indien er een volgende bodemtrede is, zodat het water (ditmaal met superkritische i.p.v. kritische snelheid!) van de nieuwe trede afstort in een tweede waterval. Ten tweede kan het ook zijn, dat de superkritische stroming door een watersprong weer overgaat in een subkritische stroming, welke veel minder sterk aan wrijvingsverliezen onderworpen is. Dit geval (dat veel voorkomt ook indien op andere wijze schietend water gevormd wordt, b.v. doordat het water door een spleet naar buiten schiet) is in fig. 72 weergegeven.

De stroming tussen 0 en 1 gehoorzaamt aan dezelfde differentiaalvergelijking als de stroming op de lange overlaat van fig. 55. We kunnen daarom gebruik maken van de oplossing (76), die voor ons doel hier de vormen

$$\frac{g}{C^2} \frac{L_0}{a_c} = \frac{3}{4} - \frac{a_0}{a_c} + \frac{1}{4} \left(\frac{a_0}{a_c} \right)^4 \quad \text{en} \quad \frac{g}{C^2} \frac{L_1}{a_c} = \frac{3}{4} - \frac{a_1}{a_c} + \frac{1}{4} \left(\frac{a_1}{a_c} \right)^4$$

aanneemt, waarin L_0 , resp. L_1 , de afstand voorstelt van profiel 0, resp. 1, tot de plaats waar de superkritische beweging in de kritische zou overgaan.

Met behulp van (76) en (99) is in bijlage 5 een diagram samengesteld waarmee de plaats van de sprong bepaald kan worden indien g (en dus a_c), H_0 , en h_1 of H_2 gegeven zijn. Door middel van de kromme voor H_1/a_c in het diagram vinden we de bij H_0 behorende waarde L_0 . Door middel van de kromme voor H_2/a_c of de kromme voor h_2/a_c vinden we uit H_2 of h_2 de waarde van L_1 ; bij dezelfde abscis vinden we tevens op de krommen voor H_1/a_c en h_1/a_c de waarden van H_1 en h_1 , onmiddellijk voor de sprong. De krommen voor H_1/a_c en h_1/a_c geven de verhanglijnen volgens (76) bij subkritische stroming weer (zoals de krommen voor $(a_1 + \sqrt{1/2g})/a_c$ en a_1/a_c die bij superkritische stroming). Zij zijn te gebruiken om het verhang boven de waterval of beneden de watersprong te bepalen.

Het diagram van bijlage 5 kan ook gebruikt worden om bij gegeven g voor een willekeurige watersprong uit een der grootheden h_1 , H_1 , h_2 en H_2 de andere drie af te leiden.

Ontstaan van een watersprong uit een lange golf; vloedsprong.

Verandert de afvoer in de situatie van fig. 72, dan zal de watersprong een andere plaats moeten krijgen. Dit betekent dat de sprong zich in beweging zet.

Ook op andere wijze kunnen we te maken krijgen met een bewegende watersprong. Deze kan namelijk ontstaan uit het front van een lange golf. We zullen dit duidelijk maken aan de hand van een voorbeeld.

We beschouwen een lopende golf in een primatisch kanaal met rechthoekig dwarsprofiel en horizontale bodem; voor de golf veronderstellen we een toestand van rust (zie fig. 73). We verwaarlozen de weerstand.

De differentiaalvergelijkingen voor een kanaal als bovenbedoeld, brengen we in de vorm

$$(100) \quad a \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0$$

$$(101) \quad g \frac{\partial a}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$$

Hierop passen we de karakteristieke transformatie toe door (100) met $\frac{1}{2} \sqrt{ga}$ en (101) met $\pm \frac{1}{2} v$ te vermenigvuldigen en hen daarna op te tellen. Na enig herleiden vinden we dan

$$(102) \quad \frac{\partial (\sqrt{ga} \pm \frac{1}{2} v)}{\partial t} + (v \pm \sqrt{ga}) \frac{\partial (\sqrt{ga} \pm \frac{1}{2} v)}{\partial x} = 0$$

We voeren nu de twee functies

$$f^+ = \sqrt{ga} + \frac{1}{2} v \quad \text{en} \quad f^- = \sqrt{ga} - \frac{1}{2} v$$

en de twee voortplantingssnelheden

$$c^+ = v + \sqrt{ga} \quad \text{en} \quad c^- = v - \sqrt{ga}$$

in. Hierna halen we (102) uiteen in de twee vergelijkingen

$$\frac{\partial f^+}{\partial t} + c^+ \frac{\partial f^+}{\partial x} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial f^-}{\partial t} + c^- \frac{\partial f^-}{\partial x} = 0$$

die in principe overeenkomen met (17) en (18). Uit deze vergelijkingen leiden we nu

$$(103) \quad df^+ = 0 \quad \text{mits} \quad dx = c^+ dt$$

$$(104) \quad df^- = 0 \quad \text{mits} \quad dx = c^- dt$$

af, op soortgelijke wijze als (19) en (20) uit (17) en (18).

De grootheden f^+ en f^- kunnen herleid worden tot de grootheden F en G uit nota C.S.D. 53-2 en aanh. 4, indien we ons tot kleine variaties van de waterstand beperken. Dan is namelijk

$$f^+ = c_0 + \frac{c_0}{a_0} F \quad \text{en} \quad f^- = c_0 + \frac{c_0}{a_0} G$$

We vatten de waarden van f^+ en f^- ook weer als kenmerkend voor de beide golfcomponenten op. De wijze waarop deze golfcomponenten tezamen de bewegingstoestand, dus en bepalen, wordt dan mathematisch door de formules

$$\sqrt{ga} = \frac{1}{2}(f^+ - f^-)$$

$$\text{en } V = f^+ - f^-$$

weergegeven.

Uit (103) volgt dat in een golfpunt dat met de snelheid c^+ beweegt, de golfcomponent f^+ niet verandert. Evenzo is de golfcomponent f^- constant in een met de snelheid c^- bewegend golfpunt.

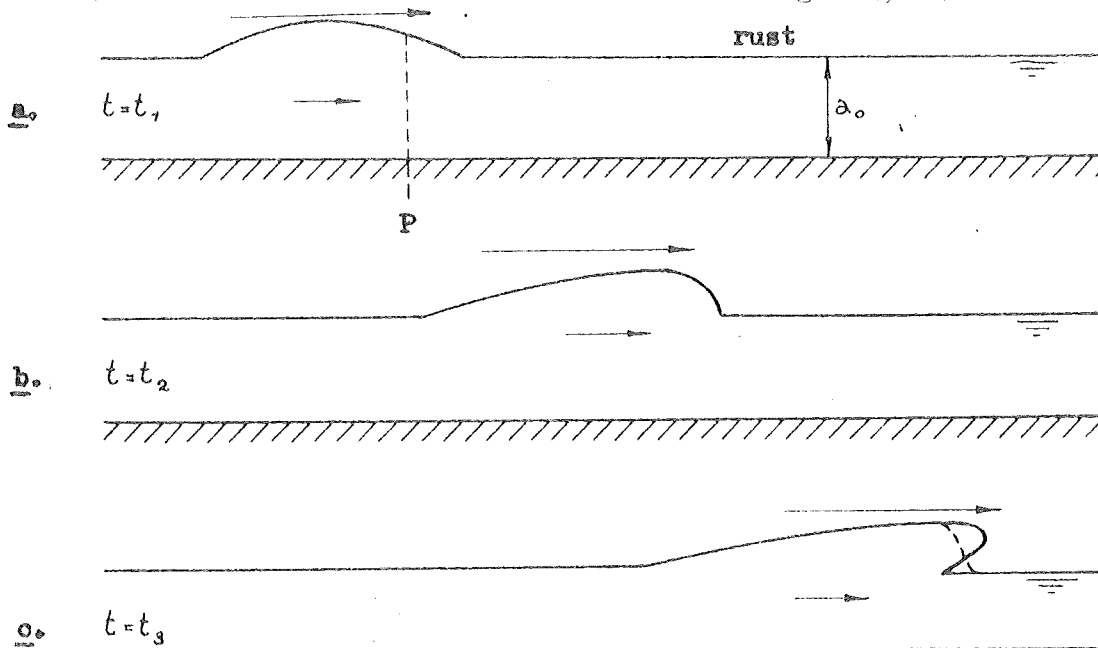


Fig. 73. Lopende golf (translatiegolf) in een kanaal met rechthoekig profiel (hoogteschaal overdreven t.o.v. lengteschaal).

We gaan nu over tot de behandeling van de lopende golf van fig. 73. Rechts van deze golf is het water in rust, dus $V = 0$ en $f^+ = f^- = \sqrt{ga_0}$. Om nu de bewegingstoestand op een plaats P die op zeker tijdstip t_1 door de golf is bereikt (zie fig. 73a) nader te bepalen, merken we op dat het golfpunt dat ten tijde t_1 van rechts in P is gekomen, oorspronkelijk afkomstig is uit het gebied waar rust heerst. Dit golfpunt brengt dus als het ware een waarde $f^- = \sqrt{ga_0}$ mee. Dit doen alle naar links lopende golfpunten, waaruit volgt dat de golfcomponent werkeloos blijft.

Nu is per definitie $f^- = \sqrt{ga} - \frac{1}{2}V$, waarbij a en V de diepte en stroomsnelheid in P ten tijde t_1 voorstellen. We vinden dus

$$\sqrt{ga} - \frac{1}{2}V = \sqrt{ga_0}$$

of

$$(105) \quad V = 2\sqrt{ga} - 2\sqrt{ga_0}.$$

Hieruit volgt verder

$$(106) \quad c^+ = \sqrt{ga} + V = 3\sqrt{ga} - 2\sqrt{ga_0}$$

voor de voortplantingssnelheid van de naar rechts lopende golfpunten.

Uit (105) volgt dat $V > 0$ als $a > a_0$ en $V < 0$ als $a < a_0$. Dus in een positieve golf treden stroomsnelheden in de richting van voortplanting op, en in een negatieve golf in tegengestelde richting (zie ook nota C.B.D. 53-2).

Uit (106) volgt verder dat c^+ groter is naarmate a groter is. Dit betekent dat de hogere delen van de golf zich sneller voortplanten dan de lagere delen.

Dit heeft een vervorming van de golf ten gevolge, waarbij na enige tijd (zie fig. 73 b) het front steiler en de rug flauwer is geworden. Zou deze vervorming onbeperkt doorgaan, dan zou na enige tijd zelfs een voorover hangend front ontstaan (fig. 73 c).

In werkelijkheid zal een golfvorm als die van fig. 73 c niet kunnen ontstaan omdat, voordat het zover komt, het front zo steil wordt dat aanzienlijke verticale versnellingen gaan optreden. Deze hebben als het ware een remmende invloed op de vervorming, zoals hieronder (zie "vorm van de watersprong") nog nader zal worden uiteengezet. De steilheid van het front zal daardoor een zekere waarde niet overschrijden en het front zelf neemt de vorm aan van een voortschrijdende watersprong.

Indien de golf geen toestand van rust voor zich heeft maar golven uit de tegengestelde richting ontmoet, zodat de golfcomponent f^y werkzaam is, blijft toch gelden dat hogere delen van de golf (of juist gezegd: delen met grotere waarde van f^y) lagere delen zullen inhalen, althans zolang de wrijving te verwaarlozen is. Ook dan kan zich dus uit een front een bewegende watersprong vormen. Uit een rug komt evenwel nooit een watersprong voort, noch een waterval, omdat de rug steeds de neiging heeft te verflauwen.

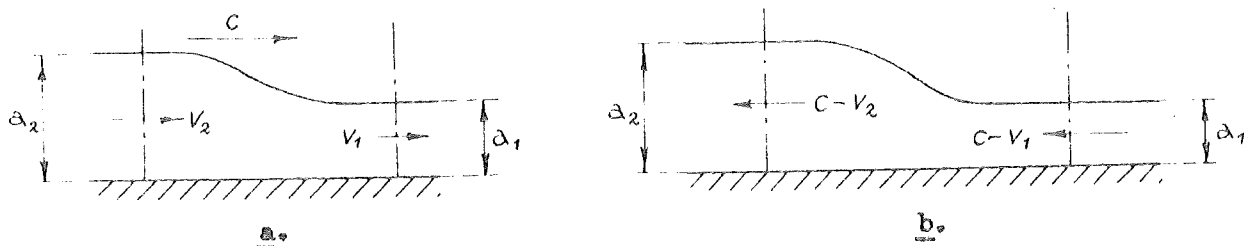
Deze conclusies gelden slechts, voorzover de wrijving te verwaarlozen is. Wordt deze echter in rekening gebracht (zie Lit. 14) dan blijkt bij nadere analyse dat de vorming van een watersprong verijdeld kan worden door de invloed van de wrijving, althans bij niet te grote snelheden ($v < \lambda \sqrt{g a_s}$, waarin λ tussen 1,3 en 2,0). Bij zeer grote snelheden daarentegen kan de wrijving de vorming van een watersprong in de hand gaan werken.

Op verscheidene rivieren (o.a. Seine, Severn, Amazone, Hoogly, Tsién Tang) ontwikkelt zich het front (wassend tij) van de uit zee binnendringende getijgolf tot een watersprong die op de rivier naar boven voortschrijdt. We zullen dit verschijnsel een vloedsprong¹⁾ (Frans: mascaret; Engels: bore) noemen. Dat de vloedsprong zich niet op alle getijrivieren voordoet, b.v. niet op de Nederlandse rivieren, is toe te schrijven aan het zwakkere getij en de daardoor relatief grotere invloed van de wrijving op deze rivieren. Ook de diepte is hierbij van belang, alsmede de vorm van de riviermond (trechtervorm).

Wetten van de bewegende watersprong.

We zullen nu de wetten van de bewegende watersprong nader onderzoeken. We beperken ons daarbij voorlopig tot een kanaal met rechthoekig dwarsprofiel. We verwaarlozen de wrijving langs de bodem in de sprong op grond van het feit dat deze doorgaans slechts een kort gebied beslaat.

¹⁾ Men treft ook wel de naam "vloedbranding" aan, die evenwel minder juist is omdat de sprong niet altijd behoeft te branden (zie verder op onder "vorm van de watersprong"). De naam "springvloed" is uiteraard ook onjuist, al zal de vloedsprong eerder bij springtij dan bij doodtij optreden. De vaak gegeven verklaring, als zou de ebstroom de voet van het getijfront remmen, is onjuist.



Figuur 74
Bewegende watersprong.

We beschouwen een sprong die zich met de snelheid c naar rechts beweegt en daarbij voor zich een lagere waterstand (a_1) heeft dan achter zich (a_2) (zie fig. 74a). We voeren nu een assenstelsel in dat zich met de snelheid c naar rechts beweegt dus met de sprong mee. Ten opzichte van dit assenstelsel vertoont de watersprong zich als stilstaand (fig. 74 b). Het water komt daarbij met snelheid $c - v_1$ van rechts schieten en stroomt met snelheid $c - v_2$ naar links weg. We substitueren nu $c - v_1$ voor v_1 en $c - v_2$ voor v_2 in (96) en (97) en vinden dan

$$(107) \quad c = \frac{1}{2}(v_1 + v_2) + \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \sqrt{\frac{g(a_1 + a_2)}{2a_1 a_2}}$$

en

$$(108) \quad v_2 - v_1 = (a_2 - a_1) \sqrt{\frac{g(a_1 + a_2)}{2a_1 a_2}}$$

Uit (107) en (108) tezamen laat zich afleiden:

$$c = v_1 + a_2 \sqrt{\frac{g(a_1 + a_2)}{2a_1 a_2}} = v_2 + a_1 \sqrt{\frac{g(a_1 + a_2)}{2a_1 a_2}}$$

Hieruit volgt, daar $a_1 < a_2$,

$$c_1^+ < c < c_2^+$$

waarin $c_1^+ = v_1 + \sqrt{g a_1}$ en $c_2^+ = v_2 + \sqrt{g a_2}$. Uit bovenstaande gelijkheid concluderen we dat de sprong de golfpunten die daarvoor met snelheid c_1^+ naar rechts lopen, inhaalt, doch dat omgekeerd de sprong wordt ingehaald door de golfpunten die achter de sprong aan van links komen lopen. Al deze golfpunten worden als het ware in de sprong opgenomen. De golfpunten die met snelheid c_2^+ van rechts komen, ontmoeten de sprong en lopen daarna met een wat andere snelheid c_2^- naar links verder. We kunnen een en ander ook aldus uitdrukken. De stroming voor de sprong is relatief (nl. relatief tot de sprong) superkritisch, en achter de sprong relatief subkritisch.

Is $c > 0$, dan zullen we de sprong voortschrijdend noemen; is $c < 0$, dan zullen we hem terugtrekkend noemen. Is $c = 0$, dan is de sprong stilstaand.

Zolang a_1 en a_2 niet te veel verschillen, kan voor c zeer goed de benaderingsformule

$$(109a) \quad c = \frac{1}{2}(c_1^+ + c_2^+)$$

worden gebruikt.

Heeft de sprong de lage zijde links van de hoge zijde, dan moeten we met

$$(109 \text{ b}) \quad c = 1/2 (c_1 + c_2)$$

werken.

Vervolgens leiden we voor de energishoogten en de afvoeren de formules

$$H_2 - H_1 = a_2 - a_1 + (v_2 - v_1) \frac{v_2 + v_1}{2g}$$

en

$$Q_2 - Q_1 = b \frac{v_1 + v_2}{2} (a_2 - a_1) + b \frac{a_2 + a_1}{2} (v_2 - v_1)$$

af en substitueren daarin (108). We kunnen dan afleiden:

$$Z = \frac{H_2 - H_1}{Q_2 - Q_1} = \frac{1 + \frac{v}{g} \sqrt{\frac{g(a_1 + a_2)}{2a_1 a_2}}}{b \frac{a_1 + a_2}{2} \sqrt{\frac{g(a_1 + a_2)}{a_1 a_2}} + b \frac{v_1 + v_2}{2}}$$

Zolang a_1 en a_2 niet te veel verschillen, kan Z zeer goed met de benaderingsformule

$$(110) \quad Z = 1/2 (Z_{01} + Z_{02}),$$

waarin $Z_{01} = 1/b\sqrt{ga_1}$ en $Z_{02} = 1/b\sqrt{ga_2}$, bepaald worden.

De behandeling van een bewegende watersprong in een waterloop met willekeurig dwarsprofiel wordt, vooral als er bergende bekens buiten het stroomvoerende bed zijn, zeer veel meer gecompliceerd dan wanneer het een rechthoekig profiel betreft. Doch ook in dit meer algemene geval zullen de benaderingsformules (109) en (110) goed bruikbaar zijn zolang de hoogte van de sprong niet te groot wordt.

In rekening brengen van een watersprong (vloedsprong).

Komt in een getij- of andere golf-beweging een watersprong voor, dan zal het in de regel geoorloofd zijn de lengte van de sprong t.o.v. de lengte van het gehele golfverschijnsel te verwaarlozen, en de sprong op te vatten als een scherp localiseerbare overgang (discontinuiteit) van een lager naar een hoger niveau. De plaats van die overgang verandert met de snelheid c .

We brengen de sprong in rekening op soortgelijke wijze als een golfpunt, doch met dit verschil dat we bij een golfpunt steeds te maken hebben met een bewegingstoestand ter plaatse waar het golfpunt zich bevindt, terwijl we bij de sprong moeten rekenen met twee bewegingstoestanden, één aan de lage en één aan de hoge zijde van de sprong. De karakteristiek van de sprong bestaat dus uit één subkarakteristiek die de beweging van de sprong weergeeft, en twee daarbij behorende contra-subkarakteristieken overeenkomende met de lage en de hoge zijde van de sprong.

Ter nadere uitwerking beschouwen we een getij met een vloed-sprong. Laat op zeker tijdstip de vloodsprong op een plaats C (fig. 75) zijn (beeldpunt S in het X -diagram). We stellen ons nu ten doel de vloodsprong te bepalen bij aankomst in het andere uiteinde B van vak BC.

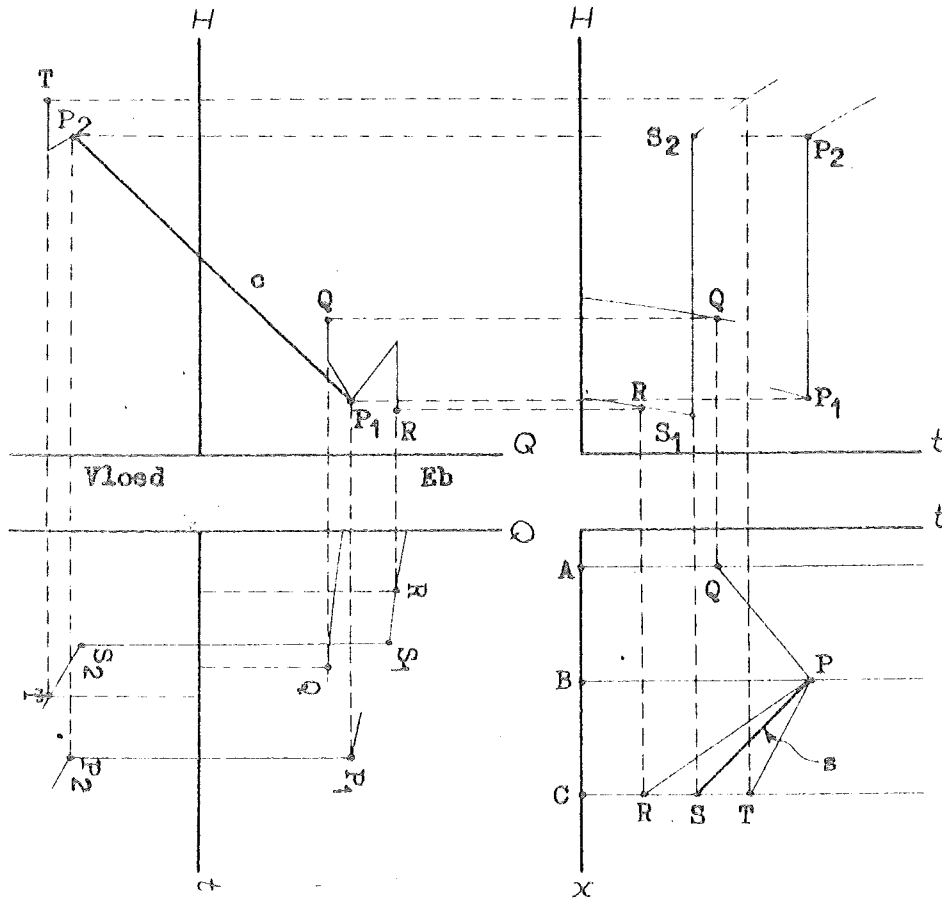


Fig. 75. Constructie voor een bewegende watersprong (vloodsprong).

We kennen de bewegingstoestanden aan beide zijden van de sprong bij vertrek uit C (beeldpunten S_1 en S_2 in Ht - en Qt -diagram), en bepalen daaruit c_1 en c_2 en dan met (109) c in C. Verder maken we een schatting van de bewegingstoestanden bij aankomst in B, en bepalen daaruit c in B. Het gemiddelde van c in C en B nemen we als schatting voor de gemiddelde waarde van c gedurende de reis van de sprong door het vak BC. Door onder de hierdoor bepaalde helling de lijn S als koorde van de subkarakteristiek van de sprong te trekken, vinden we het beeldpunt P in het X -diagram.

Vervolgens vatten we de drie golfpunten in het oog die tegelijk met de sprong in B aankomen. Dit zijn ten eerste een golfpunt dat uit A de sprong tegemoet is komen lopen (subkarakteristiek QP in het X -diagram), ten tweede een golfpunt dat voor de sprong uit heeft gelopen en in B juist door de sprong is ingehaald (RP), en ten derde een golfpunt dat achter de sprong aan heeft gelopen en deze juist in B heeft ingehaald (TP).

De bewegingstoestand aan de lage zijde van de sprong in B (beeldpunt P_1 in het HQ -diagram) wordt geheel bepaald door de beweging voor de sprong, dus door de golfpunten waarvan QP en RP de karakteristieken zijn. Het beeldpunt P_1 in het HQ -diagram wordt dus bepaald met de gebruikelijke constructie voor de ontmoeting van twee golfpunten (fig. 11).

We kennen nu dus de bewegingstoestand aan de lage zijde van de sprong en kunnen dus Z_{01} bepalen. Verder schatten we de bewegingstoestand aan de hoge zijde en daarmee Z_{02} . Vervolgens berekenen we Z met (110) en trekken dan een lijn c door P_1 in het HQ -diagram onder de door Z bepaalde helling. Daar Z de verhouding van $H_2 - H_1$ en $Q_2 - Q_1$ voorstelt, zal het beeldpunt P_2 voor de bewegingstoestand aan de hoge zijde van de sprong op c moeten liggen. Dit beeldpunt wordt nader bepaald met de constructie voor de contra-subkarakteristiek TP_2 van het inhalende golfpunt.

We hebben hier de constructie voor een reeds gevormde watersprong besproken. We zullen nu nog kort ingaan op het ontstaan van een sprong. Indien we vermoeden dat in een getij- of andere golf-beweging een sprong zou kunnen ontstaan, dan vatten we een aantal golfpunten in het front van de golf in het oog (fig. 76) en construeren hiervoor de subkarakteristieken (zonder deze te onderbreken, dus afwijkend van een star schema als dat van fig. 10 b). Gaan naburige subkarakteristieken elkaar snijden, dan betekent dit dat een der golfpunten een ander inhaalt, dus dat een gedeelte van het front verticaal zou komen te staan. Dit gebeurt in werkelijkheid natuurlijk niet, doch wel is het snijden een teken voor het ontstaan van een front.

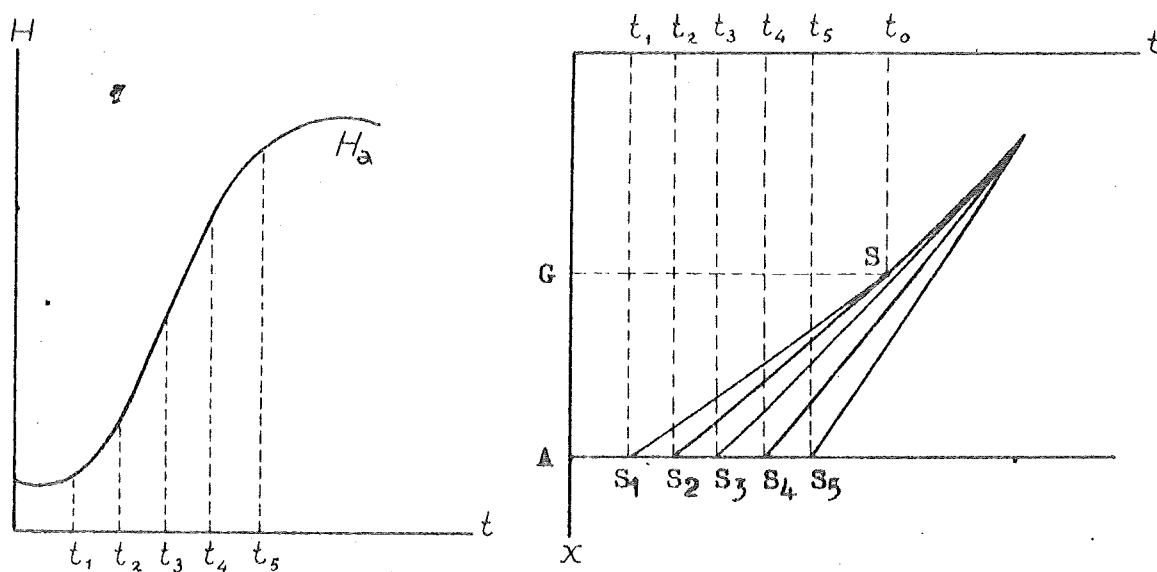


Fig. 76. Ontstaan van een watersprong (vloedsprong).

Het eerste snijpunt van twee naburige subkarakteristieken (S in fig. 76) zullen we opvatten als het geboortepunt van de sprong. We nemen dus aan dat de sprong zich op het tijdstip t_0 op de plaats G vormt en dan ook reeds terstond een zekere hoogte heeft. Geheel juist is deze aanname niet, omdat de sprong in feite al iets eerder moet zijn gevormd, doch de fout die we maken is praktisch van zeer weinig belang omdat de eerste groei van de sprong zeer snel geschiedt.

Na het ontstaan van de sprong wordt verder gerekend als beschreven is aan de hand van fig. 75.

Plotselinge afdamming van een stroom.

Watersprongen kunnen ook hun ontstaan te danken hebben aan een plotselinge ingreep in het regime van een permanentie of lange golf-beweging. We behandelen hiervan twee kenmerkende voorbeelden.

Allereerst beschouwen we de golfbeweging die ontstaat door het plotseling afdammen van een stroom, b.v. door een beweegbare stormkering. Voor het aanbrengen van een dergelijke kering is enige tijd nodig. Verloopt het aanbrengen betrekkelijk langzaam, dan kan de daardoor beïnvloede golfbeweging berekend worden op de wijze als beschreven bij fig. 22, met dien verstande dat de weerstandsfactor van de stuw nu als veranderlijk en wel als functie van de tijd in rekening moet worden gebracht.

Het kan dan zijn dat zich in de golfbeweging na enige tijd een sprong vormt. Dit kan ontdekt worden op de wijze als beschreven bij fig. 76. Daarna wordt dan verder gerekend met gebruik maken van de constructie van fig. 75.

Wordt de afdamming in zeer korte tijd aangebracht, dan ontstaat vrijwel onmiddellijk een watersprong aan de stroomopwaartse zijde (zie fig. 77). Deze sprong loopt tegen de stroom in weg, en vormt de kop van een positieve golf.

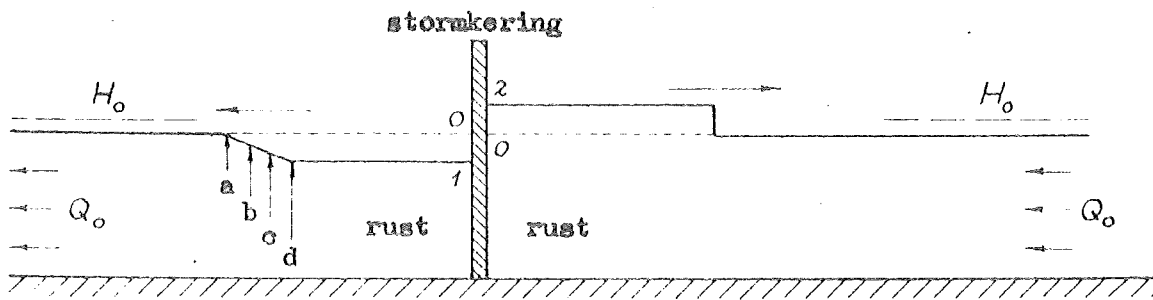


Fig. 77. Plotselinge afdamming van een stroom (stormkering).

Aan de stroomafwaartse zijde ontstaat evenzo een plotselinge zakking van het water, die zich als een negatieve golf voortplant. De kop van deze golf zal echter niet het karakter hebben van een negatieve watersprong, omdat zulk een sprong op grond van energie-overwegingen als onmogelijk moet worden beschouwd. De kop van de negatieve golf zal integendeel snel minder steil worden en het karakter van een lange golf-rug aannemen. Dat de helling van zulk een rug voortdurend flauwer wordt, volgt ook uit de theorie van de translatiegolf; de hoge delen van de rug planten zich sneller voort dan de lage delen.

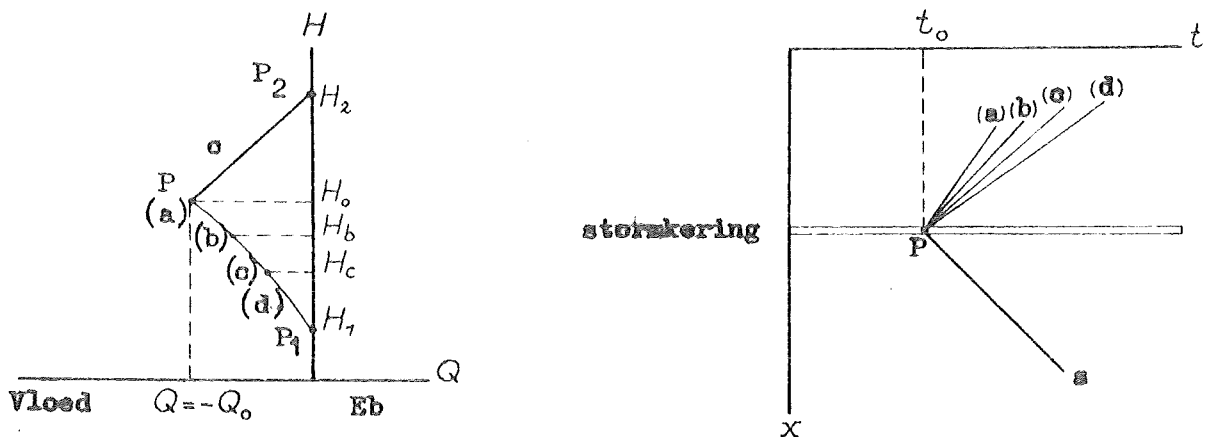


Fig. 78. In rekening brengen van een plotselinge afdamming (sluiten van een stormkering).

Laat op het ogenblik t_0 dat men de stormkering gaat sluiten, een vloedstroom Q_0 doorstaan, en laat de energiehogte H_0 zijn. Het beeldpunt $P (H_0, Q_0)$ in het HQ -diagram geeft dan de bewegings-toestand onmiddellijk voor het sluiten weer.

Onmiddellijk na het sluiten heeft aan de buitenzijde het water een spronggewijze rijzing ondergaan, en is de stroom weggevallen. Om het hierbij behorende beeldpunt P_2 te vinden, maken we een schatting van de te bereiken hoogte H_2 , berekenen de waarde Z_{00} resp. Z_{01} bij H_0 resp. H_1 , bepalen Z volgens (110) als gemiddelde van Z_{00} en Z_{01} , en trekken dan een lijn c door P onder een helling Z . Waar deze lijn de H -as snijdt, bevindt zich het gezochte beeldpunt P_2 .

De rijzing van H_0 tot H_1 stelt de energiesprong van de watersprong voor. De verdere geschiedenis van de watersprong wordt nu met behulp van de constructie van fig. 75 bepaald.

Aan de binnenzijde van de stormkering gaan we enigszins anders te werk, omdat we hier geen sprong doch een lange golf krijgen. Om deze te analyseren, beschouwen we enige golfpunten (a, b, c en d in fig. 77) in de kop van de negatieve golf. Deze golfpunten vertrekken gelijktijdig (zo nemen we eenvoudigheidshalve aan, al is het niet geheel exact) op het tijdstip t_0 vanaf de stormkering. Met deze golfpunten corresponderen dan verschillende energiehogten (H_0, H_b, H_c, H_1). De bij die golfpunten behorende beeldpunten in het HQ -diagram vinden we door de zakking van H_0 naar H_1 op te vatten als opgebouwd uit enige negatieve watersprongen. We verdelen dus de te verwachten zakking globaal in enige ongeveer gelijke delen door de energiehogten H_b en H_c aan te nemen. Daarna bepalen we overeenkomstig (110) een waarde Z voor elk der intervallen $H_0 - H_b$, $H_b - H_c$ en $H_c - H_1$. Vervolgens trekken we door beeldpunt P (komt overeen met golfpunt a) een lijn onder de helling van de eerste Z -waarde, tot het niveau H_b ; we komen dan uit op het beeldpunt behorende bij golfpunt b. Daarna trekken we volgens de tweede Z -waarde de lijn door tot het niveau H_c (beeldpunt van golfpunt c). Ten slotte trekken we de lijn volgens de derde Z -waarde door tot de H -as (beeldpunt P_2 van golfpunt d).

Hierna behandelen we de golfpunten verder geheel als normale golfpunten. Voor elk der golfpunten construeren we dus een eigen subkarakteristiek. Deze subkarakteristieken waaiëren uit vanaf het beeldpunt P in het χX -diagram.

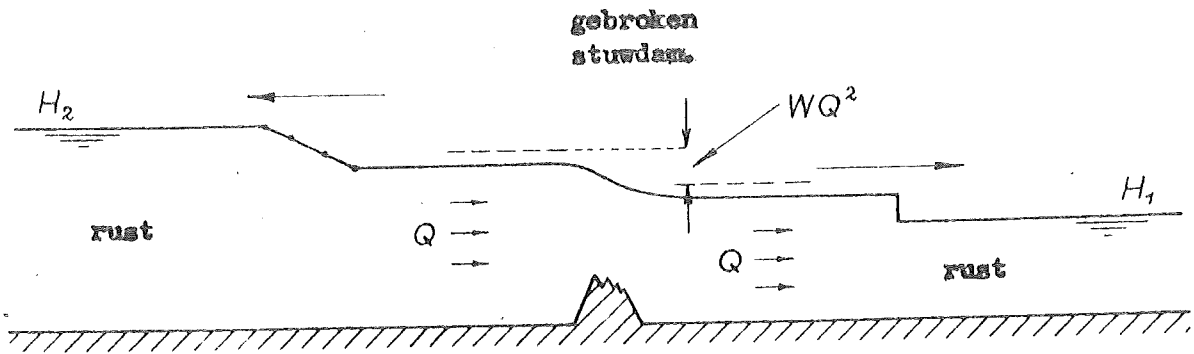
Bij de gesloten stuw zijn de snelheden nul en komen de energiehogten overeen met de waterstanden. Het verschil $H_2 - H_1$ stelt dus het te keren verval voor.

Breuk van een stuwdam.

We beschouwen een stuwdam die een verval $H_2 - H_1$ moet keren, en waarin plotseling breuk optreedt. Er zal dan aan de benedenzijde een plotselinge rijzing optreden die zich als een sprong gaat voortplanten. Aan de bovenzijde zal een plotselinge zakking intreden die zich voortplant als een negatieve golf welke geheel het karakter van een lange golf zal aannemen. We zullen voorts nog aannemen dat de dam niet geheel vernield is, maar dat deze een obstakel blijft vormen dat een verval geeft afhankelijk van de afvoer. We bepalen dit verval b.v. met de formule

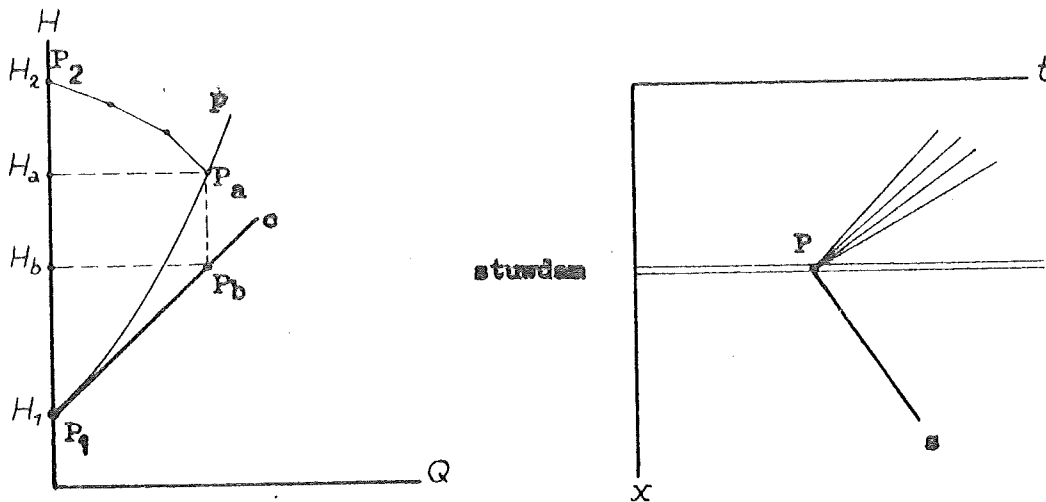
$$\Delta H = WQ^2,$$

waarin W de weerstand van de gebroken stuwdam is.



Figuur 79
Breuk van een stuwdam.

De bewegingstoestanden onmiddellijk voor de breuk worden weer-gegeven door twee beeldpunten P_2 en P_1 op de H -as (fig. 80). Om het beeldpunt P_b voor de bewegingstoestand beneden de stuwdam, onmiddellijk na de breuk, nader te bepalen, voeren we een constructie voor een lijn c door P_1 op de wijze als aangegeven in fig. 78 uit. Het beeldpunt P_b zal op deze lijn moeten liggen.



Figuur 80
In rekening brengen van breuk van een stuwdam.

Vervolgens zetten we boven de lijn c het energieverval bij de gebroken dam uit als functie van Q . Dit geeft de parabool p (deze mag ook op de wijze van fig. 24 door een koorde of raaklijn benaderd worden). Het beeldpunt P_a voor de bewegingstoestand boven de stuw onmiddellijk na de breuk, zal op p moeten liggen.

Daarna construeren we de zakking boven de stuw als een reeks negatieve sprongen, op dezelfde wijze als we dit met de zakking in fig. 78 deden. We vinden dan een gebroken lijn door P_2 in het HQ -diagram. Waar deze de kromme p snijdt, ligt het beeldpunt P_a . Recht hieronder op c ligt het beeldpunt P_b .

De verdere gang van de berekening is analoog aan die bij de stormstuw, met dien verstande dat de golfbewegingen boven en beneden de stuw blijven samenhangen. Dit wordt verder in rekening gebracht op de wijze als bij fig. 22 beschreven.

Vorm van de watersprong.

Bij de behandeling van het ontstaan van een watersprong uit het front van een lange golf, merkten we reeds op dat de verticale versnellingen die in een steil front voorkomen, het verdere steiler worden tegenwerken. Dit kan als volgt aannemelijk worden gemaakt:

In een watersprong krijgt het water een opwaartse beweging. Daarom zullen in de voet van de sprong omhoog gerichte versnellingen optreden. De oorzaak hiervan moet gezocht worden in een verticale drukgradiënt in het water die groter is dan de hydrostatische. Dit is enigszins te vergelijken met een hydrostatische drukverdeling bij een grotere zwaartekrachtsgradiënt g . Nu is de voortplantingssnelheid van een lange golf t.o.v. de stroom \sqrt{ga} , en dit neemt toe als g toeneemt. Het is daarom aannemelijk, dat de grotere drukgradiënt in verband met de verticale versnellingen, een vergroting van de voortplantingssnelheid ten gevolge heeft.

Evenzo is het aannemelijk te maken dat de kruin van het front, waarin omlaag gerichte versnellingen optreden en de drukgradiënt kleiner dan de hydrostatische is, een vermindering in voortplantingssnelheid ondergaat.

De voet van het front wordt dus versneld en de kruin vertraagd en het wordt op deze wijze aannemelijk dat het front bij voldoende steilheid, dus bij voldoende grote verticale versnellingen in evenwicht zal kunnen komen en zich verder onvervormd voortplanten.

De exacte behandeling van de vorm van zulk een in evenwicht verkerend front behoort tot de theorie der z.g.n. korte golven, waarin met de verticale versnellingen wordt rekening gehouden. Ook de theorie van een betrekkelijk eenvoudig geval als de watersprong, is echter reeds zeer gecompliceerd en het is dan ook (voorzover wij weten) nog niet gelukt deze theorie volledig op te bouwen. Het is echter wel mogelijk, aan de hand van meer elementaire gedeelten uit de theorie der korte golven, zich een globaal beeld van de watersprong te vormen.

We mogen de elementaire theorie van de ongeveer sinusvormige korte golven (fig. 81a) als bekend veronderstellen, en volstaan met het geven van enkele formules. Laat \hat{a} de amplitude van de golf zijn en r de radiaallengte, d.w.z. dat $2\pi r$ de golflengte is. Dan is de formule voor de waterspiegel

$$a = a_0 + \hat{a} \cos \frac{x - ct}{r},$$

waarin

$$c = v_0 + \sqrt{gr} \tanh \frac{a_0}{r}$$

de fasesnelheid voorstelt.

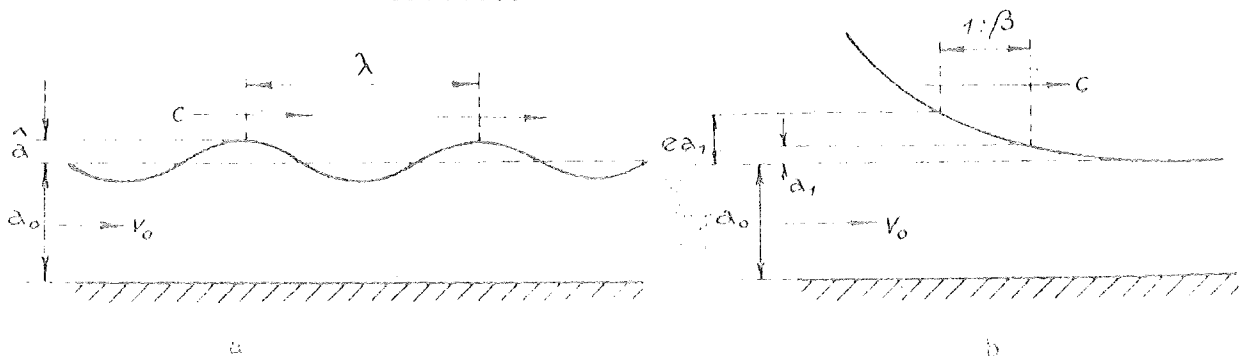


Fig. 81. Korte golven: (a) sinusoidal; (b) exponentieel.

Op overeenkomstige wijze als de sinusgolven, kan ook een ander type golf behandeld worden. Het is eerste benadering exponentieel

van vorm is (fig. 81-b). De formule voor de waterspiegel is daarbij

$$a = a_0 + a_1 \exp \pm \frac{x - ct}{s}$$

waarin

$$c = v_0 + \sqrt{gs} \tan \frac{a_0}{s}$$

de fasesnelheid voorstelt. De nepereringslengte S , die hier de rol van de radiaallengte overneemt, is de afstand waarover de verheffing boven het niveau in het oneindige (a_0) met een c -voud toeneemt of afneemt.

Een dergelijk exponentieel verloop treffen we aan bij een eenlinggolf (onde solitaire) zowel in de voet als in de staart,

De fasesnelheid van een sinusvormige korte golf is kleiner dan de voortplantingssnelheid $v_0 + \sqrt{ga_0}$ van een lange golf. De fasesnelheid van een exponentiele golf is groter. Beide effecten zijn een gevolg van de invloed der verticale versnellingen. Laten we de lengte-afmetingen van een korte golf toenemen in verhouding tot de hoogte-afmetingen (dus r laten toenemen of S laten toenemen), dan nadert men voor beide typen van korte golven in het limietgeval ($r \rightarrow \infty$, resp. $S \rightarrow \infty$) tot de formule voor de lange golven.

De voet van een watersprong zal in eerste benadering een exponentiele vorm hebben. De nepereringslengte S wordt daarbij bepaald door de voorwaarde dat de voet een fasesnelheid moet hebben gelijk aan de voortplantingssnelheid van de sprong. We stellen dus

$$c = v_1 + \sqrt{gs} \tan \frac{a_1}{s} = v_1 + a_2 \sqrt{g} \frac{a_1 + a_2}{2a_1 a_2}$$

Hieruit volgt

$$\frac{s}{a_1} \tan \frac{a_1}{s} = \frac{a_2(a_1 + a_2)}{2a_1^2}$$

Een zeer goede benadering voor S indien de relatieve spronghoogte $2(a_2 - a_1)/(a_2 + a_1)$ niet te groot wordt, is

$$s \approx \frac{a_2 + a_1}{6} \sqrt{\frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1}}$$

Nu geldt voor de helling van de waterspiegel in een exponentiele golf

$$i = - \frac{da}{dx} = \frac{a_1}{s} \exp - \frac{x - ct}{s} = \frac{a - a_0}{s}$$

Door hierin a_2 voor a en s voor te substitueren, vinden we de volgende schatting van de grootste steilheid in de watersprong:

$$i = 6 \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \right)^{3/2}$$

Hieruit blijkt dat de steilheid van het sprongfront meer dan evenredig toeneemt met de relatieve hoogte van de sprong.

Aan de hoge zijde van de sprong zal de waterspiegel bij benadering sinusvormig moeten verlopen. De radiaallengte r wordt daarbij bepaald door de voorwaarde dat de sinusgolf zich met dezelfde fasesnelheid als de sprong moet voortplanten.

We stellen dus

$$c = v_2 + \sqrt{g r \tanh \frac{a_2}{r}} = v_2 + a_1 \sqrt{g \frac{a_1 + a_2}{2 a_1 a_2}}$$

en herleiden dit tot

$$\frac{r}{a_2} \tanh \frac{a_2}{r} = \frac{a_1(a_1 + a_2)}{2 a_2^2}$$

Een goede benaderingsformule is

$$r \approx \frac{a_1 + a_2}{6} \sqrt{\frac{a_2 + a_1}{a_2 - a_1}}$$

We zagen hiervoor (zie (98)) dat in de stilstaande watersprong een energieverval optreedt. Dit betekent dat er door de overgang naar het hogere niveau energie vrij komt, die op een andere wijze zal moeten worden opgenomen. Het vrij komende vermogen bedraagt

$$P = \rho g (H_1 - H_2) Q = \frac{1}{4} \rho g b \sqrt{\frac{g(a_1 + a_2)}{2 a_1 a_2}} (a_2 - a_1)^3$$

Dit vermogen komt ook vrij in de bewegende sprong.

De korte sinusvormige golven hebben een fasesnelheid die afhankelijk is van de radiaallengte. Dit heeft ten gevolge dat de z.g.n. groepsnelheid dezer golven, die bepaald is door

$$C_g = c - \frac{1}{r} \frac{dc}{dr}$$

afwijkt van de fasesnelheid. Nu stelt de groepsnelheid tevens de snelheid van energieoverdracht voor. D.w.z. dat het vermogen dat door de golven wordt overgedragen gelijk is aan

$$P = W C_g$$

waarin W de gemiddelde golfenergie per eenheid van lengte voorstelt. Deze bedraagt

$$w = \frac{1}{2} \rho g b \hat{a}^2$$

Aangezien de groepsnelheid kleiner is dan de fasesnelheid, zullen de sinusgolven achter de sprong t.o.v. een meebewegend assenstelsel, een vermogen

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \rho b \hat{a}^2 (c - c_g) = \frac{1}{2} \rho b \hat{a}^2 \frac{1}{r} \frac{dc}{dr} = \\ &= \frac{1}{4} \rho g b \sqrt{\frac{g(a_1 + a_2)}{2 a_1 a_2}} \frac{a_1 + a_2}{2} \left[1 - \frac{2 a_2 / r}{\sinh 2 a_2 / r} \right] \hat{a}^2 \end{aligned}$$

uit de sprong naar achteren afvoeren.

Aannemende dat alle vermogen dat vrij komt, in de sinusgolven wordt geïnvesteerd, wordt de amplitude dezer golven door

$$\hat{a} = (a_2 - a_1) \frac{2 \frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}}{1 - \frac{2a_2/r}{\sinh 2a_2/r}}$$

bepaald. Hieruit kan de benaderingsformule

$$\hat{a} \approx \frac{1}{\sqrt{3}} (a_2 - a_1) = 0,577 (a_2 - a_1)$$

worden afgeleid.

De steilheid f van de sinusgolven, waaronder we hier zullen verstaan de verhouding van amplitude en radiaallengte r , bedraagt bij benadering

$$f = \frac{\hat{a}}{r} = 2\sqrt{3} \left(\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1} \right)^{3/2} = 3,464 \sqrt{\frac{a_2 - a_1}{a_2 + a_1}} = 0,577 \tau$$

en is derhalve evenredig met de steilheid τ van het exponentiele front.

De watersprong zal volgens de ontwikkelde gedachtengang dus bestaan uit een ongeveer exponentiële voet, die overgaat in een ongeveer sinusvormige nagolving, waarvan de amplitude toeneemt en de golflengte afneemt indien de relatieve hoogte van de sprong toeneemt (zie fig. 82). Elk van de golven achter de sprong zal door inwendige dissipatie van energie iets lager zijn dan zijn voorganger. Op deze wijze verdwijnt de in de sprong vrij gekomen energie geleidelijk.

Vóór de exponentiële voet vormen zich onder invloed van de oppervlaktespanning capillaire rimpels. De fasesnelheid van zulke rimpels bedraagt

$$c = v_0 + \sqrt{\sigma / \rho r'}$$

waarin σ de oppervlaktespanning voorstelt (voor water is $\sigma \approx 0,074 \text{ N/m}$). De radiaallengte r' der rimpels stelt zich weer zodanig in dat de fasesnelheid gelijk wordt aan de voortplantingssnelheid van de sprong, d.w.z. dat

$$r' = \frac{\sigma}{\rho g} \frac{2a_1}{a_1 + a_2}$$

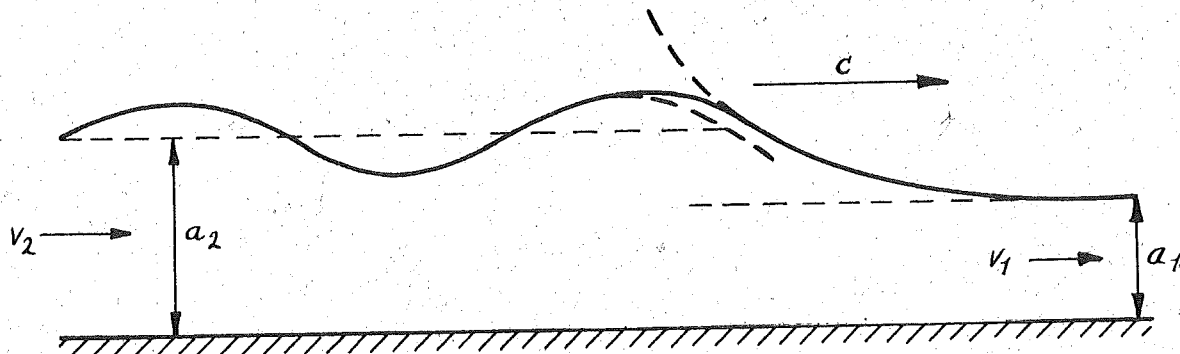
De groepsnelheid van deze rimpels is groter dan de fasesnelheid, en daarom voeren zij een vermogen

$$P = \frac{1}{4} \sigma b \sqrt{\frac{g(a_1 + a_2)}{2a_1 a_2}} \frac{a_1 + a_2}{2} \left(\frac{\hat{a}'}{r'} \right)^2$$

uit de sprong naar voren af; hierin is \hat{a}' de amplitude der rimpels.

¹⁾ Onder de steilheid wordt veelal ook wel verstaan de verhouding van de golfhogte $\frac{1}{2} 2\hat{a}$ tot de golflengte ($= 2\pi r'$). De grootste helling van de waterspiegel is evenwel gelijk aan wat hier als steilheid f is ingevoerd.

Het vermogen dat door de rimpels wordt overgedragen is alleen van betekenis bij zeer geringe waterdiepten. Voor vloedspongen in de natuur is dit vermogen te verwaarlozen.



Figuur 82
Watersprong (vloedspong) met nagolwing.

Bij de voorgaande uiteenzettingen is het stromingsbeeld in de watersprong vanuit klassiek oogpunt beschouwd als een stromingsbeeld dat geheel gedetermineerd is. Dit is echter niet juist, omdat de stroming in de sprong, beschouwd ten opzichte van een meebewegend assenstelsel, vertraagd is. Het klassieke stromingsbeeld van een vertraagde stroming is echter, zoals we reeds in aanh. 6.1 vermeldden, niet stabiel. Er zullen dus onregelmatige wervelende bewegingen ontstaan en als gevolg daarvan vertragsverliezen. Daardoor zal minder energie vrij komen voor de vorming van de nagolwing dan we hiervoor hebben aangenomen.

Naarmate de sprong relatief hoger is, zal het sprongfront, zoals we hiervoor zagen, steiler zijn, en de lengte daarvan kleiner. De vertragsverliezen zullen daardoor meer volledig zijn, d.w.z. een groter gedeelte van de maximaal ter beschikking komende energie verslinden. Bij een verhouding van tot van ongeveer 1,7 of groter, gaat praktisch alle in de sprong ter beschikking komende energie aan vertragsverliezen verloren. Er ontstaat dan geen merkbare nagolwing meer.

Voorzover er dan temidden van de onregelmatige, turbulente beweging in de sprong van een regelmatig stromingspatroon sprake kan zijn, vertoont dit patroon boven het toeschietende water een circulatie. Deze wordt dekneer genoemd (zie fig. 83). Het wateroppervlak boven de dekneer is zeer onrustig (branding).

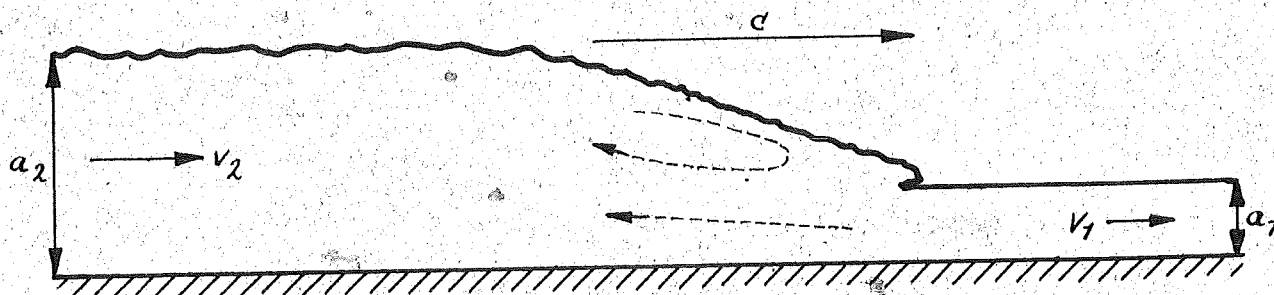


Fig. 83. Watersprong (vloedspong) met dekneer. De gestippelde pijlen geven de waterbeweging t.o.v. een met de sprong meebewegend assenstelsel aan.

Tussen het type watersprong met nagolwing en het type met dekneer bestaat geen scherpe overgang. Beide typen kunnen worden waar-

genomen, zowel als stilstaande sprong als ook als bewegende sprong. Zo is o.a. op de Severn een weinig turbulente vloed-sprong met goed ontwikkelde nagolwing waargenomen, en op de T sien Tang een vloed-sprong met zwakke nagolwing en sterke dekneer. Er is geen bezwaar tegen, dit laatste type vloed-sprong met de naam vloedbranding aan te duiden.

Bij de beschouwing van het stootvermogen in de watersprong is uitgegaan van de veronderstelling dat de wrijvingskracht die langs de bodem werkt, van ondergeschikt belang is. Het is echter niet meer geoorloofd dit te veronderstellen indien de waterdiepte a_1 voor de sprong relatief klein is. De afgeleide formules, zoals (107), mogen dan derhalve niet meer worden toegepast. Dit mag a fortiori niet bij een sprong die een droog kanaal inloopt (hiervoor zou (107) $C = \infty$ geven, hetgeen natuurlijk fysisch onmogelijk is). In dat geval kan de sprong alleen een constant profiel aannemen onder medewerking van de wrijvingskrachten.

Aanhangsel 7.

Numerieke integratie langs karakteristieken.

Bij de uitwerking van de karakteristieke integratie in dit rapport, is er van uitgegaan dat zoveel mogelijk grafisch wordt gewerkt. In principe is natuurlijk deze grafische methode op geheel analoge wijze numeriek uit te voeren. Doch indien men numeriek wil werken, is dit niet de meest doelmatige methode.

In dit aanhangsel geven wij daarom een variant van de grafische methode, die geheel numeriek kan worden uitgevoerd.

Looptijden.

We werken, evenals bij de grafische methode, met een vaste indeling van de rivier in vakken, en van de tijd in intervallen (zie fig. 84).

In plaats van de voortplantingssnelheden C^+ en C^- , zullen we de looptijden τ^+ en τ^- invoeren. Deze zijn als volgt gedefinieerd: De looptijd τ^+ , resp. τ^- , door een riviervak ter lengte l , van een aflopend, resp. oplopend golfpunt, is:

$$\tau^+ = l/c^+ \quad ; \quad \tau^- = l/(-c^-).$$

Uit (15) en (16) volgt:

$$\tau^\pm = \frac{\sqrt{BM} \sqrt{1 + \frac{b-b_s}{b_s} \epsilon} \mp 2BUQ}{1 - \epsilon}.$$

Bij benadering is

$$(111) \quad \tau^\pm = \tau_0 \mp \sigma Q,$$

waarin

$$\tau_0 = \sqrt{BM} = l\sqrt{bm} = l\sqrt{b/gA} \text{ en } \sigma = 2BU$$

een gegeven functie van de waterstand h is, evenals B en U . De "steek" van de tijdsindeling in intervallen, τ_m , moet een middelwaarde in het variatieinterval van τ_0 zijn. Dit moet gelden voor alle vakken, d.w.z. dat de vakken ongeveer dezelfde gemiddelde looptijd hebben. De afwijking tussen de looptijd τ^\pm of τ^- en de tijdssteek τ_m bedraagt

$$(112) \quad \Delta \tau^\pm = \tau^\pm - \tau_m = \Delta \tau_0 \mp \sigma Q,$$

waarin $\Delta \tau_0 = \tau_0 - \tau_m$

een gegeven functie van h is, evenals τ_0 .

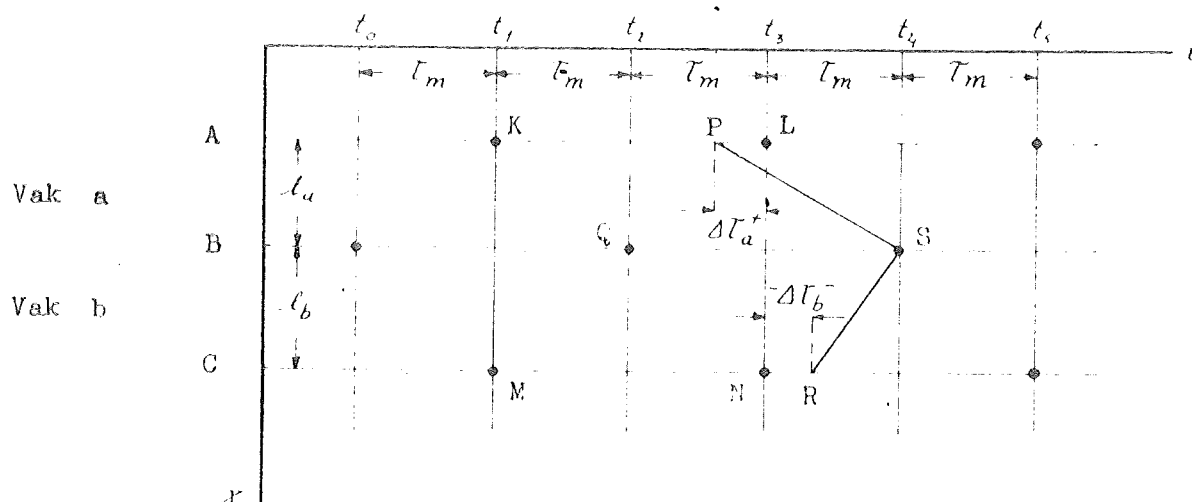


Fig. 84.

We stellen ons ten doel op de plaatsen A, B, C enz., die gelegen zijn op de overgangen der vakken, energiehoogte H en afvoer Q te bepalen op tijdstippen t_0, t_1, t_2 enz. met intervallen van $2\tau_m$. Op de "even" plaatsen B, D enz. (zie fig. 10 b en p. 73, midden) worden dit de tijdstippen t_0, t_2 enz., en op de "oneven" plaatsen A, C enz. worden dit de tijdstippen t_1, t_3 enz.

We beschouwen nu een aflopend en een oplopend golfpunt die elkaar op zeker tijdstip, b.v. t_4 , in zekere plaats, b.v. B ontmoeten (beeldpunt S in fig. 84). Het beeldpunt P correspondeert met het vertrek van het aflopende golfpunt uit A, en R met het vertrek van het oplopende golfpunt uit C.

We stellen voor de gemiddelde energiehoogte en afvoer in vak a, resp. vak b, gedurende de reis van het aflopende, resp. oplopende golfpunt door dat vak:

$$(113) \quad H_a = \frac{1}{2} (H_P + H_S); \quad H_b = \frac{1}{2} (H_R + H_S); \quad Q_a = \frac{1}{2} (Q_P + Q_S); \quad Q_b = \frac{1}{2} (Q_R + Q_S).$$

In eerste benadering bepalen we H_S en Q_S met:

$$(114) \quad H_S = H_P + H_R - H_Q; \quad Q_S = Q_P + Q_R - Q_Q.$$

Hiermee zijn dus volgens (113) H_a enz. in eerste benadering te berekenen. Beter benaderingen kunnen zonodig later berekend worden.

De grootheden $\Delta\tau_0$ en δ (zie (111) en (112) in vak a of b, die eigenlijk functies van h zijn, bepalen we met verwaarlozen van de snelheidshoogte $h_v = v^2/2g = UQ^2$, door $h=H$ te stellen en voor H dan de betreffende uit (113) volgende gemiddelde waarden te nemen. Verder voeren we de gemiddelden volgens (113) voor Q in:

$$(115) \quad \Delta\tau_a^+ = \Delta\tau_a(H_a) - \delta_a(H_a) \cdot Q_a$$

$$(116) \quad \Delta\tau_b^- = \Delta\tau_b(H_b) + \delta_b(H_b) \cdot Q_b$$

Het zal meestal ook nog wel geoorloofd zijn σ_a en σ_b elk met een constante te benaderen.

Bewegingstoestanden.

Voor een aflopende karakteristiek geldt (19), die met (26) en de formule bovenaan p. 13 de vorm

$$(117) \quad dH + w S dx = -Z_0 dQ$$

aanneemt; hierin is S voor het product $|Q|Q$ gesteld (zie bovenaan p. 31). We integreren (117) langs de subkarakteristiek PS:

$$(118) \quad H_s - H_p + \int_p^s w S dx = -Z_a (Q_s - Q_p).$$

Hierin is Z_a een door

$$Z = \frac{1}{l_a} \int_p^s Z_0 \frac{dQ}{dx} dx$$

bepaalde middelwaarde van Z_0 in het vak a. We zullen Z_a bij wijze van benadering bepalen volgens

$$(119) \quad Z_a = Z_0(H_a),$$

waarbij we dus Z_a , dat is de grootte Z_0 in het vak a, als functie van de gemiddelde waarde van h beschouwen, daarna met $h=H$ benaderen (dus weer de snelheidshoogte h_V verwaarlozen) en dan voor H het uit (113) volgende gemiddelde substitueren.

Het weerstandsverval dat het aflopende golfpunt in vak a ondervindt,

$$H_{r,a} = \int_p^s w S dx,$$

benaderen we als volgt: We verwaarlozen in de bepaling van $w(h)$ weer de snelheidshoogte h_V en substitueren H voor h , en vervolgens het gemiddelde H_a volgens (113) voor H . We krijgen dan

$$(120) \quad H_{r,a} = W_a \bar{S}_a \quad \text{waarin } W_a = l_a w(H_a) \quad \text{en } \bar{S}_a = \frac{1}{l_a} \int_p^s S dx.$$

De grootte \bar{S} bepalen we volgens p. 31:

$$\bar{S}_a = \frac{1}{3} \frac{|Q_s|^3 - |Q_p|^3}{Q_s - Q_p}.$$

(zie (30)). Dit geeft, indien Q_p en Q_s hetzelfde teken hebben (zie (31)):

$$(121) \quad \bar{s}_a = \frac{1}{3} \frac{Q_p}{|Q_p|} (Q_p^2 + Q_p Q_s + Q_s^2)$$

$$= \frac{1}{3} |Q_p| Q_p + \frac{1}{3} |Q_p| Q_s + \frac{1}{3} |Q_s| Q_s [Q_s > Q_p].$$

Ontmoet het aflopende golfpunt onderweg in vak a een kentering, dan hebben Q_p en Q_s verschillend teken en dan is (zie (32)):

$$\bar{s}_a = \frac{1}{3} \frac{Q_p}{|Q_p|} \frac{Q_p^3 + Q_s^3}{Q_p - Q_s}.$$

Dit laatste zullen we nog vereenvoudigen als volgt:

$$\bar{s}_a = \frac{1}{3} \frac{Q_p}{|Q_p|} \frac{(Q_p^3 - Q_p^2 Q_s - Q_p Q_s^2 + Q_s^3) + (Q_p^2 Q_s + Q_p Q_s^2)}{Q_p - Q_s},$$

ofwel

$$(122) \quad \bar{s}_a = \frac{1}{3} \frac{Q_p}{|Q_p|} (Q_p^2 - Q_s^2) + \frac{1}{3} \frac{Q_p}{|Q_p|} Q_p Q_s \frac{Q_p + Q_s}{Q_p - Q_s}.$$

Van de twee termen in het rechterlid van (122) is de tweede klein vergeleken met de eerste, zoals blijkt door (122) als volgt te schrijven:

$$\bar{s}_a = \frac{1}{3} \frac{Q_p}{|Q_p|} (Q_p^2 - Q_s^2) \left[1 + \frac{Q_p Q_s}{(Q_p - Q_s)^2} \right].$$

Stelt men $\lambda = |Q_p : (Q_p - Q_s)|$, dan ligt λ in het interval $0 \leq \lambda \leq 1$, daar verondersteld werd dat Q_p en Q_s verschillend teken hebben. Nu is

$$\frac{|Q_p Q_s|}{|Q_p - Q_s|^2} = \lambda(1 - \lambda)$$

in het beschouwde interval hoogstens $\frac{1}{4}$, d.w.z. dat de grootte van de tweede term in het rechterlid van (122) hoogstens $\frac{1}{4}$ van die van de eerste term is. De absolute waarde van de tweede term is

$$\frac{1}{3} \lambda(1 - \lambda) |1 - 2\lambda| (Q_p - Q_s)^2,$$

en het maximum hiervan is

$$\frac{\sqrt{3}}{54} (Q_p - Q_s)^2 = 0,03 (Q_p - Q_s)^2.$$

Dit is te verwaarlozen. We herleiden (122) dus tot

$$(123) \quad \bar{S}_a = \frac{1}{3} \frac{Q_p}{|Q_p|} (Q_p^2 - Q_s^2) = \frac{1}{3} |Q_p| Q_p + \frac{1}{3} |Q_s| Q_s \left[\frac{Q_s}{Q_p} < 0 \right].$$

Substitutie van (121) of (123) in (120) en daarna (120) in (118) geeft ons

$$(124) \quad H_s = H_p - Z_a (Q_s - Q_p) - \frac{1}{3} W_a |Q_p| Q_p - \frac{1}{3} W_a |Q_p| Q_s - \frac{1}{3} W_a |Q_s| Q_s$$

indien er geen kentering onderweg is. Is er wel kentering, dan vervalt de onderstreepte term.

Vervolgens integreren we (20), die de vorm

$$(125) \quad dH + w S dx = Z_0 dQ$$

aanneemt, langs de subkarakteristiek RS. Met overeenkomstige middelen als boven behandeld, vinden we

$$(126) \quad H_s = H_R + Z_b (Q_s - Q_R) + \frac{1}{3} W_b |Q_R| Q_R + \frac{1}{3} W_b |Q_R| Q_s + \frac{1}{3} W_b |Q_s| Q_s,$$

waarbij weer de onderstreepte term bestemd is om te vervallen indien het oplopende golfpunt onderweg van C naar B een kentering ontmoet.

De bepaling van H en Q in S kan eerst aan de orde gesteld worden nadat o.a. H en Q in L en N bepaald zijn. We bepalen dan H en Q in P en R t.o.v. de waarden in L en N door middel van interpolatie of extrapolatie:

$$(127) \quad H_p = H_L - \dot{H}_L \Delta \tau_a^+; H_R = H_N - \dot{H}_N \Delta \tau_b^-; Q_p = Q_L - \dot{Q}_L \Delta \tau_a^+; Q_R = Q_N - \dot{Q}_N \Delta \tau_b^-.$$

De afgeleiden H_L enz. zijn veelal voldoende nauwkeurig met

$$H_L = \frac{H_L - H_K}{2 \tau_m} \quad \text{enz.}$$

te bepalen. Hierbij stelt K het laatste vóór L bepaalde punt ter plaatse A voor.

De bepaling van H_p enz. volgens (127) moet geschieden met gebruik maken van (115) en (116), voor $\Delta \tau_a^+$ en $\Delta \tau_b^-$, die evenwel (zie (113)) nog weer functies zijn van H_p enz. en bovendien van H_s en Q_s . We zullen ons van een verderop nog te bespreken iteratieproces bedienen om uiteindelijk alle onbekenden te bepalen. Voorlopig nemen we even aan dat we over zekere benaderingen voor H_p , H_R , Q_p , Q_R , Z_a , Z_b , W_a en W_b beschikken. De formules (124) en (126) vormen dan een stel vergelijkingen in H_s en Q_s . Het bepalen van H_s en Q_s hieruit kan direct of met itereren geschieden. We stellen de beide mogelijkheden ter vergelijking naast elkaar.

Directe oplossing.

We vatten (124) en (126) even op als twee vergelijkingen in de drie grootheden H_s , Q_s en $|Q_s| Q_s$. We elimineren dan eerst H_s uit beide vergelijkingen, en daarna elimineren we $|Q_s| Q_s$ uit beide vergelijkingen. We vinden dan twee vergelijkingen die equivalent zijn met (124) en (126).

$$(128) \quad \frac{1}{3} W |Q_s| Q_s + 2 Z Q_s - H_A = 0$$

$$(129) \quad H_s = H_0 + R Q_s.$$

Hierin is

$$(130) \quad W = W_a + W_b$$

$$(131) \quad Z = Z_a + Z_b + \frac{1}{3} \frac{W_a |Q_p|}{a} + \frac{1}{3} \frac{W_b |Q_R|}{b}$$

$$(132) \quad H_A = + Z_a Q_p + Z_b Q_R - \frac{1}{3} W_a |Q_p| Q_p - \frac{1}{3} W_b |Q_R| Q_R$$

$$(133) \quad R = \frac{1}{W} \left[W_a Z_b - W_b Z_a + \frac{1}{3} W_a W_b \left(-\frac{|Q_p|}{a} + \frac{|Q_R|}{b} \right) \right]$$

$$(134) \quad H_0 = \frac{1}{W} \left[W_b H_p + W_a H_R + W_b Z_a Q_p - W_a Z_b Q_R + \frac{1}{3} W_a W_b \left(-|Q_p| Q_p + |Q_R| Q_R \right) \right].$$

De onderstreepte termen met a aangegeven vervallen indien er kentering in vak a, en die met b aangegeven indien er kentering in vak b ontmoet wordt.

In de formule (128) zijn W en Z beide steeds positief. De grootheid

$$(135) \quad H_A = \left(\frac{1}{3} W |Q_s| + 2 Z \right) Q_s$$

is daarom een monotoon met Q_s toenemende functie, die van $-\infty$ tot $+\infty$ loopt als Q_s van $-\infty$ tot $+\infty$ loopt. Hieruit volgt dat (128) slechts één wortel voor Q_s heeft. Deze is > 0 als $H_A > 0$ en < 0 als $H_A < 0$. In het eerste geval gaat (128) over in de vierkantsvergelijking

$$\frac{1}{3} W Q_s^2 + 2 Z Q_s - H_A = 0,$$

waarvan

$$(136) \quad Q_s = \frac{3Z}{W} + \sqrt{\left(\frac{3Z}{W}\right)^2 + H_A} \quad [H_A > 0]$$

de voor ons doel bruikbare wortel is. In het tweede geval wordt de vierkantsvergelijking

$$-\frac{1}{3} W/Q_s^2 + 2ZQ_s - H_A = 0,$$

en de bruikbare wortel is

$$(137) \quad Q_s = \frac{3Z}{W} - \sqrt{\left(\frac{3Z}{W}\right)^2 + |H_A|} \quad [H_A < 0].$$

Nadat Q_s met (136) of (137) bepaald is, volgt H_s uit (129).

Iteratieve oplossing.

We trachten Q_s uit (128) op te lossen met een iteratieproces, waarbij we, uitgaande van een of andere benadering voor Q_s , komen tot een nieuwe en betere benadering voor Q_s .

Laat een benadering $Q_s^{(n)}$ voor Q_s gegeven zijn. We ontwikkelen dan de functie H_A volgens (135) naar $Q_s - Q_s^{(n)}$ met behulp van de reeks van Taylor, waarbij we niet verder gaan dan de lineaire term:

$$H_A = H_A(Q_s^{(n)}) + \left(\frac{dH_A}{dQ_s}\right)_{Q_s=Q_s^{(n)}} (Q_s - Q_s^{(n)}).$$

Nu is

$$\frac{dH_A}{dQ_s} = \frac{2}{3} W|Q_s| + 2Z.$$

Dus

$$(138) \quad H_A = \left(\frac{1}{3} W|Q_s^{(n)}| + 2Z\right) Q_s^{(n)} + \left(\frac{2}{3} W|Q_s^{(n)}| + 2Z\right) (Q_s - Q_s^{(n)}).$$

Hieruit volgt, daar H_A volgens (132) gegeven is, voor Q_s een waarde

$$(139) \quad Q_s^{(n+1)} = \frac{H_A + \frac{1}{3} W|Q_s^{(n)}| Q_s^{(n)}}{2\left(Z + \frac{1}{3} W|Q_s^{(n)}|\right)}$$

die we als volgende, dus $(n+1)$ -de benadering opvatten.

We passen nu (139) in principe als volgt toe:

We nemen als aanvangsbenadering $Q_s^{(0)}$ voor Q_s de waarde

die uit (114) volgt. Dit substitueren we in (139). Dan zal

$$(140) \quad Q_s^{(1)} = \frac{H_A + \frac{1}{3} W |Q_s^{(0)}| Q_s^{(0)}}{\lambda \left(Z + \frac{1}{3} W |Q_s^{(0)}| \right)}$$

onze eerstvolgende benadering zijn. Vervolgens substitueren we $Q_s^{(1)}$ voor $Q_s^{(0)}$ in (139) en vinden aldus de benadering $Q_s^{(2)}$. Dit iteratieproces is convergent en kan zover worden voortgezet tot we een voldoende nauwkeurige benadering hebben verkregen. De convergentie is zó sterk, dat vaak $Q_s^{(1)}$ reeds voldoende nauwkeurig is.

Nadat Q_s uit (139) bepaald is, volgt H_s weer uit (129). Mocht het nodig zijn na $Q_s^{(1)}$ ook nog $Q_s^{(2)}$ te bepalen, dan is het gewenst eerst nog betere benaderingen voor Q_a en H_a te bepalen. Men komt dan tot een rekenwijze als hieronder wordt uiteengezet:

Rekenwijze.

Stap 1. We berekenen aanvangsbenaderingen $H_s^{(0)}$ en $Q_s^{(0)}$ voor H_s en Q_s volgens (114). Hiermee bepalen we eerste benaderingen voor H_a , Q_a , H_b en Q_b volgens (113) en verder eerste benaderingen voor ΔT_a^+ en ΔT_b^- volgens (112), voor Z_a volgens (119) en evenzo voor Z_b , en voor W_a en W_b .

Stap 2. Met de gevonden waarden voor ΔT_a^+ en ΔT_b^- berekenen we H_p , Q_p , H_R en Q_R volgens (127).

Stap 3. We berekenen W , Z , H_A , R en H_0 volgens (130) t/m (134). Daarna bepalen we een eerstvolgende benadering $Q_s^{(1)}$ uit (140) en $H_s^{(1)}$ uit (129).

Stap 4. Uit de laatstgevonden waarden voor Q_s en H_s en de bij stap 2 gevonden waarden voor H_p , Q_p , H_R en Q_R berekenen we verbeterde waarden voor H_a enz. volgens (113). Indien deze te veel afwijken van de eerstgevonden waarden, berekenen we ook weer opnieuw ΔT_a^+ enz.

Hierna herhalen we de stappen 2, 3 en 4 nog eenmaal.

Correcties van hoger orde.

We hebben Z_0 , W en T_0 afgeleid met zekere benaderingen, die alle neerkomen op het verwaarlozen van de snelheidshoogte h_v t.o.v. de diepte, dus als grootheid van de tweede orde (voor zover h_v als grootheid van de eerste orde is opgetreden, is hij niet verwaarloosd; zie aanh. 2).

In sommige gevallen, b.v. indien de bergende breedte b sterk met de waterstand variëert, kan het nodig zijn een correctie van de tweede orde in te voeren. Voor Z_0 en W krijgen we dan (zie p. 113 en 114):

$$Z_0 = Z_0(H) [1 + \xi h_v]$$

$$W = W(H) [1 + \omega h_v],$$

waarin

$$\gamma = \frac{b}{A} - \frac{1}{2a_s} + \frac{1}{2b} \frac{db}{dh}$$

$$\omega = \frac{\gamma}{a_s}$$

Op overeenkomstige wijze corrigeren we τ_0 :

$$\tau_0 = \tau_0(H) [1 + \theta h_v],$$

waarin

$$\theta = 3 \frac{b}{A} - \frac{1}{2a_s} - \frac{1}{2b} \frac{db}{dh}$$

Schrijven we de formules voor τ^{\pm} en Z_0 uit naar de orde van grootte der termen, dan is

$$\tau^{\pm} = \underbrace{\tau_m}_{(0)} + \underbrace{[\tau_0(H) - \tau_m]}_{(1)} \mp \underbrace{\delta Q}_{(1)} + \underbrace{\theta \tau_0 h_v}_{(2)}$$

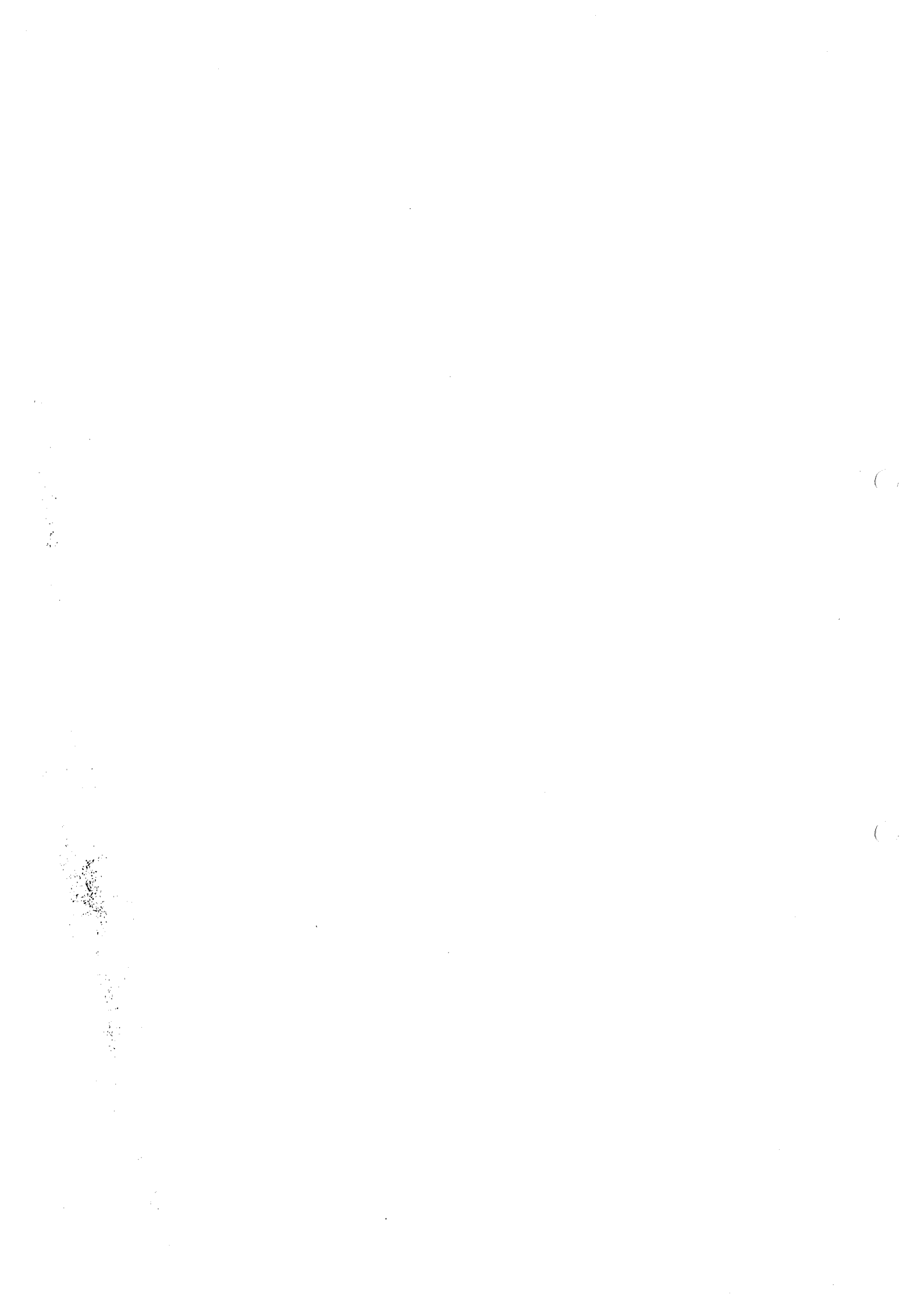
en

$$Z_0 = \underbrace{Z_m}_{(0)} + \underbrace{[Z_0(H) - Z_m]}_{(1)} + \underbrace{\gamma Z_0 h_v}_{(2)}$$

waarin Z_m een middelwaarde van Z_0 voorstelt. Schrijven we w evenzo uit, dan is

$$w = \underbrace{w_m}_{(0)} + \underbrace{[w - w_m]}_{(1)} + \underbrace{\omega w_0 h_v}_{(2)}$$

met dien verstande dat de variatie van w soms even groot kan worden als de gemiddelde waarde w_m .



LITERATUUROPGAVE.

1. Lely, C.W., Het verband tusschen bodemhelling en kromtestraal bij rivieren. Rapporten en Mededelingen van de Rijkswaterstaat no. 21, 1922
2. Rehbock, T., Wassermessung mit scharfkantigen Ueberfallwehren. Z. Verein d. Ing., V 7, p. 817 - 823, 1929
3. Karman, T. von, Mechanische Aehnlichkeit und Turbulenz. Gött. Nachr., p. 58 - 76, 1930
4. Bakmeteff, B., Hydraulics of open channels. 1932
5. Prandtl, L., Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung. Z. Ver. d. Ingen., V 77, p. 105 - 113, 1933
6. Nikuradse, J., Strömungsgesetze in rauhen Rohren. Ver. d. Ingen. Forschungsheft 361, 1933
7. Veen, H.J. van, Inleiding tot de nomographie. 1937
8. Veen, J. van, Getijstroomberekening met behulp van wetten analoog aan die van Ohm en Kirchhoff. De Ingenieur, V 52, p. B 73 - B 81, 1937
9. Veen, J. van, Electricische nabootsing van getijden. De Ingenieur, V 58, p. B 17 - B 20, 1946
10. Veen, J. van, Electricische nabootsing van getijden. Tijdschr. Kon. Ned. Aardr. Gen., V. 63, p. 485 - 493, 1946
11. Bendegom, L. van, Enige beschouwingen over riviermorphologie en rivierverbetering. De Ingenieur, V 59, p. B 1 - B 11, 1947
12. Schönfeld, J.C., Resistance and inertia of the flow of liquids in a tube or open canal. Appl. sci. Res., V. A 1, p. 169 - 197, 1948
13. Schönfeld, J.C., Propagation of tides and waves. Proefschrift, Delft, 1951
14. Schönfeld, J.C., Distortion of long waves; equilibrium and stability. Rapp. Assemblée gén. Assoc. int. Hydr. sci. Un. Géod. Géoph. int, deel 4, p. 140 - 157, Brussel, 1951
15. Elias, G.J. en Tellegen, B.D.H., Theorie der wisselstromen. Deel III, Theorie der elektrische netwerken. 1952

16. Valken, K., Een grafische methode ter bepaling van verhanglijnen bij stationnaire stromen in open waterlopen.
De Ingenieur, V 64, p. B 36 - B 39, 1952
17. Schönfeld, J.C., Inleiding tot de methode der karakteristieken.
Nota CSD 53-2, 1953
18. Schönfeld, J.C., Wrijvings- en weerstandsformules voor leidingen en waterlopen.
De Ingenieur, V 65, p. B 219 - B 226,
B 244 - B 249, 1953
19. Schönfeld, J.C., Analogy of hydraulic, mechanical, acoustic, and electric systems.
Appl. sci. Res., B, V 3, p. 417 - 450, 1954
20. Schönfeld, J.C., Vergelijkingen van een lange golf-beweging in twee dimensies.
CSD 54-1 N 1954

LIJST VAN BIJLAGEN.

1. Lijst van symbolen.
2. Voorbeeld van de constructie van een karakteristiek.
3. Afvoer over een trapeziumvormige lange overlaat.
4. Coëfficiënten voor de linearisatie van een zijdelingse overlaat.
5. Hoogte en plaats van een watersprong.

a_s stroomvoerende diepte
 a_w winddiepte
 A oppervlak van het stroomvoerend profiel
 A_m maatgevende waarde *) van het oppervlak v.h.str.pr.
 b bergende breedte
 b_m maatgevende waarde *) van de bergende breedte
 b_s stroomvoerende breedte
 b_w breedte waarover de wind aangrijpt
 B berging, d.i. bergend oppervlak
 B_m maatgevende waarde *) van de berging
 c_o volstrekte voortplantingssnelheid
 c_m maatgevende waarde *) van de voortplantingssnelheid
 c^+, c^- voortplantingssnelheden
 c coëfficiënt van Chézy
 c_w coëfficiënt van de windschuifspanning
 D doorlating van een vak
 D_i zijdelingse doorlating uit een vak
 g versnelling van de zwaartekracht
 h waterstand boven nulvlak
 h_o hoogte zijdelingse overlaat boven nulvlak
 h_v snelheidshoogte
 H energiehogte boven nulvlak
 H_r weerstandsverval
 H_s windverval
 i_r weerstandsverhang
 i_s windverhang
 K afvoervermogen van het profiel
 l lengte van een vak
 L lengte van een waterloop
 m traagheid per eenheid van lengte
 m_m maatgevende waarde *) van de traagheid p.e.v.l.
 M traagheid (van een vak)
 M_m maatgevende waarde *) van de traagheid
 q_i zijdelingse afvoer per eenheid van lengte
 Q afvoer (eb positief)
 Q_i zijdelingse afvoer

$$a_s = A/b_s$$

$$a_w = A/b_w$$

$$b = B/l$$

$$b_s = \partial A / \partial h$$

$$c_o = 1/\sqrt{b_m}$$

$$c_m = 1/\sqrt{b_m m_m}$$

$$c^{\pm} = v \pm c_o$$

$$D = 1/\sqrt{W}$$

$$D_i = \frac{2}{3} \mu \sqrt{\frac{2}{3}} g l$$

$$h_v = v^2/2g = u Q^2$$

$$H = h + h_v$$

$$H_r = W S$$

$$H_s = u v_w^2 \cos \theta$$

$$i_r = W S$$

$$i_s = H_s/l$$

$$K = c A \sqrt{a_s}$$

$$m = 1/g A$$

$$m_m = 1/g A_m$$

$$M = m l$$

$$M_m = m_m l$$

$$q_i = Q_i/l$$

$$Q_i = D_i (h - h_o)^{3/2}$$

S stroomfactor
 t tijd
 T periode van het getij
 u hulpfactor van de wind
 U kinetische factor
 v stroomsnelheid
 v_c kritische stroomsnelheid
 v_w windsnelheid
 w weerstand per eenheid van lengte
 W weerstand (van een vak)
 x coördinaat langs de rivier (positief)
 y_o volstrekte golftoelating
 y^+, y^- golftoelatingen
 Z_o volstrekte golftegenstand
 Z^+, Z^- golftegenstanden
 ϵ kritische factor
 θ hoek tussen windrichting en vloedric
 μ contractiecoëfficiënt
 ρ dichtheid (van het water)
 ρ_a dichtheid van de lucht
 σ looptijdcoëfficiënt voor de afvoer
 τ_o volstrekte looptijd
 τ_m maatgevende waarde *) van de looptijd
 τ^+, τ^- looptijden

De maatgevende waarden hebben betrekking op de genomen waarde van de waterstand. De afstanden zijn genomen tussen de middenstand en de stroomfactor

LUJST VAN SYMBO

RUKS WATER STAAT
 DIRECTIE VAN DE WATERSTA
 CENTRALE STUDIEDIENST

oomvoerend profiel
 van het oppervlak v.h.str.pr.
 van de bergende breedte
 ind aangrijpt
 oppervlak
 van de berging
 ringssnelheid
 van de voortplantingssnelheid
 en
 ndschuifspanning
 k
 g uit een vak
 aartekracht
 lak
 erlaat boven nulvlak
 nulvlak
 t profiel
 loop
 van lengte
 van de traagheid p.o.v.l.
 k)
 van de traagheid
 er eenheid van lengte

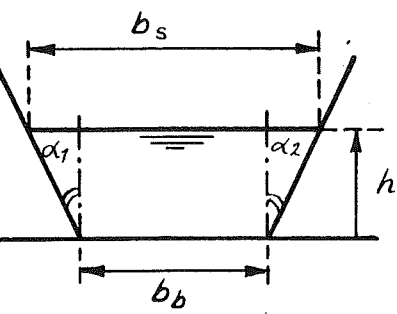
$$\begin{aligned}
 a_s &= A/b_s \\
 a_w &= A/b_w \\
 b &= B/l \\
 b_s &= \partial A / \partial h \\
 c_o &= 1/\sqrt{b m} \\
 c_m &= 1/\sqrt{b_m m_m} \\
 c^{\pm} &= v^{\pm} \pm c_o \\
 D &= 1/\sqrt{W} \\
 D_i &= \frac{2}{3} \mu \sqrt{\frac{2}{3}} g l \\
 h_v &= v^2 / 2g = U Q^2 \\
 H &= h + h_v \\
 H_p &= W S \\
 H_s &= u v_w^2 \cos \theta \\
 i_p &= W S \\
 i_s &= H_s / l \\
 K &= C A \sqrt{a_s} \\
 m &= 1/g A \\
 m_m &= 1/g A_m \\
 M &= m l \\
 M_m &= m_m l \\
 q_i &= Q_i / l \\
 Q_i &= D_i (h - h_o)^{3/2}
 \end{aligned}$$

- S stroomfactor
- t tijd
- T periode van het getij
- u hulpfactor van de wind
- U kinetische factor
- v stroomsnelheid
- v_c kritische stroomsnelheid
- v_w windsnelheid
- w weerstand per eenheid van lengte
- W weerstand (van een vak)
- x coördinaat langs de rivier (positief naar zee toe)
- y_o volstreekte golftoelating
- y^+, y^- golftoelatingen
- Z_o volstreekte golftegenstand
- Z^+, Z^- golftegenstanden
- ε kritische factor
- θ hoek tussen windrichting en vloedrichting
- μ contractiecoëfficiënt
- ρ dichtheid (van het water)
- ρ_a dichtheid van de lucht
- σ looptijdcoëfficiënt voor de afvoer
- τ_o volstreekte looptijd
- τ_m maatgevende waarde *) van de looptijd
- τ^+, τ^- looptijden

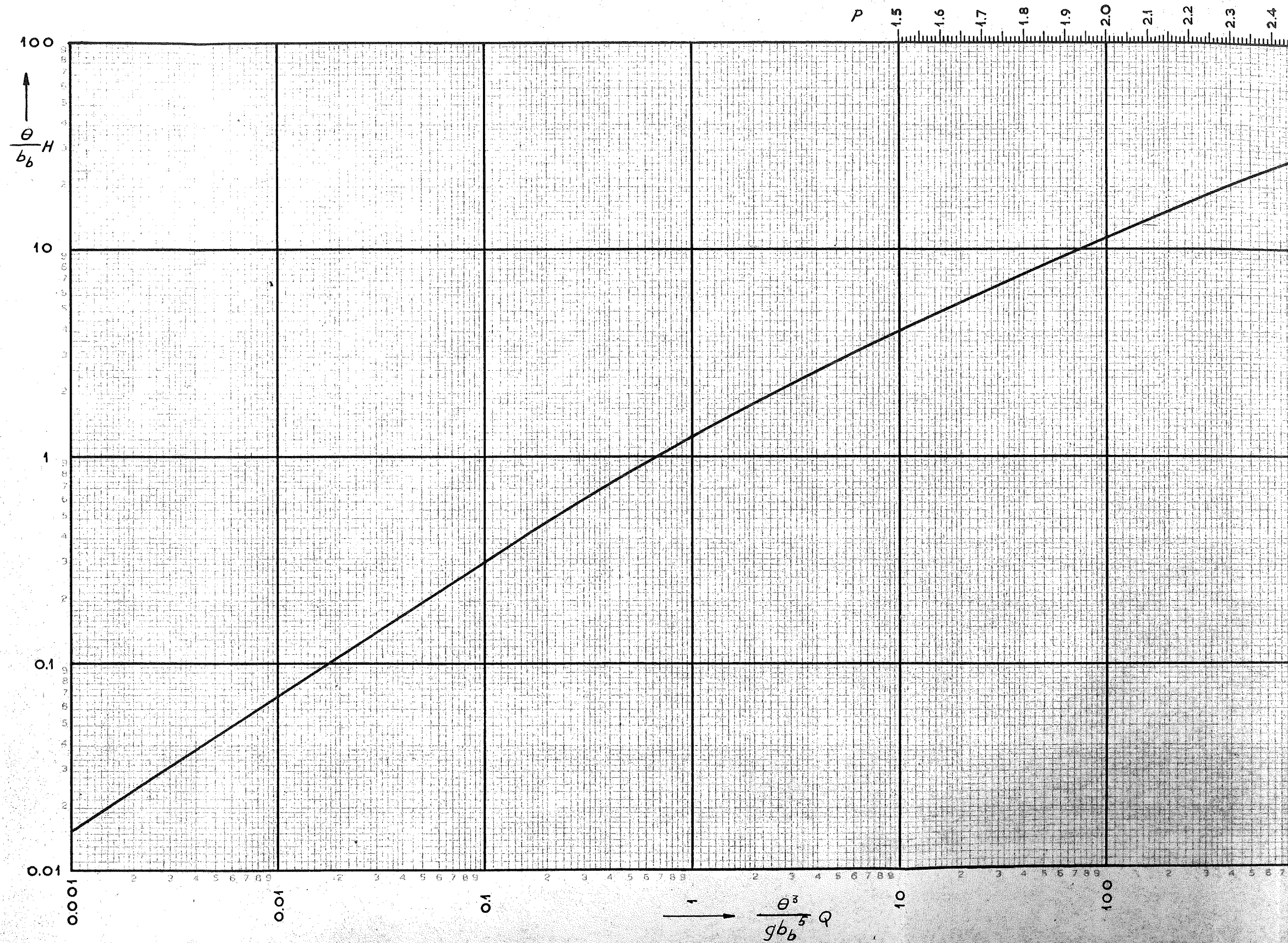
$$\begin{aligned}
 S &= |Q| / Q \\
 u &= \rho_a l / \rho v_w^2 a_w \\
 U &= 1/2 g A^2 \\
 v &= Q/A \\
 v_c &= \sqrt{g a_s} \\
 w &= 1/K^2 \\
 W &= w l \\
 y_o &= \sqrt{b/m} = \sqrt{g A b} \\
 y^{\pm} &= \mp y_o \\
 Z_o &= \sqrt{m/b} \\
 Z^{\pm} &= \mp Z_o \\
 \epsilon &= v^2 / v_c^2 \\
 \delta &= 2 B U \\
 \tau_o &= \sqrt{B M} \\
 \tau_m &= \sqrt{B_m M_m} \\
 \tau^{\pm} &= \tau_o \mp \delta Q
 \end{aligned}$$

De maatgevende waarden hebben betrekking op een als maatgevend aangenomen waarde van de waterstand. Deze zal men in het algemeen kiezen tussen de middenstand en de stand van de vloedkentering.

LUST VAN SYMBOLEN		C.S.D. Nr. 55 - 14	
RIJKSWATERSTAAT DIRECTIE VAN DE WATERSTAAT CENTRALE STUDIEDIENST		getek.	gezien
		Aug'55	Aug'55
		A4.	Nr. 55.154



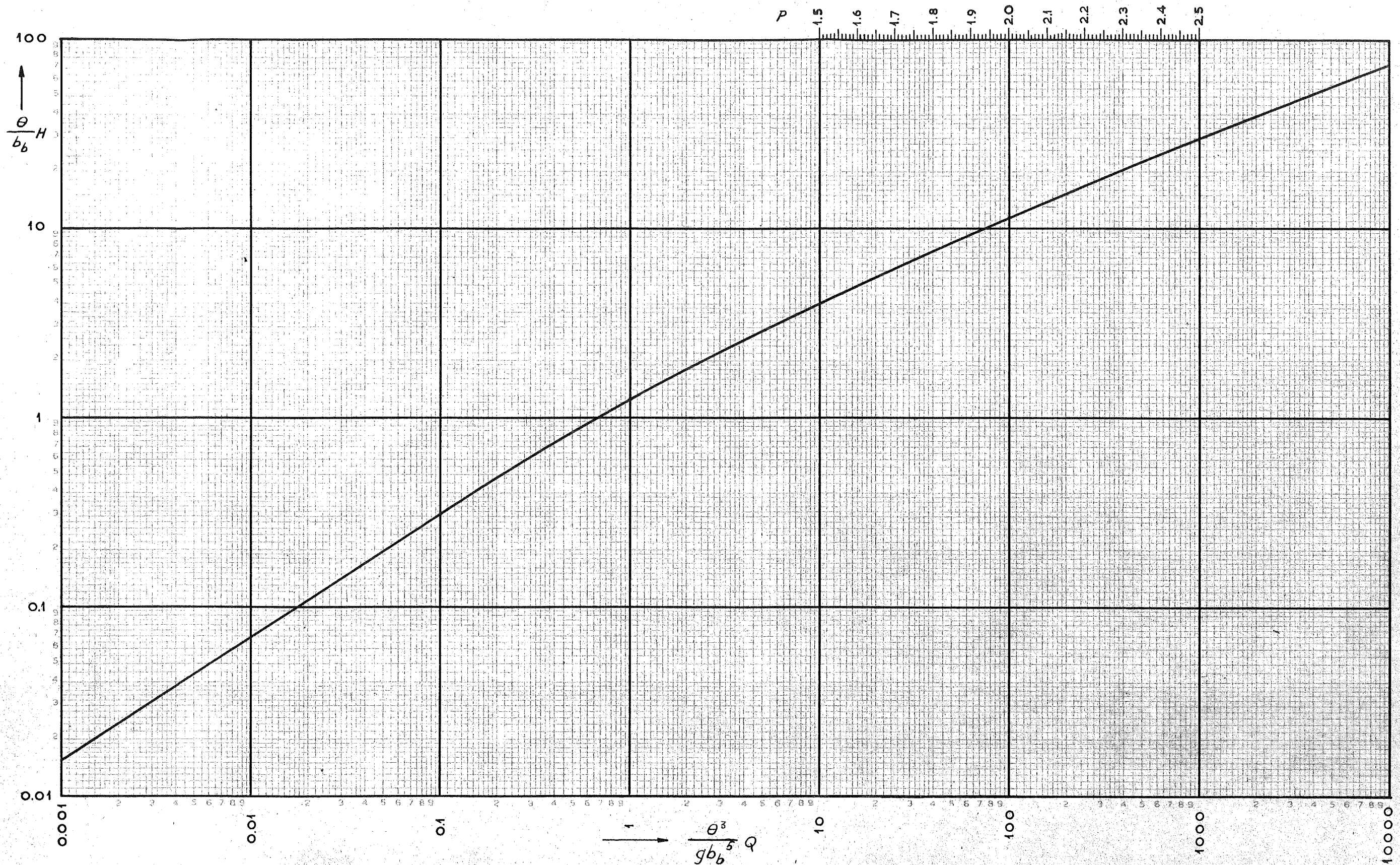
$$\theta = \tan \alpha_1 + \tan \alpha_2$$



AFVOER OVER EEN TRAPEZIUM
VORMIGE, LANGE OVERLAAT.

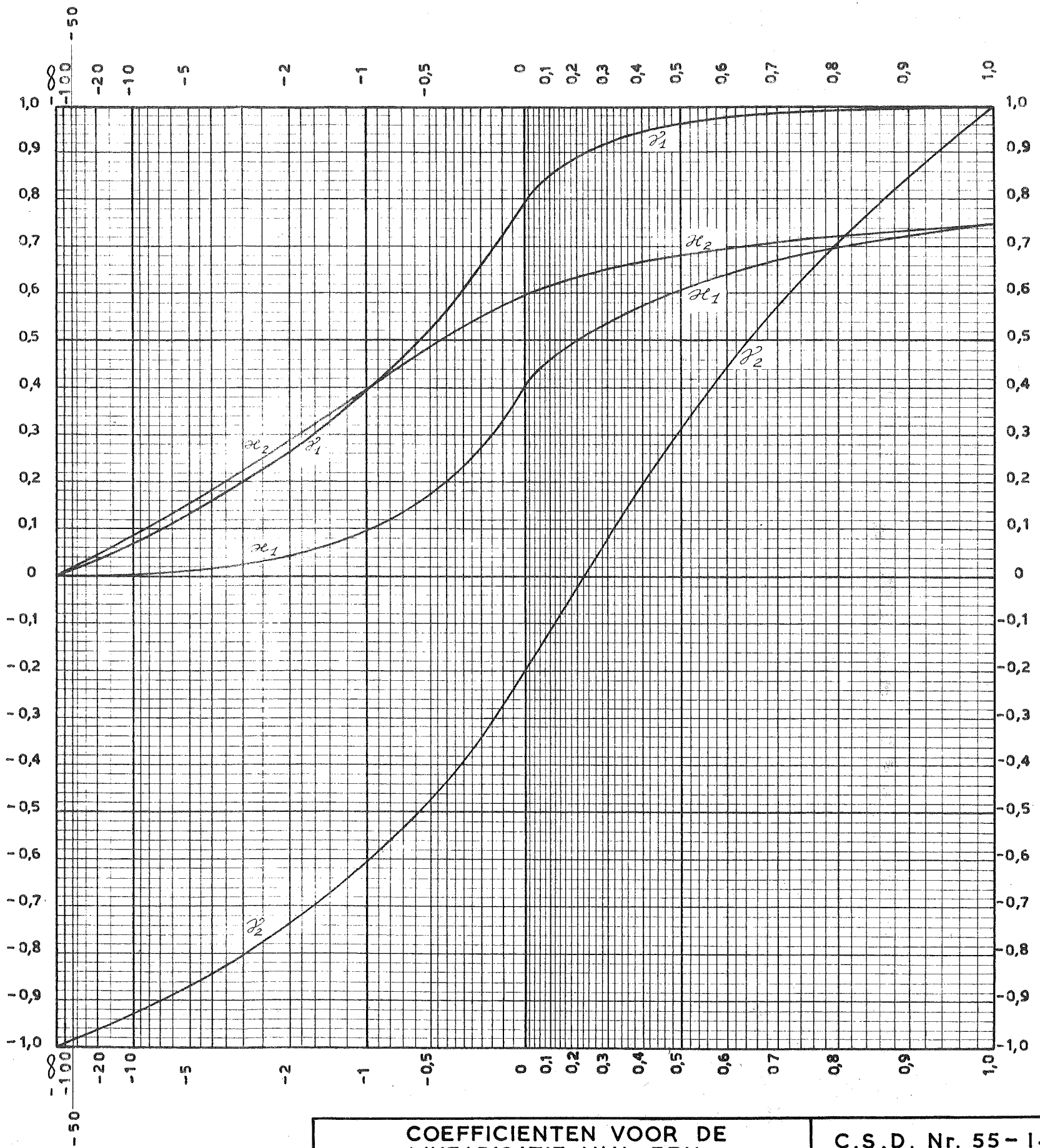
RUKS WATERSTAAT
DIRECTIE VAN DE WATERSTAAT
CENTRALE STUDIEDIENST

getek.
Aug:55
M.D.



+tand₂

AFVOER OVER EEN TRAPEZIUM- VORMIGE, LANGE OVERLAAT.		C.S.D. Nr. 55-14	
		BULAGE Nr. 3	
RIJKSWATERSTAAT DIRECTIE VAN DE WATERSTAAT CENTRALE STUDIEDIENST	getek.	gezien	A3. Nr. 55.156
	Aug:55	Aug:55	



COEFFICIENTEN VOOR DE
LINEARISATIE VAN EEN
ZUDELINGSE OVERLAAT

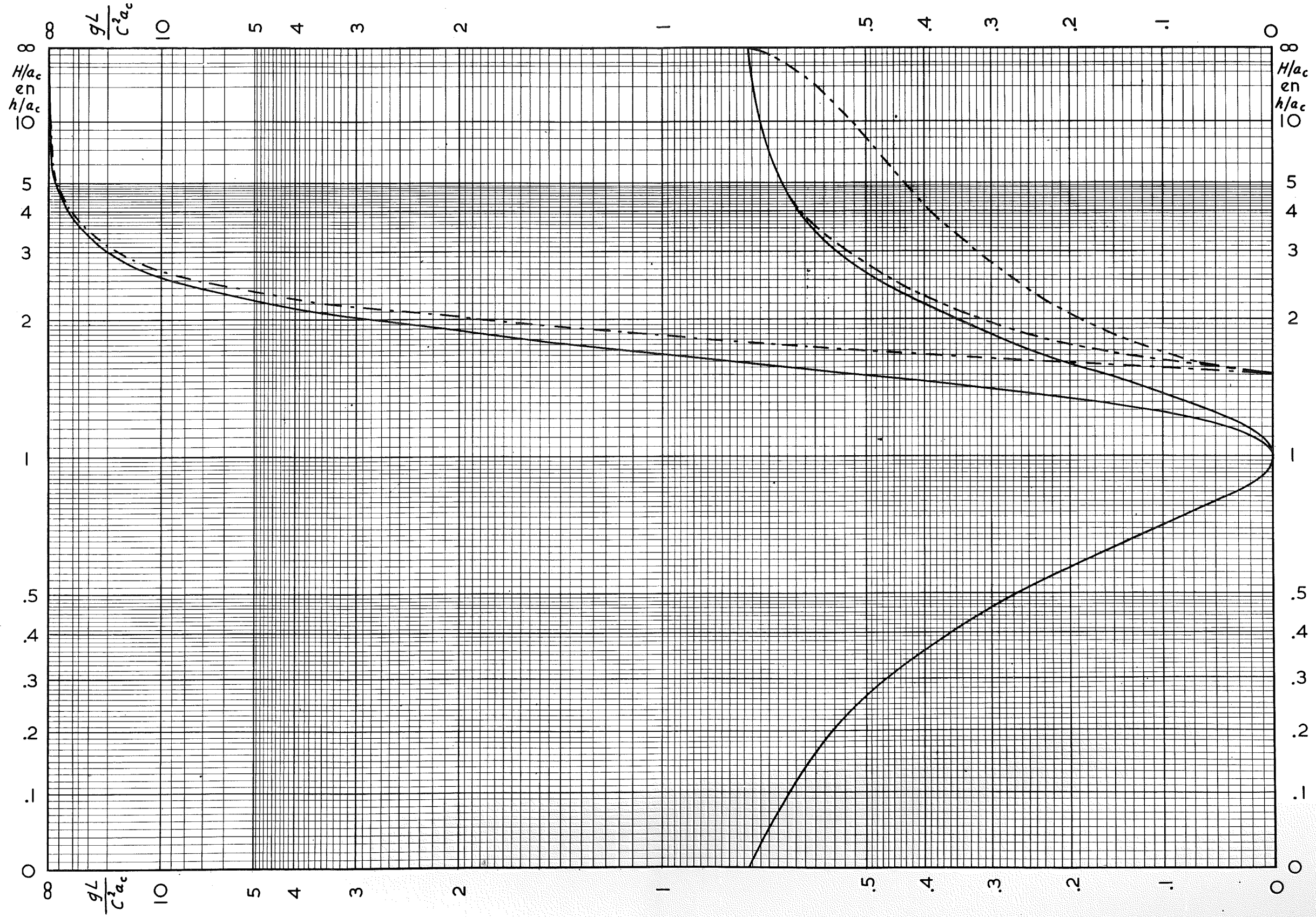
C.S.D. Nr. 55-14

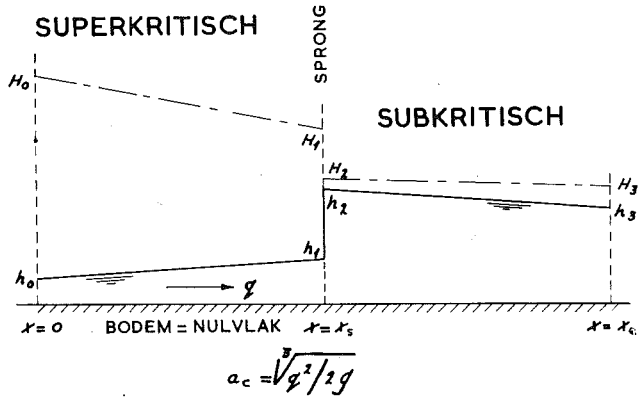
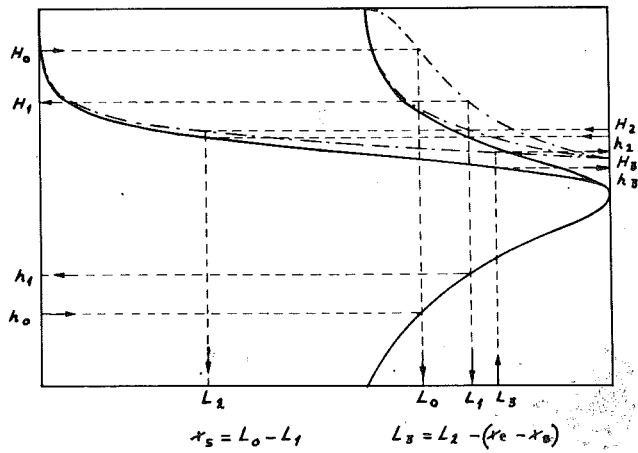
RIJKSWATERSTAAT
DIRECTIE VAN DE WATERSTAAT
CENTRALE STUDIEDIENST

getek.	gezien
Aug!55	Aug!55
<i>[Signature]</i>	

BULAGE Nr. 4

A2. Nr. 55.157





HOOGTE EN PLAATS
VAN EEN WATERSPRONG

C.S.D. Nr. 55-14

BULAGE 5

RUKSWATERSTAAT
DIRECTIE VAN DE WATERSTAAT.
CENTRALE STUDIEDIENST

getek. gezien
Sept/55 Sept/55

A3. Nr. 55.158

