

DIKTAAT VLOEISTOFMECHANICA

KOLLEGE b 73 B

DE HARMONISCHE METHODE

Het Herleiden van de Differentiaal-vergelijkingen

1. The first of these is the fact that the

the first of these is the fact that the

the first of these is the fact that the

I N H O U D

§ 1 Inleiding

§ 2 Het herleiden van de differentiaal-vergelijkingen

§ 3 Samenvatting

1974

1975

1976

1977

§ 1. Inleiding

Bij verschillende civiel-technische projecten wordt men geconfronteerd met een type lange golven, waarbij de variaties van de waterspiegel (het piëzometrisch niveau) en de debieten (de stroomsnelheden) als een min of meer periodieke functie kunnen worden opgevat.

Hoewel de in dit aanhangsel behandelde theorie een ruimere toepassing vindt, wordt in het volgende met name gedacht aan getij-golven, die zich voortplanten in zee- of rivier-armen e.d. (Delta-gebied).

Indien waterbouwkundige werken moeten worden uitgevoerd, zoals het aanleggen van havens, het uitvoeren van baggerwerken, het maken van afsluitingen e.d., dan zal dat steeds een ingreep in het getij-regiem betekenen.

Berekeningen zijn nu vooral nodig om vooraf de konsekventies van een voorgenomen verbetering vast te stellen. Met name het vinden van een optimale oplossing brengt een groot aantal noodzakelijke berekeningen met zich mee.

In Nederland werden de eerste getij-berekeningen uitgevoerd naar aanleiding van het plan tot afsluiting van de Zuiderzee. In het kader van het onderzoek door de "Staatscommissie Zuiderzee". werd door prof. Lorentz voor het eerst de Harmonische Methode toegepast. Om een analytische oplossing mogelijk te maken werd een methode aangegeven om de niet-analytische uitdrukking $Q|Q|$ in de weerstandsterm te vervangen door een lineaire uitdrukking $k Q$.

De in de tijd konstante factor k wordt bepaald door een arbeidsvoorwaarde te stellen (lit. 1, 1926). Indien de functie Q kan worden beschreven als een enkelvoudige sinusvormige functie:

$$Q = \hat{Q}_1(x) \cos(\omega_1 t - \phi(x)),$$

dan vindt men voor k de uitdrukking:

$$k = \frac{8}{3\pi} \hat{Q}_1 \approx 0,85 \hat{Q}_1 \text{ (zie kollege b 73A).}$$

Indien men te maken krijgt met een benedenrivieren-gebied, dan speelt in het algemeen de "permanente" afvoer een belangrijke rol. Door prof. Mazure werd de "methode Lorentz" uitgebreid voor gevallen met een konstante bovenafvoer. Daarbij werd voor Q gesteld:

$$Q = Q_0(x) + \hat{Q}_1(x) \cos\{\omega_1 t - \phi(x)\}$$

Bovendien werden de variatie van de diepte tengevolge van de getijbeweging en de z.g. Bernoulli-term in de berekeningen opgenomen. Voor het lineariseren van de weerstandsterm werd gebruik gemaakt van een Fourierreeksontwikkeling (lit.2, 1937).

Omdat een benadering van het getij door een konstante + één harmonische komponent nog aanzienlijk van de werkelijkheid kan afwijken, werd later de door Mazure ontwikkelde methode uitgebreid voor functies met meer dan één harmonische komponent. Voor het lineariseren van de weerstandsterm werd door Stroband een meer algemeen bruikbare methode ontwikkeld, die in het kollege b 73B wordt behandeld.

Met deze methode is het mogelijk een analytische oplossing te geven voor problemen, waarbij de functies h en Q kunnen worden beschreven als resp.:

$$(1 - 1) \quad h = h_0(x) + \hat{h}_1(x) \cos \{\omega_1 t - \kappa_1(x)\} + \hat{h}_2(x) \cos \{2\omega_1 t - \kappa_2(x)\}$$

$$(1 - 2) \quad Q = Q_0(x) + \hat{Q}_1(x) \cos \{\omega_1 t - \phi_1(x)\} + \hat{Q}_2(x) \cos \{2\omega_1 t - \phi_2(x)\}$$

Indien de functies meer dan één harmonische komponent mogen bevatten, zoals bij laatstbedoelde methode het geval is, spreekt men van een meervoudige harmonische methode.

Het is in principe mogelijk om een analytische oplossingsmethode uit te werken, waarbij de functies h en Q méér dan twee harmonische componenten mogen bevatten. Bij de praktische uitwerking blijkt echter dat een iteratie-proces moet worden uitgevoerd, waardoor het te verrichten rekenwerk bij functies met twee harmonischen (lit.3, 1947) reeds zeer omvangrijk wordt. Van de benadering, die bij laatstgenoemde methode wordt gevolgd, worden de grote lijnen aangegeven in het stencil: "Het Principe van de Meervoudige Harmonische Methode".

In het onderstaande wordt het principe van de oplossingsmethode meer in detail uitgewerkt. Ter wille van de eenvoud wordt bij de afleidingen voor wat betreft de functies h en Q toch slechts één harmonische komponent "meegenomen":

$$(1 - 3) \quad h = h_0(x) + \hat{h}_1(x) \cos \{\omega_1 t - \kappa_1(x)\}$$

$$(1 - 4) \quad Q = Q_0(x) + \hat{Q}_1(x) \cos \{\omega_1 t - \phi_1(x)\}$$

De oorspronkelijke differentiaal-vergelijkingen worden herleid door in alle termen voor h en Q steeds het in (1 - 3) en (1 - 4) gestelde te substitueren. Daarbij wordt de uitdrukking $Q|Q|$ in de weerstandsterm vervangen door een analytische uitdrukking, die past in het principe van de methode.

In § 2 wordt uitgegaan van de bewegingsvergelijking en de continuïteitsvergelijking, waarvan de afleiding in het college b 73A is behandeld. Na enige algemene opmerkingen wordt van de termen in de bewegingsvergelijking eerst het gedrag van de factoren

$$\frac{1}{g A}, \quad \frac{1}{C A a_r^2} \quad \text{en} \quad \frac{2b}{g A^2}$$

nader beschouwd.

Daarna wordt elk van de termen in de bewegingsvergelijking in zijn geheel beschouwd. Vervolgens wordt de continuïteitsvergelijking herleid.

Tenslotte blijken de oorspronkelijke differentiaal-vergelijkingen (DVn) te kunnen worden vervangen door twee stelsels van DVn:

- een stelsel vergelijkingen met uitsluitend termen, die konstant zijn in de tijd;
- een stelsel vergelijkingen met termen, die sinusvormig variëren in de tijd met een frekwentie ω_1 .

Tijdens de afleiding blijkt steeds duidelijk welke invloeden worden verwaarloosd. Dit geeft de mogelijkheid te wijzen op de konsekwenties van het niet-lineaire karakter van de differentiaal-vergelijkingen. Vooral dit facet van de benadering is van belang, omdat het ons in de gelegenheid stelt de vervormingsverschijnselen, die zich bij het voortplanten van lange golven in de natuur voordoen, te leren begrijpen.

Aan het einde van § 2 worden eerst de gelineariseerde differentiaal-vergelijkingen gegeven voor gevallen, waarbij $Q_0 \neq 0$.

Met deze vergelijkingen is een analytische oplossing mogelijk voor de voortplanting van de eerste harmonische komponent van een getijgolf (M_2 -komponent) in een benedenrivier, waarbij een konstante bovenafvoer in rekening moet worden gebracht.

Indien $Q_0 = 0$ wordt gesteld, volgen uit deze vergelijkingen de gelineariseerde differentiaal-vergelijkingen voor de voortplanting van een sinusvormige lange golf zonder bovenafvoer. Deze vereenvoudigde vergelijkingen komen overeen met differentiaal-vergelijkingen, die reeds in het college b73A zijn afgeleid ("methode Lorentz"). Voor het oplossen van deze lineaire DVn kan daarom worden verwezen naar het college-diktaat.

§ 2 Het herleiden van de differentiaal-vergelijkingen.

De voortplanting van lange golven in open leidingen kan worden beschreven met de volgende differentiaal-vergelijkingen, bewegingsvergelijking:

$$(2 - 1) \quad \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{1}{g A} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{C^2 A^2} Q |Q| + \frac{2 b}{g A^2} Q \frac{\partial h}{\partial t}$$

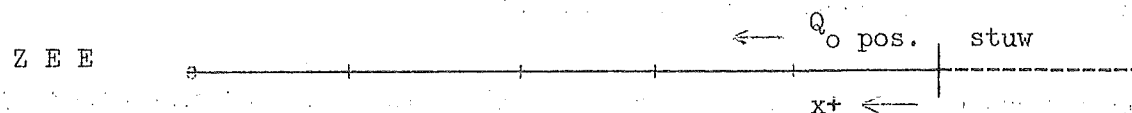
continuïteitsvergelijking:

$$(2 - 2) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = - b \frac{\partial h}{\partial t}$$

Voor de afleiding van deze vergelijkingen en de daarbij gemaakte veronderstellingen wordt verwezen naar het diktaat "Lange Golven in Leidingen".

De bodemhelling I_b is gelijk nul gesteld. De x-as valt samen met de lengte-as van de beschouwde leiding.

Bij het afleiden van de vergelijkingen (2 - 1) en (2 - 2) is het debiet Q in de richting van de positieve x-as positief gesteld. In de verdere beschouwingen wordt verondersteld dat de ebstroom positief is, omdat de positieve x-as wordt gekozen vanaf de landinwaarts gelegen randvoorwaarde naar de zee toe. In de meeste gevallen zal de richting van de konstante bovenafvoer Q_0 samenvallen met de richting van de eb-stroom, zodat ook deze een positief teken krijgt (zie figuur). In een systeem van benedenrivieren met vele takken en splitsingspunten zijn uitzonderingen mogelijk.



In het volgende wordt voor de vergelijkingen (2 - 1) en (2 - 2) een oplossing gesteld, die de volgende gedaante heeft:

$$(2 - 3) \quad h = h_0 + h_1 = h_0 + \hat{h}_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1)$$

$$(2 - 4) \quad Q = Q_0 + Q_1 = Q_0 + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$$

Verondersteld wordt dus dat de funkties h en Q op elke plaats x kunnen worden beschreven met:

- een in de tijd konstante term en
- een funktie, die in de tijd sinusvormig varieert met een frekwentie

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T}, \text{ waarbij } T = \text{de periode.}$$

De grootheden Q_0 , h_0 , h_1 en κ_1 , Q_1 en ϕ_1 zijn funkties van x .

Hoewel de grootheid Q_0 langs een rivier kan variëren (door kwel, verdamping e.d.) wordt deze in het volgende konstant verondersteld.

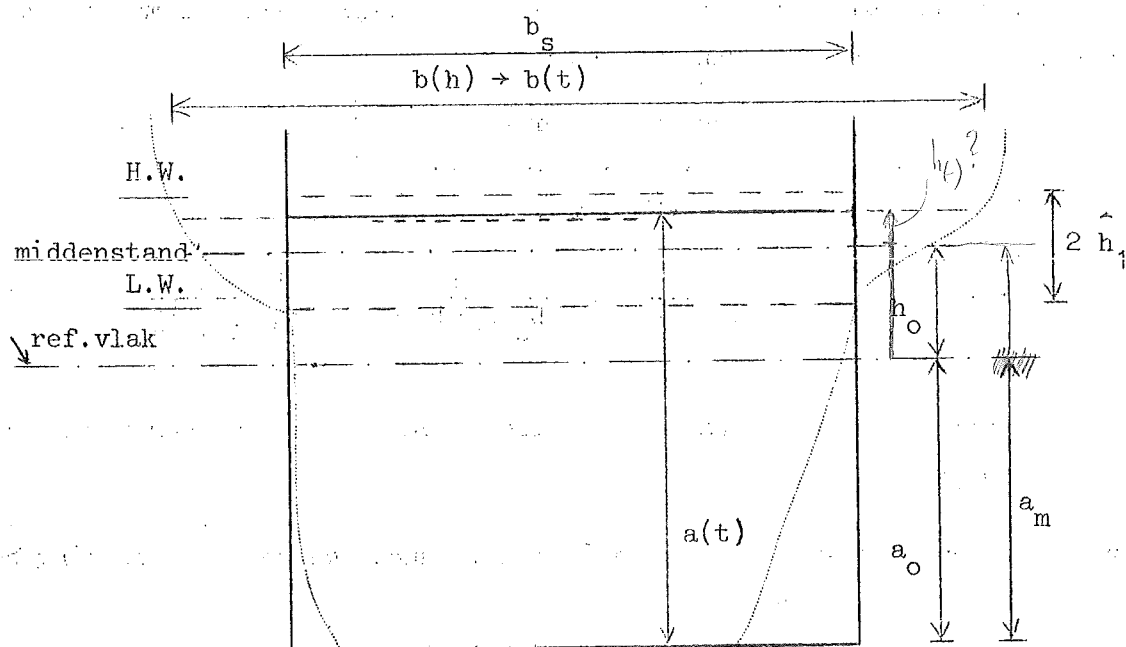
De termen in het rechter lid van de bewegingsvergelijking (2 - 1) zijn verhangtermen, resp. traagheids-, weerstands- en Bernoulli-term.

Het dwarsprofiel van b.v. een rivier zal in de x -richting (geul-as) vrij grillig variëren. De factoren A , b , a_r = de hydraulische straal, en in principe ook C , variëren in de x -richting. Bij elke berekeningsmethode is men daarom genoodzaakt een rivier o.d. in een aantal (niet te grote) vakken te verdelen.

Voor elk vak wordt uit de ter beschikking staande gegevens een gemiddeld dwarsprofiel bepaald.

Het dwarsprofiel, dat representatief is gesteld voor een vak (sektie), wordt wat betreft het stroomvoerend profiel meestal nog geschematiseerd tot een bakprofiel. Het schematiseren van een systeem vereist enig inzicht en zal steeds een enigszins subjektief karakter dragen. Het is dan ook gewenst, dat de invloed van de schematisatie op de nauwkeurigheid wordt nagegaan.

In onderstaande figuur zijn enkele grootheden aangegeven, die voor het volgende van belang zijn.



$h(t) = h_0 + h_1(t)$; de middenstand is h_0 t.o.v. een referentie-vlak.

De diepte van het bakprofiel t.o.v. de middenstand $a_m = a_0 + h_0$;

" " " " " is $a(t) = a_m + h_1(t)$.

De hydraulische straal $a_r = \frac{A}{0} = \frac{b_s a}{b_s + 2a}$.

Het stroomvoerend profiel is $A(t) = A_m + b_s h(t) = b_s (a_m + h(t))$.

De bergende breedte b is voor het gem. dwarsprofiel nog een functie van de waterstand $h(t)$.

In de termen van de bewegingsvergelijking (2 - 1) komen achtereenvolgens de volgende factoren voor:

de faktor $\frac{1}{gA}$, vaak aangeduid met m

" " $\frac{1}{C^2 A^2 a_r}$, " " " " w

" " $\frac{2b}{gA^2}$, " " " " b_e

Deze factoren, die zoals uit het voorgaande blijkt variëren met de waterstand $h(t)$, zullen nu nader worden beschouwd.

Herleiden van de faktor $m = \frac{1}{gA}$

We kunnen achtereenvolgens schrijven:

$$m = \frac{1}{gA} = \frac{1}{g b_s a} = \frac{1}{g b_s (a_m + h_1)} = \frac{1}{g b_s a_m (1 + \frac{h_1}{a_m})} = \frac{1}{gA_m} \frac{1}{1 + \frac{h_1}{a_m}}$$

Door $\frac{1}{1 + \frac{h_1}{a_m}}$ te beschouwen als de limiet van de som van een meetkundige

reeks met reden $r = \frac{h_1}{a_m}$, waarbij $\hat{h}_1 < a_m$, kunnen we deze uitdrukking benaderen

met de reeks:

$$1 - \frac{h_1}{a_m} + \frac{h_1^2}{a_m^2} - \frac{h_1^3}{a_m^3} + \dots$$

Opm.: deze reeks krijgt men ook door de funktie $(1 + \frac{h_1}{a_m})^{-1}$ te benaderen

met een z.g. binomiaalreeks-ontwikkeling (zie later).

Substitueren we voor $h_1 = \hat{h}_1 \cos (\omega_1 t - \kappa_1)$, dan vinden we na het toepassen van enkele gonioregels:

$$1 - \frac{\hat{h}_1}{a_m} \cos (\omega_1 t - \kappa_1) + \frac{\hat{h}_1^2}{2a_m^2} \{ \cos 2 (\omega_1 t - \kappa_1) + 1 \} -$$

$$\frac{\hat{h}_1^3}{4a_m^3} \{ \cos 3 (\omega_1 t - \kappa_1) + 3 \cos (\omega_1 t - \kappa_1) \} + \dots =$$

$$(1 + \frac{\hat{h}_1^2}{2a_m^2}) - \frac{\hat{h}_1}{a_m} \cos (\omega_1 t - \kappa_1) \{ 1 + \frac{3}{4} \frac{\hat{h}_1^2}{a_m^2} + \dots \} +$$

$$\frac{\hat{h}_1^2}{2a_m^2} \cos 2 (\omega_1 t - \kappa_1) + \dots$$

De faktor m kunnen we nu als volgt uitdrukken:

$$(2-5) \quad \frac{1}{gA} = \frac{1}{gA_m} \{ \bar{n}_0 - \bar{n}_1 \cos (\omega_1 t - \kappa_1) + \bar{n}_2 \cos 2 (\omega_1 t - \kappa_1) - \bar{n}_3 \cos 3 (\omega_1 t - \kappa_1) + \dots \}$$

(2-6)

$$\begin{aligned} \bar{n}_0 &= 1 + \frac{\hat{h}_1^2}{2a_m^2} + \dots \\ \bar{n}_1 &= \frac{\hat{h}_1}{a_m} \{ 1 + \frac{3}{4} \frac{\hat{h}_1^2}{a_m^2} + \dots \} \\ \bar{n}_2 &= \frac{\hat{h}_1^2}{2a_m^2} \{ 1 + \dots \} \end{aligned}$$

$$\text{Herleiden van de faktor } w = \frac{1}{c^2 A^2 a_r}$$

We kunnen achtereenvolgens schrijven:

$$w = \frac{1}{C^2 A^2 a_r} = \frac{1}{C^2 b_s^2 a_r} = \frac{1}{C^2 b_s^2 a \frac{a_r}{a}} = \frac{1}{\frac{a_r}{a} C^2 b_s^2 a^3} = \frac{1}{\frac{a_r}{a} C^2 b_s^2 (a_m + h_1)^3}$$

Opm.: De koëfficiënt C varieert in geringe mate met de waterstand. Deze grootheid wordt in de praktijk bepaald door het wiskundig model van een riviergedeelte te ijken voor een bestaande toestand, waarvan door meting voldoende gegevens bekend zijn.

Op die manier verandert het karakter van deze koëfficiënt enigszins, omdat de wijze van schematiseren (fouten) de waarde van C zal beïnvloeden. Het gevolg van deze gang van zaken is dat de grootheid C in deze benadering konstant wordt gesteld.

— Als we a_m buiten haakjes brengen en vaststellen dat $\frac{a_r}{a}$ in de meeste gevallen nagenoeg ongevoelig is voor variaties van de waterspiegel dan kunnen we schrijven:

$$w = \frac{1}{C^2 b_s^2 \frac{a_r}{a_m} a_m^3 (1 + \frac{h_1}{a_m})^3} = \frac{1}{C^2 A_m^2 a_r m (1 + \frac{h_1}{a_m})^3}$$

We zullen de uitdrukking $\frac{1}{(1 + \frac{h_1}{a_m})^3}$ benaderen met een binomiale reeks-ontwikkeling:

$$\text{alg.: } (1 + \alpha)^N = 1 + N\alpha + \frac{N(N-1)}{2!} \alpha^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!} \alpha^3 + \dots$$

We vinden als $\alpha = \frac{h_1}{a_m}$ en $N = -3$:

$$(1 + \frac{h_1}{a_m})^{-3} = 1 - 3\frac{h_1}{a_m} + 6\frac{h_1^2}{a_m^2} - 10\frac{h_1^3}{a_m^3} + \dots$$

Substitueren we in deze uitdrukking $h_1 = \hat{h}_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1)$ dan vinden we:

$$1 - \frac{3\hat{h}_1}{a_m} \cos(\omega_1 t - \kappa_1) + \frac{6\hat{h}_1^2}{a_m^2} \cos^2(\omega_1 t - \kappa_1) - \frac{10\hat{h}_1^3}{a_m^3} \cos^3(\omega_1 t - \kappa_1) + \dots$$

Na verder uitwerken kan men voor w schrijven:

$$(2-7) \quad w = \frac{1}{(c^2 A^2 a_r)_m} \{ n_0 - n_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1) + n_2 \cos 2(\omega_1 t - \kappa_1) + \dots \}$$

waarin:

$$n_0 = 1 + 3 \frac{\hat{h}_1^2}{a_m^2} + \dots$$

$$n_1 = 3 \frac{\hat{h}_1}{a_m} + 7,5 \frac{\hat{h}_1^3}{a_m^3} + \dots$$

$$n_2 = 3 \frac{\hat{h}_1^2}{a_m^2} + 7,5 \frac{\hat{h}_1^4}{a_m^4} + \dots$$

(2-8)

$$\text{de faktor } b_e = \frac{2b}{gA^2}$$

Deze faktor kan op dezelfde wijze worden aangepakt als de beide vorige, echter dat loont meestal de moeite niet. De Bernoulli-term is in veel gevallen in absolute waarde klein t.o.v. de andere termen.

De variatie van de faktor b_e t.g.v. de variaties van de waterspiegel is daarom verwaarloosbaar.

We stellen:

$$(2-9) \quad b_e = \frac{2b}{gA^2} \cong \frac{2b_0}{gA_m^2}$$

Voor het bepalen van b_0 (= de gemiddelde waarde van b) wordt verwezen naar blz. 22.

Herleiden van de versnellingsterm

Voor de versnellingsterm $\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t}$ kan met (2-5) worden geschreven:

$$\frac{1}{gA_m} \{ \bar{n}_0 - \bar{n}_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1) + \bar{n}_2 \cos 2(\omega_1 t - \kappa_1) + \dots \} \frac{\partial Q}{\partial t}$$

We hebben gesteld $Q = Q_0 + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)$ en omdat $\frac{\partial Q_0}{\partial t} = 0$ is verondersteld vinden we:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{gA_m} \{ \bar{n}_0 - \bar{n}_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1) + \bar{n}_2 \cos 2(\omega_1 t - \kappa_1) + \dots \} \omega_1 \hat{Q}_1 \sin(\omega_1 t - \phi_1) = \\
 & - \frac{\omega_1 \hat{Q}_1}{gA_m} \{ \bar{n}_0 \sin(\omega_1 t - \phi_1) - \bar{n}_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1) \sin(\omega_1 t - \phi_1) + \\
 & \bar{n}_2 \cos 2(\omega_1 t - \kappa_1) \sin(\omega_1 t - \phi_1) + \dots \} = \\
 & - \frac{\omega_1 \hat{Q}_1}{gA_m} \{ \bar{n}_0 \sin(\omega_1 t - \phi) - \frac{\bar{n}_1}{2} \sin(2\omega_1 t - \kappa_1 - \phi_1) - \frac{\bar{n}_1}{2} \sin(\kappa_1 - \phi_1) \\
 & - \frac{\bar{n}_2}{2} \sin(3\omega_1 t - 2\kappa_1 - \phi_1) - \frac{\bar{n}_2}{2} \sin(\omega_1 t - 2\kappa_1 + \phi_1) \\
 & + \dots \}
 \end{aligned}$$

We kunnen de verkregen uitdrukking als volgt splitsen in groepen van termen met een zelfde frekwentie:

(2 - 10) konstante termen:

$$+ \frac{\bar{n}_1 \omega_1 \hat{Q}_1}{gA_m} \sin(\kappa_1 - \phi_1) + \dots$$

termen met de frekwentie ω_1 :

$$(2 - 11) \quad \frac{\bar{n}_0}{gA_m} \omega_1 \hat{Q}_1 \sin(\omega_1 t - \phi_1) + \frac{\bar{n}_2}{2gA_m} \omega_1 \hat{Q}_1 \sin(\omega_1 t - 2\kappa_1 + \phi_1) + \dots$$

termen met de frekwentie $2\omega_1$:

$$\frac{\bar{n}_1 \omega_1 \hat{Q}_1}{2gA_m} \sin(2\omega_1 t - \kappa_1 - \phi_1) + \dots$$

termen met de frekwentie $3\omega_1$:

$$\frac{\bar{n}_2 \omega_1 \hat{Q}_1}{2gA_m} \sin(3\omega_1 t - 2\kappa_1 - \phi_1) + \dots$$

Nadere beschouwing van de twee termen met de frekwentie ω_1 .

De amplituden van de twee termen in (2 - 11) verhouden zich als $\bar{n}_0 : \frac{\hat{n}_2}{2}$.

Gelet op (2 - 6) kunnen we voor deze verhouding dus schrijven:

$$\frac{1 + \frac{\hat{h}_1^2}{2a_m^2}}{\frac{\hat{h}_1^2}{4a_m^2}} = 2 + \frac{4a_m^2}{\hat{h}_1^2} = 2 \left(1 + \frac{2a_m^2}{\hat{h}_1^2} \right)$$

In onderstaande tabel is de waarde van deze verhouding voor verschillende waarden van $\frac{a_m}{\hat{h}_1}$ opgegeven.

$\frac{a_m}{\hat{h}_1}$	verhouding van de amplituden van beide termen
1	6
2	18
3	38
4	66
5	102

Is de verhouding $\frac{a_m}{\hat{h}_1}$ dus voldoende groot, dan kunnen we de tweede term

verwaarlozen. In onze beschouwingen veronderstellen we, dat dit inderdaad het geval is en we laten derhalve de tweede term met de frekwentie ω_1 buiten beschouwing.

In plaats van (2 - 11) wordt verder gewerkt met:

$$(2 - 12) \quad \frac{\bar{n}_0}{gA_m} \omega_1 \hat{Q}_1 \sin(\omega_1 t - \phi_1) = \boxed{\frac{\bar{n}_0}{gA_m} \frac{\partial Q_1}{\partial t}}$$

Herleiden van de Bernoulli-term

Voor deze term kan met het in (2 - 9) gestelde worden geschreven:

$$\frac{2b}{gA^2} Q \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{2b_o}{gA_m^2} Q \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{of na substitutie van (2 - 4) voor Q en}$$

$$(2 - 3) \text{ voor } h \quad \left(\frac{\partial h_o}{\partial t} = 0 \right) :$$

$$\frac{2b_o}{gA_m^2} \{Q_o + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)\} \hat{h}_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t - \kappa_1)$$

Hieruit volgt na vermenigvuldigen en splitsen:

(2 - 13) konstante term:

$$\frac{b_o \omega_1 \hat{h}_1}{gA_m^2} \hat{Q}_1 \sin(\phi_1 - \kappa_1)$$

term met de frekwentie ω_1 :

$$- \frac{2b_o Q_o}{gA_m^2} \hat{h}_1 \omega_1 t - \kappa_1 = \frac{2b_o Q_o}{gA_m^2} \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (2 - 14)$$

term met de frekwentie $2\omega_1$:

$$- \frac{b_o \omega_1 \hat{h}_1 \hat{Q}_1}{gA_m^2} \sin(2\omega_1 t - \kappa_1 - \phi_1)$$

Herleiden van de weerstandsterm

Rekening houdende met de reeds herleide weerstandsfactor $\frac{1}{C^2 A^2 a_r}$

en met (2 - 4) kunnen we voor de weerstandsterm schrijven:

$$(2 - 15) \quad \frac{|Q|Q}{C^2 A^2 a_r} = \frac{1}{(C^2 A^2 a_r)_m} \{n_o - n_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1) + n_2 \cos(\omega_1 t - \kappa_1) + \dots\}$$

$$\left(Q_o + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \right) \left| Q_o + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \right|$$

De uitdrukking $\left(Q_o + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \right) \left| Q_o + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \right|$ is een niet-analytische uitdrukking en daar we trachten een analytische oplossing te vinden,

moeten we genoemde faktor trachten te schrijven in de vorm van een analytische uitdrukking.

Bij een herleiding van deze uitdrukking kunnen we twee mogelijkheden onderscheiden:

$$|Q_0| < \hat{Q}_1 \quad (\text{er doen zich kenteringen voor});$$

$$|Q_0| > \hat{Q}_1 \quad (\text{er treden geen kenteringen op, geen tekenwisseling})$$

Duiden we de grootste der beide grootheden $|Q_0|$ en $\hat{Q}_1$ aan door Q_* , dan schrijven we in het algemeen voor $|Q|Q$:

(2 - 16)

$$|Q|Q = Q_*^2 \{m_0 + m_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + m_2 \cos 2(\omega_1 t - \phi_1) + m_3 \cos 3(\omega_1 t - \phi_1) + \dots\}$$

Het bepalen van de coëfficiënten m_0, m_1, m_2, m_3 , enz. kan op verschillende wijzen gedaan worden:

1e) door Fourier-reeksontwikkeling (lit. 2, 1937)

2e) door ontwikkeling in een machtreeks (lit. 3, 1947).

In dit kollege zal de onder 2e) bedoelde methode behandeld worden.

Eerst worden de gevallen beschouwd, waarbij zich geen kenteringen voordoen.

$$|Q_0| > \hat{Q}_1$$

In een dergelijk geval varieert de waarde van Q in de tijd, doch heeft steeds hetzelfde teken.

Indien Q_0 positief is, d.w.z. dat de richting van Q_0 samenvalt met de richting van de positieve x-as (de rekenrichting), dan kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} Q|Q| &= Q^2 = \{Q_0 + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)\}^2 \\ &= Q_0^2 \{1 + \lambda \cos(\omega_1 t - \phi_1)\}^2, \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{\hat{Q}_1}{Q_0}$$

$$\text{waarin } \lambda = \frac{\hat{Q}_1}{Q_0}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Of wel:

$$\begin{aligned} Q|Q| &= Q_0^2 \{1 + 2\lambda \cos(\omega_1 t - \phi_1) + \lambda^2 \cos^2(\omega_1 t - \phi_1)\} \\ &= Q_0^2 \{(1 + \frac{1}{2}\lambda^2) + 2\lambda \cos(\omega_1 t - \phi_1) + \frac{\lambda^2}{2} \cos 2(\omega_1 t - \phi_1)\} \end{aligned}$$

We vinden voor de uitdrukking (2 - 16) in dit geval dus:

$$(2 - 17) \quad \begin{array}{l} m_0 = 1 + \frac{\lambda^2}{2} \\ m_1 = 2\lambda \\ m_2 = \frac{\lambda^2}{2} \end{array} \quad \begin{array}{l} Q_{\text{uit}} = Q_0 \\ m_3 = 0 \quad m_4 = 0 \quad \text{etc.} \end{array}$$

Op bijlage 2 zijn de waarden van m_0 , m_1 en m_2 , op het linker gedeelte van de grafiek uitgezet als functie van λ .

Voor het geval dat $\hat{Q}_1 = Q_0$ is $\lambda = 1$ en treden er nog juist geen kenteringen op. De factoren in de reeks worden dan achtereenvolgens

$$m_0 = 1,5, m_1 = 2 \text{ en } m_2 = \frac{1}{2}.$$

Indien $\hat{Q}_1 = 0$ is $\lambda = 0$; er is dan dus geen getijstroom meer aanwezig.

We vinden dan $m_0 = 1$, $m_1 = 0$ en $m_2 = 0$.

In dat geval vinden we voor de weerstandsterm:

$$- \frac{Q_0^2}{C^2 A^2 a_r} \quad (\text{de wet van de Chézy}).$$

Opm.:

In veel gevallen zal men de positieve x-as zodanig kiezen, dat Q_0 positief is. Dit is echter niet nodig. Indien een konstante afvoer Q_0 een richting heeft, die tegengesteld is aan de gekozen positieve x-richting, dan kunnen we schrijven indien $|Q_0| > \hat{Q}_1$:

$$\begin{aligned} Q|Q| &= \{Q_0 + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)\} \left| \{Q_0 + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)\} \right| = \\ &= - \{Q_0 + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)\}^2 \\ &= - Q_0^2 \left\{ 1 + \frac{\hat{Q}_1}{Q_0} \cos(\omega_1 t - \phi_1) \right\}^2 \end{aligned}$$

Stellen we weer $\frac{\hat{Q}_1}{Q_0} = \lambda$, $0 \geq \lambda \geq -1$ dan kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} Q|Q| &= - Q_0^2 \{ 1 + \lambda \cos(\omega_1 t - \phi_1) \}^2 = - Q_0^2 \{ 1 + 2\lambda \cos(\omega_1 t - \phi_1) + \lambda^2 \cos^2(\omega_1 t - \phi_1) \} \\ &= - Q_0^2 \left\{ \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \right) + 2\lambda \cos(\omega_1 t - \phi_1) + \frac{\lambda^2}{2} \cos^2(\omega_1 t - \phi_1) \right\} \end{aligned}$$

Vergelijken we deze uitdrukking weer met (2 - 16) dan zien we dat we nu in plaats van (2 - 17) vinden:

$$(2 - 18) \quad \boxed{\begin{aligned} m_0 &= - \left(1 + \frac{\lambda^2}{2} \right) \\ m_1 &= - 2\lambda \\ m_2 &= - \frac{\lambda^2}{2} \end{aligned}} \quad \begin{aligned} Q_{\ast} &= Q_0 \text{ (IEG)} \\ m_3 &= 0 \quad m_4 = 0 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Bedenken we dat $\lambda = \frac{\hat{Q}_1}{Q_0}$ negatief is, dan volgt uit het bovenstaande dat m_0 en m_2 nu negatief zijn, terwijl m_1 nu positief is.

Vervolgens worden die gevallen beschouwd, waarbij zich kenteringen voordoen.

$$\boxed{\hat{Q}_1 > |Q_0|}$$

In een dergelijk geval wisselt de stroom van teken. We kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} Q|Q| &= \{Q_0 + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1)\} \cdot \left| Q_0 + \hat{Q}_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) \right| \\ &= \hat{Q}_1^2 \{\lambda + \cos(\omega_1 t - \phi_1)\} \cdot \left| \lambda + \cos(\omega_1 t - \phi_1) \right| \end{aligned}$$

$$\text{Nu is } \lambda = \frac{Q_0}{\hat{Q}_1} \quad . \quad 0 \leq |\lambda| \leq 1$$

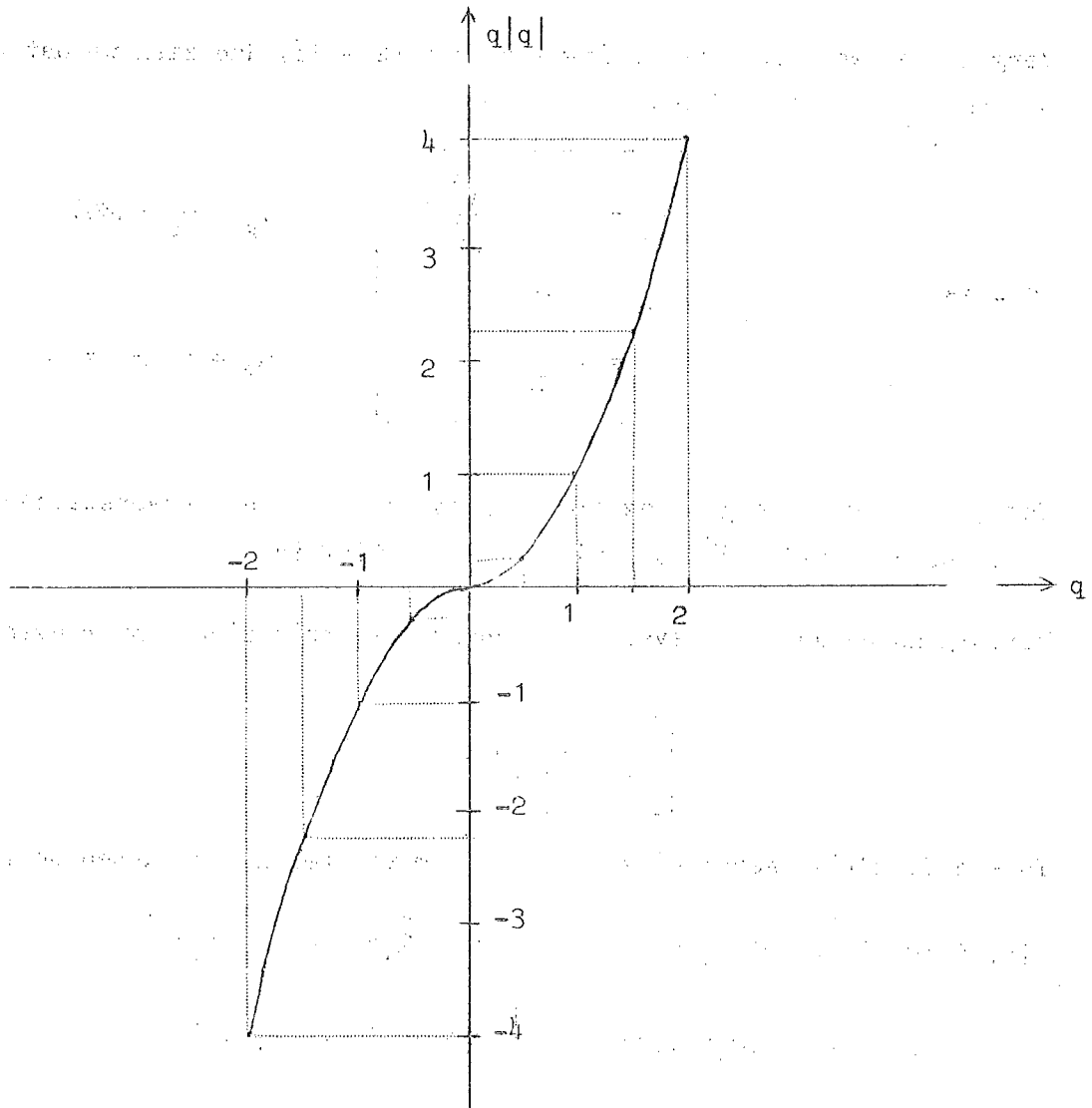
Zoals reeds eerder is gesteld, is het mogelijk dat λ een negatieve waarde krijgt. De richtingen van de bovenafvoer en van de positief aangenomen getijstroom (in de rekenrichting) behoeven niet samen te vallen.

De uiterste waarden van λ zijn +1 en -1.

Als we korthedshalve $\lambda + \cos(\omega_1 t - \phi_1) = q$ stellen, dan kunnen we schrijven:

$$(2 - 19) \quad Q|Q| = \hat{Q}_1^2 q |q|$$

De waarden van q zullen zich bewegen tussen +2 en -2. We kunnen $q|q|$ tegen q uitzetten (zie figuur).



Als $q > 0$ dan $q|q| = q^2$ parabooltak van $(0,0)$ tot $(2,4)$

Als $q < 0$ dan $q|q| = -q^2$ parabooltak van $(0,0)$ tot $(-2, -4)$

De funktie $q|q|$ wordt nu benaderd door een machtreeks:

$$q|q| = A_0 + A_1 q + A_2 q^2 + A_3 q^3 + A_4 q^4 + A_5 q^5 + A_6 q^6 + A_7 q^7 + \dots$$

De funktie gaat door de oorsprong dus $A_0 = 0$.

Omdat de funktie anti-symmetrisch is moeten alle koëfficiënten voor de evenmachten van q nul zijn: $A_2 = A_4 = A_6 = \dots = 0$.

Als we de reeks na de 7e macht afbreken dan komt het er op neer, de onbekenden A_1 , A_3 , A_5 en A_7 te bepalen. De funktie is in een (oneindig) groot aantal punten bekend. Met "de methode der kleinste kwadraten" is een zeer nauwkeurige benadering mogelijk van de funktie $q|q|$.

Ook kunnen we de funktie dwingen te gaan door 4 geschikt gekozen punten: (0,5, 0,25), (1,1), (1,5, 2,25) en (2,4).

We kunnen dan 4 vergelijkingen opstellen en daaruit A_1 , A_3 , A_5 en A_7 oplossen.

We vinden uiteindelijk:

$$q|q| = 0,0254 q^7 - 0,2222 q^5 + 0,9111 q^3 + 0,2857 q.$$

Als we in deze uitdrukking $q = \{\lambda + \cos(\omega_1 t - \phi_1)\}$ substitueren en uitwerken dan kunnen we een uitdrukking krijgen in de volgende gedaante:

$$q|q| = m_0 + m_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + m_2 \cos 2(\omega_1 t - \phi_1) + m_3 \cos 3(\omega_1 t - \phi_1) + \dots$$

Vervangen we in (2 - 19) $q|q|$ door deze verkregen uitdrukking, dan hebben we een uitdrukking voor $Q|Q|$ gevonden, die overeenkomt met (2 - 16). De uitdrukkingen, die op deze wijze voor de koëfficiënten kunnen worden gevonden, zijn:

(2 - 20)	$Q_* = \hat{Q}_1$	$m_0 = 1,292\lambda + 0,133\lambda^3 + 0,044\lambda^5 + 0,025\lambda^7$ $m_1 = 0,844 + 1,400\lambda^2 - 0,445\lambda^4 + 0,178\lambda^6$ $m_2 = 0,894\lambda - 0,667\lambda^3 + 0,267\lambda^5$ $m_3 = 0,167 - 0,389\lambda^2 + 0,222\lambda^4$
----------	-------------------	---

Het verloop van bovenstaande koëfficiënten als funktie van λ is weergegeven in het rechter gedeelte van de grafiek op bijlage 2.

Als we de gehele grafiek wat nader beschouwen, dan zijn de volgende opmerkingen mogelijk:

- beide grafiekhelften sluiten voor $\lambda = 1$ goed aan elkaar aan.
- voor $Q_0 > \hat{Q}_1$ is als $\hat{Q}_1 = 0$: $\lambda = 0$ en $m_1 = m_2 = 0$ en $m_0 = 1$;

in dat geval vinden we voor de weerstandsterm $-\frac{Q_0^2}{c^2 A^2 a_r}$

- voor $\hat{Q}_1 > Q_0$ is als $Q_0 = 0$: $\lambda = 0$ en

$$m_1 \approx 0,85 \left(\approx \frac{8}{3\pi}, \text{"het getal van Lorentz"} \right),$$

$$m_3 = 0,167 \left(\approx \frac{8}{15\pi}, \text{gevonden door MAZURE} \right),$$

terwijl $m_0 = m_2 = 0$.

uit de uitdrukkingen (2 - 20) volgt dat, indien $\hat{Q}_1 > |Q_0|$,

het teken van m_0 en m_2 afhangt van het teken van λ , terwijl m_1 en m_3 onafhankelijk zijn van het teken van λ .

Nu we een analytische uitdrukking voor de uitdrukking $Q|Q|$ hebben gevonden, keren we terug naar de uitdrukking (2 - 15) voor de weerstandsterm.

We kunnen hiervoor nu schrijven:

$$\frac{1}{(C^2 A^2 a_r)_m} \left\{ n_0 - n_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1) + n_2 \cos 2(\omega_1 t - \kappa_1) + \dots \right\} \left\{ m_0 + m_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) + m_2 \cos 2(\omega_1 t - \phi_1) + m_3 \cos 3(\omega_1 t - \phi_1) + \dots \right\}$$

We kunnen deze uitdrukking nu verder uitwerken door te vermenigvuldigen en daarna de termen met dezelfde frekwentie bij elkaar te nemen. We vinden dan de volgende groepen van termen:

konstante termen:

$$(2 - 21) \quad \frac{Q_*^2}{(C^2 A^2 a_r)_m} \left\{ n_0 m_0 - \frac{n_1 m_1}{2} \cos(\kappa_1 - \phi_1) \right\}$$

termen met de frekwentie ω_1 :

$$(2 - 22) \quad \frac{Q_*^2}{(C^2 A^2 a_r)_m} \left\{ n_0 m_1 \cos(\omega_1 t - \phi_1) - n_1 m_0 \cos(\omega_1 t - \kappa_1) - \frac{n_1 m_2}{2} \cos(\omega_1 t - 2\phi_1 + \kappa_1) + \dots \right\}$$

De term $\frac{n_1 m_2}{2} \cos(\omega_1 t - 2\phi_1 + \kappa_1)$ kan nog als volgt worden omgewerkt:

$$\frac{n_1 m_2}{2} \cos(\omega_1 t - 2\phi_1 + \kappa_1) = \frac{n_1 m_2}{2} \cos\{\omega_1 t - \phi_1 + (\kappa_1 - \phi_1)\} = n_1 m_2 \left[\cos(\kappa_1 - \phi_1) \cos(\omega_1 t - \phi_1) - \frac{1}{2} \cos(\omega_1 t - \kappa_1) \right]$$

Wij krijgen nu in plaats van (2 - 22) als we ons beperken tot de aangegeven termen van de reeks:

$$\frac{Q_*^2}{(C^2 A^2 a_r)_m} \left[\left\{ n_0 m_1 - n_1 m_2 \cos(\kappa_1 - \phi_1) \right\} \cos(\omega_1 t - \phi_1) - \left\{ n_1 m_0 - \frac{n_1 m_2}{2} \right\} \cos(\omega_1 t - \kappa_1) \right]$$

Of omdat $\cos(\omega_1 t - \phi_1) = \frac{Q_1}{Q_1}$ en $\cos(\omega_1 t - \kappa_1) = \frac{h_1}{h_1}$:

$$\frac{Q_*^2}{(C^2 A_{a_r}^2)_m} \left[\{n_{0m_1} - n_{1m_2} \cos(\kappa_1 - \phi_1)\} \frac{Q_1}{Q_1} - \{n_{1m_0} - \frac{n_{1m_2}}{2}\} \frac{h_1}{h_1} \right] \quad (2 - 23)$$

termen met de frekwentie $2\omega_1$:

$$\frac{Q_*^2}{(C^2 A_{a_r}^2)_m} \left\{ -\frac{n_{1m_1}}{2} \cos(2\omega_1 t - \kappa_1 - \phi_1) \right. \\ \left. + n_{0m_2} \cos 2(\omega_1 t - \phi_1) \right. \\ \left. - \frac{n_{1m_3}}{2} \cos(2\omega_1 t - 3\phi_1 + \kappa_1) + \dots \right\}$$

termen met de frekwentie $3\omega_1$:

$$\frac{Q_*^2}{(C^2 A_{a_r}^2)_m} \left\{ n_{0m_3} \cos 3(\omega_1 t - \phi_1) + \right. \\ \left. - \frac{n_{1m_2}}{2} \cos(3\omega_1 t - 2\phi_1 - \kappa_1) + \dots \right\}$$

De termen met nog hogere frekwentie zijn niet meer aangegeven.

De termen uit het rechter lid van de bewegingsvergelijking (2 - 1) zijn nu herleid tot de volgende groepen van termen met een zelfde frekwentie:

konstante termen: (2 - 10) en (2 - 21) en (2 - 13)

termen met de frekwentie ω_1 : (2 - 11) en (2 - 23) en (2 - 14)

" " " " $2\omega_1$:

" " " " $3\omega_1$:

etc.

We volgen nu verder het principe van de Meervoudige Harmonische Methode.

Voor de bewegingsvergelijking kunnen we een uitdrukking schrijven met de volgende gedaante:

$$\frac{\partial h_0}{\partial x} + \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial x} + \dots = \boxed{\text{konstante termen}} + \boxed{\text{termen met } \omega_1} + \boxed{\text{termen met } 2\omega_1} + \dots$$

Aan een dergelijke vergelijking wordt voldaan indien:

$$\frac{\partial h_0}{\partial x} = \text{konstante termen}$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = \text{termen met de frekwentie } \omega_1$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial x} = \text{" " " " } 2\omega_1$$

etc.

Wij beperken ons tot konstante termen en termen met de frekwentie ω_1 .

Uit het bovenstaande blijkt duidelijk wat daarbij buiten beschouwing blijft.

Op de konsekwenties daarvan wordt later nog gewezen.

In plaats van de bewegingsvergelijking (2 - 1) beschouwen we de volgende vergelijkingen:

$$\frac{\partial h_0}{\partial x} = - \frac{\omega_1 \hat{Q}_1}{gA_m} \cdot \frac{\bar{n}_1}{2} \sin(\kappa_1 - \phi_1) - \frac{Q_*^2}{(C^2 A^2 a_r)_m} \left\{ n_o m_o - \frac{n_1 m_1}{2} \cos(\kappa_1 - \phi_1) \right\} +$$

(2 - 24)

$$- \frac{b \omega_1 \hat{h}_1 \hat{Q}_1}{gA_m^2} \sin(\phi_1 - \kappa_1)$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = - \frac{\bar{n}_o}{gA_m} \frac{\partial Q_1}{\partial t} - \frac{Q_*^2}{(C^2 A^2 a_r)_m} \left\{ (n_o m_1 - n_1 m_2 \cos(\kappa_1 - \phi_1)) \right\} \frac{Q_1}{Q_1}$$

$$(2 - 25) \quad - \left(n_1 m_o - \frac{n_1 m_2}{2} \right) \frac{h_1}{\hat{h}_1} \left\} + \frac{2b \omega_1 Q_o}{gA_m^2} \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

Om de verkregen uitdrukking (2 - 25) te vereenvoudigen worden de volgende grootheden ingevoerd:

$$k = \frac{Q_*^2}{(C^2 A^2 a_r)_{li}} \cdot \frac{1}{Q_1} \{ n_o m_1 - n_1 m_2 \cos(\kappa_1 - \phi_1) \}$$

$$\bar{k} = \frac{Q_*^2}{(C^2 A^2 a_r)_m} \cdot \frac{1}{h_1} \{ n_1 m_o - \frac{n_1 m_2}{2} \}$$

$$m = \frac{\bar{n}_o}{g A_m} \quad \text{en} \quad \bar{m} = \frac{2b_o Q_o}{g A_m^2}$$

We kunnen dan schrijven:

$$(2 - 26) \quad \frac{\partial h_1}{\partial x} = -m \frac{\partial Q_1}{\partial t} - k Q_1 + \bar{k} h_1 + \bar{m} \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

De nu ingevoerde grootheden m , k , $\bar{k}$ en $\bar{m}$ zijn konstant in de tijd en moeten voor een bepaalde plaats worden bepaald. Dit houdt in dat de grootheden Q_* , $\hat{Q}_1$, $\hat{h}_1$, $\cos(\kappa_1 - \phi_1)$ etc. bekend moeten zijn.

Praktisch betekent dit dat men deze grootheden zo goed mogelijk moet schatten voor de verschillende sekties van een rivier. Nadat de berekening is voltooid worden de uitkomsten met deze schattingen vergeleken, waardoor een betere schatting mogelijk is.

Indien nodig wordt de berekening met deze schattingen herhaald: ITERATIE-PROCES.

De vergelijking voor het middenstandsverhang (2 - 24) is nog te vereenvoudigen.

Met een beschouwing, die in dit stencil achterwege blijft, is aan te tonen dat in de meeste gevallen de bijdragen van de weerstandsterm sterk overheersen.

Voor een praktijk-probleem kan dit worden gecontroleerd.

In het volgende wordt voor de uitdrukking (2 - 24) aangehouden:

$$(2 - 27) \quad \frac{\partial h_o}{\partial x} = - \frac{Q_*^2}{(C^2 A^2 a_r)_m} \{ n_o m_o - \frac{n_1 m_1}{2} \cos(\kappa_1 - \phi_1) \}$$

Het herleiden van de continuïteitsvergelijking.

Als we in de vergelijking (2 - 2) de uitdrukkingen (2 - 3) en (2 - 4) voor h resp. Q substitueren, dan krijgen we:

$$(2 - 28) \quad \frac{\partial Q_o}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -b \{ \frac{\partial h_o}{\partial t} - \omega_1 \hat{h}_1 \sin(\omega_1 t - \kappa_1) \}$$

We hebben verondersteld dat Q_0 konstant in de x-richting, dus $\frac{\partial Q_0}{\partial x} = 0$.

Verder volgt uit het in (2 - 3) gestelde dat $\frac{\partial h_0}{\partial t} = 0$.

In de vergelijking (2 - 28) is b een functie van de waterstand $b = f(h)$.

We stellen daarom algemeen:

$$b = b_0 + \hat{b}_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1) + \dots$$

Voor (2 - 28) kunnen we dus schrijven:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = \{b_0 + \hat{b}_1 \cos(\omega_1 t - \kappa_1) + \dots\} \omega_1 \hat{h}_1 \sin(\omega_1 t - \kappa_1)$$

Indien we ons weer beperken tot termen met een hoekfrequentie ω_1 , dan krijgen we de volgende vergelijking:

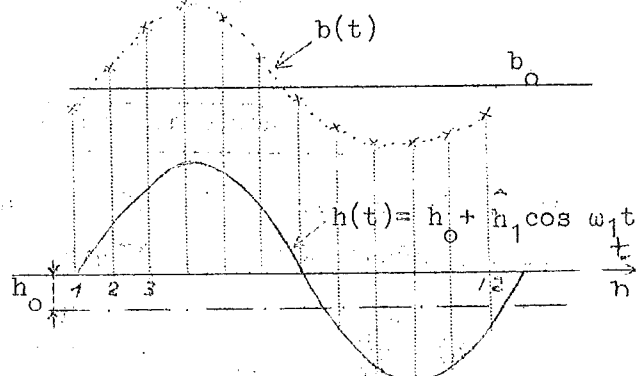
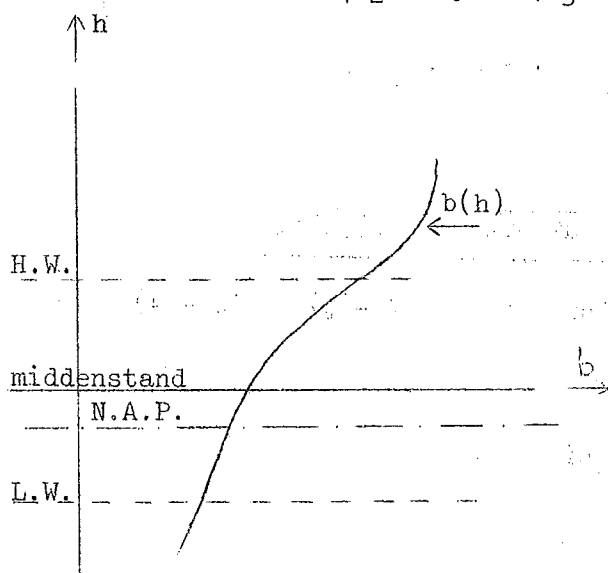
$$(2 - 29) \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -b_0 \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

Zoals reeds eerder is gesteld, wordt voor een bepaalde sectie een representatief dwarsprofiel bepaald. Hiervan zal b als functie van h b.v. verlopen zoals in onderstaande figuur is getekend. De grootte b_0 is nu b.v. als volgt te bepalen:

$$b_0 = \frac{\sum_{n=1}^{n=12} b(t_n)}{12}$$

Hierin is $b(t_n)$ een waarde van b, die behoort bij een hoogte h op een tijdstip $t_n = n \frac{T}{12} + t_0$. Nemen we $\omega_1 t_1 = 0$, dan is

$$\omega_1 t_2 = \frac{\pi}{6}, \quad \omega_1 t_3 = \frac{\pi}{3} \text{ etc.}$$



Het bepalen van b_0 , voor de verschillende sekties, kan overzichtelijk geschieden in een tabel. De amplitude h_1 en de middenstand h_0 moet worden geschat. In een tweede berekening (iteratie, zie blz. 21) moet de waarde b_0 eventueel worden herzien. De fasehoek κ_1 speelt bij de bepaling van b_0 geen rol.

Zoals uit de figuur blijkt, zal de waarde b_0 in de meeste gevallen groter zijn dan de waarde van b , die behoort bij $h = h_0$. Dit is een gevolg van het niet lineair zijn van $b(h)$.

§ 3. Samenvatting.

In het voorgaande zijn de oorspronkelijke DVn (2 - 1) en (2 - 2) afgeleid tot de volgende DVn:

$$\frac{dh_o}{dx} = - \frac{Q_o^2}{(C^2 A^2 a_r)_m} \left\{ n_o m_o - \frac{n_1 m_1}{2} \cos (\kappa_1 - \phi_1) \right\} \quad (2 - 27)$$

$$\text{waarbij } \frac{\partial Q_o}{\partial x} = 0 \text{ en } \frac{\partial h_o}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial h_1}{\partial x} = - m \frac{\partial Q_1}{\partial t} - k Q_1 + \bar{k} h_1 + \bar{m} \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (2 - 26)$$

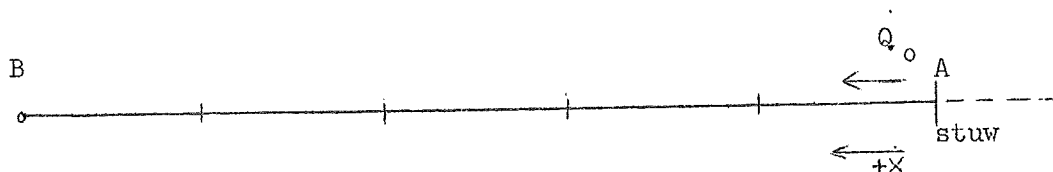
$$\frac{\partial Q_1}{\partial x} = - b_o \frac{\partial h_1}{\partial t} \quad (2 - 29)$$

Bij het afleiden van deze DVn is verondersteld dat de funkties h en Q de volgende gedaante hebben:

$$h(x, t) = h_o(x) + h_1(x) \cos \{ \omega_1 t - \kappa_1(x) \}$$

$$Q(x, t) = Q_o + Q_1(x) \cos \{ \omega_1 t - \phi_1(x) \}$$

Met bovenstaande DVn is een analytische oplossing mogelijk voor problemen, waarbij een in de tijd sinusvormige lange golf zich voortplant in b.v. een benedenrivier terwijl zich tevens een konstant debiet Q_o voordoet. Een dergelijk probleem is in onderstaande figuur schematisch weergegeven.



De rivier is in de x-richting verdeeld in een aantal sekties.

De randvoorwaarden zijn:

$$\text{in B gegeven} \quad h(x_B, t) = h_o(x_B) + \hat{h}_1(x_B) \cos \{ \omega_1 t - \kappa(x_B) \}$$

$$\text{in A gegeven} \quad Q(x_A, t) = Q_o$$

De vergelijking (2 - 27) beschrijft het verloop van de middenstand h_0 .

Omdat h_0 alleen met x varieert, kan een oplossing worden verkregen door de vergelijking te integreren in de x -richting.

Als wordt verondersteld dat over een sectie met beperkte lengte $\frac{dh_0}{dx}$ lineair verloopt, dan kan men schrijven:

$$h_0(x + \Delta x) = h_0(x) + \Delta x \left(\frac{dh_0}{dx} \left(x + \frac{1}{2}\Delta x \right) \right)$$

Dat wil dus zeggen dat de waarde van $\frac{dh_0}{dx}$ wordt bepaald in het midden van de sectie met lengte Δx .

In het rechter lid van vergelijking (2 - 27) komen twee termen voor, die voortkomen uit de weerstandsterm.

De eerste term blijkt de invloed van het konstante debiet Q_0 weer te geven.

De tweede term heeft de invloed weer, die de komponent Q_1 blijkt te hebben op het verloop van de middenstand h_0 . Dit is een gevolg van het niet-lineaire karakter van de weerstandsterm.

Het verloop van de functies h_1 en Q_1 kan worden verkregen door middel van het oplossen van het stelsel DVn (2 - 26) en (2 - 29). Zoals uit de afleidingen in het voorgaande blijkt, zijn de "konstante" factoren m , k , $\bar{k}$, $\bar{m}$ en b_0 afhankelijk van de grootheden als Q_* , $\hat{Q}_1$, h , $\cos(\kappa_1 - \phi_1)$ etc.

Bij een praktische uitvoering van een berekening is men daarom genoodzaakt om een iteratie-proces uit te voeren.

Omdat in de x -richting wordt gerekend over betrekkelijk korte vakken (sektielengte Δx) wordt voor het midden van elk vak de waarde van de benodigde grootheden zo goed mogelijk geschat. Nadat de berekening volledig is uitgevoerd, worden de uitkomsten met de schattingen vergeleken, waardoor betere schattingen mogelijk zijn. etc.

Omdat sinds ± 1968 numerieke oplossingsmethoden een steeds grotere praktische betekenis hebben gekregen, wordt het oplossen van de vergelijkingen (2 - 26) en (2 - 29) hier niet nader besproken. Indien men de Enkelvoudige Harmonische Methode met Bovenafvoer voor een bepaald probleem wil toepassen kan men zich voor nadere gegevens wenden tot de medewerkers van de vakgroep Vloeistofmechanica.

De reden, dat aan het herleiden van de DVn de nodige aandacht wordt besteed, is dat hiermee een goed inzicht in het fysisch verschijnsel kan worden verkregen. Tijdens de afleidingen blijkt steeds duidelijk welke invloeden worden verwaarloosd.

De grootheden in de oorspronkelijke DVn worden benaderd door reeksen (ZIE b.v. de uitdrukkingen (2 - 5) en (2 - 6), (2 - 7) en (2 - 8), (2 - 9)). Omdat de termen in de DVn niet lineair zijn vinden we bij deze benadering produkten van sinus- en cosinus-termen.

Als de gevonden uitdrukkingen nader worden uitgewerkt vindt men termen met verschillende frekwenties.

Als men uitgaat van enkelvoudige sinusvormige funkties h en Q met een frekwentie ω_1 blijken b.v. voor de weerstandsterm naast termen met de frekwentie ω_1 (zie uitdrukking (2 - 22)) ook konstante termen (zie uitdrukking (2 - 21)) en termen met een frekwentie $2\omega_1, 3\omega_1, \dots$ een rol te spelen.

We kunnen deze resultaten aan de hand van het hierboven geschetste probleem nader interpreteren.

De randvoorwaarde in B is een in de tijd sinusvormige variërende waterstand.

Als gevolg van het niet-lineair karakter van de DVn zullen de funkties h in landinwaarts gelegen punten aan vervorming onderhevig zijn. Ook de funkties Q in B en in landinwaarts gelegen punten zullen componenten bevatten met hogere frekwenties.

Als gevolg van het niet-lineaire karakter van de DVn worden in het systeem hoger harmonischen opgewekt.

Met de in § 2 behandelde theorie is een goed beeld mogelijk van de verschijnselen, die zich in de natuur voordoen.

Indien men in verband met het rekenwerk de termen met een frekwentie $2\omega_1, 3\omega_1, \dots$ niet in de beschouwingen betreft, dan zullen de resultaten slechts enkelvoudige sinusvormige funkties opleveren.

Voor problemen, waarbij de bovenbedoelde invloeden een belangrijke rol spelen, zal men tegenwoordig een z.g. differentie-methode toepassen.

Voor problemen, waarbij gesteld mag worden $Q_0 = 0$, gaan de vergelijkingen (2 - 26) en (2 - 29) over in de volgende vergelijkingen:

$$(2 - 30) \quad \frac{\partial h_1}{\partial x} = -m \frac{\partial Q_1}{\partial x} - k Q_1$$

$$(2 - 31) \quad \frac{\partial Q_1}{\partial x} = -b_0 \frac{\partial h_1}{\partial t}$$

$$(Q_0 = 0 \rightarrow m_0 = 0, m_2 = 0, \bar{k} = 0 \text{ en } \bar{m} = 0)$$

De vergelijkingen (2 - 30) en (2 - 31) komen overeen met differentieaal-vergelijkingen, die in het kollege b 73A reeds zijn afgeleid ("methode Lorentz").

Literatuur-opgave.

- 1 . "Verslag Staatscommissie Zuiderzee"

Prof. Dr. H.A. Lorentz, 1918 - 1926.

- 2 . "De berekening van getijden en stormvloeden op benedenrivieren"

Proefschrift, ir. J.P. Mazure, 1937

- 3^{*} . "Een bijdrage tot de kennis van de getijberekening op benedenrivieren"

H.J. Strobant, "De Ingenieur", nr.36, 1947

- 4^{*} . "Methoden van getijberekening"

Dr. J.J. Dronkers,

"De Ingenieur", nr.49, 1947.

- 5 . "Tidal computations in rivers and coastal waters"

Dr. J.J. Dronkers 1964.

* zie opgenomen overdruk

Voor het oplossen van dit stelsel lineaire DVn wordt hier verwezen naar het betreffende kollege-diktaat.

In het kollege b 73B zal een praktische toepassing van de Enkelvoudige Harmonische Methode zonder Bovenafvoer worden besproken.

Voor hetzelfde probleem worden in dit kollege de resultaten van verschillende oplossingsmethoden onderling vergeleken.

Delft, december 1971.

H.J. Strobant

C. Verspuy

Getijberekeningen voor benedenrivieren

ir. C. Verspuij

ir. H.J. Strobant

dr. J.J. Dronkers

Getijberekeningen voor benedenrivieren

- * Overzicht van het college b73B
- * C. Verspuy, De exacte methode (blz 1 ⁴/m 4)
 - Schaadregels (4 blz)
 - Getijberekening voor de Lek (blad 1 ⁴/m 20)
 - Getijberekening voor de Westerschelde (4 blz)
- * C. Verspuy en H.J. Strobant, De harmonische methode (blz 1 ⁴/m 27)
 - H.J. Strobant, Getijberekening op benedenrivieren
(de ingenieur 5-9-'47, blz B89 ⁴/m B95)
 - dr. J.J. Dronkers, Methoden van getijberekening
(de ingenieur 5-12-'47, blz B121 ⁴/m B137)
- * C. Verspuy, Differentiëmethode (blz 1 ⁴/m blz 24)
 - Getijberekening voor de Lek volgens de
impliciete methode (blad 1 ⁴/m 3)
 - Het programma CHERIE (blz 1 ⁴/m 8)
 - Getijberekening volgens de expliciete
methode (2 bladen)
 - dr. J.J. Dronkers, Tidal Computations for Rivers,
Coastal Areas and Seas
(ASCE - Hydraulics Division, jan '69 p. 29 ⁴/m 77)

mei 1975

College
nr.

1. **OVERZICHT** Uitgangspunten. Relatie met college b 73A.
 Toetsprobleem ,
 Integratie m.b.v. Karakteristieken (uit b 73A herh.)
 Differentie-methoden (a)
 Exakte Methode (b)
 Harmonische Methode (c)
 Waarom (b) en (c) nog behandeld ?

2. **"Exakte" Methode** Theorie slechts 1 pagina.
 Gegevens toetsprobleem.
3. Toepassing
 Bespreking resultaten } (I)

4. Bepaling waarden voor de coëff. van de Chézy in de praktijk.
 Het bepalen van een debiet-kromme uit twee (gemeten) h-krommen;
 voorbeeld Nieuwe Waterweg.
 Momentane verhanglijnen. Het belang van de bovengenoemde methode
 voor "Controle-berekeningen".
 Het getij op de Wester Schelde. Overzicht : Differentie-methoden
 Harm. Methode (korte inl.)

5. **Harmonische Methode** Principe ; herleiden D.V.n , lineariseren van
 weerstandsterm onder verwijzing naar b 73A.
6. Een beter begrip van de niet-lineaire D.V. mogelijk door analytische
 benadering.
7. Het oplossen van lineaire D.V.n , aansluiting bij b 73A, rekenen met
 complexe functies; z.g. vierpool-vergelijkingen (korte herhaling op
 basis van een gemeenschappelijk dictaat).
 Interpretatie analytische oplossing.
8. Toepassing .
 Bespreken oplossing voor toetsprobleem. } (II)
 Invoeren randvoorwaarden.
 Interpretatie resultaten , vergelijken met resultaten exakte methode.

9. **DIFFERENTIE-METHODEN** Vervangen differentiaal-quotienten door dif-
 ferentie-quotienten, foutbeschuwing.
 Beginvoorwaarden; randvoorwaarden.
 Differentie-vergelijkingen;
 overzicht differentie-methoden.

10. **Expliciete differentie-methoden.**
 Leap-frog-methode; Programma CHERIE van Ir. N. Booijs.
 Andere methoden .
 Splitsingspunten, schematisatie, toepassing
 oplossing voor toetsprobleem } (III)

11. **Impliciete differentie-methoden.**
 Verschillende mogelijkheden.
 Ontwikkelingen bij de Rijkswaterstaat, T.H. en elders.
12. Uitvoering Rijkswaterstaat. Toepassing toetsprobleem (IV)
 Samenvatting college. Model- en schaalregels.

13. Inleiding excursie; rondleiding en explikatie analoge rekenmachine
 de "DELTAR" van de Rijkswaterstaat.
 (In het kader van de oefeningen b 73A wordt reeds aandacht besteed
 aan het model M 900 van het Waterlopkundig Laboratorium).

b73A

open leidingen
 gesloten leidingen
 hoogwatergolven
 translatiegolven
 waterslag
 periodieke golven

b73B

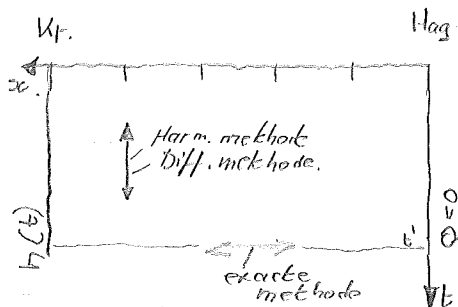
open leidingen
 getijgolven en
 "gemengd" karakter
 min of meer periodiek
 geen discontinuïteit
 2-dimensionaal

Voor een getijgolf $T = 44.700 \text{ sec}$
 Dus bij een diepte van ca 10 m
 $\lambda = 400 \text{ km}$ voor Oosterschelde: $\frac{\lambda}{L} = 1/7$

Voor een seiche $T \approx 7000 \text{ s}$
 Dus bij een diepte van ca 10 m
 $\lambda = 70 \text{ km}$ voor Haver (3 km) $\frac{\lambda}{L} = 1/7$

Hier worden verhoudingen genomen van $\frac{\lambda}{L} < 20$

Het één-dimensionale karakter geldt wel bij een riviermond, maar op zee in de monding geldt dit niet. Dan moeten er 2 dimensionale beschouwingen op los gelaten worden. De stroming bij waddeneilanden is wel één-dimensionaal te berekenen. Er wordt bij dit college maar één stuk beschouwd als voorbeeld wordt genomen het veld - krimpen - Hagestein. De stuw bij Hagestein is gesloten. Dus in Hagestein is de $Q = 0$. In krimpen wordt de functie $h(x)$ bekend verondersteld.

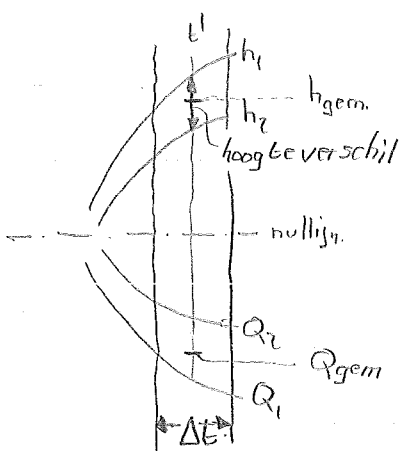


De 1-ee diff. vgl. zijn: $\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{c^2 A R} Q |Q| + \frac{2b}{gA} Q \frac{\partial h}{\partial t}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -b \frac{\partial h}{\partial t}$$

Het dwarsprofiel is een functie van x . Voor een bepaalde lengte wordt een representatief dwarsprofiel vastgesteld. Voor elke oplossingsmethode moet op deze wijze geschaatst worden in de x -richting.

De exacte methode rekent op constante plaats (dus rekent zowel vooruit als achteruit in de tijd). Deze methode is daarom niet programmeerbaar.



$$\text{vgl 1): } h_2 - h_1 = -M \dot{Q}_g - W |Q_g| Q_g + B_c \dot{Q}_g h_g$$

$$\text{vgl 2): } Q_2 - Q_1 = B h_g$$

als op t' bekend zijn, dan invullen in de 2 vgl. Q_g en h_g , evenals $\dot{Q}_g$ en $\dot{h}_g$, dit zijn de afgeleiden in die punten.

$$\text{Voor } \dot{Q}_g \text{ kun je ook zeggen } \frac{\Delta Q}{\Delta t} \text{ en ook } \dot{h}_g = \frac{\Delta h}{\Delta t}$$

Nem voor Δt een vaste waarde, die je in de constanten, stopte.

$$\text{De vgl. worden dan } h_2 - h_1 = M \Delta Q_g + W |Q_g| Q_g + B_c Q_g \Delta h_g$$

$$Q_2 - Q_1 = +B_g \Delta h_g$$

De beterswisseling vindt zijn oorsprong in het feit dat de Q in de andere richting positief als de x .

→ +x
 ← +Q

De "Exacte Methode"

De z.g. Exacte Methode is voor het eerst toegepast in de periode, waarin de Enkelvoudige Harmonische Methode (Lorentz) is ontwikkeld. De nu wat misleidende naam is een gevolg van het feit dat de termen in de differentiaal-vergelijkingen niet gelineariseerd worden. In eerste instantie werd gebruik gemaakt van reeksontwikkelingen naar x volgens Taylor. Later werd ingezien dat een eenvoudiger benadering mogelijk is, door bij het integreren naar x een "middelwaarde-stelling" toe te passen.

In het onderstaande wordt eerst het principe van de methode kort aangegeven, waarbij de laatstbedoelde benadering wordt gevolgd.

Daarna wordt m.b.v. reeksontwikkelingen volgens Taylor nagegaan wat de orde van grootte is van de "fouten", die bij het toepassen van de middelwaarde-stelling worden gemaakt.

Tenslotte worden enkele opmerkingen gemaakt over de betekenis van de methode op dit moment.

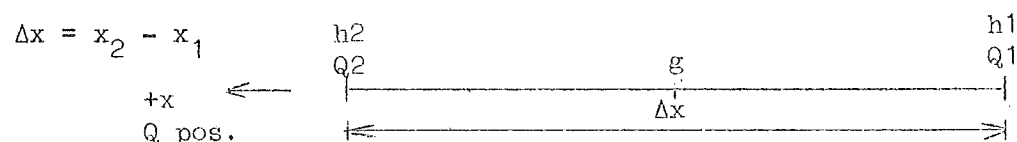
$$\text{Bew. verg.} \quad : \quad \frac{\partial h}{\partial x} = -m \frac{\partial Q}{\partial t} \mp w Q^2 + b_e Q \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{----(1)}$$

$$\text{Cont. verg.} \quad : \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -b \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{----(2)}$$

$$h(x, t), Q(x, t); m = \frac{1}{g A}, w = \frac{1}{C^2 A^2 a_r}, b_e = \frac{2b}{g A^2} \text{ en } b \text{ zijn functies van } x \text{ en } t.$$

Zoals op het kollege wordt besproken, wordt een riviervedeelte verdeeld in vakken met een beperkte lengte. Voor elk vak wordt een representatief dwarsprofiel en een waarde voor de koëfficiënt C vastgesteld.

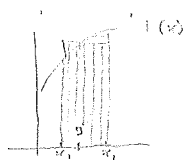
Na een dergelijke schematisatie kunnen de factoren m , w , b_e en b voor een bepaald vak konstant worden gesteld in de x -richting. De variatie van deze factoren met de tijd t kan worden verdiskonteerd. Beschouwd wordt een vak met de vaklengte Δx (zie figuur).



Integratie door toepassing van de "middelwaarde-stelling":

Partiële integratie van de verg. (1) en (2) naar x geeft:

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial h}{\partial x} dx &= \int -m \frac{\partial Q}{\partial t} dx \mp \int w Q^2 dx + \int b_e Q \frac{\partial h}{\partial t} dx \\ \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx &= \int -b \frac{\partial h}{\partial t} dx \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{integr. grenzen } x_1 \text{ en } x_2 \\ \text{staat voor } \int_{x_1}^{x_2} \end{array} \right.$$



$$\int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = F(g) * (x_2 - x_1) \quad x_1 < g < x_2$$

- 2 -

Passen we de middelwaarde-stelling toe dan mogen we schrijven:

$$h_2 - h_1 = -\Delta x \cdot m \cdot \dot{Q}(g) + \Delta x \cdot w \cdot Q^2(g) + \Delta x \cdot b_e \cdot Q(g) \cdot \dot{h}(g) \quad \text{-----}(3)$$

$$Q_2 - Q_1 = -\Delta x \cdot b \cdot \dot{h}(g) \quad \text{-----}(4)$$

of:

$$h_2 = h_1 - M \cdot \dot{Q}(g) + W \cdot Q^2(g) + B_e \cdot Q(g) \cdot \dot{h}(g) \quad \text{-----}(5)$$

$$Q_2 = Q_1 - B \cdot \dot{h}(g) \quad \text{-----}(6)$$

De ligging van het punt g op het interval $x_1 - x_2$ is afhankelijk van het verloop van de functie onder een integraalteken. Omdat g steeds in het midden van het vak wordt gekozen, wordt een fout geïntroduceerd.

De vergelijkingen (5) en (6) geven op elk tijdstip betrekkingen tussen de functies $h_2(t)$ en $Q_2(t)$ op vakgrens 2 en de functies $h_1(t)$ en $Q_1(t)$ op de vakgrens 1.

De factoren M , W , B_e en B (functies van t) worden bepaald door de vaklengte Δx en de vorm van het representatief dwarsprofiel van elk vak. Het verloop van deze factoren met de waterstand kan grafisch worden weergegeven.

Tijdens een berekening kan de waarde voor elk der factoren worden ingevoerd door deze af te lezen bij de momentane waarde van $h(g)$.

De waarden voor $\dot{Q}(g)$, $Q^2(g)$, $\dot{h}(g)$ en $h(g)$ worden bepaald uit het verloop van de functies $h(t)$ en $Q(t)$ in het midden van een vak.

Als wordt aangenomen dat de functies h en Q lineair verlopen over een vak, zijn $h(g)$ en $Q(g)$ steeds het gemiddelde van h_1 en h_2 resp. Q_1 en Q_2 .

Zoals uit het bovenstaande blijkt is de voorbereiding van een oplossing volgens de z.g. exacte methode erg eenvoudig. Op het college wordt een praktische toepassing van de oplossingsmethode besproken. Zoals daarbij blijkt zijn aan het vinden van een oplossing nog wel enige moeilijkheden verbonden.

Hierna worden eerst enige opmerkingen gemaakt over de nauwkeurigheid van de benadering m.b.v. de vergelijkingen (3) en (4).

In het algemeen is het mogelijk om een inzicht in de nauwkeurigheid van een differentie-benadering te verkrijgen, door de daarbij gebruikte uitdrukkingen te vergelijken met uitdrukkingen, die kunnen worden verkregen m.b.v. reeks-ontwikkelingen volgens Taylor.

Het is mogelijk om voor een vak met lengte Δx voor h_2 en h_1 de volgende uitdrukkingen te schrijven:

$$h_2 = h_g + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial h_g}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{4 \cdot 2!} \frac{\partial^2 h_g}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{8 \cdot 3!} \frac{\partial^3 h_g}{\partial x^3} + \dots \quad (7)$$

$$h_1 = h_g - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial h_g}{\partial x} + \frac{x^2}{4 \cdot 2!} \frac{\partial^2 h_g}{\partial x^2} - \frac{x^3}{8 \cdot 3!} \frac{\partial^3 h_g}{\partial x^3} + \dots$$

----- aftrekken geeft dan:

$$h_2 - h_1 = \Delta x \frac{\partial h_g}{\partial x} + \frac{\Delta x^3}{4 \cdot 3!} \frac{\partial^3 h_g}{\partial x^3} + \dots \quad (8)$$

De uitdrukking (8) kan worden vergeleken met de uitdrukking (3), waarin de termen in het rechterlid samen gelijk zijn aan $\Delta x \frac{\partial h_g}{\partial x}$. Doet men dit dan blijkt dat de verwaarlozing in de benadering (3) kan worden uitgedrukt als:

$$+ \frac{\Delta x^3}{4 \cdot 3!} \frac{\partial^3 h_g}{\partial x^3} + \dots \quad (9)$$

Het is mogelijk om $\frac{\partial^3 h_g}{\partial x^3}$ te bepalen door de bew. verg. (1) tweemaal naar x te differentiëren.

Men kan b.v. schrijven:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -m \frac{\partial^2 Q}{\partial t \partial x} + 2wQ \frac{\partial Q}{\partial x} + \dots \quad (10)$$

De bijdrage van de Bernoulli-term wordt verwaarloosd.

Als we rekening houden met de cont. verg. (2) kan voor (10) geschreven worden:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -mb \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + 2bwQ \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11)$$

Hoewel we hier niet verder op ingaan, blijkt uit (10) en (11) hoe hogere afgeleiden (in een reeks van Taylor (7)) kunnen worden uitgedrukt met behulp van de vergelijkingen (1) en (2). Bij de eerste toepassingen van de methode ging men op deze wijze te werk.

Als men in de reeks (7) voor h_g de funktie h_1 en voor $\frac{\Delta x}{2} = \Delta x$ neemt, dan vindt men een uitdrukking die met de vergelijking (3) kan worden vergeleken. Voor een ongeveer gelijke nauwkeurigheid zou men van de reeks de term met de tweede afgeleide moeten meenemen.

Omdat het bepalen van de hogere afgeleiden veel tijd vergde, werd in de praktijk later gewerkt met de vergelijkingen (3) en (4).

Bij het bespreken van een uitgewerkt voorbeeld (toetsprobleem) zal blijken dat men bij het toepassen van de exacte methode voor praktische problemen op enige moeilijkheden stuit.

Vooraf om didaktische redenen is deze benadering echter ook nu nog van belang.

De benaderingsmethode schept de mogelijkheid om op eenvoudige wijze controleberekeningen uit te voeren:

- a. ter beoordeling van meetresultaten;
- b. bij het beoordelen van resultaten, die met een computerberekening worden verkregen.

JANUARI 1972, C. Verspuy.

College b 73

Schaalregels t.b.v. een model voor lange golven in open leidingen

In het hierna volgende wordt ervan uitgegaan, dat de voortplanting van een lange golf in een open leiding kan worden beschreven met de volgende D.V.:

$$\text{Bewegingsvergelijking: } \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial s} = -g \frac{\partial h}{\partial s} - g \frac{v v}{C R} + (b - b_s) \frac{v}{A} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

$$\text{Continuïteitsverg. : } \frac{\partial Q}{\partial s} = -b \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2)$$

$$\text{Hierin is } Q = v A = v b_s a = v b_s (a_m + h) \quad (3)$$

en verder $C = \text{de coëfficiënt van de Chézy}$

$R = \text{de hydraulische straal (ook wel } a_r)$

In een model moeten dezelfde vergelijkingen gelden als in het prototype. Dit houdt onder meer in dat de stroming in het model turbulent moet zijn (zie weerstandsterm).

Men zal uit metingen in een model voor het prototype willen vaststellen (voorspellen) :

- de waterstand h
- de gemiddelde stroomsnelheid v
- het debiet Q

als functie van de tijd t en van de plaatscoördinaat s .

Als men definieert een schaalfactor $n = \frac{\text{waarde prototype}}{\text{waarde model}}$,

dan kan men stellen voor:

$$\text{snelheden } v_p = n_v v_m,$$

$$\text{waterstanden } h_p = n_h h_m,$$

$$\text{tijdsverschillen } (\Delta t)_p = n_t (\Delta t)_m,$$

$$\text{debieten } Q_p = n_Q Q_m, \text{ etc.}$$

Indien men deze uitdrukkingen substitueert in de vergelijking (1) dan vindt men:

$$\frac{n_v}{n_t} \frac{\partial v_m}{\partial t_m} + \frac{n_v^2}{n_s} v_m \frac{\partial v_m}{\partial s_m} = - \frac{n_g n_h}{n_s} g \frac{\partial h}{\partial s} \dots\dots\dots\text{etc.} \quad (4)$$

De vergelijking (4) geeft alleen dan een bewegingsvergelijking voor het model, die overeenkomt met vergelijking (1), als de factoren

$$\frac{n_v}{n_t}, \quad \frac{n_v^2}{n_s} \quad \text{etc.} \quad \text{gelijk zijn aan dezelfde constante.}$$

Uit het bovenstaande volgt dat bij het werken met een model rekening gehouden moet worden met een aantal schaalregels. Een schaalregel volgt uit het gelijkstellen van de schalen van twee termen uit eenzelfde vergelijking.

In het volgende wordt gesteld $R \propto a$, zodat $n_R = n_a$ en verder $n_{a_m} = n_a$ en $n_g = 1$

Voor de laatste term van (1) kan men 2 termen schrijven:

$$+b \frac{v}{A} \frac{\partial h}{\partial t} - b_s \frac{v}{A} \frac{\partial h}{\partial t}$$

Stellen we de schaal van deze termen gelijk, dan volgt daar direkt uit, dat

$$n_b = n_{b_s} \quad (5)$$

$$\text{Evenzo volgt uit (3) dat } n_A = n_{b_s} n_a \quad (6)$$

$$\text{en } n_a = n_h \quad (7)$$

$$\text{Uit (6) volgt met (5) en (7) dat } n_A = n_b n_h \quad (8)$$

Door de schaal van de termen van vergelijking (1) achtereenvolgens gelijk te stellen kunnen de volgende schaalregels worden opgesteld:

$$\frac{n_v}{n_t} = \frac{n_v^2}{n_s} \quad \text{of} \quad \boxed{n_v = \frac{n_s}{n_t}} \quad (9)$$

$$\frac{n_v}{n_t} = \frac{n_g n_h}{n_s} \quad \text{of met (9)} \quad \boxed{n_v^2 = n_g n_h} \quad (10)$$

$$\text{of omdat } n_g = 1 \quad \boxed{n_v^2 = n_h} \quad (10')$$

$$\frac{n_h}{n_s} = \frac{n_v^2}{n_c^2 n_h} \text{ of met } (10^1) \quad \boxed{\frac{n_h}{n_s} = \frac{1}{2 n_c}} \quad (11)$$

$$\frac{n_g n_h}{n_s} = \frac{n_b n_v n_h}{n_b n_h n_t} = \frac{n_v}{n_t} \quad \text{hetgeen overeenkomt met (10)}$$

Uit (2) volgt nog de betrekking:

$$\frac{n_Q}{n_s} = \frac{n_b n_h}{n_t} \text{ of met (8)} \quad \boxed{n_Q = n_b n_h n_v} \quad (12)$$

Hetgeen met (5) ook direct volgt uit (3).

In een model moet na de betrekkingen (5), (6), (7) en (8) worden voldaan aan de schaalregels (9), (10^1) , (11) en (12).

Omdat in deze laatste 4 betrekkingen 7 grootheden voorkomen, kunnen de schalen van 3 grootheden vrij worden gekozen, b.v.:

- 1e. n_h , n_s en n_b of
- 2e. n_h , n_b en n_c of
- 3e. n_h , n_b en n_t

N.B. Omdat aan de schaalregels (9), (10^1) , (11) en (12) moet worden voldaan kunnen we b.v. niet n_v , n_t en n_s alle 3 willekeurig kiezen.

Met de keuze 1e is het mogelijk een model te vertrekken door de lengteschaal n_s en de hoogteschaal n_h niet gelijk te kiezen (zie toepassing).

Indien de weerstand verwaarloosd wordt, kan de voortplantingssnelheid van een verstoring c worden uitgedrukt met de vergelijking:

$$c = \sqrt{\frac{g b_s a}{b}} \quad \text{of} \quad c^2 = \frac{g a b_s}{b} \quad (13)$$

Uit (13) volgt de volgende schaalregel:

$$n_c^2 = n_g \cdot n_a \frac{n_{b_s}}{n_b} \text{ of met (5) en (7):}$$

$$n_c^2 = n_g n_h$$

Vergelijken we deze laatste betrekking met (10) dan blijkt dat:

$$n_c^2 = n_v^2 \quad \text{of} \quad \frac{n_v}{n_c} = 1 \quad \text{of} \quad n_{\left(\frac{v}{c}\right)} = 1 \quad (14)$$

De verhouding $\frac{v}{c} = \frac{v}{\sqrt{ga}}$ is een getal van Froude, d.w.z. een verhouding tussen een karakteristieke snelheid en de wortel uit g maal een karakteristieke lengtemaat.

De betrekking (14) zegt, dat de schaal van de verhouding tussen de snelheid van de waterdeeltjes en de voortplantingssnelheid van een verstoring gelijk 1 moet zijn.

In een model moet deze verhouding dus gelijk zijn aan die van het prototype.

Toepassing:

Voor een mathematisch model van een getijprobleem wordt gekozen:

$$n_h = 1, \quad n_s = 10^4 \quad \text{en} \quad n_b = 10^3.$$

De voorwaarde voor turbulente stroming kan uiteraard buiten beschouwing blijven.

De schaalfactoren voor de grootheden v , t , C en Q volgen dan resp.:

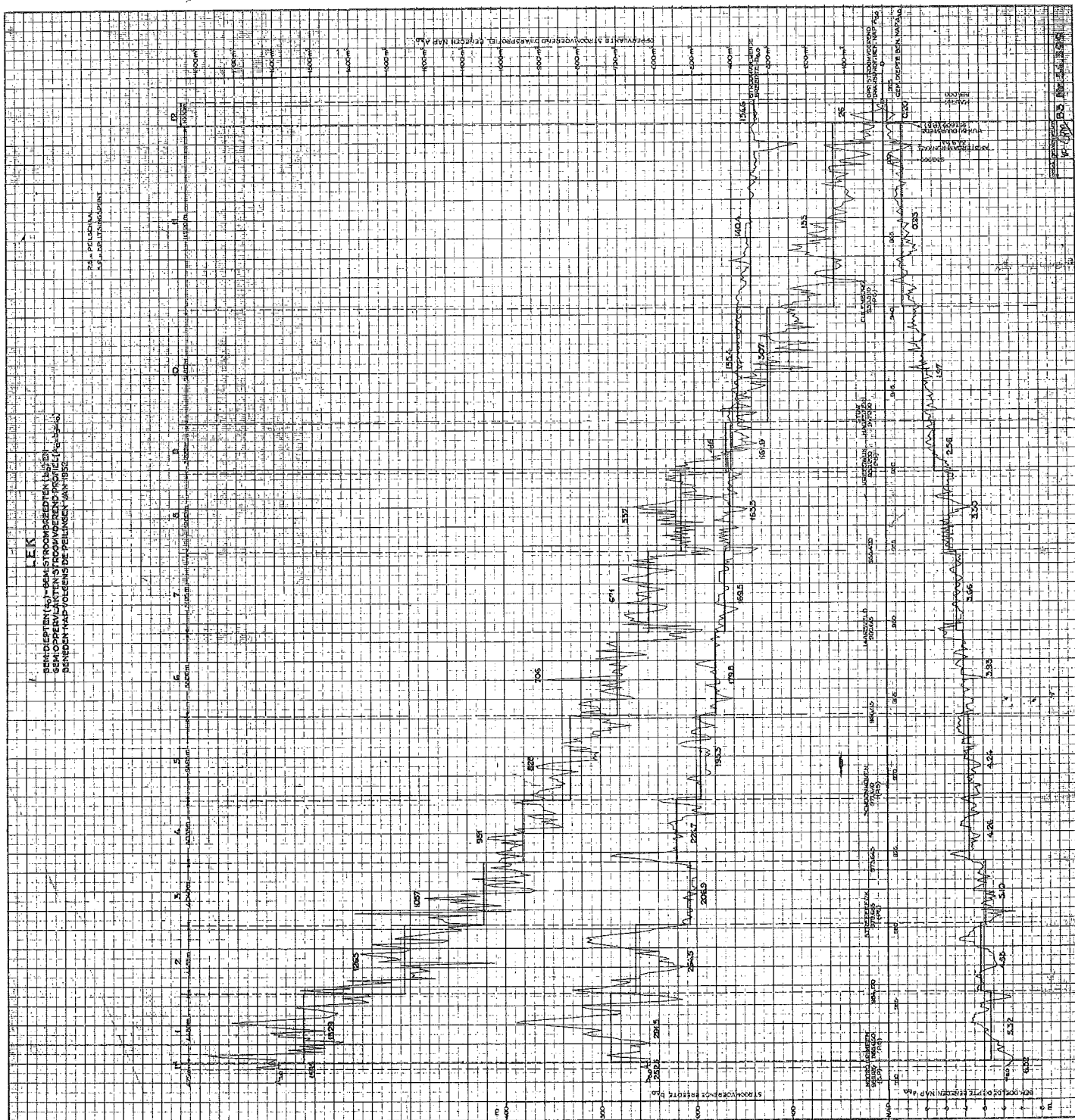
uit (1)	$n_v =$	1
uit (9)	$n_t = \frac{n_s}{nv} =$	10^4
uit (11)	$n_c = \frac{n_s^{\frac{1}{2}}}{n_h} =$	$(10^4)^{\frac{1}{2}} = 10^2$
uit (12)	$n_Q = n_b =$	10^3

Indien alle waarden voor n zijn bepaald, kan men een model van het prototype bouwen door de afmetingen en de coëff. van de Chézy met de schaalfactoren in overeenstemming te brengen.

De randvoorwaarden moeten nu met de juiste schalen worden gerealiseerd.

Na het meten van waterstanden en snelheden in het model kunnen deze worden "vertaald" in waarden voor het prototype.

volk 1 en 2 = volk 1
 volk 3 en 4 = volk 2
 volk 5 en 6 = volk 3
 volk 7 en 8 = volk 4
 volk 9 = volk 5



SECTIE AFMETINGEN LEK (Krimpen o/d Lek - Hagestein)

Krimpen - Streefkerk
vak 1

lengte	8965 m
breedte	277 m
diepte	5,07 m - N.A.P.
C	50 m $\frac{1}{2}$ /sec

Streefkerk - Schoonhoven
vak 2

lengte	8075 m
breedte	215 m
diepte	4,68 m - N.A.P.
C	50 m $\frac{1}{2}$ /sec

Schoonhoven - Jaarsveld
vak 3

lengte	10995 m
breedte	187 m
diepte	4,07 m - N.A.P.
C	50 m $\frac{1}{2}$ /sec.

Jaarsveld - Vreeswijk
vak 4

lengte	10395 m
breedte	167 m
diepte	3,48 m - N.A.P.
C	50 m $\frac{1}{2}$ /sec

Vreeswijk - Stuw Hagestein
vak 5

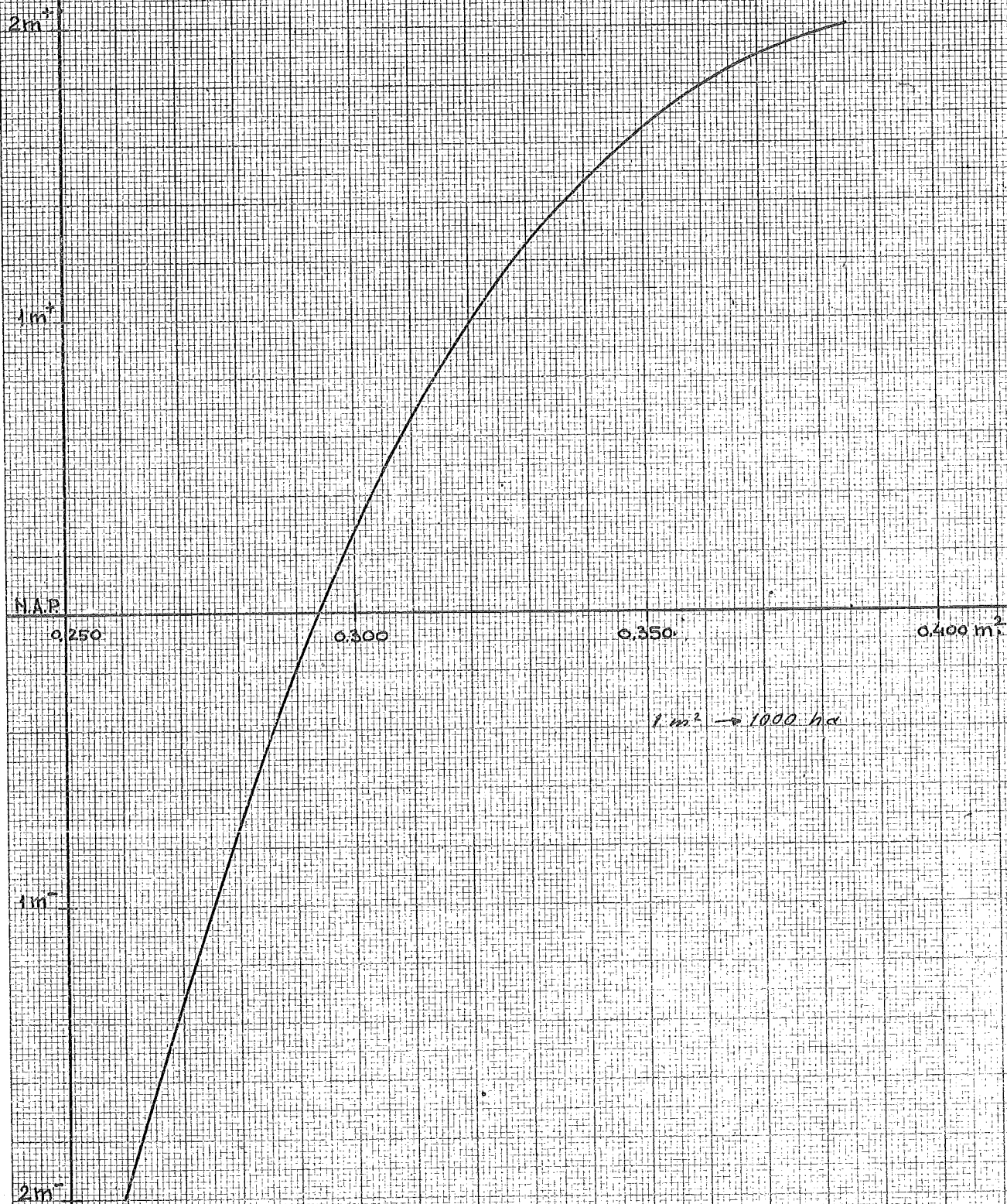
lengte	3220 m
breedte	160 m
diepte	2,56 m - N.A.P.
C	50 m $\frac{1}{2}$ /sec

Krimpen - Stuw Hagestein

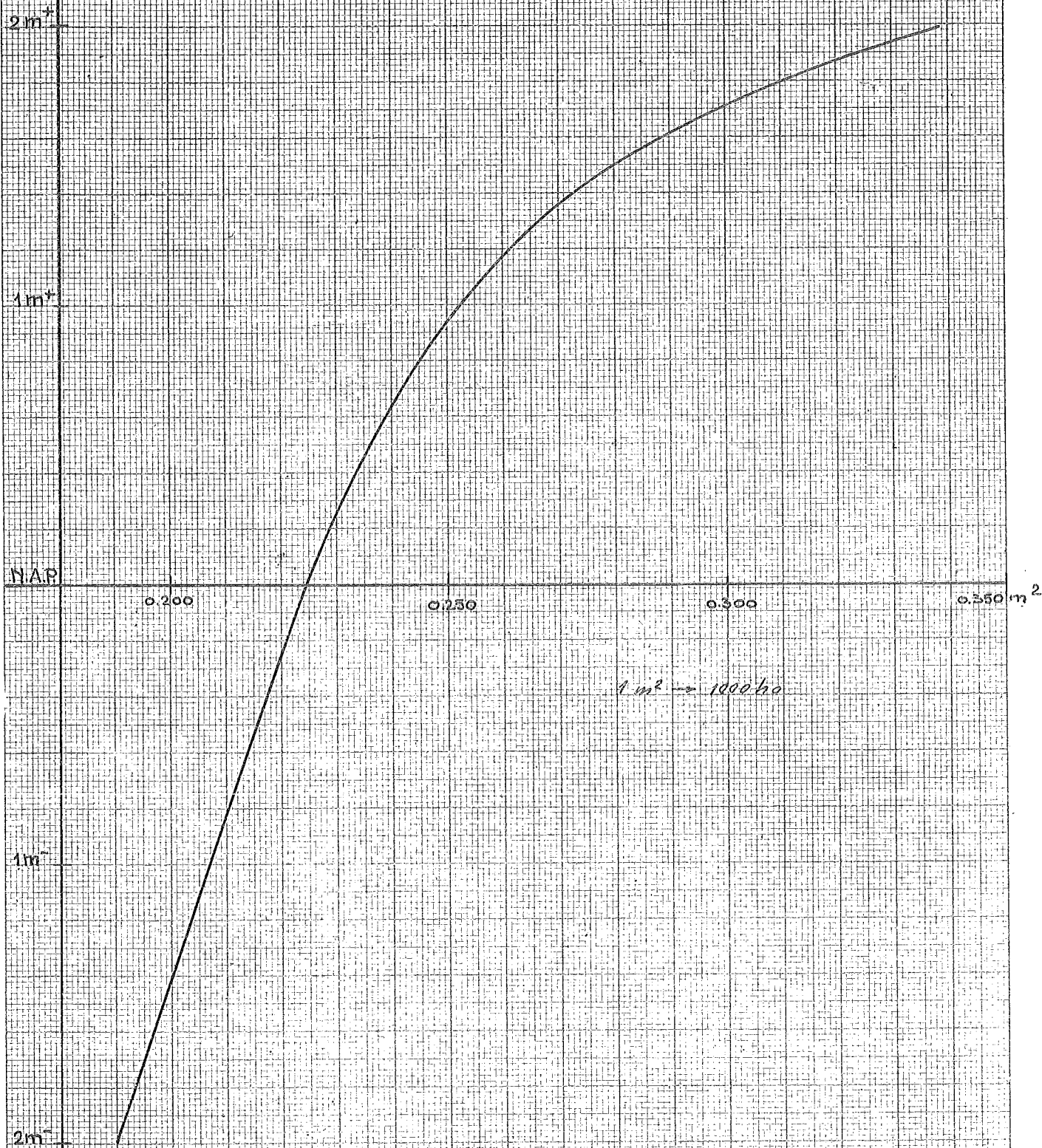
lengte	41650 m
breedte	205 m
diepte	4,15 m - N.A.P.
C	50 m $\frac{1}{2}$ /sec

Købergingsoppervlakte

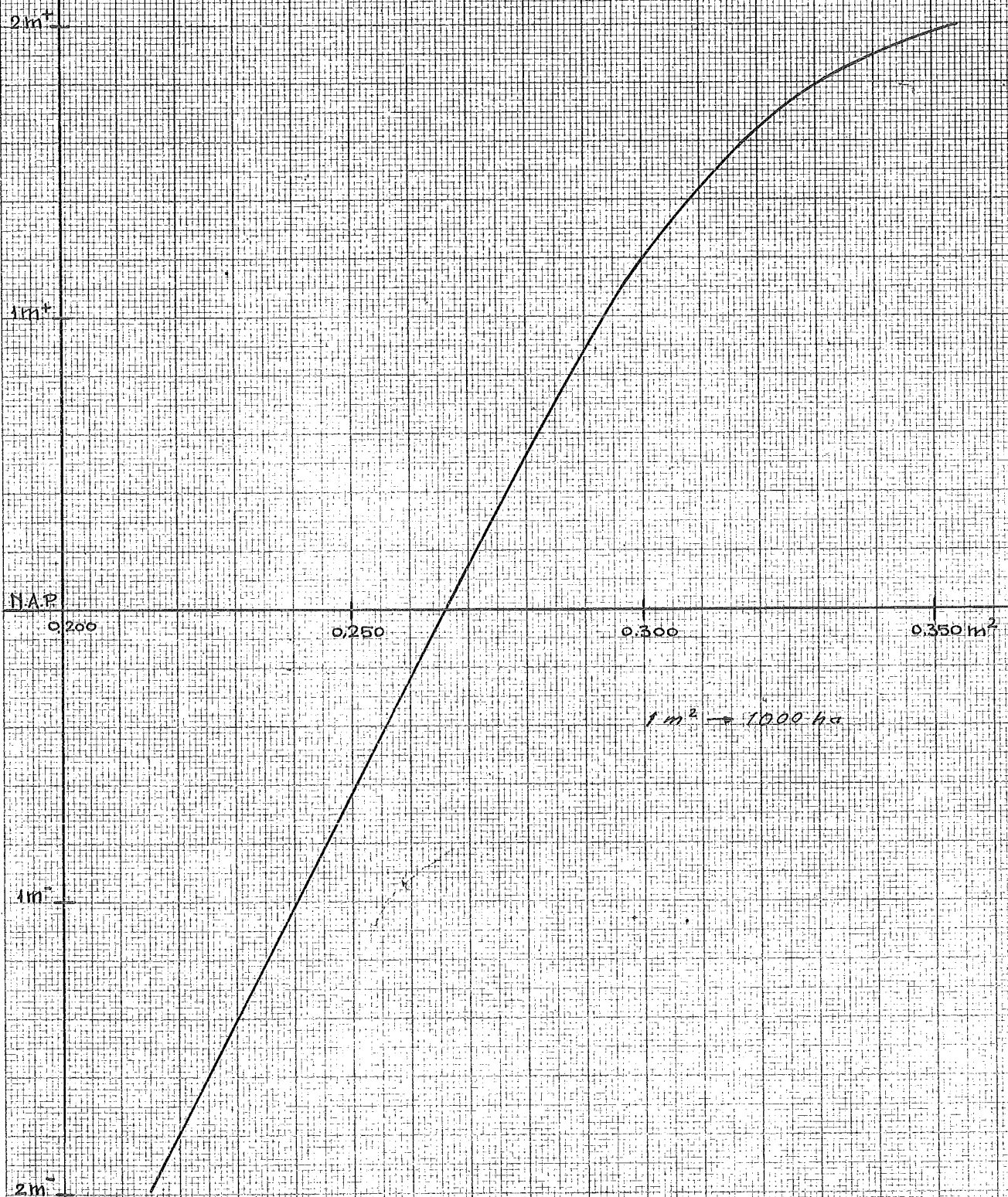
Krimpen % Lek - Streefkerk (vakt)



Kombergingsoppervlakte Strøfkerk- Schoonhoven (vak 2)



Kombergingsoppervlakte
Schoonhoven - Jaarsveld (vak 3)



Kombergingsoppervlakte

Jaarsveld - Vreeswijk (vak 4)

2m⁺

1m⁺

NAP

0.150

0.200

0.250

0.300 m²

1 m² → 1000 ha

2m⁻

Kombergingsoppervlakte

Vreeswijk - Stuw Hagereijn (vak 5)

2m²

1m²

NAP

0

0,050

0,100

0,150 m²

1 m² = 1000 ha

1m²

2m²

Kombergingsoppervlakte

Krimpen % d. Lek - Stuw Hagstein (vak 1^{te}/m⁵)

2m⁺

1m⁺

N.A.P.

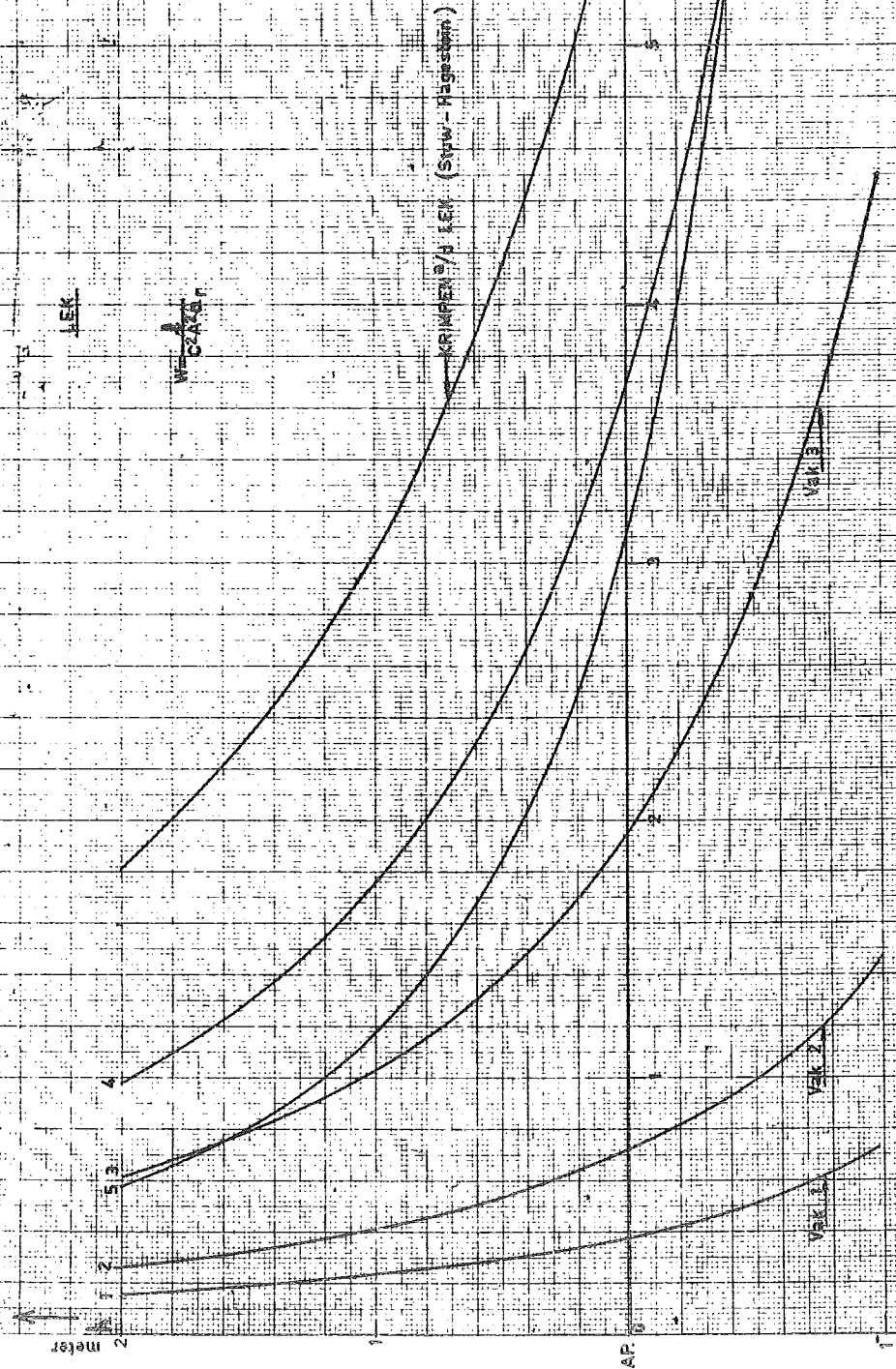
1m⁻

2m⁻

0,800 0,900 1,000 1,100 1,200 1,300 1,400 1,500 m²

$$1 \text{ m}^2 \rightarrow 1000 \text{ ha} = 10^7 \text{ m}^2$$

LEK
W. 1000



- 1. Krimmen 2/3 Loka - Schoonheids
- 2. Schoonheids - Jaarsveld
- 3. Jaarsveld - Vreeswijk
- 4. Vreeswijk - Stuw - Hagelbeek

Krimmen 2/3 Loka (Stuw - Hagelbeek)

W. 1000
[sec. m.]

W. uitgedrukt in de oorspronkelijke eenheden!
(zie bijlage 13)

PH. Ag. en Loka - Schoonheids
Bijlage 13
Bijlage 13

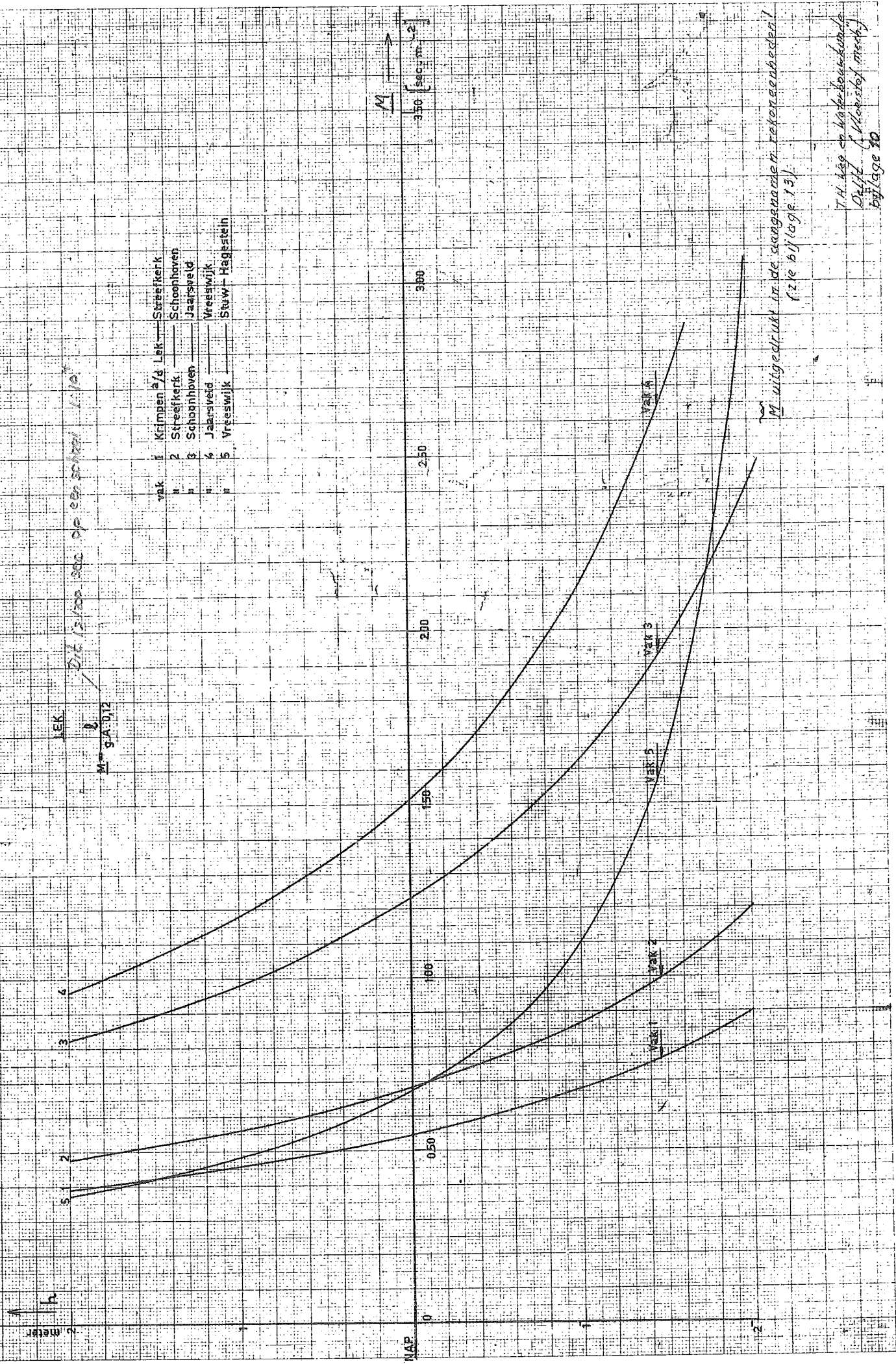
h
meter

LEK
M = 9 A 0,12

DE 13700 SOC OP EEN SCHOT 1:10

vak	1	Krimpen	2/4	Lek	Streefkerk
"	2	Streefkerk			Schoonhoven
"	3	Schoonhoven			Jaarsveld
"	4	Jaarsveld			Vreeswijk
"	5	Vreeswijk			Stuw - Hagstein

M
350 (sec m²)



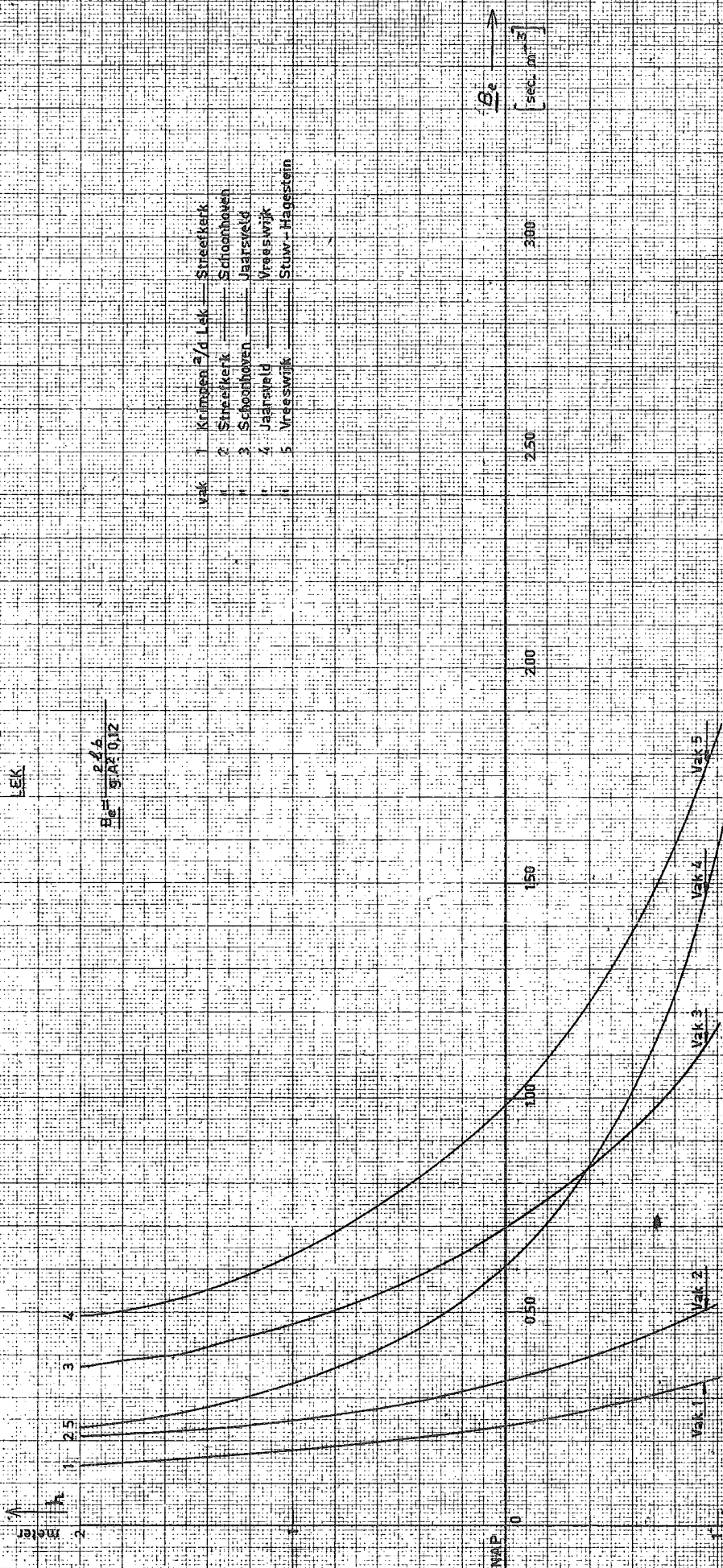
M uitgedrukt in de voorgaanden tekenenbeden!
(zie bijlage 13)

T.H. Kog en Waterbouwkunde
Delft (Voor het mek)
Bijlage 10

LEK

$$B_e = \frac{p \cdot d}{g \cdot A^2 \cdot 0,12}$$

vak	1	2	3	4	5
Kruisen	Kruisen	Kruisen	Kruisen	Kruisen	Kruisen
Sneekkerk	Sneekkerk	Sneekkerk	Sneekkerk	Sneekkerk	Sneekkerk
Schoonhoven	Schoonhoven	Schoonhoven	Schoonhoven	Schoonhoven	Schoonhoven
Jaarsveld	Jaarsveld	Jaarsveld	Jaarsveld	Jaarsveld	Jaarsveld
Vreeswijk	Vreeswijk	Vreeswijk	Vreeswijk	Vreeswijk	Vreeswijk
Stuw. Hagestein	Stuw. Hagestein	Stuw. Hagestein	Stuw. Hagestein	Stuw. Hagestein	Stuw. Hagestein



B_e uitgezocht in de gegeven rekenvoorbeelden
(zie bijlage 13)

I.H. Wip. de Koning
Dijk (Kruisen)
Bijlage 13

LEK

$$\beta = \frac{B}{0.12}$$

- | | | |
|-----|---|-----------------------------|
| val | 1 | Krimpan 1/4 Lek - Streekerk |
| " | 2 | Streekerk - Schoonhoven |
| " | 3 | Schoonhoven - Jaarsveld |
| " | 4 | Jaarsveld - Vreeswijk |
| " | 5 | Vreeswijk - Sijpe Hagestam |

β [m/sec]

300

250

200

150

100

50

0

Vak 1

Vak 2

Vak 3

Vak 4

Vak 5

β uitgedrukt in de aangenomen rekenenheid
(zie bijlage 13)

T.H. bijeen te komen
Dijkt 1, 18-05-1967
bijlage 13

T	h_1	h_2	h_3	Δh_1	Δh_2	$\frac{\Delta h_3}{(4)+(5)}$	Q_1	Q_2	$\frac{Q_3}{(7)+(8)}$	ΔQ_1	ΔQ_2	$\frac{\Delta Q_3}{(10)+(11)}$	W bijl. 9	M bijl. 10	B _e bijl. 11	B bijl. 12	W Q _g Q _g (13) (9) (9)	M ΔQ _g (14) (12)	B _e Q _g Δh _g (15) (9) (6)	(17)+(18)-(19)	$a_{NAP} + h_g$ $a_{NAP} + (3)$	A = $b_s \cdot (21)$	V _g = (9)/(22)	$C^* =$ $\sqrt{g \cdot (24)}$	$\left\{ \frac{(23)}{(24)} \right\}^2$	$\alpha =$ 1 - (25)	$h_2 =$ (11)+(20)/(28)	B _e Δh _g = (16) · (6)	$Q_2 =$ (7) · (28)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)
1	-0.04	-0.22	-0.73			0.12	-0.560	-0.270	-0.475			-0.210	0.40	0.56	0.245	2.43	-0.069	-0.117	-0.012	-0.174	4.94	1.37	-0.30	7.0	0.0018	0.9982	-0.214	0.290	-0.270
2	0.38	0.16	0.27			0.14	-0.970	-0.620	-0.795			-0.080	0.32	0.515	0.21	2.50	0.202	-0.041	-0.024	-0.219	5.34	1.48	-0.54	7.25	0.0056	0.9944	0.161	0.350	-0.620
3	0.79	0.56	0.68			0.12	-1.110	-0.800	-0.955			-0.030	0.26	0.48	0.19	2.585	-0.237	-0.014	-0.022	-0.229	5.75	1.60	-0.60	7.52	0.0064	0.9936	0.561	0.310	-0.800
4	1.055	0.88	0.97			0.08	-1.060	-0.850	-0.955			0.050	0.225	0.465	0.17	2.66	-0.205	0.023	-0.013	-0.169	6.04	1.67	-0.57	7.70	0.0054	0.9946	0.886	0.210	-0.850
5	1.115	1.08	1.10			0.005	-0.690	-0.680	-0.685			0.135	0.210	0.45	0.17	2.70	-0.098	0.061	0	-0.037	6.17	1.71	-0.40	7.78	0.0026	0.9974	1.078	0.010	-0.680
6	0.96	1.04	1.00			-0.065	0.050	-0.220	-0.135			0.185	0.22	0.455	0.17	2.665	-0.004	0.084	0.002	0.078	6.07	1.68	-0.08	7.71	—	1.0	1.038	0.170	-0.220
7	0.625	0.82	0.72			-0.12	0.720	0.410	0.565			0.200	0.255	0.475	0.185	2.595	0.081	0.095	-0.013	0.189	5.79	1.605	0.35	7.55	0.0022	0.9978	0.814	0.310	0.410
8	0.20	0.49	0.35			0.14	1.050	0.700	0.875			0.035	0.32	0.51	0.21	2.515	0.245	0.018	-0.026	0.289	5.42	1.50	0.58	7.30	0.0063	0.9937	0.489	0.350	0.700
9	-0.22	0.10	-0.06			-0.125	1.040	0.740	0.890			-0.020	0.38	0.55	0.24	2.44	0.301	-0.011	-0.027	0.317	5.01	1.39	0.64	7.03	0.0023	0.9917	0.097	0.300	0.740
10	0.51	-0.25	-0.38			-0.08	0.865	0.675	0.770			-0.050	0.465	0.585	0.27	2.385	0.275	-0.029	-0.017	0.263	4.69	1.30	0.59	6.78	0.0076	0.9924	0.247	0.190	0.675
11	-0.62	-0.49	-0.55			0.02	0.600	0.550	0.575			-0.075	0.52	0.605	0.29	2.36	0.172	-0.045	-0.003	0.130	4.52	1.25	0.46	6.68	0.0048	0.9952	0.490	-0.050	0.550
12	-0.51	-0.53	-0.52			0.035	0.285	0.365	0.325			-0.120	0.51	0.60	0.285	2.365	0.054	-0.072	0.003	-0.021	4.55	1.26	0.26	6.70	0.0015	0.9985	0.531	0.080	0.365
13	-0.20	-0.33	-0.27			0.11	-0.290	-0.030	-0.160			-0.210	0.44	0.575	0.255	2.40	-0.011	-0.121	-0.004	-0.128	4.80	1.33	-0.12	6.88	—	1.00	0.328	0.260	-0.030

h = watersstand tov. NAP. → eenheid 1 m
 a_r = hydr. straal → " 1 m
 λ = sectie lengte → " 10000 m
 b_s = stroomvoerende breedte → " 1000 m
 b = bergende breedte → " 1000 m
 A = stroomvoerend profiel → " 1000 m²
 C = weerstandscoeff. → " 100 m^{1/2}/sec
 g = versnelling t.g.v. de zwaartekracht → " 1 m/sec²
 Q = stroom → " 1000 m³/sec
 Δh = verandering van h in 1200 sec. → " 1 m
 ΔQ = verandering van Q in 1200 sec. → " 1000 m³/sec
 V = watersnelheid → " 1 m/sec
 C^* = "golfsnelheid" → " 1 m/sec
 a = diepte beneden waterspiegel → " 1 m
 t = tijdschaal → " 10.000 sec

$$h_2 = h_1 + \frac{1}{\alpha} \left\{ W | Q_g | Q_g + M \Delta Q_g - B_e Q_g \Delta h_g \right\}$$

$$Q_2 = Q_1 + B \Delta h_g$$

ebstroom → positief } rekenrichting met de vloedstroom mee
 vloedstroom → negatief }
 index 1 → benedenstrooms einde sectie
 " 2 → bovenstrooms einde sectie
 " g → gemiddelde waarde in de sectie

$$(13) W = \frac{\lambda}{C^2 A^2 a_2} \quad (\text{bijlage 9}) \quad (14) M = \frac{\lambda}{g A 0.12} \quad (\text{bijlage 10})$$

$$(15) B_e = \frac{2 b l}{g A^2 0.12} \quad (\text{bijlage 11}) \quad (16) B = \frac{\lambda b}{0.12} \quad (\text{bijlage 12})$$

$$\alpha = 1 - \frac{V_g^2}{C_g^2} = (26); C^* = \sqrt{g a} = (24)$$

sectie afmetingen.

$l = 8965$ m
 $C = 50$ m^{1/2}/sec
 $a_{NAP} = NAP - 5.07$ m
 $b_s = 277$ m
 $b =$ m

$b l = B$ (zie bijlage 3)

GETUBEREKENING VOLGENS "EXACTE METHODE"		rivier: de Lek
behoort bij:		sectie: 1
T.H. DELFT ald. Weg- en Waterb. vloeistofmechanica		staat no: 1 bijlage: 13

T	h ₁	h ₂	h _g	Δh ₁	Δh ₂	$\frac{\Delta h_g}{2}$	Q ₁	Q ₂	$\frac{Q_g}{2}$	ΔQ ₁	ΔQ ₂	$\frac{\Delta Q_g}{2}$	W	M	B _e	B	$\frac{W Q_g Q_g}{(13)(9)(9)}$	$\frac{M \Delta Q_g}{(14)(12)}$	$\frac{B_e Q_g \Delta h_g}{(15)(9)(6)}$	$\frac{(17)(18)-(19)}{2}$	$\frac{a_{NAP} + h_g}{a_{NAP} + (3)}$	A =	V _g =	C* =	$\frac{\{(23)\}^2}{(24)}$	α =	h ₂ =	B · Δh _g =	Q ₂ =
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)
1	-0.214	-0.35	-0.28				-0.270	-0.110	-0.190			-0.165	0.85	0.725	0.375	1.83	-0.031	-0.120	-0.006	-0.145	4.47	0.960	-0.20				-0.359	0.160	-0.110
2	0.161	-0.04	0.06				-0.620	-0.395	-0.507			-0.075	0.69	0.67	0.33	1.88	-0.178	-0.051	-0.020	-0.209	4.84	1.040	-0.48				-0.048	0.225	-0.395
3	0.561	0.30	0.43				-0.800	-0.550	-0.675			-0.040	0.555	0.62	0.29	1.95	-0.253	-0.025	-0.025	-0.253	5.24	1.130	-0.60				0.308	0.250	-0.550
4	0.886	0.67	0.78				-0.850	-0.625	-0.737			0.010	0.45	0.58	0.26	2.04	-0.245	0.006	0.021	-0.218	5.57	1.200	-0.61				0.668	0.225	-0.625
5	1.078	0.98	1.03				-0.680	-0.580	-0.630			0.085	0.39	0.56	0.24	2.12	-0.155	0.048	0.007	-0.100	5.76	1.240	-0.51				0.978	0.100	-0.580
6	1.038	1.09	1.06				-0.220	-0.180	-0.250			0.140	0.385	0.555	0.24	2.13	-0.024	0.078	0.002	0.052	5.72	1.230	-0.20				1.090	-0.060	-0.280
7	0.814	0.98	0.90				0.410	0.225	0.320			0.200	0.42	0.58	0.25	2.08	0.043	0.116	-0.007	0.166	5.49	1.180	0.27				0.980	-0.185	0.225
8	0.489	0.71	0.60				0.700	0.480	0.590			0.035	0.505	0.605	0.27	1.99	0.176	0.021	-0.018	0.215	5.17	1.110	0.53				0.704	-0.220	0.480
9	0.097	0.37	0.23				0.740	0.510	0.625			-0.010	0.66	0.65	0.31	1.91	0.259	-0.006	-0.023	0.276	4.78	1.030	0.61				0.373	-0.230	0.510
10	-0.247	0.02	-0.11				0.675	0.495	0.585			-0.020	0.77	0.70	0.35	1.85	0.264	-0.014	-0.021	0.271	4.43	0.955	0.61				0.024	-0.180	0.495
11	-0.490	-0.28	-0.38				0.550	0.430	0.490			-0.040	0.96	0.74	0.39	1.81	0.230	-0.030	-0.012	0.212	4.19	0.900	0.54				0.278	-0.120	0.430
12	-0.531	-0.46	-0.50				0.365	0.330	0.347			-0.075	0.99	0.76	0.41	1.80	0.179	-0.057	-0.003	0.065	4.15	0.890	0.39				-0.466	-0.035	0.330
13	-0.328	-0.45	-0.39				-0.030	0.090	0.030			-0.155	0.96	0.745	0.39	1.81	0.001	-0.116	0	-0.115	4.35	0.940	0.03				-0.443	0.120	0.090

h = waterstand tov. NAP	→ eenheid	1 m
a _r = hydr. straal	→ "	1 m
l = sectie lengte	→ "	10000 m
b _s = stroomvoerende breedte	→ "	1000 m
b = bergende breedte	→ "	1000 m
A = stroomvoerende profiel	→ "	1000 m ²
C = weerstandscoeff.	→ "	100 m ^{1/2} /sec
g = versnelling t.g.v. de zwaartekracht	→ "	1 m/sec ²
Q = stroom	→ "	1000 m ³ /sec
Δh = verandering van h in 1200 sec.	→ "	1 m
ΔQ = verandering van Q in 1200 sec.	→ "	1000 m ³ /sec
V = watersnelheid	→ "	1 m/sec
C* = "golfsnelheid"	→ "	1 m/sec
a = diepte beneden waterspiegel	→ "	1 m
t = tijdachsel	→ "	10000 sec

$$h_2 = h_1 + \frac{1}{\alpha} \left\{ W |Q_g| Q_g + M \Delta Q_g - B_e Q_g \Delta h_g \right\}$$

$$Q_2 = Q_1 + B \Delta h_g$$

ebstroom → positief } rekenrichting met de vloedstroom mee
 vloedstroom → negatief }
 index 1 → benedenstrooms einde sectie
 " 2 → bovenstrooms einde sectie
 " g → gemiddelde waarde in de sectie

$$(13) W = \frac{l}{C^2 A^2 a_2} \text{ (bijlage 9)} \quad (14) M = \frac{l}{g A 0.12} \text{ (bijlage 10)}$$

$$(15) B_e = \frac{2 b l}{g A^2 0.12} \text{ (bijlage 11)} \quad (16) B = \frac{l b}{0.12} \text{ (bijlage 12)}$$

$$\alpha = 1 - \frac{V_g^2}{C_g^2} = (26); C^* = \sqrt{g a} = (24)$$

sectie afmetingen

l = 8075	m	b _l = B (zie bijlage 4)
C = 50	m ^{1/2} /sec	
a _{NAP} = NAP - 4.68	m	
b _s = 215	m	
b =	m	

GETUBEREKENING VOLGENS "EXACTE METHODE"	rivier: de Lek
behoort bij:	sectie: 2
T. H. DELFT ald. Weg- en Waterbouwk. vloeistofmechanica	staat no: 2 bijlage: 14

T	h ₁	h ₂	h _g	Δh ₁	Δh ₂	$\frac{\Delta h_g}{2}$	Q ₁	Q ₂	$\frac{Q_g}{2}$	ΔQ ₁	ΔQ ₂	$\frac{\Delta Q_g}{2}$	W	M	B _e	B	$\frac{W Q_g Q_g}{M}$	$\frac{\Delta Q_g}{M}$	$\frac{B_e Q_g \Delta h_g}{M}$	(17)-(18)-(19)	$q_{NAP} + h_g$	A =	V _g =	C* =	$\left\{ \frac{(23)^2}{(24)} \right\}$	α =	h ₂ =	B · Δh _g =	Q ₂ =
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	bijl. 9	bijl. 10	bijl. 11	bijl. 12	(13)(9)(9)	(14) (12)	(15) (9) (6)	(17)-(18)-(19)	q _{NAP} + (3)	b _s · (21)	(9)/(22)	√g · (21)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)
1	-0.359	-0.50	-0.43			0.05	-0.110	0	-0.055			-0.05	2.70	1.375	0.845	2.13	-0.008	-0.144	-0.002	-0.150							-0.509	-0.110	0
2	-0.048	-0.29	-0.17			0.095	-0.395	-0.190	-0.292			-0.060	2.22	1.28	0.75	2.19	-0.190	-0.077	-0.021	-0.246							-0.294	0.205	-0.190
3	0.308	0	0.15			0.120	-0.550	0.280	-0.415			-0.030	1.75	1.185	0.65	2.255	-0.301	-0.035	-0.032	-0.304							0.004	0.270	-0.280
4	0.668	0.39	0.54			0.13	-0.625	-0.320	-0.472			-0.015	1.33	1.08	0.555	2.34	-0.297	-0.016	-0.034	-0.279							0.389	0.305	-0.320
5	0.978	0.81	0.89			0.10	-0.580	-0.340	-0.460			0.030	1.08	1.005	0.49	2.41	-0.229	0.030	-0.023	-0.176							0.802	0.240	-0.340
6	1.090	1.12	1.10			0.02	-0.280	-0.230	-0.255			0.090	0.96	0.96	0.455	2.465	-0.062	0.087	-0.002	0.027							1.117	0.050	-0.230
7	0.980	1.14	1.06			0.045	0.225	0.065	0.145			0.135	0.98	0.97	0.46	2.455	0.021	0.131	-0.004	0.156							1.136	-0.160	0.065
8	0.704	0.92	0.81			-0.10	0.480	0.240	0.360			0.042	1.14	1.02	0.505	2.40	0.148	0.043	-0.018	0.209							0.913	-0.240	0.240
9	0.373	0.60	0.49			-0.11	0.570	0.260	0.385			0	1.40	1.10	0.57	2.325	0.207	0	-0.024	0.231							0.604	-0.250	0.260
10	0.024	0.29	0.16			-0.11	0.495	0.245	0.370			-0.010	1.73	1.18	0.65	2.26	0.237	-0.012	-0.026	0.251							0.275	-0.250	0.245
11	-0.278	-0.03	-0.15			-0.095	0.430	0.220	0.325			-0.015	2.18	1.275	0.74	2.19	0.230	-0.019	-0.023	0.234							-0.044	-0.210	0.220
12	-0.466	-0.33	-0.40			-0.07	0.330	0.180	0.255			-0.040	2.64	1.36	0.83	2.14	0.172	-0.054	-0.015	0.133							-0.333	-0.150	0.180
13	-0.443	-0.52	-0.48			0	0.090	0.090	0.090			-0.070	2.82	1.39	0.865	2.12	0.023	-0.097	0	-0.074							-0.517	0	0.090

h = waterstand t.o.v. NAP	→ eenheid	1 m
a _r = hydr. straal	→ "	1 m
l = sectie lengte	→ "	10.000 m
b _s = stroomvoerende breedte	→ "	1000 m
b = bergende breedte	→ "	1000 m
A = stroomvoerend profiel	→ "	1000 m ²
C = weerstandscoeff.	→ "	100 m ^{1/2} /sec
g = versnelling t.g.v. de zwaartekracht	→ "	1 m/sec ²
Q = stroom	→ "	1000 m ³ /sec
Δh = verandering van h in 1200 sec.	→ "	1 m
ΔQ = verandering van Q in 1200 sec.	→ "	1000 m ³ /sec
V = watersnelheid	→ "	1 m/sec
C* = "golfsnelheid"	→ "	1 m/sec
a = diepte beneden waterspiegel	→ "	1 m
τ = bodemschuur	→ "	10.000 sec

$$h_2 = h_1 + \frac{l}{\alpha} \left\{ W |Q_g| Q_g + M \Delta Q_g - B_e Q_g \Delta h_g \right\}$$

$$Q_2 = Q_1 + B \Delta h_g$$

ebedroom → positief } rekenrichting met de vloedstroom mee
 vloedstroom → negatief }
 index 1 → benedenstrooms einde sectie
 " 2 → bovenstrooms einde sectie
 " g → gemiddelde waarde in de sectie

$$(13) W = \frac{l}{C^2 A^2 a_2} \text{ (bijlage 9)} \quad (14) M = \frac{l}{g A 0.12} \text{ (bijlage 10)}$$

$$(15) B_e = \frac{2bl}{g A^2 0.12} \text{ (bijlage 11)} \quad (16) B = \frac{1b}{0.12} \text{ (bijlage 12)}$$

$$\alpha = 1 - \frac{V_g^2}{C_g^2} = (26); C^* = \sqrt{ga} = (24)$$

sectie afmetingen.

l = 10 995	m	bl = B (zie bijlage 5)
C = 50	m ^{1/2} /sec	
q _{NAP} = NAP-4.07	m	
b _s = 187	m	
b =	m	

GETUBEREKENING VOLGENS "EXACTE METHODE"	rivier: de Lek
behoort bij:	sectie: 3
T.H. DELFT d/d. Weg-en Waterb. vloeistofmechanica	staat nr: 3 bijlage: 15

T.	h_1	h_2	h_3	Δh_1	Δh_2	$\frac{\Delta h_3}{2}$ (4)+(5)	Q_1	Q_2	$\frac{Q_3}{2}$ (7)+(8)	ΔQ_1	ΔQ_2	$\frac{\Delta Q_3}{2}$ (10)+(11)	W bijl. 9	M bijl. 10	B _e bijl. 11	B bijl. 12	W Q ₃ Q _g (13) (9) (9)	M ΔQ _g (14)·(12)	B _e Q _g Δh _g (15) (9) (6)	(17)-(18)-(19)	$a_{NAP} + h_g =$ $a_{NAP} + (3)$	A = b _s (21)	V _g = (9)/(22)	C* = $\sqrt{g \cdot (21)}$	$\left\{ \frac{(23)^2}{(24)} \right\}$	$\alpha z =$ 1 - (25)	$h_2 =$ (1)+(20)/(26)	B · Δh _g = (16) · (6)	$Q_2 =$ (7)+(28)
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)
1	-0.509	-0.57	-0.54			0.012	0	0.020	0.010			-0.040	6.25	1.80	1.33	1.715	0.001	-0.072	0	-0.071							-0.580	0.020	0.020
2	0.294	-0.39	-0.34			0.09	-0.190	-0.035	-0.113			-0.030	5.00	1.68	1.18	1.745	-0.064	-0.050	-0.012	-0.102							-0.396	0.155	-0.035
3	0.004	-0.10	-0.05			0.125	-0.280	-0.055	-0.167			-0.015	3.85	1.545	1.01	1.805	-0.107	-0.023	-0.021	-0.109							-0.105	0.225	-0.055
4	0.389	0.30	0.34			0.13	-0.320	-0.075	-0.198			0	2.80	1.39	0.83	1.885	-0.110	0	-0.021	-0.089							0.300	0.245	-0.075
5	0.802	0.74	0.77			0.13	-0.340	-0.080	-0.210			0	2.04	1.245	0.695	1.98	-0.090	0	-0.019	-0.071							0.731	0.260	-0.080
6	1.117	1.12	1.12			0.075	-0.230	-0.070	-0.150			0.030	1.61	1.15	0.605	2.07	-0.036	0.034	-0.007	0.005							1.122	0.160	-0.070
7	1.136	1.21	1.17			-0.03	0.065	0.005	0.035			0.060	1.56	1.14	0.595	2.09	0.002	0.068	-0.001	0.071							1.207	-0.060	0.005
8	0.913	1.01	0.96			-0.09	0.240	0.060	0.150			0.030	1.80	1.19	0.645	2.025	0.041	0.036	-0.009	0.086							0.999	-0.180	0.060
9	0.604	0.68	0.64			-0.105	0.260	0.060	0.160			0	2.24	1.285	0.73	1.95	0.057	0	-0.012	0.069							0.673	-0.200	0.060
10	0.275	0.37	0.32			-0.10	0.245	0.060	0.150			0	2.83	1.395	0.84	1.88	0.064	0	-0.013	0.077							0.352	-0.185	0.060
11	0.044	0.05	0			-0.095	0.220	0.050	0.135			0	3.68	1.52	0.985	1.81	0.067	0	-0.013	0.080							0.036	-0.170	0.050
12	-0.333	-0.27	-0.30			-0.08	0.180	0.040	0.110			0	4.80	1.66	1.15	1.75	0.058	0	-0.010	0.068							-0.265	-0.140	0.040
13	-0.517	-0.55	-0.53			-0.035	0.090	0.030	0.060			-0.025	6.20	1.79	1.32	1.71	0.022	-0.045	-0.003	-0.020							-0.537	-0.060	0.030

h = waterstand t.o.v. N.A.P. → eenheid 1 m
 a_r = hydr. straal → " 1 m
 l = sectie lengte → " 10.000 m
 b_s = stroomvoerende breedte → " 1000 m
 b = bergende breedte → " 1000 m
 A = stroomvoerend profiel → " 1000 m²
 C = weerstandscoeff. → " 100 m^{1/2}/sec
 g = versnelling t.g.v. de zwaartekracht → " 1 m/sec²
 Q = stroom → " 1000 m³/sec
 Δh = verandering van h in 1200 sec. → " 1 m
 ΔQ = verandering van Q in 1200 sec. → " 1000 m³/sec
 V = watersnelheid → " 1 m/sec
 C^* = "golfsnelheid" → " 1 m/sec
 α = diepte beneden waterspiegel → " 1 m
 τ = tijdsec. 700! → " 10.000 sec

$$h_2 = h_1 + \frac{1}{\alpha} \left\{ W |Q_g| Q_g + M \Delta Q_g - B_e Q_g \Delta h_g \right\}$$

$$Q_2 = Q_1 + B \Delta h_g$$

ebstroom → positief } rekenrichting met de vloedstroom mee
 vloedstroom → negatief }
 index 1 → benedenstrooms einde sectie
 " 2 → bovenstrooms einde sectie
 " g → gemiddelde waarde in de sectie

$$(13) W = \frac{1}{C^2 A^2 a_r} \text{ (bijlage 9)} \quad (14) M = \frac{1}{g A 0.12} \text{ (bijlage 10)}$$

$$(15) B_e = \frac{2 b l}{g A^2 0.12} \text{ (bijlage 11)} \quad (16) B = \frac{1 b}{0.12} \text{ (bijlage 12)}$$

$$\alpha = 1 - \frac{V_2^2}{C^2} = (26); C^* = \sqrt{g \alpha} = (24)$$

sectie afmetingen.

$l = 10395$ m
 $C = 50$ m^{1/2}/sec
 $a_{NAP} = NAP - 3.48$ m
 $b_s = 167$ m
 $b =$ m

$b_l = B$ (zie bijlage 6)

GETUBEREKENING VOLGENS
"EXACTE METHODE"

behoort bij:

T.H. DELFT afd. Weg- en Waterb.
vloeistofmechanica

rivier: de Lek

sectie: 4

staat no: 4
bijlage: 16

T	h_1	h_2	h_3	Δh_1	Δh_2	$\frac{\Delta h_3}{2}$ (4)+(5) 2	Q_1	Q_2	$\frac{Q_3}{2}$ (7)+(8) 2	ΔQ_1	ΔQ_2	$\frac{\Delta Q_3}{2}$ (10)+(11) 2	W býl. 9	M býl. 10	$\frac{B_e}{2}$ býl. 11	$\frac{B}{2}$ býl. 12	$\frac{W Q_3 Q_3}{(13) (9) (9)}$	$\frac{M \Delta Q_3}{(14) (12)}$	$\frac{B_e Q_3 \Delta h_3}{(15) (9) (6)}$	$\frac{a_{NAP} + h_g}{a_{NAP} + (3)}$ (17)-(18)-(19)	A = $b_5 \cdot (21)$	Vg = (9)/(22)	$C^* =$ $\sqrt{g \cdot (21)}$	$\left\{ \frac{(23)}{(24)} \right\}^2$	$\alpha =$ $1 - (25)$	$h_2 =$ (11)+(20)/(26)	$\frac{B \cdot \Delta h_g}{(16) \cdot (6)}$	$Q_2 =$ (7)+(28)	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)	(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)	(26)	(27)	(28)	(29)
1	-0.580	-0.58	-0.58			-0.02	0.020	0	0.010			-0.005	6.70	0.86	0.99	0.54	0.001	-0.004	0	-0.003							-0.583	-0.010	0.010
2	-0.396	-0.40	-0.40			0.08	-0.035	0	-0.018			-0.005	5.12	0.79	0.84	0.55	-0.002	-0.004	-0.001	-0.005							-0.401	0.045	0.010
3	0.105	-0.11	-0.11			0.12	-0.055	0	-0.028			-0.005	3.52	0.70	0.66	0.56	-0.003	-0.004	-0.002	-0.005							-0.110	0.065	0.010
4	0.300	0.50	0.30			0.14	-0.075	0	-0.038			-0.005	2.24	0.60	0.49	0.58	-0.003	-0.003	-0.003	-0.003							0.297	0.080	0.005
5	0.731	0.73	0.73			0.14	-0.080	0	-0.040			0	1.48	0.52	0.38	0.60	-0.002	0	-0.002	0							0.731	0.080	0
6	1.122	1.12	1.12			0.10	-0.070	0	-0.035			0.005	1.05	0.465	0.31	0.63	-0.001	0.002	-0.001	0.002							1.124	0.065	-0.005
7	1.207	1.21	1.21			0	0.005	0	0			0.010	0.98	0.45	0.30	0.635	0	0.005	0	0.005							1.212	0	0.005
8	0.999	1.00	1.00			-0.105	0.060	0	0.030			0.005	1.16	0.48	0.33	0.615	0.001	0.002	-0.001	0.004							1.003	-0.065	-0.005
9	0.673	0.67	0.67			0.115	0.060	0	0.030			0	1.56	0.53	0.39	0.595	0.002	0	-0.001	0.003							0.676	-0.065	-0.005
10	0.352	0.35	0.35			-0.105	0.060	0	0.030			0	2.12	0.59	0.47	0.58	0.002	0	-0.001	0.003							0.355	-0.060	0
11	0.036	0.04	0.04			-0.10	0.050	0	0.025			0	2.98	0.66	0.59	0.57	0.002	0	-0.001	0.003							0.039	-0.055	-0.005
12	-0.265	-0.27	-0.27			-0.10	0.040	0	0.020			0	4.34	0.75	0.75	0.555	0.002	0	-0.001	0.003							-0.262	-0.050	-0.010
13	-0.537	-0.54	-0.54			-0.055	0.030	0	0.015			0	6.30	0.84	0.95	0.54	0.001	0	-0.001	0.002							-0.535	-0.030	0

h = waterstand t.a.v. NAP	→ eenheid	1 m
a_r = hydr. straal	→ "	1 m
l = sectie lengte	→ "	10.000 m
b_s = stroomvoerende breedte	→ "	1000 m
b = bergende breedte	→ "	1000 m
A = stroomvoerend profiel	→ "	1000 m ²
C = weerstandscoeff.	→ "	100 m ^{1/2} /sec
g = versnelling t.g.v. de zwaartekracht	→ "	1 m/sec ²
Q = stroom	→ "	1000 m ³ /sec
Δh = verandering van h in 1200 sec.	→ "	1 m
ΔQ = verandering van Q in 1200 sec.	→ "	1000 m ³ /sec
V = watersnelheid	→ "	1 m/sec
C^* = "golfsnelheid"	→ "	1 m/sec
a = diepte beneden waterspiegel	→ "	1 m
t = tijd = 1200 sec.	→ "	10.000 sec

$$h_2 = h_1 + \frac{1}{\alpha} \left\{ W |Q_g| Q_g + \frac{M}{2} \Delta Q_g - \frac{B_e}{2} Q_g \Delta h_g \right\}$$

$$Q_2 = Q_1 + \frac{B}{2} \Delta h_g$$

Q_2 = ebstroom → positief } rekenrichting met de vloedstroom mee
 vloedstroom → negatief }
 index: 1 → benedenstrooms einde sectie
 " 2 → bovenstrooms einde sectie
 " g → gemiddelde waarde in de sectie

$$(13) W = \frac{l}{C^2 A^2 a_2} \text{ (bijlage 9)} \quad (14) \frac{M}{2} = \frac{l}{g A 0.12} \text{ (bijlage 10)}$$

$$(15) \frac{B_e}{2} = \frac{2 b l}{g A^2 0.12} \text{ (bijlage 11)} \quad (16) \frac{B}{2} = \frac{l b}{0.12} \text{ (bijlage 12)}$$

$$\alpha = 1 - \frac{V_g^2}{C^2} = (26); C^* = \sqrt{g a} = (24)$$

sectie afmetingen.

l = 3220	m	$b l = B$ (zie bijlage 7)
C = 50	m ^{1/2} /sec	
a_{NAP} = NAP - 2,56	m	
b_s = 160	m	
b =	m	

GETUBEREKENING VOLGENS
"EXACTE METHODE"

behoort bij:

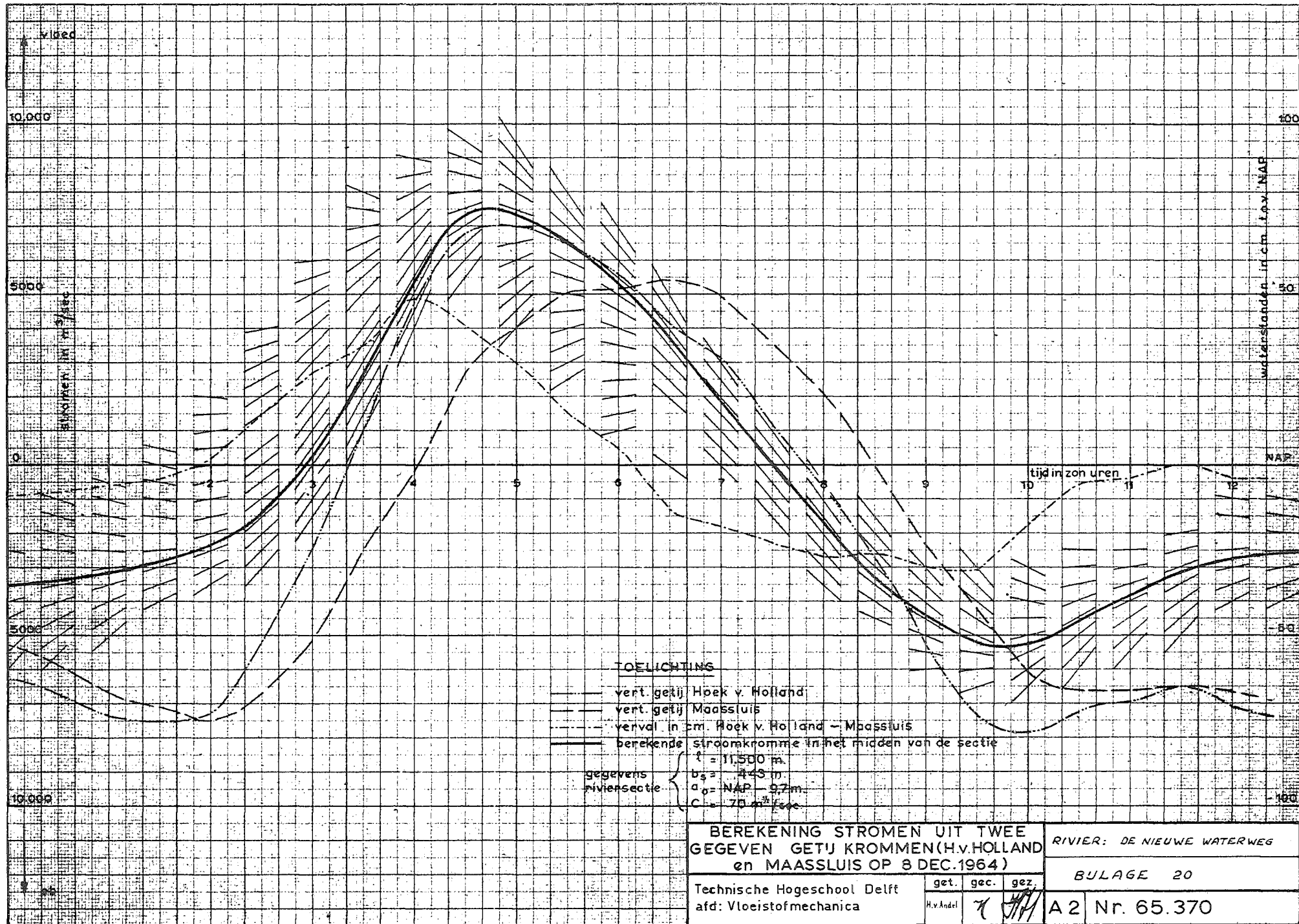
T.H. DELFT afd. Weg- en Waterbouwk.
vloeistofmechanica

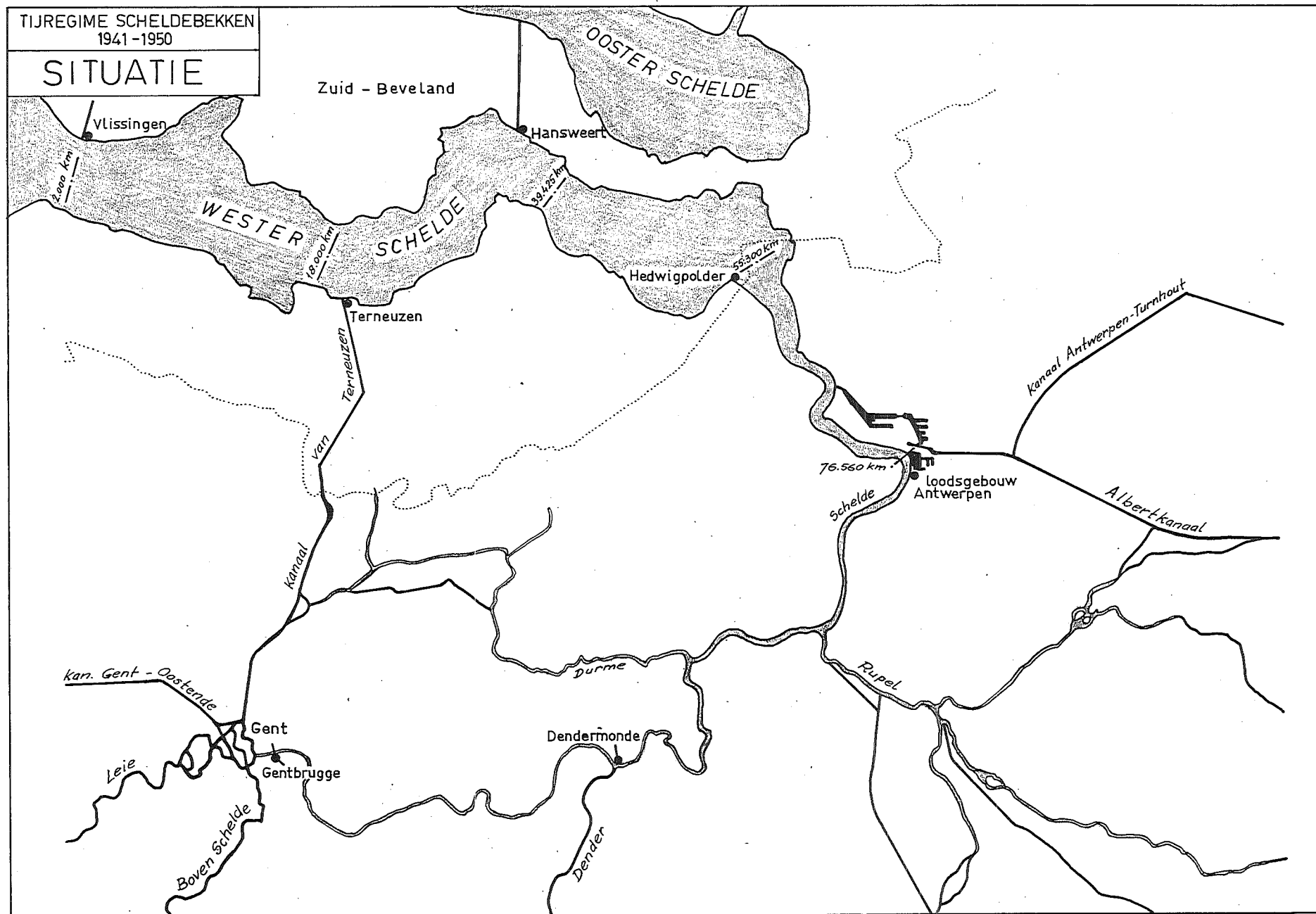
rivier: de Lek

sectie: 5

staat no: 5
bijlage: 17

[illegible]

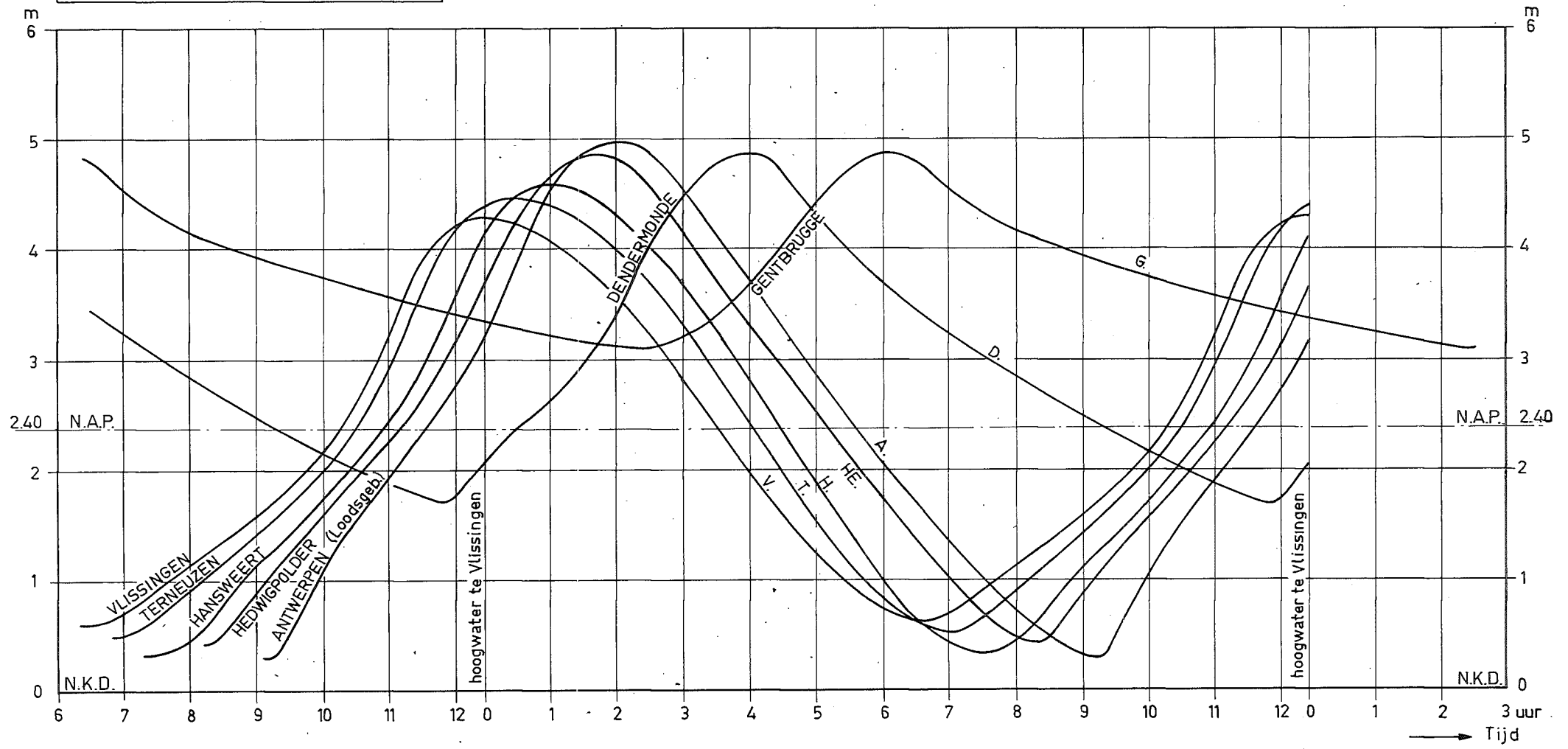




RESULTATEN VAN EEN GETIJBEREKENING UITGEVOERD DOOR DE ANTWERPSE ZEEDIENSTEN TE ANTWERPEN.

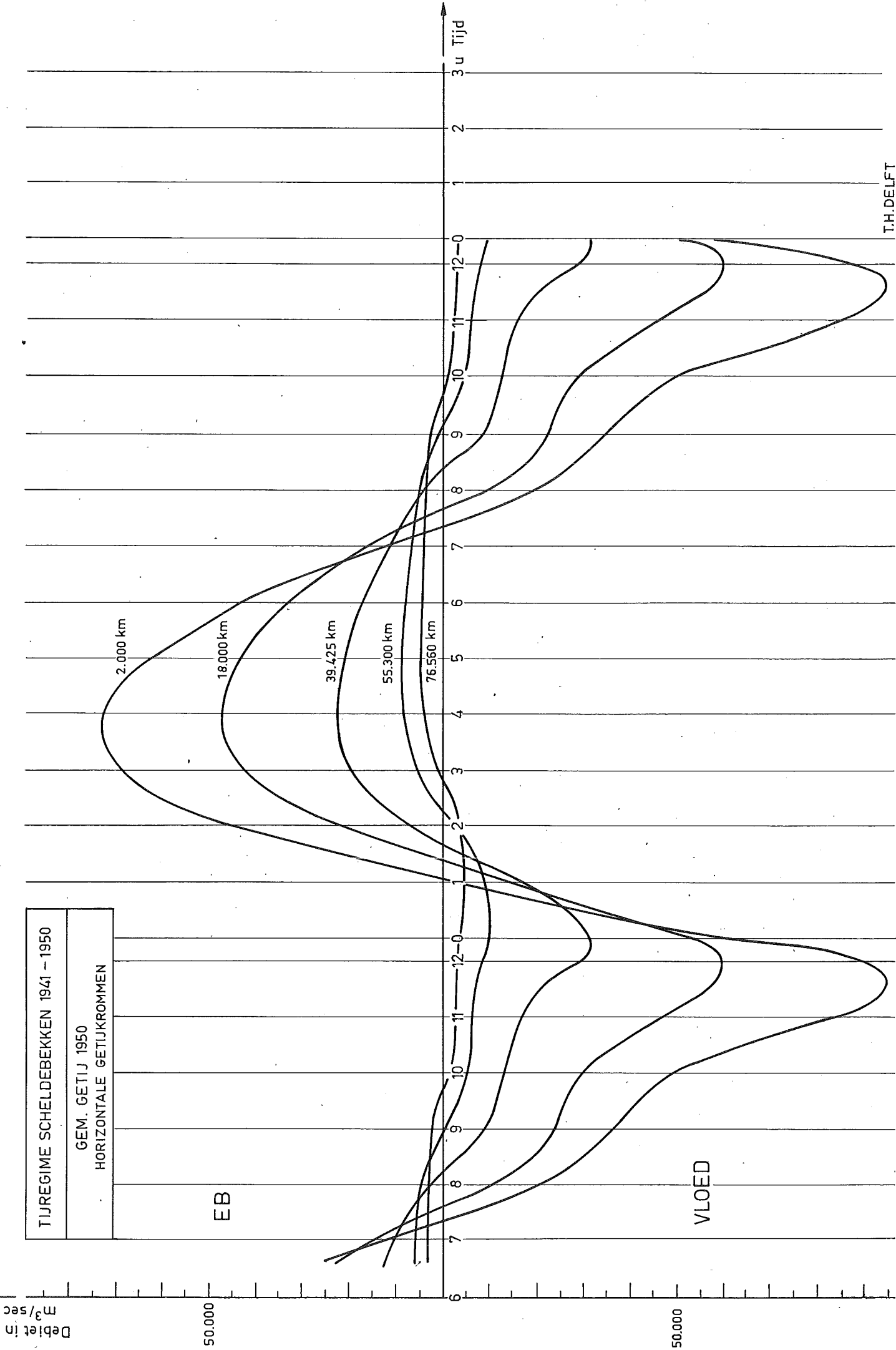
TIJREGIME SCHELDEBĖKKEN 1941-1950

GEM. GETIJ 1950
VERTICALE GETIJKROMMEN



RESULTATEN VAN EEN GETIJBEREKENING UITGEVOERD DOOR DE ANTWERPSE ZEEDIENSTEN TE ANTWERPEN.

T.H.DELFT
VLOEISTOFMECHANICA b73



TIJREGIME SCHELDEBEKKEN 1941 - 1950

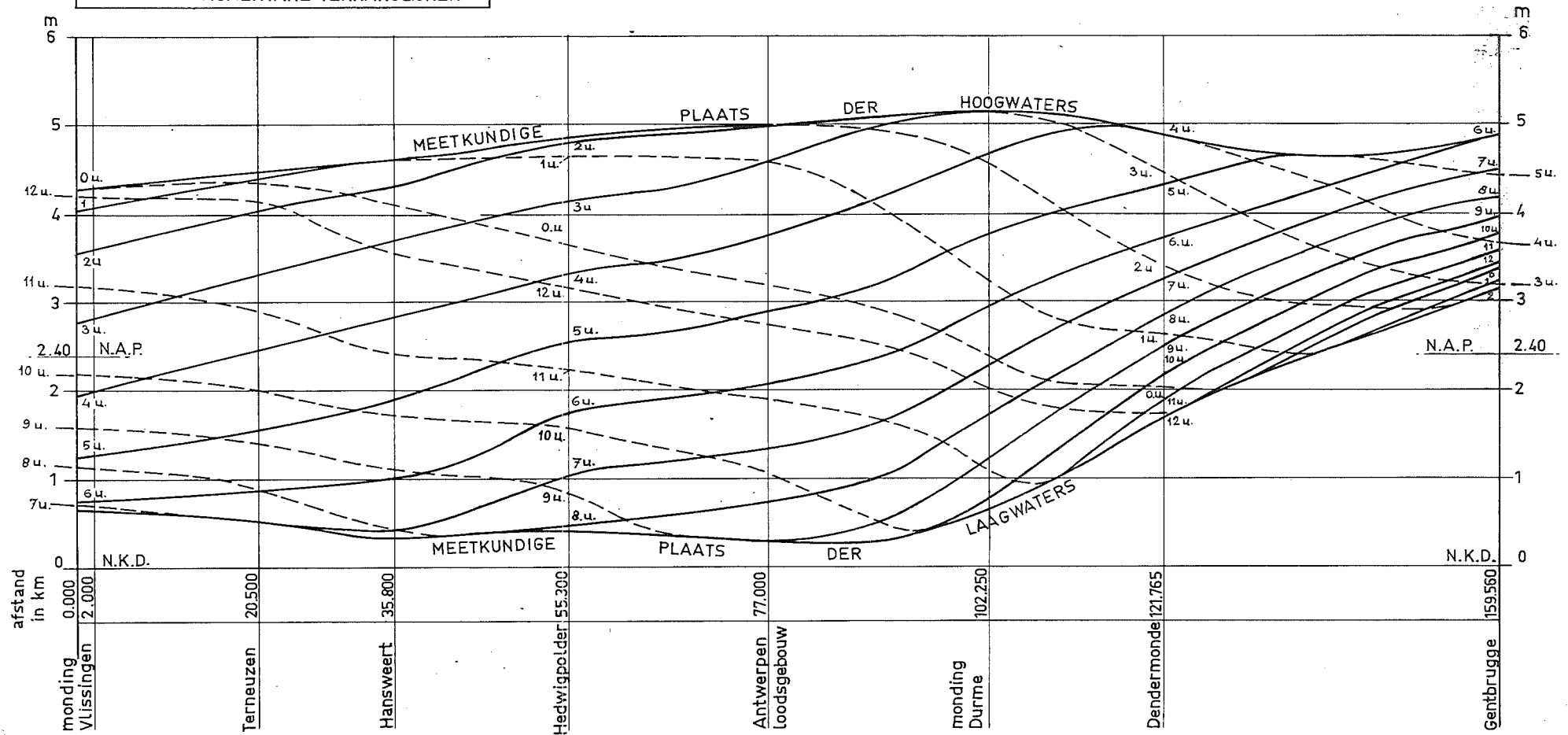
GEM. GETIJ 1950

HORIZONTALE GETIJKROMMEN

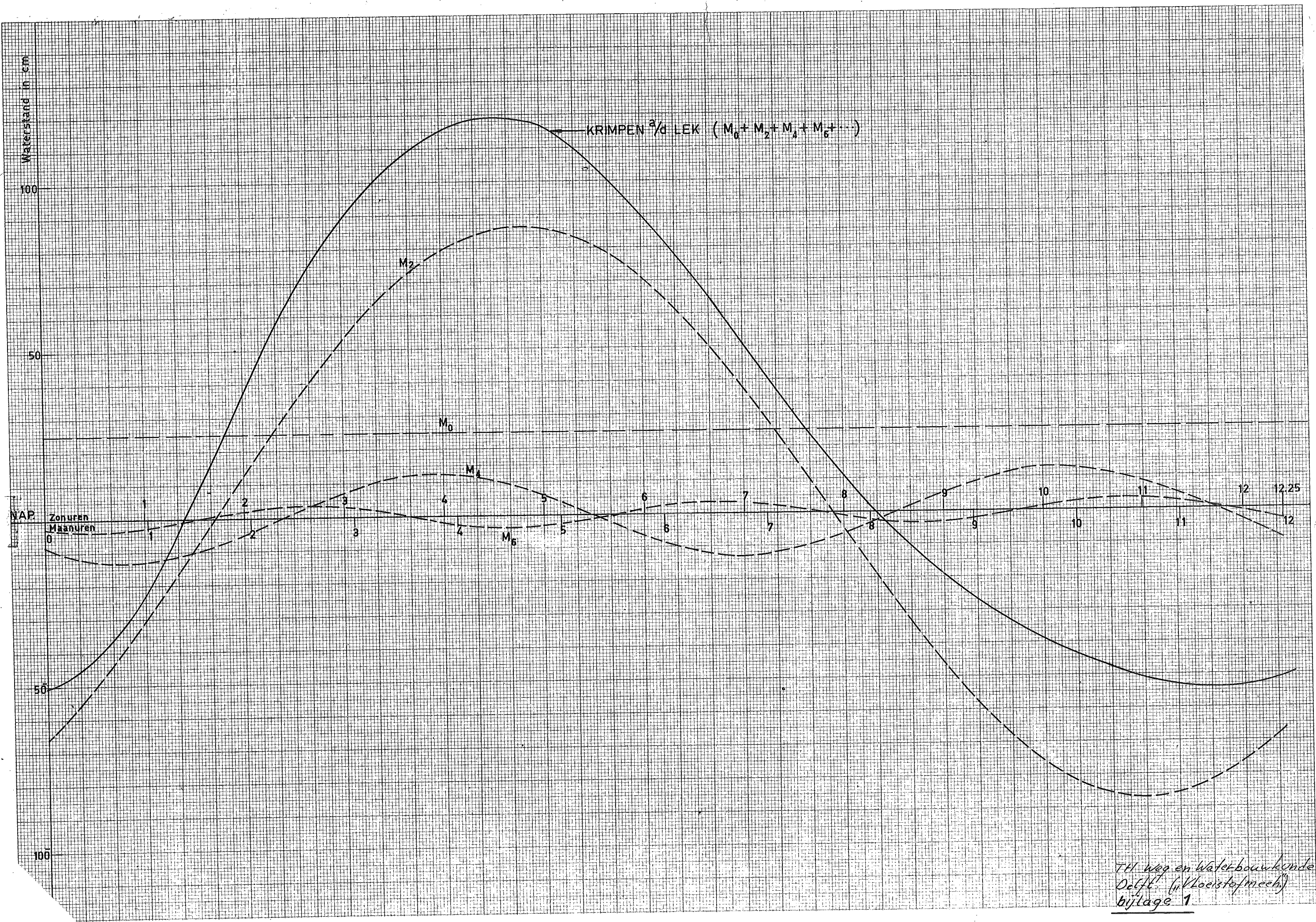
RESULTATEN VAN EEN GETJBEREKENING UITGEVOERD DOOR DE ANTWERPSE ZEEDIENSTEN TE ANTWERPEN.

TIJREGIME SCHELDEBEKKEN 1941-1950

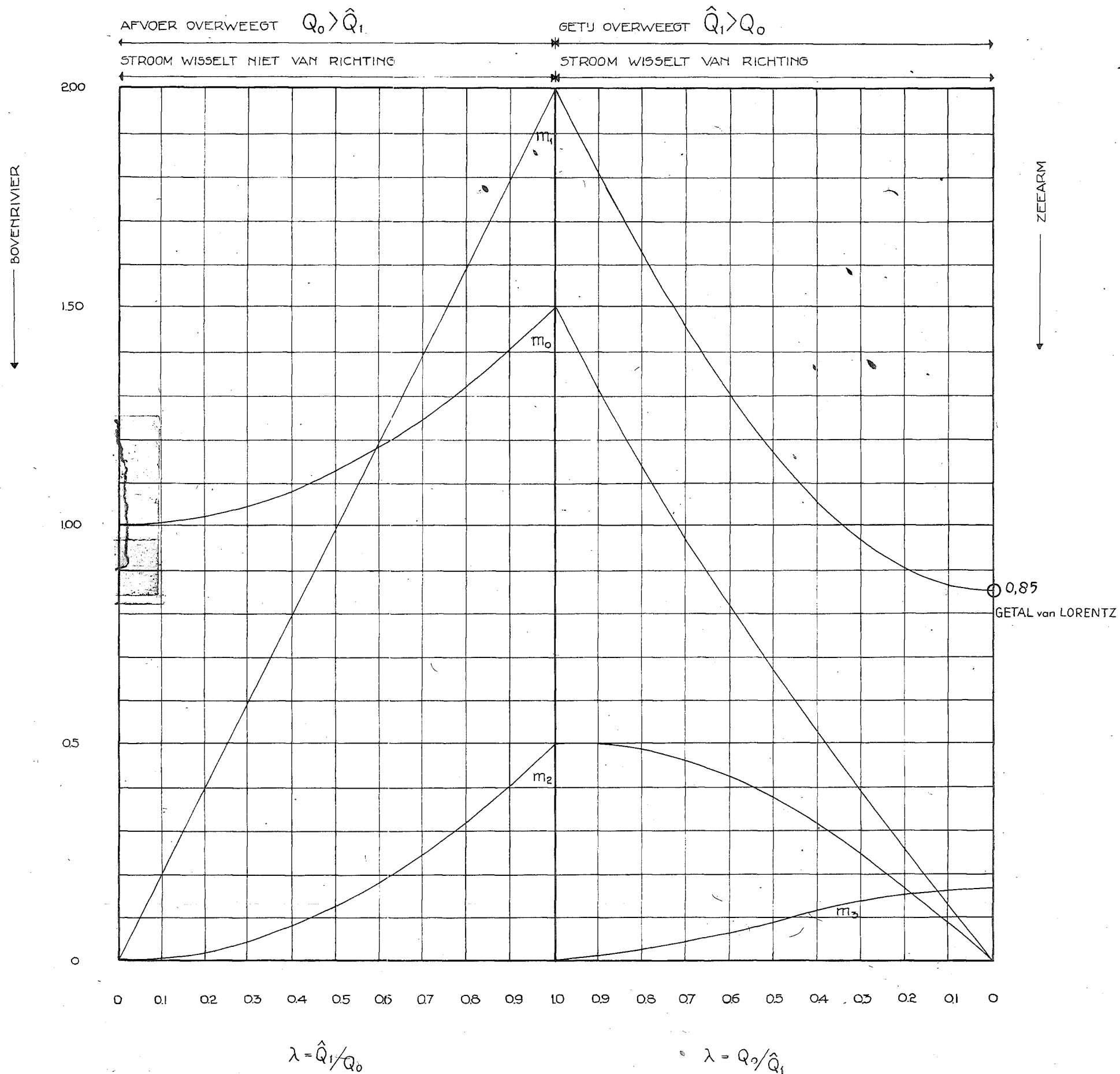
GEM. GETIJ 1950
MOMENTANE VERHANGLIJNEN



RESULTATEN VAN EEN GETIJBEREKENING UITGEVOERD DOOR DE ANTWERPSE ZEEDIENSTEN TE ANTWERPEN.



DIMENSIELOZE WEERSTANDSCOEFFICIENTEN BEHORENDE BIJ EEN M_2 BEREKENING + AFVOER



HARMONISCHE GETJBEREKENING (M_2 -GETJ)

RIVIER: de Lek

Behoort bij:

STAAT nr:

T.H. DELFT AFD. WAG- EN WATERBOUWKUNDE
AFD. VLOEISTOFMECHANICA

BULAGE 2

	Basis gegevens	Symbol	Sectie I	Sectie II	Sectie III	Sectie IV	Sectie V	Sectie	Sectie
1	Gem. diepte beneden NAP	Q_0	5.07	4.68	4.07	3.48	2.56		
2	Gem. middenstand t.o.v. NAP	h_m	0.27	0.30	0.32	0.33	0.33		
3	Gem. diepte beneden middenstand	Q_m	5.34	4.98	4.39	3.81	2.89		
4	Stroomvoerende breedte	b_s	0.277	0.215	0.187	0.167	0.160		
5	Gem. stroomvoerend opp. (3). (4).	A_m	1.47918	1.07070	0.82093	0.63627	0.46240		
6	Gem. hydr. straal	Q_r	5.14175	4.75951	4.19312	3.64374	2.78924		
7	Gem. bergende breedte	b	0.335	0.285	0.249	0.216	0.216		
8	Sectie lengte	l	0.8965	0.8075	1.0995	1.0395	0.3220		
9	Coëfficiënt γ d weerstand (Chezy)	C	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50		
10	Gem. stroomamplitude M_2 -getij	$\hat{Q}_1$	0.935	0.690	0.450	0.195	0.038		
11	Gem amplitude verticaal M_2 -getij	$\hat{h}_1$	0.825	0.755	0.730	0.755	0.775		
12	Getal van Lorentz	m_1	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85	0,85
13	Hoeksnelheid M_2 -getij	ω	1,405	1,405	1,405	1,405	1,405	1,405	1,405
14	$1+3(1)^2/(3)^2$	n_0	1.07166	1.06896	1.08296	1.11780	1.21575		
15	$1+(1)^2/2(3)^2$	$\bar{n}_0$	1.01193	1.01149	1.01383	1.01963	1.03596		
16	$(9)^2(5)^2(6)$	$(C^2 A^2 Q_r)_m$	2.81250	1.36406	0.70646	0.36877	0.14909		
17	$(14)(8)(10)(12)/(16)$	K	0.27146	0.37114	0.64467	0.52224	0.08472		
18	$(15)(8)/981(5)$	M	0.06231	0.07776	0.13841	0.16981	0.07354		
19	$(7)(8)$	B	0.30033	0.23014	0.27378	0.22453	0.06955		
20	$(17)+j(13)(18)$	R_1	$+0.27146 + 0.08783j$	$+0.37114 + 0.10925j$	$+0.64467 + 0.20852j$	$+0.52224 + 0.23858j$	$+0.08472 + 0.10332j$		
21	$j(13)(19)$	$1/R_2$	$0.42196j$	$0.32335j$	$0.38446j$	$0.31546j$	$0.09772j$		
22	$1/(21)$	R_2	$-2.36989j$	$-3.09262j$	$-2.59970j$	$-3.16997j$	$-10.23332j$		
23	$\sqrt{(20)(21)}$	$P+jQ$	$+0.20413 + 0.28059j$	$+0.21186 + 0.28323j$	$+0.30035 + 0.41282j$	$+0.23007 + 0.35805j$	$+0.03847 + 0.10762j$		
24	$(22)(23)$	Z_0	$+0.66497 - 0.48377j$	$+0.87592 - 0.65520j$	$+1.07321 - 0.78082j$	$+1.13501 - 0.72931j$	$+1.10131 - 0.39368j$		
25	$1/(24)$	$1/Z_0$	$+0.98336 + 0.71540j$	$+0.73206 + 0.54759j$	$+0.60927 + 0.44328j$	$+0.62358 + 0.40069j$	$+0.80513 + 0.28780j$		
26	$\cosh P$		1.02091	1.02252	1.04545	1.02659	1.00074		
27	$\sinh P$		0.20555	0.21345	0.30489	0.23210	0.03848		
28	$\cos Q$		0.96089	0.96015	0.91599	0.93658	0.99421		
29	$\sin Q$		0.27693	0.27946	0.40119	0.35045	0.10741		
30	$(26)(28)+j(27)(29)$	$\cosh(P+jQ)$	$+0.98098 + 0.05692j$	$+0.98177 + 0.05965j$	$+0.95762 + 0.12232j$	$+0.96148 + 0.08134j$	$+0.99495 + 0.00413j$		
31	$(27)(28)+j(26)(29)$	$\sinh(P+jQ)$	$+0.19751 + 0.28272j$	$+0.20494 + 0.28575j$	$+0.27928 + 0.41942j$	$+0.21738 + 0.35977j$	$+0.03826 + 0.10749j$		
32	(30)	L	$+0.98098 + 0.05692j$	$+0.98177 + 0.05965j$	$+0.95762 + 0.12232j$	$+0.96148 + 0.08134j$	$+0.99495 + 0.00413j$		
33	(24)(31)	M	$-0.26811 - 0.09245j$	$-0.36673 - 0.11602j$	$-0.62722 - 0.23206j$	$-0.50911 - 0.24981j$	$-0.08445 - 0.10332j$		
34	(25)(31)	N	$+0.00803 - 0.41931j$	$+0.00645 - 0.32141j$	$+0.01576 - 0.37934j$	$+0.00860 - 0.31145j$	$+0.00013 - 0.09755j$		
35	(30)	O	$+0.98098 + 0.05692j$	$+0.98177 + 0.05965j$	$+0.95762 + 0.12232j$	$+0.96148 + 0.08134j$	$+0.99495 + 0.00413j$		
36	Cntrôle	$LO-MN=1$							

Toe te passen eenheden.

Q_0 = diepte
 Q_r = hydr. straal
 l = sectie lengte
 b_s = stroomvoerende breedte
 b = bergende breedte
 A = stroomvoerend p ofiel
 C = weerstandcoëfficiënt
 g = versnelling t.g.v. de zwaartekracht

eenheid 1 m
 " 1 m
 " 10.000 m
 " 1.000 m
 " 1.000 m
 " 1.000 m²
 " 100 m^{1/2}/sec.
 " 1 m/sec.²

$\hat{Q}$ = stroom
 $\hat{h}_1$ = amplitude verticaal M_2 -getij
 t_{ij} = tijd

eenheid 1.000 m³/sec.
 " 1 m
 " 10.000 sec.

Opmerkingen:

$$P = \omega \sqrt{MB} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{K}{\omega M}\right)^2}}; Q = \omega \sqrt{MB} \sqrt{+1 + \sqrt{1 + \left(\frac{K}{\omega M}\right)^2}}; j = \sqrt{-1}$$

$j = \sqrt{-1}$

Gem. beteke t gem ddelde wa rde inde sect e

HARMONISCHE GETUBEREKENING (M_2 -GETIJ); AFVOER = 0
 ONVERKORTE METHODE ($Q_0 = 0$)

RIVIER. Lek

Behoort bij:

STAAT n^o

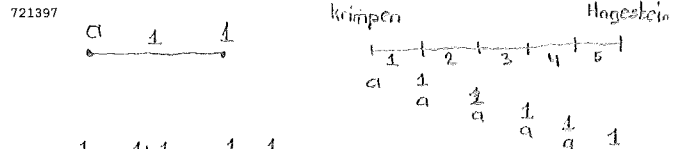
T.H. DELFT afd. Weg- en Waterbouwkunde
 vloeistofmechanica

BULAGE 3

BEHOORT BIJ: Onverkorte methode	RIVIER: de LEK AFVOER: $Q_0 = 0$ DATUM: FEBRUARI 1968 m ³ /sec.	AANEENSCHAKELING DER VAKKEN				STAAT N ^o
						BEREKENING:
		VAK 1	VAK 2	VAK 3	VAK 4	VAK 5
L. h (a)		(0,54519 + 0,80466j) ha	(0,73540 + 0,53040j) ha	(0,87839 + 0,24325j) ha	(0,95629 + 0,08490j) ha	(0,99495 + 0,00413j) ha
M. Q (a)		(-0,17950 + 0,22700j) ha	(-0,13407 + 0,25497j) ha	(-0,09939 + 0,24967j) ha	(-0,02444 + 0,04963j) ha	0
h (l)		(0,36569 + 1,03166j) ha	(0,60133 + 0,78537j) ha	(0,77900 + 0,49292j) ha	(0,93185 + 0,13453j) ha	(0,99495 + 0,00413j) ha
N h (a)		(0,33414 - 0,24584j) ha	(0,16345 - 0,24720j) ha	(0,06577 - 0,35170j) ha	(0,00984 - 0,30985j) ha	(0,00013 - 0,09755j) ha
O. Q (a)		(0,38577 - 0,92549j) ha	(0,17392 - 0,71580j) ha	(0,06659 - 0,38543j) ha	(0,00806 - 0,09379j) ha	0
Q (l)		(0,71991 - 1,17133j) ha	(0,33737 - 0,95300j) ha	(0,13236 - 0,73713j) ha	(0,01790 - 0,40364j) ha	(0,00013 - 0,09755j) ha
$h_{Hagestein} = ha = (-0,65660 - 0,57077j) / (0,36569 + 1,03166j) = -0,69192 + 0,39118j$ $\hat{h} = 0,795; K_1 = 209^\circ$						
h (l)		-0,65660 - 0,57077j	-0,72330 - 0,30819j	-0,73183 - 0,03634j	-0,69740 + 0,27144	-0,69005 + 0,38634j
$\hat{h}$ (l)		0,870	0,786	0,733	0,748	0,791
K		139°	157°	177°	201°	209°
Q (l)		-0,03992 + 1,09208j	0,14327 + 0,79829	0,19677 + 0,56181j	0,14551 + 0,28629j	+0,03807 + 0,06755j
$\hat{Q}$ (l)		1,093	0,811	0,595	0,321	0,078
φ		268°	280°	289°	297	299°
$\hat{h}_{gem}$		0,828	0,760	0,741	0,770	0,793
$\hat{Q}_{gem}$		0,952	0,703	0,458	0,200	0,039
K- φ		231°	237°	248°	264°	270°
(K- φ) gem.		234°	243°	256°	267°	270°

2827 A 3

BULAGE 4



$$\begin{aligned}
 h_1^1 &= L^1 h_a^1 + M^1 Q_a^1 \\
 Q_1^1 &= N^1 h_a^1 + O^1 Q_a^1 \\
 h_1^2 &= L^2 h_a^2 + M^2 Q_a^2 \\
 Q_1^2 &= N^2 h_a^2 + O^2 Q_a^2
 \end{aligned}
 \Rightarrow
 \begin{aligned}
 L^1(L^1 h_a^1 + M^1 Q_a^1) + M^1(N^1 h_a^1 + O^1 Q_a^1) &= (L^1 L^1 + M^1 N^1) h_a^1 + (L^1 M^1 + M^1 O^1) Q_a^1 = h_1^2 \\
 N^1(L^1 h_a^1 + M^1 Q_a^1) + O^1(N^1 h_a^1 + O^1 Q_a^1) &= (N^1 L^1 + N^1 O^1) h_a^1 + (N^1 M^1 + N^1 O^1) Q_a^1 = Q_1^2
 \end{aligned}$$

Dit kan zo voortgezet worden, al

$$\begin{aligned}
 h_5^1 &= Z_I h_a^1 + Z_{II} Q_a^1 \\
 Q_5^1 &= Z_{III} h_a^1 + Z_{IV} Q_a^1
 \end{aligned}$$

		Begin middenstand 0,25 m t.o.v. NAP		Afvoer $Q_0 = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots \text{m}^3/\text{sec.}$		
		Sectie I	Sectie II	Sectie III	Sectie IV	Sectie V
1	$\hat{Q}_1$ gem.	0,952	0,703	0,458	0,200	0,039
2	$Q_*^2 \ell / (c^2 A^2 Q_r)_m$	0,28888	0,29255	0,32646	0,11275	0,00328
3	$\lambda = (1/Q_0 \text{ resp. } Q_0/(1))$	0	0	0	0	0
4	m_0	ZIE GRAFIEK DIMENSILOZE WEERSTANDS- COEFFICIENTEN	0	0	0	0
5	m_1		0,85	0,85	0,85	0,85
6	n_0					
7	n_1	0,46516	0,45783	0,50637	0,60629	0,82318
8	$(K_1 - \varphi_1)$ gem.	234°	243°	256°	267°	270°
9	$-\cos(\theta)$	0,58779	0,45399	0,24192	0,05234	0
10	(4)(6)	0	0	0	0	0
11	(5)(7)(9)/2	0,11620	0,08833	0,05206	0,01348	0
12	(2)(10)	0	0	0	0	0
13	(2)(11)	0,03357	0,02584	0,01700	0,00152	0
14	$\Delta h_m = (12) + (13)$	0,03357	0,02584	0,01700	0,00152	0
15	h_m eind van de sectie	0,284	0,310	0,327	0,329	0,329
16	h_m gem. per sectie	0,267	0,297	0,319	0,328	0,329

Toe te passen eenheden.

Opmerkingen;

Q = diepte eenheid 1 m
 Q_r = hydr. straal " 1 m
 ℓ = sectie lengte " 10.000 m
 b_s = stroomvoerende breedte " 1.000 m
 b = bergende breedte " 1.000 m
 A = stroomvoerend profiel " 1.000 m²
 C = weerstandscoefficiënt " 100 m^{1/2}/sec.
 g = versnelling t.g.v. de zwaartekracht " 1 m/sec²
 $\hat{Q}$ = stroom " 1.000 m³/sec.
 $\hat{h}_1$ = amplitude verticaal M_2 -getij " 1 m
tijd = " 10.000 sec.

Q_* is de grootste van Q_0 en $\hat{Q}_1$ gem.
Gem. betekent gemiddelde waarde in de sectie

BEREKENING VAN HET MIDDENSTANDS Verval VOLGENS
 M_2 BEREKENINGEN

Behoort bij:

T.H. Delft afd. Weg en Waterbouwkunde
Vloeistofmechanica

RIVIER:

de LEK

STAAT nr

BULAGE 5

H. J. STROBAND

Een bijdrage tot de kennis van de getijberekening op benedenrivieren en zeearmen

In dit artikel wordt voortgebouwd op de methode-LORENTZ¹⁾ voor het berekenen van de getijbeweging in zeearmen, opgesteld om voorspellingen over de invloed der Zuiderzeesluiting te kunnen doen en op de door dr ir J. P. MAZURE²⁾ aangegeven wijze voor het berekenen van de getijbeweging op benedenrivieren, waar de invloed van het oppervater en de verandering van de diepte tijdens de getijbeweging niet te verwaarlozen zijn. Aan deze methoden voor het lineariseren van de kwadratische weerstandsterm wordt een benadering toegevoegd, waarbij naast het hoofdgetij (M_2) ook de andere partiële getijden in rekening worden gebracht.

§ 1. Inleiding

Bij de methode-LORENTZ wordt alleen het hoofdgetij (amplitude en fase van het M_2 getij) berekend, terwijl MAZURE naast het hoofdgetij ook de invloed van het oppervater, de verandering van de diepte tijdens de getijbeweging en de BERNOULLI-Invloed in de berekening opneemt. Bovengenoemde methoden zien af van de juiste vorm der getijkrommen, hetgeen aanzienlijke fouten teweeg kan brengen in de te berekenen H.W.- en L.W.-standen, maar vooral in de max. eb- en vloedstromen.

Houdt men geen rekening met de dagelijkse ongelijkheid in de getijbeweging, dan kan iedere getijkromme in een FOURIER-reeks worden ontwikkeld van de vorm:

$$f(t) = c_0 + c_1 \cos(nt - \varphi) + c_2 \cos(2nt - \varphi') + \dots^3)$$

Is men nu in staat een wijze van berekenen aan te geven, waarbij men de methode-MAZURE kan uitbreiden met bovenstaande hogere harmonische, dan zal een goede benadering worden verkregen van de juiste vorm der getijkrommen. Theoretisch het hoogst staat de *exacte*-methode⁴⁾, daar deze ons in staat stelt het gehele verloop van de getijbeweging van moment tot moment te berekenen. Voor de praktische toepassing ervan is echter een zeer grote kennis van de waterbeweging noodzakelijk en ze vergt veel inzicht van hen, die haar gebruiken. Vooral bij een uitgebreid netwerk van rivieren en zeearmen is de aan deze methode verbonden hoeveelheid werk groot. Een voordeel is echter, dat ook niet-harmonische bewegingen in de berekeningen kunnen worden opgenomen, hetgeen niet het geval is bij de door LORENTZ en MAZURE aangegeven wegen.

Meer en meer deed zich de wens gevoelen, om de methode-MAZURE uit te breiden voor hogere harmonischen.

Daar zowel de door prof. LORENTZ, als de door dr ir J. P. MAZURE gevolgde werkwijze berusten op het lineariseren van de bewegingsvergelijking, waardoor gesloten integratie mogelijk wordt, werd aanvankelijk getracht de door MAZURE aangegeven methode voor het lineariseren van de kwadratische weerstandsterm toe te passen, door aan de constante afvoer en de 1e harmonische der afvoerkromme nog een hogere harmonische toe te voegen. Men ondervindt dan echter al spoedig moeilijkheden bij het vaststellen van de integratie-grenzen (kenteringspunten), welke noodzakelijk zijn bij de FOURIER-analyse van de factor $|s|$, welke in de uitdrukking van de weerstandsterm voorkomt. (zie de bewegingsvergelijking in par. 2).

Door dr J. J. DRONKERS werd de hierboven geopperde

methode ontwikkeld tot een handelbare, welke goede resultaten oplevert. Voor de door dr J. J. DRONKERS gegeven oplossing wordt verwezen naar een toekomstige publicatie betreffende dit onderwerp van genoemde wiskundige. De hieronder ontwikkelde benaderingsmethode ondervangt eveneens deze moeilijkheid en stelt ons in principe in staat, de kwadratische weerstandsterm voor iedere willekeurige harmonische functie van s in een reeks van lineaire termen te ontwikkelen.

De door prof. LORENTZ en dr ir MAZURE gevonden weerstandscoefficienten worden met deze methode teruggevonden. Het geval:

$$s = S + \sigma_1 \cos(nt - \varphi) + \sigma_2 \cos(2nt - \varphi')$$

wordt nader uitgewerkt, en met behulp van de gevonden uitkomsten kan de methode-MAZURE worden uitgebreid met de tweede harmonische (M_4). Voor de praktijk zal door de toevoeging van het M_4 getij in voldoende mate de juiste vorm der getijkrommen worden verkregen.

§ 2. De benaderingsmethode

Door MAZURE worden in zijn proefschrift twee partiële differentiaalvergelijkingen opgesteld, welke de waterbeweging in prismatisch gedachte riviersecties met horizontale bodem in voldoende mate weergeven. Deze twee vergelijkingen zijn de *bewegingsvergelijking* en de *continuïteitsvergelijking* en worden als volgt beschreven:

$$g \cdot \rho \cdot \frac{\delta z}{\delta x} = - \frac{\rho}{f} \cdot \frac{\delta s}{\delta t} + \frac{\rho s}{f^2} \cdot \frac{\delta h}{\delta t} (B_0 + b) + \frac{\rho s^2}{f^3} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\rho g |s| s}{C^2 f^2 R} \quad (\text{bewegingsvergelijking}),$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = - B_0 \frac{\partial h}{\partial t} \quad (\text{continuïteitsvergelijking}).$$

In de bewegingsvergelijking komt de kracht $-\frac{\rho g |s| s}{C^2 f^2 R^2}$

voor, welke niets anders is dan de wrijvingsweerstand voor niet-stationaire stromen. Daar de wrijvingskracht tegen-

gesteld is gericht aan de snelheid $v_0 = \frac{s}{f}$, zal, indien de

stroom van richting verwisselt, ook de wrijvingskracht van teken moeten verwisselen. Dit laatste wordt verkregen, door gebruik te maken van de in de uitdrukking voor de wrijvingskracht voorkomende modulusstrepen.

De waterbeweging, zoals deze zich voordoet op onze zeearmen en benedenrivieren, kan beschouwd worden als de som van een constante beweging en een aantal harmonische bewegingen. Het horizontaal en het verticaal getij kunnen dan geschreven worden als:

$$s = S + \sigma_1 \cos(nt - \varphi) + \sigma_2 \cos(2nt - \varphi') + \sigma_3 \cos(3nt - \varphi'') \dots$$

$$h = H_m + \eta_1 \cos(nt - \kappa) + \eta_2 \cos(2nt - \kappa') + \eta_3 \cos(3nt - \kappa'') \dots$$

Is men nu in staat een methode aan te geven, waarbij de in de bewegingsvergelijking voorkomende niet-lineaire termen worden vervangen door lineaire uitdrukkingen in bovenstaande harmonische bewegingen, dan kan, omdat dan het superpositie-beginsel geldt, de aldus verkregen partiële lineaire differentiaalvergelijking vervangen worden door een vergelijking met constante grootheden en een aantal partiële lineaire differentiaalvergelijkingen. Om de volledige gewenste oplossing van de oorspronkelijke niet-lineaire differentiaalvergelijking te verkrijgen, heeft men de oplossingen van de hieruit afgeleide bijzondere differentiaalvergelijkingen te sommeren.

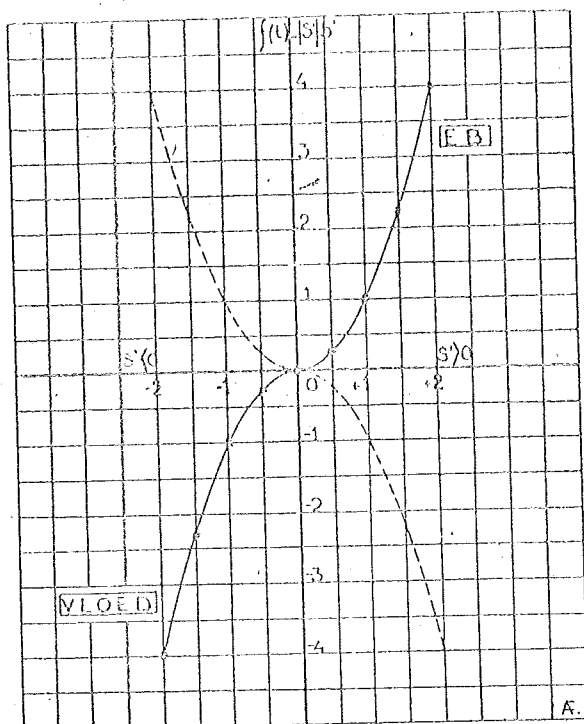
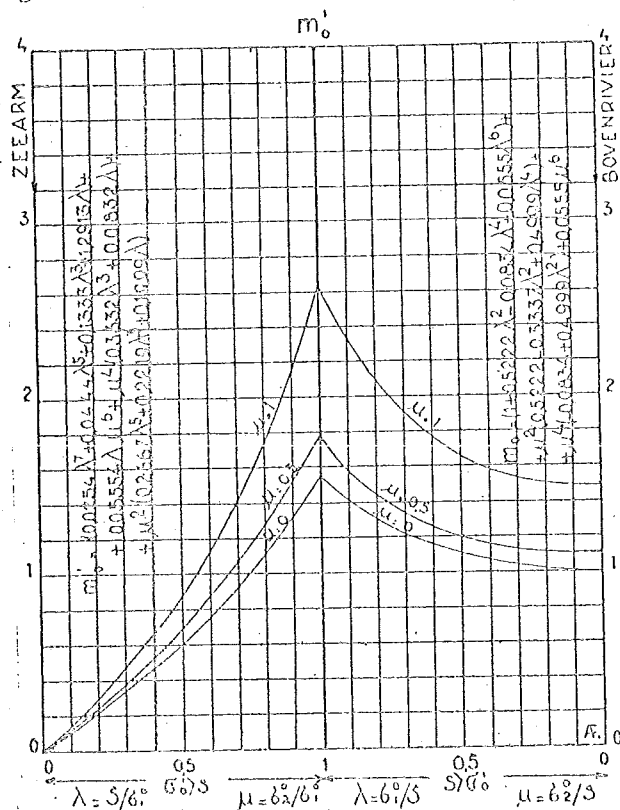
Substitueert men de uitdrukkingen voor s en h in de

¹⁾ S.C.L.: Verslag van de Staatcommissie Zuiderzee 1918-1926. Uitgegeven te 's Gravenhage 1926, Alg. Landsdrukkerij.

²⁾ De berekening van getijden en stormvloeden op Benedenrivieren. Proefschrift door Ir J. P. Mazure 1937.

³⁾ Afvoermetingen in de benedenrivieren 1930-1934. Uitgegeven bij de Alg. Landsdrukkerij in 1935.

⁴⁾ Een getijberekening voor benedenrivieren, door dr J. J. Dronkers, *De Ingenieur* 1935, n^o. 34.

Fig. 1. Grafische voorstelling van de functie $|s|/s' = f(t)$.Fig. 2. Waarden van de dimensieloze weerstandcoëfficiënt m_0^1 .

bewegingsvergelijking, dan kunnen alle hierin voorkomende niet-lineaire termen, uitgezonderd de weerstandsterm, langs goniometrische weg gesplitst worden in:

- constante termen;
- termen met de frequentie en fase van het gestelde hoofdgetij (M_2);
- termen met de frequentie en fase van het gestelde M_4 getij;
- termen met afwijkende frequenties en fasen.

Opgemerkt wordt, dat indien gedurende de getijperiode s niet meer van teken wisselt, ook de weerstandsterm langs goniometrische weg herleid kan worden. Moelijkheden ondervindt men echter bij de herleiding van de kwadratische

weerstandsterm, indien s veel van teken wisselt, daar de wrijvingskracht niet volgens s^2 , maar volgens $|s|s$ verandert.

Zolang s positief is, stelt de functie $|s|s = s^2$ het gedeelte van een parabool voor, dat gelegen is in het 1e kwadrant. Wordt s negatief, dan wordt $|s|s = -s^2$ en stelt deze functie het gedeelte van een parabool voor, dat gelegen is in het 3e kwadrant.

Beide gedeeltes der parabool hebben het punt 0,0 gemeen. Er wordt nu bij de benaderingsmethode een gehele rationale functie van s gezocht, welke zo goed mogelijk aansluit bij de twee paraboolhelften en bij benadering het verloop van de factor $|s|s$ weergeeft.

Substitueert men in deze gehele rationale functie voor s de gewenste stroomfunctie, die bij de getijbeweging op de benedenrivieren bestaat uit een constante stroom + de getijstroom, welke laatste bekende hoeksnelheden bezitten, dan vindt men na uitwerking termen met de frequentie en de fasen van de gesubstitueerde getijstroom en termen met afwijkende frequenties en fasen.

Daar s in het gebied der benedenrivieren en zeearmen sterk varieert, zal men voor $|s|s$ zeer uiteenlopende waarden vinden. Omdat de aard der betrekking tussen s en $f(s) = |s|s$ bekend is, kunnen zoveel waarden van $f(s)$ berekend worden als men wenst. Om een goede aansluiting te verkrijgen tussen de beide paraboolhelften enerzijds en de gehele rationale functie in s anderzijds, van deze gehele rationale functie de waarden van $f(s) = |s|s$ zodanig moeten kiezen, dat de bijbehorende waarden van s variëren tussen de uiterste waarden van s , welke kunnen voorkomen.

Voor iedere waarde van s kan de gehele rationale functie worden opgeschreven, waarbij dan de coëfficiënten van deze functie als onbekenden voorkomen. Voor het bepalen van deze coëfficiënten zal men evenveel vergelijkingen moeten opschrijven als er onbekende coëfficiënten zijn. Wil men dus dat de kromme, welke de gehele rationale functie weergeeft, weinig zal afwijken van de werkelijke kromme, dan zal deze gehele rationale functie van hoge graad moeten zijn. Bovendien zullen de, voor het bepalen van de coëfficiënten, noodzakelijke waarden van s en $f(s) = |s|s$ niet te sterk uiteen mogen lopen, opdat men ook tussen de waarden van $f(s)$ zo weinig mogelijk van de werkelijke kromme zal afwijken. Daar men echter voor s de gewenste stroomfunctie moet substitueren, zal men, om nog een handelbare gehele rationale functie in s te verkrijgen, de graad van deze functie zo laag mogelijk moeten houden. Dit laatste kan men als volgt bereiken:

Zoals reeds eerder werd opgemerkt, overheerst langs onze kusten het M_2 getij. Stelt men $s = S + \sigma_1 \cos(nt - \varphi) + \sigma_2 \cos(2nt - \varphi') \dots$, dan kunnen twee gevallen worden onderscheiden, n.l.:

1°: $\sigma_1 > S$; 2°: $S > \sigma_1$. Voor het 1e geval kan voor $f(s)$, $f(s) = \sigma_1^2 |s'|s'$ worden geschreven en voor het

2e geval $f(s) = S^2 |s'|s'$. Voor het 1e geval is $s' = \frac{S}{\sigma_1} +$

$\cos(nt - \varphi) + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cos(2nt - \varphi') \dots$ en voor het 2e geval:

$$s' = 1 + \frac{\sigma_1}{S} \cos(nt - \varphi) + \frac{\sigma_2}{S} \cos(2nt - \varphi') \dots$$

Wordt nu $|s'|s' = f(t)$ genoemd, dan geeft Fig. 1 het verloop van deze functie weer. Bij het 1e geval zullen de waarden van $f(t) = |s'|s'$ gelegen zijn op de beide paraboolhelften in het 1e en 3e kwadrant. Bij het 2e geval kunnen nog twee toestanden worden onderscheiden, n.l.:

a. De waarden van $f(t) = |s'|s'$ zullen gelegen zijn op de beide paraboolhelften, hoewel $S > \sigma_1$. Uit de afvoermetingen op de benedenrivieren blijkt n.l., dat de bovenharmonischen (M_4 , M_6 , ...) de ebstroom verkleinen en dus de vloedstroom verhogen.

b. De waarden van $f(t) = |s'|s' = s^2$ liggen alle op de paraboolhelft in het eerste kwadrant. $f(t) = |s'|s' = s^2$ kan nu langs goniometrische weg herleid worden en op dit

geval zal de benaderingsmethode dan ook niet toegepast behoeven te worden.

Daar voor het uiterste geval, dat s nog juist van teken wisselt, de verhouding σ^2/S nagenoeg gelijk aan 1 zal zijn en bovendien voor $nt = \varphi$ de waarden $\cos(nt - \varphi) = 1$ worden, zullen de uiterste waarden waartussen $f(t) = |s'|s'$ zal variëren, zoals uit het verslag „Afvoermetingen 1930-1934³⁾ is gebleken, gesteld kunnen worden op $+2$ en -2 . Voor het vaststellen van de coëfficiënten van de gehele rationale functie in s' , zal men daarom de waarden van $f(t) = |s'|s'$ zodanig moeten kiezen, dat steeds geldt $-2 \leq s' \leq +2$.

Stelt men $f(t)$ voor door een gehele rationale functie van de n^e graad, dan zullen, daar men voor s' en $-s'$ gelijke doeli tegengestelde waarden van $f(t)$ moet vinden, alleen oneven machten van s' in $f(t)$ voorkomen. Bovendien is voor $s' = 0$: $f(t) = 0$ en dus $A_0 = 0$. Stelt men deze gehele rationale functie voor door:

$$f(t) = A_1 s' + A_3 s'^3 + A_5 s'^5 + A_7 s'^7 + \dots + A_{n-1} s'^{n-1},$$
 dan kunnen de coëfficiënten $A_1, A_3, \dots, A_{n-1}$ berekend worden. Er wordt nu een benadering gezocht voor de functie $f(t) = |s'|s'$ door middel van de punten:

$s' = 0,5;$	$f(t) = 0,25$
$s' = 1,0;$	$f(t) = 1,00$
$s' = 1,5;$	$f(t) = 2,25$
$s' = 2,0;$	$f(t) = 4,00$

Voor $f(t)$ moet dan worden geschreven:

$$f(t) = A_7 s'^7 + A_5 s'^5 + A_3 s'^3 + A_1 s'$$

Substitueert men bovenstaande waarden van s' en $f(t)$ in deze uitdrukking, dan verkrijgt men 4 lineaire vergelijkingen met als onbekenden: A_7, A_5, A_3 en A_1 .

Na oplossing kan voor $f(t)$ geschreven worden:

$$f(t) = 0,02539 s'^7 - 0,22222 s'^5 + 0,91111 s'^3 + 0,28572 s'$$

In $f(t)$ kan iedere functie van s' gesubstitueerd worden, mits geldt $-2 \leq s' \leq +2$.

Substitueert men in $f(t)$ voor $s' = \frac{S}{\sigma_1} + \cos(nt - \varphi)$

$$1 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \cos(2nt - \varphi) \dots \text{indien } \sigma_1 > S$$

$$\text{of } s' = 1 + \frac{\sigma_1}{S} \cos(nt - \varphi) + \frac{\sigma_2}{S} \cos(2nt - \varphi) \dots$$

indien $\sigma_1 < S$

dan kan $f(t)$ eenvoudig langs goniometrische weg gesplitst worden in:

- constante termen;
- termen met de frequentie en de fase van het hoofdgetij (M_2);
- termen met de frequentie en de fase van het M_4 getij;
- termen met afwijkende frequenties en fasen.

In het algemeen zal $f(t)$ als volgt zijn te schrijven:

$$f(t) = |s'|s' = (m_0' + m_2' \cos 2\varphi) + m_1' \cos(nt - \varphi) + m_3' \cos(3nt - \varphi) + m_5' \cos(5nt - \varphi) + m_7' \cos(7nt - \varphi) + \dots$$

Hierin zijn $m_0', m_2', m_1', m_3', m_5', m_7'$ functies van de verhoudingen $\lambda = \frac{S}{\sigma_1}$ of $\lambda = \frac{\sigma_1}{S}$ en $\mu = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ of

$\mu = \frac{\sigma_2}{S}$, al naar gelang $\sigma_1 \geq S$ of $\sigma_1 < S$.

Voor m_0' kan worden geschreven: $a \cos(2\varphi - \varphi') + b \cos(4\varphi - 2\varphi')$, waarin a en b functies zijn van λ en μ . $m_1' \cos(nt - \varphi)$ is de resulterende cosinusvorm van $c \cos(nt - \varphi' + \varphi) + d \cos(nt - 2\varphi' + 3\varphi) + e \cos(nt + \varphi' - 3\varphi) + f \cos(nt + 2\varphi' - 5\varphi)$, waarin c, d, e en f functies zijn van λ en μ . $m_3' \cos(3nt - \varphi)$ is de resulterende cosinusvorm van

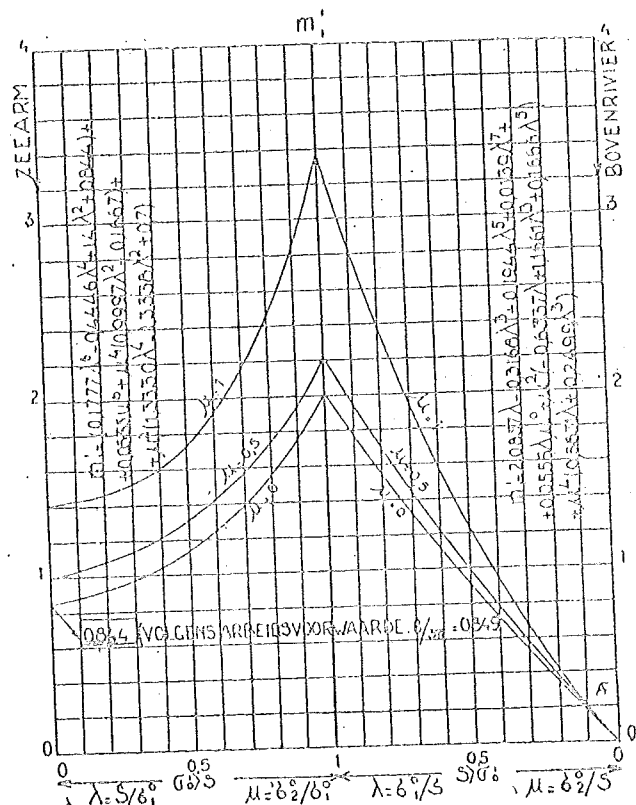


Fig. 3. Waarden van de dimensieloze weerstandscoefficiënt m_1' .

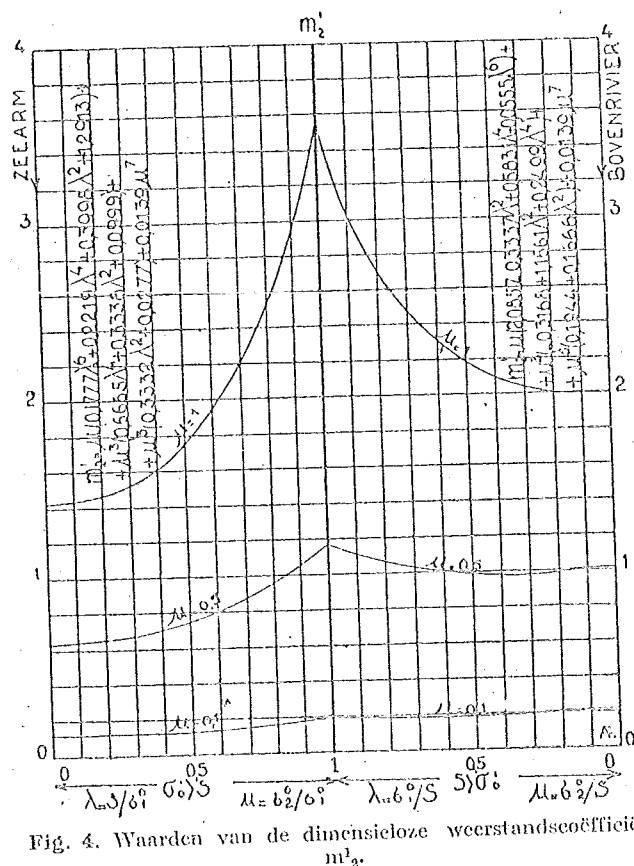
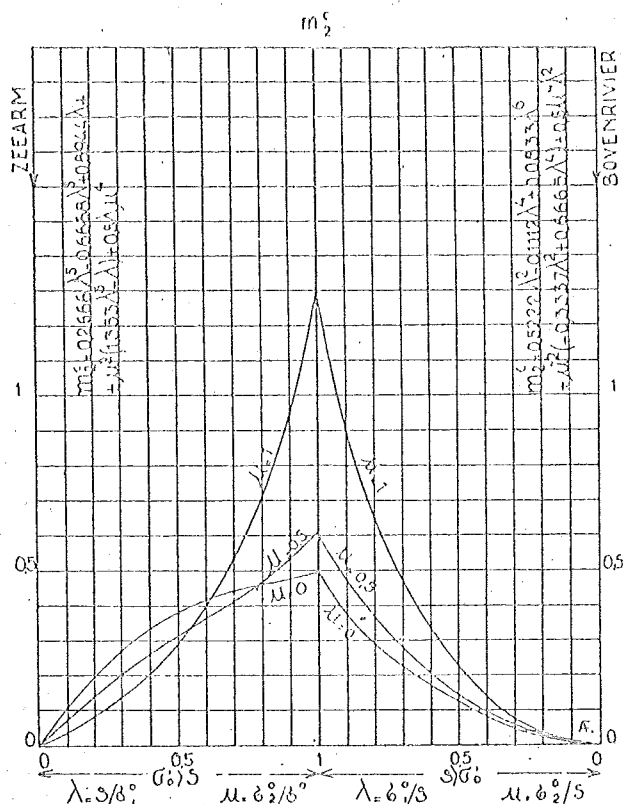
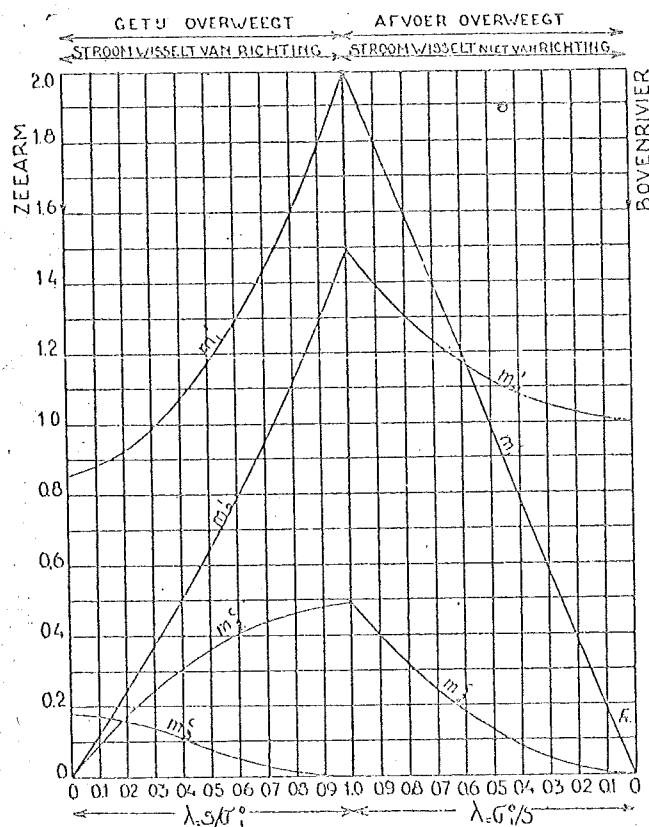


Fig. 4. Waarden van de dimensieloze weerstandscoefficiënt m_2' .

$g \cos(2nt - 2\varphi' + 2\varphi) + h \cos(2nt - 4\varphi' + \varphi) + i \cos(2nt - 3\varphi' + 4\varphi)$, waarin g, h en i functies zijn van λ en μ .

$m_5' \cos(5nt - \varphi)$ is de resulterende cosinusvorm van $j \cos(3nt - 2\varphi' + \varphi) + k \cos(3nt - \varphi' - \varphi) + l \cos(3nt - 5\varphi' + 3\varphi) + n \cos(3nt - 3\varphi' + 3\varphi)$ waarin j, k, l en n weer functies zijn van λ en μ .

De uitdrukkingen en grafische voorstellingen van de be-

Fig. 5. Waarden van de dimensieloze weerstandcoëfficiënt m_c^2 .Fig. 6. Waarden van de dimensieloze weerstandcoëfficiënten m_o^1 , m_1^1 , m_2^1 , m_c^2 en m_c^3 .

langrijkste dimensieloze coëfficiënten m_o^1 , m_1^1 , m_2^1 , m_c^2 vindt men in de Fig. 2 t/m 5.

Het door dr J. P. MAZURE in zijn proefschrift behandelde geval, dat $s = S + \sigma_1 \cos(nt - \varphi)$ verkrijgt men door $\mu = 0$ te stellen. Is $\sigma_1 \ll S$, dan wordt $f(t) = |s'| s' = s'^2$ eenvoudig langs goniometrische weg herleid. Voor $\sigma_1 \gg S$ en $\sigma_1 \ll S$ verkrijgt men de in tabel I vermeldte uitdrukkin-

gen voor de dimensieloze weerstandcoëfficiënten m_o^1 , m_1^1 , m_c^2 , en m_c^3 .

TABEL I

	$\sigma_1 \gg S$		$\sigma_1 \ll S$
m_o^1	$0,0254 \lambda^7 + 0,0444 \lambda^5 + 0,1333 \lambda^3 + 1,2913 \lambda$	m_o^1	$1 + \frac{\lambda^2}{2}$
m_1^1	$0,1777 \lambda^6 + 0,4446 \lambda^4 + 1,4 \lambda^2 + 0,844$	m_1^1	2λ
m_c^2	$0,2666 \lambda^5 - 0,6668 \lambda^3 + 0,8944 \lambda$	m_c^2	$\frac{\lambda^2}{2}$
m_c^3	$0,2222 \lambda^4 - 0,3889 \lambda^2 + 0,1667$	m_c^3	0

In Fig. 6 zijn de waarden van m_o^1 , m_1^1 , m_c^2 en m_c^3 voor variërende waarden van γ grafisch voorgesteld. Een overeenkomstige figuur vindt men in het proefschrift van dr J. P. MAZURE. Uit de uitdrukking voor m_1^1 volgt, dat de waarde m_1^1 bij $\lambda = 0$ (zeearmen) nagenoeg in overeenstemming is met de door prof. LORENTZ uit de arbeidsvoorwaarde afgeleide arbeidsfactor:

$$K = \frac{8}{3\pi} = 0,849.$$

§ 3. Slotbeschouwing

Als gevolg van de voortdurende veranderingen van het rivierprofiel f en van de hydraulische straal R tijdens de getijbeweging, varieert ook het doorlaatvermogen $C^2 f^2 R$ van de rivier of de zeearm. De afwijkingen ten aanzien van de door een index m aan te duiden waarden in de middenstand zijn evenredig te stellen met de waterspiegeluitwijking. Wordt deze laatste μ genoemd, dan wordt de wrijvingskracht uit de bewegingsvergelijking:

$$X = \frac{-g \cdot \rho \cdot s^2 \cdot |s'| s'}{(C^2 f^2 R)_m \cdot (1 + \frac{\eta}{H_m})^3}$$

De factor $\frac{1}{(1 + \frac{\eta}{H_m})^3}$ wordt nu ook in een reeks lineaire

termen ontwikkeld, waarna de twee reeksen, voorstellende de factoren $|s'| s'$ en $\frac{1}{(1 + \frac{\eta}{H_m})^3}$ volgens de reeds door

MAZURE aangegeven weg met elkaar worden vermenvuldigd.

Beschouwt men $\frac{1}{(1 + \frac{\eta}{H_m})^3}$ als de limiet van een meet-

kundige reeks ($\eta \ll H_m$), dan vindt men:

$$\frac{1}{(1 + \frac{\eta}{H_m})^3} = 1 - \frac{3\eta}{H_m} + \frac{6\eta^2}{H_m^2} \dots$$

Wordt in deze reeks nu: $\eta = \eta_1^\circ \cos(nt - \kappa) + \eta_2^\circ \cos(2nt - \kappa')$ gesubstitueerd, dan vindt men na enige herleidingen en na verwaarlozing van termen met hogere frequenties dan het M_4 getij:

$$\frac{1}{(1 + \frac{\eta}{H_m})^3} = 1 + \frac{3\eta_1^\circ}{H_m^2} - \frac{3\eta_1^\circ}{H_m} \cos(nt - \kappa) -$$

$$\frac{3\eta_2^\circ}{H_m} \cos(2nt - \kappa') + \frac{3\eta_1^\circ}{H_m^3} \cos 2(nt - \kappa)$$

of kortheidshalve:

$$\frac{1}{(1 + \frac{\eta}{H_m})^3} = n_0 - n_1 \cos(nt - \kappa) + n_2' \cos 2(nt - \kappa) + n_2'' \cos(2nt - \kappa').$$

Na vermenigvuldiging van bovenstaande reeks met die, voorstellende de factor $|s'|s'$ (zie blz. B. 91) wordt de aldus ontstane productreeks gesplitst in verschillende termen, waarvan de belangrijkste hieronder worden vermeld:

a. Constante termen:

$$n_o(m'_o + m^e_o) - \frac{n_1 m^1_1}{2} \cos(\kappa - \varphi)$$

b. termen met de frequentie van het M_2 getij:

$$n_o m^1_1 \cos(nt - \varphi) - (m'_o + m^e_o) n_1 \cos(nt - \kappa) + \\ - \frac{n_1 m^2_2}{2} \cos(nt - 2\varphi + \kappa) + n_o m^e_1 \cos(nt - \alpha) + \\ - \frac{n_1 m^2_2}{2} \cos(nt - \varphi' + \kappa).$$

c. termen met de frequentie van het M_4 getij:

$$n_o m^2_2 \cos(2nt - \varphi') - n'_2(m'_o + m^e_o) \cos(2nt - \kappa') + \\ + n_o m^e_2 \cos(2nt - \varphi) - \frac{n_1 m^1_1}{2} \cos(2nt - \kappa - \varphi) + \\ + n'_2(m'_o + m^e_o) \cos(2nt - \kappa).$$

d. termen met de frequentie van het M_6 getij:

$$n_o m^e_3 \cos(3nt - \varphi) - n_o m^e_3 \cos(3nt - \gamma) - \\ - \frac{n_1 m^2_2}{2} \cos(3nt - \kappa - \varphi') - \frac{n_1 m^2_2}{2} \cos(3nt - 2\varphi + \kappa).$$

Ieder van bovenstaande termen moet nog worden vermenigvuldigd met $-\frac{s^2_o g \rho}{(C^2 f^2 R)_m}$. Substitueert men vervolgens deze termen en die, welke verkregen worden door goniometrische bewerking van de in de bewegingsvergelijking voorkomende overige niet-lineaire termen, in deze bewegingsvergelijking, dan kan deze gesplitst worden in:

- 1°. Een vergelijking met permanente grootheden.
- 2°. Een vergelijking met de frequentie van het M_2 getij.
- 3°. Een vergelijking met de frequentie van het M_4 getij, enz.

Uit een beschouwing van de termen met de frequentie van het M_2 , M_4 en M_6 getij blijkt, dat naast de termen, welke frequenties en fasen bezitten van de harmonischen der gestelde stroomfunctie e.g. verticaal getij, ook termen optreden, waarvan de fasen zijn samengesteld uit die der gestelde harmonischen. De termen, welke niet de fasen van het gestelde horizontale en verticale getij bezitten, worden correctietermen genoemd en hebben de dimensie van een kracht.

Worden deze correctietermen aanvankelijk buiten beschouwing gelaten, dan kan voor de onder 2e en 3e genoemde bewegingsvergelijkingen, welke partiële lineaire differentiaalvergelijkingen zijn, met in achtneming van de continuïteitsvergelijkingen, een oplossing worden gezocht op de door MAZURE in zijn proefschrift aangegeven wijze. Na een 1e berekening kunnen vrij nauwkeurig de correctietermen worden bepaald. De sommatie van deze correctietermen geschiedt het eenvoudigst vectorisch. Noemt men de aldus gevonden correctie kracht met de frequentie van het M_2 getij $\eta^e_1 \cos(nt - \kappa_1)$ en de correctie kracht met de frequentie van het M_4 getij $\eta^e_2 \cos(2nt - \kappa_2)$, dan kunnen deze termen worden omgewerkt tot:

$$\eta^e_1 \cos(nt - \kappa_1) = \frac{\eta^e_1}{\eta_1} \cos(\kappa_1 - \kappa^e_1) \eta_1 + \\ + \frac{\eta^e_1}{n \cdot \eta_1} \sin(\kappa_1 - \kappa^e_1) \frac{\delta \eta_1}{\delta t} \\ \eta^e_2 \cos(2nt - \kappa_2) = \frac{\eta^e_2}{\eta_2} \cos(\kappa_2 - \kappa^e_2) \eta_2 + \\ + \frac{\eta^e_2}{2 \cdot n \cdot \eta_2} \sin(\kappa_2 - \kappa^e_2) \frac{\delta \eta_2}{\delta t}$$

Bovenstaande termen kunnen nu in de bewegingsvergelijkingen worden opgenomen, waarna weer een oplossing wordt gezocht op de door MAZURE aangegeven weg. Bij de

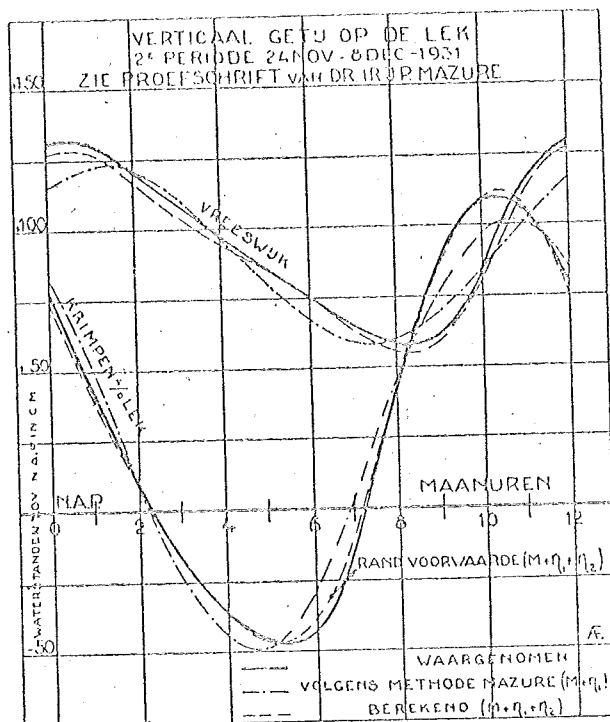


Fig. 7. Verticaal getij op de Lek bij Vreeswijk en Krimpen a/d Lek. Oppervlatafvoer 270 m³/sec.

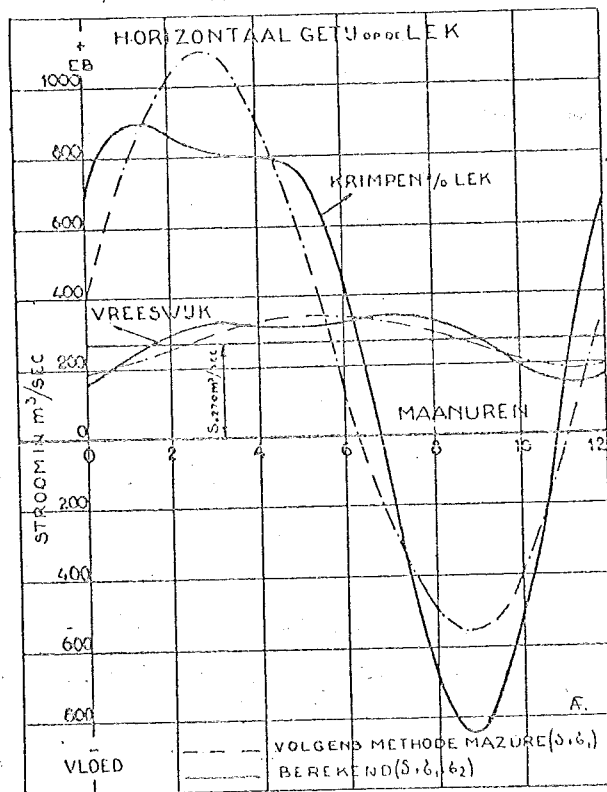


Fig. 8. Horizontaal getij op de Lek bij Vreeswijk en Krimpen a/d Lek. Oppervlatafvoer 270 m³/sec.

integratie van deze bewegingsvergelijkingen is het nodig aan te nemen, dat de weerstandsfactoren $m_o s^2_o$, $m^1_1 s^2_o$, $m^2_2 s^2_o$, ..., die feitelijk van punt tot punt met de waarden van σ^o_1 en σ^o_2 veranderen, over het beschouwde vak constant zijn. Praktisch betekent dit, dat aan het begin der berekening voor σ^o_1 en σ^o_2 een waarde geschat moet worden, waarmee de weerstandsgrootheden worden bepaald.

Alle coëfficiënten van de onbekenden η_1 , η_2 , σ_1 of σ_2 of hun differentiaalquotienten worden zodoende constanten. Achteraf moet worden nagegaan of een juiste schatting van deze waarden is verricht. Mocht dit niet het geval zijn, dan moeten de berekeningen worden herhaald.

TABEL II.

Rivier de Lek 24 November — 8 December 1931.

	Middenstanden en verticaal getij										Oppervlatafvoer en hor. getij					
Peilschaalstation	gemeten middenst.	berekende middenst.	gemeten verticaal M_2 getij		berekende verticaal M_2 getij		gemeten verticaal M_4 getij		berekende verticaal M_4 getij		oppervlatafvoer in $m^3/sec.$	berekende horizontaal M_2 getij		berekende horizontaal M_4 getij		
			A	F	A	F	A	F	A	F		A	F	A	F	
Krimpen a/d Lek (randvoorwaarde)	26,2	26,2	76,4	318°	76,4	318°	11,3	213°	11,3	213°	270	830	83°	294	356°	
Streefkerk . . .	34,1	33,7	68,7	333°	70,7	331°	11,4	231°	11,8	235°	270	564	94°	231	24°	
Schoonhoven . .	44,5	44,0	59,3	348°	61,2	346°	10,0	257°	13,0	260°	270	375	110°	168	43°	
Vreeswijk . . .	93,5	90,1	34,3	40°	32,7	42°	8,4	354°	10,7	358°	270	85	165°	44	134°	
Culemborg . . .	141,8	141,0	16,4	86°	15,4	85°	3,4	88°	4,0	74°	270	25	207°	16	197°	

Amplituden van het verticaal getij in cm.

Amplituden van het horizontaal getij in $m^3/sec.$

Uit een aan de praktijk ontleend voorbeeld is gebleken, dat de hier gevolgde benaderingsmethode zeer goed de vervormingsverschijnselen weergeeft, welke optreden bij een niet lineaire weerstandsterm.

Uit het verslag: „Afvoermetingen in de Benedenrivieren 1930—1934” werden de analyses van een gemeten stroomkromme en de bijbehorende verticale getijkromme van de Lek bij knr 987,500 op 6 Juni 1932 verkregen. De analyses voor deze krommen luiden als volgt:

$$s = 416 + 948 \cos(nt - 115^\circ) + 340,8 \cos(2nt - 84^\circ) \text{ en} \\ h = (H_m + \eta) = 5,84 + 0,8153 \cos(nt - 352^\circ) + 0,1213 \cos(2nt - 283^\circ).$$

De waarden van $\frac{|s'|}{(1 + \frac{\eta}{H_m})^3} s'$ werden maanuur voor

maanuur bepaald en daarna met behulp van de aldus gevonden 12 waarden geanalyseerd aan de hand van het reekenschema van RUNGE. Het resultaat was:

$$\frac{|s'|}{(1 + \frac{\eta}{H_m})^3} s' = 0,6354 + 1,118 \cos(nt - 117^\circ) + 0,1460 \cos(2nt - 122^\circ) + 0,1456 \cos(3nt - 228^\circ)$$

Met behulp van de termen genoemd op blz. B. 93 wordt gevonden:

$$\frac{|s'|}{(1 + \frac{\eta}{H_m})^3} s' = 0,6548 + 1,129 \cos(nt - 118^\circ) + 0,1411 \cos(2nt - 126^\circ) + 0,1446 \cos(3nt - 226^\circ)$$

Tussen beide reeksen bestaat een zeer goede overeenstemming, zodat ook verondersteld mag worden, dat de hier beschreven methode voor het uitvoeren van getijberekeningen tot goede resultaten zal leiden. Een berekening werd uitgevoerd voor de 2e periode, genoemd in het proefschrift van MAZURE. In tegenstelling tot de door MAZURE gevolgde weg werd ook het M_4 getij in de berekeningen opgenomen.

Voor de peilschaalstations Krimpen a/d Lek, Streefkerk, Schoonhoven, Vreeswijk en Culemborg werden volgens de methode der harmonische getij-analyse de gemiddelde maansgetijden voor de betreffende periode vastgesteld. De resultaten zijn vermeld in tabel II. Eveneens vindt men in deze tabel de uitkomsten van de berekeningen, terwijl in Fig. 7 en 8 de resultaten van de harmoni-

sche getijanalyse en de uitkomsten van de berekeningen voor de peilschaalstations Krimpen a/d Lek en Vreeswijk grafisch zijn voorgesteld.

Uit de resultaten der berekeningen blijkt, dat de in dit artikel ontwikkelende methode uitkomsten geeft, welke in behoorlijke overeenstemming zijn met de waargenomen waarden. Over het algemeen worden hier de amplituden van het M_4 getij te groot gevonden, terwijl daarentegen de fasen van het M_4 getij zeer goed zijn. Gewezen wordt op de afwijkingen tussen het horizontaal getij te Krimpen a/d Lek, berekend met de hier ontwikkelde methode en met die volgens MAZURE. Opgemerkt wordt, dat de verandering van de kombergingsbreedte, als gevolg van de getijbeweging eenvoudig in de berekening van het M_4 getij opgenomen kan worden, hetgeen hier dan ook werd gedaan. De verandering van de kombergingsbreedte komt nl. hoofdzakelijk tot uiting in het M_4 getij, zoals gemakkelijk uit de continuïteitsvergelijking is af te leiden.

Voor de praktijk is het voldoende, dat de in dit artikel gebezigde formules tot in drie decimalen nauwkeurig worden genomen. De hier vermelde waarden zijn echter rechtstreeks uit de rekenmachine gekomen, zodat in het geheel geen extra rekenwerk behoefde te worden verricht.

Gebezigde symbolen en hun betekenis, voor zover ze niet direct uit de tekst volgen.

- b stroomvoerende breedte.
- f oppervlakte van het dwarsprofiel.
- g versnelling van de zwaartekracht.
- h waterdiepte.
- n hoeksnelheid $(= \frac{2\pi}{T})$.
- s stroom.
- s_0 grootste der beide waarden S en σ_0 .
- t tijd.
- x afstand langs geulas.
- z hoogte van de waterspiegel t.o.v. N.A.P.

- B_0 bergende breedte.
- C constante van EYTELWEIN.
- H diepte in de middenstand.
- R hydraulische straal.
- S bovenafvoer.
- α } hockwaarde, functies van de fase.
- β }
- γ }

η_1^0	amplitude van het verticaal M_2 getij.
η_2^0	" " " " " M_4 "
η_3^0	" " " " " M_6 "
κ	fase van het verticaal M_2 getij.
κ'	" " " " " M_4 "
κ''	" " " " " M_6 "
ρ	dichtheid.
σ_1^0	amplitude van het horizontaal M_2 getij.
σ_2^0	" " " " " M_4 "
σ_3^0	" " " " " M_6 "
φ	fase van het horizontaal M_2 getij.
φ'	" " " " " M_4 "
φ''	" " " " " M_6 "

Indices:

m waarde in de middenstand van ...

c duidt op correctie.

KORTE TECHNISCHE BERICHTEN**De Puzzle van het Panama Kanaal.**

De atoombomontploffingen te Hiroshima en Nagasaki maakten niet slechts een eind aan Wereldoorlog n°. 2, doch ook aan het vertrouwen, dat men in de V.S. had in de bedrijfszekerheid van het Panama Kanaal in oorlogstijd. De vraag rees, of men door ombouw van het bestaande kanaal, dan wel door het aanleggen van een geheel nieuwe scheepvaartroute — waarbij dan de doorvaartwijde van eventuele sluisen van 110 op 140 ft zou moeten worden gebracht — de gewenste veiligheid zou kunnen verkrijgen. Hierbij zou ook de mogelijkheid van een open kanaal onder de ogen moeten worden gezien. In de zitting van het Congres van 28 December 1945 werd een wet aangenomen, waarbij de Gouverneur van het Panama Kanaal de opdracht werd verstrekt, omtrent het beste type voor dat kanaal en het gunstigste tracé een rapport uit te brengen, onverschillig of dit te Panama of elders zou moeten worden gegraven. Voor dit onderzoek werd tevens een erdriet van \$ 5 miljoen toegestaan.

Uitgegaan werd van een hypothetisch kanaalprofiel van 500 ft bodembreedte en taluds van 1 : 1. Zeer vele tracés werden onderzocht en daarvan die geschrapt, welke niet in aanmerking konden komen wegens gebrek aan voedingswater, te grote lengte, te diepe ingravingen enz. Fig. 1 geeft een overzicht van deze mogelijkheden; na schifting bleven slechts de routes: 1°, San Blas en 2°. Caledonia Bay (open of gesloten waterweg); 3°. Atrato-Truando (open kanaal) en 4°. Nicaragua (met sluisen)). De voorlopige terreinopname geschiedde volgens de meest moderne methoden van luchtkartering, waarbij een uitgebreid gebruik van radarverkenning werd gemaakt.

Parallel hiermede werd nagegaan, in hoeverre het bestaande kanaal zou kunnen worden verbeterd. Als voornaamste bezwaren worden genoemd de te kleine doorvaartwijde der sluisen (110 ft) en de kwetsbaarheid bij een moderne bomaanval. Uit de drie reeds bij de aanleg onderzochte, in aanmerking komende, gewijzigde tracés, welke in Fig. 2 zijn aangegeven, resulteerde het Pacific

Terminal Lake Plan, waarbij alle sluisen geconcentreerd worden nabij Miraflores; het kanaal zou dus van Miraflores tot de Stille Oceaan geheel open worden. Daarbij zullen vele moeilijkheden, veroorzaakt door de Gaillard ingraving (van de Pacific-zijde komende, wordt deze aangetroffen onmiddellijk na doorvaren van het Gatun-stuwmeer) mede omdat deze „Gaillard Cut” vaak zeer mistig is, verdwijnen. Een bijna 1 km lang „kanaalmodel” werd gemaakt (geometrisch schaal 1 : 100), waarin kunstmatig het toekomstige tijverschuif kon worden opgewekt, zodat stroomsnelheden e.a. konden worden gemeten.

Bij dit plan is het de bedoeling, het peil van het Gatun Meer, hetwelk thans 85' + is, in drie étappes te verlagen tot de zeespiegel (eerst tot 50' +, daarna tot 20' + en ten slotte tot 0), waarvoor hulpsluisen zullen moeten worden gebouwd; de nieuwe diepte zal door baggeren moeten worden verkregen.

Mocht het daarentegen mogelijk blijken, het nieuwe kanaal onmiddellijk te baggeren tot 50' — (waarvoor nodig

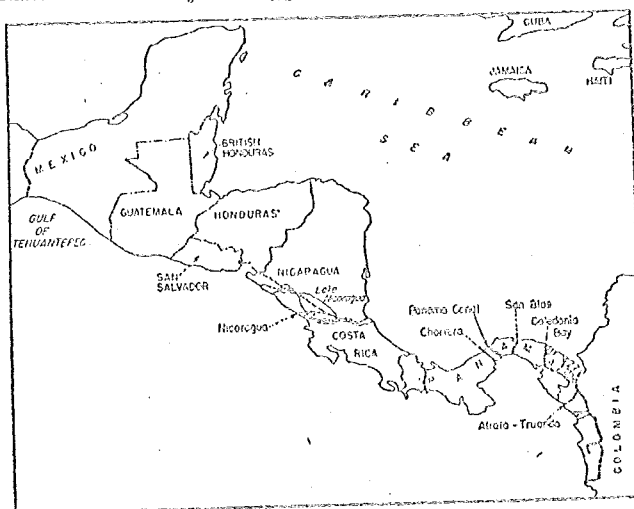


Fig. 1. Overzicht van de belangrijkste in aanmerking komende kanaal-tracés op een andere plaats dan het bestaande kanaal.

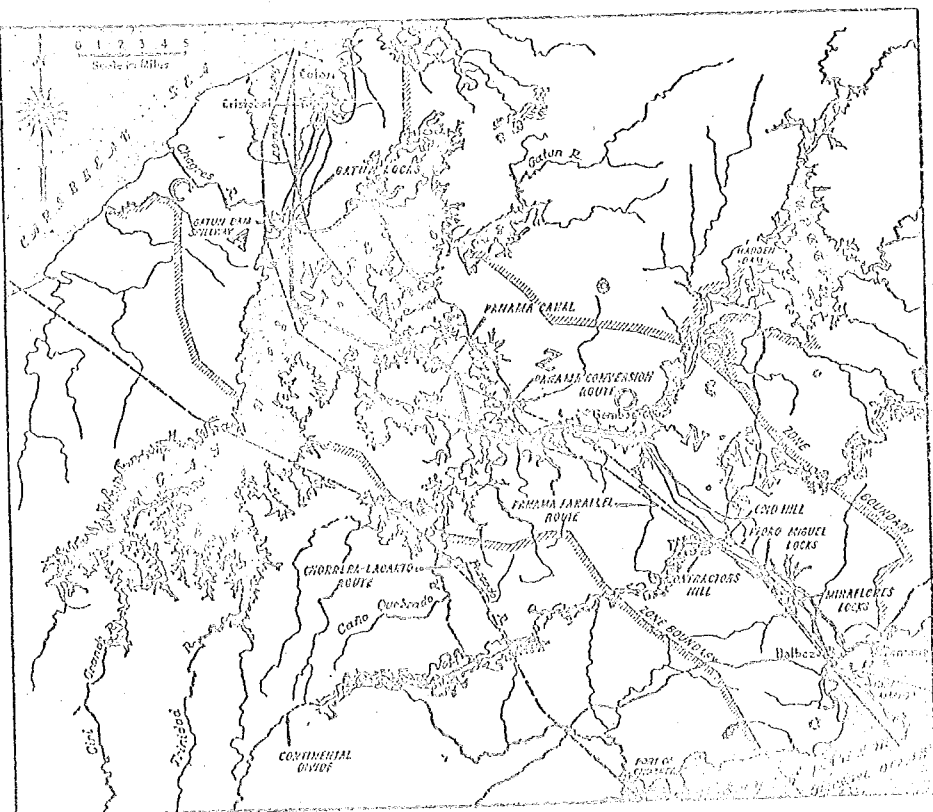


Fig. 2. Het bestaande Panama Kanaal (getrokken) en drie naburige tracés (gestippeld), welke thans in onderzoek zijn.

DE INGENIEUR

B. BOUW- EN WATERBOUWKUNDE 13.

Dr J. J. DRONKERS

Methoden van getijberekening

Summary

The movements of the water in the numerous rivers and estuaries of the Netherlands have been amply studied during the last decennia; especially the phenomena of the tidal impulses formed an object of study.

The studies on these problems are carried out on account of the Department of Waterways and Roads (Rijkswaterstaat). The calculation of the translation of the tidal wave which enters from the North Sea into the rivers and estuaries is one of the most important purposes.

For the practical cases in particular it concerns the determination of the maximum flood-tide and ebb-tide currents, as well as the high and low water levels.

The most important example of tidal calculation was concerned with the closing of the Zuyder Zee with a dam. The great physicist LORENTZ and his assistants set up the hydraulic formulae concerned and solved the equations derived from them. After the dam was completed, the results of these calculations proved to be in accordance with the facts. Then further investigations were made, according to the tidal problems. For instance, Mr. MAZURE calculated the translation of the lunar semi-diurnal tide M_2 on a river (thus with upland water).

Up till now the translation of the tidal wave has been calculated on most of the rivers and estuaries, especially in the tidal regions of the Rhine, the Meuse and the Scheldt. Also the tidal movement in the isle of Walcheren — flooded as a result of bombardments in 1944 — has been studied with favourable results.

In this article two methods of tidal calculations are given, depending on the accuracy of the results; which of them shall be applied, also depends on the nature of the rivers or estuaries.

We call them the linear and the exact methods. The exact method is mainly used on account of tidal calculations concerning irregularly shaped rivers or estuaries, for instance, if banks (sands) are flooded during the tide.

In the case of regular rivers the linear method has advantages, for these calculations are shorter, but this method is not as accurate as the exact one.

Now we shall summarize the characteristics of these methods.

The translation of the tidal wave in a channel of an estuary or river depends on two partial differential equations: the equation of motion and the equation of continuity (the formulae (1) and (2) of this article, respectively). Besides, boundary conditions have to be given, such as the local tidal diagram at the mouth of a river and the amount of the upland stream.

In the formulae 1 and 2 means:

- h' = the water-level with respect to a horizontal level;
- s = total volume of water per second, flowing through a cross-section of the river or channel;
- b = mean width of the cross-section;
- h = mean depth of the cross-section;
- B = width at water-level;
- C = constant of Eytelwein, (Chézy);
- t = time;

x = distance along the normal bed of the river or channel (x is positive upstream).

In case of the exact method the equations 1 and 2 are integrated in the form of two series, for h' and s respectively, according to an iterative method (see (3) and (4)).

The river or channel is divided into sections (3 to 5 miles long, for instance), which have to be so short, that the quantities b , B and h may be supposed to be independent of x and equal to the mean value. For such sections these functions, however, may be functions of the time, varying with the tide.

The actually appearing tide may then be considered and calculated; as also non-periodic movements, such as storm-floods, etc.

The values of the series are calculated in hourly periods. Then h_0' and s_0 must be known in the same place. In most cases h_0' is known; this, however, is not the case with s_0 , which has therefore to be derived from the other data. Fig. 2 shows the results of an example of tidal calculation on the river Lek.

If we use the linear method (Chapter III), the local tidal diagram is represented by a FOURIER series for one tidal period of 12 hrs. 25 mins. Then the lunar semi-diurnal tide $M_2(\eta)$ is the principal term (see (5) and (21)). In this particular case the indication of the term with the double frequency of the tide M_2 might be called $M_4(\eta')$. Any more terms of the FOURIER series are neglected.

The translation of this tide M_2 is determined by the solutions of two linear partial differential equations ((6') and (7')), which are deducted from (1) and (2), by representing the term s^2 also by a FOURIER series. (See also Fig. 6).

The two equations (see (26) and (27)) for the calculation of the tide M_4 (Chapter III, B) are derived from (1) and (2) in the same way as happens for the tide M_2 .

In general these differential equations may be resolved with the aid of complex functions. Then, however, it is necessary to provisionally estimate the value of the maximum current of the tide $M_2(\sigma)$.

After completing the calculations of the tide M_2 this value can be verified.

In connection with these estimates another solution of these differential equations by real functions has been deducted in this article. Then the physical view concerning the translation of the tides increases. Besides, with the aid of alignment diagrams (e.g. see Fig. 5) the calculation can be shortened in comparison with the method of the complex functions.

Korte inhoud

In Hoofdstuk I wordt eerst een algemene beschouwing gegeven over de twee methoden van getijberekening, n.l. de exacte en de lineaire methode, waarbij wordt aangegeven onder welke omstandigheden ze worden toegepast.

Daarna wordt in Hoofdstuk II de exacte methode kort behandeld, waarbij een andere afleiding wordt gegeven dan tot nu toe gepubliceerd is. Het fysisch inzicht in deze methode neemt daardoor toe.

In Hoofdstuk III wordt de lineaire methode besproken;

achtereenvolgens worden dan het M_2 - en M_4 -getij beschouwd. Voor regelmatig gevormde rivieren kan deze lineaire methode de exacte methode in voldoende mate vervangen.

Dan wordt echter in dit hoofdstuk een andere oplossingsmethode gekozen dan de tot nu toe gebruikelijke complexe methode. Deze oplossing, waarbij alleen reële functies optreden en die zowel voor het M_2 - als M_4 -getij kan worden toegepast, maakt een vluggere berekening mogelijk dan tot nu toe het geval was, terwijl het fysisch inzicht gemakkelijker wordt verdiept.

Vooraf als een bepaalde reeks nomogrammen betreffende het rivierenstelsel vervaardigd is, of eventueel een reeks grafieken, is men in staat om veel vlugger te rekenen. Dit nomogrammen- of grafiekenstelsel kan dan ook gebruikt worden bij de berekening van de getijbeweging, indien veranderingen, ook van ingrijpende aard, in dit rivierenstelsel worden aangebracht.

Hoofdstuk I. Algemene beschouwingen.

§ 1. Inleiding.

In dit artikel wordt een overzicht gegeven van de wijze van getijberekening zoals deze na verkregen ervaring verder ontwikkeld werd. Uiteraard kunnen hier alleen de hoofdlijnen aangegeven worden, detailkwesties worden zoveel mogelijk terzijde gelaten.

De grondslagen, die door de Staatscommissie Zuiderzee voor getijberekening werden gelegd, werden ook bij de toepassing op de benedenrivieren en zeearmen gevolgd. Zoals bij alle praktische toepassingen kunnen meer of minder nauwkeurige berekeningswijzen onderscheiden worden, afhankelijk van het doel der berekeningen.

De meest nauwkeurige berekeningswijze wordt uitgevoerd met behulp van de exacte methode. Ofschoon deze naam dit eigenlijk niet impliceert, is deze methode toch in wezen een benaderingsmethode. Het is echter mogelijk om deze benaderingen binnen grenzen te brengen, die zo dicht bij elkaar liggen als men zelf wil, en welke dan hoofdzakelijk door praktische overwegingen worden bepaald. Een minder nauwkeurige berekeningswijze is de z.g. lineaire methode, waarbij de weerstandswet „geïncariseerd” wordt. De oplossingsmethode echter is dan verder volkomen exact, zonder enige benadering.

De hiervoor genoemde mogelijkheden werden ook door de Staatscommissie Zuiderzee behandeld; ze legde echter de nadruk op de „lineaire” methode. Deze werd later door MAZURE verder uitgewerkt. In dit artikel wordt deze lineaire methode nog verder uitgebreid.

Dat de Staatscommissie Zuiderzee vooral deze lineaire methode uitwerkte, vond zijn reden in een tweetal overwegingen. Het hoofddoel was de berekening der H.W.-standen na de afsluiting der Zuiderzee, in het bijzonder voor het geval van stormvloed.

Hoewel het gewenst was om ook de verandering van de getijstroom te kennen, behoorden deze niet zo nauwkeurig bekend te zijn, daar de geulen van de Waddenzee als vanzelf niet belangrijk zijn, terwijl verwacht kon worden, dat het geulenstelsel na de afsluiting zou veranderen en zich verplaatsen. Bij de lineaire methode, zoals ze door LORENTZ en MAZURE werd opgesteld, worden juist de H.W.-standen voldoende nauwkeurig bepaald, in tegenstelling met de stromen. Verder is het rekenwerk bij deze methode belangrijk geringer dan bij de exacte methode.

Wordt echter een verandering in het stelsel van de Nederlandse benedenrivieren aangebracht, dan is nauwkeurige kennis van de verandering van de totale afvoeren en max. stromen van elk der vaarwegen afzonderlijk noodzakelijk. Dit in verband met eventueel te verwachten verdiepingen of verondiepingen en de scheepvaart. De uitgestrektheid van het rivierenstelsel met begrensde beddingen en plaatselijke bergingsgebieden maakt eveneens het bezigen van nauwkeurige berekeningswijzen noodzakelijk, ook wanneer berekening van de stormvloedstanden voor de bepaling van dijkshoogten en van de dagelijkse H.W.- en

L.W.-standen in verband met afwateringsmogelijkheden van de polders gewenst is.

Bovendien maakte het voorkomen van de oppervlatafvoer naast de getijstroom uitbreiding van de door de Staatscommissie Zuiderzee opgestelde getijberekeningen noodzakelijk. Vooral in verband met de verzilling van de aan zee grenzende delen van dit benedenrivierenstelsel is nauwkeurige kennis van de verdeling van het zoete oppervlatafvoer nodig.

§ 2. Nadere beschouwing der berekeningsmethoden.

Men kan het optredende getij in zijn geheel opvatten of het ontbinden in een reeks sinusoidale getijden, waarvan het maansgetij M_2 (periode $T = 12$ uur 25 min), het zonsgetij S_2 ($T = 12$ uur) — wier samenwerking dood- en springtij oplevert — en het ondiepwatergetij M_4 ($T = 6$ uur 12 min) de belangrijkste componenten zijn. Hieraan kunnen ook nog het z.g. N_2 -getij en O_1 -getij worden toegevoegd.

Voor Hoek van Holland zijn de resp. amplitudes: M_2 , 80 cm; S_2 , 15 cm; M_4 , 18 cm; N_2 , 11 cm en O_1 , 11 cm.¹⁾

Terwijl de wijze van ontstaan van het maansgetij M_2 en het zonsgetij S_2 vrij algemeen bekend is, is dit met de verder genoemde partiële getijden niet het geval en wordt dus in het kort hun afkomst aangegeven.

Allereerst het M_4 -getij; dit ontstaat behalve door astronomische oorzaken, die overigens van geringe invloed zijn, hoofdzakelijk doordat het M_2 -getij bij de voortplanting vervormd wordt, speciaal in de kustwateren en wel om twee redenen. In de eerste plaats doordat de weerstand, die het M_2 -getij bij de voortplanting ondervindt, niet lineair afhankelijk is van de stroomsnelheid v door dit getij opgewekt, maar meer van v^2 . In de tweede plaats door de verandering der diepte gedurende de getijbeweging. Bij L.W. is de diepte geringer dan bij H.W., zodat de voortplanting bij L.W. meer weerstand ondervindt dan bij H.W.

Deze vervorming doet zich hoofdzakelijk dicht bij de kust gevoelen en vooral op de rivieren, die in vergelijking met de zee zeer ondiep zijn, is ze zeer belangrijk.

Overigens wordt op zee door de grote afstanden het effect van de vervorming der voortplanting ook van enige betekenis, terwijl toch de watersnelheid, door het getij opgewekt, zeer gering is.

Het is gemakkelijk in te zien, dat deze vervorming afhankelijk is van de periode van het M_2 -getij en dus kan ze ontbonden worden in een M_2 - en M_4 -component. Deze M_2 -component heeft tot gevolg dat de amplitude en phase van het oorspronkelijk door de maan opgewekte M_2 -getij worden gewijzigd. Het M_4 -getij met de dubbele frequentie komt als apart partieel getij te voorschijn.

Betreffende het N_2 -, O_1 -, K_1 en K_2 -getij het volgende. Bij de afleiding van het M_2 - en S_2 -getij wordt aangenomen, dat maan en zon in het equatorvlak met eenparige snelheid in een cirkelbaan lopen. Daar de werkelijke baan in hoofdzaak een ellips is, zal de getijbeweging, uit deze eenvoudige veronderstelling afgeleid, gewijzigd worden. Dit wordt tot uitdrukking gebracht door een partieel getij, n.l. het N_2 -getij.

Dit getij is dan speciaal van de maan afkomstig, als zijde de belangrijkste getijverwekkende factor.

Verder zijn maan en zon niet in het equatorvlak gelegen, maar resp. in het maansbaan- en eclipticavlak. Hierdoor ontstaan ook storingen in de regelmatige getijbeweging, waarvan de z.g. dagelijkse ongelijkheid de belangrijkste is. De amplituden van beide getijden, die dagelijks optreden, kunnen n.l. aanmerkelijk verschillen. Zo kunnen bij Hoek van Holland opvolgende L.W.-standen hierdoor zelfs 30 cm verschillen. De invloed op de H.W.-standen is iets geringer. Deze dagelijkse ongelijkheid wordt door het O_1 -getij tot uitdrukking gebracht voor de maansinvloed, terwijl het K_1 - en K_2 -getij een dergelijke invloed vertolken voor zonen maan tezamen. Het P_1 -getij, dat ook in het voorgaande niet genoemd is, daar het belangrijk kleiner is, heeft speciaal op de zon betrekking.

Voor een bepaald getij kunnen het daarbij behorende S_2 -getij en de overige partiële getijden (N_2 -getij enz.) ont-

¹⁾ Volgens gegevens van de Algemene Dienst van de Rijkswaterstaat.

bonden worden in een M_2 - en M_4 -component, die dan bij het aanwezige M_2 en M_4 -getij gevoegd kunnen worden. Strikt genomen geldt dit slechts voor één bepaald getij, maar wegens de langzame veranderingen, die de partiële getijden ondergaan, geldt dit bij benadering ook voor het voorgaand en volgend getij. Dit kan men wiskundig zo uitdrukken, dat de getijkromme voor één of een paar periodes door een FOURIER-reeks kan worden voorgesteld met de frequentie van het M_2 -getij als basis ²⁾.

Hierbij dient opgemerkt, dat in de Nederlandse zee-monnen het M_2 -getij 5 maal zo groot is als het M_4 -getij, terwijl rivieropwaarts de amplitude van het M_4 -getij toeneemt. Ter berekening van de voortplanting van het getij kan dit in zijn oorspronkelijke vorm of als de combinatie van het sinusoidale M_2 - en M_4 -getij beschouwd worden.

Hiermede staan nu de berekeningsmethoden in verband. Bij de exacte methode wordt het getij beschouwd zoals het gemeten wordt. Bij de lineaire methode wordt resp. de voortplanting van het M_2 - en M_4 -getij berekend.

Het is nu de vraag, welke van deze methoden in een bepaald geval gevolgd zal worden. Steeds is echter getijberekening volgens de exacte methode nauwkeuriger dan volgens de lineaire methode. Er zijn echter gevallen, waarbij de uitkomsten van de lineaire methode practisch even nauwkeurig zijn als die van de exacte methode en daar de lineaire methode minder rekenwerk geeft, zal deze dan gevolgd worden.

In het algemeen kan men zeggen, dat de lineaire methode (mits zowel M_2 - als M_4 -getij beschouwd worden), voldoende nauwkeurige resultaten geeft op het eigenlijke beneden-rivierenstelsel, waaronder dan de rivieren worden verstaan, die ten N. van Haringvliet en Hollandsch Diep zijn gelegen, inclusief Amer en Maas.

Berekent men het M_2 -getij alleen, dan worden voor de H.W.-standen en oppervlatafvoeren langs de verschillende rivieren waarden gevonden, die bij benadering juist kunnen zijn. Dit geldt echter niet voor de maximale stromen, waarin dan fouten van ± 30 à 40% kunnen optreden.

Om deze verschillen voor het grootste deel te bepalen is het nodig om ook het M_4 -getij te berekenen. Het M_4 -getij oefent vooral een belangrijke invloed uit op de vorm van de getijlijn en dus op de waterberging, die weer de grootte der stromen bepaalt. (Zie Fig. 2.)

Heeft men het M_2 - en M_4 -getij voor deze rivieren bepaald, dan kost het niet veel moeite om de gevonden resultaten te controleren.

Voor getijberekening op de zeearmen en zeegetaten is echter de exacte methode meer aangewezen. Dan kan het zelfs zijn, dat berekening van het M_2 - en M_4 -getij zeer afwijkende resultaten geeft, of zoveel extra moeilijkheden, dat exacte berekening de voorkeur verdient.

Voor de toepassing van de lineaire methode is het n.l. nodig om de rivieren, die in rivierakken worden verdeeld, te schematiseren tot rechthoekige profielen met constante stroombreedte en kombergingsbreedte.

Deze grootheden kunnen echter ook eventueel variëren gedurende de getijbeweging, op dezelfde wijze als met de diepte bij benadering verondersteld wordt en wel op sinusoidale wijze, in overeenstemming met het M_2 -getij. Hierbij kan dan echter een phaseverschuiving optreden.

Op de eigenlijke benedenrivieren kunnen deze variaties hoofdzakelijk als van sinusoidaal karakter beschouwd worden, maar voor de zeearmen en zeegetaten in veel mindere mate door de aanwezigheid van banken en onregelmatig gevormde geulen. Bij L.W. staan deze banken droog, bij H.W. onder water; de stroombreedte en kombergingsbreedte veranderen voortdurend op onregelmatige wijze.

Voorals vloed- en ebscharen aanwezig zijn, is de berekening moeilijk. Zo werd b.v. op de Westerschelde met de lineaire methode geen bevredigend resultaat gevonden,

wel met behulp van de exacte methode. Dit als gevolg van het zeer grote getijverschil aldaar, want op de meer noordelijk gelegen zeearmen waren de uitkomsten van de lineaire methode beter.

In de zeegetaten komen ook belangrijke dwarsstromen voor, die ontstaan als gevolg van de voortplanting van het getij van Zuid naar Noord. Ook deze kunnen alleen met de exacte methode worden gevonden.

Verder wordt nog de aandacht gevestigd op de zogenaamde vergelijkings-berekening, speciaal voor niet al te grote veranderingen, die in het rivierenstelsel worden aangebracht. Daar het M_2 -getij steeds belangrijker is dan het M_4 -getij, is dan de veronderstelling gerechtvaardigd, dat de veranderingen in H.W.-standen en stromen bij de nieuwe toestand t.o.v. de oude toestand, in procenten uitgedrukt, ongeveer gelijk zijn aan de veranderingen, die deze grootheden bij het M_2 -getij ondergaan. In dat geval behoeft men alleen het M_2 -getij voor beide gevallen uit te rekenen. Kent men de H.W.-standen en de grootte der stromen bij de oude toestand uit metingen, dan kunnen deze grootheden ook bij de nieuwe toestand worden aangegeven, door de veranderingen volgens de gevonden procenten te bepalen.

Daar het getij bij stormvloed niet periodiek is, kan men eigenlijk de stormvloedstanden niet berekenen volgens de lineaire methode, waarbij wel volledige periodiciteit van het getij moet optreden. Ook dan geeft de exacte methode uitkomst, alleen echter ten koste van zeer veel rekenwerk. Bij praktische berekeningen zullen met behulp van de lineaire methode toch voldoende nauwkeurige waarden worden gevonden voor de H.W.-standen bij stormvloed, mits een beperkt gebied beschouwd wordt. Dan zal n.l. het voorgaand L.W. weinig invloed uitoefenen op het H.W. Op deze kwestie wordt hier niet verder ingegaan.

Een van de belangrijkste moeilijkheden, die bij alle getijberekeningen optreden, is de schematisatie van het rivierenstelsel tot rechthoekige profielen. Dit kan vaak op verschillende wijzen geschieden. Derhalve is men steeds genoodzaakt om bij de bestaande toestand de gemeten getijbeweging te berekenen. Aan de hand van de afwijkingen tussen berekening en meting moet dan de schematisatie gewijzigd worden. Worden nu veranderingen in het rivierenstelsel aangebracht, dan moet men bij de berekeningen van de getijbeweging op het onveranderde deel steeds uitgaan van de tevoren bepaalde schematisatie. Men kan dan verwachten dat hiervoor de nieuwe resultaten juist zijn. Voor het gewijzigde deel geldt dit dus niet geheel. In het algemeen is het echter zo, dat verbeterde rivieren een meer regelmatig profiel zullen krijgen en dus zullen hierdoor de uitkomsten ook meer betrouwbaar zijn. Het voorgaande geldt ook voor de exacte methode. Doordat dan b.v. de stroombreedte op willekeurige wijze gevarieerd kan worden gedurende het getij, zal bij deze methode nauwkeuriger aanpassing aan de werkelijkheid mogelijk zijn dan bij de lineaire methode.

In de volgende paragrafen wordt zowel de exacte als de lineaire methode nader behandeld.

Hierbij wordt dan een weg gevolgd, afwijkend van die, welke tot nu toe in de publicaties voorkwam ³⁾. Betreffende de toepassing van de lineaire methode speciaal op het M_2 -getij, is een uitgebreide studie verschenen van de hand van ir. MAZURE ³⁾. Bij de oplossing van de lineaire differentiaalvergelijkingen is daar de gebruikelijke methode volgens de complexe functies gevolgd. In dit artikel wordt een oplossing met reële functies gegeven, die voordelen kan hebben. Verder wordt ook de berekening van de voortplanting van het M_4 -getij behandeld. Zoals gezegd worden steeds detailkwesties vermeden.

²⁾ Rapport Staatcommissie Zuiderzee (1918—1926). Landsdrukkerij, 's-Gravenhage.

J. J. DRONKERS. Een getijberekening voor benedenrivieren. *De Ingenieur* 1935.

J. P. MAZURE. De berekening van getijden en stormvloed en op benedenrivieren. Proefschrift, 's-Gravenhage 1937.

³⁾ Opgemerkt moet worden, dat de z.g. harmonische analyse der getijden niet identiek is met een ontwikkeling in Fouriertermen.

§ 3. Enkele opmerkingen betreffende de getijbeweging op benedenrivieren en zeearmen.

1. De getijbeweging op de rivier is afhankelijk van die in de mond en van de oppervlatafvoer van Lek, Waal en Maas. Waar zal echter het getij onafhankelijk zijn van dat op de rivier? Er treedt n.l. aan de ingang van de zeearmen een verlagings van de H.W.-stand op, als gevolg van de getijbeweging op de rivieren en dus zal men enkele km buiten het mondingsgebied moeten gaan, opdat de getijbeweging onafhankelijk wordt en dus alleen door de Noordzeestanden wordt bepaald.

2. Op alle rivieren en zeearmen, met uitsluiting van Lek, Waal en Maas is de grootte van de getijamplitude vooral afhankelijk van de zeestand. De oppervlatafvoer is daar van minder invloed dan op de genoemde onvertakte rivieren.

De stromen worden echter in belangrijker mate beïnvloed door de oppervlatafvoer, vooral op de Noord, Beneden- en Nieuwe Merwede. Deze rivierarmen zijn echter kort, zodat de invloed van de oppervlatafvoer op de verticale getijbeweging toch niet belangrijk is.

3. Op de benedenrivieren kan aangenomen worden, dat op de Lek het gemiddeld getij tot halverwege Culemborg—Wijk bij Duurstede merkbaar is en op de Waal tot dicht bij Tiel. Gerekend vanaf Hoek van Holland is dus op een afstand van 100 km de getijbeweging op de Lek nagenoeg uitgestorven. Vanaf Hellevoetsluis bedraagt deze afstand op de Waal ook bijna 100 km.

Het H.W. te Culemborg is ongeveer 5.30 uur later dan te Hoek van Holland en het L.W. 6.30 uur. Hieruit kan geconcludeerd worden, dat opvolgende getijden betreffende de voortplanting weinig invloed op elkaar uitoefenen. Dus behoeft men slechts een enkel getij te beschouwen en kan men, betreffende de lineaire methode, hierop een Fourieranalyse toepassen (zie § 2).

Op de Wester-Schelde is de getijbeweging veel krachtiger dan op de benedenrivieren. Bovendien is de Schelde aan het

bovenloofd (bij Gentbrugge) door een stuw afgesloten, terwijl haar oppervlatafvoer gering is. De totale lengte is dan 136 km, terwijl bij Gentbrugge de getijamplitude toch nog ruim een derde bedraagt van die te Vlissingen.

4. In Fig. 1 zijn als voorbeeld de H.W.- en L.W.-lijnen aangegeven voor gemiddelde toestand op Nieuwe Waterweg, Nieuwe Maas en Lek.

Hieruit blijkt de sterke demping van het getij op de Lek. Tevens is het verloop van de waterspiegel weergegeven op het moment van H.W. te Hoek van Holland. Dan blijkt, dat het op dat moment ongeveer tussen Jaarsveld en Vreeswijk L.W. is; dit L.W. behoort dus dan bij het voorgaande getij; op hoger gelegen plaatsen is de waterspiegel nog dalende. Eveneens zijn op de figuur de z.g. kenteringsvlakken getekend, zowel van vloed naar eb, als van eb naar vloed. Het kenteringsvlak geeft de hoogte van de waterspiegel ten tijde van de kentering.

Voor plaatsen, boven *S* gelegen, komen geen kenteringen meer voor, de getijstromen zijn dan kleiner dan de oppervlatafvoer.

Voor een onvertakte rivier geldt nu de volgende eigenschap¹⁾: Voor iedere plaats *x* is het vloedvermogen gelijk aan de hoeveelheid water, die tussen de kenteringsvlakken boven de plaats *x* geborgen wordt (dus tot aan *S*).

5. In Fig. 2 is het verloop van het horizontale en verticale getij op de Lek aangegeven. In het vervolg wordt hierop nog nader teruggekomen.

Hoofdstuk II. De exacte methode

§ 1. De algemene formules voor de voortplanting der getijbeweging.

De getijbeweging op een rivier wordt bepaald door een bewegingsvergelijking en een continuïteitsvergelijking, die resp. luiden:

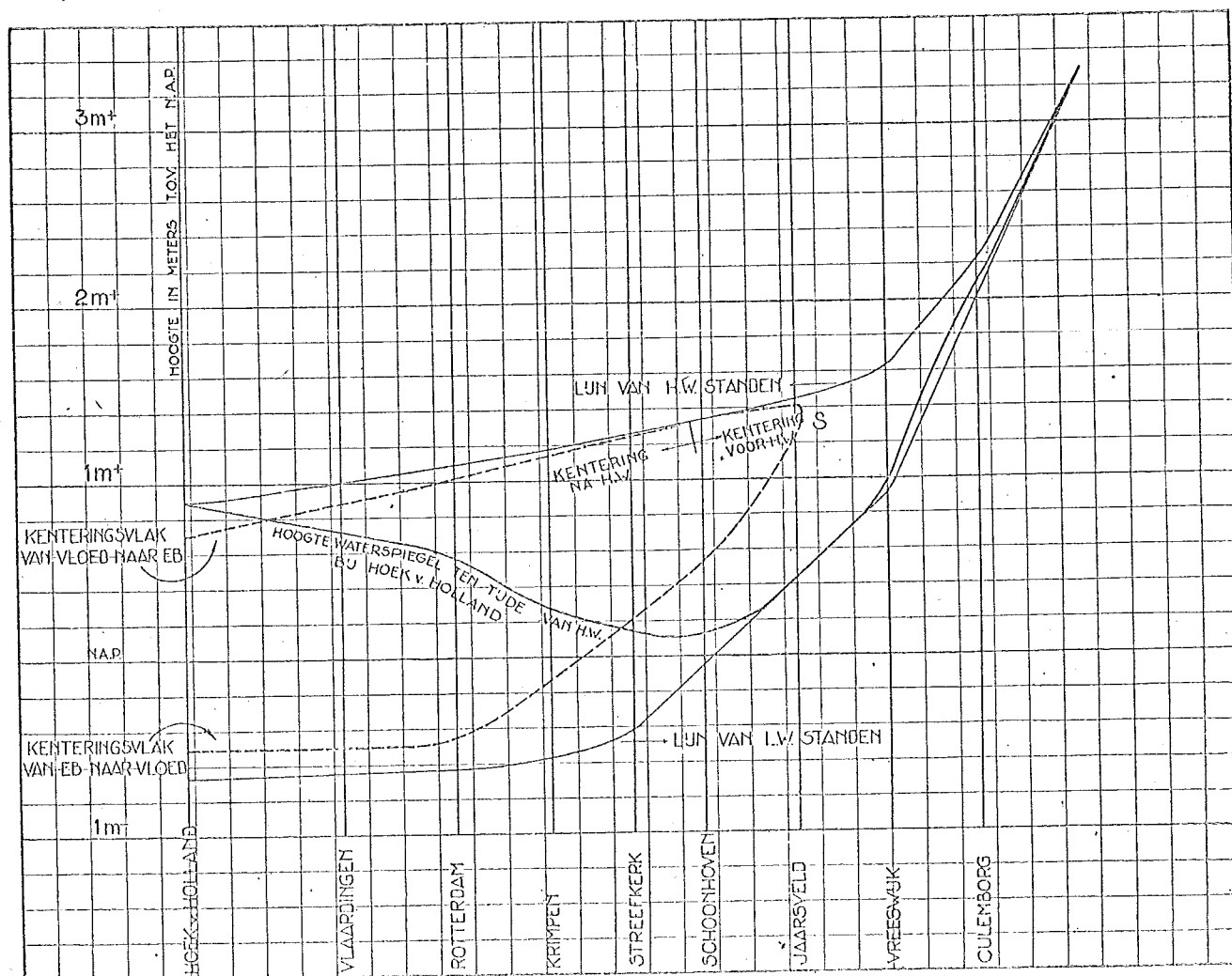


Fig. 1. Lijnen van Hoog- en Laagwater van Hoek van Holland tot Culemborg met kenteringsvlakken en verloop van de waterspiegel ten tijde van H.W. te Hoek van Holland.

$$\frac{\partial h'}{\partial x} = \frac{(a)}{b h g} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{(c)}{C^2 b^2 h^3} s - \frac{(d)}{g b^2 h^2} s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = B \frac{\partial h'}{\partial t} \quad (2)$$

Dan is gesteld:

x = afstand langs geulas, rivieropwaarts is deze positief;
 t = tijd;
 h' = hoogte van de waterspiegel t.o.v. een nulvlak;
 s = stroom door het gehele profiel; ebstroom is positief;
 b = stroomvoerende breedte;
 h = waterdiepte;
 C = constante van EYTELWEIN;
 B = kombergingsbreedte.

Zie voor de opstelling van (1) en (2): Rapport Staatscommissie Zuiderzee en ir. J. P. MAZURE. Proefschrift³⁾.

In verband echter met de betekenis, die aan de verschillende termen in (1) en (2) moet worden gehecht, wordt toch in het kort de afleiding vermeld.

De bewegingsvergelijking wordt afgeleid uit de vergelijkingen van EULER voor de waterbeweging, die weer volgen uit de wet $K = m.a.$

Na enige verwaarlozingen geldt dan voor de één-dimensionale waterbeweging:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -g \frac{\partial h'}{\partial x} + W \quad (a)$$

Dan is v de gemiddelde snelheid over de stroomverticaal, terwijl $W = -\frac{gv/v}{C^2 h}$ de uitwendige weerstand voorstelt.

In het linkerlid van (a) staat de versnelling aangegeven, in het rechterlid de uitwendige krachten. Deze versnelling bestaat uit twee delen, n.l. $\frac{\partial v}{\partial t}$, die de versnelling aangeeft, welke het waterdeeltje plaatselijk wordt gegeven, terwijl $v \frac{\partial v}{\partial x}$ de versnelling is, die dit deeltje ondervindt als gevolg van zijn verplaatsing.

Nu wordt (1) uit (a) afgeleid door voor $v: \frac{s}{b h}$ te substitueren en te bedenken, dat $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h'}{\partial t}$; terwijl x negatief moet worden genomen.

Het blijkt dan, dat de term $\frac{\partial v}{\partial t}$ overgaat in de term (b) van (1) en de eerste term van (d). Daar de laatste van geringe betekenis is, wordt deze als correctieterm beschouwd. Volgens deze afleiding wordt de term (b) van (1) de *versnellingsterm* genoemd.

Eigenlijk zou bij het predicaat „plaatselijk” moeten hebben, korthedshalve wordt dit weggelaten.

De term $v \frac{\partial v}{\partial x}$ correspondeert met de tweede term uit (d), (waarin dus B staat). In de hydraulica is het gebruikelijk om hem *term van BERNOULLI* te noemen, deze kan dus als een correctieterm worden beschouwd.

Verder wordt de term (a) in (1) de *verhangterm* genoemd en de term (c) de *weerstandsterm* van CHÉZY. (De laatste correspondeert met W in (a)).

Opgemerkt wordt nog, dat in (1) de termen dimensieloos, dus gewone getallen zijn, terwijl in (a) krachten per massa-eenheid zijn aangegeven.

Ook zijn bij de afleiding van (1) uit (a) een tweetal termen weggelaten, daar aangenomen is, dat het oppervlak van het profiel van de rivier $b h$ slechts langzaam met x verandert. Doordat de rivieren in vakken worden verdeeld, ieder wel met een constant profiel, wordt de invloed van deze verandering gedeeltelijk in rekening gebracht. Het kan dan echter voorkomen,

³⁾ L. VAN BRABAND: Notes sur les états de courant dans Ponds marée et sur leurs lieux géométriques. *Annales des Travaux Publics de Belgique*. 1908.

dat bij de overgang van de vakken, waar de profielsverandering gelocaliseerd gedacht wordt, correctietermen in rekening moeten worden gebracht. In analogie met de theorie van onvolkomen overlaten kan dit dan geschieden. Ter plaatse moet dan worden uitgegaan van de vergelijking:

$$g \frac{\partial h}{\partial x} = \alpha v \frac{\partial v}{\partial x}$$

Dan is α een coëfficiënt, die afhankelijk is van verschillende omstandigheden als contractie, gehele of gedeeltelijke botsing, weer in verband staande met de terugwinst van energie enz. Het kan zelfs zijn, dat volkomen overlaten optreden, zoals bij de inundatie van Walcheren, gecombineerd met getijbeweging⁵⁾.

Voor bepaalde geulen in de zeearmen, vooral voor vloed-scharen, is het vaak zeer bezwaarlijk om deze in vakken met constant profiel te verdelen. Het is dan gewenst om het profiel $b h$ als functie van x te beschouwen en dit in de bewegingsvergelijking in aanmerking te nemen. In het vervolg zullen alleen langzaam met x veranderende profielen aangenomen worden; hiervoor gelden dus (1) en (2).

Verder is het voor de oplossing van een getijprobleem nodig om de plaatsen te kennen, waar de waterstaatkundige werken geen invloed meer hebben op de waterstanden. Bij de benedenwaarts — dus bij de riviermonden — gelegen vaste punten moet dan het verloop van het verticale getij bekend zijn. Als bovenwaartse randvoorwaarden gelden dan de opperwaterafvoeren van de bovenrivieren.

Voor een onvertakte rivier moet dus aan de benedenmond het verticale getij bekend zijn en verder de opperwaterafvoer. Zodra echter op twee achtereenvolgende plaatsen op een rivier de verticale getijbeweging bekend is, is eveneens de getijbeweging, dus ook de horizontale, voor de gehele rivier vastgelegd.

§ 2. De formules voor de exacte methode.

Verondersteld wordt, dat aan het begin van een riviervak de verticale getijbeweging h_0' en de stroom s_0 gegeven zijn. Dan zijn de verticale en horizontale getijbeweging h' en s op een plaats x van dat riviervak met lengte l , met behulp van de volgende formules te berekenen:

$$h' = h_0' + \omega s_0 \left| s_0 \right| x + f s_0^{(c)} x - f^2 (b + B) g s_0 h_0^{(c)} x + B \omega \left| s_0 \right| h_0^{(c)} x^2 \pm \frac{1}{3} B^2 \omega h_0^{(c)2} x^3 + \frac{1}{2} f B h_0^{(c)} x^2 \quad (3)$$

$$s = s_0 + B h_0^{(c)} x + \frac{1}{2} B f s_0^{(c)} x^2 + B \omega \left| s_0 \right| s_0^{(c)} x^2 \quad (4)$$

Dan is gesteld:

$$\omega = \frac{1}{C^2 b^2 h^3}; f = \frac{1}{b h g}; \frac{d h_0'}{d t} = \frac{d h_0}{d t} = h_0^{(c)}; \frac{d^2 h_0'}{d t^2} = h_0^{(c)}; \frac{d s_0}{d t} = s_0^{(c)} \text{ enz.}$$

De grootheden b , B en h zijn dan de zgn. vakgrootheden voor het riviervak met lengte l , dus onafhankelijk van x (zie § 1). Dan is h steeds afhankelijk van de tijd; met b en B kan dit ook het geval zijn, zelfs met de constante van EYTELWEIN C .

Nu zijn (3) en (4) benaderingen van reeksen met oneindig veel termen, waarvan aangenomen wordt, dat de som der overige termen te verwaarlozen is t.o.v. de genoemde termen in de rechterleden van (3) en (4). Dit wordt bereikt door de vaklengte voldoende klein te nemen, waarbij tevens voor het gehele vak de vakgrootheden als constant kunnen worden beschouwd op een bepaald moment. Betreffende de afleiding van deze reeksen wordt het volgende opgemerkt.

Men kan de termen van deze reeksen op twee manieren bepalen. De eerste oplossing werd door LORENTZ aangegeven (zie Verslag Staatcommissie Zuiderzee), maar dan voor eenvoudiger veronderstellingen. De hiervolgende methode, die een z.g. *iteratiemethode* is, geeft echter direct een beter inzicht in de fysische betekenis van de termen in

⁵⁾ J. J. DROEKERS. De waterbeweging op het geïnundeerde Walcheren. *De Ingenieur* 1946.

(3) en (4), terwijl dan ook duidelijker te zien is, van welke orde van grootte deze verschillende termen zijn. Bovendien kan de convergentie van deze reeksen beter beoordeeld worden, hoewel hierop niet verder wordt ingegaan.

Er wordt eerst aangenomen, dat de vaklengte zo klein is, dat de diepte op ieder punt van het vak, op eenzelfde tijdstip beschouwd, slechts weinig afwijkt van de gemiddelde diepte op dat moment. Voor (1) en (2) wordt gemakshalve geschreven:

$$\frac{\partial h'}{\partial x} = f(s^{(1)} \pm \omega s^2 - R s h^{(1)}) \dots (1')$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = B h^{(1)} \dots (2')$$

Nu wordt ieder der leden van (1') en (2') naar x geïntegreerd. Daarbij wordt dan bij eerste benadering aangenomen, dat $s^{(1)}$, s^2 en $s h^{(1)}$ niet van x afhankelijk zijn, maar gelijk zijn aan de waarden, die ze aan het begin van het vak hebben, dus $s_0^{(1)}$, s_0^2 en $s_0 h_0^{(1)}$.

De integratieconstanten volgen dan uit de voorwaarden, dat voor $x = 0$ geldt: $h = h_0$ en $s = s_0$. Dan wordt als eerste benadering h_I en s_I van de oplossing van (1') en (2') gevonden:

$$h_I = h_0 + (f(s_0^{(1)} + \omega s_0^2 - R s_0 h_0^{(1)}) x = h_0 + h_1 \quad (\alpha_1)$$

$$s_I = s_0 + B h_0^{(1)} x = s_0 + s_1 \dots (\beta_1)$$

De termen (b), (c), (d) en (l) van (3) en (4) zijn dus reeds gevonden.

Vergeleken met de overeenkomstige termen van (1) en (2) (zie ook (1') en (2')) hebben deze de volgende betekenis: (b) = eerste benadering van het versnellingsverval; (c) = eerste benadering van het weerstandsverval, terwijl (d) de eerste benadering is van de correctie-term (d) van (1). Dan is (l) de eerste benadering van de kombergings op het vak.

Voor de tweede nauwkeuriger benadering van de oplossing, h_{II} en s_{II} worden h_I en s_I en hun eventuele partiële afgeleiden naar t in de rechterleden van (1') en (2') gesubstitueerd. Dan wordt voor (1') gevonden:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = f(s_0^{(1)} + B h_0^{(1)} x) \pm \omega (s_0 + B h_0^{(1)} x)^2 - R s_0 h_0^{(1)} + g(s_0, h_0, x) \dots (1'')$$

De functie $g(s_0, h_0, x)$, die wordt verkregen door resp. de rechterleden van (α_1) en (β_1) voor s en $h^{(1)}$ in de term $R s h^{(1)}$ te substitueren, wordt hier niet nader aangegeven, alleen wordt de term $R s_0 h_0^{(1)}$ apart genoemd; $g(s_0, h_0, x)$ is te verwaarlozen.

Nu worden de beide leden van (1'') opnieuw naar x geïntegreerd. Er wordt aangenomen, dat op een tijdstip geen kentering voorkomt en dus het teken van $Q | s_0 | s_0$ niet wisselt. Dan wordt gevonden:

$$h_{II} = h_0 + h_1 \pm \omega B s_0 h_0^{(1)} x^2 \pm \frac{1}{2} \omega B^2 h_0^{(1)2} x^3 + \frac{1}{2} f B h_0^{(1)} x^2 = h_0 + h_1 + h_2 \dots (\alpha_2)$$

Indien het teken wisselt op het vak (α, x) moet een kleine correctie aan (α_2) aangebracht worden.

Evenzo wordt afgeleid:

$$s_{II} = s_0 + s_1 + \frac{1}{2} f B s_0^{(1)} x^2 \pm B \omega s_0 s_0^{(1)} x^2 = s_0 + s_1 + s_2 \dots (\beta_2)$$

Nu is direct in te zien, volgens (1''), dat de verschillende termen uit (α_2) en (β_2) de volgende betekenis hebben:

(c): Correctie op de weerstandsterm door de vermindering e.g. vermeerdering van de stroom over de vaklengte als gevolg van de komberging.

(g): Een tweede correctie op de weerstand als onder (c) genoemd.

(h): Een correctie op de versnellings-term, eveneens als gevolg van de verandering op het vak van de stroom door de komberging.

(m): Correctie op de komberging, die bij eerste benadering $B h_0^{(1)} x$ bedraagt, als gevolg van de verandering, die de getijlijn ondergaat door de versnelling.

(n): Eveneens een correctie op de komberging, maar dan als gevolg van de weerstand.

Op deze wijze zijn alle termen van (3) en (4) afgeleid en kan

de fysische betekenis worden aangegeven. Hierbij is steeds verondersteld, dat op ieder moment voor h de gemiddelde diepte op het vak wordt genomen. Anders moeten nog extra termen in (3) en (4) worden opgenomen.

Men kan nu op analoge wijze als voor h_{II} en s_{II} , verdere benaderingen h_{III} en s_{III} bepalen, enz. Over het algemeen zullen de waarden van h_1, h_2 enz. achtereenvolgens afnemen, ofschoon er voor bepaalde momenten uitzonderingen zijn; hierop wordt echter niet verder ingegaan. Uit de praktijk volgt nu hoe groot de vaklengte x moet zijn, opdat h_{II} en s_{II} , dus (3) en (4) de voortplanting van de getijbeweging in voldoende mate weergeven.

In het algemeen kan 7 à 8 km als uiterste grens worden beschouwd. Dit staat in verband met de convergentie van de reeks. Hierop zullen we niet ingaan.

Verder kunnen de verschillende termen in (3) en (4) op vluggere wijze met behulp van nomogrammen berekend worden. Zo kunnen de gemeenschappelijke factoren ω en f eerst met een nomogram worden gevonden. Daarna kunnen ook de overige termen (c), (b) enz. verder met nomogrammen worden berekend. Bij de praktische toepassing worden dan de termen voor tijdstippen, een uur verschillend, berekend en daarna h' en s grafisch voorgesteld.

Aan de hand van de afgeleide vergelijkingen kunnen verschillende conclusies getrokken worden betreffende de getijbeweging, zo b.v. het verloop bij het afgesloten einde van een dode rivierarm. Dit wordt hier ook niet nader behandeld.

In de volgende paragraaf wordt echter nog iets naders gezegd over de wijze, waarop een getijberekening volgens de exacte methode wordt uitgevoerd.

§ 3. Toepassing van de exacte methode.

In de vorige paragraaf zijn de formules voor de exacte methode afgeleid. Met behulp van (3) en (4) zijn $h(x, t)$ en $s(x, t)$ te berekenen en dus het verloop van de getijbeweging op de rivier, indien $h_0(0, t)$ en $s_0(0, t)$ bekend zijn. Dan moet de rivier in vakken verdeeld worden. Daar de verticale getijbeweging wel steeds gemeten wordt, maar dit niet het geval is met de totale stroom s , is $s_0(t, 0)$ veelal niet bekend, maar moet ze berekend worden uit andere randvoorwaarden. Voor een oneindig lange rivier zijn deze randvoorwaarden dan: $h_0(0, t)$ aan de mond en de oppervaterafvoer S , terwijl voor $x \rightarrow \infty$, $h(t) \equiv 0$. Dus moet $s_0(0, t)$ zo bepaald worden, dat hieraan voldaan is.

Bij een rivierenstelsel moet in alle monden de verticale getijbeweging bekend zijn. Men zal dus eerst $s_0(t)$ aan de monden der rivieren moeten bepalen uit de bekende randvoorwaarden, hetgeen o.a. in de volgende gevallen zonder veel extra rekenwerk kan geschieden.

1°. a. Indien aan weerskanten van een vak de verticale getijbeweging bekend is, kan met behulp van (3) en (4), $s_0(t)$ aan het begin van dit vak bepaald worden. Hiervoor is een methode op te stellen, waarop niet wordt ingegaan.

b. Bij een rivierenstelsel moeten dan op verschillende rivierarmen een tweetal getijlijnen bekend zijn om de stromen op deze rivierarmen te kunnen berekenen. Voor een gesloten kring rondom een eiland geldt dan, dat de algebraïsche som van alle vervallen ($h'_i - h'_{i-1}$) nul moet zijn en op een splitsingspunt de algebraïsche som der stromen, dus:

$$\sum_{i=1}^n h'_i - h'_{i-1} = 0 \quad \text{en} \quad \sum_{i=1}^k s_i = 0.$$

Dan is n het aantal vakken rondom een eiland en k het aantal rivierarmen, dat in het splitsingspunt samenkomt.

Zijn vele getijlijnen bekend, dan vergemakkelijkt dit de berekeningen zeer, daar dan op alle riviervakken de komberging op elk tijdstip bekend is.

2°. Zijn alleen de bovengenoemde randvoorwaarden n.l. $h_0(t)$ en de oppervaterafvoer bekend, dan verdient het bij regelmatig gevormde rivieren de voorkeur om het M_2 - en M_4 -getij te berekenen, als in hoofdstuk III is aangegeven. Moeten dan alleen de H.W.-standen berekend worden, dan is berekening van het M_2 -getij vaak voldoende.

Indien echter ook de maximum vloed- en ebstromen bepaald moeten worden, moet ook het M_4 -getij worden beschouwd. Achteraf kunnen deze berekeningen gecontroleerd worden met de exacte methode.

Overigens wordt meestal gewerkt met een rivierenstelsel, waarvan vele gegevens bekend zijn, zodat dan de exacte methode direct kan worden toegepast.

3°. De exacte methode is ook van veel belang bij de berekening van de bestaande toestand. Daar uitgegaan wordt van werkelijk gemeten krommen, kan precies nagegaan worden, waar afwijkingen voorkomen met de gemeten getijbeweging en hun grootte en belangrijkheid. Men kan dan verbeteringen aanbrengen door de aangenomen schematisatie van het rivierenstelsel te wijzigen of eventueel de constante van EYTELWEIN te veranderen. Speciaal voor de getijbeweging op een zeearm als de Wester Schelde b.v. is dit van belang. Ook kan met behulp van (3) en (4) de constante van EYTELWEIN nauwkeuriger worden bepaald, dan direct volgens de bewegingsvergelijking (1) mogelijk is. Dan moeten extra metingen voorhanden zijn: hetzij drie achtereenvolgende getijlijnen op een vak, waaruit C globaal kan berekend worden, hetzij de getijlijnen aan het begin en eind van het vak met de stroom aan het begin, hetgeen een nauwkeuriger bepaling geeft.

4°. Laat de getijbeweging bij de bestaande toestand geheel bekend zijn. In het geval dat niet al te belangrijke veranderingen in het rivierenstelsel worden aangebracht zijn daardoor optredende veranderingen in de getijbeweging met behulp van de exacte methode ook op gemakkelijke wijze te bepalen.

Op een rivierenstelsel als de benedenrivieren kan men dan vergelijkingen opstellen volgens (5), in verband met (3) en (4), waarin alleen s als onbekende optreedt. Dan moeten n.l. de waarden van $s^{(a)}$ en $h^{(a)}$ op de verschillende vakken gelijk genomen worden aan die bij de oude toestand. Daarna kunnen uit de aldus gevonden waarden voor $h(t)$ en $s(t)$ de nieuwe waarden voor $h^{(a)}$ en $s^{(a)}$ bepaald worden, waarna de berekening kan worden gecorrigeerd.

Op een oneindig lange rivier zijn andere wegen te volgen, waarop hier niet verder wordt ingegaan. In Fig. 2 is een voorbeeld gegeven van de uitkomsten van een getijberekening voor een oneindig lange rivier als de Lek.

De z.g. vergelijkingsberekeningen, waarvan in § 2 sprake is, kunnen echter vaak sneller tot het doel leiden.

5°. Zijn bij een uitgebreid rivierenstelsel echter de veranderingen van meer ingrijpende aard, dan is het steeds van voordeel om eerst de voortplanting van het M_2 -getij te berekenen en zondig ook het M_4 -getij, afhankelijk van het feit of men de H.W.-standen of de max. vloed- en ebstromen moet bepalen. Vooral bij de berekening van de L.W.-standen moet meestal de exacte methode worden toegepast of het M_4 -getij nader worden beschouwd. In dit laatste geval kan men dan weer de exacte methode als controle gebruiken. In het algemeen is het verloop van de L.W.-standen meer afhankelijk van het M_4 -getij dan de H.W.-standen.

6°. Zodra zich tevens bijzondere gevallen voordoen bij de getijbeweging, is de exacte methode de meest aangevencene. Een dergelijk bijzonder geval is onder andere het voorkomen van volkomen of onvolkomen overlaten, bijv. bij kanalen, die door sluizen met de zee in verbinding staan, waarop getijbeweging plaats heeft, terwijl op het kanaal weer een boezem loost. Een ander geval is een grillig gevormd geulensysteem met variabele stroom- en kombergingsbreedten, zoals bij vloedscharen, enz.

Hoofdstuk III. De lineaire methode

A. Berekening van het M_2 -getij met behulp van reële functies.

§ 1. Algemene formules.

Dr ir J. P. MAZURE toonde in zijn dissertatie aan, op welke wijze de voortplanting van het M_2 -getij kan worden berekend, indien tevens opperwaterafvoer plaats heeft.

De rekenwijze was gebaseerd op de gebruikelijke methode der complexe functies, die ook door de Staatscommissie Zuiderzee werd gevolgd.

In verband daarmee kan dan de voortplanting van het M_2 -getij worden opgevat als de combinatie van een sinusoidale golf, die rivieropwaarts gaat en één die zich in benedenwaartse richting voortplant. Van de eerste golf neemt de amplitude bij de voortplanting af, van de tweede golf daarentegen toe. Verder is de voortplantingssnelheid van de opgaande golf kleiner dan die van de afgaande golf, afhankelijk van de opperwaterafvoer.

Ook is het middenstandsverval, dat het verloop van de gemiddelde hoogte van de waterspiegel aangeeft, afhankelijk van dit M_2 -getij.

In deze paragraaf wordt nu een geheel „reële” berekeningswijze aangegeven van de voortplanting van het M_2 -getij. Hierbij wordt dan het M_2 -getij in zijn geheel beschouwd; de heen- en weergaande golven treden niet afzonderlijk op. De voordelen van deze methode zijn:

1°. Het is gemakkelijk om de verschillende factoren, die de voortplanting van het M_2 -getij bepalen, in de uiteindelijke oplossing fysisch te interpreteren.

2°. In bepaalde gevallen is het mogelijk om het rekenwerk te bekorten t.o.v. van de complexe methode door gebruik te maken van bijzondere eigenschappen van bepaalde functies. Zo zal deze berekening op een onvertakte rivier steeds minder werk kosten dan de complexe methode, vooral als een nomogrammenstelsel wordt opgesteld, dat in het volgende wordt behandeld. Op een vertakt rivierenstelsel wordt ook dan voordeel bereikt bij het rekenwerk. Doordat men ook bij de toepassing van de complexe methode schattingen moet maken, gaan de voordelen van deze methode voor een belangrijk deel verloren.

We stellen nu eerst de algemene formules op voor de berekening van het M_2 -getij. Ze zullen hier niet uit (1) en (2) worden afgeleid, maar we verwijzen naar het proefschrift van MAZURE. Bij de berekening van het M_4 -getij bestaat er gelegenheid om hierover nog iets naders te zeggen.

Het verticale en horizontale M_2 -getij worden resp. voorgesteld door:

$$\eta = \eta_0(x) \cos(nt - k(x)) \text{ en } \sigma = \sigma_0(x) \cos(nt - \varphi(x)); \quad (5)$$

$$n = 1,405 \cdot 10^{-4}$$

$\eta_0(x)$ = amplitude verticale getij; $\sigma_0(x)$ = amplitude horizontale getij, terwijl $k(x)$ en $\varphi(x)$ de resp. phaseshoeken zijn.

Dan zijn η en σ functies, die resp. voldoen aan de volgende partiële differentiaalvergelijkingen n.l. de bewegingsvergelijking en de continuïteitsvergelijking:

$$\begin{array}{ccc} (a) & (b) & (c_1) \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{p_m}{n} \frac{\partial \sigma}{\partial t} & + m_1 w_m s_0^2 \cos(nt - \varphi) - m_0 w_m \sum \eta_0 s_0^2 & \end{array} \quad (c_2)$$

$$\begin{array}{c} (c_3) \\ \cos(nt - k) - \frac{1}{2} m_2 w_m \sum \eta_0 s_0^2 \cos(nt - 2\varphi + k) - \\ (d) \\ - \frac{(b_m + B)g}{n^2} p_m^2 S \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots \dots \dots \end{array} \quad (6)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = B \frac{\partial \eta}{\partial t} \dots \dots \dots (7)$$

Het middenstandsverval γ_1 volgt dan uit:

$$\gamma_1 = m_0 w_m s_0^2 - \frac{1}{2} m_1 w_m \sum \eta_0 s_0^2 \cos(k - \varphi) \quad (8)$$

Dan is $s_0 = S$ = opperwaterafvoer als $\sigma_0 < S$ en $s_0 = \sigma_0$ als $\sigma_0 > S$.

$$w_m = \frac{1}{C^2 b_m^2 h_m^3}; p_m = \frac{n}{g f_m}; \sum = \frac{3}{h_m}$$

$f_m = b_m h_m$ terwijl b_m en h_m de waarden van b en h bij de middenstand zijn. Zie verder voor de notatie Hoofdstuk II, § 1.

De x -richting is weer positief rivieropwaarts, terwijl de ebstroom positief wordt gekozen.

De grootheden m_0 , m_1 en m_2 zijn functies van de verhouding $\frac{S}{\sigma_0}$, welke door MAZURE werden bepaald. Hieronder

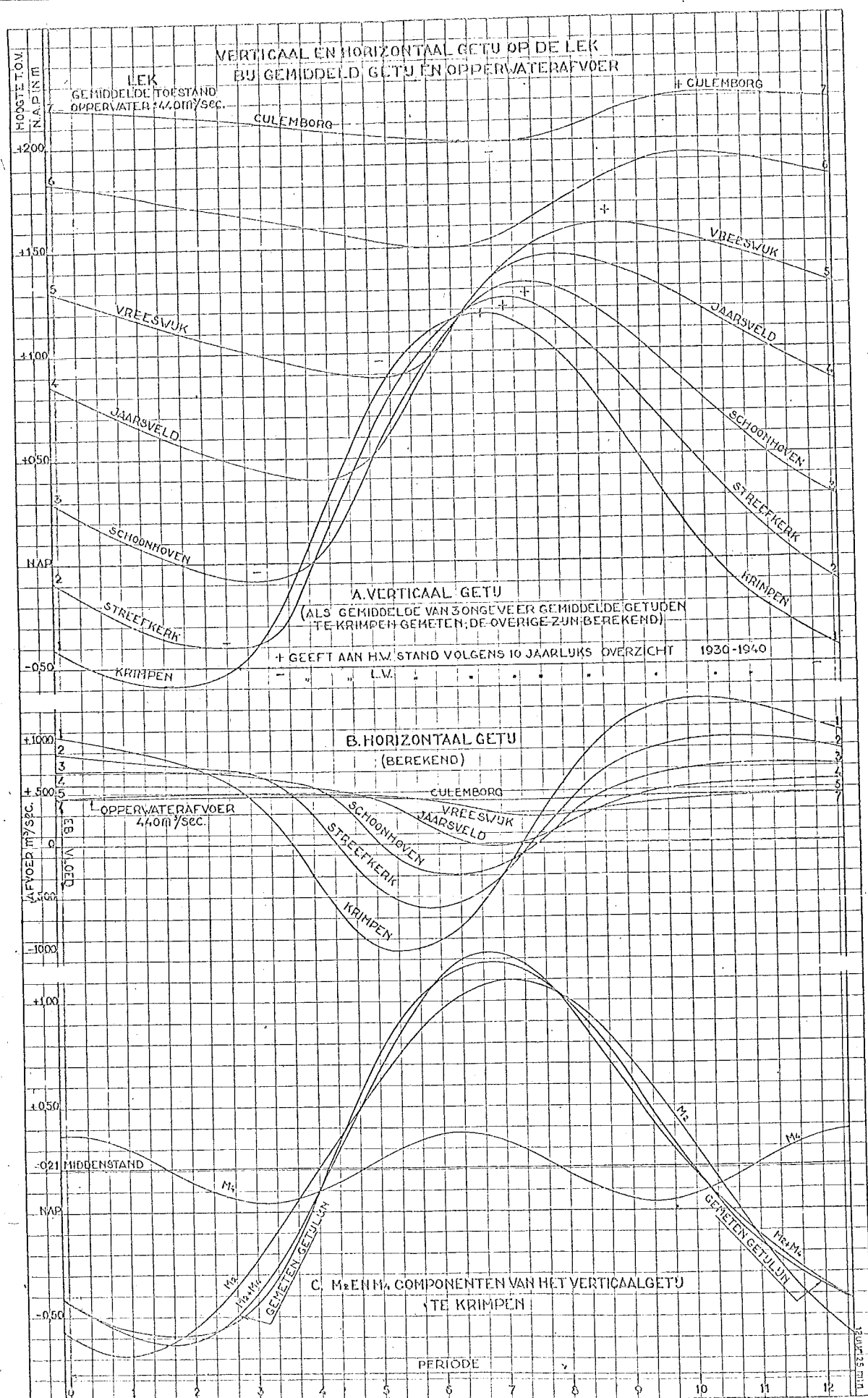


Fig. 2. Berekening van een werkelijk voorgekomen getij op de Lek bij gemiddelde toestand. A. Verticaal getij voor verschillende plaatsen. B. Horizontaal getij. C. M_2 en M_4 -getij van de getijlijn te Krimpen, in vergelijking met de gemeten getijlijn.

zijn ze voorgesteld in de vorm van lineaire of quadratische functies van $\frac{S}{\sigma}$.

De met *) aangegeven functies gelden bij benadering, de overige zijn exact: Dan zullen we in het vervolg η_0 en σ_0 toch aangeven door η en σ . Deze zijn dus alleen functies van x en niet van de tijd.

$$m_0 = 1,45 \frac{S}{\sigma} \quad *); \quad m_0 = 1 + 0,5 \left(\frac{\sigma}{S} \right)^2$$

$$(a) \quad m_1 = 0,86 + 1,1 \left(\frac{S}{\sigma} \right)^2 *); \quad m_1 = 2 \frac{\sigma}{S} \quad (b)$$

$$m_2 = -0,5 \left(\frac{S}{\sigma} \right)^2 + \frac{S}{\sigma}; \quad m_2 = 0,5 \left(\frac{\sigma}{S} \right)^2$$

De formules (a) gelden voor $S \leq \sigma$; de formules (b) voor $S \geq \sigma$.

De termen (a), (b), (c) en (d) van (6) corresponderen met de overeenkomstige termen van (1). Het blijkt, dat de weerstandsterm (c) uiteengevallen is in drie delen. Hiervan is c_1 het centrale deel, dat de hoofdweerstand van het M_2 -getij aangeeft. De termen c_2 en c_3 zijn correcties op de weerstand, het gevolg van de verandering der diepte gedurende de getijbeweging. Hiervan is de term c_2 de belangrijkste; c_3 is een correctieterm, die van weinig belang blijkt te zijn. Dit is ook het geval met (d).

Tot nu toe was het gebruikelijk om de vergelijkingen (6) en (7) met behulp van complexe functies op te lossen. Dan werd (6) in de vorm geschreven:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{p_m}{n} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + w_m \left\{ m_1 - \chi m_2 \eta_0 \cos(k - \varphi) \right\} \frac{s_0^2}{\sigma_0} \sigma - w_m \chi (m_0 - \frac{1}{2} m_2 s_0^2 \eta) \dots \dots \dots (6')$$

Deze vergelijking is dus dan evenals (7) een lineaire diff. vergelijking mits verschillende grootheden der coëfficiënten tevoren geschat worden, als σ_0 en η_0 . Deze complexe oplossing wordt hier niet verder aangegeven.

De oplossingsmethode met reële functies wordt nu nader behandeld.

In (6) en (7) wordt voor η en σ , (5) gesubstitueerd. Daarna wordt in (6) achtereenvolgens gesteld: $nt = k$ en $nt = k + \frac{\pi}{2}$; we beschouwen dus voor de vergelijking speciaal de tijdstippen van H.W. en de halftijstanden.

De volgende twee gewone differentiaalvergelijkingen worden dan gevonden; (Dan zijn η en σ weer de amplitudes, die in (5) door $\eta_0(x)$ en $\sigma_0(x)$ zijn aangegeven.)

$$(a) \quad (b) \quad (c_1) \quad (c_2) \quad (c_3)$$

$$\frac{d\eta}{dx} = -p_m \sigma \sin(k - \varphi) + m_1 w_m s_0^2 \cos(k - \varphi) - m_0 \chi w_m \eta s_0^2 - \frac{1}{2} m_2 \chi w_m \eta s_0^2 \cos 2(k - \varphi) \dots \dots (9)$$

$$\frac{dk}{dx} = -p_m \frac{\sigma}{\eta} \cos(k - \varphi) - \frac{m_1 w_m s_0^2}{\eta} \sin(k - \varphi) + \frac{1}{2} m_2 w_m \chi s_0^2 \sin 2(k - \varphi) + \frac{(b_m + B)g}{n} p_m^2 S \dots \dots (10)$$

Op analoge wijze substitueren we in (7) resp. $nt = \varphi$ en $nt = \varphi + \frac{\pi}{2}$ en beschouwen dus hiervoor steeds het tijdstip van max. stroom en dat, waarop $\sigma = 0$ wordt.

Dan wordt gevonden:

$$\frac{d\sigma}{dx} = B n \eta \sin(k - \varphi) \dots \dots \dots (11)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -B n \frac{\eta}{\sigma} \cos(k - \varphi) \dots \dots \dots (12)$$

Tenslotte leiden we uit (10) en (12) af:

$$\frac{d(k - \varphi)}{dx} = (B n \frac{\eta}{\sigma} - p_m \frac{\sigma}{\eta}) \cos(k - \varphi) - \frac{m_1 w_m s_0^2}{\eta} \sin(k - \varphi) + \frac{1}{2} m_2 w_m \chi s_0^2 \sin 2(k - \varphi) + \frac{(b_m + B)g}{n} p_m^2 S \quad (13)$$

In het vervolg beschouwen we dus inplaats van (6) en (7),

de drie gewone differentiaalvergelijkingen (9), (11) en (13), met als onbekenden η , σ en $k - \varphi$, welke alle functies van x zijn en niet van t .

Uit de ervaring blijkt echter, dat $k - \varphi$ voor een rivier vak meestal niet in belangrijke mate verandert. Laat nu $k_0 - \varphi_0$ de beginwaarde zijn op het vak. Dan kan voor andere punten van het vak gesteld worden:

$$k - \varphi = k_0 - \varphi_0 + \delta$$

Daar δ een kleine hoek is, b.v. kleiner dan 10° à 15° , kan dan gesteld worden:

$$\cos(k - \varphi) = \cos(k_0 - \varphi_0) - \delta \sin(k_0 - \varphi_0)$$

$$\sin(k - \varphi) = \sin(k_0 - \varphi_0) + \delta \cos(k_0 - \varphi_0)$$

Substitutie in (13) geeft dan de volgende lineaire diff. vergelijking voor δ :

$$\frac{d\delta}{dx} = -\delta [\sin(k_0 - \varphi_0) U + \cos(k_0 - \varphi_0) V] + [\cos(k_0 - \varphi_0) U - \sin(k_0 - \varphi_0) V] - W \dots \dots (13')$$

$$U = (B n \frac{\eta}{\sigma} - p_m \frac{\sigma}{\eta}); \quad V = \frac{m_1 w_m s_0^2}{\eta}; \quad W = \frac{m_2 w_m s_0^2}{\eta}$$

De term W , die klein is in vergelijking met de overige termen in (13') zullen we hier niet vermelden, hij kan eventueel worden weggelaten.

Inplaats van $k - \varphi$ wordt dus de grootheid δ als variabele ingevoerd. Indien δ zo sterk verandert op een vak, dat deze vereenvoudiging niet meer toelaatbaar is, kan men op twee manieren hieraan tegemoet komen, n.l. door het vak in twee delen te splitsen of (13) meer exact te integreren, n.l. als volgt:

Wordt voor (13) geschreven:

$$\frac{d(k - \varphi)}{dx} = a \sin(k - \varphi) + b \cos(k - \varphi) + c,$$

terwijl voor a , b en c de gemiddelde waarden op een vak genomen worden, dan is de vergelijking exact te integreren:

$$\lg \frac{1}{2} (k - \varphi) = \frac{u}{b - c} \frac{e^{u(x+c)} - 1}{e^{u(x+c)} + 1} + \frac{a}{b - c}$$

$$u = \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

(c_1 is integratieconstante).

In de volgende paragraaf wordt aangetoond, op welke wijze deze grootheden η , σ en $k - \varphi$ kunnen worden bepaald en beschouwen we in de eerste plaats een onvertakte rivier en daarna een rivierenstelsel. De vele detailkwesties worden weer buiten beschouwing gelaten.

§ 2. Berekening van het M_2 -getij op een onvertakte rivier en een rivierenstelsel, met behulp van reële functies.

De grootheden, die het M_2 -getij op een rivier bepalen, zijn: η , σ , k , φ , de profielsgrootheden b_m en h_m en de Constante van EYTTELWEIN C .

De rivier wordt dan in vakken verdeeld ter lengte van ongeveer 8 à 9 km zodanig, dat voor de profielsgrootheden gemiddelde waarden genomen kunnen worden.

Voor ieder vak worden de formules (9), (11) en (13) opgesteld waarbij de bekende vakgrootheden moeten worden ingevoerd. Uit deze drietallen differentiaalvergelijkingen moeten dan de onbekende functies η , σ en $k - \varphi$ als functies van x worden opgelost, zodat de veranderingen, die deze functies op de vakken ondergaan, dan bekend zijn. Bij praktische berekeningen worden de genoemde functiegrootheden alleen aan het begin en eind van een vak berekend. Men heeft dan genoeg gegevens om het verloop van η , σ en $k - \varphi$ over de gehele rivier grafisch te kunnen weergeven.

Wil men echter de genoemde grootheden uit deze vergelijkingen bepalen, dan zal men nog een reeks voorwaarden moeten toevoegen, n.l. de volgende: 1°. Bij de grenzen der vakken moeten η , σ en $k - \varphi$ continu veranderen. 2°. Voorts moeten een drietal randwaarden of integratieconstanten gegeven zijn, waarvoor gewoonlijk aan het begin van de rivier η genomen wordt. Aan het eind moeten de twee overige randwaarden bekend zijn. Betreffende dit einde van de rivier bestaan twee mogelijkheden: of de rivier is

afgesloten, of de rivier is oneindig lang als b.v. de Lek.

Bij een afgesloten rivier luiden deze integratieconstanten:

$\sigma = 0$ en $k - \varphi = -\frac{\pi}{2}$. Dan is n.l. aan het einde de

verticale getijbeweging niet uitgestorven, wel de horizontale. De stroom, die zich op enige afstand van het einde bevindt en die dan door de krommeriging bepaald wordt, is maximaal op het moment van de halftijstand van het

M_x getij, hieruit volgt dan $k - \varphi = -\frac{\pi}{2}$ (ebstroom is n.l. positief).

Bij een open rivier zijn de integratieconstanten: voor $x = \infty$ is $\sigma = 0$, terwijl $k - \varphi$ een grenswaarde heeft, die als volgt kan worden berekend. (In werkelijkheid is het getij reeds in het eindige uitgestorven; uit de berekening volgt dan, waar het getij verwaarloosbaar klein is geworden.)

Voor het laatste vak, dat theoretisch oneindig lang beschouwd wordt, blijkt, dat de golf van het M_x getij, die in bovenwaartse richting gaat, alleen van betekenis is; de teruggaande golf kan worden verwaarloosd.

Laat $\eta(0)$ de amplitude van het verticale getij aan het benedeneinde van dit laatste vak zijn, dan zijn η en σ op dit vak resp. voor te stellen door:

$$\eta = \eta(0) e^{r_1 x} ; \quad \sigma = -\frac{B n i}{r_1} \eta(0) e^{r_1 x} \quad (14)$$

Dan is r_1 de negatieve wortel van de vergelijking:

$$r^2 + r \chi S^2 w_m + (B n p_m - 2 B S n w_m i) = 0 \quad (15)$$

Deze formules worden in het proefschrift van MAZURE nader afgeleid.

Door in het voorgaande tot reële functies over te gaan, blijkt na enige berekening voor dit laatste vak, dat bij voldoende benadering:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \lg(k - \varphi) = 1 + \frac{\chi S^2 \sqrt{w_m}}{2 \sqrt{B n}} \quad (16)$$

terwijl voor het eindvak

$$\frac{d(k - \varphi)}{dx} = 0$$

De waarde, die hieruit voor $k - \varphi$ gevonden wordt, is dan de gevraagde integratieconstante.

De methode van berekening wordt nu in het kort aangegeven. Dan worden in het vervolg de amplitudes resp. aangeduid door $\eta(x)$ en $\sigma(x)$; $\eta(0)$ en $\sigma(0)$ zijn de amplitudes aan het begin van het vak; $\eta(l)$ en $\sigma(l)$ aan het eind.

Achtereenvolgens worden beschouwd een afgesloten rivier, een niet afgesloten rivier en een vertakt rivierstelsel. Ook nu worden de rivieren in vakken verdeeld met constante profielgegevens. Verder zijn de randvoorwaarden gegeven.

a. Afgesloten rivier.

Aan het boven-eind van deze rivier schat men eerst de amplitude $\eta(l)$ en de hoogte van de middenstand t.o.v. een nulvlak; aldaar is $k - \varphi = -\frac{\pi}{2}$. De stroom $\sigma(0)$ aan het begin van het eindvak volgt dan bij benadering uit (11):

$$\sigma(0) = B \eta(l) n l$$

(x is rivierafwaarts negatief, terwijl dit eindvak zo lang wordt gekozen, dat $\eta(x)$ slechts langzaam verandert). De gemiddelde waarde van $\sigma(x)$ op dit vak is dan ook bekend n.l. $\frac{1}{2} \sigma(0)$ en kan dan in (9) en (13') gesubstitueerd worden; verder is $m_1 = 0,85$ ($S = 0$, $w_0 = w_2 = 0$).

Daar $\eta(x)$ slechts langzaam verandert, kan η ook op eenvoudige wijze geïntegreerd worden voor dit laatste vak en dus:

$$\eta(0) = \eta(l) - A l$$

Dan is A gelijk aan het rechterlid van (9), dat nu geheel bekend is, daar hierin $\eta = \eta(l)$ wordt gesteld.

De grootheid δ verandert echter op een afgesloten rivier steeds veel vlijger dan η , zodat het gewenst is om (13') als lineaire vergelijking op te lossen. Wordt voor (13') geschreven:

$$\frac{d\delta}{dx} = C\delta + D$$

dan is:

$$\delta = \delta_0 e^{Cx} + \frac{D}{C} (e^{Cx} - 1)$$

Nu is echter $\delta_0 = 0$, want voor $x = 0$, het begin van het vak, is $\delta = 0$. Dan geeft δ de verandering van $k - \varphi$ op het vak weer, mits voor $k_0 - \varphi_0$ in (13') de beginwaarden op het vak worden gesubstitueerd. Tevens kan dan volgens (8) tegelijk het middenstandverhang berekend worden.

Opgemerkt wordt, dat voor (9) en (11) ook gemakkelijk nauwkeurigere integraties zijn op te stellen, door b.v. ook (9) als lineaire verg. van η te beschouwen, evenals (13') van δ en haar op analoge wijze op te lossen. Deze oplossing kan men weer in (11) substitueren en daarna $\sigma(x)$ nauwkeuriger bepalen. Eventueel is zelfs de variatie van $k - \varphi$ op het vak betreffende η en σ in rekening te brengen.

Het blijkt, dat de hierboven genoemde methode bij de eenvoudiger veronderstellingen practisch tot even nauwkeurige waarden leidt als de complexe methode, daar ook hierbij voor σ de gemiddelde waarde op het vak wordt genomen, terwijl ze tevens moet worden geschat.

Zo kunnen van het eindvak uitgaande, alle daaraan voorafgaande vakken achtereenvolgens worden berekend, totdat men aan het begin van de rivier komt, waar de amplitude η en de hoogte van de middenstand gegeven zijn. Nu is aan het eind van de rivier $\eta(l)$ geschat, en deze moet dan zo bepaald worden, dat de gegeven η teruggevonden wordt. Blijkt dit niet het geval te zijn, dan moeten voor $\eta(l)$ en de hoogte van de middenstand aldaar andere waarden genomen worden. Vaak behoeft men niet tot aan de mond van de rivier te rekenen om te kunnen concluderen of de geschatte waarde $\eta(l)$ juist is, maar blijkt dit reeds gedurende de berekening.

b. Een niet afgesloten rivier met oppervlatafvoer.

Ook nu moet evenals bij de complexe methode ongeveer de plaats bekend zijn, waar het getij uitgestorven zal zijn; dan kan aldaar de integratieconstante $k_0 - \varphi_0$ berekend worden volgens (16).

De hoogte van de middenstand is daar eveneens bekend uit de oppervlatafvoer.

Ook behoeft men alleen aan het begin van dit laatste vak de amplitude $\eta(0)$ te schatten. Integratie van de vergelijking (9) geeft dan het verloop van het getij voor dit theoretisch oneindig lange vak. Het is echter wel van belang om ook aan het begin van het laatste vak de bijbehorende waarde voor $\sigma(0)$ nauwkeurig te kennen, in verband met het rivierafwaarts

rekenen. Het blijkt nu, dat voor dit laatste vak, $\frac{\sigma(x)}{\eta(x)}$ een limietwaarde heeft voor $x \rightarrow \infty$, zoals met $k - \varphi$ het geval is. Ze is op analoge manier te bepalen als deze laatste limietwaarde; dan wordt gevonden:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sigma(x)}{\eta(x)} = \left(\frac{B n}{2 w_m S} + \frac{1}{16} \chi^2 S^2 - \frac{\chi}{4} \sqrt{\frac{B n S}{w_m}} \right)^{1/2} \quad (17)$$

terwijl weer voor het eindvak

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\sigma(x)}{\eta(x)} \right) = 0$$

Heeft men dus $\eta(0)$ geschat, dan is de bijbehorende $\sigma(0)$ te berekenen; terwijl ook aangenomen kan worden dat $k - \varphi$

aldaar nog gelijk is aan de grenswaarde ($\frac{d(k - \varphi)}{dx} = 0$ voor dit

laatste vak, evenals dit het geval is met $\frac{\sigma(x)}{\eta(x)}$.)

Daarna rekent men, uitgaande van dit laatste vak, rivierafwaarts op analoge wijze als is aangegeven bij een afgesloten rivier en controleert daarna of men op de gegeven beginwaarde η en middenstand aan het begin van de rivier terecht komt, waarna $\eta(0)$ aan het begin van het laatste vak zo nodig gewijzigd moet worden. Uit de achtereenvolgens gevonden waarden voor σ kunnen dan telkens de grootheden m_0 , m_1 en m_2 ook worden berekend.

Bij deze berekening zal dan echter voor die vakken waar η sterk verandert, de verandering van η moeten worden berekend volgens een meer exacte oplossing van de lineaire diff. verg. (9):

$$\frac{d\eta}{dx} = L + M \eta$$

dus:

$$\eta(x) = \eta(0) e^{\frac{Lx}{L}} + \frac{M}{L} (e^{\frac{Lx}{L}} - 1);$$

$$\sigma(x) = \sigma(0) - \frac{A'w}{A'} - \frac{1}{Bn} \eta(0) \cdot x \cdot \sin(\varphi - k)$$

waarin $\frac{\eta(x)}{\eta(0)} = e^{A'w} \cdot$ (benaderingsformule).

De functies $\eta(x)$ en $\sigma(x)$ veranderen n.l. vaak belangrijk op een vak van een niet afgesloten rivier, in tegenstelling met $k - \varphi$. Men kan zelfs voor een vlugge berekening op rivieren als Lek, Maas en Waal aannemen, dat $k - \varphi$ nagenoeg constant is en gelijk is aan -123° , hetgeen de grenswaarde van $k - \varphi$ op het laatste vak is.

Ook de grootheid $\tau = \frac{\sigma}{\eta f_m}$ heeft een waarde, die langzaam in bovenwaartse richting afneemt en tot een limiet nadert, zoals in het voorgaande is aangetoond. Ze is op het laatste vak hoofdzakelijk afhankelijk van de oppervlatafvoer en niet van η .

Zodra echter veranderingen op deze rivier aangebracht worden door op een vak b.v. de diepte te veranderen, veranderen ook de waarden van $k - \varphi$ en τ op dat vak en de aansluitende, vooral benedenwaarts gelegen vakken. Er moeten echter belangrijke wijzigingen in de profielen aangebracht worden, opdat de verandering van $k - \varphi$ enige graden zal bedragen, en zo zal men ook in dit geval bij eerste benadering kunnen aannemen, dat $k - \varphi$ niet veranderd is. Men moet dus eerst de vergelijkingen (9) en (11) beschouwen; hierin zijn dan η en σ de enige onbekenden.

Deze twee vergelijkingen kan men zeer vlug doorrekenen, tot aan het laatste vak, waar η en σ volgens (17) uit elkaar berekend worden.

De snelle methode is dan om de gemiddelde waarden voor η en de hoogte van de middenstand op de verschillende vakken eerst te schatten, hieruit de waarden van σ volgens (11) te berekenen en deze weer in (9) te substitueren, waarna de geschatte η 's met behulp van (9) kunnen worden gecontroleerd, evenals de middenstand volgens (8). Dit gaat zeer snel. Uiteindelijk kan de δ vergelijking (13') worden geïntegreerd van vak tot vak. De nodige veranderingen in $k - \varphi$ moeten dan in (9) en (11) worden aangebracht, waarna η en σ opnieuw moeten worden berekend. Het blijkt echter, dat het verloop van η praktisch niet verandert met $k - \varphi$; dit is meer met σ het geval; de vergelijkingen voor σ zijn echter eenvoudig te berekenen.

Men kan ongeveer aannemen dat deze rekenwijze voor dit geval de helft vergt van de tijd, die voor de toepassing van de complexe methode nodig is. Deze tijdsbesparing wordt nog belangrijker als de formules met behulp van nomogrammen worden berekend (zie hierover c).

Ter vergelijking zijn in het volgende staatje de uitkomsten vermeld van de berekening van het M_2 -getij op de Lek, volgens de methode MAZURE en volgens de hier aangegeven reële rekenwijze.

Dan wordt eenzelfde geval beschouwd als MAZURE in zijn proefschrift heeft berekend, n.l. geval II met laag oppervlatafvoer.

van 270 m³/sec, waarbij van dezelfde gegevens werd uitgegaan.

Plaatsen	Verticaal getij M_2		Horizontaal getij M_2	
	Volgens complexe methode	Volgens reële methode	Volgens complexe methode	Volgens reële methode
Krimpen	0,76 m	0,76	850 m ³	860
Streefkerk	0,71	0,71	580	590
Schoonhoven	0,65	0,64	390	390
Jaarsveld	0,51	0,5	200	220
Vreeswijk	0,36	0,35	90	100

c. Berekening van het M_2 -getij voor een rivierenstelsel.

In dit geval zal de reële methode slechts dan voordelen t.o.v. de complexe methode krijgen, indien bij de berekeningen een nomogrammenstelsel wordt gebruikt. Als zeer vele gevallen moeten worden berekend, n.l. bij verschillende oppervlatafvoeren, dood- en springtij, verdiepingen, afgesloten rivierarmen enz., verlopen deze berekeningen nog vlugger, wanneer tevoren een grafiekenstelsel wordt vervaardigd, hetgeen echter nogal voorbereidend werk kost. Is dit eenmaal uitgevoerd dan is dit stelsel bij alle getij-onderzoekingen op het rivierenstelsel bruikbaar en gaan de berekeningen zeer snel.

Het voordeel van een grafiekenstelsel is, dat uit het verloop der functies direct blijkt, hoe sterk de invloed van bepaalde variaties is in de gemaakte schattingen. Verder is het aantal schattingen, dat gedaan moet worden, niet groter dan bij de complexe methode. Een voordeel is ook, dat men met reële grootheden rekent en dus alles direct fysisch kan interpreteren.

Het benedenrivierenstelsel wordt weer verdeeld in een aantal vakken; voor de getijbeweging op ieder vak gelden dan de vergelijkingen:

$$\frac{d\eta}{dx} = L + M\eta; \quad \eta \frac{d(\varphi - k)}{dx} = -N\eta^2 + P\eta + P;$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = -Bn\eta \sin(\varphi - k). \quad \dots (A)$$

L, M, N, P en P zijn dan functies van σ, S en $\varphi - k$, die onmiddellijk door vergelijking met (9), (11) en (13) te bepalen zijn.

Allereerst wordt de oplossing met behulp van het grafiekenstelsel vermeld. De genoemde functies kunnen voor ieder riviervak grafisch worden voorgesteld. Uit de ervaring weet men n.l. ongeveer de grenzen, waartussen $\frac{S}{\sigma}$ ligt voor hoge en lage oppervlatafvoer enz.

Zo berekent men de functies L, M enz. voor enkele waarden van $\frac{S}{\sigma}$, b.v. 0,2; 0,4; 0,6 enz.; terwijl men $\varphi - k$ laat variëren

met 10° , b.v. te beginnen met 50° tot 150° .

Men heeft dan genoeg waarden om te kunnen interpoleren en eventueel nog over een kort interval te extrapoleren. In Fig. 3 is een dergelijk grafiekenstelsel voor een vak van de Kil voorgesteld voor enkele waarden van $\frac{S}{\sigma}$.

Dan zijn de profielsgrootheden bij de middenstand aangenomen, waarvoor gemiddelde getijbeweging en oppervlatafvoer wordt verondersteld. Nu zal echter bij andere oppervlatafvoer deze middenstand ook veranderen en dus de coëfficiënten L, M, N en P . De verandering van deze middenstand moet dan eerst geschat worden om uiteindelijk te worden berekend met behulp van (8). Dit is analoog met de gang van zaken bij de complexe methode.

De nieuwe waarden der coëfficiënten L', M', N' en P' kunnen dan gemakkelijk worden berekend. Nu is de versnellingssterm

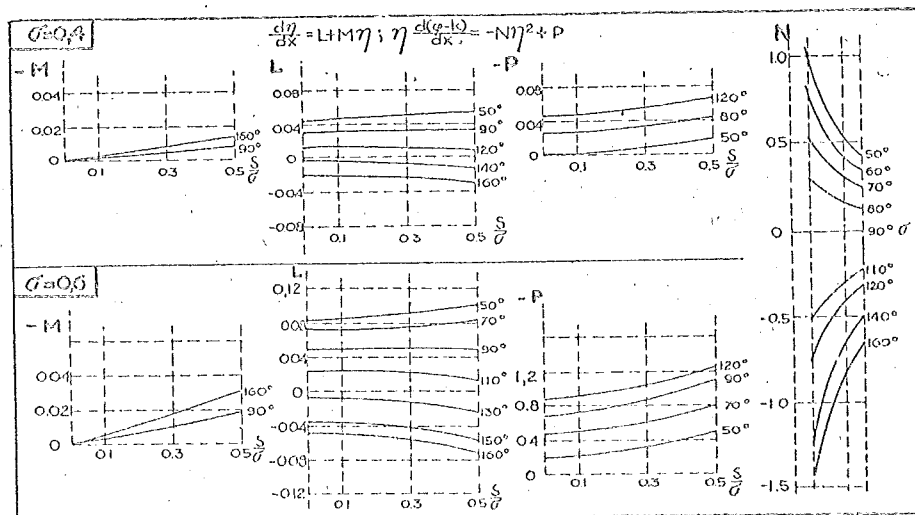


Fig. 3. Grafische voorstelling der coëfficiënten L, M, N en P van de differentiaalvergelijkingen, die de verandering van getijamplitude η en verloop der phaschoeken van M_2 verticaal en horizontaal getij, $(\varphi - k)$, aangeven voor het benedenste riviervak van de Dordtse Kil en voor een paar waarden van de stroomamplitude σ .

Nomogram voor de berekening van de coëfficiënten L en P

der differentiaalvergelijkingen voor $\frac{d\eta}{dx}$ en $\eta \frac{d(\varphi-k)}{dx}$ in het geval $\sigma > S$; waarbij gelijkstroom overheerst

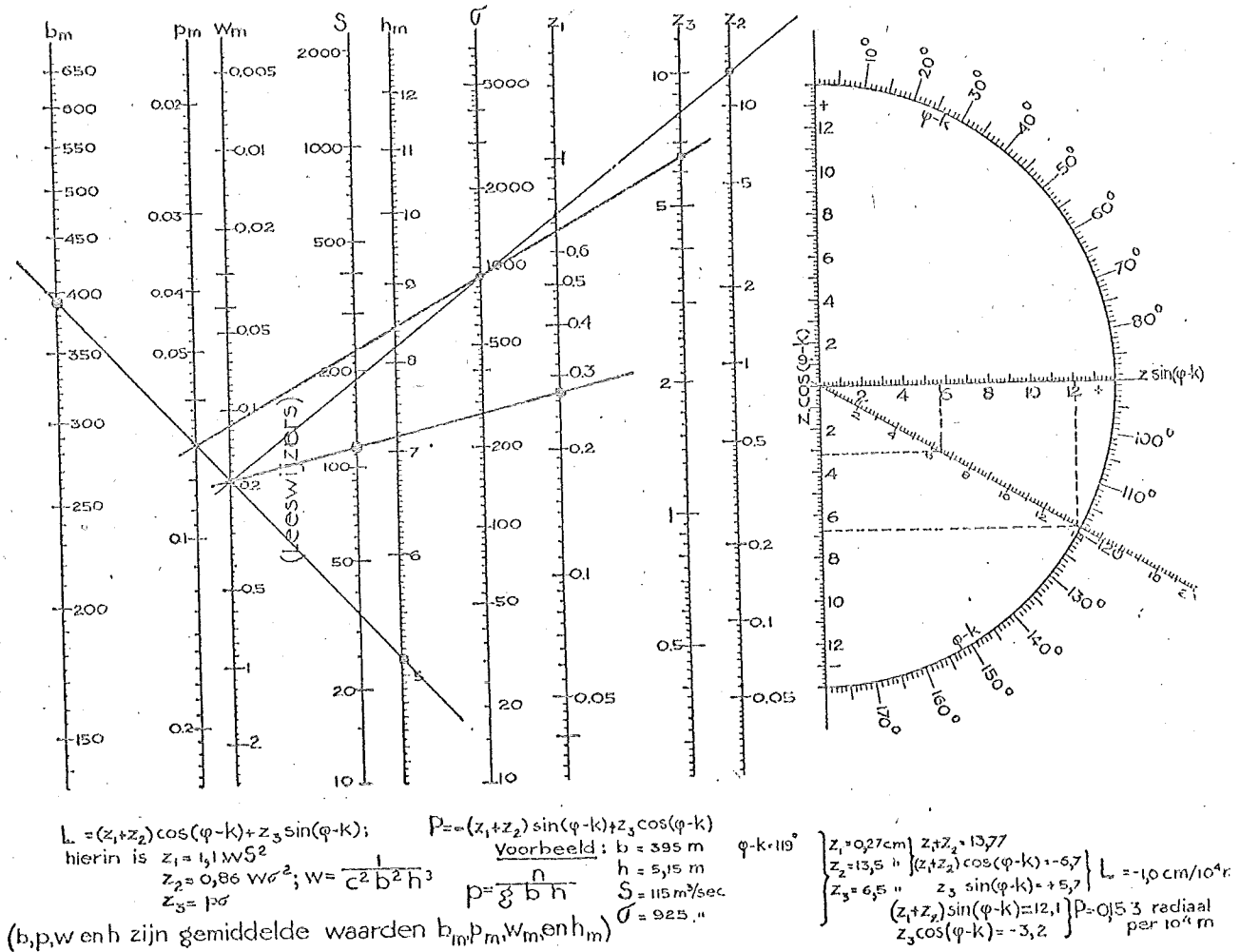


Fig. 4. Voorbeeld van een nomogram voor de berekening van een paar coëfficiënten, n.l. L en P der differentiaalvergelijkingen, die resp. de verandering der getijamplitude η en van $(\varphi - k)$ aangeven.

(b) van (9) ongeveer 25 à 30% van de term c_1 , die het belangrijkste deel van de weerstandsterm voorstelt. Daar de correctie van de hoogte van de middenstand bij verschillende oppervlatafvoeren hoogstens 10% van de diepte bedraagt, kan bij voldoende benadering worden verondersteld:

$$\frac{L'}{L} = \frac{M'}{M} = \frac{P'}{P} = \frac{h_m^3}{h_m'^3}$$

De grootte N is echter onafhankelijk van w_m en p en blijft dus ongewijzigd. Verder is P klein t.o.v. P , zodat ze vaak kan worden verwaarloosd.

In Fig. 3 is ze dan ook niet aangegeven.

Nu wordt in het kort de werkwijze met het nomogramstelsel behandeld. Voor de berekening der functies L , M , P en P kan n.l. met vrucht gebruik gemaakt worden van nomogrammen, vooral vanwege de onderlinge samenhang van deze functies L en P enerzijds en M en P anderzijds.

Voor de berekening van de termen:

$$z_1 + z_2 = (0,86 \sigma^2 + 1,1 S^2) \cdot \frac{1}{C^2 b_m^2 h_m^3} \text{ en } z_3 = \frac{n \sigma}{g b_m h_m}$$

die zowel in L als P voorkomen, kan gemakkelijk een nomogram worden opgesteld. (Het getal $S < \sigma$ is dan hier beschouwd).

Op de vervaardiging van deze nomogrammen wordt hier niet verder ingegaan. Op Fig. 4 zijn deze nomogrammen aangegeven voor z_1, z_2 en z_3 , met puntshalen op evenwijdige rechte dragers. Daarna moeten resp. $(z_1 + z_2) \cos(k - \varphi)$ en $(z_1 + z_2) \sin(k - \varphi)$ berekend worden en analoge uitdrukkingen voor z_3 . Dit kan direct met z.g. cirkelnomogrammen geschieden. Op deze figuur is ook de werkwijze aangegeven.

Uiteindelijk zijn dan L en P door optelling van de uitkomsten, met de nomogrammen gevonden, direct te bepalen.

Evenzo zijn voor de berekening van M en P overeenkomstige nomogrammen te vervaardigen.

Betreffende de integratie van de genoemde diff. vergelijkingen het volgende:

Op het Nederlandse Benedenrivierenstelsel beneden Krimpen en Werkendam is de verandering, die η bij de voortplanting ondergaat, niet zo belangrijk als die van $\varphi - k$ en σ . Wel verandert $\varphi - k$ voor een riviervak niet zo sterk, maar voor de verschillende riviervakken kan ze zeer verschillende waarden hebben. Zo is haar gemiddelde waarde op de Noord 65°, op de Lek bij Krimpen 123° en op de Nieuwe Maas aldaar 110°. Men kan dus η voor de verschillende riviervakken gemakkelijker schatten dan $\varphi - k$ en σ .

Daar op het eigenlijke benedenrivierenstelsel η slechts langzaam verandert, kan men volstaan met de meest eenvoudige benaderde integratie der vergelijkingen: $\eta(l) = \eta(0) + Lx + M\eta(0)x$.

Zo nodig kan voor $\eta(0)$ in de term $M\eta(0)x$ de gemiddelde waarde op het vak worden genomen.

De berekening van het M_2 -gelij voor een rivierenstelsel verloopt nu als volgt:

Voor de eenvoud wordt een oneindig lange rivier gekozen, die met twee riviervakken in zee uitmondt, (zie Fig. 5a) waarop de bekende (onderstreept) en onbekende grootheden zijn aangegeven. Voor het splitsingspunt P geldt dat de algebraïsche som der stromen steeds nul is. Uit deze voorwaarde is gemakkelijk af te leiden als in § 1:

$$\sigma_1(l_1) \cos[k_1(l_1)] - \sigma_1(l_1) \cos[k_2(l_2)] - \sigma_2(l_2) \cos[k_2(l_2)] - \sigma_3(0) \cos[k_3(0)] - \sigma_3(0) \cos[k_3(0)] \dots (19)$$

en evenzo een uitdrukking, waarin de cosinus door de sinus vervangen is. Verder is:

$$\eta_1(l_1) = \eta_2(l_2) = \eta_3(0) \dots (20)$$

$$k_1(l_1) = k_2(l_2) = k_3(0)$$

Bij P gelden dus tussen de 12 onbekenden direct 6 betrekkingen, zodat nog 6 betrekkingen opgesteld moeten worden. Voor de onvertakte rivier 3 geldt het onder b opgestelde: $\sigma_3(0)$ en $k_3(0) - \varphi_3(0)$ zijn in $\eta_3(0)$ uit te drukken. Voor tak 1 en tak 2 zijn uit de vergelijkingen (9), (10), (11) en (13') dan alle overige onbekenden op te lossen, mits men bij de berekening gebruik maakt van de samenhang der grootheden van deze vergelijkingen op het splitsingspunt, zoals (19) en (20).

De berekening verloopt nu als volgt:

1°. Schat $\eta_3(0)$ en reken de bovenrivier 3 door, zodat $\sigma_3(0)$ en $k_3(0) - \varphi_3(0)$ bekend zijn (zie b).

2°. Schat daarna $\sigma_1(l_1)$ en $\sigma_2(l_2)$. Dan zijn met behulp van (19), $k_1(l_1) - \varphi_1(l_1)$ en $k_2(l_2) - \varphi_2(l_2)$ te berekenen. Veel eenvoudiger kan dit echter grafisch geschieden (zie Fig. 5b) door $\sigma_1(l_1, k_1 - \varphi_1)$, $\sigma_2(l_2, k_2 - \varphi_2)$ en $\sigma_3(l_3, k_3 - \varphi_3)$ vectorisch uit te zetten. Daarna zijn bij P alle grootheden bepaald, behalve $k_1(l_1) = k_2(l_2)$; dit is echter geen bezwaar, daar ze bij de berekening der rivieren 1 en 2 als integratieconstanten dienen en pas achteraf bepaald worden.

3°. Daarna worden de takken 1 en 2 met behulp van de hierboven genoemde formules berekend op dezelfde wijze als onder a en b beschreven is, dus uitgaande van het punt P . Aan de monden moeten dan de juiste waarden voor $\eta_1(0)$, $k_1(0)$, $\eta_2(0)$ en $k_2(0)$ gevonden worden. Eigenlijk moet $k_1(0) - k_2(0)$ bepaald worden, waardoor het begin-tijdstip geëlimineerd wordt; de integratieconstanten, die van het tijdstip $t = 0$ afhangen, worden dan geëlimineerd. Tevens wordt voor ieder vak het middenstandsverhang berekend en dit gecontroleerd met de hoogte aan de monden.

4°. Worden afwijkende waarden voor deze grootheden gevonden, dan moeten de schattingen bij P herzien worden, en de berekening gecorrigeerd.

Voor een uitgebreid geulenstelsel verloopt de berekening op analoge wijze. Uitgaande van de splitsingspunten bij de bovenrivieren wordt benedenwaarts gerekend. Het aantal schattingen, dat gedaan moet worden, is dus niet groter dan bij de complexe methode, terwijl het rekenwerk met behulp van de grafieken en het nomogrammenstelsel aanzienlijk bekort kan worden. Anders zal voor een uitgebreid rivierenstelsel het rekenwerk in vergelijking met de complexe methode niet korter zijn.

Het was een voordeel van de complexe methode, dat uiteindelijk systemen lineaire vergelijkingen opgesteld en daarna opgelost konden worden.

Een dergelijk systeem kan ook met behulp van de vergelijkingen (A) opgesteld worden, mits tevoren verschillende grootheden geschat waren als bij de complexe methode. Het voordeel is nu, dat deze vergelijkingen spoediger kunnen worden opgesteld en de coëfficiënten met nomogrammen

worden berekend. Dan moet de vergelijking voor $\frac{d\eta}{dx}$ geconlineerd worden met die voor $\frac{d\sigma}{dx}$. Hiervoor wordt geschreven:

$$\frac{d\eta}{dx} = L_1 \sigma + M_1 \eta + L_2; \frac{d\sigma}{dx} = B n \eta \sin(k - \varphi).$$

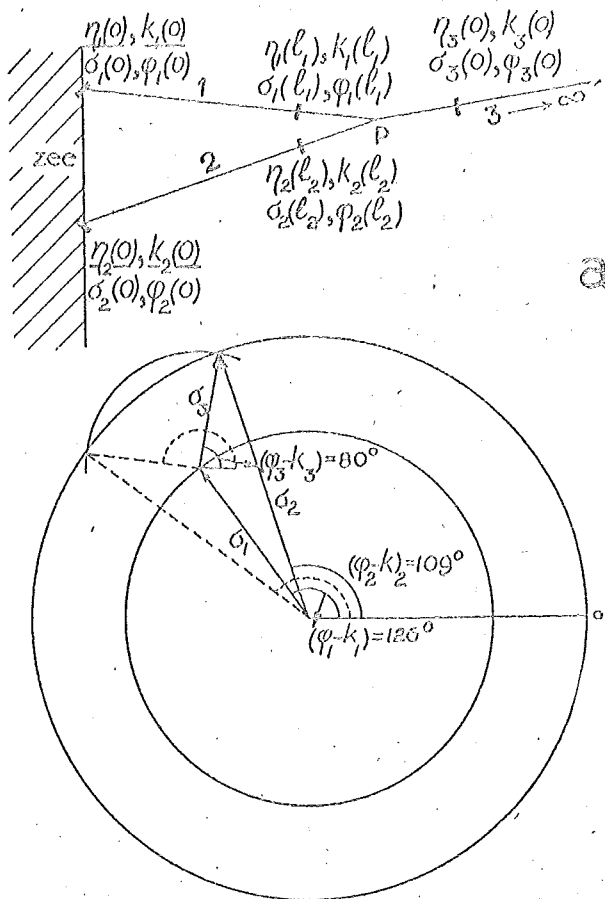
Door eenvoudige integratie kunnen hieruit onmiddellijk lineaire vergelijkingen voor η en σ worden opgesteld voor een geheel systeem rivieren. Dan moet echter tevoren het verloop van $k - \varphi$ berekend worden met behulp van de vergelijking voor $\frac{d(k - \varphi)}{dx}$, hetgeen kan geschieden door eerst evenals bij de complexe methode het verloop van σ te schatten. Het is over het algemeen eenvoudiger om η te schatten en hiervan uitgaande kan dan, door de vergelijking voor $\frac{d(k - \varphi)}{dx}$ te com-

bineren met die voor $\frac{d\sigma}{dx}$, het verloop worden berekend, zowel van $k - \varphi$, als van σ . Hierbij wordt gebruik gemaakt van de geschatte waarden voor η en enkele waarden voor σ op de splitsingspunten. Daarna kan men de hierboven genoemde lineaire vergelijkingen voor η en σ opstellen en gemakkelijk oplossen.

Het zou te ver voeren om hierop dieper in te gaan.

Tenslotte wordt nog opgemerkt dat voor de onvertakte rivieren geen grafiekenstelsel behoeft te worden bepaald. Het eenvoudigst is om hiervoor de rivier voor een drietal gevallen te berekenen, n.l. bij gemiddeld getij, gecombineerd met hoge, gemiddelde en lage oppervlatafvoer. Moet dan bij een andere amplitude η_3 , b.v. η_3' , σ_3' bepaald worden, dan kan dat bij een gegeven oppervlatafvoer geschieden met behulp

$$\text{van } \sigma_3' = \frac{\eta_3'}{\eta_3} \sigma_3.$$



- (1) Lek: σ_1 en $\varphi_1 - k_1$ zijn gegeven
- (2) Nieuwe Maas: σ_2 is gegeven, $\varphi_2 - k_2$ is onbekend
- (3) Noord: σ_3 is gegeven, $\varphi_3 - k_3$ is onbekend
- e Geconstrueerd: $\varphi_2 - k_2$ en $\varphi_3 - k_3$
- 2e Oplossing in stippellijn aangegeven verval

Fig. 5a. Notatie van de verschillende grootheden, die de getijbeweging bepalen op een eenvoudigst vertakt rivierenstelsel.

Fig. 5b. Grafische bepaling van de waarden van $k - \varphi$ op een splitsingspunt, bij gegeven waarden van σ der aldaar samenkomende rivierarmen en één waarde van $k - \varphi$.

Achteraf kunnen dan deze benaderingen worden geverifieerd.

Het blijkt n.l. dat de verhouding $\frac{\sigma_2}{\eta_3}$ hoofdzakelijk afhankelijk is van de oppervlatafvoer en niet van η_3 . Dit staat in verband met hetgeen over de grootheid τ in b is gezegd.

Een voordeel van de hiervoren ontwikkelde methode is ook, dat men vaak vlug kan zien, of de gemaakte schattingen juist zijn, daar dit reeds gedurende de berekening blijkt.

§ 3. Resumé.

De hiervoren geschetste methode blijkt steeds minder rekenwerk te kosten voor een onvertakte rivier dan de complexe methode, hetzij deze afgesloten of open is zoals bij de Lek.

Heeft men bovendien een uitgebreid rivierenstelsel, dan is deze methode alleen van voordeel ten opzichte van de complexe, indien van een nomogrammenstelsel wordt gebruik gemaakt.

Moet het rivierenstelsel voor vele gevallen onderzocht worden, als bij afdauningen, verdiepingen, hoog en laag oppervlatafvoer enz., dan zijn deze berekeningen nog vlugger uit te voeren, indien te voren de volgende becijferingen worden uitgevoerd.

1°. Voor de riviervakken moet eerst een grafiekenstelsel worden vervaardigd.

2°. De bovenrivieren moeten bij gemiddelde η_a voor drie verschillende oppervlatafvoeren worden berekend.

3°. Een afgesloten rivier moet hoogstens voor 2 gevallen worden berekend.

Het is trouwens steeds gewenst om bovenrivieren en afgesloten rivieren van het rivierenstelsel apart te behandelen.

Men moet deze voorafgaande arbeid dan vergelijken met het voorbereidende werk bij het opstellen van een laboratoriumproef, hetzij waterloopkundig, hetzij electrisch. Twee rekenaars kunnen dit grafiekenstelsel voor het beneden-rivierenstelsel in ongeveer twee maanden vervaardigen. Daarna is het verdere rekenwerk veel eenvoudiger dan bij de complexe methode. Is het echter niet economisch om dit grafiekenstelsel te vervaardigen, dan zal het nomogrammen-stelsel ook belangrijk voordeel opleveren.

De algemene gang van zaken is dus als volgt voor regelmatig gevormde rivieren: Bereken eerst voor een bepaald plan het M_2 -getij met behulp van nomogrammen of grafiekenstelsel. Blijkt dit plan gunstig, dan wordt het M_4 -getij berekend op de wijze, als onder B beschreven wordt, waarna opnieuw conclusies getrokken kunnen worden. Blijkt dit plan dan het gunstigst in vergelijking met alle andere mogelijkheden, dan wordt uiteindelijk ter controle de exacte methode toegepast.

B. Berekening van het M_4 -getij.

De formules voor de berekening van het M_4 -getij worden op overeenkomstige wijze afgeleid als voor het M_2 -getij. Dan moeten de verschillende termen van de bewegings-vergelijking nauwkeuriger benaderd worden, waarbij het omwerken van de weerstandsterm (c) van (1) tot lineaire termen ook moeilijker wordt.

Daar het M_4 -getij van minder betekenis is dan het M_2 -getij, kan van (1) de minder belangrijke term (d) buiten beschouwing gelaten worden.

De totale getijbeweging wordt dus opgevat als de gezamenlijke voortplanting van het M_2 - en M_4 -getij met oppervlatafvoer. De verandering van de hoogte van het wateroppervlak en de stroom zijn dus voor te stellen door: (H_m = hoogte middenstand t.o.v. nulvlak; h_m = diepte bij de middenstand, h = diepte t.o.v. waterspiegel).

$$\begin{aligned} h' &= H_m(x) + \eta(x) \cos(nt - k(x)) + \eta'(x) \cos 2(nt - k'(x)) \\ s &= S + \sigma(x) \cos(nt - \varphi(x)) + \sigma'(x) \cos 2(nt - \varphi'(x)) \\ h &= h_m + \eta \cos(nt - k) + \eta' \cos 2(nt - k'). \end{aligned} \quad (21)$$

Nu zal ook de voortplanting van het M_2 -getij worden beïnvloed door het M_4 -getij met frequentie $2n$. Dus $\eta(x)$ en $\sigma(x)$ worden ook afhankelijk van $\eta'(x)$, $k'(x)$, $\sigma'(x)$ en $\varphi'(x)$.

Omgekeerd zal het M_4 -getij worden beïnvloed door het M_2 -getij, zodat dus $\eta'(x)$ en $\sigma'(x)$, evenals $k'(x)$ en $\varphi'(x)$, afhankelijk zijn van de randvoorwaarden van het M_4 -getij (die dezelfde vorm hebben als die van het M_2 -getij), S , $\eta(x)$, $\sigma(x)$, $k(x)$, $\varphi(x)$ en de profielsgrootheden.

Het blijkt, dat de beïnvloeding van de voortplanting van het M_2 -getij door het M_4 -getij als een correctie kan worden opgevat. De beïnvloeding van de voortplanting van het M_4 -getij door het M_2 -getij is echter van dezelfde orde van grootte als de voortplanting van het oorspronkelijke M_4 -getij zelf, zoals dit alleen uit haar randvoorwaarden zou volgen (dus indien geen M_2 -getij aanwezig was).

Het is weer het doel om de niet-lineaire termen van (1) om te werken tot een som van termen van de vorm:

$$a + \alpha \cos nt + \beta \sin nt + \alpha_1 \cos 2nt + \beta_1 \sin 2nt$$

De termen, waaruit a bestaat, bepalen dan het middenstandsverval; de termen met frequentie n het M_2 -getij; die met $2n$ het M_4 -getij. De verg. (1) wordt dus gesplitst in een drietal vergelijkingen, hetgeen volgens het superpositiebeginsel, dat voor lineaire vergelijkingen geldt, geoorloofd is.

De vervanging der termen in (1) door lineaire termen geschiedt als volgt:

De functies h' , s en h , zoals ze in (21) zijn gedefinieerd, worden in (1) en (2) gesubstitueerd. Dan worden voor $\frac{1}{h}$ en $\frac{1}{h^3}$ resp.

gesteld daar $\frac{\eta}{h_m}$ en $\frac{\eta'}{h_m}$ klein zijn t.o.v. één

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_m} \left[1 - \frac{\eta}{h_m} \cos(nt - k) - \frac{\eta'}{h_m} \cos(2nt - 2k') \right] \text{ en} \\ \frac{1}{h_m^3} \left[1 - \frac{3\eta}{h_m} \cos(nt - k) - \frac{3\eta'}{h_m} \cos(2nt - 2k') + \right. \\ \left. + \frac{6\eta^2}{h_m^2} \cos^2(nt - k) + \frac{12\eta\eta'}{h_m^2} \cos(nt - k) \cos(2nt - 2k') \right] \end{aligned} \quad (22)$$

Veel grotere moeilijkheden geeft het product $\sigma^2 f(t) = s |s|$; (σ = amplitude). Daartoe moet $s |s|$ in een FOURIERreeks ontwikkeld worden, als volgt:

$$f(t) = m_0' + m_1' \sin nt + m_1' \cos nt + m_2' \cos 2nt + m_2' \sin 2nt,$$

waarbij dan voor s , de in (21) genoemde uitdrukking gesubstitueerd moet worden. De coëfficiënten m_0' , m_1' enz. worden bepaald volgens de bekende FOURIERintegralen:

$$m_0' = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt; m_1' = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \text{ enz.} \quad (23)$$

In Fig. 6 zijn deze en overige coëfficiënten nader aangegeven.

Indien s niet van teken wisselt en dus de oppervlatafvoer overheerst, zijn de integralen direct te bepalen. Ze worden in Fig. 6 nader aangegeven voor $\frac{S}{\sigma} > 1$, hetgeen echter een benadering is. In het vervolg wordt hierop nog nader teruggekomen.

De moeilijkheid schuilt nu in de bepaling van de integralen (23) als s van teken wisselt.

De functie $s |s|$ is gelijk aan s^2 als $s > 0$ en gelijk aan $-s^2$ als $s < 0$, waarbij d in s^2 volgens (21) bepaald wordt. Men zal dus de waarden moeten bepalen, waarvoor:

$$\sigma \left[\frac{S}{\sigma} + \cos(nt - \varphi) + \frac{\sigma'}{\sigma} \cos(2nt - 2\varphi') \right] = 0$$

Nu wordt het tijdstip $t = 0$ zo gekozen, dat $\varphi = \frac{\pi}{2}$; dit is geen beperking. Dan gaat $2\varphi'$ over in $2\varphi' - 2\varphi + \pi$; k in $k - \varphi + \frac{\pi}{2}$ en $2k'$ in $2k' - 2\varphi + \pi$.

Toch worden in het vervolg de nieuwe waarden voor k , k' en $2\varphi'$ weer door de oude letters aangegeven, terwijl $\varphi = \frac{\pi}{2}$ is. Nu moeten dus de nulpunten bepaald worden van:

$$p(t) = \frac{S}{\sigma} + \cos(nt - \frac{\pi}{2}) + \frac{\sigma'}{\sigma} \cos(2nt - 2\varphi') = 0,$$

die gelegen zijn in het interval $(-\pi, +\pi)$. Laten deze twee waarden δ_1 en δ_2 zijn; in het vervolg wordt aangegeven, hoe ze bepaald worden. Dan is in het interval $(-\pi, \delta_1)$, de functie $p(t)$ neg. of pos.; in het interval (δ_1, δ_2) pos. of neg. en daarna weer neg. of pos. in (δ_2, π) .

Dan is dus:

$$m_2' = \frac{1}{\sigma^2 \pi} \left[\int_{-\pi}^{\delta_1} s^2 \cos 2nt dt - \int_{\delta_1}^{\delta_2} s^2 \cos 2nt dt + \int_{\delta_2}^{\pi} s^2 \cos 2nt dt \right] \quad (23')$$

of

$$m_2' = \frac{1}{\sigma^2 \pi} \left[\alpha(\pi) - \alpha(-\pi) + 2\alpha(\delta_1) - 2\alpha(\delta_2) \right],$$

terwijl α gelijk is aan de onbepaalde integraal $\int s^2 \cos 2nt dt$ welke zonder moeite kan worden berekend. De uitdrukking is vrij uitgebreid, ze wordt hier niet verder aangegeven.

De moeilijkheid schuilt alleen in de bepaling van δ_1 en δ_2 . Slechts voor een tweetal waarden van $2\varphi'$, n.l. 0° en 180° , zijn de nulwaarden van $p(t)$ direct te bepalen. Voor andere waarden van $2\varphi'$ moet een vierdegradsverg. worden opgelost, hetgeen niet behulp van een nomogram kan geschieden. Deze oplossing wordt hier niet weergegeven, daar het doel bij voldoende benadering op eenvoudigere wijze kan worden bereikt.

$$\bar{s} = S + \sigma \cos \left(nt - \frac{\pi}{2} \right) + \sigma' \cos (2nt - 2\varphi').$$

$$f(t) = \frac{1}{\sigma^2} \bar{s}^2 = \pm \left\{ \frac{S}{\sigma} + \cos \left(nt - \frac{\pi}{2} \right) + \frac{\sigma'}{\sigma} \cos (2nt - 2\varphi') \right\}^2 = m'_0 + m'_1 \cos nt + m''_1 \sin nt + m'_2 \cos 2nt + m''_2 \sin 2nt$$

In de grafiek is aangenomen $\frac{\sigma'}{\sigma} = p = 0,4$ (+ als $\bar{s} > 0$; — als $\bar{s} < 0$)

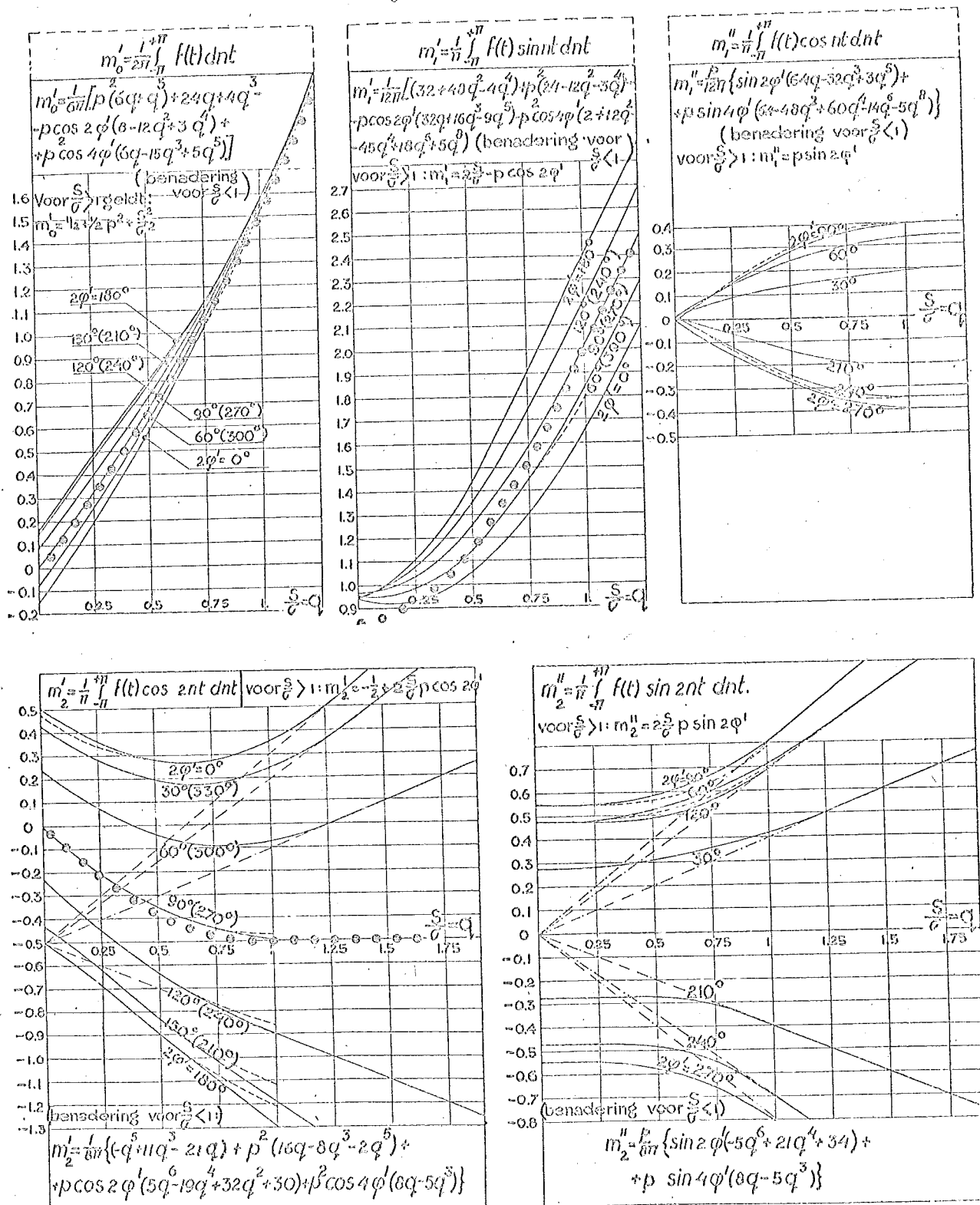


Fig. 6. Grafische voorstelling der weerstandcoëfficiënten m'_0, m'_1, m''_1, m'_2 en m''_2 , resp. voor het middenstandsverhang, M_2 en M_1 getij. Dan is de verhouding van M_1 stroomamplitude σ' tot M_2 stroomamplitude σ , gelijk aan 0,4. Vergelijken zijn de exact berekende met de bij benadering berekende waarden.

Het blijkt n.l., dat op alle getijrivieren en zeearmen in ons land $\frac{\sigma'}{\sigma}$ ongeveer 0,3 à 0,4 bedraagt en hoogstens 0,5 is; de amplitude van het M_4 -getij is n.l. steeds belangrijk kleiner dan die van het M_2 -getij. In plaats van de nulpunten van $p(t) = 0$ beschouwen we die van: $\frac{S}{\sigma} + \cos(nt - \frac{\pi}{2}) = 0$ en verwaarlozen dus het M_4 -getij daarbij. Deze nulpunten zijn direct te bepalen, n.l.: $\delta_1 = bg \sin \frac{S}{\sigma}; -\pi < \delta_1 < -\frac{\pi}{2}; \delta_2 = -\pi - \delta_1; -\frac{\pi}{2} < \delta_2 < 0$

We nemen inplaats van de nulpunten van $p(t) = 0$ de zojuist genoemde en kunnen dan m_2' en m_2'' direct berekenen. De werkelijke nulpunten vallen hiermede niet samen en dus wordt een fout gemaakt bij de berekening der integralen volgens deze methode. Deze fout kan men schatten, hierover zullen we alleen het volgende zeggen. Ten tijde van het nulpunt $nt = \delta_1$ is de stroom:

$$s = \frac{\sigma'}{\sigma} \cos(2\delta_1 - 2\varphi')$$

Nu is $\frac{\sigma'}{\sigma}$ hoogstens 0,5, welke waarde in de integraal moet worden gequadrateerd, waardoor haar betekenis nog geringer wordt. Daar de fout zich uitstrekt over het interval tussen δ_1 en het werkelijke nulpunt, kan men gemakkelijk nagaan dat de fout, die bij de verwaarlozing in de integralen van (23) gemaakt wordt, klein is t.o.v. de waarde dezer integralen. Deze

fout neemt toe als $\frac{S}{\sigma}$ tot 1 nadert maar ze blijkt ook dan verwaarloosbaar. We substitueren dus bovengenoemde waarden van δ_1 en δ_2 in (23') en kunnen dan zonder moeite deze integralen berekenen.

Het eenvoudigst worden de uitkomsten, als men bij benadering stelt:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{S}{\sigma}\right)^2} = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{S}{\sigma}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{S}{\sigma}\right)^4; \quad bg \sin \frac{S}{\sigma} = \frac{S}{\sigma} + \frac{1}{6} \left(\frac{S}{\sigma}\right)^3.$$

De uiteindelijk afgeleide benaderingsformules zijn ook in Fig. 6 aangegeven. Verder zijn de waarden van m_0', m_1', m_1'', m_2' en m_2'' ook grafisch voorgesteld voor de meest voorkomende waarde $\frac{\sigma'}{\sigma} = 0,4$, en wel volgens de exact berekende waarden, met inachtneming van de juiste kenteringspunten enz. Hiervoor zijn dan geen formules aangegeven. Van de genoemde benaderingsformules voor $\frac{S}{\sigma} < 1$ zijn alleen de belangrijkste afwijkingen getekend (stippellijn).

Betreffende de in Fig. 6 genoemde benaderingsformules nog het volgende. Als grens tussen beide groepen is $\frac{S}{\sigma} = 1$ gesteld. Dit is echter een veronderstelling. Eigenlijk is de grens afhankelijk van φ' . Zodra n.l. de oppervlaktewater overheerst t.o.v. de stroom (M_2 - en M_4 -getij tezamen genomen) gelden de opgegeven formules voor $\frac{S}{\sigma} > 1$ volkomen exact; ze stellen dan behalve voor m_0' rechte lijnen voor. Voor bepaalde waarden van φ' gelden deze formules ook voor een interval $\alpha < \frac{S}{\sigma} < 1$. De formules, die echter voor $\frac{S}{\sigma} < 1$ zijn afgeleid en waarbij dus het getij overheerst, zijn benaderingen.

Ter vergelijking zijn in Fig. 6 ook de waarden voor m_0, m_1 en m_2 getekend in het geval geen M_4 getij voorkomt en dat nader door MAZURE werd beschouwd. (Zie afd. A van dit hoofdstuk.)

Uit Fig. 6 blijkt dan, dat de weerstand van het M_2 getij in belangrijke mate door het M_4 getij gewijzigd kan worden. In het algemeen ligt in de praktische gevallen $2\varphi'$ in de buurt van $0^\circ - 30^\circ$.

Door de heer H. J. STROBAND werd bij de linearisering van de weerstand een andere weg gevolgd, dan hierboven

is aangegeven. Hiervoor wordt naar het betreffende artikel verwezen.⁹⁾

Zodra de functies m bepaald zijn, zijn de diff. vergelijkingen van het gecorrigeerde M_2 -getij en M_4 getij gemakkelijk op te stellen, zoals in de aanvang is aangegeven. (Let op de getransformeerde tijd).

De bewegingsvergelijking van het M_2 -getij wordt, indien van (22) alleen de belangrijkste termen worden opgenomen:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dx} \cos(nt - k) + \eta \sin(nt - k) \frac{dk}{dx} = & -p_m \sigma \sin(nt - \varphi) - \\ & - \frac{3\eta \sigma^2 m_0' w_m}{h_m} \cos(nt - k) + \sigma^2 w_m m_1' \sin nt + \\ & + \sigma^2 w_m m_1'' \cos nt - \frac{3\eta \sigma^2 w_m}{2 h_m} m_2' \sin(nt + k) - \\ & - \frac{3\eta \sigma^2 w_m m_2''}{2 h_m} \sin(nt + k) \dots \dots (25) \end{aligned}$$

en voor het M_4 -getij:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta'}{dx} \cos(2nt - 2k') + 2\eta' \sin(2nt - 2k') \frac{dk'}{dx} = \\ = -2p_m \sigma' \sin(2nt - 2\varphi') + \sigma^2 w_m m_2' \cos 2nt + \\ + \sigma^2 w_m m_2'' \sin 2nt - \frac{3\sigma^2 \eta}{2 h_m} w_m m_1' \sin(2nt - k) - \\ - \frac{3\sigma^2 \eta}{2 h_m} w_m m_1'' \cos(2nt - k) + \frac{p_m \eta \sigma}{2 h_m} \sin(2nt - k - \varphi). \quad (26) \end{aligned}$$

Uit de continuïteitsvergelijking is dan voor ieder van beide getijden nog een vergelijking op te stellen: Voor het M_2 -getij blijft ze de vorm (7) behouden; voor het M_4 getij wordt ze:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma'}{dx} \cos(2nt - 2\varphi') + 2\sigma' \sin(2nt - 2\varphi') \frac{d\varphi'}{dx} = \\ = -2B\eta' n \sin(2nt - 2k') \dots \dots (27) \end{aligned}$$

De formule voor de bepaling van de middenstand luidt dan:

$$\begin{aligned} \frac{dH_m}{dx} = \sigma^2 w_m m_0' - \frac{3\eta \sigma^2 w_m}{2 h_m} m_1' \sin k - \\ - \frac{3\eta \sigma^2}{2 h_m} w_m m_1'' \cos k + \frac{p_m \eta \sigma}{2 h_m} \sin(k - \varphi) \dots \dots (28) \end{aligned}$$

Men kan nu bij de oplossing de complexe of de reële methode volgen. Bij de complexe methode moeten dan de termen $m_1' \sin nt$ en $m_1'' \cos nt$ worden omgewerkt tot: $m_1' \cos(nt - \varphi) + m_1'' \cos(nt - \beta)$ enz.

Bij de reële methode is dit niet nodig. Deze oplossing verloopt voor het gecorrigeerde M_2 getij op analoge wijze als in § 2 is aangegeven. Ze kan echter ook voor het M_4 -getij worden toegepast, waarbij nomogrammen de berekeningen verlichten.

We zullen hierop niet verder ingaan, maar vermelden alleen, dat na de berekening van het M_2 -getij reeds talrijke grootheden van (26) bekend zijn. Verder is de verhouding $\frac{\sigma'}{\sigma}$ ook nagenoeg bekend. Men hoeft dus alleen nog de hoek φ' nader te kennen. Ook deze is vaak tevoren aan de hand van hetgeen hierover bekend is te schatten, omdat het M_2 - en M_4 -getij nauw aan elkaar verbonden zijn. Daarna zijn de vergelijkingen van het M_4 -getij gemakkelijk te berekenen.

Tenslotte vermelden wij nog enkele uitkomsten van de toegepaste methoden. In Fig. 1 is een werkelijk voorgekomen gemiddeld getij voor de Lek aangegeven, berekend volgens de exacte methode en volgens de lineaire methode. Ter vergelijking is op de resultaten der exacte methode ook de FOURIERanalyse toegepast. De aldus verkregen

⁹⁾ H. J. STROBAND. Een bijdrage tot de kennis van de getijberekening op benedenrivieren en zeearmen. De Ingenieur, no 36, 1947.

Hierbij moet worden opgemerkt, dat een oplossing met behulp van hofuncties, die dezelfde strekking heeft, de voorkeur verdient boven de aldaar aangegeven methode.

uitkomsten volgens beide methodes zijn in onderstaande staat samengevat.

Plaatsen	Verticaal getij				Horizontaal getij			
	Volgens exacte methode		Volgens lineaire methode		Volgens exacte methode		Volgens lineaire methode	
	M_2	M_4	M_2	M_4	M_2	M_4	M_2	M_4
	cm	cm	cm	cm	m ³	m ³	m ³	m ³
Krimpen . . .	89	16,5	89	16,5	1050	390	1000	400
Streefkerk . . .	81	16	79	16,5	690	320	630	340
Schoonhoven . . .	68	15	63	16	440	220	390	250
Jaarsveld . . .	49	13	43	12	240	130	200	150
Vreeswijk . . .	34	10	27	9	90	50	75	70

KORTE TECHNISCHE BERICHTEN

Plannen voor de verbetering van een interessante scheepvaartweg in Zuid-Amerika.

Het is een zeer opmerkelijk verschijnsel, dat de Amazone en Orinoco-rivieren, in haar bovenlopen, door een natuurlijke, bevaarbare waterweg verbonden zijn (zie het „Casiquiare Canal” op het kaartje van Fig. 1).

Over deze verbinding werd voor het eerst geschreven in 1639, daarna weer eens in 1744 en ook Von Humboldt vermeldde, in 1800, deze merkwaardigheid.

1.650 km bovenstrooms van haar monding, bij het plaatsje Tama Tama, waar de rivierbodem slechts 110 m boven zeepeil is gelegen, splitst de Orinoco zich in twee takken. De hoofdtak, die de naam van Orinoco blijft dragen, voert 3/4 van de waterhoeveelheid verder. De andere tak, het „Casiquiare Canal”, welke breedten heeft van 45 m tot 180 m en die bevaren wordt door boten met 1,80 m diepgang, voert het andere kwart van de waterhoeveelheden af naar een bevaarbare tak van de Amazone. Aldus bestaat er, in deze bijna niet-beyolkte streek, een internationale verkeersweg.

De Orinoco is, voor zeeschepen met 3,60 m diepgang, bevaarbaar tot Ciudad Bolivar (20.000 inwoners), welke plaats 350 km van de uitmonding in zee is verwijderd. De Amazone (met de Rio Negro) wordt door zeeschepen met 7,00 m diepgang tot Manaos (107.000 inwoners), dat is over 1.400 km, bevaren. Bij de laagste waterstanden is echter slechts een diepgang van 4,50 m mogelijk. Elke dezer twee steden heeft een redelijk uitgeruste haven.

Het slechte stuk van de binnen-waterweg, die de beide riviermondingen verbindt, is gelegen tussen Puerto Ayacucho aan de Orinoco en San Gabriel, aan de Rio Negro. Dit is circa 1250 m lang. Van uit zee zijn beide plaatsen, bij gewoon laag water, met schepen met 3,00 m diepgang te bereiken. De er tussen gelegen vaarweg biedt 1,80 m diepgang, behalve bij laag water. De kaart geeft op 4 plaatsen (3 in de Orinoco en 1 in de Rio Negro) stroomversnellingen („rapids”) aan.

In de versnelling van Atures daalt het water, over een afstand van 8 km, 17 m met een maximale snelheid van 19 km per uur en in die van Maipures, lang 6 1/2 km, komt zelfs een snelheid van 30 km per uur voor.

Zulke stroomversnellingen waren te machtig voor de bestaande scheepvaart en moest deze hier haar lading aan een landtransport afstaan. Ter vervanging van een primitief pad, heeft, in 1928, de Venezolaanse regering hier, over 65 km lengte, een smalle doch goed getraceerde en verharde rijweg aangelegd. De er bij behorende overlaad-stations van water- in land-transport v.v. zijn echter primitief gebleven.

Op de derde Orinoco-drempel, die van Santa Barbara, is de maximale snelheid niet meer dan 8 km per uur, echter in een vaargeul van slechts 15 m breedte. Deze moeilijkheid wordt door de bestaande scheepvaart geaccepteerd. De San Gabriel-versnelling echter (in de Rio Negro), waarin een max. v van 17 km per uur kan optreden, wordt door het thans bestaande transport ontgaan, door daar gebruik te maken van een 3 km lange landweg.

In de jongste wereldoorlog kreeg de streek rondom het „Casiquiare Canal”, door haar rijkdom aan wilde rubber, voor de U.S.A. extra belang en op het bestaan van een goede scheepvaartweg binnen-door van de Orinoco-monding naar die van de Amazone, al was die dan ook 4.700 km lang, werd prijs gesteld, met het oog op duikboot-bedreiging der zeekusten. Het is een blijk van grootse opvattingen in zake de oorlogvoering, dat de U.S.A. hier degelijk voorbereidend werk heeft gedaan. Ze deden, in 1943, een uitgebreide hydrologische en technische opname verrichten, van Puerto Ayacucho tot San Gabriel. Daarvoor werd een expeditie uitgerust, waaraan verbonden waren: 9 ingenieurs, 1 geoloog en 1 medicus. Men trof, uiteraard, niet veel reeds verzamelde gegevens aan. Er waren dagelijkse aflezingen van peilschalen te: Manaos, San Gabriel, Ciudad Bolivar en Puerto Ayacucho, gedurende resp. 41, 10, 9 en 4 jaren. Ook kreeg men de beschikking over enkele series regenval-waarnemingen. Nadat, van uit de lucht, een overzichtskaart was gemaakt, is er, in 4 ploegen, in de maanden Februari en Maart (er was toen laag water) gemeten en ter plaatse onderzocht. Daarna is een viervoudig plan uitgewerkt.

De volledige oplossing (kosten \$ 91.000.000) voorziet in

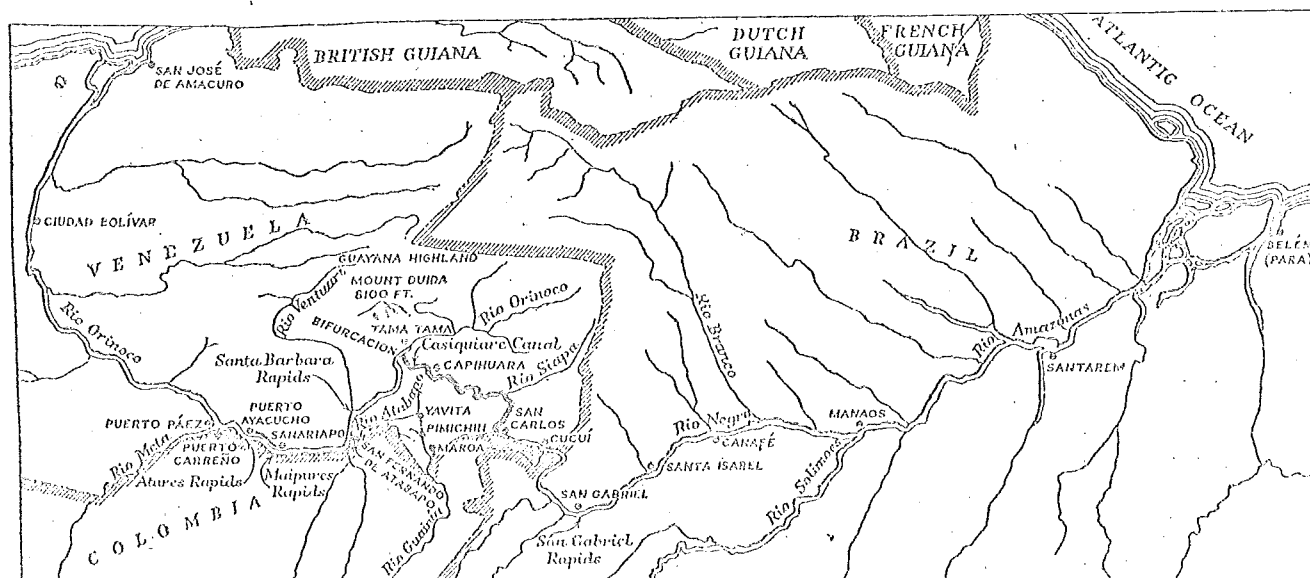
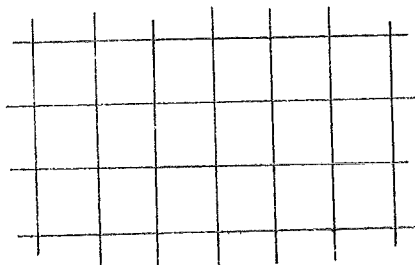


Fig. 1. Loop van de Amazone- en Orinoco-rivieren.

DIFFERENTIE - METHODEN

Het oplossen van één-dimensionale lange-golf-problemen met behulp van een computer.



Vloeistofmechanica Kollege b73B

Concept
Februari 1973

DIFFERENTIE - METHODEN

Het oplossen van één-dimensionale lange-golf-problemen met
behulp van een computer

- §1 Inleiding
 - §2 Expliciete differentie-methoden
 - §3 Impliciete differentie-methoden
 - §4 Berekeningen voor een onvertakte rivier bestaande uit i vakken.
 - §5 Een toepassing van de in §3 en §4 behandelde impliciete differentie-methode.
-

§1. Inleiding.

Zoals steeds in het kollege b73B wordt ook hierna de voortplanting van lange golven in open leidingen beschouwd, die in voldoende mate wordt beschreven door de volgende differentiaalvergelijkingen:

$$(1) \quad \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{C^2 A^2 a_r} Q \left| \frac{Q}{A} \right| + \frac{2b}{gA^2} Q \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$(2) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = - b \frac{\partial h}{\partial t}$$

Voor de afleiding van deze bewegingsvergelijking (1) en continuïteitsvergelijking (2) en voor de daarbij gemaakte veronderstellingen kan hier worden verwezen naar het kollege-diktaat b73A.

De onafhankelijk variabelen h en Q zijn kontinue en differentieerbare functies van x en t : $h(x,t)$ en $Q(x,t)$. In de vergelijkingen komen de grootheden A , C , en a_r en b voor, die maken dat de factoren zoals $\frac{1}{gA}$ niet konstant zijn doch variëren met x en t .

De termen in de vergelijkingen zijn duidelijk niet lineair, waardoor het oplossen van de vergelijkingen wordt bemoeilijkt. Tegenwoordig heeft men de mogelijkheid om grote computers in te schakelen voor het verrichten van geweldige hoeveelheden rekenwerk. Dat is de reden dat men thans met veel succes numerieke oplossingsmethoden voor deze (en andere) problemen toepast, waarbij een grote nauwkeurigheid kan worden bereikt.

Omdat de variatie van alle grootheden, over een groot aantal tijdstappen, nauwkeurig kan worden meegenomen zal het niet-lineaire karakter van de D.V.n. in de oplossingen volledig tot zijn recht kunnen komen.

In het kollege b73B wordt een toetsprobleem min of meer centraal gesteld, waardoor gemakkelijker een overzicht over de verschillende oplossingsmethoden kan worden verkregen.

Het schema van dat toetsprobleem is samen met een x/t-diagram weergegeven op een na blz. 4 volgende bijlage.

In het volgende wordt eerst het principe van de in de paragrafen 2 t/m 4 beschreven differentiemethoden kort aangegeven. De differentiaal-vergelijkingen gelden in elk punt van het x/t-diagram. De oplossing $h(x,t)$, $Q(x,t)$ moet in elk punt (x,t) aan deze vergelijkingen voldoen. Een oplossing wordt verder bepaald door:

- begin voorwaarden $h(x,0)$ en $Q(x,0)$ en
- randvoorwaarden

In het eerste kollege zijn de verschillende mogelijke oplossingsmethoden naast elkaar gesteld, teneinde een overzicht over het gehele vak te geven.

Daarbij bleek reeds dat men bij differentie-methoden slechts werkt met een beperkt aantal diskrete punten van de oplossingen $h(x,t)$ en $Q(x,t)$.

Men kan in het x/t -diagram een roosterwerk denken. In het volgende gaat het om waarden van de functies h en Q behorende bij punten van een dergelijk roosterwerk.

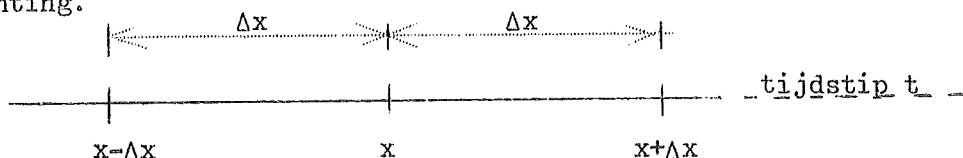
In de vergelijkingen (1) en (2) komen partiële afgeleiden voor zoals:

$$\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial t} \text{ etc.}$$

Deze partiële afgeleiden kunnen worden benaderd door een differentie-quotiënt. Als we b.v. $\frac{\partial h}{\partial x}$ beschouwen dan is de definitie voor dit differentiaal-quotiënt op een bepaald tijdstip in een punt x :

$$(3) \quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x+\Delta x,t) - h(x,t)}{\Delta x}$$

In het volgende worden nu een aantal punten van het x/t -diagram beschouwd op een bepaald tijdstip t en op afstanden Δx van elkaar verwijderd in de x -richting.



Eenvoudigheidshalve wordt het tijdstip t verder niet aangegeven:

We kunnen schrijven:

$$(4) \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x} \approx \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

Deze uitdrukking wordt een VOORWAARTSE differentie-benadering van $\frac{\partial h}{\partial x}$ in het punt (x,t) genoemd. Vergelijken we (4) met (3) dan is het zinvol om na te gaan hoe groot de fout is, die men bij een eindige Δx kan maken.

Het is mogelijk om de waarde van h in het punt $(x+\Delta x)$ uit te drukken met behulp van een reeks volgens Taylor:

$$h(x+\Delta x) = h(x) + \Delta x \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 h(x)}{\partial x^3} + \dots$$

Als we nu de benadering volgens (4) vergelijken met deze reeks dan vinden we de volgende uitdrukking voor de "fout":

$$(5) \quad \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \dots$$

Met deze uitdrukking (5) hebben we een indruk van de nauwkeurigheid van een voorwaartse differentie-benadering volgens (4).

Men kan $\frac{\partial h}{\partial x}$ in het punt x van bovenstaande figuur ook op een andere wijze benaderen:

$$(6) \quad \frac{\partial h(x)}{\partial x} \sim \frac{h(x+\Delta x) - h(x-\Delta x)}{2\Delta x}$$

Deze uitdrukking (6) wordt een CENTRALE differentie-benadering van $\frac{\partial h}{\partial x}$ in punt x genoemd.

Het is zinvol om ook de nauwkeurigheid van deze benadering na te gaan.

Men kan twee reeksen volgens Taylor van elkaar aftrekken:

$$h(x+\Delta x) = h(x) + \Delta x \frac{\partial h(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 h(x)}{\partial x^3} + \dots$$

$$\begin{aligned} h(x-\Delta x) &= h(x) - \Delta x \frac{\partial h(x)}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 h(x)}{\partial x^3} + \dots \\ \hline h(x+\Delta x) - h(x-\Delta x) &= 2\Delta x \frac{\partial h(x)}{\partial x} + \frac{2\Delta x^3}{6} \frac{\partial^3 h(x)}{\partial x^3} + \dots \end{aligned}$$

Als we de daardoor verkregen uitdrukking vergelijken met (4) en (5) dan kunnen we de volgende konklusies trekken:

= De "fout", die bij een centrale differentie benadering wordt gemaakt kan worden uitgedrukt als volgt:

$$(7) \quad \frac{2\Delta x^2}{2 \cdot 3!} \frac{\partial^3 h(x)}{\partial x^3} + \dots$$

= In het algemeen zal dus een centrale differentie-benadering "een orde beter zijn" dan een voorwaartse differentie-benadering.

Er wordt ook nog wel eens gebruik gemaakt van een derde mogelijkheid een ACHTERWAARTSE differentie-benadering; gesteld wordt dan:

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x} \sim \frac{h(x) - h(x-\Delta x)}{\Delta x}$$

Het zal na het voorgaande duidelijk zijn dat ook bij deze benadering een uitdrukking voor de fout kan worden verkregen, die overeenkomt met (5).

Als we terugkeren naar de D.V.n. (1) en (2) dan kan men ook de andere differentiaal-quotiënten vervangen door differentie-quotiënten.

Als we steeds centrale differentie-benaderingen kiezen, dan kunnen we achtereenvolgens voor een of ander punt (x, t) in het x/t -diagram schrijven:

$$(8) \quad \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} = \frac{h(x, t+\Delta t) - h(x, t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

$$(9) \quad \frac{\partial Q(x, t)}{\partial x} = \frac{Q(x+\Delta x, t) - Q(x-\Delta x, t)}{2\Delta x}$$

$$(10) \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = \frac{h(x+\Delta x, t) - h(x-\Delta x, t)}{2\Delta x}$$

$$(11) \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = \frac{Q(x, t+\Delta t) - Q(x, t-\Delta t)}{2\Delta t}$$

Het doel is nu om alle differentiaal-quotiënten uit de vergelijkingen te vervangen en tegelijkertijd voor de andere grootheden, die in de vergelijkingen voorkomen, konkrete waarden in te voeren. Daarbij wordt voor een bepaalde vergelijking een bepaald punt gekozen als "centraal punt" met daarom heen een aantal punten van het roosterwerk.

Het principe van verschillende mogelijke benaderingswijzen kan eenvoudig worden aangegeven m.b.v. het nevenstaande x/t-diagram (zie volgende pagina) door alleen de continuïteitsvergelijking (2) te beschouwen:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -b \frac{\partial h}{\partial t}$$

We kiezen een centraal punt (6,5) (d.w.z. $x = 6\Delta x$ en $t = 5\Delta t$) en stellen voor dat punt een differentie-vergelijking op.

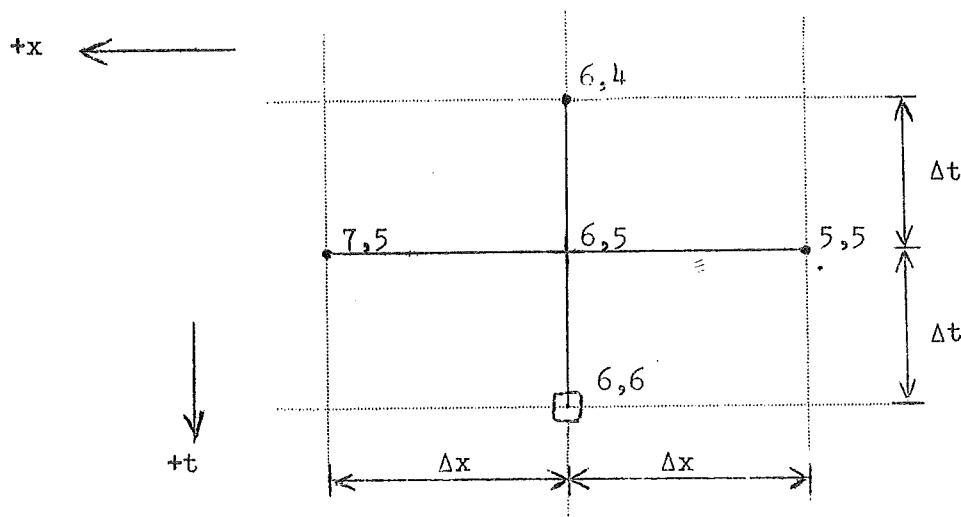
Voor $\frac{\partial Q}{\partial x}$ kunnen we schrijven $\frac{Q(7,5) - Q(5,5)}{2\Delta x}$.

Voor $\frac{\partial h}{\partial t}$ kunnen we schrijven $\frac{h(6,6) - h(6,4)}{2\Delta t}$.

De grootheid b wordt bepaald in het punt (6,5).

In het punt (6,5) kan in de plaats van de differentiaal-vergelijking (2) de volgende differentie-vergelijking worden geschreven:

$$(12) \frac{Q(7,5) - Q(5,5)}{2\Delta x} = b(6,5) \frac{h(6,6) - h(6,4)}{2\Delta t}$$

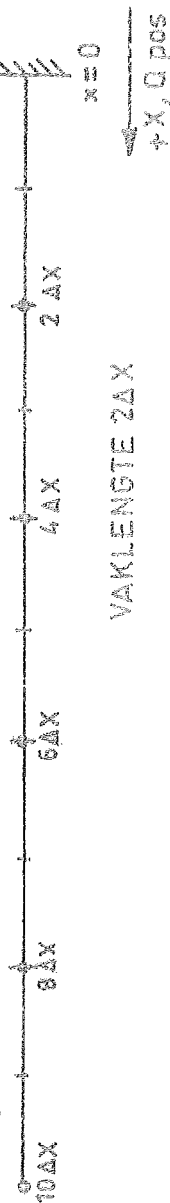


De vergelijking (12) is een lineaire algebraïsche vergelijking. Bij het oplossen van dergelijke vergelijkingen staan ons verschillende mogelijkheden ten dienste.

$$Q(0,t)=0$$

$$\Delta x$$

$$h(10\Delta x, t)$$



BEW. VERG:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{9A} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{2b}{C^2 A^2 R} \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \frac{2b}{C^2 A^2 R} \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}$$

CONT. VERG:

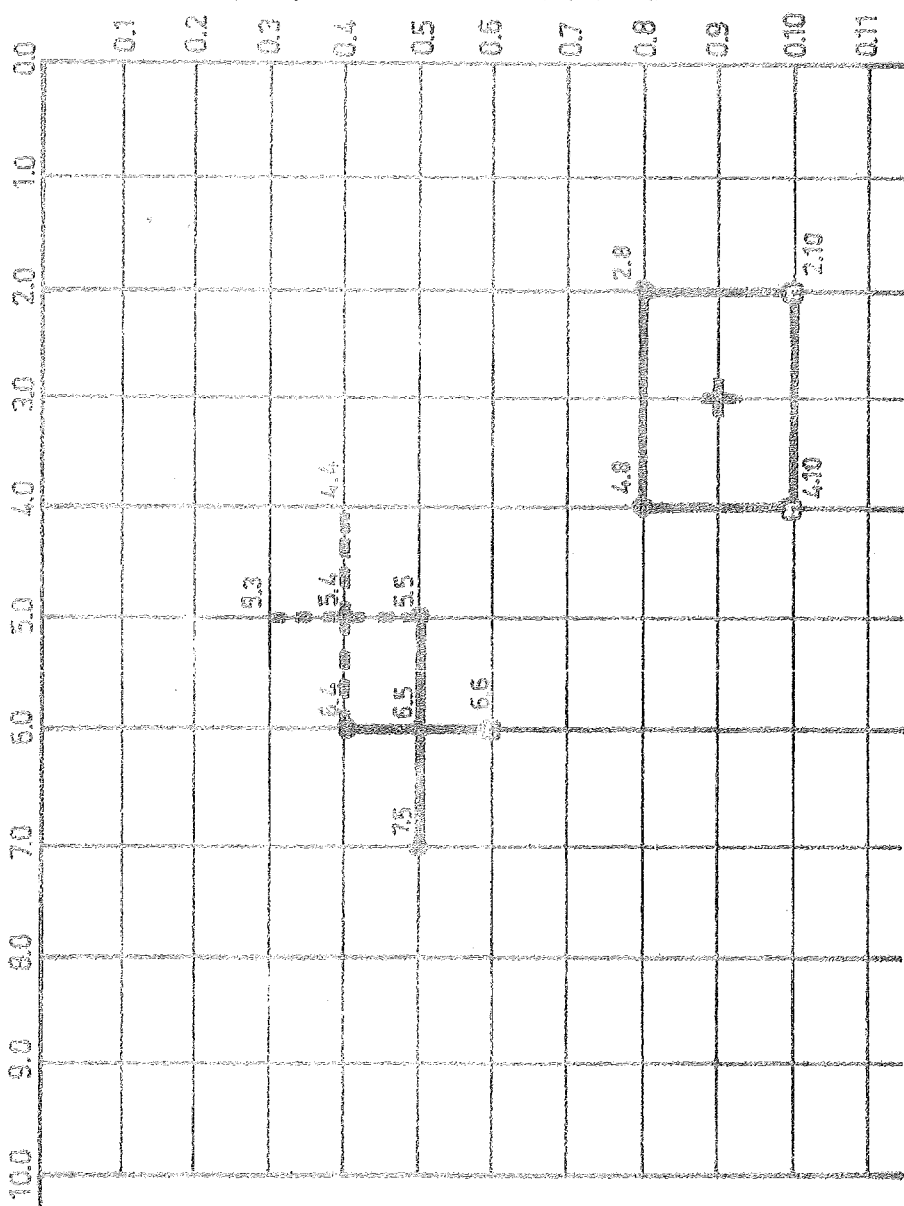
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{b}{9A} \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$h(x,t)$$

$$Q(x,t)$$

$$\Delta t$$

RANDVOORWAARDE Q(0,t)



RANDVOORWAARDE h(10Δx, t)

$$+t$$

Het gaat er om, uitgaande van bekende waarden van h en Q op een aantal tijdstippen, NIEUWE waarden voor h en/of Q te berekenen.

Veronderstelt men nu dat in de punten $(7,5)$, $(5,5)$, $(6,4)$ en $(6,5)$ de benodigde funktiewaarden bekend zijn, dan kan met vergelijking (12) de waarde voor $h(6,6)$ bepaald worden.

Uit vergelijking (12) kan men één nog onbekende waarde op een Δt hoger gelegen tijdsniveau expliciet uitdrukken.

Indien men uitsluitend gebruik maakt van dergelijke expliciete uitdrukkingen dan spreekt men van een EXPLICIETE differentie-methode.

Om het verschil tussen een expliciete en een impliciete differentie-methode duidelijk te maken wordt nogmaals de continuïteitsvergelijking beschouwd.

Voor $\frac{\partial Q}{\partial x}$ in het punt $(3,9)$ kan men bijvoorbeeld schrijven:

$$\frac{Q(4,8) - Q(2,8) + Q(4,10) - Q(2,10)}{2 \approx 2\Delta x}$$

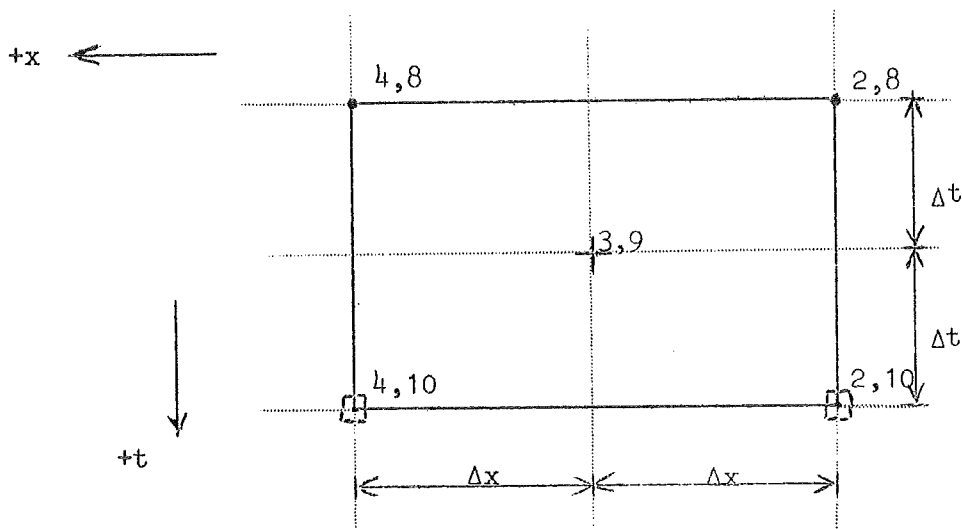
Voor $\frac{\partial h}{\partial t}$ in $(3,9)$ kan men schrijven:

$$\frac{h(2,10) - h(2,8) + h(4,10) - h(4,8)}{2 \approx 2\Delta t}$$

De grootte b wordt voor het punt $(3,9)$ bepaald.

Met bovenstaande differentie-quotienten kan de volgende differentievergelijking worden opgesteld:

$$(13) \frac{Q(4,8) - Q(2,8) + Q(4,10) - Q(2,10)}{4\Delta x} = b(3,9) \frac{h(2,10) - h(2,8) + h(4,10) - h(4,8)}{4\Delta t}$$

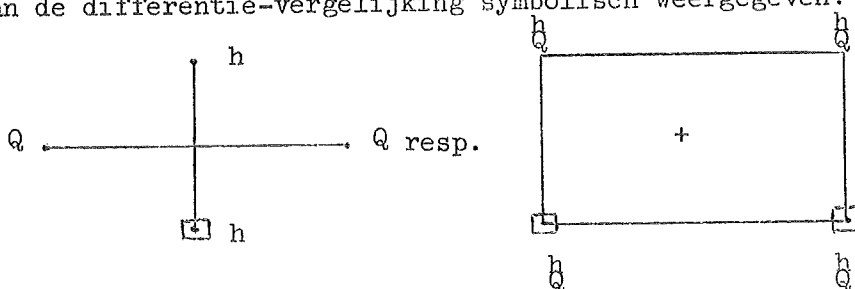


Veronderstelt men nu dat de benodigde functie-waarden in de punten (2,8), (4,8) en (3,9) bekend zijn dan blijken in de vergelijking (13) 4 onbekenden voor te komen:

$Q(4,10)$, $Q(2,10)$, $h(4,10)$ en $h(2,10)$.

Uit de vergelijking (13) volgt een impliciete uitdrukking met 4 onbekenden. Indien men gebruik maakt van dergelijke vergelijkingen spreekt men van een IMPLICIETE differentie-methode.

Onder de vergelijkingen (12) en (13) en in het x/t-diagram is het karakter van de differentie-vergelijking symbolisch weergegeven:



Men gebruikt voor een dergelijk symbool de suggestieve naam REKENMOLECUUL. Bij het bespreken van de verschillende methoden kan van dergelijke symbolen zinvol gebruik worden gemaakt. Daarbij zal uiteraard ook de bewegingsvergelijking (1) in de beschouwingen worden betrokken. Het voorgaande was vooral bedoeld om op overzichtelijke wijze aan te geven dan men bij het opstellen van differentie-vergelijkingen twee principieel verschillende mogelijkheden heeft.

In de volgende paragrafen zal blijken dat de keuze tussen een expliciete of een impliciete methode nogal belangrijk is. Met name voor de organisatie en de uitvoering van de berekeningsmethode is deze keuze van groot belang.

Behalve de bovengenoemde rekenmoleculen, zijn zowel bij een impliciete als bij een expliciete differentie-methode verschillende andere rekenmoleculen denkbaar.

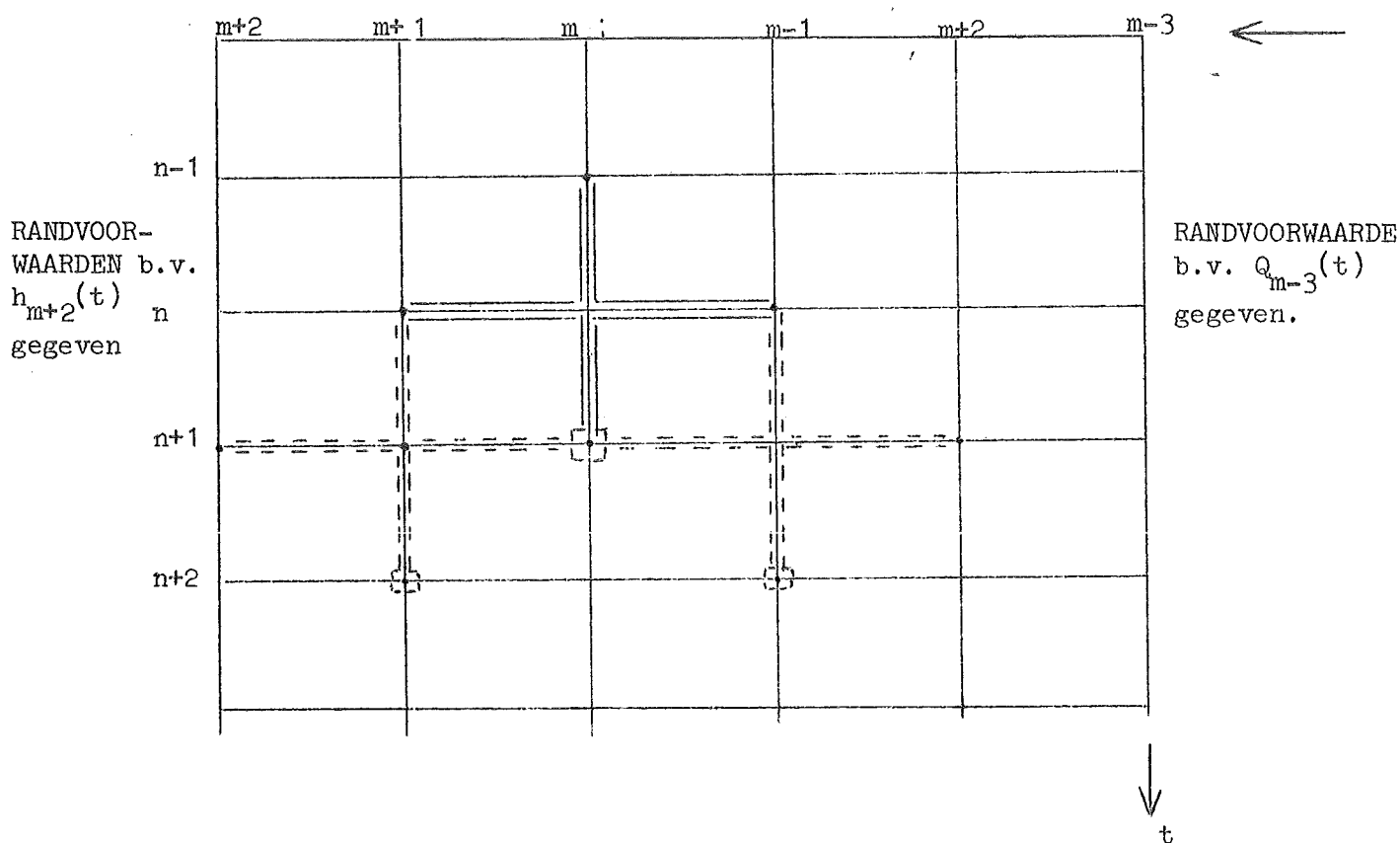
§2. Expliciete differentie-methoden.

In beginsel bestaan er voor een expliciete methode verschillende mogelijkheden. In het volgende wordt alleen gesproken over centrale differentie-benaderingen.

Zoals we reeds in §1 hebben gezien kan men de continuïteitsvergelijking door een differentie-vergelijking vervangen, die de gedaante heeft van vergelijking (12).

Als men gebruik maakt van de notaties in de onderstaande figuur dan kan men algemeen schrijven voor een centraal punt (m,n) :

$$(13) \frac{Q_{m+1}^n - Q_{m-1}^n}{2\Delta x} = -b_m^n \frac{h_m^{n+1} - h_m^{n-1}}{2\Delta t}$$



Zoals ook het rekenmolecuul in de figuur aangeeft is met vergelijking (13) een nieuwe waarde voor h op de plaats $x = m\Delta x$ en op het tijdstip $t = (n+1)\Delta t$ te berekenen.

Voor het opstellen van een differentie-vergelijking voor de bewegingsvergelijking kunnen we b.v. het punt $\{(m+1)\Delta x, (n+1)\Delta t\}$ kiezen als het centrale punt.

We kunnen dan schrijven:

$$(14) \frac{h_{m+2}^{n+1} - h_m^{n+1}}{2\Delta x} = -m_{m+1}^{n+1} \left[\frac{Q_{m+1}^{n+2} - Q_{m+1}^n}{2\Delta t} \right] - w_{m+1}^{n+1} Q_{m+1}^{n+2} \left| Q_{m+1}^n \right| + b_{e_{m+1}}^{n+1} \left[\frac{Q_{m+1}^n + Q_{m+1}^{n+2}}{2} \right] \left[\frac{h_m^{n+1} - h_m^{n-1} + h_{m+2}^{n+1} - h_{m+2}^{n-1}}{4\Delta t} \right]$$

In deze vergelijkingen zijn in verband met de overzichtelijkheid de factoren m , w en b_e ingevoerd. Deze factoren worden steeds bepaald voor waarden van h in het centrale punt.

Met vergelijking (14) kan een nieuwe waarde voor Q op de plaats $x = (m+1)\Delta x$ en op het tijdstip $t = (n+2)\Delta t$ worden berekend.

Opm. 1. Indien men de z.g. Bernoulli-term zou verwaarlozen, dan volgt uit (14) een eenvoudiger expliciete uitdrukking voor Q_{m+1}^{n+2} .

Men kan ook overwegen om de waarde van Q in de "Bernoulli-term" te bepalen in het "oude" punt.

2. Ook in de weerstandsterm zou men i.p.v.

$$Q_{m+1}^{n+2} \left| Q_{m+1}^n \right| \text{ kunnen schrijven } Q_{m+1}^n \left| Q_{m+1}^n \right|$$

Dit blijkt echter in verband met de stabiliteit van het rekenproces wat minder aantrekkelijk te zijn.

De hier besproken expliciete methode maakt het mogelijk om beurtelings een nieuwe h en een nieuwe Q ONAFHANKELIJK te berekenen. Daarbij blijken de punten waarin resp. de h 's en de Q 's zijn gedefinieerd te VERSPRINGEN.

h		h		h	
	Q		Q		Q
h		h		h	
	Q		Q		Q
h		h		h	
	Q		Q		Q

Voor het verkrijgen van een oplossing zijn BEGINVOORWAARDEN en RANDVOORWAARDEN nodig.

Bij het toetsprobleem is langs de ene rand h gegeven voor alle waarden van t , terwijl langs de andere rand Q gegeven is. Omdat de punten met h 's en Q 's ten opzichte van elkaar verspringen, dient men bij het discretiseren in de x -richting rekening te houden met de randvoorwaarden.

Om de berekening op een bepaald tijdstip $t = t_0$ te kunnen starten moet men beschikken over:

- alle waarden voor h op dat tijdstip t_0 ;
- de waarden voor Q op het tijdstip $t_0 + \Delta t$.

Omdat men meestal niet over deze waarden beschikt wordt een of andere schatting gemaakt. De fouten t.g.v. de ingevoerde schattingen voor de beginvoorwaarden dempen uit in de tijd t.g.v. de weerstand (INSPEEL-PERIODE). Aan het toepassen van een expliciete differentie-methode gebaseerd op het hierboven besproken principe wordt een apart kollege gewijd. Voor nadere gegevens wordt verwezen naar dat kollege en het stencil dat daarbij wordt uitgereikt:

"Expliciete (Leap frog) Methode, programma CHERIE".

In dit diktaat wordt verder aandacht besteed aan een impliciete differentie-methode, die is ontwikkeld bij de Waterloopkundige Afdeling van de Deltadienst van de Rijkswaterstaat.

§3 Impliciete differentie-methoden.

Evenals bij de expliciete differentie-methoden kunnen ook bij impliciete differentie-methoden verschillende differentie-schema's worden gebruikt. Een overzicht van verschillende mogelijkheden vindt men in de publikatie: "Tidal computations for rivers, coastal areas and seas", Dr. J.J. Dronkers, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, Journal of the Hydraulics Division, januari 1969.

In het volgende zal worden uitgegaan van het in dat artikel voorkomende z.g. 3e impliciete schema. Het bijzondere van dat impliciete schema is dat h en Q op dezelfde plaats berekend worden.

Een gevolg hiervan is dat de lengte van verschillende op elkaar aansluitende vakken nogal willekeurig kan variëren. Dit is een voordeel, omdat daardoor een grotere vrijheid bestaat bij het schematiseren van riviergedeelten met sterk variërende dwarsprofielen.

Op een splitsingspunt waar n riviertakken samen komen moet bij het hier besproken schema op het splitsingspunt voldaan worden aan de voorwaarden:

$$\sum_{i=1}^n Q_i = 0 \quad \text{en} \quad h_1 = h_2 = h_3 = \dots = h_n$$

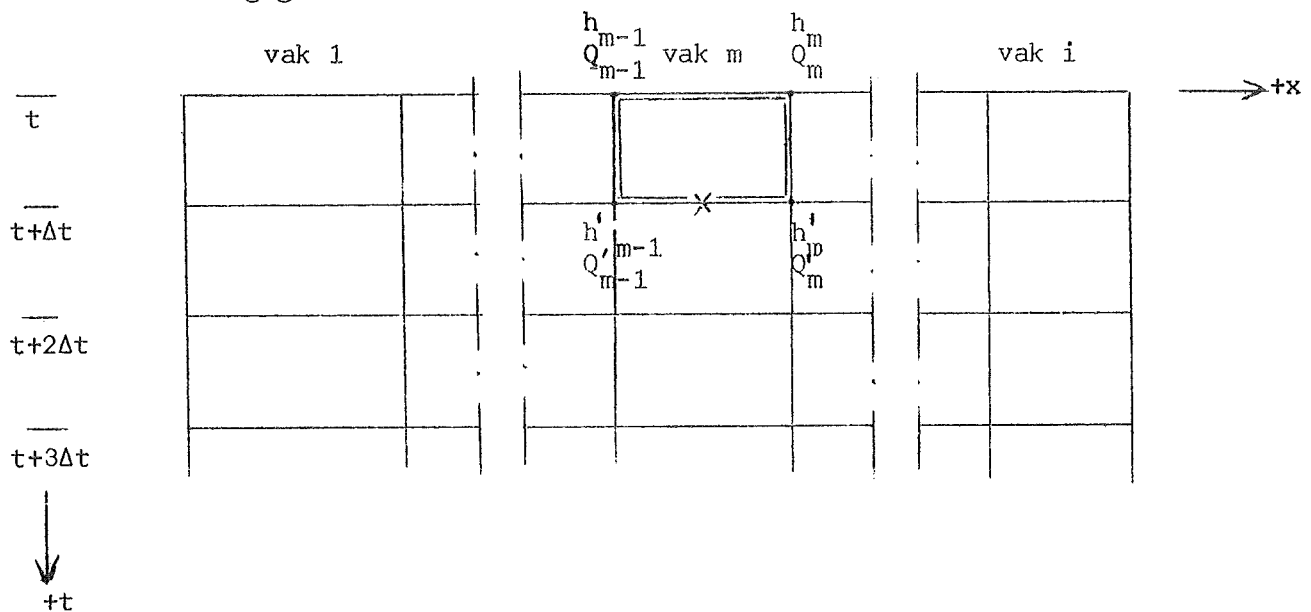
Uitgegaan wordt van de bewegingsvergelijking en de continuïteitsvergelijking in de volgende gedaanten:

$$(1) \quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = - \frac{1}{gA} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} - \frac{|Q|Q}{C^2 A^2 a_r} - \frac{2Q}{gA^2} \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$(2) \quad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = -b \frac{\partial h(x,t)}{\partial t}$$

Beschouwd wordt weer een onvertakte rivier (een tak uit een netwerk).

In onderstaande figuur is een rekenmolucuuil voor het hier te bespreken schema aangegeven.



Voor een willekeurig vak m kan voor de bewegingsvergelijking (1) in het door een kruisje aangegeven punt worden geschreven:

$$(3) \quad \frac{\partial h(x,t+\Delta t)}{\partial x} = - \frac{1}{gA(x,t+\Delta t)} \frac{\partial Q(x,t+\Delta t)}{\partial t} - \frac{|Q(x,t+\Delta t)|Q(x,t+\Delta t)}{C^2 A^2(x,t+\Delta t) a_r(x,t+\Delta t)} - \frac{2Q(x,t+\Delta t)}{gA^2(x,t+\Delta t)} \frac{\partial Q(x,t+\Delta t)}{\partial x}$$

Indien deze vergelijking over het vak m wordt geïntegreerd:

$$(4) \quad \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{\partial h(x,t+\Delta t)}{\partial x} dx = - \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{1}{gA(x,t+\Delta t)} \frac{\partial Q(x,t+\Delta t)}{\partial t} dx +$$

$$- \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{Q(x,t+\Delta t) Q(x,t+\Delta t)}{C^2 A^2(x,t+\Delta t) a_r(x,t+\Delta t)} dx - \int_{x_{m-1}}^{x_m} \frac{2Q(x,t+\Delta t)}{gA^2(x,t+\Delta t)} \frac{\partial Q(x,t+\Delta t)}{\partial x} dx$$

Als men nu de z.g. middelwaardestelling toepast wordt gevonden:

$$(5) \quad h(x_m, t+\Delta t) - h(x_{m-1}, t+\Delta t) = - \frac{1}{gA(x, t+\Delta t)} \frac{\partial \bar{Q}(x, t+\Delta t)}{\partial t} \Delta x_m + \\ - \frac{|\bar{Q}(x, t+\Delta t)|}{(C^2 A^2 a_r)_{x, t+\Delta t}} \bar{Q}(x, t+\Delta t) \Delta x_m - \frac{1}{gA^2(x, t+\Delta t)} \{Q^2(x_m, t+\Delta t) - Q^2(x_{m-1}, t+\Delta t)\}$$

Een horizontaal streepje boven een variabele duidt aan dat de gemiddelde waarde over het beschouwde vak moet worden genomen. Het differentiaal-quotiënt in de traagheidsterm wordt als volgt vervangen door een differentie-quotiënt:

$$(6) \quad \frac{\partial \bar{Q}(x, t+\Delta t)}{\partial t} = \frac{\{Q(x_{m-1}, t+\Delta t) - Q(x_{m-1}, t)\} + \{Q(x_m, t+\Delta t) - Q(x_m, t)\}}{2\Delta t}$$

Wordt nu een variabele op een hoger tijdsniveau $t+\Delta t$, aangeduid door een accent en wordt de plaats aangegeven met een index, dan gaat (5) na (6) over in:

$$(7) \quad h'_m - h'_{m-1} = - \frac{\Delta x_m}{gA'_m} \left\{ \frac{(Q'_{m-1} + Q'_m) - (Q_{m-1} + Q_m)}{2\Delta t} \right\} - \frac{\Delta x_m}{(C^2 A^2 a_r)'_m} \frac{|Q'_{m-1} + Q'_m| (Q'_{m-1} + Q'_m)}{4} + \\ - \frac{1}{gA'^2_m} (Q'_{m-1} + Q'_m)(Q'_m - Q'_{m-1}), \quad \begin{array}{l} \text{De } Q' \text{ (potloodaccent) wordt later vervangen door } Q, \\ \text{dit om overal lineaire termen te krijgen} \end{array}$$

of na enige omwerking:

$$(8) \quad h'_m - h'_{m-1} + (Q'_{m-1} + Q'_m) \left\{ \frac{\Delta x_m}{2\Delta t} \frac{1}{gA'_m} + \frac{\Delta x_m}{4(C^2 A^2 a_r)'_m} |Q'_{m-1} + Q'_m| + \right. \\ \left. \frac{1}{gA'^2_m} (Q'_m - Q'_{m-1}) \right\} - \frac{\Delta x_m}{2\Delta t} \frac{1}{gA'_m} (Q_{m-1} + Q_m) = 0$$

De termen tussen de accoladen worden nu tezamen aangeduid met α_m . Als men in deze termen inderdaad waarden voor Q op het nieuwe tijdstip neemt dan heeft men te maken met ingewikkelde niet-lineaire vergelijkingen. Neemt men echter voor het bepalen van α_m (bekende) waarden op het oude tijdstip dan wordt vergelijking (8) een lineaire vergelijking.

Opm.: Men kan ná een eerste berekening voor een bepaalde tijdstap Δt , een tweede berekening uitvoeren waarbij wel met de NIEUWE waarden in α_m wordt gerekend (iteratie). Hierna wordt verondersteld dat dit, gezien de kleine tijdstap, niet nodig is.

Gedefinieerd wordt:

$$(9) \quad \alpha_m = \frac{\Delta x_m}{2\Delta t} \frac{1}{gA_m} + \frac{\Delta x_m}{4(C^2 A^2 a_r)_m} |Q_{m-1} + Q_m| + \frac{1}{gA_m^2} (Q_m - Q_{m-1})$$

Vervolgens wordt besloten de volgende faktor eveneens met waarden op het oude tijdstip te bepalen:

$$(10) \quad \beta_m = \frac{\Delta x_m}{2\Delta t} \frac{1}{gA_m} (Q_m + Q_{m-1})$$

Voor verg. (8) kan dan worden geschreven:

$$(11) \quad h'_m - h'_{m-1} + \alpha_m Q'_m + \alpha_m Q'_{m-1} = \beta_m$$

Op overeenkomstige wijze wordt nu de continuïteitsvergelijking omge-
werkt tot een differentie-vergelijking. Hiervoor kan achtereenvolgens
worden geschreven:

$$Q'_m - Q'_{m-1} = - \bar{b}' \Delta x_m \frac{\partial \bar{h}'_m}{\partial t} \quad \text{of}$$

$$Q'_m - Q'_{m-1} = - \frac{\bar{b}' \Delta x_m}{2} \frac{\partial (h'_m + h'_{m-1})}{\partial t} \quad \text{of}$$

$$Q'_m - Q'_{m-1} = - \frac{\bar{b}' \Delta x_m}{2} \frac{h'_m - h_m + h'_{m-1} - h_{m-1}}{\Delta t} \quad \text{of}$$

$$Q'_m - Q'_{m-1} = - \frac{\bar{b}' \Delta x_m}{2\Delta t} \left\{ h'_m + h'_{m-1} \right\} + \frac{\bar{b}' \Delta x_m}{2\Delta t} \left\{ h_m + h_{m-1} \right\}$$

Neem nu de coëfficiënt $\frac{\bar{b}' \Delta x_m}{2\Delta t}$ op het oude tijdstip en noem

$$(12) \quad \gamma_m = \frac{\bar{b}' \Delta x_m}{2\Delta t} \quad \text{en stel verder:}$$

$$(13) \quad \delta_m = \gamma_m (h_m + h_{m-1})$$

Voor de continuïteitsvergelijking kan dan worden geschreven:

$$(14) \quad Q'_m - Q'_{m-1} + \gamma_m h'_m + \gamma_m h'_{m-1} = \delta_m$$

In deze paragraaf zijn twee differentie-vergelijkingen afgeleid, die in een algemene eenvoudige gedaante worden weergegeven door (11) en (14).

In deze vergelijkingen komen de grootheden α_m , β_m , γ_m en δ_m voor, die steeds zijn te bepalen met resp. de uitdrukkingen (9), (10), (12) en (13).

In het volgende zal eenvoudigheidshalve met de vergelijkingen (11) en (14) verder worden gewerkt.

§ 4. Berekeningen voor een onvertakte rivier bestaande uit i vakken

Een onvertakt gedeelte van een rivier zal worden geschematiseerd tot een bepaald aantal (i) vakken met een beperkte lengte. Voor elk vak is in het voorgaande een stelsel vergelijkingen (11) en (14) afgeleid.

Voor de achtereenvolgende vakken ($m=1$ t/m $m=i$) kunnen dus i stel vergelijkingen worden opgesteld:

$$\begin{array}{lcl}
 (15) & h_1' - h_0' + \alpha_1 Q_1' + \alpha_1 Q_0' = \beta_1 & \\
 (16) & \gamma_1 h_1' + \gamma_1 h_0' + Q_1' - Q_0' = \delta_1 & \left. \begin{array}{l} \text{voor vak 1} \end{array} \right\} \\
 (17) & h_2' - h_1' + \alpha_2 Q_2' + \alpha_2 Q_1' = \beta_2 & \\
 (18) & \gamma_2 h_2' + \gamma_2 h_1' + Q_2' - Q_1' = \delta_2 & \left. \begin{array}{l} \text{voor vak 2} \end{array} \right\} \\
 & \vdots & \\
 (19) & h_m' - h_{m-1}' + \alpha_m Q_m' + \alpha_m Q_{m-1}' = \beta_m & \\
 (20) & \gamma_m h_m' + \gamma_m h_{m-1}' + Q_m' - Q_{m-1}' = \delta_m & \left. \begin{array}{l} \text{voor het } m^{\text{e}} \text{ vak} \end{array} \right\} \\
 & \vdots & \\
 (21) & h_i' - h_{i-1}' + \alpha_i Q_i' + \alpha_i Q_{i-1}' = \beta_i & \\
 (22) & \gamma_i h_i' + \gamma_i h_{i-1}' + Q_i' - Q_{i-1}' = \delta_i & \left. \begin{array}{l} \text{voor het laatste vak} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

De gezochte oplossing van een probleem wordt behalve door het bovenstaande stelsel van i maal 2 vergelijkingen bepaald door:

- beginvoorwaarden en door
- randvoorwaarden.

Wat betreft de noodzakelijke randvoorwaarden zal in het onderstaande worden verondersteld dat op één van beide randen (bij vak 1) $h(t)$ en op de andere rand (bij vak i) de funktie $Q(t)$ bekend is.

In het beschouwde geval van een onvertakte rivier kan voor alle tussengelegen vakgrenzen worden gesteld:

$$\begin{array}{c}
 h_l = h_r \\
 \hline
 Q_l = Q_r
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 h_{\text{links}} = h_{\text{rechts}} \\
 Q_{\text{links}} = Q_{\text{rechts}}
 \end{array}$$

Uit het bovenstaande volgt dat voor i vakken het aantal onbekenden bedraagt: $(i-1)2 + (4-2) = 2i$. Het is dus mogelijk om met de bovenstaande $2i$ vergelijkingen een oplossing te vinden.

Als we nu gaan kijken naar het laatste vak, dus voor $m=i$, dan geeft de uitdrukking (26) een vergelijking, waarin voorkomen h'_0 en Q'_i .

Zoals hier wordt verondersteld, zijn deze grootheden (de voor alle waarden van t bekende randvoorwaarden) gegeven.

Het is dan dus mogelijk om h'_i te bepalen.

Omdat nu alle grootheden in het rechter lid van de uitdrukking (25) bekend zijn, kunnen we vervolgens Q'_{i-1} bepalen.

Als we daarna de uitdrukkingen voor het $(i-1)^e$ vak beschouwen, kunnen we met de gevonden waarden voor h'_i en Q'_{i-1} achtereenvolgens h'_{i-1} en Q'_{i-2} bepalen. Enz. Enz.

Op deze wijze worden dus voor een nieuw tijdstip alle waterstanden h' en alle debieten Q' op de verschillende vakgrenzen bekend.

Uiteraard moeten daarbij steeds de factoren p_m , q_m , r_m , a_m , b_m , c_m en d_m worden berekend. Voor deze factoren zullen hierna recurrente betrekkingen worden afgeleid.

Bij de hier gevolgde oplossingsmethode wordt uitgegaan van een bekende waarde op één der randen en daarbij door eliminatie en substitutie, met behulp van de twee vergelijkingen per vak, naar de andere rand toe gewerkt.

Daarna wordt de op de rand gegeven waarde ingevoerd, waarna in de tegengestelde richting van vakgrens naar vakgrens wordt gewerkt.

Aan dit facet dankt deze methode de naam "double sweep methode".

Voor het afleiden van recurrente betrekkingen voor de factoren uit de vergelijkingen (25) en (26) keren we terug naar de verg. (19) en (20) voor een vak met volgnummer m .

Uit verg. (19) volgt voor Q'_{m-1} :

$$(27) \quad Q'_{m-1} = \frac{1}{\alpha_m} h'_{m-1} - \frac{1}{\alpha_m} h'_m - Q'_m + \frac{\beta_m}{\alpha_m}$$

Uit verg. (26) volgt voor het $(m-1)^e$ vak:

$$(28) \quad h'_{m-1} = r_{m-1} Q'_{m-1} + c_{m-1} h'_0 + d_{m-1}$$

Als we de uitdrukking voor Q'_{m-1} (27) beschouwen dan vinden we na het substitueren van de uitdrukking (28):

$$Q'_{m-1} = \frac{r_{m-1}}{\alpha_m} Q'_{m-1} + \frac{c_{m-1}}{\alpha_m} h'_0 + \frac{d_{m-1}}{\alpha_m} - \frac{h'_m}{\alpha_m} - Q'_m + \frac{\beta_m}{\alpha_m}$$

Hieruit volgt:

Door in de vergelijking (20) voor de grootheid h'_{m-1} de uitdrukking (28) te substitueren vinden we :

$$\gamma_m h'_m + \gamma_m (r_{m-1} Q'_{m-1} + c_{m-1} h'_o + d_{m-1}) + Q'_m - Q'_{m-1} - \delta_m = 0 \quad \text{of}$$

$$Q'_{m-1} (1 - \gamma_m r_{m-1}) = \gamma_m h'_m + Q'_m + \gamma_m c_{m-1} h'_o + \gamma_m d_{m-1} - \delta_m$$

Hieruit volgt:

$$Q'_{m-1} = \frac{\gamma_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}} h'_m + \frac{Q'_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}} + \frac{\gamma_m c_{m-1} h'_o}{1 - \gamma_m r_{m-1}} + \frac{\gamma_m d_{m-1} - \delta_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}}$$

Substitutie van de uitdrukking voor Q'_{m-1} volgens (25) levert:

$$p_m h'_m + q_m Q'_m + a_m h'_o + b_m = \frac{\gamma_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}} h'_m + \frac{Q'_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}} + \frac{\gamma_m c_{m-1} h'_o}{1 - \gamma_m r_{m-1}} + \frac{\gamma_m d_{m-1} - \delta_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}}$$

Na enige bewerking volgt uit bovenstaande betrekking:

$$h'_m = \frac{\frac{1}{1 - \gamma_m r_{m-1}} - q_m}{p_m - \frac{\gamma_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}}} Q'_m + \frac{\frac{\gamma_m c_{m-1}}{1 - \gamma_m r_{m-1}} - a_m}{p_m - \frac{\gamma_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}}} h'_o + \frac{\frac{\gamma_m d_{m-1} - \delta_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}} - b_m}{p_m - \frac{\gamma_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}}}$$

Deze laatste uitdrukking voor h'_m moet nu identiek zijn aan de reeds eerder gestelde uitdrukking (26) voor h'_m .

Hieruit volgt:

$$r_m = \frac{\frac{1}{1 - \gamma_m r_{m-1}} - q_m}{p_m - \frac{\gamma_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}}}$$

$$c_m = \frac{\frac{\gamma_m c_{m-1}}{1 - \gamma_m r_{m-1}} - a_m}{p_m - \frac{\gamma_m}{1 - \gamma_m r_{m-1}}}$$

$$q_1 = -1$$

$$Y_1 = 1$$

$$a_1 = \frac{1}{\alpha_1}$$

$$r_1 = - \frac{2}{\gamma_1 + \frac{1}{\alpha_1}}$$

$$b_1 = \frac{\beta_1}{\alpha_1}$$

$$c_1 = \frac{\frac{1}{\alpha_1} - \gamma_1}{\frac{1}{\alpha_1} + \gamma_1}$$

$$d_1 = \frac{\frac{\beta_1}{\alpha_1} + \delta_1}{1 + \frac{1}{\alpha_1}}$$

De berekening kan nu dus gestart worden.

Voor $m=1$ blijken de recurrente betrekkingen voor de factoren uitdrukkingen te geven, die geheel overeenkomen met de factoren in de vergelijkingen (23) en (24). Dit is een controle voor de juistheid van de hierboven afgeleide recurrente betrekkingen.

uitdrukkingen (25) en (26) van blz. 15;
de uitdrukkingen voor de verschillende grootheden, die
in §4 zijn gedefinieerd.

rechts - de waarden voor de vaklengte Δx , de stroomvoerende
breedte b_s , de diepte t.o.v. N.A.P. a_{NAP} en de koëff.
C voor de 5 vakken.

Opm. -De bergende breedte b is voor de 5 vakken gegeven als funktie van
de waterstand h in de vorm van een tabel op de bijlage 3.

-Omdat bij het beschouwde probleem sprake is van een onvertakte ri-
vier bestaande uit 5 vakken, zal m achtereenvolgens de waarde
1,2,3,4 en 5 krijgen.

Bij de uitvoering van deze berekeningen is de positieve x-as gekozen in
de richting van de vloedstroom d.w.z. van Krimpen ^a/d Lek naar Hagestein.
Bij de eerder besproken oplossingen was de pos. x-as juist in de andere
richting (ebstroom) positief gesteld. Bij het beschouwen van de resultaten
moet hiermee rekening worden gehouden.

Op de bovenste helft van de bijlage 2 zijn de resultaten van de verschil-
lende bewerkingen weergegeven.

In de bovenste tabel zijn voor de vakken 1 t/m 5 vermeld :

de vaklengte Δx ;
de stroomvoerende breedte b_s ;
de diepte t.o.v. N.A.P. a_{NAP} ;
de waterstanden op de vakgrenzen h_m en voorts
 h_{gem} , a , A , a_r , C en b_x ;
de waarden voor het debiet t.p.v. de vakgrenzen Q_m , terwijl
in de overige kolommen de waarden worden vermeld, die voor
de aangegeven grootheden kunnen worden berekend.

De waarden voor h_m en Q_m zijn de waterstanden en de debieten op de vak-
grenzen op het oude tijdstip dus voor $t = 5.00$ uur.

In de volgende tabel zijn eerst de waarden voor de grootheden
 α_m , β_m , γ_m en δ_m vermeld , die met de nu bekende grootheden kunnen
worden berekend (zie de desbetreffende uitdrukkingen).

Vervolgens worden de waarden vermeld , die kunnen worden berekend voor
de verschillende koëfficiënten uit de vergelijkingen (1) en (2).

Voor het laatste vak ($m = 5$) vinden we voor de vergelijking (2) de uitdrukking:

$$Q_4' = p_5 h_5' + a_5 Q_5' + a_5 h_5' + b_5$$

waaruit Q_4' nu direkt kan worden berekend.

Indien vervolgens de vergelijking (2) voor vak 4 wordt opgesteld:

$$h_4' = r_4 Q_4' + c_4 h_0' + d_4$$

dan kan nu de waarde voor h_4' worden bepaald.

Op deze wijze voortgaande kunnen achtereenvolgs worden berekend :

Q_3' en h_3' , Q_2' en h_2' , Q_1' en h_1' en tenslotte Q_0' zijnde het debiet aan de mond in Krimpen a/d Lek.

Zoals hierboven kort is beschreven kunnen de waterstanden en de debieten op de vakgrenzen worden berekend uitgaande van :

- de bekende waarden op het oude tijdstip ($t = 5.00$ uur)
- de bekende randvoorwaarden (Q_5' en h_0')

Indien deze berekeningen nu voor elk tijdstip achtereenvolgens worden uitgevoerd, dan vindt men stap voor stap de gezochte oplossing.

Omdat de tijdstappen Δt betrekkelijk klein moeten worden gekozen is de totale hoeveelheid rekenwerk groot, zodat men gebruik moet maken van een rekenmachine. Zoals reeds is opgemerkt bestaan hiervoor in de praktijk computer-programma's.

De resultaten van de bovenbedoelde (met de hand uitgevoerde) berekeningen zijn ingetekend op de bijlage 1. Bij het uitzetten van de waarden voor de debieten is rekening gehouden met de gekozen positieve x-richting. Vergelijkt men de resultaten met de reeds eerder verkregen resultaten volgens de z.g. Exakte Methode , dan blijkt er een goede overeenkomst te bestaan. Omdat de BEGINVOORWAARDEN kennelijk vrij "exakt" bekend waren, is er geen sprake van een z.g. INSPEEL-VERSCHIJNSEL.

EXPLICIETE (LEAPFROG) METHODE

programma CHERIE

In dit hoofdstuk wordt uitgegaan van de lange-golfvergelijking waarin de term $\frac{2b}{A} Q \frac{\partial h}{\partial t}$ is verwaarloosd, zodat:

$$(1) \quad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + gA \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} + g \frac{|Q(x,t)| Q(x,t)}{C^2 A a_r} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{1}{b} \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} = 0$$

§ 1. Discretiseren in x-richting

Eerst wordt de discretisering in x-richting bekeken; het valt op dat in de vergelijking waarin $\partial Q/\partial t$ voorkomt, h naar x wordt gedifferentieerd en in de vergelijking waarin $\partial h/\partial t$ voorkomt, alleen $\partial Q/\partial x$ voorkomt. Men kan de afgeleiden naar x, zoals bekend, aldus voorstellen:

$$(3) \quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \approx \frac{h(x+\Delta x,t) - h(x-\Delta x,t)}{2\Delta x},$$

$$(4) \quad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} \approx \frac{Q(x+\Delta x,t) - Q(x-\Delta x,t)}{2\Delta x}$$

Substitutie hiervan in de vergelijkingen (1) en (2) geeft:

$$(5) \quad \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} + gA \frac{h(x+\Delta x,t) - h(x-\Delta x,t)}{2\Delta x} + g \frac{|Q(x,t)| Q(x,t)}{C^2 A a_r} = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} + \frac{Q(x+\Delta x,t) - Q(x-\Delta x,t)}{2b\Delta x} = 0$$

Onze partiële differentiaalvergelijkingen (1) en (2) zijn hiermee omgezet in stelsels van gewone differentiaalvergelijkingen; zij stellen voor de verandering van de toestand in een punt onder invloed van de toestand in naburige punten. Bij deze vergelijkingen behoort een schematisatie waarbij h en Q in verschillende punten worden berekend. De h-punten kan men beschouwen als vakgrenzen, en de Q-punten als middens van vakken. Nieuwe waarden van h worden berekend met de gediscretiseerde continuïteitsverg. (6) en van Q met de gediscretiseerde bewegingsverg. (5).

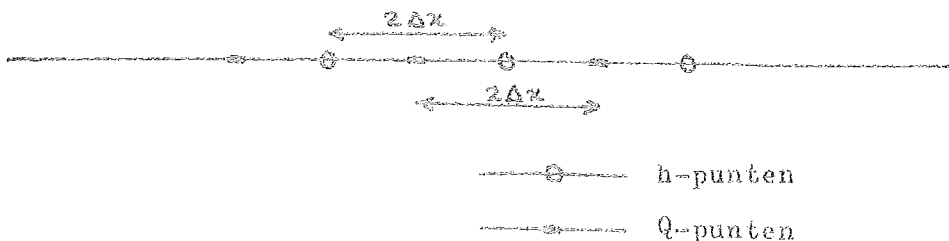


Fig. 1

Nu komt de vraag op, hoe men in dit schema een splitsingspunt moet behandelen. Het splitsingspunt zou men kunnen laten samenvallen met een Q-punt, maar dan komt men in moeilijkheden, want men kan in een splitsingspunt niet één Q definiëren; met b kan dat wel, en daarom legt men bij de schematisatie h-punten in de splitsingspunten; in feite is dit één van de eerste dingen die men bij de schematisatie moet doen.

Vergelijking (5) kunnen we dan gewoon blijven gebruiken, waarbij een Q-punt steeds midden tussen twee h-punten in ligt. Vergelijking (6) is in deze vorm in een knooppunt niet zonder meer bruikbaar. Herschrijf (6) nu tot

$$(7) \quad \frac{\partial h(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{2b \Delta x} \{ Q(x-\Delta x, t) - Q(x+\Delta x, t) \}$$

Fysisch kunnen we deze vergelijking eenvoudig interpreteren; als h het representatieve peil van een vak met kombergingsoppervlak $2b \cdot \Delta x$ is, $Q(x-\Delta x, t)$ het instromende debiet, en $Q(x+\Delta x, t)$ het uitstromende debiet, dan is $\partial h / \partial t$ de resulterende waterstandsverhoging. Dit principe is gemakkelijk te generaliseren. Als we de Q naar een knooppunt toe positioneel stellen, en als we met B het bergend oppervlak (zie fig. 2 en 3) behorende bij het knooppunt aanduiden, dan geldt:

$$(8) \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{B} \sum Q.$$

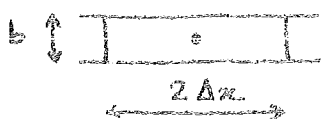


Fig. 2

$$B = 2b \Delta x.$$

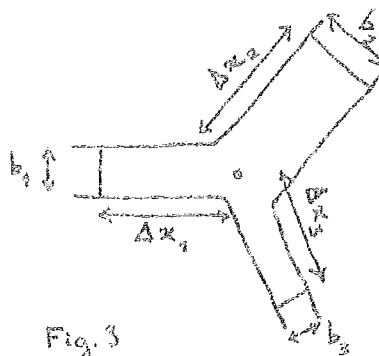


Fig. 3

$$B = b_1 \Delta x_1 + b_2 \Delta x_2 + b_3 \Delta x_3$$

In plaats van over Q-punten kunnen we beter over (middens van) takken spreken, omdat een Q-punt altijd tussen twee h-punten ligt. We kunnen dan zeggen dat een tak twee h-punten verbindt. De h-punten zullen we vaak knooppunten noemen, ook al is het aantal takken dat in het knooppunt tesamen komt, slechts twee. De knooppunten en takken vormen samen een netwerk; de eenvoudigste manier om de structuur van een dergelijk netwerk vast te leggen is door te vermelden welke twee knooppunten elke tak verbindt.

Een volgend probleem vormen de randvoorwaarden. Als in een randpunt de h is gegeven (als functie van de tijd), dan wordt de h in dit punt niet berekend uit (8), en dan is er verder geen probleem; als ergens een Q als randvoorwaarde gegeven is, dan moet ter plaatse een tak worden aangebracht waarin Q gegeven is en waarin Q dus niet met (5) berekend wordt. Als deze gegeven Q steeds 0 is, dan hoeft geen tak te worden aangebracht, omdat de bijdrage in verg. (8) toch steeds 0 is. Als voorbeeld nemen we een getijberekening in het gebied Zijpe-Volkerak. Aan de Oosterschelde is het vertikaal getij gegeven (punt 1); bij de Volkerak-dam wordt een gegeven debiet in het systeem ingelaten (tak 6); in de Eendracht is een wantij aanwezig, hier is $Q=0$ gesteld; in dit wantij wordt geen tak gelegd om de hierboven aangegeven reden. Bij de schematisatie zal men het eerst knooppunten leggen in het splitsingspunt en bij de randvoorwaarde (resp. de punten 2 en 1).

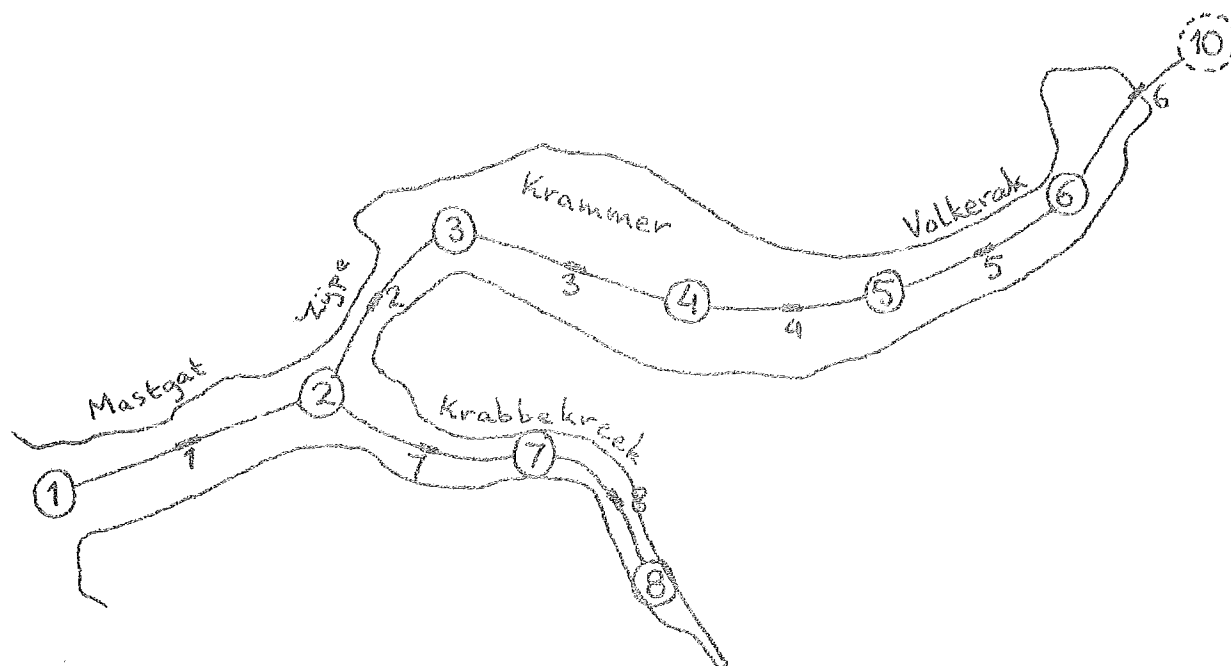


Fig. 4

Het netwerk van fig. 4 wordt door het volgende vastgelegd:

tak 1 verbindt de knooppunten 1 en 2

2	2	3
3	3	4
4	4	5
5	5	6
6	6	10 hierin is Q gegeven
7	2	7
8	7	8

Voor de punten 2,3,4,5,6,7,8 moet het bergend oppervlak gegeven worden; voor de takken 1,2,3,4,5,7,8 moeten profielgegevens opgegeven worden, waaruit A en a_r (afhankelijk van de waterstand) berekend kunnen worden; verder moeten van deze takken de lengten (d.i. $2\Delta x$) en de weerstandscoefficienten opgegeven worden.

Punt 10 bestaat alleen formeel; dit punt wordt door de computer genegeerd, d.w.z. dat er in dit punt geen h wordt berekend; voor het vinden van de Q in tak 6 geeft dit geen probleem omdat de Q daar toch gegeven is.

Bij de vakgroep Vloeistofmechanica is een programma, *CHERIE* geheten, ontwikkeld, dat op de hiervoor vermelde principes gebaseerd is. Ten aanzien van het teken van Q is hierin de volgende afspraak gemaakt: een Q wordt positief gesteld, als hij van het als eerste genoemde naar het als tweede genoemde knooppunt loopt; in het voorbeeld Zijpe-Volkerak is dus de vloedstroom positief; in het later uitvoeriger te behandelen voorbeeld van de Lek is het juist andersom gekozen. De gebruiker van het *CHERIE*-programma legt dus zelf de tekenafspraken vast door de volgorde waarin hij de knooppunten noemt.

§ 2. Bergende oppervlakken en lengten van takken

Bij de schematisatie moet het totale bergende oppervlak verdeeld worden over de knooppunten. Bij elk knooppunt telt het gedeelte van het wateroppervlak mee, behorende bij de helft van de aangrenzende takken. Het is van belang dat elk h -punt ongeveer in het midden van zijn bergend oppervlak ligt; er is bij de opstelling van vergelijking (6) immers vanuit gegaan dat h halverwege tussen de Q 's lag. Daarom is in het voorbeeld Zijpe-Volkerak het punt 8 ook niet ter plaatse van het wantij gelegd, maar midden in zijn kombergingsgebied.

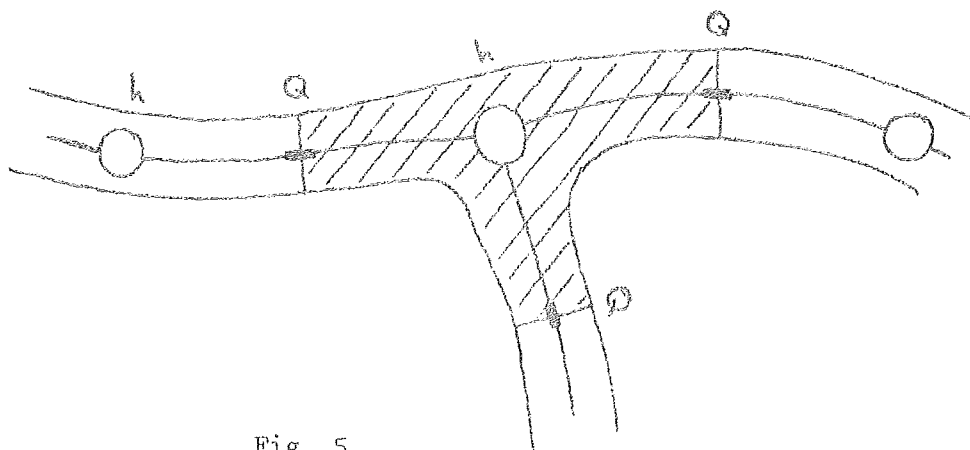


Fig. 5

De Q's in de takken worden berekend juist op de grenzen van de bergende oppervlakken. Bij vergelijking (5) is ervan uitgegaan dat het Q-punt halverwege tussen twee h-punten lag en dus moet het Q-punt ongeveer halverwege de tak liggen. Samen met het reeds vermelde vereiste w.b. de h-punten leidt dit ertoe dat de lengten van de takken ten naaste bij constant zouden moeten zijn, of in elk geval bij voorkeur niet sprongsgewijs zouden moeten veranderen. Houdt men zich daar niet aan, dan gaat de nauwkeurigheid achteruit, doch verder zijn hierdoor geen desastreuze gevolgen te verwachten. In het algemeen is het verstandig door variatie van de vaklengten de gevoeligheid van de oplossing te bekijken.

§ 3. Discretiseren in de tijd

Over discretiseren in de tijd is in de vorige paragrafen nog niet gesproken. Hiervoor zijn twee veelgebruikte methoden: h en Q op dezelfde en op verschillende tijdstippen. De tweede is eenvoudiger, in het geval van een onvertakte rivier ziet het rekenschema er in het x-t-vlak aldus uit:

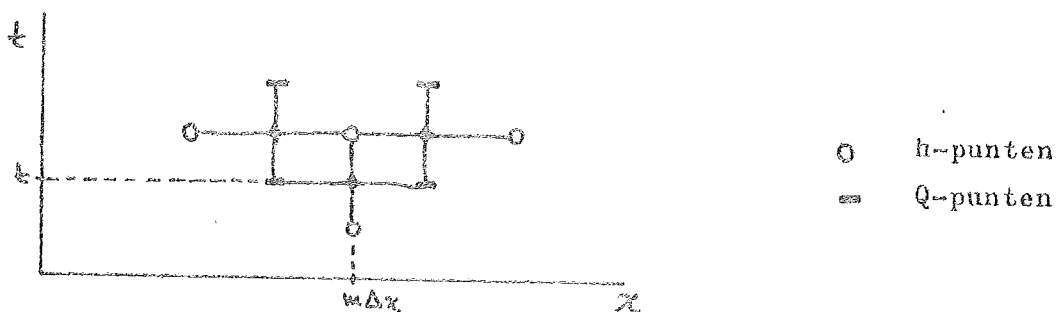


Fig. 6

Nieuwe waarden van h worden berekend m.b.v.

$$(9) \quad h(m\Delta x, t+\Delta t) = h(m\Delta x, t-\Delta t) + \frac{2\Delta t}{2b(m\Delta x, t) \cdot \Delta x} \left\{ Q((m-1)\Delta x, t) - Q((m+1)\Delta x, t) \right\},$$

of om het algemener te krijgen voor een splitsingspunt

$$(10) \quad h(m, t+\Delta t) = h(m, t-\Delta t) + \frac{2\Delta t}{B(m, t)} \sum Q(\dots, t).$$

Nu stelt m het nummer van het knooppunt voor, waarin de h berekend wordt. Uit deze formule kan de nieuwe waarde van h direct berekend worden; we hebben dus te maken met een expliciete methode.

Q wordt direct berekend uit

$$(11) \quad Q(m\Delta x, t+\Delta t) = Q(m\Delta x, t-\Delta t) + \frac{gA(m\Delta x, t)}{2\Delta x} \left\{ h((m-1)\Delta x, t) - h((m+1)\Delta x, t) \right\} - \frac{2g\Delta t}{C^2 A(m\Delta x, t) a_r(m\Delta x, t)} |Q(m\Delta x, t-\Delta t)| Q(m\Delta x, t+\Delta t).$$

Als men de methode kiest waarbij h en Q op dezelfde tijdstippen worden genomen, dan veranderen de vergelijkingen in zoverre dat men voor de afgeleiden naar x niet meer één differentiekotiënt neemt, maar het gemiddelde van twee. B.v. $\partial h / \partial x$ stelt men voor door

$$(12) \quad \frac{1}{2} \frac{h((m+1)\Delta x, t) + h((m+1)\Delta x, t+\Delta t) - h((m-1)\Delta x, t) - h((m-1)\Delta x, t+\Delta t)}{2\Delta x}.$$

$\partial Q / \partial t$ wordt in dit schema voorgesteld door

$$(13) \quad \frac{Q(\frac{1}{2}m\Delta x, t+\Delta t) - Q(\frac{1}{2}m\Delta x, t)}{\Delta t}.$$

Computerprogramma's die op het laatstgenoemde rekenschema zijn gebaseerd, zijn ontwikkeld o.a. bij het Waterloopkundig Laboratorium en bij de International Courses.

In de vergelijkingen die bij gebruik van dit rekenschema ontstaan, komen meer dan één onbekende per vergelijking voor; het zijn dus impliciete vergelijkingen. Het principe van verschillende impliciete methoden is elders behandeld.

In het college b73B wordt een impliciete methode, die bij Rijkswaterstaat wordt toegepast, nader uitgewerkt.

Het reeds eerder genoemde programma CHERIE werkt daarentegen met het expliciete schema. De tijdstap waarmee CHERIE werkt, komt overeen met $2\Delta t$ uit de formules (10) en (11); noem even $\Delta t_c = 2\Delta t$.

Zoals gezegd, moet de gebruiker van CHERIE opgeven, welke twee knooppunten door elke tak worden verbonden. Neem aan dat tak nr. m van knooppunt k_1 naar knooppunt k_2 loopt; dan zal, als tak m een rivier- of kanaal-sectie is, de nieuwe Q in deze tak berekend worden uit

$$(14) \quad Q(m, t+\Delta t_c) = Q(m, t) + gA_m \Delta t_c \frac{h(k_1, t+\frac{\Delta t_c}{2}) - h(k_2, t+\frac{\Delta t_c}{2})}{l} - \frac{g\Delta t_c}{C^2 A_m a_r(m)} |Q(m, t)| Q(m, t+\Delta t_c).$$

Er kunnen ook takken zijn waar Q gegeven is, of waar Q volgens een ander voorschrift wordt berekend (b.v. als de tak een overlaat bevat). Bij de berekening van de waterstandsveranderingen zou men kunnen nagaan welke takken op het betreffende punt uitkomen en de Q 's in deze takken sommeren. Dit is wat omslachtig en het is ook niet nodig. Als we de ΣQ in elk knooppunt k voorstellen als S_k ; dan dienen we vooraf alle $S_k = 0$ stellen en daarna als we een Q_m berekend hebben, stellen

$$(15) \quad \begin{aligned} S_{k1} &:= S_{k1} - Q(u) \\ S_{k2} &:= S_{k2} + Q(u) \end{aligned}$$

Als dit voor elke tak gedaan is, kan de verandering van h_k berekend worden uit

$$(16) \quad h(k, t + \frac{3}{2} \Delta t_c) = h(k, t + \frac{1}{2} \Delta t_c) + \frac{\Delta t_c}{B_k} S_k,$$

tenzij in het betreffende punt de h gegeven is.

Uiteraard kent CHERIE nog wel enkele variaties binnen dit raam.

B_k kan constant zijn, of een gegeven functie van $h(k)$.

Voor A en a_r geldt dat gewoonlijk $a_r = d+h$, waarin d de diepte beneden het referentievlak is; en dat $A = b_s a_r$, waarin b_s een constante is.

Echter, ook A en a_r kunnen een of andere gegeven functie van h zijn.

§ 4. Nadelen van de expliciete methode

Nadelen van de expliciete methode en dus ook van CHERIE zijn:

- opnemen van de term $v \frac{\partial v}{\partial x}$ is niet op eenvoudige wijze te realiseren (dit is in CHERIE ook niet gebeurd)

- als Δt te groot gekozen wordt, dan wordt de methode "instabiel".

De uitkomsten vertonen dan het volgende beeld:

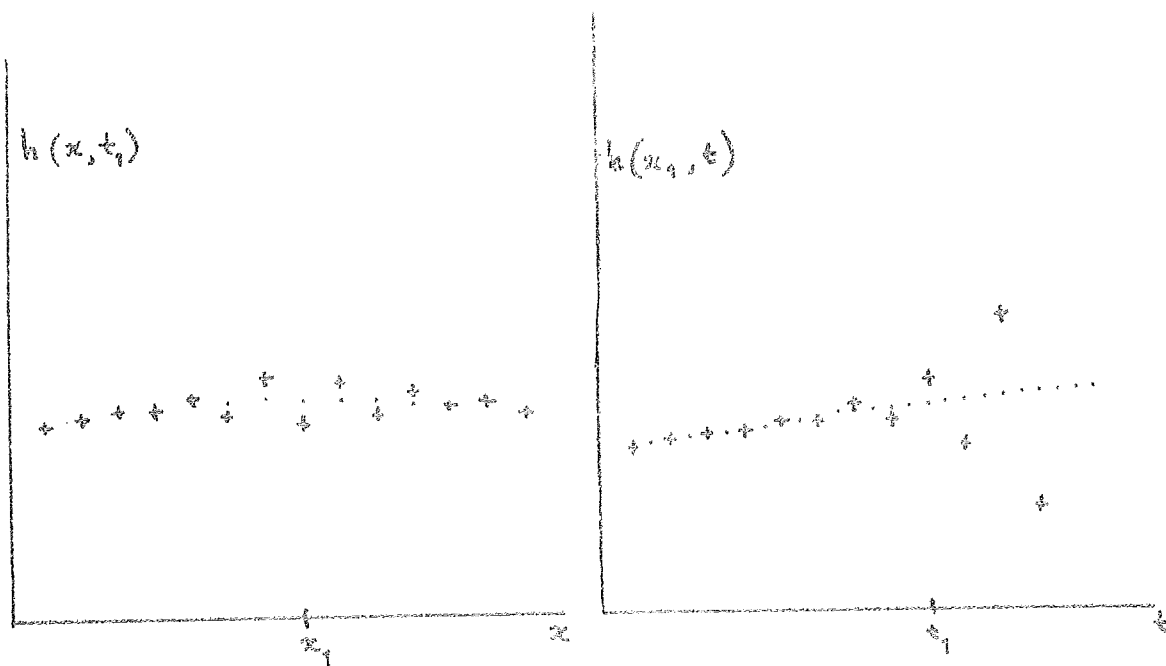


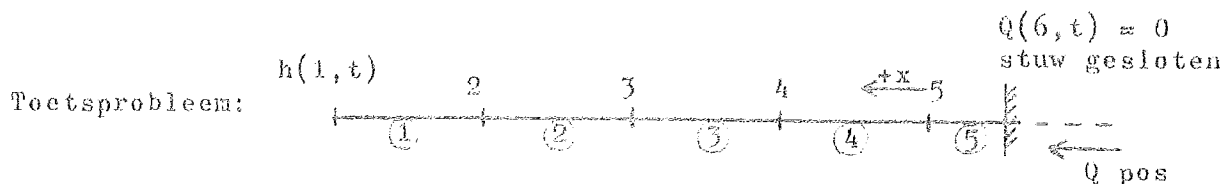
Fig. 7 + grote tijdstap: instabiel gedrag

. kleine tijdstap: stabiel gedrag

De methode is stabiel zolang $\Delta t < \frac{\Delta x}{\sqrt{gA/b}}$ wordt gekozen.

Toepassing Expliciete Differentie-methode

Programma CHERIE



Gegevens : rivier de Lek van Krimpen ^a/d Lek tot Hagestein (stuw)

De rekenrichting komt overeen met de +x-richting, dat is de richting waarin het debiet Q positief gesteld wordt.

Gekozen schalen : hoogten $N_h = 1 \text{ m}$
lengten $N_l = 1000 \text{ m}$
breedten $N_b = N_{b_s} = 100 \text{ m}$
wrijvingsfaktor $N_f = 10^{-3}$

vak	van punt	naar punt	vaklengte	$A_s = b_s a_0$	b_s	$r = \frac{g}{C^2}$
1	2	1	8,965	14,04	2,77	4
2	3	2	8,975	10,06	2,15	4
3	4	3	10,995	7,61	1,87	4
4	5	4	10,395	5,81	1,67	4
5	over dit laatste (halve) vak wordt geen verval berekend					

Verloop van de kombergingsoppervlakte B met de waterstand h :

h t.o.v. N.A.P.	PUNT	2	3	4	5
- 1.00		24.18	22.46	21.71	15.88
- 0.50		24.99	23.43	22.89	16.81
0.00		25.93	24.53	24.17	17.66
0.50		27.08	25.76	25.45	18.51
1.00		28.68	27.32	26.90	19.63
1.50		30.29	28.88	28.87	21.22
2.00		36.23	34.76	33.77	25.19

TECHNISCHE HOGESCHOOL

Afdeling der

WEG- en WATERBOUWKUNDE

Vloeistofmechanica

Schriftelijk tentamen b 73^A "Lange Golven A"

maandag 28 april van 9.00 tot 12.00 uur

De uit te werken vraagstukken 1,2, en 3 hebben resp. het "gewicht" 10,8,9, zodat wordt aangeraden aan ieder vraagstuk ongeveer even veel tijd te besteden.

Bij de beoordeling zal worden gelet op een goede systematische aanpak en een overzichtelijke uitwerking van de vraagstukken.

Indien bij de uitwerking bepaalde veronderstellingen worden gedaan, dan moeten deze duidelijk worden vermeld.

Geef waar nodig een beknopt commentaar en geef duidelijk aan, waarom een bepaalde veronderstelling toelaatbaar is.

Tijdens het tentamen mag een vooraf beschikbaar gesteld formuleblad worden geraadpleegd, waarop ook eigen aantekeningen mogen voorkomen.

N.B. <u>Voor ieder vraagstuk dient een APART dubbel vel papier te worden gebruikt, voorzien van NAAM en STAMNUMMER.</u>

ENIGE GEGEVENS t.b.v. HET TOEPASSEN VAN DE HARMONISCHE METHODE

$$\begin{cases} \sinh (P + Qi) = \sinh P \cos Q + i \cosh P \sin Q \\ \cosh (P + Qi) = \cosh P \cos Q + i \sinh P \sin Q \end{cases}$$

$$-\sinh^2 R + \cosh^2 R = 1$$

$$\begin{cases} \sinh Qi = i \sin Q \\ \cosh Qi = \cos Q \end{cases}$$

T A B E L

x	cos x	sin x	tg x	e ^x	e ^{-x}
0	1	0	0	1	1
0,1	0,995	0,100	0,100	1,105	0,905
0,2	0,980	0,199	0,203	1,221	0,819
0,3	0,955	0,296	0,309	1,350	0,741
0,4	0,921	0,389	0,423	1,492	0,670
0,5	0,878	0,479	0,546	1,649	0,607
0,6	0,825	0,565	0,684	1,822	0,549
0,7	0,765	0,644	0,842	2,014	0,497
0,8	0,697	0,717	1,030	2,226	0,449
0,9	0,622	0,783	1,260	2,460	0,407
1,0	0,540	0,841	1,557	2,718	0,368
1,1	0,454	0,891	1,965	3,004	0,333
1,2	0,362	0,932	2,572	3,320	0,301
1,3	0,268	0,964	3,602	3,669	0,273
1,4	0,170	0,985	5,798	4,055	0,247
1,5	0,071	0,997	14,101	4,482	0,223
1,6	-0,029	1,000	-34,233	4,953	0,202
1,7	-0,129	0,992	-7,697	5,474	0,183
1,8	-0,227	0,974	-4,286	6,050	0,165
1,9	-0,323	0,946	-2,927	6,686	0,150
2,0	-0,416	0,909	-2,185	7,389	0,135
2,1	-0,505	0,863	-1,710	8,166	0,122
2,2	-0,589	0,809	-1,374	9,025	0,111
2,3	-0,666	0,746	-1,119	9,974	0,100
2,4	-0,737	0,675	-0,916	11,023	0,091
2,5	-0,801	0,598	-0,747	12,182	0,082
2,6	-0,857	0,516	-0,602	13,464	0,074
2,7	-0,904	0,427	-0,473	14,880	0,067
2,8	-0,942	0,335	-0,356	16,445	0,061
2,9	-0,971	0,239	-0,246	18,174	0,055
3,0	-0,990	0,141	-0,143	20,086	0,050
3,1	-0,999	0,042	-0,042	22,198	0,045
3,14	-1	0	0	23,141	0,043
3,2	-0,998	-0,058	0,058	24,533	0,041
3,3	-0,987	-0,158	0,160	27,113	0,037
3,4	-0,967	-0,256	0,264	29,964	0,033
3,5	-0,936	-0,351	0,375	33,115	0,030
3,6	-0,897	-0,443	0,493	36,598	0,027

Vraagstuk 1

In dit vraagstuk wordt onder de punten A t/m D naar enige details gevraagd van enkele verschillende lange-golfproblemen.

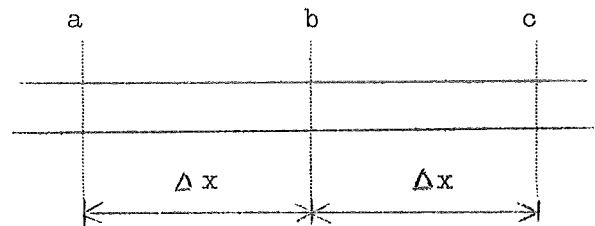
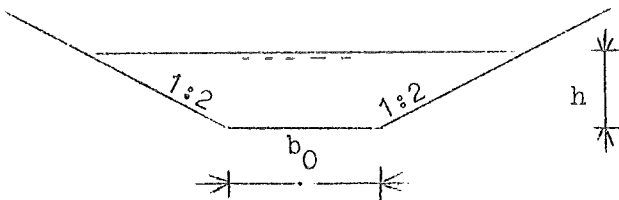
Verzocht wordt om op elke subvraag een kort antwoord te geven, zonodig voorzien van een kort commentaar.

- A. Van een prismatische open leiding heeft het dwarsprofiel de vorm van een trapezium (zie fig.). De bodem ligt in het horizontale vlak en heeft een breedte b_0 . De helling van de taluds is 1:2.

In deze leiding plant zich een periodieke lange golf voort.

De dichtheid van de vloeistof is konstant : $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$.

Er is geen zijdelingse toe- of afvoer.



- 1.1 Leidt m.b.v. een duidelijke schets de continuïteitsvergelijking af die specifiek is voor deze open leiding.

- 1.2 In deze leiding worden de drie raaien a, b en c beschouwd, op onderlinge afstanden Δx (gemeten langs de as van de leiding).

Geef een uitdrukking voor het verschil tussen de debieten in de raaien a en c : $Q_c(t) - Q_a(t)$ (tekens duidelijk aangeven).

- B. Een tweetal benadering ^{en} voor een hoogwatergolf wordt in de literatuur aangeduid met resp.

I - Kinematic wave theory, en

II - Diffusion analogy.

- 1.3 Op welke veronderstelling berust het verschil tussen de onder I en II bedoelde benaderingen?

- 1.4 Geef zonder afleiding een relatie tussen de "voortplantingssnelheid van een hoogwatergolf" en de gemiddelde snelheid in het stroomvoerend dwarsprofiel.

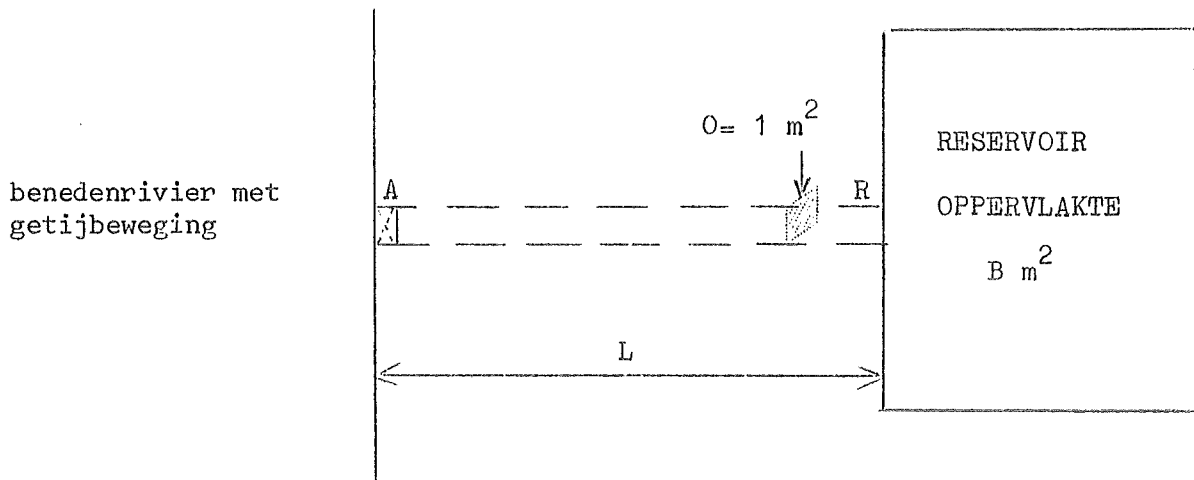
- C. Beschouwd wordt een translatie-golf met een relatief steil front, waarvan de hoogte η relatief klein is t.o.v. de waterdiepte h_0 .

- 1.5 Geef een uitdrukking voor de voortplantingssnelheid van een dergelijke golf in een open leiding met een rechthoekig dwarsprofiel, indien het water vóór de golf in rust is.

- 1.6 Wat is het verband tussen de hoogte van een zich onvervormd voortplantend golffront en het daarbij optredende debiet?

(vervolg vraagstuk 1)

- D. Een horizontale gesloten betonnen leiding vormt de verbinding tussen een benedenrivier en een reservoir met een kombergingsoppervlak van $B \text{ m}^2$ (zie fig).



Van de leiding is gegeven:

- de oppervlakte van het (vierkante) dwarsprofiel : $0 = 1 \text{ m}^2$;
- de lengte, $L = 400 \text{ m}$;
- de coëff. van Chézy, $C = 40 \text{ m}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$.

De afsluiter bij A is geopend zodat de getijbeweging in het reservoir kan doordringen. Vertragingsverliezen aan de beide einden van de leiding mogen worden verwaarloosd. De voortplantingssnelheid van een eventuele drukgolf in de leiding mag oneindig groot worden verondersteld.

Van de functies $h_A(t)$, $h_R(t)$ en $v_A(t)$ is gegeven:

tijdstip	h_A	h_R	v in de leiding bij A, in m/s
2 uur	0,30 m	0,11 m	0,43
2 uur 20 min	0,34 m	0,14 m	0,45
2 uur 40 min	0,38 m	0,17 m	0,47

Verondersteld wordt dat de functies tussen de genoemde tijdstippen lineair verlopen.

- 1.7 Toon aan dat het verval ($h_A - h_R$) op het tijdstip $t = 2 \text{ uur } 20 \text{ min.}$ in overeenstemming is met de waarden uit de tabel.
- 1.8 Bepaal de grootte van het oppervlak B van het reservoir.

(zie verder blz. 3)

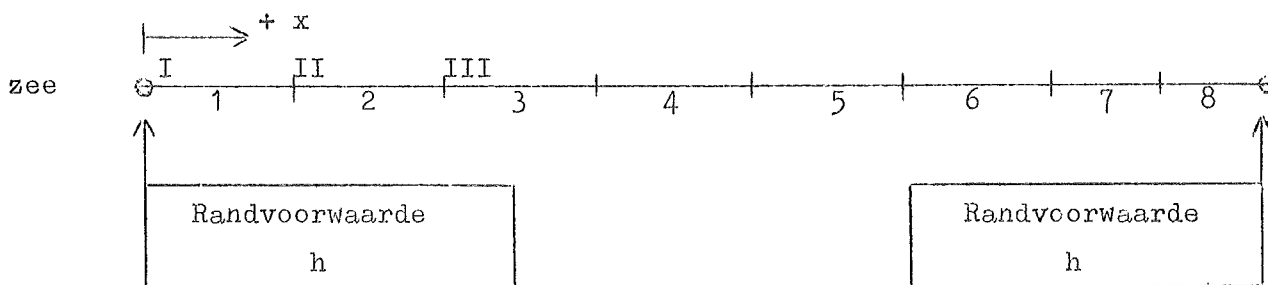
Vraagstuk 2

Bij het analyseren van meetresultaten blijkt, dat in een rivier zoals de Westerschelde b.v. een vrij sterke vervorming van de getijgolf plaats vindt.

3.1 Geef in enkele zinnen een verklaring voor dit verschijnsel.

Een gedeelte van een dergelijke rivier wordt geschematiseerd tot een overtakte leiding bestaande uit 8 vakken (zie schema). Toegepast is de z.g. enkelvoudige harmonische methode, waarbij de berekeningen enkele malen achtereen werden uitgevoerd.

3.2 Geef kort aan wat de oorzaak is van het feit dat deze berekeningsmethode het karakter heeft van een iteratieproces.



De berekeningen zijn uitgevoerd voor een dubbeldaags getij met een periode $T = 44700$ seconden.

In het volgende worden eerst enkele resultaten van de uitgevoerde berekeningen wat nader beschouwd.

Punt I: Randvoorwaarde aan de zeezijde, $h_I(t)$, gegeven:

$$h_I(t) = \hat{h}_I \cos(\omega t - \kappa_I) \text{ met } \hat{h}_I = 1,80 \text{ m en } \kappa_I = 0.$$

Uit de berekening volgt:

$$Q_I(t) = \hat{Q}_I \cos(\omega t - \phi_I),$$

$$\text{waarbij } \hat{Q}_I = 68\,000 \text{ m}^3/\text{s en } \phi_I = 2\pi - 0,96 = 5,32 \text{ radialen.}$$

Op de vakgrens II zijn berekend:

$$\hat{h}_{II} = 1,73 \text{ m en } \kappa_{II} = 0,30 \text{ radialen};$$

$$\hat{Q}_{II} = 59\,000 \text{ m}^3/\text{s en } \phi_{II} = 2\pi - 0,89 = 5,39 \text{ radialen}$$

De complexe funkties voor h_I en Q_I zijn berekend als resp.

$$h_{cI} = 1,800 + 0i, \text{ en}$$

$$Q_{cI} = 39\,000 + 55\,500i$$

3.3 Bepaal de complexe funkties voor h_{II} en Q_{II} .

(zie verder blz. 4)

(vervolg vraagstuk 2)

3.4 Van het eerste vak zijn de volgende gegevens bekend :

vaklengte : 10 000 m ;

de bergende breedte is gelijk aan de stroomvoerende breedte :

$$b = b_s = 4000 \text{ m} ;$$

de gem. diepte is gelijk aan $h_{\text{gem.}} = 12,00 \text{ m}$.

Bereken, uitgaande van de hierboven gegeven funkties h_I en Q_I ,
de funktie Q_{II} , als wordt verondersteld dat in het relatief diepe
vak de weerstand mag worden verwaarloosd.

Voor de twee laatste sub-vragen wordt verondersteld dat men overweegt
om t.p.v. vakgrens II in de rivier een afsluiting te maken. Ook nu mag
de weerstand worden verwaarloosd.

Beschouwd worden sinusvormige golven, die zich vanuit zee voortplanten
in het bekken dat ná de afsluiting ontstaat.

De periode van een dergelijk golf kan verschillende waarden hebben.

3.5 Voor welke perioden zou de z.g. opslingerfaktor groter zijn dan 1 ?

3.6 Voor welke perioden zou er sprake zijn van volledige resonantie ?

(voor vraagstuk 3, zie blz. 5)

Vraagstuk 3

T.b.v. een ontwerp voor een stormvloedkering in de monding van de Oosterschelde zijn onder meer berekeningen nodig betreffende translatiegolven veroorzaakt door het openen en sluiten van de kering.

De gegevens voor dit vraagstuk zijn ontleend aan een bepaalde berekening ; zij zijn enigszins aangepast om eenvoudige controleberekeningen mogelijk te maken.

Gegeven :

Het bekken is geschematiseerd tot 5 vakken, waarvan alle afmetingen precies gelijk zijn.

De totale lengte bedraagt 5 maal 8000 m : $L = 40\ 000$ m.

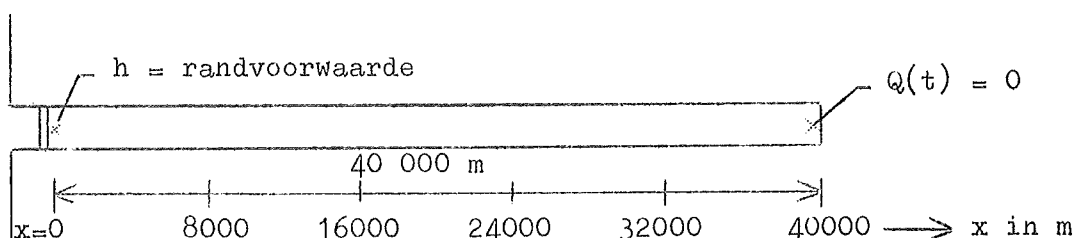
De stroomvoerende breedte wordt gelijk gesteld aan de bergende breedte:

$$b = b_s = 10\ 000 \text{ m.}$$

Bij het uitvoeren van de berekeningen volgens de methode "Integratie m.b.t. Karakteristieken" mag voor het berekenen van de karakteristieke richtingen worden aangenomen dat de diepte konstant is $d = 10$ m, en

$$\text{de gem. snelheid klein is t.o.v. } \sqrt{g d} = 10 \text{ m/s.}$$

De weerstand mag geheel buiten beschouwing blijven.



De controleberekening wordt uitgevoerd vanaf het tijdstip $t = t_0 = 0$ seconden; op dit tijdstip $t = 0$ is bekend :

plaats in m	Q in m^3/s	h in m t.o.v. N.A.P.
$x = 0$	60 000	+ 0,20
$x = 8000$	50 000	+ 0,15
$x = 16000$	40 000	+ 0,05
$x = 24000$	30 000	- 0,05
$x = 32000$	15 000	- 0,10
$x = 40000$	0	- 0,15

Vanaf het tijdstip $t = 800$ s wordt de kering op de plaats $x = 0$ gesloten.

(zie verder blz. 6)

(vervolg vraagstuk 3)

Gegeven is op de plaats $x = 0$ het verloop van h in m ten opzichte van N.A.P.:

tijd $t =$	0 s	$h = + 0,20$ m
	$t = 800$ s	$h = + 0,25$ m
	$t = 1600$ s	$h = - 0,20$ m
	$t = 2400$ s	$h = - 0,35$ m

Om de uitvoering van de berekeningen niet te tijdrovend te maken zijn op de bijlage reeds een z.g. Q, h -diagram en een x, t -diagram getekend. In het x, t -diagram is een aantal discrete punten voorzien van een code: 12.4 is het punt $x = 12\ 000$ m , $t = 400$ seconden.

Men dient van de bijlage gebruik te maken en deze voorzien van naam en stamnummer met het overige werk in te leveren.

Gevraagd:

- 2.1 Bereken de toestand in de punten welke in het x, t -diagram zijn aangegeven. Geef daarbij (in een lijst) de volgorde van berekening aan. Geef tevens duidelijk aan welke randvoorwaarden en beginvoorwaarden worden ingevoerd.
- 2.2 Geef vervolgens het verloop in de tijd van de functies h en Q op de volgende plaatsen:

$$x = 0 \text{ m}$$

$$x = 4000 \text{ m}$$

$$x = 8000 \text{ m.}$$

- 2.3 Geef een korte interpretatie van de gevonden resultaten voor de nu volgende punten in het x, t -diagram:

$$x = 4000 \text{ m , } t = 1200 \text{ s ;}$$

$$x = 12000 \text{ m , } t = 1200 \text{ s ;}$$

$$x = 4000 \text{ m , } t = 2000 \text{ s .}$$

- 2.4 Geef in maximaal 2 zinnen duidelijk aan hoe de toestand in een volgend punt, met name

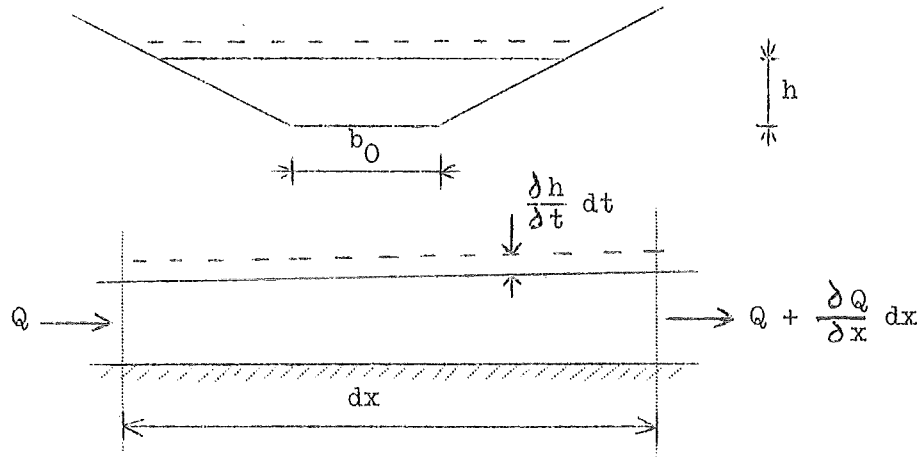
$$x = 4000 \text{ m , } t = 2800 \text{ s}$$

kan worden berekend.

(Telegramstijl; zie verder collegediktaat)

Vraagstuk 1

A. 1.1



De bergende breedte $b = b_0 + 4 h$

Massa-balans geeft:

$$- \rho \frac{\partial Q}{\partial x} dx dt = + \rho b \frac{\partial h}{\partial t} dt dx \Rightarrow \boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} = - (b_0 + 4 h) \frac{\partial h}{\partial t}}$$

$$1.2 \quad Q_c(t) - Q_a(t) = \int_{x_a}^{x_c} - (b_0 + 4 h) \frac{\partial h}{\partial t} dx$$

$$Q_c(t) - Q_a(t) \approx - \left[(b_0 + 4 h) \frac{\partial h}{\partial t} \right] * 2 \Delta x .$$

in punt b

B. 1.3 kinematic wave: verondersteld $\frac{\partial h}{\partial x} \ll i_b$;

diffusion analogy: $\frac{\partial h}{\partial x}$ wordt wel verdisconteerd.

$$1.4 \text{ hoogwatergolf: } c \approx 1,5 \frac{b}{b} \bar{v}$$

C. 1.5 $\eta \ll h_0 \quad c = \sqrt{gh_0}$

$$1.6 \quad \Delta Q = b c \eta$$

D. 1.7 Gesloten leiding, $c = \infty$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$,
bewegingsvergelijking:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{v|v|}{C_R^2}$$

Integreren van A naar R geeft:

$$h_R - h_A = - \frac{L}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - L g \frac{v|v|}{C_R^2}$$

Op het tijdstip $t = 2$ uur 20 min is $\frac{\partial v}{\partial t} \approx \frac{0,04}{2400} = 0,17 \cdot 10^{-4}$

De bijdrage van de traagheidsterm is dus

$$(h)_{tr} = - \frac{400}{10} 0,17 \cdot 10^{-4} \approx - 0,001 \text{ m}$$

De bijdrage van de weerstandsterm is : $R = \frac{A}{0} = \frac{1}{4} \text{ m}$

$$- L \frac{v v}{C_R^2} = - \frac{400 (0,45)^2}{(40)^2 \frac{1}{4}} = - 0,203 \text{ m}$$

Het verval $h_R - h_A = - 0,204 \approx - 0,20 \text{ m}$ is juist.

1.8 Bij R geldt $Q = + B \frac{\partial h}{\partial t}$

Op het tijdstip $t = 2$ uur 20 min is

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx + \frac{0,06}{2400} = 0,25 \cdot 10^{-4} \text{ m/s en } Q = 0,45 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{Dus } B \text{ is } \frac{0,45}{0,25 \cdot 10^{-4}} = \underline{\underline{1,8 \cdot 10^4 \text{ m}^2}}$$

Vraagstuk 2

- 3.1 Niet-lineaire termen veroorzaken vervorming, hetgeen kan worden geïnterpreteerd als het genereren van z.g. hoger-harmonischen (zie college-diktaat).
- 3.2 Het lineariseren van de termen in de D.V.n heeft tot gevolg dat men gegevens van de oplossing nodig heeft voor een berekening (zie college-diktaat).

3.3 h_{cII} reële deel : $\hat{h}_{II} \cos (-0,3 \text{ rad}) = 1,73 * 0,955 = 1,65$
 imag. deel : $\hat{h}_{II} \sin (-0,3 \text{ rad}) = 1,73 * -0,296 = -0,51$
 Q_{cII} reële deel : $\hat{Q}_{II} \cos (+0,89 \text{ rad}) = 59000 * 0,630 = 37200$
 imag. deel : $\hat{Q}_{II} \sin (+0,89 \text{ rad}) = 59000 * 0,776 = 45800$

$h_{cII} = 1,65 - 0,51 i \quad ; \quad Q_{cII} = 37200 + 45800 i$

- 3.4 Als de weerstand(ten onrechte) wordt verwaarloosd, wordt de berekening van Q_{II} vereenvoudigd:

$$p = 0, \quad q = \omega \sqrt{m b}, \quad rL = i q L.$$

$$q = \omega \sqrt{m b} = 1,405 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{1}{10 \cdot 12,00}} = 0,13 \cdot 10^{-4}$$

$$rL = i q L = i \cdot 0,13 \cdot 10^{-4} * 10^4 = \underline{\underline{0,13 i}}$$

Vakkonstanten N_v en O_v :

$$N_v = -\frac{b \omega i}{r} \sinh r L = -\frac{b \omega}{q} i \sin q L =$$

$$= \frac{-4000 * 1,405 \cdot 10^{-4}}{0,13 \cdot 10^{-4}} i \sin 0,13 = \underline{\underline{-5620 i}}$$

$$O_v = L_v = \cosh i q L = \cos q L = \cos 0,13 = \underline{\underline{0,99}}$$

$$Q_{cII} = N_v h_{cI} + O_v Q_{cI}$$

$$= -5620 i (1,800 + 0 i) + 0,99 (39000 + 55500 i)$$

$$= -10120 i + 38610 + 54950 i = \underline{\underline{38610 + 44830 i}}$$

- 3.5 Voor alle perioden uitgezonderd die, waarbij geldt dat de opslinger-faktor $\frac{1}{\left| \cos \frac{\omega L}{c} \right|}$ juist gelijk is aan 1.

3.6 Resonantie als $\cos \frac{\omega L}{c} = 0$, dus als $\frac{\omega L}{c} = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$

Dus als $\frac{2\pi}{T} \frac{L}{c} = (2n - 1) \frac{\pi}{2}$

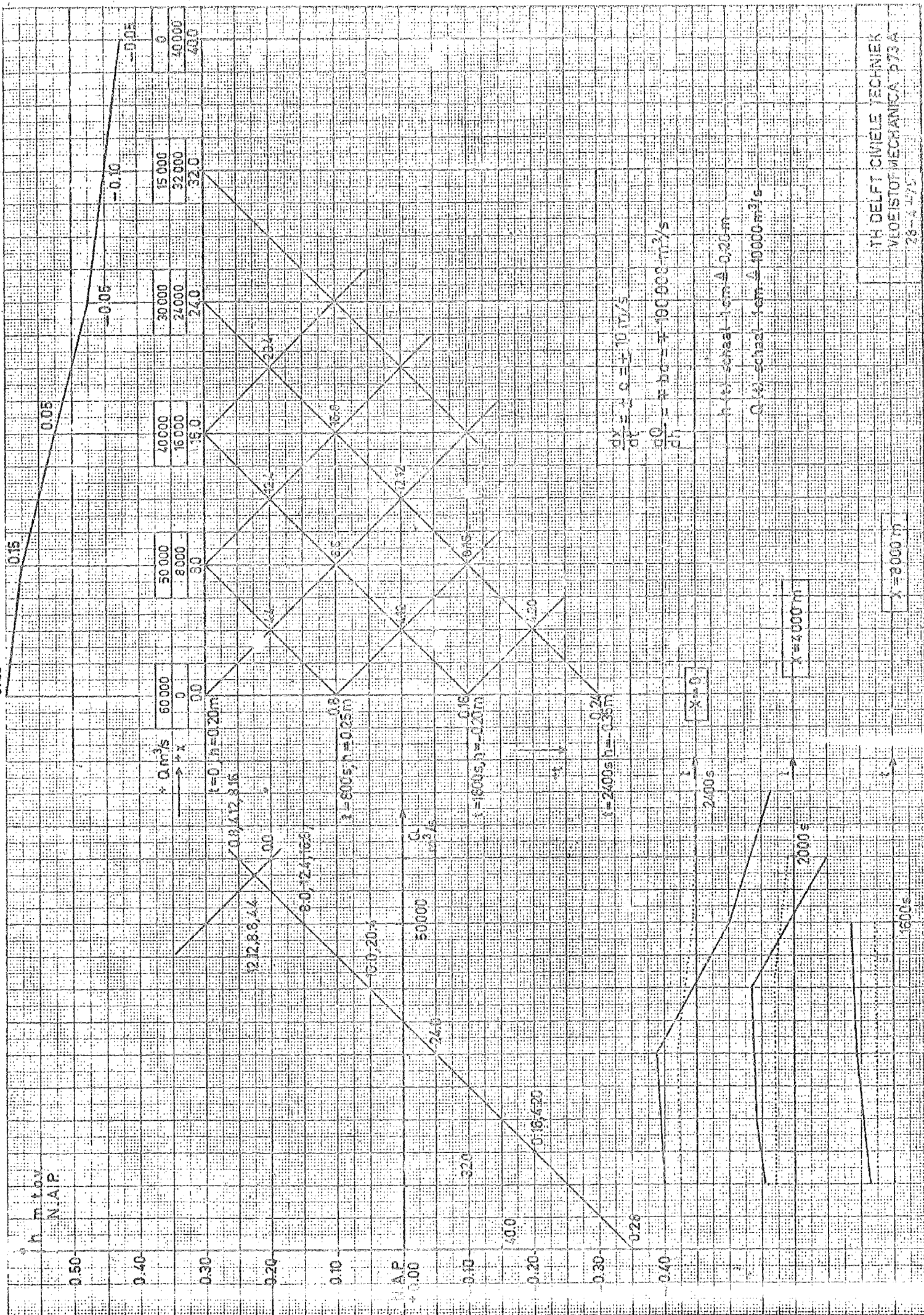
Hieruit volgt $T = \frac{4 * 10\ 000}{(2n - 1) * 11} = \frac{1}{(2n - 1)} 3636 \text{ seconden}$

Vraagstuk 3

2.1 t/m 2.2 Zie bijlage.

Voor de volgorde waarin de punten worden berekend en voor het onder 2.3 en 2.4 gevraagde wordt hier verwezen naar collegediktaat met voorbeelden en naar de oefeningen b 73^A.

0.00



Schriftelijk tentamen b 73A en/of b 73B

23 september 1975 van 14.00 - 17.00 uur

EERST LEZEN

Deze opgaven zijn bestemd voor studenten, die tentamen afleggen in resp. het vak b 73A alleen, het vak b 73B alleen of in beide vakken b 73A en b 73B tesamen. Welke vraagstukken door de verschillende groepen studenten gemaakt dienen te worden, volgt uit het volgende schema:

alleen b 73A	de vraagstukken 1, 2, 3, ..	tijd: 3 uur
alleen b 73B	de vraagstukken .., .., 3, 4	tijd: 2 uur
b 73A + b 73B	de vraagstukken 1, .., 3, 4	tijd: 3 uur

Op het in te leveren werk dient duidelijk te worden vermeld in welk(e) vak(ken) men tentamen aflegt.

Studenten, die alleen de vraagstukken 3 en 4 maken, zal worden verzocht de examenzaal om 16.00 uur te verlaten.

De uit te werken vraagstukken hebben nagenoeg een gelijk "gewicht", zodat wordt aangeraden aan ieder vraagstuk ongeveer evenveel tijd te besteden.

Bij de beoordeling zal worden gelet op een goede systematische aanpak en een overzichtelijke uitwerking van de vraagstukken.

Indien bij de uitwerking bepaalde veronderstellingen worden gedaan, dan moeten deze duidelijk worden vermeld.

Geef waar nodig een beknopt commentaar en geef duidelijk aan, waarom een bepaalde veronderstelling toelaatbaar is.

Tijdens het tentamen mag een vooraf ter beschikking gesteld formuleblad worden geraadpleegd, waarop ook eigen aantekeningen mogen voorkomen.

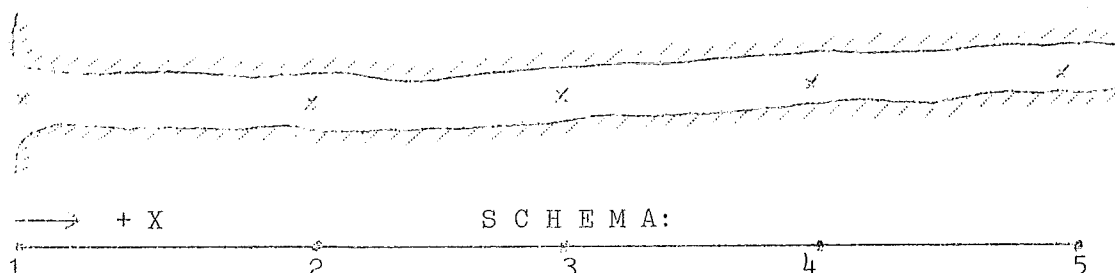
N.B. voor ieder vraagstuk dient een APART dubbel vel papier te worden gebruikt,
voorzien van NAAM en STAMNUMMER.

Van dit tentamen is geen uitwerking in telegram-stijl gemaakt.

verwezen wordt naar bestaande stencils en diktaten.

VRAAGSTUK 1. (Voor A alleen en voor A + B)

- A** In een open leiding wordt de voortplanting van een periodieke lange golf beschouwd. Langs de lengte-as van de leiding kunnen vijf punten worden onderscheiden (zie figuur).



In alle punten 1 t/m 5 is het verloop van de waterstanden in de tijd door meting volledig bekend.

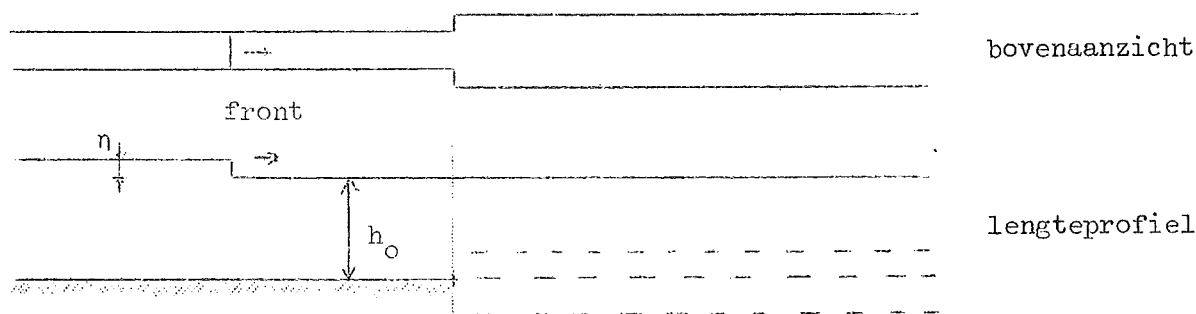
In punt 5 is het debiet als een functie van de tijd bekend $Q_5(t)$.

- 1.1 De bergende breedte is niet konstant, $b(x,t)$ is gegeven.
Geef een nauwkeurige uitdrukking voor het debiet als functie van de tijd in punt 1, waarin de bovenstaande gegevens zijn verwerkt.
- 1.2 Indien gegeven is dat de lengte, gemeten langs de as van de leiding tussen de punten 1 en 5 ongeveer 0,01 maal de golflengte is en bovendien de bergende breedte $b(x,t)$ onafhankelijk is van x , welke vereenvoudigingen zijn dan mogelijk?

- B** De voortplanting van een hoogwatergolf in een bovenrivier kan m.b.v. verschillende "methoden" meer of minder nauwkeurig worden beschreven.

- 1.3 Welke termen uit de algemene bewegingsvergelijking in h en Q worden "mee-genomen" bij de z.g. kinematic wave method?
- 1.4 Speelt de continuïteitsvergelijking een belangrijke rol bij het onder B beschouwde type lange golven?
- 1.5 Geef zonder afleiding een relatie tussen een verandering van de waterstand h en een bijbehorende verandering van het debiet Q : dQ/dh , die met de onder 1.3 genoemde methode kan worden afgeleid en geldt voor zich onvervormd voortplantende golven.
- 1.6 Noem één ander type lange golven, waarbij deze relatie ook een rol speelt. Geef aan, hoe men deze relatie eenvoudig kan afleiden.

- C** Een translatie-golf met een steil front plant zich onvervormd voort in een open leiding met horizontale bodem en verticale wanden en ontmoet daarbij een plotse-linge overgang naar een gedeelte, waarvan de breedte twee maal zo groot is. De hoogte van het front is klein t.o.v. de diepte h_0 (zie figuur).



- 1.7 Wat zou men aan de diepte van het brede gedeelte moeten veranderen, indien men geen (partiële) reflectie zou wensen?

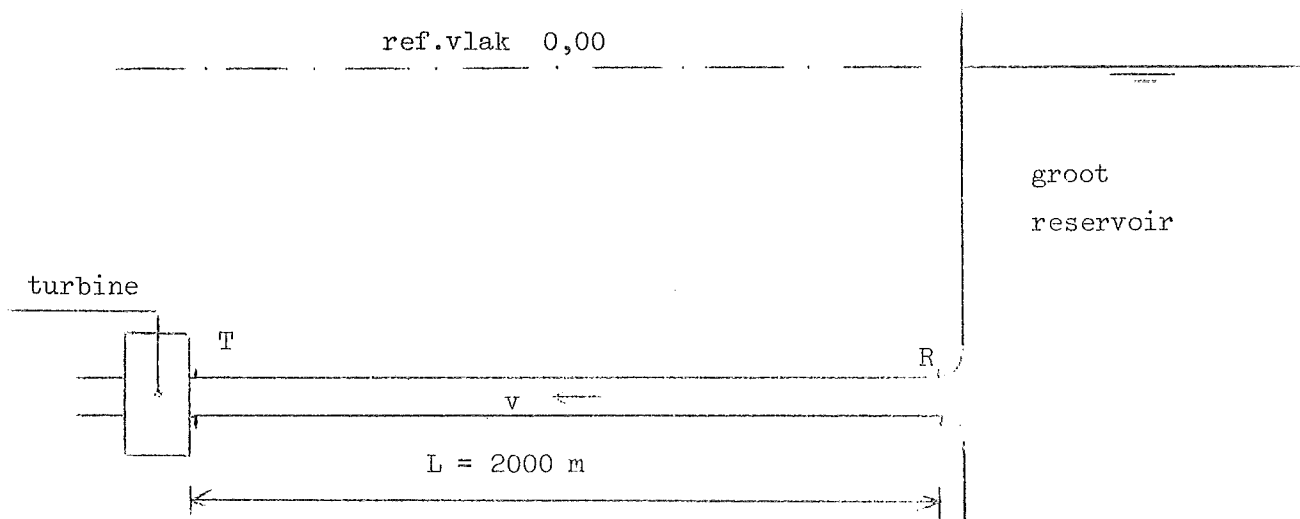
Vraagstuk 2 (voor A alleen)

Een gesloten stalen leiding, die horizontaal ligt en een cirkelvormige doorsnede heeft, vormt een verbinding tussen een groot reservoir en een turbine (zie figuur).

Door de leiding met een lengte $L = 2000$ m en een diameter $D = 2,00$ m stroomt water met een gem.snelheid $v = 2$ m/s.

De snelheidshoogte $v^2/2g$ en ook de invloed van de weerstand mag in dit vraagstuk verder geheel worden verwaarloosd. Als gevolg daarvan is het piëzometrisch niveau in de leiding in permanente toestand overal gelijk aan het niveau van de waterspiegel in het grote reservoir.

Dit niveau wordt als referentie-vlak gekozen.



Voorts is gegeven: dichtheid water

$$\rho_w = 1000 \text{ kg/m}^3$$

kompressiemodulus water

$$K_w = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$$

elasticiteitsmodulus staal

$$E_s = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$$

wand-dikte buisleiding

$$w = 0,02 \text{ m.}$$

2.a. Bereken de voortplantingssnelheid van een drukgolf in de buisleiding.

De turbine moet worden afgezet. In een bepaald geval wordt verondersteld dat als gevolg van het afzetten bij punt T in de leiding de gem.snelheid van af het tijdstip $t = t_0$ tot het tijdstip $t = t_0 + 4$ seconden

lineair afneemt van $v = 2$ m/s tot $v = 0$ m/s.

2.b. Pas de oplossingmethode "Integratie m.b.v. Karakteristieken" in detail toe voor het tijdsinterval $t = t_0$ tot $t = t_0 + 4$ seconden.

2.c. Teken het verloop van het piëz.niveau in de leiding T - R voor de volgende tijdstippen:

$$t = t_0 + 1 \text{ seconde}$$

$$t = t_0 + 3 \text{ seconden}$$

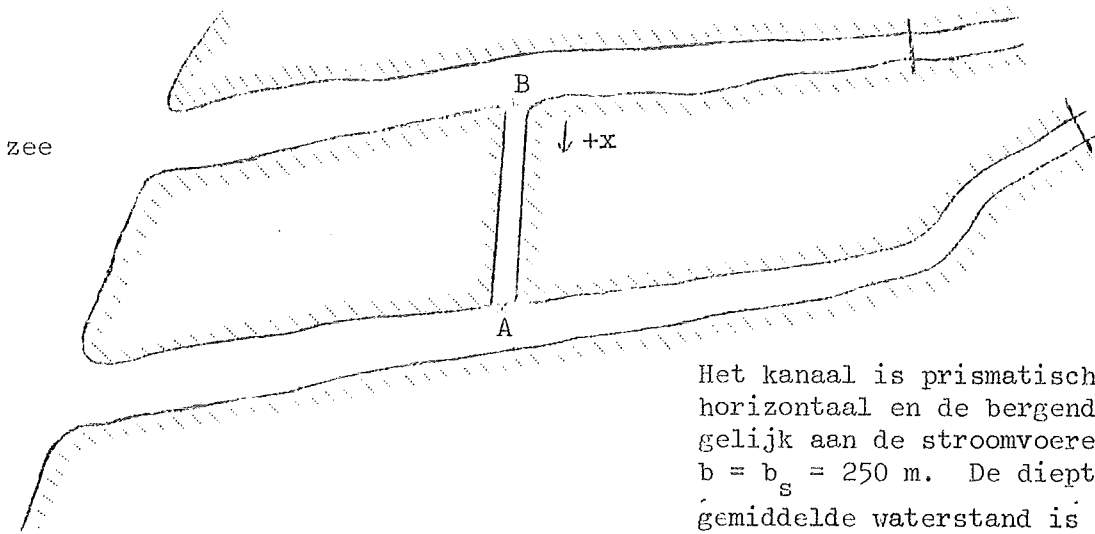
$$t = t_0 + 4 \text{ seconden.}$$

2.d. Wat is de drukverhoging p in N/m^2 in de leiding bij punt T op het tijdstip $t = t_0 + 1$ seconde?

zie pag.4.

Vraagstuk 3 (voor A en B en voor B alleen)

In een estuarium zijn twee brede en diepe getijrivieren verbonden door een open scheepvaartkanaal A-B met een lengte van 6000 m (zie figuur).



Het kanaal is prismatisch, de bodem is horizontaal en de bergende breedte is gelijk aan de stroomvoerende breedte $b = b_s = 250$ m. De diepte bij de gemiddelde waterstand is 6,00 m.

In de punten A en B mag de verticale getijbeweging worden beschreven als een zuiver sinusvormige funktie in de tijd t.o.v. de gemiddelde waterstand in het kanaal, dat als referentie-vlak wordt gekozen:

$$h_A(t) = \hat{h}_A \cos(\omega t - K_A) \text{ met } \hat{h}_A = 1,00 \text{ m en } K_A = 60^\circ;$$

$$h_B(t) = \hat{h}_B \cos(\omega t - K_B) \text{ met } \hat{h}_B = 1,10 \text{ m en } K_B = 70^\circ.$$

De frequentie van het dubbeldaags getij is $\omega = 1,405 \times 10^{-4}$ rad/s.

Voor de coëfficiënt van Chézy kan in dit vraagstuk steeds $C = 60 \text{ m}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$ worden aangehouden.

Er is een berekening uitgevoerd volgens de z.g. enkelvoudige harmonische methode. Daarbij is voor de gemiddelde waarde van de amplitude van het debiet een goede schatting ingevoerd:

$$\hat{Q}_{\text{gem.}} = 1300 \text{ m}^3 / \text{s}.$$

Uit de resultaten van de uitgevoerde berekening volgt onder meer:

$$Q_A(t) = \hat{Q}_A \cos(\omega t - \phi_A) \text{ met } \hat{Q}_A = 1460 \text{ m}^3/\text{s}, \phi_A \cong 149^\circ;$$

$$Q_B(t) = \hat{Q}_B \cos(\omega t - \phi_B) \text{ met } \hat{Q}_B = 1240 \text{ m}^3/\text{s}, \phi_B \cong 147^\circ.$$

N.B. de rekenrichting is gekozen van B naar A.

Men overweegt het kanaal te verdiepen van 6,00 m tot een gem.diepte van 10,00 m.

Uiteraard wil men vooraf een indruk hebben van de konsekwenties daarvan.

Verondersteld mag worden, dat het verloop van de waterstanden in de punten A en B gelijk blijft aan de hierboven gegeven funkties.

Gevraagd:

3.a. Als men als eerste schatting voor de gem.waarde van de amplitude van het debiet dezelfde waarde aanhoudt als in bovenbedoelde berekening, dus $\hat{Q}_{\text{gem.}} = 1300 \text{ m}^3/\text{s}$, dan wordt gevraagd de z.g. voortplantingskonstante per eenheid van lengte te berekenen.

3.b. Met de onder 3.a. gevraagde grootheid kunnen vakkonstanten worden berekend. Gevonden zijn de volgende waarden:

(vervolg vraagstuk 3)

$$\begin{aligned}\cosh r L &= 0,996 + 0,0034 i \\ - \frac{r}{b\omega i} \sinh r L &= (-0,318 - 0,344 i) 10^{-4} \\ - \frac{b\omega i}{r} \sinh r L &= 0,240 - 0,211 10^3 i\end{aligned}$$

Bereken van de funktie $Q_B(t)$ de amplitude $\hat{Q}_B$ en de fase ϕ_B .

3.c. Iemand beweert dat de funkties $Q_A(t)$ en $Q_B(t)$ op ieder tijdstip evenveel verschillen als vóór de verdieping van het kanaal.

Wat is uw mening over deze bewering?

Geef een korte verklaring zonder berekeningen.

3.d. Met de onder 3.b. te berekenen vakkonstanten kan ook de funktie $Q_A(t)$ worden berekend. Doet men dit, dan blijkt dat voor het gemiddelde van de amplituden $\hat{Q}_A$ en $\hat{Q}_B$, volgend uit deze berekeningen, wordt gevonden:

$$\hat{Q}_{\text{gem}} \cong 4450 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Vergelijk deze waarde met de ingevoerde waarde van $1300 \text{ m}^3/\text{s}$ en noem twee redenen waardoor het verschil is te verklaren.

3.e. Geef een mogelijkheid aan om in plaats van de onder 3.a. genoemde eerste schatting een veel betere schatting voor de eerste berekening te maken.

3.f. In dit vraagstuk is verondersteld, dat na het verdiepen van het kanaal A-B het verloop van de waterstanden in de punten A en B gelijk blijft. Geef aan waarom deze veronderstelling hier verantwoord lijkt.

Vraagstuk 4 (voor A + B en voor B alleen)

Verzocht wordt op de hierna volgende vragen, die min of meer op zichzelf staan, een duidelijk, doch kort antwoord te geven.

4.a. In een getij-rivier met bovenafvoer ($Q_0 \neq 0$) kan men het debiet op een bepaalde plaats uitdrukken als:

$$Q = Q_0 + \hat{Q}_1 \cos(\omega t - \phi_1).$$

Bij het analytisch benaderen van het gedrag van de term Q is de verhouding tussen Q_0 en $\hat{Q}_1$ van invloed.

Geef duidelijk aan waarom dit zo is.

4.b. Herleid de continuïteitsvergelijking in h en Q volgens de meervoudige harmonische methode, indien de (Fourier-)reeks voor h resp. Q wordt afgebroken na de eerste harmonische.

4.c. Geef een korte verklaring voor het feit dat de gem. waterstand in een getij-rivier, ook bij afwezigheid van een permanente bovenafvoer Q_0 , niet konstant is in de x -richting (geul-as).

4.d. Bij het opzetten van een differentie-methode heeft men de keuze tussen een "impliciete" resp. een "expliciete" benadering. Geef in maximaal 5 regels aan wat (in het algemeen) het verschil is in aanpak tussen beide mogelijkheden.

4.e. Men wil een differentie-vergelijking opstellen voor de continuïteitsvergelijking, waarbij men als uitgangspunt kiest:

1e. een impliciete aanpak,

2e. h en Q op dezelfde tijdstippen doch op verschillende plaatsen.

Doe een voorstel voor een schema (rekenmolecuul) voor deze vergelijking en geef duidelijk aan hoe de differentiaal-quotiënten worden benaderd.

4.f. Bij een differentie-benadering is de grootte van de stappen Δx en Δt beperkt.
- Geef aan wat van belang is bij de keuze van de stapgrootten.
- Waarom wordt bij voorkeur gebruik gemaakt van "centrale" differentie-benaderingen?

4.g. Geef een acceptabele waarde voor de vaklengte Δx voor een getij-golf met een periode van 12 uur en 25 minuten in een gedeelte van de Westerschelde, waarvan de gemiddelde diepte op 12,00 m wordt gesteld.
Bepaal vervolgens een waarde voor de tijdstap Δt voor een berekening volgens de z.g. leap-frog-methode, uitgevoerd m.b.v. een computer-programma.
Geef de differentie-vergelijking en het bijbehorende rekenmolecuul, waarmee bij deze berekening "waterstanden op een nieuw tijdstip" worden berekend.

4.h. Als m.b.v. een differentie-methode een berekening voor een periodieke getijbeweging wordt gemaakt, rekent men over meer dan één getij-periode. Waarom is dat?

4.i. Waarop berust de in de colleges besproken benadering volgens de "exakte methode"? Geef in enkele regels aan wat de essentie is en geef vervolgens de twee vergelijkingen, waarmee wordt gerekend.
Geef duidelijk aan in hoeverre de factoren b.v.

$$\frac{1}{gA} \quad \text{en} \quad \frac{1}{C^2 A^2 R}$$

bij deze methode konstant moeten worden gesteld.

4.j. Noem één toepassing van de onder 4.i. genoemde methode.