TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
AFDELING DER SCHEEPSBOUW- EN SCHEEPVAARTKUNDE
CENTRALE WERKGROEP WISKUNDE

Rapport No. **CWW-5**

BEREKENING VAN DIVERSE GROOTHEDEN VOOR EEN STATISCH ONBEPAALDE LIGGER VOLGENS DE METHODE VAN CLAPEYRON.

Beschrijving computer programma.

A.P.de Zwaan

mei 1974

Delft University of Technology
Ship Hydromechanics Laboratory
Mekelweg 2
Delft 2208
Netherlands

INHOUD

1. ALGEMEEN

1.1 Programma gegevens.

a) Taal: CPS/PL1
b) Geheugen: 2 pages
c) Rekentijd: 1 minuut
d) Naam van het programma: Clapey, ronap.

1.2 Doel.

In dit programma wordt van een drager, die ondersteund wordt op de volgende manieren:
a) In n punten opgelegd,
b) In n punten opgelegd en aan één zijde ingeklemd,
c) In n punten opgelegd en aan beide zijden ingeklemd,
berekend:
a) De steunpuntsmomenten,
b) De maximale of minimale veldmomenten en de plaats daarvan gemeten uit het rechter steunpunt,
c) De steunpuntsreakties.
De belasting van de balk kan zijn als volgt:
a) Een gelijkmatige belasting,
b) Puntlasten,
c) Een gelijkmatige belasting + puntlasten.

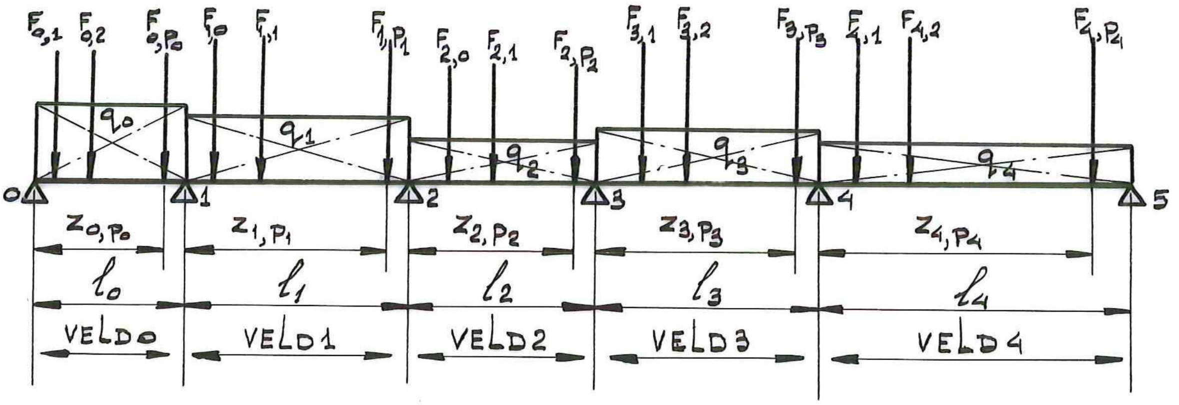
1.3 Opzet.

In het programma wordt een speciale numerieke methode gebruikt voor het oplossen van n-vergelijkingen met n-onbekenden.
Deze numerieke methode heet de L.U.-decompositie (zie Appendix I).

2. ORGANISATIE VAN HET PROGRAMMA.

2.1 Formules.

Voor de eenvoud wordt er uitgegaan van een balk die in 6 punten is opgelegd; vervolgens wordt gekeken naar een balk die in n-punten is opgelegd.



Figuur 1. Balkbelasting.

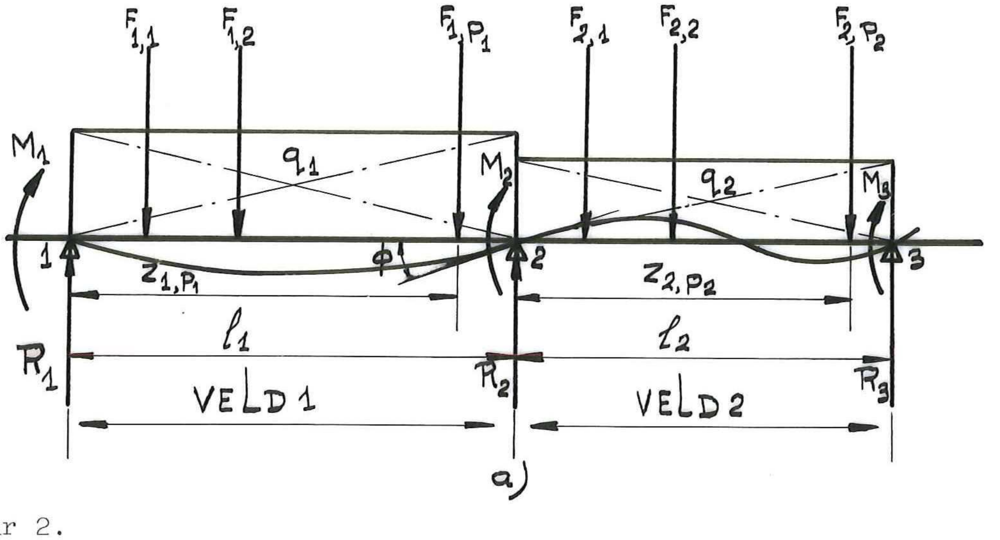
De balk wordt onderworpen aan:

a) Een gelijkmatige belasting,
b) Puntlasten,
c) Een gelijkmatige belasting + puntlasten.

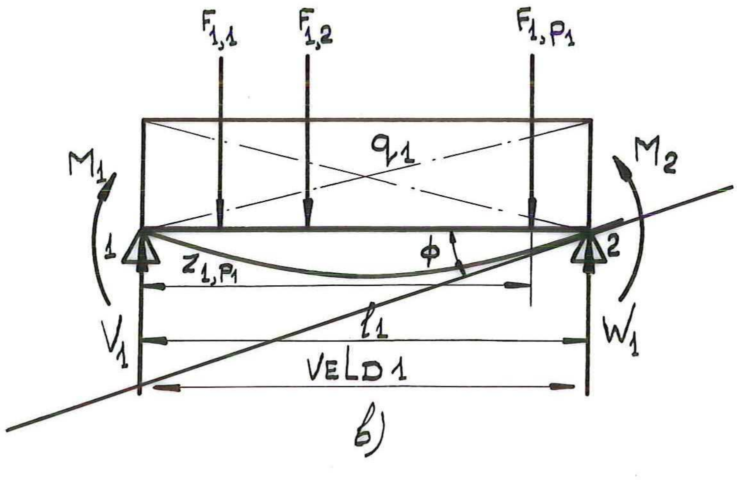
Het aantal krachten op veld i is $p_i \geqslant 0$.
De kracht $F_{i,j}$ stelt de j-de kracht voor op veld i, met de bijbehorende afstand $z_{i,j}$ tot het linkersteunpunt van veld i.
De gelijkmatige belasting op veld i wordt voorgesteld door q_i.
Het traagheidsmoment van de balk in veld i wordt voorgesteld door I_i.
In het algemeen geldt: $I_i \neq I_k$.
De methode van Clapeyron werkt als volgt:
Er wordt steeds een stuk van de ligger beschouwd, bestaande uit 3 steunpunten in de volgorde:

a) Het stuk met de steunpunten 0-1-2
b) Het stuk met de steunpunten 1-2-3
c) Het stuk met de steunpunten 2-3-4
d) Het stuk met de steunpunten 3-4-5.

Men verkrijgt hieruit 4 vergelijkingen met 4 onbekenden.
Voor het opstellen van één vergelijking wordt het stuk balk beschouwd dat de steunpunten 1-2-3 bevat (zie fig. 2).



Figuur 2.



Figuur 2.

Tekenafspraak: a) rechtsdraaiend moment is positief
b) kracht naar boven is positief
c) de zakking naar beneden is positief.

De hellingshoek, die de raaklijn aan de elastische lijn in het steunpunt 2 met de horizontale lijn maakt, noemen we ϕ (zie fig. 2a).
We beschouwen het veld 1 en denken dit veld ingeklemd onder de hoek ϕ in het steunpunt 2 (zie fig. 2b).
Hierin is:
M_1 het moment dat uitgeoefend wordt door het veld dat links gelegen is van steunpunt 1.
V_1 het deel van R_1 dat voor het evenwicht zorgt in veld 1 (deelreaktie).
W_1 het deel van R_2 dat voor het evenwicht zorgt in veld 1 (deelreaktie).
De zakking in het steunpunt 1 is:

$$l_1\phi - \frac{M_1 l_1^2}{2EI_1} - \frac{V_1 l_1^3}{3EI_1} + \sum_{j=1}^{p1} \left\{\frac{F_{1,j}(l_1 - z_{1,j})^3}{3EI_1} + \frac{F_{1,j}(l_1 - z_{1,j})^2}{2EI_1} z_{1,j}\right\} + \frac{q_1 l_1^4}{8EI_1} = 0 \qquad (2.1.1)$$

De evenwichtsvergelijking voor veld 1 t.o.v. het steunpunt 2 is:

$$-M_2 + M_1 - \sum_{j=1}^{p1} F_{1,j}(l_1 - z_{1,j}) - \tfrac{1}{2} q_1 l_1^2 + V_1 l_1 = 0 \qquad (2.1.2)$$

Uit de vergelijking (2.1.2) wordt V_1 opgelost en gesubstitueerd in de vergelijking (2.1.1). Hieruit volgt:

$$6E\phi - \frac{\sum_{j=1}^{p1} F_{1,j}(l_1^2 - z_{1,j}^2) z_{1,j}}{l_1 I_1} - \frac{M_1 l_1}{I_1} - \frac{2M_2 l_1}{I_1} - \frac{q_1 l_1^3}{4I_1} = 0 \qquad (2.1.3)$$

We beschouwen nu veld 2 en denken dit veld ingeklemd onder de hoek ϕ in het steunpunt 2.
Hieruit volgt:

$$-6E\phi - \frac{\sum_{j=1}^{p1} F_{2,j}\{l_2^2 - (l_2 - z_{2,j})^2\}(l_2 - z_{2,j})}{l_2 I_2} - \frac{2M_2 l_2}{I_2} - \frac{M_3 l_2}{I_2} - \frac{q_2 l_2^3}{4I_2} = 0 \qquad (2.1.4)$$

Eliminatie van ϕ uit de vergelijkingen (2.1.3) en (2.1.4) levert:

$$\frac{l_1}{I_1} M_1 + 2\left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}\right) M_2 + \frac{l_2}{I_2} M_3 + \frac{\sum_{j=1}^{p1} F_{1,j}(l_1^2 - z_{1,j}^2) z_{1,j}}{l_1 I_1} +$$

$$+ \frac{\sum_{j=1}^{p2} F_{2,j}\{l_2^2 - (l_2 - z_{2,j})^2\}(l_2 - z_{2,j})}{l_2 I_2} + \frac{q_1 l_1^3}{4 I_1} + \frac{q_2 l_2^3}{4 I_2} = 0 \qquad (2.1.5)$$

De vergelijkingen behorende bij de steunpunten 0-1-2, 2-3-4, 3-4-5 kunnen nu uit deze vergelijking worden afgeleid.
De 4 vergelijkingen met 4 onbekenden voor de steunpunten 0-1-2, 1-2-3, 2-3-4 en 3-4-5 zijn respektievelijk

$$\frac{l_o}{I_o} M_o + 2\left(\frac{l_o}{I_o} + \frac{l_1}{I_1}\right) M_1 + \frac{l_1}{I_1} M_2 = - \frac{\sum_{j=1}^{p1} F_{o,j}(l_o^2 - z_{o,j}^2) z_{o,j}}{l_o I_o} +$$

$$- \frac{\sum_{j=1}^{p1} F_{1,j}\{l_1^2 - (l_1 - z_{1,j})^2\}(l_1 - z_{1,j})}{l_1 I_1} - \frac{q_o l_o^3}{4 I_o} - \frac{q_1 l_1^3}{4 I_1} \qquad (2.1.6)$$

$$\frac{l_1}{I_1} M_1 + 2\left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}\right) M_2 + \frac{l_2}{I_2} M_3 = - \frac{\sum_{j=1}^{p1} F_{1,j}(l_1^2 - z_{1,j}^2) z_{1,j}}{l_1 I_1} +$$

$$- \frac{\sum_{j=1}^{p2} F_{2,j}\{l_2^2 - (l_2 - z_{2,j})^2\}(l_2 - z_{2,j})}{l_2 I_2} - \frac{q_1 l_1^3}{4 I_1} - \frac{q_2 l_2^3}{4 I_2} \qquad (2.1.7)$$

$$\frac{l_2}{I_2} M_2 + 2\left(\frac{l_2}{I_2} + \frac{l_3}{I_3}\right) M_3 + \frac{l_3}{I_3} M_4 = - \frac{\sum_{j=1}^{p_2} F_{2,j}(l_2^2 - z_{2,j}^2) z_{2,j}}{l_2 I_2} +$$

$$- \frac{\sum_{j=1}^{p3} F_{3,j}\{l_3^2 - (l_3 - z_{3,j})^2\}(l_3 - z_{3,j})}{l_3 I_3} - \frac{q_2 l_2^3}{4 I_2} - \frac{q_3 l_3^3}{4 I_3} \qquad (2.1.8)$$

$$\frac{l_3}{I_3} M_3 + 2\left(\frac{l_3}{I_3} + \frac{l_4}{I_4}\right) M_4 + \frac{l_4}{I_4} M_5 = - \frac{\sum_{j=1}^{p3} F_{3,j}(l_3^2 - z_{3,j}^2) z_{3,j}}{l_3 I_3} +$$

$$- \frac{\sum_{j=1}^{p4} F_{4,j}\{l_4^2 - (l_4 - z_{4,j})^2\}(l_4 - z_{4,j})}{l_4 I_4} - \frac{q_3 l_3^3}{4 I_3} - \frac{q_4 l_4^3}{4 I_4} \qquad (2.1.9)$$

In deze vergelijkingen zijn M_o en M_5 gelijk aan nul.
Overgegaan wordt tot het schrijven van de vergelijkingen (2.1.6) t/m (2.1.9) in matrix vorm.

Stel: $a_{11} = 2\left(\frac{l_0}{I_0} + \frac{l_1}{I_1}\right)$ $\quad a_{12} = \frac{l_1}{I_1}$

$$a_{21} = \frac{l_1}{I_1} \qquad a_{22} = 2\left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2}\right) \qquad a_{23} = \frac{l_2}{I_2}$$

$$a_{32} = \frac{l_2}{I_2} \qquad a_{33} = 2\left(\frac{l_2}{I_2} + \frac{l_3}{I_3}\right) \qquad a_{34} = \frac{l_3}{I_3}$$

$$a_{43} = \frac{l_3}{I_3} \qquad a_{44} = 2\left(\frac{l_3}{I_3} + \frac{l_4}{I_4}\right)$$

$$y_i = -\frac{\sum\limits_{j=1}^{p_{i-1}} F_{i-1,j}(l_{i-1}{}^2 - z_{i-1,j}{}^2)z_{i-1,j}}{l_{i-1}I_{i-1}} - \frac{\sum\limits_{j=1}^{p_i} F_{i,j}\{l_i{}^2 - (l_i - z_{i,j})^2\}(l_i - z_{i,j})}{l_iI_i} +$$

$$-\frac{q_{i-1}l_{i-1}{}^3}{4\,I_{i-1}} - \frac{q_il_i{}^3}{4I_i} \tag{2.1.10}$$

Het stelsel vergelijkingen wordt dan:

$$\begin{aligned} a_{11}M_1 + a_{12}M_2 &= y_1 \\ a_{21}M_1 + a_{22}M_2 + a_{23}M_3 &= y_2 \\ a_{32}M_2 + a_{33}M_3 + a_{34}M_4 &= y_3 \\ a_{43}M_3 + a_{44}M_4 &= y_4 \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Of in matrixvorm:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \qquad A\underline{M} = \underline{Y} \tag{2.1.12}$$

We hebben hier te maken met een zogenaamde bandmatrix, d.w.z. op de hoofddiagonaal en twee naastliggende diagonalen van de matrix A komen getallen voor $\neq 0$, terwijl voor de rest van de matrix A de getallen nul zijn.
We zien hieruit, dat hoe groter het aantal steunpunten is des temeer nullen er voor komen in de matrix A.
We zullen, met betrekking tot deze nullen, hiermee rekening gaan houden tijdens het opslaan en verwerken van deze matrix in het computer programma.
Dit gebeurt met behulp van de zogenaamde LU-decompositie (zie Appendix I).
Het geval is behandeld van een balk die in 6 punten was opgelegd. (geeft 4 vergelijkingen met 4 onbekenden).
Dit geval laat zich gemakkelijk uitbreiden naar een balk die in n + 2 punten is opgelegd. (geeft n vergelijkingen met n onbekenden).
De coëfficiënten, van de matrix A van een balk die in n + 2 punten is opgelegd, zijn als volgt:

$$a_{11} = 2\left(\frac{l_o}{I_o} + \frac{l_1}{I_1}\right) \qquad a_{12} = \frac{l_1}{I_1} \qquad a_{1,j} = 0 \quad (3 \leqslant j \leqslant n)$$

$$a_{i,i-1} = \frac{l_{i-1}}{I_{i-1}} \qquad a_{i,i} = 2\left(\frac{l_{i-1}}{I_{i-1}} + \frac{l_i}{I_i}\right) \quad a_{i,i+1} = \frac{l_i}{I_i} \qquad (2 \leqslant i \leqslant n-1)$$

$$a_{i,j} = 0 \; (|j-i| > 2 \text{ met } 1 \leqslant j \leqslant n)$$

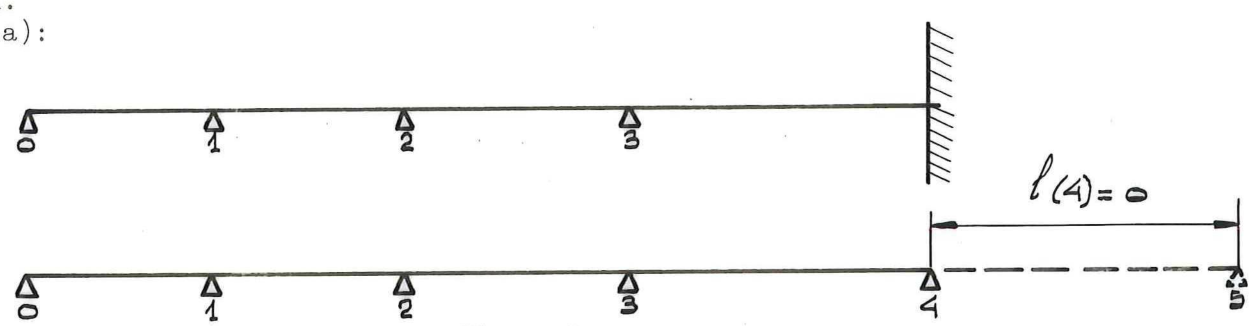
$$a_{n,n-1} = \frac{l_{n-1}}{I_{n-1}} \qquad a_{n,n} = 2\left(\frac{l_{n-1}}{I_{n-1}} + \frac{l_n}{I_n}\right) \qquad a_{n,j} = 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n-2) \qquad (2.1.13)$$

Het rechterlid van de i-de vergelijking is:

$$y_i = -\frac{\sum_{j=1}^{p_{i-1}} F_{i-1,j}(l_{i-1}{}^2 - z_{i-1,j}{}^2) z_{i-1,j}}{l_{i-1} I_{i-1}} - \frac{\sum_{j=1}^{p_i} F_{i,j}\{l_i^2 - (l_i - z_{i,j})^2\}(l_i - z_{i,j})}{l_i I_i} +$$

$$- \frac{q_{i-1} l_{i-1}{}^3}{4 \; I_{i-1}} - \frac{q_i l_i{}^3}{4 I_i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \qquad (2.1.14)$$

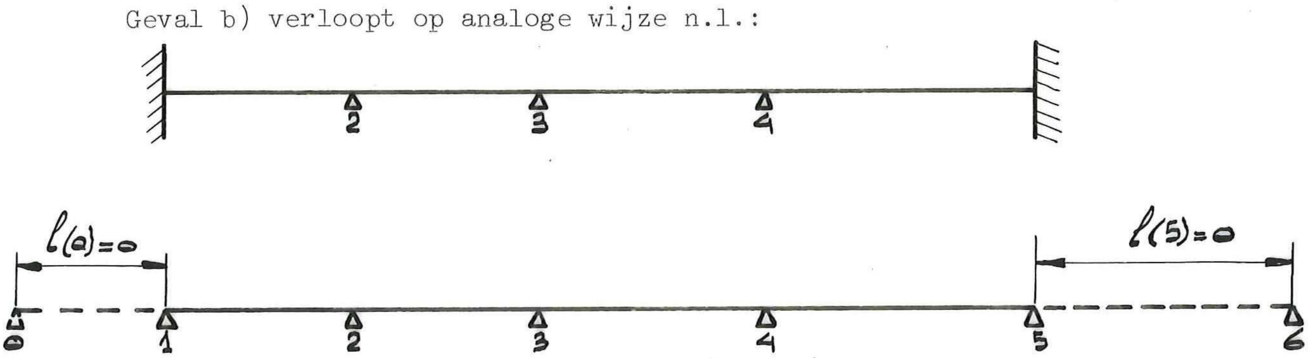
We zullen nu nog de twee andere gevallen onderscheiden, te weten:
a) de balk in n punten opgelegd en aan één zijde ingeklemd,
b) de balk in n punten opgelegd en aan beide zijden ingeklemd.
Geval a) is terug te voeren naar het geval van een balk die in (n+2) punten is opgelegd.
Geval b) is terug te voeren naar het geval van een balk die in n+4) punten is opgelegd.
Geval a):



Figuur 3

Ter plaatse van de inklemming wordt de balk verlengd met een lengte $l(4) = 0$.
De inklemming wordt vervangen door twee opleggingen (nr. 4 en nr. 5) die oneindig dicht bij elkaar gelegen zijn.

Geval b) verloopt op analoge wijze n.l.:



Figuur 4

Resumerend:
Geval a) geeft n vergelijkingen met n onbekenden.
Geval b) geeft n+2 vergelijkingen met n+2 onbekenden.
Waarin n het aantal punten is waarin de balk is opgelegd.

2.2 Verklaring der eenheden.

Symbool mathematisch	Symbool programma	eenheid	omschrijving
l_i	l(i)	m	Lengte van de balk in veld i
q_i	q(i)	ton/m	Gelijkmatige belasting op de balk in veld i
I_i	Tr(i)	cm^4	Traagheidsmoment van de balk in veld i
p_i	Vnr(i)	-	Aantal puntlasten op de balk in veld i
$F_{i,j}$	f(i,j)	ton	j-de puntlast op de balk in veld i
$z_{i,j}$	z(i,j)	m	Afstand van de j-de kracht tot linkersteunpunt van veld i
V_i	V(i)	ton	Deelreaktie in linkersteunpunt van veld i Zie fig. 2b.
W_i	W(i)	ton	Deelreaktie in rechtersteunpunt van veld i Zie fig. 2b.
R_i	R(i)	ton	Reaktiekracht in steunpunt i. Zie fig. 2a.
	mom (i)	ton/m	Maximaal of minimaal moment dat werkt op de balk in veld i (dwarskracht D = 0)
M_i	M(i)	ton/m	Moment in steunpunt i. Zie fig. 2a en de vgl. (2.1.11)
$\left[a_{i,j}\right]_n^n$	a(1:n,1:3)	$1/m^3$	Coefficienten van de matrix A Zie vgl. (2.1.12)
y_i	y(i)	ton/m^2	Rechterlid van i-de vergelijking van $A\underline{M} = \underline{y}$. Zie vgl. (2.1.11) en (2.1.12)
$\left[u_{i,j}\right]_n^n$	up(1:n,1:2)	-	Coefficienten van de "uppertriangular" matrix. Zie Appendix I
$\left[l_{i,j}\right]_n^n$	lo(1:n,1:2)	-	Coefficienten van de "lower triangular" matrix. Zie Appendix I
n	n		Aantal vergelijkingen

3. BESTANDSORGANISATIE.

3.1. Algemeen.

De twee volgende handelingen moeten verricht worden n.l.
het laden en aktiveren van het programma te weten:
a) load (clapey, ron)
b) xeq

3.2. Invoer.

Grootheid	Dimensie	Opmerkingen
n	-	n = { (m-2) als de balk in m punten is opgelegd; m als de balk in m punten is opgelegd en aan één zijde is ingeklemd; (m+2) als de balk in m punten is opgelegd en aan beide zijden is ingeklemd
Returnlijn		
l(o)	m	Lengte van de balk in veld o : ⩾ o
q(o)	ton/m	Gelijkmatige belasting v.d. balk in veld o : ⩾ o
Tr(o)	cm^4	Traagheidsmoment v.d. balk in veld o : ⩾ o *
vnr(o)	-	Aantal puntlasten v.d. balk in veld o : ⩾ o
Returnlijn		
l(1)	m	Lengte van de balk in veld 1 : > o
q(1)	ton/m	Gelijkmatige belasting v.d. balk in veld 1 : ⩾ o
Tr(1)	cm^4	Traagheidsmoment v.d. balk in veld 1 : > o
vnr(1)	-	Aantal puntlasten v.d. balk in veld 1 : ⩾ o
Returnlijn		
ENZ		
l(n)	m	Lengte van de balk in veld n : ⩾ o
q(n)	ton/m	Gelijkmatige belasting v.d. balk in veld n : ⩾ o
Tr(n)	cm^4	Traagheidsmoment v.d. balk in veld n : ⩾ o *
vnr(n)	-	Aantal puntlasten v.d. balk in veld n : ⩾ o
Returnlijn		
f(i,j)	ton	De j-de puntlast op veld i 1 ⩽ j ⩽ vnr(i)
z(i,j)	m	De afstand van de j-de puntlast tot het linkersteunpunt van veld i **
Returnlijn		
enz.		

* Het gelijkteken geldt als de balk aan deze zijde is ingeklemd.
B.v. 1) l(o) = q(o) = Tr(o) = vnr(o) = o als de balk aan de linkerzijde is ingeklemd.
2) l(n) = q(n) = Tr(n) = vnr(n) = o als de balk aan de rechterzijde is ingeklemd.
3) l(o) = q(o) = Tr(o) = vnr(o) = l(n) = q(n) = Tr(n) = vnr(n) = o als de balk aan beide zijden is ingeklemd.

** Indien op één of meerdere velden geen puntlasten voorkomen dan worden deze ook niet ingevoerd.

Opmerking: Indien men om de een of andere reden getallen van de invoer wil wijzigen dan moet aangeslagen worden:

xeq 10 thru . . .

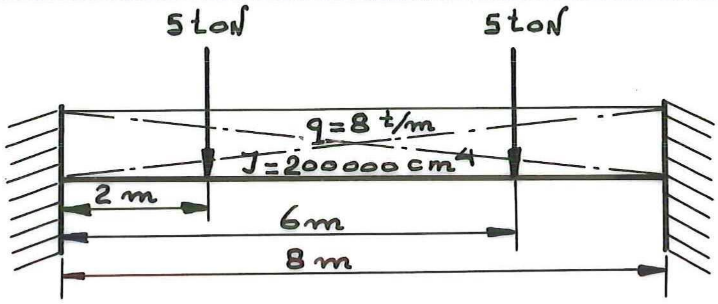
De niet veranderde getallen kunnen met een komma worden aangehaald, met dien verstande, dat het veranderde getal met een komma moet worden afgesloten.

3.3. Uitvoer.

a) Het moment t.p.v. de steunpunten. Zie fig. 2a.
b) Het maximale of minimale veldmoment en de plaats daarvan.
c) De reaktiekrachten in de steunpunten. Zie fig. 2a.

3.4 Voorbeelden
Handeling:
a)load(clapey,ron)

3.4.1 Drager aan beide zijden ingeklemd en nul opleggingen



xeq

invoer
n
2
l(0)
0,0,0,0
l(1)
8,8,200000,2
l(2)
0,0,0,0
f(1,1)
5,2
f(1,2)
5,6

uitvoer

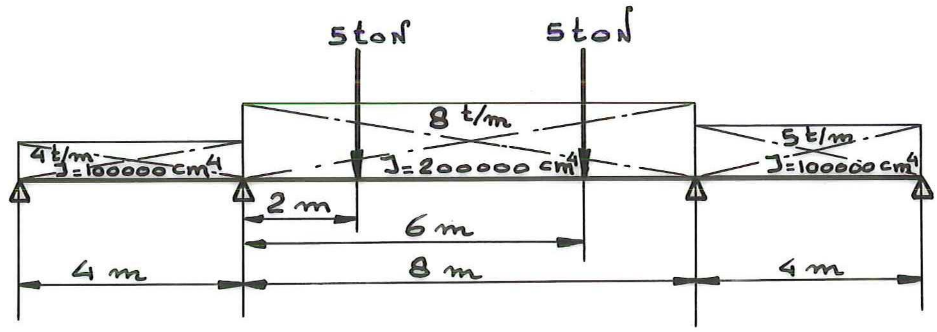
steunpunt no	mom t.p.v. steunpunt tm
1	-50.17
2	-50.17

veld no	veldmoment(maximaal of minimaal) tm	plaats veldmoment uit rechter steunpunt m
1	23.83	4.00

steunpunt no	steunpuntsreaktie t
0	0.00
1	37.00
2	37.00
3	0.00

controle invoer
2
veld 0 : 0 0 0 0
veld 1 : 8 8 200000 2
F (1 , 1)= 5 ; z(1 , 1)= 2
F (1 , 2)= 5 ; z(1 , 2)= 6
veld 2 : 0 0 0 0

3.4.2 <u>Drager in 4 punten opgelegd</u>



xeq

invoer
n
2
l(0)
4,4,100000,0
l(1)
8,8,200000,2
l(2)
4,5,100000,0
f(1,1)
5,2
f(1,2)
5,6

uitvoer

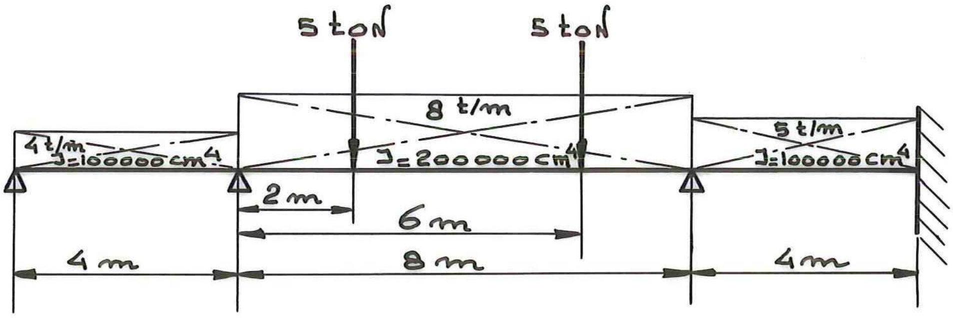
steunpunt no	mom t.p.v. steunpunt tm
1	-33.03
2	-34.37

veld no	veldmoment(maximaal of minimaal) tm	plaats veldmoment uit rechter steunpunt m
0	0.00	4.00
1	40.30	4.02
2	0.20	0.28

steunpunt no	steunpuntsreaktie t
0	-0.26
1	53.09
2	55.76
3	1.41

controle invoer
2
veld 0 : 4 4 100000 0
veld 1 : 8 8 200000 2
F (1 , 1)= 5 ; z(1 , 1)= 2
F (1 , 2)= 5 ; z(1 , 2)= 6
veld 2 : 4 5 100000 0

3.4.3 Drager in 3 punten opgelegd en aan de rechterzijde ingeklemd




```
xeq

invoer
n
3
l(0)
4,4,100000,0
l(1)
8,8,200000,2
l(2)
4,5,100000,0
l(3)
0,0,0,0
f(1,1)
5,2
f(1,2)
5,6
```

uitvoer

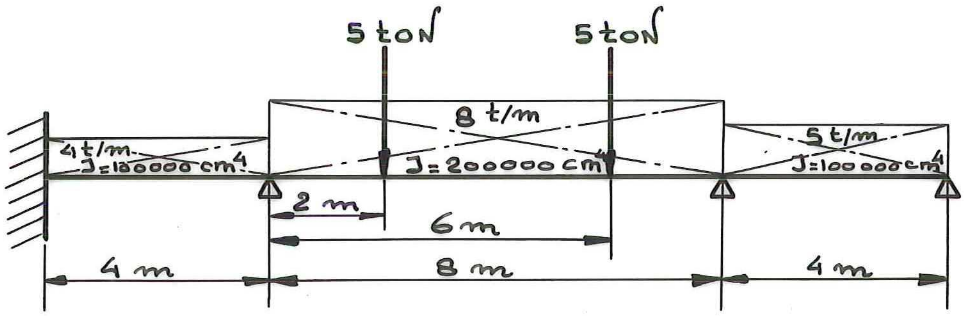
steunpunt no	mom t.p.v. steunpunt tm
1	-32.48
2	-36.58
3	8.29

veld no	veldmoment(maximaal of minimaal) tm	plaats veldmoment uit rechter steunpunt m
0	0.00	4.00
1	39.49	4.06
2	8.29	0.00

steunpunt no	steunpuntsreaktie t
0	-0.12
1	52.61
2	58.73
3	-1.22
4	0.00

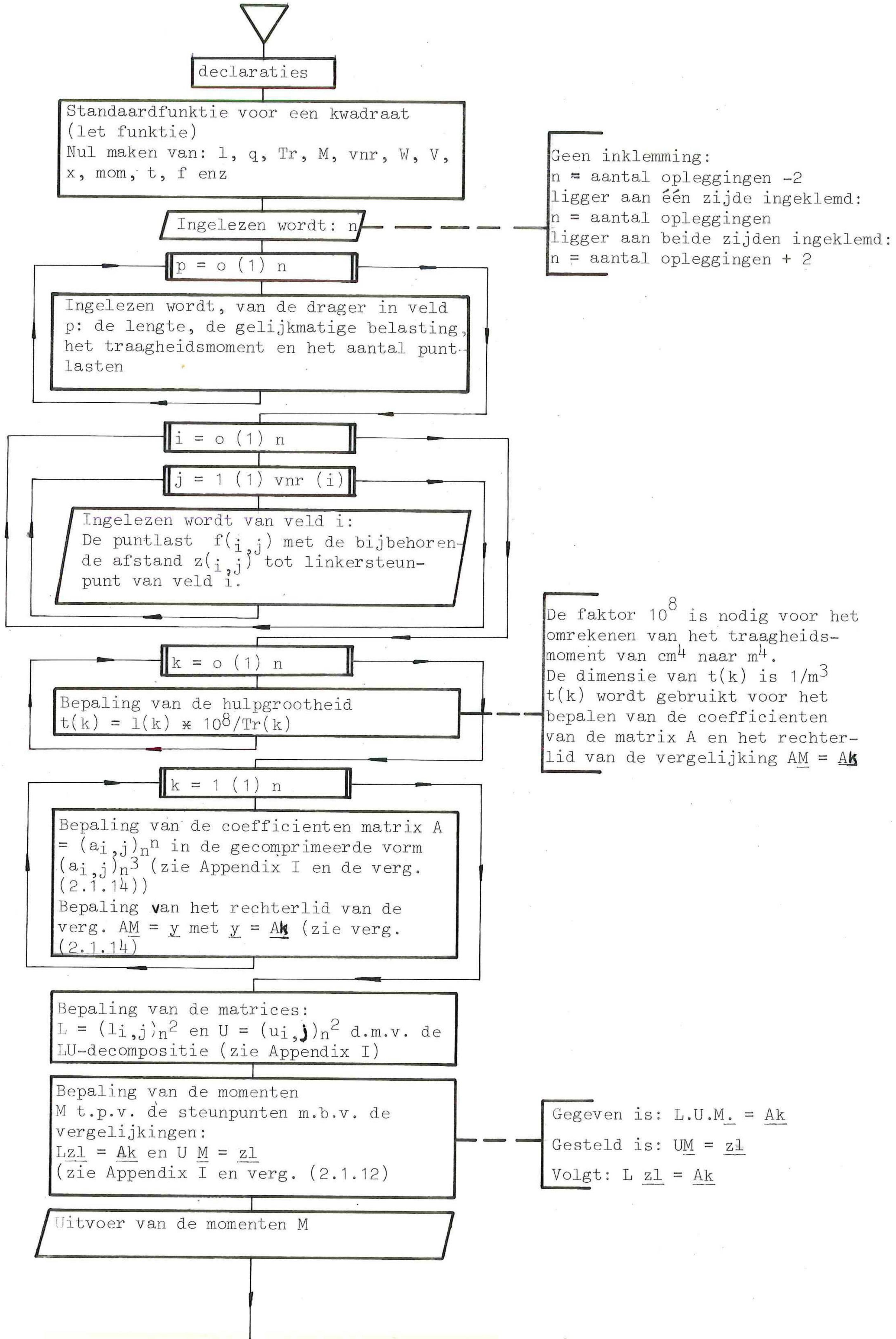
```
controle invoer
3
veld  0 : 4 4 100000 0
veld  1 : 8 8 200000 2
        F ( 1 , 1 )= 5 ; z( 1 , 1 )= 2
        F ( 1 , 2 )= 5 ; z( 1 , 2 )= 6
veld  2 : 4 5 100000 0
veld  3 : 0 0 0 0
```

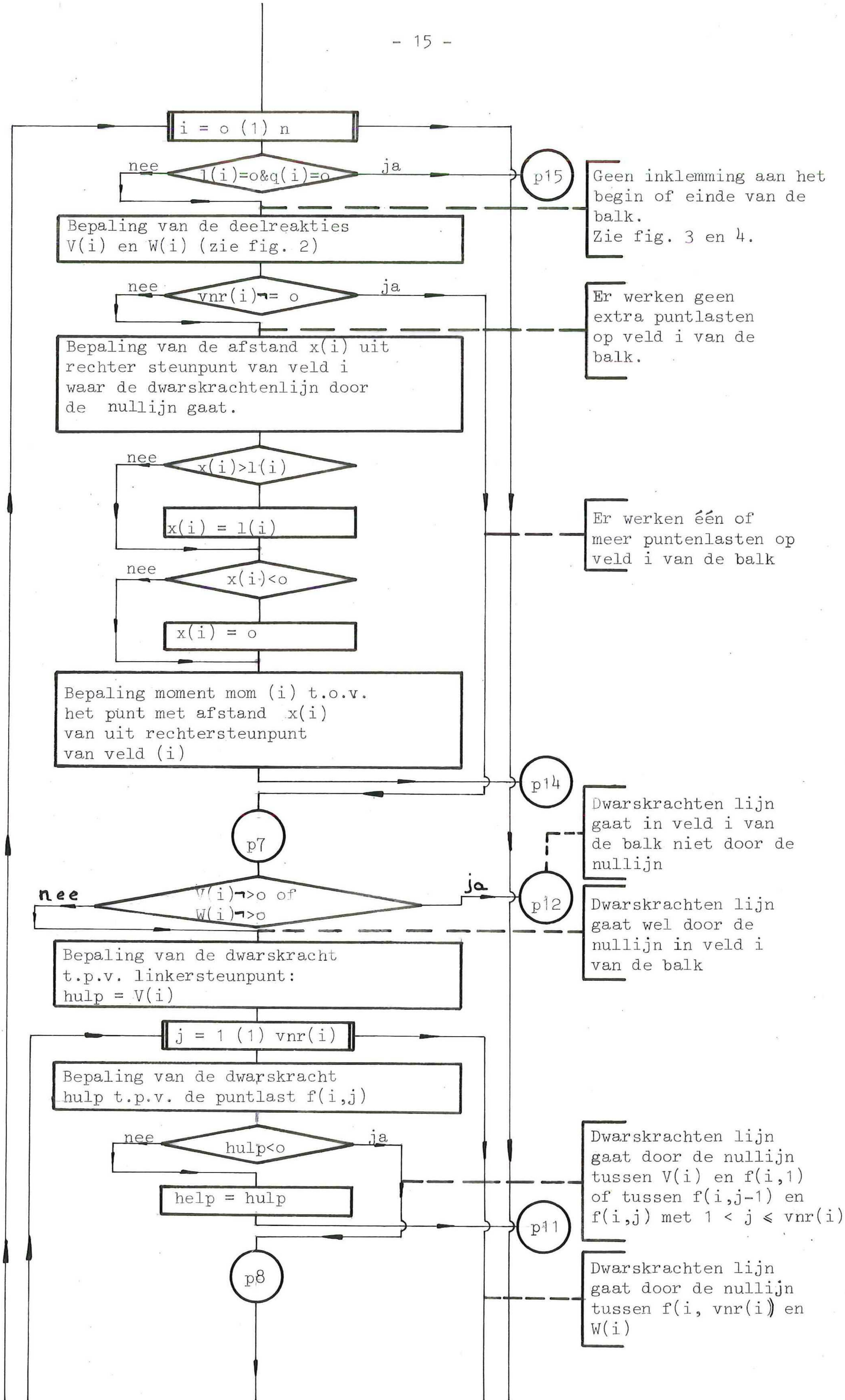
3.4.4 Drager in 3 punten opgelegd en aan de linkerzijde ingeklemd

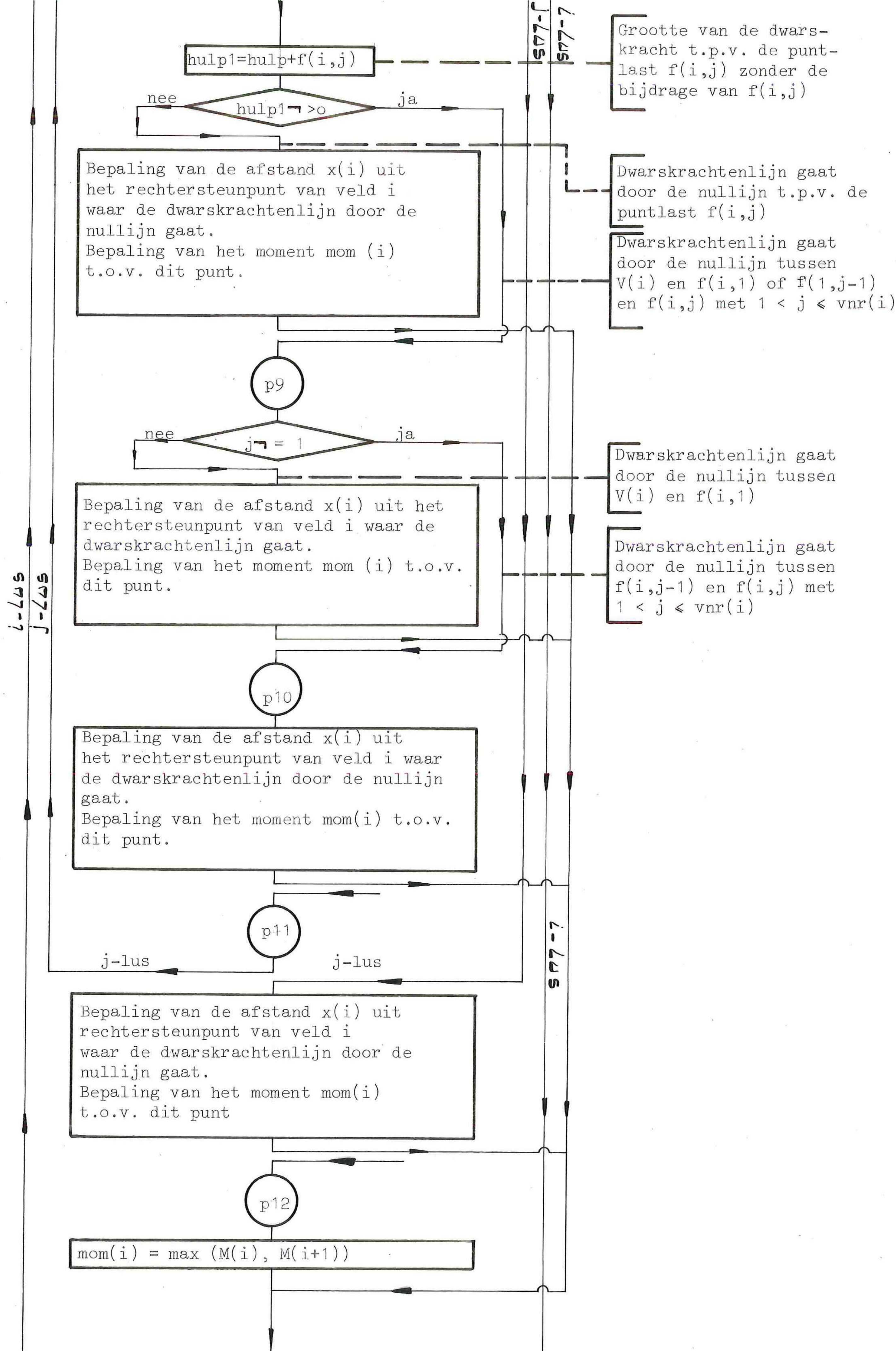


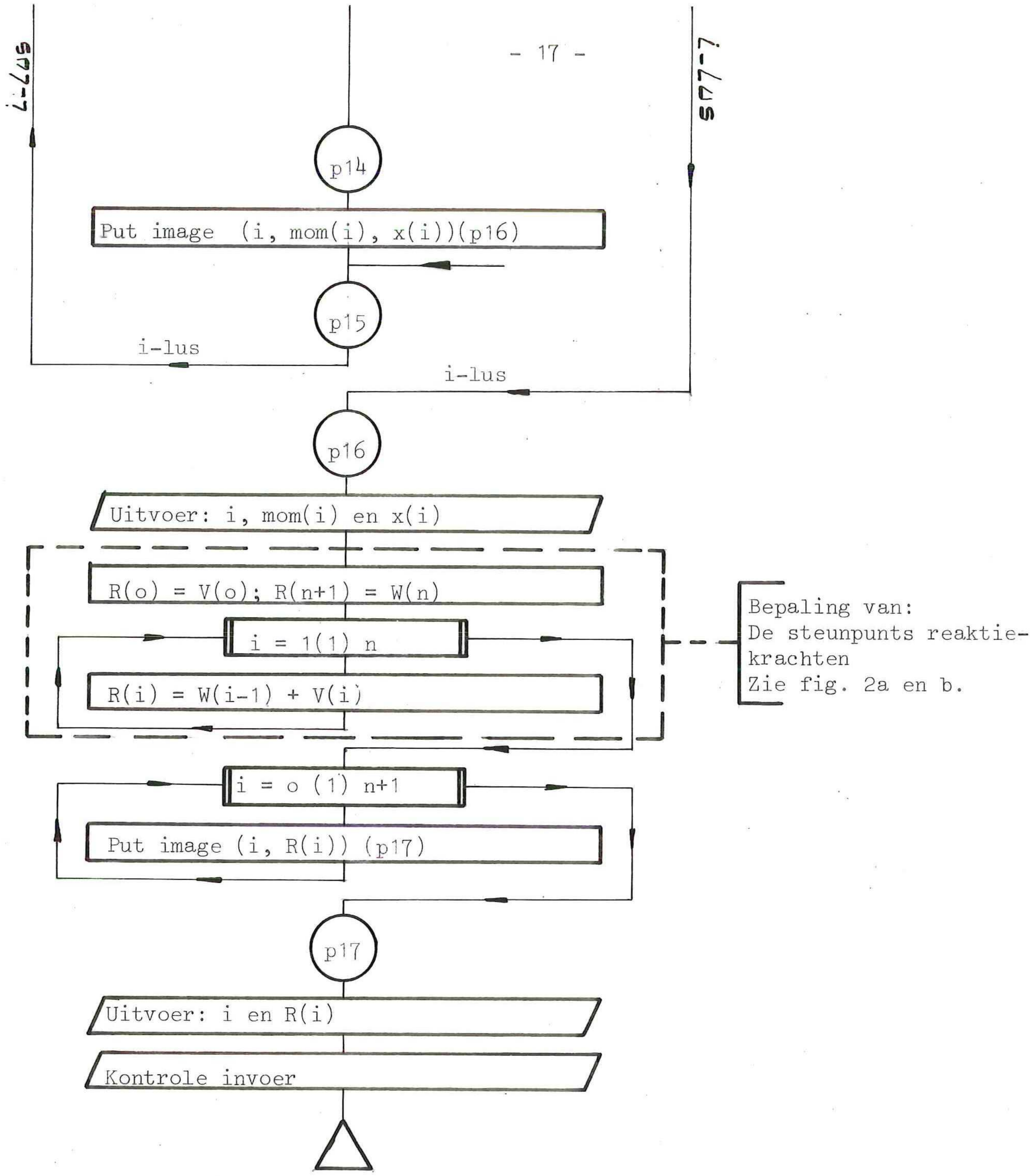

```
xeq

invoer
n
3
l(0)
0,0,0,0
l(1)
4,4,100000,0
l(2)
8,8,200000,2
l(3)
4,5,100000,0
f(2,1)
5,2
f(2,2)
5,6

      uitvoer

      steunpunt       mom t.p.v. steunpunt
          no                tm
          1                9.83
          2              -35.65
          3              -33.71

          veld        veldmoment(maximaal       plaats veldmoment
          no          of minimaal)              uit rechter steunpunt
                            tm                        m
          1                9.83                      4.00
          2               39.32                      3.97
          3                0.25                      0.31

      steunpunt       steunpuntsreaktie
          no                t
          0                0.00
          1               -3.37
          2               56.61
          3               55.19
          4                1.57

controle invoer
3
veld  0 : 0 0 0 0
veld  1 : 4 4 100000 0
veld  2 : 8 8 200000 2
        F ( 2 , 1 )= 5 ; z( 2 , 1 )= 2
        F ( 2 , 2 )= 5 ; z( 2 , 2 )= 6
veld  3 : 4 5 100000 0
```

3.5 Stroomdiagram.




i = o (1) n
nee
l(i)=o&q(i)=o
ja
p15
Geen inklemming aan het begin of einde van de balk.
Zie fig. 3 en 4.
Bepaling van de deelreakties V(i) en W(i) (zie fig. 2)
nee
vnr(i)¬= o
ja
Er werken geen extra puntlasten op veld i van de balk.
Bepaling van de afstand x(i) uit rechter steunpunt van veld i waar de dwarskrachtenlijn door de nullijn gaat.
nee
x(i)>l(i)
x(i) = l(i)
Er werken één of meer puntenlasten op veld i van de balk
nee
x(i)<o
x(i) = o
Bepaling moment mom (i) t.o.v. het punt met afstand x(i) van uit rechtersteunpunt van veld (i)
p14
p7
Dwarskrachten lijn gaat in veld i van de balk niet door de nullijn
nee
V(i)¬>o of W(i)¬>o
ja
p12
Dwarskrachten lijn gaat wel door de nullijn in veld i van de balk
Bepaling van de dwarskracht t.p.v. linkersteunpunt: hulp = V(i)
j = 1 (1) vnr(i)
Bepaling van de dwarskracht hulp t.p.v. de puntlast f(i,j)
nee
hulp<o
ja
help = hulp
Dwarskrachten lijn gaat door de nullijn tussen V(i) en f(i,1) of tussen f(i,j-1) en f(i,j) met 1 < j ⩽ vnr(i)
p11
p8
Dwarskrachten lijn gaat door de nullijn tussen f(i, vnr(i)) en W(i)


hulp1=hulp+f(i,j)
Grootte van de dwars-kracht t.p.v. de punt-last f(i,j) zonder de bijdrage van f(i,j)
nee
hulp1¬>o
ja
Dwarskrachtenlijn gaat door de nullijn t.p.v. de puntlast f(i,j)
Bepaling van de afstand x(i) uit het rechtersteunpunt van veld i waar de dwarskrachtenlijn door de nullijn gaat.
Bepaling van het moment mom (i) t.o.v. dit punt.
Dwarskrachtenlijn gaat door de nullijn tussen V(i) en f(i,1) of f(1,j-1) en f(i,j) met 1 < j ⩽ vnr(i)
p9
nee
j¬ = 1
ja
Dwarskrachtenlijn gaat door de nullijn tussen V(i) en f(i,1)
Bepaling van de afstand x(i) uit het rechtersteunpunt van veld i waar de dwarskrachtenlijn gaat.
Bepaling van het moment mom (i) t.o.v. dit punt.
Dwarskrachtenlijn gaat door de nullijn tussen f(i,j-1) en f(i,j) met 1 < j ⩽ vnr(i)
p10
Bepaling van de afstand x(i) uit het rechtersteunpunt van veld i waar de dwarskrachtenlijn door de nullijn gaat.
Bepaling van het moment mom(i) t.o.v. dit punt.
p11
j-lus
j-lus
Bepaling van de afstand x(i) uit rechtersteunpunt van veld i waar de dwarskrachtenlijn door de nullijn gaat.
Bepaling van het moment mom(i) t.o.v. dit punt
p12
mom(i) = max (M(i), M(i+1))


i-lus
i-lus
p14
Put image (i, mom(i), x(i))(p16)
p15
i-lus
i-lus
p16
Uitvoer: i, mom(i) en x(i)
R(o) = V(o); R(n+1) = W(n)
i = 1(1) n
R(i) = W(i-1) + V(i)
Bepaling van:
De steunpunts reaktie-
krachten
Zie fig. 2a en b.
i = o (1) n+1
Put image (i, R(i)) (p17)
p17
Uitvoer: i en R(i)
Kontrole invoer

3.6 Listing van het programma.


```
              PUT LIST('');
              PUT LIST('invoer');
              DECLARE a(10,3),up(10,2),lo(10,2),zl(10),l(0:10),q(0:10),Ak(10),M(0:10),Tr(0:10);
              DECLARE t(0:10),W(0:10),V(0:10),R(0:10),x(0:10),mom(0:10),vnr(0:10),z(0:10,0:4),f(0:10,1:4);
              LET kwad(ad)=ad*ad;
              l,q,Tr,M,vnr=0;
              W,V,x,mom,t=0;
              f=0;
              z=0;
      p1:     GET LIST(n);
              IF n>1&n<11 THEN GO TO p2;
              PUT LIST('het programma geldt voor n=2 t/m n=10');
              GO TO p1;
      p2:     DO p=0 TO n;
              GET LIST(l(p),q(p),Tr(p),vnr(p));
              END ;
              DO i=0 TO n;
              DO j=1 TO vnr(i);
              GET LIST(f(i,j),z(i,j));
              END ;
              END ;
              DO k=0 TO n;
              IF Tr(k)=0 THEN GO TO p3;
              t(k)=l(k)*10**8/Tr(k);
      p3:     END ;
              DO k=1 TO n;
              IF k¬=1 THEN GO TO p4; ELSE ;
              a(k,1)=2*(t(k-1)+t(k));
              a(k,2)=t(k);
              a(k,3)=0;
              GO TO p5;
      p4:     a(k,1)=t(k-1);
              a(k,2)=2*(t(k-1)+t(k));
              a(k,3)=(k¬=n)*t(k);
      p5:     Ak(k)=-q(k-1)*t(k-1)*kwad(l(k-1))*.25-q(k)*t(k)*kwad(l(k))*.25;
              DO j=1 TO vnr(k-1);
              Ak(k)=Ak(k)-f(k-1,j)*z(k-1,j)*t(k-1)*(1-kwad(z(k-1,j)/l(k-1)));
              END ;
              DO j=1 TO vnr(k);
              Ak(k)=Ak(k)-f(k,j)*(l(k)-z(k,j))*t(k)*(1-kwad(1-z(k,j)/l(k)));
```

```
        END ;
        END ;
        lo(1,1)=1;
        lo(1,2)=0;
        DO i=2 TO n;
        lo(i,2)=1;
        END ;
        up(1,1)=a(1,1);
        up(1,2)=a(1,2);
        DO i=2 TO n;
        lo(i,1)=a(i,1)/up(i-1,1);
        up(i,1)=a(i,2)-lo(i,1)*up(i-1,2);
        up(i,2)=a(i,3)*(i¬=n);
        END ;
        zl(1)=Ak(1);
        DO i=2 TO n;
        zl(i)=Ak(i)-lo(i,1)*zl(i-1);
        END ;
        M(n)=zl(n)/up(n,1);
        DO i=n-1 TO 1 BY -1;
        M(i)=(zl(i)-M(i+1)*up(i,2))/up(i,1);
        END ;
        PUT LIST('');
        PUT LIST('      uitvoer');
        PUT LIST('');
        PUT LIST('      steunpunt      mom t.p.v. steunpunt');
        PUT LIST('         no                 tm');
        DO i=1 TO n;
        PUT IMAGE(i,M(i))(p6);
        END ;
p6:     IMAGE;
--          ------.--
        PUT LIST('');
        PUT LIST('         veld      veldmoment(maximaal      plaats veldmoment');
        PUT LIST('          no       of minimaal)             uit rechter steunpunt');
        PUT LIST('                         tm                            m');
        DO i=0 TO n;
        IF l(i)=0&q(i)=0 THEN GO TO p15;
        W(i)=(M(i)-M(i+1)+q(i)*l(i)**2*.5)/l(i);
        V(i)=q(i)*l(i)-W(i);
        DO j=1 TO vnr(i);
```

```
          F=f(i,j)*z(i,j)/l(i);
          W(i)=W(i)+F;
          V(i)=V(i)+f(i,j)-F;
          END ;
          IF vnr(i)¬=0 THEN GO TO p7; ELSE ;
          x(i)=(-V(i)+q(i)*l(i))/q(i);
          IF x(i)>l(i) THEN x(i)=l(i);
          IF x(i)<0 THEN x(i)=0;
          mom(i)=M(i)+V(i)*(l(i)-x(i))-q(i)*kwad(l(i)-x(i))*.5;
          GO TO p14;
p7:       IF V(i)¬>0|W(i)¬>0 THEN GO TO p12; ELSE ;
          hulp=V(i);
          DO j=1 TO vnr(i);
          hulp=hulp-q(i)*(z(i,j)-z(i,j-1))-f(i,j);
          IF hulp<0 THEN GO TO p8; ELSE ;
          help=hulp;
          GO TO p11;
p8:       hulp1=hulp+f(i,j);
          IF hulp1¬>0 THEN GO TO p9; ELSE ;
          x(i)=l(i)-z(i,j);
          mom(i)=V(i)*z(i,j)-.5*q(i)*kwad(z(i,j))+M(i);
          DO k=1 TO j-1;
          mom(i)=mom(i)-(z(i,j)-z(i,k))*f(i,k);
          END ;
          GO TO p14;
p9:       IF j¬=1 THEN GO TO p10; ELSE ;
          xx=V(i)/q(i);
          x(i)=l(i)-xx;
          mom(i)=(V(i)-.5*q(i)*xx)*xx+M(i);
          GO TO p14;
p10:      cc=z(i,j-1)+abs(help*(z(i,j)-z(i,j-1))/(help-hulp1));
          x(i)=l(i)-cc;
          mom(i)=V(i)*cc-.5*q(i)*kwad(cc)+M(i);
          DO k=1 TO j-1;
          mom(i)=mom(i)-(cc-z(i,k))*f(i,k);
          END ;
          GO TO p14;
p11:      END ;
          x(i)=W(i)/q(i);
          mom(i)=W(i)*x(i)-.5*q(i)*kwad(x(i))+M(i+1);
```

```
            GO TO p14;
     p12:   IF abs(M(i))¬>abs(M(i+1)) THEN GO TO p13; ELSE ;
            x(i)=l(i);
            mom(i)=M(i);
            GO TO p14;
     p13:   x(i)=0;
            mom(i)=M(i+1);
     p14:   PUT IMAGE(i,mom(i),x(i))(p16);
     p15:   END ;
     p16:   IMAGE;
     --         ------.--                 ----.--
            PUT LIST('');
            PUT LIST('     steunpunt    steunpuntsreaktie');
            PUT LIST('         no                     t');
            R(0)=V(0);
            R(n+1)=W(n);
            DO i=1 TO n;
            R(i)=W(i-1)+V(i);
            END ;
            DO i=0 TO n+1;
            PUT IMAGE(i,R(i))(p17);
            END ;
     p17:   IMAGE;
     --         ------.--
            PUT LIST('');
            PUT LIST('controle invoer');
            PUT LIST(n);
            DO p=0 TO n;
            PUT LIST('veld ',p,':',l(p),q(p),Tr(p),vnr(p));
            DO j=1 TO vnr(p);
            PUT LIST('      F (',p,',',j,')=',f(p,j),';','z(',p,',',j,')=',z(p,j));
            END ;
            END ;
```

APPENDIX I.

I.1 Algemeen.

Gegeven is het stelsel vergelijkingen:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 + a_{14}\, x_4 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + a_{1n}\, x_n = y_1 \\
a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 + a_{24}\, x_4 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + a_{2n}\, x_n = y_2 \\
a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 + a_{34}\, x_4 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + a_{3n}\, x_n = y_3 \\
a_{41}\, x_1 + a_{42}\, x_2 + a_{43}\, x_3 + a_{44}\, x_4 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + a_{4n}\, x_n = y_4 \\
. \\
. \\
. \\
. \\
a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + a_{n3}\, x_3 + a_{n4}\, x_4 + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + a_{nn}\, x_n = y_n
\end{array}
$$

Dit stelsel is in matrix vorm te schrijven als:

$$
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & a_{3n} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}
\qquad (I.1.1)
$$

In verkorte schrijfwijze wordt de vergelijking (I.1.1) in het algemeen weergegeven als:

$A\underline{X} = \underline{y}$ met: $A = (a_{ij})_n{}^n$ (n rijen en n kolommen)

De bekende vektor $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots\ldots, y_n)$

De onbekende vektor $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n)$ (I.1.2)

De vektor $\underline{x}$ moet dus uit de vergelijking (I.1.2) opgelost worden.

Opmerking: $B = (b_{ij})_n{}^p$ betekent een coefficienten matrix met n-ryen en p kolommen met de coefficienten b_{ij}.

I.2 De L.U.-Decompositie.

De coefficienten matrix A is altijd te schrijven als het product van twee coefficienten matrices L en U.

A = L.U waarin:

a) $A = (a_{ij})_n{}^n$

b) $L = (l_{ij})_n{}^n$ met $l_{ij} = o$ als $i < j$
$l_{ij} \neq o$ als $i > j$
$l_{ij} = 1$ als $i = j$

L betekent "lower triangular" matrix

c) $U = (u_{ij})_n{}^n$ met $u_{ij} = o$ als $i > j$
$u_{ij} \neq o$ als $i \leqslant j$

Uit A = L.U volgt: $a_{ik} = \sum_{j=1}^{n} l_{ij}\, u_{jk}$ $\quad i = 1, 2, ----, n$
$k = 1, 2, ----, n$ (I.2.1)

Uit de uitdrukking (I.2.1) zijn u_{ik} en l_{ik} op te lossen.

We gaan uit van twee voorwaarden:

a) $j \leqslant i$:

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{jk} + l_{ii}\, u_{ik} \quad (l_{ii} = 1)$$

Uit deze vergelijking is u_{ik} op te lossen:

$$u_{ik} = a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, u_{jk} \quad \text{met} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots . n \\ k = i, i+1, \ldots n \end{array} \qquad \text{(I.2.2)}$$

b) $j \leqslant k$:

$$a_{ik} = \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}\, u_{jk} + l_{ik}\, u_{kk}$$

Uit deze vergelijking is l_{ik} op te lossen:

$$l_{ik} = \frac{a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}\, u_{jk}}{u_{kk}} \cdot \text{met} \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots . n \\ i = k+1, k+2, \ldots n \end{array} \qquad \text{(I.2.3)}$$

Achtereenvolgens worden dus berekend:

de 1e rij van U, de 1e kolom van L, de 2e rij van U, de 2e kolom van L enz.

$A\underline{X} = y$ kan nu geschreven worden als $L.U\underline{x} = \underline{y}$. Stel nu $U\underline{x} = \underline{z}$ dan volgt hieruit dat $L\underline{z} = \underline{y}$.
Uit $L\underline{z} = \underline{y}$ wordt $\underline{z}$ opgelost:

$$z_i = y_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}\, z_j \quad \text{voor } i = 1, 2, 3, \ldots . n \qquad \text{(I.2.4)}$$

Uit de vergelijking $U\underline{x} = \underline{z}$ is dan vervolgens $\underline{x}$ op te lossen:

$$x_i = \frac{z_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}\, x_j}{u_{i,i}} \quad \text{voor } i = n, n-1, \ldots ., 1 \qquad \text{(I.2.5)}$$

I.3 De tridiagonale matrix en de daarop toegepaste L.U-Decompositie.

De coefficienten matrix A heet tridiagonaal als de coefficienten van de matrix alle nul zijn, behalve op de hoofddiagonaal en op de twee naastliggende diagonalen.

$$A = (a_{ij})_n^n \quad \text{met} \quad \begin{array}{ll} a_{ij} \neq o & \text{als } |i - j| \leqslant 1 \\ a_{ij} = o & \text{als } |i - j| \geqslant 2 \end{array}$$

Als we nu de L.U. Decompositie toepassen op deze matrix dan wordt het volgende resultaat verkregen.

$$U = (u_{ik})_n^n \quad \text{met} \quad \begin{array}{ll} u_{ik} \neq o & \text{als } o < k-1 \leqslant i \leqslant k \\ u_{ik} = o & \text{als } k < i \leqslant k-2 \end{array} \qquad \text{(I.3.1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_{ii} = a_{ii} - l_{i,i-1}\, u_{i-1,i} \\ u_{i,i+1} = a_{i,i+1} \end{array}\right\} \quad i = 1, 2, 3, \ldots . n \qquad \text{(I.3.2)}$$

$$L = (l_{ik})_n^{\,n} \quad \text{met} \quad \begin{array}{l} l_{ik} \neq o \quad \text{als} \quad k \leqslant i \leqslant k+1 \\ l_{ik} = o \quad \text{als} \quad k+2 \leqslant i < k \end{array} \qquad (I.3.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} l_{kk} = 1 \\ l_{k+1,k} = a_{k+1,k}/u_{kk} \end{array} \right\} \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n \qquad (I.3.4)$$

In de coefficienten matrices A, L en U komen een aantal $(n^2 - 3n + 2)$ nullen voor, hoe groter het formaat van de matrix des te meer nullen er voor gaan komen.
In het computerprogramma worden de matrices zo danig opgenomen, dat zo weinig mogelijk geheugen ruimte wordt gebruikt.
Ten behoeve hiervan wordt op de matrices een transformatie toegepast.

a) Transformatie van $A = (a_{ij})_n^{\,n}$ naar $B = (b_{ij})_n^{\,3}$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & o & o & \cdots & & o \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & o & \cdots & & o \\ o & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & & o \\ o & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ o & o & o & & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ o & o & o & o \cdots\cdots & & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & o \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & b_{n2} & o \end{bmatrix} = (b_{ij})_n^{\,3} \quad \text{met} \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{11} = a_{11} \quad b_{12} = a_{12} \quad b_{13} = a_{13} = o \\ b_{k1} = a_{k,k-1} \quad b_{k2} = a_{kk} \quad b_{k3} = a_{k,k+1} \\ \text{voor } k = 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n \\ \\ \text{als } k = n \text{ dan is } b_{k3} = a_{k,k+1} = o \end{array} \right.$$

b) Tranformatie van $L = (l_{ij})_n^{\,n}$ naar $L\emptyset = (l\emptyset_{i,j})_n^{\,2}$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & O \\ l_{21} & 1 & & \\ & l_{32} & 1 & \\ O & & \ddots & \ddots \\ & & l_{n,n-1} & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$L\emptyset = \begin{bmatrix} 1 & o \\ l\emptyset_{2,1} & 1 \\ l\emptyset_{3,1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ l\emptyset_{n,1} & 1 \end{bmatrix} = (l\emptyset)_n^{\,2} \quad \text{met} \quad \left\{ \begin{array}{l} l\emptyset_{1,1} = l_{1,1} \quad l\emptyset_{1,2} = o \\ l\emptyset_{k,1} = l_{k,k-1} \quad l\emptyset_{k,2} = 1 \text{ voor} \\ k = 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n \end{array} \right.$$

c) Transformatie van $U = (u_{i,j})_n^n$ naar $UP = (up_{i,j})_n^2$

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{1,2} & & & & \\ & u_{2,2} & u_{2,3} & & O & \\ & & u_{3,3} & u_{3,4} & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & O & & & u_{n-1,n-1} & u_{n-1,n} \\ & & & & & u_{n,n} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$UP = \begin{bmatrix} up_{1,1} & up_{1,2} \\ up_{2,1} & up_{2,2} \\ up_{3,1} & up_{3,2} \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ up_{n-1,1} & up_{n-1,2} \\ up_{n,1} & o \end{bmatrix} = (up_{i,j})_n^2 \text{ met } \begin{cases} up_{1,1} = u_{1,1} \quad up_{1,2} = u_{1,2} \\ up_{k,1} = u_{k,k} \quad up_{k,2} = u_{k,k+1} \text{ voor} \\ k = 2, 3, \ldots \ldots n \text{ als} \\ k = n \text{ dan is } up_{k,2} = u_{k,k+1} = o \end{cases}$$

Door deze transformatie veranderen ook de recursieve uitdrukkingen voor het oplossen van respectievelijk $\underline{z}$ en $\underline{x}$ uit de vergelijkingen (I.2.4) resp. (I.2.5).

$L\,\underline{z} = \underline{y} \quad \rightarrow \quad LO\,\underline{z} = \underline{y}$

$z_1 = y_1 \quad \rightarrow \quad z_1 = y_1$

$$z_i = y_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j}\, z_j \quad \rightarrow \quad z_i = y_i - l\emptyset_{i,1}\, z_{i-1} \quad \text{voor } i = 2, 3, \ldots n \quad (I.3.5)$$

$U\,\underline{x} = \underline{z} \quad \rightarrow \quad UP\,\underline{x} = z$

$x_n = z_n/u_{nn} \quad \rightarrow \quad x_n = z_n/up_{n,1}$

$$x_i = \frac{z_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{i,j}\, x_j}{u_{i,i}} \quad \rightarrow \quad x_i = \frac{z_i - up_{i,2}\, x_{i+1}}{u_{i,i}} \quad \text{voor } i = n-1, n-2, \ldots 1$$

(I.3.6)