



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Wat is de invariante maat van de
gegeneraliseerde kettingbreukafbeelding?
(Engelse titel: What is the invariant
measure of the generalised continued
fraction map?)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Niels Daniël Simon Langeveld

Delft, Nederland
Augustus 2012

Copyright © 2012 door Niels Daniël Simon Langeveld. Alle rechten
voorbehouden.



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

Wat is de invariante maat van de ggeneraliseerde kettingbreukafbeelding?

(Engelse titel:What is the invariant measure of the generalised continued fraction map?)

Niels Daniël Simon Langeveld

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. C. Kraaikamp

Overige commissieleden

Dr. M. Haase

Dr. K.P. Hart

Dr.ir. M. Keijzer

Augustus, 2012

Delft

Contents

1	Voorwoord	5
2	Verskillende kettingbreukontwikkelingen	6
2.1	Hoe is de RCF gedefinieerd?	7
2.1.1	Convergentie van de RCF	8
2.2	N -expansies	11
2.3	De gegeneraliseerde kettingbreuk	12
2.4	Elementaire eigenschappen nieuwe kettingbreuk	13
2.4.1	Convergentie van de nieuwe kettingbreuk	14
2.4.2	Andere eigenschappen	15
3	Invariante maten	16
3.1	Wat is een invariante maat?	16
3.2	Invariante maten voor de RCF en N -expansies	17
3.3	Waarom willen we een invariante maat?	17
3.4	De invariante maat voor de reguliere kettingbreuk	18
4	Ergodiciteit en de Ergodenstelling van Birkhoff	20
4.1	Ergodiciteit van de reguliere kettingbreuk	21
5	Klassieke resultaten voor de RCF	22
5.1	Hoe vaak komt een digit voor in de ontwikkeling?	22
5.2	Een aantal vergelijkingen	23
6	Is er bij onze afbeelding een invariante maat?	24
7	Wat heb ik geprobeerd	25
7.1	Eerste poging	25
7.2	Tweede poging	27
7.3	Derde poging	28
8	De numerieke maat testen	30
8.1	Resultaten van test numerieke maat	31
9	Toepassingen van de numerieke maat	32
9.1	Hoe vaak komt een bepaald getal voor in een kettingbreukontwikkeling?	32
9.2	Een aantal vergelijkingen voor de nieuwe kettingbreukafbeelding	35
10	Appendix	38
11	References	51

1 Voorwoord

In deze scriptie zullen we kijken naar kettingbreukafbeeldingen en invariante maten (in het bijzonder een nieuwe kettingbreukafbeelding). Aanvankelijk zal ik de reguliere kettingbreuk toelichten en niet veel later de nieuwe kettingbreukafbeelding. Dan zal ik het begrip invariante maten behandelen. In deze scriptie speelt de Ergodenstelling van Birkhoff een belangrijke rol. Dit wordt uitgelegd in sectie 4. In de secties 5 en 9 zal hier veelvuldig gebruik van worden gemaakt. Waar we in sectie 5 constanten uitrekenen voor de reguliere kettingbreuk afbeelding zal dit in sectie 9 voor de nieuwe kettingbreukafbeelding gebeuren. In sectie 5 wordt er gebruik gemaakt van een analytische uitdrukking voor de invariante maat. Echter is deze niet bekend voor de nieuwe kettingbreuk afbeelding. Daarom heb ik numeriek gezocht naar de invariante maat. Hoe dit is verlopen staat beschreven in sectie 7. Ik heb met veel plezier gewerkt aan deze scriptie. In dit project ben ik goed begeleid door Cor Kraaikamp zijn betrokkenheid heeft me erg gemotiveerd. Ook zijn kennis heeft goed geholpen op de plekken waar ik vast kwam te zitten.

2 Verschillende kettingbreukontwikkelingen

Men kan bij een gegeven getal $x \in \mathbb{R}$ de decimaalontwikkeling maken. Dit is een gebruikelijke representatie van het getal x . Hierbij wordt in essentie een rij gemaakt met elementen uit het alfabet $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$. Men kan ook een kettingbreukontwikkeling maken. Dit is een andere representatie van het getal x waarbij een rij van natuurlijke getallen wordt gemaakt. De vraag is nu: hoe vind je zo'n reëel getal bij een rij van natuurlijke getallen en hoe kan je een rij natuurlijke getallen maken gegeven een reëel getal? Een andere, niet onbelangrijke, vraag is waarom je dit zou willen doen. In deze scriptie zullen we dat doen met behulp van kettingbreuken. De meest gebruikelijke vorm van een kettingbreuk ziet er als volgt uit:

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Met $a_0 \in \mathbb{Z}$ en $a_i \in \mathbb{N}$ voor $i \geq 1$.

Deze vorm van een kettingbreuk wordt ook wel RCF genoemd (regular continued fraction). Op deze manier kunnen we gemakkelijk van een rij natuurlijke getallen naar een reëel getal gaan en omgekeerd.

2.1 Hoe is de RCF gedefinieerd?

De vraag is nu: hoe komen we van een gegeven getal $x \in \mathbb{R}$ naar een rij natuurlijke getallen? We nemen $a_0 = \lfloor x \rfloor$, maar voor de andere elementen in de rij moeten we wat meer moeite doen. We gaan dat doen met behulp van de volgende afbeelding:

$T(x) : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, gedefinieerd door

$$T(x) = \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad \text{als } x \neq 0 \text{ en } T(0) = 0.$$

Zet nu voor $x \in [0, 1)$

$$a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$$

We zien dat we x nu als volgt kunnen schrijven:

$$x = \frac{1}{a_1 + T(x)}.$$

Definieer nu

$$a_n(x) = \left\lfloor \frac{1}{T^{n-1}(x)} \right\rfloor \quad \text{als } T^{n-1}(x) \neq 0.$$

We vinden de rij a_1, a_2, \dots door de functie $T(x)$ herhaaldelijk toe te passen. Bovendien geldt dat de kettingbreuk convergeert naar x . Een oplettende lezer heeft misschien gemerkt dat dit niet altijd goed gaat. Voor rationale getallen zijn kettingbreuken eindig. In dat geval is er een n met $T^n(x) = 0$. Schrijf $x = \frac{p_0}{q_0}$ met $0 < p_0 < q_0$ en onderling ondeelbaar. We zien dat $T(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Noem nu $T^n(x) = \frac{p_n}{q_n}$ dan geldt er dat:

$$T\left(\frac{p_0}{q_0}\right) = \frac{1}{\frac{p_0}{q_0}} - \left\lfloor \frac{1}{\frac{p_0}{q_0}} \right\rfloor = \frac{q_0}{p_0} - \left\lfloor \frac{q_0}{p_0} \right\rfloor = \frac{q_0 - a_1 p_0}{p_0} = \frac{p_1}{q_1}$$

met p_1 en q_1 ondeelbaar. We zien dat de volgende ongelijkheden gelden:

$$p_1 \leq q_0 - a_1 p_0 \leq p_0$$

De eerste gelijkheid treed op als $p_0 = q_1$ en de tweede alleen als $x = 1$. In dat geval is de kettingbreuk zeker eindig en in de andere gevallen vinden we $p_1 < p_0$. Analoog zien we $p_2 < p_1$. Zo vinden we met $p_0, p_1, \dots \in \mathbb{N}_0$.

$$0 \leq \dots < p_n < p_{n-1} < \dots < p_1 < p_0$$

Maar dan bestaat er een n is met $p_n = 0$. Stop dan de procedure voor het bepalen van a_n . Zo vinden we een eindige kettingbreukontwikkeling.

2.1.1 Convergentie van de RCF

We hebben in de vorige sectie een recept gegeven voor het bepalen van a_n -nen bij een gegeven x , maar wat we graag willen is dat de eindige rijen een convergerend rijtje geven naar die x . We zullen dit wat formeler opschrijven. Laat

$$c_n = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

Convergeren naar x betekent $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x$. Dit is het geval en we zullen dit dan ook bewijzen. We zullen dit doen met behulp van matrices.

Laat

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{met } \det(A) \neq 0.$$

We definiëren

$$A(x) := \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Dit wordt ook wel een Möbius transformatie genoemd. Welnu, laat

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad M_n = A_1 A_2 \cdots A_n$$

We zien

$$\begin{aligned} M_n(0) &= (M_{n-1}A_n)(0) = M_{n-1}\left(\frac{1}{a_n}\right) \\ &= M_{n-2}A_{n-1}\left(\frac{1}{a_n}\right) = M_{n-2}\left(\frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}\right) \\ &\quad \vdots \\ &= c_n \end{aligned}$$

Wat we nu gaan doen is recurrente betrekkingen opstellen met behulp van M . Schrijf

$$M_n = \begin{bmatrix} r_n & p_n \\ s_n & q_n \end{bmatrix}, \quad \text{met } r_n, s_n, p_n, q_n \in \mathbb{Z}$$

Dan zien we dat

$$\begin{aligned} M_{n-1}A_n &= \begin{bmatrix} r_{n-1} & p_{n-1} \\ s_{n-1} & q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_{n-1} & a_n p_{n-1} + r_{n-1} \\ q_{n-1} & a_n q_{n-1} + s_{n-1} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

We vinden:

$$\begin{aligned} r_n &= p_{n-1} \quad (\text{dus } r_{n-1} = p_{n-2}) \\ s_n &= q_{n-1} \quad (\text{dus } s_{n-1} = q_{n-2}) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= a_n p_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

We hebben nu de convergenten c_n geschreven als $M_n(0)$ en gezien dat dit juist is. Verder hebben we recurrente betrekkingen opgesteld. Het volgende wat we gaan doen is x ook schrijven met behulp van matrices.

Definieer:

$$M_n^* = M_{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n + T_n \end{bmatrix} \quad \text{met } T_n = T^n(x)$$

Dit geeft ons:

$$M_n^*(0) = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n + T_n}}} = x$$

Anderzijds zien we:

$$\begin{aligned} M_n^*(0) &= M_{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n + T_n \end{bmatrix} (0) \\ &= \begin{bmatrix} p_{n-2} & p_{n-1} \\ q_{n-2} & q_{n-1} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{a_n + T_n} \right) \\ &= \frac{p_{n-2} \frac{1}{a_n + T_n} + p_{n-1}}{q_{n-2} \frac{1}{a_n + T_n} + q_{n-1}} \\ &= \frac{p_{n-2} + p_{n-1}(a_n + T_n)}{q_{n-2} + q_{n-1}(a_n + T_n)} \\ &= \frac{p_n + p_{n-1}T_n}{q_n + q_{n-1}T_n} \end{aligned}$$

Nu we een uitdrukking voor x hebben kunnen we kijken naar het verschil met c_n

$$\begin{aligned} x - c_n &= \frac{p_n + p_{n-1}T_n}{q_n + q_{n-1}T_n} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{q_n(p_n + p_{n-1}T_n) - (q_n + q_{n-1}T_n)p_n}{(q_n + T_n q_{n-1})q_n} \\ &= \frac{(p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1})T_n}{q_n(q_n + T_n q_{n-1})} \end{aligned}$$

Merk nu op dat

$$p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1} = \det(M_n) = \det(A_1) \det(A_2) \cdots \det(A_n) = (-1)^n \quad (1)$$

Dit invullen geeft:

$$x - c_n = \frac{(-1)^n T_n}{q_n(q_n + T_n q_{n-1})}$$

We zien

$$|x - c_n| = \frac{T_n}{q_n(q_n + T_n q_{n-1})} < \frac{1}{q_n^2}$$

De rij (q_n) is exponentieel stijgend en $0 \leq T_n < 1$. Er volgt nu dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x - c_n| = 0$$

Bovendien zien we dat (c_n) snel convergeert naar x . Dit is een reden om te kijken naar kettingbreuken. Merk op, dat uit (1) volgt dat $\text{ggd}(p_n, q_n) = 1$.

2.2 N -expansies

In de vorige sectie is laten zien hoe we met behulp van een afbeelding een reguliere kettingbreuk kunnen maken. Dit is echter niet de enige manier om een kettingbreuk te maken. We kunnen op dit thema variëren. Neem bijvoorbeeld in plaats van $T(x)$ de afbeelding

$$T_N(x) = \frac{N}{x} - \left\lfloor \frac{N}{x} \right\rfloor \quad \text{als } x \neq 0 \text{ en } T_N(0) = 0.$$

Hierbij nemen we $N \in \mathbb{N}$ (merk op dat $N = 1$ de reguliere kettingbreuk geeft).

In dit geval zien we dat we a_n kunnen bepalen door

$$a_n(x) = \left\lfloor \frac{N}{T_n^{n-1}(x)} \right\rfloor.$$

Voor meer details over deze ‘ N -expansies,’ zie bijvoorbeeld de bachelor-scriptie van Niels van der Wekken [W11].

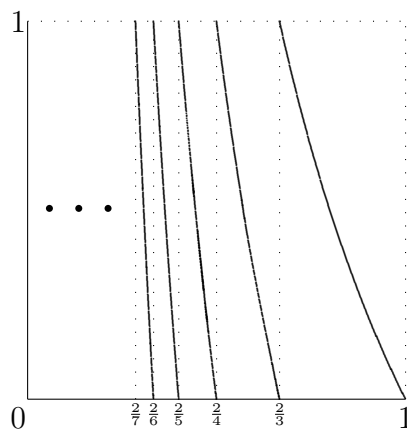


Figure 1: De afbeelding T_N voor $N = 2$.

2.3 De gegeneraliseerde kettingbreuk

We kunnen nog een stap verder gaan. Wat we nu gaan doen is een variatie maken op T zodanig dat een reëel getal correspondeert met 2 rijen van natuurlijke getallen en wel op de volgende manier. Definieer nu $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ door

$$T(x) = \frac{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}{x} - \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}{x} \right\rfloor \quad \text{voor } x \in (0, 1], T(0) = 0; \quad (2)$$

zie figuur 2. Zet nu

$$a_1(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \quad \text{en} \quad b_1(x) = \left\lfloor \frac{a_1(x)}{x} \right\rfloor \quad \text{als } x \neq 0,$$

en definieer $a_n(x)$ resp. $b_n(x)$ door

$$a_n(x) = a_1(T^{n-1}(x)), \quad b_n(x) = b_1(T^{n-1}(x)), \quad \text{als } T^{n-1}(x) \neq 0.$$

Dan volgt uit (2) dat

$$x = \frac{a_1}{b_1 + T(x)} \quad \text{en} \quad T(x) = \frac{a_2}{b_2 + T^2(x)}$$

zodat invullen geeft dat

$$x = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + T^2(x)}}$$

We zien dat we op deze manier een kettingbreuk krijgen met 2 rijen natuurlijke getallen. In de volgende sectie zullen we wat eigenschappen van deze nieuwe kettingbreuk afleiden. Deze nieuwe kettingbreukontwikkeling noemen we ook wel de *gegeneraliseerde kettingbreuk*. Merk op dat we voor de afbeelding dezelfde letter gebruiken als voor de klassieke kettingbreukafbeelding. Het zal uit de context blijken over welke afbeelding we het hebben.

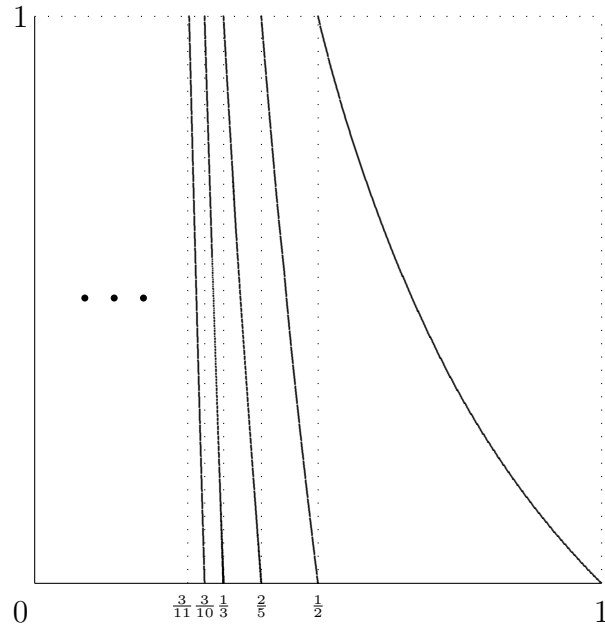


Figure 2: De afbeelding T .

2.4 Elementaire eigenschappen nieuwe kettingbreuk

De gegeneraliseerde kettingbreuk ziet er interessant uit. In deze sectie leiden we wat eigenschappen af van deze nieuwe kettingbreuk. We zullen zien welke waarden b_n kan aannemen en op welke punten de afbeelding T discontinuïteiten heeft. Maar eerst zullen we laten zien dat ook deze nieuwe kettingbreuk convergeert. Dit gaat redelijk analoog aan het bewijs voor de reguliere kettingbreuk.

2.4.1 Convergentie van de nieuwe kettingbreuk

De convergenten zien er nu als volgt uit:

$$c_n = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}$$

Definieer nu:

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & a_n \\ 1 & b_n \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad M_n = A_1 A_2 \cdots A_n$$

Analoog aan de reguliere kettingbreuk vinden we:

$$M_n(0) = c_n$$

Ook kunnen we recurrente betrekkingen noteren:

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}$$

$$q_n = a_n p_{n-1} + b_n q_{n-2}$$

Net als bij de reguliere kettingbreuk vinden we een afchatting:

$$|x - c_n| = \frac{(\prod_{i=1}^n a_i) T^n(x)}{q_n (q_n + T^n(x) q_{n-1})} < \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{q_n^2}$$

aangezien

$$\det(M_n) = \det(A_1) \det(A_2) \cdots \det(A_n) = (-1)^n \prod_{i=1}^n a_i \quad (3)$$

Uit (3) volgt nu niet dat $\text{ggd}(p_n, q_n) = 1$. Dit in tegenstelling tot de reguliere kettingbreuk. We zullen dit verder afschatten zodat het duidelijk is dat $|x - c_n|$ convergeert naar 0. We maken daartoe eerst een afchatting voor $\prod_{i=1}^n a_i$. Welnu:

$$q_n = b_n q_{n-1} + a_n q_{n-2} > a_n^2 q_{n-1}, \text{ want } b_n \geq a_n^2$$

Evenzo

$$q_{n-1} > a_{n-1}^2 q_{n-2}$$

We zetten dit voort en vinden:

$$q_n > \prod_{i=1}^n a_i^2$$

Dit geeft ons

$$\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{q_n^2} < \frac{\prod_{i=1}^n a_i^2}{q_n^2} < \frac{1}{q_n}$$

We zien dat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x$$

Dit lijkt een slechtere convergentiesnelheid te geven dan de reguliere kettingbreuk. Merk wel op dat de q_n en in het algemeen sneller groot lijken te worden dan bij de reguliere kettingbreuk. We zien dit door te kijken naar de recurrente betrekkingen.

2.4.2 Andere eigenschappen

We zullen nu gaan bekijken welke waarden b_n kan aannemen als we deze verkrijgen door middel van de nieuwe kettingbreukafbeelding.

Welnu $b_1 = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ met $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. Dit geeft ons

$$b_1 \in \{a_1^2, a_1^2 + 1, \dots, a_1^2 + a_1 - 1\}.$$

Iedere keer wanneer a_n en of b_n een andere waarde aanneemt krijgen we een discontinuïteit in de afbeelding T . We weten dat a_n alle natuurlijke getallen als waarde aanneemt. Laten we daarom alle waarden aflopen. Definieer nu $B_i = \{\frac{i}{i^2}, \dots, \frac{i}{i^2+i-1}\}$. Neem nu:

$$B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$$

Dit geeft de verzameling waar T discontinuïteiten heeft. Het interval tussen twee opeenvolgende discontinuïteiten is een *fundamenteaal interval* (of *cylinder verzameling*). Laet $a \in \mathbb{N}$, $b \in \{a^2, a^2 + 1, \dots, a^2 + a - 1\}$, en definieer het fundamenteaal interval $\Delta_{(a,b)}$ door:

$$\Delta_{(a,b)} = \{x \in [0, 1]; a_1(x) = a, b_1(x) = b\}.$$

Merk op, dat de afsluiting $I_{(a,b)}$ van $\Delta_{(a,b)}$ gegeven wordt door

$$I_{(a,b)} = \left[\frac{a}{b+1}, \frac{a}{b} \right].$$

Op elke $I_{(a,b)}$ is de afbeelding T vol. Dat wil zeggen dat $T(I_{(a,b)}) = [0, 1]$ geldt. Ook is T beperkt tot $I_{(a,b)}$ een functie die twee keer differentieerbaar is. Verder geldt er dat

$$[0, 1] = \bigcup_{(a,b)} I_{(a,b)} \left(= \bigcup_{a=1}^{\infty} \bigcup_{b=a^2}^{a^2+a-1} I_{(a,b)} \right).$$

De reden dat we zo expliciet de eigenschappen van de fundamenteaal intervallen noemen heeft te maken met *Adler's Folklore Theorem* en de stelling van Rényi; zie Schweiger [S95], stellingen 15.1.2 en 15.2.1. Hierboven hebben wij laten zien dat er aan de eerste drie (van vijf) voorwaarden van Adler's Folklore Theorem voldaan zijn. Later, in sectie 6, zullen we laten zien dat de nieuwe kettingbreuk ook aan de laatste twee voorwaarden van Adler's Folklore Theorem voldoet. Tezamen met het feit dat kettingbreuken convergeren geeft dit dan direct dat de kettingbreukafbeelding T ergodisch is, dat er een T -invariante maat μ bestaat en dat er een constante $C > 0$ bestaat, zodat

$$C^{-1}\lambda(A) \leq \mu(A) \leq C\lambda(A),$$

voor elke meetbare verzameling $A \subset [0, 1]$. Hier is $\lambda(A)$ de Lebesgue-maat van A . Wat een invariante maat is zullen we in de volgende sectie zien. Ergodiciteit zullen we behandelen in sectie 4.

3 Invariante maten

In deze bachelor-scriptie zijn we in het bijzonder geïnteresseerd in invariante maten voor kettingbreukalgoritmen. In deze sectie zullen we zien wat een invariante maat is. Het zal blijken dat de invariante maten voor de reguliere kettingbreuk en de N -expansies bekend zijn en deze zullen gegeven worden. Ook zullen we bewijzen dat de invariante maat gegeven voor de reguliere kettingbreuk ook daadwerkelijk invariant is. Verder zal ik motiveren waarom we een invariante maat willen.

3.1 Wat is een invariante maat?

Voordat we het over een invariante maat hebben. Moeten we redelijk wat voorbereidend werk verrichten. Allereerst hebben we een verzameling X nodig. Hierop definiëren we een σ -algebra. Een σ -algebra is een verzameling deelverzamelingen \mathcal{F} die voldoet aan:

- $X \in \mathcal{F}$
- als $A \in \mathcal{F}$ dan $A^c \in \mathcal{F}$
- als $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}$ dan $A = \bigcup A_i \in \mathcal{F}$

We noemen het paar (X, \mathcal{F}) een meetbare ruimte (measure space). Op een meetbare ruimte kunnen we een maat definiëren. Een maat is een functie $\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty)$ die voldoet aan:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(\bigcup A_i) = \sum \mu(A_i)$

We noemen (X, \mathcal{F}, μ) een maatruimte en als $\mu(X) = 1$ dan is μ een kansmaat. Verder heet een eindige meetruimte compleet als voor iedere B met $\mu(B) = 0$ geldt dat iedere deelverzameling C van B ook in \mathcal{F} zit.

Nu we weten wat een maat is kunnen we gaan kijken naar een invariante maat. Een invariante maat is een maat die hoort bij een afbeelding en die maten van verzamelingen bewaart bij die afbeelding. We zullen dit idee wat formeler opschrijven. Laat (X, \mathcal{F}, μ) een kansmaat zijn en $T : X \rightarrow X$ een afbeelding. We noemen μ dan T -invariant als geldt: $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$.

Ik zal enkele voorbeelden geven van invariante maten om een beter idee te geven van hoe het werkt. Laten we beginnen met een makkelijk voorbeeld.

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{als } x \in [0, 0.5] \\ 2x - 1 & \text{als } x \in (0.5, 1] \end{cases}$$

Als we bij deze afbeelding de Lebesgue maat nemen is deze maat invariant onder T . Neem een meetbare verzameling A en bekijk $T^{-1}(A)$. We zien dit opdelen in 2 gelijke stukken A_1 en A_2 . Noem $\mu(A_1) = \mu(A_2) = L$ welnu $T(A_1 \cup A_2) = A$ dit geeft ons $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A_1) + \mu(A_2) = 2L = \mu(A)$

Een iets minder voor de hand liggende maat is die van de functie $T(x) = 4x(1-x)$ waarvan de invariante maat word gegeven door:

$$\mu([a, b]) = \int_a^b \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} dx$$

Zie [DK02] voor meer details.

3.2 Invariante maten voor de RCF en N -expansies

De nieuwe kettingbreuk afbeelding ziet er interessant uit, maar heeft deze ook een invariante maat? Voor de reguliere kettingbreuk wordt deze gegeven door:

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln(2)} \int_A \frac{1}{1+x} dx$$

(met A een meetbare verzameling). Ook voor $T_N(x)$ is de invariante maat bekend en wordt deze gegeven door:

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln(\frac{N+1}{N})} \int_A \frac{1}{N+x} dx$$

(met A een meetbare deelverzameling van $[0, 1]$). Voor de nieuwe kettingbreukafbeelding is de invariante maat niet bekend. In deze scriptie gaan we op zoek naar deze maat. We zullen dit niet algebraïsch, maar numeriek doen.

3.3 Waarom willen we een invariante maat?

Wat we graag zouden willen is een invariante maat bij onze kettingbreukafbeelding. Maar waarom willen we eigenlijk zo'n maat? Het vinden van een maat bij een gegeven functie blijkt een lastige klus. Daarbij komt nog kijken dat lang niet iedere functie een invariante maat heeft. Het blijkt dat de nieuwe kettingbreukafbeelding ergodisch is en we dus de Ergodenstelling van Birkhoff kunnen toepassen. Wat de Ergodenstelling van Birkhoff is zal ik in sectie 5 uitleggen (evenals wat ergodiciteit betekent). Verder zal ik een paar klassieke resultaten geven waarbij de invariante maat van de reguliere kettingbreuk een vereiste is. Dit zal genoeg motivatie geven om op zoek te gaan naar een invariante maat voor onze kettingbreukafbeelding. Voordat we op zoek gaan naar die invariante maat zal ik laten zien dat we zeker weten dat deze er is.

3.4 De invariante maat voor de reguliere kettingbreuk

Al voor de gehele ergoden theorie was opgezet heeft Gauss (in 1800) de invariante maat gevonden voor de reguliere kettingbreukafbeelding. Zoals gezegd wordt deze gegeven door:

$$\mu(A) = \frac{1}{\ln(2)} \int_A \frac{1}{1+x} dx$$

met A een meetbare verzameling. Gek genoeg weet niemand hoe hij hier op gekomen is! Wat we wel kunnen doen is controleren of deze maat inderdaad de gewenste eigenschap heeft. We nemen Lebesgue verzameling als onderliggende σ -algebra. Het is nu voldoende te bewijzen dat voor ieder interval (a, b) geldt dat $\mu((a, b)) = \mu(T^{-1}((a, b)))$, zie [DK02]. Welnu

$$\mu((a, b)) = \frac{1}{\ln(2)} \int_a^b \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right)$$

Anderzijds zien we:

$$\begin{aligned} \mu(T^{-1}(a, b)) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+b}, \frac{1}{n+a}\right)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2)} \int_{\frac{1}{n+b}}^{\frac{1}{n+a}} \frac{1}{1+x} dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{\frac{1}{n+a} + 1}{\frac{1}{n+b} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{1+n+a}{1+n+b} \frac{n+b}{n+a} \right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \ln \left(\frac{1+k+a}{1+k+b} \frac{k+b}{k+a} \right) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(1+n+a) - \ln(1+a) + \ln(1+b) - \ln(1+n+b) \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \ln \left(\frac{1+b}{1+a} \right) \end{aligned}$$

We vinden $\mu((a, b)) = \mu(T^{-1}(a, b))$. Dus de Gaussmaat is de invariante maat voor de reguliere kettingbreukafbeelding. Later zullen we deze maat gebruiken om bepaalde eigenschappen van de kettingbreukafbeelding te vinden. Hiertoe hebben we eerst nog wat informatie nodig van Ergodiciteit. Met name de Birkhoff's Ergodenstelling blijkt erg belangrijk en handig te zijn. Daarom zal ik daar in het kort nog wat over vertellen.

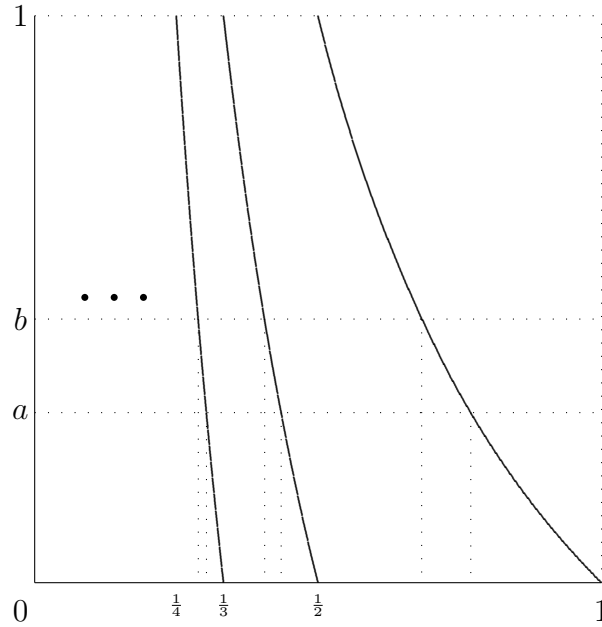


Figure 3: $T^{-1}([a, b])$ met T de reguliere kettingbreuk.

4 Ergodiciteit en de Ergodenstelling van Birkhoff

Waar we het in deze sectie over gaan hebben is ergodiciteit en de Ergodenstelling van Birkhoff. Laten we beginnen met ergodiciteit. Ergodiciteit is een eigenschap van een afbeelding.

Laat $T : X \rightarrow X$. We noemen T *ergodisch* als het volgende geldt: Voor elke μ -meetbare verzameling A met $T^{-1}(A) = A$ geldt dat $\mu(A) = 0$ of $\mu(A) = 1$.

Wat dit intuïtief betekend is dat de verzameling X niet als 2 of meerdere losse stukken kan worden beschouwd. Een voorbeeld hiervan is de reguliere kettingbreukafbeelding. Waar deze eigenschap handig voor is zal blijken uit de Ergodenstelling van Birkhoff. Deze stelling kan gezien worden als een generalisatie van de wet van de grote aantallen.

Theorem 4.1 (Ergodenstelling van Birkhoff)

Laat (X, \mathcal{F}, μ) een kansruimte zijn en $T : X \rightarrow X$ een afbeelding zijn die μ -invariant is. Dan geldt voor elke $f \in L^1(\mu)$ is er een $f^ \in L^1(\mu)$ met*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = f^*(x)$$

Bestaat bijna overal, is T -invariant en $\int_X f \, d\mu = \int_X f^ \, d\mu$. Als T ergodisch is dan geldt f^* een constante C (bijna overal) en dat $f^* = \int_X f \, d\mu$.*

Dit kunnen we goed gebruiken en zullen dat ook doen. De stelling is vooral interessant wanneer T ergodisch is. Het blijkt dat de kettingbreukontwikkelingen die we hebben gezien allen ergodisch zijn. Voor de reguliere kettingbreuk is dit bewezen door Doebelin in 1940 en (onafhankelijk hiervan) door Ryll-Nardzewski in 1951 [RN51].

4.1 Ergodiciteit van de reguliere kettingbreuk

In de literatuur zijn inmiddels veel bewijzen van de ergodiciteit van de reguliere kettingbreukafbeelding T te vinden. Een ‘algemene manier’ (die ook voor veel andere afbeeldingen werkt, bijvoorbeeld voor onze nieuwe kettingbreukafbeelding T) is om te laten zien dat de reguliere kettingbreukafbeelding T voldoet aan de voorwaarden van *Adler’s Folklore Theorem*; zie sectie 15.2 van [S95]. Omdat aan een aantal eisen van deze ‘folklore stelling’ door T al direct is voldaan kijken we naar de twee ‘lastigere’ voorwaarden van deze stelling:

(4) Er bestaat een constante $\theta > 1$ zodanig dat

$$|T'(x)| \geq \theta, \quad x \in I(k), k \in I.$$

(5) Er bestaat een constante $M > 1$ zodanig dat

$$\left| \frac{T''(x)}{(T'(x))^2} \right| \leq M, \quad x \in I(k), k \in I.$$

Merk op, dat voor de reguliere kettingbreuk afbeelding T we hebben dat

$$I(k) = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right], \quad k \in I = \mathbb{N}.$$

Als aan alle vijf condities van de folklore stelling is voldaan geldt de zogenaamde *Rényi Conditie* (deze drukt uit hoe door T fundamenteel intervallen $I(k)$ worden ‘uitgesmeerd’ over $[0, 1]$). Samen met de *stelling van Rényi* (zie bijvoorbeeld stelling 15.1.2 in [S95]) volgt er dan dat T ergodisch is en dat T een invariante maat heeft (zonder aan te geven wat de expliciete vorm van de maat is); zie ook sectie 15,2 in [S95] voor details en bewijzen.

Schweiger merkt in Examples 15.3(1) van [S95] op, dat de reguliere kettingbreukafbeelding T **niet** aan (4) voldoet. Om precies te zijn geldt er voor $x \in I(k) = \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k} \right]$ dat

$$T(x) = \frac{1}{x} - k.$$

Maar dan is

$$T'(x) = \frac{-1}{x^2}$$

en bestaat er dus geen $\theta > 1$ met $|T'(x)| \geq \theta$ voor alle $x \in (0, 1)$. Als we de fundamenteel intervallen $I(k)$ verder verfijnen, dan kunnen we laten zien dat (4) voor T^2 wel geldt. Definieer voor $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$:

$$I(k_1, k_2) = \{x \in [0, 1]; k_1(x) = k_1, k_2(x) = k_2\}.$$

Dan geldt er voor elke $x \in I(k_1, k_2)$ dat

$$T^2(x) = \frac{x}{1 - k_1 x} - k_2,$$

en we vinden dat

$$(T^2(x))'(x) = \frac{1}{(1 - k_1 x)^2} \geq 4.$$

In sectie 15.2.3 van [S95] merkt Schweiger dat (4) in Adler’s Folklore Theorem verzwakt kan worden tot

(4*) Er bestaat een constante $\theta > 1$ en een $K \geq 1$ zodanig dat

$$|(T^K)'(x)| \geq \theta, \quad x \in I(k_1, \dots, k_K), (k_1, \dots, k_K) \in \mathbb{N}^K.$$

Dus met $K = 2$ volgt dat de reguliere kettingbreukafbeelding T ergodisch is en een invariante maat heeft: de Gauss-maat.

5 Klassieke resultaten voor de RCF

In deze sectie gaan we een paar stellingen en toepassingen bekijken waarbij de maat van de reguliere kettingbreuk nodig is. We zullen vooral uitspraken doen voor bijna alle $x \in [0, 1]$. Hiermee bedoelen we dat de maat van de verzameling punten waar een eigenschap niet voor geldt nul is. Later zullen we trachten vergelijkbare resultaten ook numeriek te boeken voor de nieuwe kettingbreukafbeelding.

5.1 Hoe vaak komt een digit voor in de ontwikkeling?

Waar je de maat direct voor kan gebruiken is het bepalen van het aantal keer (in percentages) dat een bepaald digit voorkomt voor bijna alle $x \in [0, 1]$. Het berekenen gaat makkelijker dan je zou verwachten. We gaan hierbij gebruik maken van het feit dat de invariante maat niet alleen de eigenschap $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ heeft (voor alle meetbare verzamelingen A), maar de invariante maat is ook een kansverdeling. Stel je wilt het aantal 1-nen weten in een reguliere kettingbreuk. Je kijkt in welk subinterval $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor = 1$. Dit is het subinterval $(0.5, 1]$. Vervolgens intergreer je de Gauss maat over dat interval. We zien, de Ergodenstelling gebruikende, dat

$$\frac{1}{\ln(2)} \int_{0.5}^1 \frac{1}{1+x} dx = \frac{1}{\ln(2)} \ln(1+x)|_{0.5}^1 = 0.415037\dots$$

Dus voor bijna alle $x \in [0, 1]$ geldt dat 41.5% van alle wijzergetallen gelijk is aan 1. Men kan dit doen voor iedere $n \in \mathbb{N}$ hieronder vindt u een tabel met bijbehorende percentages van de getallen 1 t/m 9.

a_n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	overig
%	41.5	17.0	9.3	5.9	4.1	3.0	2.3	1.8	1.4	13.7

Table 1: Percentages voorkomen van wijzergetallen

In het algemeen vinden we dat voor bijna alle $x \in \mathbb{R}$ de asymptotische dichtheid van een gegeven digit n wordt gegeven door:

$$\frac{1}{\ln(2)} \int_{\frac{1}{a+1}}^{\frac{1}{a}} \frac{1}{1+x} dx = \ln \left(\frac{(a+1)^2}{a(a+2)} \right)$$

Dit resultaat is van Levy uit 1929.

5.2 Een aantal vergelijkingen

Een iets minder voor de hand liggend resultaat is het volgende: Voor bijna elke $x \in [0, 1]$ geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} = 1.7454056\dots$$

Dit wordt ook wel de constante van Khintchine genoemd. We gaan dit na met de Ergodenstelling van Birkhoff. We nemen voor f de functie $f(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. We zien $\frac{1}{a_n} = f \circ T^{n-1}(x)$.

Dit geeft ons:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

Uit de Ergodenstelling van Birkhoff volgt dat deze limiet bestaat (voor bijna elke x). Verder geldt dat T ergodisch is. Dus is de limiet voor bijna iedere x hetzelfde getal. Dit getal wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f \, d\mu &= \int_0^1 \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \, d\mu = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \frac{1}{1+x} \, dx \\ &= \frac{1}{\ln(2)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{1+x} \, dx \\ &= 0.5729327\dots \end{aligned}$$

Het enige wat we nu nog hoeven doen is noemer en teller omdraaien. We zien:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{0.5729327\dots} = 1.7454056\dots$$

Een andere vergelijking die we kunnen opstellen is:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k(k+1)}\right)^{\frac{\ln(k)}{\ln(2)}} = 2.6854\dots$$

Ook hierbij gaan we de Ergodenstelling van Birkhoff gebruiken. We nemen voor f de functie $f(x) = \ln(\lfloor \frac{1}{x} \rfloor)$. We zien eenderzijds

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln((a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}})$$

Anderzijds zien we

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \, d\mu &= \frac{1}{\ln(2)} \int_0^1 \frac{\ln(\lfloor \frac{1}{x} \rfloor)}{1+x} \, dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} \frac{1}{1+x} \, dx = 2.6854\dots \end{aligned}$$

We hebben een paar voorbeelden gezien waarbij de invariante maat van de reguliere kettingbreuk onmisbaar is voor het bewijs. Dergelijk opmerkelijke uitspraken dus worden verkregen met behulp van die maat.

6 Is er bij onze afbeelding een invariante maat?

Het antwoord op deze vraag is natuurlijk ja. Anders had deze scriptie veel minder zin gehad. Het feit dat deze bestaat is tot nu toe nog steeds niet bewezen. Niet iedere functie heeft een invariante maat het is dus noodzaak na te gaan of onze afbeelding dat wel heeft. Met Adler's folklore stelling en met de stelling van Rényi in ons achterhoofd hoeven we alleen maar te laten zien dat (4) en (5) (op blz. 21) gelden om te zien dat onze nieuwe kettingbreukafbeelding T ergodisch is en een invariante maat μ heeft.

Laat $a_1 \in \mathbb{N}$, en laat $b_1 \in \{a_1^2, a_1^2 + 1, \dots, a_1^2 + a_1 - 1\}$. Dan is $\Delta_{(a_1, b_1)}$ een fundamenteel interval van T , en voor alle $x \in \Delta_{(a, b)}$ geldt er dat

$$T'(x) = \frac{-a_1}{x^2}.$$

Net zoals in het geval van de reguliere kettingbreukafbeelding T geldt er hier dat er geen $\theta > 1$ bestaat zodat

$$T'(x) \geq \theta > 1, \quad x \in (0, 1).$$

Opnieuw als in het reguliere geval voldoet onze nieuwe kettingbreukafbeelding T wel aan (4*) voor $K = 2$. Laat $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$, $b_i \in \{a_i^2, a_i^2 + 1, \dots, a_i^2 + a_i - 1\}$ voor $i = 1, 2$. Definieer nu het fundamenteel interval $\Delta_{(a_1, b_1), (a_2, b_2)}$ van orde 2 door

$$\Delta_{(a_1, b_1), (a_2, b_2)} = \{x \in (0, 1) ; a_i(x) = a_i, b_i(x) = b_i, i = 1, 2\}.$$

Voor alle $x \in \Delta_{(a_1, b_1), (a_2, b_2)}$ geldt er dan, dat

$$T^2(x) = \frac{a_2}{a_1 - b_1 x} - b_2,$$

zodat

$$(T^2)'(x) = \frac{a_2}{(a_1 - b_1 x)^2}.$$

Definieer nu de functie $h : \Delta_{(a_1, b_1)} \rightarrow \mathbb{R}$ door

$$h(x) = \frac{1}{(a_1 - b_1 x)^2}.$$

Dan geldt er voor $x \in \Delta_{(a_1, b_1)}$ dat

$$h'(x) = \frac{2b_1}{(a_1 - b_1 x)^3} > 0,$$

en vinden we (omdat $b_1 \in \{a_1^2, a_1^2 + 1, \dots, a_1^2 + a_1 - 1\}$ en $a_2 \in \mathbb{N}$, dus $a_2 \geq 1$) dat

$$(T^2)'(x) \geq \frac{(b_1 + 1)^2}{a_1^2} \geq \frac{a_1^4 + 2a_1^2 + 1}{a_1^2} > a_1^2 + 2 \geq 3.$$

We zien dus dat aan eis (4*) voldaan is.

We laten nu zien dat ook aan eis (5) voldaan is met $M = 2$. Merk op, dat voor $x \in \Delta_{(a_1, b_1)}$ er geldt dat

$$T''(x) = \frac{-2a_1}{x^3},$$

zodat

$$\left| \frac{T''(x)}{(T'(x))^2} \right| = \frac{2a_1/x^3}{a_1^2/x^4} = \frac{2x}{a_1} < 2.$$

Dit bewijst dat T ergodisch is en dat er een T -invariante maat μ bestaat. Uit de stelling van Rényi volgt er dan tevens dat er een constante $C > 0$ bestaat, zodat

$$C^{-1}\lambda(A) \leq \mu(A) \leq C\lambda(A),$$

voor alle meetbare verzamelingen $A \subset [0, 1]$. Hier is $\lambda(A)$ de Lebesgue maat van A .

7 Wat heb ik geprobeerd

Zoals eerder gezegd is het vinden van een invariante maat erg lastig. Daarom ben ik gelijk over gegaan op het numeriek zoeken van een invariante maat. De invariante maat kan gezien worden als kansverdeling waar x vaak of weinig komt. In theorie zou je dus een willekeurige $x \in [0, 1]$ kunnen nemen en die zo veel mogelijk itereren over $T(x)$. Dit geeft dan de kansverdeling van bijna alle punten. Echter blijkt dat de numerieke fout bij het herhaald itereren instabiel is. In de komende subsecties zal ik mijn pogingen om dit probleem op te lossen toelichten.

7.1 Eerste poging

Wat ik aanvankelijk heb geprobeerd is het volgende: eerst is een willekeurige $x \in [0, 1]$ gekozen. Daarna heb ik op die x de afbeelding T 1000 keer geïtereerd. In iedere iteratie bekijk je dan waar het punt komt en dat onthou je. Na afloop kijk je dan waar het punt x dan is geweest. In het artikel van Geon Ho Choe [CH00] wordt dit gedaan voor soortgelijke afbeeldingen. De numerieke fout loopt op bij n keer over T te hebben geïtereerd. Dusdanig veel dat men het getal na n keer itereren als willekeurig kan worden gezien. Daarna wordt dus een nieuwe baan beschouwd. Omdat willekeurige punten dezelfde verdeling hebben zou het dus niet uit moeten maken dat de fout steeds groter wordt naarmate men vaker T itereerd. In de volgende grafieken is het resultaat te zien van de verdeling van 3 willekeurig gekozen punten 1000 keer geïtereerd over T . Er is te zien hoe vaak een punt in een bepaald interval komt. Bijvoorbeeld in de eerste simulatie zie je dat x zo'n 14,3% komt in het interval $[0, 0.1)$.

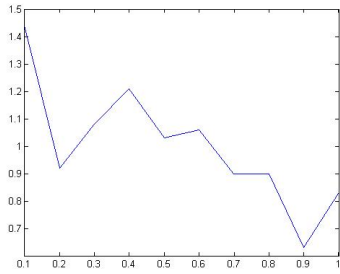


Figure 4: simulatie van 1 punt 1000 keer geïtereerd over T

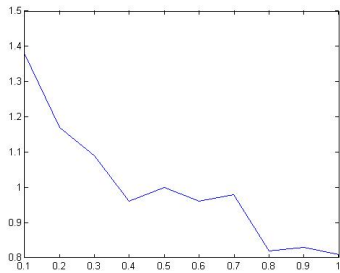


Figure 5: simulatie van 1 punt 1000 keer geïtereerd over T

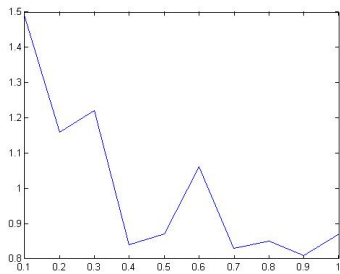


Figure 6: simulatie van 1 punt 1000 keer geïtereerd over T

We zien dat de plaatjes erg verschillen. Hoewel de invariante maat niet afhangt van het beginpunt is dat hier wel het geval.

7.2 Tweede poging

In de eerste instantie heb ik dit proberen op te lossen door het gebruik van meer decimalen. In het artikel van Geon Ho Choe [CH00] wordt dit ook gedaan voor bepaalde typen kettingbreukafbeeldingen. Daar worden maximaal 10.000 decimalen gebruikt. Voor onze afbeelding vragen we matlab niet in 64 decimalen te werken, maar in 20.000. Ook dit bleek niet te werken in figuur 7,8 en 9 nogmaals 3 simulaties (van 3 verschillende willekeurige punten), maar dan met 20.000 decimalen:

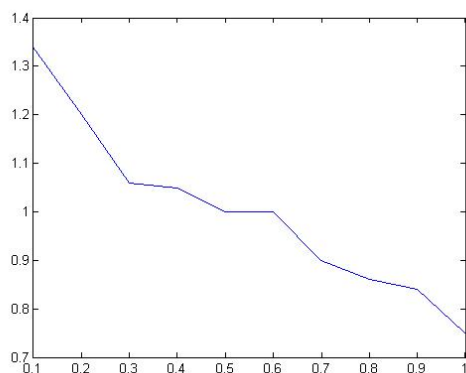


Figure 7: simulatie van 1 punt 1000 keer geïtereerd over T met 20.000 decimalen

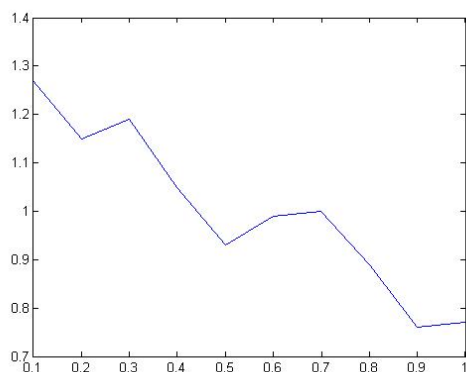


Figure 8: simulatie van 1 punt 1000 keer geïtereerd over T met 20.000 decimalen

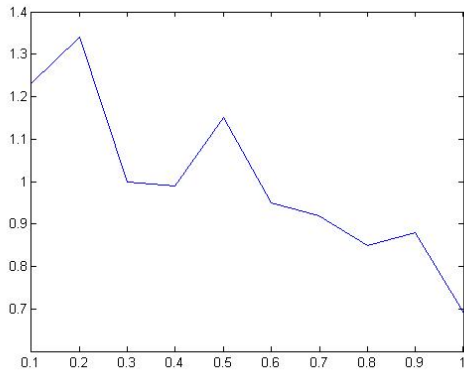


Figure 9: simulatie van 1 punt 1000 keer geïtereerd over T met 20.000 decimalen

7.3 Derde poging

Wat wel werkt is niet één willekeurige x kiezen, maar een heleboel willekeurige x -en te bekijken en deze niet vaak te itereren. Voor subintervallen van lengte $\frac{1}{10}$ ^{de} vinden we al een redelijke gladde functie. In figuur 10 is een plaatje te zien van 10 verschillende simulaties waarbij iedere simulatie bestaat uit 20.000 willekeurige punten tegelijk te itereren over $T(x)$, maar dan ieder 20 keer en dit alles 50 keer. Het blijkt dat dit genoeg informatie over de invariante maat geeft.

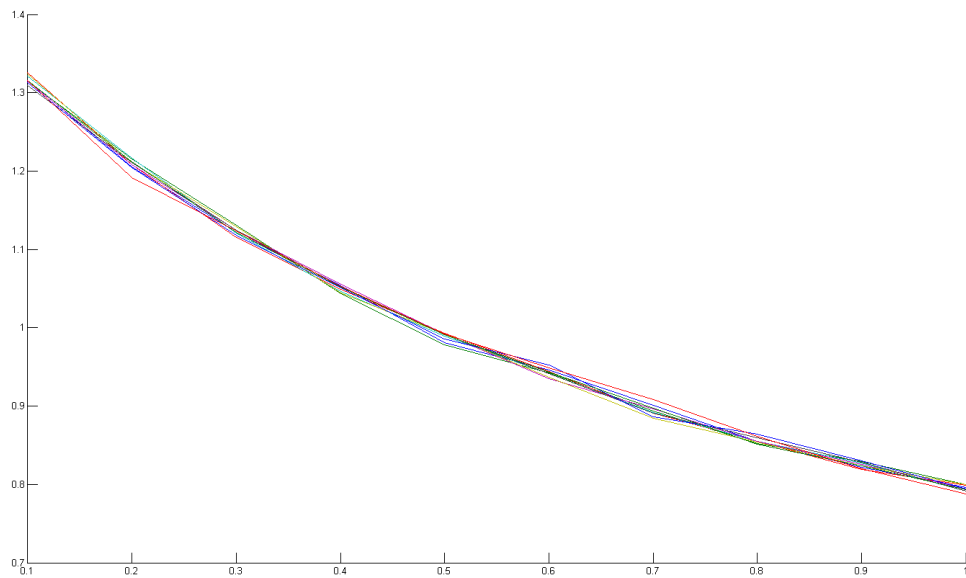


Figure 10: 10 verschillende simulaties over elkaar geplote. Iedere simulatie bevat 20 miljoen punten.

Wat we nu gaan doen is subintervallen van $\frac{1}{100}$ ^{ste}. Het blijkt dat je nu veel meer simulaties nodig hebt om aan een gladde functie te komen. Zo veel dat ik mijn delen van mijn oorspronkelijke programma heb moeten herschrijven zodanig dat er tussentijds resultaten werden opgeslagen. Het resultaat ziet u hieronder met 3000 willekeurige punten tegelijk, 20 keer de afbeelding toegepast en dit alles 500 keer. Wat je ziet is dus de verdeling van 30 miljoen punten.

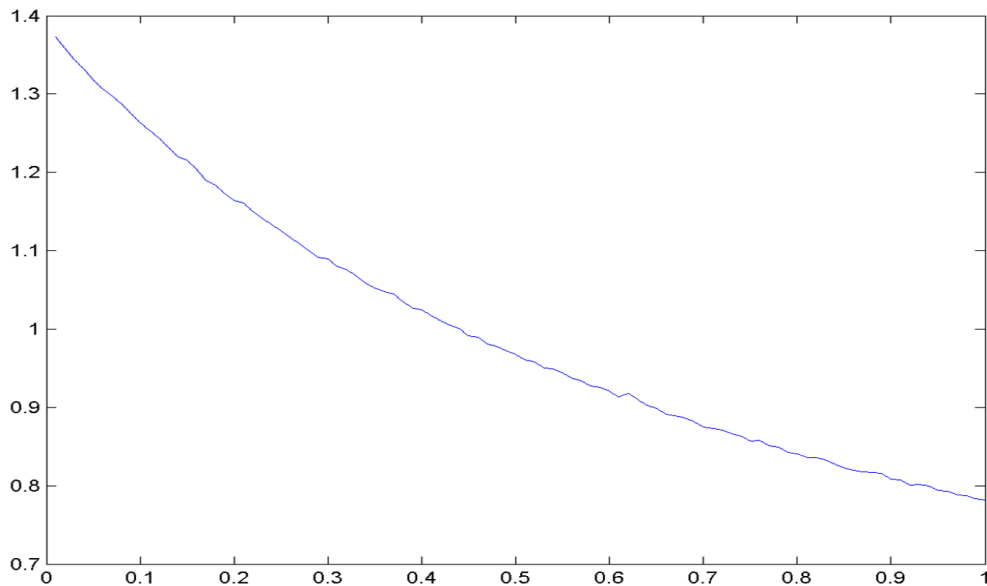


Figure 11: simulatie van een verdeling van 30 miljoen punten

Het resultaat ziet er veelbelovend uit. De simulaties liggen dicht bij elkaar en de maat lijkt veel op die van de reguliere kettingbreuk. Echter geeft niets ons de zekerheid dat de simulaties daadwerkelijk een benadering geven voor de maat. Verder lijkt het erop dat de simulaties dicht bij elkaar liggen, maar wat we willen is een betere kwantificatie van de verschillen. Ook omdat we die verschillen dan wellicht kleiner kunnen maken door anders te simuleren. Om 1.5 miljoen punten 20 keer te itereren is gebaseerd op heuristiek. In de volgende sectie bekijken we of het inderdaad een benadering is voor de invariante maat.

8 De numerieke maat testen

Nu we het aantal simulaties, punten en iteraties goed hebben bepaald blijft de vraag of dit een goede benadering is voor de invariante maat nog steeds onbeantwoord. Weliswaar liggen de simulaties dicht bij elkaar, maar we weten niet of een simulatie een functie benaderd met de gewenste eigenschappen.

Voor de invariante maat geldt $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$ voor elke meetbare verzameling A . Nu kunnen we dat van de geschatte maat niet verwachten. Echter kunnen we wel kijken naar het verschil. We noemen de $\hat{\mu}$ de schatter voor μ . Als $\hat{\mu}$ een goede schatter is voor μ dan is het verschil $|\hat{\mu}(T^{-1}(A)) - \hat{\mu}(A)|$ klein voor een willekeurig gekozen meetbare verzameling A . Om dit te bepalen is iets meer werk nodig.

Wat we eerst gaan doen is bepalen welke verzameling hoort bij $T^{-1}([c, d])$ voor $c, d \in [0, 1]$ met $c \leq d$. We moeten daarvoor terug naar het begin. We weten dat $a_1 = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$ dit geeft ons het volgende: als $a_1 = n$ dan geldt $x \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$. In sectie 2.4 hebben we gezien dat $b_n \in \{a_1^2, a_1^2 + 1, \dots, a_1^2 + a_1 - 1\}$. Voor iedere mogelijke waarde van a_1 en b_1 bestaat er een verzameling $[c_{a,b}, d_{a,b}]$ met $T([c_{a,b}, d_{a,b}]) = [c, d]$. Alles bij elkaar geeft ons:

$$T^{-1}([c, d]) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=i^2}^{i^2+i-1} [\frac{i}{d+j}, \frac{i}{c+j}]$$

We nemen hier nu de maat van en zien:

$$\mu(T^{-1}([c, d])) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i^2}^{i^2+i-1} \mu([\frac{i}{d+j}, \frac{i}{c+j}])$$

We gebruiken hier dat de intervallen onderling disjunct zijn.

Welnu $\hat{\mu}$ wordt gegeven door $\hat{\mu}([a, b]) = \int_a^b f(x) dx$ hierin is $f(x)$ de numeriek gevonden kansdichtheid.

We zien:

$$\mu(T^{-1}([c, d])) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i^2}^{i^2+i-1} \int_{\frac{i}{d+j}}^{\frac{i}{c+j}} f(x) dx$$

8.1 Resultaten van test numerieke maat

Nu we weten welke verzameling intervallen bij het inverse beeld van T hoort gaan we $\hat{\mu}([c, d])$ en $\hat{\mu}(T^{-1}([c, d]))$ bepalen. Een simulatie voor f heeft subintervallen van $\frac{1}{100^r}$ ste. Echter worden de inverse beelden al snel erg klein, daarom gaan we de intervallen verfijnen. Voor de volgende resultaten heb ik een verfijning gekozen van 200.000. Dit lijkt misschien overdreven, maar het kost weinig extra rekentijd. Daarbij komt dat we graag willen dat de numerieke fout bij dit programma erg klein is. Als dit niet het geval is geeft het programma weinig informatie over hetgeen wat we willen weten namelijk of de numeriek gevonden $\hat{\mu}$ de gewenste eigenschap heeft. Het programma is zo gemaakt dat het van een inverse beeld alle (verfijnde) subintervallen meeneemt in de sommatie en blijft sommeren tot $\frac{i}{d+j} - \frac{i}{c+j} < \frac{1}{100*200.000}$. Bovendien geeft hij bij output de gegeven i zodat we weten tot hoever het programma geteld heeft. Verder kunnen we niet van ieder interval gaan controleren of $\hat{\mu}$ invariant is (laat staan van iedere meetbare verzameling). Daarom zullen we er zelf een paar kiezen. In tabel 2 zijn de resultaten van de gekozen intervallen.

$[c, d]$	$\hat{\mu}([c, d])$	$\hat{\mu}(T^{-1}([c, d]))$	verschil	i
[0.01, 1]	0.9863	0.9783	0.0079	225
[0.01, 0.7]	0.7389	0.7352	0.0036	193
[0.01, 0.5]	0.5551	0.5536	0.0015	173
[0.01, 0.3]	0.3508	0.3506	0.0002	145
[0.01, 0.1]	0.1178	0.1177	0.0001	100
[0.33, 1]	0.6032	0.5936	0.0096	194
[0.33, 0.8]	0.4415	0.4353	0.0062	179
[0.33, 0.6]	0.2661	0.2625	0.0036	143
[0.33, 0.4]	0.0729	0.0717	0.0012	92
[0.5, 1]	0.4312	0.4226	0.0085	178
[0.5, 0.8]	0.2695	0.2644	0.0051	157

Table 2: Resultaten test numerieke maat

Als dichtheid van de invariante maat heb ik de simulatie gebruikt met 30 miljoen punten (als in figuur 8).

9 Toepassingen van de numerieke maat

We willen de klassieke resultaten graag voor de nieuwe kettingbreukafbeelding. Dit kunnen we niet exact, omdat we geen analytische uitdrukking voor de invariante maat hebben. Wat we wel hebben is de numeriek gevonden maat. In deze sectie zullen we zien wat de percentages zijn van de wijzergetallen. Niet alleen dat: ook de constanten die we bij de reguliere kettingbreuk hebben gevonden zullen we numeriek benaderen voor de nieuwe kettingbreukafbeelding. Verder worden de numerieke methoden bij deze resultaten toegelicht.

9.1 Hoe vaak komt een bepaald getal voor in een kettingbreukontwikkeling?

Bij de reguliere kettingbreuk hebben we gezien dat we percentages verkregen konden door de invariante maat te integreren over het interval van het desbetreffende wijzergetal. Analoog hieraan zullen wij bij een gegeven (a_n, b_n) integreren over $\Delta_{(a_n, b_n)}$. De bijbehorende percentages worden gevonden door

$$\int_{\Delta_{(a_n, b_n)}} 1 \, d\mu = \int_{\Delta_{(a_n, b_n)}} f(x) \, dx$$

Hierin is $f(x)$ de numeriek gevonden dichtheid van de invariante maat.

We hebben in voorgaande simulaties steeds subintervallen gekozen van $\frac{1}{10}$ *de* en $\frac{1}{100}$ *ste*. Nu is dat niet handig want dan zal men bij de numerieke fout van het benaderen van de invariante maat ook een numerieke fout maken bij het bepalen van de grenzen waarover men integreert. Het is nu veel handiger om de intervallen precies zo te kiezen dat ze gelijk vallen met de discontinuïteiten van $T(x)$. Dit is namelijk precies waar de wijzergetallen veranderen (als functie van x). In tabel 3 hebben we geen afrondfout door het kiezen van de intervallen. Ook heeft dit als voordeel dat we geen intervallen bij elkaar op hoeven te tellen en direct de percentages verkrijgen. In tabel 3 is het resultaat te vinden. De percentages zijn verkregen door 2000 punten 20 keer te itereren en dit 100 keer.

a_n	b_n	%	a_n	b_n	%	a_n	b_n	%
1	1	43.11	7	49	0.35	9	81	0.17
2	4	9.92	7	50	0.33	9	82	0.17
2	5	6.94	7	51	0.32	9	83	0.16
3	9	3.58	7	52	0.31	9	84	0.16
3	10	2.98	7	53	0.30	9	85	0.15
3	11	2.53	7	54	0.29	9	86	0.15
4	16	1.65	7	55	0.28	9	87	0.15
4	17	1.49	8	64	0.24	9	88	0.14
4	18	1.34	8	65	0.23	9	89	0.14
4	19	1.22	8	66	0.22	10	100	0.12
5	25	0.90	8	67	0.22	10	101	0.12
5	26	0.83	8	68	0.21	10	102	0.12
5	27	0.78	8	69	0.21	10	103	0.12
5	28	0.73	8	70	0.20	10	104	0.12
5	29	0.68	8	71	0.19	10	105	0.11
6	36	0.54				10	106	0.11
6	37	0.51				10	107	0.11
6	38	0.49				10	108	0.11
6	39	0.47				10	109	0.11
6	40	0.44				overig		12.01
6	41	0.42						

Table 3: Percentages voorkomen van wijzergetallen

Ter controle heb ik dezelfde methode toegepast op de reguliere kettingbreuk, omdat we daarvan weten hoe vaak een wijzergetal voorkomt (zie sectie 6.1). In tabel 4 staan de theoretische percentages naast de numeriek gevonden percentages (voor deze simulatie heb ik 2000 willekeurige punten genomen en deze 20 keer geïtereerd. En dit 100 keer).

a_n	theoretische %	numerieke %
1	41.5	41.8
2	17.0	17.0
3	9.3	9.3
4	5.9	5.9
5	4.1	4.0
6	3.0	3.0
7	2.3	2.3
8	1.8	1.8
9	1.4	1.4
overig	13.7	13.6

Table 4: Percentages voorkomen van wijzergetallen theoretisch en numeriek

We zien dat deze percentages vrijwel overal overeenkomen. Ik wil wel benadrukken dat dit geen garantie geeft dat de percentages voor de nieuwe kettingbreuk redelijk in de buurt liggen. Aangezien andere numerieke methoden voor het vinden van de invariante maat bij de reguliere wel werkte en voor de nieuwe niet. Dit komt doordat de nieuwe kettingbreukafbeelding veel meer discontinuïteiten heeft en de functie veel stijler loopt dichtbij 0. Echter zijn de percentages wel aannemelijk, omdat het verschil tussen 2 simulaties erg klein is.

9.2 Een aantal vergelijkingen voor de nieuwe kettingbreukafbeelding

Net zoals bij de reguliere kettingbreukafbeelding kunnen we met behulp van de Ergodenstelling van Birkhoff bepaalde constanten vinden. Verder zullen we nog enkele andere limietgetallen proberen te bepalen die we niet kunnen opstellen bij de reguliere kettingbreuk. Dit kunnen we doen, omdat we niet alleen een rijtje (a_n) vinden bij gegeven x , maar ook een rijtje (b_n) .

Laten we eerst kijken naar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Analoog aan de reguliere kettingbreuk zien we:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n}$$

Evenals voorheen is f de functie $f(x) = \frac{1}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}$. Echter is $T(x)$ nu de nieuwe kettingbreukafbeelding. Uit de Ergodenstelling van Birkhoff volgt nu dat deze limiet bestaat (voor bijna alle x) en deze gegeven wordt door:

$$\int_0^1 f \, d\mu$$

Hierbij is μ de invariante maat voor de nieuwe kettingbreukontwikkeling.

De functie f is constant op intervallen waarbij $\frac{1}{x}$ geen discontinuïteiten heeft. We zien dat we de integraal ook als volgt kunnen schrijven:

$$\int_0^1 f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} 1 \, d\mu$$

Welnu bij een gegeven k geeft de integraal

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} 1 \, d\mu$$

het percentage waarvoor $a_n = k$. We gebruiken nu het resultaat van voorgaande sectie en vinden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \approx 0.580638 \dots$$

Ook nu moeten we teller en noemer omdraaien en vinden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \approx \frac{1}{0.580638 \dots} = 1.7222433 \dots$$

Hiervoor heb ik k van 1 tot 10 laten lopen en maak ik niet alleen een numerieke fout doordat ik de invariante maat heb benaderd, maar ook een afrondfout ten opzichte van het nemen van een eindige som. Deze afrondfout gaan we afschatten.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} 1 \, d\mu - \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} 1 \, d\mu &= \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} 1 \, d\mu \\ &= \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} g(x) \, dx \end{aligned}$$

Hierbij is $g(x)$ de numeriek gevonden dichtheid van de invariante maat. Zet $G = \max_{x \in [0,1]}(g(x))$, dan

$$\int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} g(x) \, dx \leq \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} G \, dx = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)G$$

Dit geeft ons:

$$\sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k+1}} g(x) \, dx \leq \sum_{k=11}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{G}{k^2 + k} = 0.005843 \dots$$

We kunnen analoog aan de voorgaande constante de volgende limiet opschrijven:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n}}$$

Ook nu kunnen we de Ergodenstelling van Birkhoff gebruiken. We gebruiken

$$f(x) = \frac{1}{\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}{x} \right\rfloor}$$

We vinden:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f \circ T^i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}}{n}$$

Dit is gelijk aan de integraal

$$\int_0^1 f \, d\mu$$

Wederom kijken we waar f constant is. Laat $B_k = \left\{ \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor}{x} \right\rfloor = k \right\}$.

We zien:

$$\int_0^1 f \, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \int_{B_k} 1 \, d\mu$$

Analoog aan de oneindige sommatie met a_n 'en zien we dat $\int_{B_k} 1 \, d\mu$ de percentages geeft voor $b_n = k$. We gebruiken het resultaat van voorgaande sectie en vinden als Khintchine constante voor onze nieuwe kettingbreuk:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{b_1} + \dots + \frac{1}{b_n}} \approx 2.0593782 \dots$$

We zullen ook hier een afschatting geven ter gevolge van het nemen van een eindige som. Laat $\Delta_{(j,i)} = (\frac{i}{j+1}, \frac{i}{j}]$. We kunnen de fout nu als volgt afschatten. $g(x)$ geeft wederom de numeriek gevonden dichtheid van de invariante maat en G als voorheen.

$$\begin{aligned} \sum_{i=11}^{\infty} \sum_{j=i^2}^{i^2+i-1} \frac{1}{j} \int_{\Delta_{(j,i)}} g(x) dx &\leq \sum_{i=11}^{\infty} \sum_{j=i^2}^{i^2+i-1} \frac{1}{j} \left(\frac{i}{j} - \frac{i}{j+1} \right) G \\ &= \sum_{i=11}^{\infty} \sum_{j=i^2}^{i^2+i-1} \frac{1}{j} \frac{i}{j^2+j} G \end{aligned}$$

Welnu $i^2 \leq j$ dit geeft

$$\sum_{j=i^2}^{i^2+i-1} \frac{1}{j} \frac{i}{j^2+j} < i \frac{1}{i^2} \frac{i}{i^4+i^2} = \frac{1}{i^4+i^2}$$

Dit invullen geeft:

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=11}^{\infty} \sum_{j=i^2}^{i^2+i-1} \frac{1}{j} \frac{i}{j^2+j} G \\ &< \sum_{i=11}^{\infty} \frac{G}{i^4+i^2} = 0.000391 \dots \end{aligned}$$

Dit geeft ons de volgende foutafschatting:

$$\sum_{i=11}^{\infty} \sum_{j=i^2}^{i^2+i-1} \frac{1}{j} \int_{\Delta_{(j,i)}} g(x) dx < 0.000391 \dots$$

10 Appendix

In deze appendix is matlabcode te vinden van de scripts die ik het meest gebruikt heb.
ketsim

geeft het totaal met invoer d aantal digits n aantal simulaties en m TNv keer toegepast

```
digits(d)
x =vpa(randmaker(d,n));
```

```
A =Matmaker(m,x);
vpa(A);
```

randmaker

maakt een kolloom van lengte n met random numbers met d digits

```
function[x] = randmaker(d,n)
```

```
digits(d);
x=rand(n,1);
```

Matmaker

maakt een matrix met in de n-de kolom TNv(x) n keer toegepast.

```
function[A] = Matmaker(n,x)
```

```
m = length(x);
A = zeros(m,n);
A(:,1)=x;
```

```
for j= 2:n
    A(:,j)= TNv(A(:,j-1));
end
```


ketsimpro

voert $ketsim(d,n,m)$ uit en wel N keer. Bovendien verwerkt *ketsimpro* de resultaten.

```
function[S] = ketsimpro(d,n,m,N)
B = zeros(100,N);
for i = 1:N
    A = ketsim(d,n,m);
    B(:,i) =matteller100(A');
end
S = zeros(100,1);
for i = 1:100
S(i) =(1/N)*sum(B(i,:));
end
xe= [0.01:0.01:1]';
plot(xe,S)
```

ketsimproplus
voertketsimpro(d,n,m,N) M keer uit en slaat de gegevens op in een matrix. iedere kolumn
is dus een simulatie. $function[A] = ketsimproplus(d,n,m,N,M)$

```
A = zeros(100,M);
```

```
for i = 1:M  
    A(:,i)=ketsimpro(d,n,m,N);  
end
```

ketsimprodis
zelfde als ketsimpro, maar dan met intervallen van dis.

```
function[sm] = ketsimprodis(d,n,m,N)

B = zeros(56,N);
for i = 1:N
    A = ketsim(d,n,m);
    B(:,i)=mattellerdis(A');

end
S = zeros(56,1);
for i = 1:56
    S(i) =(1/N)*sum(B(i,:));
end
sm=zeros(56,1);

for i = 1:56
    sm(i)=S(57-i,1);

end

rm=zeros(56,1);
i=0;
for a = 1:10
    for b = a^2:a^2+a-1
        rm(56-i)= a/b;
        i = i+1;
    end
end
sm
sum(sm)
plot(rm,sm)
```

overplot

voert ketsim uit met gegeven input en doet dit r aantal keer. past matteller iedere keer toe en plot de grafieken van iedere ketsim over elkaar. d is het aantal digits, n het aantal simulaties, m het aantal keer TNv en r het aantal keer ketsim uitvoeren

```
function[] = overplot(d,n,m,r)
```

```
for i = 1:r
```

```
    B = ketsim(d,n,m);
```

```
    hold all
```

```
    matteller(B);
```

```
end
```

kollomteller100

dit is kollomteller maar dan beter met loop en intervallen van lengte 0.01

```
function[s]= kollomteller100(x)

s = zeros(100,1);
l = length(x);
t = 0;

for n = 1:100
    for i = 1 : l
        if ((n-1)/100 < x(i,1) & x(i,1) < n/100)
            t = t+1;

        end
    end
    s(n,1) = t;
    t = 0;
end
```

kollomtellerdis

als kollomteller, maar dan over intervallen bepaald door de discontinuïteiten.

```
function[s] =kollomtellerdis(x)

s = zeros(56,1);

l = length(x);
t = 0;
i = 0;

for a = 1:10
    for b = a^2:a^2+a-1
        for n = 1 : l
            if (a/(b+1) < x(n,1) && x(n,1) < a/b)
                t=t+1;
            end

            end
            i = i+1;
            s(i,1)=t/l;
            t=0;

        end
    end
end
s(56,1)=1 - sum(s(:,1));
```

invarrest

in dit programma wordt de eigenschap $\mu(T^{-1}(c,d)) = \mu(c,d)$ getest. L2 bepaald de verfining van x

```
function[s] = invarrest(x,c,d,L2)
l = length(x);
x2 = zeros(L2*l,1);
for i = 1:l
    x2(L2*(i-1)+1:L2*(i-1)+L2+1,1)=x(i,1);
end

L2 = length(x2);
X = zeros(L2,1);

X(1,1)=(1/L2)*x2(1,1);

for i = 1:L2-1
    X(i+1,1)=X(i,1) +(1/(L2))*x2(i,1);
end

s=0;
i=1;

while (X(floor(L2*i/(c+i^2))) - X(ceil(L2*i/(d+i^2)))) > 0
    for j =i^2: i^2+i-1
        s = s + X(floor(L2*i/(c+j))) - X(ceil(L2*i/(d+j)));
    end

    i= i+1;
end

sr =(X(floor(L2*d)) - X(ceil(L2*c)))
s
sr-s
i
```

nconstante1
benadert de limiet $n \rightarrow \infty (1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n)/n$ met behulp van de invariante maat.

```
function[C] = nconstante1(sm)
c = zeros(56,1);
```

```
%we gebruiken de invariante maat op die intervallen waarbij floor(1/x) < 11
rm=zeros(56,1);
```

```
i=0;
```

```
for a = 1:10
```

```
    for b = a^2:a^2+a-1
```

```
        rm(56-i)= a/b;
```

```
        i = i+1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
i=0;
```

```
for a = 1:10
```

```
    for b = a^2:a^2+a-1
```

```
        c(56-i,1) = sm(56-i)*(1/a);
```

```
        i = i+1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
C = sum(c(2:56),1)
```


nconstante2
benadert de limiet $n \rightarrow \infty (1/b_1 + 1/b_2 + \dots + 1/b_n)/n$ met behulp van de invariante maat.

```
function[C] = nconstante2(sm)
c = zeros(56,1);
```

```
%we gebruiken de invariante maat op die intervallen waarbij floor(1/x) < 11
rm=zeros(56,1);
```

```
i=0;
```

```
for a = 1:10
```

```
    for b = a^2:a^2+a-1
```

```
        rm(56-i)= a/b;
```

```
        i = i+1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
i=0;
```

```
for a = 1:10
```

```
    for b = a^2:a^2+a-1
```

```
        c(56-i,1) = sm(56-i)*(1/b);
```

```
        i = i+1;
```

```
    end
```

```
end
```

```
C = sum(c(2:56),1)
```

matteller

past kollomteller op iedere kollom van A toe en telt alle resultaten bij elkaar op plot daarna het resultaat

```
function[] =matteller (A)
```

```
l = length(A);  
S = zeros(10,l);
```

```
for i = 1: l  
    S(:,i) =kollomteller(A(:,i));  
end
```

```
%in S staan alle aantallen bij kollom van S is geteld de kollom van A nu  
%moeten we de rijen bij elkaar optellen.
```

```
s= zeros(10,1);  
for i = 1:10  
    s(i,1)= sum(S(i,:));  
end  
sc = 1/sum(s)*s;  
sc =10*sc;  
xe= [0.1:0.1:1]';  
plot(xe,sc)
```

matteller2

past kollomteller2 op iedere kollom van A toe en telt alle resultaten bij elkaar op plot daarna het resultaat

```
function[] =matteller2 (A)
```

```
l = length(A);  
S = zeros(100,l);
```

```
for i = 1: l  
    S(:,i) =kollomteller2(A(:,i));  
end
```

```
%in S staan alle aantallen bij kollom van S is geteld de kollom van A nu  
%moeten we de rijen bij elkaar optellen.
```

```
s= zeros(100,1);  
for i = 1:100  
    s(i,1)= sum(S(i,:));  
end  
sc = 1/sum(s)*s;  
sc;  
xe= [0.01:0.01:1]';  
plot(xe,sc)
```

matteller100

past kollomteller op iedere kollom van A toe en telt alle resultaten bij elkaar op plot daarna het resultaat

```
function[sc] =matteller100(A)
```

```
l = length(A);
```

```
S = zeros(100,l);
```

```
for i = 1: l
```

```
    S(:,i) =kollomteller100(A(:,i));
```

```
end
```

```
%in S staan alle aantallen bij kollom van S is geteld de kollom van A nu  
%moeten we de rijen bij elkaar optellen.
```

```
s= zeros(100,1);
```

```
for i = 1:100
```

```
    s(i,1)= sum(S(i,:));
```

```
end
```

```
sc = (1/sum(s))*s;
```

```
sc =100*sc;
```

mattellerdis

doet hetzelfde als matteller, maar dan voor kollomtellerdis

```
function[sc] =mattellerdis(A)
```

```
l = length(A);
```

```
S = zeros(56,l);
```

```
for i = 1: l
```

```
    S(:,i) =kollomtellerdis(A(:,i));
```

```
end
```

```
%in S staan alle aantallen bij kollom van S is geteld de kollom van A nu  
%moeten we de rijen bij elkaar optellen.
```

```
s= zeros(56,1);
```

```
for i = 1:56
```

```
    s(i,1)= sum(S(i,:));
```

```
end
```

```
sc = (1/sum(s(:,1)))*s;
```

11 References

References

- [DK02] Dajani, K. and Kraaikamp, C. – Ergodic theory of numbers. Carus Mathematical Monographs, 29. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2002.
- [S91] Schweiger, S. – *Invariant measures for maps of continued fraction type*, J. Number Theory 39 (1991), no. 2, 162-174.
- [S95] Schweiger, S. – *Ergodic theory of fibred systems and metric number theory*, Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.
- [W11] Van der Wekken, C.D. – *Lost periodicity in N -continued fraction expansions*, Bachelor Thesis, Delft University of Technology (TU Delft), Delft, 2011.
repository.tudelft.nl/view/ir/uuid:67317fff-f3e3-44e4-8e59-51e70782705e/
- [CH00] Choe, G.H. – *Generalized continued fractions*, Appl. Math. Comput. 109 (2000) 287-299
- [RN51] Ryll-Nardzewski, C. – *On the ergodic theorems. II. Ergodic theory of continued fractions*, Studia Math. 12, (1951), 74-79.