Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

De Banach-Tarski paradox en het keuzeaxioma

(Engelse titel: The Banach-Tarski paradox and the axiom of choice)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Ike Mulder

Delft, Nederland
Maart 2017

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“De Banach-Tarski paradox en het keuzeaxioma”

(Engelse titel: “The Banach-Tarski paradox and the axiom of choice”)

Ike Mulder

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. K.P. Hart

Overige commissieleden

Dr. J.A.M. de Groot

Dr. C. Kraaikamp

Maart 2017

Delft

Samenvatting

Het is mogelijk om een bal in vijf stukken te verdelen, welke na draaien en verplaatsen weer bij elkaar te zetten zijn in twee ballen identiek aan de eerste. Dit resultaat is in 1924 door Stefan Banach en Alfred Tarski bewezen [1], en laat zien dat er geen goede volume-afbeelding te definiëren is op alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$. Dit onverwachte resultaat ondervond in het begin veel weerstand vanwege het gebruik van het keuzeaxioma, maar wordt tegenwoordig alom geaccepteerd.
Verdeeld over drie hoofdstukken bouwen we de achterliggende theorie van de grond af op om uiteindelijk de Banach-Tarski paradox te bewijzen. We bespreken daarna de oorzaak en de implicaties van de paradox. Ten slotte zullen we de rol van het keuzeaxioma nog behandelen.

Het boek van Stan Wagon [10] is als basis gebruikt voor een groot deel van de theorie. Verder heb ik ook veel inzicht gekregen door de originele artikelen van Hausdorff [4] en Banach en Tarski [1] te bestuderen. Met behulp van deze bronnen is dit op zich zelf staande verslag samengesteld.

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Gelijkverdeelbaarheid

We zoeken eerst naar een handige relatie $\sim$ tussen deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, die volume invariant zou moeten laten. Dat wil zeggen; stel we hadden een volume-afbeelding $\lambda : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ dan zou voor $A, B \subset \mathbb{R}^n$ moeten gelden dat als $A \sim B$ dan $\lambda(A) = \lambda(B)$.
Deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zouden in relatie moeten staan, als we ze in eindig veel stukken kunnen hakken die op elkaar af te beelden zijn. Niet alle afbeeldingen zijn toegestaan: we willen immers het volume gelijk houden. We bekijken hierom zogenaamde isometriën, afbeeldingen die afstand bewaren. In $\mathbb{R}^n$ zijn dit slechts rotaties, spiegelingen en translaties of samenstellingen van deze, en in $\mathbb{R}^n$ zijn isometriën bovendien bijectief. De afstand tussen twee punten $a, b \in \mathbb{R}^n$ noteren we met $d(a, b)$.

Definitie 1.1. Een afbeelding $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ is een *isometrie* als $d(\phi(a), \phi(b)) = d(a, b)$ voor alle $a, b \in \mathbb{R}^n$.

Nu kunnen we definiëren wat het betekent als verzamelingen op elkaar af te beelden zijn.

Definitie 1.2. Deelverzamelingen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ zijn *congruent* als er een isometrie ϕ bestaat waarvoor geldt dat $\phi(A) = B$. Notatie: $A \cong B$

Nu hebben we genoeg om gelijkverdeelbaarheid te definiëren.

Definitie 1.3. Deelverzamelingen $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ heten *gelijkverdeelbaar* (we gebruiken de notatie: $A \sim B$) als er rijen deelverzamelingen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ van A en $B_1, B_2, \ldots, B_n$ van B bestaan waarvoor geldt:

1. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ en $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B$
2. $A_i \cap A_j = \emptyset = B_i \cap B_j$ als $i \neq j$
3. $A_i \cong B_i$ voor alle i

Het is intuïtief duidelijk dat als $A \sim B$ en $B \sim C$ dan $A \sim C$. Het aantal stukken dat nodig is om te laten zien dat A met B en B met C gelijkverdeelbaar is hoeft echter niet overeen te komen, dus hier moeten we nog een beetje werk voor verrichten.

Lemma 1.4. *Zij $A, B, C \subseteq \mathbb{R}^n$ met $A \sim B$ en $B \sim C$. Dan $A \sim C$.*

Bewijs. Neem verzamelingen A_i en B_i voor $i = 1, \ldots, n$ die laten zien dat $A \sim B$ en evenzo verzamelingen B'_k en C_k voor $k = 1, \ldots, m$ die laten zien dat $B \sim C$. Neem voor elke $i \leq n$ een isometrie ϕ_i met $\phi_i(A_i) = B_i$. Neem ook isometriën χ_k zó dat $\chi_k(B'_k) = C_k$.
Definieer $A_{i,k} = A_i \cap \phi_i^{-1}(B'_k)$, $B_{i,k} = B_i \cap B'_k$ en $C_{i,k} = \chi_k(B_i) \cap C_k$. Hierbij bestaat $\phi_i^{-1}(B'_k)$ omdat isometriën bijectief zijn.

Opmerking. Een samenstelling van isometriën $\nu\mu$ is weer een isometrie: immers $d((\nu\mu)(a),(\nu\mu)(b)) = d(\nu(\mu(a)),\nu(\mu(b))) = d(\mu(a),\mu(b)) = d(a,b)$.
We laten nu zien dat met $A_{i,k}$ en $C_{i,k}$ er geldt dat $A \sim C$:

1. Aangezien we gebruik maken van twee indices i en k moeten we laten zien dat de volgende gelijkheid geldt: $\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{m} A_{i,k} = A$.

$$\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{m} A_{i,k} = \bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{m} A_i \cap \phi_i^{-1}(B'_k) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcup_{k=1}^{m} \phi_i^{-1}(B'_k)$$

   Merk nu op dat $\bigcup_{k=1}^{m} \phi_i^{-1}(B'_k) = \phi_i^{-1}(\bigcup_{k=1}^{m} B'_k) = \phi_i^{-1}(B)$. Verder is $B_i \subseteq B$, dus $A_i = \phi_i^{-1}(B_i) \subseteq \phi_i^{-1}(B)$ en dus $A_i \cap \phi_i^{-1}(B) = A_i$:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcup_{k=1}^{m} \phi_i^{-1}(B'_k) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \phi_i^{-1}(B) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$

   De aanpak voor C is hetzelfde, we vinden eerst dat:

$$\bigcup_{i=1}^{n}\bigcup_{k=1}^{m} C_{i,k} = \bigcup_{k=1}^{m}\bigcup_{i=1}^{n} C_k \cap \chi_k(B_i) = \bigcup_{k=1}^{m} C_k \cap \bigcup_{i=1}^{n} \chi_k(B_i)$$

   Opnieuw is $\bigcup_{i=1}^{m} \chi_k(B_i) = \chi_k(\bigcup_{i=1}^{m} B_i) = \chi_k(B)$ en aangezien $B'_k \subseteq B$ is $C_k = \chi_k(B'_k) \subseteq \chi_k(B)$ dus $C_k \cap \chi_k(B) = C_k$ en we zien:

$$\bigcup_{k=1}^{m} C_k \cap \bigcup_{i=1}^{n} \chi_k(B_i) = \bigcup_{k=1}^{m} C_k \cap \chi_k(B) = \bigcup_{k=1}^{m} C_k = C$$

2. $A_{i,k} \cap A_{j,l} = A_i \cap \phi_i^{-1}(B'_k) \cap A_j \cap \phi_i^{-1}(B'_l)$. Als $i \neq j$ dan $A_i \cap A_j = \emptyset$ en als $k \neq l$ dan $B'_k \cap B'_l = \emptyset$ dus we zien dat de stukken onderling disjunct zijn als $(i,k) \neq (j,l)$. Evenzo voor C:

   $C_{i,k} \cap C_{j,l} = \chi_k(B_i) \cap C_k \cap \chi_k(B_j) \cap C_l$. Op dezelfde manier zijn de stukken onderling disjunct.

3. $\chi_k(\phi_i(A_{i,k})) = \chi_k(\phi_i(A_i \cap \phi_i^{-1}(B'_k))) = \chi_k(B_i \cap B'_k) = \chi_k(B_i) \cap C_k = C_{i,k}$ dus $A_{i,k} \cong C_{i,k}$.

We zien dat $A \sim C$. □

Hier mee zien we dat $\sim$ een transitieve relatie is. Het is duidelijk dat $\sim$ symmetrisch ($A \sim B \iff B \sim A$) en reflexief ($A \sim A$) is. Er geldt dus dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
Een volgend handig begrip met betrekking tot gelijkverdeelbaarheid is het 'kleiner zijn dan'. We definiëren dit als volgt.

Definitie 1.5. Zij $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. We definiëren de relatie $A \preceq B$ met $A \preceq B$ als er een deelverzameling $C \subseteq B$ bestaat zodat $A \sim C$.

Een handige eigenschap zou nu zijn dat als $A \preceq B$ en $B \preceq A$ dan $A \sim B$. Dit blijkt inderdaad zo te zijn. Om dit aan te tonen hebben we eerst twee lemma's nodig:

Lemma 1.6. *Zij $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$. Als $A \sim B$ dan is er een bijectie $\phi : A \to B$ zó dat $C \sim \phi(C)$ als $C \subseteq A$ en $D \sim \phi^{-1}(D)$ als $D \subseteq B$.*

Bewijs. Zij $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ en $C \subseteq A$ en $D \subseteq B$. Neem A_i en B_i voor $i = 1, \ldots, n$ die laten zien dat $A \sim B$ en ϕ_i die laten zien dat $A_i \cong B_i$. Definieer nu $\phi : A \to B$ met $\phi(a) = \phi_i(a)$ als $a \in A_i$. Aangezien $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$ hebben we nu voor alle $a \in A$ de functie ϕ gedefinieerd, en volgt uit de eigenschappen van $A \sim B$ dat ϕ een bijectie is. We definiëren nu $C_i = C \cap A_i$ en $\phi(C)_i = \phi(C_i)$. Met de bijectiviteit van ϕ en $A \sim B$ volgt nu gelijk:

- $\bigcup_{i=1}^n C_i = C$
- $\bigcup_{i=1}^n \phi(C)_i = \bigcup_{i=1}^n \phi(C_i) = \phi(\bigcup_{i=1}^n C_i) = \phi(C)$
- $C_i \cap C_j = \emptyset$ dan en slechts dan als $i \neq j$
- $\phi(C)_i \cap \phi(C)_j = \phi(C_i) \cap \phi(C_j) = \emptyset$ dan en slechts dan als $i \neq j$

Verder is $\phi(C_i) = \phi_i(C_i)$ en aangezien ϕ_i een isometrie is geldt nu $C_i \cong \phi(C)_i$. We concluderen dat $C \sim \phi(C)$.
Met dezelfde ϕ bewijzen we ook de tweede identiteit. Definieer $D_i = D \cap B_i$ en $\phi^{-1}(D)_i = \phi^{-1}(D_i)$. Opnieuw volgt gelijk:

- $\bigcup_{i=1}^n D_i = D$
- $\bigcup_{i=1}^n \phi^{-1}(D)_i = \bigcup_{i=1}^n \phi^{-1}(D_i) = \phi^{-1}(\bigcup_{i=1}^n D_i) = \phi^{-1}(D)$
- $D_i \cap D_j = \emptyset$ dan en slechts dan als $i \neq j$
- $\phi^{-1}(D)_i \cap \phi^{-1}(D)_j = \phi^{-1}(D_i) \cap \phi^{-1}(D_j) = \emptyset$ dan en slechts dan als $i \neq j$

Verder zien we dat $\phi^{-1}(D_i) = \phi_i^{-1}(D_i)$ en aangezien ϕ_i^{-1} een isometrie is geldt $D_i \cong \phi^{-1}(D_i)$. We concluderen dat $D \sim \phi^{-1}(D)$. $\square$

Lemma 1.7. *Zij $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ met $A = A_1 \cup A_2$, $B = B_1 \cup B_2$, $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$ en $A_1 \cap A_2 = \emptyset = B_1 \cap B_2$. Dan $A \sim B$.*

Bewijs. Kies A_i^1 en B_i^1 voor $i = 1, \ldots, n$ die laten zien dat $A_1 \sim B_1$, en kies A_j^2 en B_j^2 voor $j = 1, \ldots, m$ die laten zien dat $A_2 \sim B_2$. Merk op dat $\bigcup_{i=1}^n A_i^1 \cup \bigcup_{i=1}^m A_j^2 = A$, dus $\{A_i^1\}_{i=1}^n \cup \{A_j^2\}_{j=1}^m$ kan worden opgevat als een partitie van A. Aangezien $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ zijn deze ook onderling disjunct, en aangezien ze congruent zijn met onderdelen van een partitie van B die ook onderling disjunct zijn, zien we dat nu ook $A \sim B$. $\square$

Nu hebben we de benodigde gereedschappen om de volgende stelling te bewijzen.

Stelling 1.8 (Banach-Schröder-Bernstein)**.** *Zij $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ en $A \preceq B$ en $B \preceq A$. Dan $A \sim B$.*

Bewijs. Neem $B_1 \subseteq B$ met $A \sim B_1$ en $A_1 \subseteq A$ met $B \sim A_1$. Kies nu $f : A \to B_1$ en $g : B \to A_1$ bijecties als in Lemma 1.6. Kies $C_0 = A \setminus A_1$ en definieer C_{n+1} recursief als $g(f(C_n))$. We definieren nu $C = \bigcup_{n=0}^\infty C_n$. Merk op dat:

$$A \setminus C_0 = A \cap C_0^{\mathrm{c}} = A \cap (A \cap A_1^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}} = (A \cap A^{\mathrm{c}}) \cup (A \cap A_1) = A_1$$

Als we nu $A \setminus C$ uitschrijven en C_0 apart nemen krijgen we:

$$A \setminus C = A \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \right)^{\mathrm{c}} = A \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n^{\mathrm{c}} \right) = A \cap C_0^{\mathrm{c}} \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^{\mathrm{c}} \right)$$

We zagen net dat $A \setminus C_0 = A_1$, dus we vinden nu dat

$$A \setminus C = A_1 \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right)^{\mathrm{c}} = A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

We laten nu zien dat $g^{-1}(A \setminus C) = B \setminus f(C)$. Er geldt dat:

$$g^{-1}(A \setminus C) = g^{-1}(A_1 \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n) = g^{-1}(A_1) \setminus g^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right)$$

Uit de definitie van C_n vinden we dat $\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} g(f(C_n))$. Passen we hier g^{-1} op toe en halen we de f buiten de vereniging, dan zien we dat:

$$g^{-1}(A \setminus C) = g^{-1}(A_1) \setminus g^{-1} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right) = B \setminus f \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n \right) = B \setminus f(C)$$

Herinner dat voor $D \subseteq A_1$ geldt dat $D \sim g^{-1}(D) \subseteq B$ wegens de definitie van g met behulp van Lemma 1.6. Aangezien $A \setminus C \subseteq A_1$ moet $A \setminus C \sim g^{-1}(A \setminus C) = B \setminus f(C)$. Verder is $C \subseteq A$ en uit de eigenschap van f vinden we dat $C \sim f(C)$. Ten slotte combineren we dit met behulp van Lemma 1.7: aangezien $(A \setminus C) \cap C = \emptyset$ en $(B \setminus f(C)) \cap f(C) = \emptyset$ vinden we $(A \setminus C) \cup C \sim (B \setminus f(C)) \cup f(C)$, oftewel $A \sim B$. $\square$

Dit is eigenlijk een speciaal geval van een dieper resultaat, namelijk dat als er injecties $f : A \to B$ en $g : B \to A$ bestaan, dan bestaat er een bijectie $h : A \to B$. De stelling werd met bewijs het eerst gepresenteerd door Bernstein en verscheen voor het eerst in een boek van Borel [3].

Hoofdstuk 2

Paradox van Hausdorff

Nu we het begrip gelijkverdeelbaarheid hebben gedefinieerd en enkele handige eigenschappen hebben bewezen, is het interessant om te kijken welke deelverzamelingen A en B van $\mathbb{R}^3$ gelijkverdeelbaar zijn. Hausdorff liet in zijn 'Grundzüge der Mengenlehre' [4] in 1914 al zien dat het op het oog vriendelijke begrip gelijkverdeelbaarheid toch wat vreemde dingen voortbrengt. In dit hoofdstuk zal de paradox die hij construeerde worden behandeld, al met een wat recentere aanpak van Barbara Osofsky [7]. Om deze te begrijpen zullen we ons eerst wat moeten verdiepen in wat algebra, namelijk die van vrije groepen van orde 2.

2.1 Vrije groepen van orde 2

De Hausdorff Paradox maakt op een handige manier gebruik van rotaties in $\mathbb{R}^3$. De rotatiegroep van $\mathbb{R}^3$ bevat een vrije groep van orde 2, en deze heeft wat opmerkelijke eigenschappen. We herhalen nog even de definitie van een groep, en definiëren daarna de vrije groep van orde 2.

Definitie 2.1. Zij G een verzameling en $\circ$ een binaire operatie met de volgende eigenschappen:

- $\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- $\exists 1 \in G : \forall a \in G \; a \circ 1 = 1 \circ a = a$
- $\forall a \in G : \exists d \in G \; a \circ d = d \circ a = 1$. Notatie voor dit element: a^{-1}

Dan heet G een *groep.*

Neem nu $S = \{\tau, \sigma\}$. We nemen F de verzameling van gereduceerde woorden met letters in $S \cup S^{-1}$ en definieren samenvoeging van woorden als operatie op F, notatie $\circ$. *Gereduceerde* woorden zijn woorden zonder de achtereenvolgende letters $\chi\chi^{-1}$ of $\chi^{-1}\chi$ voor $\chi \in S$. Halen we deze paren weg uit een samenvoeging van twee woorden dan is deze equivalent met een gereduceerd woord, en we zien dat $\circ$ nu een groepsoperatie definieerd op F. We laten nog even wat voorbeelden zien van woorden, gereduceerde woorden en samenvoegingen om een wat duidelijkere blik te krijgen op F:

Woorden:	$\tau, \tau\tau^{-1}\sigma, \sigma\sigma\tau\sigma\tau\tau^{-1}\sigma$
Gereduceerde woorden:	$\tau, \sigma, \sigma\sigma\tau\sigma\sigma$
Samenvoeging:	$\tau \circ \sigma = \tau\sigma$
Samenvoeging:	$\tau\sigma \circ \sigma^{-1}\tau = \tau\tau$

Deze F noemen we de vrije groep van orde 2. Deze heeft een bijzondere eigenschap:

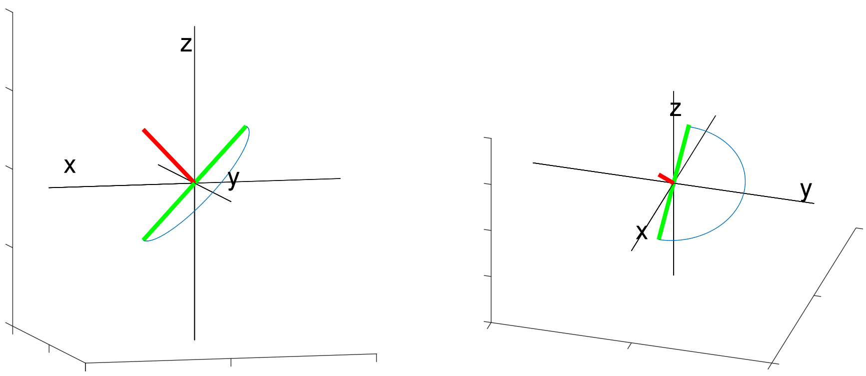
Lemma 2.2. *Neem F de vrije groep van orde 2 met τ en σ de generatoren van F. Dan bestaan er onderling disjuncte A_1, A_2, B_1 en B_2 zó dat $F = A_1 \cup \sigma A_2 = B_1 \cup \tau B_2$.*

Bewijs. Herinner dat F de verzameling gereduceerde woorden in $S \cup S^{-1}$ is. Definieer $W(\rho)$ als de deelverzameling van F die alle gereduceerde woorden bevat die (links) beginnen met ρ. Neem nu $A_1 = W(\sigma)$, $A_2 = W(\sigma^{-1})$, $B_1 = W(\tau)$ en $B_2 = W(\tau^{-1})$: deze verzamelingen zijn onderling disjunct. We zien gelijk dat nu $F = \{1\} \cup W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1})$. Verder is $F = W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1})$, immers voor $h \in F \setminus W(\sigma)$ geldt $\sigma^{-1}h \in W(\sigma^{-1})$ dus $h = \sigma\sigma^{-1}h \in \sigma W(\sigma^{-1})$. Zo ook voor τ. $\square$

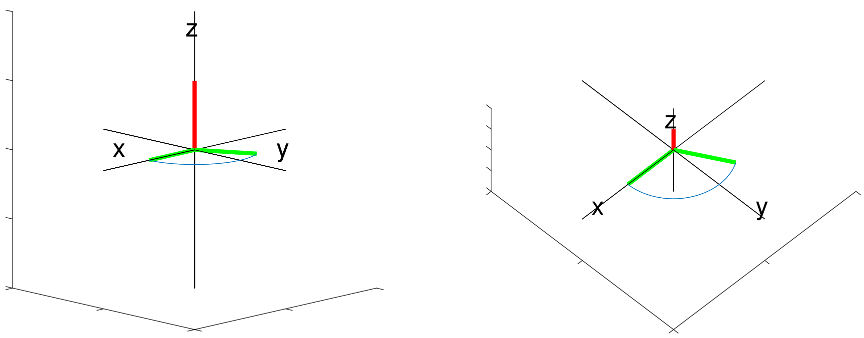
Dit is de eerste stap richting de Banach-Tarski paradox: we 'delen' F in 4 stukken en kunnen van deze 4 stukken twee versies van F maken. In het volgende hoofdstuk gaan we zo'n vrije groep vinden in de rotaties van $\mathbb{R}^3$.

2.2 Onafhankelijke rotaties in $\mathbb{R}^3$

We zijn nu klaar voor de constructie van Osofsky. We bekijken twee rotaties, ψ en ϕ. We definiëren ψ als de rotatie om de z-as met een hoek van $2\pi/3$ radialen, en ϕ als de rotatie om de as gegenereerd door $(1, 0, 1)$ (in het xz-vlak) met een hoek van π radialen. Met behulp van Matlab zijn figuren 2.1 en 2.2 gemaakt: de rode lijn stelt de rotatie-as voor, de rotatie draait de groene lijn via de blauwe hoek in de andere groene lijn.



Figuur 2.1: De rotatie ϕ



Figuur 2.2: De rotatie ψ

ψ en ϕ worden als volgt gerepresenteerd als matrices:

$$\psi^{\pm 1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\mp\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\pm\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

We zijn geïnteresseerd in producten van de twee matrices. Merk op dat $\phi^2 = \psi^3 = 1$ (dit volgt gelijk uit de definities) en we zien dat $\psi^{-1} = \psi^2$. Woorden in ψ en ϕ zijn in ons geval matrixproducten. We bekijken eerst producten van de vorm $\psi^{k_1}\phi\psi^{k_2}\phi \dots \psi^{k_n}\phi$ met $k_1, \dots, k_n \in \{1, -1\}$. Dat is ten eerste $\psi^{\pm 1}\phi$:

$$\psi^{\pm 1}\phi = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \pm\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \pm\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Merk op dat deze als volgt te schrijven is:

$$\psi^{\pm 1}\phi = \frac{1}{2^n} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}\sqrt{3} & m_{13} \\ m_{21}\sqrt{3} & m_{22} & m_{23}\sqrt{3} \\ m_{31} & m_{32}\sqrt{3} & m_{33} \end{bmatrix}$$

waarbij $n \geq 1$ en $m_{11}, m_{21}, m_{31}, m_{32}$ en m_{33} allemaal even getallen zijn, en m_{12}, m_{13}, m_{22} en m_{23} oneven. We laten nu zien dat een willekeurig product $\psi^{k_1}\phi\psi^{k_2}\phi \dots \psi^{k_n}\phi$ ook zo is te schrijven. Dit volgt met behulp van inductie als volgt. De bewering geldt in ieder geval voor $\psi^{\pm 1}\phi$, te zien in de expliciete berekening van $\psi^{\pm 1}\phi$. Stel nu deze bewering geldt voor een product ν van $n-1$ factoren $\psi^{\pm 1}\phi$. We berekenen nu $\mu = \nu\psi^{\pm 1}\phi$, een product van n factoren $\psi^{\pm 1}\phi$:

$$\nu \cdot \psi^{\pm 1}\phi = \frac{1}{2^{n-1}} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12}\sqrt{3} & m_{13} \\ m_{21}\sqrt{3} & m_{22} & m_{23}\sqrt{3} \\ m_{31} & m_{32}\sqrt{3} & m_{33} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \pm\sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \pm\sqrt{3} \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mu = \frac{1}{2^n} \begin{bmatrix} 2m_{13} & (m_{12} \pm m_{11})\sqrt{3} & -m_{11} \pm 3m_{12} \\ 2m_{23}\sqrt{3} & m_{22} \pm 3m_{21} & (-m_{21} \pm m_{22})\sqrt{3} \\ 2m_{33} & (m_{32} \pm m_{31})\sqrt{3} & -m_{31} \pm 3m_{32} \end{bmatrix}$$

Uit de gevonden matrix valt snel af te lezen dat de bewering inderdaad geldt.
Zij nu η een willekeurig product van de beschreven vorm, dat wil zeggen $\eta = \psi^{k_1}\phi\psi^{k_2}\phi \dots \psi^{k_n}\phi$. We claimen dat $\eta \neq 1$. We bekijken de coëfficienten m_{ij} van verschillende relevante matrices nu modulo 2:

$$2\psi^{\pm 1} \equiv \alpha \equiv \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mod 2$$

Nu is

$$\phi \equiv \beta \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{en we nemen:} \quad y = \alpha\beta = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Men berekent eenvoudig dat $y^2 \equiv y \mod 2$. Nu is $2^n\eta \equiv y^n \equiv y$, en we zien dat $\eta \neq 1$. Nu zijn er nog drie productenvormen die we moeten behandelen. We nemen nu ζ een willekeurig product dat niet van de hierboven behandelde vorm is.

- Stel $\zeta = \psi^{k_1}\phi \dots \psi^{k_{n-1}}\phi\psi^{k_n}$. Schrijven we nu $\eta = \psi^{k_1}\phi \dots \psi^{k_{n-1}}\phi$, dan is $\zeta = \eta \cdot \psi^{k_n}$ en η is van de hierboven beschreven vorm. Schrijven we opnieuw de coëfficienten van $2^n\eta$ en $2\psi^{k_n}$ modulo 2, dan vinden we:

$$2^{n+1}\zeta \equiv 2^n\eta \cdot 2\psi^{k_3} \equiv \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mod 2$$
$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mod 2$$

  Hiermee zien we opnieuw dat $\zeta \neq 1$.

- Stel $\zeta = \phi\psi^{k_1}\phi \dots \psi^{k_n}\phi$. We nemen weer $\eta = \psi^{k_1}\phi \dots \psi^{k_n}\phi$ zodat $\zeta = \phi\eta$ en η is van de eerst behandelde vorm. We bekijken de coëfficenten van $2^n\eta$ en ϕ modulo 2 en vinden:

$$2^n\zeta \equiv \phi \cdot 2^n\eta \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mod 2$$
$$\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \mod 2$$

  Hiermee zien we wederom dat $\zeta \neq 1$.

- Stel $\zeta = \phi\psi^{k_1}\phi \dots \phi\psi^{k_n}$. We nemen nu $\xi = \psi^{k_1}\phi \dots \phi\psi^{k_n}$ zodat $\zeta = \phi\xi$ en ξ is nu van de vorm zoals in het eerste item. Schrijven we de coëfficienten van $2^{n+1}\xi$ en ϕ modulo 2 dan vinden we:

$$2^{n+1}\zeta \equiv \phi \cdot 2^{n+1}\zeta \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mod 2$$
$$\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

  Dit betekent weer dat $\zeta \neq 1$.

Dit betekent dat twee verschillende producten van ψ en ϕ nooit aan elkaar gelijk kunnen zijn in matrixrepresentatie! We construeren nu $\mathcal{R} = \langle \psi, \phi \rangle$, de groep van rotaties voortgebracht door ψ en ϕ. $\mathcal{R}$ is zelf geen vrije groep van orde 2 zoals in de vorige paragraaf, immers is het woord $\phi\phi = \phi\phi^{-1}$ gelijk aan het lege woord. We gaan nu laten zien dat $\mathcal{R}$ wel een vrije groep van orde 2 bevat als ondergroep.
We bekijken de rotaties $\sigma = \psi\phi\psi$ en $\tau = \phi\psi\phi\psi\phi$. We kunnen gemakkelijk zien dat deze oneindige orde hebben: de lengte van de gereduceerde woorden van hogere machten wordt namelijk steeds langer:

	σ	τ	σ^{-1}	τ^{-1}
1	$\psi\phi\psi$	$\phi\psi\phi\psi\phi$	$\psi^2\phi\psi^2$	$\phi\psi^2\phi\psi^2\phi$
2	$\psi\phi\psi^2\phi\psi$	$\phi\psi\phi\psi^2\phi\psi\phi$	$\psi^2\phi\psi\phi\psi^2$	$\phi\psi^2\phi\psi\phi\psi^2\phi$
3	$\psi\phi\psi^2\phi\psi^2\phi\psi$	$\phi\psi\phi\psi^2\phi\psi^2\phi\psi\phi$	$\psi^2\phi\psi\phi\psi\phi\psi^2$	$\phi\psi^2\phi\psi\phi\psi\phi\psi^2\phi$
4	$\psi\phi\psi^2\phi\psi^2\phi\psi^2\phi\psi$	$\phi\psi\phi\psi^2\phi\psi^2\phi\psi^2\phi\psi\phi$	$\psi^2\phi\psi\phi\psi\phi\psi\phi\psi^2$	$\phi\psi^2\phi\psi\phi\psi\phi\psi\phi\psi^2\phi$

We nemen nu $\mathcal{S} = \langle \sigma, \tau \rangle$, dat wil zeggen, alle woorden met $\sigma^{\pm 1}$ of $\tau^{\pm 1}$ als letters, en we nemen v en w elementen van $\mathcal{S}$. We willen laten zien dat als v en w als rotaties gelijk zijn, ze dat ook zijn als gereduceerde woorden in σ en τ. Stel dus dat v gelijk is aan w als rotatie. Dan moeten v en w als gereduceerde woorden in ψ en ϕ aan elkaar gelijk zijn. Dat wil zeggen dat v en w ook met dezelfde letter beginnen. Er zijn vier opties: v en w beginnen met $\psi, \psi^2, \phi\psi$ of $\phi\psi^2$. Uit de tabel kunnen we zien dat dit correspondeert met dat v of w begint met respectievelijk $\sigma, \sigma^{-1}, \tau$ en τ^{-1}: noem deze eerste letter χ. Vermenigvuldigen we nu v en w met χ^{-1} dan worden v en w korter als gereduceerd woord in ψ en ϕ. Deze methode kunnen we herhalen op $\chi^{-1}v$ en $\chi^{-1}w$ totdat het resterende woord leeg is, en dan zien we gelijk dat v gelijk is aan w als woord in ϕ en ψ.
We gaan nu verder met $\mathcal{S} = \langle \psi\phi\psi, \phi\psi\phi\psi\phi \rangle$ voor de Hausdorff Paradox.

2.3 Hausdorff Paradox

Voordat we de volledige bol gaan verdubbelen behandelen we eerst een zwakker resultaat: de Hausdorff Paradox. We bekijken de rotaties van $\mathcal{S}$ op de bolschil met straal 1 in $\mathbb{R}^3$. Deze wordt in literatuur S^2 genoemd, wij nemen deze notatie over: $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. We willen nu S^2 opdelen in stukken en dan iets soortgelijks doen als bij het opdelen van de vrije groep in de eerste paragraaf. Daar gold echter dat elk element uniek te representeren was als product. Dit geldt dus in onze rotatiegroep $\mathcal{S}$, maar niet als we deze toepassen op de bolschil S^2. Neem namelijk een rotatie $\mu \in \mathcal{S}$, en een punt $x \in S^2$ dat op de rotatieas van μ ligt. Hier zijn er precies twee van, en voor deze x geldt dat $x = \mu(x) = \mu(\mu(x))$: alle machten van μ beelden x af op x.
Hier kunnen we echter omheen werken, als we een 'basis' kiezen en de rotatieassen weghalen. $\mathcal{S}$ is aftelbaar en per element zijn er 2 punten in S^2 die op de rotatieas liggen: halen we al deze punten weg, dan hebben we nog 'bijna' alle punten van S^2. We definiëren nu $Q = \{x \in S^2 : \exists \rho \in \mathcal{S} \setminus \{1\} \text{ met } \rho(x) = x\}$ en bekijken $P = S^2 \setminus Q$. P is nu net als S^2 een overaftelbare verzameling. We laten nu expliciet zien dat we P met de rotaties in $\mathcal{S}$ kunnen verdubbelen.

Stelling 2.3 (Hausdorff Paradox)**.** *Er bestaan twee disjuncte deelverzamelingen A en B van P zó dat $P \sim A \sim B$.*

Bewijs. Noteer $\mathcal{S}x = \{g(x) : g \in \mathcal{S}\}$ voor de *baan* van x in S^2 onder de werking van $\mathcal{S}$. We zeggen $x \overset{\mathcal{S}}{\sim} y$ als $x \in \mathcal{S}y$. Aangezien $\mathcal{S}$ een groep is volgt automatisch dat deze relatie symmetrisch, transitief en reflexief is, dus $\overset{\mathcal{S}}{\sim}$ is een equivalentierelatie. Nu kunnen we S^2 partitioneren in equivalentieklassen: we nemen $\mathcal{M} = \{\mathcal{S}x : x \in S^2\}$. Er geldt voor $s, t \in \mathcal{M}$ (dus $s, t \subseteq S^2$) dat $s = t$ of $s \cap t = \emptyset$: $\mathcal{S}$ is immers een equivalentierelatie.
We laten nu zien dat Q invariant is onder de werking van $\mathcal{S}$, dus dat voor $q \in Q$ geldt dat $\mathcal{S}q \subseteq Q$. Neem namelijk $\alpha \in \mathcal{S}$ willekeurig, en $\beta \in \mathcal{S} \setminus \{1\}$ zó dat $\beta q = q$. Dan is nu αq een punt op de rotatie-as van $\alpha\beta\alpha^{-1}$, dus $\alpha q \in Q$. Dit werkt ook de andere kant op: als $\alpha q \in Q$, dan $\alpha^{-1}\alpha q = q \in Q$. We zien dus dat voor elementen $s \in \mathcal{M}$ geldt dat $s \subset Q$ of $s \subset P$. We bekijken daarom nu $\mathcal{M}' = \{\mathcal{S}x : x \in P\}$.
Met behulp van het keuzeaxioma (zie hoofdstuk 5) nemen we nu $M \subset P$, die precies één element uit elke equivalentieklasse in $\mathcal{M}'$, dus uit elke baan in P, bevat. Nu is $\{g(M) : g \in \mathcal{S}\}$ een partitie van P: Stel immers $g(M) \cap h(M) \neq \emptyset$. Dan bestaan er x en y in $M \subset P$ met $g(x) = h(y)$. Oftewel: $h^{-1}(g(x)) = y$. Dit betekent dat $x \overset{\mathcal{S}}{\sim} y$, maar aangezien M slechts één element uit elke baan bevat moet nu $x = y$. We hebben nu $h^{-1}(g(x)) = x$. Aangezien $x \in P$, dus $x \notin Q$ bestaat er geen element ρ in $\mathcal{S} \setminus \{1\}$ zodat $\rho(x) = x$, dus moet nu $h^{-1}g = 1$, oftewel $g = h$ en dus $g(M) = h(M)$.

We definiëren nu, met de notatie als in Lemma 2.2:

$$W(\rho) = \bigcup \{\mu(M) : \mu \text{ begint (links) met } \rho\}$$

voor $\rho \in \{\sigma, \sigma^{-1}, \tau, \tau^{-1}\}$. We nemen $A_1 = W(\sigma)$, $A_2 = W(\sigma^{-1})$, $B_1 = W(\tau)$ en $B_2 = W(\tau^{-1})$. Nu kunnen we P schrijven als onderling disjuncte vereniging: $P = A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup B_2 \cup M$. Verder geldt: $A_1 \cup \sigma A_2 = A_2 \cup \tau B_2 = P$. Immers: neem $p \in P$ willekeurig. Dan is $p = g(m)$ voor een unieke $m \in M$ en unieke $g \in \mathcal{S}$, waar uniciteit volgt uit hierboven. Als g met σ begint, dan $p \in A_1$. Zo niet, dan $\sigma^{-1} g(m) \in W(\sigma^{-1}) = A_2$, dus zeker $g(m) \in \sigma A_2$. We doen hetzelfde voor τ en hebben zo $P = A_1 \cup \sigma A_2 = B_1 \cup \tau B_2$. Definiëren we nu $A = A_1 \cup A_2$ en $B = B_1 \cup B_2$ dan vinden we $P \sim A \sim B$. □

Dit resultaat kunnen we nog iets mooier maken. In het bewijs van Stelling 2.3 maken we een partitie van P: $P = W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \cup W(\tau) \cup W(\tau^{-1}) \cup M$. We gebruiken echter de verzameling M niet in de verzamelingen A en B die gelijkverdeelbaar zijn met P. Dit kan echter wel, en dat geeft ons de volgende stelling.

Stelling 2.4 (Hausdorff Paradox)**.** *Er bestaan disjuncte deelverzamelingen A en B van P met $A \cup B = P$ en $P \sim A \sim B$.*

Bewijs. Het begin van het bewijs gaat precies hetzelfde als in Stelling 2.3: we construeren $M \subset P$ met één element uit elke equivalentieklasse onder de relatie $\overset{\mathcal{S}}{\sim}$. Nu is vervolgens $\{g(M) : g \in \mathcal{S}\}$ een partitie van P. Verder definiëren we ook weer $W(\rho) = \bigcup \{\mu(M) : \mu \text{ begint (links) met } \rho\}$. Definieer $A_1 = W(\sigma)$, $A_2 = W(\sigma^{-1})$. Neem $U_n = \tau^n(M)$ voor $n \geq 1$, en definieer nu $\overline{U} = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$. Merk op dat $\tau^{-1}\overline{U} = \overline{U} \cup M$. We nemen nu $B_1 = W(\tau) \setminus \overline{U}$ en $B_2 = W(\tau^{-1})$. We hebben nu de partitie $P = A_1 \cup A_2 \cup B_1 \cup \overline{U} \cup B_2 \cup M$. Neem nu $A = A_1 \cup A_2$ en $B = B_1 \cup \overline{U} \cup B_2 \cup M$, en merk op dat $A \cup B = P$ en A en B zijn disjunct. Er geldt $A = W(\sigma) \cup W(\sigma^{-1}) \sim W(\sigma) \cup \sigma W(\sigma^{-1}) = P$.
Merk op dat $\tau^{-1}(W(\tau) \setminus \overline{U}) = \tau^{-1} W(\tau) \setminus \tau^{-1}\overline{U} = \tau^{-1} W(\tau) \setminus (\overline{U} \cup M)$. Hiermee hebben we gelijk:

$$\begin{aligned} B &= \big(W(\tau) \setminus \overline{U}\big) \cup \overline{U} \cup M \cup W(\tau^{-1}) \\ &\sim \tau^{-1} W(\tau) \setminus (\overline{U} \cup M) \cup \overline{U} \cup M \cup W(\tau^{-1}) \\ &= \tau^{-1} W(\tau) \cup W(\tau^{-1}) \\ &= P \end{aligned}$$

□

Hoofdstuk 3

Banach-Tarski paradox

Het resultaat van Hausdorff gaan we in dit hoofdstuk verbeteren. We laten eerst zien dat we de verzameling Q van rotatieassen kunnen verdubbelen - als we dat hebben kunnen we immers de hele bolschil $S^2 = P \cup Q$ verdubbelen.

Lemma 3.1. *Zij D een aftelbare deelverzameling van S^2. Dan is $S^2 \setminus D$ gelijkverdeelbaar met S^2.*

Bewijs. Het volstaat een rotatie ψ te vinden met als eigenschap dat $D, \psi(D), \psi^2(D), \ldots$ onderling disjunct zijn. Als we dat hebben, geldt namelijk dat $\psi^n(D) \subset S^2 \setminus D$ voor $n \geq 1$. Definieer $\overline{D} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \psi^n(D)$ en merk op dat $D = \overline{D} \setminus \psi(\overline{D})$. Dan geldt nu ook dat $S^2 \setminus D = S^2 \setminus (\overline{D} \setminus \psi(\overline{D})) = (S^2 \setminus \overline{D}) \cup \psi(\overline{D})$. Dit zijn de twee stukken waar we gelijkverdeelbaarheid mee kunnen laten zien:

$$S^2 \setminus D = (S^2 \setminus \overline{D}) \cup \psi(\overline{D}) \sim (S^2 \setminus \overline{D}) \cup \psi^{-1}\psi(\overline{D}) = (S^2 \setminus \overline{D}) \cup \overline{D} = S^2$$

Nu moeten we alleen nog zo'n rotatie ψ vinden. Neem l een lijn door de oorsprong die geen punten van D bevat: $l \cap D = \emptyset$. Deze bestaat altijd vanwege de overaftelbaarheid van S^2; aangezien D slechts aftelbaar is zijn er nog ruim genoeg punten over die samen op een lijn door de oorsprong liggen. We definieren nu A als de verzameling hoeken $\theta \in [0, 2\pi)$ waarvoor geldt dat er een $d \in D$ en een $n \in \mathbb{N}$ zijn zodat d geroteerd om l met $n\theta$ radialen weer in D ligt. Dan is A opnieuw aftelbaar, dus kies nu $\eta \in [0, 2\pi) \setminus A$. Definieer nu ψ als de rotatie om l met η radialen en we zien gelijk dat $\psi^n(D) \cap D = \emptyset$ voor alle n in $\mathbb{N}$, en dus ook dat $\psi^m(D) \cap \psi^n(D) = \emptyset$ voor alle n en m in $\mathbb{N}$. Hiermee is ψ de gezochte rotatie. ☐

Met dit resultaat kunnen we de volledige bolschil verdubbelen.

Lemma 3.2. *Er bestaan disjuncte deelverzamelingen A en B van S^2 met $A \cup B = S^2$ zó dat $S^2 \sim A \sim B$.*

Bewijs. We splitsen eerst weer $S^2 = P \cup Q$ zoals in hoofdstuk 3, met Q de punten van S^2 op de rotatie assen van $\mathcal{S}$. We gebruiken nu de Hausdorff Paradox, stelling 2.4, om disjunctie A' en B' te pakken met $P \sim A' \sim B'$ en $A' \cup B' = P$. Nemen we nu $A = A' \cup Q$ en $B' = B$, dan is $A = A' \cup Q \sim P \cup Q = S^2$. Aangezien Q een aftelbare verzameling is, zien we uit het vorige lemma dat $B \sim P = S^2 \setminus Q \sim S^2$. ☐

Nu we bolschillen kunnen verdubbelen, kunnen we dit gemakkelijk uitbreiden naar solide bollen. Het enige wat we hiervoor nog moeten doen is het centrum verdubbelen. We noteren $B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, de bol met straal 1 in $\mathbb{R}^3$.

Stelling 3.3 (Banach-Tarski Paradox)**.** *Er bestaan onderling disjuncte deelverzamelingen A en B van B^3 met $B^3 \sim A \sim B$ en $A \cup B = B^3$.*

Bewijs. We nemen $A', B' \subset S^2$ als in Lemma 3.2 en breiden deze straalsgewijs uit: $C = \{\alpha x : \alpha \in (0,1], x \in A'\}$ en $B = \{\beta x : \beta \in (0,1], x \in B'\}$. Dan zijn nu C en B disjunct, en er geldt dat $B^3 = C \cup B \cup \{\underline{0}\}$. Nemen we nu $A = C \cup \{\underline{0}\}$ dan volgt gelijk dat $A \sim B^3$. Aangezien $B \sim B^3 \setminus \{\underline{0}\}$, volstaat het te laten zien dat $B^3 \setminus \{\underline{0}\} \sim B^3$.
Kies hiervoor $P = (0, 0, \frac{1}{2})$ en kies een as door P die niet door de oorsprong gaat. Definieer ρ een rotatie door deze as met 1 radiaal. Aangezien π irrationaal is, is ρ^n niet gelijk aan de identiteit voor alle $n \geq 1$. Immers, stel dat ρ^n gelijk is aan de identiteit. ρ^n is een rotatie van precies n radialen, dus dan moet $n \equiv 0 \mod 2\pi$. Oftewel: $n = m \cdot 2\pi$ voor een bepaalde $m \in \mathbb{N}$ en dus $\pi = \frac{n}{2m}$ met $n, m \in \mathbb{N}$. π is irrationaal, dus dit kan niet.
Neem nu $D = \{\rho^n(\underline{0}) : n \geq 0\}$ en merk op dat $\{\underline{0}\} = D \setminus \rho(D)$. Dan hebben we nu:

$$B^3 \setminus \{\underline{0}\} = (B^3 \setminus D) \cup \rho(D) \sim (B^3 \setminus D) \cup D = B^3$$

Hiermee hebben we bewezen dat $B^3 \sim A \sim B$. □

Deze stelling heeft een groot gevolg. We hebben namelijk eerder gezien in Stelling 1.8 dat als $A \preceq B$ en als $B \preceq A$ dan $A \sim B$. Stel dus dat we een grotere bol B om B^3 leggen: dan $B^3 \preceq B$. Maar, als we de bol verdubbelen en deze extra bollen om B heen leggen vinden we $B \preceq B^3$ en dus $B \sim B^3$. Dit kunnen we formeel maken:

Stelling 3.4 (Banach-Tarski Paradox, sterke vorm)**.** *Zij $A \subset \mathbb{R}^3$ een begrensde deelverzameling met niet-leeg inwendige. Dan is $A \sim B^3$.*

Bewijs. Aangezien A een niet-leeg inwendige heeft, is het mogelijk ergens in A een bolletje te leggen met straal groter dan 0, zeg ϵ, dat geheel bevat is in A. Bekijken we nu de afsluiting $\overline{A}$ van A, dan is deze compact in $\mathbb{R}^3$: immers is hij begrensd en gesloten. Definieer nu de open overdekking $\mathcal{O} = \{B(a, \epsilon) : a \in \overline{A}\}$ van $\overline{A}$, waar $B(a, \epsilon)$ staat voor de open bol met straal ϵ om het punt a. Duidelijk is dat $\overline{A} \subset \bigcup_{O \in \mathcal{O}} O$, dus $\mathcal{O}$ is een open overdekking van $\overline{A}$. Aangezien $\overline{A}$ compact is, bestaat er een eindige deeloverdekking: noem deze $\mathcal{O}' = \{O_i : i = 1, \ldots, n\}$. Aangezien $O_i \subset \overline{O_i}$, geldt zeker ook dat $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \overline{O_i}$. We hadden al $\epsilon \cdot B^3 \preceq A$ en met deze laatste ongelijkheid hebben we $A \preceq \bigcup_{i=1}^n \overline{O_i}$. Aangezien $\overline{O_i} \sim \epsilon \cdot B^3$ voor alle i, Stelling 3.3 onafhankelijk is van de straal en deze eindig vaak herhaald kan worden, geldt er dat $\bigcup_{i=1}^n \overline{O_i} \sim \epsilon \cdot B^3$, dus met Stelling 1.8 is nu $A \sim \epsilon \cdot B^3$. Merk ten slotte op dat het gegeven bewijs ook geldt voor $A = B^3$, dus we hebben nu $A \sim \epsilon \cdot B^3 \sim B^3$. □

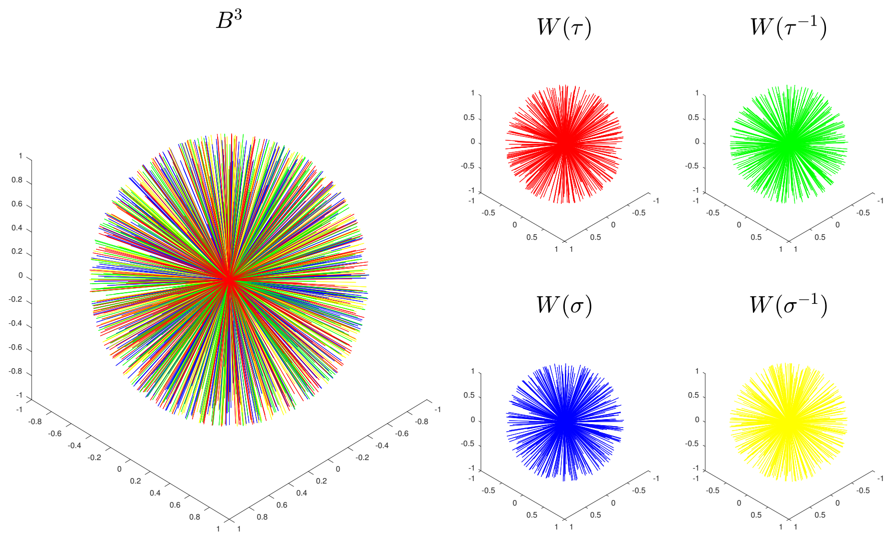
Gevolg 3.5. *Laat A en B begrensde deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ zijn met niet-leeg inwendige. Dan is $A \sim B$.*

Dit laatste gevolg 3.5 wordt vaak geformuleerd als: 'Het is mogelijk een erwt in eindig veel stukken te hakken en, door deze te draaien en verplaatsen, ze weer terug te zetten in een bal zo groot als de zon'.

Hoofdstuk 4

Uitleg paradox

Het is wellicht verstandig om de gebruikte stukken in de gelijkverdeelbaarheid van één bol met twee bollen nog eens te bekijken, om de *schijnbare* tegenstrijdigheid te bestuderen. Het is namelijk nog onduidelijk waar het extra volume ineens vandaan komt.
Het probleem zit hem in het volume van de gebruikte stukken in de decompositie: het is namelijk op geen manier mogelijk een 'goed' volume aan deze stukken toe te kennen. De Banach-Tarski paradox laat heel direct zien dat er niet aan alle denkbare deelverzamelingen van de ruimte een volume toe te kennen is - niet als we willen behouden dat volume invariant blijft onder isometriën en vereniging van disjuncte verzamelingen. Verzamelingen die dat niet toelaten worden 'niet-meetbaar' genoemd, en verzamelingen waar wel een volume aan is toe te kennen worden 'meetbaar' genoemd. Het opdelen van een meetbaar object (zoals een bal) in niet-meetbare objecten zal dan ook problemen opleveren wat betreft het volume. De tak van de wiskunde genaamd maattheorie houdt zich bezig met de verdere implicaties van meetbaarheid, en is hiermee in staat de Lebesgue-integraal te construeren, welke sterkere eigenschappen heeft dan de meer bekende Riemann-integraal.
Om iets van een beeld te kunnen vormen bij de gebruikte stukken kunnen we plaatjes maken met behulp van Matlab. Hiervoor bekijken we in plaats van M (de verzameling met één element uit elke $\mathcal{S}$-baan in P) naar slechts één element uit M, en kiezen een basis waarin dat punt de coordinaten $(1, 0, 0)$ heeft. We weten de matrixrepresentaties van τ en σ, dus nu kunnen we kijken naar $W(\chi)$ waar $\chi \in \{\tau, \sigma, \tau^{-1}, \sigma^{-1}\}$ als we ons beperken tot producten met een maximale lengte.
In figuur 4.1 valt op te maken dat de 'echte' delen allemaal oneindig veel detail hebben; ze bestaan uit lijnen die dicht in de bol liggen, maar bevatten geen deelverzameling met een volume groter dan 0.



Figuur 4.1: Visualisatie van de Banach-Tarski decompositie

Hoofdstuk 5

Keuzeaxioma

De Banach-Tarski Paradox is misschien wel de wiskundige stelling die het meest tegen de intuïtie ingaat. De paradox kan echter slechts worden bewezen als we het keuzeaxioma aannemen. In dit hoofdstuk zal ik kort benoemen wat het keuzeaxioma is, en enkele belangrijke resultaten die het keuzeaxioma (of zijn negatie) voortbrengen behandelen.

5.1 Definitie keuzeaxioma

Het keuzeaxioma wordt als volgt geformuleerd:

Axioma 5.1. *Zij $\mathcal{C}$ een collectie niet-lege verzamelingen. Dan kunnen we een element uit elke verzameling in C* kiezen*, dat wil zeggen: er bestaat een functie $f : \mathcal{C} \to \bigcup_{X \in \mathcal{C}} X$ met $f(X) \in X$ voor alle $X \in \mathcal{C}$.*

Deze functie f heet dan een *keuze*functie. Als $\mathcal{C}$ slechts een eindige collectie is, hebben we het keuzeaxioma niet nodig: we kunnen dan voor elke $X_i \in \mathcal{C}$ individueel een $x \in X_i$ nemen: immers is X_i niet leeg. Echter, in het oneindige geval gaat dit niet zomaar: daar zorgt het kiezen van een indexverzameling soms al voor problemen. Desondanks is het keuzeaxioma in deze vorm intuïtief; wat we kunnen in het eindige geval breiden we uit naar het oneindige geval. In het proces verliezen we echter de mogelijkheid alles constructief te bewijzen.

5.2 Gevolgen keuzeaxioma

Naast de Banach-Tarski Paradox heeft het keuzeaxioma andere interessante gevolgen.

5.2.1 Welordeningsstelling

Een beroemde stelling die equivalent is met het keuzeaxioma, is de welordeningsstelling[11]:

Stelling 5.2 (Welordeningstelling)**.** *Elke verzameling kan welgeordend worden. Dat wil zeggen, voor elke verzameling X bestaat er een welordening met domein X.*

Een welordening is een relatie $\leq$ met de volgende eigenschappen:

- Voor $a, b \in X$: als $a \leq b$ en $b \leq a$ dan $a = b$
- Voor $a, b, c \in X$: Als $a \leq b$ en $b \leq c$ dan $a \leq c$
- Voor $a, b \in X$: $a \leq b$ óf $b \leq a$

- Voor $A \subseteq X$ met $A \neq \emptyset$: A heeft een minimaal element; een $m \in A$ met $m \leq a$ voor alle $a \in A$.

Deze stelling vertelt ons dus dat $\mathbb{R}$ een welordening heeft, maar deze heeft niets meer te maken met de 'kleiner of gelijk' waar we bekend mee zijn. Elk open interval heeft bijvoorbeeld een minimaal element, en deze ligt niet op de rand van A: die is immers niet bevat in A.
We kunnen ook illustreren dat de welordening niet op de bekende ordening van $\mathbb{R}$ lijkt, als we kijken naar het minimale element en het op-één-na minimale element. Neem $\trianglelefteq$ een welordening van $\mathbb{R}$ en definieer a het minimale element van $\mathbb{R}$ en b het minimale element van $\mathbb{R} \setminus \{a\}$. Dan bestaat er geen $c \in \mathbb{R} \setminus \{a, b\}$ met $a \trianglelefteq c \trianglelefteq b$, terwijl $[a, b]$ overaftelbaar veel elementen x bevat met $a \leq x \leq b$.
Het probleem met een dergelijke welordening is dat het keuzeaxioma vertelt dat er een bestaat, maar hoe deze er uit ziet blijft onduidelijk. De onconstructiviteit stuit(te) menig wiskundige tegen de borst.

5.2.2 Alle vectorruimtes hebben een basis

Een andere stelling die equivalent is met het keuzeaxioma[2], maar waar velen het goed mee kunnen vinden is de volgende:

Stelling 5.3. *Zij V een vectorruimte over het lichaam K. Dan bestaat er een basis $B \subset V$ voor V.*

Deze fijne stelling maakt het leven in de lineaire algebra een stuk gemakkelijker.

5.3 Geen keuzeaxioma

Er is ook veel gekeken naar wat er gebeurd als keuzeaxioma als niet waar wordt aangenomen. In dat geval kunnen de volgende dingen waar zijn:

- Er bestaat een equivalentierelatie op $\mathbb{R}$ met strikt meer equivalentieklassen dan reëele getallen[9]
- $\mathbb{R}$ is een aftelbare vereniging van aftelbare verzamelingen[6]
- $\epsilon - \delta$-continuïteit is niet equivalent met rijtjes-continuïteit[5]

Aangezien 5.3 equivalent is met het keuzeaxioma, zal er verder ook altijd een vectorruimte zonder basis bestaan als het keuzeaxioma niet als waar wordt aangenomen. Het keuzeaxioma wegdoen leidt dus zeker niet tot 'mooiere' wiskunde. Toen het keuzeaxioma werd geformuleerd in 1904 door Zermelo[11], was er initieel erg veel kritiek, maar in de hedendaagse wiskunde is de consensus wel dat het keuzeaxioma wordt aangenomen. Vreemde gevolgen als de Banach-Tarski paradox worden geaccepteerd en de studie van dergelijke niet-meetbare verzamelingen heeft ook zeker tot vooruitgang geleid.

5.4 Zwakkere vormen van het keuzeaxioma

Omdat het keuzeaxioma in zijn volledigheid op het eerste gezicht vreemde resultaten opleverd, is er ook bestudeerd hoe we het keuzeaxioma kunnen afzwakken en welke resultaten dan worden bereikt. Één manier is het slechts toestaan van aftelbare collecties $\mathcal{C}$. Deze versie van het keuzeaxioma is niet sterk genoeg om de Banach-Tarski paradox te bewijzen, maar is wel in staat genoeg analyse te construeren om interessant te zijn. In het model van Solovay [9] zijn zelfs alle deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ meetbaar. Andere paradoxen komen dan wel bovendrijven: het model van Solovay is degene die een equivalentierelatie op $\mathbb{R}$ bevat met meer equivalentieklassen dan elementen van $\mathbb{R}$.

Verder is het nog interessant om te noemen dat de Hahn-Banach stelling, die zwakker is dan het keuzeaxioma, sterk genoeg is om de Banach-Tarski paradox te bewijzen[8]. Deze stelling zegt dat het mogelijk is een lineaire functionaal op een bepaalde deelruimte uit te breiden naar de gehele ruimte, mits hij op de deelruimte wordt gedomineerd door een andere lineaire functionaal.

Bibliografie

[1] St. Banach en A. Tarski. *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.* French. Fund. math. 6, 244-277 (1924). 1924.

[2] Andreas Blass. *Existence of bases implies the axiom of choice.* English. Axiomatic set theory, Proc. AMS-IMS-SIAM Jt. Summer Res. Conf., Boulder/Colo. 1983, Contemp. Math. 31, 31-33 (1984). 1984.

[3] É. Borel. *Leçons sur la théorie des fonctions.* French. Paris: Gauthier-Villars et Fils. IX + 136 S. gr. 8° (1898). 1898.

[4] F. Hausdorff. *Grundzüge der Mengenlehre. Mit 53 Figuren im Text.* German. Leipzig: Veit & Comp. VIII u. 476 S. gr. 8° (1914). 1914.

[5] M. Jaegermann. "The axiom of choice and two definitions of continuity." English. In: *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.* 13 (1965), p. 699–704. ISSN: 0001-4117.

[6] Thomas J. Jech. *The axiom of choice.* English. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Vol. 75. Amsterdam- London: North-Holland Publishing Company; New York: American Elsevier Publishing Company, Inc. XI,202 p. (1973). 1973.

[7] Barbara Osofsky en Scot Adams. "6102". In: *The American Mathematical Monthly* 85.6 (1978), p. 504–505. ISSN: 00029890, 19300972. URL: http://www.jstor.org/stable/2320091.

[8] Janusz Pawlikowski. "The Hahn-Banach theorem implies the Banach-Tarski paradox." English. In: *Fundam. Math.* 138.1 (1991), p. 21–22. ISSN: 0016-2736; 1730-6329/e.

[9] Robert M. Solovay. "A Model of Set-Theory in Which Every Set of Reals is Lebesgue Measurable". In: *Annals of Mathematics* 92.1 (1970), p. 1–56. ISSN: 0003486X. URL: http://www.jstor.org/stable/1970696.

[10] Stan Wagon. *The Banach-Tarski paradox.* English. Encyclopedia of Mathematics and Its applications, Vol. 24. Cambridge etc.: Cambridge University Press. XVI, 251 p. (1985). 1985.

[11] E. Zermelo. "Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann". In: *Mathematische Annalen* 59.4 (1904), p. 514–516. ISSN: 1432-1807. DOI: 10.1007/BF01445300. URL: http://dx.doi.org/10.1007/BF01445300.