Een vereenvoudigd mathematisch model
van het slagaderlijk deel van de
bloedsomloop.

A. van Grondelle.
juli 1971.

Verslag van een afstudeeronderzoek,
verricht bij prof. ir. W.C. Bischoff van
Heemskerck van de Technische Hogeschool
te Delft, afdeling der Weg- en water-
bouwkunde.

Mentor: ir. N. Booy.

Inhoudsopgave

bl.

Samenvatting 6 - 11

1 Inleiding
1.1 Probleem en aanpak 12
1.2 Overzicht van de ontwikkelingen op haemodynamisch gebied. 13 - 18

2 Fysiologie van de bloedsomloop.
2.1 Inleiding 19 - 20
2.2 Bloed 21 - 22
2.3 Hart 23 - 34
2.4 Grote circulatie 35 - 49
2.5 Kleine circulatie 50 - 51
2.6 Controlemechanismen 52 - 54

3 Haemodynamica.
3.1 Afleiding van de Langs golfvergelijkingen voor een laminaire stroom in een cilindrische buis met een dunne 55 - 71

elastische wand.
3.2 Analogie van de lange lijn- 72 - 74
vergelijkingen en de tele-
graafvergelijkingen..
3.3 Bepaling van de karakteris- 75 - 92
tieken van een enkele buis.
3.4 Bepaling van de reflectie- 93 - 95
coefficient op een splitsings-
punt.

4 Vereenvoudigd mathematisch
model van het slagader-
lijk deel van de bloedsom-
loop.
4.1 Vereenvoudigd model van 96 - 102
het bloedvatenstelsel.
4.2 Bepaling van de plaatselijke 103 - 108
reflectiecoefficienten
4.3 Bepaling van de systeem- 109 - 114
reflectie coefficienten, de
systeemimpedanties en de
ingangsimpedanties.
4.4 Benaderende bepaling van 115 - 128
de variatie in druk en
stroom.

4.5 Resultaten uit berekeningen met behulp van het model uitgevoerd. 129 - 162

4.6 Vereenvoudigd model van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop. 163 - 173

5 Conclusies. 174 - 177

Lijst van symbolen. 178 - 182

Literatuurlijst. 183 - 185

Samenvatting.

Het onderwerp van het onderzoek, dat in dit afstudeerverslag wordt behandeld, is de werking van de bloedsomloop, met name de volgende vragen:

1 wordt de toename van de amplitude van de bloeddruk, die aanvankelijk optreedt, naarmate we verder van het hart komen, veroorzaakt door reflecties op splitsingspunten?

2 wat is de invloed van wijziging van significante parameters op het functioneren van de bloedsomloop met name een wijziging van de elasticiteitsmodulus, zoals die zich bij het ouder worden van de mens voordoet?

Allereerst worden de ontwikkelingen op haemodynamisch gebied in grove hoofdlijnen aangegeven. Vervolgens wordt de fysiologie van de bloedsomloop behandeld om relevante uitgangspunten en gegevens

voor het onderzoek te verkrijgen.
En worden verreenvoudigde vergelijkingen afgeleid voor een lange golf, d.w.z. dat de stroming bij benedering ééndimensioneel is, voor een laminaire stroom in een cilindrische buis met een dunne elastische wand en de daaruit volgende grootheden worden bepaald Dit zijn de karakteristieken voor een enkele buis, de voortplantingsconstante, de dempingsconstante en de faseconstante of het golfgetal en de karakteristieke impedantie. En wordt ook een algemene formule voor de reflectiecoefficienten afgeleid. Tevens wordt de analogie van de afgeleide lange golf vergelijkingen en de telegraafvergelijkingen aangegeven.
Met behulp van de afgeleide vergelijkingen en betrekkingen wordt in eerste instantie een model voor de bloedsomloop opgezet. Het model begint met een enkele slagader, die in twee identieke slagaders

vertakt; die elk op hun beurt
weer in twee identieke slagaders
vertakken, waarbij de straal van
de slagaden steeds kleiner wordt.
Dit gaat door tot de capillairen,
waarna de bloedwaten zich weer
samenvoegen in steeds grotere aders
tot er tenslotte één ader overblijft.
De lengte van elk bloedwaten is
gelijk, namelijk 5 cm. Het model is
in horizontale en verticale zin sym-
metrisch. Van achter naar voor
wordt het model doorgerekend
door overal de systeemgrootheden, de systeemimpedanties en
de systeemreflectiecoefficienten, te
bepalen, waaruit uiteindelijk
de ingangsimpedantie gevonden
wordt. De druk is als randvoor-
waarde gegeven. Doordat de ver-
gelijkingen lineair zijn, kunnen we
de variatie van de druk in een
Fourierreeks ontwikkelen en har-
monische oplossingen bekijken.
Voor de relevante harmonischen

waaruit de drukgolf en de stroom-
golf zijn opgebouwd, worden, gaande
van voor naar achter in het model,
overal op de splitsingspunten de
amplituden van de druk en de
stroom bepaald. Voor de bereke-
ning van de afgeleide grootheden
is een computerprogramma opgesteld.
Enige resultaten zijn in grafieken
weergegeven, te weten de ingangs-
impedantie, de systeemreflectie-
coefficient op het eerste splitsings-
punt en de amplitude van de druk
en de stroom op de splitsingspunten
voor de relevante harmonischen
Hierbij wordt ook nagegaan wat
het effect is van een wijziging
van significante parameters.
De veronderstellingen, gedaan bij
het afleiden van de vergelijkingen,
gelden feitelijk slechts voor de
slagaders. En wordt aangetoond,
dat het slagaderlijk deel en het
aderlijk deel van de bloedsomloop
gescheiden kunnen worden.

Tenslotte wordt een verbeterd model voor het slagaderlijk deel van de bloedsomloop opgesteld.
Omdat zowel de verfelijkingen als het model vereenvoudigd zijn, draagt het onderzoek een kwalitatief karakter. Uit het onderzoek kunnen we de volgende kwalitatieve conclusies trekken:

- het (vereenvoudigd) model van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop heeft systeemkarakteristieken, de ingangsimpedantie, de systeemreflectiecoefficient op het eerste splitsingspunt en de systeemweerstanden, die qua tendens goed overeenkomen met de werkelijke waarden
- de drukfoef en de stroomfoef veranderen doordat de dempingsfaseshelheid en de reflectiecoefficient in een groot deel van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop frequentieafhankelijk zijn.

- de toename van de amplitude van de drukgolf is (mede) te verklaren uit reflectieverschijnselen
- het slagaderlijk deel en het aderlijk deel van de bloedsomloop zijn volledig te scheiden, wat de golfvoortplanting betreft.
- de berging in de slagaders en de weerstand van de kleinere slagaders en de arteriolen is zodanig op elkaar afgestemd, dat de stroom vlak voor de capillairen, waar een eenparige stroom functioneel wenselijk is, inderdaad eenparig is.

Gezien de goede systeemkarakteristieken van het model van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop, ondanks de vereenvoudigingen in de veronderstellingen en het model, lijken goede mogelijkheden aanwezig het mathematisch model verder te ontwikkelen.

1 Inleiding

1.1 Probleem en aanpak.

Het onderwerp van het onderzoek, dat in dit afstudeerverslag wordt behandeld, is de werking van de bloedsomloop, met name de volgende vragen:

1 wordt de toename van de amplitude van de bloeddruk, die aanvankelijk optreedt naarmate we verder van het hart komen, veroorzaakt door reflecties op splitsingspunten?

2 wat is de invloed van wijziging van significante parameters op het functioneren van de bloedsomloop, met name een wijziging van de elasticiteitsmodulus, zoals zich dat bij het ouder worden van de mens voordoet?

In dit verslag wordt een vereenvoudigd dynamisch mathematisch model van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop ontwikkeld, met behulp waarvan de gestelde problemen worden onderzocht.

1.2 Overzicht van de ontwikkelingen op thermodynamisch gebied.

In deze paragraaf worden slechts de globale hoofdlijnen van de ontwikkelingen op thermodynamisch gebied aangegeven.

De ontdekking, dat het bloed door het hart door een gesloten stelsel van bloedvaten gestuwd wordt, waarbij de wand van de bloedvaten uitrekt, wordt in het algemeen toegeschreven aan William Harvey. In zijn werk 'Exercitatio anatomica de motu cordis et sanguinis in animalibus' (1628) behandelt hij deze opvatting, waarbij hij naar voorgangers verwijst, die dit idee reeds geponeerd hadden. Na deze ontdekking heeft Hales (± 1700) het mechanisme bestudeerd, dat de pulserende stroom, die vanuit het hart in de aorta komt, omzet in een continue stroom. Hij vergelijkt dit mechanisme met het mechanisme van een pomp, waar een continue water-

stroom uitkomt, hoewel de zwenfel heen en weer gaat. Dit wordt veroorzaakt door de druk in het watervat, dat gedeeltelijk met water en gedeeltelijk met lucht gevuld is. Met elke slag van de zwenfel wordt een zekere hoeveelheid water toegevoegd, die ervoor zorgt, dat de lucht langs genoeg samengedrukt blijft om het water continu te doen stromen. De stationnaire toestand is er slechts een kleine drukvariatie in het vat. Vanuit deze opvatting is de zogenaamde 'Windkessel' theorie ontwikkeld, vooral door Frank (1899). Hierin wordt verondersteld, dat de aorta en de grote slagaders als één enkele luchtkamer fungeren, waarin de druk gelijktijdig toeneemt in alle delen gedurende de tijd, dat het bloed uit het hart wordt uitgedreven. Het bloed stroomt weg door smalle bloedvaten en voldoet daarbij aan de wet van Poisseuille.

De beweging van het bloed is voor het eerst als een golfverschijnsel opgevat

door Euler (1775). Deze heeft al een stelsel vergelijkingen opgesteld. In eerste instantie is veel onderzoek gedaan naar de voortplantingssnelheid van de golf, onder andere door Weber (1850), Moens en Korteweg (1878) en Lamb (1898). Moens en Korteweg hebben de zogenaamde Moens-Korteweg formule voor de voortplantingssnelheid van een golf in een elastische buis opgesteld.
Er zijn dus twee concepties: de 'Windkessel' theorie en de transmissie theorie. Het belangrijkste verschil is, dat in de 'Windkessel' theorie een drukvariatie zich met oneindige snelheid voortplant, terwijl in de transmissietheorie een eindige voortplantingssnelheid optreedt. Frank heeft geprobeerd ook in de 'Windkessel' theorie een eindige golfvoortplantingssnelheid te introduceren (1927). Het meeste onderzoek wordt gedaan met behulp van de transmissietheorie. Voor bepaalde problemen leent de 'Windkessel' theorie zich goed en ze wordt daarom ook nog wel toegepast.

Omdat de mathematische beschrijving van het bloedvatenstelsel, gezien de complexe structuur, zeer ingewikkeld is, zijn allereerst vergelijkingen afgeleid voor de beweging van een visceuse vloeistof in een oneindig lange cilindrische buis met een (visco-) elastische wand onder verschillende veronderstellingen, onder andere door Witrig (1914), Kenneman (1952) en Womersley (1955). Met name Womersley [13] geeft een zeer uitvoerige mathematische beschrijving. Deze vergelijkingen zijn gelineariseerd.
Met behulp van deze vergelijkingen zijn verschillende typen modellen opgezet om het bloedvatenstelsel als geheel of een deel ervan te onderzoeken.
Er zijn zuiver mechanische modellen, opgebouwd uit slangen, mathematische modellen en elektrische analogons.
De genoemde vergelijkingen zijn namelijk analoog aan de zogenaamde telegraafvergelijkingen, zodat het goed mogelijk is een elektrisch analogon te construeren.

Met name is veel onderzoek verricht
ter ontwikkeling van en met behulp
van elektrische analogons, die de
gehele bloedsomloop of een deel er-
van omvatten. In 1942 heeft Landes
een elektrisch analogon voor een groe
slagaders ontwikkeld. Daarna zijn elek-
trische analogons ontwikkeld door onder
andere Noordergraaf (1963), Jager (1965),
de Pater (1966) en Westerhof (1968).
Met behulp van deze analogons is het
mogelijk veel eigenschappen van de
bloedsomloop te verklaren en een aan-
tal grootheden te berekenen.
Van het slagaderlijk deel van de bloeds-
omloop is, doordat er veel onderzoek
aan verricht is, veel bekend. Daar-
entegen is van het aderlijk deel van
de bloedsomloop en van het hart nog
maar zeer weinig bekend. In een model
van de gehele bloedsomloop zullen dit
de onvermijdelijk zwakke plekken zijn.
Een meer gedetailleerde beschrijving
van de ontwikkelingen op haemo-
dynamisch gebied wordt gegeven in

Hemodynamics door Noordergraaf uit Biological Engineering, gerediged door Schwan L.G.J. Noordergraaf geeft hierin met name een zeer uitvoerig overzicht van recente ontwikkelingen, waarbij vele details ter sprake komen. Bovendien is hierbij een zeer uitvoerige literatuurlijst opgenomen. Hij verwijst ook naar eerder verschenen overzichten [Apelia, 1960 ('Windkessel' theorie); Rambossy, 1950-51 (transmissie-theorie); McDonald en Taylor, 1959].

2 Fysiologie van de bloedsomloop.

2.1 Inleiding.

In dit hoofdstuk wordt de fysiologie van de bloedsomloop in het kort behandeld. Ten eerste om relevante uitgangspunten en gegevens te verkrijgen voor het gestelde probleem, ten tweede om het probleem in een ruimere medische context te plaatsen.
Onder de bloedsomloop verstaan we de rondgang van het bloed door het lichaam.
De functie van het bloed is het transport van verschillende stoffen om ervoor te zorgen, dat het milieu interieur, de weefselvloeistof, die de weefsels omgeeft en doordrenkt, zoveel mogelijk constant van samenstelling blijft.
Het bloed stroomt door het bloedvatenstelsel, dat bestaat uit een complex samenstel van bloedvaten, om de weefsels van alle delen van het lichaam

te bereiken.
Het bloed wordt door het hart door het bloedvatenstelsel gepompt. Het bloed-vatenstelsel bestaat uit twee delen: de kleine circulatie en de grote circulatie. In de kleine circulatie wordt door het bloed in de longen zuurstof opgenomen en koolzuur afgegeven en in de grote circulatie, welke uit een aantal min of meer parallelle vaatstelsels bestaat, worden zuurstof en voedingsstoffen door het bloed in alle delen van het lichaam afgegeven en koolzuur en andere afbraakprodukten opgenomen.
De bloedsomloop is dus een transport-systeem, waarvan de functies zijn: het transport van zuurstof, voedingsstoffen, vitaminen en hormonen naar de weefsels van alle delen van het lichaam, het transport van koolzuur en andere afbraakprodukten van de weefsels van alle delen van het lichaam naar de plaatsen van uitscheiding en het transport van warmte.

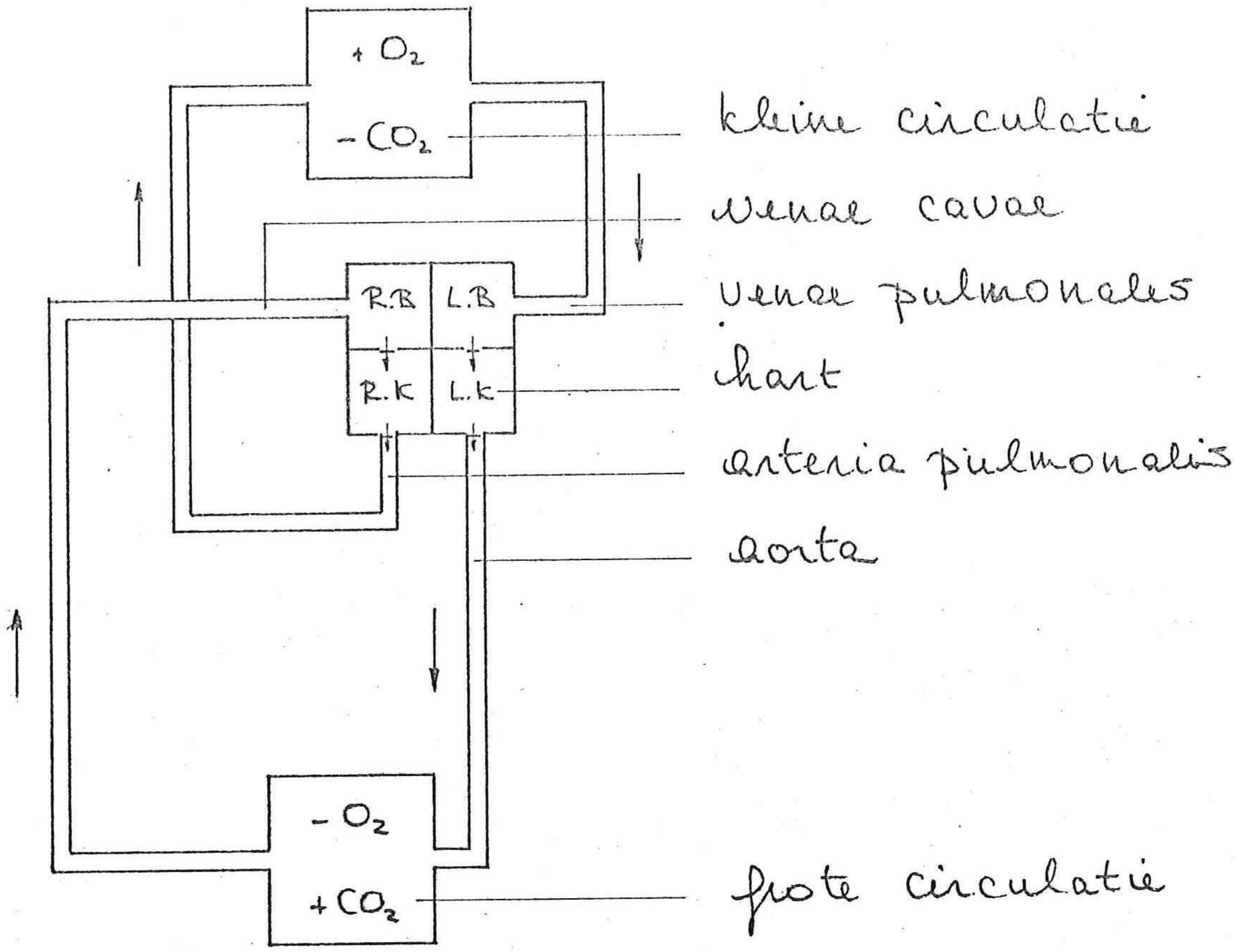
2.2 Bloed.

Het bloed fungeert in hoofdzaak als transportmiddel. Het vervoert verschillende stoffen naar en van de weefsels van alle delen van het lichaam om ervoor te zorgen, dat het milieu interieur zoveel mogelijk constant van samenstelling blijft.
Het bloed bestaat uit een vloeistof, het plasma, en een groot aantal deeltjes, de bloedlichaampjes, die zich in suspensie in het plasma bevinden.
In het bloedplasma zijn, buiten de stoffen, die door het bloed vervoerd worden, verschillende stoffen opgelost. De zouten zijn in echte oplossing aanwezig en de eiwitten (het albumine en de groep der globulinen) vormen een colloidale oplossing. De stoffen, die door het bloed vervoerd worden, zijn in het bloedplasma opgelost of met speciale componenten van het bloed verbonden.
Het volumepercentage van de deeltjes,

de haematocriet, is ongeveer 45 % van het totale bloedvolume.
De bloedlichaampjes worden in drie groepen verdeeld: de rode bloed-lichaampjes, de witte bloedlichaampjes en de bloedplaatjes. De rode bloed-lichaampjes hebben een zeer belangrijke functie bij het transport van zuur-stof en koolzuur. De functie van de witte bloedlichaampjes ligt voorna-melijk op het terrein van de afweer tegen micro-organismen en vreemde voorwerpen, die het lichaam zijn binnengedrongen (o.a. infectiekiemen). De bloedplaatjes vervullen een be-langrijke functie bij de bloedstel-ping en de bloedstolling. De rode bloedlichaampjes zijn ronde schijven met een diameter van 6-9 µ. Zij vormen verreweg het grootste deel van de haematocriet.
De dichtheid van het bloed bedraagt ongeveer 1.05 g/cm^3. en het totale bloedvolume is bij een volwassen man gemiddeld ongeveer 5 liter.

2.3 Hart.

Het hart pompt het bloed door het bloedvatenstelsel. In figuur 2.1. is een schematische voorstelling van de bloedsomloop weergegeven.
Het hart is door een tussenschot in twee helften verdeeld, de linker en de rechter helft. Elk van deze helften bestaat weer uit twee delen: het bovenste de boezem, en het onderste, de kamer. Tussen de boezems en de kamers bevinden zich kleppen, de hartkleppen. Ook tussen de kamers en de daaruit ontspringende slagaders bevinden zich kleppen. De kamers zijn de hoofdpompen, die het bloed door de circulaties pompen en de boezems zijn de hulppompen, die mee helpen om de kamers met bloed te vullen.
Het bloed wordt door de rechterkamer in de arteria pulmonalis, de longslagader, gepompt. Dit is het eerste bloedvat van de kleine circulatie.



R.B. rechter boezem L.B. linker boezem
R.K. rechter kamer L.K. linker kamer

De pijlen geven de richting aan, waarin het bloed zich beweegt. Daarnaast geven de pijlen in het hart tevens aan, in welke richting de kleppen open kunnen gaan.

Figuur 2.1 Schematische voorstelling van de bloedsomloop.

Na het passeren van de longen verzamelt het bloed zich in de linkerboezem, vanwaar het naar de linkerkamer gaat. Door de linkerkamer wordt het bloed in de aorta, de lichaamsslagader, gepompt. Dit is het eerste bloedvat van de grote circulatie. Vandaar verspreidt het bloed zich naar alle delen van het lichaam en verzamelt zich vervolgens in de rechterboezem om tenslotte weer in de rechterkamer aan te komen.

De pompwerking van het hart wordt veroorzaakt door ritmische contracties van de hartspieren, die de harthol-ten omgeven. De contracties worden veroorzaakt door elektrische prikkels, die in het hart zelf ontstaan (automatie). De contractiefase van het hart wordt de systole genoemd en de relaxatiefase de diastole. Een hartcyclus bestaat uit een aantal opeenvolgende fasen: contractie van de boezems (boezemsystole, kamer

in diastole), contractie van de kamers (kamersystole of systole, boezems in diastole) en de hartpauze (boezems en kamers in diastole). Het spierweefsel van de beide boezems vormt één geheel, evenals het spierweefsel van de beide kamers. Deze spierweefsels zijn echter onderling wel gescheiden. Om een efficiënte contractie van boezem en kamer mogelijk te maken. De weergegeven hartcyclus voltrekt zich dan ook voor beide harthelften gelijktijdig. We bekijken nu wat er gebeurt tijdens de hartcyclus in de rechter harthelft. Voor de linker harthelft gelat een analoge beschouwing. In figuur 2.2 is een vereenvoudigd schema van de tijdens de hartcyclus optredende drukvariaties in de beide boezems, de beide kamers, de aorta en de arteria pulmonalis en van het verloop van het totale volume van de beide kamers weergegeven naar Zijlstra e.a. [14].

Verklaring van de symbolen, die in figuur 2.2 gebruikt zijn.

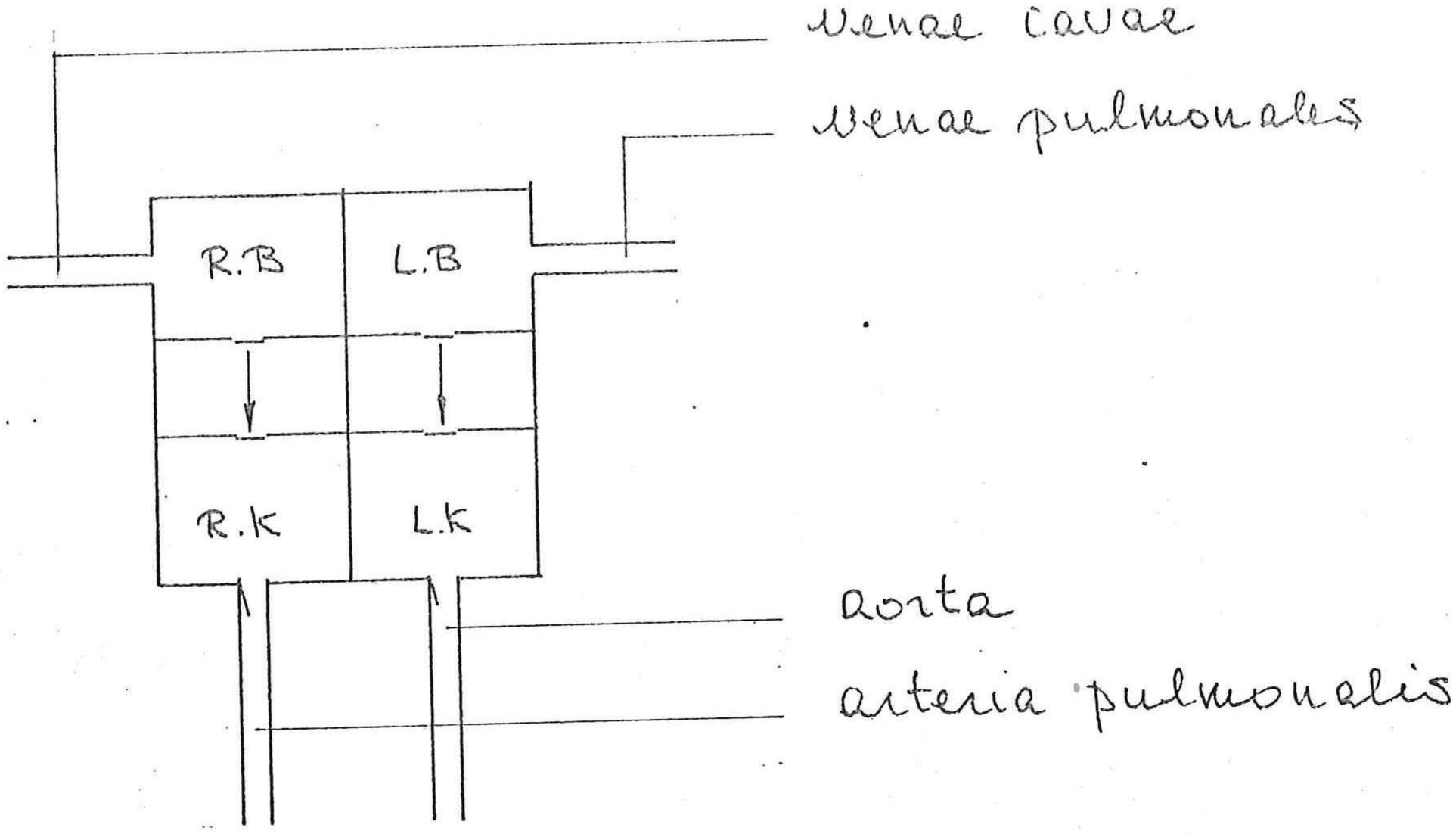
p_{lb} = druk in de linkerboezem
p_{lk} = druk in de linkerkamer
p_{rb} = druk in de rechterboezem
p_{rk} = druk in de rechterkamer
p_a = druk in de aorta
p_{ap} = druk in de arteria pulmonalis
V = volume van linker en rechter kamer
ch.k = hartkleppen.
k = kleppen tussen hart en slagaders
e = ejectie
v = vulling.

Veronderstel dat het hart in de fase van de hartpauze verkeert. Zowel de boezem- als de hartspier zijn dan verslapt, zodat zij geen druk op de inhoud uitoefenen. De hartkleppen staan open en boezem en kamer vormen dus één ruimte. De kleppen tussen de kamer en de arteria pulmonalis zijn wel gesloten, omdat in de arteria pulmonalis een hogere druk heerst dan in het hart. Het bloed, dat vanuit de venae cavae, de holle aders, die de laatste bloedvaten van de grote circulatie vormen, in de boezem aankomt, kan direct de kamer binnenstromen. Na het ontstaan van de elektrische prikkel vindt allereerst de contractie van de boezem plaats. Het resterend bloed, dat zich in de boezem bevindt, wordt onder geringe druk naar de kamer geduwen. Tussen de boezem en de venae cavae bevinden zich geen kleppen, maar de terugstroming wordt zoveel mogelijk verhinderd door

contracties, die bestaan uit hart-
spierweefsel. En treedt echter wel enige
stuwing in de venae cavae op. Vervol-
gens vindt de contractie van de kamer
plaats. Zodra de druk in de kamer wat
hoger dan die in de boezem is, sluiten
de hartkleppen zich. De druk loopt daar-
na snel op. Dit wordt de isovolumetrische
contractie genoemd, omdat het volume
van de kamer praktisch niet verandert.
Als de druk in de kamer wat hoger is
dan de druk in de arteria pulmonalis,
gaan de kleppen tussen kamer en arteria
pulmonalis open en wordt het bloed
snel uitgedreven. Aanvankelijk loopt de
druk in de kamer nog op om daarna
weer snel te dalen. Zodra de druk in
de kamer wat lager is dan de druk in
arteria pulmonalis sluiten de kleppen
tussen kamer en arteria pulmonalis
weer. Gedurende de tijd, dat bloed
uit de kamer wordt uitgedreven, is de
boezemspier verslapt en wordt bloed
uit de venae cavae naar de boezem
gezogen, omdat de scheidingswand

tussen boezem en kamer naar beneden beweegt. Het hart werkt dus als zuigpers pomp. In figuur 2.3 is een schematische voorstelling van de zuigperspompwerking van het hart weergegeven. Na het sluiten van de kleppen tussen kamer en arteria pulmonalis loopt de druk in de kamer snel verder terug. Dit wordt de isovolumetrische relaxatie fenoemd. Als de druk in de kamer helemaal weggevallen is, gaan de hartkleppen weer open en herhaalt de hele cyclus zich. De hartkleppen en de kleppen tussen de kamers en de daaruit ontspringende slagaders zorgen er dus voor, dat het bloed maar in één richting kan stromen.

De maximale druk in de linker kamer bedraagt ongeveer 120 mm Hg en is veel hoger dan de maximale druk in de rechterkamer, die ongeveer 25 mm Hg bedraagt. De bloeddruk wordt gewoonlijk gecorrigeerd tot het hartniveau door de hydrostatische druk ten opzichte van het hartniveau op te tellen



R.B : rechter boezem L.B : linker boezem
R.K : rechter kamer L.K : linker kamer.

De pijlen geven de beweging van de scheidingswand aan, wanneer bloed uit de kamers wordt uitgedreven. Gelijkertijd wordt bloed uit de aders door de boezems aangezogen. Tijdens de contractiefase wordt overigens ook de dwarsdoorsnede van de kamers kleiner.

Figuur 2.3 Schematische voorstelling van de zuigpompwerking van het hart.

of af te trekken. Onder de bloeddruk verstaan we het verschil tussen deze gecorrigeerde druk en de atmosferische druk. Het verschil in maximale druk in de linker- en de rechterkamer komt overeen met het verschil in perifere weerstand. Onder de perifere weerstand verstaan we het quotient van de gemiddelde bloeddruk en het gemiddelde debiet. De perifere weerstand van de grote circulatie is veel groter dan de perifere weerstand van de kleine circulatie.
De hoeveelheid bloed, die per slag uitgedreven wordt, het slagvolume, is gemiddeld hetzelfde voor beide kamers en bedraagt ongeveer 80 cm^3 bij een volwassen man in rusttoestand. De hartfrequentie bedraagt in dat geval 60-70 slagen per minuut. De hoeveelheid bloed, die per minuut door beide kamers uitgedreven wordt, het minuutvolume, is gelijk aan slagvolume maal frequentie en bedraagt dus ongeveer 5 liter, wat overeenkomt met

de totale hoeveelheid bloed in het lichaam.
Het volume van de linker- en de rechterkamer is ongeveer gelijk. Omdat de perifere weerstand van de grote circulatie veel groter is dan de perifere weerstand van de kleine circulatie, terwijl het minuutvolume voor beide kamers gelijk is, is de spierwand van de linkerkamer beduidend dikker dan de spierwand van de rechterkamer om de grotere weerstand te overwinnen. De perifere weerstand van de grote circulatie bedraagt, uitgaande van de vermelde gegevens, ongeveer 1600 dyns / cm^5.

2.4 Grote circulatie.

Het bloed wordt via de grote circulatie naar alle delen van het lichaam getransporteerd. Het bloedvatenstelsel is het gesloten geleidingssysteem, dat bestaat uit bloedvaten, die zich veelvuldig vertakken en samenvoegen.
Vanuit de linkerkamer wordt het bloed in de aorta gepompt. Deze vertakt zich in kleinere slagaders, die zich ook op hun beurt weer in nog kleinere slagaders vertakken. Deze manier van vertakken gaat steeds verder. Na een vertakking neemt het doorstromingsprofiel toe, d.w.z. het totale oppervlak van de bloedvaten na een vertakking is groter dan het oppervlak van het bloedvat voor de vertakking.
Het oppervlak van een enkel bloedvat na de vertakking is echter kleiner dan het oppervlak van het bloedvat voor de vertakking. Het bloed stroomt dus door steeds kleiner wordende slagaders, vervolgens door arteriolen;

die tenslotte overgaan in capillairen of haarvaten, de kleinste bloedvaten van het bloedvatenstelsel. De capillairen vormen een zeer dicht netwerk in elke weefsels. De totale doorsnede van de capillairen is ongeveer 500 maal zo groot als de doorsnede van de aorta. De capillairen verenigen zich weer in grotere bloedvaten, de venulen. die zich op hun beurt weer verenigen in steeds grotere worden de aders, totdat er tenslotte twee over zijn, de vena cava inferior en de vena cava superior, de onderste en de bovenste holle ader, die het bloed in het hart storten. De bloedvaten worden dus verdeeld in slagaders, arteriolen, capillairen, venulen en aders. In figuur 2.4 zijn enige gegevens, die betrekking hebben op de verschillende bloedvaten, vermeld naar de Vaten [8].

De bouw van de verschillende bloedvaten is niet overal gelijk, maar aangepast aan de bijzondere functie, die

	straal (cm)	stroom-snelheid (cm/s)	totale aantal
aorta	1,4	40	1
arteriolen	0,01		
capillairen	0,0004	0,1	$5 * 10^9$
venulen	0,015		
venae cavae	1,5 / 1,0	25	2

Uit de straal en de gemiddelde stroom-snelheid volgt, dat het aantal capillairen, dat met elkaar parallel is, $5 * 10^9$ bedraagt.

Figuur 2.4. Enige gegevens met betrekking tot de verschillende bloedvaten naar de Peter [8].

zij vervullen. De belangrijkste structuur-
elementen van de wand zijn elastine,
collageen en glad spierweefsel. De
rekbaarheid van de wand hangt af
van de verhouding, waarin deze
structuurelementen voorkomen. De
elastische vezels kunnen tot 250 %, de
collagene vezels daarentegen slechts
tot 110 % van de oorspronkelijke lengte
gerekt worden. De rekbaarheid van
de gladde spiervezels is afhankelijk
van hun contractietoestand. De
slagaders hebben een dikke, stevige
wand, die voornamelijk uit elastische
vezels bestaat. De wand van de
arteriolen bestaat bijna uitsluitend
uit spiervezels, die vooral circulair
in de wand zijn gerangschikt. De capil-
lairen hebben een zeer dunne wand.
De aders hebben een wand, die dunner
en minder elastisch is dan de wand
van de slagaders.
Sommige grote aders zijn van kleppen
voorzien, die alleen maar een bloed-
stroom in de richting van het hart

toelaten. Hierdoor wordt voorkomen, dat
bloed terugstroomt, onder anderen wan-
neer het bloed aanvangs opgestuwd
wordt tijdens de boezemsystole.
Het hart levert de aandrijvende kracht,
die nodig is om de weerstand, die het
bloed ten gevolge van de beweging
ondervindt, te overwinnen. Het hart
doet dat het bloed blijven stromen door
de bloeddruk in de aorta en de arteria
pulmonalis op peil te houden. Het
hart werkt echter periodiek met stoten,
terwijl het bloed in de capillairen
continu dient te stromen. Om te
voorkomen, dat enerzijds de bloeddruk
al te veel varieert in het bloedvaten-
stelsel en dat anderzijds het bloed
de capillairen stootsgewijs binnen-
stroomt, zoals het geval zou zijn
als de grote slagaderen stare buizen
waren, is de elasticiteit van de
wand van groot belang. Doordat de
wanden elastisch zijn, kan de pulserende
bloedstroom omgezet worden in een
continue bloedstroom. Dit staat bekend

als de windketelfunctie van de aorta. Gedurende de systole van de linker-boezem, als het bloed in de aorta gedreven wordt, neemt de druk in de aorta toe en rekt de wand van de aorta uit, waardoor een deel van het bloed tijdelijk wordt geborgen. Gedurende de diastole, wanneer geen bloed aangevoerd wordt, neemt de druk in de aorta af, doordat het bloed wegstroomt naar de capillairen. De druk in de aorta varieert dus in het ritme van het kloppende hart. Er ontstaat dus een drukgolf, die in het begin van het slagaderlijk deel van de grote circulatie een snelheid heeft van ongeveer 5 m/s. De amplitude van de drukgolf wordt aanvankelijk, naarmate we verder van het hart komen, groter en neemt daarna in het gebied van de arteriolen ten gevolge van de zwarte demping snel af. In de capillairen is de drukgolf praktisch verdwenen en is, evenals in de aderen, een continue

stroom aanwezig.
In de aorta bedraagt de maximale of systolische druk ongeveer 120 mm Hg. de minimale of diastolische druk ongeveer 80 mm Hg en de gemiddelde druk ongeveer 100 mm Hg. Het verval in de gemiddelde druk bedraagt in de grote slagaders slechts enkele mm's Hg, omdat de weerstand hier zeer klein is. Daarentegen is het drukverval in de arteriolen zeer groot. De arteriolen hebben namelijk een kleine straal en de weerstand is omgekeerd evenredig met de vierde macht van de straal. Wiliswaar is het doorstromingsprofiel el veel groter dan aanvankelijk in de grote slagaders. d.w.z. dat er veel bloedvaten parallel staan, maar dit kan het grote weerstandseffect niet opheffen. Het drukverval in de capillairen bedraagt weer veel minder. Een enkele capillair heeft wel een zeer grote weerstand, maar het doorstromingsprofiel is nu zeer ruim. Omdat het door-

stromingsprofiel van de aorta naar de capillairen toe steeds groter wordt, wordt, bij gelijk gemiddeld debiet, de stroomsnelheid van het bloed in de richting van de aorta naar de capillairen veel kleiner. In figuur 2.5 zijn enige haemodynamische verhoudingen weergegeven naar Zijlstra e.a. [14]. Het drukverval in de grote slagaderen bedraagt 3 mm Hg, in de arteriolen 63 mm Hg en in de capillairen 21 mm Hg. In het aderlijk deel van de grote circulatie bedraagt het totale drukverval slechts 13 mm Hg. De totale weerstand wordt dus in sterke mate bepaald door de weerstand van de arteriolen.

We hebben al gezien, dat de wand van de arteriolen bijna uitsluitend bestaat uit spiervezels, die vooral circulair in de wand zijn gerangschikt. Hierdoor is het mogelijk, dat de arteriolen zich door directe of indirecte prikkels verwijden of vernauwen, zodat het mogelijk is de weerstand zeer

Verklaring van de symbolen, die in figuur 2.5 gebruikt zijn.

P = bloeddruk
Q_m = minuutvolume
R_s = weerstand uitgedrukt als percentage van de totale perifere weerstand
S = doorstromingsprofiel.
$\bar{v}$ = gemiddelde stroomsnelheid.
S = slagaders
a = arteriolen
c = capillairen
v = venulen
ad = aders.

De drukvariaties in de grote slagaders zijn met een stippellijn, de gemiddelde bloeddruk met een getrokken lijn weergegeven. Bij de arteriolen zijn ook de kleine slagaders opgenomen.

effectief te regelen, omdat juist in de arteriolen een groot drukverval optreedt. Als in een bepaald deel van het lichaam een grotere doorstroming met bloed gewenst is, kan dit tot stand gebracht worden, doordat daar ter plaatse verwijding van de arteriolen (vasodilatatie) optreedt, waardoor de weerstand van dit deel van het lichaam relatief kleiner wordt ten opzichte van de (parallelle) weerstanden van de andere delen van het lichaam. Vaak treedt tegelijkertijd op andere plaatsen vernauwing van de arteriolen (vasoconstrictie) op, hetgeen voor het deel van het lichaam, waar een grotere doorstroming met bloed gewenst is, een soortgelijk effect heeft. De mogelijkheid, dat de arteriolen zich verwijden of vernauwen, is dus van groot belang in verband met de functie van de arteriolen als regelaars van de bloedtoevoer naar de door hen verzorgde gebieden.

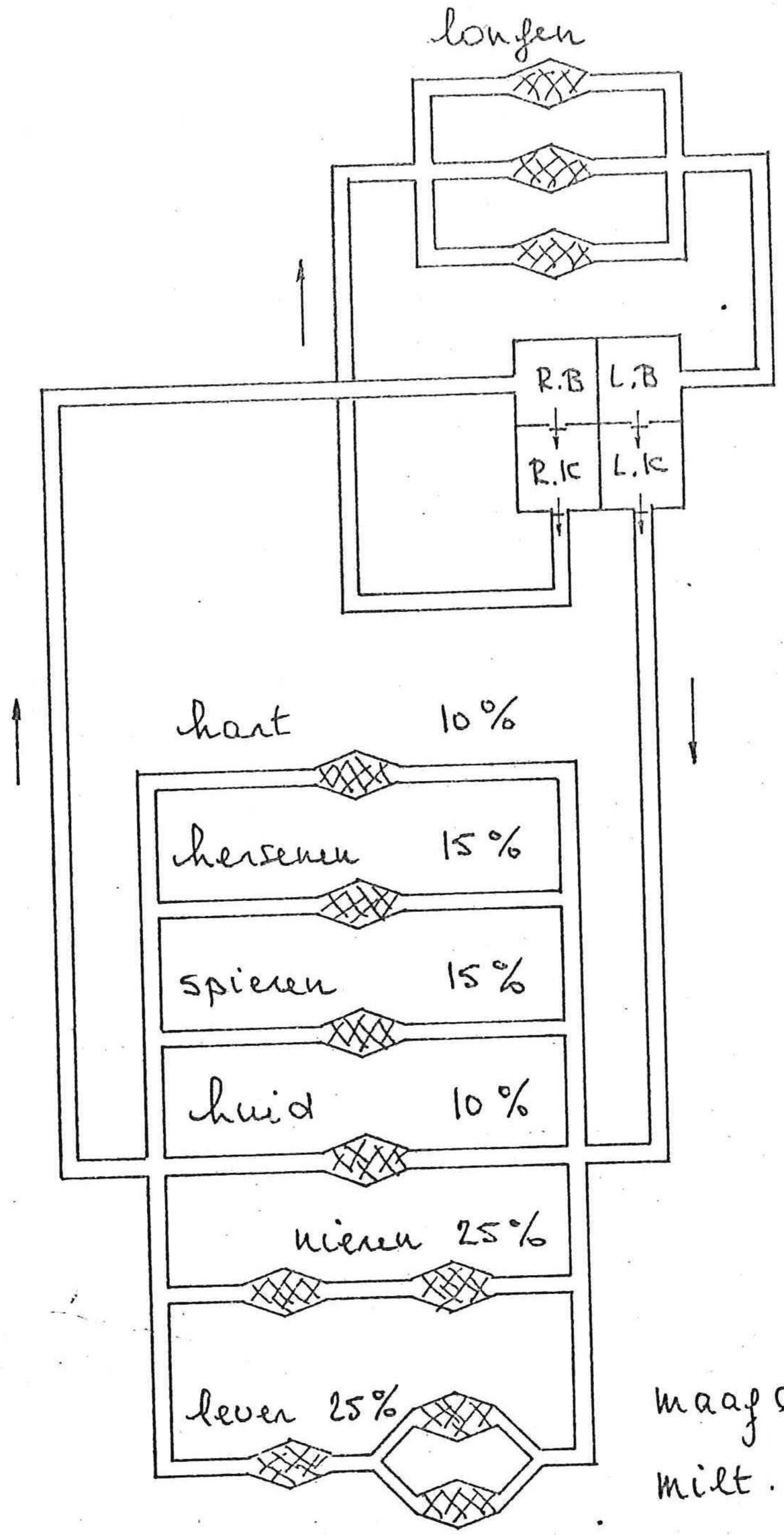
In de capillairen, die een zeer dunne

wand hebben, kan de uitwisseling van stoffen tussen het bloed en de weefsels plaatsvinden. De capillairen, die een dicht netwerk in alle weefsels vormen, zijn te beschouwen als het feitelijke werkingsgebied van de bloedsomloop. Wil het bloed zijn taak vervullen, dan moet het, om een goede uitwisseling van stoffen mogelijk te maken, continu en langzaam stromen in de capillairen. We hebben al gezien, dat door de elasticiteit van de slagaders en door het grote doorstromingsprofiel van de capillairen aan deze voorwaarden kan worden voldaan.
In de vene cave treedt weer een enigszins pulserende stroom op, onder andere ten gevolge van de zuigerspompwerking van het hart.
Waar tot nu toe over de bloeddruk is gesproken, is steeds de zwaartekracht buiten beschouwing gelaten, omdat de leden vermelde definitie is aangehouden. Deze bloeddruk bepaalt immers de drukgradiënt, die het bloed

doet stromen. Doordat de bloedvaten elastisch zijn, heeft de zwaartekracht wel enige invloed. Bij een staande volwassen man is het niveau van het hart 115 cm. Daardoor zal in staande toestand de totale druk van het bloed in een bloedvat onder in de voet 85 mm Hg hoger zijn dan de bloeddruk eldaar. In liggende toestand zal de druk van het bloed ongeveer gelijk zijn aan de bloeddruk. Zo zal bij opstaan de druk van het bloed veranderen en derhalve ten gevolge van de elasticiteit de straal van de bloedvaten. Als we veronderstellen, dat de weerstand weinig verandert (de arteriolen, die relatief het grootste aandeel in de totale weerstand hebben, hebben een spierwand), dan wordt de drukgradient ook amper beïnvloed.

De grote circulatie bestaat uit een aantal min of meer parallelle vaatstelsels of circulaties. In figuur 2.6 is een schematische voorstelling van de bloedsom-

loop weergegeven naar Attinger [2].
In alle delen van het lichaam wordt
zuurstof door het bloed aan de weefsels
afgegeven en koolzuurgas opgenomen. uit
de weefsels. De grote regeneratieorganen
van het bloed zijn, naast de longen
in de kleine circulatie, de maag, het
darmstelsel en de lever. In de kleine
circulatie wordt in de longen door
het bloed zuurstof opgenomen en kool-
zuur afgegeven. In de circulatie van
het maagdarmstelsel worden voedings-
stoffen door het bloed opgenomen
en in de circulatie van de nieren en
van de huid worden verbrandings-
producten door het bloed afgegeven.



Het percentage geeft aan, welk percentage van de totale hoeveelheid bloed, die door de grote circulatie stroomt, door het betreffende deel stroomt.

maag darmstelsel
milt.

De pijlen geven de richting aan, waarin het bloed zich beweegt.

Figuur 2.6 Schematische voorstelling van de bloedsomloop naar Attinger [2].

2.5 Kleine circulatie.

Vanuit de rechterkamer wordt het bloed in de arteria pulmonalis gepompt. Evenals de grote circulatie bestaat de kleine circulatie uit een ingewikkeld vertakt stelsel van bloedvaten. De bloedvaten worden ook nu weer verdeeld in slagaders, arteriolen, capillairen, venulen en aders. De kleine circulatie eindigt met de vier venae pulmonales, die het bloed in de linkerboezem storten.

De perifere weerstand in de kleine circulatie is veel kleiner dan die in de grote circulatie, omdat de bloedvaten in de kleine circulatie veel korter zijn. De druk in de arteria pulmonalis is dan ook veel lager dan de druk in de aorta. De systolische druk bedraagt ongeveer 25 mm Hg en de diastolische druk ongeveer 10 mm Hg. In verband met deze lagere druk is de wand van de bloedvaten in de kleine circulatie dunner dan de wand van de bloed-

vaten in de grote circulatie, die een overeenkomstige straal hebben.
In de longen wordt door het bloed zuurstof opgenomen en koolzuur afgegeven.

2.6 Controlemechanismen.

De hoeveelheid bloed, die in de verschillende delen van het lichaam nodig is, kan al naar gelang van de omstandigheden sterk variëren. Zo is tijdens de spijsvertering na de maaltijd veel bloed nodig in de circulatie van het maagdarmstelsel en tijdens (zware) fysieke inspanning in de circulatie van de spieren. Om aan deze variërende behoefte te voldoen, heeft het lichaam vele controlemechanismen om een goed functioneren van de bloedsomloop via regulaties tot stand te brengen. De controlemechanismen kunnen de eigenschappen van de bloedvaten en/of het hart beïnvloeden. De werking van het hart kan beïnvloed worden door een variatie in onder andere de frequentie, de contractiespanning en het slagvolume. We hebben al gezien, dat de verdeling van het bloed over de verschillende delen van het lichaam geregeld kan worden door variatie in

de weerstand van de arteriolen.
De werking van de verschillende controle-
mechanismen leiden onder andere tot
een bijna constante gemiddelde druk
in de grote slagaders en aders onder
normale omstandigheden. Hiertoe bevin-
den zich op verschillende plaatsen pres-
soreceptoren in de wanden. Zo zal
bij voorbeeld, als er enige verwijding
van arteriolen optreedt om de weer-
stand van het betreffende deel van
de grote circulatie te verkleinen, zodat
er meer bloed door kan stromen, op
andere plaatsing vernauwing van
arteriolen optreden, hetgeen voor het
deel van het lichaam, waar een gro-
tere doorstroming met bloed gewenst
is, een soortgelijk effect heeft.
Hierdoor wordt de totale weerstand
ongeveer gelijk gehouden, waardoor
het hart een gelijke arbeid blijft
verrichten.
In extreme situaties zijn echter zeer
grote variaties mogelijk. Zo kan bij
een sportman tijdens zware fysieke

inspanning de hartfrequentie oplopen tot 240, het bijbehorend slagvolume tot 150 ml en dienhalve het minuut-volume tot ongeveer 35 liter.
De bloedsomloop is een zeer complex systeem, zowel door zijn ingewikkelde bouw als door het feit dat een groot aantal controlemechanismen, die elkaar vaak beïnvloeden, een dynamisch evenwicht van de bloedsomloop in stand houden.

3 Haemodynamica

3.1 Afleiding van de lange golfvergelijkingen voor een laminaire stroom in een cilindrische buis met een dunne elastische wand.

Om tot de opzet van een model te komen, worden allereerst de lange golfvergelijkingen voor een laminaire stroom in een elastische wand afgeleid.
Bij de afleiding van de lange golfvergelijkingen gaan we uit van de volgende veronderstellingen:

1 Het bloed gedraagt zich als een vloeistof volgens Newton.
2 De stroming is laminair.
3 De dichtheid ρ en de viscositeit η van het bloed zijn overal constant.
4 Het bloed is onsamendrukbaar (ten opzichte van de berging).
5 Het bloedvat is rotatiesymmetrisch.
6 De golflengten, die corresponderen

met de bij de bloedsomloop voor-
komende frequenties zijn veel groter
dan de inwendige straal van het
bloedvat, zodat de stroming bij
voldoende benadering één-dimensio-
neel is.

7 Het wandmateriaal is chemogeen,
elastisch, isotroop en voldoet aan
de wet van Hooke; de wanddikte
is klein ten opzichte van de straal
van het bloedvat, radiale uitwij-
kingen zijn klein en longitudinale
bewegingen zijn niet mogelijk; ten
gevolge van de grote elasticiteits-
modulus van het wandmateriaal
is de massa van de wand te verwaar-
lozen.

8 De elasticiteitsmodulus E is overal
constant.

Uit de afleiding, die door Womersley [10]
wordt gegeven, wordt de radiale snel-
heid, alhoewel deze klein is, wel
meegenomen. Deze afleiding is echter
nogal complex, omdat in dat geval
Besselfuncties nodig zijn. Om deze

ingewikkelde wiskundige afleidingen te vermijden, is de hierna gegeven afleiding vereenvoudigd door de radiale snelheid te verwaarlozen, wat ook door andere onderzoekers wel is gedaan. Daar ook het op te zetten model sterk vereenvoudigd wordt, zodat de resultaten toch een kwalitatief karakter hebben, is de vereenvoudiging, dat de radiale snelheid verwaarloosd wordt, wel verantwoord.
De Pater [8] gebruikt de vergelijkingen van Womersley en verwaarloost de radiale snelheid niet. Hij toont zeer uitvoerig aan, dat de overige veronderstellingen geoorloofd zijn.
In figuur 3.1 is een overzicht gegeven van gebruikelijke waarden voor verschillende grootheden. Hierbij zijn zowel de eenheden aangegeven, die in de literatuur gebruikelijk zijn, als de eenheden van het S.I. (m-kg-s).
De berekeningen in het verslag zijn steeds uitgevoerd in eenheden van het S.I.

E	$4 * 10^6$ dyn / cm^2	$4 * 10^5$ N/m^2
η	$3 * 10^{-2}$ dyns / cm^2	$3 * 10^{-3}$ Ns/m^2
ρ	1.05 g / cm^3	$1.05 * 10^3$ kg/m^3

Hierin is:

E = elasticiteits modulus van het wandmateriaal.

η = viscositeit van het bloed

ρ = dichtheid van het bloed

Voorts is:

r_0 = inwendige straal van het bloed-vat

h = wanddikte.

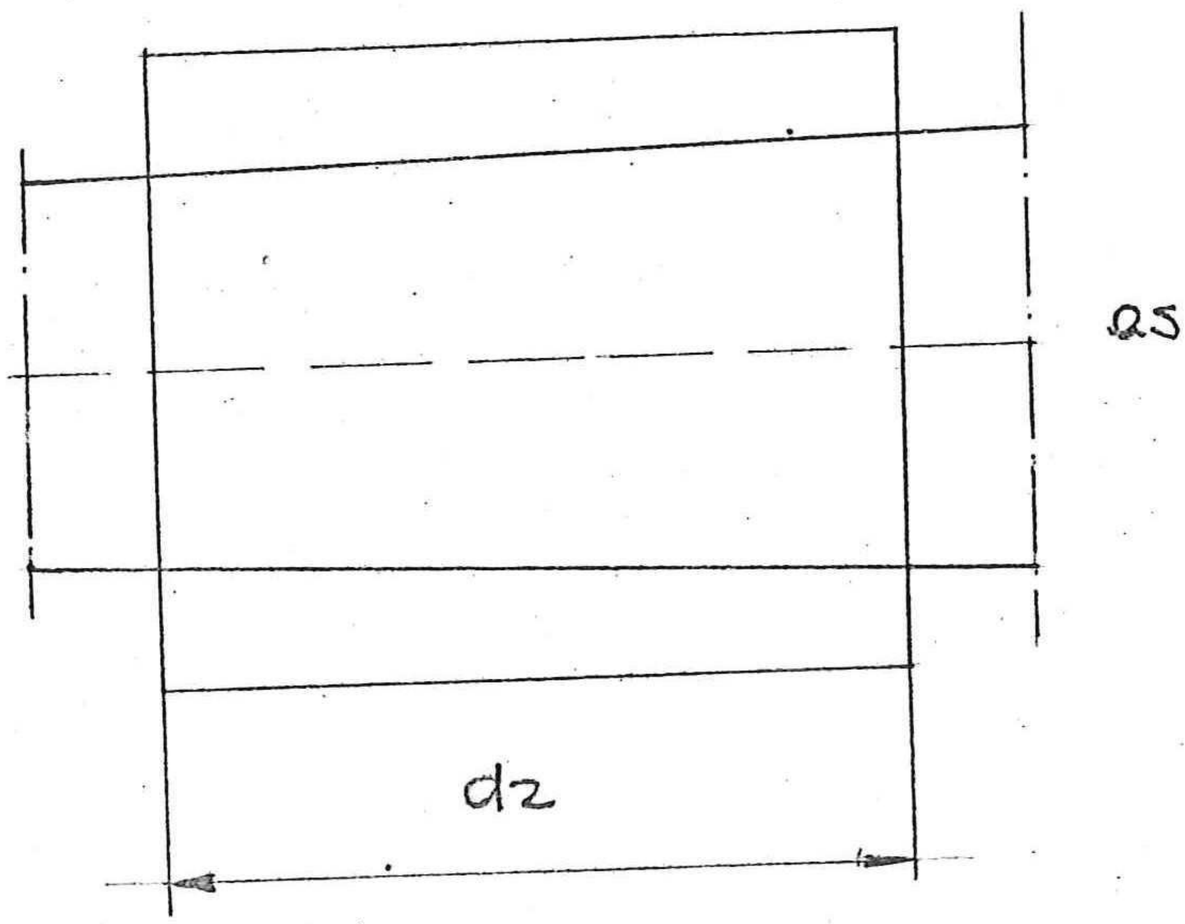
Dan is:

$\frac{h}{r_0}$ = 0,1

r_0 van de aorta : 1.4 cm

Figuur 3.1 Overzicht van gebruikelijke waarden voor verschillende grootheden.

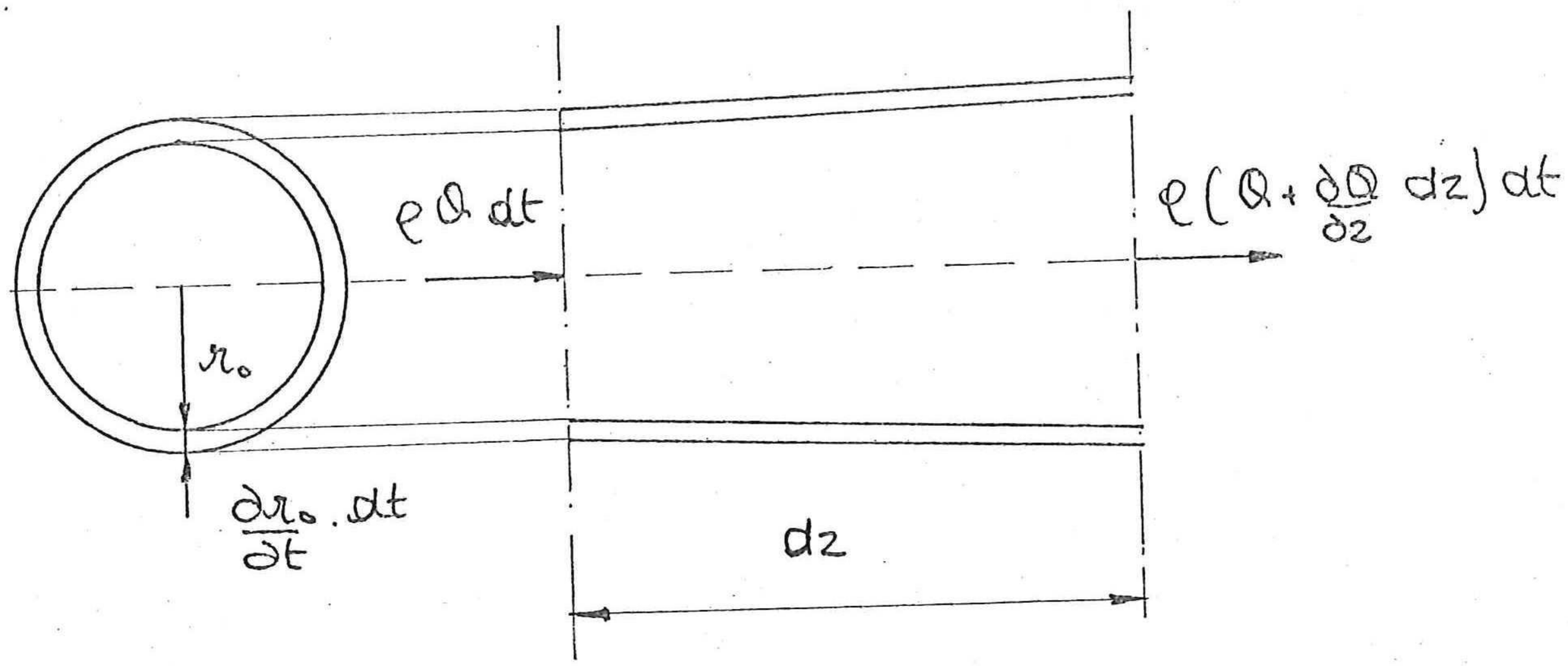
Voor de afleiding van de lange golf-
vergelijkingen volgen we de beschou-
wingswijze van Euler. Voor een ruim-
telijk vastgelegd volume worden de
massabalans en de impulsbalans op-
gesteld ter bepaling van respectievelijk
de continuiteitsvergelijking en de bewe-
gingsvergelijking. Omdat we lange
golven bekijken, waarat de waterbewe-
ging bij voldoende benadering één-
dimensionaal verondersteld. Als
volume kiezen we een ruimtelijke moot,
die het gehele doorstromingsprofiel
steeds omvat en in de stroomrichting
een constante lengte dz heeft. In
figuur 3.2 is dit weergegeven



Figuur 3.2 Ruimtelijke moot.

De massabalans voor het vaste volume is:

$\frac{\partial}{\partial t}$ (massa in vast volume) =
(instroming - uitstroming) per tijdseenheid.



Figuur 3.3 Massabalans voor de fysische ruimtelijke moot.

Stel:

Q = debiet

$\bar{v}$ = gemiddelde snelheid van het bloed (over het doorstromingsprofiel).

S = oppervlak van het doorstromings-profiel.

Dan geldt dus:

$Q = \bar{v} . S = \bar{v} . \pi r_0^2$.

We hebben verondersteld, dat de dichtheid van het bloed ϱ constant is. De toename van de massa in een tijd dt binnen de beschouwde moot is dan:

$$\varrho \frac{\partial r_0}{\partial t} \cdot dt \cdot dz \cdot 2\pi r_0.$$

Dit moet gelijk zijn aan het verschil van de in- en uitgestroomde massa in een tijd dt. Dit is gelijk aan:

$$\varrho Q\, dt - \varrho \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot dz\right) dt = -\varrho \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot dz \cdot dt.$$

Dit levert: $\varrho \dfrac{\partial r_0}{\partial t}\, dt\, dz\, 2\pi r_0 = -\varrho \dfrac{\partial Q}{\partial z}\, dz\, dt$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{\partial \pi r_0^2}{\partial t} = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

De continuiteitsvergelijking luidt:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -\frac{\partial S}{\partial t}.$$

De continuiteitsvergelijking bevat nog de afgeleide van S naar t. Deze betrekking kan worden geëlimineerd met behulp van de zogenaamde toestandsvergelijkingen, die de nodige betrekkingen leveren om ook de materiaaleigenschappen in rekening te brengen.

De omtrek was $2\pi r_o$ en wordt nu

$$2\pi r_o \left(1 + \frac{r_o}{Eh}\, dp\right)$$

De diameter wordt dus : $2r_o \left(1 + \frac{r_o}{Eh}\, dp\right)$

De oppervlakte van het doorstromings-profiel was πr_o^2 en wordt dus :

$$\pi r_o^2 \left(1 + \frac{r_o}{Eh}\, dp\right)^2 =$$

$$\pi r_o^2 \left(1 + \frac{2r_o}{Eh} \cdot dp + \left(\frac{r_o}{Eh}\, dp\right)^2\right).$$

Volgens de gegevens van figuur 3.1 en voor $dp = 20$ mm Hg $/ cm^2 = 2700$ N $/ m^2$ wordt : $\frac{r_o}{Eh}\, dp = \frac{10}{4.10^5} \cdot 2700 = \frac{7}{100}$.

We kunnen $\left(\frac{r_o}{Eh}\, dp\right)^2$ dus verwaarlozen.

Dan wordt : $dS = \pi r_o^2 \cdot \frac{2r_o}{Eh}\, dp$

$$\frac{dS}{S} = \frac{2r_o}{Eh}\, dp$$

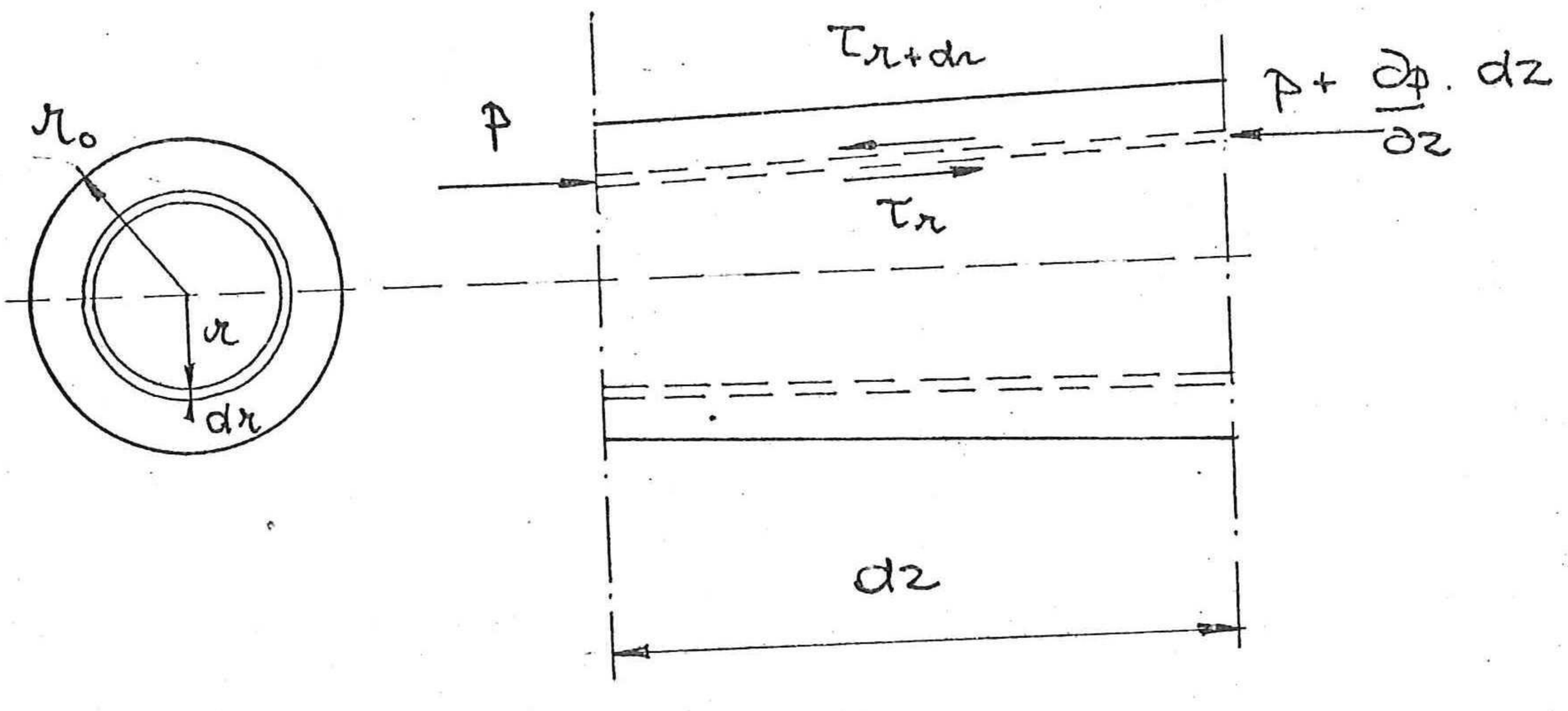
Daar S alleen een functie van p is, wordt : $\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dS}{dp} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{S}{Eh/2r_o} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$.

Deze betrekking kunnen we in de continuiteitsvergelijking invullen.
De continuiteitsvergelijking luidt dan:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = - \frac{2 r_o S}{E h} \cdot \frac{\partial p}{\partial t}$$

De impulsbalans voor het vaste volume is: $K = \frac{d(mv)}{dt}$

= resulterend uitstromend impulstransport + impulstoename binnen het beschouwde volume per eenheid van tijd.



Figuur 3.5. Impulsbalans voor een ruimtelijk element $S^* . dz$, waarin $S^* = 2\pi r\, dr$.

Omdat rotatie-symmetrie verondersteld is, beschouwen we allereerst een element $2\pi r\, dr\, dz = S^*.dz$. De krachten, die in positieve z-richting werken, zijn de kracht ten gevolge van het drukverval en de kracht ten gevolge van de wrijving. De zwaartekracht wordt buiten beschouwing gelaten. In dit verband wordt hierinnerd aan de eerder vermelde definitie van de bloeddruk.

De kracht ten gevolge van het drukverval: links werkt een druk p, rechts werkt een druk $-\left(p + \frac{\partial p}{\partial z}.dz\right)$.

De resulterende kracht $K_1^* = -\frac{\partial p}{\partial z}.dz.S^*$

De kracht ten gevolge van de wrijving: op de buitenwand $(r+dr)$ werkt een schuifspanning $-\tau_{r+dr}$ en op de binnenomtrek (r) werkt een schuifspanning τ_r.

De resulterende kracht K_2^* =

$-\tau_{r+dr}.2\pi(r+dr)\,dz + \tau_r.2\pi r.dz. =$

$$K_z^* = - \frac{\tau_{r+dr} \cdot 2\pi (r+dr)\, dz - \tau_r 2\pi r}{\partial r} \cdot dr\, dz$$

$$= - 2\pi \frac{\partial (\tau r)}{\partial r} \cdot dr\, dz$$

$$= - 2\pi r \frac{\partial \tau}{\partial r} \cdot dr\, dz - 2\pi \tau \cdot dr \cdot dz.$$

Het resulterend uitstromend impuls-transport: aan de linkerzijde bedraagt het impulstransport naar binnen $\varrho S^* v v$ en aan de rechterzijde bedraagt het impulstransport naar buiten $\varrho S^* v^2 + \frac{\partial (\varrho S^* v^2)}{\partial z} \cdot dz$.

Het resulterend uitstromend impuls-transport bedraagt dus:

$$\frac{\partial (\varrho S^* v^2)}{\partial z} \cdot dz.$$

De impulstoename binnen het beschouwde element per eenheid van tijd: op tijdstip t bedraagt de impuls binnen het beschouwde element $\varrho S^* v\, dz$ en op tijdstip $t + dt$ bedraagt deze impuls: $\varrho S^* dz\, v + \frac{\partial (\varrho S^* dz\, v)}{\partial t} dt$.

De impulstoename binnen het beschouwde element per eenheid van tijd bedraagt dus :

$$\frac{\partial (\rho S^* v)}{\partial t} \cdot dz \qquad (dz : \text{constant})$$

De som van het resulterend uitstromend impulstransport en de impulstoename binnen het beschouwde element per eenheid van tijd bedraagt dus :

$$\frac{\partial (\rho S^* v^2)}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial (\rho S^* v)}{\partial t} \cdot dz.$$

De continuiteitsvergelijking voor het beschouwde element luidt :

$$\frac{\partial (\rho S^*)}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho v S^*)}{\partial z}$$

We vinden dan voor de bovenvermelde som :

$$\frac{\partial (\rho S^* v^2)}{\partial z} \cdot dz + \frac{\partial . (\rho S^* v)}{\partial t} \cdot dz =$$

$$\rho S^* v \frac{\partial v}{\partial z} dz + v \frac{\partial (\rho S^* v)}{\partial z} dz +$$

$$+ \rho S^* \frac{\partial v}{\partial t} dz + v \frac{\partial (\rho S^*)}{\partial t} dz =$$

Nu vullen we de continuiteitsvergelijking voor het beschouwde element in.

$$\rho S^* v \frac{\partial v}{\partial z}\, dz + v \frac{\partial (\rho S^* w)}{\partial z}\, dz +$$

$$+ \rho S^* \frac{\partial v}{\partial t}\, dz - v \frac{\partial (\rho S^* w)}{\partial z}\, dz =$$

$$\rho S^*\, dz \left(v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

De bewegingsvergelijking voor het beschouwde element luidt dus:

$$- \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \cdot 2\pi r\, dr - 2\pi r \frac{\partial \tau}{\partial r}\, dr\, dz$$

$$- 2\pi \tau\, dr\, dz = \rho\, 2\pi r\, dr\, dz \left(v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

Vervolgens integreren we deze vergelijking over het hele oppervlak van doorstromingsprofiel.

$$- \int_0^{r_0} \frac{\partial p}{\partial z} \cdot 2\pi r\, dr - \int_0^{r_0} 2\pi r \frac{\partial \tau}{\partial r}\, dr$$

$$- \int_0^{r_0} 2\pi \tau\, dr = \int_0^{r_0} \rho\, 2\pi r\, dr \left(v \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

Omdat geen verschillingen $\perp$ z-richting optreden is $\frac{\partial p}{\partial z}$ constant over de doorsnede.

$$\int_0^{r_0} \frac{\partial p}{\partial z}\, 2\pi r\, dr = \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \pi r_0^2 = \frac{\partial p}{\partial z} \cdot S$$

In het geval van een eenparige laminaire stroming in een cilindrische buis heeft het snelheidsprofiel een paraboolvormig verloop. Uit de veronderstelling, dat $\frac{\partial p}{\partial z}$ constant is over de doorsnede, volgt, dat steeds een paraboolvormig snelheidsprofiel optreedt, dat overigens wel variëert in de tijd.
Stel op tijdstip t $v = 2\bar{v}(z,t)\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$,

waarin $2\bar{v}$ de snelheid is in de as op dat tijdstip.

$$\tau = \eta \frac{dv}{dr} = \eta \cdot 4r \frac{\bar{v}}{r_0^2}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = \eta\, 4 \frac{\bar{v}}{r_0^2}$$

$$\int_0^{r_0} 2\pi r \frac{\partial \tau}{\partial r}\, dr = \int_0^{r_0} \eta \cdot 4 \cdot \frac{\bar{v}}{r_0^2}\, 2\pi r\, dr =$$

$$\eta\, 4 \frac{\bar{v}}{r_0^2}\, \pi r_0^2 = 4\eta \frac{\bar{v}}{r_0^2} S.$$

$$\int_0^{r_0} 2\pi\tau\, dr = \int_0^{r_0} 2\pi\eta\, 4r\, \frac{\bar{v}}{r_0^2}\, dr =$$

$$\eta\, 4\, \frac{\bar{v}}{r_0^2}\, \pi r_0^2 = 4\eta\, \frac{\bar{v}}{r_0^2}\, S$$

$$\int_0^{r_0} \varrho\, 2\pi r\, dr\, \frac{\partial v}{\partial t} = \varrho\, \pi r_0^2 \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = \varrho\, S\, \frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$$

$$\int_0^{r_0} \varrho\, 2\pi r\, dr\, v\, \frac{\partial v}{\partial z} = \varrho\, \pi r_0^2\, \frac{4}{6}\, \bar{v}\, \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \frac{2}{3}\, \varrho\, S\, \bar{v}\, \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

De bewegingsvergelijking wordt nu:

$$-\frac{\partial p}{\partial z}\, S = 8\eta\, \frac{\bar{v}}{r_0^2}\, S + \varrho S\, \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{2}{3}\, \varrho\, S\, \bar{v}\, \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}$$

Als we voor v een harmonische oplossing stellen, kunnen we voor v schrijven:

$$v = v_{max}(r)\, e^{j\omega(t-z/c)} \cdot = v_{max}(r)\, e^{j(\omega t-\beta z)}\, e^{-\alpha z}$$

Waarin c de complexe voortplantingssnelheid is, α de dempingsconstante en β het golfgetal.

We kunnen nu aantonen, dat

$$\left|\bar{v}\, \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right| << \left|\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}\right|$$

Als we de vergelijking voor v hierin invullen, levert dit:

$$\left| \bar{v}\left(-j\frac{\omega}{c}\right)\bar{v} \right| \ll \left| j\omega\bar{v} \right| \quad \text{of}$$

$$\left| \frac{\bar{v}}{c} \right| \ll 1 \qquad \text{Dit klopt.}$$

Verder is $Q = \bar{v}.S = \bar{v}.\pi r_o^2$.

De bewegingsvergelijking luidt:

$$-\frac{dp}{dz} = \frac{8\eta}{\pi r_o^4} Q + \frac{\rho}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}$$

Dit is een lineair vergelijking. Door te veronderstellen, dat steeds een parabolvormig snelheid optreedt, waren we feitelijk al van lineariteit uitgegaan. Het resultaat is dus een stelsel lineaire simultane partiele differentiaalvergelijkingen, die als volgt luiden:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\rho}{S}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{8\eta}{\pi r_o^4} Q$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{2\pi r_o S}{Eh}\frac{\partial p}{\partial t}$$

3.2 Analogie van de lange lijn vergelijkingen en de telegraaf vergelijkingen

We gaan na hoe we een elektrisch analoog voor een slagader kunnen opstellen.

De lange lijn vergelijkingen, die afgeleid zijn, luiden:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\varrho}{S}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{8\eta}{\pi r_0^4} Q$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{2 r_0 S}{E h}\frac{\partial p}{\partial t}$$

Deze vergelijkingen zijn analoog aan de telegraaf vergelijkingen, die luiden:

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = L_0 \frac{\partial i}{\partial t} + R_0 . i$$

$$-\frac{\partial i}{\partial z} = C_0 \frac{\partial U}{\partial t} + G_0 U$$

Hierin is:

i : elektrische stroom

U : spanning

R_0 : weerstand p.e.v. lengte

L_0 : inductie p.e.v. lengte

C_0 : capaciteit p.e.v. lengte

G_0 : conductie p.e.v. lengte

We kunnen de volgende analogie opstellen:

druk p ≡

spanning U

debiet Q ≡

elektrische stroom i

traagheid p.e.v. lengte $\frac{\ell}{S}$ ≡

inductie p.e.v. lengte L_o.

weerstand p.e.v. lengte $\frac{8\eta}{\pi r_o^4}$ ≡

weerstand p.e.v. lengte R_o

berging p.e.v. lengte $\frac{2r_o S}{Eh}$ ≡

capaciteit p.e.v. lengte C_o

zijdelingse afvoer p.e.v. lengte ≡

conductie p.e.v. lengte q_o

Voor een eindig stukje slagader met een lengte Δz kunnen we stellen:

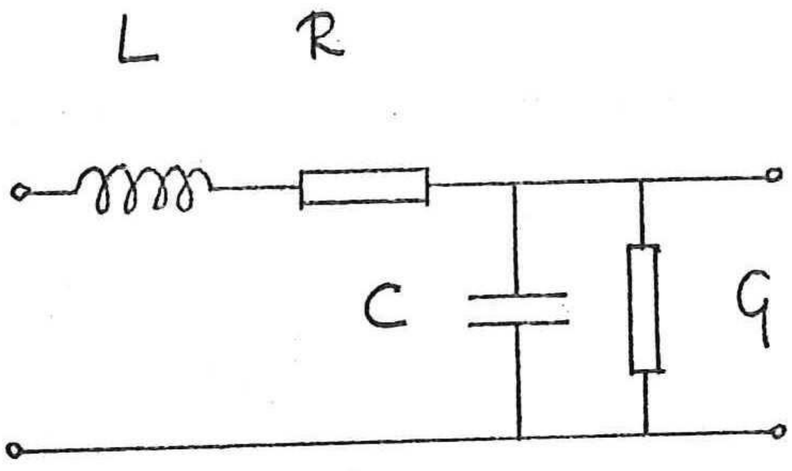
$$L = L_o \Delta z = \frac{\ell}{S} \Delta z$$

$$R = R_o \Delta z = \frac{8\eta}{\pi r_o^4} \Delta z$$

$$C = C_o \Delta z = \frac{2 r_o S}{Eh} \Delta z$$

$$q = q_o \Delta z = 0$$

Een stukje slagaden met een lengte Δz kunnen we dus representeren door een elektrisch analogon. Dit analogon is een passief netwerk, dat uit vier passieve elementen bestaat. Het analogon is in figuur 3.6 weergegeven.



Figuur 3.6 Elektrisch analogon voor een stukje slagader.

3.3 Bepaling van de karakteristieken van een enkele buis.

We bepalen nu de volgende karakteristieke grootheden van een enkele buis: de dempingsconstante α, het golfgetal β en de karakteristieke impedantie Z_0.
De lange golfvergelijkingen, die afgeleid zijn, luiden:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\ell}{S}\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{8\eta}{\pi r_0^4} Q$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{2 r_0 S}{Eh}\frac{\partial p}{\partial t}$$

Hiervoor kunnen we schrijven:

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = L_0\frac{\partial Q}{\partial t} + R_0 Q \qquad (1)$$

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = C_0\frac{\partial p}{\partial t} + G_0 p. \qquad (2)$$

Hierin is dus:

L_0 = traagheid p.e.v. lengte
R_0 = weerstand p.e.v. lengte
C_0 = berging p.e.v. lengte
G_0 = zijdelingse afvoer p.e.v. lengte.

Verder is:

$$L_0 = \frac{\varrho}{S} \qquad C_0 = \frac{2\pi_0 S}{Eh}$$

$$R_0 = \frac{8\eta}{\pi r_0^4} \qquad G_0 = 0$$

Om de afleiding algemeen te houden handhaven we de term G_0.
Omdat we een stelsel lineaire vergelijkingen hebben, kunnen we de variaties in druk en stroom ontwikkelen in een Fourierreeks, zodat we kunnen volstaan met het bekijken van harmonische oplossingen.
We kunnen p en Q dan als volgt complex schrijven:

$$p = p_0 e^{j\omega t} \quad \text{en} \quad Q = Q_0 e^{j\omega t}.$$

Hiermit volgt:

$$L_0 \frac{\partial Q}{\partial t} = j\omega L_0 Q \quad \text{en} \quad C_0 \frac{\partial p}{\partial t} = j\omega C_0 p$$

Door dit in te vullen in de vergelijkingen (1) en (2) vinden we:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -R_0 Q - L_0 \frac{\partial Q}{\partial t} = -(R_0 + j\omega L_0) Q \qquad (3)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -G_0 P - C_0 \frac{\partial P}{\partial t} = -(G_0 + j\omega C_0) P \qquad (4)$$

Door de afgeleide naar z van vergelijking (3) te bepalen en in te vullen in vergelijking (4) vinden we:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = -(R_0 + j\omega L_0) \frac{\partial Q}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0) P = \gamma^2 P.$$

waarin $\gamma^2 = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)$

γ is dus een complexe grootheid en kan als volgt worden geschreven:

$\gamma = \alpha + j\beta$.

Door de afgeleide naar z van vergelijking (4) te bepalen en in te vullen in vergelijking (3) vinden we:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = -(G_0 + j\omega C_0) \frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = (R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0) Q = \gamma^2 Q$$

Deze vergelijking is analoog aan die voor P.

We bekijken nu de vergelijking

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \gamma^2 P = 0 \quad \text{nader.}$$

Voor ϕ kunnen we schrijven:

$$\phi = \phi_0 e^{j\omega t}.$$

De vergelijking wordt dan:

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} - \gamma^2 \phi_0 = 0.$$

De oplossing van deze vergelijking luidt:

$$\phi_0 = A e^{-\gamma z} \quad \text{en} \quad \phi_0 = B e^{\gamma z},$$

waarin A en B constanten zijn.
De volledige oplossing voor ϕ is dus:

$$\phi = (A e^{-\gamma z} + B e^{\gamma z}) e^{j\omega t}, \qquad (5)$$

of, omdat $\gamma = \alpha + j\beta$,

$$\phi = (A e^{-\alpha z} \cdot e^{-j\beta z} + B e^{\alpha z} e^{j\beta z}) e^{j\omega t}.$$

$$\phi = A e^{-\alpha z} \cdot e^{j(\omega t - \beta z)} + B e^{\alpha z} e^{j(\omega t + \beta z)}.$$

Hierin stelt de eerste term een golf voor, die in positieve z-richting beweegt, en de tweede term een golf, die in negatieve z-richting beweegt.

In de uitdrukking $\gamma = \alpha + j\beta$ wordt γ de voortplantingsconstante genoemd, α de dempingsconstante en β het fasefetel. Het verloop van de stroomfase Q is volkomen analoog aan het verloop van de drukfase p.
De volledige oplossing voor Q is dus:

$$Q = (Ce^{-\gamma z} + De^{\gamma z})e^{j\omega t}, \qquad (6)$$

waarin C en D constanten zijn.
We kunnen φ schrijven als $\varphi = \varphi^+ + \varphi^-$, waarin φ^+ de drukfase is, die in positieve z-richting loopt en φ^- de drukfase, die in negatieve z-richting loopt.
Evenzo kunnen we Q schrijven als $Q = Q^+ + Q^-$.
Vergelijking (4) luidt:

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -(G_0 + j\omega C_0)\varphi$$

Substitueren we vergelijking (6) hierin, dan vinden we:

$$-\gamma(Ce^{-\gamma z} - De^{\gamma z})e^{j\omega t} = -(G_0 + j\omega C_0)\varphi.$$

Als we γ invullen, vinden we:

$$\frac{\sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}}{G_0 + j\omega C_0} * (C e^{-\gamma z} - D e^{\gamma z}) e^{j\omega t}$$

$$= \Phi = \Phi^+ + \Phi^-$$

Verder geldt: $C \cdot e^{-\gamma z} e^{j\omega t} = Q^+$

Dus is $\sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} \cdot Q^+ = \Phi^+$

of $\frac{\Phi^+}{Q^+} = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = Z_0$

Analoog hierin geldt: $D e^{\gamma z} \cdot e^{j\omega t} = Q^-$ en

$$\frac{\Phi^-}{Q^-} = -\sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}} = -Z_0$$

Vervolgens bepalen we de dempingsconstante α en het fasefetal β.

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R_0 + j\omega L_0)(G_0 + j\omega C_0)}$$

$$= \sqrt{R_0 G_0 - \omega^2 L_0 C_0 + j\omega (R_0 C_0 + L_0 G_0)}$$

Om α en β uit γ te bepalen leiden we een algemene formule voor de wortel

uit een complex getal af.

Stel $\sqrt{x+jy} = u+jv$.

Kwadrateren levert:

$x+jy = u^2 - v^2 + 2juv$.

Dan moet gelden:

$x = u^2 - v^2$ en $y = 2uv$.

Na enige herleiding vinden we voor u en v:

$$u = \pm\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}$$

De tekens van u en v zijn wel gekoppeld.

Het is voldoende om de absolute waarden van α en β te bepalen, omdat in de oplossing van p en Q al het teken bepaald is.

Voor de bepaling van α en β kunnen we in de algemene formule voor u en v de volgende substituties toepassen:

$$u \equiv \alpha$$

$$v \equiv \beta$$

$$x \equiv R_o G_o - \omega^2 L_o C_o$$

$$y \equiv \omega (R_o C_o + L_o G_o)$$

Hieruit volgt:

$$\alpha = \sqrt{\frac{(R_o G_o - \omega^2 L_o C_o) + \sqrt{(R_o G_o - \omega^2 L_o C_o)^2 + \omega^2 (R_o C_o + L_o G_o)^2}}{2}}$$

Nu is:

$$(R_o G_o - \omega^2 L_o C_o)^2 + \omega^2 (R_o C_o + L_o G_o)^2 =$$

$$R_o^2 G_o^2 + \omega^4 L_o^2 C_o^2 - 2\omega^2 R_o G_o L_o C_o +$$

$$\omega^2 R_o^2 C_o^2 + \omega^2 L_o^2 G_o^2 + 2\omega^2 R_o C_o L_o G_o =$$

$$(R_o^2 + \omega^2 L_o^2)(G_o^2 + \omega^2 C_o^2)$$

We kunnen voor α dus ook schrijven

$$\alpha = \sqrt{\frac{(R_o G_o - \omega^2 L_o C_o) + \sqrt{(R_o^2 + \omega^2 L_o^2) * (G_o^2 + \omega^2 C_o^2)}}{2}}$$

Op analoge wijze vinden we voor β:

$$\beta = \sqrt{\frac{-(R_o G_o - \omega^2 L_o C_o) + \sqrt{(R_o^2 + \omega^2 L_o^2) * (G_o^2 + \omega^2 C_o^2)}}{2}}$$

We hebben Z_0, α en β nu uitgedrukt in R_0, L_0, C_0 en G_0. Hiervoor kunnen we de volgende substituties toepassen:

$$R_0 = \frac{8\eta}{\pi r_0^4} \qquad C_0 = \frac{2r_0 S}{Eh} = \frac{2\pi r_0^3}{Eh}$$

$$L_0 = \frac{\ell}{S} = \frac{\ell}{\pi r_0^2} \qquad G_0 = 0$$

Als we dit doen, dan vinden we:

$$\alpha = \sqrt{\frac{-\omega^2 \frac{\ell}{\pi r_0^2}\frac{2\pi r_0^3}{hE} + \sqrt{\left\{\left(\frac{8\eta}{\pi r_0^4}\right)^2 + \omega^2\left(\frac{\ell}{\pi r_0^2}\right)^2\right\}} * \omega^2\left(\frac{2\pi r_0^3}{hE}\right)^2}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2 \frac{\ell}{\pi r_0^2}\frac{2\pi r_0^3}{hE} + \sqrt{\left\{\left(\frac{8\eta}{\pi r_0^4}\right)^2 + \omega^2\left(\frac{\ell}{\pi r_0^2}\right)^2\right\}} * \omega^2\left(\frac{2\pi r_0^3}{hE}\right)^2}{2}}$$

Dit kunnen we nog enigszins verder vereenvoudigen, zodat we uiteindelijk het volgende voor α en β vinden.

$$\alpha = \sqrt{\frac{-\omega^2 \frac{\varrho 2\pi r_0}{hE} + \sqrt{\left\{\left(\frac{8\eta}{\pi r_0^4}\right)^2 + \omega^2 \left(\frac{\varrho}{\pi r_0^2}\right)^2\right\} * \omega^2 \left(\frac{2\pi r_0^3}{hE}\right)^2}}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2 \frac{\varrho 2\pi r_0}{hE} + \sqrt{\left\{\left(\frac{8\eta}{\pi r_0^4}\right)^2 + \omega^2 \left(\frac{\varrho}{\pi r_0^2}\right)^2\right\} * \omega^2 \left(\frac{2\pi r_0^3}{hE}\right)^2}}{2}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\frac{8\eta}{\pi r_0^4} + j\omega \frac{\varrho}{\pi r_0^2}}{j\omega \frac{2\pi r_0^3}{hE}}}.$$

We kunnen dit als volgt anders schrijven:

$$Z_0 = \sqrt{-\frac{8\eta hE}{\omega 2\pi^2 r_0^7} \cdot j + \frac{\varrho hE}{2\pi^2 r_0^5}}$$

Dit is met behulp van de algemene formule voor de wortel uit een complex

getal, die eender afgeleid is, moeten uit te werken. We passen de volgende substituties toe.

$u \equiv$ reele deel van Z_0.

$v \equiv$ imaginaire deel van Z_0.

$$x \equiv \frac{\varrho h E}{2\pi^2 r_0^5}$$

$$y \equiv -\frac{8\eta h E}{\omega 2\pi^2 r_0^7}$$

waarbij: $x = u^2 - v^2$ en $y = 2uv$.

Omdat y negatief is, is het teken van u tegengesteld aan dat van v.

$$u = \pm \sqrt{\frac{\frac{\varrho h E}{2\pi^2 r_0^5} + \sqrt{\left(\frac{\varrho h E}{2\pi^2 r_0^5}\right)^2 + \left(\frac{8\eta h E}{\omega 2\pi^2 r_0^7}\right)^2}}{2}}$$

$$v = \mp \sqrt{\frac{-\frac{\varrho h E}{2\pi^2 r_0^5} + \sqrt{\left(\frac{\varrho h E}{2\pi^2 r_0^5}\right)^2 + \left(\frac{8\eta h E}{\omega 2\pi^2 r_0^7}\right)^2}}{2}}$$

Beschouw de basisformule:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + j\omega L_0}{G_0 + j\omega C_0}}$$

Als $L_0 \cdot C_0 = 0$, dan is $Z_0 = \sqrt{\frac{R_0}{G_0}}$

Z_0 is dan een positief getal.
Volgens het bovenstaande is:
$Z_0 = u - j\nu$ of $Z_0 = -u + j\nu$.
Voor $\nu = 0$ moet Z_0 positief zijn, dus:
$Z_0 = u - j\nu$
Uiteindelijk vinden we dus voor Z_0:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\frac{\varrho h E}{2\pi^2 r_0^5} + \sqrt{\left(\frac{\varrho h E}{2\pi^2 r_0^5}\right)^2 + \left(\frac{\delta \eta h E}{\omega 2\pi^2 r_0^7}\right)^2}}{2}}$$

$$- j\sqrt{\frac{-\frac{\varrho h E}{2\pi^2 r_0^5} + \sqrt{\left(\frac{\varrho h E}{2\pi^2 r_0^5}\right)^2 + \left(\frac{\delta \eta h E}{\omega 2\pi^2 r_0^7}\right)^2}}{2}}$$

De karakteristieke grootheden, de dempingsconstante α, het golfgetal β, en de karakteristieke impedantie Z_0 zijn dus afhankelijk van de volgende variabelen:

de dichtheid van het bloed ϱ,
de viscositeit van het bloed η,
de elasticiteits modulus van het wand-
materiaal E,
de inwendige straal van het bloedvat r_0,
de wanddikte h,
de hoeksnelheid ω.
En is verondersteld, dat ϱ, η en E constant zijn. Bij de opzet van het model zullen we veronderstellen, dat de verhouding tussen de inwendige straal van het bloedvat r_0 en de wanddikte h gelijk is aan 0,1. Als we deze laatste veronderstelling nu invoeren, zullen de karakteristieke grootheden slechts een functie zijn van de inwendige straal r_0 en de hoeksnelheid ω.
We berekenen nu enige waarden van de karakteristieke grootheden α, β en Z_0.
We hebben al aangegeven, dat we kunnen volstaan met het bekijken van harmonische oplossingen door de variatie in druk en stroom in een Fourierreeks te ontwikkelen, omdat

het stelsel vereenvoudigingen lineair is.
Voor een voldoend nauwkeurige be-
schrijving van de variatie in druk en
stroom kunnen we volstaan met het
beschouwen van de reeks te harmo-
nischen. Voor een gemiddelde hart-
slag van 60, d.w.z. 60 slagen per
minuut of 1 per seconde, moeten
we dus harmonischen beschouwen met
een trillingstijd T van 1, 1/2, 1/3 tot
en met 1/10 s, d.w.z. met een hoek-
snelheid ω van 2π, 4π, 6π tot en
met 20π rad/s.
We berekenen de karakteristieke groot-
heden α, β en Z₀ voor de gevallen, dat
de inwendige straal r₀ respectieve-
lijk gelijk is aan 1. cm, 0,1 cm en 0,01
cm, waarbij de hoekfrequentie ω
steeds gelijk gesteld wordt aan res-
pectievelijk 2π rad/s en 20π rad/s.
De karakteristieke grootheden zijn ei-
genlijk van de weerstandsterm, de
traagheidsterm en de bergingsterm
uit de lange golfvergelijkingen.
hetgeen direct uit de formules volgt.

Uit de hoeksnelheid ω en het golfgetal β kunnen we de faseSnelheid c_ϕ berekenen : $c_\phi = \frac{\beta}{\omega}$.

In figuur 3.8 zijn waarden weergegeven van de weerstandsterm, de traagheidsterm en de bergingsterm uit de lange golfvergelijkingen, van de karakteristieke grootheden α, β en Z_0 en van de faseSnelheid c_ϕ voor de reeds vermelde gevallen.
Uit de gevonden waarden kunnen we de volgende conclusies trekken :

- voor $r_0 = 1$ cm overheerst de traagheidsterm en voor $r_0 = 0{,}01$ cm overheerst de weerstandsterm zeer sterk. Uit de formules voor de karakteristieke grootheden volgt, dat de verhouding van de weerstandsterm en de traagheidsterm van grote invloed is op de waarden van de karakteristieke grootheden, bij voorbeeld een onafhankelijkheid van de frequentie.
- voor $r_0 = 1$ cm is Z_0 onafhankelijk

r_0 (m) → / ω ↓		0,01	0,001	0,0001
weerst.	2π	$0,76.10^{6}$	$0,76.10^{10}$	$0,76.10^{14}$
	20π	$0,76.10^{6}$	$0,76.10^{10}$	$0,76.10^{14}$
traagh.	2π	$0,33.10^{7}$	$0,33.10^{9}$	$0,33.10^{11}$
	20π	$0,33.10^{7}$	$0,33.10^{9}$	$0,33.10^{11}$
berging	2π	$0,16.10^{-7}$	$0,16.10^{-9}$	$0,16.10^{-11}$
	20π	$0,16.10^{-7}$	$0,16.10^{-9}$	$0,16.10^{-11}$
α	2π	0,03	1,7	19
	20π	0,03	2,6	51
β	2π	1,4	2,2	19
	20π	14	15	62
C_p (m/s)	2π	4,4	2,8	0,3
	20π	4,4	4,3	1,0
Z_0				
re	2π	$0,15.10^{8}$	$0,23.10^{6}$	$0,20.10^{13}$
im		$-0,27.10^{6}$	$-0,17.10^{6}$	$-0,20.10^{13}$
abs		$0,15.10^{8}$	$0,28.10^{6}$	$0,28.10^{13}$
re	20π	$0,15.10^{8}$	$0,15.10^{6}$	$0,63.10^{12}$
im		$-0,27.10^{5}$	$-0,26.10^{9}$	$-0,61.10^{12}$
abs		$0,15.10^{8}$	$0,15.10^{6}$	$0,88.10^{12}$

Figuur 3.8 Enige waarden van α, β, C_p en Z_0

van de frequentie en voor $r_0 = 0{,}01$ cm is α de wortel uit een imaginair getal, d.w.z. het reële deel en het imaginaire deel zijn, behoudens het teken, aan elkaar gelijk.

- voor $r_0 = 1$ cm is α zeer klein en frequentieonafhankelijk. Als de straal kleiner wordt, wordt α bedui dend groter, waarbij α voor de hoge frequenties sneller toeneemt dan voor de lage frequenties.
- voor $r_0 = 1$ cm is c_p frequentieonafhankelijk. Als de straal kleiner wordt, wordt c_p frequentieafhankelijk, zodat dispersie optreden.

We bekijken nu de fasesnelheid waarin $\lambda = c_p T$, waarin λ de golflengte is en T de trillingstijd. Voor $T = 1$ s is $\lambda = c_p$ en voor $T = 0{,}1$ s is $\lambda = 0{,}1\ c_p$. Als r_0 respectievelijk 0,01 m, 0,001 m en 0,0001 m is, dan is λ voor $T = 1$ s respectievelijk gelijk aan 4,4 m, 2,8 m en 0,3 m en voor $T = 0{,}1$ s respectievelijk gelijk aan 0,44 m, 0,43 m en 0,10 m.

De golflengte is in alle gevallen groot ten opzichte van de inwendige straal van het bloedvat. Er is dus inderdaad steeds sprake van een lange golf, zoals verondersteld is.
Voor $r_0 = 1$ cm is α zeer klein, d.w.z $|c| \approx c_p$, waarin c de complexe voortplantingssnelheid is. Bij de afleiding van de lange golfvergelijkingen is gesteld: $\left|\frac{\bar{v}}{c}\right| \ll 1$

In de aorta geldt:

$\bar{v}$: 0,4 m/s

$c_p \approx 4,5$ m/s

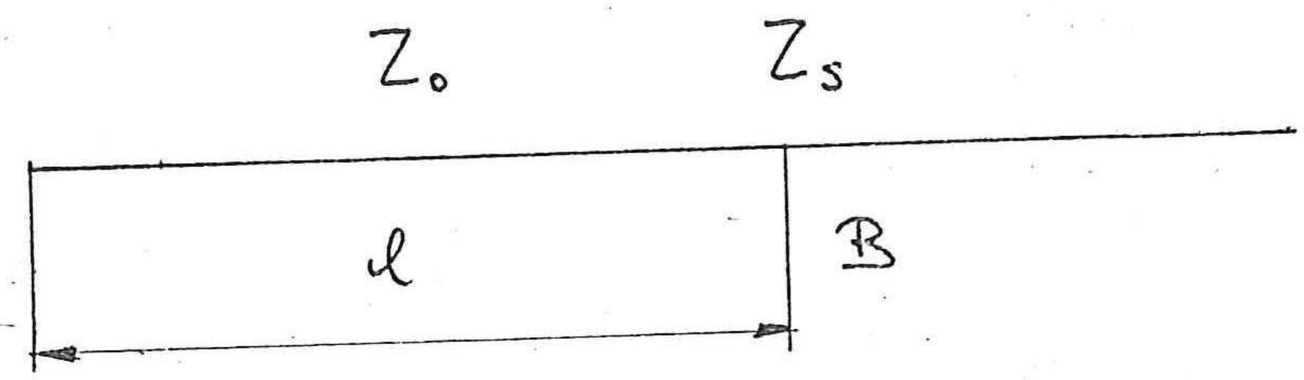
Hieruit volgt:

$$\left|\frac{\bar{v}}{c}\right| = \frac{0,4}{4,5} \approx 0,1.$$

Voor de aorta voldoet het gestelde.
Als de straal kleiner wordt, wordt $\bar{v}$ kleiner door de toename van het oppervlak van het doorstromingsprofiel. Ook c_p wordt kleiner en c krijgt geleidelijk een complex karakter. Dit is verder niet nagegaan.

3.4 Bepaling van de reflectiecoëfficiënt op een splitsingspunt.

We leiden een algemene betrekking af voor de reflectiecoëfficiënt voor de drukgolf op een splitsingspunt.
We veronderstellen, dat zich na een enkele buis met een karakteristieke impedantie Z_0, die een lengte l heeft, een stelsel van buizen bevindt met een systeemimpedantie Z_s in het beginpunt B van dat stelsel.



Figuur 3.9 Een enkel splitsingspunt

In punt B moet gelden:

$$p^+ + p^- = p_d$$

$$Q^+ + Q^- = Q_d$$

$$\frac{p^+}{Q^+} = Z_0$$

$$\frac{p^-}{Q^-} = -Z_0$$

$$\frac{p_d}{Q_d} = Z_s$$

waarin p_d de doorgaande drukgolf en Q_d de doorgaande stroomgolf voorstelt

Uit de vermelde betrekkingen kunnen we de reflectiecoefficienten en de transmissiecoefficienten voor de drukgolf en de stroomgolf bepalen.

$$Z_s = \frac{p_d}{Q_d} = \frac{p^+ + p^-}{Q^+ + Q^-} * \frac{Z_0}{Z_0} = Z_0 \cdot \frac{p^+ + p^-}{p^+ - p^-}$$

$$Z_s (p^+ - p^-) = Z_0 (p^+ + p^-)$$

$$p^+ (Z_s - Z_0) = p^- (Z_s + Z_0).$$

De reflectiecoefficient voor de drukgolf k luidt dus:

$$k = \frac{p^-}{p^+} = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0} = |k| e^{j\varphi}$$

Hierin is k de absolute waarde en φ de fasehoek van de reflectiecoefficient voor de drukgolf.

$$\frac{p^-}{p^+} = -\frac{Z_0 Q^-}{Z_0 Q^+} = -\frac{Q^-}{Q^+}$$

De reflectiecoefficient voor de stroomgolf luidt dus:

$$\frac{Q^-}{Q^+} = \frac{Z_0 - Z_s}{Z_s + Z_0}$$

$$\frac{p_d}{p^+} = \frac{p^+ + p^-}{p^+} = 1 + \frac{p^-}{p^+} = 1 + \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}$$

De transmissiecoefficient voor de drukgolf luidt dus:

$$\frac{p_d}{p^+} = \frac{2 Z_s}{Z_s + Z_0}$$

$$\frac{Q_d}{Q^+} = \frac{Q^+ + Q^-}{Q^+} = 1 + \frac{Q^-}{Q^+} = 1 + \frac{Z_0 - Z_s}{Z_s + Z_0}$$

De transmissiecoefficient voor de stroomgolf luidt dus:

$$\frac{Q_d}{Q^+} = \frac{2 Z_0}{Z_s + Z_0}.$$

Waar in het verslag over de reflectiecoefficient wordt gesproken, wordt steeds bedoeld de reflectiecoefficient voor de drukgolf, tenzij anders is vermeld.

4 Vereenvoudigd mathematisch model van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop.

4.1 Vereenvoudigd model van het bloedvatenstelsel.

Met behulp van de in het vorige hoofdstuk afgeleide betrekkingen en vergelijkingen gaan we een model van het bloedvatenstelsel opzetten ten einde de werking ervan te bestuderen en verschillende grootheden te bepalen. Het onderzoek heeft een sterk kwalitatief karakter, omdat zowel de vergelijkingen als het model nogal vereenvoudigd zijn.
Bij de opzet van het model gaan we uit van een aantal vereenvoudigende veronderstellingen om het rekenwerk overzichtelijk en zo eenvoudig mogelijk te houden. Van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop zijn nauwkeurige gegevens bekend, onder andere

uit de studies van de Pater [8] en Westerhof [10], welke als uitgangspunt gebruikt zijn voor de sterk vereenvoudigende veronderstellingen.
De veronderstellingen zijn de volgende:

1 Elke slagader vertakt zich in twee identieke slagaders, waarbij het totale doorstromingsoppervlak van de slagaders na de vertakking gelijk is aan 1,1 maal het doorstromingsoppervlak van de slagaden voor de vertakking.

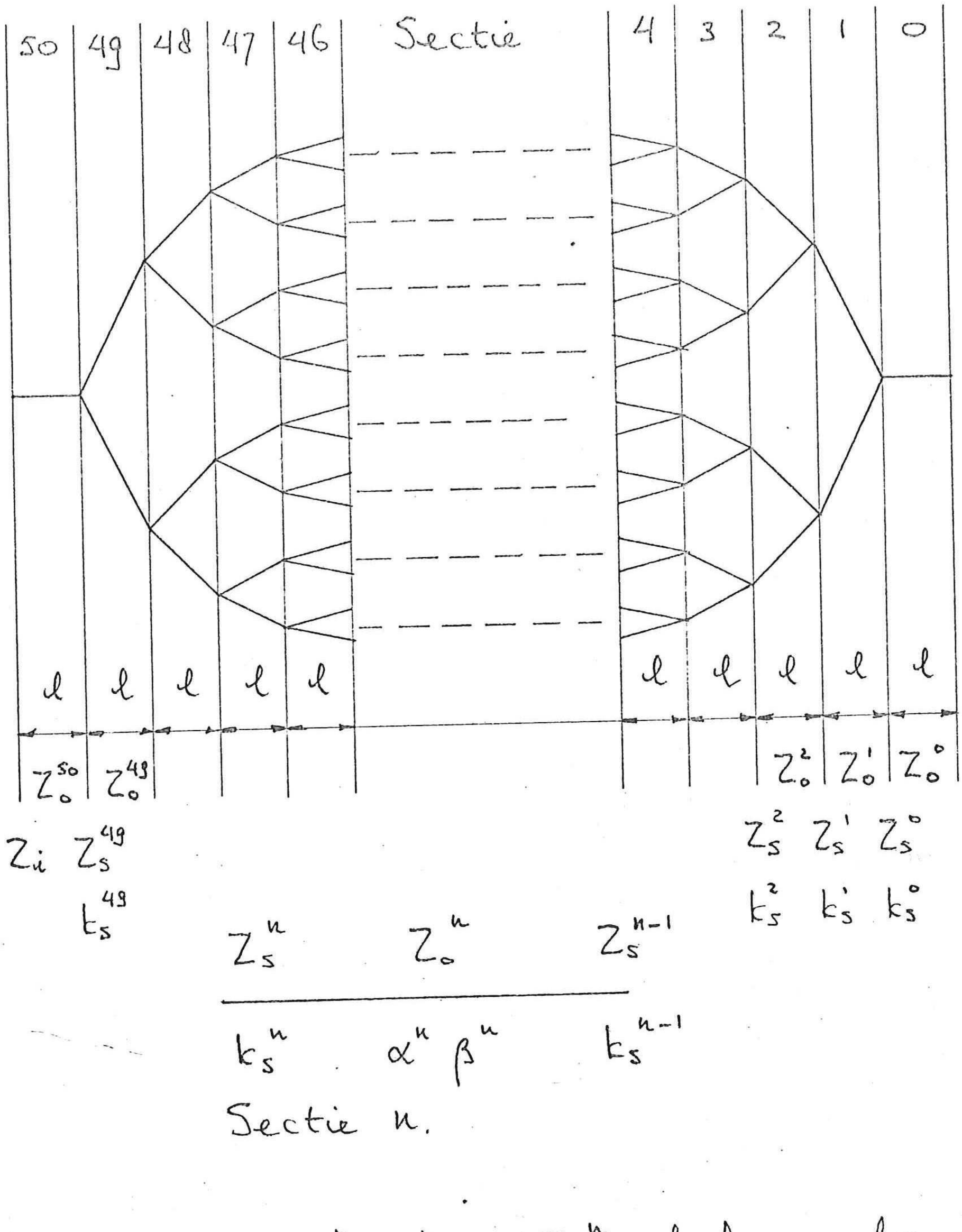
2 Twee identieke aders verenigen zich steeds tot één ader, waarbij het totale doorstromingsoppervlak van de aders voor de samenvoeging gelijk is aan 1,1 maal het doorstromingsoppervlak van de ader na de samenvoeging.

3 De lengte l van de gedeelten slagader en ader is steeds hetzelfde, namelijk $l = 5$ cm.

4 De verhouding tussen de wanddikte h en de inwendige straal van een bloedvat r_0 is gelijk aan 0,1.

5 De inwendige straal van de aorta is gelijk aan 1,4 cm.
6 De laatste ader is ideaal beëindigd, d.w.z. de reflectiecoefficient op het eind is gelijk aan nul.

Uit de veronderstellingen volgt, dat, als we met één slagader beginnen en met één ader eindigen, we het model in een aantal secties kunnen verdelen, die elk een lengte van 5 cm hebben en waarin achtereenvolgens 2, 4, 8, ..., 2^{n-1}, 2^n, 2^{n-1}, ..., 8, 4, 2 bloedvaten parallel zijn. Het model is dus symmetrisch in horizontale en verticale zin. In het model zijn 51 secties gekozen, omdat dan de straal in de middelste sectie (sectie 25) de orde van de straal van de capillairen heeft. In figuur 4.1 is een schematische voorstelling van het model weergegeven, terwijl in figuur 4.2 is weergegeven, hoeveel parallelle bloedvaten m in verschillende secties aanwezig zijn, waarbij tevens enige significante waarden van de straal en het totale



De waarden α^n, β^n en Z_0^n behoren bij de Sectie n, de waarden Z_s^n en k_s^n bij de grens tussen de secties n en n+4.

Figuur 4.1 Schematische voorstelling van het model van het bloedvatenstelsel.

sectie		m	r_0 (cm)	F (cm^2)
0	50	1	1,40	6,15
5	45	32	.	
10	40	1024		
15	35	32768		
16	34	65536	0,0117	
20	30	1048576		
25		33554432	0,00080	67

Figuur 4.2 Het aantal parallelle bloed-vaten m in verschillen de secties van het model.

doorstromingsoppervlak F vermeld. De aorta heeft een straal van 1,4 cm, de arteriolen hebben een straal van ongeveer 0,01 cm en de straal van de capillairen is ongeveer 4 µm (0,0004 cm). We zien dus, dat de bloedvaten in sectie 16 overeenkomen met de arteriolen.
Ondanks het feit, dat het model dus zeer sterk vereenvoudigd is, zullen

we het als zuiver gebruiken om kwalitatieve resultaten af te leiden en met behulp van deze resultaten een beter model te ontwikkelen.
We willen verschillende grootheden in het model bepalen. We bepalen allereerst voor elke sectie n de karakteristieke waarden van een enkel bloeddeel, te weten de dempings constante α^n, het golfgetal β^n en de karakteristieke impedantie Z_o^n. We hebben de secties van achter af naar voren genummerd. Omdat verondersteld is, dat de laatste cader ideaal is beëindigd, is de systeemimpedantie op de grens van sectie 0 en 1 $Z_s^0 = Z_o^0$. Voor sectie 1 kunnen we nu de systeemreflectiecoefficient k_s^0 op de grens van sectie 0 en 1 bepalen. Hierna kunnen we voor sectie 1 de systeem-impedantie Z_s^1 op de grens van sectie 1 en 2 bepalen. Analoog aan de berekening voor sectie 1 kunnen we het hele systeem doorrekenen en achtereenvolgens per sectie n be-

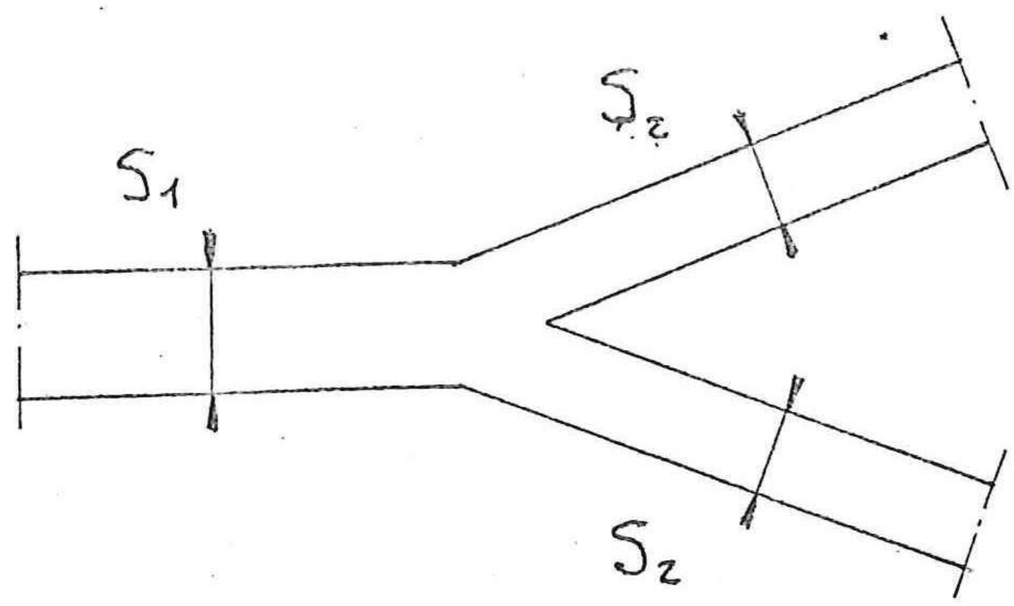
Pelen de systeemreflectiecoefficient k_s^{n-1} op de grens van de secties n-1 en n en de systeemimpedantie Z_s^n. Op de grens van de secties n en n+1. Uiteindelijk vinden we de ingangs-impedantie Zi in het beginpunt van het systeem. Door de weerstand per eenheid van lengte R_o te vermenigvuldigen met de lengte l van de sectie vinden we op eenvoudige wijze door steeds te sommeren de systeemweerstand R_s^n op de grens van de secties n en n+1. en uiteindelijk de ingangs-weerstand Ri in het beginpunt van het systeem.

Als in het beginpunt van het systeem het verloop van de druk als randvoorwaarde is gegeven, kunnen we daaruit met de ingangsweerstand en de ingangsimpedantie de stroom bepalen. Vervolgens kunnen we op het splitsingspunt van sectie 50 en 49 de druk en de stroom bepalen. Zo kunnen we het hele moal doorrekenen van voor naar achter.

4.2 Bepaling van de plaatselijke reflectie-coëfficiënten

We bepalen voor een slagader de plaatselijke reflectiecoëfficiënt voor de drukgolf op een splitsingspunt, die slechts afhankelijk is van het bloedvat voor de vertakking en de bloedvaten na de vertakking.
We hebben verder verondersteld, dat elke slagader zich in twee identieke slagaders vertakt, waarbij het totale doorstromingsoppervlak van de slagaders na de vertakking gelijk is aan 1,1 maal het doorstromingsoppervlak van de slagader voor de vertakking. Voorts is verondersteld, dat de verhouding tussen de wanddikte h en de inwendige straal van een bloedvat r_0 gelijk is aan 0,1.
Stel:
S_1 = het oppervlak van de slagaders voor de vertakking.
S_2 = het oppervlak van een slagaders na de vertakking

In figuur 4.3 is een splitsingspunt in het slagaderlijk deel van de bloedsomloop weergegeven.



Figuur 4.3 Een splitsingspunt in het slagaderlijk deel van de bloedsomloop.

Uit de veronderstellingen volgt, dat

$$\frac{\Sigma S_2}{S_1} = 1{,}1 \quad \text{of} \quad S_2 = \frac{1{,}1}{2} S_1.$$

en $\frac{h}{r_0} = 0{,}1$

We hebben verder een betrekking voor Z_0 afgeleid:

$$Z_0 = \sqrt{- \frac{\delta \eta \, ch\, E}{\omega \, 2\pi^2 r_0^7} j + \frac{\varrho \, ch\, E}{2\pi^2 r_0^5}}$$

Deze passen we nu toe.

Voor de karakteristieke impedantie van de sleufaden voor de vertakking $Z_0(S_1)$ geldt:

$$Z_0(S_1) = \sqrt{-\frac{\delta \eta E \pi}{\omega 2o S_1^3} j + \frac{\rho E}{2o S_1^2}}$$

Voor de karakteristieke impedantie van een sleufaden na de vertakking $Z_0(S_2)$ geldt:

$$Z_0(S_2) = \sqrt{-\frac{\delta \eta E \pi}{\omega 2o S_2^3} j + \frac{\rho E}{2o S_2^2}}$$

Voor de systeemimpedantie van beide sleufadens samen na de vertakking $Z_s(S_2)$ geldt:

$$Z_s(S_2) = \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{\delta \eta E \pi}{\omega 2o \left(\frac{1.1 \cdot S_1}{2}\right)^3} j + \frac{\rho E}{2o \left(\frac{1.1 S_1}{2}\right)^2}}$$

$$Z_s(S_2) = \frac{1}{1,1} \sqrt{-\frac{\delta \eta E \pi}{\omega 2o \frac{1.1 S_1^3}{2}} j + \frac{\rho E}{2o S_1^2}}$$

Deze betrekkingen kunnen we invullen in de algemene betrekking voor de

reflectiecoefficient op een splitsings-
punt, dit luidt:

$$k = \frac{Z_s - Z_0}{Z_s + Z_0}$$

De plaatselijke reflectiecoefficient op een splitsingspunt wordt dus:

$$k_l = \frac{Z_s(S_2) - Z_0(S_1)}{Z_s(S_2) + Z_0(S_1)}$$

Hierin is:

k_l = plaatselijke reflectiecoefficient voor de drukgolf.

Voor $Z_s(S_2)$ en $Z_0(S_1)$ gelden de reeds vermelde betrekkingen

We berekenen nu de plaatselijke reflectiecoefficient k_l voor de gevallen, dat de inwendige straal van een bloedvat r_0 respectievelijk gelijk is aan 1,40 cm, $\sim$ 1 cm, $\sim$ 0,1 cm en $\sim$ 0,01 cm, waarbij de hoekfrequentie ω steeds gelijk gesteld wordt aan respectievelijk 2π rad/s en 20π rad/s. De exacte straalwaarden, waarvoor de plaatselijke reflectiecoefficient berekend is, komen in het model voor. In figuur 4.3 zijn de waarden voor de plaatse-

lyke reflectiecoefficient voor deze gevallen weergegeven

$$k_l = |k_l| \cdot e^{j\varphi_l},$$

waarin:

k_l : absolute waarde van de plaatselyke reflectiecoefficient.

φ_l : fase van de plaatselyke reflectiecoefficient.

r_0 (m) → / ω ↓		0,0140	0,0104	0,000950	0,000117
k_l					
re	2π	−0,048	−0,047	0,096	0,101
im		−0,004	−0,007	−0,017	−0,0004
$\|k_l\|$		0,048	0,048	0,100	0,101
φ_l		184,6	188,3	344,5	359,8
re	20π	−0,048	−0,048	−0,013	0,101
im		−0,0004	−0,0007	−0,062	−0,004
$\|k_l\|$		0,048	0,048	0,064	0,101
φ_l		180,5	180,8	258,4	357,6

Figuur 4.3 Enige waarden van de plaatselyke reflectiecoefficient.

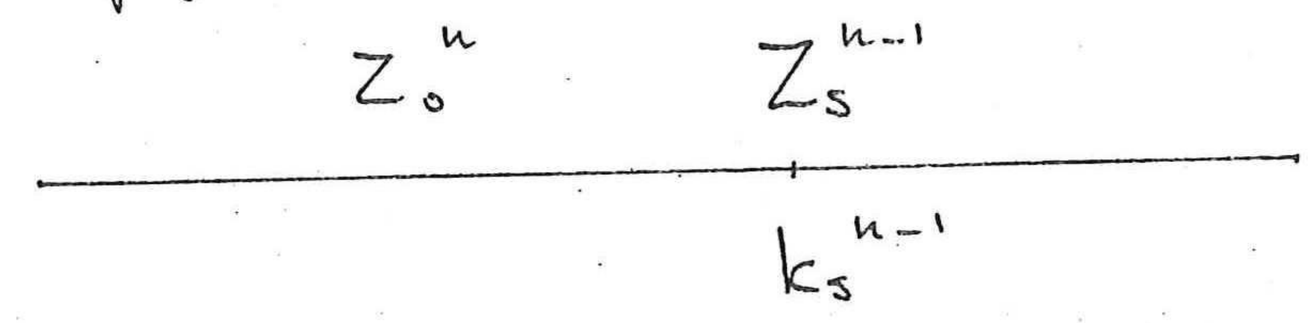
Voor $r_0 \sim 1$ cm en voor $r_0 \sim 0{,}01$ cm is de plaatselijke reflectiecoefficient bij benadering frequentieonafhankelijk en reeel. In het eerste geval is ze negatief, in het tweede positief.

4.3 Bepaling van de systeemreflectiecoëfficiënten, de systeemimpedanties en de ingangsimpedanties

Voor de reflectiecoëfficiënt voor de druk-golf hebben we reeds de volgende algemene uitdrukking afgeleid:

$$k = \frac{Z_s - Z_o}{Z_s + Z_o}$$

In figuur 4.4 is sectie n weergegeven:



Figuur 4.4 Sectie n.

We hebben nu echter niet één buis met karakteristieke impedantie Z_o, die wordt beëindigd met een impedantie Z_s, maar m parallelle bloedvaten met ieder dezelfde karakteristieke impedantie Z_o, die worden beëindigd door één impedantie Z_s.
We herleiden de algemene uitdrukking voor de reflectiecoëfficiënt voor ons geval.

Voor een enkele buis met karakteristieke impedantie Z_o geldt:

$$\frac{p^+}{Q^+} = Z_o$$

Als er n parallelle bloedvaten aanwezig zijn met ieder dezelfde karakteristieke impedantie Z_o, dan zal, bij gelijke druk, daar n keer zoveel doorheen stromen als door een enkele buis. De impedantie is dus n keer zo klein geworden.
Voor de systeemreflectiecoëfficiënt voor de drukgolf kunnen we dus schrijven:

$$k_s^{n-1} = \frac{Z_s^{n-1} - \frac{Z_o^n}{m}}{Z_s^{n-1} + \frac{Z_o^n}{m}}$$

We spreken van de systeemreflectiecoëfficiënt, omdat de reactie van het hele erachter liggende systeem wordt weergegeven.
Voor p en Q hebben we eerder de volgende uitdrukkingen afgeleid:

$$P = A e^{-\gamma z} + B e^{\gamma z}$$

$$Q = \frac{1}{Z_0}\left(A e^{-\gamma z} - B e^{\gamma z} \right)$$

Hieruit volgt:

$$Z = \frac{P}{Q} = Z_0 \cdot \frac{A e^{-\gamma z} + B e^{\gamma z}}{A e^{-\gamma z} - B e^{\gamma z}}$$

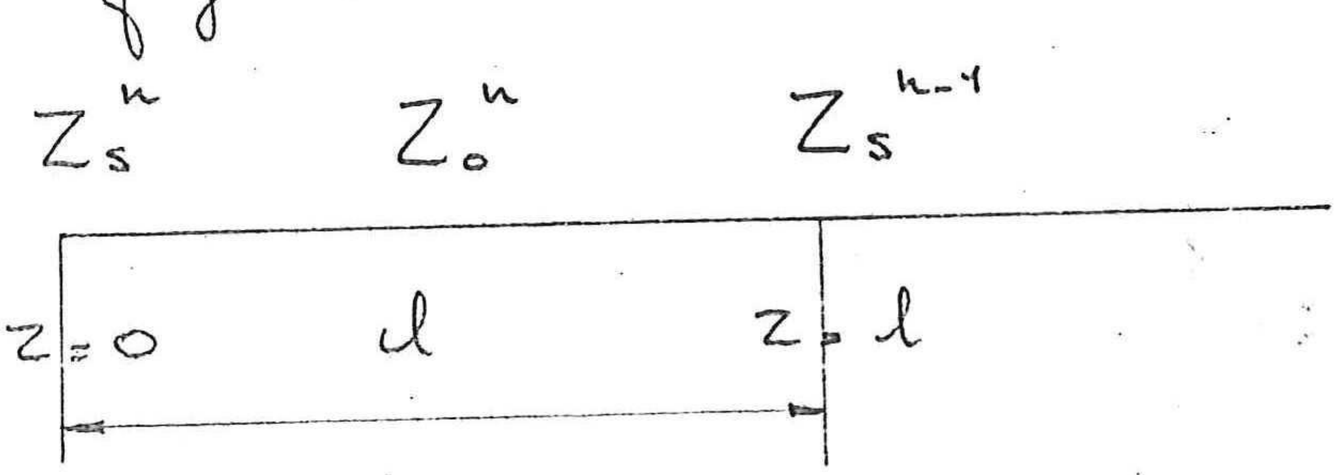
Dit is een zeer algemene uitdrukking voor de impedantie Z als functie van z.

Als er alleen een golf in positieve richting loopt, dan is:

$$Z = \frac{P}{Q} = Z_0 \cdot \frac{A e^{-\gamma z}}{A e^{-\gamma z}} = Z_0$$

Dit resultaat komt overeen met het eerder gestelde.

In figuur 4.5 is sectie n weergegeven.



Figuur 4.5 Sectie n

Op de grens van sectie n en n-1, d.w.z voor z = l, is een gegeven systeem-impedantie Z_s^{n-1} aanwezig. De systeem-impedantie Z_s^{n-1} is de impedantie van het gehele systeem van buizen, dat achter sectie n ligt. We willen de systeemimpedantie Z_s^n op de grens van sectie n+1 en n, d.w.z. voor z = 0, bepalen

Op z = 0 geldt:

$$\frac{Z_s^n}{Z_o^n} = \frac{A+B}{A-B} = \frac{1+\frac{B}{A}}{1-\frac{B}{A}}$$

De systeemreflectiecoefficient voor de drukgolf kunnen we uitdrukken in A en B:

$$k_s = \frac{p^-}{p^+} = \frac{B\,e^{jl}}{A\,e^{-jl}}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{B}{A} = k_s \cdot e^{-2jl}$$

Met de uitdrukking voor Z_s^n levert dit:

$$Z_s^n = Z_o^n \cdot \frac{1 + k_s^{n-1} e^{-2\gamma l}}{1 - k_s^{n-1} e^{-2\gamma l}}$$

Waarin:

$$k_s^{n-1} \cdot \frac{Z_s^{n-1} - Z_o^n}{Z_s^{n-1} + Z_o^n}$$

Als we ook nu weer stellen, dat in sectie n m parallelle bloedvaten aanwezig zijn, wordt dit:

$$Z_s^n = \frac{Z_o^n}{m} \cdot \frac{1 + k_s^{n-1} \cdot e^{-2\gamma l}}{1 - k_s^{n-1} \cdot e^{-2\gamma l}}$$

Waarin

$$k_s^{n-1} \cdot \frac{Z_s^{n-1} - \frac{Z_o^n}{m}}{Z_s^{n-1} + Z_o^n}$$

We kunnen Z_s^n herleiden door in te voeren:

$$\gamma = \alpha + j\beta.$$

$$k_s^{n-1} = K_s^{n-1} \cdot e^{j\varphi_s^{n-1}}.$$

Hierin is:

k_s^n = systeemreflectiecoëfficiënt op de grens van sectie n en n+1.

K_s^n = absolute waarde van de systeem-reflectiecoëfficiënt k_s^n

φ_s^n = fase van de systeemreflectie-coëfficiënt k_s^n.

Nu wordt:

$$k_s^{n-1} e^{-2\gamma l} = K_s^{n-1} \cdot e^{-2\alpha l} \cdot e^{j(\varphi_s^{n-1} - 2\beta l)}$$

Uiteindelijk vinden we voor de systeem-reflectiecoëfficiënt k_s^{n-1} en de systeem-impedantie Z_s^n:

$$k_s^{n-1} = \frac{Z_s^{n-1} - \frac{Z_o^n}{m}}{Z_s^{n-1} + \frac{Z_o^n}{m}}$$

$$Z_s^n = Z_o^n \cdot \frac{1 + K_s^{n-1} e^{-2\alpha l} e^{j(\varphi_s^{n-1} - 2\beta l)}}{m \; 1 - K_s^{n-1} e^{-2\alpha l} e^{j(\varphi_s^{n-1} - 2\beta l)}}$$

4.4 Benaderende bepaling van de variatie in druk en stroom

We willen de drukgolf en de stroomgolf, zoals die in het model optreden, bepalen, waarbij we met name geïnteresseerd zijn in de amplitude van de drukgolf.
We bepalen daartoe eerst de drukgolf en de daarbij behorende amplitude op de splitsingspunten. We bekijken allereerst de eerste sectie van het model, namelijk sectie 50. In figuur 4.6 is sectie 50 weergegeven. We veronderstellen, dat de druk als randvoorwaarde in punt A gegeven is. Zoals eerder aangegeven is, kunnen we volstaan met het bekijken van harmonische bewegingen door de randvoorwaarde in een Fourierreeks te ontbinden. We bepalen de amplitude en de fase van de verschillende harmonischen, waaruit de drukgolf is opgebouwd, op het uiteinde B van sectie 50.

A Sectie 50 B

Z_i	$k_s^{49} = k_s^{49} \cdot e^{i\varphi^{49}}$
oorspronkelijke golf.	
1e teruggekaatste golf	

2e teruggekaatste golf.

Het rekenschema ziet er als volgt uit:

A	B
p (gegeven)	$\longrightarrow p$
$+ Z_i$ (berekend)	$+ Z_s^{49}$ (berekend)
$\rightarrow Q$	$\rightarrow Q$

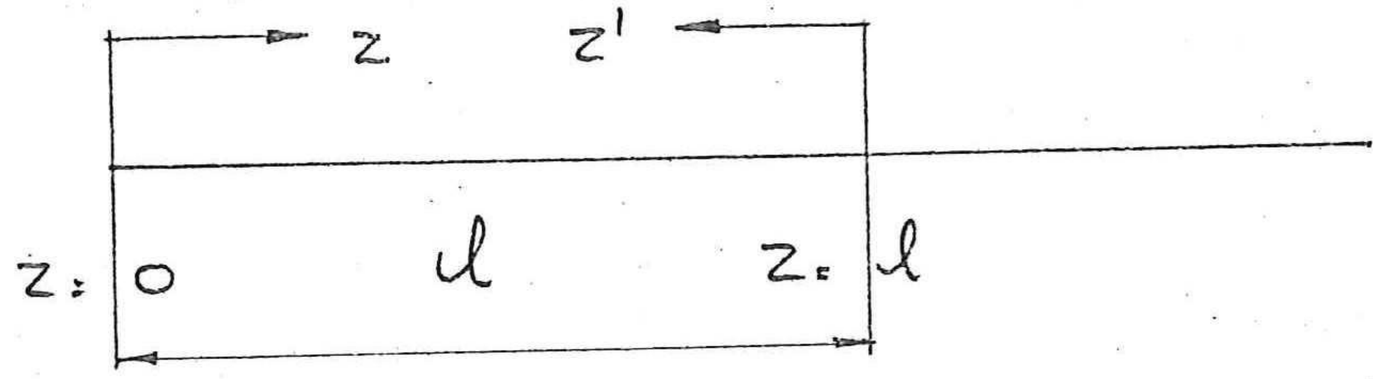
of algemeen voor een sectie n:

p (gegeven)	$\longrightarrow p$
$+ Z_s^{n}$ (berekend)	$+ Z_s^{n-1}$ (berekend)
$\rightarrow Q$	$\rightarrow Q$

Figuur 4.6 Sectie 50 en het rekenschema.

We doen dit met behulp van een visuele methode door van golven, die in één richting lopen, uit te gaan. In sectie 50 zal een golf naar rechts lopen, de oorspronkelijke golf. In punt B, waar de systeemreflectiecoefficient bekend is, zal een golf teruggekaatst worden, de eerste teruggekaatste golf. Omdat de randvoorwaarde in A gegeven is, zal de eerste teruggekaatste golf daar op zijn beurt volkomen negatief teruggekaatsen, wat de tweede teruggekaatste golf levert. Ook deze zal weer in punt B teruggkaatsen, maar als de systeem-reflectiecoefficient niet te groot is, is dit te verwaarlozen. Door de oorspronkelijke golf, de eerste teruggekaatste golf en de tweede teruggekaatste golf in punt B bij elkaar op te tellen, kennen we de amplitude en de fase van de betreffende harmonische. De som van de harmonischen levert de drukgolf in B. Dit is de randvoorwaarde voor sectie 49. Zo kunnen we het hele systeem doorrekenen.

Omdat in het beginpunt en op de grenzen tussen de secties de systeem-impedanties voor de verschillende frequenties bekend zijn, kan dus direct de stroom bepaald worden. Op z = 0 van elke sectie is de druk-golf als randvoorwaarde gegeven. In figuur 4.7 is sectie n weergegeven.



Figuur 4.7 Sectie n.

Stel de randvoorwaarde p:

$p = a \cos(\omega t + \nu)$

Hierin is a de amplitude.

De heengaande oorspronkelijke golf p_1 is:

$$p_1(z) = a \cos(\omega t + \nu - \beta z) \cdot e^{-\alpha z}$$

Op z = l wordt dit:

$$p_1(l) = a \cos(\omega t + \nu - \beta l)\, e^{-\alpha l}$$

Op z = l is de systeemreflectiecoëffi-cient bekend.

$k_s = k_s e^{j\varphi_s}$

De eerste teruggekaatste golf p_2 is:

$$p_2(z) = k_s . R . \cos(\omega t + \sigma - \beta l + \varphi_s - \beta z') . e^{-\alpha l} e^{-\alpha z'}$$

$$p_2(z) = k_s a \cos(\omega t + \sigma - 2\beta l + \varphi_s + \beta z) e^{-2\alpha l} e^{\alpha z}$$

Op $z' = l$, d.w.z. $z = 0$, wordt dit:

$$p_2(0) = k_s a \cos(\omega t + \sigma - 2\beta l + \varphi_s) e^{-2\alpha l}.$$

Deze golf wordt in $z = 0$ volkomen negatief teruggekaatst.

De tweede teruggekaatste golf p_3 is:

$$p_3(z) = -k_s a \cos(\omega t + \sigma - 2\beta l + \varphi_s - \beta z) e^{-2\alpha l} e^{-\alpha z}.$$

We bepalen nu eerst de som van de teruggekaatste golven:

$$p_2(z) + p_3(z) = k_s . a e^{-2\alpha l} *$$

$$* \left| \cos(\omega t + \sigma - 2\beta l + \varphi_s + \beta z) e^{\alpha z} - \cos(\omega t + \sigma - 2\beta l + \varphi_s - \beta z) e^{-\alpha z} \right|$$

Als we dit uitwerken met behulp van goniometrische betrekkingen, vinden we:

$$p_2(z) + p_3(z) = K_s \cdot Q \cdot e^{-2\alpha l} *$$

$$* \left| \cos(\omega t + \nu - z\beta l + \varphi_s) \cos \beta z \left(e^{\alpha z} - e^{-\alpha z}\right) \right.$$

$$\left. - \sin(\omega t + \nu - z\beta l + \varphi_s) \sin \beta z \left(e^{\alpha z} + e^{-\alpha z}\right) \right]$$

Voor $z = l$ wordt dit:

$$p_2(l) + p_3(l) = K_s \cdot Q \cdot e^{-2\alpha l} *$$

$$* \left[\cos(\omega t + \nu - z\beta l + \varphi_s) \cos \beta l \left(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}\right) \right.$$

$$\left. - \sin(\omega t + \nu - z\beta l + \varphi_s) \sin \beta l \left(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}\right) \right]$$

Stel nu:

$$\delta = \omega t + \nu - z\beta l + \varphi_s.$$

$$C = \cos \beta l \left(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l}\right)$$

$$D = -\sin \beta l \left(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l}\right).$$

Dan wordt:

$$p_2(l) + p_3(l) = K_s Q e^{-2\alpha l} \left(C \cos \delta + D \sin \delta\right)$$

Nu is:

$$C \cos \delta + D \sin \delta =$$

$$\sqrt{C^2 + D^2} \cdot \cos\left(\delta - \arctan D/C\right).$$

We willen op z = l weten de som $p_t(l)$ van $p_1(l)$, $p_2(l)$ en $p_3(l)$.
We hebben gevonden:

$$p_1(l) = a\, e^{-\alpha l} \cos(\omega t + \nu - \beta l).$$

$$p_2(l) + p_3(l) =$$

$$K_s \cdot a \cdot e^{-2\alpha l} \sqrt{C^2 + D^2} \cos(\delta - \arctan D/C)$$

We vereenvoudigen deze formules door te stellen, dat α zeer klein is, wat aanvankelijk in het model het geval is.
Dan wordt:

$$e^{\alpha l} = e^{-\alpha l} = 1.$$

$$C = 0$$

$$D = -2 \sin \beta l.$$

$$\arctan (D/C) = -\pi/2$$

Nu wordt dus:

$$p_1(l) = a \cos(\omega t + \nu - \beta l)$$

$$p_2(l) + p_3(l) =$$

$$2 K_s a \sin \beta l \cdot \cos\left(\omega t + \nu - \beta l - \beta l + \frac{\pi}{2} + \varphi_s\right)$$

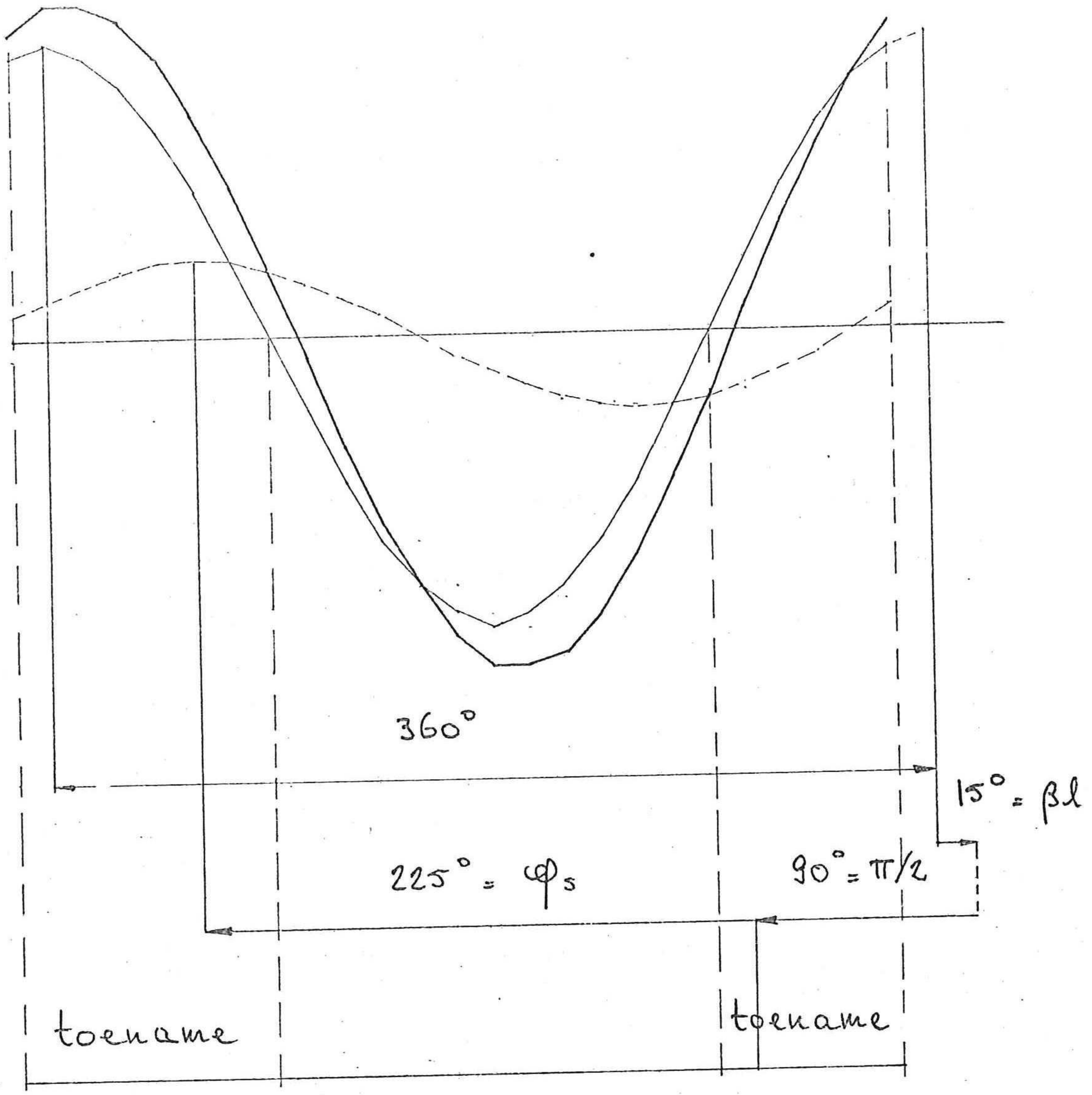
In figuur 4.8 is de resulterende druk-golf $p_t(l)$ weergegeven voor een geval, waarin α zeer klein is.
Verder is gesteld:

$l = \frac{1}{24} L$, d.w.z. $\beta l = 15°$

$K_s = 0{,}5$ en $\varphi_s = 225°$

$J = 0$

Hierin is L de golflengte.
We zien, dat in dit geval de amplitude van de drukgolf toeneemt. Uit de figuur volgt, dat de amplitude zal toenemen voor het geval, dat φ_s ligt tussen 0 en 15° en tussen 195° en 360°. In ons geval is voor de eerste harmonische, dus met een frequentie 1 $l \approx \frac{1}{100} L$. De amplitude zal dan toenemen voor het geval, dat φ_s ligt tussen ongeveer 180° en ongeveer 360°, omdat de factor βl zeer klein wordt. De amplitude neemt dan minder toe dan in het beschouwde geval, omdat ook de factor $\sin \beta l$ in de som $p_2(l) + p_3(l)$ kleiner wordt.



——— = oorspronkelijke golf.

– – – – – = som teruggekaatste golven

——— = resulterende golf

Figuur 4.8 Oorspronkelijke golf, som van de teruggekaatste golven en de resulterende golf op uitlinde van een sectie.

Eenden is afgeleid:

$$p_1(l) = a\, e^{-\alpha l} \cos(\omega t + \nu - \beta l)$$

$$p_2(l) + p_3(l) =$$

$$K_5 \cdot e^{-2\alpha l} \sqrt{C^2 + D^2} \cdot \cos(\delta - \arctan D/C)$$

We kunnen nu $p_t(l) = p_1(l) + p_2(l) + p_3(l)$ in één formule vatten.

Stel:

$$E = a\, e^{-\alpha l}$$

$$EF = K_5\, a\, e^{-\alpha l}\, e^{-\alpha l} \sqrt{C^2 + D^2}$$

$$\varepsilon = \omega t + \nu - \beta l$$

$$\zeta = \beta l - \varphi_5 + \arctan(D/C).$$

Dan wordt:

$$p_t(l) = E \cos\varepsilon + EF \cos(\varepsilon - \zeta)$$

$$= E(1 + F\cos\zeta)\cos\varepsilon + EF \sin\zeta \cdot \sin\varepsilon.$$

Stel:

$$G = E(1 + F\cos\zeta)$$

$$H = EF \sin\zeta.$$

Dan wordt:

$$p_t(l) = G\cos\varepsilon + H\sin\varepsilon$$

$$p_t(l) = \sqrt{G^2 + H^2}\, \cos(\varepsilon - \arctan H/G)$$

We kunnen dit nog als volgt schrijven:

$$\sqrt{G^2+H^2} = \sqrt{E^2(1+F\cos\zeta)^2 + E^2F^2\sin^2\zeta}$$

$$= E\sqrt{1+2F\cos\zeta+F^2}$$

Tenslotte vinden we:

$$\varphi_t(l) = E\sqrt{1+2F\cos\zeta+F^2} \;*$$
$$* \cos\left(\varepsilon - \arctan\left(\frac{F\sin\zeta}{1+F\cos\zeta}\right)\right)$$

waarin:

$$\varepsilon = \omega t + \nu - \beta l$$

$$\zeta = \beta l - \varphi_s + \arctan(D/C)$$

$$C = \cos\beta l\,(e^{\alpha l} - e^{-\alpha l})$$

$$D = -\sin\beta l\,(e^{\alpha l} + e^{-\alpha l})$$

$$E = \Omega\, e^{-\alpha l}$$

$$F = K_s e^{-\alpha l}\sqrt{C^2+D^2}$$

Met deze gegevens kunnen we direct de amplitude en de fase van de harmonischen, waarmit de stroom is opgebouwd, berekenen via de betrekking:

$$Q(l) = \frac{p(l)}{Z_s}$$

Tot nu toe hebben we een beschouwing gegeven over in één richting lopende golven om aan te tonen, dat een toename van de amplitude van de drukgolf door reflecties kan worden veroorzaakt. In de bepaling van de resulterende golf nemen we slechts de eerste twee teruggekaatste golven mee, wat in geval van een kleine systeemreflectiecoefficient voldoende nauwkeurig is. Voor een grotere systeemreflectiecoefficient is het wij sterk bevaard en moeten er feitelijk meer teruggekaatste golven worden meegenomen. In de later volgende berekening is echter volstaan met de eerste twee teruggekaatste golven, daar het onderzoek een sterk kwalitatief karakter heeft.

Er is echter een exacte oplossing mogelijk met behulp van de vierpoolvergelijkingen
Ons stelsel vergelijkingen luidt:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -L_0 \frac{\partial Q}{\partial t} - R_0 Q$$

$$\frac{\partial Q}{\partial z} = -C_0 \frac{\partial p}{\partial t}$$

De vierpoolvergelijkingen luiden dan:

$$p(l) = \left[p(0) \cosh \gamma z - \frac{\gamma}{C_0 j\omega} Q(0) \sinh \gamma z \right] e^{j\omega t}$$

$$Q(l) = \left[Q(0) \cosh \gamma z - \frac{C_0 j\omega}{\gamma} p(0) \sinh \gamma z \right] e^{j\omega t}$$

In het begin van het model is $p(0)$ als randvoorwaarde gegeven. Samen met de ingangsimpedantie Z_i levert dit $Q(0)$. Voor de berekening kunnen we nu twee methoden toepassen.
De eerste methode gaat als volgt:
met behulp van de vermelde formules bepalen we $p(l)$ en $Q(l)$, die weer als randvoorwaarde voor de volgende sectie gelden.

De tweede methode faat als volgt: omdat de systeemimpedantie Z_s overal bekend is, kunnen we schrijven $Q(0) = \frac{p(0)}{Z_s(0)}$

Nu kunnen we de vierpoolvergelijkingen vervangen door de volgende vergelijkingen:

$$p(l) = \left[p(0) \cosh \gamma z - \frac{\gamma}{C_0 j\omega} \frac{p(0)}{Z_s(0)} \sinh \gamma z \right] e^{j\omega t}$$

$$Q(l) = \frac{p(l)}{Z_s(l)}$$

Zo kunnen we ook het hele systeem sectie voor sectie doorrekenen. Overigens is de methode met de vierpoolvergelijkingen in dit onderzoek niet toegepast.

4.5 Resultaten uit berekeningen met behulp van het model uitgevoerd.

Er is een computerprogramma opgesteld, waarmee de hierna vermelde grootheden worden berekend.
We berekenen per sectie n, waarbij we achteraan in het model beginnen:

- de karakteristieken α^n, β^n en Z_o^n van een enkel bloeduet.
- de systeemreflectiecoefficient k_s^n op de grens tussen de secties n en n-1.
- de systeemimpedantie Z_s^n op de grens tussen de secties n+1 en n.
- de systeemweerstand R_s^n op de grens tussen de secties n+1 en n.

Tenslotte berekenen we zo in het begin van het model

- de ingangsimpedantie Zi en de ingangsweerstand of de perifere weerstand Ri.

Daarna berekenen we per sectie n, waarbij we vooraan in het model beginnen, voor het eind. van de sectie

- de amplituden van de harmonischen, waarmit de drukgolf is opgebouwd
- de amplituden van de harmonischen, waarmit de stroomgolf is opgebouwd

In paragraaf 4.1 is de beschreven manier van berekenen nog wat nader uitgewerkt. Bij de berekening zijn formules toegepast, die verder in dit verslag zijn afgeleid, te weten in de paragraaf 3.3, 4.3 en 4.4. Deze formules zijn daar steeds in een kader aangegeven. In dien nodig zijn de formules nog wat nader uitgewerkt, alvorens ze in het computerprogramma toegepast zijn.

In eerste instantie is het model doorgerekend voor het volgende geval:

$E = 4 * 10^5 \ N/m^2$

$\Sigma S_2 = 1{,}1 \ S_1$

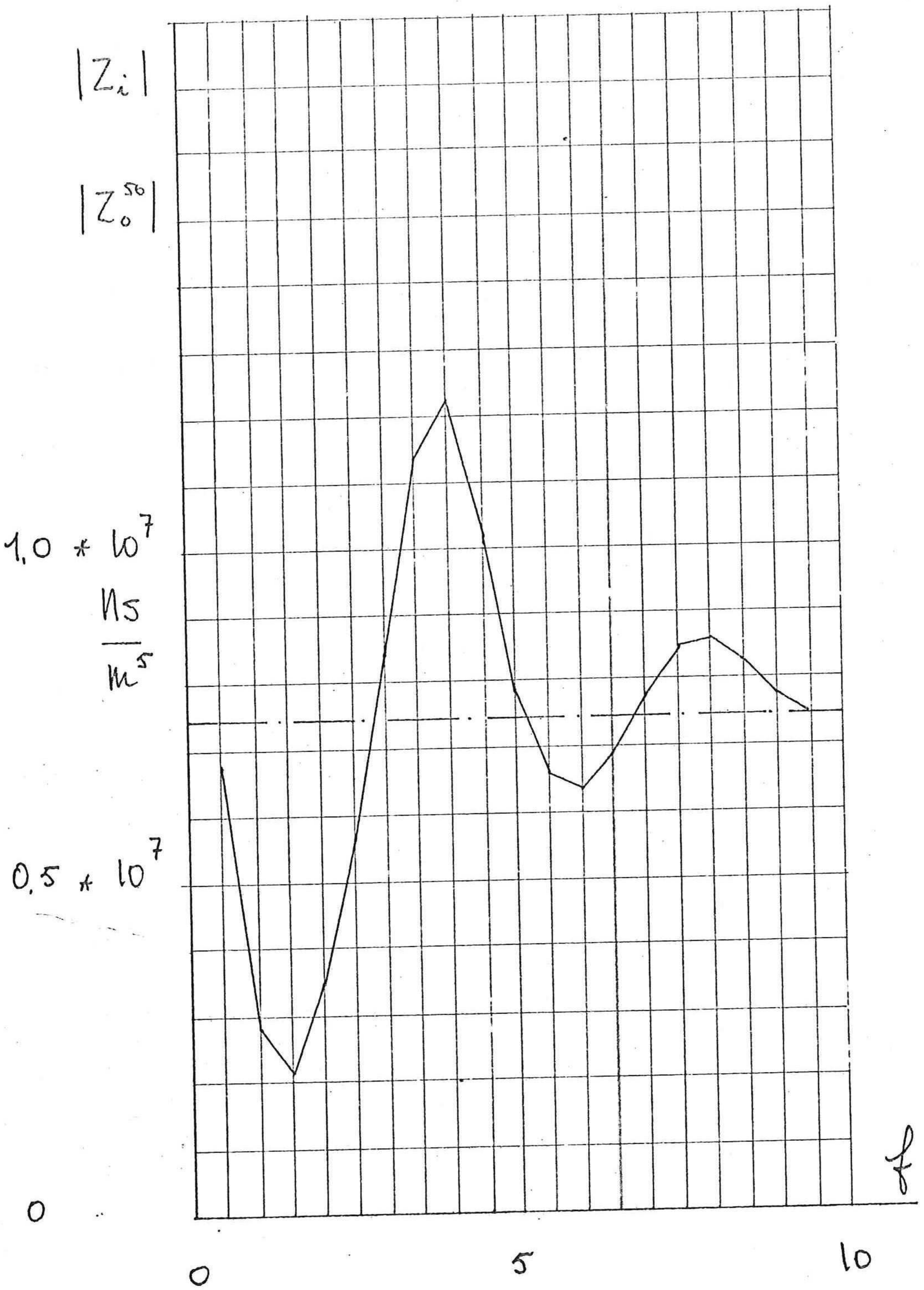
hierin is:

S_1 = het oppervlak van de slagaders voor de vertakking.

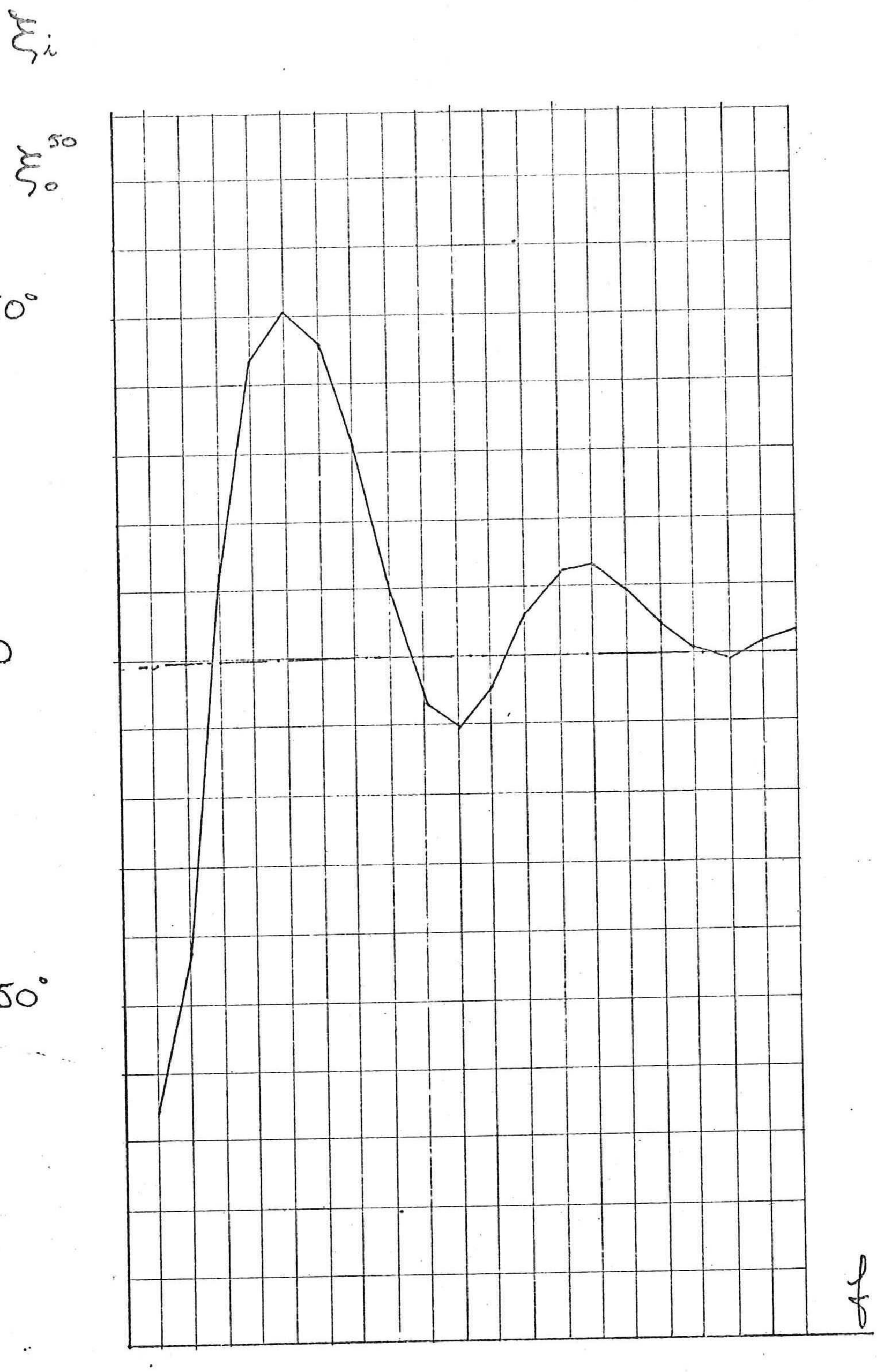
S_2 = het oppervlak van een slagaderna de vertakking.
Voor aders, die zich samenvoegen, is het net andersom
In de hierna volgende figuren zijn enige uitkomsten weergegeven.
In figuur 4.9 a en b zijn de absolute waarde en de fase van de ingangsimpedantie Z_i en van de karakteristieke impedantie Z_o^{50} van sectie 50, die overeenkomt met de aorta, als functie van de frequentie weergegeven.
In figuur 4.10 a en b zijn de absolute waarde en de fase van de systeemreflectiecoefficient k_s^{50} en de plaatselijke reflectiecoefficient k_e^{50} op het einde van sectie 50 als functie van de frequentie weergegeven
In figuur 4.11 a tot en met j is de amplitude van de harmonischen, waarmit de drukgolf en de stroomgolf is opgebouwd, d.w.z. met een frequentie 1 tot en met 10, als

functie van de plaats in het model, te weten op de splitsingspunten, weergegeven. In het beginpunt is de amplitude van alle harmonischen, zowel van de druk als van de stroom, gelijk gesteld aan 1, zodat de relatieve verandering is nagegaan.
De verhouding van de amplituden van de harmonischen, waarmit de drukgolf is opgebouwd, is gegeven als randvoorwaarde. Samen met de ingangsimpedantie levert dit de verhouding van de amplituden van de harmonischen, waarmit de stroomgolf is opgebouwd. In figuur 4.12 zijn deze relatieve verhoudingen weergegeven. Hierin is te zien, dat de harmonischen met een frequentie groter dan 3 een relatief geringe invloed hebben. Overigens is de amplitude van de harmonischen, waarmit de stroomgolf is opgebouwd, voor de frequentie 1 en 2 veel te groot.

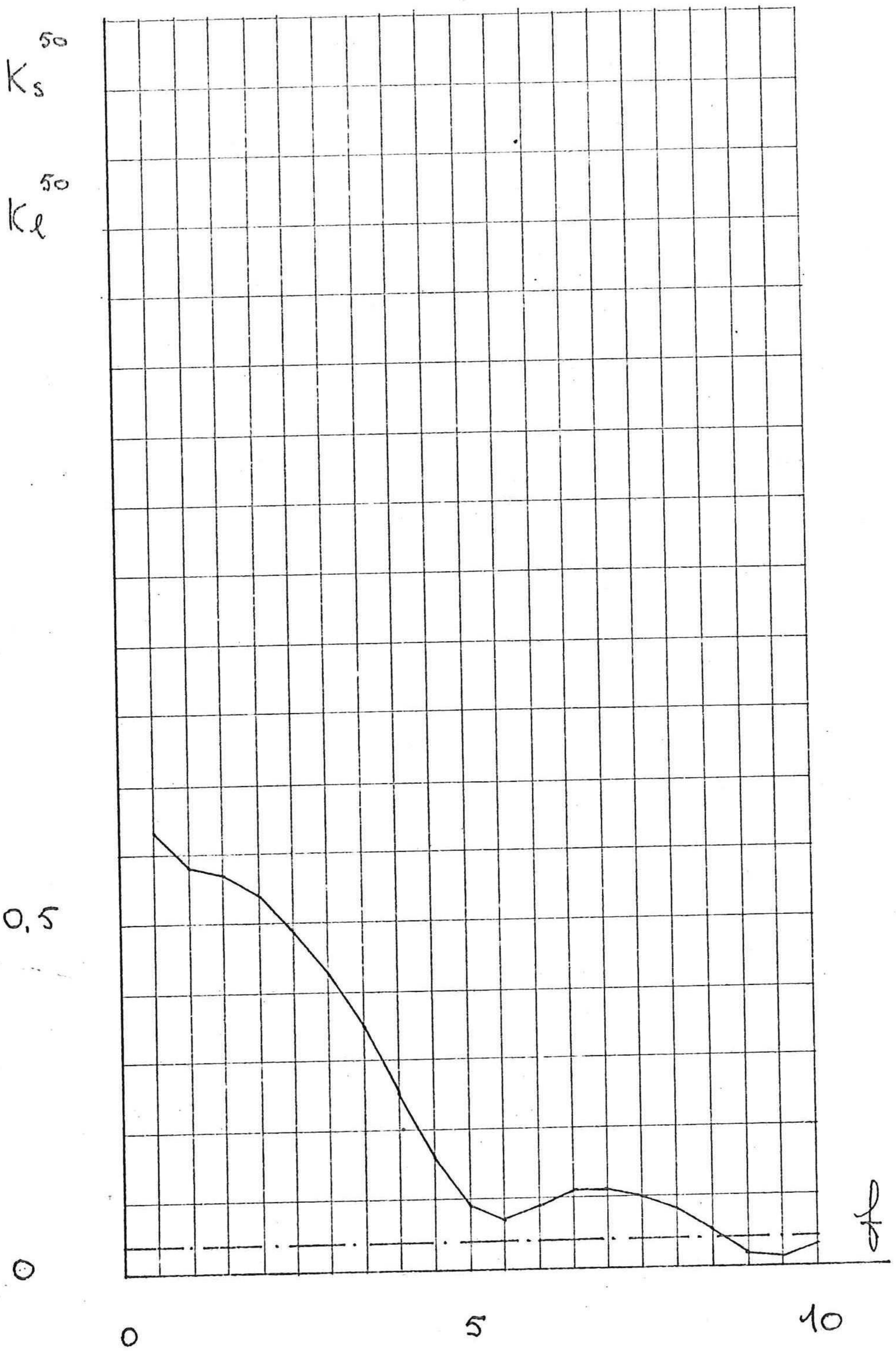
$R_i = 1{,}15 * 10^{10}$ Ns/m^5



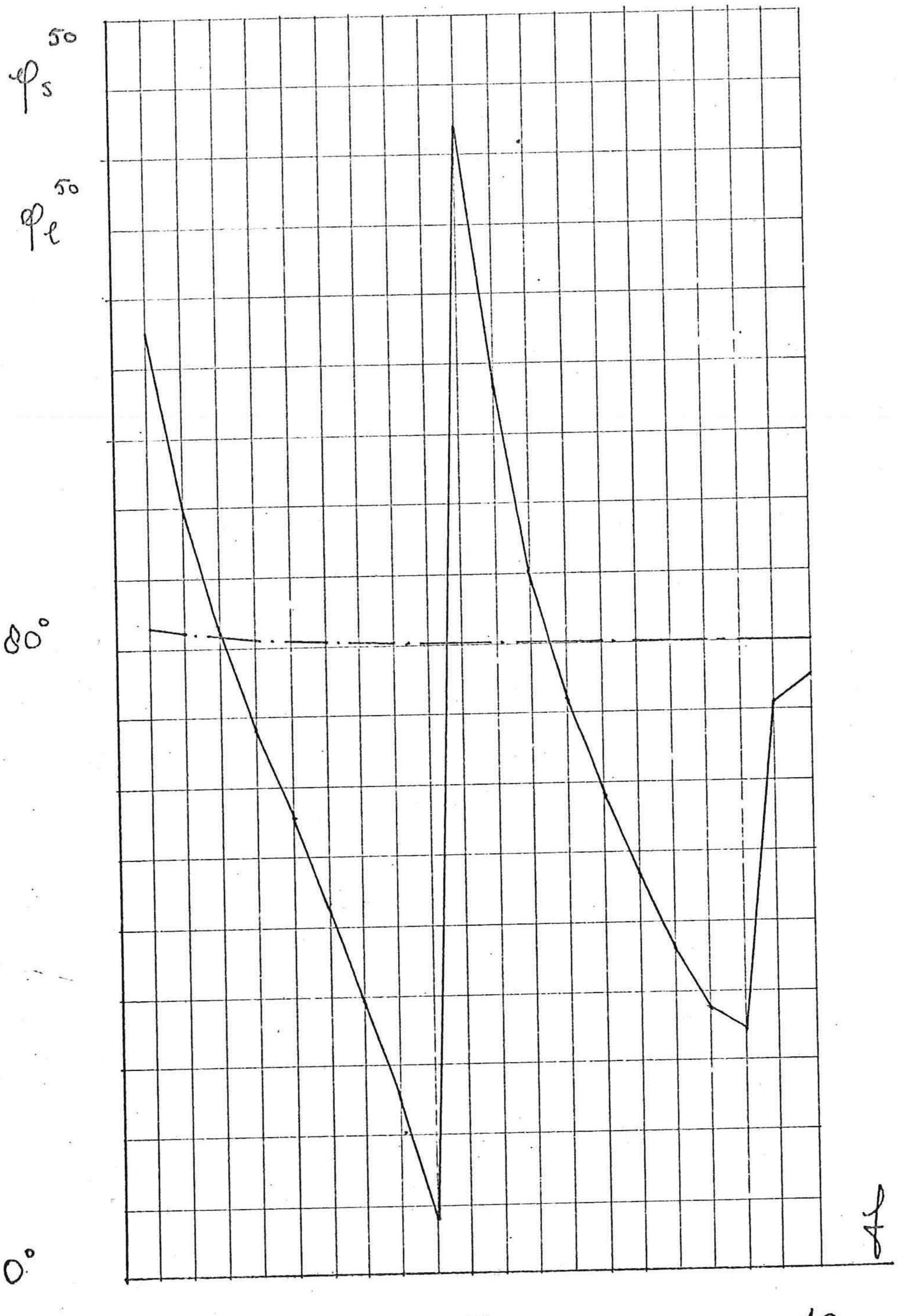
Figuur 4.9 a Absolute waarde van Z_i (——) en Z_o^{50} (—·—)



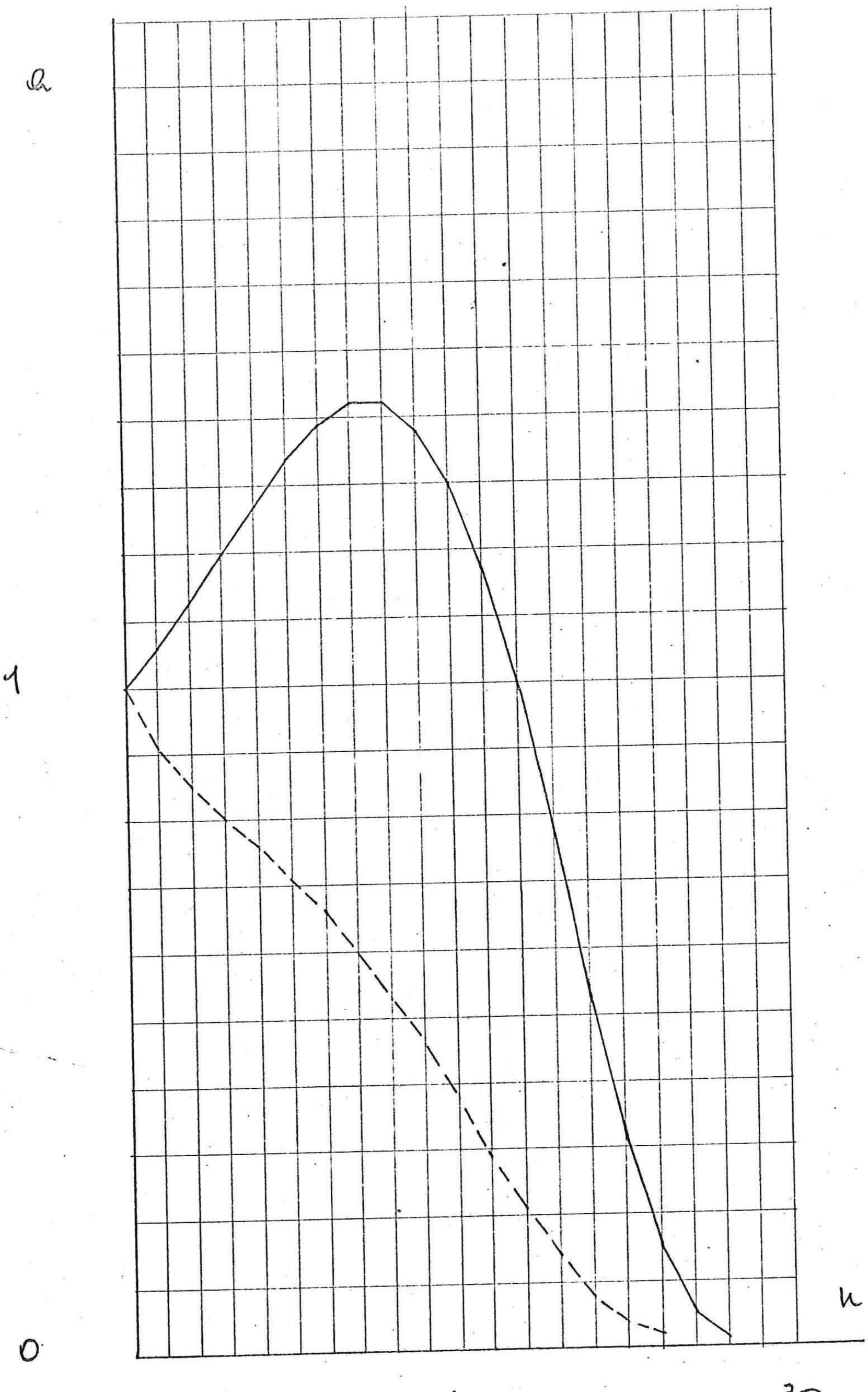
Figuur 4.9 b Fase van Z_i (——) en van Z_0^{50} (—·—).



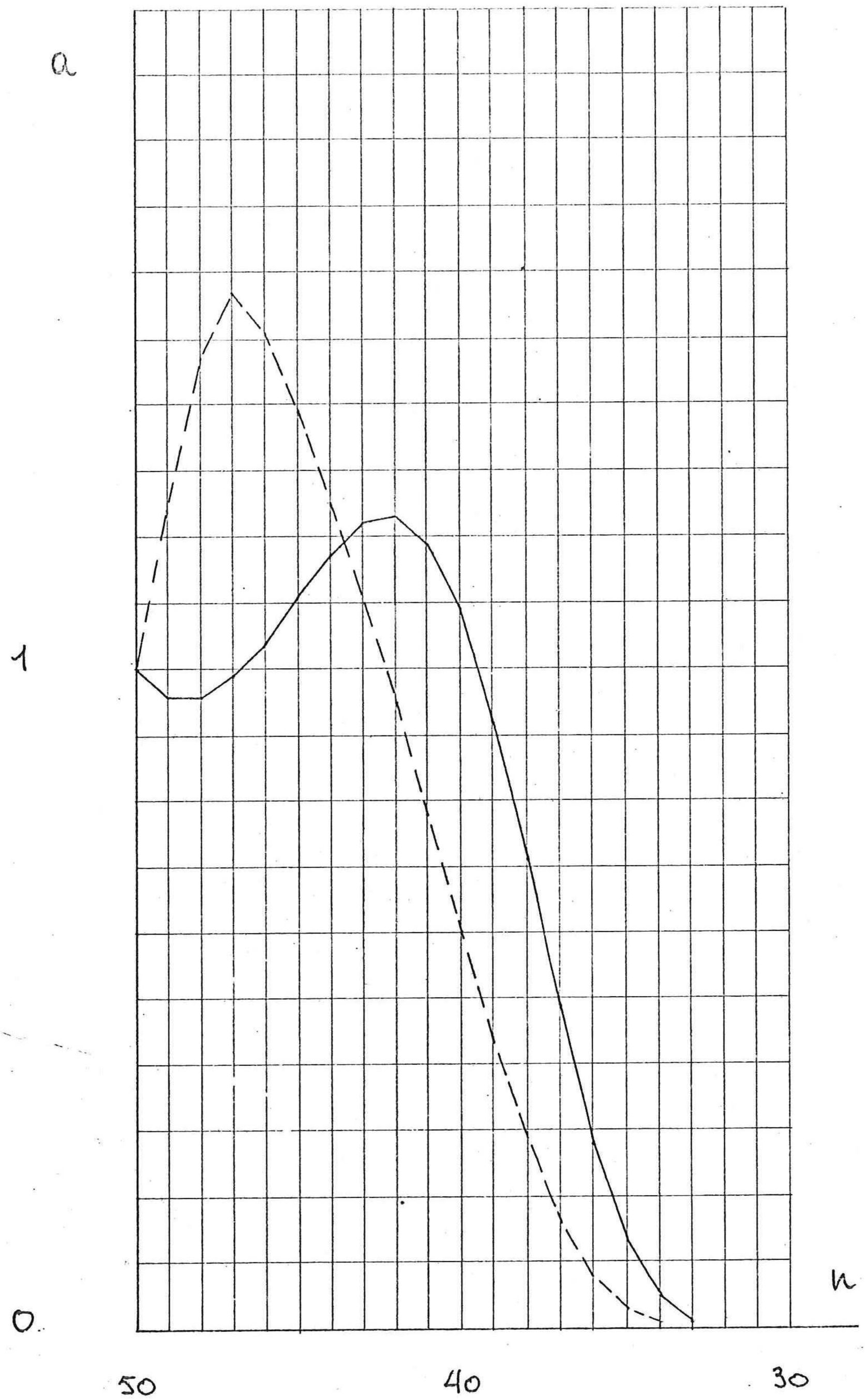
Figuur 4.10 a Absolute waarden van k_s^{50} (——) en k_l^{50} (—·—)



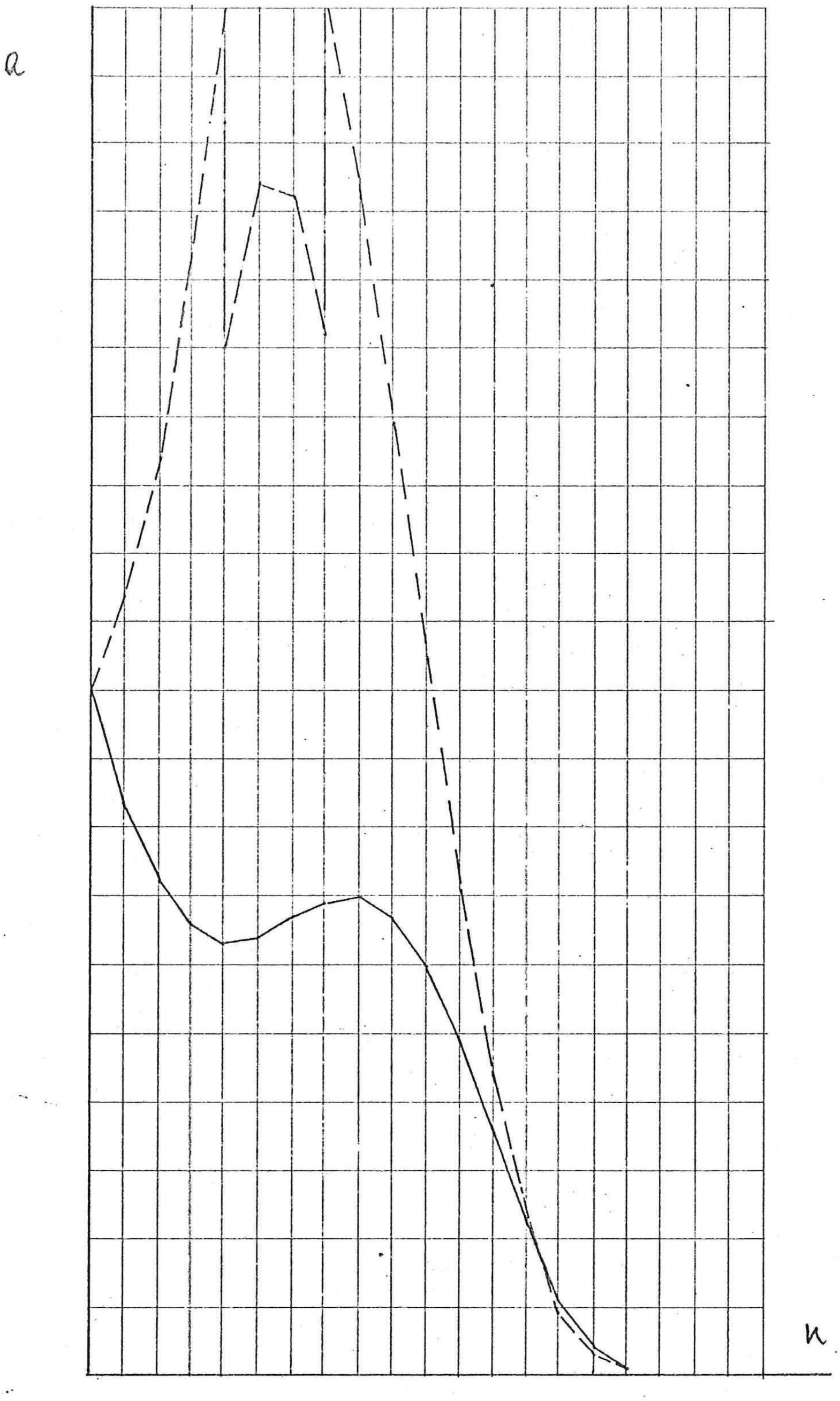
Figuur 4.10.b Fase van φ_s^{50} (——) en φ_l^{50} (—·—)



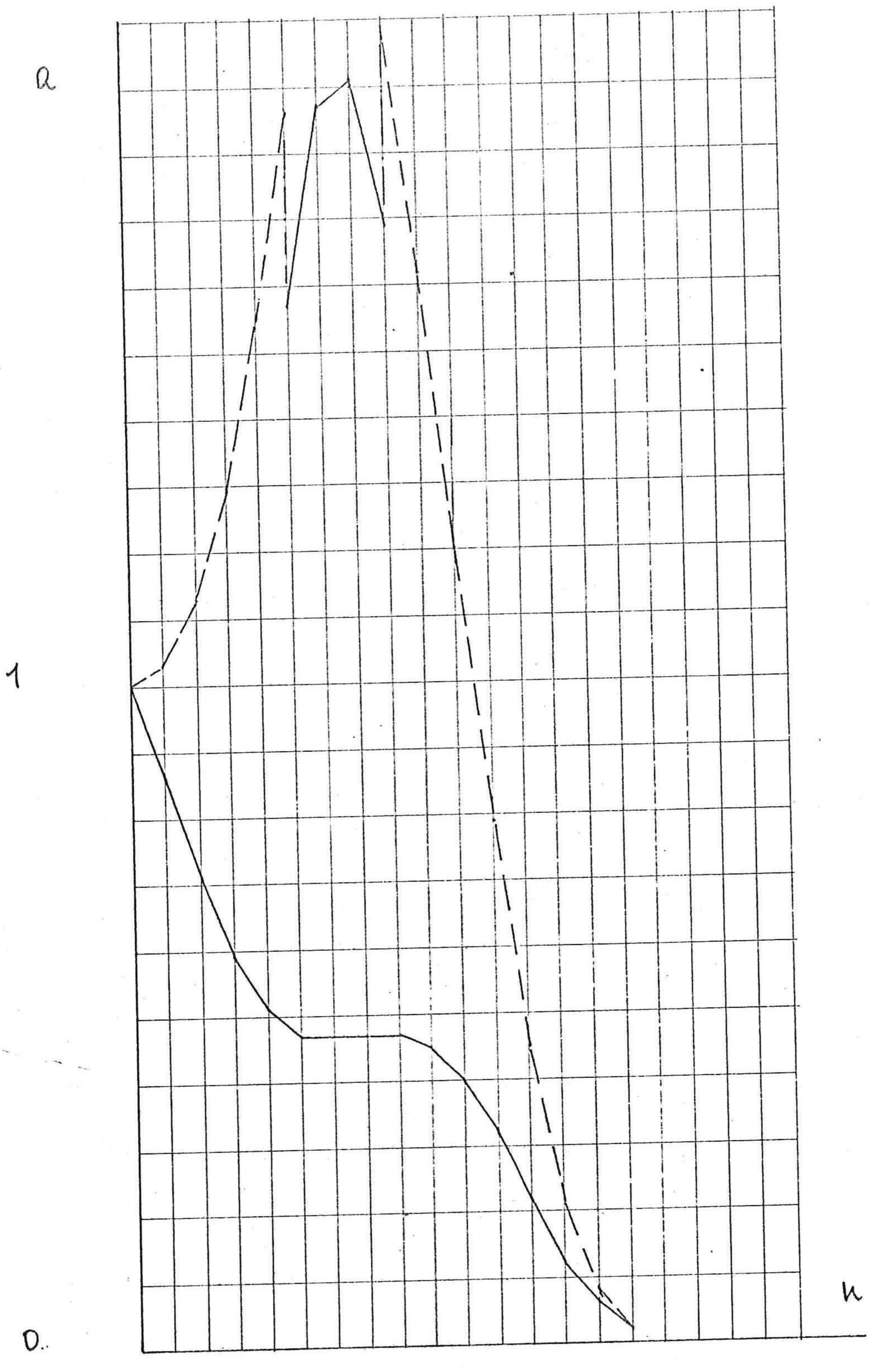
Figuur 4.11.a Amplitude van de harmonische voor de druk (——) en de stroom (—·—) met $f = 1$



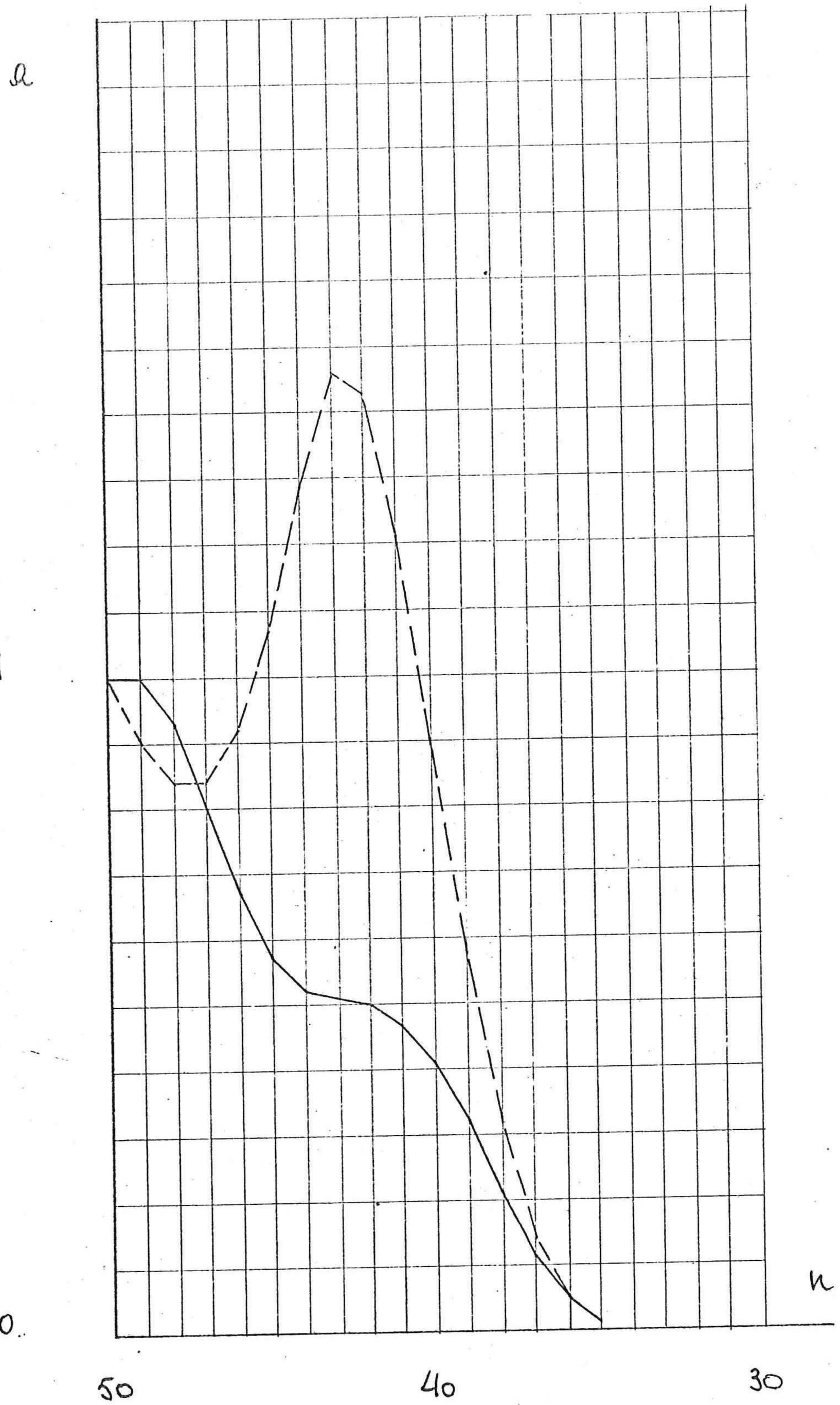
Figuur 4.11.b Amplitude van de harmonische voor de druk (——) en de stroom (—·—) met $f = 2$.



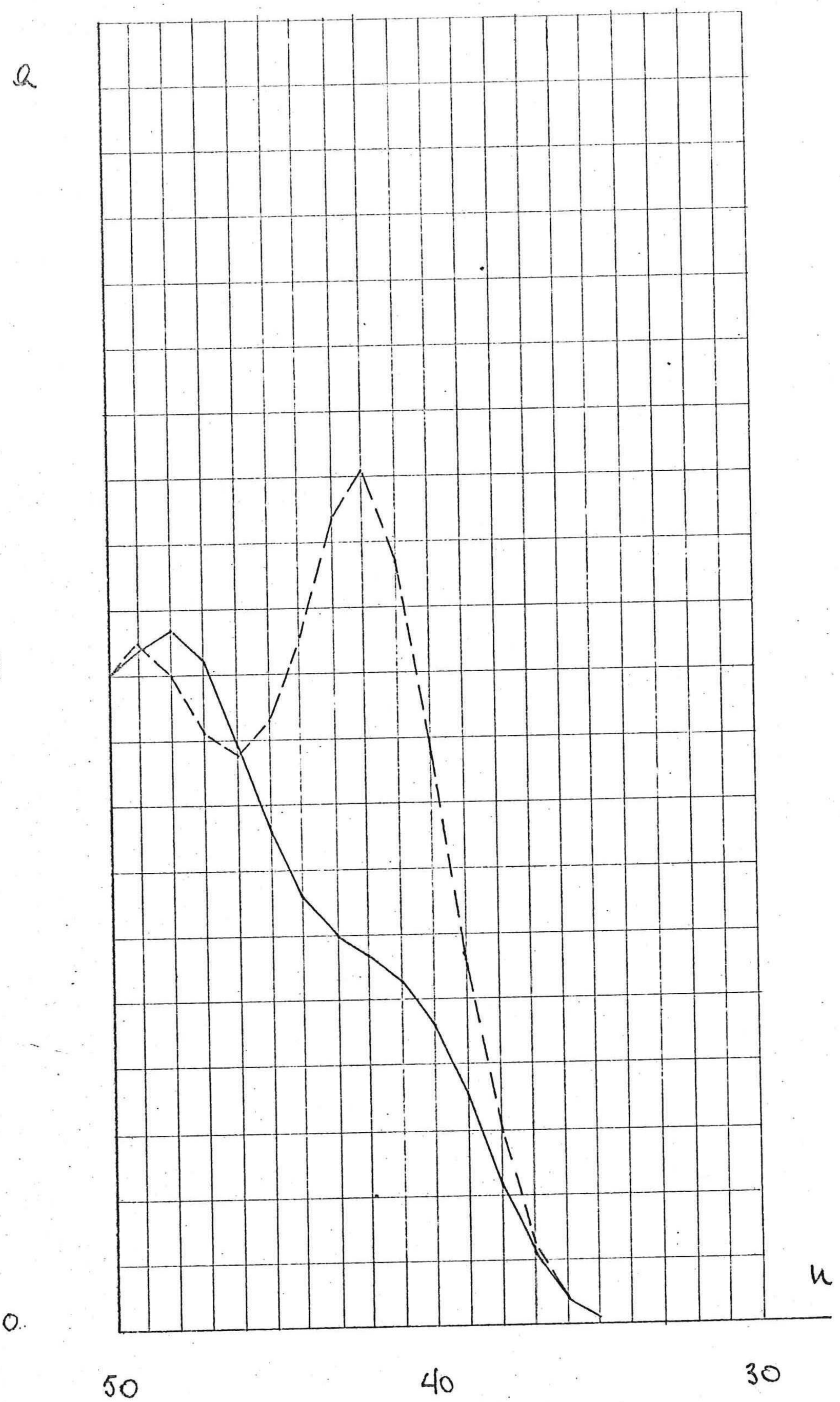
Figuur 4.12 c Amplitude van de harmonische voor de druk (——) en de stroom (—·—) met $f = 3$



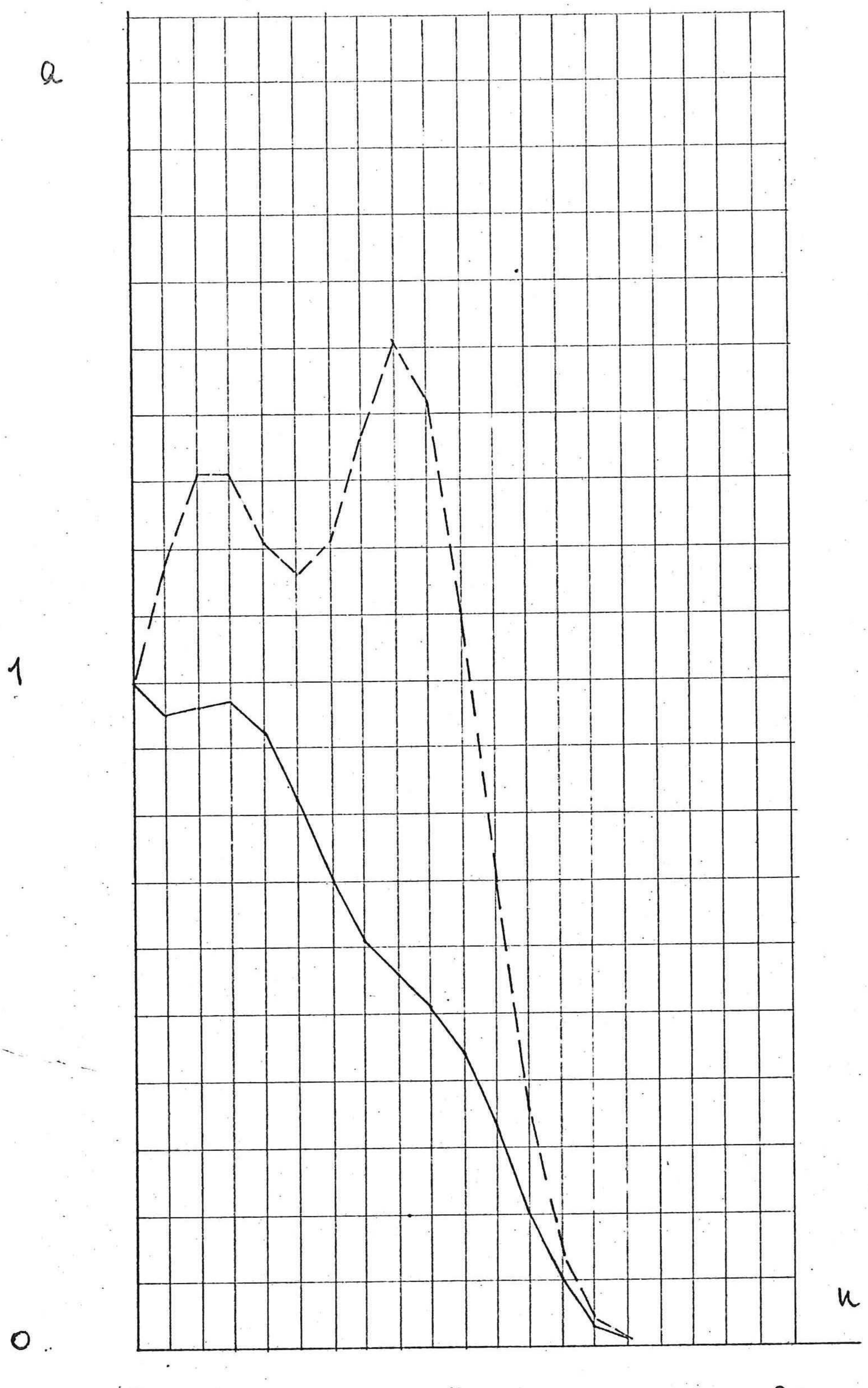
Figuur 4.12 a Amplitude van de harmonische voor de druk (——) en de stroom (—·—) met $f = 4$



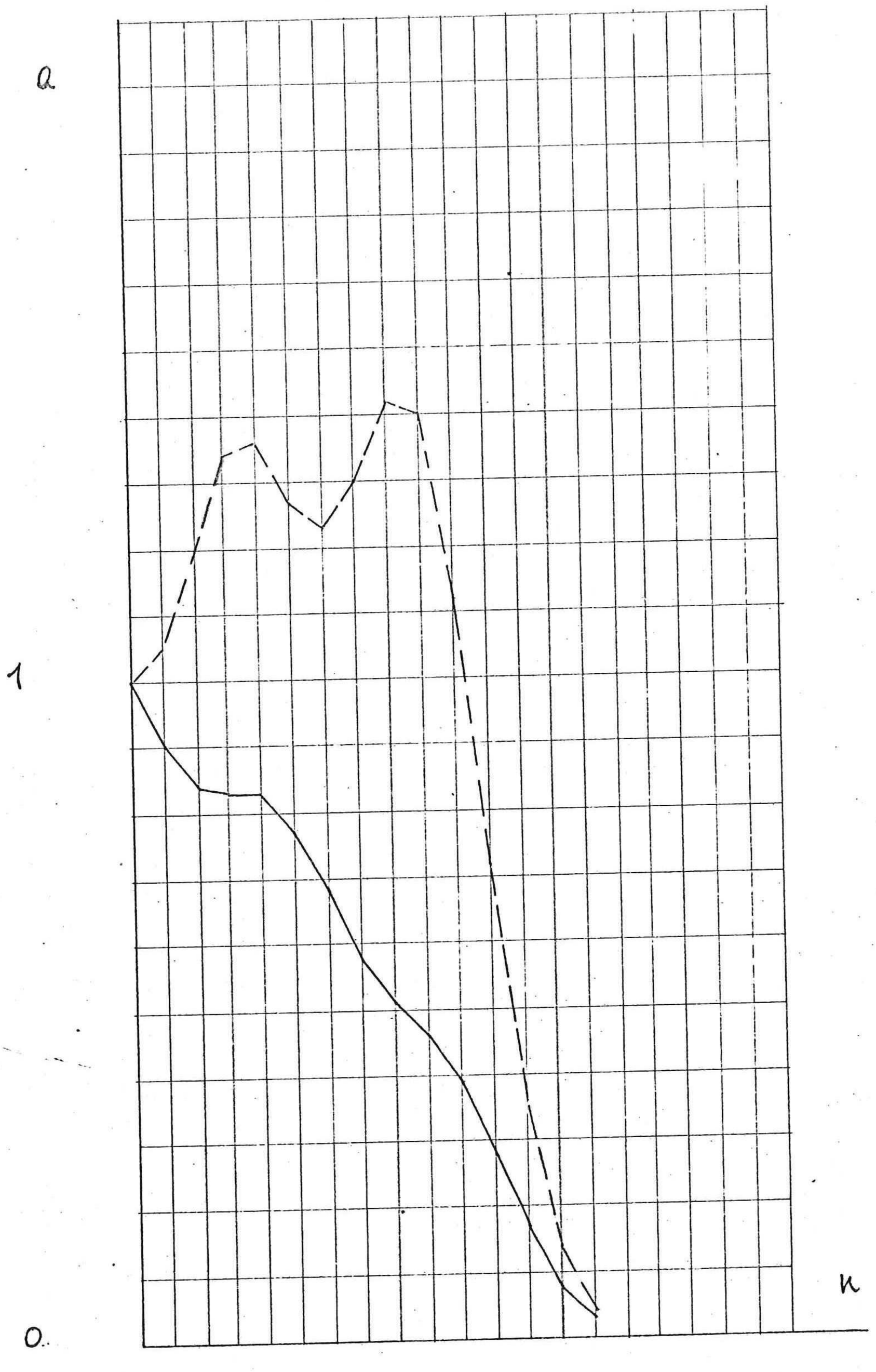
Figuur 4.12.e Amplitude van de harmonische voor de druk (——)
en de stroom (—·—) met $f = 5$



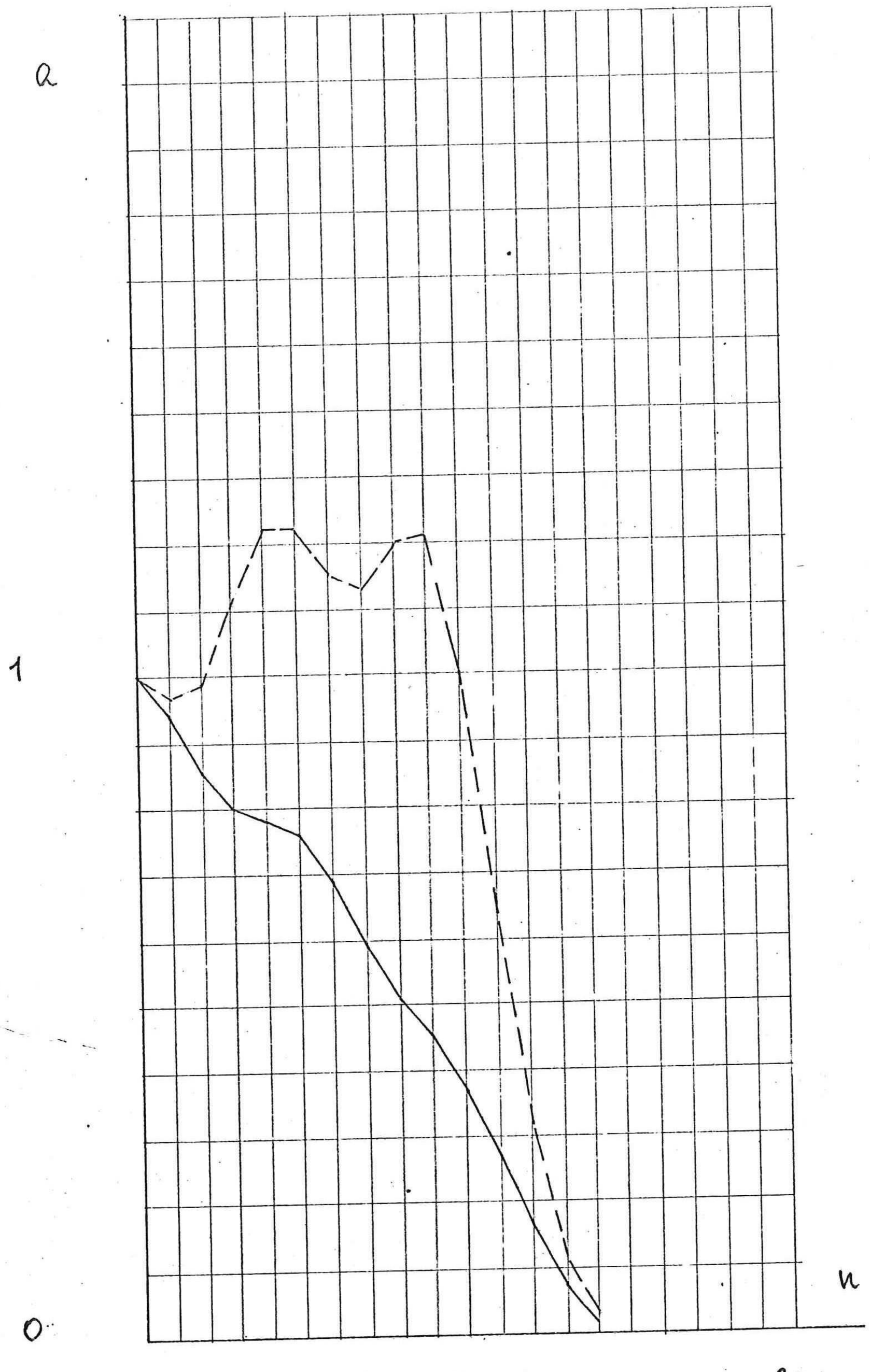
Figuur 4.12 f Amplitude van de harmonische voor de druk (——) en de stroom (— —) met f = 6



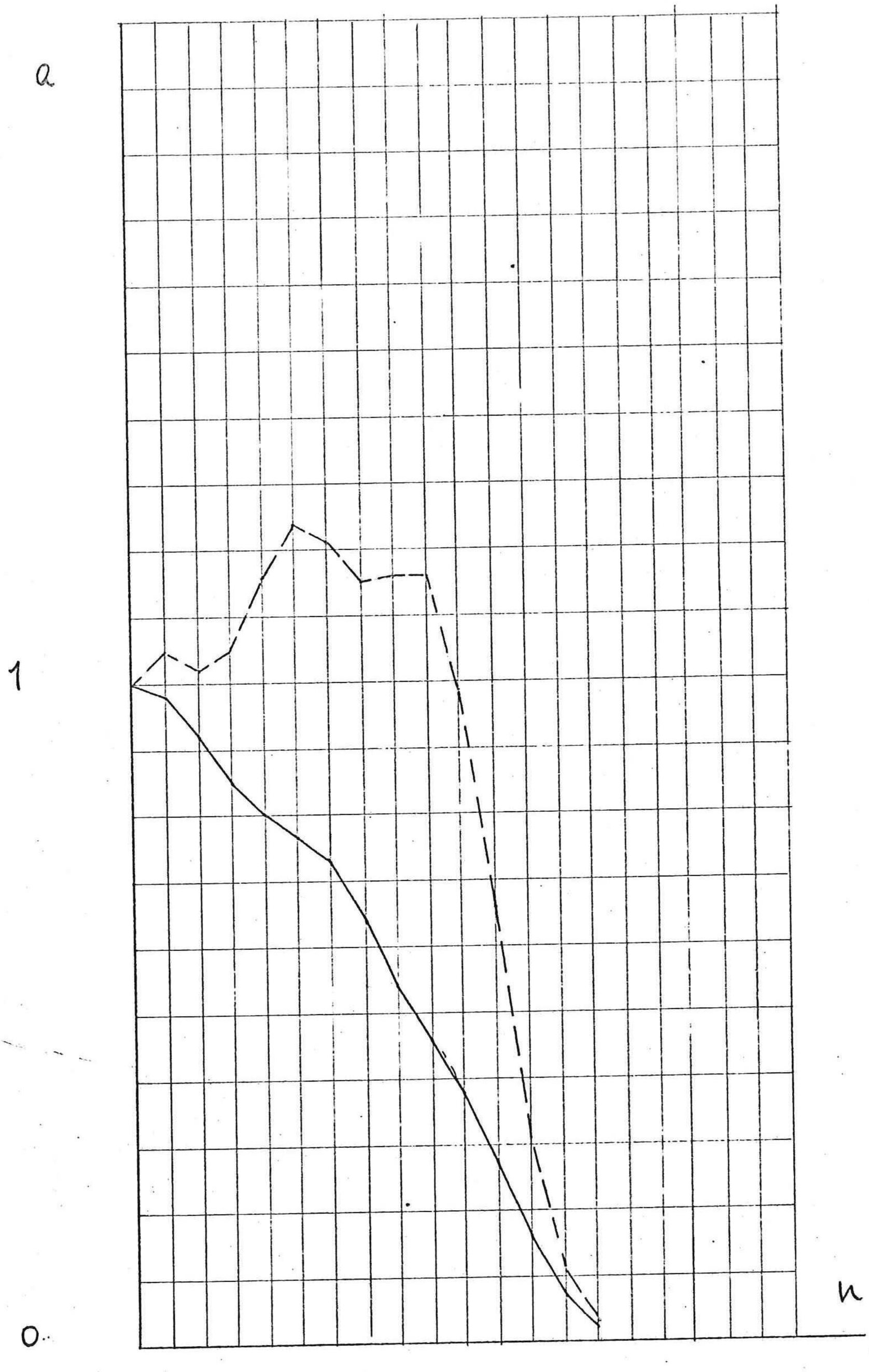
Figuur 4.12 f Amplitude van de harmonische voor de druk (——) en de stroom (—·—) met f = 7



Figuur 4.12 f Amplitude van de harmonische voor de druk (——) en de stroom (— · —) met f = 8



Figuur 4.12 f Amplitude van de harmonische voor de druk (——) en de stroom (—·—) met $f = 9$



Figuur 4.12 j Amplitude van de harmonische voor de druk (——) en de stroom (—·—) met f = 10

Uit deze resultaten kunnen we de volgende conclusies trekken:

- De vorm van de grafieken, die de absolute waarde en de fase van de ingangsimpedantie weergeven, stemt heel redelijk overeen met de werkelijke vorm; met name het feit, dat de ingangsimpedantie slechts weinig afwijkt van de karakteristieke impedantie van de aorta voor de hogere frequenties, en daaraan gerelateerd het feit, dat de fase voor die frequenties gering is.

De perifere weerstand is echter veel te hoog. Deze is in het model $1{,}15 \cdot 10^{10}$ Ns/m^5, terwijl ze in werkelijkheid $1{,}4 \cdot 10^{8}$ Ns/m^5.

De waarden van de systeemreflectiecoëfficiënt op het einde van sectie 50 komen redelijk overeen met waarden, die door anderen gevonden zijn.

De in onze berekening gevonden grafieken en waarden van groot-

heden zijn vergeleken met gegevens, die vermeld zijn in het hoofd-stuk Hemodynamics door Noorden-greef uit Biologisch Engineering, gerediged door Schwan [67].
De daarin vermelde gegevens zijn verkregen door directe meting aan de mens of met behulp van elektrische analogons.
Ons model blijkt dus, behalve voor de ingangsweerstand, voor de vermelde grootheden in kwalitatieve zin goed te voldoen.
- De amplituden van de harmonischen, waaruit de drukgolf is opgebouwd, met frequentie 1 en 2 nemen aanvankelijk toe. Daar deze harmonischen sterk overheersen in de drukgolf, zal dus ook de amplitude van de drukgolf toenemen.
De toename van de amplitude van de drukgolf is dus (mede) te verklaren door reflectieverschijnselen.
- In de grafieken, die de amplitudes weergeven, is, met name voor de

stroom, duidelijk te zien, dat de amplitude van de oorspronkelijke golf door interferentieverschijnselen met tenopgekaarste golven versterkt of verzwakt kan worden. Naarmate de frequentie hoger wordt, zien we meer pieken verschijnen, die echter steeds flauwer worden. Dit is te verklaren uit het feit, dat de golflengten korter worden, waardoor de faseverandering sneller verloopt, zodat de amplituden vaker versterkt en verzwakt zullen worden en minder tenopgekaarste golven meewerken aan een versterking of verzwakking van de amplitude.
Na sectie 4b, d.w.z voor n kleiner dan 4b, is de demping zeer sterk. In de grafieken, die de amplitudes weergeven, komen geen pieken meer voor en de amplitudes gaan snel naar 0. Aan het eind van sectie 33 is een nagenoeg lineaire stroom aanwezig

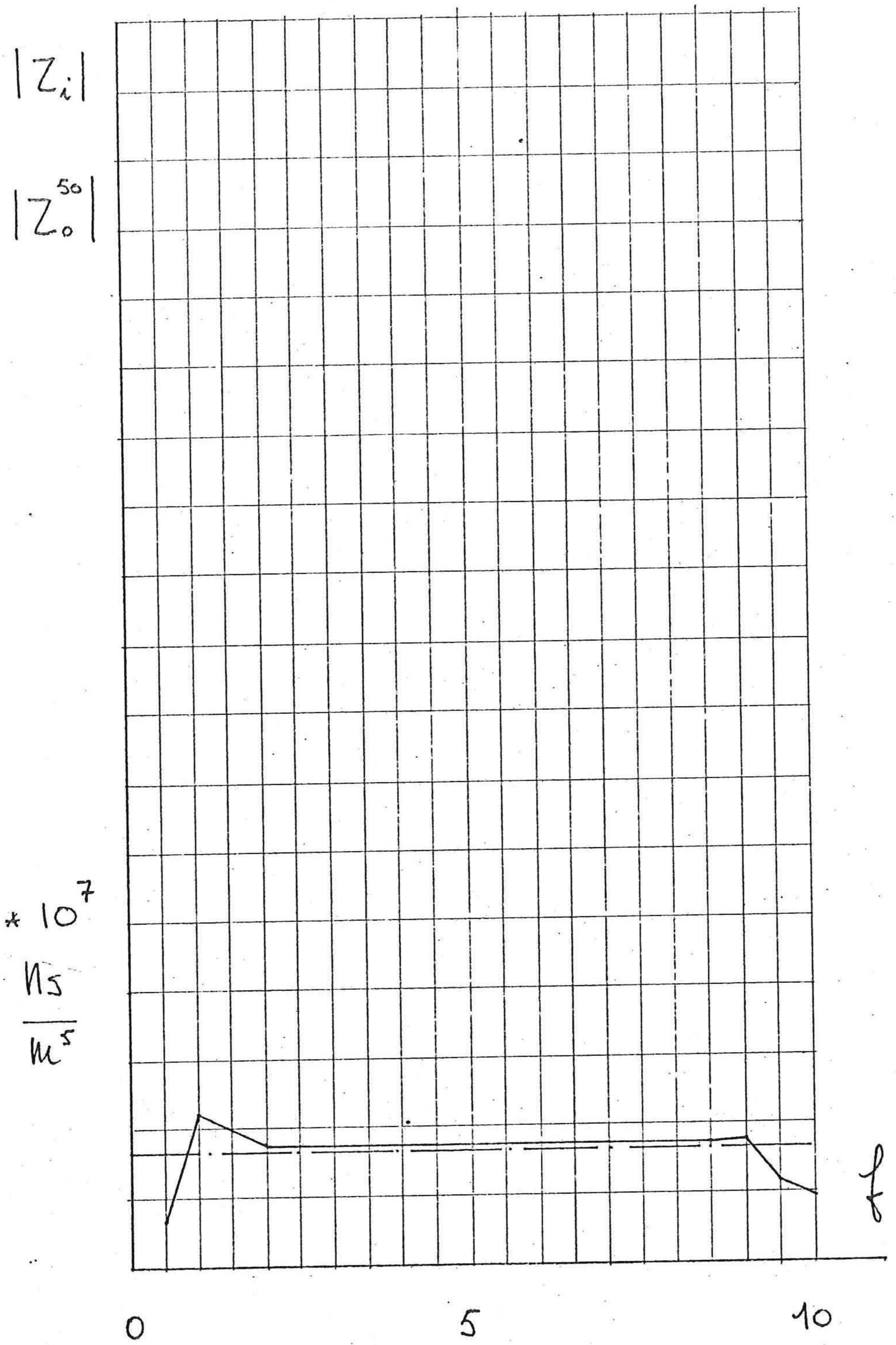
We gaan na wat het gevolg is, als we de parameters E en $\Sigma S_2/S_1$ laten variëren om de gevoeligheid van het model voor deze parameters te bekijken.
We hebben het model doorgerekend voor het geval, dat de elasticiteitsmodulus een 2 maal zo grote, een 2 maal zo kleine, en als extremen, een 10 maal zo grote en een 10 maal zo kleine waarde heeft als de normale waarde, waarbij $\Sigma S_2/S_1$ gelijk blijft, namelijk $\Sigma S_2/S_1 = 1{,}1$.
We hebben het model voorts doorgerekend voor het geval, dat de verhouding $\Sigma S_2/S_1$ gelijk is aan 1, 1,2 en 2, waarbij E gelijk blijft, namelijk $E = 4 * 10^5\ N/m^2$.
Dit zijn meest irreële gevallen.
De elasticiteitsmodulus zal in de loop van een leven ongeveer 2 maal zo groot worden. Dit effect is dus na te gaan.
Plaatselijk kan de verhouding $\Sigma S_2/S_1$ variëren door vaso constrictie of

vaste dilatatie. Dit is verder niet beschouwd.
In figuur 4.13 is een overzicht weergegeven van de mogelijkheden, die doorgerekend zijn
In figuur 4.14 a tot en met h is de absolute waarde van de ingangsimpedantie Z_i en van de karakteristieke impedantie Z_o^{50} van sectie 50, die overeenkomt met de sonde, als functie van de frequentie weergegeven.

	E	$\Sigma S_2 / S_1$
a	$4 * 10^4$	1,1
b	$2 * 10^5$	1,1
c	$4 * 10^5$	1,1
d	$8 * 10^5$	1,1
e	$4 * 10^6$	1,1
f	$4 * 10^5$	1,0
g	$4 * 10^5$	1,2
h	$4 * 10^5$	2,0

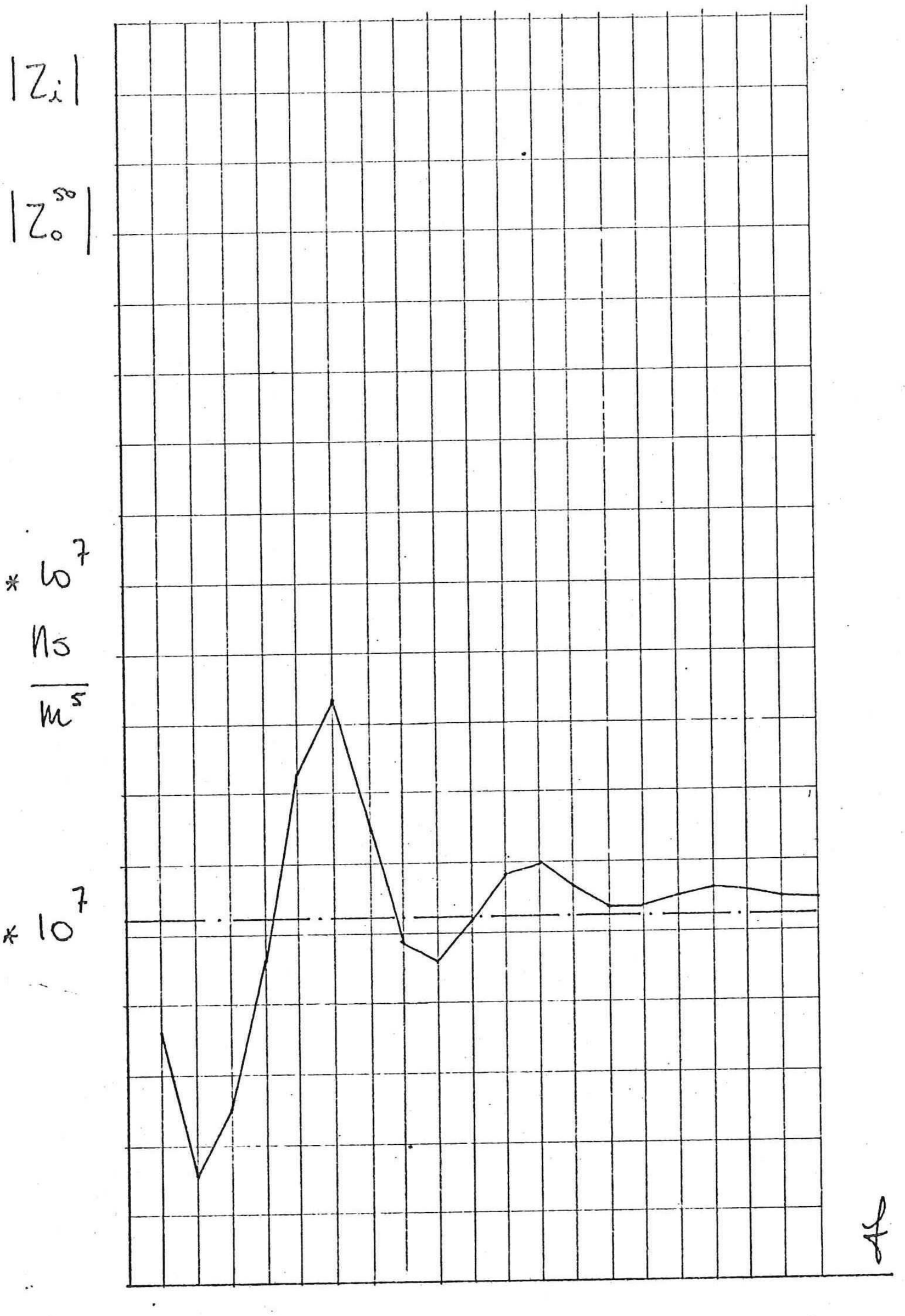
Figuur 4.13 Overzicht beschouwde gevallen

$R_i = 0,115 * 10^{11}\ Ns/m^5$



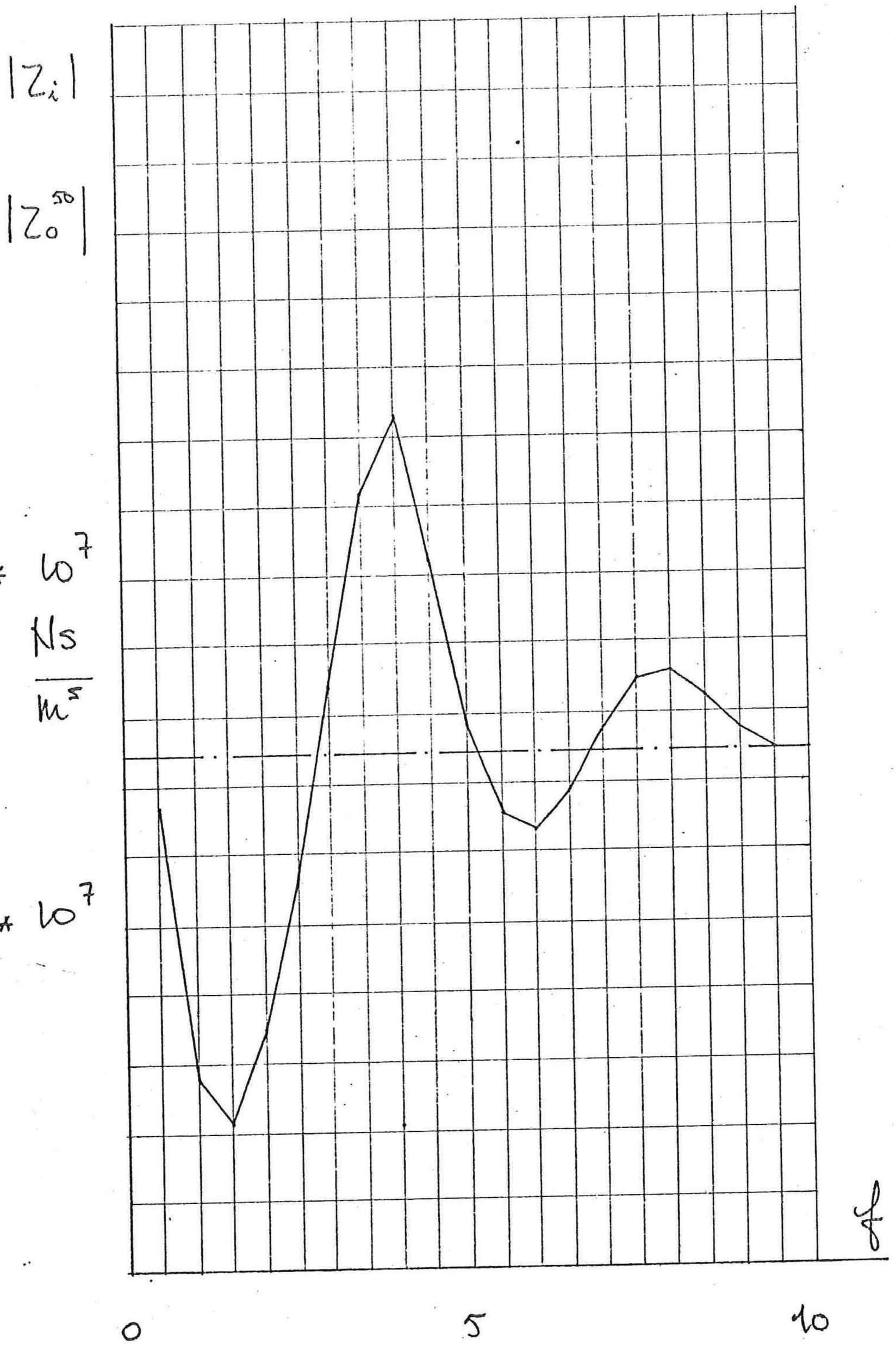
Figuur 4.14 a Absolute waarde van Z_i (——) en Z_o^{50} (—·—) voor geval a

$R_i = 0.115 * 10^{11}$ Ns/m^5



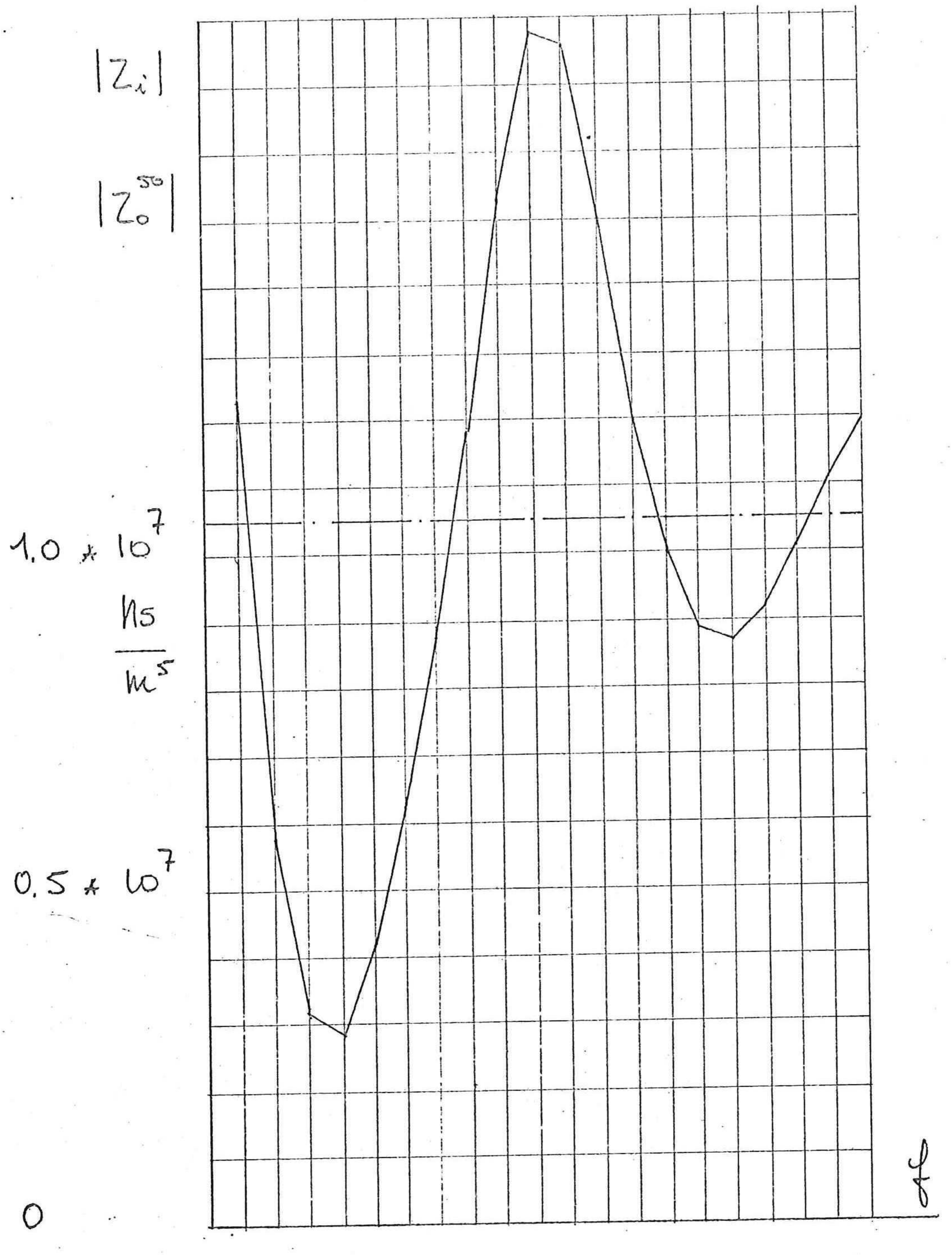
Figuur 4.14 b Absolute waarde van Z_i (——) en Z_o^{50} (—·—) voor geval b.

$R_i = 0{,}115 * 10^{11}\ Ns/m^5$



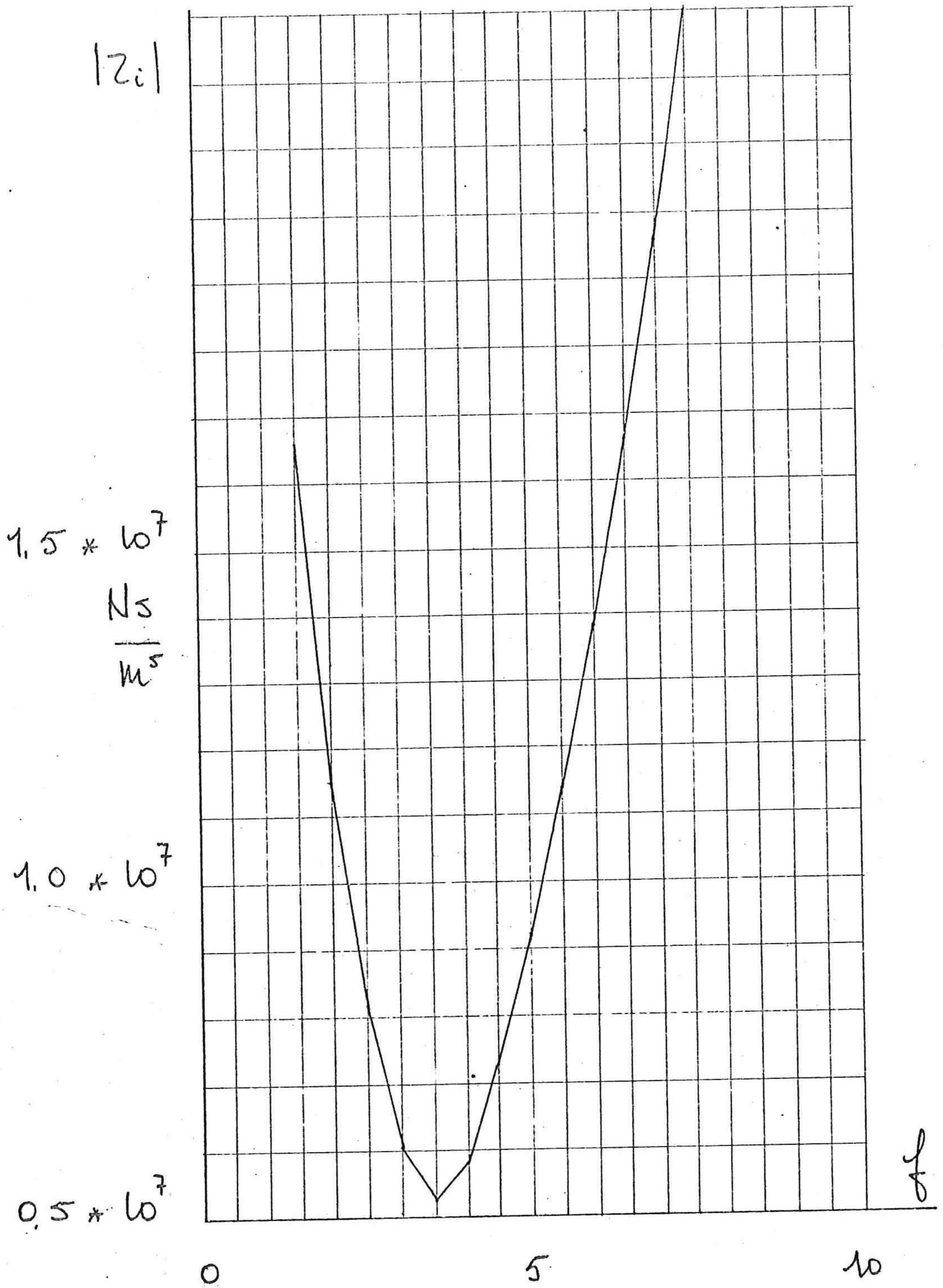
Figuur 4.14 c Absolute waarde van Z_i (——) en Z_o^{50} (—·—) voor geval c.

$R_i = 0{,}115 * 10^{11}$ Ns/m^5



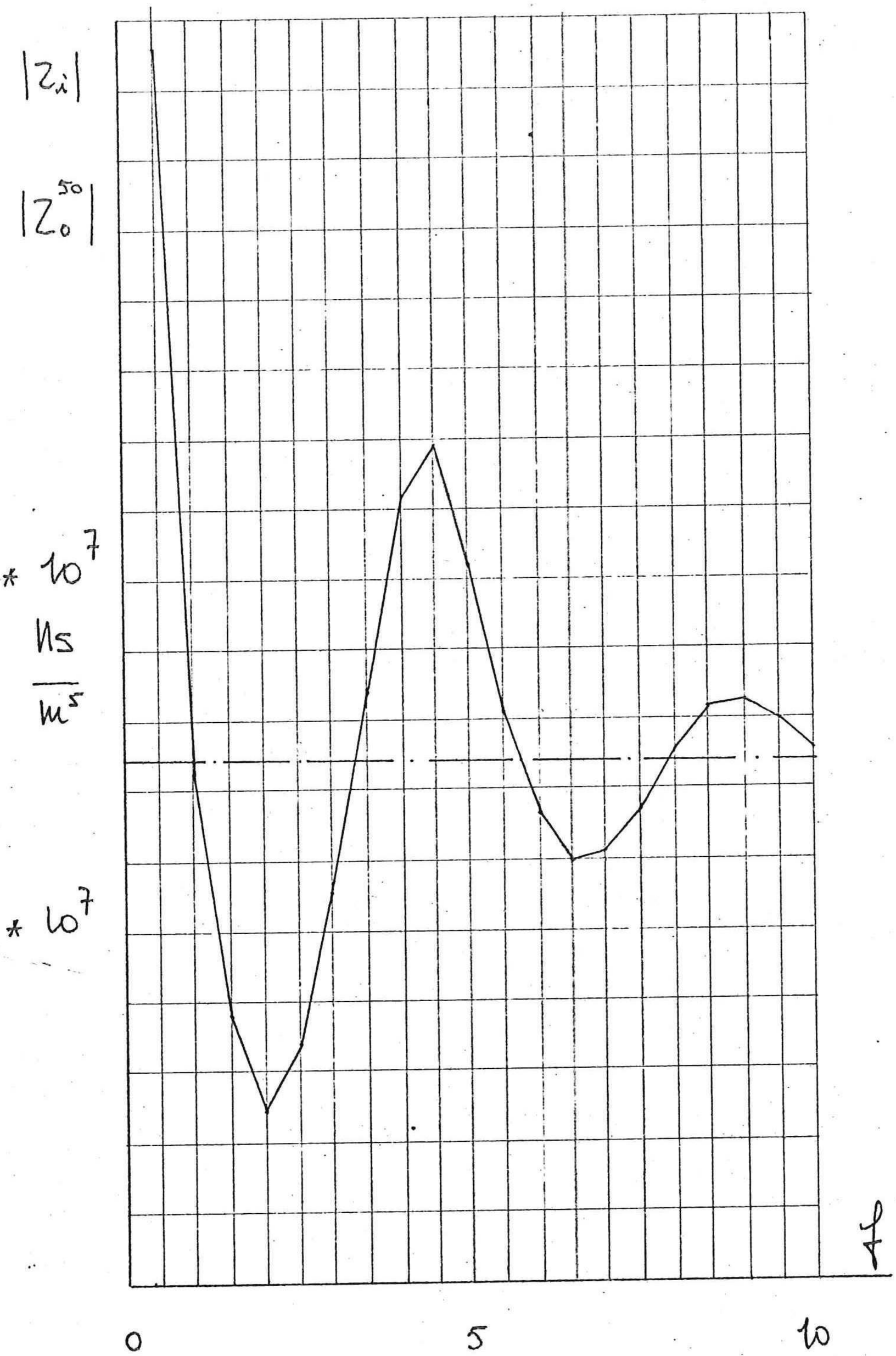
Figuur 4.14 d Absolute waarde van Z_i (——) en Z_o^{50} (—·—) voor geval d.

$R_i = 0,115 * 10^{11}$ Ns/m^5



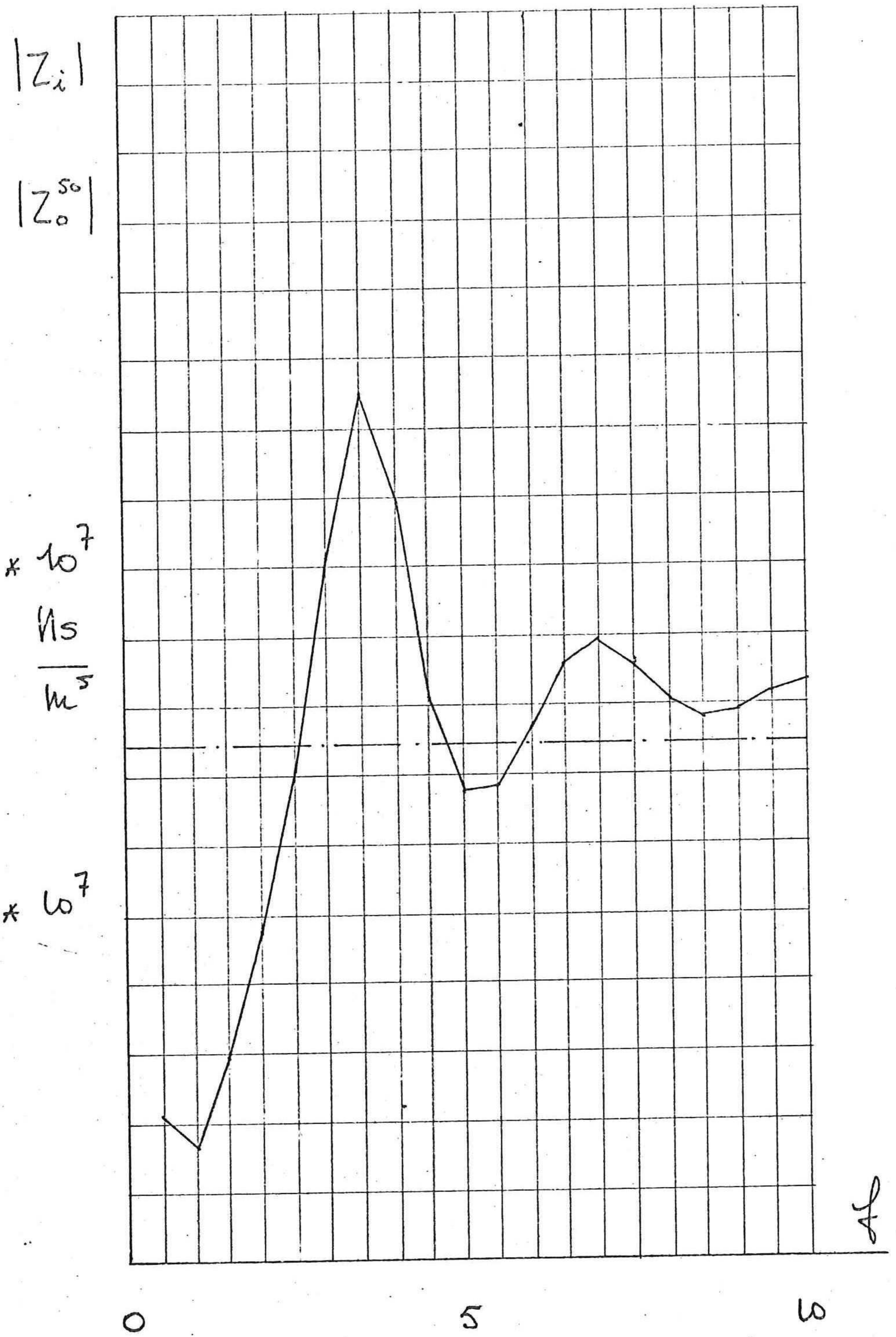
Figuur 4.14 e Absolute waarde van Z_i (———) voor geval e

$R_i = 0{,}100 * 10^{13}$ Ns/m^5



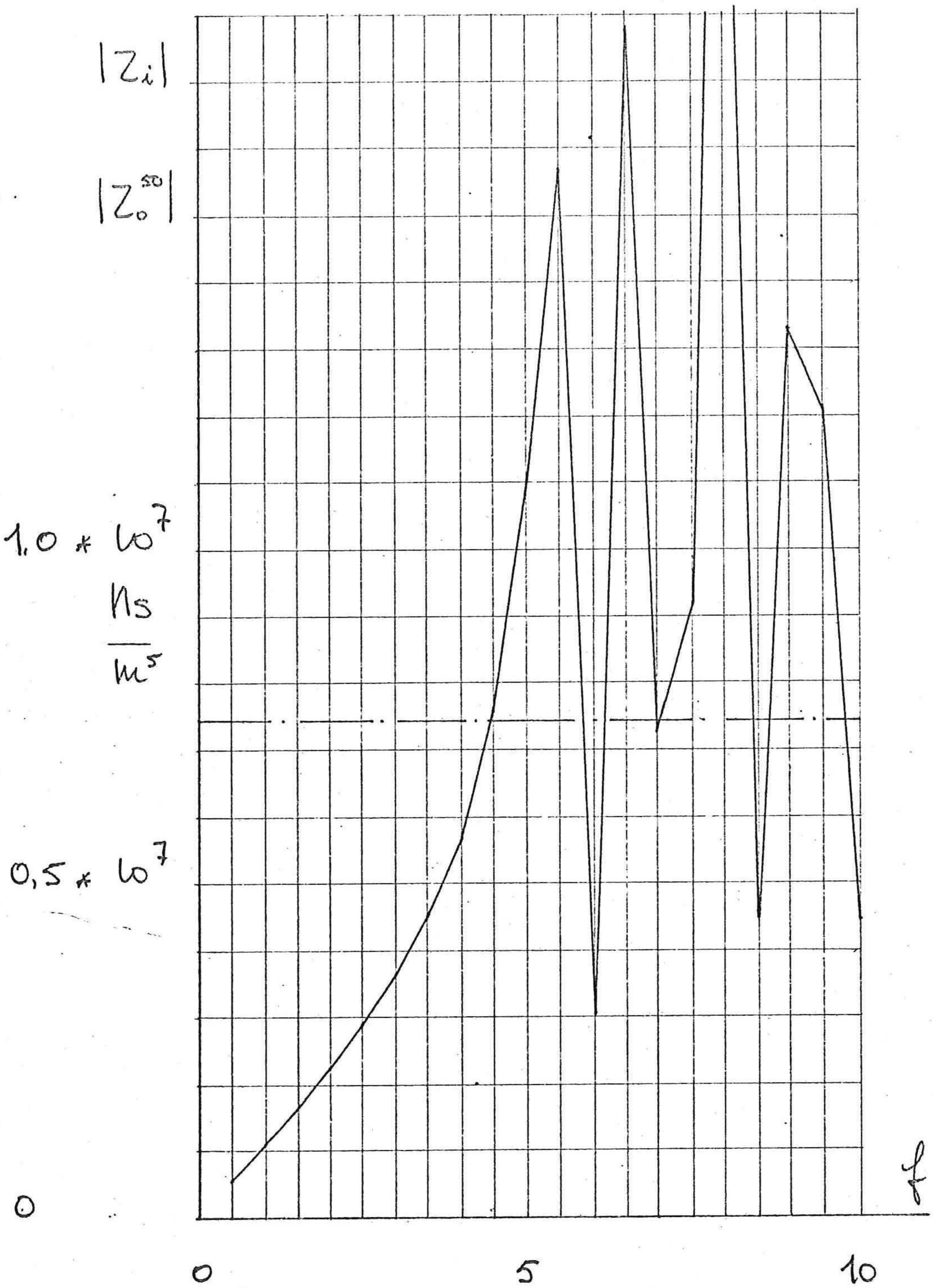
Figuur 4.14 f Absolute waarde van Z_i (——) en Z_o^{50} (—·—) voor geval f.

$R_i = 0{,}225 * 10^9$ Ns/m^5



Figuur 4.14 f Absolute waarde van Z_i (——) en Z_o^{50} (— · —) voor geval f.

$R_i = 0{,}379 * 10^5$ Ns/m^5



Figuur 4.14 h Absolute waarde van Z_i (——) en Z_o^{50} (—·—) voor geval h.

In de gevallen a en e, waarin de elasticiteitsmodulus respectievelijk te meel zo klein en te meel zo groot is als normaal, treedt een overeenkomstige verandering van de impedantie op. In de gevallen b en d, waarin de elasticiteitsmodulus respectievelijk 2 meel zo klein en 2 meel zo groot is als normaal, is de verandering van de impedantie bedragend minder. Dit uit zich ook in de amplituden van de harmonischen, waarmit de druktoef en de stroomtoef zijn opgebouwd. In gval a zijn de amplituden sneller uitgedempt dan in het normale gval, namelijk al in sectie 38, dwordat een grotere berging in de slagaderen optreedt. In gval e zijn de amplituden later uitgedempt dan in het normale gval, namelijk pas in sectie 29, dwordat een geringere berging in de slagaderen optreedt. In de gevallen c en d is de verandering

van de demping van de amplituden, vergeleken met het normale geval, zeer gering.
In de gevallen f en f', waarin de verhouding $\Sigma S_2/S_1$ respectievelijk 1,0 en 1,2 bedraagt verandert de ingangsimpedantie heel weinig. De invloed op de perifere weerstand is echter zeer groot. In geval f zijn de amplituden wat sneller gedempt dan in het normale geval door de grotere weerstand en in geval f zijn de amplituden wat later uitgedempt dan in het normale geval door de geringere weerstand.
In geval h is $\Sigma S_2/S_1$ gelijk aan 2, d.w.z. alle bloedwaten hebben nu dezelfde straal, die overeenkomt met de straal van de aorta.
Omdat de demping overal zeer gering is, treedt een vrij vlug verloop van de amplituden op, doordat in het hele vaatstelsel interferentieverschijnselen optreden.

We kunnen de volgende conclusies trekken:

- de berging in de grote slagaders en de weerstand van de kleine slagaders en de arteriolen zijn zodanig op elkaar afgesteld, dat de stroom vlak voor de capillairen, waar een eenparige stroom functioneel wenselijk is, inderdaad eenparig is.
- een wijziging van de elasticiteits-modulus met een faktor 2, zoals in de loop van een leven optreedt, heeft slechts een geringe invloed op het systeem
- plaatselijke vasoconstrictie of vasodilatatie zal een grote invloed hebben op de plaatselijke weerstand, maar beïnvloedt de ingangsimpedantie maar weinig

4.6 Vereenvoudigd model van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop.

We bekijken het model. waarin de veronderstellingen voor het model en voor de verfijkingen eigenlijk alleen maar gelden voor de (grotere) slagaders. In het model zullen dus een aantal onjuistheden optreden:

- In werkelijkheid is geen sprake van symmetrie. We hebben gezien dat het bloedvatenstelsel uit een aantal min of meer parallelle vaatstelsels bestaat, die onderling verschillend zijn. Verder heeft het slagaderlijk deel van de bloedsomloop een andere bouw en opbouw dan het aderlijk deel.
- Voor het slagaderlijk deel gaat de splitsing in tweeën vrij gauw op tot de arteriolen. Na de arteriolen komen echter direct de capillairen
- Het doorstromingsprofiel van de capillairen is in het model 67 cm^2, dat is 60 maal het doorstromings-

profiel van de aorta, terwijl het linker hoorndeel meer het doorstromingsprofiel van de aorta moet zijn.

- Voor het eerstelijk deel van het bloedvatenstelsel gaan de eigenlijke hoofverrichtingen niet meer op. Daar is namelijk de druk in de aderen in de orde van de druk buiten de aderen, waar door sterke niet-lineaire verschijnselen optreden. In geval van een eenparige stroom geldt dit bezwaar niet. De hoofverschijnselen in de aders ontstaan daar ter plaatse en komen in ons model, in het normale geval, helemaal niet voor. Verder is de onbekende uitgangsimpedantie gelijk gesteld aan de impedantie van de laatste ader.

- Ook voor de capillairen gelden de vergelijkingen niet. Er is een intensieve vloeistof uitwisseling door de wand. Verder is de diameter van de (schijfvormige)

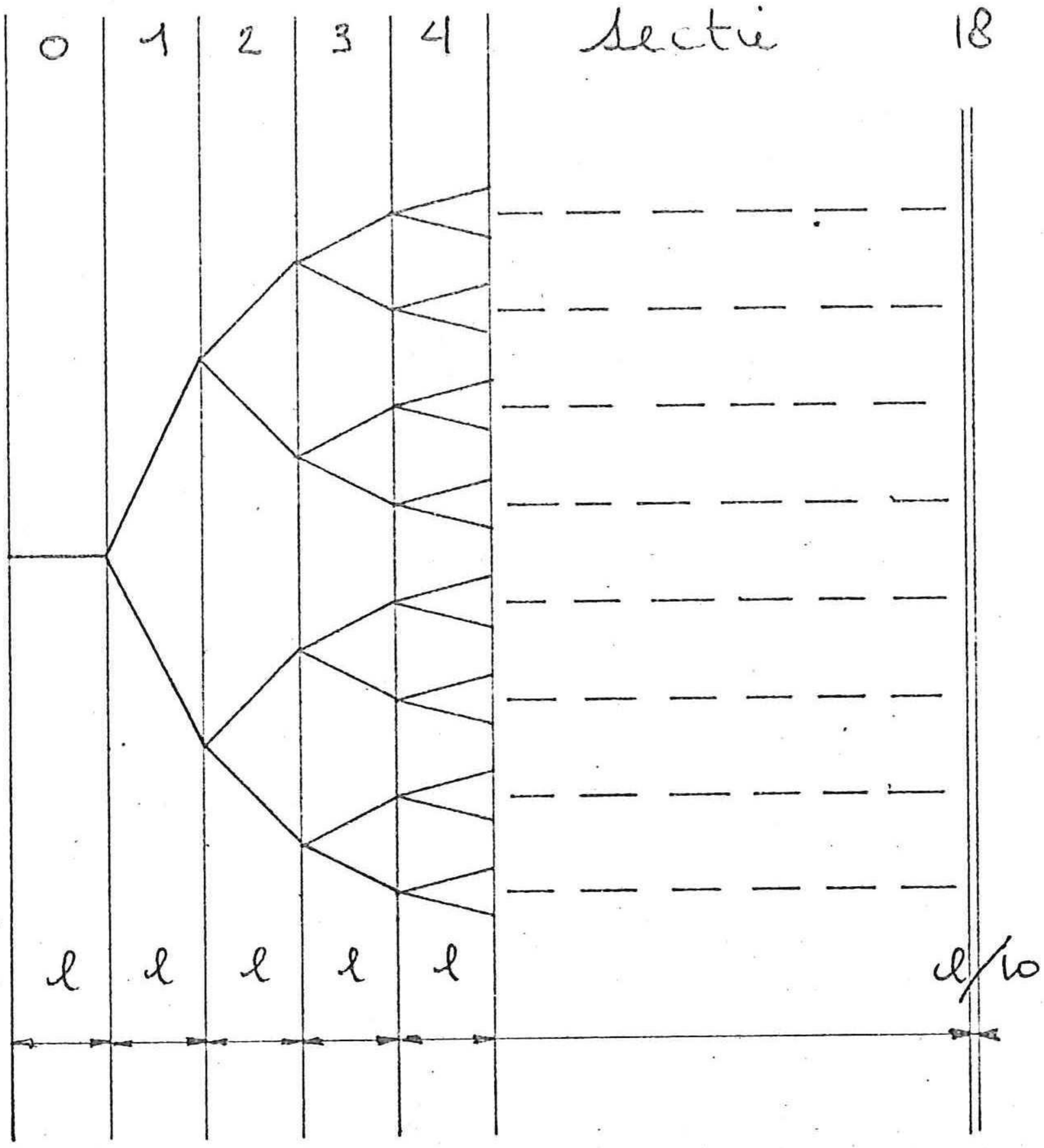
ro de bloedlichaampjes in de or de
van de diameter van de capil-
lairen, zodat er hier meer sprake
is van een Newtonse vloeistof.
We bekijken het model nader om te
proberen het model te verbeteren
dan het einde van sectie 33 (de
arteriolen) is al een vrijwel een-
panige stroom aanwezig volgens de
grafieken, weergegeven in figuur
4.11 a tot en met j. Een eenpanige
stroom is pas vereist in de capil-
lairen in sectie 26. In het tussen-
gelegen interval moet een zeer grote
weerstand worden overwonnen.
Het blijkt uit de berekeningen, dat
de systeemimpedantie Z_s^{33} op de
grens van sectie 33 en 34 nagenoeg
gelijk is aan de karakteristieke impe
dantie Z_0^{33} van de in sectie 33
aanwezige $\frac{}{m}$ parallelle bloedvaten.
Hieruit volgt, dat de systeemreflectie-
coefficient k_s^{34} op de grens van
sectie 33 en 34 gelijk moet zijn aan

de plaatselijke reflectiecoëfficient k_l[34]
aldaar. Ook dit blijkt uit de bere-
keningen. Dat de overeenkomst tus-
sen de aangegeven grootheden reen
groot is, vindt zijn oorzaak in
het feit, dat de dempings constante
α klein reen groot wordt. Uit de
formule voor de systeemimpedantie
Z_s^n, zoals die in paragraaf 4.3 af-
geleid is, blijkt, dat voor reen
grote α $Z_s^n = \frac{Z_o^n}{m}$. Omdat $e^{-2\alpha l}$
dan naar o gaat. Voor sectie 33
blijkt de factor $e^{-2\alpha l}$ inderdaad
erg klein te zijn.
De plaatselijke reflectiecoëfficient en
de systeemreflectiecoëfficient zijn dus
ongeveer aan elkaar gelijk, dat
wil reggen, dat de gereflecteerde
golf slechts bepaald wordt door de
takken direct na de splitsing en
niet meer door het daarachter
liggende systeem. Daarom kunnen
we het model na sectie 33 af-
breken, zonder dat dit, behalve

voor de systeemweerstand, veel gevolgen heeft. We kunnen dus het slagaderlijk deel en het aderlijk deel van de bloedsomloop volledig scheiden.

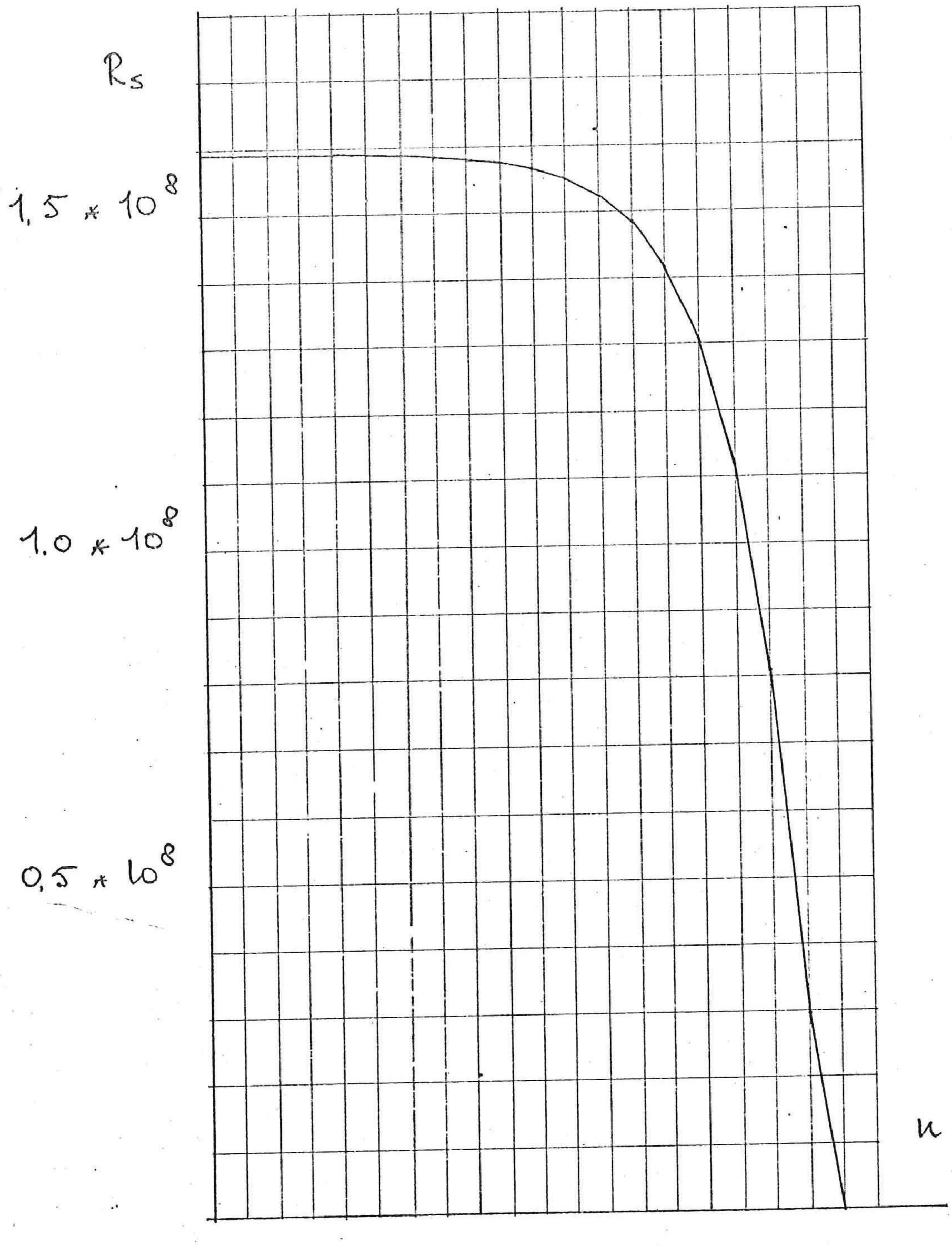
Eerder is al vermeld, dat na de arteriolen de capillairen moeten komen. We breken nu het model af na sectie 33 (de arteriolen) en brengen direct daarna de capillairen aan. Het aantal parallelle capillairen is 5 000 000 000. Het totale doorstromingsprofiel van de capillairen is dan 2500 cm^2, dat is ongeveer 400 maal het doorstromingsprofiel van de aorta. We hebben nu de weerstand van het aderlijk deel van de bloedsomloop, die overigens gering is, verwaarloosd. Omdat de stroom in de aderen in eerste instantie eenparig gesteld kan worden, kunnen we het aderlijk deel door een zuivere weerstand vervangen in het model

Het is uit het bovenstaande ook duidelijk, dat het deel van het oorspronkelijke model, dat nu weggelaten is, ondanks veronderstellingen, die te sterk vereenvoudigd waren, geen invloed had op de ingangsimpedantie.
In figuur 4.15 is het verbeterd model van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop weergegeven.
Ook dit verbeterd model is doorgerekend. Het gaft, zoals te verwachten was, nagenoeg dezelfde resultaten als het oorspronkelijke model, alleen bedraagt de ingangsweerstand nu $1,59 * 10^8$ Ns/m^5, hetgeen goed met de werkelijke waarde overeenkomt. In figuur 4.16 is de systeemweerstand R_s weergegeven als functie van de plaats in het model en wel op de splitsingspunten.
In het verbeterd model nummeren we de secties van voor af aan. Voor het verbeterd model tijn de eerste



De lengte l van alle secties is gelijk aan 5 cm, behalve voor sectie 18, waarin zich de capillairen bevinden, welke een lengte van 0,5 cm heeft.

Figuur 4.15 Schematische voorstelling van het verbeterd model van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop.



Figuur 4.16 Systeemweerstand R_s van het verbeterd model.

18 secties (sectie 0 tot en met 17) gelijk aan de eerste 18 secties van het oorspronkelijke model (sectie 50 tot en met sectie 33). De lengte l van elk dere secties is gelijk aan 5 cm. In sectie 18 van het verbeterd model bevinden zich de capillairen De lengte van deze sectie is 5 mm, wat een betere benadering is dan 5 cm. Doordat we het model hier afbreken, verwaarlozen we de weerstand van het aderlijk deel van de bloedsomloop, die overigens niet zo groot is.
Dit model is beter dan het oorspronkelijke model. Verschillende bezwaren, zoals aangegeven in het begin van deze paragraaf, vervallen.
In dit vereenvoudigd model is het aderlijk deel van de bloedsomloop, dat (te) sterk vereenvoudigd was, niet meer aanwezig.
De capillairen volgen nu direct op de arteriolen en het doorstromingsprofiel van de capillairen

is van de juiste orde. Ook is nu de foute duttelore weerstand tussen de arteriolen en de capillairen verdwenen.

We kunnen de volgende conclusies trekken:

- het verbeterd model heeft systeemkarakteristieken, de ingangsimpedantie, de systeemreflectiecoefficient op het eerste splitsingspunt en de systeemweerstanden, die qua tendens goed overeenkomen met de werkelijke waarden. Alleen de systeemweerstanden zijn anders dan in het oorspronkelijke model, de overige waarden zijn hetzelfde.
- het bloed wordt door de foute slagaders snel naar alle delen van het lichaam gevoerd, omdat het doorstromingsprofiel klein is. Aanvankelijk loopt de amplitude van de druksnelheid op. Vlak voor de capillairen wordt de druk- snelheid en de stroomsnelheid weggedempt.

Zodra er een temperatuurverschil is, stroomt het bloed in de capillairen. Door het grote doorstromingsprofiel van de capillairen is de stroomsnelheid van het bloed gering.

5 Conclusies

Uit het onderzoek kunnen we de volgende kwalitatieve conclusies trekken:

- het (vereenvoudigd) model van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop heeft systeem-karakteristieken, de ingangsimpedantie, de systeemreflectiecoefficient op het eerste splitsingspunt en de systeemweerstanden, die qua tendens goed overeenkomen met de werkelijke waarden.
- de drukgolf en de stroomgolf veranderen van vorm, doordat de demping, de fasesnelheid en de reflectiecoefficient in een groot deel van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop frequentieafhankelijk zijn.
- de toename van de amplitude van de drukgolf is (mede) te verklaren uit reflectieverschijnselen.

- het slagaderlijk deel en het aderlijk deel van de bloedsomloop volledig te scheiden, wat de foetale voortplanting betreft.
- de berging in de slagaders en de weerstand van de kleinere slagaders en de arteriolen is zodanig op elkaar afgestemd, dat de stroom vlak voor de capillairen, waar een éénparige stroom functioneel gewenst is, inderdaad éénparig is.

Omdat het sterk vereenvoudigde model kwalitatief goed voldoet, blijkt het goed mogelijk een mathematisch model van het slagaderlijk deel van de bloedsomloop, dat de werkelijke waarden ook kwantitatief goed weergeeft, te ontwerpen met behulp van de ontwikkelde berekeningswijze. Het weergegeven model is te verbeteren door:

- de vereenvoudigingen minder sterk te vereenvoudigen.
- de juiste gegevens van het slag-

aanlijk deel van de bloedstroom-
drop, die bekend zijn, in te voeren
voor het aanbrengen van deze verbe-
teringen zijn veel, meestal recente,
gegevens te vinden in de volgende
literatuur: Womersley [13], Wester-
hof [10], Westerhof e.a. [11], Wester-
hof e.a [12] en Noordergraaf [6].
De laatstgenoemde geeft een goed
overzicht van de vele studies, die
op haemodynamisch gebied verricht
zijn met een uitgebreid literatuur-
overzicht.
Voor onderzoek lijkt het elektrisch
analogon het meest aangewezen,
voor praktisch gebruik in ziekenhui-
zen daarentegen, gezien de steeds
ruimere beschikbaarheid van (di-
gitale) computers, een mathematisch
model. Het moet dan echter wel
mogelijk zijn bepaalde (ziekte) beel-
den of situaties te relateren met
significante parameters uit het mo-
del. Van de vraag of dit mogelijk
is of wordt, hangt het af of

het rivol is het mathematisch mo-
del, althans voor praktisch gebruik,
verder te ontwikkelen. Deze vraag
kan slechts in samenwerking met
medici beantwoord worden.

lijst van symbolen

c = complexe voortplantingssnelheid van een golf.
c_p = fasesnelheid van een golf.
C = capaciteit (el. stroom)
    berging (bloedstroom)
C_o = capaciteit p.e.v. lengte
    berging p.e.v. lengte
E = elasticiteitsmodulus van het wandmateriaal
f = frequentie
F = oppervlak van het totale doorstromingsprofiel in een sectie.
g = versnelling van de zwaartekracht.
G = conductie (el. stroom)
    zijdelingse afvoer (bloedstroom)
G_o = conductie p.e.v. lengte
    zijdelingse afvoer p.e.v. lengte.
h = wanddikte.
i = elektrische stroom.
j = $\sqrt{-1}$.
k = reflectiecoefficient voor de druk-

foef.

K = absolute waarde van k

k_l = plaatselijke reflectiecoefficient voor de druk foef.

K_l = absolute waarde van k_l.

k_s = systeemreflectiecoefficient voor de druk-foef.

K_s = absolute waarde van k_s.

k_s^n = systeemreflectiecoefficient voor de druk foef op de grens van de secties n en $n+1$.

K_s^n = absolute waarde van k_s^n

l = lengte van een sectie

L = zelfinductie (el. stroom)
traagheid (bloedstroom)

L_o = zelfinductie p.e.v. lengte
traagheid p.e.v. lengte.

m = aantal parallelle bloedvaten per sectie.

n = nummer van de sectie.

p = druk

p^+ = druk foef. die zich in positieve z. richting voortplant.

p^- = druk foef. die zich in negatieve z. richting voortplant.

Q = debiet

Q^+ = stroomgef. die rich in positieve z. richting voortplant.

Q^- = stroomgef. die rich in negatieve z. richting voortplant.

r = coördinaat in radiale richting.

r_o = inwendige straal van het bloedvat.

R = Weerstand (el. stroom)
Weerstand (bloedstroom)

R_o = Weerstand p.e.v. lengte
Weerstand p.e.v. lengte

R_i = ingangsweerstand of perifere Weerstand.

R_S = Systeemweerstand

R_S^n = Systeemweerstand op de grens van sectie n en $n+1$.

S = oppervlak van het doorstromingsprofiel van een enkel bloedvat.

t = tijd

T = trillingstijd.

U = spanning.

v = (axiale) snelheid van de vloeistof

$\bar{v}$ = gemiddelde snelheid van de vloeistof over het doorstromingsprofiel.

z = coördinaat in axiale richting.
Z = impedantie
Z_o = karakteristieke impedantie.
Z_o^n = karakteristieke impedantie van een enkel bloedvat in sectie n
Z_i = ingangsimpedantie
Z_s = systeemimpedantie
Z_s^n = systeemimpedantie op de grens van de secties n en n+1.
α = dempingsconstante
α^n = dempingsconstante voor een enkel bloedvat in sectie n
β = faseconstante of golfgetal.
β^n = faseconstante of golfgetal voor een enkel bloedvat in sectie n
γ = voortplantingsconstante.
η = viscositeit van het bloed
λ = golflengte.
φ = fase van k
φ_l = fase van k_l
φ_s = fase van k_s
φ_s^n = fase van k_s^n
ρ = dichtheid van het bloed.
σ = trekspanning
τ = schuifspanning

w = hoekspelhuid.

Literatuurlijst.

[1] Attinger, E.O. (ed) : Pulsatile blood flow.
Mc Graw-Hill, New York, 1964.

[2] Attinger, E.O. : Hydrodynamics of blood flow in Ven te Chow (ed) : Advances in Hydroscience. Vol 3 - 1966.
Academic Press, New York, 1966.

[3] McDonald, D.A. : Blood flow in arteries.
Edward Arnold, London. 1960.

[4] Jackson, W. : High frequency transmission lines.
Methuen, London. 1947.

[5] Jongbloed, J. : Overzicht van de fysiologie van de mens.
Oosthoek, Utrecht, 1965.

[6] Noordergraaf, A. : Hemodynamics in Schwan, H.P. : Biological Engineering.
Mc Graw-Hill, New York, 1970.

[7] Pain, H.J. : The physics of vibrations and waves
Wiley, New York, 1970.

[8] Peter, Th. de: An electrical analogue of the human circulatory system. Ph. D. thesis, University of Groningen, 1966.

[9] Thurber, R.E.: Human Physiology. Wiley, New York, 1969.

[10] Westerhof, N.: Analog studies of human systemic arterial hemodynamics. Ph. D. thesis, University of Pennsylvania, Philadelphia, 1968.

[11] Westerhof, N., Bosman, F., de Vries, C.J. en Noordergraaf, A.: Analog studies of the human systemic arterial tree. J. Biomechanics 2, pp. 121-143, 1969.

[12] Westerhof, N. en Noordergraaf, A.: Arterial viscoelasticity: a generalized model. J. Biomechanics 3, pp. 357-379, 1970

[13] Womersley, J.R.: Oscillatory motion of a viscous liquid in thin walled elastic tube: I. The linear approximation for long waves. Phil. Mag. 46, pp. 199-221, 1955.

[14] Zylstra, W.G., Brunsting, J.R., ten Hoor, F. en Mook, G.A.: Fysiologie van het interne milieu. Van Gorcum, Assen, 1966.