



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Jacobi polynomen en representaties van $SU(2)$
(Engelse titel: Jacobi polynomials and
representations of $SU(2)$)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

HASSAN AL MAHMOEDI

Delft, Nederland
Augustus 2014



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“Jacobi polynomen en representaties van $SU(2)$ ”

(Engelse titel: “Jacobi polynomials en representations of $SU(2)$)

HASSAN AL MAHMOEDI

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr.ir. W.G.M. Groenevelt

Overige commissieleden

Dr.ir. F.H. van der Meulen

Drs. E.M. van Elderen

Augustus, 2014

Delft

Samenvatting

In deze scriptie beginnen we met het opbouwen van wat algemene Lie-theorie. Om dat te doen leggen we eerst uit wat variëteiten zijn. Ook zullen we enkele eigenschappen van matrix Lie groepen en Lie algebra's bestuderen.

Daarna definiëren we Jacobi polynomen door middel van hypergeometrische reeksen. Ook zullen we een aantal eigenschappen van Jacobi polynomen, op een analytische manier, afleiden.

In hoofdstuk 4 introduceren we representatietheorie. We zullen laten zien hoe Jacobi polynomen terug zijn te vinden in de representaties van $SU(2)$. Ook bekijken we wat het verband is tussen $SU(2)$ en Schurs orthogonaliteitsrelaties.

Vervolgens bekijken we hoe representatietheorie van $SU(2)$ binnen de Lie-theorie past en zullen daarmee enkele eigenschappen voor Jacobi polynomen afleiden.

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
2	Lie groepen en Lie algebra	2
2.1	Topologie	2
2.2	Lie groepen	4
2.3	Matrix Lie groep	7
3	Jacobi polynomen	11
3.1	Hypergeometrische reeksen	11
3.2	Jacobi polynomen	16
4	Representaties van $SU(2)$	21
4.1	Representatietheorie	21
4.2	Representaties van $SU(2)$	22
4.3	Matrixelementen van $SU(2)$	25
4.4	Orthogonaliteit van matrixelementen	28
4.5	Schurs orthogonaliteitsrelaties	30
4.6	Irreducibiliteit van $SU(2)$ representaties	33
5	Representaties van de Lie algebra $su(2)$	35
5.1	Representaties van matrix Lie groepen	35
5.2	Representaties van $su(2)$	36
5.3	De Casimir operator	39

1 Inleiding

In deze bachelorscriptie bestuderen we Jacobi polynomen. Daarbij bekijken we hoe Jacobi polynomen binnen de representatietheorie van de groep $SU(2)$, de groep van 2×2 unitaire matrices met determinant 1, passen. Met behulp van deze representatietheorie willen we eigenschappen van Jacobi polynomen, die op een vrij direct manier te bewijzen zijn, ook op een conceptuele wijze afleiden.

Jacobi polynomen, $P_n^{(\alpha, \beta)}$, zijn polynomen van graad n die voor $\alpha, \beta > -1$ als volgt zijn gedefinieerd

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k}{(\alpha + 1)_k} \left(\frac{1 - x}{2} \right)^k$$

waarbij $(a)_0 = 1$ en $(a)_k = a(a + 1) \cdots (a + k - 1)$ voor $k = 1, 2, \dots$.

Zij $GL(V)$ de groep van inverteerbare lineaire transformaties van een eindig dimensionaal complexe vectorruimte V . Een representatie van een groep G op een eindig dimensionaal complexe vectorruimte V is een groepshomomorfisme $t : G \rightarrow GL(V)$. We nemen V gelijk aan de vectorruimte van homogene polynomen van graad $2l$ en $G = SU(2)$. Dan definiëren we de representatie t_l van $SU(2)$ op de volgende manier

$$\left(t_l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f \right) (z_1, z_2) := f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

waarbij $f(z_1, z_2)$ een homogeen polynoom van graad $2l$ is. We zullen laten zien dat we de operator $t_l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ als een matrix kunnen schrijven waarbij de elementen Jacobi polynomen zijn.

Hierdoor kunnen we eigenschappen van de Jacobi polynomen afleiden door middel van de representatietheorie op $SU(2)$. We laten bijvoorbeeld zien dat de matrixelementen van deze operator een volledig orthogonaal stelsel vormen in $L^2(SU(2), d\mu)$ waarbij μ de Haar maat is.

Ook zullen we Lie-theorie en matrix Lie groepen bestuderen. We laten zien dat $SU(2)$ een matrix Lie groep is met bijbehorende Lie algebra $su(2)$: de reële lineaire ruimte van scheef Hermitisch (d.w.z. $A^* + A = 0$) 2×2 matrices met spoor 0. Hiermee kunnen we bijvoorbeeld enkele nuttige formules voor Jacobi polynomen afleiden.

In hoofdstuk 2 beginnen we met het opbouwen van wat algemene Lie-theorie en zullen daarna enkele eigenschappen van matrix Lie groepen en Lie algebra's bestuderen. In hoofdstuk 3 definiëren we Jacobi polynomen door middel van hypergeometrische reeksen. Ook zullen we een aantal eigenschappen van Jacobi polynomen afleiden. In hoofdstuk 4 introduceren we representatietheorie. We zullen laten zien hoe Jacobi polynomen terug zijn te vinden in de representaties van $SU(2)$. Ook bekijken we wat het verband is tussen $SU(2)$ en Schurs orthogonaliteitsrelaties. In hoofdstuk 5 bekijken we hoe representatietheorie van $SU(2)$ binnen de Lie-theorie past en zullen daarmee enkele eigenschappen voor Jacobi polynomen afleiden.

Voor deze scriptie is de meest gebruikte referentie Koornwinder [1].

2 Lie groepen en Lie algebra

We beginnen dit hoofdstuk met het introduceren van enkele topologische begrippen. Daarna zullen we, met behulp van deze begrippen, uitleggen wat Lie groepen en Lie algebra's zijn en hiervan enkele eigenschappen geven. Als laatste besteden we aandacht aan een speciaal type Lie groep, namelijk de matrix Lie groep.

2.1 Topologie

Definitie 2.1. Een topologische groep is een verzameling G , die zowel een groep als een topologische ruimte is, met de eigenschap dat de afbeeldingen $(g, h) \mapsto gh : G \times G \rightarrow G$ en $g \mapsto g^{-1} : G \rightarrow G$, continu zijn.

Een topologische ruimte heet *tweedst-aftelbaar* als hij voldoet aan de tweede aftelbaarheids-axioma: zijn topologie heeft een aftelbare basis.

Definitie 2.2. Een homeomorfisme is een afbeelding $f : X \rightarrow Y$ tussen twee topologische ruimten (X, t_X) en (Y, t_Y) met de volgende eigenschappen:

- f is continu
- f is een bijectie
- f^{-1} is continu

Definitie 2.3. Zij (X, t_X) een topologische ruimte. Een kaart, (of coördinaten afbeelding), is een homeomorfisme, ϕ , tussen een open omgeving $U \subset X$ en $\mathbb{E}^n$, een Euclidische ruimte van dimensie n . (Vaak genoteerd als (U, ϕ)).

Definitie 2.4. Zij (X, t_X) een topologische ruimte. Een atlas is een verzameling van kaarten, $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$, zo dat $X = \bigcup U_\alpha$.

Definitie 2.5. Zij (X, t_X) een topologische ruimte met een bijbehorende atlas, $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$. We noemen X een *variëteit* (van dimensie n) als voor elke kaart ϕ_α uit de atlas geldt dat het bijbehorende codomein dimensie n heeft. (Dus het codomein van alle kaarten is $\mathbb{E}^n$).

Als X daarnaast ook nog Hausdorff is spreken we van een topologische variëteit.

Zij X een variëteit en $(U_1, \phi_1), (U_2, \phi_2)$, twee kaarten zodat $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Dan noemen we de afbeelding $\tau : \phi_1(U_1 \cap U_2) \rightarrow \phi_2(U_1 \cap U_2)$ gedefinieerd door $\tau(y) = \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y)$, een *transitieafbeelding*. Merk op: Omdat ϕ_1 en ϕ_2 homeomorfismen zijn is de transitieafbeelding ook een homeomorfisme.

Als een topologische variëteit tweedst-aftelbaar is en alle transitieafbeeldingen k -keer continu differentieerbaar, ($k \geq 1$), zijn spreken we van een *differentieerbare variëteit* (of C^k -variëteit). Zijn de transitieafbeeldingen oneindig vaak continu differentieerbaar dan spreken we van een C^∞ -variëteit.

Een ander type differentieerbare variëteit is een *complex analytisch variëteit*. Hierbij is het codomein van de kaarten een Euclidische ruimte over $\mathbb{C}$ en zijn de transitieafbeeldingen complex analytisch.

Op een differentieerbare variëteit kunnen we lokaal integraal- en differentiaalrekening toepassen. Dit vanwege het feit dat het lokaal homeomorf is met een lineaire ruimte en omdat de transitieafbeeldingen tussen de verschillende kaarten continu differentieerbaar zijn. Hieruit volgt dat berekeningen die we binnen een kaart doen ook geldig blijven binnen andere kaarten.

Opmerking over notatie: zij M een n -dimensionale variëteit en (U, ϕ) een kaart op M . Stel dat we een afbeelding $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ (of $\mathbb{C}$) hebben. Zij $u = \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n)$. In het vervolg zullen we $f(x_1, \dots, x_n)$ noteren in plaats van $f(u) = f(\phi^{-1}(x_1, \dots, x_n))$.

Zij M een C^∞ -variëteit van dimensie n en $p \in M$. Omdat M lokaal homeomorf is met $\mathbb{R}^n$ bestaat er een open omgeving U van p die homeomorf is met $\mathbb{R}^n$. Dus op U zijn er lokale coördinaten $(x_1, \dots, x_n)$. Noem $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$, de lokale coördinaten van p . Ten opzichte van dit coördinaten systeem definiëren we de raakruimte $T_p M$ aan M in het punt p op de hieronder beschreven manier.

Zij $a \in \mathbb{R}^n$ een vector. Als eerste associëren we met deze vector een equivalentieklasse als volgt: neem alle C^∞ afbeeldingen $(-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^n : t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ zodanig dat ze voor $t = 0$ door de lokale coördinaat van p gaan (dus $x(0) = x_0$) en zodat de afgeleiden in $t = 0$ gelijk zijn aan a (dus $x'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_n(0)) = (a_1, \dots, a_n) = a$). Alle afbeeldingen die hieraan voldoen zitten in dezelfde equivalentieklasse. (Het bovenstaande definieert inderdaad een equivalentierelatie: als $x'(0) = y'(0)$ dan $y'(0) = x'(0)$, als $x'(0) = y'(0)$ en $y'(0) = z'(0)$ dan $x'(0) = z'(0)$ en inderdaad $x'(0) = x'(0)$). Deze equivalentieklassen zijn de raakvectoren van M in het punt p . De raakruimte $T_p M$ is verzameling van al deze vectoren.

Ook associëren we met de vector a een lineair functionaal A op de ruimte $C^\infty(U)$, (met U de open omgeving van p), gegeven door

$$Af := \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_n) \Big|_{x=x_0} \quad (f \in C^\infty(U)). \quad (2.1)$$

(De lineariteit van Af volgt uit de lineariteit van de partiële afgeleide en het feit dat het een eindige som is).

Als we $x(t)$ en A , als hierboven, met a hebben geassocieerd dan volgt

$$Af = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, \dots, x_n) \Big|_{x=x_0} = df(x)(a) \Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dt} f(x(t)) \Big|_{t=0}$$

met $f \in C^\infty(U)$. Dus

$$Af = \frac{d}{dt} f(x(t)) \Big|_{t=0} \quad (f \in C^\infty(U)) \quad (2.2)$$

Opmerking 2.6. Voor een complex analytisch variëteit worden raakvectoren en raakruimten op dezelfde manier gedefinieerd met het verschil dat de raakruimte dan gelijk is aan een lineaire ruimte over $\mathbb{C}$ en in plaats van $f \in C^\infty(U)$ nemen we $f \in \{g : U \rightarrow \mathbb{C} : g \text{ is complex analytisch}\}$.

De disjuncte vereniging van raakruimten, genoteerd als $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M = \bigcup_{x \in M} \{(x, a) | a \in T_x M\}$, noemen we de raakbundel aan M .

Een laatste begrip dat we nodig zullen hebben is het begrip *vectorveld*. Een vectorveld X op M is een afbeelding $M \rightarrow TM$ die aan elke $p \in M$ een raakvector $X_p \in T_p M$ toewijst. Met dit vectorveld identificeren we een functionaal X_x zodanig dat voor elke open verzameling U van M met lokale coördinaten $(x_1, \dots, x_n)$ we het volgende krijgen

$$X_x f = \sum_{i=1}^n c_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) \quad (f \in C^\infty(U)) \quad (2.3)$$

Hier is $x = (x_1, \dots, x_n)$ de lokale coördinaat van p en de c_i zijn C^∞ functies afhankelijk van $x_1, \dots, x_n$. Deze functionaal noemen we in het vervolg ook een vectorveld.

2.2 Lie groepen

Definitie 2.7. Een Lie groep is een groep die ook een C^∞ -variëteit is, zó dat de afbeeldingen $(g, h) \mapsto gh : G \times G \rightarrow G$ en $g \mapsto g^{-1} : G \rightarrow G$, C^∞ zijn.

Merk op: Uit de definitie van een Lie groep volgt dat elke Lie groep ook een topologische groep is.

Definitie 2.8. Een Lie algebra $\mathfrak{g}$ is een vectorruimte over een lichaam V , ($V = \mathbb{R}$ of $V = \mathbb{C}$), samen met een binaire operatie $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, die aan de volgende drie axioma's voldoet

- *bilineariteit:* $\forall a, b \in V, \forall x, y, z \in \mathfrak{g} : [ax + by, z] = a[x, z] + b[y, z]$ en $[z, ax + by] = a[z, x] + b[z, y]$
- *anti-commutativiteit:* $\forall x, y \in \mathfrak{g} : [x, y] = -[y, x]$
- *Jacobi-identiteit:* $\forall x, y \in \mathfrak{g} : [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$

$[\cdot, \cdot]$ noemen we het Lie haakje

Zij X en Y twee vectorvelden op een C^∞ -variëteit M . We definiëren de *commutator* $[X, Y]$ van X en Y als volgt

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf) \quad (f \in C^\infty(M)). \quad (2.4)$$

We laten zien dat deze commutator aan de axioma's van definitie 2.8 voldoet. Zij X, Y, Z vectorvelden, a, b constanten, $f \in C^\infty$ en $x = (x_1, \dots, x_n)$. Er geldt

$$\begin{aligned} X_x f &= \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \\ Y_x f &= \sum_{i=1}^n d_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \\ Z_x f &= \sum_{i=1}^n k_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) \end{aligned}$$

De definitie van de commutator geeft ons

$$[aX + bY, Z]f = (aX + bY)(Zf) - Z((aX + bY)f)$$

Er geldt

$$\begin{aligned} Z((aX + bY)f) &= Z\left(\sum_{i=1}^n (ac_i + bd_i)(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n (ac_i + bd_i)(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x) + b \sum_{i=1}^n d_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) \\ &= a \sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) \\ &\quad + b \sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n d_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ook geldt

$$\begin{aligned}
(aX + bY)(Zf) &= (aX + bY)\left(\sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) \\
&= \sum_{i=1}^n (ac_i + bd_i)(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) \\
&= a \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) \\
&\quad + b \sum_{i=1}^n d_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Trekken we (2.5) van (2.6) af dan krijgen we

$$\begin{aligned}
a \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) &- a \sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) \\
+b \sum_{i=1}^n d_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} f(x)\right) &- b \sum_{j=1}^n k_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n d_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} f(x)\right) \\
&= a[X, Z] + b[Y, Z]
\end{aligned}$$

We zien dus dat de commutator inderdaad bilineair is.

De commutator is ook anti-commutatief, want

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf) = -(Y(Xf) - X(Yf)) = -[Y, X]$$

We moeten nog alleen laten zien dat de commutator aan de Jacobi identiteit voldoet. Er geldt

$$\begin{aligned}
[[X, Y], Z]f &= [X, Y](Zf) - Z([X, Y]f) \\
&= (XY - YX)(Zf) - Z(X(Yf) - Y(Xf)) \\
&= X(Y(Zf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + Z(Y(Xf))
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Op dezelfde manier volgt

$$[[Y, Z], X]f = Y(Z(Xf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + X(Z(Yf)) \tag{2.8}$$

$$[[Z, X], Y]f = Z(X(Yf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Y(X(Zf)). \tag{2.9}$$

Tellen we (2.7), (2.8) en (2.9) bij elkaar op, krijgen we 0 en dus voldoet de commutator aan de Jacobi identiteit.

We zien dus dat de commutator, gedefinieerd op vectorvelden op M , voldoet aan alle drie de axioma's van definitie 2.8. Dus de reële lineaire ruimte van vectorvelden is een reële Lie algebra.

We gaan nu bekijken wat de Lie algebra is die hoort bij een Lie groep. Zij G een Lie groep (G is dus ook een C^∞ -variëteit). Zij $e \in G$, het eenheidselement van G , en V een open omgeving van e die homeomorf is met $\mathbb{R}^n$ (voor zekere n) met lokale coördinaten $(y_1, \dots, y_n)$ zodanig dat $0 = (0, \dots, 0)$ de coördinaat is van e . We bekijken de raakruimte $T_e G$. Uit de vorige paragraaf

weten we dat we de raakruimte kunnen bekijken als de ruimte van lineaire functionalen A geassocieerd met vector $a \in \mathbb{R}^n$ gedefinieerd door

$$Af := \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial y_j} f(y_1, \dots, y_n) \Big|_{y=0} \quad (f \in C^\infty(V)) \quad (2.10)$$

Vervolgens definiëren een vectorveld X_A op G als volgt

$$(X_A f)(g) := A(h \mapsto f(gh)) \quad (f \in C^\infty(G), g \in G). \quad (2.11)$$

We moeten laten zien dat dit inderdaad een vector veld definieert. Zij $g \in G$ en $f \in C^\infty(G)$. We beperken de functie $h \mapsto f(gh)$ tot V . Dan geldt voor $h \in V$ (dus ook $h \in G$), dat de afbeelding $(h \mapsto gh) \in C^\infty$ want G is een Lie groep. Omdat $f \in C^\infty(G)$ volgt dus dat $h \mapsto f(gh)$ ook een C^∞ functie is (beperkt tot V). Laat U een open omgeving van g zijn met lokale coördinaten $x = (x_1, \dots, x_n)$ en $h \in V$ met lokale coördinaten $y = (y_1, \dots, y_n)$. Dan geldt

$$(X_A f)(g) = A(h \mapsto f(gh)) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial y_j} (y \mapsto f(xy)) \Big|_{y=0} \quad (2.12)$$

Beschouwen we de a_j als constante functies en dus als C^∞ functies dan zien we dat (2.12) dezelfde vorm heeft als (2.3). Hieruit volgt dat $(X_A f)(g)$ inderdaad een vectorveld is.

Wat we ook zien is dat dit vectorveld links invariant is op de volgende manier

$$\begin{aligned} X_A(g \mapsto f(\cdot g))(g_1) &= A(h \mapsto f(g_1 gh)) \\ &= (X_A f)(g_1 g) \quad (g_1, g \in G, f \in C^\infty(G)) \end{aligned} \quad (2.13)$$

We kunnen dus bij elke vector, en de daarmee geassocieerde lineaire functionaal A , een links invariante vectorveld X_A definiëren. Ook kunnen we A terugvinden met X_A door middel van

$$(X_A f)(e) = A(h \mapsto f(eh)) = A(h \mapsto f(h)) = Af. \quad (2.14)$$

Hieruit volgt dat er een lineaire bijjectie bestaat tussen de raakruimte op G en de ruimte van links invariante vectorvelden op G . (De lineariteit van de bijjectie volgt uit de lineariteit van de functionaal). Door middel van deze bijjectie wordt de Lie algebra structuur van de ruimte van links invariante vectorvelden overgedragen aan $T_e G$. Dus $T_e G$ wordt een Lie algebra met een Lie haakje $[A, B]$, die gedefinieerd is door

$$X_{[A, B]} := [X_A, X_B] \quad (A, B \in T_e G). \quad (2.15)$$

Merk op dat we het Lie haakje $[A, B]$ niet altijd als de commutator $AB - BA$ kunnen beschouwen omdat het product AB niet gedefinieerd hoeft te zijn voor $A, B \in T_e G$.

We noemen de raakruimte $T_e G$, beschouwd als Lie algebra, de *Lie algebra van de Lie groep* en noteren het met $\mathfrak{g}$ of $\text{Lie}(G)$.

Opmerking 2.9. *Om de zelfde redenen als in opmerking 2.6 kunnen we het bovenstaande proces ook doen voor complex analytische variëteiten*

2.3 Matrix Lie groep

Bekijk $G = GL(n, \mathbb{C})$, de groep van alle inverteerbare complexe $n \times n$ matrices. Het is een deelverzameling van $M_n(\mathbb{C})$. $M_n(\mathbb{C})$ is de ruimte van complexe $n \times n$ matrices en is dus een n^2 -dimensionale complexe lineaire ruimte. Het complement van G , $M_n(\mathbb{C}) \setminus GL(n, \mathbb{C}) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) : \det(M) = 0\}$, is de ruimte van alle niet-inverteerbare complexe $n \times n$ matrices. De singleton $\{0\}$ is een gesloten verzameling en de determinant is een continue afbeelding. Hieruit volgt dat het volledig origineel van $\{0\}$, het complement van G , een gesloten verzameling is. Daaruit volgt dat G open is.

Dus G is een open verzameling in een n^2 -dimensionale complexe lineaire ruimte en we kunnen op de hele groep hetzelfde systeem van lokale coördinaten nemen. We nemen de matrixelementen als complexe coördinaten. Daarmee vormt G een complexe analytische variëteit en de groepsoperaties zijn ook complex analytisch. (Vermenigvuldiging in G is matrixvermenigvuldiging en dus vermenigvuldiging en optelling van matrixelementen: met andere woorden een polynoom. Inverse nemen is dan weer een rationale afbeelding. Beide zijn complex analytisch). Dus $G = GL(n, \mathbb{C})$ vormt een Lie groep die we de algemene lineaire groep noemen. (Engels: General Linear group).

Definitie 2.10. *Zij G een Lie groep met deelgroep H . We noemen H een regulier ingebedde Lie deelgroep van G als: $\forall h \in H$ bestaat er een open omgeving U van h in G met lokale coördinaten $(x_1, \dots, x_n)$ ($x_1, \dots, x_n \in (-a, a)$) zodanig dat $H \cap U$ bestaat uit alle elementen van U met lokale coördinaten $(x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)$ ($x_1, \dots, x_m \in (-a, a)$).*

Gevolg 2.11. *H is een Lie groep met de relatieve topologie van G (Dat wil zeggen: als U open is in G dan is $H \cap U$ open in H) en met een C^∞ -variëteit structuur gegeven door de lokale coördinaten $(x_1, \dots, x_m)$ op de verzameling $H \cap U$.*

Bewijs. Zij H een regulier ingebedde Lie deelgroep van G . Omdat H een deelgroep is van G , volgt voor $h_1, h_2 \in H$ dat $h_1 h_2 \in H$ en $h_1^{-1} \in H$. Dus de groepsoperaties beelden af op H . Omdat de groepsoperaties van H ook groepsoperaties van G zijn en G een Lie groep is volgt dat ze C^∞ zijn. Verder geldt dat voor elke $h \in H$ er een open omgeving U van h in G bestaat zodat $H \cap U$ homeomorf is met $\mathbb{R}^m$ (voor zekere $m \in \mathbb{N}$). Dus voor elke $h \in H$ bestaat een open omgeving $H \cap U$ die homeomorf is met $\mathbb{R}^m$. De C^∞ eigenschap van de transitieafbeeldingen wordt weer overgenomen van G . Hieruit volgt dat H ook een C^∞ -variëteit is. $\square$

Definitie 2.12. *Een regulier ingebedde lineaire Lie groep of matrix Lie groep is een regulier ingebedde Lie deelgroep van $GL(n, \mathbb{C})$ voor een zekere $n \in \mathbb{Z}_{>0}$*

Zij $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ een matrix Lie groep. De raakruimte $T_I G$ van G aan het eenheidselement I (de identiteitsmatrix) kunnen we op verschillende manieren verkrijgen. Een daarvan is als de verzameling van alle matrices $T'(0)$ zodanig dat de afbeelding $t \mapsto T(t)$ een C^∞ kromme is in $GL(n, \mathbb{C})$ die volledig in G ligt en zo dat $T(0) = I$. Deze verzameling vormt dan een reële lineaire deelverzameling van $M_n(\mathbb{C})$. De Lie algebra structuur van deze raakruimte $T_I G$, die per definitie wordt geïnduceerd door de Lie algebra structuur van de links invariante vectorvelden van G , is dan ook te verkrijgen als een commutator product:

Stelling 2.13. *Zij $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ een matrix Lie groep met Lie algebra $\mathfrak{g} = T_I G \subset M_n(\mathbb{C})$. Dan is het Lie haakje op $\mathfrak{g}$ gelijk aan*

$$[A, B] = AB - BA \quad (A, B \in \mathfrak{g}).$$

Hierbij zijn AB en BA matrix vermenigvuldigingen.

Voordat we deze stelling bewijzen zullen we het eerst hebben over de exponentiële afbeelding. Met de exponentiële afbeelding kunnen we de Lie algebra $\mathfrak{g}$ van $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ verbinden met G . Voor $n \times n$ matrices is deze als volgt gedefinieerd

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \quad (A \in M_n(\mathbb{C})). \quad (2.16)$$

(Deze reeks convergeert altijd en is dus welgedefinieerd).

Uit de lineaire algebra zijn de volgende eigenschappen van deze exponentiële functie bekend

- a) $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ als A en B commuteren.
- b) $\exp(-A) = (\exp(A))^{-1}$.
- c) $\exp(TAT^{-1}) = T\exp(A)T^{-1} \quad (A \in M_n(\mathbb{C}), T \in GL(n, \mathbb{C}))$.
- d) $\det(\exp(A)) = e^{\text{tr}(A)}$ en dus $\forall A \in M_n(\mathbb{C}) : \exp(A) \in GL(n, \mathbb{C})$.
- e) als $T(t) := \exp(tA)$ dan $T'(t) = AT(t) = T(t)A$. In het bijzonder geldt dan $T'(0) = A$.
- f) Er bestaan open omgevingen U van $0 \in M_n(\mathbb{C})$ en V van $I \in GL(n, \mathbb{C})$ zodanig dat $\exp : U \rightarrow V$ een bijectie en een C^∞ differentieerbare homeomorfisme is. (Beschouwen we $T'(0)$ (zoals in e) als een afbeelding tussen matrix ruimten dan geldt dat $T'(0)(A) = A \Rightarrow T'(0) = \text{id}$. Dit gecombineerd met de inverse functie stelling geeft ons dit resultaat).

Propositie 2.14. *Zij $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ een matrix Lie groep met Lie algebra $\mathfrak{g} \subset M_n(\mathbb{C})$. Dan geldt*

$$\exp(\mathfrak{g}) \subset G. \quad (2.17)$$

Bewijs. We hebben een raakvector aan de eenheid gedefinieerd als een equivalentieklasse van krommen $t \mapsto T(t)$ die voor $t = 0$ door de eenheid gaan en waarvan de afgeleiden van deze krommen in $t = 0$ allemaal gelijk zijn aan elkaar. Er geldt $\mathfrak{g}$ is gelijk aan $T_I G$, de raakruimte aan de eenheid in G . Zij nu $A \in T_I G$ een raakvector (in dit geval is het een matrix). Dan volgt uit f) dat $T(t) = \exp(tA)$ in de equivalentieklasse A zit. Voor een raakvector in $T_I G$ geldt dat de onderliggende krommen volledig in G zitten. Omdat $\exp(tA)$ een kromme is in de equivalentieklasse A en dus een onderliggende kromme is van A volgt dus $\exp(A) \in G$. Omdat $A \in \mathfrak{g}$ willekeurig is, volgt $\exp(\mathfrak{g}) \subset G$. $\square$

We zijn nu in staat om stelling 2.13 te bewijzen:

Bewijs stelling 2.13. Ter herinnering: Als $f \in C^\infty(G)$, $g \in G$, x de lokale coördinaat van g en ϕ een coördinaat afbeelding dan noteren we $f(x)$ in plaats van $f(\phi^{-1}(x))$, Zij $G \subset GL(n, \mathbb{C})$ een matrix Lie groep met Lie algebra $\mathfrak{g} = T_I G \subset M_n(\mathbb{C})$. Zij ϕ_{ij} de coördinaat functie op $M_n(\mathbb{C})$:

$$\phi_{ij} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = a_{ij}$$

Merk op: $\phi_{ij} \in C^\infty(G)$ en voor $A, B \in G$ geldt

$$\phi_{ij}(AB) = \sum_{k=1}^n \phi_{ik}(A)\phi_{kj}(B). \quad (2.18)$$

Zij $A \in \mathfrak{g} = T_I G$. $T_I G$ is een raakruimte aan G in I . Zoals in (2.10), associëren we met A een lineaire functionaal, $\alpha(A)$ op $C^\infty(G)$ door:

$$\alpha(A)f = \left. \frac{d}{dt} f(x(t)) \right|_{t=0}$$

waarbij $x(t)$ een kromme is op G door $e = x(0)$ met $x'(0) = A$. Omdat $x(t)$ en $\exp(tA)$ in dezelfde equivalentieklasse zitten volgt

$$\begin{aligned} \alpha(A)\phi_{ij} &= \left. \frac{d}{dt} \phi_{ij}(x(t)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \phi_{ij}(\exp(tA)) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \phi_{ij} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\phi_{ij}(A^k)}{k!} t^k \right|_{t=0} \\ &= \phi_{ij}(A) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Hieruit volgt dat we een bijectie hebben tussen de lineaire functionalen en de raakvectoren.

Zij nu $V(G)$ de vectorruimte van links invariante vectorvelden op G . Daarop hebben we het Lie haakje gedefinieerd als $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$. Verder weten we dat er een bijectie bestaat tussen $V(G)$ en $T_I G$. Het Lie haakje op $T_I G$ is gedefinieerd als $X_{[A, B]} := [X_A, X_B]$. Er geldt nu

$$\begin{aligned} (X_A \phi_{ij})(g) &= \alpha(A)(h \mapsto \phi_{ij}(gh)) \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \alpha(A) \left(h \mapsto \sum_{k=1}^n \phi_{ik}(g) \phi_{kj}(h) \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \phi_{ik}(g) \alpha(A) \phi_{kj} \\ &\stackrel{(2.19)}{=} \sum_{k=1}^n \phi_{ik}(g) \phi_{kj}(A) \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \phi_{ij}(gA) \quad g, h \in G, A \in T_I G. \end{aligned}$$

Gebruikmakend van het bovenstaande krijgen we

$$\begin{aligned} (X_A(X_B \phi_{ij}))(g) &= (X_A(h \mapsto \phi_{ij}(hB)))(g) \\ &= \alpha(A)(h \mapsto \phi_{ij}(ghB)) \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \alpha(A) \left(h \mapsto \sum_{k=1}^n \phi_{ik}(g) \phi_{kj}(hB) \right) \\ &\stackrel{(2.18)}{=} \alpha(A) \left(h \mapsto \sum_{k=1}^n \phi_{ik}(g) \sum_{l=1}^n \phi_{kl}(h) \phi_{lj}(B) \right) \\ &= \sum_{k, l} \phi_{ik}(g) \alpha(A) \phi_{kl} \phi_{lj}(B) \\ &\stackrel{(2.19)}{=} \sum_{k, l} \phi_{ik}(g) \phi_{kl}(A) \phi_{lj}(B) \\ &\stackrel{2 \text{ keer } (2.18)}{=} \phi_{ij}(gAB) \quad g, h \in G, A, B \in T_I G \end{aligned}$$

Op dezelfde manier volgt $(X_B(X_A\phi_{ij}))(g) = \phi_{ij}(gBA)$. Er geldt dus

$$\begin{aligned} ([X_A, X_B]\phi_{ij})(g) &= \phi_{ij}(gAB) - \phi_{ij}(gBA) \\ &= \phi_{ij}(g(AB - BA)) \\ &= (X_{AB-BA}\phi_{ij})(g) = (X_{[A,B]}\phi_{ij})(g) \end{aligned}$$

waarbij we gebruik maken van de lineariteit van de coördinaat afbeelding. $\square$

Nemen we nu open omgevingen U' en V' zoals in f) dan geldt $\exp(U') = V'$ en $\exp^{-1}(V') = U'$ (inverse van $\exp$). Noem

$$U = \{u \in U' : \exp(u) \in G \cap V'\} \quad \text{en} \quad V = \{v \in V' : \exp^{-1}(v) \in \mathfrak{g} \cap U'\} \quad (2.20)$$

Dan volgt

$$\exp(\mathfrak{g} \cap U) = G \cap V. \quad (2.21)$$

Ook hebben we een stelling die zegt dat het omgekeerde hiervan waar is. Namelijk

Stelling 2.15. *Zij G een deelgroep van $GL(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{g}$ een reële lineaire deelruimte van $M_n(\mathbb{C})$, U en V open omgevingen zoals in f) en stel dat (2.21) geldt. Dan is G een matrix Lie groep met Lie algebra $\mathfrak{g}$.*

Bewijs. G is een deelgroep van $GL(n, \mathbb{C})$. $GL(n, \mathbb{C})$ is een Lie groep. We zien dat G aan definitie 2.10 voldoet door $m = n$ te nemen en de matrixelementen als systeem van lokale coördinaten te gerbuiken. Oftewel G is een regulier ingebedde Lie deelgroep van $GL(n, \mathbb{C})$. Dus G voldoet ook aan definitie 2.12 en is dus een matrix Lie groep.

Om te laten zien dat $\mathfrak{g}$ de bijbehorende Lie algebra is moeten we laten zien dat $\mathfrak{g} = T_I G$.

Zij $A \in \mathfrak{g}$. Dan geldt voor zekere $0 \neq c \in \mathbb{R}$ en $t \in (-c, c)$ dat At een kromme is in U . Uit (2.21) volgt dan dat $\exp(At) \in G \cap V$. Dus $\exp(At)$ is een kromme in G die voor $t = 0$ door I gaat en omdat $\left. \frac{d}{dt} \exp(At) \right|_{t=0} = A$ volgt $A \in T_I G$.

Zij $B \in T_I G$. B is de equivalentieklasse van krommen $t \mapsto T(t)$ die voor $t = 0$ door de eenheid gaan en waarvan de afgeleiden gelijk zijn aan B . $t \mapsto \exp(Bt)$ zit ook in deze equivalentieklasse. Door t klein genoeg te kiezen volgt $\exp(Bt) \in G \cap V = \exp(\mathfrak{g} \cap U)$. Hieruit volgt $B \in \mathfrak{g}$ $\square$

3 Jacobi polynomen

Voor meer informatie over speciale functies zie Andrews, Askey & Roy [2].

In dit hoofdstuk definiëren we eerst wat een hypergeometrische reeks is en geven we een aantal eigenschappen ervan. Daarna definiëren we Jacobi polynomen aan de hand van een hypergeometrische reeks. Ook zullen we een aantal eigenschappen van Jacobi polynomen geven en op een vrij directe manier bewijzen.

3.1 Hypergeometrische reeksen

We introduceren de volgende notatie

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1), \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \quad (3.1)$$

Bovenstaande notatie noemen we een Pochhammer symbool.

Merk op:

$$\frac{(n+k)!}{n!} = (n+1)_k, \quad \frac{n!}{(n-k)!} = (-1)^k (-n)_k \quad (3.2)$$

Definitie 3.1. Zij $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ een reeks. We noemen deze reeks een hypergeometrische reeks als c_{k+1}/c_k een rationale functie is van k , oftewel

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+a_1)(k+a_2) \cdots (k+a_p)x}{(k+b_1)(k+b_2) \cdots (k+b_q)(k+1)}, \quad a_j, b_j, x \in \mathbb{C} \text{ en } p, q \in \mathbb{N} \quad (3.3)$$

Als $b_i \neq 0, -1, -2, \dots$ voor $i = 1, \dots, q$ dan volgt uit (3.3) en gebruikmakend van de Pochhammer symbolen

$$\begin{aligned} c_k &= c_{k-1} \frac{(k+a_1)(k+a_2) \cdots (k+a_p)x}{(k+b_1)(k+b_2) \cdots (k+b_q)k} \\ &= c_{k-2} \frac{(k+a_1)(k+a_2) \cdots (k+a_p)x}{(k+b_1)(k+b_2) \cdots (k+b_q)k} \frac{(k-1+a_1)(k-1+a_2) \cdots (k-1+a_p)x}{(k-1+b_1)(k-1+b_2) \cdots (k-1+b_q)(k-1)} \\ &\vdots \\ &= c_0 \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k x^k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k k!} \end{aligned}$$

Uit het bovenstaande volgt dat we de hypergeometrische reeks kunnen schrijven als

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k x^k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k k!}$$

Deze reeks noteren we als

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix}; x \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k (a_2)_k \cdots (a_p)_k x^k}{(b_1)_k (b_2)_k \cdots (b_q)_k k!} \quad (3.4)$$

waarbij $b_i \neq 0, -1, -2, \dots$ voor $i = 1, \dots, q$.

Stelling 3.2. Voor de hypergeometrische reeks in (3.4) geldt:

- de reeks convergeert absoluut voor alle x als $p \leq q$

- de reeks convergeert voor $|x| < 1$ als $p = q + 1$
- de reeks divergeert voor $x \neq 0$ als $p > q + 1$

Bewijs. Schrijf (3.4) als $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ waarbij $c_0 = 1$. Uit (3.3) volgt dan

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+a_1)(k+a_2) \cdots (k+a_p)x}{(k+b_1)(k+b_2) \cdots (k+b_q)(k+1)} \\ &= \begin{cases} 0 & p \leq q \\ |x| & p = q + 1 \\ \infty & p > q + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Uit het quotiëntenkenmerk volgt dan de stelling. □

Voordat we de volgende stelling over hypergeometrische reeksen kunnen bewijzen hebben we wat kennis nodig over de gamma- en de beta-functie

Definitie 3.3. De gamma-functie Γ is gedefinieerd door

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x) > 0.$$

Uit de definitie en partiële integratie volgt

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^x dt = -e^{-t} t^x \Big|_0^{\infty} + x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = x \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

Hieruit volgt dat de gamma-functie aan het volgende voldoet

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x), \quad \operatorname{Re}(x) > 0. \quad (3.5)$$

Aangezien $\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1$ volgt dat

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (3.6)$$

Gevolg 3.4. Zij $\operatorname{Re}(x) > 0$, dan geldt

$$\Gamma(x+k) = (x)_k \Gamma(x). \quad (3.7)$$

Definitie 3.5. De beta-functie B is gedefinieerd door

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \quad \operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0.$$

Stelling 3.6. Voor $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$ geldt

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Bewijs. Voor $\operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y) > 0$ definiëren we $f(x, y) = \Gamma(x + y)B(x, y)$. Dan geldt

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x+y-1} dt \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} t^{y-1} t dt \int_0^1 s^{x-1} (1-s)^{y-1} ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^1 e^{-t} (st)^{x-1} (t(1-s))^{y-1} t ds dt \end{aligned}$$

Substitueren we $u = st$ en $v = t(1-s)$ (dus $t = u + v$), dan volgt

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial s} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & s \\ -t & 1-s \end{vmatrix} = t.$$

Hieruit volgt dat de Jacobiaan gelijk is aan t^{-1} . Dan volgt

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u+v)} u^{x-1} v^{y-1} du dv \\ &= \int_0^\infty e^{-u} u^{x-1} du \int_0^\infty e^{-v} v^{y-1} dv \\ &= \Gamma(x) \Gamma(y). \end{aligned}$$

Dus er geldt $B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$. □

We kunnen nu de volgende stelling over hypergeometrische reeksen bewijzen.

Stelling 3.7 (Euler). *Zij $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ en $|x| < 1$, dan geldt*

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x \right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt$$

Bewijs. Noem $I = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-xt)^{-a} dt$. Voor $|xt| < 1$ volgt uit de gegeneraliseerde binomiaal stelling dat

$$\begin{aligned} (1-xt)^{-a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-a}{k} (-xt)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{a+k-1}{k} (-1)^k x^k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a+k-1)!}{k!(a-1)!} x^k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a-1)!(a)_k}{k!(a-1)!} x^k t^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k}{k!} x^k t^k. \end{aligned}$$

Omdat deze reeks absoluut convergent is kunnen we de stelling van Fubini toepassen. We krijgen dan

$$I = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{(a)_k}{k!} x^k \int_0^1 t^{k+b-1} (1-t)^{c-b-1} dt \right).$$

We zien dat $\int_0^1 t^{k+b-1}(1-t)^{c-b-1}dt = B(k+b, c-b)$. Gebruikmakend van gevolg 3.4 en stelling 3.6 krijgen we

$$B(k+b, c-b) = \frac{\Gamma(k+b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(k+c)} = \frac{(b)_k}{(c)_k} \frac{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c)}$$

Hieruit volgt dan

$$I = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k(b)_k}{k!(c)_k} x^k = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right)$$

□

Met bovenstaande stelling van Euler kunnen we de volgende twee evaluatie formules en transformatie bewijzen

Gevolg 3.8 (Gauss). *Zij $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$. Dan geldt*

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}.$$

Bewijs. Neem in stelling 3.7 limiet $x \rightarrow 1$. Gebruikmakend van de stelling van Abel¹ en dat we limiet en integraal kunnen verwisselen vanwege absolute convergentie van de integraal volgt dan

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-a-b-1}dt \\ &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} B(b, c-a-b) \\ &= \frac{\Gamma(c-a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \end{aligned}$$

waarbij $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ en $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$. De eis dat $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$ kan worden weggelaten door gebruik te maken van een analytische voortzetting. □

Gevolg 3.9 (Chu-Vandermonde). *Zij $n \in \mathbb{N}$. Dan geldt*

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, b \\ c \end{matrix}; 1\right) = \frac{(c-b)_n}{(c)_n}$$

Omdat $(-n)_k = 0$ voor $k > n$ en er $-n$ in de bovenparameter staat volgt dat de reeks afbreekt.

Bewijs. Nemen we $a = -n$ in gevolg 3.8 en gebruikmakend van gevolg 3.4 krijgen we

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, b \\ c \end{matrix}; 1\right) &= \frac{\Gamma(c-b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(c+n)\Gamma(c-b)} \\ &= \frac{(c-b)_n\Gamma(c-b)\Gamma(c)}{(c)_n\Gamma(c)\Gamma(c-b)} \\ &= \frac{(c-b)_n}{(c)_n}. \end{aligned}$$

□

¹Zij $a = \{a_k : k \geq 0\}$ een rij reële of complexe getallen en $G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ een reeks. Stel dat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ convergeert. Dan geldt $\lim_{z \uparrow 1} G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Gevolg 3.10 (Pfaff).

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix}; \frac{x}{x-1}\right)$$

waarbij x zodanig is gekozen dat beide reeksen absoluut convergeren.

Bewijs. In stelling 3.7 substitueren we $t = 1 - s$. Dan volgt

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma b \Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-s)^{b-1} s^{c-b-1} (1-x+xs)^{-a} ds \\ &= \frac{(1-x)^{-a} \Gamma(c)}{\Gamma b \Gamma(c-b)} \int_0^1 (1-s)^{b-1} s^{c-b-1} \left(1 - \frac{xs}{x-1}\right)^{-a} ds \\ &= \frac{(1-x)^{-a} \Gamma(c)}{\Gamma b \Gamma(c-b)} \int_0^1 s^{c-b-1} (1-s)^{c-(c-b)-1} \left(1 - \frac{xs}{x-1}\right)^{-a} ds \\ &= (1-x)^{-a} {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, c-b \\ c \end{matrix}; \frac{x}{x-1}\right) \end{aligned}$$

waarbij $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$. Deze eis kan worden weggelaten door gebruik te maken van een analytische voortzetting. $\square$

Stelling 3.11. De functie ${}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right)$ is een oplossing van de volgende differentiaalvergelijking

$$x(1-x)y''(x) + [c - (a+b+1)x]y'(x) - aby(x) = 0 \quad (3.8)$$

Deze differentiaalvergelijking wordt de hypergeometrische differentiaalvergelijking genoemd.

Bewijs. Noem $P(x) = x(1-x)$, $Q(x) = c - (a+b+1)x$ en $R(x) = -ab$. Dan geldt $P(0) = 0$ en dus is $x = 0$ een singulier punt. Verder geldt

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{k_0}{x} + k_1 + k_2x \dots, \quad \frac{R(x)}{P(x)} = \frac{l_0}{x^2} + \frac{l_1}{x} + l_2 + l_2x \dots, \quad k_i, l_i \in \mathbb{C}$$

Hieruit volgt dat het punt $x = 0$ een regulier singulier punt is van (3.8) en bestaat er dus een oplossing van de vorm $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}$. Invullen in (3.8) geeft

$$x(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2} - [c - (a+b+1)x] \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} - ab \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0$$

Dit is om te schrijven tot

$$x(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1+c) x^{n+r-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n [(n+r)(n+r-1) + (a+b+1)(n+r) + ab] x^{n+r} = 0$$

Voor alle machten van x moeten de coëfficiënten gelijk zijn aan nul. Voor x^{r-1} ($n = 0$) krijgen we

$$r(r-1-c) = 0$$

Hieruit volgt dat er alleen oplossingen zijn voor $r = 1 - c$ of $r = 0$. Nemen we $r = 0$, dan zien we dat de coëfficiënten voldoen aan de volgende recurrente betrekking

$$\begin{aligned} c_{n+1}(n+1)(n+c) &= c_n[n(n-1) + (a+b+1)n + ab] \\ &= c_n(n^2 + an + bn + ab) \\ &= c_n(n+a)(n+b) \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$c_n = c_0 \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n}$$

Dus

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} x^n = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x \right) c_0$$

□

3.2 Jacobi polynomen

Definitie 3.12. De Jacobi polynomen, $P_n^{(\alpha, \beta)}$, zijn gedefinieerd als

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix}; \frac{1-x}{2} \right) \quad (3.9)$$

Omdat $(-n)_k = 0$ voor $k > n$ en er $-n$ in de bovenparameter van de hypergeometrische reeks staat volgt dat de reeks afbreekt. Dus $P_n^{(\alpha, \beta)}$ is een polynoom van graad n . Nemen we in de hypergeometrische reeks $k = n$ dan krijgen we

$$\frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \frac{(-n)_n (n + \alpha + \beta + 1)_n}{(\alpha + 1)_n n!} \frac{(1-x)^n}{2^n} = \frac{(-1)^n n! (n + \alpha + \beta + 1)_n}{n! n!} \frac{(-1)^n x^n}{2^n} + \text{polynoom van graad } (n-1)$$

Hieruit volgt dat de kopcoëfficiënt van $P_n^{(\alpha, \beta)}$ gelijk is aan

$$\frac{(n + \alpha + \beta + 1)_n}{2^n n!} \quad (3.10)$$

Stelling 3.13. Voor $\alpha, \beta > -1$, geldt

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx = \delta_{mn} h_n^{\alpha, \beta}$$

waarbij

$$h_n^{\alpha, \beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1} (n + \alpha + \beta + 1)_n \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{n! \Gamma(2n + \alpha + \beta + 2)}$$

Bewijs. Zij $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Noem

$$I_{m,n} = \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) (1+x)^m (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx, \quad m \in \{0, \dots, n\}$$

Gebruikmakend van (3.9) volgt

$$\begin{aligned} I_{m,n} &= \int_{-1}^1 \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n + \alpha + \beta + 1 \\ \alpha + 1 \end{matrix}; \frac{1-x}{2} \right) (1+x)^m (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-n)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k}{2^k k! (\alpha + 1)_k} \right) (1+x)^m (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \\ &= \frac{(\alpha + 1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-n)_k (n + \alpha + \beta + 1)_k}{2^k k! (\alpha + 1)_k} \int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+k} (1+x)^{\beta+m} dx \right) \end{aligned}$$

We bekijken de integraal in de som apart: substitutie van $x = 1 - 2t$ geeft

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+m} dx &= \int_1^0 -2(2t)^{\alpha+k}(2-2t)^{\beta+m} dt \\ &= 2^{\alpha+\beta+k+m} \int_0^1 t^{\alpha+k}(1-t)^{\beta+m} dt\end{aligned}\quad (3.11)$$

De intergaal in (3.11) herkennen we als de Beta-functie. We krijgen dus

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (1-x)^{\alpha+k}(1+x)^{\beta+m} dx &= 2^{\alpha+\beta+k+m} \int_0^1 t^{\alpha+k}(1-t)^{\beta+m} dt \\ &= 2^{\alpha+\beta+k+m} B(\alpha+k+1, \beta+m+1) \\ &\stackrel{\text{stelling 3.6}}{=} 2^{\alpha+\beta+k+m} \frac{\Gamma(\alpha+k+1)\Gamma(\beta+m+1)}{\Gamma(m+k+\alpha+\beta+2)} \\ &\stackrel{\text{gevolg 3.4}}{=} 2^{\alpha+\beta+k+m+1} \frac{(\alpha+1)_k}{(\alpha+\beta+m+2)_k} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+m+1)}{\Gamma(m+\alpha+\beta+2)}\end{aligned}$$

Uit het bovenstaande volgt

$$\begin{aligned}I_{m,n} &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^n \left(\frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{2^k k! (\alpha+1)_k} \frac{2^{\alpha+\beta+k+m+1} (\alpha+1)_k}{(\alpha+\beta+m+2)_k} \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+m+1)}{\Gamma(m+\alpha+\beta+2)} \right) \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+m+1} (\alpha+1)_n \Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+m+1)}{n! \Gamma(m+\alpha+\beta+2)} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k! (m+\alpha+\beta+2)_k} \\ &\stackrel{\text{gevolg 3.4}}{=} \frac{2^{\alpha+\beta+m+1} \Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+m+1)}{n! \Gamma(m+\alpha+\beta+2)} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{k! (m+\alpha+\beta+2)_k} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+m+1} \Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+m+1)}{n! \Gamma(m+\alpha+\beta+2)} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ m+\alpha+\beta+2 \end{matrix}; 1 \right)\end{aligned}$$

De hypergeometrische reeks kunnen we met behulp van Gevolg 3.9 omschrijven:

$${}_2F_1 \left(\begin{matrix} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ m+\alpha+\beta+2 \end{matrix}; 1 \right) = \frac{(m-n+1)_n}{(m+\alpha+\beta+2)_n} = \begin{cases} 0 & m < n, \\ \frac{n!}{(n+\alpha+\beta+2)_n} & m = n. \end{cases}$$

Uit het bovenstaande en het feit dat $(n+\alpha+\beta+2)_n \Gamma(n+\alpha+\beta+2) = \Gamma(2n+\alpha+\beta+2)$ volgt dan

$$I_{m,n} = \begin{cases} 0 & m < n, \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1+1} \Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(\beta+1+1)}{\Gamma(1+\alpha+\beta+2)} & m = n. \end{cases}$$

Dit bewijst de orthogonaliteit van de Jacobi polynomen. Vermenigvuldigen we $I_{n,n}$ met de kopcoëfficiënt (3.10) dan krijgen we de norm h_n . $\square$

Definitie 3.14. Een verzameling orthogonale functies $\{\phi_n\}$ noemen we een volledig orthogonaal stelsel in L^2 als voor elke functie in L^2 constanten $(c_i)_{i=1}^\infty$ bestaan zo dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - (c_1 \phi_1 + \dots + c_n \phi_n)\|^2 = 0$$

waarbij $\|f\|$ de $L^2(w(x)d\mu)$ norm is met gewichtsfunctie $w(x)$.

Opmerking 3.15. De Jacobi polynomen vormen een volledig orthogonaal stelsel in $L^2((-1, 1), (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx)$. De volledigheid volgt uit het feit dat we L^2 hebben ten opzichte van een eindige maat (Lebesgue) op een begrensde interval. Daaruit volgt dat de continue functies op $[-1, 1]$ dicht zijn in $L^2((-1, 1), (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx)$ en uit Stone-Weierstrass volgt dat de verzameling polynomen, in sup-norm, dicht liggen in $C([-1, 1])$ en dus ook in L^2 -norm.

Opmerking 3.16. Orthogonale polynomen zijn, op een multiplicatieve constante na, uniek: zij (p_n) en (q_n) twee stelsel van orthogonale polynomen van graad n . Door te vermenigvuldigen met een geschikte factor kunnen we orthogonale polynomen ook orthonormaal maken. We kunnen dus aannemen dat (p_n) en (q_n) orthonormale stelsels zijn. Dan geldt $\langle p_n, p_m \rangle = \langle q_n, q_m \rangle = \delta_{nm}$. Verder geldt

$$p_n = \sum_{k=0}^n c_k^n q_k \Rightarrow c_k^n = \langle p_n, q_k \rangle \begin{cases} = 0 & \text{als } k < n \\ \neq 0 & \text{als } k = n \end{cases} \\ \Rightarrow p_n = c_n^n q_n.$$

Lemma 3.17. Zij $n \in \mathbb{N}$ en $\alpha, \beta > -1$. Dan geldt

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x).$$

Bewijs. Noem $\omega^{\alpha, \beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Uit stelling 3.13 weten we dat er geldt

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(x) P_m^{(\alpha, \beta)}(x) \omega^{\alpha, \beta}(x) dx = \delta_{nm} h_n^{\alpha, \beta}$$

Vullen we hierin $-x$ in plaats van x dan krijgen we

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) P_m^{(\alpha, \beta)}(-x) \omega^{\alpha, \beta}(-x) dx = \delta_{nm} h_n^{\alpha, \beta}$$

Er geldt $\omega^{\alpha, \beta}(-x) = (1+x)^\alpha(1-x)^\beta = \omega^{\beta, \alpha}(x)$. Hieruit volgt

$$\int_{-1}^1 P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) P_m^{(\alpha, \beta)}(-x) \omega^{\beta, \alpha}(x) dx = \delta_{nm} h_n^{\alpha, \beta}$$

We zien dat $P_n^{(\alpha, \beta)}(-x)$ orthogonaal is ten opzichte van $\omega^{\beta, \alpha}(x)$. We weten, uit stelling 3.13 dat $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ orthogonaal is ten opzichte van $\omega^{\beta, \alpha}(x)$. Hieruit volgt

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = k P_n^{(\beta, \alpha)}(x).$$

voor zekere constante k . In (3.10) zien we dat de kopcoëfficiënt symmetrisch is in α en β en omdat $(-x)^n = (-1)^n x^n$ volgt dan

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x).$$

□

We gaan nu $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ differentiëren:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k k!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^k \\
&= -\frac{1}{2} \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=1}^n \frac{(-n)_k (n+\alpha+\beta+1)_k}{(\alpha+1)_k (k-1)!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^{k-1} \\
&\stackrel{k=l+1}{=} -\frac{1}{2} \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-n)(-n+1)_l (n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)_l}{(\alpha+1)(\alpha+2)_l l!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^l \\
&= \frac{1}{2} (n+\alpha+\beta+1) \frac{(\alpha+2)_n}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-n+1)_l (n+\alpha+\beta+1)_l}{(\alpha+2)_l l!} \left(\frac{1-x}{2}\right)^l \\
&= \frac{1}{2} (n+\alpha+\beta+1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x). \tag{3.12}
\end{aligned}$$

Door $\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ te vermenigvuldigen met $(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$ en daarna nogmaals naar x te differentiëren krijgen we:

$$\frac{d}{dx} \left((1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right) = -2(n+1)(1-x)^{\alpha-1} (1+x)^{\beta-1} P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x). \tag{3.13}$$

Stelling 3.18. De Jacobi polynomen $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ zijn oplossingen van de volgende differentiaalvergelijking:

$$(1-x^2)y''(x) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y'(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(x) = 0.$$

Bewijs. De Jacobi polynomen zijn gedefinieerd als $P_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{smallmatrix}; \frac{1-x}{2}\right)$. Uit stelling 3.11 krijgen we dat ${}_2F_1\left(\begin{smallmatrix} a, b \\ c \end{smallmatrix}; t\right)$ een oplossing is voor

$$t(1-t)y''(t) + [c - (a+b+1)t]y'(t) - aby(t) = 0$$

In deze differentiaalvergelijking vullen we het volgende in:

$$\begin{aligned}
c &= \alpha + 1, \\
a &= -n \\
b &= \alpha + \beta + 1 + n \\
t &= \frac{1-x}{2} \\
f(x) &= y\left(\frac{1-x}{2}\right) = y(t) \\
f'(x) &= -\frac{1}{2}y'\left(\frac{1-x}{2}\right) = -\frac{1}{2}y'(t) \\
f''(x) &= -\frac{1}{4}y''\left(\frac{1-x}{2}\right) = -\frac{1}{4}y''(t)
\end{aligned}$$

We krijgen dan

$$\begin{aligned}
\frac{1-x}{2} \frac{1+x}{2} 4f''(x) - (\alpha+1 - (\alpha+\beta+2)\frac{1-x}{2}) 2f'(x) + n(n+\alpha+\beta+1)f(x) &= 0 \\
\implies \\
(1-x^2)y''(x) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x)y'(x) + n(n + \alpha + \beta + 1)y(x) &= 0 \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $P_n^{(\alpha, \beta)}$ een oplossing is van (3.14) □

Als laatste in deze paragraaf noemen we een aantal speciale gevallen van Jacobi polynomen. Deze speciale gevallen zullen we met een vaak gebruikte normalisatie geven. Voor $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ krijgen we Chebyshev polynomen (eerste soort):

$$T_n(x) = \frac{n!}{(\frac{1}{2})_n} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) = \cos(n\theta), \quad x = \cos(\theta)$$

Bewijs. Er geldt

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta &= 2 \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos((n+m)\theta) \cos((n-m)\theta) d\theta \\ &= \frac{\sin((n+m)\theta)}{n+m} \Big|_0^{\pi} + \frac{\sin((n-m)\theta)}{n-m} \Big|_0^{\pi} \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \pi, & n = m. \end{cases} \end{aligned}$$

Substitueren we nu $x = \cos(n\theta)$ dan krijgen we

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta &= 2 \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 T_n(x) T_m(x) (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{-\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

Uit bovenstaande volgt dat $T_n(x)$ orthogonaal is ten opzichte van $(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$. We moeten nog alleen laten zien dat $T_n(x)$ inderdaad een polynoom is. Er geldt

$$\cos(n\theta) = \cos((n-1)\theta + \theta) = 2 \cos((n-1)\theta) \cos(\theta) - \cos((n-2)\theta)$$

$$x=\cos(\theta), \xrightarrow{T_n(x)=\cos(n\theta)}$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}$$

$$\implies$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (3.15)$$

Uit $x = \cos(\theta)$ en $T_n(x) = \cos(n\theta)$ volgt $T_0(x) = 1$ en $T_1(x) = x$. Dit gecombineerd met (3.15) geeft ons dat T_n een polynoom is voor alle n .

We hebben dat T_n polynomen zijn die orthogonaal zijn ten opzichte van $(1-x)^{-\frac{1}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}$, en dus zijn het Jacobi polynomen voor $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$. $\square$

Voor $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ krijgen we Chebyshev polynomen (tweede soort):

$$U_n(x) = \frac{(n+1)!}{(\frac{3}{2})_n} P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}, \quad x = \cos(\theta).$$

(Dit volgt op dezelfde manier als Chebyshev polynomen van het eerste soort).

Voor $\alpha = \beta = 0$ krijgen we de Legendre polynomen:

$$P_n(x) = P_n^{(0,0)}(x).$$

En voor $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ met $\lambda > -\frac{1}{2}$ krijgen we Gegenbauer polynomen:

$$C_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + \frac{1}{2})_n} P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})}(x).$$

4 Representaties van $SU(2)$

We zullen in dit hoofdstuk uitleggen wat representaties van een groep zijn en zullen enkele eigenschappen hiervan geven. Daarna focussen we ons op representaties van $SU(2)$, de groep van 2×2 unitaire matrices met determinant 1, en bekijken hoe de Jacobi polynomen hierin passen. Ook zullen we Schurs orthogonaliteitsrelatie en irreducibiliteit van de representaties op $SU(2)$ bespreken.

4.1 Representatietheorie

Zij V een eindig dimensionaal complexe vectorruimte met dimensie n . Noem $GL(V)$ de verzameling van alle inverteerbare lineaire transformaties van V . Nemen we compositie als de groepsoperatie dan vormt $GL(V)$ een groep.

Definitie 4.1. Een representatie van een groep G op een eindig dimensionale complexe vectorruimte V is een groepshomomorfisme $\pi : G \rightarrow GL(V)$. Een lineaire deelruimte W van V noemen we invariant (ten opzichte van representatie π) als $\pi(g)W \subset W$ voor alle $g \in G$. De representatie π op V noemen we irreducibel als V en $\{0\}$ de enige invariante deelruimten van V zijn.

We kunnen representaties van een groep op elke vectorruimte definiëren (ook oneindig dimensionaal), maar we zullen ons alleen richten op eindig dimensionale complexe vectorruimten.

Definitie 4.2. Zij π een representatie van een groep G op een eindig dimensionale complexe vectorruimte V . Kies een basis $\{e_1, \dots, e_n\}$ van V . Dan heeft de lineaire afbeelding $\pi(g)$, voor elke $g \in G$, een matrix $(\pi_{ij}(g))_{i,j=1,\dots,n}$ ten opzichte van deze basis, die bepaald wordt door

$$\pi(g)e_j = \sum_{i=1}^n \pi_{ij}(g)e_i$$

De π_{ij} zijn complexwaardige functies op G . Deze noemen we de matrix elementen van de representatie π ten opzichte van basis $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Opmerking 4.3. Zij G een groep, V een eindig dimensionale complexe vectorruimte en $\text{End}(V)$ de ruimte van alle lineaire transformaties $A : V \rightarrow V$. Noem e het eenheidselement in G . Als $\pi : G \rightarrow \text{End}(V)$ een afbeelding is zodanig dat $\pi(g_1g_2) = \pi(g_1)\pi(g_2)$ en $\pi(e) = \text{id}$, dan geldt $\text{id} = \pi(e) = \pi(gg^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1})$ voor alle $g \in G$. Hieruit volgt $\pi(g)^{-1} = \pi(g^{-1})$ en dus $\pi[G] \subset GL(V)$: π is groepshomomorfisme $G \rightarrow GL(V)$ en is dus een representatie van G op V .

Definitie 4.4. Een representatie van een topologische groep G op een eindig dimensionale complexe vectorruimte V is een continu groepshomomorfisme $\pi : G \rightarrow GL(V)$.

Opmerking 4.5. Zij G een topologische groep, V een eindig dimensionale complexe vectorruimte, $\pi : G \rightarrow GL(V)$ een groepshomomorfisme en $\{e_1, \dots, e_n\}$ een basis van V . Dan zijn de volgende twee eigenschappen equivalent:

a) π is continu.

b) de matrix elementen π_{ij} van π ten opzichte van $e_1, \dots, e_n$ zijn continue functies op G .

Definitie 4.6. Zij V een eindig dimensionale complexe vectorruimte met een inwendig product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Een representatie π van een groep G op V noemen we unitair als $\pi(g)$ een unitaire operator is op V voor alle $g \in G$, oftewel

$$\langle \pi(g)v, \pi(g)w \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in V \text{ en } \forall g \in G$$

Opmerking 4.7. Zij V en G zoals in definitie 4.6 en zij π een representatie van G op V , $\{e_1, \dots, e_n\}$ een orthonormale basis van V en zij $(\pi_{ij}(g))$ de matrix van $\pi(g)$ ten opzichte van deze basis. De representatie π is unitair dan en slechts dan als de matrix $(\pi_{ij}(g))$ unitair is (een matrix U is unitair als $\overline{U^\top} = U^* = U^{-1}$), oftewel

$$\overline{\pi_{ij}(g)} = \pi_{ji}^{-1}(g) = \pi_{ji}(g^{-1}) \quad (i, j = 1, \dots, n)$$

Propositie 4.8. Zij V en G zoals in definitie 4.6 en zij π een unitaire representatie van G op V . Als W een invariante deelruimte van V is, dan is het orthoplement $W^\perp$ van W ook een invariante deelruimte.

Bewijs. Zij $v \in W^\perp$. Dan geldt $\langle w, \pi(g)v \rangle = \langle \pi^{-1}(g)w, v \rangle = 0$ voor alle $w \in W$ en $g \in G$. Dus $\pi(g)v \in W^\perp$ voor alle $g \in G$. $\square$

4.2 Representaties van $SU(2)$

Kies $l \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$ vast. Noem $\mathcal{H}_l$ de verzameling van alle homogene polynomen van graad $2l$ in twee complexe variabelen z_1, z_2 . Dat wil zeggen polynomen $f(z_1, z_2)$ met complexe coëfficiënten zodanig dat $f(cz_1, cz_2) = c^{2l}f(z_1, z_2)$ voor alle $c, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Dan vormen de monomen $z_1^{l-n}z_2^{l+n}$ ($n = -l, -l+1, \dots, l$) een basis van $\mathcal{H}_l$, en $\mathcal{H}_l$ heeft dus dimensie $2l+1$. We zullen met een genormaliseerde basis werken:

$$\psi_n^l(z_1, z_2) := \binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} z_1^{l-n} z_2^{l+n} \quad (n = -l, -l+1, \dots, l). \quad (4.1)$$

Voor $f \in \mathcal{H}_l$ en $A \in GL(2, \mathbb{C})$ definiëren we de functie $t^l(A)f$ op $\mathbb{C}^2$ door

$$(t^l(A)f)(z) := f(A^\top z) \quad (z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2). \quad (4.2)$$

Dus

$$\left(t_l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} f \right) (z_1, z_2) = f(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}).$$

Hieruit volgt dat $(t^l(A)f)(z_1, z_2)$ weer een homogeen polynoom van graad $2l$ in z_1, z_2 is. Verder geldt $t^l(I)f = f(z_1, z_2) = f$ en

$$\begin{aligned} (t^l(AB)f)(z) &= f((AB)^\top z) = f(B^\top A^\top z) = (t^l(B)f)(A^\top z) \\ &= (t^l(A)(t^l(B)f))(z) = ((t^l(A)t^l(B))f)(z). \end{aligned}$$

We zien dat $t^l : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow GL(\mathcal{H}_l)$ een homomorfisme is en is dus een representatie van $GL(2, \mathbb{C})$ op $\mathcal{H}_l$. Met behulp van definitie 4.2 kunnen we de matrix elementen $t_{m,n}^l$ ($m, n = -l, \dots, l$) van t^l ten opzichte van basis (4.1) bepalen door

$$t^l(g)\psi_n^l = \sum_{m=-l}^l t_{m,n}^l(g)\psi_m^l \quad g \in GL(2, \mathbb{C}) \quad (4.3)$$

Er geldt

$$\begin{aligned} \left(t^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \psi_n^l \right) (z_1, z_2) &= \psi_n^l(az_1 + cz_2, bz_1 + dz_2) \\ &= \binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} (az_1 + cz_2)^{l-n} (bz_1 + dz_2)^{l+n} \end{aligned} \quad (4.4)$$

Hieruit volgt dat we (4.3) kunnen schrijven als

$$\begin{aligned} \binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} (az_1 + cz_2)^{l-n} (bz_1 + dz_2)^{l+n} &= \sum_{m=-l}^l t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \binom{2l}{l-m}^{\frac{1}{2}} z_1^{l-m} z_2^{l+m}, \\ &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (4.5)$$

We zien dat $t_{m,n}^l$ een homogeen polynoom is van graad $2l$ in a, b, c, d en dus is $t_{m,n}^l$ continu op $GL(2, \mathbb{C})$. $GL(2, \mathbb{C})$ is een topologische groep. Uit opmerking 4.5 volgt dan dat t^l een representatie is van $GL(2, \mathbb{C})$.

Nemen we in (4.5) n vast dan kunnen we de matrix elementen $t_{m,n}^l$, met $m = -l, \dots, l$, terugvinden als de coëfficiënten van de machtreeks van de functie aan de linkerkant. We nemen $n = l$. Dan krijgen we voor de linkerkant van (4.5):

$$\begin{aligned} \binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} (az_1 + cz_2)^{l-n} (bz_1 + dz_2)^{l+n} &\stackrel{n=l}{=} (bz_1 + dz_2)^{2l} \\ &\stackrel{\text{Bin. v. Newton}}{=} \sum_{k=0}^{2l} \binom{2l}{k} (bz_1)^{2l-k} (dz_2)^k \\ &\stackrel{m=k-l}{=} \sum_{m=-l}^l \binom{2l}{l+m} (bz_1)^{l-m} (dz_2)^{l+m} \\ &= \sum_{m=-l}^l \binom{2l}{l-m} (bz_1)^{l-m} (dz_2)^{l+m}. \end{aligned}$$

Hieruit volgt, voor $n = l$, dat de matrix elementen t_{ml}^l te schrijven zijn als

$$t_{ml}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \binom{2l}{l-m}^{\frac{1}{2}} b^{l-m} d^{l+m} \quad (4.6)$$

We vermenigvuldigen nu beide kanten van (4.5) met

$$\binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} w_1^{l-n} w_2^{l+n}$$

en sommeren vervolgens over n van $-l$ tot l . Voor de linkerkant krijgen we

$$\begin{aligned} \sum_{n=-l}^l \binom{2l}{l-n} (az_1 w_1 + cz_2 w_1)^{l-n} (bz_1 w_2 + dz_2 w_2)^{l+n} \\ &= \sum_{n=-l}^l \binom{2l}{l+n} (az_1 w_1 + cz_2 w_1)^{l-n} (bz_1 w_2 + dz_2 w_2)^{l+n} \\ &\stackrel{k=n+l}{=} \sum_{k=0}^l \binom{2l}{k} (az_1 w_1 + cz_2 w_1)^{2l-k} (bz_1 w_2 + dz_2 w_2)^k \\ &\stackrel{\text{Bin. v. Newton}}{=} (az_1 w_1 + bz_1 w_2 + cz_2 w_1 + dz_2 w_2)^{2l} \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$(az_1w_1 + bz_1w_2 + cz_2w_1 + dz_2w_2)^{2l} = \sum_{m,n=-l}^l \binom{2l}{l-m}^{\frac{1}{2}} \binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} z_1^{l-m} z_2^{l+m} w_1^{l-n} w_2^{l+n}. \quad (4.7)$$

In de rechterkant van (4.7) vullen we $t_{n,m}^l \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ in plaats van $t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ in. Dan krijgen we

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=-l}^l \binom{2l}{l-m}^{\frac{1}{2}} \binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} t_{n,m}^l \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} w_1^{l-m} w_2^{l+m} z_1^{l-n} z_2^{l+n} \\ = (aw_1z_1 + cw_1z_2 + bw_2z_1 + dw_2z_2)^{2l} \\ = (az_1w_1 + bz_1w_2 + cz_2w_1 + dz_2w_2)^{2l} \end{aligned}$$

Hieruit verkrijgen we de volgende symmetrie

$$t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = t_{n,m}^l \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Op dezelfde manier verkrijgen we uit (4.5)

$$t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = t_{-m,-n}^l \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

Combineren we nu (4.8) en (4.9) dan krijgen we

$$t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = t_{n,m}^l \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = t_{-n,-m}^l \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

We bekijken $SU(2)$, de verzameling van unitaire 2×2 matrices met determinant 1. $SU(2)$ is een ondergroep van $GL(n, \mathbb{C})$ want: Zij $A, B \in SU(2)$, dan geldt

- 1) A is unitair: $AA^* = A^*A = I$ en dus $A^* = A^{-1}$. Hieruit volgt dat A^{-1} ook unitair is.
- 2) $\det(A^{-1}) = 1$. Dit samen met 1) geeft $A^{-1} \in SU(2)$.
- 3) $(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = I$ en $(AB)^*(AB) = B^*A^*AB = I$.
- 4) $\det(AB) = 1$. Dit samen met 3) geeft $AB \in SU(2)$.

Uit $A^* = A^{-1}$ volgt voor $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$:

$$\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \Rightarrow d = \bar{a} \text{ en } b = -\bar{c}$$

Nemen we nu $a = \alpha + \beta i$ en $c = \gamma + \delta i$ dan volgt

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1 & \Rightarrow \det \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} = 1 \\ & \Rightarrow \det \begin{pmatrix} \alpha + \beta i & -\gamma + \delta i \\ \gamma + \delta i & \alpha - \beta i \end{pmatrix} = 1 \\ & \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 - (-\gamma^2 - \delta^2) = 1 \\ & \Rightarrow |a|^2 + |c|^2 = 1 \end{aligned}$$

Dus $SU(2)$ bestaat uit matrices

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \quad \text{met } a, c \in \mathbb{C} \text{ en } |a|^2 + |c|^2 = 1 \quad (4.11)$$

Hieruit volgt dat $SU(2)$, als topologische ruimte, homeomorf is met $\{(a, c) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 + |c|^2 = 1\}$. Dit is de eenheidscirkel in $\mathbb{C}^2$, oftewel S^3 . Omdat S^3 compact is en een homeomorfisme (en zijn inverse) continu zijn volgt dat $SU(2)$ compact is.

Als we de representatie t^l van $GL(2, \mathbb{C})$ in (4.2) beperken tot $SU(2)$ en een inwendig product op $\mathcal{H}_l$ gebruiken zo dat de basis van functies ψ_n^l orthonormaal is dan wordt t^l een representatie van $SU(2)$ op $\mathcal{H}_l$. In de volgende paragraaf zullen we bewijzen dat deze representatie unitair is.

4.3 Matricelementen van $SU(2)$

We gaan nu de matricelementen van de representatie t^l van $SU(2)$ bepalen.

Propositie 4.9.

$$t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2l \\ l-m \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2l \\ l-n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \sum_{j=0 \vee (-m-n)}^{(l-m) \wedge (l-n)} \begin{pmatrix} l-n \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l+n \\ l-m-j \end{pmatrix} a^j b^{l-m-j} c^{l-n-j} d^{m+n+j} \quad (4.12)$$

waarbij $\vee$ maximum betekent en $\wedge$ minimum.

Bewijs. We gaan, met behulp van (4.5), de matricelementen van t^l bepalen. Uit het Binomium van Newton volgt:

$$\begin{aligned} (az_1 + cz_2)^{l-n} &= \sum_{j=0}^{l-n} \begin{pmatrix} l-n \\ j \end{pmatrix} a^j z_1^j c^{l-n-j} z_2^{l-n-j} \\ (bz_1 + dz_2)^{l+n} &= \sum_{k=0}^{l+n} \begin{pmatrix} l+n \\ k \end{pmatrix} b^k z_1^k d^{l+n-k} z_2^{l+n-k} \end{aligned}$$

Dus de linkerkant van (4.5) wordt

$$\begin{pmatrix} 2l \\ l-n \end{pmatrix} \sum_{j=0}^{l-n} \sum_{k=0}^{l+n} \begin{pmatrix} l-n \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l+n \\ k \end{pmatrix} a^j b^k c^{l-n-j} d^{l+n-k} z_1^{j+k} z_2^{2l-j-k} \quad (4.13)$$

We gaan hierin variabelen veranderen. We sturen $(j, k) \mapsto (m, j)$ met $j + k = l - m$. We krijgen dus

$$(j, k) \mapsto (l - k - j, j) \text{ met inverse } (m, j) \mapsto (j, l - m - j) \quad (4.14)$$

We krijgen dus

$$0 \leq j \leq l - n \text{ en } 0 \leq k \leq l + n \iff -l \leq m \leq l \text{ en } 0 \leq j \leq l - n \text{ en } -m - n \leq j \leq l - m \quad (4.15)$$

We kunnen nu (4.13) omschrijven tot

$$\begin{pmatrix} 2l \\ l-n \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \sum_{m=-l}^l \sum_{j=0 \vee (-m-n)}^{(l-m) \wedge (l-n)} \begin{pmatrix} l-n \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l+n \\ l-m-j \end{pmatrix} a^j b^{l-m-j} c^{l-n-j} d^{m+n+j} z_1^{l-m} z_2^{l+m} \quad (4.16)$$

(4.16) is dus gelijk aan de linkerkant van (4.5) en dus ook gelijk aan de rechterkant van (4.5). Zowel (4.16) als de rechterkant van (4.5) zijn polynomen in z_1, z_2 met expliciete coëfficiënten en dus moeten deze coëfficiënten aan elkaar gelijk zijn. Dat geeft ons dan hetgene wat we wilden bewijzen. $\square$

We zijn nu in staat om het volgende te bewijzen:

Propositie 4.10. *De representatie t^l van $SU(2)$ is unitair.*

Bewijs. Zij $\begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$. Inverse van deze matrix is $\begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ -\bar{c} & a \end{pmatrix}$. Uit opmerking 4.7 volgt dat we moeten laten zien dat

$$\overline{t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}} = t_{n,m}^l \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Uit (4.12) volgt dat $t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ een polynoom is in a, b, c, d met reële coëfficiënten. Dus er geldt

$$\overline{t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}} = t_{m,n}^l \begin{pmatrix} \bar{a} & -c \\ \bar{c} & a \end{pmatrix}$$

We moeten nu dus laten zien dat

$$t_{m,n}^l \begin{pmatrix} \bar{a} & -c \\ \bar{c} & a \end{pmatrix} = t_{n,m}^l \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dit volgt direct uit (4.8). $\square$

De grenzen in (4.12) geven ons één van de volgende vier alternatieven afhankelijk van het teken van $m+n$ en $m-n$

$$\begin{aligned} 0 \leq j \leq l-m & \quad \text{if} \quad m+n \geq 0 \quad \text{en} \quad m-n \geq 0 \\ 0 \leq j \leq l-n & \quad \text{if} \quad m+n \geq 0 \quad \text{en} \quad m-n \leq 0 \\ -m-n \leq j \leq l-m & \quad \text{if} \quad m+n \leq 0 \quad \text{en} \quad m-n \geq 0 \\ -m-n \leq j \leq l-n & \quad \text{if} \quad m+n \leq 0 \quad \text{en} \quad m-n \leq 0 \end{aligned}$$

Deze vier alternatieven corresponderen met vier deelverzamelingen van $\{(m, n) : m, n \in \{-l, \dots, l\}\}$ en samen vormen ze de hele verzameling. Verder geldt dat deze deelverzamelingen op elkaar worden afgebeeld door de symmetrieën in (4.8), (4.9) en (4.10).

Om $t_{m,n}^l$ uit te rekenen kunnen we, in het vervolg, aannemen dat $m+n \geq 0$ en $m-n \geq 0$.

Voor $m + n \geq 0$ en $m - n \geq 0$ geldt dat we (4.12) kunnen herschrijven:

$$\begin{aligned}
t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2l \\ l-m \end{pmatrix}^{-\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 2l \\ l-n \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{l-m} \begin{pmatrix} l-n \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l+n \\ l-m-j \end{pmatrix} a^j b^{l-m-j} c^{l-n-j} d^{m+n+j} \\
&= K \sum_{j=0}^{l-m} \frac{(l-n)!}{j!(l-n-j)!} \frac{(l+n)!}{(l-m-j)!(n+m+j)!} a^j b^{l-m-j} c^{l-n-j} d^{m+n+j} \\
&= K \frac{(l+n)! b^{l-m} c^{l-n} d^{m+n}}{(l-m)!(m+n)!} \sum_{j=0}^{l-m} \frac{(l-m)!}{(l-m-j)!} \frac{(l-n)!}{(l-n-j)!} \frac{(m+n)!}{(m+n+j)! j!} \left(\frac{ad}{bc} \right)^j \\
&\stackrel{(3.2)}{=} K \frac{(l+n)! b^{l-m} c^{l-n} d^{m+n}}{(l-m)!(m+n)!} \sum_{j=0}^{l-m} \frac{(l-m)!}{(l-m-j)!} \frac{(l-n)!}{(l-n-j)!} \frac{1}{(m+n+1)_j j!} \left(\frac{ad}{bc} \right)^j \\
&\stackrel{(3.2)}{=} K \frac{(l+n)! b^{l-m} c^{l-n} d^{m+n}}{(l-m)!(m+n)!} \sum_{j=0}^{l-m} \frac{(l-n)!}{(l-n-j)!} \frac{(-1)^j (-l+m)_j}{(m+n+1)_j j!} \left(\frac{ad}{bc} \right)^j \\
&\stackrel{(3.2)}{=} K \frac{(l+n)! b^{l-m} c^{l-n} d^{m+n}}{(l-m)!(m+n)!} \sum_{j=0}^{l-m} \frac{(-l+n)_j (-l+m)_j}{(m+n+1)_j j!} \left(\frac{ad}{bc} \right)^j \\
&= \left(\frac{(l+m)!(l+n)!}{(l-n)!(l-m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{b^{l-m} c^{l-n} d^{m+n}}{(m+n)!} \sum_{j=0}^{l-m} \frac{(-l+n)_j (-l+m)_j}{(m+n+1)_j j!} \left(\frac{ad}{bc} \right)^j
\end{aligned}$$

waarbij $K = \left(\frac{(l+m)!(l-n)!}{(l+n)!(l-m)!} \right)^{\frac{1}{2}}$. We herkennen hierin de hypergeometrische functie en krijgen

$$t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{(l+m)!(l+n)!}{(l-n)!(l-m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{b^{l-m} c^{l-n} d^{m+n}}{(m+n)!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l+m, -l+n \\ m+n+1 \end{matrix}; \frac{ad}{bc} \right) \quad (4.17)$$

Merk op dat de twee bovenparameters negatief zijn en dus zal de reeks stoppen na de term met $j = (l-m) \wedge (l-n)$.

Uit de transformatie van Pfaff (gevolg 3.10) volgt

$$\begin{aligned}
{}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l+m, -l+n \\ m+n+1 \end{matrix}; \frac{ad}{bc} \right) &= \left(1 - \frac{ad}{bc} \right)^{l-m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l+m, l+m+1 \\ m+n+1 \end{matrix}; \frac{ad}{bc} / \left(\frac{ad}{bc} - 1 \right) \right) \\
&= b^{m-l} c^{m-l} (bc - ad)^{l-m} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l+m, l+m+1 \\ m+n+1 \end{matrix}; \frac{ad}{ad-bc} \right).
\end{aligned}$$

Hieruit volgt dat we (4.17) kunnen omschrijven tot:

$$(t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}) = \left(\frac{(l+m)!(l+n)!}{(l-n)!(l-m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{c^{m-n} d^{m+n} (bc - ad)^{l-m}}{(m+n)!} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -l+m, l+m+1 \\ m+n+1 \end{matrix}; \frac{ad}{ad-bc} \right). \quad (4.18)$$

Uit de definitie van Jacobi polynomen, (3.9), volgt

$$\begin{aligned}
& {}_2F_1\left(\begin{matrix} -l+m, l+m+1 \\ m+n+1 \end{matrix}; \frac{ad}{ad-bc}\right) \\
&= \frac{(l-m)!}{(m+n+1)_{l-m}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} -(l-m), (l-m) + (m+n) + (m-n) + 1 \\ m+n+1 \end{matrix}; \frac{ad}{ad-bc}\right) \\
&= \frac{(l-m)!}{(m+n+1)_{l-m}} P_{l-m}^{(m+n, m-n)}\left(\frac{bc+ad}{bc-ad}\right) \\
&\stackrel{(3.2)}{=} \frac{(l-m)!(m+n)!}{(l+n)!} P_{l-m}^{(m+n, m-n)}\left(\frac{bc+ad}{bc-ad}\right)
\end{aligned}$$

Hiermee kunnen we (4.18) verder uitschrijven tot

$$t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!} \right)^{\frac{1}{2}} c^{m-n} d^{m+n} (bc-ad)^{l-m} P_{l-m}^{(m+n, m-n)}\left(\frac{bc+ad}{bc-ad}\right). \quad (4.19)$$

We bekijken (4.19) als $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SU(2)$. Uit (4.11) volgt dat we voor een element van $SU(2)$ het volgende kunnen schrijven:

$$\begin{pmatrix} \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta e^{-i\psi} \\ \cos \theta e^{i\psi} & \sin \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad \text{met } 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ en } \phi, \psi \in [0, 2\pi).$$

Voor $m \pm n \geq 0$ krijgen we dus

$$\begin{aligned}
t_{m,n}^l \begin{pmatrix} \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta e^{-i\psi} \\ \cos \theta e^{i\psi} & \sin \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix} &= (-1)^{l-m} \left(\frac{(l+m)!(l+n)!}{(l-n)!(l-m)!} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times e^{-i(m+n)\phi} e^{i(m-n)\psi} (\sin \theta)^{m+n} (\cos \theta)^{m-n} P_{l-m}^{(m+n, m-n)}(\cos 2\theta). \quad (4.20)
\end{aligned}$$

4.4 Orthogonaliteit van matrixelementen

We definiëren een speciale Borel maat μ op $SU(2)$ als volgt

$$\int_{SU(2)} f d\mu = \frac{1}{2\pi^2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} f \begin{pmatrix} \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta e^{-i\psi} \\ \cos \theta e^{i\psi} & \sin \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix} \sin \theta \cos \theta d\theta d\psi d\phi \quad (4.21)$$

voor alle continue functies f op $SU(2)$. Uit $\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2}$ volgt

$$\int_{SU(2)} d\mu = 1 \quad (4.22)$$

Propositie 4.11.

$$\int_{SU(2)} t_{m,n}^l \overline{t_{m',n'}^{l'}} d\mu = \frac{1}{2l+1} \delta_{l,l'} \delta_{m,m'} \delta_{n,n'} \quad (4.23)$$

Bewijs. Voor $(m, n) = (m', n')$ moeten we laten zien dat

$$\begin{aligned}
& \frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!} \int_0^{\pi/2} P_{l-m}^{(m+n, m-n)}(\cos 2\theta) P_{l-m}^{(m+n, m-n)}(\cos 2\theta) (\sin \theta)^{2m+2n+1} (\cos \theta)^{2m-2n+1} d\theta \\
&= \frac{1}{2} \frac{\delta_{l,l'}}{2l+1}.
\end{aligned}$$

In de linkerkant substitueren we $x = \cos 2\theta$ en kunnen dit dan omschrijven tot

$$\frac{1}{2} \frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!2^{2m+1}} \int_{-1}^1 P_{l-m}^{(m+n, m-n)}(x) P_{l'-m}^{(m+n, m-n)}(x) (1-x)^{m+n} (1+x)^{m-n} dx. \quad (4.24)$$

Uit stelling 3.13 volgt nu

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!2^{2m+1}} \delta_{l,l'} h_{l-m}^{(m+n, m-n)} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!2^{2m+1}} \delta_{l,l'} \frac{2^{2m+1} (l+m+1)_{l-m} \Gamma(l+n+1) \Gamma(l-n+1)}{(l-m)! \Gamma(2l+2)} \\ &\stackrel{(3.6)}{=} \frac{1}{2} \frac{(l+m)!(l+m+1)_{l-m}}{(2l+1)!} \delta_{l,l'} \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \frac{1}{2} \frac{\delta_{l,l'}}{2l+1} \end{aligned}$$

en dus geldt

$$\int_{SU(2)} t_{m,n}^l \overline{t_{m',n'}^{l'}} d\mu = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \frac{\delta_{l,l'}}{2l+1} d\psi d\phi = \frac{\delta_{l,l'}}{2l+1}.$$

We nemen nu aan dat $(m, n) \neq (m', n')$. Met behulp van (4.9) volgt

$$\overline{t_{m',n'}^{l'} \begin{pmatrix} \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta e^{-i\psi} \\ \cos \theta e^{i\psi} & \sin \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}} = t_{-m', -n'}^{l'} \begin{pmatrix} \sin \theta e^{i\phi} & \cos \theta e^{-i\psi} \\ -\cos \theta e^{i\psi} & \sin \theta e^{-i\phi} \end{pmatrix}.$$

Dan volgt nu, gebruikmakend van (4.20) en (4.21), dat

$$\int_{SU(2)} t_{m,n}^l \overline{t_{m',n'}^{l'}} d\mu = \int_{\phi=0}^{2\pi} e^{-i(m+n-(m'+n'))\phi} \int_{\psi=0}^{2\pi} e^{i(m-n-(m'-n'))\psi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} f(\theta) d\theta d\psi d\phi.$$

Uit $(m, n) \neq (m', n')$ volgt $m+n-(m'+n') \neq 0$ of $m-n-(m'-n') \neq 0$.

Als $m+n-(m'+n') \neq 0$ dan geldt dat $\int_0^{2\pi} e^{-i(m+n-(m'+n'))\phi} d\phi = 0$ en als $m-n-(m'-n') \neq 0$ dan geldt $\int_0^{2\pi} e^{i(m-n-(m'-n'))\psi} d\psi = 0$.

Hieruit volgt dat $\int_{SU(2)} t_{m,n}^l \overline{t_{m',n'}^{l'}} d\mu = 0$ als $(m, n) \neq (m', n')$. $\square$

Propositie 4.12. *De matrixelementen $t_{m,n}^l$ ($l \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{\geq 0}$, $m, n \in \{-l, l+1, \dots, l\}$) vormen een volledig orthogonaal stelsel in $L^2(SU(2), d\mu)$.*

Bewijs. De orthogonaliteit van de matrixelementen volgt uit propositie 4.11. We moeten dus de volledigheid bewijzen. Uit (4.19), de symmetrieën (4.8)-(4.10) en uit lemma 3.17 volgt voor $m, n \in \{-l, l+1, \dots, l\}$ zodanig dat $m \pm n \geq 0$ en voor $a, c \in \mathbb{C}$:

$$\left. \begin{aligned} t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} &= c^{m-n} \bar{a}^{m+n} \\ t_{n,m}^l \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} &= (-\bar{c})^{m-n} \bar{a}^{m+n} \\ t_{-m,-n}^l \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} &= (-\bar{c})^{m-n} a^{m+n} \\ t_{-n,-m}^l \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} &= c^{m-n} a^{m+n} \end{aligned} \right\} \\ \times \left(\frac{(l+m)!(l-m)!}{(l+n)!(l-n)!} \right)^{\frac{1}{2}} (|a|^2 + |c|^2)^{l-m} P_{l-m}^{(m-n, m+n)} \left(\frac{|a|^2 - |c|^2}{|a|^2 + |c|^2} \right). \quad (4.25)$$

Dit geeft ons alle matrixelementen van t^l . Ze zijn homogeen van graad $2l$ in $a, \bar{a}, c, \bar{c}$. Nemen we $|a|^2 + |c|^2 = 1$ dan beperken we ons tot $SU(2)$. Het maakt voor de beperking niet uit als we in (4.25) de factor $(|a|^2 + |c|^2)^{l-m}$ vervangen door $(|a|^2 + |c|^2)^{r-m}$ met $r - l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. We krijgen dan polynomen van graad $2r$ in $a, \bar{a}, c, \bar{c}$. De functies die we verkrijgen door $(|a|^2 + |c|^2)^{l-m}$ te vervangen met $(|a|^2 + |c|^2)^{r-m}$, r vast, $0 \leq l \in \{r, r-1, \dots\}$, $m, n \in \{-l, -l+1, \dots, l\}$, $m \pm n \geq 0$, vormen een basis voor alle homogene polynomen van graad $2r$ in $a, \bar{a}, c, \bar{c}$ (Dit volgt door de dimensie te tellen). Hieruit volgt dat de span van de matrixelementen $t_{m,n}^l$ als functies van $\begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix} \in SU(2)$ ($|a|^2 + |c|^2 = 1$), gelijk is aan de verzameling van polynomen in vier reële variabelen $\text{Re}(a), \text{Im}(a), \text{Re}(c), \text{Im}(c)$, beperkt tot $|a|^2 + |c|^2 = 1$. We weten dat $SU(2)$ compact is. Uit Stone-Weierstrass volgt dat voor een compacte deelverzameling X van $\mathbb{R}^n$, de verzameling van polynomen op $\mathbb{R}^n$ beperkt tot X , dicht ligt in $C(X)$ ten opzichte van de sup-norm. Als μ een eindige Borel maat is op X , dan ligt de verzameling polynomen ook dicht in $C(X)$ ten opzichte van de norm $L^2(X, \mu)$. Verder volgt dat $C(X, \mu)$ dicht ligt in $L^2(X, \mu)$, zie [3, Theorem 3.14]. Dus de $t_{m,n}^l$ spannen een dichte deelverzameling van $C(SU(2))$ op ten opzichte van de sup-norm en dus spannen ze een dichte deelverzameling van $L^2(SU(2), d\mu)$ op. $\square$

4.5 Schurs orthogonaliteitsrelaties

In deze paragraaf gaan we laten zien dat de orthogonaliteitsrelaties in propositie 4.11 een speciaal geval is van Schurs orthogonaliteitsrelaties voor matrixelementen van irreducibele unitaire representaties van compacte groepen. Voordat we de stelling kunnen geven hebben we wat kennis nodig over de Haar maat.

Stelling 4.13. *Zij G een compacte groep. Er bestaat een unieke Borel maat μ op G , genaamd Haar maat, zodanig dat $\mu(G)=1$ en, voor alle Borel verzamelingen $E \subset G$ en voor alle $g \in G$, $\mu(gE) = \mu(E)$. Deze maat voldoet dan ook aan $\mu(E) = \mu(Eg)$. Oftewel*

$$\int_G f(hg) d\mu(g) = \int_G f(g) d\mu(g) = \int_G f(gh) d\mu(g) \quad (h \in G). \quad (4.26)$$

We zullen geen bewijs geven voor deze stelling. Voor meer informatie over het concept van Haar maat zie [3, §5.12-5.14].

We laten zien dat μ op $SU(2)$ die we in (4.21) gedefinieerd hebben gelijk is aan de Haar maat. Uit (4.11) weten we dat $SU(2)$ homeomorf is met $S^3 = \{(a, c) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 + |c|^2 = 1\}$. Zij $A \in SU(2)$. Links vermenigvuldiging $T \mapsto AT : SU(2) \rightarrow SU(2)$ correspondeert met een rotatie in S^3 . Als we een rotatie invariante maat op S^3 nemen, krijgen we, na een bepaalde normalisatie, de Haar maat op $SU(2)$. Er bestaat een, op een constante factor na, unieke rotatie invariante maat ω op S^3 : deze maat is zodanig dat voor alle continue functies f op $\mathbb{R}^4$ met $\{x \in \mathbb{R}^4 : f(x) \neq 0\}$ compact en met λ , de Lebesgue maat op $\mathbb{R}^4$ geldt

$$\int_{\mathbb{R}^4} f d\lambda = \int_{r=0}^{\infty} \int_{\xi \in S^3} f(r\xi) r^3 d\omega(\xi) dr. \quad (4.27)$$

We nemen de volgende coördinaten op $\mathbb{R}^4$

$$x = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta \cos \psi, r \cos \theta \sin \psi).$$

Voor $r = 1$ geldt $x_1 + ix_2 = \sin \theta e^{i\phi}$, $x_3 + ix_4 = \cos \theta e^{i\psi}$. Dit zijn de coördinaten die we in (4.21) hebben gekozen voor $(a, c) \in \mathbb{C}^2$ met $|a|^2 + |c|^2 = 1$. De Jacobiaan voor de transformatie

op deze coördinaten is gelijk aan $r^3 \sin \theta \cos \theta$. We krijgen dus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^4} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \\ = \int_{r=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta \cos \psi, r \cos \theta \sin \psi) \\ \times r^3 \sin \theta \cos \theta d\theta d\psi d\phi dr \end{aligned} \quad (4.28)$$

Vergelijken we (4.27) en (4.28) dan zien we dat voor continue functies F op $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ geldt

$$\int_{S^3} F d\omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{2\pi} F(\sin \theta e^{i\phi}, \cos \theta e^{i\psi}) \sin \theta \cos \theta d\theta d\psi d\phi \quad (4.29)$$

Hieruit volgt dus dat de Haar maat op $SU(2)$ gegeven wordt door (4.21).

Voordat we Schurs orthogonaliteitsrelaties kunnen bewijzen hebben we Schurs lemma nodig.

Lemma 4.14 (Schur). *Zij G een groep, en zij π, ρ irreducibele representaties van G op eindig dimensionaal complexe lineaire ruimten V , respectievelijk W .*

a) *Zij $A : V \rightarrow W$ een lineaire afbeelding zodanig dat*

$$A\pi(g) = \rho(g)A \quad \forall g \in G. \quad (4.30)$$

Dan geldt A is bijectief of $A = 0$. Als A bijectief is noemen we π en ρ equivalent.

b) *Zij $A : V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding zodanig dat $A\pi(g) = \pi(g)A$ voor alle $g \in G$. Dan geldt $A = \lambda I$ voor zekere $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Bewijs. a) We bewijzen eerst dat $\ker A$ π -invariant is en dat $\text{Im } A$ ρ -invariant is. Zij $v \in \ker A$ willekeurig. Dan geldt voor elke $g \in G$ dat $A\pi(g)(v) = \rho(g)A(v) = \rho(g)(0) = 0$ en dus $\pi(g)v \in \ker A$. Hieruit volgt $\pi(g)v \in \ker A \subset \ker A$ voor alle $g \in G$: $\ker A$ is π -invariant. Zij $v' \in V$ willekeurig. (Dus $A(v') \in \text{Im } A$). Dan geldt $\rho(g)A(v') = A\pi(g)(v') \in \text{Im } A$. Hieruit volgt $\rho(g)\text{Im } A \subset \text{Im } A$ voor alle $g \in G$: $\text{Im } A$ is ρ -invariant. Stel $A \neq 0$. Hieruit volgt $\ker A \neq V$. Omdat $\ker A$ π -invariant is en π een irreducibele representatie is volgt $\ker A = \{0\}$. Dus A is injectief. Stel nu dat A niet surjectief is: $\text{Im } A \neq W$. Omdat $\text{Im } A$ ρ -invariant is en ρ een irreducibele representatie is volgt $\text{Im } A = \{0\}$. Dit is in tegenspraak met $\ker A = \{0\}$. Dus A surjectief. Hieruit volgt dat als $a \neq 0$ dat A bijectief is.

b) Omdat V een complexe vectorruimte is volgt dat A minstens één eigenwaarde, zeg λ , heeft. Zij $B = A - \lambda I$. Omdat λ een eigenwaarde is van A volgt $\ker B = \ker(A - \lambda I) \neq 0$. Nu volgt voor elke $g \in G$:

$$\pi(g)B = \pi(g)(A - \lambda I) = \pi(g)(A) - \pi(g)(\lambda I) = A\pi(g) - (\lambda I)\pi(g) = (A - \lambda I)\pi(g) = B\pi(g)$$

Dus B voldoet aan (4.30). Omdat $\ker B \neq \{0\}$ volgt dat B geen bijectie is en dus volgt uit a) $B = 0$. Hieruit volgt $A - \lambda I = 0 \Rightarrow A = \lambda I$.

□

We zijn nu in staat om Schurs orthogonaliteitsrelaties te bewijzen.

Stelling 4.15 (Schurs orthogonaliteitsrelaties). *Zij G een compacte groep met genormaliseerd Haar maat μ . Zij π en ρ irreducibele unitaire representaties van G op eindig dimensionaal complexe vectorruimten V , respectievelijk W die inequivalent zijn. Zij $(\pi_{i,j})_{i,j=0,\dots,d_\pi}$ en $(\rho_{k,l})_{k,l=0,\dots,d_\rho}$ de matrices van π en ρ ten opzichte van een orthonormale basis van hun representatieruimten. Dan geldt*

$$\int_G \pi_{i,j} \overline{\rho_{l,k}(g)} d\mu(g) = 0$$

en

$$\int_G \pi_{i,j} \overline{\pi_{l,k}(g)} d\mu(g) = \frac{1}{d_\pi} \delta_{i,l} \delta_{j,k}$$

Bewijs. Zij $B(W, V)$ de (eindig dimensionale) complexe vectorruimte van lineaire operatoren tussen W en V . Zij $T \in B(W, V)$ willekeurig en bekijk de afbeelding $G \rightarrow B(W, V)$ gegeven door $g \mapsto \pi(g)T\rho(g^{-1})$. Dit is een functie op G die continue operatoren als waarde heeft en dus is $\int_G \pi(g)T\rho(g^{-1})d\mu(g)$ ook een operator in $B(W, V)$. Voor $h \in G$ geldt

$$\begin{aligned} \pi(h) \left(\int_G \pi(g)T\rho(g^{-1})d\mu(g) \right) \rho(h)^{-1} &= \int_G \pi(h)\pi(g)T\rho(g^{-1})\rho(h)^{-1}d\mu(g) \\ &= \int_G \pi(hg)T\rho(hg)^{-1}d\mu(g) \\ &= \int_G \pi(g)T\rho(g)^{-1}d\mu(g) \end{aligned}$$

waarbij we gebruik maken van de rechts en links invariantie van de Haar maat. Noem $T_0 = \int_G \pi(g)T\rho(g)^{-1}d\mu(g)$. Voor elke $g \in G$ geldt nu $\pi(g)T_0 = T_0\rho(g)$. Dus T_0 is een lineaire afbeelding die aan (4.30) voldoet. Omdat π en ρ inequivalent zijn volgt uit Schurs lemma dat $T_0 = 0$. Dus $\int_G \pi(g)T\rho(g)^{-1}d\mu(g) = 0$ waarbij T willekeurig is. Zij $T = (t_{j,k})$. Dan geldt $(\pi(g)T\rho(g)^{-1})_{i,l} = \sum_{j,k} \pi_{i,j}(g)t_{j,k}\rho_{k,l}(g)^{-1}$. Omdat $T = (t_{j,k})$ willekeurig is krijgen we $\int_G \pi_{i,j}(g)\rho_{k,l}(g)^{-1}d\mu(g) = 0$ voor alle $i, j = 1, \dots, d_\pi$ en $k, l = 1, \dots, d_\rho$. Omdat ρ een unitair representatie is, geldt $\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1} = \rho(g)^*$ en dus geldt

$$\int_G \pi_{i,j}(g)\overline{\rho_{l,k}(g)}d\mu(g) = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, d_\pi, k, l = 1, \dots, d_\rho.$$

Zij nu $\rho := \pi$ (dus ρ en π zijn niet meer inequivalent). Dan volgt uit Schurs lemma dat T_0 een scalair veelvoud is van de identiteitsmatrix. Dus $\int_G \pi(g)T\pi(g)^{-1}d\mu(g) = \lambda(T)I$. We nemen aan beide kanten het spoor van de matrices:

$$\text{tr} \left(\int_G \pi(g)T\pi(g)^{-1}d\mu(g) \right) = \int_G \text{tr}(\pi(g)T\pi(g)^{-1})d\mu(g) = \int_G \text{tr}(T)d\mu(g) = \text{tr}(T),$$

en

$$\text{tr}(\lambda(T)I) = \lambda(T)d_\pi.$$

Hieruit volgt $\lambda(T) = \frac{\text{tr}(T)}{d_\pi}$ en dus $\int_G \pi(g)T\pi(g)^{-1}d\mu(g) = \frac{\text{tr}(T)}{d_\pi}I$. Op dezelfde manier als hierboven volgt

$$\int_G \pi_{i,j}(g)\overline{\pi_{l,k}(g)}d\mu(g) = 0 \quad i \neq l, j \neq k.$$

Nemen we nu T een diagonaalmatrix met één 1 op de diagonaal en de rest allemaal nullen, dan krijgen we

$$\int_G \pi_{i,j}(g)\overline{\pi_{i,j}(g)}d\mu(g) = \frac{\text{tr}(T)}{d_\pi},$$

en dus

$$\int_G \pi_{i,j}(g) \overline{\pi_{l,k}(g)} d\mu(g) = \frac{1}{d_\pi} \delta_{i,l} \delta_{j,k}.$$

□

Zij $(\pi^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ een aftelbare verzameling van eindig dimensionaal complexe irreducibele unitaire representaties die onderling inequivalent zijn. Dan kunnen we de orthogonaliteit in stelling 4.15 als volgt opschrijven:

$$\int_G \pi_{i,j}^\alpha(g) \overline{\pi_{k,l}^\beta(g)} d\mu(g) = \frac{1}{d_\alpha} \delta_{\alpha,\beta} \delta_{i,k} \delta_{j,l} \quad (4.31)$$

waarbij $d_\alpha := d_{\pi^\alpha}$. Omdat de $(\pi^\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}}$ representaties zijn op eindig dimensionale vectorruimten en lineair zijn volgt dat ze continu zijn op G . Uit opmerking 4.5 volgt dan dat $\pi_{i,j}^\alpha$ ook continu zijn in G en zitten dus ook in $L^2(G, \mu)$ (met μ de Haar maat). Uit (4.31) volgt dat de functies $d_\alpha^{\frac{1}{2}} \pi_{i,j}^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{N}$, $i, j = 1, \dots, d_\alpha$) een orthonormale stelsel vormen in $L^2(G, \mu)$. Het is mogelijk om te laten zien dat dit orthonormale stelsel volledig is. Voor $SU(2)$ volgt volledigheid uit propositie 4.12.

4.6 Irreducibiliteit van $SU(2)$ representaties

Bekijken we propositie 4.11 nogmaals en vergelijken we het met (4.31), dan zien we dat het inderdaad erop lijkt dat de orthogonaliteit van de matrixelementen van de representaties van $SU(2)$ een special geval is van Schurs orthogonaliteitsrelaties. We hebben al laten zien dat $SU(2)$ een compacte groep is, de representaties van $SU(2)$ (die op een eindig dimensionaal complexe vectorruimte werken) unitair zijn en dat de Haar maat op $SU(2)$ gegeven wordt door (4.21). We moeten nog alleen laten zien dat de representaties t^l ook irreducibel zijn.

Noem $a_\phi := \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}$. Dan volgt uit simpele matrixvermenigvuldiging dat $a_\phi a_\psi = a_{\phi+\psi}$ en $a_{\phi+2\pi} = a_\phi$. Omdat $e^{i\phi} e^{-i\phi} = e^{i\phi} \overline{e^{i\phi}} = 1$ volgt dat $A := \{a_\phi : 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$ een gesloten abelse ondergroep is van $SU(2)$ en dat A homeomorf is met $U(1)$, de groep van complexe getallen met modulus gelijk aan 1. Uit (4.1) en (4.4) volgt nu

$$t^l(a_\phi) \psi_n^l(z_1, z_2) = \binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} (e^{i\phi} z_1)^{l-n} (e^{-i\phi} z_2)^{l+n} = e^{-2in\phi} \psi_n^l(z_1, z_2). \quad (4.32)$$

Lemma 4.16. *Zij V een invariante deelruimte van $\mathcal{H}_l$ ten opzichte van de representatie π^l van $SU(2)$. Als $v \in V$ en $\langle v, \psi_m^l \rangle \neq 0$ dan $\psi_m^l \in V$.*

Bewijs. Er geldt

$$v = \sum_{n=-l}^l \langle v, \psi_n^l \rangle \psi_n^l.$$

We krijgen dan

$$t^l(a_\phi) v = \sum_{n=-l}^l \langle v, \psi_n^l \rangle t^l(a_\phi) \psi_n^l = \sum_{n=-l}^l \langle v, \psi_n^l \rangle e^{-2in\phi} \psi_n^l.$$

Hieruit volgt

$$\int_0^{2\pi} e^{2im\phi} t^l(a_\phi) v d\phi = \sum_{n=-l}^l \langle v, \psi_n^l \rangle \left(\int_0^{2\pi} e^{2im\phi} e^{-2in\phi} d\phi \right) \psi_n^l = 2\pi \langle v, \psi_m^l \rangle \psi_m^l.$$

de linkerintegraal is een Riemann integraal voor vectoren, die we kunnen benaderen met Riemann som van vectoren. Omdat $v \in V$ geldt dat elke benaderende Riemann som in V zit. Omdat V een deelruimte is van een eindig dimensionaal vectorruimte en dus gesloten is volgt dat ook hun limiet, de Riemann integraal, in V zit. Hieruit volgt $2\pi\langle v, \psi_m^l \rangle \psi_m^l \in V$. Dus als $\langle v, \psi_m^l \rangle \neq 0$ dan $\psi_m^l \in V$. $\square$

Met behulp van dit lemma krijgen we de volgende propositie.

Propositie 4.17. *Zij V een invariante deelruimte van $\mathcal{H}_l$ ten opzichte van de representatie π^l van $SU(2)$. Dan is er een deelverzameling A van $\{-l, \dots, l\}$ zodanig dat $V = \text{Span}\{\psi_n^l : n \in A\}$. Zij W de orthoplement van V en B de complement van A . Dan is W ook een invariante deelruimte en $W = \text{Span}\{\psi_n^l : n \in B\}$.*

Bewijs. Dat er een deelverzameling A van $\{-l, \dots, l\}$ bestaat zodanig dat $V = \text{Span}\{\psi_n^l : n \in A\}$ volgt uit het feit dat de ψ_i^l , $i = -l, \dots, l$, een orthonormale basis vormen voor $\mathcal{H}_l$ en lemma 4.16. Omdat $\mathcal{H}_l$ een eindig dimensionaal vectorruimte is, en dus V ook, volgt $\mathcal{H}_l = V \oplus V^\perp = V \oplus W$. Dus $W = \text{Span}\{\psi_n^l : n \in \{-l, \dots, l\} \setminus A = B\}$. De invariantie van W volgt uit propositie 4.8. $\square$

We zijn nu in staat om de irreducibiliteit van de representatie op $SU(2)$ te bewijzen.

Stelling 4.18. *De representatie, t^l , van $SU(2)$ is irreducibel.*

Bewijs. Stel dat t^l niet irreducibel is. Uit propositie 4.17 volgt dat $\mathcal{H}_l$ de orthogonaal directe som is van invariante deelruimten $V = \text{Span}\{\psi_n^l : n \in A\}$ en $W = \text{Span}\{\psi_n^l : n \in B\}$ met $W = V^\perp$, waarbij $\{-l, \dots, l\}$ de disjuncte vereniging is van niet-lege verzamelingen A en B . Dan zit l in één van deze twee verzamelingen. Stel $l \in A$ ($l \in B$ geeft dezelfde redenering). Dan bestaat er een $m \neq l$ in B . Verder geldt $t^l(T)\psi_l^l \in V$ voor alle $T \in SU(2)$, en is dus orthogonaal met ψ_m^l . Omdat $t^l(T)\psi_l^l = \sum_{k=-l}^l t_{k,l}^l(T)\psi_k^l$ volgt dan $t_{m,l}^l(T) = 0$ voor alle $T \in SU(2)$. Gebruikmakend van (4.6), krijgen we

$$0 = t_{m,l}^l \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} = (-1)^{l-m} (\cos \theta)^{l-m} (\sin \theta)^{l+m}.$$

Dit geeft ons dus een tegenspraak. $\square$

5 Representaties van de Lie algebra $\mathfrak{su}(2)$

In dit hoofdstuk zullen we laten zien dat $SU(2)$ een matrix Lie groep is en zullen ook de bijbehorende Lie algebra geven. Via deze Lie algebra leiden we een aantal eigenschappen van de Jacobi polynomen af. Daarna bespreken we nog de Casimir operator.

5.1 Representaties van matrix Lie groepen

Zij G een Lie groep. Zij π een representatie van G op een eindig dimensionale complexe vectorruimte. Omdat G een Lie groep is, is het ook een C^∞ -variëteit. Omdat we de C^∞ -variëteit structuur willen behouden, willen we dat π een C^∞ -homomorfisme is en dus dat de matrixelementen $\pi_{i,j} : G \rightarrow \mathbb{C}$ C^∞ -functies zijn. Dus een representatie $\pi : G \rightarrow GL(V)$ van een Lie groep G op een eindig dimensionaal complexe vectorruimte V is een C^∞ -groepshomomorfisme.

Definitie 5.1. Een representatie van een Lie algebra $\mathfrak{g}$ op een eindig dimensionale complexe vectorruimte V is een Lie algebra homomorfisme $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$. Hierbij is $\mathfrak{gl}(V)$ de Lie algebra van endomorfismen op V met de commutator als Lie haakje. Oftewel

$$\rho([A, B]) = [\rho(A), \rho(B)] = \rho(A)\rho(B) - \rho(B)\rho(A), \quad A, B \in \mathfrak{g}.$$

Stelling 5.2. Zij G een matrix Lie groep met Lie algebra $\mathfrak{g}(= T_I G)$ en zij $\pi : G \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ een C^∞ -representatie van G op $\mathbb{C}^n$. Definieer de reële lineaire afbeelding $d\pi : \mathfrak{g} \rightarrow M_n(\mathbb{C})$ door

$$d\pi(A) := A(x \mapsto \pi(x)), \quad \text{d.w.z.} \quad (d\pi(A))_{i,j} := A(x \mapsto \pi_{i,j}(x)) \quad (A \in \mathfrak{g}),$$

waarbij A zoals in (2.10). Dan is $d\pi$ een Lie algebra representatie van $\mathfrak{g}$ en voor $A \in \mathfrak{g}$ geldt

$$\exp(d\pi(A)) = \pi(\exp A), \quad (5.1)$$

$$d\pi(A) = \left. \frac{d}{dt} \pi(\exp(tA)) \right|_{t=0}. \quad (5.2)$$

Bewijs. Merk op dat $M_n(\mathbb{C})$ isomorf is met $\text{End}(\mathbb{C}^n)$. We kunnen de gedefinieerde representatie op de Lie algebra beschouwen als een afbeelding $\mathfrak{g} \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n)$.

Product nemen in $\mathfrak{g} = T_I G$ is gedefinieerd als het Lie-haakje: $[A, B] = AB - BA$. We moeten dus laten zien dat $d\pi([A, B]) = [d\pi(A), d\pi(B)] = d\pi(A)d\pi(B) - d\pi(B)d\pi(A)$. Er geldt

$$\begin{aligned} d\pi([A, B]) &= d\pi(AB - BA) \\ &= (AB - BA)(x \mapsto \pi(x)) \\ &= (AB)(x \mapsto \pi(x)) - (BA)(x \mapsto \pi(x)) \\ &= A(x \mapsto \pi(x))B(x \mapsto \pi(x)) - B(x \mapsto \pi(x))A(x \mapsto \pi(x)) \\ &= d\pi(A)d\pi(B) - d\pi(B)d\pi(A) \\ &= [d\pi(A), d\pi(B)] \end{aligned}$$

hieruit volgt dat $d\pi$ een homomorfisme is en dus een representatie.

(5.2) volgt direct uit (2.10) waarbij we de exponentiële functie als representant gebruiken van de equivalentieklasse van krommen die in $t = 0$ door I gaan en afgeleide A hebben. Voor (5.1) zie [5, proposition 4.4] $\square$

Gevolg 5.3. Onder dezelfde voorwaarden als in stelling 5.2 en met X_A de links invariante vectorveld op G , zoals in (2.11), krijgen we:

$$X_A \pi_{i,j} = \sum_{k=1}^n (d\pi(A))_{k,j} \pi_{i,k} \quad (A \in \mathfrak{g}). \quad (5.3)$$

Bewijs. Er geldt

$$\pi(gh) = \pi(g)\pi(h) = \left(\sum_{k=1}^n \pi_{i,k}(g)\pi_{k,j}(h) \right)_{i,j=1,\dots,n}.$$

Hiermee krijgen we

$$\pi_{i,j}(gh) = \sum_{k=1}^n \pi_{k,j}(h)\pi_{i,k}(g) \quad \Rightarrow$$

$$A(h \mapsto \pi_{i,j}(gh)) = \sum_{k=1}^n A(h \mapsto \pi_{k,j}(h)\pi_{i,k}(g)) \quad \Rightarrow$$

$$(X_A \pi_{i,j})(g) = \sum_{k=1}^n (d\pi(A))_{k,j} \pi_{i,k}(g)$$

□

We gaan nu laten zien dat $SU(n)$ een Lie groep is en dat de bijbehorende Lie algebra gelijk is aan $su(n)$: de reële lineaire deelruimte van $M_n(\mathbb{C})$ bestaande uit alle scheef Hermitische matrices (d.w.z. $A + A^* = 0$) met spoor 0.

$SU(n)$ is de groep van unitaire matrices ($TT^* = I$) met determinant 1 en is dus een ondergroep van $GL(n, \mathbb{C})$. Zij U en V open verzamelingen zoals in f) op bladzijde 8 en neem aan dat $|\text{tr } A| < \pi$ als $A \in U$. Noem $U^* = \{T^* : T \in U\}$ en $-U = \{-T : T \in U\}$. Vervang U door $U_0 := U \cap U^* \cap (-U) \cap (-U^*)$ en V door $V_0 := \exp(U_0)$. Dan geldt dat U_0 ook een open omgeving van 0 is in $M_n(\mathbb{C})$ en dat het gesloten is onder het nemen van geadjungeerde en het vermenigvuldigen met -1 .

Als $A \in su(n) \cap U_0$ dan geldt $(\exp A)^* = \exp(A^*) = \exp(-A) = (\exp A)^{-1}$. Ook geldt $\det(\exp A) = e^{\text{tr } A} = 1$, want $\text{tr } A = 0$. Dus $\exp A \in SU(n) \cap V_0$.

Als $T \in SU(n) \cap V_0$ dan geldt $T = \exp A$ voor een zekere $A \in U_0$ en dus $(\exp A)^* = (\exp A)^{-1}$. Hieruit volgt $\exp(A^*) = \exp(-A)$. Omdat $A^*, -A \in U_0$ en omdat $\exp$ injectief is op U_0 volgt $A^* = -A$. Verder geldt $\det(T) = \det(\exp(A)) = 1$ en $|\text{tr } A| < \pi$ en dus $\text{tr } A = 0$. Dus volgt $A \in su(n) \cap U_0$.

We voldoen nu aan de voorwaarde van stelling 2.15 en dus volgt dat $SU(n)$ een matrix Lie groep is met Lie algebra $su(n)$. Hieruit volgt dus ook dat $SU(2)$ een matrix Lie groep is met Lie algebra $su(2)$. Dit geeft ons de mogelijkheid om via stelling 5.2 de representaties van $su(2)$ te bepalen.

5.2 Representaties van $su(2)$

De Lie algebra $su(2)$ bestaat uit alle 2×2 matrices A met $A + A^* = 0$ en $\text{tr } A = 0$. Zij $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in$

$su(2)$. Dan geldt dus $\begin{pmatrix} a + \bar{a} & b + \bar{c} \\ c + \bar{b} & d + \bar{d} \end{pmatrix} = 0$ en $a + d = 0$. Hieruit volgt $b = \bar{c}$, $d = \bar{a}$ en $a = -\bar{a}$.

Dus $su(2)$ bestaat uit alle matrices $\begin{pmatrix} it & -\bar{c} \\ c & -it \end{pmatrix}$ met $t \in \mathbb{R}$ en $c \in \mathbb{C}$. Het heeft reële dimensie 3.

We kiezen een basis, A, B, C , van $su(2)$ gegeven door

$$A := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \quad C := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Dan volgt uit simpele matrixvermenigvuldiging

$$[A, B] = C, \quad [B, C] = A, \quad [C, A] = B. \quad (5.5)$$

Nemen we de exponent van A, B, C dan krijgen we de volgende ondergroepen van $SU(2)$:

$$a_\theta := \exp(\theta A) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\theta & -\sin \frac{1}{2}\theta \\ \sin \frac{1}{2}\theta & \cos \frac{1}{2}\theta \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

$$b_\phi := \exp(\phi B) = \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{2}i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{2}i\phi} \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$c_\psi := \exp(\psi C) = \begin{pmatrix} \cos \frac{1}{2}\psi & i \sin \frac{1}{2}\psi \\ i \sin \frac{1}{2}\psi & \cos \frac{1}{2}\psi \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

We gaan de representatie dt^l van $su(2)$ berekenen, waarbij de representatie t^l van $SU(2)$ op $\mathcal{H}_l$ gedefinieerd wordt door (4.1). Dan geldt

$$(t^l(a_\theta)f)(z_1, z_2) = f(z_1 \cos \frac{1}{2}\theta + z_2 \sin \frac{1}{2}\theta, -z_1 \sin \frac{1}{2}\theta + z_2 \cos \frac{1}{2}\theta) \quad (f \in \mathcal{H}_l).$$

Met (5.6) en (5.2) krijgen we voor $f \in \mathcal{H}_l$:

$$\begin{aligned} (dt^l(A)f)(z_1, z_2) &= \left. \frac{d}{dt}(t^l(a_t)f)(z_1, z_2) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt}f\left(z_1 \cos \frac{1}{2}t + z_2 \sin \frac{1}{2}t, -z_1 \sin \frac{1}{2}t + z_2 \cos \frac{1}{2}t\right) \right|_{t=0} \\ &= f_1(z_1, z_2)\left(-\frac{1}{2}z_1 \sin \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}z_2 \cos \frac{1}{2}t\right) + f_2(z_1, z_2)\left(-\frac{1}{2}z_1 \cos \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}z_2 \sin \frac{1}{2}t\right) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2}z_2 f_1(z_1, z_2) - \frac{1}{2}z_1 f_2(z_1, z_2), \end{aligned}$$

waarbij we met f_1 de partiële afgeleide naar de eerste coördinaat bedoelen en met f_2 de partiële afgeleide naar de tweede coördinaat. Hieruit volgt

$$(dt^l(A)f)(z_1, z_2) = \frac{1}{2} \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) f(z_1, z_2). \quad (5.9)$$

Op dezelfde manier krijgen we uit (5.2), (5.7) en (5.8)

$$(dt^l(B)f)(z_1, z_2) = \frac{1}{2}i \left(z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} - z_2 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) f(z_1, z_2), \quad (5.10)$$

$$(dt^l(C)f)(z_1, z_2) = \frac{1}{2}i \left(z_2 \frac{\partial}{\partial z_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_2} \right) f(z_1, z_2). \quad (5.11)$$

We gaan nu bekijken hoe $dt^l(A)$, $dt^l(B)$ en $dt^l(C)$ werken op de orthonormale basisvectoren ψ_n^l van $\mathcal{H}_l$, gedefinieerd door (4.1). We substitueren $f := \psi_n^l$ in (5.9) en krijgen:

$$\begin{aligned} dt^l(A)\psi_n^l &= \frac{1}{2} \binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} (l-n) z_1^{l-(n+1)} z_2^{l+n+1} - \frac{1}{2} \binom{2l}{l-n}^{\frac{1}{2}} (l+n) z_1^{l-(n-1)} z_2^{l+n-1} \\ &= \frac{1}{2} (l-n)^{\frac{1}{2}} (l+n+1)^{\frac{1}{2}} \psi_{l+n}^l - \frac{1}{2} (l+n)^{\frac{1}{2}} (l-n+1)^{\frac{1}{2}} \psi_{n-1}^l \end{aligned} \quad (5.12)$$

Op dezelfde manier krijgen we uit (5.10) en (5.11):

$$dt^l(B)\psi_n^l = -ni\psi_n^l, \quad (5.13)$$

$$dt^l(C)\psi_n^l = \frac{1}{2}i(l-n)^{\frac{1}{2}}(l+n+1)^{\frac{1}{2}}\psi_{l+n}^l + \frac{i}{1}2(l+n)^{\frac{1}{2}}(l-n+1)^{\frac{1}{2}}\psi_{n-1}^l. \quad (5.14)$$

We zien dat $dt^l(B)$ diagonaal werkt op deze basis en dat $dt^l(\pm A - iC)$ als een ladder operator werkt:

$$dt^l(A - iC)\psi_n^l = (l-n)^{\frac{1}{2}}(l+n+1)^{\frac{1}{2}}\psi_{n+1}^l, \quad (5.15)$$

$$dt^l(-A - iC)\psi_n^l = (l+n)^{\frac{1}{2}}(l-n+1)^{\frac{1}{2}}\psi_{n-1}^l, \quad (5.16)$$

Merk op dat $\pm A - iC$ niet in de Lie algebra $su(2)$ zit maar ze zitten wel in zijn complexificatie, $sl(2, \mathbb{C})$, de Lie algebra van complexe 2×2 matrices met spoor 0, zie [4, §3.6]. Deze is, als vectorruimte, ook isomorf met $su(2)$. Voor $A \in sl(2, \mathbb{C})$ geldt $\det(\exp A) = e^{\text{tr } A} = 1$. Hieruit volgt $\exp A \in SL(2, \mathbb{C})$, de matrix Lie groep van complexe 2×2 matrices met determinant 1. Dus $sl(2, \mathbb{C})$ is de Lie algebra van $SL(2, \mathbb{C})$. (Dat $SL(2, \mathbb{C})$ een matrix Lie groep is volgt op een soortgelijke manier als $SU(2)$).

We hebben de representaties t^l gedefinieerd voor $GL(2, \mathbb{C})$, dus ook voor $SL(2, \mathbb{C})$. Hieruit volgt dat we stelling 5.2 kunnen gebruiken met $\pi = t^l$, $G = SL(2, \mathbb{C})$ en $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$. Er geldt:

$$\exp(t(A - iC)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \quad \exp(t(-A - iC)) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Uit gevolg 5.3 gecombineerd met (5.15) en (5.16) volgt

$$X_{A-iC}t_{m,n}^l = (l-n)^{\frac{1}{2}}(l+n+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t_{m,n+1}^l, \quad (5.18)$$

$$X_{-A-iC}t_{m,n}^l = (l+n)^{\frac{1}{2}}(l-n+1)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}t_{m,n-1}^l. \quad (5.19)$$

Zij $n \pm m \geq 0$ en $ad - bc = 1$. Uit (4.19), (4.8) en lemma 3.17 volgt

$$t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\frac{(l+n)!(l-n)!}{(l+m)!(l-m)!} \right)^{\frac{1}{2}} b^{n-m} d^{n+m} P_{l-n}^{(n-m, n+m)}(2ad - 1). \quad (5.20)$$

Uit $Af = \frac{d}{dt}f(\exp(tA)) \Big|_{t=0}$ en (2.11) volgt $X_A f(t) = \frac{d}{dt}f(T \exp(tA)) \Big|_{t=0}$. Dit gecombineerd met (5.17) geeft ons

$$X_{A-iC}t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a+bt & b \\ c+dt & d \end{pmatrix} \Big|_{t=0} \quad (5.21)$$

$$X_{-A-iC}t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}t_{m,n}^l \begin{pmatrix} a & b+at \\ c & d+ct \end{pmatrix} \Big|_{t=0}. \quad (5.22)$$

Gebruikmakend van (5.21) samen met (5.20) en (5.18) geeft

$$\begin{aligned} b^{n-m} d^{n+m} \frac{d}{dt} P_{l-n}^{(n-m, n+m)}(2(a+bt)d - 1) \Big|_{t=0} \\ = (l+n+1)b^{n-m+1}d^{n+m+1}P_{l-n-1}^{(n-m+1, n+m+1)}(2ad - 1). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Dit kunnen we omschrijven tot

$$\left. \frac{d}{dx} P_{l-n}^{(n-m, n+m)}(x) \right|_{x=2ad-1} = \frac{1}{2}(l+n+1)P_{l-n-1}^{(n-m+1, n+m+1)}(2ad-1).$$

Dus geldt

$$\frac{d}{dx} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2}(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x), \quad (5.24)$$

waarbij $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

Op dezelfde manier volgt uit (5.22), (5.17), (5.20) en (5.19)

$$\frac{d}{dx} \left((1-x)^\alpha (1+x)^\beta P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right) = -2(n+1)(1-x)^{\alpha-1} (1+x)^{\beta-1} P_{n+1}^{(\alpha-1, \beta-1)}(x) \quad (5.25)$$

We hebben dus met representatietheorie van $su(2)$ een bewijs gegeven voor de formules in (3.12) en (3.13).

5.3 De Casimir operator

In deze paragraaf willen we, via representatietheorie, de tweede orde differentiaal vergelijking voor Jacobi polynomen afleiden. Daarbij maken we gebruik van de Casimir operator. Zij A, B, C de basis van $su(2)$ die we in de vorige paragraaf hebben geïntroduceerd. We definiëren

$$\Omega := A^2 + B^2 + C^2 \quad (5.26)$$

waarbij we opmerken dat $A^2, B^2, C^2 \notin su(2)$. Uit matrixvermenigvuldiging volgt dat Ω commuteert met alle drie de basiselementen A, B, C . Hieruit volgt dat het met alle elementen van $su(2)$ commuteert. We noemen Ω het Casimir element.

Uit de commutativiteit volgt $A\Omega - \Omega A = 0$ voor alle $A \in su(2)$. Hieruit volgt

$$dt^l(A\Omega - \Omega A) = dt^l(A)dt^l(\Omega) - dt^l(i(\Omega))dt^l(A) = 0 \quad (A \in su(2)).$$

Nemen we de exponent dan volgt uit (5.1)

$$t^l(\exp A)dt^l(\Omega) = dt^l(\Omega)t^l(\exp A) \quad (A \in su(2)).$$

Omdat $A \in su(2)$ willekeurig, $\exp A \in SU(2)$ en $SU(2)$ compact en samenhangend is (want het is homeomorf met S^3) volgt

$$t^l(g)dt^l(\Omega) = dt^l(\Omega)t^l(g), \quad \forall g \in SU(2).$$

(zie [6, Chapter IV.2, Theorem 2.2]). Omdat t^l een irreducibele representatie is van $SU(2)$ op een eindig dimensionale complexe vectorruimte, volgt uit lemma van Schur dat $dt^l(\Omega) = \omega I$ voor zekere $\omega \in \mathbb{C}$.

We gaan $dt^l(\Omega)\psi_n^l$ uitrekenen voor alle basis elementen ψ_n^l van $\mathcal{H}_l$. We schrijven (5.26) om:

$$\begin{aligned} \Omega &= A^2 + C^2 + iB - iB + B^2 \\ &= A^2 + C^2 + i(AC + CA) - iB + B^2 \\ &= -(A - iC)(-A - iC) + B^2 - iB, \end{aligned}$$

waarbij we gebruik maken van (5.5). Nu volgt uit (5.13), (5.15) en (5.16)

$$\begin{aligned}
dt^l(\Omega)\psi_n^l &= -dt^l(A - iC)dt^l(-A - iC)\psi_n^l + (dt^l(B))^2\psi_n^l - i dt^l(B)\psi_n^l \\
&= -(l-n)^{\frac{1}{2}}(l+n+1)^{\frac{1}{2}}(dt^l(-A - iC)\psi_{n+1}^l) - i n dt^l(B)\psi_n^l - n\psi_n^l \\
&= -(l-n)(l+n+1)\psi_n^l - n^2\psi_n^l - n\psi_n^l \\
&= -l(l+1)\psi_n^l.
\end{aligned}$$

Dus geldt

$$dt^l(\Omega) = -l(l+1)I. \quad (5.27)$$

We definiëren de vectorveld van Ω op dezelfde manier als gevolg 5.3:

$$X_{\Omega}t_{i,j}^l := \sum_{k=-l}^l (dt^l(\Omega))_{k,j}\pi_{i,k}$$

(Merk op dat $\Omega \notin su(2)$, maar het commuteert met alle elementen van $su(2)$ en de bijbehorende differentiaaloperator commuteert met de differentiaaloperatoren van de elementen van $su(2)$).

We krijgen dus

$$X_{\Omega}t_{m,n}^l = \sum_{k=-l}^l (dt^l(\Omega))_{k,j}t_{i,k}^l \quad (5.28)$$

$$= -l(l+1)t_{m,n}^l. \quad (5.29)$$

Zij $n \pm m \geq 0$ en $ad-bc = 1$. We schrijven $t_{m,n}^l$ zoals in (5.20). Omdat $dt^l(B)$ diagonaal werkt op de basisvectoren van $\mathcal{H}_l$ en door (5.25) na (5.23) te nemen kunnen we (5.28) omschrijven tot

$$\begin{aligned}
(1-x)^{-n+m}(1+x)^{-n-m} \frac{d}{dx} \left((1-x)^{n-m+1}(1+x)^{n+m+1} \frac{d}{dx} P_{l-n}^{(n-m, n+m)}(x) \right) \\
- n(n+1)P_{l-n}^{(n-m, n+m)}(x) = -l(l+1)P_{l-n}^{(n-m, n+m)}(x).
\end{aligned}$$

Nemen we $\alpha = n-m, \beta = n+m$ en $k = l-n$ dan kunnen we, met behulp van de productregel, bovenstaande omschrijven tot

$$(1-x^2) \frac{d^2}{dx^2} P_k^{(\alpha, \beta)}(x) + (\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x) \frac{d}{dx} P_k^{(\alpha, \beta)}(x) - k(k + \alpha + \beta + 1) P_k^{(\alpha, \beta)}(x) = 0$$

$k, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$

We hebben dus een tweede orde differentiaalvergelijking voor Jacobi polynomen $P_k^{(\alpha, \beta)}$, (stelling 3.18), verkregen via representatietheorie van $SU(2)$.

Referenties

- [1] T. H. Koornwinder: notes for the MSc course *Special functions and Lie theory*, University of Amsterdam, 2008
- [2] G. E. Andrews, R. Askey end R. Roy, *Special functions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999
- [3] W. Rudin: *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, second ed., 1974
- [4] A.Baker: *Matrix groups. An introduction to Lie group theory*, Springer-Verlag, 2002
- [5] B. C. Hall: *Lie groups, Lie algebras, and representations. An elementary introduction*, Springer-Verlag, 2003
- [6] T. Bröcker en T. tom Diek: *Representations of compact Lie groups*, Springer-Verlag, New York, 1985