

Manuscripten van H.J. Schoemaker

uit de periode 1946-1971

Deel B: Stroming in buisleidingen en kanalen

B1: Grondvergelijkingen van de hydrodynamica	1957
B2: Met de tijd veranderlijke stromen	1958
B3: Waterslag ¹	1959
B4: Waterslag, samendrukbare vloeistof in slappe buis met variërende doorsnede	1958
B5: Geleidelijk veranderde beweging in kanalen volgens Boussinesq	1968
B6: Geleidelijk veranderlijke beweging met zijdelingse aan- en afvoer	1966
B7: Hellende goten	

¹ uit: Colloquium toegepaste wiskunde, Delft, 1959, pp112-129

Deze manuscripten zijn uitgegeven ter gelegenheid van het 25 jarig jubileum van prof. ir. H.J. Schoemaker bij het Waterloopkundig Laboratorium op 15 september 1971

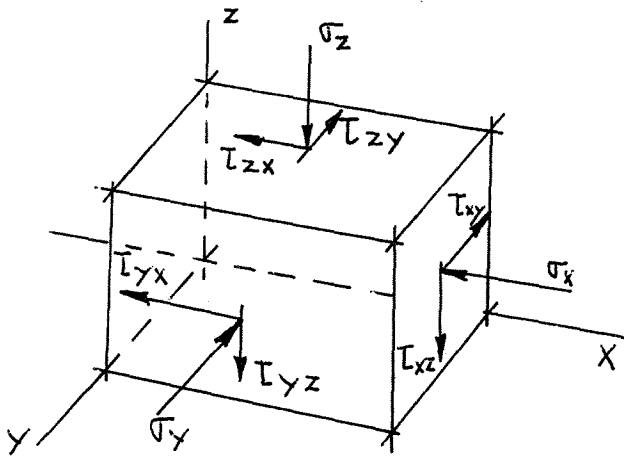
B STROMING IN BUISLEIDINGEN EN KANALEN

GRONDVERGELIJKINGEN IN DE HYDRODYNAMICA

De bewegings- en continuïteitsvergelijkingen, die het uitgangspunt vormen van de formules in de hydrodynamica, kunnen vaak met voordeel in een andere dan de klassieke vorm worden geschreven om bijzondere afleidingen overzichtelijk te maken. Hieronder worden twee vormen gegeven die het meest in aanmerking komen voor de afleiding van veel gebruikte formules:

1. de vergelijking van Euler-Navier in een gewijzigde vorm die vooral voor de turbulentie theorie, de impuls verg. en de formules voor permanente en geleidelijk met de tijd veranderde beweging nuttig is;
2. en de vergelijkingen van Lagrange, die voor de periodieke beweging in korte golven zijn te gebruiken.

Vergelijkingen van Euler-Navier



In tegenstelling tot wat in de mechanica van vaste stoffen gebruikelijk is, worden de spanningen in de aangegeven richtingen positief genomen. De vergelijkingen van Euler-Navier krijgen dan de vorm:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} = \rho X - \left\{ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right\}$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} = \rho Y - \left\{ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right\}$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} = \rho Z - \left\{ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right\}$$

en de continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

De spanningen (σ , τ) zijn de inwendige normale en schuifspanningen tengevolge van de viscositeit bijvoorbeeld:

$$\sigma_x = p - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{enz.} \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad \text{enz.}$$

(voor de afleiding van deze formules wordt verwezen naar de handboeken, bijvoorbeeld Lamb, 1932, art. 326).

De grootheden X , Y , Z zijn versnellingen veroorzaakt door uitwendige krachten, bijvoorbeeld de zwaartekracht.

Telt men de continuïteitsvergelijking met u vermenigvuldigd op bij de eerste bewegingsvergelijking

en $-u \cdot v$ $-u \cdot$ $-u \cdot -u \cdot -u \cdot$ tweede $-u \cdot$
 en $-u \cdot w$ $-u \cdot$ $-u \cdot -u \cdot -u \cdot$ derde $-u \cdot$
 dan krijgt men met de bekende betrekking

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2)$$

enz. de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_x + \rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx} + \rho uv) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx} + \rho uw) &= \rho X \\ \frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} + \rho vu) + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_y + \rho v^2) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zy} + \rho vw) &= \rho Y \\ \frac{\partial \rho w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xz} + \rho wu) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yz} + \rho wv) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_z + \rho w^2) &= \rho Z \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen zijn identiek met de evenwichtsvergelijkingen in de spannings-theorie van de mechanica van vaste stoffen. De spanningen (σ , τ) zijn alleen vermeerderd met de grootheden ρu^2 , ρuv enz, die ook de dimensie van een spanning hebben, en traagheidstermen $\partial \rho u / \partial t$ zijn bijgevoegd.

Deze vergelijkingen kunnen ook direct worden afgeleid. Bij de oorspronkelijke vergelijking van Euler volgt men in de afleiding een waterdeeltje in zijn beweging.

Voor de afleiding van de laatste vergelijkingen beschouwt men het evenwicht van een denkbeeldig vast ruimte element waar de vloeistof doorheen stroomt.

Bij het opstellen van de evenwichtsvoorwaarden moeten de "krachten" in de drie hoofdrichtingen en de "momenten" om drie assen in evenwicht zijn.

Een voorbeeld van de toepassing van deze vergelijking is bijvoorbeeld de vergelijking voor de watersprong. Gewoonlijk beperkt men zich tot de evenwichtsvergelijking voor een richting evenwijdig aan de bodem bij de afleiding van de formule.

De Reynolds schuifspanningen uit de turbulentietheorie worden door deze vergelijkingen direct gegeven: Deze vergelijkingen gelden algemeen op elk ogenblik. Wil men in een turbulente stroom een over de tijd gemiddelde toestand weergeven dan gaat men als volgt te werk: de snelheid u stelt men gelijk aan de over de tijd gemiddelde snelheid \bar{u} plus de ogenblikkelijke afwijking u' van het gemiddelde. Per definitie is dan $\bar{u}' = 0$ enz. De "schuifspanning" ρuv bijvoorbeeld wordt dan $\rho(\bar{u} + u') \times (\bar{v} + v') = \rho \bar{u}\bar{v} + \rho u'\bar{v} + \rho \bar{u}v' + \rho u'v'$. Deze uitdrukking over de tijd gemiddeld is $\rho \bar{u}\bar{v} + \rho u'v'$. De tweede en derde term in het tweede lid vallen in het gemiddelde weg.

Vergelijkingen van Lagrange

Met het oog op de toepassing in de theorie van de korte golven wordt de afleiding van de vergelijkingen van Lagrange hieronder beperkt tot het geval van de ideale niet-samendrukbare vloeistof.

Zowel in de vergelijkingen van Euler als in die van Lagrange wordt de beweging van een waterdeeltje gevolgd. In de vergelijkingen van Euler zijn (x, y, z) , de coördinaten van het deeltje, afhankelijk van t , zodat alle afgeleide grootheden zoals de snelheden (u, v, w) behalve expliciet óók nog via (x, y, z) van t afhangen. In de vergelijkingen van Lagrange wordt een stel parameters (a, b, c) onafhankelijk van t ingevoerd zó dat de afgeleide grootheden uitsluitend direct van t afhangen. Deze parameters kunnen bijvoorbeeld de coördinaten zijn van het beschouwde vloeistofdeeltje op een bepaald tijdstip of het middelpunt van de orbitale beweging in korte golven. De plaats van een deeltje op een willekeurig tijdstip wordt dan beschreven met deze "begin coördinaten" (a, b, c) en de met de tijd veranderde afwijking daarvan (ξ, η, ζ) .

De snelheidscomponenten zijn dan eenvoudig de afgeleiden naar de tijd van deze afwijkingen dus $(\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$ en de versnellingscomponenten $(\ddot{\xi}, \ddot{\eta}, \ddot{\zeta})$. Het verschil met de coördinaten, die in de vergelijkingen van Euler zijn gebruikt, ligt in het feit dat bij Euler bijvoorbeeld de snelheden (u, v, w) functies zijn van (x, y, z) dat wil zeggen de coördinaten van de plaats waar het deeltje zich werkelijk bevindt, terwijl bij Lagrange deze snelheden functies zijn van de coördinaten (a, b, c) waar het deeltje zich eens heeft bevonden. De plaats van het deeltje zelf op het moment waarop men de snelheden wil meten is dan gegeven door $(a + \xi, b + \eta, c + \zeta)$.

Deze wijze van beschrijven geeft een grote vereenvoudiging in de bewegingsvergelijkingen. De versnelling in de x -richting bijvoorbeeld is $\partial^2 x / \partial t^2$ of wat op hetzelfde neerkomt $\partial^2 / \partial t^2$ daar $x = a + \xi$ en a niet van t afhangt en ξ een functie is van (a, b, c, t) . De bewegingsvergelijkingen worden dan voor een ideale vloeistof:

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z}$$

In de uiteindelijke vormen moeten de differentiaties ook naar (a, b, c) in plaats van naar (x, t, z) worden gegeven.

Als tweede vereenvoudiging wordt nog verondersteld dat de versnellingen (X, Y, Z) van de uitwendige krachten een potentiaal hebben dus $-X = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$ enz.

Voor de overgang van een differentiatie naar x in een differentiatie naar a enz. wordt gebruik gemaakt van de bekende formule

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial a}$$

waarin $f(x, y, z, t)$ of $f(a, b, c, t)$ een of andere functie voorstelt en $x = a + \xi$, $y = b + \eta$ en $z = c + \zeta$ is.

Voor de herleiding van de bewegingsvergelijkingen moeten deze respectievelijk met $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial y}{\partial a}$ en $\frac{\partial z}{\partial a}$ worden vermenigvuldigd en daarna worden opgeteld om de eerste vergelijking in de uiteindelijke gedaante te krijgen.

Respectievelijk vermenigvuldigen met $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial y}{\partial b}$ en $\frac{\partial z}{\partial b}$ en optellen geeft de tweede vergelijking. De derde vergelijking krijgt men door respectievelijk te vermenigvuldigen met $\frac{\partial x}{\partial c}$, $\frac{\partial y}{\partial c}$ en $\frac{\partial z}{\partial c}$ en optellen.

Het resultaat is dan:

$$\begin{aligned} \rho \xi'' + \rho \xi'' \frac{\partial \xi}{\partial a} + \rho \eta'' \frac{\partial \eta}{\partial a} + \rho \zeta'' \frac{\partial \zeta}{\partial a} + \frac{\partial}{\partial a} \{ p + \rho \Omega \} &= 0 \\ \rho \eta'' + \rho \xi'' \frac{\partial \xi}{\partial b} + \rho \eta'' \frac{\partial \eta}{\partial b} + \rho \zeta'' \frac{\partial \zeta}{\partial b} + \frac{\partial}{\partial b} \{ p + \rho \Omega \} &= 0 \\ \rho \zeta'' + \rho \xi'' \frac{\partial \xi}{\partial c} + \rho \eta'' \frac{\partial \eta}{\partial c} + \rho \zeta'' \frac{\partial \zeta}{\partial c} + \frac{\partial}{\partial c} \{ p + \rho \Omega \} &= 0 \end{aligned}$$

Voor de afleiding van de continuïteitsvergelijking in de coördinaten van Lagrange kan gebruik worden gemaakt van de formele transformatie formules:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial a}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial a} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial b} + \frac{\partial f}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial b}\right) + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial \zeta}{\partial b}$$

$$\frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial c} + \frac{\partial f}{\partial z} \left(1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c}\right).$$

Deze vergelijkingen opgelost naar $\frac{\partial f}{\partial x}$ enz. geven

$$D \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial a} & \frac{\partial \eta}{\partial a} & \frac{\partial \zeta}{\partial a} \\ \frac{\partial f}{\partial b} & 1 + \frac{\partial \eta}{\partial b} & \frac{\partial \zeta}{\partial b} \\ \frac{\partial f}{\partial c} & \frac{\partial \eta}{\partial c} & 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \end{vmatrix} \quad \text{waarin } D = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi}{\partial a} & \frac{\partial \eta}{\partial a} & \frac{\partial \zeta}{\partial a} \\ \frac{\partial \xi}{\partial b} & 1 + \frac{\partial \eta}{\partial b} & \frac{\partial \zeta}{\partial b} \\ \frac{\partial \xi}{\partial c} & \frac{\partial \eta}{\partial c} & 1 + \frac{\partial \zeta}{\partial c} \end{vmatrix}$$

evenzo voor $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Schrijft men symbolisch voor $D \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f$ en voor $D \frac{\partial f}{\partial y}$ net zo $D_y f$ en voor $D \frac{\partial f}{\partial z} = D_z f$ dan geeft de continuïteitsvergelijking

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \times D = D_x u + D_y v + D_z w = 0.$$

met $u, v, w =$ respectievelijk $\frac{\partial \xi}{\partial t}, \frac{\partial \eta}{\partial t}, \frac{\partial \zeta}{\partial t}$ of ξ', η', ζ' . De uitdrukking in het tweede lid van de continuïteitsvergelijking is dan juist $\partial D / \partial t = 0$ dat wil zeggen dat D onafhankelijk is van t . Verondersteld is dat (a, b, c) een plaatsaanduiding is van een deeltje op een bepaald tijdstip t dus D ten tijde $t_0 = 1$. Daar D niet van t afhangt blijft $D = 1$ wat de nieuwe gedaante is van de continuïteitsvergelijking.

In de theorie van de korte golven verwaarloost men in eerste benadering alle product termen zodat de continuïteitsvergelijking de zeer eenvoudige gedaante $\partial \xi / \partial a + \partial \eta / \partial b + \partial \zeta / \partial c \approx 0$ krijgt.

Voor de directe afleiding van de continuïteitsvergelijking kan worden gebruik gemaakt van de formule voor de inhoud van een infinitesimaal klein parallelipedum in de vorm van een determinant in de coördinaten van de hoekpunten (zie Lamb 1932, art 14).

Het verschil tussen de hierboven gebruikte twee coördinaten systemen ligt in de wijze waarop een vloeistofdeeltje wordt gevolgd.

In het systeem van Euler heeft men één plaatsbepaling (x, y, z) voor het hele veld; in het systeem van Lagrange geeft men het vloeistofdeeltje nog een "merk" in de vorm van (a, b, c) , de coördinaten op een bepaald tijdstip.

Beschouwt men bijvoorbeeld de snelheid in de x -richting $u(a, b, c, t) = u(x, y, z, t)$ waarbij $x = a + \xi$ enz. dan krijgt men de versnelling van het betreffende vloeistofdeeltje door volledig naar t te differentiëren.

In het Euler-systeem veranderen de coördinaten (x, y, z) van het deeltje met de tijd zodat bij differentiatie ook deze coördinaten moeten worden betrokken.

In het Lagrange-systeem zijn de "merk" coördinaten (a, b, c) onafhankelijk van t . De versnelling in de x -richting van een deeltje is dus

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \stackrel{\text{Euler}}{=} \frac{\partial u}{\partial t} \stackrel{\text{Lagrange}}{=} \frac{\partial u}{\partial t}$$

waarin $\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)$ deeltje = u enz. | want $\frac{\partial a}{\partial t} = 0$ enz.

De vereenvoudiging door het gebruik van het Lagrange-systeem brengt een complicatie met zich mee bijvoorbeeld de snelheidsaanduiding $u(a, b, c, t)$ is niet volledig zonder daar tevens bij te geven (ξ, η, ζ) want deze snelheid u komt voor in (x, y, z) $(a + \xi, y + \eta, z + \zeta)$ en niet op de plaats (a, b, c) .

Deze complicatie is bijvoorbeeld hinderlijk als men in de golfbeweging de drukken $p(a, b, c, t)$ moet berekenen. De plaats waar deze drukken heersen wordt gegeven door $(a + \xi, b + \eta, c + \zeta)$ en beslist niet door (a, b, c) .

Het feit dat in een permanente beweging (ξ, η, ζ) steeds toe nemen, dus met verloop van de tijd onbruikbaar grote getallen worden, maakt dat de toepassing van het Lagrange-systeem beperkt is tot de zuiver periodieke beweging.

MET DE TIJD VERANDERLIJKE STROMEN:
- METHODE VAN DE KARAKTERISTIEKEN -

INHOUD

<u>1. Inleiding</u>	blz. B2-2
<u>2. Afleiding van Craya</u>	B2-2
<u>3. Algemene afleiding</u>	B2-4
<u>4. Combinatie van bewegings- en continuïteitsvergelijking</u>	B2-6
<u>5. Grafische interpretatie</u>	B2-10
<u>6. Verwaarlozing van versnellingstermen</u>	B2-11
<u>7. Hoogwatergolven in rivieren</u>	B2-12
<u>8. Golfvoortplantingsformule van De Saint Venant</u>	B2-16
<u>9. Gedeeltelijk stroomvoerend profiel</u>	B2-18

Met de tijd veranderlijke stromen
- Methode van de karakteristieken -

De berekening van met de tijd en de plaats veranderende stromen in watergangen kan met de methode van de karakteristieken het meest universeel worden uitgevoerd. Zowel voor het afleiden van formules als voor numerieke berekeningen geven de "karakteristieken" van de combinatie van de bewegings- en continuïteitsvergelijking een overzichtelijke grondslag.

In het volgende zullen de grondslagen van deze methode op verschillende manieren worden ontleend aan de hand van een voorbeeld van een kanaal met vrije waterspiegel en constante breedte. De waterdiepte h en de stroomsnelheid v worden daarbij als functies van de tijd t en de afstand s langs de bodem van het kanaal beschouwd. De veranderingen met de tijd t worden zo geleidelijk verondersteld, dat op elk moment de weerstand van de bodem gelijk kan worden gesteld aan die voor een permanente stroom met overeenkomstige diepte en stroomsnelheid.

Eerst wordt het bestaan en de betekenis van de karakteristieken getoond met afleidingen uit de hydrodynamica. Daarna wordt afgeleid welke wiskundige betekenis de karakteristieken hebben bij de beschouwing van het stelsel bewegings- en continuïteitsvergelijking. Deze afleiding geeft dan een middel om de voor berekening noodzakelijke betrekkingen af te leiden in bijzondere gevallen als voor stromen in leidingen met variërende breedte, met bergende maar niet geheel stroomvoerende delen van het profiel en voor andere met s en eventueel met t veranderende eigenschappen.

De zuiver wiskundige afleiding van de karakteristieke vergelijkingen kan namelijk volgens een vast recept worden uitgevoerd waardoor de kans op niet verantwoorde verwaarlozingen wordt verminderd. Voor elke bijzondere complicatie blijft echter een hydrodynamische afleiding mogelijk; deze zal in een aantal voorbeelden naast de formele afleiding worden gesteld.

Alle wiskundige eigenschappen van de grondvergelijkingen hebben een hydrodynamische betekenis. Door de twee beschouwingswijzen, de hydrodynamische en de wiskundige, naast elkaar te stellen zal blijken, dat er geen geheimzinnige kunstgrepen worden toegepast, dat de wiskundige behandeling slechts een synthese is van een aantal detailbeschouwingen met bekende elementaire hydrodynamische formules.

Bij de afleidingen is verondersteld dat de lezer bekend is met het praktische gebruik van de methode van de karakteristieken.

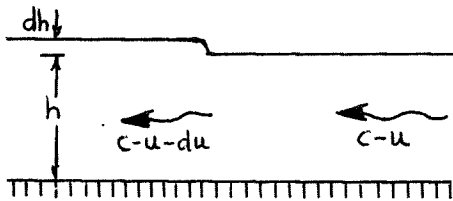
2. Afleiding van Craya

Bij de hydrodynamische afleiding van de karakteristieke vergelijkingen gaat men uit van de permanente toestand waar men een kleine storing in brengt.

Bijvoorbeeld: een kleine toeneming van het debiet in een kanaal geeft een oppervlakverheffing dh die zich met een snelheid $v + \sqrt{gh}$ stroomafwaarts voortplant. De afleiding van deze formule gebeurt met de impulsvergelijking in de meest eenvoudige vorm: de "storing" dh wordt daarbij klein verondersteld ten opzichte van de waterdiepte h .

De afleiding van de formule voor de voortplantingssnelheid kan het best gebeuren ten opzichte van een waarnemer (dat is een assenstelsel) die zich met de (nog onbekende)

voortplantingsnelheid c met de storing mee beweegt. De storing is dan als permanente elementaire watersprong te behandelen:



$$\rho (c-u-du)^2 (h+dh) - \rho (c-u)^2 h + \frac{1}{2} \rho g (h+dh)^2 - \frac{1}{2} \rho g h^2 = 0.$$

of

$$- 2 \rho (c-u) h du + \rho (c-u)^2 dh + \rho g h dh = 0$$

continuïteit: $(c-u) dh - h du = 0$

Substitutie geeft $(c-u)^2 = gh$ dus $c = u \pm \sqrt{gh}$.

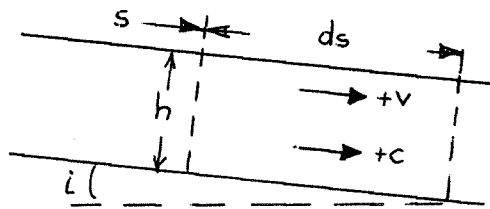
Elke verandering ten opzichte van de permanente toestand kan worden opgevat als een superpositie van een groot aantal elementaire storingen die zich stroomaf respectievelijk stroomop voortplanten met een snelheid $c = v \pm \sigma \sqrt{gh}$ met $\sigma = +1$ voor stroomaf en $\sigma = -1$ voor stroomop.

De oorspronkelijke permanente toestand en de permanente toestand na het passeren van de storing wordt gegeven door de bewegingsvergelijking voor de permanente beweging:

$$g \frac{dh}{ds} + v \frac{dv}{ds} + gW = 0.$$

$$W = \frac{\varphi}{g} \frac{v|v|}{h} - \sin i$$

$$\varphi = \frac{g}{C^2} = \frac{1}{\left\{ 5 \frac{3}{4} \log \left(12 \frac{h}{k} \right) \right\}^2}$$



(N.B. als $\cos i$ niet = 1 kan worden gesteld, moet $g \frac{dh}{ds}$ worden vervangen door $g \cdot \cos i \frac{dh}{ds}$).

$$g dh + v dv + gW ds = 0 \quad \text{bewegingsvergelijking}$$

$$v dh + h dv = 0 \quad \text{continuïteits}$$

Aan deze vergelijkingen moet worden voldaan vóór en ná het passeren van de storing. Uit deze vergelijkingen zijn dh en dv op te lossen:

$$dh = - \frac{gh}{gh - v^2} W ds, \quad dv = + \frac{gv}{gh - v^2} W ds.$$

Nu is $gh - v^2 = (\sqrt{gh} + v)(\sqrt{gh} - v)$; het ligt dus voor de hand om in plaats van dh een uitdrukking met $d\sqrt{gh}$ te gebruiken:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{g}{h}} dh &= \\ 2 d\sqrt{gh} &= \end{aligned} \right\} - \frac{\sqrt{gh}}{gh - v^2} gW ds$$

Anders geschreven:

$$\left. \begin{aligned} dv &= + \frac{v}{\sqrt{gh} - v} gW \frac{ds}{\sqrt{gh} + v} \\ 2dgh &= - \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{gh} - v} gW \frac{ds}{\sqrt{gh} + v} \end{aligned} \right\} dv + 2d\sqrt{gh} = -gW \frac{ds}{\sqrt{gh} + v}$$

$$\left. \begin{aligned} dv &= + \frac{v}{\sqrt{gh} + v} gW \frac{ds}{\sqrt{gh} - v} \\ 2dgh &= - \frac{\sqrt{gh}}{\sqrt{gh} + v} gW \frac{ds}{\sqrt{gh} - v} \end{aligned} \right\} dv - 2d\sqrt{gh} = +gW \frac{ds}{\sqrt{gh} - v}$$

Gaat een waarnemer met een snelheid $ds/dt = v - \sqrt{gh}$ langs het kanaal (in het (s, t) -diagram een lijn met deze helling) en ontmoet hij een "storing", die met de snelheid $ds/dt = v + \sqrt{gh}$ vooruitgaat, dan hangen de waargenomen veranderingen dh en dv in h en v samen volgens de tweede vergelijking. $ds/\sqrt{gh} - v$ schrijft men dan als $-dt$ op grond van die speciale keuze om langs de ene karakteristiek, $ds/dt = v - \sqrt{gh}$, gaande de storing langs de andere te ontmoeten. Mutatis mutandis geldt hetzelfde langs de andere karakt. gaande.

Door deze bijzondere keuze van dt , namelijk zó dat altijd $ds/dt = v + \sigma\sqrt{gh}$ is, verkrijgt men het voorschrift voor het onderlinge verband van de veranderingen in h en v afkomstig van de storing $dv + 2\sigma d\sqrt{gh} = -gW dt$ in de overigens permanente beweging ($\sigma = +$ of $-$).

3. Algemene afleiding

Daar verondersteld is dat h en v uitsluitend van s en t afhangen gelden de betrekkingen:

$$\frac{\partial h}{\partial s} ds + \frac{\partial h}{\partial t} dt = dh \quad \text{en} \quad \frac{\partial v}{\partial s} ds + \frac{\partial v}{\partial t} dt = dv$$

Bepaalt men dh en dv langs een "karakteristiek" dan is tussen ds en dt het verband $ds/dt = v + \sigma\sqrt{gh}$.

Waar dit toe leidt kan worden opgemaakt uit de bewegings- en continuïteitsvergelijking door de eerste na vermenigvuldiging met σgh bij de tweede op te tellen:

$$\left\{ \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + W = 0 \right\} \times \sigma \sqrt{gh}$$

$$v \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

beide gesommeerd:

$$(v + \sqrt{gh}) \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} + \sigma \sqrt{\frac{h}{g}} \left[\left\{ v + \sigma \sqrt{gh} \right\} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} \right] + W \sigma \sqrt{gh} = 0$$

$$\text{met } \sigma = \pm 1; \quad \frac{1}{\sigma} = \sigma; \quad \sigma^2 = +1; \quad \sigma \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{dh}{dt} = \sigma^2 \frac{d\sqrt{gh}}{dt}$$

$$\text{wordt dit } \frac{dh}{dt} + \sigma \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{dv}{dt} + W \sigma \sqrt{gh} = 0$$

$$\text{of } \frac{dv}{dt} + \sigma \cdot 2 \cdot \frac{d\sqrt{gh}}{dt} + gW = 0$$

Langs de "karakteristiek" $\frac{ds}{dt} = v + \sigma \sqrt{gh}$ waardoor geldt:

$$\frac{\partial h}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dt} \quad \text{en} \quad \frac{\partial v}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dt}$$

Men neemt dus een afgeleide langs een karakteristiek, een lijn in het (s,t)-vlak waarvoor $ds/dt = v + \sigma \sqrt{gh}$ is. In de algemene formules, bijvoorbeeld

$$\frac{\partial h}{\partial s} ds + \frac{\partial h}{\partial t} dt = dh$$

is dh en zijn daarmee $\partial h/\partial s$ en $\partial h/\partial t$ nog onbepaald, ook als men tussen ds en dt het aangegeven verband legt. Wel is er een verband gelegd tussen dh en dv, maar er is nog een tweede betrekking nodig om elk van beiden te bepalen langs de karakteristieken. Het gezochte stelsel van twee vergelijkingen om én dv én $d\sqrt{gh}$ te bepalen wordt gegeven door langs twee karakteristieken de afgeleiden te nemen dus zowel $\sigma = +1$ als $\sigma = -1$ te nemen.

$d\sqrt{gh}$ en dv worden dan op het snijpunt van de twee karakteristieken $ds/dt = v + \sqrt{gh}$ en $ds/dt = v - \sqrt{gh}$ bepaald uit de daarbij behorende twee vergelijkingen.

$$dv + 2d\sqrt{gh} = -gWdt \quad \text{en} \quad dv - 2d\sqrt{gh} = -gWdt.$$

Op grond hiervan kan men de vraag stellen of men de karakteristieke betrekkingen niet omgekeerd kan afleiden door de voorwaarde voor ds en dt en voor dv en $d\sqrt{gh}$ op te stellen waarop alle afgeleiden van h en v onbepaald worden. Hiertoe gaat men uit van het stelsel vergelijkingen:

$$\frac{\partial h}{\partial s} + 0 + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + W = 0$$

$$v \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

$$ds \frac{\partial h}{\partial s} + dt \frac{\partial h}{\partial t} - dh = 0$$

$$ds \frac{\partial v}{\partial s} + dt \frac{\partial v}{\partial t} - dv = 0$$

De eerste vergelijking is de bewegingsvergelijking, de tweede de continuïteitsvergelijking, de derde en de vierde vergelijking drukken uit dat h en v uitsluitend van s en t afhangen. De vier afgeleiden $\partial h/\partial s$, $\partial h/\partial t$, $\partial v/\partial s$ en $\partial v/\partial t$ kunnen uit deze vergelijkingen met deze vier "onbekenden" worden opgelost. De oplossingen worden onbepaald als de uitkomst $0/0$ is. De nodige en voldoende voorwaarde voor dit onbepaald zijn van de "onbekenden" is dat alle determinanten van de vierde orde in de "coëfficiënten" nul worden. Deze determinanten gelijk nul gesteld leveren dan de gezochte betrekkingen tussen ds en dt enerzijds en tussen dv en dh anderzijds.

De afgeleiden van h en v in de andere richtingen in het (s, H) -vlak, dat wil zeggen de richtingen die niet samen vallen met één van de karakteristieken, zijn wél bepaald. Kent men dus langs een willekeurige lijn in het (s, t) -vlak op alle punten h en v , dan is in de omgeving van die lijn ook alles bekend door telkens van twee punten van die lijn uit, met de boven aangegeven betrekkingen, de "toestand" (h, v) in een punt buiten die lijn te berekenen.

Het punt buiten die lijn heeft ten opzichte van de punten op de lijn de "afstanden" ds en dt . Of men de afgeleide betrekkingen hiervoor gebruikt of dat men uit de vier vergelijkingen $\partial h/\partial s$, $\partial h/\partial t$, $\partial v/\partial s$ en $\partial v/\partial t$ oplost en daarmee in de "omgeving" (h, v) berekent maakt in geen enkel opzicht enig verschil. De directe oplossing van de vier vergelijkingen geeft echter een aanknopingspunt met wat in de wiskunde over deze differentiaal vergelijkingen bekend is.

Als zéér belangrijke uitzondering komt het geval dat de vier afgeleiden langs de lijn van bekende (h, v) onbepaald worden. Dit geval doet zich voor als ds en dt langs deze lijn voldoen aan $ds/dt = v + \sigma \sqrt{gh}$ want één van de voorwaarden dat de afgeleiden onbepaald zijn is dat de hoofddeterminant van de vergelijkingen nul is:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & v/g & 1/g \\ v & 1 & h & 0 \\ ds & dt & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ds & dt \end{vmatrix} = 0 \quad \text{of uitgewerkt: } \frac{ds}{dt} = v + \sqrt{gh}$$

De voorwaarde voor $\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{0}{0}$ is daarbij:

$$\begin{vmatrix} -W & 0 & v/g & 1/g \\ 0 & 1 & h & 0 \\ +dh & dt & 0 & 0 \\ +dv & 0 & ds & dt \end{vmatrix} = 0$$

Voor de andere afgeleiden elk $= \frac{0}{0}$ gelden overeenkomstige voorwaarden die allen leiden tot $dv + 2d\sqrt{gh} = -gW dt$

Het nul stellen van de determinanten geeft de karakteristieke vergelijkingen en is dus het algemene recept om uit de grondvergelijkingen de verlangde betrekkingen direct af te leiden.

4. Combinatie van bewegings- en continuïteitsvergelijking

Voor de volledige vergelijking tussen de hydrodynamische beschouwingswijze en de theorie van de partiële differentiaal vergelijkingen is het gewenst de grondvergelijkingen in een andere vorm te brengen. De hiervoor gegeven aanduiding van de berekening van de afgeleiden van (h, v) is niet voldoende om aan te tonen dat dezelfde beperkingen als in de

grafische berekeningen bekend zijn, ook zuiver wiskundig kunnen worden afgeleid. Hieronder wordt volstaan met het geven van verschillende vormen van grondvergelijkingen, die overeenkomen met de in wiskunde leerboeken gebruikelijke vormen. Voor een nadere analyse van de wiskundige eigenschappen van deze vergelijkingen wordt naar deze leerboeken verwezen.

Stelt men $h = \partial Z / \partial s$ en $Q = hv = -\partial Z / \partial t$ dan is aan de continuïteitsvergelijking voldaan. De fysische betekenis van Z is het volumen van de vloeistof in het kanaal van een of ander (hypothetisch) punt af waar geen veranderingen optreden tot aan de beschouwde plaats s ten tijde t .

Substitutie van afgeleiden van Z in de bewegingsvergelijking geeft een partiële differentiaalvergelijking van de tweede orde en wel van het hyperbolische type.

De substitutie kan het overzichtelijkst worden uitgevoerd door alleen de tweede afgeleiden van Z op te schrijven en de eerste afgeleiden als uitdrukkingen in h en v te laten staan. Uit de definitie van Z volgt:

$$v = -\frac{\frac{\partial Z}{\partial t}}{\frac{\partial Z}{\partial s}} \quad \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{1}{h} \frac{\partial^2 Z}{\partial s \partial t} - \frac{v}{h} \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} = -\frac{\frac{\partial Z}{\partial s} \frac{\partial^2 Z}{\partial t \partial s} - \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2}}{\left(\frac{\partial Z}{\partial s}\right)^2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \frac{v}{h} \frac{\partial^2 Z}{\partial s \partial t} = -\frac{\frac{\partial Z}{\partial s} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \frac{\partial Z}{\partial t} \frac{\partial^2 Z}{\partial s \partial t}}{\left(\frac{\partial Z}{\partial s}\right)^2}$$

Substitutie in $\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + W = 0$ geeft

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - \frac{v}{gh} \frac{\partial^2 Z}{\partial s \partial t} - \frac{v^2}{gh} \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - \frac{1}{gh} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} - \frac{v}{gh} \frac{\partial^2 Z}{\partial s \partial t} + W = 0$$

of

$$\left\{ 1 - \frac{v^2}{gh} \right\} \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - 2 \frac{v}{gh} \frac{\partial^2 Z}{\partial s \partial t} - \frac{1}{gh} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + W = 0$$

Uit deze gedaante van de vergelijking volgt direct dat volgens het klassieke kenmerk $AC - B^2 < 0$ de vergelijking van het hyperbolische type is:

$$A = \left(1 - \frac{v^2}{gh}\right); \quad B = -\frac{v}{gh}; \quad C = -\frac{1}{gh}.$$

Deze vorm van de grondvergelijkingen is nog niet bruikbaar voor een wiskundige analyse van de algemene eigenschappen. Hiervoor is een transformatie van de oorspronkelijke vergelijkingen op een andere assenstelsel noodzakelijk en wel op de karakteristieken in het (s, t) vlak als kromlijnige coördinaten.

Met de transformatie

$$ds - (v + \sqrt{gh}) dt = d\xi$$

$$ds = (v - \sqrt{gh}) dt = d\eta$$

kunnen de vergelijkingen in de "normale" vorm worden gebracht; en η zijn dan de nieuwe coördinaten in plaats van s en t .

Bij deze transformatie wordt aangenomen, dat de karakteristieken bepaalde krommen zijn, dat dus bij elke s en t bepaalde v en h behoren in het (s, t) vlak, die weliswaar nog moeten worden berekend maar die men a priori als bestaand aanneemt.

De afhankelijk veranderlijken v en h zijn echter nog functies van s en t . Dit is de reden waarom de transformatieformules in differentiaal vorm zijn geschreven.

Algemeen geldt voor

$$\xi(s, t) : \frac{\partial \xi}{\partial s} ds + \frac{\partial \xi}{\partial t} dt = d\xi$$

en voor $\eta(s, t) : \frac{\partial \eta}{\partial s} ds + \frac{\partial \eta}{\partial t} dt = d\eta$

Hieruit volgt $\xi_s = 1$; $\eta_s = 1$; $\xi_t = -(v + c)$; $\eta_t = -(v - c)$

waarbij de indices de differentiatie naar de aangeduide grootheden betekenen en $c = +\sqrt{gh}$ is gesteld in afwijking van wat hiervoor is gedaan. Ook in het volgende zal steeds $c = +\sqrt{gh}$ worden gesteld.

Omgekeerd is

$$s_\xi = -\frac{v - c}{2c}; \quad s_\eta = \frac{v + c}{2c}; \quad t_\xi = -\frac{1}{2c}; \quad t_\eta = \frac{1}{2c}$$

Met deze formules is af te leiden dat

$$\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial t} = -(v + c) \frac{\partial}{\partial \xi} - (v - c) \frac{\partial}{\partial \eta}$$

De oorspronkelijke bewegingsvergelijking is dus te schrijven als:

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial h}{\partial \eta} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial \eta} - \frac{v + c}{g} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{v - c}{g} \frac{\partial v}{\partial \eta} + W = 0$$

of
$$\frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial h}{\partial \eta} - \frac{c}{g} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{c}{g} \frac{\partial v}{\partial \eta} + W = 0$$

Voert men nog in $h = c^2/g$ dan krijgt men

$$\frac{2c}{g} \frac{\partial c}{\partial \xi} + \frac{2c}{g} \frac{\partial c}{\partial \eta} - \frac{c}{g} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{c}{g} \frac{\partial v}{\partial \eta} + W = 0$$

Na deling door c/g wordt de bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (2c - v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (2c + v) + \frac{gW}{c} = 0$$

De continuïteitsvergelijking geeft:

$$v \frac{\partial h}{\partial \xi} + v \frac{\partial h}{\partial \eta} - (v + c) \frac{\partial h}{\partial \xi} - (v - c) \frac{\partial h}{\partial \eta} + h \frac{\partial v}{\partial \xi} + h \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

of

$$-c \frac{\partial h}{\partial \xi} + c \frac{\partial h}{\partial \eta} + h \frac{\partial v}{\partial \xi} + h \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0$$

Met de substitutie $h = c^2/g$ en na deling door c/g :

$$- \frac{\partial}{\partial \xi} (2c - v) + \frac{\partial}{\partial \eta} (2c + v) = 0$$

Combinatie van de twee vergelijkingen geeft:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (2c - v) + \frac{gW}{2c} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} (2c + v) + \frac{gW}{2c} = 0$$

De transformatie terug op de onafhankelijk veranderlijken s en t gebeurt met de formules:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = - \frac{v - c}{2c} \frac{\partial}{\partial s} - \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{en} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = + \frac{v + c}{2c} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t}$$

Voor de opstelling van de differentiaal vergelijking van de tweede orde leidt men weer uit de continuïteits vergelijking het bestaan van een "potentiaal" Φ af, analoog met de potentiaal Z .

Stel $(-2c + v) = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}$ en $(2c + v) = - \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}$; dan volgt uit de bewegings vergelijking:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{g}{2c} W$$

Dit is de "normale" gedaante waarin de partiële differentiaal vergelijking van het hyperbolische type in de verschillende leerboeken wordt gegeven (c.f. Bremekamp: Partiële Differentiaal vergelijkingen; P. Noordhoff, Groningen 1939, blz. 39 en volgende). De lijnen $\xi = \text{constant}$ en $\eta = \text{constant}$ zijn de karakteristieken en hoever de "omgeving" van de "lijn" met bekende (h, v) zich uitstrekt wordt verder in de theorie van deze vergelijkingen uitgewerkt.

Het is ook mogelijk h en v in plaats van s en t als onafhankelijke veranderlijken te kiezen zodat s en t als functies van h en v worden gevonden. De transformatie naar de "normale" vorm gebeurt dan met de lijnen $2c + v$ en $2c - v = \text{constant}$ als nieuwe coördinaten in het $(2c, v)$ vlak. In plaats van $h = c^2/g$ wordt dan eerst $2c$ als veranderlijke ingevoerd.

5. Grafische interpretatie

Combineert men de afhankelijke veranderlijken (v, c) tot $m = 2c + v$ en $n = 2c - v$ dan worden de grondvergelijkingen:

$$\begin{aligned} n \xi + m \eta + \frac{gW}{c} &= 0 \\ -n \xi + m \eta &= 0 \end{aligned}$$

Verder is $v = 1/2 m - 1/2 n$ en $2c = 1/2 m + 1/2 n$.

De transformatieformules zijn:

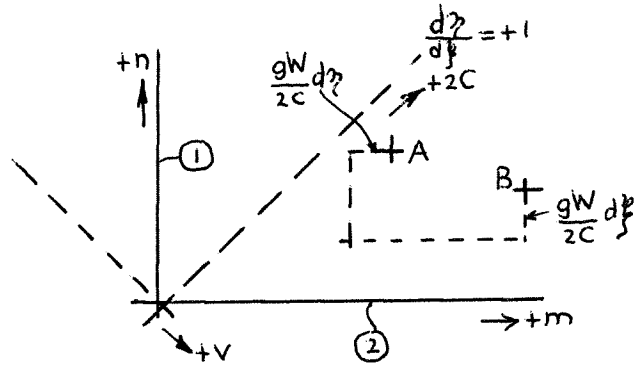
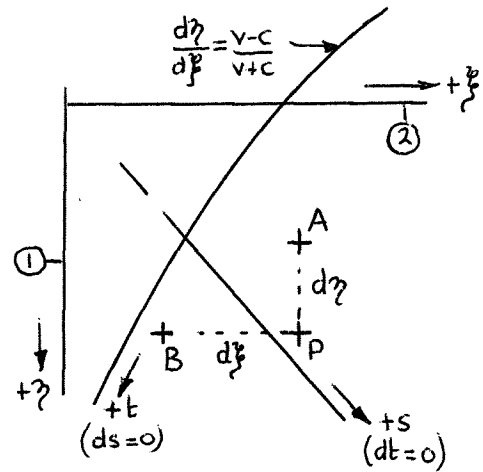
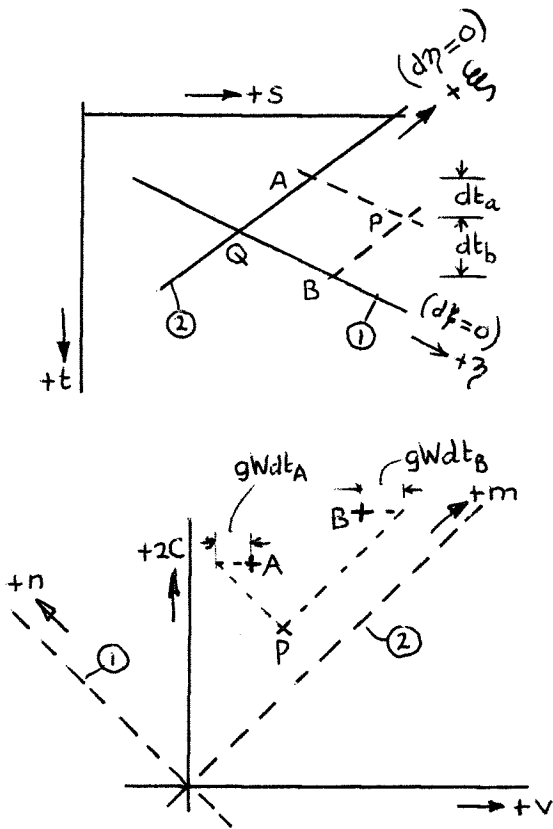
$$\begin{aligned} ds - (v + c) dt &= d\xi & -\frac{1}{2c} d\xi + \frac{1}{2c} d\eta &= dt \\ ds - (v - c) dt &= d\eta & -\frac{v-c}{2c} d\xi + \frac{v+c}{2c} d\eta &= ds \end{aligned}$$

$$1) ds = (v + c) dt \quad \text{en} \quad dv + d(2c) = -gW dt$$

$$2) ds = (v - c) dt \quad \text{en} \quad dv - d(2c) = -gW dt$$

$$1) d\xi = 0 \quad \text{en} \quad dm = -\frac{gW}{2c} d\eta$$

$$2) d\eta = 0 \quad \text{en} \quad dn = -\frac{gW}{2c} d\xi$$



N.B. In de dissertatie van Schönfeld wordt gebruik gemaakt van de term "karakteristieke variabelen" en van de termen "plus- en min subkarakteristieken". De daarvoor gebruikte notaties zijn vergeleken met de hier gebruikte:

o.a.

$$\xi^- = f^+ = \frac{m}{2} \quad c^+ = c + v$$

$$\xi^+ = f^- = \frac{n}{2} \quad c^- = c - v$$

$$\eta^+ = \xi; \quad \eta^- = \eta$$

Onder "subkarakteristieken" wordt verstaan wat hier is aangeduid met karakteristieken of karakteristieke lijnen. (c.f. Propagation of Tides and Similar Waves; 's Gravenhage 1951).

6. Verwaarlozing van versnellingstermen

De gevolgen van een verwaarlozing kan het gemakkelijkst worden overzien door na te gaan welke invloed de betrokken term op het gedrag van de karakteristieken heeft.

Hiertoe geeft men de term, die moet worden verwaarloosd, in de oorspronkelijke bewegingsvergelijking een "merk" door toevoegen van een factor die achteraf nul wordt gesteld:

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \varepsilon \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \delta \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + W = 0$$

ε of (en) $\delta = 0$ als de bijbehorende term wordt verwaarloosd en $= 1$ als die term moet worden gehandhaafd:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\varepsilon + \delta}{2\delta} v \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon - \delta}{2\delta}\right)^2 v^2 + \frac{gh}{\delta}} = \frac{v}{2} \pm \sqrt{\frac{v^2}{4} + gh}$$

($\varepsilon = 0$)
($\delta = 1$)

$\delta = 0$ en $\varepsilon = 1$ geeft $ds/dt = +\infty$ en $ds/dt = v - gh/v$.

Stelt men $\varepsilon = \delta$ en berekent men de limiet voor $\varepsilon = \delta \rightarrow 0$ dan wordt $ds/dt = +\infty$ wat in de benadering met sterk overwegende weerstandstermen gebeurt. Het is dan onmogelijk met karakteristieken te werken.

7. Hoogwatergolven in rivieren

In gevallen met een weerstandsinvloed die véél groter is dan de invloed van de versnellingsstermen $v/g \partial v/\partial s$ en $1/g \partial v/\partial t$ verwaarloost men de laatste.

In het beeld van de karakteristieken komt dit neer op het stellen van $gH \rightarrow \infty$ waardoor de karakteristieken in het (s, t) diagram samenvallen en evenwijdig aan de s -as gaan lopen.

Gaat men uit van een permanente toestand (waarvan de afhankelijke variabelen met hoofdletters worden aangeduid dus H en V) en beschouwt men een kleine verandering daarop (aangeduid met kleine letters) dan is de weerstandsterm

$$W = \frac{\varphi}{g} \frac{V^2}{H} - I \quad \text{voor de permanente toestand} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \quad \frac{\partial V}{\partial s} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad (\text{ook eenparigheid verondersteld})$$

dus

$$I = \frac{\varphi}{g} \frac{V^2}{H}$$

$$W + w = \frac{\varphi}{g} \frac{(V + v)^2}{H + h} - I = w = \frac{\varphi}{g} \frac{V^2}{H} \left(1 + 2 \frac{v}{V} + \frac{h}{H}\right) - I$$

verder is $Q + q = VH + Vh + vH$ (φ hier als constante beschouwd)

Ook is $W + w = \frac{\varphi}{g} \frac{(Q + q)^2}{(H + h)^3} = \frac{\varphi}{g} \frac{Q^2}{H^3} \left(1 + 2 \frac{q}{Q} - 3 \frac{h}{H}\right) - 1$ (N.B. $Q =$ debiet per breedte eenheid)

De hiervoor afgeleide vergelijking

$$\left(1 + \frac{V^2}{gH}\right) \frac{\partial^2 Z}{\partial s^2} - 2 \frac{v}{gH} \frac{\partial^2 Z}{\partial s \partial t} - \frac{1}{gH} \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + W = 0 \quad \text{geeft}$$

met $\frac{\partial z}{\partial s} = h$ en $\frac{\partial z}{\partial t} = -q$ en $\frac{\partial^2 Z}{\partial s \partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial q}{\partial s}$

$$\left(1 - \frac{V^2}{gH}\right) \frac{\partial h}{\partial s} - 2 \frac{v}{gH} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{gH} \frac{\partial q}{\partial t} + 1 \left\{2 \frac{q}{Q} - 3 \frac{h}{H}\right\} = 0$$

Eigenlijk moet in plaats van

$$\left(1 - \frac{V^2}{gH}\right) \quad \text{staan} \quad \left(1 - \frac{V^2}{gH} \left\{1 + \frac{q}{Q} - 3 \frac{h}{H}\right\}\right)$$

$$V/gH \quad \frac{v}{gH} \left\{1 + \frac{q}{Q} - 2 \frac{h}{H}\right\}$$

$$1/gH \quad 1/gH \left\{v - \frac{h}{H}\right\}$$

Daar $1/gH \rightarrow 0$ wordt aangenomen bij de verwaarlozing van de versnellingstermen, blijft:

$$\frac{\partial h}{\partial s} + 1 \left\{2 \frac{q}{Q} - 3 \frac{h}{H}\right\} = 0$$

Nogmaals differentiëren naar s geeft:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} + \frac{2}{Q} \frac{\partial q}{\partial s} - \frac{3}{H} \frac{\partial h}{\partial s} = 0$$

Met $\frac{\partial q}{\partial s} = -\frac{\partial h}{\partial t}$ kan q worden geëlimineerd.

Na deling door $2/Q$ krijgt men

$$\boxed{\frac{Q}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial s^2} - \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{3}{2} \frac{Q}{H} \frac{\partial h}{\partial s} = 0}$$

Deze vergelijking is van het parabolische type (karakteristieken samen gevallen).

In de weerstandsterm is φ als constant aangenomen maar φ is nog van h afhankelijk:
 $C(\text{Chézy}) = 18 \log 12 R/k$. Stel de weerstandscoefficiënt $\Phi + \varphi$: $18 \cong \ln 10 \cdot 1/k \cdot \sqrt{g}$

$$\frac{g}{C^2} = \Phi + \varphi = \frac{1}{\left(\frac{5}{2} \ln \frac{12(H+h)}{k}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{2} \ln 12 \frac{H}{k} + \frac{5}{2} \frac{h}{H}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{5}{2} \ln \frac{12H}{k}\right)^2 \left(1 + \frac{h}{H \ln \frac{12H}{k}}\right)^2}$$

(N.B. $\frac{5}{2} = \frac{1}{k}$ met $k = 0,4$ constante van von Karman)

Schrijft men nog $\frac{1}{\ln \frac{12H}{k}} = \frac{5}{2} \sqrt{\Phi}$ dan is

$$\Phi + \varphi \approx \frac{1}{\Phi} \left(1 - 5 \frac{h}{H} \sqrt{\Phi}\right) \text{ dus met } l = \frac{\Phi}{g} \frac{Q^2}{H^3}$$

$$W + w = l \left\{ 1 + 2 \frac{q}{Q} - 3 \frac{h}{H} \left(1 + \frac{5}{3} \sqrt{\Phi}\right) \right\} - l.$$

Deze correctie is in het algemeen wel nodig want Φ is in de orde van $0,4 \cdot 10^{-2}$ dus

$$\frac{5}{3} \sqrt{\Phi} \approx 0 \left(\frac{1}{10}\right).$$

De coëfficiënt van $\partial h / \partial s$ in de omrande vergelijking kan worden geïnterpreteerd als een golfsnelheid; deze moet dus in plaats van $3/2 Q/H$ dan

$$\frac{3}{2} \left(1 + \frac{5}{3} \sqrt{\Phi}\right) \frac{Q}{H} = a$$

worden, in de orde van $1,6 \dots \times$ stroomsnelheid.

Dat de coëfficiënt van $\partial h / \partial s$ een "voortplantingssnelheid" is kan worden ingezien door een transformatie op een assenstelsel dat zich met een snelheid a langs de s -as beweegt:

de transformatieformules zijn $\xi = s - at$
 $\tau = t$

$$\text{Dus } \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial \xi}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial h}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial h}{\partial \tau} = -a \frac{\partial h}{\partial \xi} + \frac{\partial h}{\partial \tau}$$

De getransformeerde vergelijking wordt dan:

$$\frac{Q}{2l} \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} - \frac{\partial h}{\partial \tau} = 0$$

(c.f. J.C. Schönfeld: Voortplanting en verzwakking van hoogwatergolven op een rivier; De Ingenieur 1948 no 4, Bouw- en w.t.k. no 1).

Dergelijke vergelijkingen komen voor in de theorie van de warmtegeleiding, met de tijd veranderlijke grondwaterstromen, zandtransport langs kusten en veranderingen daar-in enz.

Als voorbeeld wordt beschouwd een watermassa die ergens in de rivier op een bepaald tijdstip wordt afgelaten (dambreuk bijvoorbeeld). Bij de verplaatsing van deze massa stroomaf gesuperponeerd op de oorspronkelijke permanente en eenparige toestand kan worden gesteld dat de totale massa constant blijft, dat dus de verheffing h van de waterspiegel boven de oorspronkelijke hoogte H voldoet aan

$$\frac{\text{Vol.}}{\text{breedte}} = \int_{-\infty}^{+\infty} h \, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} h \, d\xi = \text{constant.}$$

Om hieraan te voldoen wordt gesteld dat een mogelijke oplossing $h(\xi, \tau)$ de gedaante heeft: $h = \varphi(\tau)$, $f(z)$ met

$$z = \int \varphi(\tau) \quad \text{dus} \quad d\xi = \frac{dz}{\varphi(\tau)} \quad \text{en} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} h \, d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) \cdot dz$$

$$\frac{\partial h}{\partial \xi} = \varphi(\tau) \cdot \frac{dt}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} = \varphi^2(\tau) \frac{df}{dz}; \quad \text{evenzo} \quad \frac{\partial^2 h}{\partial \xi^2} = \varphi^3(\tau) \cdot \frac{d^2 f}{dz^2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} \cdot f + \varphi \cdot \frac{df}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} \cdot f + \varphi \cdot \frac{df}{dz} \cdot \xi \frac{d\varphi}{d\tau}$$

met $z = \int \varphi$ is $\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{d\varphi}{d\tau} f + \frac{df}{dz} \frac{d\varphi}{d\tau} \cdot z$.

De vergelijking wordt:

$$\frac{Q}{2l} \cdot \varphi^3 \frac{d^2 f}{dz^2} - z \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{df}{dz} - f \frac{d\varphi}{d\tau} = 0$$

deling door φ^3 geeft

$$\frac{Q}{2l} \frac{d^2 f}{dz^2} - \frac{d}{d\tau} z \frac{df}{dz} - \frac{d\varphi}{d\tau} f = 0$$

Integreert men deze vergelijking naar z van $-\infty$ naar $+\infty$ en neemt men aan dat

$$\left(\frac{df}{dz}\right)_{z = \pm\infty} = 0 \quad \text{en} \quad (zf)_{z = \pm\infty} = 0 \quad \text{dan blijkt} \quad \frac{1}{\varphi^3} \frac{d\varphi}{d\tau} = \text{constant te moeten zijn.}$$

Is $\varphi = \text{constant}$ dan is $f = C_1 e^{-\frac{\xi}{L}} + C_2$, waarin C_1 en C_2 integratie constanten zijn en L uit de vergelijking volgt: de golf dempt dan exponentieel met $\xi = s - at$ uit. Een andere oplossing krijgt men door $1/\varphi^3 \cdot d\varphi/d\tau = \text{constant}$ te nemen, stel $= -Q/l$ (cf. Schönfeldt, l.c.). Dan is

$$\frac{1}{\varphi^3} \frac{d\varphi}{d\delta} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{1}{\varphi^2} \right) = -\frac{Q}{l} \quad \text{dus} \quad \frac{1}{\varphi^2} - \frac{1}{\varphi_0^2} = 2 \frac{Q}{l} (t - t_0)$$

en tenslotte

$$\varphi = \frac{\varphi_0}{\sqrt{1 + 2 \frac{Q}{l} \varphi_0^2 \cdot (t - t_0)}}$$

Over blijft de vergelijking

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dz^2} + z \frac{df}{dz} + f = 0.$$

Een mogelijke oplossing is $C_0 e^{-z^2}$, stel deze oplossing is $f_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} = \Phi_1(z)$ (klokkromme van Gauss).

Een tweede oplossing is $f_2 = f_1 \psi \rightarrow f_2 = e^{-z^2} \int_0^z e^{\alpha^2} d\alpha$

Hier is het meest interessant alleen de eerste oplossing te nemen.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_1(z) dz = 2 \quad \text{dus} \quad h = \frac{1}{2} \frac{\text{Vol.}}{\text{breedte-eenheid}} \cdot \varphi(\tau) \cdot \Phi_1(z).$$

Voor een bepaalde waarde van δ is h dus een klokkromme waarvan de top bij $z = 0$ dus bij $\xi = 0$ ligt dus $s = at$: de top plant zich dan voort met de snelheid a .

De hoogte van de top

$$h_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\text{Vol.}}{\text{breedte}} \cdot \varphi$$

Elke willekeurige golf kan worden benaderd met een reeks van deze elementaire golven volgens de klokkromme. Voor een enkele "Gauss golf" geldt dat het moment van max. waterstand op een bepaalde plaats niet samenvalt met het moment van passeren van de top.

8. Golfvoortplantingsformule van De Saint Venant

De formule van De Saint Venant kan direct worden afgeleid uit de karakteristieken in het $(2c, v)$ diagram met verwaarlozing van de weerstand.

De oorspronkelijke afleiding gaat uit van de hypothese dat de stroomsnelheid v uitsluitend afhangt van de waterdiepte h . Gebruikt men weer als maat voor h de $C = + \sqrt{gh}$, dan is de hypothese $v = f(C)$. Daaruit volgt

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{dv}{dc} \frac{\partial C}{\partial s} \quad \text{en} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{dv}{dc} \frac{\partial C}{\partial t}$$

De grondvergelijkingen zonder weerstandsterm:

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad v \frac{\partial h}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial v}{\partial s} = 0$$

met c in plaats van h als afhankelijke variabele:

$$2c c_s + v v_s + v_t = 0 \quad \text{en} \quad 2v c_s + 2c_t + c v_s = 0$$

De indices duiden weer op differentiatie naar de aangegeven grootheid.

Met
$$v_s = \frac{dv}{dc} c_s \quad \text{en} \quad v_t = \frac{dv}{dc} c_t$$

worden de vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} (2c + v \frac{dv}{dc}) c_s + \frac{dv}{dc} c_t &= 0 \\ (2v + c \frac{dv}{dc}) c_s + 2c_t &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Deze vergelijkingen zijn naar } c_s \text{ en } c_t \text{ oplos-} \\ \text{baar als de determinant nul wordt; men krijgt}$$

dan als oplossing de verhouding c_s/c_t . Dus:

$$4c + 2v \frac{dv}{dc} - 2v \frac{dv}{dc} - c \left(\frac{dv}{dc}\right)^2 = 0 \rightarrow \frac{dv}{dc} = \pm z$$

wat juist de vergelijking is voor de karakteristieken in het $(2c, v)$ diagram. Verwaarloost men de weerstand niet, dan kan men c_s en c_t oplossen:

$$c_s = \frac{-2W}{\left\{4 - \left(\frac{dv}{dc}\right)^2\right\} c} ; \quad c_t = \frac{W(2v + c \frac{dv}{dc})}{\left\{4 - \left(\frac{dv}{dc}\right)^2\right\} c}$$

daaruit blijkt dat dv/dc en v van c én van de afgeleiden van c afhangen dus v hangt dan behalve via c ook nog eens apart van (s, t) af. Aan de hypothese van De Saint Venant kan dus alléén exact worden voldaan als $W = 0$ is:

Met c_s en c_t eindig en $\neq 0$ in het algemeen en $W = 0$ is $v = \pm 2c + \text{constante}$.

De beide vergelijkingen worden door deze substitutie gelijk: $c_t + (v \pm c) c_s = 0$, dat wil zeggen de vergelijking voor de differentiatie van c langs een karakteristiek $ds/dt = v \pm c$. Dit betekent dat het verband tussen v en c alléén langs een karakteristiek opgaat.

Is de weerstand niet nul dan is v ook van w afhankelijk: $v = \pm 2(c - c_o) - gW dt$ een berekening die met de karakteristieken automatisch wordt uitgevoerd in het $(2c, v)$ diagram.

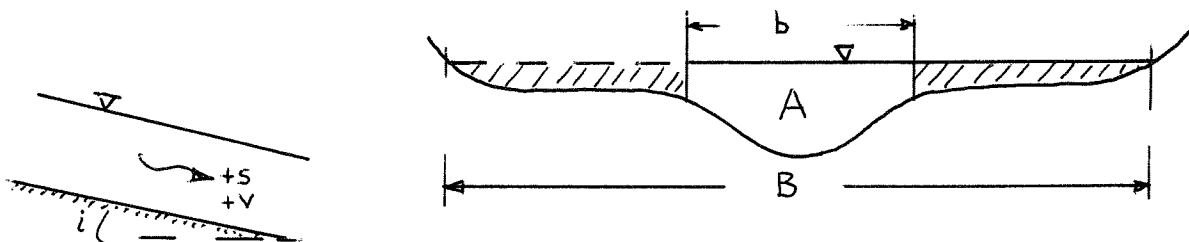
De afleiding van de volledige formule wordt: $v = \pm 2c + \text{constant} = \pm 2(c - c_o)$ waarin c_o het punt voorstelt waar $v = 0$ is.

$$\frac{ds}{dt} = v \pm c = \pm \frac{(3c - 2c_o)}{2}$$

Met $\frac{h-h_o}{h_o} = \eta$ is $\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{gh} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \eta \right\}$

$$c_o = \sqrt{gh_o}$$

9. Gedeeltelijk stroomvoerend profiel



$$W = \frac{v|v|}{C^2 R} - \sin i.$$

$$\text{Continuïteit } \frac{\partial Q}{\partial s} + B \frac{\partial h}{\partial t} = 0$$

$$Q = AV \quad A = f(h)$$

$$\frac{dA}{dh} = b$$

Als voorbeeld van de afleiding van de karakteristieke betrekkingen voor een meer gecompliceerd geval wordt de afleiding gegeven voor een kanaal met zijdelingse berging: de bergende breedte $B \neq$ stroomvoerende breedte b . De coëfficiënten van de vier vergelijkingen worden dan:

voor	$\frac{\partial h}{\partial s'}$	$\frac{\partial h}{\partial t'}$	$\frac{\partial v}{\partial s'}$	$\frac{\partial v}{\partial t'}$	"bekende term"
	1	0	$\frac{v}{g}$	$\frac{1}{g}$	W
	$\frac{b}{B}$	1	$\frac{A}{B}$	0	0
	ds	dt	0	0	- dh
	0	0	ds	dt	- dv

Hieruit is volgens het recept op blz. 7 af te leiden:

$$\frac{ds}{dt} = v \frac{1 + \frac{b}{B}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1 - \frac{b}{B}}{2}\right)^2 v^2 + \frac{A}{B} g} = C_{*}$$

of
$$\frac{A}{B} \cdot g = (C_{*} - v) \left(C_{*} - v \frac{b}{B}\right)$$

De andere karakteristieke betrekkingen worden:

$$\frac{g}{C_{*} - v \frac{b}{B}} \cdot dh + dv = -gW dt$$

Variëert bovendien het stroomvoerende profiel A, dan kan het van voordeel zijn in plaats van V de grootheid Q/A in te voeren:

$$\frac{\partial h}{\partial s} + \frac{v}{g} \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + W = 0$$

$$gA \frac{\partial h}{\partial s} + Av \frac{\partial v}{\partial s} + A \frac{\partial v}{\partial t} + gAW = 0$$

$$gA \frac{\partial h}{\partial s} + v \frac{\partial(Av)}{\partial s} - v^2 \frac{\partial A}{\partial s} + \frac{\partial Av}{\partial t} - v \frac{\partial A}{\partial t} + gAW = 0$$

Nu is
$$\frac{\partial A}{\partial s} = \left(\frac{\partial A}{\partial h}\right)_s \frac{\partial h}{\partial s} + \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right)_h$$

waarbij de indices buiten de () duiden op de grootheid die bij de differentiatie constant blijft. Er is dus verondersteld dat A bij constante h ook met s variëert, dus via h én direct van s afhangt.

De bewegingsvergelijking wordt dan:

$$\frac{\partial h}{\partial s} \left(1 - \frac{Q^2}{A^3} \frac{b}{gA}\right) + \frac{\partial h}{\partial t} \left(-\frac{Q}{A} \frac{b}{gA}\right) + \frac{Q}{A} \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial s} + \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + W_{*} = 0$$

Continuïteit: $\frac{\partial h}{\partial t} B + \frac{\partial Q}{\partial s} = 0.$

ds/dt is als te voren is aangegeven maar dan met $V = Q/A$

en
$$W_* = - \sin i - \frac{V^2}{gA} \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_{h \text{ const.}} + \frac{v|v|}{C^2 R}$$

Met $\frac{b}{B} = 1 - 2\delta$ wordt $\frac{ds}{dt} = \frac{Q}{A} (1 - \delta) \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{A} \delta\right)^2 + g \frac{A}{B}}$

en
$$B \left[- (1 - \delta) \frac{Q}{A} \pm \sqrt{\left(\frac{Q}{A} \delta\right)^2 + g \frac{A}{B}} \right] dh + dQ = - g A W_* dt.$$

Door de aanwezigheid van zijdelingse waterberging is de voortplantingssnelheid van een storing niet meer symmetrisch ten opzichte van de gemiddelde stroomsnelheid.

Uit de op blz. 12 gegeven afleiding, met δ en ε opgevat als correctie termen voor niet gelijkmatig zijn van de snelheidsverdeling, blijkt dat ook onregelmatigheden in de snelheidsverdeling een soortgelijke invloed heeft op de voortplantingssnelheid van een storing.

Voor grafische berekeningen van het geval met extra waterberging kan de tweede karakteristieke betrekking het best worden geschreven in de vorm $dV + d(F(h)) = - g W dt$ met

$$F(h) = g \int_a^h \frac{dh}{C_* - V \frac{b}{B}}$$

a kan willekeurig worden gekozen maar moet constant zijn. Voor elk geval moet een grafiek van $F(h)$ worden gemaakt. Voor bijzonderheden wordt verwezen naar

Craya: Calcul graphique des régimes variables dans les canaux; La Houille Blanche no 1, Nov. 1945.

WATERSLAG

In aansluiting op de voordrachten over de karakteristieke methode voor tweede orde problemen volgt hieronder de toepassing op de voortplanting van druk- en snelheidsveranderingen in buizen met elastische wanden en geheel gevuld met een homogene samendrukbare vloeistof.

Dit verschijnsel in met water gevulde buizen is de "waterslag", in het Frans "coup de bélier", in het Engels "water hammer" en in het Duits "Druckstoss"; de term "Wasserschlag" wordt in het bijzonder gebruikt voor de stoot (of reeks stoten) die optreedt als een vacuum plotseling met water wordt opgevuld.

Het verschijnsel wordt in hoofdzaak beheerst door het, onder druk, meegeven van de buiswanden en de samendrukbaarheid van de vloeistof tegenover de versnellingen van de massa's. De stromingsweerstand van de vloeistof en enige andere grootheden, die ook als "weerstand" tot uiting komen, kunnen het verschijnsel merkbaar beïnvloeden. In het volgende worden eerst de formules voor de verschillende onderdelen gegeven met de benaderingen die voor de toepassing van de karakteristieke methode nodig zijn.

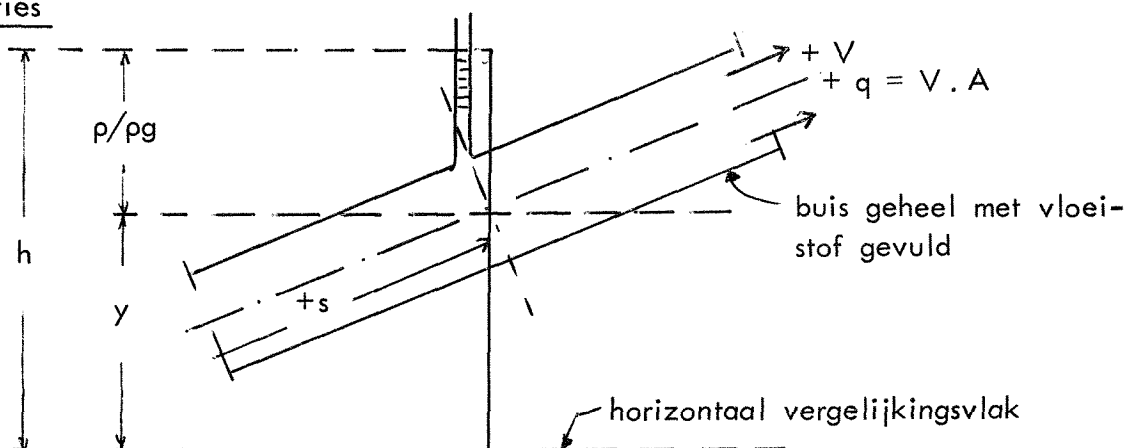
De formules voor de wandveerkracht met de samendrukbaarheid van de vloeistof, voor de versnellingen in de vloeistof met de weerstand en voor de continuïteit worden dan gecombineerd tot een stel vergelijkingen waarop de methode kan worden toegepast.

De formules zijn in een algemene vorm gegeven; voor vele praktische problemen kunnen echter op vele punten verdergaande benaderingen worden ingevoerd.

Bij de afleiding van de formules worden bijzondere eigenschappen van de vloeistof buiten beschouwing gelaten. A priori wordt verondersteld dat de dichtheid alleen van de druk afhangt en dat deze druk met verwaarlozing van hydrostatische drukverschillen gelijkmatig over de doorsnede van de buis is verdeeld.

Ook de spannings- en vervormingstoestand van de buiswanden wordt als functie van de druk alleen ingevoerd. Dit impliceert de verwaarlozing van de buigstijfheid van de wand in de richting van de as van de buis en van mogelijke hysteresis verschijnselen. Alleen de versnellingen van de vloeistof in de richting van de as van de buis worden in rekening gebracht. Invoeren van versnellingen loodrecht op de as geeft aanleiding tot vergelijkingen van hogere orde.

De mogelijke nauwkeurigheid van de berekeningen wordt in hoofdzaak bepaald door de nauwkeurigheid waarmee de vervormingeigenschappen van de wanden bekend zijn. In gevallen, waarvoor de kennis van de stromingsweerstand nodig is, komt er nog de beperking bij van de onbekendheid met de invloeden van vertragingen en versnellingen op deze weerstand.

Notaties

Onafhankelijke variabelen:

s = lengte langs as van de buis;

t = tijd.

Differentiaties naar s en t worden ook aangegeven met s en t als indices.

Afhankelijke variabelen, materiaal grootheden en afgeleide grootheden:

p = druk; A = oppervlakte van buisdoorsnede;

v = stroomsnelheid;

V = id. gemiddeld over de doorsneden = $\frac{1}{A} \int v \cdot dA$;

g = $V \cdot A$;

β = coëfficiënt voor ongelijkmatige snelheidsverdeling in

$$\beta V^2 = \frac{1}{A} \int v^2 \cdot dA.$$

ρ = dichtheid van de vloeistof uitsluitend van p afhankelijk;

g = versnelling van de zwaartekracht;

$p/\rho g$ = druk in hoogte vloeistofkolom;

y = hoogte doorsnede ten opzichte van een willekeurig vergelijkingsvlak, uitsluitend van s afhankelijk;

$h = p/\rho g + y$; $l = - dy/ds$. $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dp} = \frac{1}{e}$.

b = vergrotingscoëfficiënt voor A in: $\frac{1}{A} \frac{dA}{dp} = \frac{1}{b}$
als A alléén van p afhangt;

$1/f = 1/e + 1/b$, coëfficiënt voor het gecombineerde effect van het meegeven van de wanden en het samendrukken van de vloeistof. De grootheden b , c en f hebben de dimensie van een spanning.

$$1/C^2 = \rho/f.$$

Voor ronde buizen met dunne wanden geldt speciaal:

D = diameter; d = wanddikte $\ll D$;

l = elasticiteitsmodulus van de wand;

m = contractie coëfficiënt;

ρ_1 = dichtheid van het wandmateriaal;

b resp. = $Ed/D(1-1/m^2)$ zonder - en

= Ed/D met vrije dilatatie in richting s ;

$$1/C_1^2 = \rho_1/E; \quad 1/C_e^2 = \rho [1/e + D(1-1/m^2)/Ed];$$

$$1/C_1^2 = \rho(1/e + D/Ed);$$

$R = \lambda \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V \cdot |V|/D$ = weerstand vloeistofstroom, in druk verlies/lengte-eenheid;

= dimensieloze weerstandcoëfficiënt = $8g/Chézy^2$;

Voor permanente stroom en volledig ontwikkelde turbulentie is λ in de orde van enige malen 10^{-2} , voor een laminaire stroom is

$$\lambda = 64 \cdot \nu \cdot |V|/D \text{ met } \nu \text{ als kinematische viscositeitscoëfficiënt.}$$

Voor water is $e \approx 2 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ en voor staal is $E \approx 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. Bij stalen buizen varieert D/d van 40 tot 150 zodat $C = (f/\rho)^{1/2}$ in de orde van 10^3 m/sec is.

N.B. In de van Bergeron, lit. 5, overgenomen voorbeelden is voor A de letter S , voor V de letter c en voor C de letter a gebruikt.

Elasticiteit van de wanden en samendrukbaarheid van de vloeistof

In de meest algemene vorm die nog voor de behandeling als tweede orde probleem mogelijk is, kan men A invoeren als afhankelijk van de druk p en van eventuele uitwendige invloeden.

Als superpositie van druk en uitwendige invloeden geoorloofd is kan men stellen:

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial s} = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_p + \frac{1}{b} \frac{\partial p}{\partial s} \quad (1)$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_p + \frac{1}{b} \frac{\partial p}{\partial t}$$

De p als index duidt op een afgeleide bij constante inwendige druk. $(\partial A / \partial s)_p$ kan zowel van een uitwendige invloed als van een van nature al bij constante p verlopende doorsnede afkomstig zijn. $(\partial A / \partial t)_p$ daarentegen kan uitsluitend een invloed van buiten weergeven, bijvoorbeeld de in de medische literatuur wel eens genoemde "vis a tergo".

De coëfficiënt b kan ook nog van p afhangen bijvoorbeeld bij wanden die niet zuiver elastisch zijn. Hysteresis verschijnselen in de wanden zijn uitgesloten omdat b dan van p_s en p_t zou afhangen.

Verder kan b ook nog van plaats tot plaats verschillend zijn dus direct van s afhangen. In theorie zou b ook met t kunnen variëren, maar deze mogelijkheid is verder niet beschouwd.

De vorm van de doorsnede doet bij deze formulering er niets toe.

Bij de veranderingen van A treden door contractie in de richting van de as ook veranderingen in de wand op. De wijze waarop de buis wordt ondersteund en de spanningen in de wand in de richting van s kunnen zo A beïnvloeden. Deze factoren maken, dat vooral bij zeer slappe leidingen (lit. 9) een nauwkeurige bepaling van b moeilijk is. Versnellingen van de wand zowel in de richting van s als loodrecht daarop blijven buiten beschouwing. Ook de buigstijfheid van de wand in een vlak evenwijdig aan s is verder niet in rekening gebracht.

De vloeistof kan eveneens bijzondere eigenschappen hebben maar in het volgende wordt de compressiemodulus e als constante beschouwd.

Bewegings- en continuïteitsvergelijking van de vloeistof

De bewegingsvergelijking met de versnellingen in de richting van s wordt

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial s} (\rho v^2) + \frac{\partial p}{\partial s} + w - \rho g l = 0 \quad (2)$$

De versnellingen loodrecht op s worden verwaarloosd. w is een term voor viskeuze en turbulente weerstand en $\rho g l$ de component van de zwaartekracht in de richting van s .

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (\rho v) = 0 \quad (3)$$

Deze vergelijkingen moeten worden geïntegreerd over de doorsnede A om onafhankelijk te zijn van de plaats ten opzichte van s. Bij deze integratie kan voor de termen waar v in voorkomt de volgorde met de differentiatie worden omgekeerd omdat v aan de wanden nul is.

De druk en de dichtheid en dus ook hun afgeleiden kunnen constant over de doorsnede worden verondersteld, zodat de termen waar p in voorkomt met A kunnen worden vermenigvuldigd.

Voor de continuïteitsvergelijking moet rekening worden gehouden met de toeneming van A met de tijd zodat er bij integratie nog een term $\rho \cdot \partial A / \partial t$ blijkt.

Men kan ook direct uitgaan van het evenwicht van een moot van de buis:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho VA) + \frac{\partial}{\partial s} (\beta \rho V^2 A) + \frac{\partial}{\partial s} (pA) - p \frac{\partial A}{\partial s} + RA - \rho g l A = 0 \quad (4)$$

en

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial s} (\rho VA) = 0 \quad (5)$$

De term $-p \partial A / \partial s$ in (4) moet worden ingevoerd omdat de druk, die loodrecht op de wand staat, nog een kracht in de richting van s geeft.

De coëfficiënt β , die hier voor de volledigheid is ingevoerd, zal in het algemeen niet constant zijn. Vooral bij snel opeenvolgende variaties zal β ook van de voorgeschiedenis afhangen.

Voor waterslagproblemen speelt V een geringe rol ten opzichte van de voortplantings-snelheid C van de drukveranderingen, zodat men zonder merkbare fouten te maken $\beta = 1$ kan stellen.

De stromingsweerstand R zal ook verschillen van R voor permanente stromen. Voor waterslag berekeningen wordt voor R toch de waarde voor de permanente stroom met overeenkomstige snelheid ingevoerd. Men maakt dan een fout waarbij men de invloed van R niet overschat.

De uitwerking van (4) en (5), waarna delen door A en V maal (5) van (4) aftrekken geeft met $\beta = 1$

$$\begin{aligned} p_s + \rho V V_s + \rho V_t + \rho W_1 &= 0 \\ V \cdot p_s + p_t + f \cdot V_s + f W_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Hierin is $\rho W_1 = R - pgl$ en $W_2 = V \left(\frac{A}{s} \right)_p / A + \left(\frac{A}{t} \right)_p / A$.

Deze vergelijkingen worden nog aangevuld met de vergelijkingen die uitdrukken dat de hier gekozen afhankelijke variabelen p en V uitsluitend van s en t afhangen:

$$\left\| \begin{array}{l} ds \cdot p_s + dt \cdot p_t - dp = 0 \\ ds \cdot V_s + dt \cdot V_t - dV = 0 \end{array} \right\| \quad (7)$$

Karakteristieke betrekkingen

In navolging van de vorige voordracht wordt een verband gezocht tussen s en t in de vorm $ds = c \cdot dt$ zodanig dat c onafhankelijk is van de afgeleiden van p en V . Dezelfde eis wordt gesteld aan het hiermee samenhangende verband tussen p en V in de vorm $m \cdot dp + n \cdot dV + k \cdot dt = 0$; de coëfficiënten m , n en k moeten eveneens onafhankelijk zijn van de afgeleiden van p en V .

De fysische betekenis van c is een voortplantingssnelheid van een toestand (p, V) zodanig dat (p, V) in twee punten op een afstand ds en bepaald met een tijdsinterval dt verschil onderling verband houden onafhankelijk van de afgeleiden van p en V .

In afwijking van de vroegere formuleringen wordt gesteld:

Als het verband tussen ds en dt en tussen dp , dV en ds of dt aan de gestelde eis voldoet moeten de vier afgeleiden p_s , p_t , V_s en V_t bij dit verband onbepaald zijn. Deze vier afgeleiden zijn onbepaald als alle determinanten van de vierde orde in de matrix van coëfficiënten van de vergelijkingen in deze afgeleiden, (6) en (7), nul zijn.

Deze matrix is:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} 1 & 0 & \rho V & p & \rho W_1 \\ V/f & 1/f & 1 & 0 & W_2 \\ ds & dt & 0 & 0 & -dp \\ 0 & 0 & ds & dt & -dV \end{array} \right\|$$

De hoofddeterminant nul gesteld geeft een vergelijking van de tweede graad in ds en dt met als uitkomst

$$\frac{ds}{dt} = V + C \quad (8)$$

en de overige determinanten nul gesteld leveren met (8)

$$dV + \frac{1}{\rho \cdot C} dp + (CW_2 + W_1) \cdot dt = 0 \quad (9)$$

Hierin is $C = \pm (f/\rho)^{1/2}$.

(8) en (9) geven de twee paren gezochte karakteristieke betrekkingen voor de waterslag.

Als $\beta \neq 1$ maar constant is $C = \pm (\beta(\beta-1) V^2 + f/\rho)^{1/2}$

$$\frac{ds}{dt} = \beta V + C \text{ en } dV + (V(1-\beta) + C) \cdot dp/f + (CW_2 + W_1) = 0.$$

Grafische berekeningen met karakteristieken

Voor de toepassing van (8) en (9) op de eigenlijke waterslag kunnen nog vereenvoudigingen worden aangebracht.

Gewoonlijk is $|V| \ll |C|$ zodat in (8) V kan worden weggelaten.

De veranderingen in A en de samendrukbaarheid bepalen C . De variaties in ρ en A zijn echter zo klein dat, behalve voor de berekening van C , deze grootheden verder als constant worden aangenomen.

In een buis met van nature verlopende A kan deze variatie worden ondergebracht in W_2 . Hier wordt verondersteld dat A voor een stuk buis constant is.

Vooraf voor de berekeningen van gecompliceerde gevallen als leidingen met vertakkingen, afsluiters en overgangstukken met gecompliceerd verband tussen doorstroming en drukverlies enz. is het van voordeel met q in plaats van met V te rekenen. Het constant zijn van ρ en A geeft bovendien de mogelijkheid de druk te herleiden tot een lengte vloeistof kolom boven een vergelijkingsvlak.

Dit komt neer op een vermenigvuldiging van (9) met C/g en een wijziging in de combinatie van p en W_1 (W_2 is verder = 0 gesteld): de eerste term wordt $C \cdot dV/g = C \cdot dq/g \cdot A$ en de volgende twee termen worden $dp/\rho g + C \cdot R \cdot dt/\rho g - C \rho l dt$. Hierin is $-Cl = +C dy/ds$; met $\partial y/\partial t = 0$ kan men stellen $-Cl dt = (C y_s + y_t) dt$ daar de hoogte y van een doorsnede boven het horizontale vergelijkingsvlak niet met t verandert. De laatste uitdrukking is juist dy , de verandering in y als men langs de karakteristiek $ds/dt = C$ ook de veranderingen dV en dp berekent. Deze dy wordt bij $dp/\rho g$ gevoegd en geeft juist dh .

De vergelijkingen (8) en (9) worden dan

$$\frac{ds}{dt} = C \text{ en } \frac{C}{gA} dq + dh + R \cdot ds/\rho g = 0 \quad (10)$$

Met $C = \pm (f/\rho)^{1/2}$.

Voor stalen buizen met dunnen wanden is

$$1/C^2 = \rho [1/e + D/Ed].$$

De vergelijkingen (10) zijn alléén bruikbaar voor relatief stijve leidingen dus $|V| \ll |C|$; voor slappe leidingen gaan de ingevoerde benaderingen niet op.

De vergelijkingen (10) zijn de basis voor grafische berekeningen.

Evenals voor de getijberekeningen wordt de berekening in twee vlakken uitgevoerd: het (s, t) vlak en het (q, h) vlak. Doordat de grootheden C en C/qA voor de verschillende

buizen stukken constant zijn wordt de berekening veel eenvoudiger dan voor open waterlopen. Het (s, t) vlak wordt hier relatief onbelangrijk. Alle bijzonderheden als omstandigheden aan de uiteinden en de weerstanden worden in het (q, h) vlak verwerkt. Het is gewenst de assen in beide vlakken zo te oriënteren dat de bijelkaar behorende karakteristieke lijnen, dat wil zeggen voor $C > 0$ en voor $C < 0$, in dezelfde richting hellen.

In het (q, h) vlak wordt de h -as ($q = 0$) naar boven en de q -as horizontaal getekend. Het (s, t) vlak kan daarbij op verschillende manieren worden georiënteerd. De t -as horizontaal en de $+s$ -as verticaal naar beneden heeft het voordeel dat voor verschillende waarden van C in beide diagrammen de bijelkaar behorende lijnen niet alleen in dezelfde richting maar ook met C meer of minder sterk hellen ten opzichte van de horizontale as.

De $+t$ -as verticaal naar beneden en de $+s$ -as in dezelfde richting als de $+q$ -as heeft het voordeel dat de richting van de stroom ten opzichte van $+s$ meer sprekend te voorschijn komt. De bijelkaar behorende lijnen hebben nog wel hellingen van hetzelfde teken maar de veranderingen in de helling met C gaan in de twee diagrammen in tegengestelde richting.

Voorbeelden

Een voorbeeld van een berekening voor een enkelvoudige buis is gegeven in lit. 8, namelijk voor de waterleiding van Bergambacht naar Scheveningen.

Als illustratie van de grafische methode is een reeks voorbeelden overgenomen van Bergeron (lit. 5). De (s, t) diagrammen zijn hierbij weggelaten.

De notaties op deze diagrammen zijn als volgt: tijden worden aangeduid met cijfers, de eenheid τ van de tijd is altijd een breukdeel van de looptijd van de storing over de lengte L van de buis dus L/nC of in de notatie van Bergeron L/na . In het eerste en tweede voorbeeld is $n = 4$, in de volgende is $n = 1$.

De plaats in de leiding, waarop een toestand (h, q) betrekking heeft, wordt aangegeven met een letter als index bij het cijfer.

Bij een spronggewijze verandering geeft een accent de toestand direct na het passeren van de sprong, hetzelfde cijfer zonder accent behoort dan bij de toestand direct voorafgaand aan de sprong.

De voorbeelden hebben betrekking op een buis ter lengte L waardoor uit een reservoir met constant peil water wordt afgetapt.

Aan het eind van de buis is een afsluiter die hetzij plotseling hetzij geleidelijk de stroom afsluit. De "geleidelijke" afsluiting gebeurt echter in deze voorbeelden toch nog in de dubbele looptijd van de drukstoring.

In de reeks voorbeelden worden de verschillende complicaties ingevoerd.

1. plotselinge afsluiting, geen wrijvings- of andere energieverliezen, figuur 41 en 44.
2. als 1 maar met verlies van snelheidshoogte bij terugstroming in het reservoir, figuur 45.
3. als 1 maar met een bufferschacht bij de afsluiter, figuur 62.
4. als 3 met een weerstand aan de ingang van de bufferschacht, figuur 68. Het verband in deze weerstand tussen drukhoogteverlies en debiet is de lijn J_a en J_r .

5. als 4 met een lineair met de tijd afnemend debiet aan het aftapeinde. Afsluiting in de dubbele looptijd van de golf, figuur 67.
6. als 5 maar de weerstand van de buis in rekening gebracht door een geconcentreerde weerstand bij de ingang. Het verband tussen q en drukhoogteverlies geeft de lijn J_{AB} , figuur 69.
7. vergelijking van de debiet en drukhoogte variaties in de aangegeven gevallen, figuren 70 en 71.

In de diagrammen voor de gevallen met bufferschicht komen twee stel lijnen voor: de karakteristieken met de helling $\pm a/g_s$ (notatie van Bergeron; in de hier ingevoerde notatie C/gA) ten opzichte van de q -as, en de lijnen die het verband leggen tussen de hoogte van de waterspiegel in de bufferschicht (oppervlakte S) en het aangevoerde debiet: $S \cdot dt = q \cdot dt$.

Wordt de afsluiter binnen de dubbele looptijd 2τ dichtgezet zodat het debiet van q_0 tot 0 lineair met de tijd wordt afgeknepen, dan zal het water naar de bufferschicht ontwijken zolang nog geen invloed merkbaar is van de drukgolf door het afsluiten ontstaan en teruggekaatst aan de ingang van de buis. De stijging van de waterspiegel bij plotselinge afsluiting begint met een debiet q_0 dus met een snelheid $dh/dt = q_0/S$ en eindigt met een snelheid $q_{2\tau}/S$ als de teruggekaatste storing invloed krijgt. Gemiddeld is dus de stijgsnelheid $(q_0 + q_{2\tau})/2S$ en de stijging dh in $dt = 2\tau$ is dus $dh = (q_0 + q_{2\tau}) \cdot 2\tau/2s$. Het werken met deze gemiddelden is geoorloofd omdat de tijden τ altijd kort zijn ten opzichte van de periode van de variaties in de bufferschicht. De laatste vergelijking geeft $dh(q_0 + q_{2\tau}) = \tau/S \cdot S = \tau S = \text{de helling van de hulplijnen}$. Deze zijn in de diagrammen als gebroken lijnen getekend: eerst een lijn van het punt (h_0, q_0) met de helling $-\tau/S$ naar de h -as ($q = 0$) en van dat snijpunt onder de helling $+\tau/S$ naar het punt $(h_0 + dh, q_{2\tau})$ op de karakteristiek door (h_0, q_0) .

Met dezelfde redenering benadert men de toestand bij lineaire afsluiting in 2τ . De in 2τ naar de bufferschicht ontweken hoeveelheid water is dan minder. De constructie met de hulplijn is dan eerst een horizontale lijn (evenwijdig q -as) door (h_0, q_0) naar $(h_0, 0)$ en vandaar de lijn onder de helling $+\tau/S$ tot waar deze de karakteristiek door (h_0, q_0) met helling $-a/g_s$ (of C/gA) snijdt, want bij het begin van de afsluitmanoeuvre is het debiet naar de schacht nog nul en stijgt dan tot $q_{2\tau}$, gemiddeld dus in 2τ een aanvoer van $1/2 q_{2\tau} \cdot 2\tau = dh \cdot S$ volumeneenheden.

Eigenlijk zijn deze hulplijnen afgeleid van exponentiële krommen. Bij een plotselinge afsluiting op $t = 0$ bijvoorbeeld stijgt de waterspiegel evenredig met $1 - \exp(-t \cdot g \cdot A/C \cdot S)$, in notatie Bergeron $\exp(-t \cdot g \cdot s/a \cdot S)$, met $S =$ de oppervlakte van de bufferschicht.

Daar $C \cdot S/g \cdot A$ een zeer lange tijd voorstelt in vergelijking tot het tijdsinterval τ (in de orde van 10^2 sec in vergelijking tot enkele seconden), is deze lineaire benadering geoorloofd. Zou deze benadering te grof worden dan kan men altijd met kleinere tijdsintervallen werken.

Deze constructie is eenvoudig uit te breiden voor het geval dat het afsluiten plaatsvindt over langere tijd en het debiet gedurende de afsluiting wordt bepaald door de overgebleven opening van de afsluiter en de druk.

Literatuur

De bedoeling van deze literatuurlijst is slechts om te wijzen op enige publicaties over de waterslag waarin bepaalde bijzonderheden worden beschreven.

Het verschijnsel van de waterslag werd vermoedelijk bekend zodra het transport van water door buizen met goede afsluiters op grote schaal werd toegepast.

Lang voor dat men het verschijnsel wiskundig kon beschrijven zijn er pogingen gedaan om hoge drukken op te wekken voor het opvoeren van water.

Reeds in 1772 schijnt de Engelsman John Whitehurst een dergelijke installatie te hebben laten maken. Het afsluiten van een kraan of een ventiel om de stroom plotseling te stoppen geschiedde nog met de hand.

De waterram (Frans: bélier hydraulique, Duits: Stossheber of hydraulischer Widder) werd in 1796 uitgevonden door Joseph Michael Montgolfier (1740-1810) met zijn jongere broer Jacques Etienne, de uitvinder van de luchtballon.

Een studie over dit apparaat is te vinden in

1) J. Krol: The automatic hydraulic ram; Inst. of Mech. Eng., Hydraulics group; vol. 165, Proc., 1951.

Een van de eerste theoretische studies geeft:

2) D.J. Korteweg: Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in elastischen Rohren; Annalen der Physik und Chemie, 9 Folge, Bd.5, 1878, pag. 525-542.

Hij maakte gebruik van sinusfuncties en leidde de thans bekende formule voor de voortplantingssnelheid van drukstoten af.

Later wordt deze formule direct afgeleid door

3) N. Joukowski: Ueber den hydraulischen Stoss in Wasserleitungsröhren; Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Petersburg, Series 8, vol. 9, no 5, 1900.

Een grote stoot tot het systematische gebruik van de theorie voor de dimensionering van drukleidingen wordt onder andere gegeven door:

4) L. Allievi: Teoria generalé del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione; Annali della Società degli Ingegneri ed Architetti italiani; Milano, 1903.

In de vele publicaties hierna is wel van grafieken gebruik gemaakt als illustratie en soms ook als hulpmiddel voor het rekenen. Het systematische gebruik van de grafische rekenmethode dateert echter pas van de herontdekking, na 1940, van de karakteristieke methode van Massau (1900).

Een uitvoerig overzicht van de mogelijkheden van de grafische rekenmethode geeft:

5) L. Bergeron: Du coup de bélier en hydraulique au coup de foudre en électricité, Dunod, Paris, 1950.

In dit boek behandelt Bergeron ook de wijze waarop de invloed van windketels, bufferschachten, buisvertakkingen, overgangsweerstanden en afsluiterkarakteristieken kunnen worden ingevoerd.

De voortplantingssnelheid van de drukgolf bepaalt de grootte van de maximale stoot. Een beschrijving van een interessante mogelijkheid om deze voortplantingssnelheid te verlagen geeft:

- 6) R. Remenieras: Dispositif simple pour reduire la célérité des ondes élastiques dans les conduites en charge; La Houille Blanche No. spéc. A, 1952, pag. 172-196.

Het middel bestaat uit een in secties met luchtgevulde dunne rubberslang over de volle lengte in de buis. In dit artikel worden berekeningen en resultaten van metingen gegeven.

Niet alle verschijnselen, die bij waterslag optreden, kunnen worden verklaard met de tweede orde theorie. Een poging om de invloed van de gewoonlijk verwaarloosde grootheden in rekening te brengen geeft:

- 7) R. Skalac: An extension of the theory of water hammer; Trans. of the ASME, vol. 78, no 1, January 1956, pag. 105-116.

De conclusie van Skalac is dat de versnellingen loodrecht op de as van de buis en de buigstijfheid in praktische gevallen een te verwaarlozen invloed hebben op de toestand van de waterstroom. Wel kan hij de bij metingen waargenomen drukvariaties, die niet uit de eenvoudige theorie volgen, verklaren.

Een recente publicatie over een praktische toepassing van de theorie op een pijpleiding in Nederland geeft:

- 8) L.J.F. Broer: Uitschakelverschijnselen in lange waterleidingen; De Ingenieur, No TWO 5, 14 Juni 1957, pag. 0.55-58.

Een uiterste in een andere richting, de drukvoortplanting in een relatief zeer slappe leiding, behandelt:

- 9) J.W. Lambert: On the nonlinearities of fluid flow in nonrigid tubes; Journ. Franklin Inst., vol. 266, no 2, August 1958, pag. 83-102.

met als toepassing de drukgolven in de aorta.

Deze publicatie is ook een voorbeeld van vereenvoudigingen zodanig dat bepaalde waargenomen verschijnselen nog kwalitatief kunnen worden verklaard. De elastische eigenschappen van de aorta zijn vermoedelijk van geval tot geval te sterk variërend om kwantitatieve resultaten te kunnen verkrijgen. Lambert verwaarloost de stromingsweerstand en de spanningen in de wanden in de richting van de as.

Het artikel is te fragmentarisch om de berekening in details te kunnen nagaan. De gegeven resultaten in de vorm van diagrammen van het verloop van snelheid en druk zien er op enige punten niet geheel aannemelijk uit.

Leidingen met slappe wanden

Als de wanden van de buis slap zijn ten opzichte van de samendrukbaarheid van de vloeistof, kan de laatste worden verwaarloosd.

$$e \gg Ed/D$$

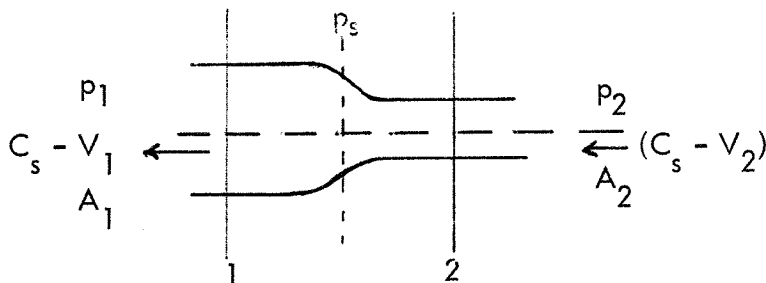
De voortplantingssnelheid c is dan $\pm (b/\rho)^{1/2}$ of meer algemeen geformuleerd

$$\pm \left(\frac{A}{\rho} \frac{dp}{dA} \right)^{1/2} \quad \text{of} \quad \pm \left(\frac{D}{2\rho} \frac{dp}{dD} \right)^{1/2},$$

in de veronderstelling dat er geen invloed van buiten is en A uitsluitend van p afhangt.

Deze formules zouden de toestand bijvoorbeeld in slagaders kunnen weergeven volgens lit. 9. Uit de gegevens die in deze publicatie zijn weergegeven blijkt dat $A \, dp/dA$ zéér sterk oploopt met p en de auteur leidt hieruit af, dat de pulsen van het hart aanleiding geven tot spronggolven, waarvan de snelheid ligt tussen de C voor en na de sprong of uitstulping.

De snelheid van een dergelijke spronggolf is moeilijk te bepalen, daar de elastische eigenschappen van de wanden en de axiale spanningen daarvoor bekend moeten zijn. De afleiding gaat als volgt: Ten opzichte van een met de sprong meebewegend assenstelsel wordt de impulsvergelijking opgesteld.



Ten opzichte van dit assenstelsel worden de snelheden in de doorsneden (1) en (2)

$$(C_s - V_1) \quad \text{resp.} \quad (C_s - V_2)$$

De impulsvergelijking geeft

$$\rho(C_s - V_1)^2 A_1 + p_1 A_1 = \rho(C_s - V_2)^2 A_2 + p_2 A_2 + p_s(A_1 - A_2)$$

De laatste term is de tegendruk in de uitstulping.

p_s is de gemiddelde druk in de overgang van het profiel. Stel

$$A_1 = A_2 + \Delta A, \quad p_1 = p_2 + \Delta p \quad p_s = p_2 + A \Delta p \quad \text{met} \quad 0 < A < 1.$$

De continuïteitsvergelijking geeft

$$(C_s - V_1) A_1 = (C_s - V_2) A_2.$$

Substitutie in de eerste vergelijking geeft:

$$\rho(C_s - V_2)^2 A_2^2 / (A_2 + \Delta A) - \rho(C_s - V_2)^2 A_2 + \Delta p [A_2 + (1 - \Theta)\Delta A] = 0,$$

of

$$(C_s - V_2)^2 = \frac{A_1 \Delta p}{\rho \Delta A} \frac{A_2 + (1 - \Theta)\Delta A}{A_2}$$

voor zeer kleine Δp en ΔA gaat de formule over in de oorspronkelijk gegeven formule. De druk op de uitstulping geeft axiale spanningen in de wanden. Het hangt geheel af van de wijze waarop de buis is ondersteund hoe deze spanningen A_1 en A_2 beïnvloeden. Neemt men aan dat axiale verplaatsingen van de buis door de ondersteuning onmogelijk zijn en dat in de halve bolvormige uitstulping de druk p_1 heerst (dus $\Theta \approx 1$) dan krijgt men een schatting

$$C_s = V_2 \pm (A_1 \cdot \Delta p / \rho \cdot \Delta A)^{1/2}$$

Daar bij bloedvaten de wanden niet regelmatig elastisch zijn hangt de grootte $A_1 \Delta p / \Delta A$ af van de drukken p_2 en p_1 .

In lit. 9 is een poging gedaan een dergelijke berekening grafisch uit te voeren. Uit het artikel is niet op te maken welke veronderstellingen de auteur heeft gemaakt.

De plaats waar een sprong- of uitstulpingsgolf ontstaat wordt bepaald door de snelheid waarmee het debiet aan het begin van de leiding toeneemt. Voorwaarde voor de buis is dat de voortplantingssnelheid van kleine storingen toeneemt met A of p , dat wil zeggen dat de hiervoor ingevoerde grootte b niet constant is maar met p toeneemt. Volgens de gegevens in lit. 9 is aan deze voorwaarde bij de aorta voldaan voor drukken die de doorsnede meer dan een factor 1,3 vergroten ten opzichte van de toestand zonder overdruk of onderdruk. Na afloop van elke puls schijnt namelijk een onderdruk voor te komen.

Invloed van de massa van de buiswand

Door Skalak, lit. 7, is een poging gedaan om voor waterleidingen een volledig stel vergelijkingen op te lossen met de invloed van de buigstijfheid en van de traagheid van wand met water loodrecht op s en van de wand in de richting van s . Zonder zover in details te gaan als in lit. 7 kan toch een indruk worden gekregen van de invloed die de traagheid van de wand heeft bij axiale verplaatsingen ten gevolge van de contractie bij drukverhoging.

Stelt men de axiale spanning op σ_a en de tangentiële spanning σ_o , de axiale verplaatsing u , de radiale verplaatsing van de wand w en $D = 2r$ dan is:

$$\begin{aligned} Eu_s &= \sigma_a - \sigma_o/m & \sigma_o &= p(r+w)/d \\ \sigma_a &= Eu_s + p(r+w)/md \\ \sigma_a/s &= eu_{ss} + p_s \cdot (r+w)/md + p \cdot w_s/md \\ w/(r+w) &= \varepsilon_o = (\sigma_o - \sigma_a/m)/E = \\ &= p(r+w)(1 - 1/m^2)/E \cdot d - u_s/m \end{aligned}$$

Versnellingsvergelijking voor de wand

$$\rho_1 u_{tt} = \sigma_a/s - p \cdot w_s$$

Verwaarloost men w ten opzichte van r , pw_s ten opzichte van $p_s(w+r)$ $p(r+w)/Ed \cdot m$ en U_s ten opzichte van 1 dan krijgt men

$$\begin{aligned} w_s/r &= \frac{1}{2} A_s/A = p_s \cdot r \cdot (1 - 1/m^2)/Ed - u_{ss}/m \\ w_t/r &= \frac{1}{2} A_t/A = p_t \cdot r \cdot (1 - 1/m^2)/Ed - u_{st}/m \end{aligned}$$

en als versnellingsvergelijking

$$\rho_1 u_{tt}/E = u_{ss} + D \cdot p_s/2m Ed.$$

De andere vergelijkingen worden

$$\begin{aligned} p_s + \rho VV_s + \rho V_t + \rho W_1 &= 0 \\ (V/C_e^2)p_s + (1/C_e^2)p_t + \rho V_s - (2\rho V/m)u_{ss} - (2\rho/m)u_{st} &= 0. \end{aligned}$$

Deze drie vergelijkingen kunnen worden aangevuld met de vier voorwaarden dat p , V , u_s en u_t uitsluitend van s en t afhangen, waarbij $u_{st} = u_{ts}$ is. Met een bewerking analoog aan die op vergelijking (6) en (7) is toegepast krijgt men een vergelijking in de vierde graad in $ds/dt = x$.

Deze vergelijking kan worden geschreven in de vorm

$$x^2 (x - V - C_e)(x - V + C_e) - C_w^2 (x - V - C_a)(x - V + C_a) = 0$$

$$\text{met } C_w = (C_e/C_a) \cdot C_1 \quad \text{met} \quad C_1^2 = E/\rho_1.$$

Voor stalen leidingen geldt $V \ll C_a$ en verder is $C_e > C_a$. In dat geval heeft de vergelijking vier reële wortels:

$$0 < x_1 < V + C_a; \quad V - C_a < x_2 < 0$$

$$V + C_e < x_3 \quad \text{en} \quad x_4 < V - C_e.$$

In de intervallen $V - C_e$ tot $V - C_a$ en $V + C_e$ tot $V + C_a$ komen geen wortels voor. Voor zeer grote C_w zoals in de waterslagproblemen voorkomen worden de eerste twee wortels praktisch $V + C_a$ en de andere twee $V - C_w$.

Skalak toont aan, dat bij waterslag in stalen leidingen deze vooruitlopende golf C_w , die ook bij zijn volledige behandeling te voorschijn komt, een te verwaarlozen invloed heeft op de toestand (p, V) in de buis.

In het geval dat C_l klein is gaan de hier ingevoerde benaderingen niet meer op.

Dit geval zou zich voor kunnen doen bij slappe leidingen met relatief grote massa per eenheid van wandoppervlakte. De traagheid loodrecht op de as van wand en aangrenzende vloeistof kan dan ook een merkbare invloed krijgen. Deze gevallen zijn voorlopig nog niet met de grafische karakteristiekenberekening te behandelen.

Welke conclusies kunnen worden getrokken uit de verdere bewerking van de coëfficiënten van de zeven vergelijkingen, te weten de bewegingsvergelijking van de vloeistof, de continuïteitsvergelijking, de bewegingsvergelijking van de wand in de richting van de as en de vier voorwaarden, dat p, V, U_s en U_t alléén van s en t afhangen, is niet nader onderzocht.

Het staat daarom nog niet vast in hoever de hier uitgevoerde bewerking geoorloofd is of zin heeft.

$$\overline{TN} = \frac{a}{gS} \cdot q_0 = \frac{ac_0}{g}$$

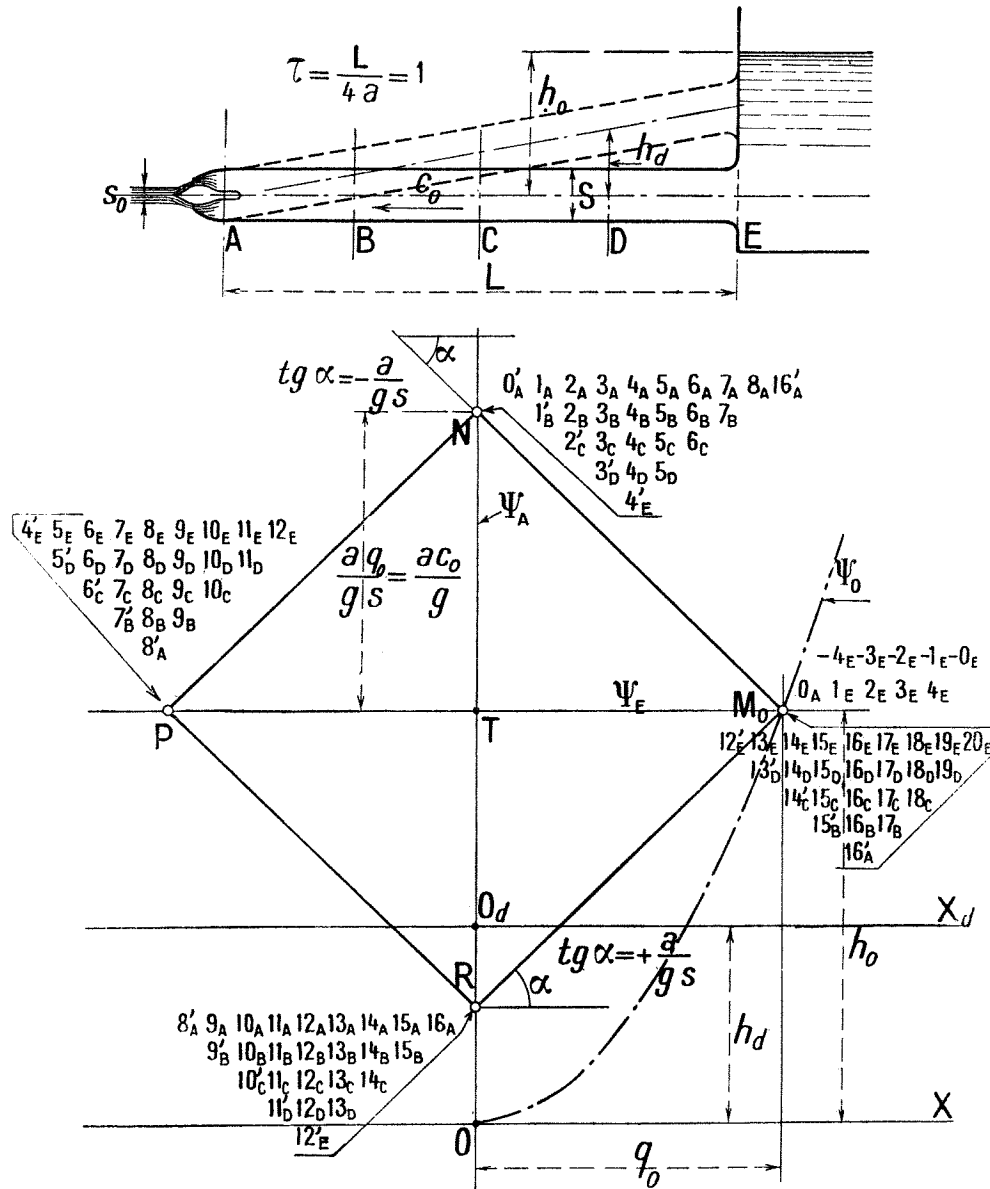
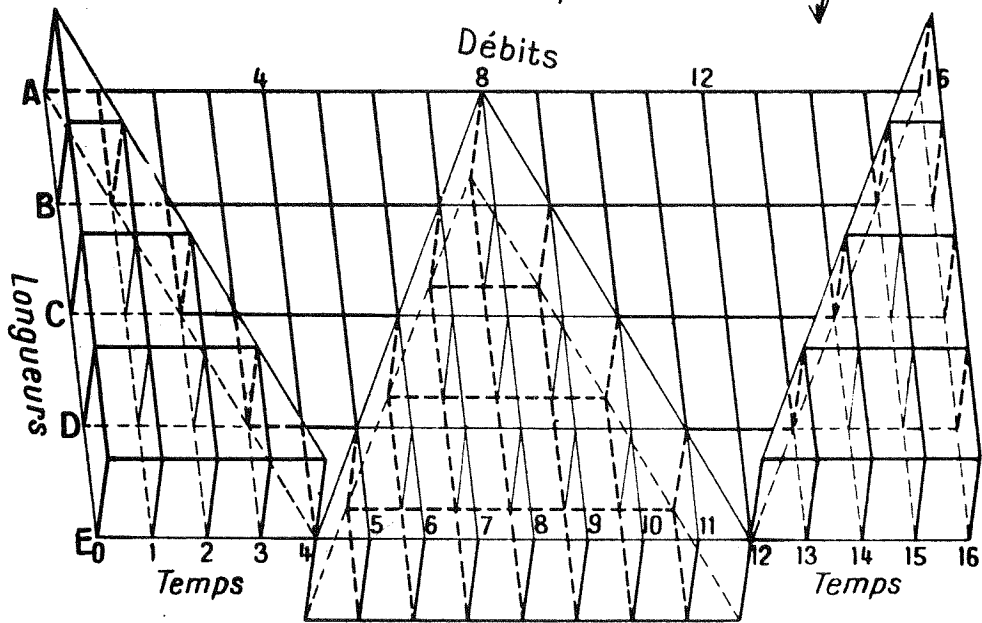
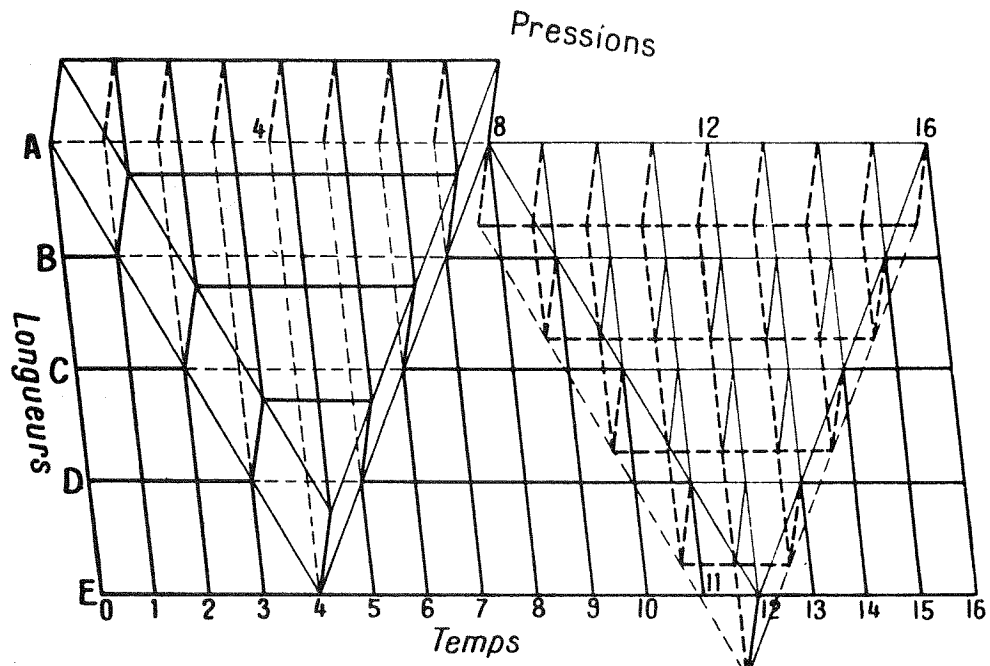


FIG. 41 a, b



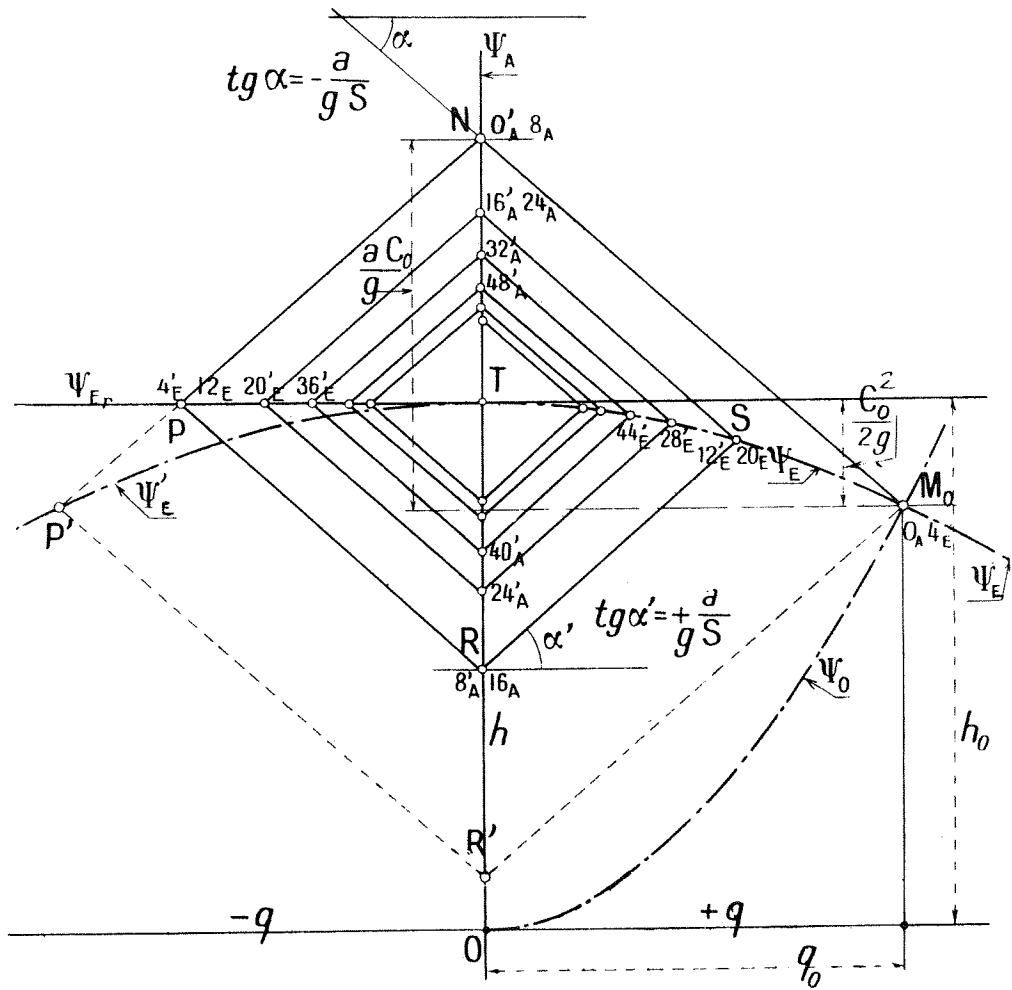
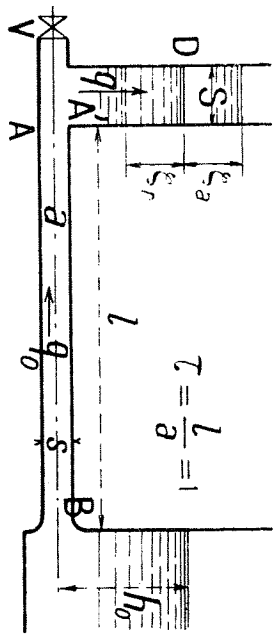


FIG. 45



$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\tau}{s}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{gs}$$

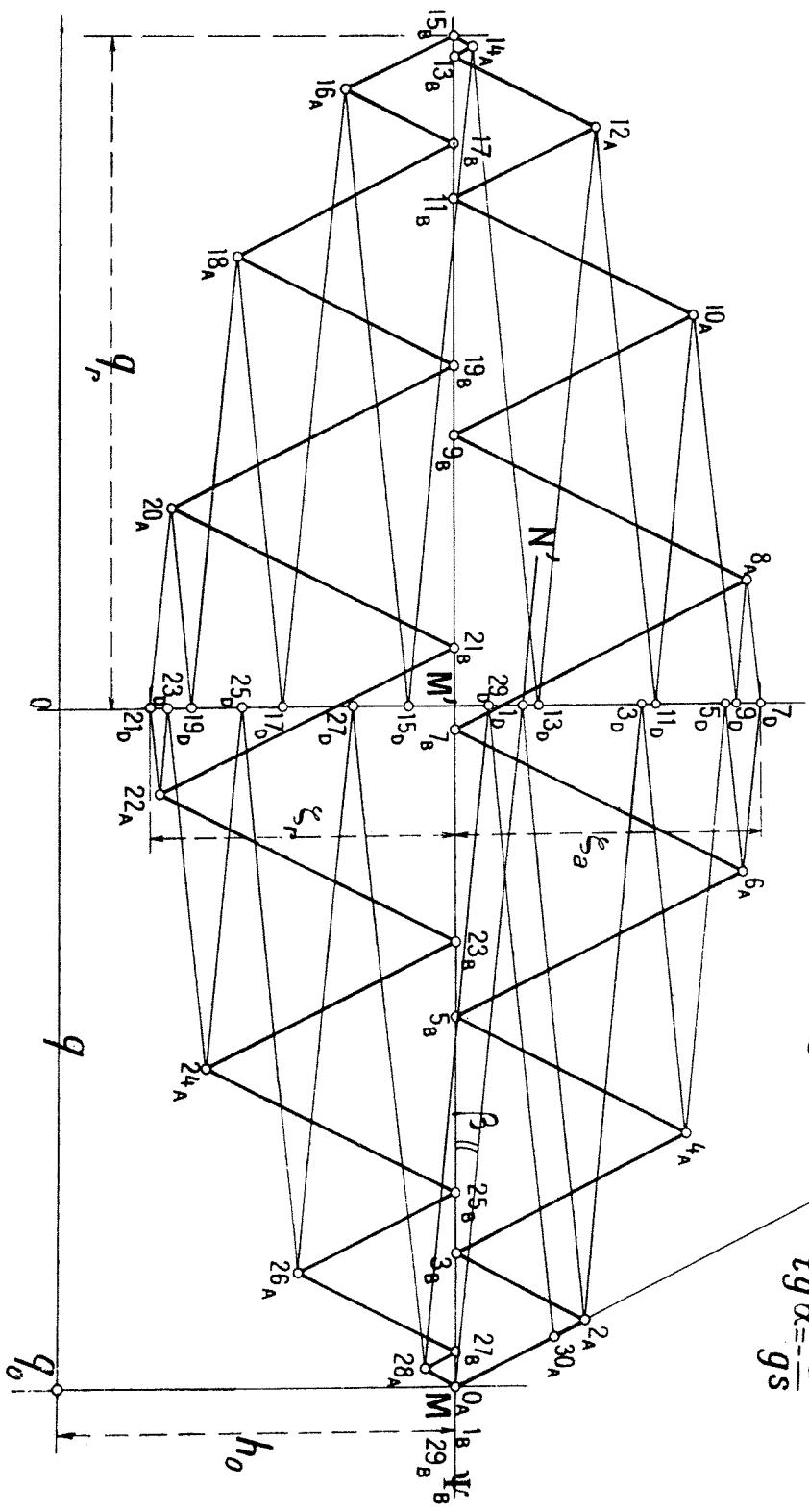


FIG. 62

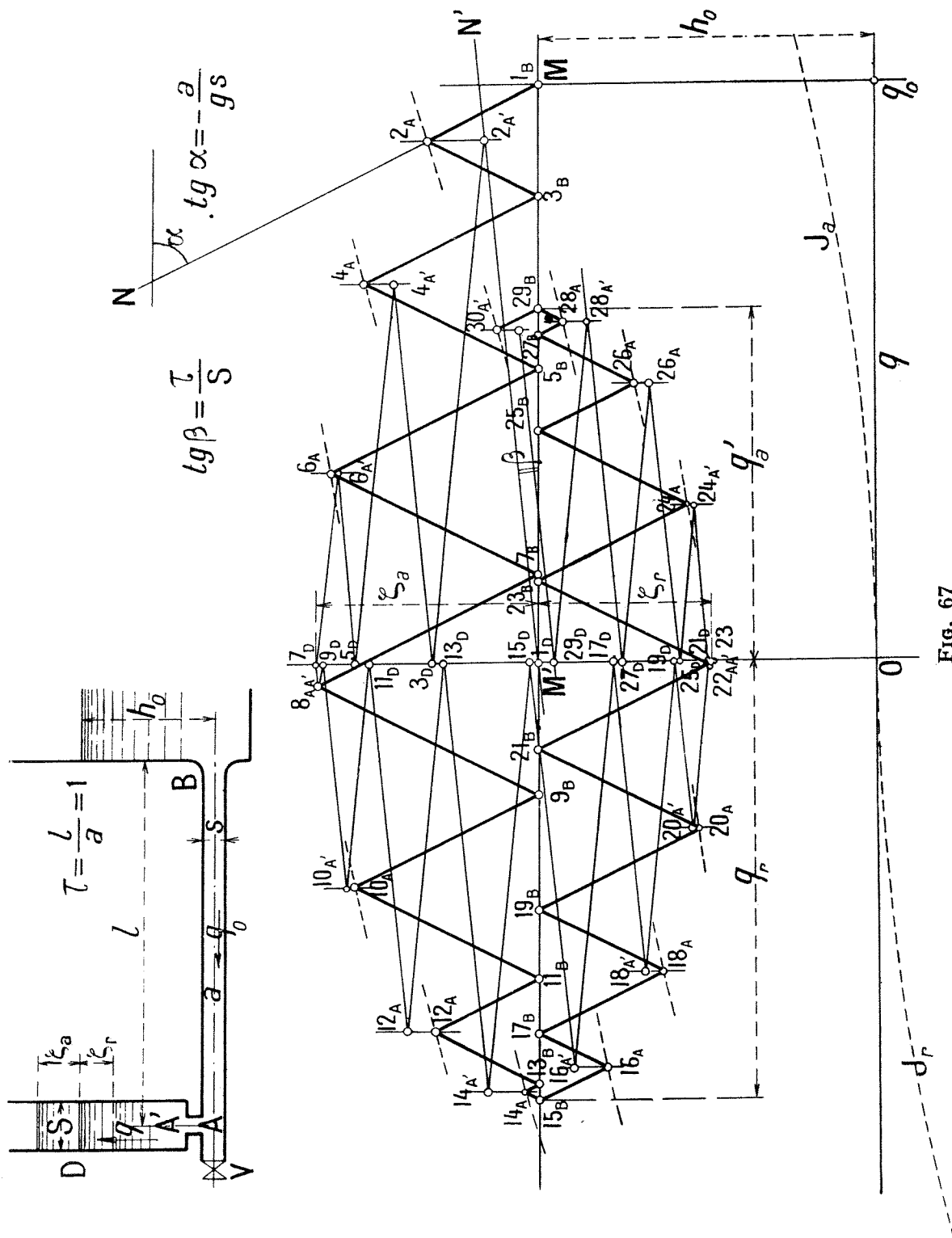
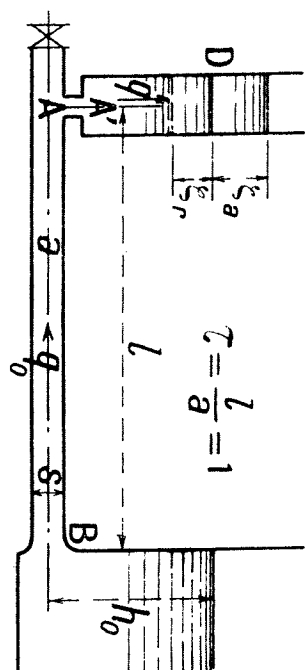


FIG. 67



$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{l}{s}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{s}{gs}$$

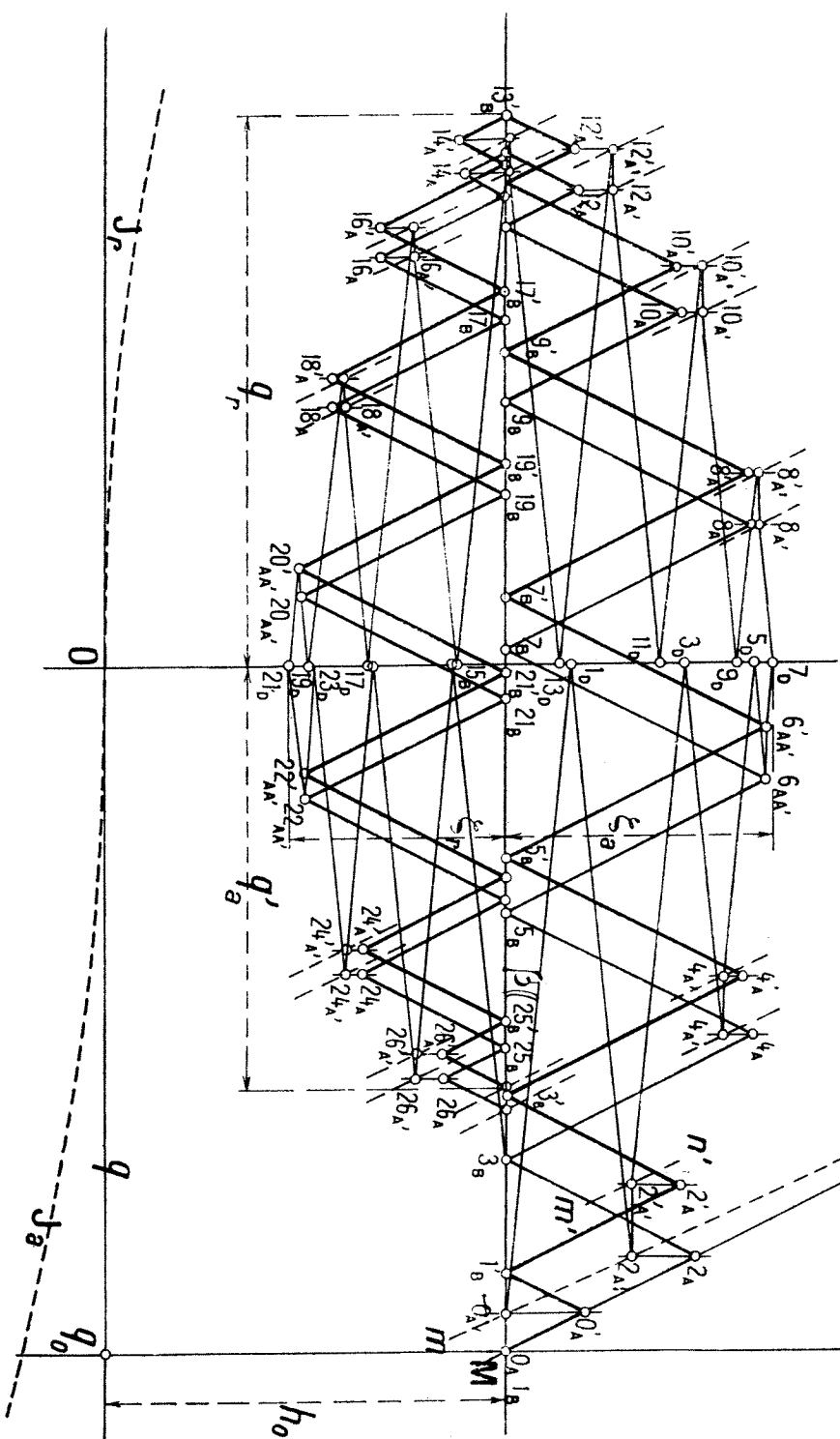


Fig. 68

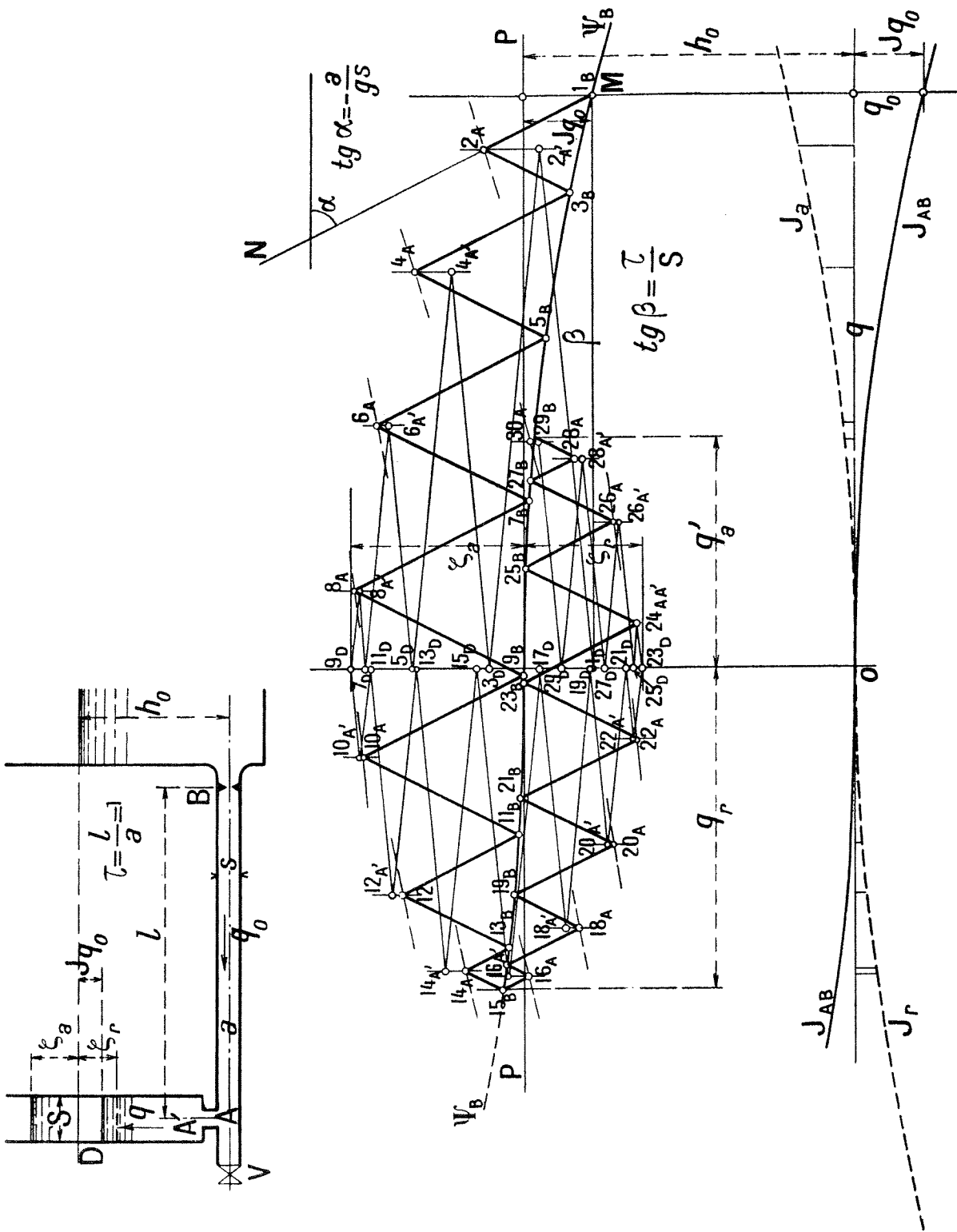


Fig. 69

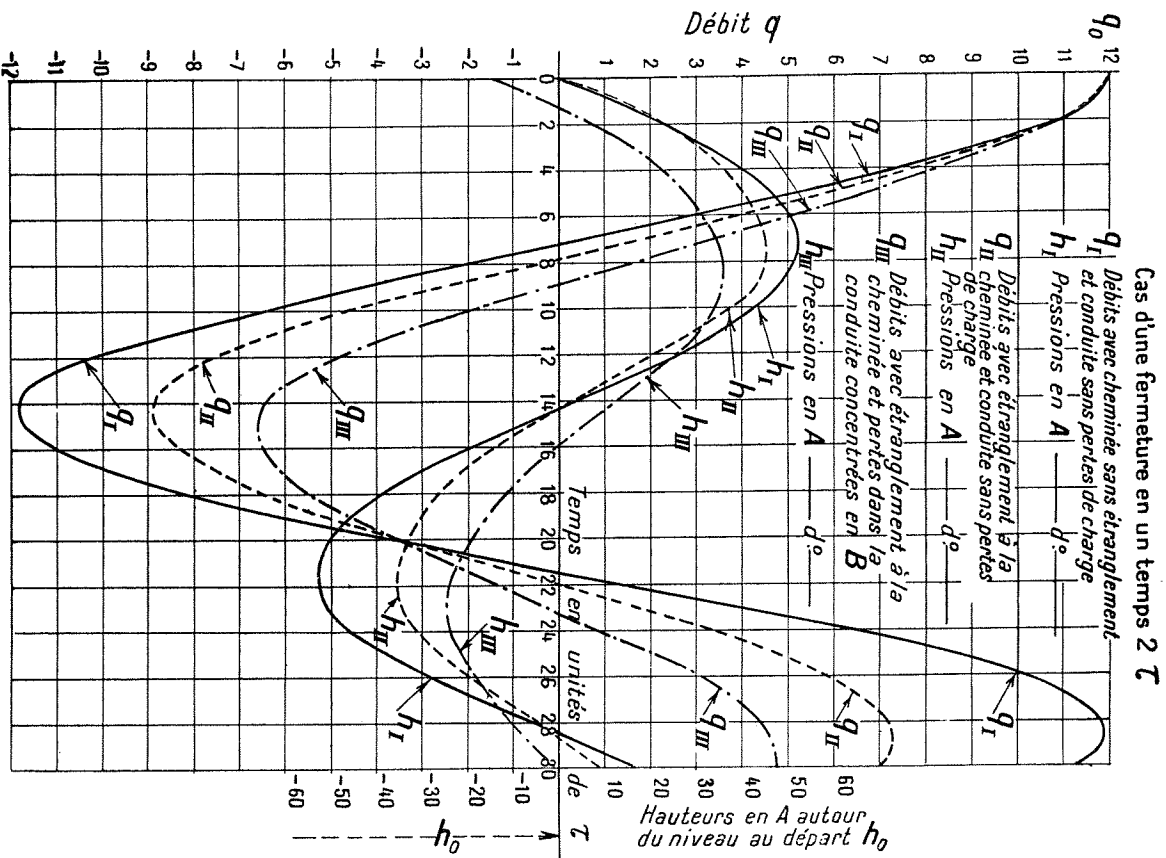


Fig. 70

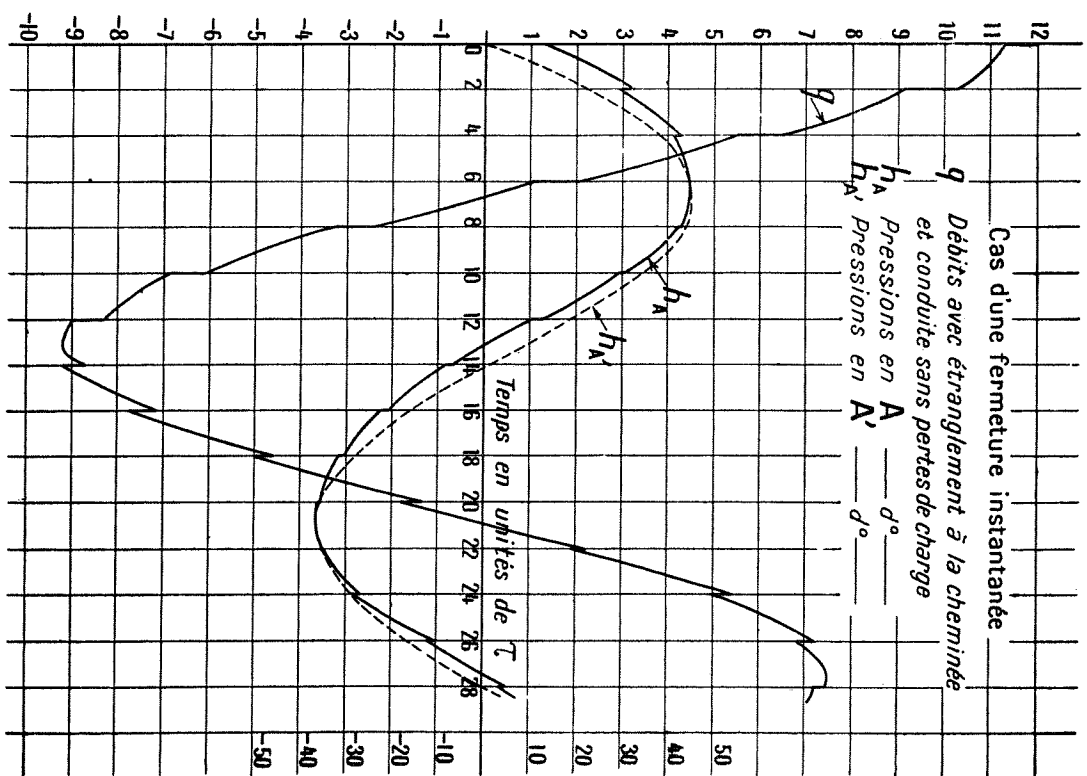
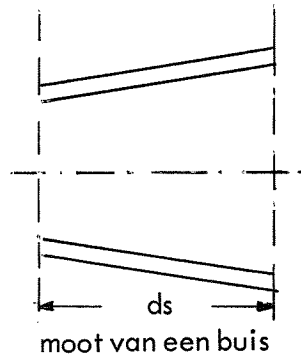


Fig. 71

WATERSLAGSamendrukbare vloeistof in slappe buis met variërende doorsnede

Notaties
 druk p
 opp. dsn. A
 stroomsnelh. v
 debiet Q
 dichtheid ρ



teken afspraak:
 $\rightarrow + v$
 $\rightarrow + s$
 $\rightarrow + Q$
 voor een ronde buis
 wanddikte δ
 diameter D , straal R
 elast. mod. wand E

Afleiding van de grondvergelijkingen

Verondersteld is dat de veranderingen van de grootheden p , A enz met s zo geleidelijk zijn dat deze veranderingen kunnen worden voorgesteld door $\partial p / \partial s ds$ enz.

Bij de afleiding van de bewegings- en continuïteitsvergelijkingen, is verder verondersteld dat er een axiale symmetrie om de s -as is en dat p en ρ over een doorsnede loodrecht op de s -as constant zijn.

Bewegingsvergelijking in richting s -as:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial s} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial s} (p) + R_w = D$$

R_w is op te vatten als een weerstandsterm waarin alle termen met "schuifspanningen" zijn opgenomen.

Continuïteitsvergelijking:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (\rho u) + \rho \frac{\partial v_r}{\partial r} + \rho \frac{v_r}{r} = 0$$

r = afstand tot s -as.

Op grond van de axiale symmetrie $v_{tang} = 0$ en met $\rho = \text{constant}$ over doorsnede p onafhankelijk van σ verondersteld. Deze twee vergelijkingen moeten over de doorsnede A worden geïntegreerd om de waterslag vergelijkingen te krijgen waarin alleen s en A als onafhankelijke veranderlijken voorkomen.

Bij deze integratie is het van voordeel om de volgorde van differentiëren in de afzonderlijke termen en integreren te verwisselen. Daar A geen constante is, de integratie grenzen dus ook van (s, t) afhangen, is dit niet zonder meer mogelijk. Alleen de termen waar u in voorkomt mogen eerst geïntegreerd en daarna gedifferentieerd worden omdat de integrand met u aan de grenzen van A nul wordt.

Termen met ρ en p zonder een factor u mogen niet zo worden bewerkt, maar de veronderstelling dat ρ en p constant over de doorsnede A zijn dus ook $\partial \rho / \partial t$ enz maakt dat de afleiding toch mogelijk is.

Integratie van de continuïteitsvergelijking over A dus (cont. verg.) dA kan op grond van de axiale symmetrie worden geschreven als

$$\int_0^R \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial s} + \rho \frac{v_r}{r} + \rho \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) 2\pi r dr = 0$$

De laatste term van de integrand geeft

$$\int_0^R \frac{\partial v_r}{\partial r} 2\pi r dr = \rho 2\pi r v_r \Big|_0^R - \int_0^R \rho 2\pi v_r dr$$

De derde term geeft $+\int_0^R \rho 2\pi v_r dr$

opgeteld geeft
 $\rho \cdot 2\pi R \cdot v_R$

v_R = radiale snelheid aan buiswand dus van de buiswand zelf. De som van deze termen geeft dus $\rho \frac{\partial A}{\partial t}$.

$$\int_0^R \frac{\partial(\rho u)}{\partial s} 2\pi r dr = \frac{\partial}{\partial s} \int_0^R \rho u r dr = \frac{\partial}{\partial s} (\rho V A)$$

met $V = \frac{1}{A} \int_A u dA$ (ρ constant over doorsnede evenals $\partial f / \partial t$; $u = 0$ aan wand)

$$\int_0^R \frac{\partial f}{\partial t} 2\pi r dr = \frac{\partial f}{\partial t} \int_0^R 2\pi r dr = A \frac{\partial f}{\partial t}$$

deze term te combineren met de som van de derde en de vierde.
De continuïteitsvergelijking in s en t wordt dan:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) + \frac{\partial}{\partial s} (\rho V A) = c}$$

Integratie van de bewegingsvergelijking over A kan op dezelfde wijze worden uitgevoerd.

Met $V = \frac{1}{A} \int_A u dA$; $\beta V^2 = \frac{1}{A} \int_A u^2 dA$ en $\frac{\partial p}{\partial s} = \text{constant over doorsnede A}$

krijgt men

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\rho V A) + \frac{\partial}{\partial s} (\beta \rho V^2 A) + A \frac{\partial p}{\partial s} + R A = 0}$$

In deze vergelijking is $R_w = \frac{\rho g v |v|}{C^2 \frac{1}{4} D}$ de gebruikelijke weerstandsformule, en β de correctie voor ongelijkmatige snelheidsverdeling, in het volgende geheel constant verondersteld.

Elastische veranderingen in de buiswand

De oppervlakte A van de doorsnede zal, als de buiswand elastisch is, met p veranderen. Stel dat deze verandering kan worden benaderd met de lineaire betrekking

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial p} = \frac{1}{b}$$

waarin b de elasticiteits constante is. Voor een ronde buis met wanddikte δ en een elasticiteitsmodulus E is

$$b = \frac{E \delta}{D}$$

In het algemeen zal in permanente toestand, of wanneer de buis onbelast is, A ook nog direct van s afhangen. In enkele gevallen komt het voor dat A bij bepaalde s en p ook nog van t afhangt. Dit geval doet zich voor als A door andere krachten dan van p afkomstige wordt beïnvloed bijvoorbeeld in slagaders. Als in de wanden van slagaders nog spieren zijn kunnen met s én t veranderlijke krachten op de wand van de buis worden uitgeoefend (*vis a tergo*) dat wil zeggen dat A behalve via $p(s,t)$ ook nog direct van (s,t) afhangt: $A \{ p(s,t), s, t \}$.

Hieronder wordt differentiatie naar s en t bij constante p aangeduid met

$$\left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_p \quad \text{en} \quad \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_p$$

In het algemeen geldt dus

$$\frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial s} = \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_p + \frac{1}{B} \frac{\partial p}{\partial s}$$

Als de vloeistof in hoge mate samendrukbaar is kan men schrijven

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial s} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial s}$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = \frac{1}{e} \quad \text{met } e = \text{samendrukbaarheidsmodulus.}$$

Aangenomen is dat ρ uitsluitend van p afhangt; temperatuursinvloeden worden in het volgende geheel buiten beschouwing gelaten.

$$\text{Evenzo is } \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial t}$$

In het volgende wordt nog de notatie a^2 gebruikt $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{e} + \frac{1}{b}$.

Grondvergelijkingen voor karakteristieken

De termen in de bewegingsvergelijkingen kunnen nog worden gesplitst en gerangschikt naar de afgeleiden van p en V naar (s, t) .

p en V worden dan beschouwd als de te berekenen afhankelijke veranderlijken.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho V A) = \rho V A \left\{ \frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_p + \frac{1}{b} \frac{\partial p}{\partial t} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (\beta \rho V^2 A) = \beta \rho V^2 A \left\{ \frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial s} + 2 \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_p + \frac{1}{b} \frac{\partial p}{\partial s} \right\}$$

$$A \frac{\partial p}{\partial s} = p A \left\{ \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial s} \right\}$$

De continuïteitsvergelijking geeft

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A) = \rho A \left\{ \frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_p + \frac{1}{b} \frac{\partial p}{\partial t} \right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho V A) = \rho V A \left\{ \frac{1}{e} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial s} + \frac{1}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_p + \frac{1}{b} \frac{\partial p}{\partial s} \right\}$$

Randschikken en delen door A geeft

$\left(1 + \frac{\beta \rho V^2}{a^2}\right) \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\rho V}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + 2\beta \rho V \frac{\partial V}{\partial s} + \rho \frac{\partial V}{\partial t} + W_1 = 0$
$\frac{\rho V}{a^2} \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\rho}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial V}{\partial s} + W_2 = 0$
$ds \frac{\partial p}{\partial s} + dt \frac{\partial p}{\partial t} - dp = 0$
$+ ds \frac{\partial V}{\partial s} + dt \frac{\partial V}{\partial t} - dV = 0$

De laatste twee vergelijkingen drukken uit dat p en V alleen van s en t afhangen. De "weerstand" termen in deze vergelijkingen zijn:

$$W_1 = R_w + \frac{\beta \rho V^2}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_p + \frac{\rho V}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_p$$

$$W_2 = \frac{\rho V}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial s} \right)_p + \frac{\rho}{A} \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_p$$

De veranderingen van A bij constante p komen dus als extra termen te voorschijn. De termen met $(\partial A/\partial t)$ kunnen slechts door uitwendige krachten worden veroorzaakt. De termen $(\partial A/\partial s)$ kunnen optreden als de buis van nature al een variërende doorsnede heeft; bij het optreden van uitwendige krachten wordt ook $(\partial A/\partial s)_p$ beïnvloed. Voor de afleiding van de grondvergelijkingen voor de karakteristieken wordt de matrix van de vier omrande vergelijkingen beschouwd waarbij de afgeleiden van p en V naar s en t als de "onbekende" gelden:

$$\begin{vmatrix} 1 + \frac{1}{2} \beta \rho V^2 & \frac{1}{a^2} \rho V & 2\beta \rho V & \rho & W_1 \\ \frac{1}{a^2} \rho V & \frac{1}{2} \rho & \rho & 0 & W_2 \\ ds & dt & 0 & 0 & -dp \\ 0 & 0 & ds & dt & -dV \end{vmatrix}$$

De hoofd determinant uitgewerkt geeft

$$\frac{ds}{dt} = \beta V \pm \sqrt{(\beta^2 - \beta) V^2 + \frac{a^2}{\rho}} = \beta V + M.$$

De overige determinanten geven de andere karakteristieke vergelijking

$$\frac{M - (\beta - 1) V}{a^2} dp + dV + \frac{1}{\rho} \left\{ W_1 + (M - \beta V) W_2 \right\} dt = 0$$

waarin $M = \pm \sqrt{\beta (\beta - 1) V^2 + \frac{a^2}{\rho}}$ is.

In vele gevallen kunnen deze vergelijkingen sterk worden vereenvoudigd. In buisleidingen van staal of beton is meestal de grootheid a^2/ρ zoveel groter dan V^2 dat men $ds/dt \approx \pm a/\sqrt{\rho}$ kan stellen. De overige termen worden dan ook eenvoudiger.

In de meeste praktische gevallen is $W_2 = 0$ en is W_1 de gewone stromingsweerstand.

Als de snelheidsvariaties groot zijn kan β niet meer als een constante worden beschouwd: in gebieden met een kleine stroomsnelheid (bij de wand) slaat de stroom eerder om bij tegendruk dan in de as.

Weer in de meeste praktijk gevallen wordt β gewoon = 1 gesteld.

In het geval van sterk overheersende weerstandsinvloed worden de versnellings termen verwaarloosd. Met de weerstands formule voor permanente stroom (waartoe de bewegingsvergelijking degenereert) elimineert men V en afgeleiden uit de continuïteitsvergelijking. De dan ontstane vergelijking is dan niet gewoon met karakteristieken op te lossen.

GELEIDELIJK VERANDERENDE BEWEGING IN KANALEN VOLGENS
BOUSSINESQ (1872)

INHOUD

	blz.
<u>1. Inleiding</u>	B5-2
<u>2. Integraalstelling van Green (1828)</u>	B5-2
<u>3. Volgorde van differentiëren en integreren</u>	B5-4
<u>4. Bewegingsvergelijking</u>	B5-7
<u>5. Dimensieloze grootheden; Notaties</u>	B5-8
<u>6. Invloed wandwrijving</u>	B5-8
<u>7. Invloed snelheidsverdeling</u>	B5-10
<u>8. Invoering gemiddelde stroomsnelheid</u>	B5-12
<u>9. Correctiefactoren bij invoering gemiddelde snelheid</u>	B5-14
<u>10. Invloed correctiefactoren op karakteristieke snelheid</u>	B5-15

Geleidelijk veranderende beweging in kanalen volgens Boussinesq (1842 - 1929)

In de bewegingsvergelijking voor een stroom in een bijna prismatisch kanaal en onder geleidelijke verandering met de tijd wordt gewoonlijk een gemiddelde stroomsnelheid ingevoerd, die nog een functie is van de afstand langs de as van het kanaal en van de tijd.

De invoering van de gemiddelde snelheid in de convectietermen van de bewegingsvergelijking maakt het gebruik van een correctiefactor noodzakelijk, omdat in feite een grootheid die niet-lineair is in de snelheid en de afgeleide ervan over de doorsnede wordt gemiddeld.

In zijn "Essai sur la théorie des eaux courantes" (1872) geeft Boussinesq een werkwijze aan om deze correctiefactoren te schatten of uit metingen van de snelheidsverdeling te berekenen. De afleiding van de formules voor de correctiefactoren is in deze nota in vereenvoudigde vorm weergegeven.

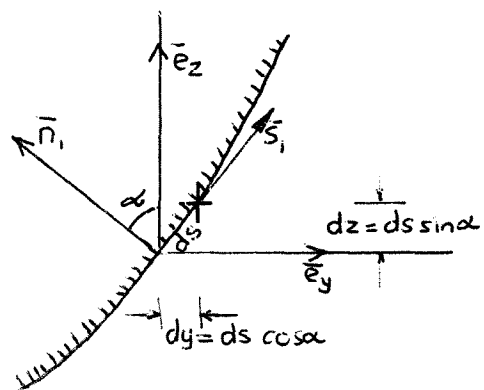
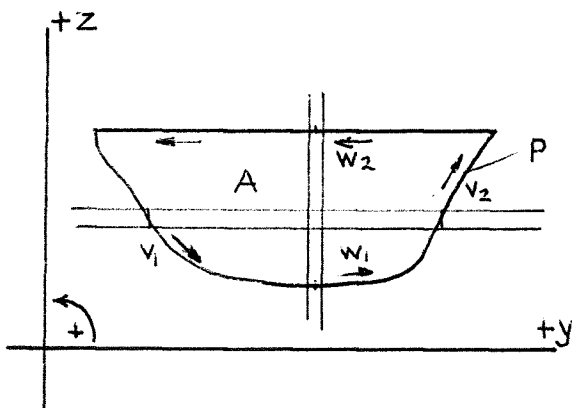
In 1872 was het nog niet gebruikelijk in ieder geval als randvoorwaarde te stellen, dat stroomsnelheden aan vaste wanden altijd nul moeten zijn. Als referentiesnelheid voert Boussinesq de snelheid in het diepste punt van de doorsnede in. Deze snelheid is in de hier gegeven afleiding vervangen door de (kwadratisch) gemiddelde schuifspanningssnelheid langs de vaste wanden.

Om de weerstandstermen over de doorsnede te kunnen integreren maakt Boussinesq veel gebruik van de integraalstelling van Green, die in zijn publicaties met de namen Riemann en Ostrogradsky wordt aangeduid.

Op vele plaatsen wordt de volgorde van differentiëren en integreren verwisseld zonder bewijs van het geoorloofd zijn.

De afleidingen van deze analytische hulpmiddelen zijn daarom afzonderlijk gegeven in de notaties van de klassieke analyse met aanduiding van vectorische mogelijkheden. Een goed overzicht van het werk van Boussinesq wordt gegeven in: Boulanger; Hydraulique générale; Octave Doin et Fils, Paris, 1909.

Integraalstelling van Green (1828)



Het verband tussen een integratie over een begrensde oppervlakte en een integratie langs de gesloten begrenzing wordt gelegd door de integraalstelling van Green (1793 - 1841).

Ingevoerd worden twee functies van (y, z) die aan de gebruikelijke eisen van continuïteit en differentieërbaarheid moeten voldoen: $V(y, z)$ en $W(y, z)$.

Van deze functies wordt berekend

$$\iint_A \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) dy dz = \left[\int V dz + \int W dy \right]_{(1)}^{(2)} =$$

$$\int_P (V_2 - V_1) dz_p + \int_P (W_2 - W_1) dy_p = \oint_P V \sin \alpha ds - \oint_P W \cos \alpha ds.$$

De tekens worden bepaald door de richting waarin de omtrek P wordt doorlopen. Hiervoor zijn enige eenheidsvectoren ingevoerd:

\bar{s}_1 = eenheidsvector in de (+)-richting van de begrenzing P .

\bar{n}_1 = eenheidsvector langs de normaal van de begrenzing P naar het inwendige van A ; deze positieve richting is voor dit geval gekozen omdat bij beschouwingen van wandinvloeden snelheidsgradiënten met de afstand tot de wand in het inwendige van A moeten worden ingevoerd.

\bar{e}_y, \bar{e}_z = eenheidsvectoren in de (+)-richtingen van de coördinaatassen.

In de toepassingen hebben V en W de gedaante van

$$V = \phi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{en} \quad W = \phi \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

waarin ϕ en φ ook functies van (y, z) zijn.

De integraalstelling van Green geeft dan:

$$\iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right\} dy dz = \oint_P \left\{ \phi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \alpha - \phi \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \alpha \right\} ds = - \oint_P \phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds$$

omdat men aan de omtrek P kan stellen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \bar{n}_1 \cdot \text{grad } \varphi = \bar{n}_1 \cdot \bar{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \bar{n}_1 \cdot \bar{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} = - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cos \alpha$$

De gegeven vorm van de stelling van Green is een bijzonder geval van de tweede vorm van de stelling van Green.

$$\int_{\text{Vol}} \{ \text{grad } \phi \cdot \text{grad } \varphi + \phi \Delta \varphi \} d(\text{Vol}) = - \int_{\text{opp}} \phi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d(\text{opp})$$

In de toepassingen stelt de stroomsnelheid en de kinematische turbulente of viskeuze wrijvingscoëfficiënt voor.

3. Volgorde van integreren en differentiëren

Als de integrand en de integratiegrenzen afhankelijk zijn van één of meer parameters waarnaar moet worden gedifferentieerd, kan de volgorde van de bewerkingen niet zonder meer worden omgedraaid. Dit geval doet zich voor bij integratie van de stromingsvergelijkingen over een dwarsdoorsnede van een kanaal terwijl naar de tijd en naar de afstand langs de as moet worden gedifferentieerd.

Alle stromingsvergelijkingen kunnen worden geschreven in de vorm van een behoudsvergelijking voor een skalare grootte Φ :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} + \frac{\partial(w\Phi)}{\partial z} = \frac{D\Phi}{Dt} \equiv \bar{\Phi} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \bar{v} \cdot (\bar{\nabla} \Phi)$$

$\bar{\Phi} = \rho$ voor het behoud van massa; rechter lid is dan nul.

$\bar{\Phi} = \rho(u, v, w)$ voor de bewegingsvergelijkingen met als rechter lid de gradiënten van de opsommingen en van de potentiaal van de zwaartekracht.

$\bar{\Phi} = u^2 + v^2 + w^2 \equiv |\bar{V}|^2$ of $= p$ geeft een deel van de energie vergelijking.

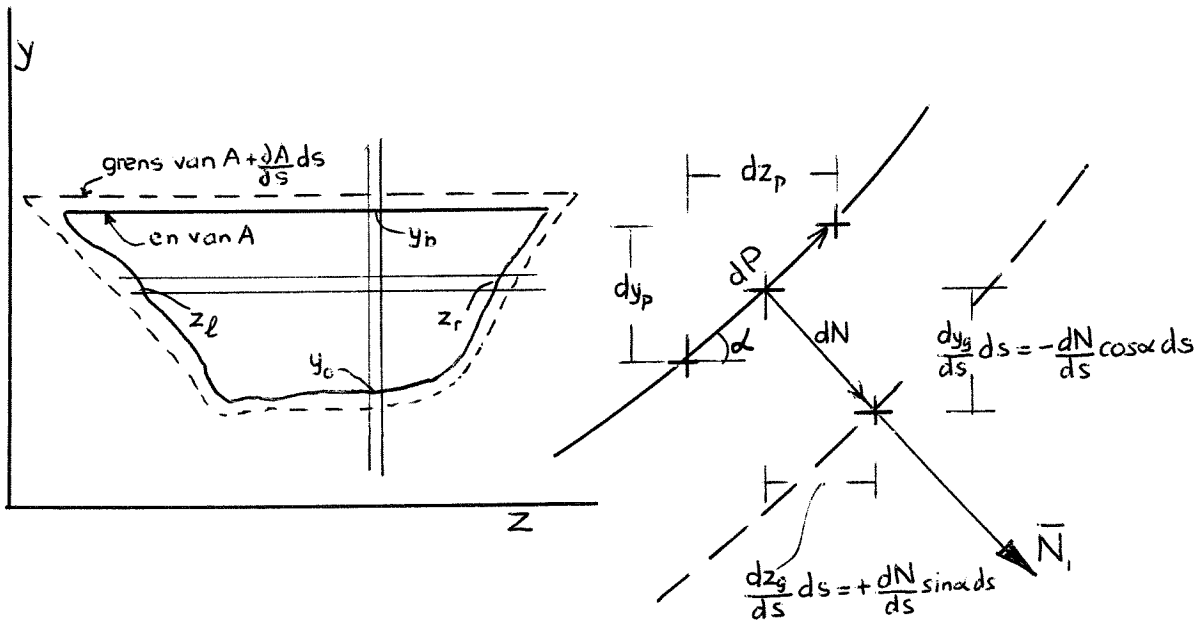
In het volgende is de x-as gekozen in de voorkeursrichting van de stroom en het (y,z)-vlak in de dwarsdoorsnede.

De algemene formule voor één veranderlijke z en de parameter s is:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_{a(s)}^{b(s)} f(z, s) dz = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} f(z, s) dz + \frac{db}{ds} \cdot f(b, s) - \frac{da}{ds} f(a, s)$$

Voor de integraal over de begrensde oppervlakte A geldt:

$$\begin{aligned} \iint_A \frac{\partial}{\partial s} f(y, z, s) dy dz &= \int_{(z)} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} \int_{(y)} f(y, z, s) dy \right\} dz - \\ &- \int_{(z)} \left\{ f(y_b, z, s) \frac{dy_b}{ds} - f(y_o, z, s) \frac{dy_o}{ds} \right\} dz_p = \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \iint_{(A)} f(y, z, s) dy dz - \int_{(z_p)} \left\{ f(y_b, z, s) \frac{dy_b}{ds} - f(y_o, z, s) \frac{dy_o}{ds} \right\} dz_p \\ &- \int_{(y_p)} \left\{ f(y, z_r, s) \frac{dz_r}{ds} - f(y, z_l, s) \frac{dz_l}{ds} \right\} dy_p. \end{aligned}$$



De index p heeft betrekking op de omtrek bij constante s en de index g geeft de veranderende grootte afhankelijk van de verandering van de grens van A met s. In dit geval is de richting van de normaal op de begrenzing naar buiten positief genomen omdat het hier gaat om de toeneming van A met s. De correctie termen van de verwisseling worden:

$$- \int_{(z_p)} \left\{ f(y_b, z, s) \frac{dy_b}{ds} - f(y_o, z, s) \frac{dy_o}{ds} \right\} dz_p = - \oint_P f(y_p, z_p, s) \frac{dN}{ds} \cos^2 \alpha dP$$

$$- \int_{(y_p)} \left\{ f(y, z_r, s) \frac{dz_r}{ds} - f(y, z_l, s) \frac{dz_l}{ds} \right\} dy_p = - \oint_P f(y_p, z_p, s) \frac{dN}{ds} \sin^2 \alpha dP$$

Deze termen kunnen worden samengevat tot

$$- \oint_P f(y_p, z_p, s) \frac{dN}{ds} dP$$

Als $f = 1$ is, is $\oint_P \frac{dN}{ds} dP = \frac{dA}{ds}$.

In de toepassing gaat het om de berekening van

$$\iint_A \frac{D\Phi}{Dt} dy dz; \text{ men krijgt dan}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} dy dz = \frac{\partial}{\partial t} \iint \Phi dy dz - \oint_P \Phi \frac{\partial N}{\partial t} dP$$

$$\iint \frac{\partial(u\Phi)}{\partial x} dy dz = \frac{\partial}{\partial x} \iint (u\Phi) dy dz - \oint_P (\dot{u})_p \frac{\partial N}{\partial x} dP$$

$$\iint \frac{\partial(v\Phi)}{\partial y} dy dz = \int \left\{ (v\Phi)_b - (v\Phi)_o \right\} dz_p = - \oint (v\Phi)_p \cos \alpha dP$$

$$\iint \frac{\partial(w\Phi)}{\partial z} dy dz = \int \left\{ (w\Phi)_r - (w\Phi)_l \right\} dy_p = - \oint (w\Phi)_p \sin \alpha dP$$

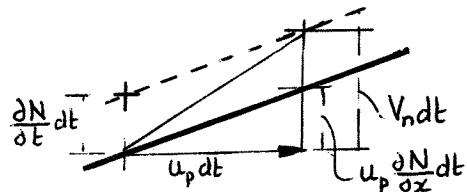
$$- v_p \cos \alpha + w_p \sin \alpha = + \bar{V}_p \cdot \bar{N}_1 = V_N =$$

$$= (\bar{e}_x n + \bar{e}_y v + \bar{e}_z w) \bar{N}_1 = \text{de snelheidscomponent in het } (y,z)\text{-vlak loodrecht op de wand.}$$

$$\bar{e}_x \cdot \bar{N}_1 = 0; \quad \bar{e}_y \cdot \bar{N}_1 = - \cos \alpha; \quad \bar{e}_z \cdot \bar{N}_1 = + \sin \alpha.$$

De som van de correctietermen ontstaan door de verwisseling van differentiëren naar x en t en integreren over A is dan

$$\oint \Phi \left\{ - \left(\frac{\partial N}{\partial t} + u_p \frac{\partial N}{\partial x} \right) + V_N \right\} dP = 0$$



Stelt men namelijk het oppervlak van begrenzing van de vloeistofstroom voor door $\bar{T}(x_p, y_p, z_p, t) = 0$ en volgt men een punt (x_p, y_p, z_p) ten tijde t in dt langs de projectie van de normaal in dat punt van $\bar{T} = 0$ op het (y,z) -vlak, dan gaat $y_p \rightarrow y_p + V_w F_y / R_1 dt$; $z_p \rightarrow z_p + V_w F_z / R_1 dt$.

V_w is dan de verplaatsingssnelheid van het oppervlak $F = 0$ in projectie op het (y,z) -vlak,

$$R_1 = \sqrt{F_y^2 + F_z^2} \text{ en } \left(0, \frac{F_y}{R_1}, \frac{F_z}{R_1} \right)$$

de kentallen van \bar{N}_1 of de richtingscosinussen van de projectie van de normaal N op $F = 0$ dus ook van V_{wand} .

Voor dx kan $u_p dt$ worden gekozen; dN is dan $V_w dt$. Het in dt infinitesimaal verplaatste punt moet in het oppervlak $F = 0$ blijven zodat moet voldaan zijn aan:

$$\bar{T}(x, y, z, t) = 0 \text{ én } \bar{T}\left(x + u_p dt, y + V_w \frac{F_y}{R_1} dt, z + V_w \frac{F_z}{R_1} dt, t + dt\right) = 0$$

(met weglating van de index p voor de coördinaten).

Daaruit volgt

$$F_x u_p dt + F_y^2 V_w dt / R_1 + F_z^2 V_w dt / R_1 + F_t dt = 0$$

Opdat geen vloeistof door het oppervlak gaat moet ook gelden

$$\frac{DF}{Dt} F_t + u_p F_x + v_p F_y + w_p F_z = 0$$

Hierin is $v_p F_y/R_1 + w_p F_z/R_1 = V_N$ de stroomsnelheidscomponent in het (y,z) -vlak loodrecht op de begrenzing zodat $V_N = V_{\text{wand}}$.
Eventueel kan rechtstreeks gebruik worden gemaakt van de integraalstelling van Gauss.

$$\int_{\text{Vol}} \nabla \cdot (\Phi \bar{V}) d(\text{Vol}) = \int_{\text{opp}} \Phi \nabla \cdot \bar{N} d(\text{opp})$$

Dit is hier niet gebeurd, omdat het (y,z) -vlak als vlak van doorsnede in het algemeen een hoek maakt met \bar{N} de normaal op $F = 0$, de hoek tussen \bar{N} en \bar{N}_1 .
Uit deze afleiding blijkt, dat de volgorde van differentiëren naar de tijd en de voorkeursrichting en integreren over een oppervlak loodrecht daarop verwisselbaar is, waarbij de snelheden en versnellingen loodrecht op deze voorkeursrichting niet a priori moeten worden verwaarloosd, maar geen vloeistof door de begrenzingen mag gaan.

4. Bewegingsvergelijking

Voor de opstelling van de bewegingsvergelijking is het assenstelsel zó gekozen, dat de overheersende stroomrichting in de richting van de x -as valt. De z -as is loodrecht hierop in het horizontale vlak gekozen. De potentiaal van de zwaartekracht is

$$\Omega = g \xi = g (-x \sin \vartheta + y \cos \vartheta)$$

$$\rho \dot{u} = - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$

de versnellingen loodrecht op de voorkeursrichting worden verwaarloosd:

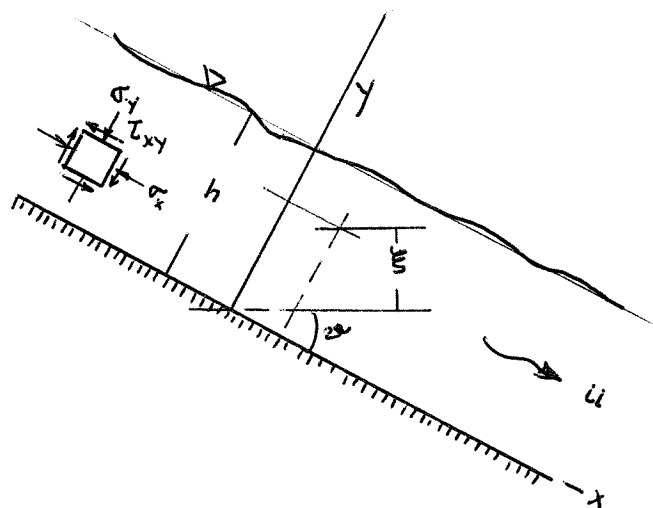
$$\rho \dot{v} \approx 0 \quad \text{en} \quad \rho \dot{w} \approx 0$$

aangenomen is $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = p$ en $\tau_{xy} = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial y}$; $\tau_{xz} = -\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}$

zodat

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho \frac{\partial \Omega}{\partial y}; \quad - \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \cos \vartheta; \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \approx 0 \quad \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \approx 0 \quad p = \rho g \cos \vartheta (h - y) + p_{\text{atm}}$$



$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \cos \nu \frac{h}{x}$$

$$-\frac{\partial^T xy}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right); \quad -\frac{\partial^T xz}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \text{zodat}$$

$$\boxed{\rho \dot{u} = \rho g \cos \nu \left(\operatorname{tg} \nu - \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\epsilon \frac{\partial u}{\partial z} \right)}$$

De "pente motrice" van Boussinesq is $\operatorname{tg} \nu - \partial h / \partial x = l$. In het volgende is $g \cos \nu = G$, langs de omtrek de schuifspanning $\tau = -\epsilon \partial u / \partial n$ en n de afstand tot de wand langs de naar binnen gerichte normaal positief gerekend. De bewegings vergelijking wordt

$$l - \frac{\dot{u}}{G} = -\frac{1}{G} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\epsilon}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\epsilon}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\}$$

(Boussinesq neemt zo klein dat $\cos \nu \approx 1$ en $\sin \nu \approx \operatorname{tg} \nu \approx l$).

5. Dimensieloze grootheden; Notaties

Als lengte maat neemt Boussinesq de hydraulische straal $R = A/P$ met P de natte omtrek langs de vaste wanden (dus zonder het vrije oppervlak) en A de oppervlakte van de doorsnede.

De dimensieloze natte omtrek $= \chi = P/R = A/R^2 = \sigma =$ de dimensieloze oppervlakte. In het geval dat de versnellingen ten opzichte van de wandwrijving overheersend zijn zou de gemiddelde diepte $H = A/B$ (met $B =$ breedte vrije waterspiegel) als lengte maat meer voor de hand liggen. Men krijgt dan, in plaats van de (dimensieloze) natte omtrek, de breedte $\beta = B/H = A/H^2 =$ dimensieloze oppervlakte.

In het volgende is R als maat aangehouden, omdat het gaat om een geleidelijk veranderende beweging met overheersende wrijvingsinvloeden.

Bij het bepalen van de invloed van de wrijving moet een omtreks integraal worden ingevoerd langs de gehele natte omtrek dus óók langs de vrije waterspiegel. De dimensieloze gehele natte omtrek wordt aangegeven met χ^1 .

Als referentiesnelheid neemt Boussinesq de snelheid op het laagste punt van de doorsnede. Hierna is v_* gebruikt en $v_f = v_* / \sqrt{GR}$.

De snelheden en versnellingen in het (y, z) -vlak worden geheel verwaarloosd.

De met R dimensieloos gemaakte coördinaten in de dwarsdoorsnede zijn $\eta = y/R$, $\xi = z/R$ en $\nu = n/R$. Alle ingevoerde maten R , H , v_* en \sqrt{GR} zijn onafhankelijk van (y, z) maar kunnen nog functies van (x, t) zijn. De dichtheid ρ is constant verondersteld.

6. Invloed wandwrijving

Om de bewegingsvergelijkingen over de dwarsdoorsnede A te kunnen integreren c.q. te middelen voert Boussinesq een aantal onbepaalde functies in.

Langs de omtrek stelt hij

$$\frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial u}{\partial v} = v_*^2 R f(\eta, \xi)$$

en over de doorsnede in het inwendige van de vloeistof

$$\frac{\varepsilon}{\rho} = \alpha v_* R f(\eta, \xi)$$

Hiermee is verondersteld, dat de verdeling van de schuifspanning langs de omtrek en de verdeling van de turbulente c.q. viskeuze wrijvingscoëfficiënt over de doorsnede gelijkvormig blijven bij verschillende waarden van (x, t) . De afhankelijkheid van (x, t) komt alleen in v_* en R tot uiting.

Ook is hiermee verondersteld, dat de inwendige wrijving isotroop is, zodat met slechts één kinematische wrijvingsgrootheid ε/ρ kan worden volstaan.

Het verband tussen de functies F en f wordt aan de omtrek gegeven door

$$\alpha F(\eta, \xi) \frac{\partial u}{\partial v} = v_* f(\eta, \xi).$$

Met de integraalstelling van Green

$$\iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right\} dy dz = - \oint_{\partial A} \left\{ \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right\} dP$$

in dimensieloze coördinaten en als gemiddelde over A :

$$\frac{1}{\sigma} \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\phi \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right) \right\} d\eta d\xi = - \frac{1}{\chi} \oint_{\chi} \left\{ \phi \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\} d\chi$$

in de substituties van de hiervoor ingevoerde onbepaalde functies kunnen de integraties worden uitgevoerd.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\dot{u}}{G} &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\varepsilon}{\rho} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} \frac{1}{G} = \\ &= - \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F \frac{\partial \frac{u}{v_*}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(F \frac{\partial \frac{u}{v_*}}{\partial \xi} \right) \right\} \alpha \frac{v_*^2}{GR} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\sigma} \iint \left(1 - \frac{\dot{u}}{G} \right) d\sigma = - \alpha v_f^2 \frac{1}{\sigma} \iint \left\{ \right\} d\sigma = + \alpha v_f^2 \frac{1}{\chi} \oint_{\chi} F \frac{\partial \frac{u}{v_*}}{\partial v} d\chi$$

$$= \boxed{1 - \frac{1}{\sigma} \iint \frac{\dot{u}}{G} d\sigma = v_f^2 \frac{1}{\chi} \oint_{\chi} f(\eta, \xi) d\chi}$$

Als ρv_*^2 de gemiddelde schuifspanning langs de wand is, kan men nog aan de functie $f(\eta, \xi)$ de voorwaarde opleggen

$$\frac{1}{\lambda} \oint_{\lambda} f(\eta, \xi) d\lambda = 1$$

als definitie vergelijking voor v_* .

In dimensies:

$$A \rho G l - \rho \iint_A \dot{u} dA = P \rho v_*^2$$

7. Invloed snelheidsverdeling

Om de invloed van de snelheidsverdeling te analyseren voert Boussinesq nog twee onbepaalde functies in:

$$\frac{u}{v_*} = 1 + K F_1(\eta, \xi) + \lambda F_2(\eta, \xi)$$

Ook in deze formule komt weer een gelijkvormigheidsveronderstelling voor verschillende (x, t) tot uitdrukking. De bedoeling was met F_1 de snelheidsverdeling voor de permanente eenparige beweging te geven en in F_2 de (klein veronderstelde) afwijkingen ervan tengevolge van de versnellingen te laten uitkomen.

Substitutie in de bewegingsvergelijking geeft:

$$1 - \frac{\dot{u}}{G} = -\alpha K v_f^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(F \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right) \right\} \\ - \alpha \lambda v_f^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(F \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \right) \right\}$$

F_1 wordt zo gekozen dat

$$-\alpha K \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(F \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right) \right\} = 1.$$

Bij de opstelling van de bewegingsvergelijking is al gesteld dat:

$$l = v_f^2 + \frac{1}{\sigma} \iint \frac{\dot{u}}{G} d\sigma \quad \text{zodat}$$

$$\sqrt{\lambda}^2 + \frac{1}{\sigma} \iint \frac{\dot{u}}{G} d\sigma - \frac{\dot{u}}{G} = \sqrt{\lambda}^2 - \alpha \lambda v_f^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left(F \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(F \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \right) \right\}$$

De nog willekeurig te kiezen coëfficiënten K en λ worden $K = 1/\alpha$ en $\lambda = 1/\alpha v_f^2$.
Deze coëfficiënten kunnen nog afhankelijk van (x, t) zijn.

Uit deze formule blijkt de betekenis die Boussinesq aan F_2 heeft gegeven: de uitwerking van de ongelijkmatige snelheidsverdeling op de versnellingstermen tengevolge van de inwendige weerstand.

Men krijgt dan de volgende twee vergelijkingen voor F_1 en F_2 .

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ F \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ F \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \right\} + 1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ F \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ F \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \right\} - \left\{ \frac{\dot{u}}{G} - \left(\frac{\dot{u}}{G} \right)_g \right\} = 0$$

Met de index g is het gemiddelde aangegeven: $\left(\frac{\dot{u}}{G} \right)_g \equiv \frac{1}{\sigma} \iint \frac{\dot{u}}{G} d\sigma$.

F_1 maal de tweede vergelijking van F_2 maal de eerste vergelijking afgetrokken geeft

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ F F_2 \frac{\partial F_1}{\partial \eta} - F F_1 \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \right\} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ F F_2 \frac{\partial F_1}{\partial \xi} - F F_1 \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \right\} + F_2 + F_1 \left\{ \frac{\dot{u}}{G} - \left(\frac{\dot{u}}{G} \right)_g \right\} = 0$$

Boussinesq stelt bij de toepassing van de stelling van Green

$$\frac{1}{\lambda} \oint_1 F \left\{ F_2 \frac{\partial F_1}{\partial v} - F_1 \frac{\partial F_2}{\partial v} \right\} d\chi = 0$$

In feite stelt hij aan F_2 een scherpere eis, namelijk dat $\partial F_2 / \partial \eta$ langs de omtrek nul zijn. Deze eis is niet nodig en niet realistisch omdat de schuifspanningsverdeling ook door het niet geheel permanent en eenparig zijn van de stroom wordt beïnvloed.

Daar F_1 en F_2 hoogstens op een constante na kunnen worden bepaald is voldoende $\partial F_2 / \partial \eta$ langs de omtrek nul te stellen. Altijd is dan te bereiken dat $\oint F_2 f d\chi = 0$ omdat al $1/\lambda \oint f d\chi = 1$ is gesteld. Men kan namelijk stellen

$$K \frac{1}{\lambda} \oint F F_2 \frac{\partial F_1}{\partial v} d\chi = \frac{1}{\lambda} \oint F F_2 \frac{\partial}{\partial v} (1 + K F_1 + \lambda F_2) d\chi = \frac{1}{\lambda} \oint F_2 F \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{u}{v_*} \right) d\chi =$$

$$= \frac{1}{\alpha \lambda} \oint F_2 f d\chi = 0$$

Met deze veronderstellingen is:

$$\left(F_2 \right)_g + \left(F_1 \frac{\dot{u}}{G} \right)_g - \left(\frac{\dot{u}}{G} \right)_g \cdot \left(F_1 \right)_g = 0.$$

Hiermee is $(F_2)_g$ te elimineren. Van deze uitdrukking wordt gebruik gemaakt om in de bewegingsvergelijking de gemiddelde snelheid in te voeren en de invloed van de versnelling op de wandweerstand te schatten.

8. Invoering gemiddelde stroomsnelheid

Per definitie is de gemiddelde stroomsnelheid $U = 1/\sigma \iint u d\sigma$.

Gesteld is

$$\frac{U}{v_*} = 1 + K F_1(\eta, \xi) + \lambda F_2(\eta, \xi)$$

zodat

$$\frac{U}{v_*} = 1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_g + \frac{1}{\alpha v_f^2} \left\{ (F_1)_g \left(\frac{\dot{u}}{G} \right)_g - (F_1 \frac{\dot{u}}{G}) \right\}$$

of

$$\left(\frac{U}{v_*} \right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_g \right)^2 (1 + \Lambda)^2 ; \quad \Lambda = \frac{1}{\alpha v_f^2} \frac{(F_1)_g \left(\frac{\dot{u}}{G} \right)_g - (F_1 \frac{\dot{u}}{G})_g}{1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_g}$$

Op dit punt maakt Boussinesq gebruik van de veronderstelling van een geleidelijk veranderende beweging door voor gemiddelden de overeenkomstige gemiddelden voor de permanente eenparige beweging in te voeren als schatting. Λ wordt daarbij klein ten opzichte van 1 verondersteld, zodat $1/(1 + \Lambda)^2 \approx 1 - 2\Lambda$ of

$$v_*^2 \approx \frac{U^2}{\left(1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_g \right)^2} (1 - 2\Lambda)$$

Voor een permanente eenparige beweging (aangeduid met de extra index p) geldt bij dezelfde "pente motrice" l

$$\bar{v}_{*p} = G R l \quad U_p^2 = C^2 R l \quad \frac{U_p^2}{v_{*p}^2} = \frac{C^2}{G} = \left(1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_{gp} \right)$$

Hiermee is $\frac{U_p^2}{\left(1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_{gp} \right)^2} \approx \frac{G}{C^2} U^2$ gesteld.

In de term $-2 \lambda U^2 / (1 + 1/\alpha (F_1)_g)^2$ wordt $U^2 / (1 + 1/\alpha (F_1)_g)^2 v_*^2 \approx 1$ als de permanente beweging.
Verder geldt daarvoor

$$\frac{U_p}{v_{*p}} = 1 + \frac{1}{\alpha} F_{1p} \quad U_p - v_{*p} = v_{*p} \frac{1}{\alpha} F_{1p}$$

$$U_p = v_{*p} \left\{ 1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_{pg} \right\}$$

Hieruit als benadering:

$$F_{1p} = \alpha \frac{1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_{pg}}{U_p} (U_p - v_{*p}) \approx F_1$$

maar:

$$U_p \dot{u} \approx u \dot{u} \equiv u \frac{D_u}{Dt} \quad u \frac{\partial u}{\partial t} + u^2 \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial t} + u \frac{\partial u^2}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{D_u^2}{Dt}$$

Zodat

$$-2 \lambda \frac{U^2}{\left(1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_g\right)^2} = -2 \frac{U^2}{\left(1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_g\right)^2 v_*^2} \cdot \frac{GR}{\alpha} \frac{(F_1)_g \left(\frac{\dot{u}}{G}\right)_g - (F_1)_g \left(\frac{\dot{u}}{G}\right)_g}{1 + \frac{1}{\alpha} (F_1)_g} \approx$$

$$\approx -2 \cdot 1 \cdot \frac{GR}{U_p} \left\{ (U_p - v_{*p}) \left(\frac{\dot{u}}{G}\right)_g - (U_p \frac{\dot{u}}{G})_g + v_{*p} \left(\frac{\dot{u}}{G}\right)_g \right\} \approx$$

$$\approx -2R \left\{ \left(\frac{\dot{u}}{G}\right)_g - \frac{1}{2U_p} \left(\frac{Du^2}{Dt}\right)_g \right\}.$$

Men krijgt dan uiteindelijk:

$$v_*^2 \approx \frac{G}{C^2} U^2 + \frac{R}{U} \left(\frac{Du^2}{Dt}\right)_g - 2R \left(\frac{Du}{Dt}\right)_g \text{ en}$$

$$I = \frac{v_*^2}{GR} + \frac{1}{G} \left(\frac{Du}{Dt}\right)_g = \frac{U^2}{C^2 R} + \frac{1}{G} \left\{ \frac{1}{U} \left(\frac{Du^2}{Dt}\right)_g - \left(\frac{Du}{Dt}\right)_g \right\}$$

als vergelijking van Chézy uitgebreid voor de geleidelijk veranderende beweging.

9. Correctiefactoren bij invoering gemiddelde snelheid

In de uitgebreide vergelijking moeten de grootheden

$$\left(\frac{Du^2}{Dt}\right)_g \quad \text{en} \quad \left(\frac{Du}{Dt}\right)_g$$

nog in de gemiddelde snelheid U worden uitgedrukt.
Hiervoor is aangetoond dat

$$\iint \frac{D\bar{\Phi}}{Dt} dy dz = \frac{\partial}{\partial t} \iint \bar{\Phi} dy dz + \frac{\partial}{\partial x} \iint u \bar{\Phi} dy dz.$$

Voor $\bar{\Phi}$ wordt achtereenvolgens 1, u en u^2 ingevoerd.

$$\bar{\Phi} = 1 \text{ geeft de continuïteitsvergelijking } \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial(UA)}{\partial x} = 0.$$

$$\bar{\Phi} = u \text{ geeft } A (\dot{u})_g = \frac{\partial}{\partial t} (AU) + \frac{\partial}{\partial x} \iint u^2 dy dz.$$

$$\bar{\Phi} = u^2 \text{ geeft } A \left(\frac{Du^2}{Dt}\right)_g = \frac{\partial}{\partial t} \iint u^2 dy dz + \frac{\partial}{\partial x} \iint u^3 dy dz.$$

Boussinesq voert hiervoor de volgende correctiefactoren in:

$$1 + \beta = \frac{1}{A} \iint \left(\frac{u}{U}\right)^2 dy dz \quad \text{en} \quad \alpha = \frac{1}{A} \iint \left(\frac{u}{U}\right)^3 dy dz$$

zodat:

$$\left(\frac{Du}{Dt}\right)_g \equiv (\dot{u})_g = \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + \beta) U \right\} - \beta \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t}$$

want

$$\frac{1}{A} \frac{\partial(UA)}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{en}$$

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ AU^2 \iint \frac{u^2}{U^2} \frac{dy dz}{A} \right\} = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + \beta) AU^2 \right\} =$$

$$= (1 + \beta) \frac{U}{A} \frac{\partial(UA)}{\partial x} + U \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + \beta) U \right\} = - (1 + \beta) \frac{U}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (1 + \beta) U \right\}$$

evenzo is:

$$\left(\frac{Du^2}{Dt}\right)_g = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (1 + \beta) U^2 \right\} + U \frac{\partial}{\partial x} (\alpha U^2) - (\alpha - 1 - \beta) \frac{U^2}{A} \frac{\partial A}{\partial t}$$

Hiermee worden de vergelijkingen:

$$v_*^2 = \frac{G}{C^2} U^2 + 2GR(\alpha - 1 - \beta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{U^2}{2G} \right) + 2\beta R \frac{\partial U}{\partial t} +$$

$$+ (1 + 3\beta - \alpha) \frac{RU}{A} \frac{\partial A}{\partial t} + RU \left\{ U \frac{\partial}{\partial x} (\alpha - 2\beta) + \frac{\partial \beta}{\partial t} \right\}$$

en

$$1 = \frac{U^2}{C^2 R} + (2\alpha - 1 - \beta) \frac{\partial}{\partial x} \frac{U^2}{2G} + (1 + 2\beta) \frac{1}{G} \frac{\partial U}{\partial t} +$$

$$+ (1 - \alpha + 2\beta) \frac{U}{AG} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{U}{G} \left\{ U \frac{\partial}{\partial x} (\alpha - \beta) + \frac{\partial \beta}{\partial t} \right\}$$

In het algemeen zal α van de orde 1 zijn en β klein blijven, zodat $1 - \alpha + 3\beta$ en $1 - \alpha + 2\beta$ eveneens kleine getallen zijn.

Bij de geleidelijk veranderende beweging zullen ook $\partial A / \partial t$ en de variaties van α en β naar afstand en tijd volgens Boussinesq te verwaarlozen zijn.

Stelt men $u = U + u'$ zodanig dat $1/A \iint u' dy dz = 0$ is, dan is

$$1 + \beta = \frac{1}{A} \iint \left(1 + \frac{u'}{U}\right)^2 dy dz = 1 + \frac{1}{A} \iint \left(\frac{u'}{U}\right)^2 dy dz$$

$$\alpha = \frac{1}{A} \iint \left(1 + \frac{u'}{U}\right)^3 dy dz = 1 + \frac{3}{A} \iint \left(\frac{u'}{U}\right)^2 dA + \frac{1}{A} \iint \left(\frac{u'}{U}\right)^3 dA = 1 + 3\beta + \gamma$$

$$\alpha - 1 - \beta = \beta + \gamma \quad \text{en} \quad 2\alpha - 1 - \beta = 1 + 5\beta + \gamma = \alpha'$$

10. Invloed correctiefactoren op karakteristieke snelheid

Bij berekeningen met karakteristieken wordt een gemiddelde snelheid ingevoerd meestal zonder de aangegeven correctiefactoren, waardoor een onnauwkeurigheid wordt ingevoerd.

De uitgebreide vergelijking van Chézy kan met verwaarlozing van de variaties in de correctiefactoren met (x, t) geschreven worden als

$$1 = \frac{U^2}{C^2 R} + \alpha' \frac{U}{G} \frac{\partial U}{\partial x} + \delta \frac{1}{G} \frac{\partial U}{\partial t} + \xi \frac{U}{AG} \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\alpha' = 1 + 5\beta + \gamma; \quad \delta = 1 + 2\beta; \quad \xi = -\beta - \gamma; \quad 1 = \text{tg } \vartheta - \frac{\partial h}{\partial x}$$

Met $W = \frac{U^2}{C^2 R} - \text{tg } \vartheta$ krijgt men in het twee-dimensionale geval (dus $R \approx h$)

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \xi \frac{U}{Gh} \frac{\partial h}{\partial t} + \alpha' \frac{U}{G} \frac{\partial U}{\partial x} + \delta \frac{1}{G} \frac{U}{t} + W = 0$$

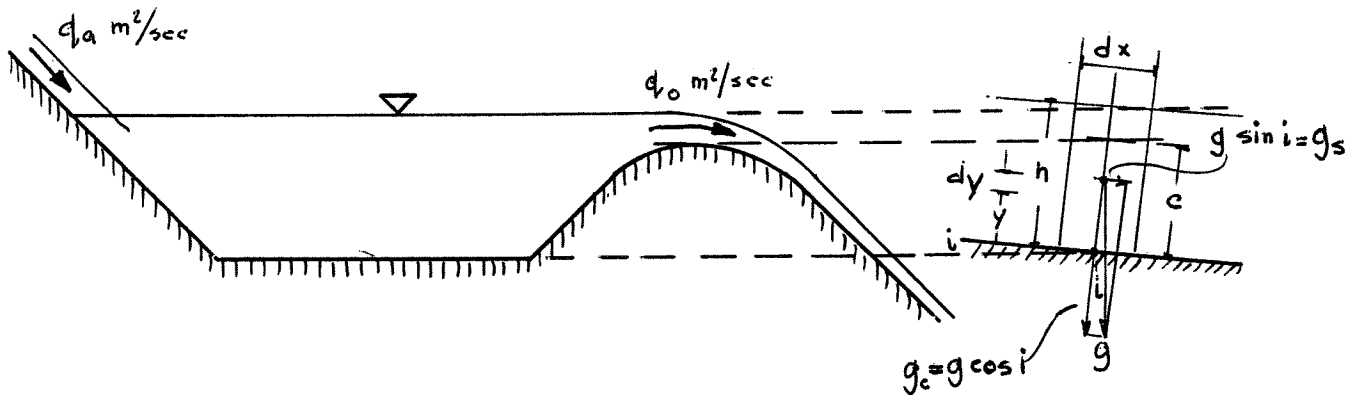
$$U \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

Beschouwt men β en γ als klein ten opzichte van één dan krijgt men als karakteristieke snelheid:

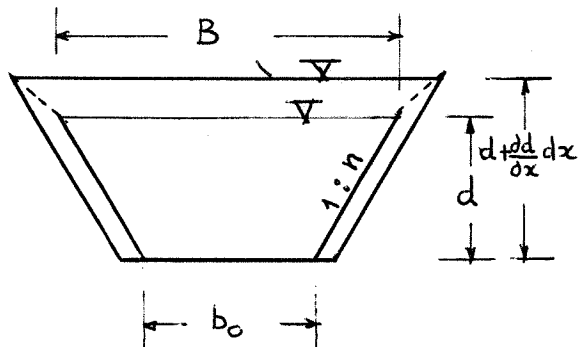
$$\frac{dx}{dt} \approx (1 + 2\beta + \gamma) U \pm \sqrt{(1 - 2\beta) Gh + (\beta + \gamma) U^2}$$

De correctiefactoren kunnen dus nog een merkbare invloed hebben.

GELEIDELIJK VERANDERLIJKE BEWEGING MET ZIJDELINGSE AAN- EN AFVOER



oppervlakte doorsnede	A	m ²
gemiddelde stroomsnelheid	v	m/sec
debiet	Q	m ³ /sec
natte omtrek	P	m
hydraulische straal	R = A/P	m
zijdelingse afvoer	q _o	m ² /sec
zijdelingse aanvoer	q _a	m ² /sec
correctie coëfficiënt ongelijkm. snelh. verd.		
voor snelheidshoogte	β	
voor afvoer	δ	
verhang bodem	i	rad.
waterspiegel breedte	B = ∂A / ∂h	m



Als nulvlak genomen het vlak door de bodem.
 Geharceerd = projectie wand over dx op dwarsdoorsnede.

Permanente en over de lengte in de stroomrichting geleidelijk veranderende beweging met zijdelingse aan- en afvoer.

In verschillende handboeken worden formules gegeven voor zijdelingse overlaten en kanalen met zijdelingse aanvoer. De daarop betrekking hebbende formules worden in deze nota afgeleid voor de permanente toestand. Aangenomen wordt, dat in de richting van de stroom de verschillende grootheden w.o. de oppervlakte van de kanaaldoorsnede slechts geleidelijk veranderen.

1. Algemene formule

De bewegingsvergelijking gemiddeld over de doorsnede van het kanaal is

$$\begin{aligned}\beta v v_x &= - p_x / \rho - \Omega_x - gW \\ 0 &= - p_y / \rho - \Omega_y\end{aligned}$$

De x-as is in de richting van de kanaalbodem en de y-as loodrecht daarop. De potentiaal Ω van de zwaartekracht is dan $\Omega = - yx \sin i + gy \cos i$.

Uit de tweede vergelijking, waarin de verticale (langs de y-as) snelheden en versnellingen zijn verwaarloosd, volgt dat in de richting van de y-as de hydrostatische wet bij benadering kan worden aangenomen. De hoek tussen de waterpiegel in de richting van de stroom en de bodem wordt daarbij klein verondersteld; de helling van de bodem ten opzichte van het horizontale vlak daarentegen voorlopig niet.

$$p = -\rho \int \Omega_y dy = -\rho g y \cos i + C = \rho g (h - y) \cos i$$

voor $y = h$ is $p = 0$ zodat de integratie constante $C = \rho g h \cos i$. De weerstandsterm heeft de gedaante van de formule van Chézy $W = v^2 / C^2 R$.

De continuïteitsvergelijking wordt voor de permanente beweging

$$q_o - q_a + dQ/dx = 0$$

2. Evenwicht van een moot dx

I Hydrostatisch drukverhang

$$\frac{d}{dx} \rho g_c \int_0^h (h - y) \cdot b(y) \cdot dy = \rho g_c \left[\int_0^h \frac{dh}{dx} + \int_0^h (h - y) \frac{db}{dx} dy \right]$$

N.B. in het algemeen is de verwisseling van de volgorde van integreren en differentiëren naar een parameter niet mogelijk. De algemene formule daarvoor is

$$F(\alpha, \dots) = \int_{\alpha}^{b(\alpha)} f(\alpha, y) dy \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \int_{\alpha}^b \frac{\partial f}{\partial \alpha} dy + \frac{\partial b}{\partial \alpha} f(\alpha, b) - \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha} f(\alpha, \alpha)$$

In dit geval van de hydrostatische druk is de eerste correctie term nul, omdat de factor $h-y$ voor $y = h$ nul is, en de tweede is nul, omdat de ondergrens niet van de parameter x afhangt.

Deze hydrostatische druk is in de richting van $-x$.

De druk op de zijwanden van de moot dx heeft nog een component in de richting van de $+x$. Deze druk is weer ρg maal het statische moment van het geharceerde stuk op de figuur om de waterspiegel, en is

$$- \rho g_c \int_0^h (h - y) \frac{\partial b}{\partial z} dy$$

wat wegvalt tegen de tweede term van de hydrostatische overdruk op de eindvlakken. De eerste term is

$$\rho g_c \frac{dh}{dx} \int_0^h b(y) dy$$

daar dh/dx niet van y afhangt. De integraal geeft juist de oppervlakte A , zodat het hydrostatische drukverhang wordt:

$+ \rho g_c A dh/dx$ ("verhang" positief genomen in de $(-x)$ -richting).

II. Impulsdrukverhang

Op dezelfde wijze als voor het hydrostatische verhang zou de impulsdruk kunnen worden bewerkt. Daar de snelheid in het kwadraat voorkomt treden bij de integratie over de doorsnede complicaties op die zijn ondergebracht in de correctiefactor β . Voor de afleiding en de schatting van β wordt verwezen naar het werk van Boussinesq (zie ook L.J. Tison, Cours d'hydraulique dl II 1953, blz. 12).

Hier wordt aangenomen, dat β niet merkbaar van x afhangt. De impulsdruk op een doorsnede is dan $\rho \beta v^2 A$. Het verhang ervan is dan

$$\frac{d}{dx} (\rho \beta v^2 A) = \rho \beta A v \frac{dv}{dx} + \rho \beta v \frac{d(Av)}{dx}$$

De splitsing van $v^2 A$ in de twee factoren $vA = Q$ en v is gedaan voor de toepassing van de continuïteitsvergelijking

$$q_o - q_a + dQ/dx = 0$$

Het impulsverhang wordt dus

$$+ \rho \beta A \frac{d}{dx} \left(\frac{v^2}{2} \right) - \rho \beta (q_o - q_a)$$

d.i. resultante in $(-x)$ -richting.

III Wrijvingsverhang

De wandschuifspanning is gemiddeld $\tau = \rho g R v^2 / C^2 R$ met $R = A/P$ en per lengte-eenheid werkend over een oppervlakte P krijgt men voor het wrijvingsverhang

$$\rho g (A/P) (v^2 / C^2 R) P = \rho g v^2 A / C^2 R.$$

In feite is de wrijvings(eigenlijk gladheids-)factor $C/g^{1/2}$ zodat deze g bij sterke hellingen niet verandert.

IV Impulsverhang door aan- en afvoer

Bij het verlaten of binnenstromen in het kanaal kan het water een snelheidscomponent in de richting van de x -as hebben. Met de snelheidscomponent loodrecht op de x -as ontstaat een impulschuifspanning.

Aangenomen wordt dat het binnenkomende water geen snelheidscomponent in de x -richting heeft. Het uitstromende water zal in die richting een snelheid δv hebben in verband met de gemiddelde snelheid v . De factor δ kan groter of kleiner dan één zijn.

Per lengte eenheid ontstaat een schuifkracht van

$$\rho \delta v q_o = \rho \int_{\text{omtrek}} \delta v u dP \approx \rho \delta v \int_{\text{omtrek}} u dP$$

De onzekerheden over de snelheidsverdeling en de begrenzing van het kanaalprofiel bij de overlaat zijn in δ ondergebracht. Ook de afwerking aan de einden en eventuele tussen schotten hebben invloed.

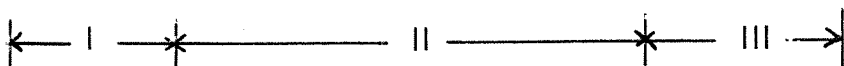
V Zwaartekrachtverhang

In de richting van de x -as is per lengte eenheid de component van het gewicht $-\rho g_s A$.

3. Bewegingsvergelijking

De volledige bewegingsvergelijking in de x -richting wordt met de vijf genoemde onderdelen

$$\rho g_c A \frac{dh}{dx} + \beta \rho A \frac{d}{dx} \frac{v^2}{2} - \beta \rho v (q_o - q_a) + \rho g A \frac{v^2}{C^2 R} +$$



$$+ \delta \rho v q_o - \rho g_s A = 0$$



Deling door $\rho g_c A$ geeft dan:

$$\frac{dh}{dx} + \beta \frac{d}{dx} \frac{v^2}{2g_c} + \frac{g}{g_c} \frac{v^2}{C^2 R} - \frac{g_s}{g} - (\beta - \delta) \frac{v q_o}{g_c A} + \beta \frac{v q_a}{g_c A} = 0$$

Vele auteurs geven de voorkeur aan een deling door g in plaats van g_c . Afhankelijk van het doel, waarvoor de vergelijking wordt gebruikt, en van de wijze, waarop de in de vergelijking voorkomende grootheden a priori bekend zijn, kan de vergelijking in andere vormen worden geschreven.

3.1. Verloop waterspiegel

In vele gevallen moet het verloop van de waterspiegel worden berekend. Hiervoor moet de snelheidshoogte $v^2/2g_c$ worden geëlimineerd met $v = Q/A$.

$$\beta \frac{d}{dx} \frac{v^2}{2g_c} = \beta \frac{d}{dx} \frac{Q^2}{2g_c A^2} = \beta \frac{dQ}{dx} \cdot \frac{Q}{g_c A^2} - \beta \frac{\partial A}{\partial x} \frac{Q^2}{g_c A^3} - \beta \frac{Q^2}{g_c A^3} \frac{\partial A}{\partial h} \cdot \frac{dh}{dx}$$

Bij de differentiatie naar x van A moet er rekening mee worden gehouden, dat A zowel van h als expliciet nog van x kan afhangen. De partiële differentiatie $\partial A/\partial x$ betekent dus de verandering van A met x als h constant wordt gehouden; $\partial A/\partial h = B$ dus niets anders dan de breedte van de waterspiegel.

In zuiver prismatische kanalen is $\partial A/\partial x = 0$. Voor dQ/dx kan men weer $-(q_o - q_a)$ zetten en ter vereenvoudiging stelt men weer $Q/A = V$; de laatste term geeft dan het Froude-getal maal dh/dx .

Met deze substituties wordt de bewegingsvergelijking:

$$\frac{dh}{dx} \left(1 - \beta \frac{v^2}{g_c A/B}\right) = (2\beta - \delta) \frac{v q_o}{g_c A} - 2\beta \frac{v q_a}{g_c A} - \frac{g}{g_c} \frac{v^2}{C^2 R} + \frac{g_s}{g} + \beta \frac{v^2}{g_c A} \frac{A}{s}$$

In deze vorm, met de aanvullingen voor aan- en afvoer en voor het verloop van het profiel, komt de vergelijking nog het meest voor als uitgangspunt voor de berekening van stuwkrommen.

3.2. Zijdelingse overlaat

Voor het dimensioneren van een zijdelingse overlaat ($q_a = 0$, $q_o \neq 0$) kunnen voor schattingen in het merendeel van de gevallen de volgende vereenvoudigingen worden ingevoerd: $\beta = \delta = 1$; $v^2/C^2 R$ te verwaarlozen over de lengte van het kanaal langs de overlaat; meestal $\partial A/\partial s = 0$; $g_s/g_c = \text{tg } i = 0$. Van de bewegingsvergelijking blijft dan over:

$$\frac{dh}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{v^2}{2g} = 0 \quad \text{of} \quad h + \frac{v^2}{2g} = H = \text{constant.}$$

(vereenvoudiging of hypothese van de Marchi)

Alle grootheden kunnen als functie van h worden gegeven:

$$v^2 = 2g (H - h) = 2g (H - c - h + c)$$

$$q_o = \mu (2g)^{1/2} (h - c)^{3/2}; \quad \mu = 2 \text{ m}/3^{3/2} = 0,385 \text{ m}$$

$$B = B_o + n (h - c)$$

(m = afvoercoëfficiënt)

B_o = breedte waterspiegel ter hoogte c
boven de bodem, de bassin overlaat

n = de maat waarin B met $(h - c)$ verandert.

$$A = A_o + B_o (h - c) + n^2 (h - c)^2/2$$

De beëindiging van het dwarsprofiel bij de overlaat is a priori niet scherp aan te geven; het staat niet vast welk deel boven de bassin nog invloed heeft op de doorgaande stroom

$$\frac{dh}{dx} = \frac{v q_o / gA}{1 - v^2 B / gA} = \frac{2\mu (H - c - h + c)^{1/2} (h - c)^{3/2}}{A_o + B_o (h - c) + n(h - c)^2/2 - 2 (B_o + n(h - c)) (H - c - h + c)}$$

$$\frac{dx}{dh} = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{A_o - 2 B_o (H - c)}{(h - c) \left\{ (H - c)(h - c) - (h - c)^2 \right\}^{1/2}} + \frac{3 B_o - 2 n (H - c)}{\left\{ (H - c)(h - c) - (h - c)^2 \right\}^{1/2}} + \frac{(h - c) 5 n / 2}{\left\{ (H - c)(h - c) - (h - c)^2 \right\}^{3/2}} \right]$$

Substituties: $(h - c) / (H - c) = \eta$; $A_o / B_o (H - c) = d_o$; $B_o / (H - c) = b_o$.

De integratie wordt uitgevoerd met als bovengrens x_{\max} waar het doorgaande debiet nul is geworden. De uitkomst is:

$$x_{\max} - x = \frac{H - c}{2\mu} \left[(3b_o - 3n/4) \arccos(2\eta - 1) + 2b_o (d_o - 2)(\eta - \eta^2)^{1/2} \eta + 5n(\eta - \eta^2)^{1/2} \right]$$

Men krijgt dan $x_{\max} - x = f(h)$ waarin $f(h)$ zowel positief als negatief kan zijn al naar de waterspiegel langs de overlaat op- of afloopt. De lengte van de overlaat is dan

$$x_2 - x_1 = (x_{\max} - x_1) - (x_{\max} - x_2) = f(h_1) - f(h_2)$$

Als volgende vereenvoudiging kan $n=0$ zijn (kanaal met verticale wand). De effectieve breedte is de breedte die het Froude getal $v^2 B/gA$ bepaalt, waarin $(gA/B)^{1/2}$ de voortplantingssnelheid van de elementaire storing in de x -richting is en $\partial A/\partial h = B$. Met $n = 0$ wordt de formule:

$$x_{\max} - x = \left\{ 3 \arccos(2\eta - 1) + 2(d_0 - 2)(1/\eta - 1)^{1/2} \right\} B_0/2\mu.$$

De tweede term tussen $\left\{ \right\}$ wordt bepaald door $(d_0 - 2)$. Als $d_0 = 2$ is de gemiddelde diepte $A_0/B_0 = 2(H - c)$ juist ter hoogte van de bij de energielijn hoogte H critieke diepte.

3.3. Zijdelingse aanvoer

Bij zijdelingse aanvoer ($q_a \neq 0$, $q_o = 0$) kan de in het kanaal uitkomende straal nog een snelheidscomponent in de x -richting hebben. Deze component wordt bepaald door de omstandigheden bovenstrooms van de straal en staat in geen enkel verband met de stroming in het kanaal. Meestal wordt deze component verwaarloosd.

Ook wordt meestal aangenomen $\beta = 1$; $v^2/C^2R = 0$; $\text{tgi} = 0$; $\partial A/\partial s = 0$.

De bewegingsvergelijking wordt dan beperkt tot

$$dh/dx + d(v^2/2g)/dx + v q_a/gA = 0$$

Voorts wordt q_a constant aangenomen zodat $dA/dx = q_a$, $Q = q_a x = vA$.

Om de vergelijking op te lossen voert men een veronderstelling in over het verloop van één van de grootheden met x bijvoorbeeld $v = kx^p$ (J. Guthrie Brown, Hydro-electric engineering practice, 1958 blz. 725). De parameters k en p kunnen achteraf met een optimalisatie beschouwing worden bepaald.

Over het algemeen zijn de aangegeven vereenvoudigingen in praktische gevallen (opvangkanalen van overlaten langs stuwmeren) niet geoorloofd en ook niet nodig.

Bij de oplossing van de differentiaal vergelijking na invoering van een van de grootheden (waterdiepte of oppervlakte dwarsprofiel of stroomsnelheid) als functie van x krijgt men onvermijdelijk ook de bodemhelling i als functie van x . Zolang $\cos i$ bij goede benadering één kan worden gesteld kunnen verloop van bodem en waterspiegel zonder veel moeite als gesloten oplossingen van de differentiaal vergelijking worden gekregen. Daar in tegenstelling tot de zijdelingse overlaat hier de x als onafhankelijke veranderlijke wordt genomen in plaats van h , is de eerste vorm van de differentiaalvergelijking § 3 de best bruikbare.

Uit dezelfde vergelijking zijn ook grafische en numerieke rekenwijzen af te leiden.



HELLENDE GOTEN- SCHIETENDE STROOM IN PRISMATISCH KANAAL;
ONDERZOEK STABILITEIT -

Het volgende is in vereenvoudigde en geschematiseerde vorm ontleend aan:

R.F. Dressler: Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels; Comm. on Pure and Appl. Math., vol. II, nos 2-3, June - September 1949.

Andere publicaties over dit onderwerp zijn:

R.F. Dressler and F.V. Pahle: Resistance effects on hydraulic instability; Comm. Pure and App. Math., vol. XI p. 93-96 (1953).

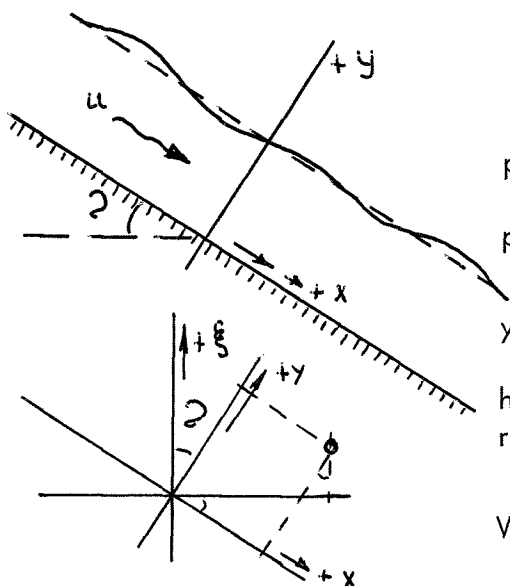
R.F. Dressler: Unsteady non-linear waves in sloping channels; Proc. Roy. Soc., A, vol. 247, p. 186-198, 1958.

J.C. Schönfeld: Distortion of long waves; equilibrium and stability; proc. U.G.G.I. tome IV p. 140-157, 1951.

Beschrijvingen van proeven en praktische ontwerpvoorschriften zijn in vele publicaties te vinden, onder andere in

A.J.M. Harrison: Design of channels for supercritical flow; paper no 6952, proc. Instn. civ. Engrs., vol. 35, p. 475-490, November 1966.

J.H. Hilgen: Berekening van hellende goten uitgaande van de formule van Gauckler-Manning; De Ing. in N.-J. 4, no 1, blz. II 1-20, jan. 1937.



$$\text{bew. verg. } u_t + \alpha u u_x = -\frac{1}{\rho} p_x - \frac{\Omega}{x} - gW$$

$$v_t + uv_x + v v_y = 0 = -\frac{1}{\rho} p_y - \frac{\Omega}{y}$$

$$\text{pot. zw. kr. } \Omega = -gx \sin \vartheta + gy \cos \vartheta = g\xi$$

$$p = -\rho \int \frac{\Omega}{y} dy = -\rho g y \cos \vartheta + C$$

$$y = h \quad p = 0 \quad C = \rho g h \cos \vartheta$$

hydrostatische drukverdeling loodrecht op de stroomrichting.

$$W = \frac{u|u|}{C^2 h} \quad \text{of meer algemeen } \lambda W = \frac{u^n}{h^m}$$

zodat bew. verg. wordt:

$$u_t + \alpha u u_x + g h_x \cos \vartheta = g(\sin \vartheta - w)$$

en de continuïteitsvergelijking

$$(uh)_x + h_t = 0$$

De stabiliteit van de stroom kan worden onderzocht op verschillende manieren; hier is de methode van de kleine storingen en, ten opzichte van een meebewegend assenstelsel, de methode van de onbepaaldheid van h_x gevolgd, zoals bij de vaststelling van de critieke diepte c.q. stroomsnelheid.

Gesteld is

$$u = U + u' (x, t); \quad h = H + h' (x, t)$$

zodat

$$u_t = u'_t; \quad u_x = u'_x; \quad h_x = h'_x$$

terwijl $u' u_x$ en $u' h'_x$ zijn verwaarloosd.

$$W = \lambda \frac{u^n}{h^m} = \lambda \frac{U^n}{H^m} \left\{ 1 + \frac{u'}{U} n - \frac{h'}{H} m \right\} \quad \lambda \frac{U^n}{H^m} = W_0$$

Metaangegeven verwaarlozingen en weglating accenten worden de vergelijkingen:

$$u_t + \alpha U u_x + g h_x \cos \vartheta = g \sin \vartheta - g W_0 \left\{ 1 + \frac{u}{U} n - \frac{h}{H} m \right\}$$

$$H u_x + U h_x + h_t = 0$$

In de ongestoorde stroom is $0 = g (\sin \vartheta - W_0)$, zodat de storingsvergelijking te schrijven is als

$$u_t + \alpha U u_x + g W_0 n \frac{u}{U} = g W_0 m \frac{h}{H} - g \cos \vartheta h_x$$

$$H u_x = -h_t - U h_x$$

$$H u_{xx} = h_{xt} - U h_{xx}$$

$$u_{txx} + \alpha U u_{xx} + g W_0 n \frac{u_x}{U} = g \frac{W_0 m}{H} - g \cos \vartheta h_{xx}$$

$$u_{tt} + \alpha U u_{xt} + g \frac{W_0 n}{U} u_t = g \frac{W_0 m}{H} h_t - g \cos \vartheta h_{xt}$$

Uit deze vergelijkingen zijn h en de afgeleiden ervan te elimineren:

$$\begin{aligned} & u_{tt} + U u_{tx} + \alpha U (u_{xt} + u_{xx}) + g \frac{W_0 n}{U} (u_t + U u_x) = \\ & = g \frac{W_0 m}{H} (h_t + U h_x) - g \cos \vartheta (h_{xt} + U h_{xx}) = \\ & = -g \frac{W_0 m}{H} H u_x + g H \cos \vartheta u_{xx} \end{aligned}$$

Men krijgt dan een storingsvergelijking van de tweede orde met constante coëfficiënten

$$u_{tt} + (\alpha + 1) U u_{xt} + \left\{ \alpha U^2 - g H \cos \varrho \right\} u_{xx} + g W_o (m + n) u_x + g \frac{W_o n}{U} u_t = 0$$

Voor de stroomsnelheid is aangenomen $u = u_o e^{\gamma t + i \beta x}$
 Als γ een positief reëel deel heeft is de stroom onstabiel

$$\gamma^2 + (\alpha + 1) U \gamma \beta + (\alpha U^2 - g H \cos \varrho) (-\beta^2) + g W_o (m + n) i \beta + g W_o \frac{n}{U} \gamma = 0$$

Voor de permanente beweging is gesteld $g \lambda U^n / H^m = g W_o = g \sin \varrho$ (in het volgende is $\alpha = 1$ gesteld)

$$\gamma^2 + 2 \left\{ \frac{ng W_o}{2U} + i \beta U \right\} \gamma - (U^2 - g H \cos \varrho) \beta^2 + \left\{ ng W_o + mg \sin \varrho \right\} i \beta = 0$$

$$\gamma = - \left\{ \frac{ng W_o}{2U} + i \beta U \right\} \pm \sqrt{\left\{ \frac{ng W_o}{2U} + i \beta U \right\}^2 + (U^2 - g H \cos \varrho) \beta^2 - \left\{ n + m \right\} W_o g \beta}$$

onder de worteltekens staat:

$$\left(\frac{ng W_o}{2U} \right)^2 - \beta^2 U^2 + \frac{ng W_o}{U} \beta U i + \beta^2 U^2 - \beta^2 g H \cos \varrho - ng W_o \beta i - mg W_o \beta i$$

dus:

$$\gamma = - \left\{ \frac{ng W_o}{2U} + i \beta U \right\} \pm \sqrt{\left(\frac{ng W_o}{2U} \right)^2 - \beta^2 g H \cos \varrho - i mg W_o \beta}$$

Stel dat de uitdrukking onder het wortelteken de gedaante heeft van

$$\left(\frac{ng W_o}{2U} + \varepsilon + i \delta \right)^2 \quad \text{dan is:}$$

$$\left(\frac{ng W_o}{2U} \right)^2 - \beta^2 g H \cos \varrho + i mg W_o \beta = \left(\frac{ng W_o}{2U} + \varepsilon \right)^2 - \delta^2 + i \cdot 2 \delta \left(\frac{ng W_o}{2U} + \varepsilon \right)$$

$$\delta = - \frac{mg W_o \beta}{\frac{ng W_o}{U} + 2\varepsilon} = - \frac{m}{n} U \beta \frac{1}{1 + 2\varepsilon \frac{U}{ng W_o}} = - \frac{m}{n} U \beta \eta$$

hierin is $\varepsilon > 0$ en $|\eta| < 1$

$$\delta^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 U^2 \beta^2 \eta^2 = \beta^2 g H \cos \varrho + \varepsilon^2 + \varepsilon \frac{n g W_o}{U}$$

$$U^2 = \left(\frac{n}{m}\right)^2 g H \cos \varrho \frac{1}{\eta^2} + \left(\varepsilon^2 + \varepsilon \frac{n g W_o}{U}\right) \left(\frac{n}{m}\right)^2 \frac{1}{\beta^2 \eta^2}$$

De beweging is onstabiel als

$$U^2 > \left(\frac{n}{m}\right)^2 g H \cos \varrho$$

Volgens de formule van Chézy is $n = 2$ en $m = 1$ met $\lambda = 1/C^2$ en volgens de formule van Strickler $n = 2$, $m = k/3$ en $\lambda = g/k$ verder is $U^2 = 1/H^m \sin \varrho$ met $n = 2$ zodat

$$\frac{1}{\lambda} H^m \sin \varrho > \left(\frac{2}{m}\right)^2 g H \cos \varrho \quad \text{of} \quad \text{tg } \varrho > \lambda g H^{1-m} \left(\frac{2}{m}\right)^2$$

als voorwaarde voor onstabieleit.

Uit deze formule blijkt, dat voor het optreden van onstabieleiten $m \neq 0$ moet zijn, dat wil zeggen dat de weerstand ook van de waterstand moet afhangen.

Tot dezelfde conclusie komt men door als teken van onstabieleit de exponent onbepaald te nemen.

Elimineert men uit de vergelijking de u dan krijgt men bijvoorbeeld

$$h_{tt} + 2U h_{tx} + \left\{ U^2 - g H \cos \varrho \right\} h_{xx} + g(n+m) W_o h_x + g \frac{n W_o}{U} h_t = 0$$

Nagegaan moet worden of een oplossing kan bestaan van de vorm $h_o e^{k(x-ct)}$. Substitutie geeft:

$$k^2 c^2 - 2U k^2 c^2 + \left\{ U^2 - g H \cos \varrho \right\} k^2 + g(n+m) W_o k - g \frac{n W_o}{U} k c = 0$$

De triviale oplossing $k = 0$ voldoet: stroom zonder storing; een andere oplossing komt uit

$$\left[c^2 - 2U c + \left\{ U^2 - g H \cos \varrho \right\} \right] k + g(n+m) W_o - g \frac{n W_o}{U} c = 0$$

$$k = -\frac{1}{U} \frac{(n+m) U - n c}{(U-c)^2 - g H \cos \varrho}; \quad k \text{ wordt onbepaald als zowel } (U-c) = \frac{m}{n} U \quad (\text{teller})$$

$$\text{als } (U-c)^2 = g H \cos \varrho \quad (\text{noemer}).$$

$$k \rightarrow \infty \text{ als } U \frac{n+m}{n} < c \quad \text{of} \quad (U-c) < U \left(1 - \frac{n+m}{n}\right) = -\frac{m}{n} U$$

$$\text{en } (U-c)^2 = gH \cos \varnothing \text{ dus } U^2 > \left(\frac{n}{m}\right) gH \cos \varnothing .$$

In plaats van deze exponentieel verlopende waterspiegelvorm, die met een snelheid c beweegt, kan men het vraagstuk van de stabiliteit wat algemener stellen door na te gaan of een permanent niet uniform beeld kan worden verkregen ten opzichte van een met willekeurige eenparige snelheid in de x -richting bewegend assenstelsel. Transformatie op een met constante snelheid meebewegend assenstelsel:

$$x = \xi + p\tau$$

$$y = \eta$$

$$t = \tau$$

Differentiatie van een grootheid F wordt dan:

$$F_{\xi} = F_x x_{\xi} + F_y y_{\xi} + F_t t_{\xi}$$

enz. cyclisch met η en τ .

De transformatie determinant is dan

$$\frac{\partial(x, y, t)}{\partial(\xi, \eta, \tau)} = \begin{vmatrix} x_{\xi} & y_{\xi} & t_{\xi} \\ x_{\eta} & y_{\eta} & t_{\eta} \\ x_{\tau} & y_{\tau} & t_{\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$F_x = \frac{\partial(F, \eta, t)}{\partial(\xi, \eta, \tau)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \tau)}{\partial(x, y, t)} = F_{\xi} \quad \text{evenzo } F_y = F_{\eta}$$

$$F_t = \frac{\partial(x, y, F)}{\partial(\xi, \eta, \tau)} \cdot \frac{\partial(\xi, \eta, \tau)}{\partial(x, y, t)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & F_{\xi} \\ 0 & 1 & F_{\eta} \\ p & 0 & F_{\tau} \end{vmatrix} = F_{\tau} - p F_{\xi}$$

De bewegingsvergelijking is $u_t + au u_x = -gh \cos \varnothing + g \sin \varnothing - gW$.

Het is van voordeel de afhankelijke variabelen x te vervangen door variabelen van onderling dezelfde dimensie. Hiervoor wordt in plaats van h ingevoerd $c = +\sqrt{1/a gh \cos \varnothing}$ of $h = ac^2/g \cos \varnothing$. De bewegingsvergelijking wordt dan

$$u_t + au u_x + 2acc_x = g(\sin \varnothing - W)$$

De continuïteitsvergelijking is $u h_x + h u_x + h_t = 0$,

$$\alpha 2 u c c_x + \alpha c^2 u_x + 2 \alpha c c_t = 0 \quad \text{en tenslotte} \quad 2 u c_x + c u_x + c_t = 0$$

$$u_t + \alpha u u_x + 2 \alpha c \cdot c_x = g (\sin \vartheta - W)$$

$$c u_x + 2 u c_x + 2 c_t = 0$$

Op deze vergelijking is de methode van de karakteristieken toe te passen. Transformatie op (ξ, η, τ) geeft

$$u_\tau - p u_\xi + \alpha u u_\xi + 2 \alpha c c_\xi = g (\sin \vartheta - W)$$

$$2 c u_\xi + 2 u c_\xi + 2 c_\tau - 2 p c_\xi = 0$$

$$(u - p)_\tau + (\alpha u - p) (u - p)_\xi + 2 \alpha c c_\xi = g (\sin \vartheta - W)$$

$$+ c (u - p)_\xi + 2 (u - p) c_\xi + 2 c_\tau = 0$$

p moet nu zodanig worden bepaald, dat de afgeleiden naar τ nul zijn met andere woorden dat ten opzichte van het meebewegende assenstelsel een permanente beweging ontstaat.

(α is weer = 1 aangenomen)

$$\begin{vmatrix} u - p & 2c \\ c & 2(u - p) \end{vmatrix} = 2 \left\{ (u - p)^2 - c^2 \right\}$$

$$(u - p)_\xi = g (\sin \vartheta - W) \frac{2(u - p)}{2 \left\{ (u - p)^2 - c^2 \right\}}$$

$$c_\xi = - \gamma (\sin \vartheta - W) \frac{\frac{c}{2}}{(u - p)^2 - c^2}$$

Deze uitdrukkingen zijn onbepaald als $\sin \vartheta = W$ en $u^2 - 2up + p^2 = c^2$. Hierin is dan

$$W = \frac{u_1^2}{C^2 h_1} = \frac{u_1^2}{C^2 c_1^2} g \cos \vartheta$$

Met de index 1 worden de critieke waarden aangeduid: $u_1^2 = C^2 / g \operatorname{tg} \vartheta$, c_1^2 afgekort tot $u_1^2 = k \cdot c_1^2$ (wat inhoudt, dat de formule van Chézy geldt).

De vergelijking wordt dan:

$$(k^2 - 1) c^2 - 2p_1 k c + p_1^2 = 0$$

$$p_1 = k c_1 \pm \sqrt{k^2 c_1^2 - k^2 c_1 + c_1^2} = c_1 (k \pm 1)$$

zodat $u_1 - (k \pm 1) c_1 = \pm c_1$. Daar $u_1 = +k c_1$ kunnen de tekens niet onafhankelijk van elkaar worden gekozen.

$$u_1^2 = \frac{k}{k \pm 1} p_1^2 \quad \text{dus} \quad u \gtrless p_1 \quad \text{al naar men een stroom op of waartse golf met}$$

het meebewegende assenstelsel volgt.

De continuïteitsvergelijking is te schrijven als $(u - p_1) c^2 = (u_1 - p_1) c_1^2 = q_1 = \text{constant}$.

Om voor q een positieve constante $q_1 = c_1^3$ te houden moet voor de stroomopwaartse golf $(p_1 - u) c^2 = q_1$ worden ingevoerd.

Met deze vergelijkingen krijgt men

$$u = p_1 \mp \frac{c_1^3}{c} = (k \pm 1) c_1 \mp \frac{c_1^3}{c}$$

$$c \xi = -\frac{1}{2} c g \sin \alpha \frac{1 - \frac{u^2}{c^2} \frac{1}{k}}{(u - p_1)^2 - c^2}$$

Als variabele wordt nu ingevoerd $\left(\frac{c}{c_1}\right)^2 = \xi$ zodat:

$$\xi = \frac{1}{k c_1^2} g \sin \alpha \frac{k^2 \xi - \left\{ (k \pm 1) \mp \frac{1}{\xi} \right\}^2}{\xi - \frac{1}{\xi^2}}$$

en

$$\frac{u}{c_1} = (k \pm 1) \mp \frac{1}{\xi} \quad \frac{(u - p_1)^2}{c_1^2} = \frac{1}{\xi^2}$$

$$\xi = \frac{g \sin \alpha}{k c_1^2} \frac{k^2 \xi^3 - (k \pm 1)^2 \xi^2 \pm 2 (k \pm 1) \xi - 1}{\xi^3 - 1}$$

Deze uitdrukking wordt onbepaald als $\xi = 1$; teller en noemer dus door $\xi - 1$ te delen.

$$\xi = \frac{g \sin \alpha}{k c_1^2} \cdot \frac{k^2 \xi^2 - (1 + 2k) \xi + 1}{\xi^2 + \xi + 1}$$

Het optreden van rolgolven is mogelijk als voor $\xi = 1$ positief is. Daar de teller het teken bepaalt moet

$$k^2 - (1 + 2k) + 1 > 0 \quad \text{zijn} \quad \text{of} \quad k^2 > 1 + 2k$$

dus voor stroomafwaarts gaande golven $k > 2$

$$k^2 > 4 \quad \text{of} \quad \frac{c}{g} \text{tg} \alpha > 4$$

Hiervoor eveneens gevonden met de formule van Chézy

$$\left(\frac{u_1}{c_1}\right)^2 = k^2 > 4.$$

Rolgolven met het front stroomopwaarts zijn niet mogelijk omdat hier ξ altijd ≥ 0 is.