

3119

Vakgroep Waterbouwkunde
Sectie Vloeistofmechanica

EEN NUMERIEKE METHODE VOOR NIET-LINEAIRE VRIJE OPPERVLAKTEGOLVEN OPGESTELD
MET DE RANDELEMENTENMETHODE EN EEN CONFORME AFBEELDING

AFSTUDEERVERSLAG

AUGUSTUS 1992

EEN NUMERIEKE METHODE VOOR NIET-LINEAIRE VRIJE OPPERVLAKTEGOLVEN OPGESTELD
MET DE RANDELEMENTENMETHODE EN EEN CONFORME AFBEELDING

E.J.H.C. PAARDEKOOPER

AFSTUDEERVERSLAG

AUGUSTUS 1992

VOORWOORD

Dit onderzoek, verricht voor de sectie Vloeistofmechanica van de vakgroep Waterbouwkunde, is tevens mijn afronding van de opleiding aan de TU Delft bij de faculteit der Civiele Techniek. Het werk is begeleid door dr.ir. N. Booij, prof.dr.ir. C.B. Vreugdenhil en prof.dr.ir. G. Stelling. De beoordeling is gedaan door de examencommissie, bestaande uit dr.ir. N. Booij, prof.dr.ir. G. Stelling en dr. P. Wilders.

Ik wil hierbij de begeleiders, de examencommissie en alle andere mensen die mij op enigerlei wijze hebben geholpen, bedanken. Met name voor het geduld, dat zij hebben opgebracht.

Ernst Paardekooper

SAMENVATTING

Voor het oplossen van niet-lineaire vrije oppervlakteproblemen in 2 dimensies is een numerieke methode uitgewerkt, die voor de ruimtelijke discretisatie gebruik maakt van de Rand Elementen Methode: REM. Deze methode is gebaseerd op de 2^e stelling van Green en de logaritmische potentiaal als fundamentele oplossing, zodat een potentiaalprobleem voor een bepaald domein, over gaat in een integraal vergelijking voor de rand van dat domein. Door een elementenverdeling voor de rand aan te brengen en de randwaarden over de elementen constant te veronderstellen, ontstaat een stelsel lineaire vergelijkingen. Toepassing van de REM voor de rand van het fysische gebied voor niet-lineaire golven heeft als nadeel, dat de matrix van het stelsel lineaire vergelijkingen per tijdstap moet worden opgebouwd en 'geïnverteerd', vanwege de niet-lineaire en tijdsafhankelijke randwaarden op de vrije rand.

Door nu het fysisch gebied af te beelden op een in de tijd vast rekengebied, ontstaat de mogelijkheid om m.b.v. van de REM voor zowel de transformatie als het getransformeerde potentiaalprobleem stelsels lineaire vergelijkingen op te bouwen, waarvan de matrices constant in de tijd blijven. De transformatie die hiervoor in aanmerking komt is de conforme afbeelding vanaf de cirkel, waarbij we ons beperken tot periodieke niet-lineaire golven over een oneindige diepte.

De numerieke conforme afbeelding vanaf de cirkelrand wordt geconstrueerd m.b.v. de Newton-Raphson iteratie en de REM. Evenzo wordt het (getransformeerde) potentiaalprobleem in de cirkel verdiscretiseerd met de REM. De gehele methode is uitgewerkt voor de bepaling van het golfprofiel van lopende periodieke niet-lineaire golven.

Echter de matrix van het resulterende stelsel lineaire vergelijkingen voor de numerieke conforme afbeelding is niet constant in de tijd en tevens is dit stelsel overbepaald. Bovendien bleek dat de discrete punten op de vrije rand uit elkaar werden getrokken ter plaatse van de golftop, zodat de gehele numerieke methode ongeschikt is om het profiel van sterk niet-lineaire periodieke golven weer te geven.

INHOUD

VOORWOORD	
SAMENVATTING	
INHOUD	

	BLZ.
1. INLEIDING	1
1.1. Vrije oppervlakteproblemen	1
1.2. Het fysisch model voor vrije oppervlaktegolven in water	1
1.3. Oplossingsmethoden voor niet-lineaire golven	2
1.3.1. Analytische benaderingen (2-D)	2
1.3.2. Algemeen numerieke methoden voor vrije oppervlaktegolven	3
1.3.3. De 'boundary fitted coordinates' methode	6
1.3.4. De inverse formulering	7
1.4. Keuze en opzet voor een numerieke methode voor niet-lineaire golven	7
 2. NIET LINEAIRE GOLVEN OPGELOST M.B.V. DE REM	 9
2.1. Het wiskundig model voor lopende niet-lineaire golven	9
2.1.1. De wiskundige formulering van het fysische model 1.2	9
2.1.2. De randvoorwaarden op de in- en uitstroomrand Γ_2 en Γ_4	10
2.1.3. Beginwaarde voor de vrije rand op $t=0$	14
2.2. Numerieke formulering van niet-lineaire golven	14
2.2.1. De "start"gegevens op het tijdstip $t=t_i$	15
2.2.2. De discretisatie in de tijd; timestepping van t_i naar t_{i+1}	15
2.2.3. Het potentiaalprobleem op tijdstip t_{i+1}	18
2.2.4. Eulerse beschrijving van de vrije rand versus Lagrange	19
2.3. Voorbeelden van niet-lineaire golven bepaald met de REM	20
2.3.1. Lineaire golven en 2-de orde niet-lineaire golven	20
2.3.2. Niet-lineaire 'stationaire' vrije rand problemen	21
2.3.3. Periodieke niet-lineaire golven, reële variant	21
2.3.4. Periodieke niet-lineaire golven, complexe variant	22
2.3.5. Niet-lineaire golven met randwaarden op Γ_{24} conform een niet-lineaire theorie	24

	BLZ.
3. BEPALING VAN DE TRANSFORMATIE EN HET AFBEELDINGSGEBIED D	26
3.1. Probleemdefinitie en doelstelling	26
3.2. Bepaling van de transformatie: de conforme afbeelding	26
3.2.1. Wiskundige formuleringen van 2-D transformaties	26
3.2.2. Motivering van de conforme afbeelding voor de transformatie	31
3.2.3. Niet-lineaire golven opgelost m.b.v. de conforme afbeelding op de rechthoek D	36
3.3. Bepaling van het rekengebied D: de cirkel	42
3.3.1. De conforme module in conforme transformaties	42
3.3.2. De conforme afbeelding rechtstreeks van de cirkel D naar Ω	43
3.3.3. De conforme afbeelding van de cirkel D naar Ω via een tussengebied B	46
3.4. Numerieke formulering van niet-lineaire periodieke golven m.b.v. een numerieke conforme afbeelding op de cirkel	48
 4. DE REM VOOR HET POTENTIAALPROBLEEM OP DE CIRKEL	 49
4.1. De Rand Integraal Vergelijking: RIV op de cirkelrand ∂D	49
4.1.1. De RIV in poolcoordinaten	49
4.1.2. Discretisatie van de RIV met de REM	51
4.1.3. Testgevallen	55
4.2. De Poisson integraal en de middelwaarde eigenschap	55
4.2.1. De discretisatie van de Poisson integraal met de REM	55
4.2.2. Discretisatie van de middelwaarde eigenschap met de REM	56
4.2.3. Testgeval voor de Poisson integraal	57
4.3. De Hilbert integraal	57
4.3.1. De discretisatie van de Hilbert integraal met de REM	57
4.3.2. Testgeval	58

5. DE NUMERIEKE CONFORME AFBEELDING OP DE CIRKEL	59
5.1. De conforme afbeelding op de cirkel	59
5.1.1. Algemene theorie	59
5.1.2. Numerieke conforme afbeeldingen gebaseerd op periodieke functie conjugatie	62
5.1.3. Enkele bekende numerieke conforme afbeeldingen	64
5.2. De iteratie procedure voor de numerieke conforme afbeelding	66
5.2.1. De Newton-Raphson iteratie	66
5.2.2. De iteratie procedure toegepast op het impliciete functie voorschrift $f(u,v)=0$ van de rand ∂B	68
5.3. Discretisatie van de numerieke conforme afbeelding met de REM	69
5.3.1. Discretisatie met de REM van de integraal vergelijkingen	69
5.3.2. Het resulterende stelsel lineaire vergelijkingen	72
5.4. Testgevallen, conclusies en aanbevelingen	74
5.4.1. Testgevallen voor de cirkel, twee ellipsen en het vierkant	74
5.4.2. Conclusies en aanbevelingen	79
 6. PERIODIEKE NIET-LINEAIRE VRIJE OPPERVLAKTE GOLVEN	 82
6.1. De numerieke conforme afbeelding vanaf de cirkel toegepast op periodieke niet-lineaire golven	82
6.1.1. De conforme afbeelding van de cirkelrand naar de vrije rand	82
6.1.2. De omzetting van de randwaarden op de vrije rand in pool- coördinaten op de cirkelrand	83
6.1.3. Het timesteppingsschema	85
6.1.4. Discretisatie op de cirkelrand met de REM	85
6.1.5. De numerieke methode als geheel	86
6.2. Twee methoden voor periodieke niet-lineaire golven	87
6.2.1. Beschrijving van de twee methoden	87
6.2.2. De beginwaarde op $t=0$: de Stokesgolf	89
6.2.3. Testgeval 1: de vrije lopende Stokesgolf	89
6.2.4. Testgeval 2: de brekende golf	92
6.3. Conclusies met betrekking tot mijn methode	93
 7. CONCLUSIES	 95

INHOUD, vervolg

DEEL II:

SYMBOLENLIJST

LITERATUURLIJST

BIJLAGEN I-IX

APPENDICES

A. DE RAND INTEGRAAL VERGELIJKING VOOR HET POTENTIAALPROBLEEM

B. DE RAND ELEMENTEN METHODE VOOR HET POTENTIAALPROBLEEM

C. HET DIRICHLETPROBLEEM VOOR DE CIRKEL: DE POISSON INTEGRAAL

D. DE HILBERT INTEGRAAL VOOR PERIODIEK TOEGEVOEGDE FUNCTIES

E. DE BEREKENING VAN G_{IJ}^2 , P_{IJ} EN K_{IJ}

1. INLEIDING

1.1. Vrije oppervlakteproblemen

Vrije oppervlakteproblemen komen veelvuldig voor in allerlei gebieden van de vloeistofmechanica, b.v. voor grondwaterstroming, hoogwatergolven, korte golven op zee, stuwkrommen, etc. Het zijn problemen, waarbij een oppervlak van het fysisch gebied een a priori onbekende ligging heeft. Dit oppervlak kan stationair zijn, danwel niet stationair, zoals bij golven het geval is.

Doordat de ligging van het vrije oppervlak onbekend is en omdat twee gecompliceerde, niet-lineaire voorwaarden het oppervlak beschrijven, is de bepaling van korte golven op en in zee een moeilijke zaak. Zo zal alleen bij sterke vereenvoudigingen van het fysisch cq. wiskundig model een analytische oplossing mogelijk zijn. In het algemeen zullen numerieke methoden moeten worden toegepast.

1.2. Het fysisch model voor vrije oppervlaktegolven in water

Een van de meest voorkomende vrije oppervlakteproblemen is de bepaling van (niet-lineaire) korte, vrije zwaartekrachts-oppervlaktegolven in water. Het fysisch model voor dergelijke problemen kunnen we als volgt definiëren.

Het water is onsamendrukbaar en heeft een homogene dichtheid en constante viscositeit, en wordt begrensd door het "vrije" oppervlak (geen oppervlaktespanning) aan de lucht en de bodem (geen wrijving, vast). De grenslagen aan het vrije oppervlak en de bodem zijn verwaarloosbaar klein t.o.v. het fysisch gebied. De stroming in het water is dan als rotatievrij te beschouwen. Met de invoering van een snelheidspotentiaal ϕ wordt de continuïteitsvergelijking in het fysisch gebied gereduceerd tot de veel simpeler Laplace vergelijking: $\Delta\phi=0$. De Navier-Stokes vergelijking wordt hierbij de vergelijking van Bernoulli en heeft betekenis als dynamische randwaarde op het vrije oppervlak. Verder bepaalt een kinematische randwaarde de ligging van het vrije oppervlak. Het vrije oppervlakteprobleem van niet-lineaire golven in water zonder vorticeit is dus een potentiaalprobleem met twee niet-lineaire tijdsafhankelijke randwaarden op het vrije oppervlak. Zie Battjes (1977).

Verder zijn de golven onafhankelijk van de richting loodrecht op de voortplantingsrichting van de golven. We beschouwen het probleem dan als twee dimensionaal: 2-D. Het onderzoek naar niet-lineaire golven voor 3-D problemen of voor problemen met een drijvend lichaam is zeer gecompliceerd en staat nog in de kinderschoenen.

1.3. Oplossingsmethoden voor niet-lineaire golven

Ons doel is nu het vinden en onderzoeken van een efficiënte numerieke methode om het niet-lineaire golfprobleem op te lossen. Alvorens tot een eerste globale keuze en opzet voor zo'n methode te komen, bekijken we een aantal analytische benaderingen en algemeen gangbare numerieke methoden.

1.3.1. Analytische benaderingen (2-D)

Verreweg de meeste benaderingen gaan uit van een constante (of soms oneindige) diepte. Voor een overzicht verwijzen we naar Battjes (1977), Peregrine (1972) en Fenton e.a. (1982).

De meest gebruikte benadering is het lineariseren van de vrije oppervlaktevoorwaarden, toegepast op de ongestoorde positie van het oppervlak, zodat het rekengebied constant blijft. Men ontwikkelt dan alle variabelen in Taylor-polynomen, waarvan men alleen de eerste orde term meeneemt. Deze lineaire golven zijn geldig, als de elevatie zeer klein is t.o.v. de golf-lengte en de diepte. Desondanks is de lineaire theorie vanwege zijn eenvoud vaak het uitgangspunt voor de numerieke berekeningen van gecompliceerdere golfproblemen, zoals b.v. drijvende lichamen (diffractie en straling) en 3-D problemen.

De weinige niet-lineaire analytische oplossingen komen tot stand door perturbatie methoden. Als men de hogere orde termen meeneemt dan kan men b.v. de elevatie schrijven als een Fourierreeks. De coëfficiënten kunnen analytisch berekend worden, zoals bij Stokes-golven gedaan wordt tot een bepaalde orde, of numeriek, zoals Dean (1974) doet voor zijn stroomfunctie golftheorie. Stokes-golven beperken zich vanwege hun beperkte golfsteilheid tot diep water. De theorie van Dean is geschikt voor niet al te ondiep water.

Al deze theoriën beperken zich echter tot vormvaste, periodieke golven met een constante fasesnelheid c , waarbij alleen voor het lineaire geval deze expliciet bekend is. In een meebewegend assenstelsel zijn al deze golven dus stationair.

Een tweede groep benaderingen komt tot stand door de oplossing langs de verticaal bekend te veronderstellen, zoals de hydrostatische drukverdeling (lange golven), danwel met een correctieterm voor de hydrostatische drukverdeling (Boussinesq, Korteweg-de Vries). Deze vergelijkingen beperken zich tot ondiep water. In wiskundig opzicht vallen deze in een geheel andere categorie, aangezien het 2-D elliptische potentiaalprobleem is omgezet in een 1-D hyperbolisch probleem.

Ook hiervoor kunnen we lineariseren of hogere orde perturbatie methoden

toepassen. In het laatste geval krijgen we dan b.v. bij een constante bodem de bekende niet-lineaire ondiep water theoriën van de cnoïdale golven en de eenling golf.

(Overigens kunnen in ondiep water de grenslagen wel een rol spelen en wordt er dus vortciteit opgewekt. Er is dan geen potentiaalstroming meer. We laten dit verder buiten beschouwing.)

1.3.2. Algemeen numerieke methoden voor vrije oppervlaktegolven

Voor niet-lineaire golven zullen bijna altijd numerieke methoden moeten worden toegepast om een oplossing te verkrijgen. Door de komst van de computer is in de laatste tien jaren veel onderzoek gedaan naar en met numerieke methoden. Een drietal aspecten speelt hierbij een rol.

- a) Efficiëntie; een beperkte rekentijd en geheugen.
- b) Nauwkeurigheid; een redelijke overeenkomst tussen de benaderde oplossing en bekende gegevens.
- c) Brede opzet; een minimum aan vereenvoudigingen en beperkingen t.a.v. het model.

Door de gecompliceerde aard van het probleem en een zekere strijdigheid in de belangen van de aspecten zijn tot nu toe alleen 2-D (de meeste met beperkingen) bruikbare oplosmethoden ontwikkeld.

Globaal worden de meeste numerieke methoden gesplitst in een timestep-procedure voor de twee (niet-lineaire) tijdsafhanlijke randwaarden op de vrije rand en een methode voor het oplossen van het potentiaalprobleem in het fysisch gebied op een bepaald tijdstip. We bekijken allereerst het oplossen van het potentiaalprobleem en daarna de consequenties als dit op elk tijdstip dient te gebeuren vanwege de timesteppingsprocedure.

Volgens de indeling van Yeung (1982) in zijn overzicht van numerieke methoden voor vrije oppervlaktegolven zijn er drie basiscategorieën te onderscheiden; Eindige Differenties: EDM, en Eindige Elementen: EEM, en Rand Elementen: REM. Ni. elk van deze methoden verdiscretiseert de Laplace operator Δ op een andere wijze. Brebbia (1981), Brebbia & Walker (1978) en Brebbia e.a. (1984) laten dit zien door alle drie de methoden als een gewogen residuen techniek te beschrijven. Zij vermenigvuldigen een operator $\mathcal{L}$, hier de Laplace operator $\mathcal{L}=\Delta$, met een 'gewichtsfunctie' χ en integreren dit produkt over het (fysisch) gebied of domein Ω . Voor de inprodukt notatie, zie begin van appendix B.

$$\langle \mathcal{L}\{\phi\}, \chi \rangle_{\Omega} = \iint_{\Omega} \mathcal{L}\{\phi\} \chi \, dx dy \quad \text{en} \quad \mathcal{L}=\Delta \quad (1-1)$$

Eventueel kan men op de rand Γ van Ω een zelfde inprodukt definiëren t.a.v.

de randwaarden op Γ . De verschillen tussen de methoden ontstaan door de manier waarop de residuen verspreid worden over het gebied Ω en eventueel de rand Γ . Globaal zijn hier twee uitgangspunten voor aan te wijzen.

- a) Het aantal keer dat (1-1) partieel geïntegreerd wordt. Zo zal voor de REM tweemaal partieel geïntegreerd worden. We krijgen dan de bekende stelling van Green, zie appendix A.1,2 en B.1.
- b) De keuze van de approximatie voor de oplossing ϕ en de gewichtsfunctie χ , op het gebied Ω en de rand Γ . Voor de REM gebruiken we een Greense functie $G(\underline{x}; \underline{a}) = \chi(\underline{x})$ of eigenlijk de fundamentele functie $F(\underline{x}; \underline{a}) = \chi(\underline{x})$ als 'gewichtsfunctie', zie appendix A.3, het begin van appendix B, en B.1.

Het implementeren van (1-1) voor de drie methoden op Ω en vaste rand Γ is redelijk eenvoudig en leidt tot een stelsel lineaire vergelijkingen: $\underline{A}\underline{u}=\underline{b}$, waarin $\underline{u}$ de onbekenden discrete waarden t.p.v. de knooppunten in Ω (EDM, EEM) of op Γ (REM) zijn, en $\underline{A}$ de 'stijfheidsmatrix' van het verdiscretiseerde potentiaalprobleem. Voor de REM zie appendix A en appendix B.2,3. We beoordelen deze methoden t.a.v. efficiëntie in tabel 1-1, zie appendix A.6.

	kromme rand	omvang A	structuur A	elementopbouw A
EDM	-- roosterpunten niet op rand: interpolatie en/of lokale meshverfijning	- discretisatie in Ω : 2-D	+ band- matrix, diagonaal- dominant	++ directe discretisatie in Ω van Δ
EEM	+ roosterpunten op de rand (en in Ω)	- discretisatie in Ω : 2-D	+ band- matrix, diagonaal- dominant	+ interpolatie- functies gemakkelijk te integreren
REM	+ roosterpunten op de rand	+ discretisatie op de rand Γ van Ω : 1-D	- vol, soms symmetrisch en diagonaal- dominant	- moeilijke integratie van Greense maal interpolatie- functie(s)

Tabel 1-1 Vergelijkingsmatrix van EDM, EEM en REM

Aangezien de EDM moeilijkheden oplevert t.a.v. een kromlijnige rand, -en dus ook voor het vrije gedeelte, waarin we het meest zijn geïnteresseerd- is deze methode het minst geschikt. De tijd benodigd voor de inversie van $\underline{A}$ wordt bepaald door de omvang van $\underline{A}$ en de structuur van $\underline{A}$. Tesamen met de elementopbouw, d.i. de bepaling van de coëfficiënten, van $\underline{A}$ levert dit de totale rekentijd voor het probleem. Yeung (1982) komt tot de conclusie dat

in 2-D gevallen de REM in het algemeen minder rekentijd nodig heeft dan de EEM. Ten tweede zijn we alleen geïnteresseerd in de beweging van de vrije rand en is de REM ook in dit opzicht -alleen discretisatie op de rand Γ van een gebied Ω - voordeliger.

Een storend effect in de nauwkeurigheid -bepaald door de orde van de interpolatiefunctie(s)- voor de REM treedt op in de hoekpunten van de rand Γ . Dit kan worden voorkomen door o.a. hogere orde interpolatiefuncties te kiezen. Daarnaast hebben alle drie de methoden en met name de REM te lijden van zg. randsingulariteiten. Zie appendix B en met name B.4,5 en B.6 voor randsingulariteiten.

Een uitbreiding naar volledige 3-D problemen is voor de REM een moeilijke zaak, in tegenstelling tot de EDM en EEM, omdat de elementopbouw van A een gecompliceerde en tijdrovende aangelegenheid is.

Door de tijdsafhankelijkheid van de twee randwaarden op de vrije rand zal een timesteppingsprocedure gevolgd moeten worden, die door de niet-lineariteit van deze randwaarden voor alle drie de methoden nadelige gevolgen heeft, met name t.a.v. efficiëntie.

Uit de twee randwaarden op de vrije rand kan m.b.v. (kleine) tijddifferenties een schatting gemaakt worden voor de ligging en de potentiaal van de vrije rand op het tijdstip $t+\Delta t$, als beiden op tijdstip t bekend zijn. Hiermee wordt dan het gehele potentiaalprobleem opgelost m.b.v. een van de drie numerieke methoden op het nieuwe gebied $\Omega(t+\Delta t)$. Dit in tegenstelling tot lineaire golven, waar op elk tijdstip het probleem op de nulelevatie, dus een vast gebied Ω , wordt opgelost. Voor niet-lineaire golven zal men daarom meer aandacht aan nauwkeurigheid en stabiliteit moeten besteden. Zonodig zal dan ook een iteratie gewenst zijn om ligging en potentiaal van de vrije rand te corrigeren, -en het probleem voor de correcties nogmaals op $t+\Delta t$ op te lossen- voordat naar tijdstip $t+2\Delta t$ kan worden gestapt.

Een belangrijker gevolg van het in de tijd veranderende gebied $\Omega(t)$, is dat de stijfheidsmatrix $A(t)$ per tijdstap opnieuw moet worden opgebouwd en 'geïnverteerd'. Om die reden wordt dan ook geen 'inversie' toegepast, maar indirecte iteratieve methoden om het stelsel vergelijkingen op te lossen. Hierdoor zijn de EDM en de EEM in het voordeel t.o.v. de REM, vanwege hun bandstructuur en diagonaaldominantie. Voor lineaire golven blijft A gedurende het gehele tijdsproces hetzelfde, omdat voor de nulelevatie het potentiaalprobleem wordt opgelost en dus het rekengebied constant in de tijd blijft.

1.3.3. De 'boundary fitted coordinates' methode

Een methode, die (vooral in combinatie met de EDM) wordt gebruikt om laatstgenoemd gevolg te omzeilen, is de zg. 'boundary fitted coordinates' methode. Deze methode voert een numerieke transformatie van een vast gekozen rekengebied D met een simpele geometrie (voor b.v. de EDM heeft D dan alleen rechte randen) uit naar het -eindige- fysische gebied Ω . Zowel de transformatie als het getransformeerde potentiaalprobleem worden nu opgelost in het vaste gebied D . Zonder bewijs wordt gesteld dat, als D wordt afgebeeld op Ω , de rand Γ van Ω wordt afgebeeld op de rand ∂D van D .

De transformatie is wiskundig bepaald door twee 2^e orde Partiele Differentiaal Vergelijkingen: PDV-en in D en randwaarden op ∂D voor $x(\xi, \eta)$ en $y(\xi, \eta)$. (ξ, η) zijn de onafhankelijke variabelen in $\mathbb{R}^2$ van het D vlak.

$$\mathcal{L}\{x\} = 0 \text{ voor } (\xi, \eta) \text{ in } D, \quad \text{met } x = f^x(\xi, \eta, t) \text{ op } \partial D \quad (1-2a)$$

$$\mathcal{L}\{y\} = 0 \text{ voor } (\xi, \eta) \text{ in } D, \quad \text{met } y = f^y(\xi, \eta, t) \text{ op } \partial D \quad (1-2b)$$

De PDV operator $\mathcal{L}$ is van het (quasi-lineaire) elliptische type. Op een bepaald tijdstip $t=t_i$ worden (1-2a,b) opgelost, waarbij de koppeling loopt via de randwaarden (1-2a,b) d.m.v. het functievoorschrift voor de rand Γ : $f(x,y)=0$ of de parametrisering van de rand Γ : $((x(s), y(s)))$. Het is nu dus mogelijk om voor (1-2a,b) een constante stijfheidsmatrix T op te stellen, omdat de verandering van de vrije rand, d.i. de kinematische randwaarde, tot uiting komt in de omgezette randwaarden van (1-2a,b); dus alleen de rechterlidvector van de discretisatie van (1-2a,b) verandert.

$$A_p \underline{u}^x = \underline{b}^x(t) \text{ en } A_p \underline{u}^y = \underline{b}^y(t) \Rightarrow T \underline{u}^{x,y} = \underline{b}^{x,y}(t) \quad (1-4)$$

In (1-4), die de discretisatie van (1-2a,b) is, zijn de matrices A_p en T dus constant in de tijd en zijn $\underline{u}$ de onbekende discrete waarden t.p.v. de knooppunten in het (ξ, η) vlak in D (EDM, EEM) of op ∂D (REM) (Overigens kunnen bepaalde delen van de randwaarden van (1-2a,b) van het Neumann type zijn).

Het potentiaalprobleem, $\Delta\phi=0$ in Ω en (dynamische) randwaarde op Γ , wordt dan omgezet in het volgende randwaardeprobleem op het vaste gebied D en vaste rand ∂D ;

$$\mathcal{L}\{\phi\} = 0 \text{ voor } (\xi, \eta) \text{ in } D, \quad \text{met } \mathcal{R}\{\phi\} = f^\phi(\xi, \eta, t) \text{ op } \partial D \quad (1-3)$$

De PDV $\mathcal{L}\{\phi\}$ is hetzelfde -zonder bewijs wordt dit geconstateerd- als die voor de numerieke transformatie en $\mathcal{R}$ is een 1^e orde PDV operator van het gemengde type (Dirichlet, Neumann en/of Robin) en is de omgezette (dynamische) randwaarde behorende bij het potentiaalprobleem. Ook de stijfheidsmatrix A_p van (1-5) is na discretisatie van (1-3) dus constant en nadat (1-4) is opgelost, is de rechterlidvector $\underline{b}^\phi(t)$ uit de randwaarde van (1-3) per

tijdstap samen te stellen en kan (1-5) worden opgelost.

$$A_x \underline{u}^\phi = \underline{b}^\phi(t) \quad (1-5)$$

Hierbij doet de mogelijkheid zich voor om voor (1-2a,b) $\Rightarrow$ (1-4) én (1-3) $\Rightarrow$ (1-5) gedurende het gehele tijdsproces 1 grote constante systeemmatrix S op te bouwen: $S\underline{u} = \underline{b}(t)$ -zodat maar één keer geïnverteerd moet worden-, en de verandering van ligging en potentiaal op de rand Γ per tijdstap komt dus alleen tot uiting in de rechterlidvector $\underline{b}(t)$.

Conclusie: het simpele potentiaalprobleem op een in de tijd veranderend gebied $\Omega(t)$, waarbij de stijfheidsmatrix $A(t)$ telkens moet worden opgebouwd en 'geïnverteerd', is vervangen door 3 gekoppelde en moeilijkere randwaarde problemen op een vast gebied D met na discretisatie constante matrices (matrix) in de tijd.

1.3.4. De inverse formulering

Voor potentiaalproblemen wordt vaak gebruik gemaakt van de complexe potentiaal Φ ; $\Phi(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$, met $z = x + iy$. Naast de (reële) potentiaal ϕ , vol- doet ook de stroomfunctie ψ aan de Laplace vergelijking $\Delta\psi = 0$ in een domein Ω .

Als nu de rollen van afhankelijke variabelen (ϕ, ψ) en onafhankelijke variabelen (x, y) worden verwisseld, dan wordt een vrije stationaire rand afgebeeld in het Φ -vlak op een bekende, constante $-\psi$ - rand. Het probleem wordt dus het (numeriek) oplossen van de conforme afbeelding $z(\Phi)$ van het Φ -vlak naar het z -vlak. Liu & Liggett (1978) doen dit door $\Delta_\phi y(\phi, \psi) = 0$ (Δ_ϕ : differentiatie naar ϕ en ψ) met omgezette randwaarden op te lossen met de REM.

Deze methode is in feite een speciaal geval van 1.3.3, als we stellen dat $(\phi, \psi) = (\xi, \eta)$. Ten eerste is $\mathcal{L} = \Delta$; de transformatie is een conforme afbeelding. Ten tweede dienen de randen van Ω stroomlijnen of equipotentiaallijnen te zijn. Daarom is met de oplossing van de conforme afbeelding in principe ook het potentiaalprobleem opgelost. Voor instationaire gevallen, zoals niet-lineaire golven, zal men ook het getransformeerde potentiaalprobleem moeten oplossen, aangezien de vrije rand geen stroomlijn of equipotentiaallijn is.

1.4. Keuze en opzet voor een numerieke methode voor niet-lineaire golven

We kiezen nu voor de 'boundary fitted coordinates' methode in combinatie met de REM om de volgende redenen. In het eerste geval om de efficiëntie te bevorderen door de mogelijkheid om matrices op te bouwen, die constant blijven gedurende het timeteppingsproces. In het tweede geval omdat we alleen geïnteresseerd zijn in de elevatie van de golf (dus de rand), zodat discreti-

satie in het gebied overbodig wordt. De consequentie hiervan is dat de REM toepasbaar dient te zijn voor de PDV-en van (1-2,3): $\mathcal{L}\{\phi\}=0$ op een geschikt gekozen rekengebied D , zodat de gehele methode voor de berekening van de elevatie van niet-lineaire golven uitsluitend plaatsvindt via discrete punten op de vaste rand ∂D van D .

De volgende hoofdstukindeling en werkwijze wordt gehanteerd;

Hfd. 2. Allereerst wordt het wiskundig model beschreven voor niet-lineaire golven en daarna wordt het algemene numeriek model voor de REM en een timesteppingsprocedure op de rand $\Gamma(t)$ van het fysische gebied $\Omega(t)$ opgesteld, zonder transformatie naar een vast rekengebied D . Verder worden enkele bekende voorbeelden van niet-lineaire golven, die m.b.v. de REM zijn opgelost, besproken.

Hfd. 3. De keuze voor een geschikte transformatie, d.w.z. de bepaling van de transformatie operator $\mathcal{L}$ in (1-2a,b) en (1-3), in combinatie met de toepassing van de REM wordt gemaakt. Een geschikt rekengebied D wordt vervolgens bepaald, waarna het probleem van niet-lineaire golven in algemene zin wiskundig -numeriek- wordt geformuleerd m.b.v. van een transformatie en toepassing van de REM op de rand ∂D van D .

Hfd. 4. De REM wordt nu geïmplementeerd voor het getransformeerde potentiaalprobleem (1-3) op de rand ∂D van het vaste rekengebied D , wat leidt tot (1-5), en getest met simpele randwaarden.

Hfd. 5. De constructie van de transformatie (1-2a,b) op de rand ∂D van D wordt geformuleerd m.b.v. de REM, wat leidt tot (1-4), en getest voor de rand Γ van enkele eenvoudige geometrische gebieden Ω .

Hfd. 6. Eventueel wordt de gehele methode (1-2a,b) én (1-3) met een timesteppingsprocedure toegepast voor de bepaling van een niet-lineaire golf. Hiervoor wordt de numerieke transformatie van de rand ∂D naar $\Gamma(t)$, met tevens de numerieke oplossing van het getransformeerde potentiaalprobleem op de rand ∂D van D , geformuleerd m.b.v. de REM op een bepaald tijdstip. Daartoe dienen de tijdsafhankelijke kinematische en dynamische randwaarden op $\Gamma(t)$ omgezet te worden naar (ξ, η) op ∂D . Indien mogelijk worden de eventuele resultaten vergeleken met gegevens van andere methoden ter bepaling van een niet-lineaire golf.

Hfd. 7. Conclusies en aanbevelingen.

2. NIET-LINEAIRE GOLVEN OPGELOST M.B.V. DE REM

2.1. Het wiskundig model voor lopende niet-lineaire golven

2.1.1. De wiskundige formulering van het fysische model 1.2

Het fysisch gebied $\Omega(t)$ in het $\underline{x}=(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vlak, begrensd door het tijdsafhankelijke wateroppervlak $\Gamma_1(t)$ en de vaste bodem Γ_3 , is in de fig. 2-1 geschetst. $\underline{n}=(n_1, n_2)$ is hierin de naar buiten gerichte eenheidsnormaal en de zwaartekrachts-versnelling g_z werkt in de negatieve y-richting.

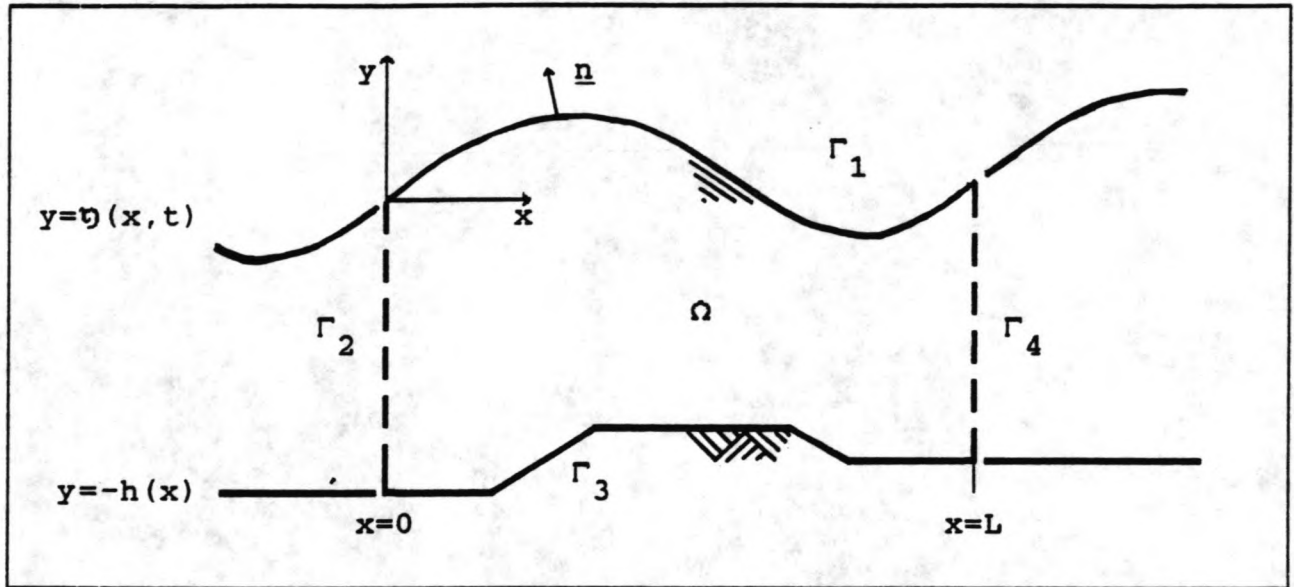


Fig. 2-1 Het fysisch gebied Ω op een bepaald tijdstip t

Door de rotatievrije stroming is de skalair snelheidspotential $\phi(x,y,t)$ in te voeren. D.w.z. dat voor de snelheid van een vloeistofdeeltje in het punt $\underline{x}=(x,y)$ in $\Omega(t)$ per definitie geldt;

$$\underline{v}_D \equiv \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \equiv (\phi_x, \phi_y) \equiv \nabla \phi \quad (2-0)$$

(2-0) ingevuld in de wet van behoud van massa of continuïteitsvergelijking geeft de Laplace vergelijking voor $\phi(x,y,t)$ op een bepaald tijdstip t in Ω . Zie Battjes (1987) en Mei (1983).

$$\Delta \phi \equiv \nabla^2 \phi = 0 \quad \text{voor } \underline{x}=(x,y) \text{ in } \Omega \quad (2-1)$$

Voor het gebied Ω is de wet van behoud van impuls (energie) of Navier-Stokes vergelijking door substitutie van (2-0) gereduceerd tot de Bernoulli vergelijking. In wiskundig opzicht bepaald deze laatste vergelijking op de vrije rand Γ_1 de dynamische randvoorwaarde.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g_z \eta - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - p_0 / \rho_w \quad \text{voor } y=\eta(x,t) \text{ op } \Gamma_1 \quad (2-2a)$$

Hierin is p_0 de druk op Γ_1 (deze kan nul gesteld worden) en $y=\eta(x,t)$ de ele-

vatie van een golf t.o.v. $y=0$. Met de formule voor de meebewegende afgeleide;

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_D \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla \quad (2-3)$$

Kan (2-2a) van een Eulerse in een Lagrange beschrijving overgaan.

$$\frac{D\phi}{Dt} = -g_z y + \frac{1}{2}(\nabla \phi)^2 - p_0/\rho_w \quad \text{op } \Gamma_1 \quad (2-2b)$$

Naast de dynamische randvoorwaarde dient een kinematische randvoorwaarde opgelegd te worden, die de ligging of beweging van de vrije rand Γ_1 beschrijft. Deze konditie houdt in dat een vloeistofdeeltje op de vrije rand deze rand niet kan verlaten.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{n_2} \frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \text{voor } y=\eta(x,t) \text{ op } \Gamma_1 \quad (2-4a)$$

Hierbij is $n_2 = \cos \beta$ de ontbondene in y -richting van de eenheidsnormaal $\underline{n}$. (2-4a) kan ook op een Lagrange manier worden beschreven, zodat een impliciete beschrijving van de vrije rand Γ_1 mogelijk is en daardoor een algemener randprofiel Γ_1 toepasbaar is, dan bij een Eulerse (is expliciete) beschrijving van Γ_1 .

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \equiv \phi_x \quad \text{en} \quad \frac{Dy}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \equiv \phi_y \quad \text{op } \Gamma_1 \quad (2-4b)$$

De Lagrange beschrijving verdient de voorkeur, als de gehele rand om een gebied zou bewegen. Aangezien Γ_{234} een vaste rand is en Γ_1 beweegt, is hierover geen duidelijke uitspraak te doen. Echter voor lineaire golven wordt een Eulerse beschrijving gebruikt en in het algemeen voor sterk niet-lineaire, niet vormvaste golven een Lagrange beschrijving.

Voor de vaste bodem is de (kinematische) randwaarde:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{voor } y=-h(x) \text{ op } \Gamma_3 \quad (2-5)$$

2.1.2. De randvoorwaarden op de in- en uitstroomrand Γ_2 en Γ_4

(Niet-)lineaire golven worden nu gedefinieerd, als golven lopende in principe van $x=-\infty$ naar $x=+\infty$ (en omgekeerd), waar de opwekking buiten beschouwing wordt gelaten. Echter voor niet-lineaire golven en lineaire golven met een willekeurige bodem $y=-h(x)$ is een analytische oplossing $\phi(x,y,t)$ onmogelijk te vinden en zal dus gezocht moeten worden naar een numerieke oplossing. Maar voor een numerieke oplossing is in principe een zo klein mogelijk, d.w.z. eindig gebied $\Omega(t)$ nodig. De eenduidigheid voor het potentiaalprobleem op een bepaald tijdstip eist dan, dat op de kunstmatige randen Γ_2 en Γ_4 uit fig. 2-1 randwaarden worden opgelegd.

Gesteld wordt nu dat deze randwaarden een inkomende golf op Γ_2 en uitgaande (verstrooide) golven op Γ_{24} naar $\pm\infty$ voorschrijven. Dit verschijnsel wordt voor lineaire golven diffractie genoemd. Dit betekent dan, dat we van te voren een benadering of beperking van deze randwaarden dienen te zoeken, die eigenlijk een onderdeel van de oplossing zijn. We bekijken nu een aantal mogelijkheden voor deze kunstmatige randvoorwaarden, waarbij voor $x < 0$ en $x > L$ de diepte, resp. h^- en h^+ , uniform is.

Lineaire verre veld randwaarden (hybriede formulering).

Voor het lineaire probleem zijn de dynamische en kinematische randwaarden voor de vrije rand Γ_1 als volgt;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -g_z \eta \quad \text{en} \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g_z \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad \text{voor } y=0 \quad (2-6)$$

De oplossing van het gehele lineaire golfprobleem met constante bodem $y=-h$ en $-\infty < x < +\infty$ is dan voor de periodieke (in x -richting) en monochromatische golf - is een golf met resp. één constante golflengte $\lambda = 2\pi/k$ en één constante golfperiode $T = 2\pi/\omega$ - ;

$$\phi(x, y, t) = \text{Re} \{ A^{\mp} \cosh(k(y+h)) e^{\pm i k x} e^{i \omega t} \}, \quad -\infty < x < +\infty \quad (2-7)$$

$$\text{met } A^{\mp} = \frac{\omega a^{\mp}}{k \sinh(kh)} \quad a^{\mp}: \text{amplitude elevatie} \quad (2-7a)$$

Waarbij A^- betrekking heeft op een naar linksgaande golf en A^+ op een naar rechtsgaande golf. Het verband tussen het golfgetal k en de frequentie ω wordt gegeven door de dispersie relatie.

$$\omega^2 = g_z k \tanh(kh) \quad \Rightarrow \quad k = H(\omega) \quad (2-8)$$

Voor een inkomende lineaire golf op Γ_2 , $x=0$ wordt (2-7,7a) met bekende amplitude A^+ conform de lineaire theorie als randwaarde gekozen. Of volgens een andere golftheorie i.g.v. niet-lineaire golven, zoals Isaacson (1982) doet.

Door een onregelmatige bodem of ander obstakel treedt, volgens de lineaire theorie, diffractie op. D.w.z. een deel van de inkomende lineaire golf wordt gereflecteerd, het andere deel gaat door. Deze verstrooide golven moeten nu via de kunstmatige randen het gebied Ω verlaten. De lineaire theorie laat superpositie toe van een inkomende golf en verstrooide golven; $\phi = \phi^I + \phi^D$. Voor de verstrooide lineaire golven kunnen we op Γ_{24} (2-7) als randwaarden nemen met een nog onbekende amplitude $A^{\mp}$. Tevens worden door de diffractie voor het lineaire probleem zg. verdwijnende golven gegenereerd, die kunnen worden gereflecteerd op de randen, zie Romate (1984). Dit is enerzijds te voorkomen door de kunstmatige randwaarden van (2-7) ver genoeg, ongeveer een

golflengte λ , van de onregelmatige bodem (b.v. een hobbel) op te leggen en de bodem verder als constant te beschouwen. Hierdoor hoeft het rekengebied niet al te groot te worden, en zullen de verdwijnende golven wel uitgedempt zijn, als de golven de randen hebben bereikt. Anderzijds kunnen de randwaarden van (2-7) -dit zijn eigenfuncties behorende bij de twee reële eigenwaarden van (2-8)- gesuperponeerd worden met de eigenfuncties behorende bij de imaginaire eigenwaarden van $\omega^2 = -gk \tanh(kh)$, (dit zijn nu de verdwijnende golven), zie Mei (1983) en Liu & Liggett (1978). De onbekende coëfficiënten (=amplituden $A^{\pm}$) van de eigenfuncties, eventueel inclus de verdwijnende golven, worden dan gevonden door de opgelegde randwaarden voor ϕ en $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ gelijk te stellen aan de gevonden waarden.

Ook voor niet-lineaire golven treedt 'diffractie' op. Bekeken wordt of dezelfde aanpak mogelijk is als voor lineaire golven.

Voor het niet-lineaire probleem is ten eerste geen superpositie mogelijk van ϕ^I en ϕ^D . Ten tweede bestaan niet-lineaire golven uit een spectrum van tijdharmonische componenten en zal bij keuze van (2-7) als randwaarden voor uitgaande golven absorptie optreden van 1 component, maar zullen de overige componenten volledig worden gereflecteerd op de randen Γ_{24} . Een eigenfunctie ontwikkeling als (2-7) voor niet-lineaire diffractie is niet mogelijk, o.a. door het ontbreken van een dispersierelatie. Isaacson (1982) omzeilt dit probleem door de randen ver genoeg van het obstakel weg te leggen om voldoende tijd te kunnen rekenen en stopt de berekening als de uitgaande golven de randen hebben bereikt, aangezien niet-lineaire golven niet uitdempen.

Stralings-(zwak reflecterende) randwaarden

De bovenstaande eigenfuncties, d.w.z. dus uitgaande golven t.g.v. lineaire diffractie, voldoen naast (2-1), (2-6) en (2-5) voor $y=h^+, h^-$ ook aan de zg. 1-D stralingsconditie van Sommerfeld.

$$\lim_{kx \rightarrow \pm\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \pm ikx \right] (\bar{\phi} - \bar{\phi}^I) = 0 \quad (2-9)$$

In (2-9) is $\phi(x,y,t) = \text{Re}\{\bar{\phi}(x,y)e^{i\omega t}\}$ en ϕ^I de inkomende golf (2-7,7a) met bekende amplitude op Γ_2 . Voor golven die te beschrijven zijn als $\phi(x,y,t) = \phi(\pm kx - \omega t, y)$ is de conditie (2-9) toe te passen op Γ_2 (-) en Γ_4 (+) en heeft dan de volgende vorm.

$$-\frac{\partial \phi}{\partial n} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial}{c \partial t} \right) \phi^I \quad \text{op } \Gamma_2, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{op } \Gamma_4 \quad (2-10)$$

Voor het lineaire probleem zijn deze randwaarden exact omdat de fasesnelheid $c = \frac{\omega}{k}$ bekend is uit de dispersie relatie (2-8) voor een naar links of naar rechts uitgaande golf. De randwaarden (2-10) moeten wel ver genoeg van de hobbel op de bodem worden opgelegd om de verdwijnende golven te laten uit-

dempen. Zie Romate (1984).

Voor het niet-lineaire 'diffractie' probleem is de fasesnelheid c^+, c^- onbekend door het ontbreken van een dispersie relatie. Indien men deze weet te schatten, is het toepassen van (2-10) beter dan bovenstaande alternatieven, aangezien de overige golfcomponenten gedeeltelijk worden gereflecteerd. Het zoeken naar nog beter absorberende randwaarden op basis van (2-9), (2-10) is een zeer moeilijke zaak, maar wel volop in ontwikkeling. Zie Romate (1984) en Yeung (1982).

Periodieke (in x richting) randwaarden

Aangezien een exacte mathematische uitdrukking voor niet-lineaire verstrooide golven t.g.v. 'diffractie' (en 'straling') niet te vinden is op de randen Γ_2 en Γ_4 , beperkt men het niet-lineaire golfprobleem vaak tot periodieke golven: $\lambda = 2\pi/k = L$.

$$\phi|_{x=0} = \phi|_{x=L} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n}|_{x=0} = -\frac{\partial \phi}{\partial n}|_{x=L} \quad \text{op } \Gamma_2 \text{ en } \Gamma_4 \quad (2-11)$$

Echter periodiciteit beperkt zich tot een uniforme $y=-h$ danwel oneindige diepte, zodat dus geen diffractie optreedt! In combinatie met de REM wordt vaak gebruikt van de volgende conforme afbeelding, waarbij dan automatisch aan (2-11) is voldaan.

$$w = e^{-ikz} \quad \text{met } w=u+iv \in B \quad \text{en } z=x+iy \in \Omega \quad (2-12)$$

De Laplace-vergelijking (2-1) $\Delta \phi(x,y)=0$ in Ω blijft onder een conforme afbeelding gelijk (zg. invariant): $\Delta_{\underline{u}} \phi(u,v)=0$ in B ($\Delta_{\underline{u}}$: differentiatie naar u en v). Voor een probleem met oneindige diepte wordt Γ_1 door (2-12) afgebeeld op de gesloten rand ∂B van B , zie fig. 2-2. De dynamische randwaarde (2-2a of b) en de kinematische randwaarde (2-4a of b) op Γ_1 moeten worden omgezet in randwaarden op ∂B in de onafhankelijke variabelen u en v . Op deze wijze is het potentiaalprobleem voor $\Omega(t)$ omgezet naar een potentiaalprobleem voor $B(t)$ op een bepaald tijdstip. Zie Longuet-Higgins & Cokelet (1976).

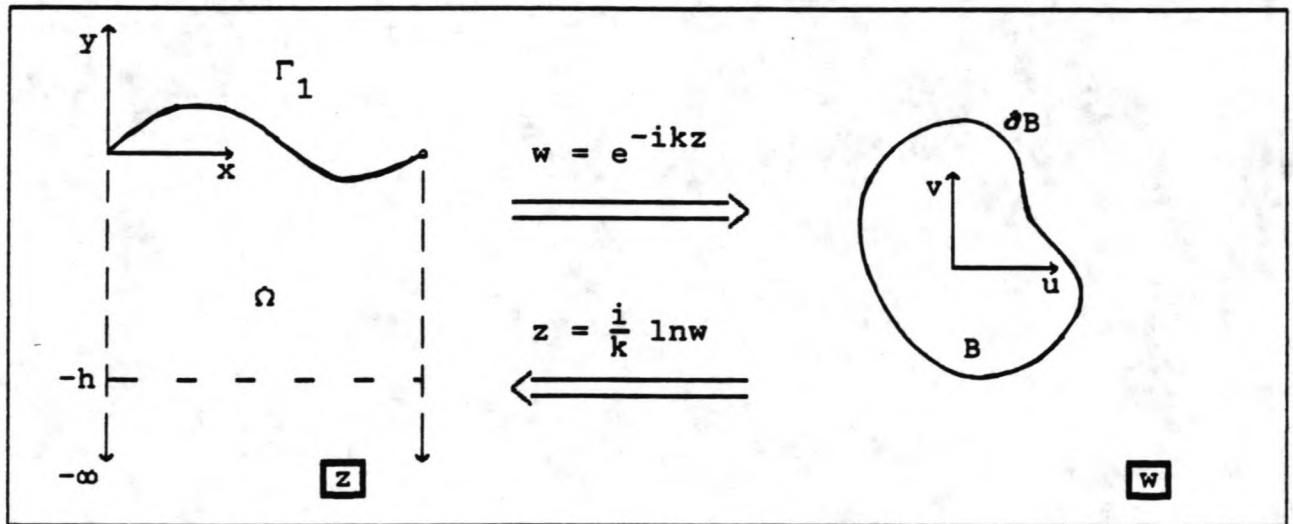


Fig. 2-2 Schets voor de conforme afbeelding (2-12) van het z -vlak naar het w -vlak

Voor een probleem met randwaarde (2-5) op de uniforme diepte $y=-h$ kan d.m.v. het reflectie principe voor Γ_1 t.o.v. $y=-h$ in Ω of voor ∂B t.o.v. $|w|=e^{-kh}$ in B automatisch aan (2-5) worden voldaan. Toepassing van de REM eist dan een speciale fundamentele functie, die voldoet aan (2-1) en aan (2-5) volgens het reflectie principe, zie b.v. appendix A.3. en Dold & Peregrine (1985).

2.1.3. Beginwaarde voor de vrije rand op $t=0$

De nulelevatie wordt als beginwaarde gekozen. Een inkomende golf wordt dan gedurende een instelperiode vermenigvuldigd met een functie zodat de amplitude van nul tot gewenste hoogte stijgt. Deze methode wordt ook vaak bij sterk niet-lineaire stationaire problemen toegepast, waardoor het probleem als instationair wordt behandeld tot de evenwichtstoestand is bereikt.

Voor periodieke golven in diep water kan een "Stokes-ontwikkeling" of bij benadering zelfs een enkele sinus als beginvoorwaarde worden gekozen. Door de amplitude zo groot te nemen of een bepaald drukverloop p_0 gedurende een instelperiode aan het vrije oppervlak op te leggen, wordt de golf instabiel en zal hij gaan breken. Zie Longuet-Higgins & Cokelet (1975).

2.2. Numerieke formulering van niet-lineaire golven

Het probleem van niet-lineaire lopende golven definiëren we als volgt; de veldvergelijking (2-1) en de randwaarden (2-2a of b) en (2-4a of b) -wordt (2-6) voor lineaire golven-, (2-5), en (2-10). Tevens is een geschikte beginwaarde en inkomende golf ϕ^I gekozen. Voor een probleem met een oneindige diepte wordt gekozen voor de conforme afbeelding (2-12) en vervallen dus (2-5) en (2-10). Verder zijn de randwaarden (2-2a of b) en (2-4a of b) omgezet in de onafhankelijke variabelen u en v op ∂B (i.p.v. Γ_1).

De volgende numerieke procedure in 2.2.1. t/m 2.2.3. wordt per tijdstap Δt toegepast.

2.2.1. De "start"gegevens op het tijdstip $t=t_i$

A) Op het tijdstip $t=t_i=i\Delta t$ is de stuksgewijze lineaire (rechtlijnige) benadering van de rand Γ bekend. De lijnstukjes Γ_j^i (de superindex geeft het tijdsniveau aan) $j=1,2,\dots,n$, vormen via hun geometrische eindpunten de zg. elementenverdeling van de rand Γ^i , zie fig. 2-3. Verder geldt dat η_j^i het midden, het zg. knooppunt is van element Γ_{1j}^i .

B) Op de middens van de elementen Γ_j^i , de zg. knooppunten $\underline{x}_j = (x_j, y_j)$, zijn de benaderde waarden van de potentiaal ϕ : ϕ_j^i en de normaal afgeleide $\frac{\partial \phi}{\partial n}$: q_j^i voor elke $j=1,2,\dots,n$ bekend. Deze waarden worden over een element Γ_j^i constant verondersteld; zg. constante elementen, zie appenndix B.3,4. (Hogere orde elementen zijn ook mogelijk, zie appendix B.3.) Uit deze waarden zijn de tangentiële afgeleide van de potentiaal $\phi_s = \frac{\partial \phi}{\partial s}$ en ϕ_x, ϕ_y op het tijdstip t_i en op elke $\underline{x}_j$ te berekenen.

Kortom A) $\underline{\eta}^i$ (of $(\underline{x}, \underline{y})^i$) voor Γ_1^i en B) ϕ^i, q^i op Γ zijn bekend in de middens $\underline{x}_j = (x_j, y_j)$ van de elementen Γ_j^i op het tijdstip $t=t_i$. Ook op vorige discrete tijdstippen zijn al deze gegevens bekend.

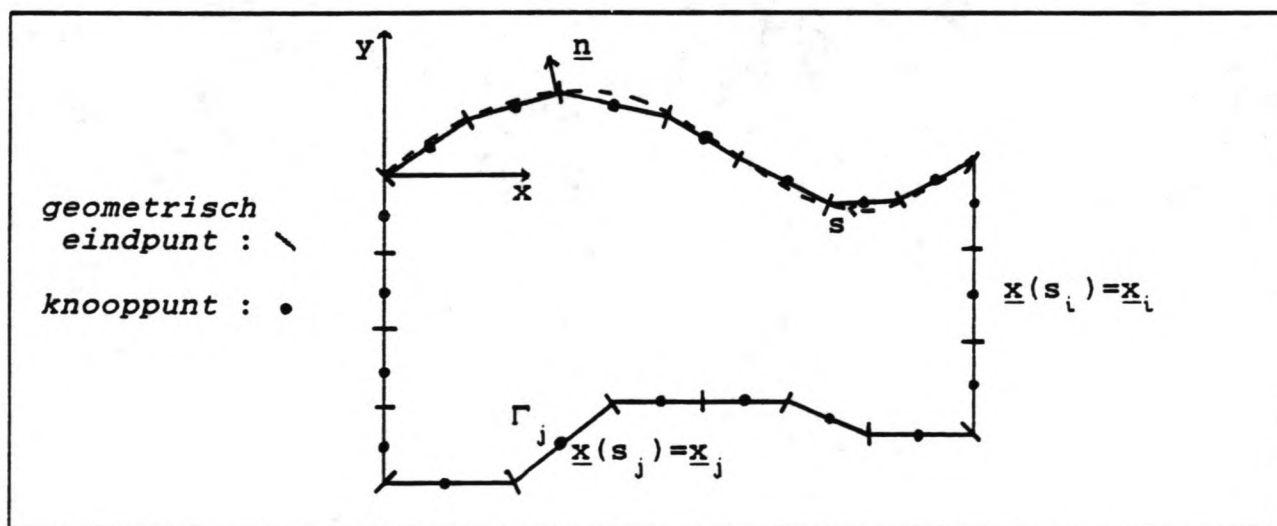


Fig. 2-3 De randelementenverdeling van Γ op tijdstip t_i

2.2.2. De discretisatie in de tijd; timestepping van t_i naar t_{i+1}

De randwaarden (2-2a,b), (2-4a,b) en (2-10) hebben de algemene gedaante van een gewone differentiaal vergelijking met beginvoorwaarde op t_i . Lees voor $\frac{\partial}{\partial t}$ of $\frac{D}{Dt}$: $\frac{d}{dt}$ en voor $\underline{\eta}$ (of $(\underline{x}, \underline{y})$), $\underline{\phi}$ of $\underline{q}$: $\underline{u}$. Vanwege de randelementen verdeling van Γ zijn deze grootheden vectoren.

$$\frac{d}{dt} \underline{u} = \underline{g}(\underline{u}, t) \quad (2-13)$$

De vergelijking (2-13) kan m.b.v. eindige differenties naar het tijdstap $t_i + \Delta t = t_{i+1}$ een benadering voor $\underline{u}^{i+1}$ gegeven. Bij de keuze van de methode voor de timestepping spelen drie aspecten een rol; 1) stabiliteit, 2) nauwkeurigheid en 3) rekentijd. Voor niet-lineaire golven wordt meestal gebruikt gemaakt van zg. meerstapsmethoden, omdat hogere orde eenstapsmethoden (zoals Runge-Kutta) de oplossing van de randintegraalvergelijking: RIV (2-18,19) met de REM op tussenniveau's eisen en daardoor veel meer rekentijd vergen, zie 2.2.3. De 2^e orde expliciete meerstapsmethode van Adams-Bashforth luidt;

$$\underline{u}^{i+1} = \underline{u}^i + \frac{\Delta t}{2} (3\underline{g}^i - \underline{g}^{i-1}) \quad \text{en} \quad \underline{g}^i = \underline{g}(\underline{u}^i, t^i) \quad (2-14)$$

Zonodig kan een hogere orde worden gekozen, die nauwkeuriger is, maar ook meer rekentijd kost. Het nadeel van de expliciete (2-14) is, dat deze niet zo stabiel is en dus een zeer kleine tijdstap Δt vereist. Om de stabiliteit te verhogen, kunnen we ook het 2^e orde impliciete meerstapsschema van Adams-Moulton kiezen.

$$\underline{u}^{i+1} = \underline{u}^i + \frac{\Delta t}{2} (\underline{g}^{i+1} + \underline{g}^i) \quad \text{en} \quad \underline{g}^{i+1} = \underline{g}(\underline{u}^{i+1}, t^{i+1}) \quad (2-15)$$

Het nadeel van (2-15) is dat deze veel meer rekentijd kost per tijdstap Δt dan (2-14), zie 2.2.4. Een compromis tussen schema's zoals (2-14) en (2-15) zijn de predictor-corrector meerstapsschema's van Adams-Bashforth-Moulton. Een veel gebruikt schema is die van de 4^e orde.

$$\begin{aligned} \underline{u}_p^{i+1} &= \underline{u}^i + \frac{\Delta t}{24} (55\underline{g}^i - 59\underline{g}^{i-1} + 37\underline{g}^{i-2} - 9\underline{g}^{i-3}) \quad \text{en} \quad \underline{g}^i = \underline{g}(\underline{u}^i, t^i) \\ \underline{u}^{i+1} &= \underline{u}^i + \frac{\Delta t}{24} (9\underline{g}_p^{i+1} + 19\underline{g}^i - 5\underline{g}^{i-1} + \underline{g}^{i-2}) \quad \text{en} \quad \underline{g}_p^{i+1} = \underline{g}(\underline{u}_p^{i+1}, t^{i+1}) \end{aligned} \quad (2-16)$$

Voor een uiteenzetting van meerstapsmethode's t.a.v. stabiliteit en nauwkeurigheid, zie Stoer & Bulisch (1978).

A) Uit (2-4a,b) volgt een benadering voor $\underline{\eta}^{i+1}$ of $(\underline{x}, \underline{y})^{i+1}$ voor Γ_1 m.b.v. b.v. het expliciete timesteppingsschema (2-14) en de "start"gegevens uit 2.2.1. Vervolgens kan dan een nieuwe randelementen verdeling Γ_1^{i+1} en dus Γ^{i+1} op tijdstip t_{i+1} tot stand komen, zoals geschetst in fig. 2-3. Omdat we uitgaan van constante elementen, d.w.z. lineaire interpolatie (is rechte lijn) benadering voor de geometrie van Γ (de geometrische punten zijn de eindpunten van een lijnelement) en constante interpolatie voor ϕ , q (knooppunt in het midden van een lijnelement), kunnen gaten in Γ_1^{i+1} ontstaan als de timestepping van (2-4a,b) via het knooppunt η_j^i of $\underline{x}_j^i$, d.i. het midden, van het element plaatsvindt. Dit komt door de discontinuïteit van ϕ en q t.p.v. de geometrische eindpunten van de elementen, zie fig. 2-4 (1). Er zal geïnterpoleerd -b.v. gemiddeld- moeten worden in die eindpunten van de elementen om met (2-4a,b) en b.v. (2-14) geen gaten te laten ontstaan in de rechte lijn benadering van Γ_1^{i+1} . De timestepping vindt dan plaats via de

eindpunten i.p.v. het midden van een lijnelement Γ_{1j}^i , zie fig. 2-4 (2).

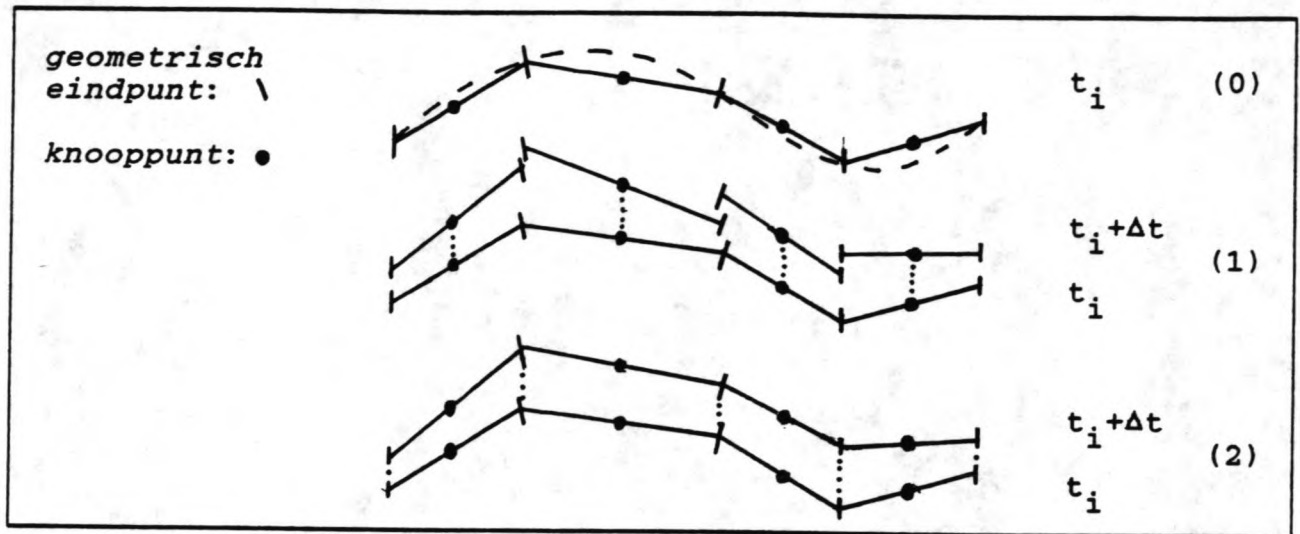


Fig. 2-4 Timestepping van de lineaire benadering van Γ_1 .

Een andere mogelijkheid om gaten te voorkomen is om behalve voor de geometrie van Γ ook voor ϕ en q een lineaire verdeling toe te passen. De knooppunten van deze zg. lineaire elementen, zie appendix B.3,4, vallen nu samen met de geometrische eindpunten van een lineair lijnelement en daarom zijn ϕ en q t.p.v. de eindpunten continue.

Speciale aandacht dient gegeven te worden aan de aansluiting van de hoekpunten tussen Γ_1 en Γ_{24} .

Voor lineaire golven is bovenstaande niet ter zake doende, omdat het potentiaalprobleem van 2.2.3 voor elke tijdstap Δt vanaf de nulelevatie wordt berekend; eenmalige discretisatie van Γ .

B) M.b.v. van het expliciete schema (2-14) voor (2-2a,b) en het impliciete schema (2-15) voor (2-10) en de "start"gegevens uit 2.2.1. zijn op de rand Γ^{i+1} de volgende (gediscretiseerde) randwaarden voor het tijdstip t_{i+1} te berekenen.

$$\begin{aligned} \underline{\phi}^{i+1} &= \underline{f}_1^{i+1} && \text{op } \Gamma_1^{i+1} && \text{uit (2-2a,b) (Dirichletrw.)} \\ \underline{\phi}^{i+1} + D_p^{i+1} \underline{q}^{i+1} &= \underline{f}_{24}^{i+1} && \text{op } \Gamma_{24} && \text{uit (2-10) (Robinrw.)} \\ \underline{q}^{i+1} &= 0 && \text{op } \Gamma_3 && \text{uit (2-5) (Neumannrw.)} \end{aligned} \quad (2-17)$$

De elementen van de vectoren uit (2-17) gelden voor de middens van de elementen Γ_j^{i+1} , $j=1,2,\dots,n$ en zijn constant over deze elementen. D_p is een diagonaalmatrix met als diagonaalelementen de vector $\underline{p}$. In de eerste vergelijking van (2-17) geldt dat $\underline{\phi}^{i+1}$ ongeveer op de rand Γ_1^{i+1} ligt voor een Lagrange beschrijving van de vrije rand. Dit geldt niet voor een Eulerse beschrijving, doch bij een zeer kleine tijdstap Δt kan dit als benadering

worden aan genomen, zie 2.2.4.

2.2.3. Het potentiaalprobleem op tijdstip t_{i+1}

We hebben nu het gemengde potentiaalprobleem gegeven door de veldvergelijking (2-1) in Ω^{i+1} en de (gediscretiseerde) randwaarden (2-17) op Γ^{i+1} . Hiervoor is dus de randintegraalvergelijking: RIV (A-23,24b) van appendix A.4 van toepassing op $\Gamma=\Gamma^{i+1}$, met de fundamentele functie (A-9a,13) uit appendix A.3. Voor de randoperatoren notatie, zie appendix B.2.

$$\frac{1}{2} \phi(\underline{a}) = \oint_{\Gamma} F(\underline{x}; \underline{a}) q(s) dS - \oint_{\Gamma} \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}; \underline{a}) \phi(s) dS \Leftrightarrow H\{\phi\} = G\{q\} \quad (2-18)$$

$$\text{met } F(\underline{x}; \underline{a}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\underline{x} - \underline{a}| \text{ en } \underline{x}(s), \underline{a}(s) \in \Gamma \quad (2-19)$$

Met de toepassing van de REM voor (2-18,19) op de nieuwe elementverdeling van Γ^{i+1} met constante elementen volgt dan de nieuwe matrixvergelijking op tijdstip t_{i+1} , zie appendix B.2,3,4.

$$\frac{1}{2} \phi_i + \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Gamma_j} \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}_j; \underline{x}_i) dS_j \right] \phi_j = \sum_{j=1}^n \left[\int_{\Gamma_j} F(\underline{x}_j; \underline{x}_i) dS_j \right] q_j \quad i=1,2,\dots,n \Leftrightarrow \quad (2-20)$$

$$\frac{1}{2} I \underline{\phi} + H^* \underline{\phi} = G \underline{q} \quad \text{en} \quad H_{ij}^* = \int_{\Gamma_j} \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{x}_j; \underline{x}_i) dS_j, \quad G_{ij} = \int_{\Gamma_j} F(\underline{x}_j; \underline{x}_i) dS_j$$

In (2-20) zijn $\underline{x}_j$ en $\underline{x}_i$ de middens, knooppunten van de elementen Γ_j . De integralen in (2-20) kunnen m.b.v. partiële integratie en substitutie analytisch worden berekend of numeriek met de 4-punts Gauss kwadratuur formule, zie appendix B.4. De matrixvergelijking (2-20) op tijdstip t_{i+1} schrijven we als volgt;

$$H^{i+1} \underline{\phi}^{i+1} = G^{i+1} \underline{q}^{i+1} \quad (2-21)$$

We stoppen voor (2-21) de bekenden $\underline{\phi}^{i+1}$ en $\underline{q}^{i+1}$ uit (2-17) in $\underline{f}$ en de onbekenden in $\underline{u}$. Reorganisatie van (2-21) leidt dan tot de volgende matrixvergelijking op tijdstip t_{i+1} , zie appendix B.2.

$$A \underline{u} = B \underline{f} = \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = A^{-1} \underline{b} \quad (2-22)$$

Uit (2-22) volgen dus alle $\underline{\phi}^{i+1}$ en $\underline{q}^{i+1}$ op Γ^{i+1} voor tijdstip t_{i+1} . Men kan weer naar 2.2.1. voor de volgende timestepping van t_{i+1} naar t_{i+2} .

Voor lineaire golven wordt het gemengde potentiaalprobleem berekend vanaf de nulelevatie $\Gamma=\Gamma^0$ op elk tijdstip, dus $H^{i+1}=H^0$ en $G^{i+1}=G^0$ zijn constante matrices gedurende het gehele tijdsproces. Voor lineaire golven is A constant gedurende het gehele proces, omdat H en G constant zijn; inversie van A hoeft maar 1 keer plaats te vinden.

T.a.v. de nauwkeurigheid en convergentie, met name voor hoekpunten in Γ , van constante en lineaire elementen voor de REM verwijzen we naar de opmerkingen in appendix B.5.

2.2.4. Eulerse beschrijving van de vrije rand versus Lagrange

Voor een timestepping procedure voor niet-lineaire golven is het beter om van een Lagrange beschrijving van Γ_1 (2-2b,4b) uit te gaan omdat de meebewegende afgeleide een deeltje op zijn weg volgt in tegenstelling tot een Eulerse waar de plaatscoördinaten t.o.v. de tijd vast gehouden worden. In het eerste geval zijn de grootheden bij discretisatie in de tijd op de oude tijdniveau's op de nieuwe rand bekend, in het tweede geval alleen op de oude rand. Bij een Eulerse beschrijving zal daarom een kleine tijdstap worden gekozen om deze waarden voor de nieuwe rand als benadering te kunnen gebruiken en een impliciete methode worden toegepast, om stabiliteit te verzekeren. Het nadeel van een Lagrange beschrijving is dat de aansluiting tussen Γ_1 en Γ_{24} problemen oplevert.

Voor een Eulerse beschrijving van de vrije rand voor niet-lineaire golven wordt om bovenstaande reden gekozen voor een impliciete methode zoals (2-15). In het geval van impliciete tijdstapmethodes kan men een extra iteratieslag nemen binnen Δt (expliciete predictor, impliciete corrector methode) of de tijdstap Δt zo klein nemen, zodat G en H resp. op de actuele rand $\Gamma^{i+1/2}$, Γ^i kunnen worden berekend i.p.v. de toekomstige rand Γ^{i+1} . Hierbij dienen de niet-lineaire termen in (2-2a,4a) na het toepassen van (2-15) gelineairiseerd te worden. Uit (2-2a) ontstaat dan een Robinrandwaarde.

Voor een Lagrange beschrijving van de vrije rand voor niet-lineaire golven kan men een expliciete methode kiezen of om een betere stabiliteit te krijgen een predictor-corrector methode, zoals (2-16). In het laatste geval zal de evaluatie van de RIV (2-18,19) twee keer per tijdstap Δt moeten worden uitgevoerd; 1 maal voor het predictorniveau en 1 maal voor het correctorniveau.

Voor lineaire golven is het makkelijker om voor een Eulerse beschrijving van de vrije rand te kiezen, omdat voor de berekening van (2-18,19) de ongestoorde rand $\Gamma = \Gamma^0$ voor elke tijdstap wordt gebruikt. Meestal wordt een impliciete methode gekozen om maximale stabiliteit te waarborgen.

De tijdstap Δt kan op de volgende wijze, met een schatting voor de fasesnelheid $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$, geschat worden. Hierin is S_j de (gemiddelde) lengte van een lijnelement Γ_{1j} .

$$\Delta t \leq \frac{1}{c} S_j \quad (2-23)$$

2.3. Voorbeelden van niet-lineaire golven bepaald met de REM

2.3.1. Lineaire golven en 2-de orde niet lineaire golven.

De REM werd oorspronkelijk ontwikkeld om de drukverdeling rond een vleugelprofiel in een potentiaal stromingsveld te berekenen, zie Hess & Smith (1966). Voor de ligging van het vrije oppervlakte en de drukverdeling rond een drijvend lichaam bood deze methode een uitstekend alternatief voor andere methoden, die van discretisatie in het gehele domein uitgingen. Tegenwoordig wordt de methode veelvuldig voor lineaire golven gebruikt, zowel 2-D als 3-D en een eventueel aanwezig drijvend lichaam. Hierbij zijn twee werkwijzen te onderscheiden.

Enerzijds is (meestal) uitgangspunt de directe methode (2-18) met de simpele fundamentele oplossing, de logaritmische potentiaal (2-19) voor 2-D problemen, zoals gebruikt in 2.2.3. Voor de randwaarde op Γ_{24} kan worden gekozen voor (2-9) of een hybride formulering i.p.v. (2-10). We verwijzen naar o.a. Bai & Yeung (1974), Au & Brebbia (1984) en de proceedings van de conferentie's voor de REM, onder redactie van C.A. Brebbia. Een nuttig boek voor de toepassing van de REM voor 3-D problemen, evaluatie van oppervlakte elementen, is Banerjee & Butterfield (1981).

Naast het gebruik van de logaritmische potentiaal (2-19) kan men voor lineaire monochromatische golven $\phi(x,y,t) = \text{Re}\{\bar{\phi}(x,y)e^{i\omega t}\}$, ook gebruik maken van een Greense functie $G(\underline{x};\underline{a};t) = \text{Re}\{\bar{G}(\underline{x};\underline{a})e^{i\omega t}\}$, die voldoet aan (2-1) (d.w.z. $\Delta \bar{G}(\underline{x};\underline{a}) = -\delta(\underline{x}-\underline{a})$) en de randwaarden -die al homogeen zijn- (2-6) op Γ_1 , (2-9) op $\Gamma_{24}(\rightarrow \pm\infty)$ en (2-5) voor uniforme diepte op (een gedeelte van) Γ_3 . Voor een drijvend lichaam of een hobbel in de bodem blijft dan alleen een Neumannrand over, waaraan deze Greense functie niet voldoet, zie Mei (1983). Bij toepassing van deze Greense functie direct in (2-18) of indirect als enkellaagbelegging, zie appendix A.5, houdt men dus alleen een Fredholm integraalvergelijking van de 2^e soort op de rand van het ondergedompelde lichaam of de hobbel over. Het voordeel van deze 'klassieke' benadering is dat alleen discretisatie op deze ene rand plaats vindt en er geen timesteppingsprocedure is. Het nadeel is dat de berekening voor een element in de resulterende matrixvergelijking - integratie van een zeer gecompliceerde Greense functie, zie John (1950), maal een interpolatiefunctie - moeilijk en tijdrovend is en dat deze benadering alleen mogelijk is voor lineaire monochromatische golven.

Door het vrije oppervlak niet te lineairiseren, maar ook in de Taylor ontwikkeling de tweede orde mee te nemen, krijgt men zwak niet-lineaire golven. Voor deze golven is het mogelijk om de randwaarden op het vrije oppervlak voor de 2-de orde potentiaal af te leiden en zijn gedrag naar oneindig

vast te stellen voor vertrooide golven, zie Mei (1983). Ook voor deze golven kan dan de REM met een hybride formulering op de randen Γ_{24} worden toegepast, welke overeenkomstig is met lineaire golven.

2.3.2. Niet lineaire 'stationaire' vrije rand problemen

Aangezien het probleem van de kunstmatige randwaarden op de randen Γ_{24} een extra complicatie geeft, wordt het onderzoek van niet-lineaire vrije rand problemen vaak beperkt tot uniforme stroming op Γ_{24} ver van b.v. een hobbel op de bodem of tot water in een bak. D.w.z. de randwaarden op Γ_{24} zijn dan de simpelere Neumannrandwaarden, resp.: $\frac{\partial \phi}{\partial n} = U_{24}$, $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$. Het instationaire proces wordt tot stand gebracht door de snelheid U_{24} een verloop, de bodem of rand een versnelling of uitwijking te geven volgens een bepaalde tijdfunctie tot eventueel evenwicht is bereikt.

Liu & Liggett (1982) en (1984) passen voor een 'bak' probleem met een Eulerse beschrijving van Γ_1 de impliciete methode (2-15) met gewichtsfactoren en met kleine Δt (eventueel met extra iteratie) toe, waarbij de vrije rand op een niveau t_i wordt gehouden om later gecorrigeerd te worden voor t_{i+1} . Nakayama & Washizu (1981) kiezen voor de impliciete Euler timestepingsmethode, die de fout uitsmeert over de lineaire elementen van de vrije rand -i.p.v. dat de fout in de tijd zich concentreert alleen op de knooppunten $\underline{x}_j$ - door de dynamische randwaarde (2-2a) als een gewogen residu volgens de Galerkin methode te behandelen. Beiden kiezen voor lineaire elementen voor ϕ en q voor de REM, zie appendix B.3,4.

2.3.3. Periodieke niet-lineaire golven, reële variant

Lau (1985) lost het niet-lineaire golfprobleem op met (2-11) op Γ_{24} en een kleine vaste cirkel in Ω met uniforme diepte. Als beginwaarde op Γ_1 kiest hij een sinus met een iets te grote amplitude volgens de lineaire theorie (d.i. een 1^e orde stokesgolf). Lau gebruikt de Lagrange beschrijving van de vrije rand Γ_1 en voor de timesteppingsprocedure neemt hij (2-16). Lau gebruikt constante elementen voor ϕ en q bij de toepassing van (2-18,19) voor de REM. Waarschijnlijk ontstaat de numerieke instabiliteit na een enige rekentijd door reflectie op de randen Γ_{24} van de verstrooide golven t.g.v. diffractie door de vaste cirkel.

Longuet-Higgins & Cokelet (1976) gaan uit van (2-12) met een oneindige diepte. Het gehele potentiaalprobleem wordt dus opgelost op de rand ∂B , waarbij de Lagrangse kinematische randwaarde (2-4b) en de dynamische randwaarde (2-2b) zijn omgezet in poolcoördinaten: $u = p \cos \vartheta$, $v = p \sin \vartheta$ en $w = u + iv \Leftrightarrow \rho(\tau) = |w|$, $\vartheta(\tau) = \arg(w)$. τ is de parametrisering van ∂B . Verder geldt $k=1$ en $g_z=1$.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = \rho \frac{\partial \rho}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \quad \text{en} \quad \frac{D\vartheta}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} = \rho \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} - \rho \frac{\partial \rho}{\partial \tau} q$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = -p_0 - \ln \rho + \frac{1}{2} \left[\left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta} \right)^2 \right] = -p_0 - \ln \rho + \frac{1}{2} \rho^2 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right)^2 + q^2 \right] \quad (2-23b)$$

Voor de timestepping van (2-23b) wordt (2-16) gekozen, met een zg. Pade approximatie van de Stokesgolf als beginvoorwaarde. Voor de berekening van (2-18,19), die geformuleerd wordt met (A-13) als (2-24), wordt op een andere manier te werk gegaan dan de REM.

$$\frac{1}{2} \phi(\underline{a}) = \oint_{\partial B} F(\underline{u}; \underline{a}) q(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B} \phi(\tau) d\gamma(\underline{u}-\underline{a})$$

$$\text{met } F(\underline{u}; \underline{a}) = -\frac{1}{2\pi} \ln |\underline{u}-\underline{a}| \text{ en } \underline{u}(\tau) = (u(\tau), v(\tau)), \underline{a}(t) \in \partial B \quad (2-24)$$

Voor de discretisatie van (2-24) werd de rand ∂B verdeeld in n discrete punten $(\rho_j, \vartheta_j) = (\rho(\tau_j), \vartheta(\tau_j))$, waarbij de booglengtes T_j en tangentele afgeleiden $(\partial/\partial \tau)_j$, $j=1,2..n$ werden gevalueerd. Het singuliere deel van de linkerintegrand van (2-24) wordt afgesplitst voor een deel van $\partial B(\tau)$ en via een Taylor ontwikkeling in τ exact berekend. Het overige deel wordt door een 4 punts -m.b.v. een Lagrange polynoom- quadratuur formule geïntegreerd, waarbij de steunpunten samenvallen met τ_j . De rechterintegrand van (2-24) wordt berekend met de Simpson regel. De integraalvergelijking (2-24) wordt zo voor elk punt $t_i = \tau_j$, $i=1,2..n$, waarop $\tau=0$, berekend en geeft dan een matrixvergelijking zoals (2-21).

Voor de symmetrische vormvaste Stokesgolf kwamen de testresultaten goed overeen met de theorie. Alleen kreeg na enige tijd de elevatie een zaagtand-achtig profiel. Dit kan niet vermeden worden door de tijdstap Δt kleiner te nemen. Longuet-Higgins & Cokelet gaven een fysische verklaring voor dit verschijnsel en door een middelings procedure via een zg. "smoothing" functie tussen vijf opeenvolgende punten toe te passen om de 5 tijdstappen wordt deze instabiliteit weggewerkt. Ten einde een niet vormvaste brekende golf te verkrijgen werd gedurende een korte tijd een gegeven drukverloop p_0 opgelegd en daarna weer nul gesteld. De resultaten die zij hiermee verkregen gelden nog steeds als de beste numerieke resultaten voor sterk niet-lineaire, niet vormvaste golven, hoewel periodiek, zie 6.2.

2.3.4. Periodieke niet-lineaire golven, complexe variant

De complexe potentiaal $\Phi(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ uit 13.4. is voor $z = x+iy \in \Omega$ analytisch, omdat $\Delta\phi=0 \wedge \Delta\psi=0$ voor $\underline{x} \in \Omega$. Als tevens de randwaarden $\Phi^+(z) = h(t)$ voor $z=t \in \Gamma$ bestaan en (Holder) continue zijn, dan zijn de volgende zg. Cauchy integralen te definiëren. Zie b.v. Heinrici (1986).

$$\Lambda(z)\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt \quad (2-25)$$

$$\text{met } \Lambda(z) = 0 \quad \text{als } z \in \Omega_u \quad (2-26a)$$

$$\Lambda(z) = \frac{1}{2} \quad \text{als } z \in \Gamma, \quad (2-25): \text{Cauchy hoofdwaaarde} \quad (2-26b)$$

$$\Lambda(z) = 1 \quad \text{als } z \in \Omega \quad (2-26c)$$

Indien z ligt op een hoekpunt van Γ dan moet $\Lambda(z)$ in (2-26b) gelijk gesteld worden aan de inwendige hoek gedeeld door 2π . In (2-25,26b) is $z \in \Gamma$ het complexe parameterpunt en $t \in \Gamma$ het complexe argumentpunt. De RIV (2-25,26b) is dus het complexe "equivalent" van de RIV (2-18,19). We herschrijven (2-25,26b) door het reële en imaginaire deel te splitsen.

$$\pi\phi(x,y) + \text{Re} \left[i \oint_{\Gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt \right] = 0 \quad z = x+iy \in \Gamma \quad (2-27a)$$

$$\pi\psi(x,y) + \text{Re} \left[\oint_{\Gamma} \frac{h(t)}{t-z} dt \right] = 0 \quad z = x+iy \in \Gamma \quad (2-27b)$$

Als nu op het ene deel van Γ $\text{Re}(h(t))=\phi(s)$ is gegeven en op het andere deel $\text{Im}(h(t))=\psi(s)$ dan leidt dit via resp. (2-27b) en (2-27a) tot twee Fredholm integraalvergelijkingen van de tweede soort die net zoals (2-18,19) m.b.v. de REM kunnen worden opgelost. Met als voordeel dat dit voor de complexe variant altijd tot een matrixsysteem met diagonaaldominantie leidt (zie appendix A.6). Hierna kan eventueel via (2-25,26c) $\phi(x,y)$ en $\psi(x,y)$ in Ω worden berekend. Aangezien (2-25,26abc) voor elke analytische functie in een domein Ω geldt, geldt dit dus ook voor de afgeleiden van $\Phi(z)$ naar z . Zo definiëren we de complexe snelheid $q(z)$ als;

$$q(z) = \frac{d}{dz} \Phi(z) = u+iv = \phi_x + i\psi_x = \phi_x - i\phi_y \quad (2-28)$$

En in (2-25,26abc) kan $\Phi(z)$ vervangen worden door $q(z)$.

Cokelet (1979) stelt hetzelfde probleem als Longuet-Higgins & Cokelet (1976) en gebruikt de uitkomsten voor ϕ_s en $q=\phi_n$ ($\Rightarrow \phi_x$ en ϕ_y) op de rand ∂B (dus Γ), om het interne snelheidsveld voor brekende golven te berekenen m.b.v. van (2-25,26c), waarin $\Phi(z)$ is vervangen door $q(z)$ (2-28).

Vinje & Brevig (1981) berekenen de elevatie (Lagrange schrijfwijze) van een brekende golf voor een constante diepte en periodiciteit van ϕ en ψ (2-11) op Γ_{24} . Met op de vrije rand Γ_1 de dynamische randwaarde als ϕ -rand en op de bodem Γ_3 de bodemconditie als $\psi=0$. Voor de REM gaat hij uit van (2-25,26b) met lineaire elementen voor ϕ en ψ . Het timesteppingsproces gebeurt m.b.v. een 4^e orde Hamming predictor-corrector methode. Door een lineaire golf een te grote steilheid te geven gaat de golf breken.

Dold & Peregrine (1985) passen (2-12) toe voor een gebied met constante diepte. I.p.v. de complexe potentiaal Φ in (2-25) werd gebruik gemaakt van

de complexe snelheid q (2-28) in (2-25) te substitueren, geïntegreerd over $\partial B(\tau) = e^{-ik\Gamma(s)}$. (s is de parametrisering van $\Gamma \Rightarrow \tau(s)$ die van ∂B .) Om aan (2-5) te voldoen werd geeist, met $z(s) \in \Gamma$ dat;

$$q(\bar{z}(s)-2ih) = \bar{q}(z(s)); \quad \bar{} \text{ is de complex toegevoegde} \quad (2-29)$$

Dit resulteerde in een extra term in (2-25), zodat q analytisch is in het gebied tussen Γ en zijn reflectie t.o.v. $y=-h$ en zodat tevens aan (2-29) is voldaan. Dezelfde procedure als Longuet-Higgins & Cokelet (1976) werd gebruikt om de complexe RIV, gesplitst in een reëel en imaginair deel, te discretiseren. Ook zij kregen na verloop van tijd het zaagtand profiel voor de elevatie, die via een "smoothing" functie werd glad gemaakt.

2.3.5. Niet-lineaire golven met randwaarden op Γ_{24} conform een niet-lineaire theorie

Fenton & Mills (1976) berekende de elevatie van een niet-lineaire eenling golf lopende van een gedeelte met een constante diepte naar een gedeelte met een helling. Op Γ_{24} werd gekozen voor randwaarden, die volgens de theorie een eenling golf beschrijven en die bij benadering exponentieel uitgedempt is op Γ_4 . Als beginwaarde werd de eenling golf gekozen behorende bij de constante diepte. Voor de timestepping werd het schema (2-16) gehanteerd voor een Lagrange beschrijving van de vrije rand Γ_1 . Zij gebruikten kwadratische (isoparametrische) elementen voor de REM, d.w.z. zowel de rand Γ als ϕ en q werden verdiscretiseerd door kwadratische interpolatie functie tussen de knooppunten, zie appendix B.3. Overigens bleek hun methode na enige tijdstappen instabiel te zijn, waarschijnlijk door reflectie op de randen Γ_{24} .

Ook Isaacson (1982) kiest voor een inkomende niet-lineaire eenling golf op Γ_2 voor een golfprobleem met uniforme diepte en een drijvend of vast lichaam aanwezig. Voor de beginwaarde werd de procedure uit de eerste alinea van 2.1.3 gekozen. Voor de timestepping van de vrije rand Γ_1 met Eulerse beschrijving (2-2a,4a) gebruikte Isaacson het expliciete schema (2-14). I.p.v. de fundamentele functie $F = -\frac{1}{2\pi} \ln r$ (2-18) gebruikte hij de Greense functie $G = -\frac{1}{2\pi} \ln r r_u$, $r = |\underline{x} - \underline{a}|$ en $r_u = |\underline{x} - \underline{a}_u|$, $\underline{a}_u = (a, -b-2h)$, uit appendix A.3. Hierdoor is automatisch aan (2-5) voor $y=-h$ voldaan, zodat de RIV (2-19) alleen wordt toegepast op Γ_{124} . Toepassing van de REM gebeurde met constante elementen. Om reflectie op de randen Γ_{24} te voorkomen, wordt de berekening gestopt als de verstrooide golven Γ_{24} hebben bereikt. Vanwege de toepassing van een expliciet schema en de timestepping via de middens van de elementen voor (2-4a), hebben de uitkomsten van Isaacson een zekere onnauwkeurigheid, zie 2.2.4 en 2.2.2. Aangezien het probleem in feite zwak niet-lineair is en Isaacson een zeer kleine S_j en Δt (2-23) kiest, groeit deze onnauwkeurigheid

niet uit tot een instabiliteit.

Overigens ben ik nog geen onderzoek tegen gekomen, die uitgaat van (2-10) op Γ_{24} met een niet-lineaire golf volgens een bepaalde niet-lineaire theorie als inkomende golf.

3. BEPALING VAN DE TRANSFORMATIE EN HET AFBEELDINGS GEBIED D

3.1. Probleemdefinitie en doelstelling

Het probleem van niet-lineaire golven wordt gedefinieerd door de Laplace veldvergelijking (2-1) in Ω en de randwaarden (2-2b,4b) (Lagrange beschrijving van de vrije rand) of (2-2a,4a) (Eulerse beschrijving van de vrije rand, een keuze wordt later gemaakt) op Γ_1 , (2-10) op Γ_{24} en (2-5) op Γ_3 . Per tijdstap wordt dit potentiaalprobleem opgelost m.b.v. de REM, zoals omschreven in 2.2.2. Echter door de bewegende rand Γ_1 (2-4a,b) moet dan per tijdstap de matrixvergelijking (2-22), die de discretisatie van de randintegraalvergelijking (2-18,19) is, worden opgebouwd en geïnverteerd.

Door nu het gebied Ω op een vast rekengebied D af te beelden, ontstaat de mogelijkheid om matrices op te stellen die constant zijn tijdens het tijdsproces, zie 1.3.3. Geeist wordt wel dat de Partiele Differentiaal Vergelijkingen: PDV-en in D, die de transformatie van D naar Ω en het getransformeerde potentiaalprobleem beschrijven, met de REM kunnen worden opgelost. Dit zodat alleen discretisatie nodig is van de vaste rand ∂D van D.

We beelden nu het fysisch gebied $\Omega(t)$ in het (x,y) vlak af op het rekengebied D in het (ξ,η) vlak. Vanwege de vorm van Ω , zie fig. 2-1, wordt voorlopig de rechthoek als rekengebied D gekozen als het meest voor de hand liggend. De rechthoek D heeft een hoogte of breedte H, en een lengte L. Zonder bewijs vermelden we dat de rand $\Gamma(t)$ wordt afgebeeld op de vaste rand ∂D en tevens stellen we dat de hoekpunten van Γ worden afgebeeld op de hoekpunten van ∂D .

$$\begin{array}{lll}
 \Gamma_1: y=\eta(x,t) & \longleftrightarrow & \partial D_1: \eta=0 \\
 \Gamma_2: x=0 & \longleftrightarrow & \partial D_2: \xi=0 \\
 \Gamma_3: y=-h(x) & \longleftrightarrow & \partial D_3: \eta=-H \\
 \Gamma_4: x=L & \longleftrightarrow & \partial D_4: \xi=L
 \end{array} \tag{3-0}$$

3.2. Bepaling van de transformatie: de conforme afbeelding

3.2.1. Wiskundige formuleringen van 2-D transformaties

De transformatie wordt wiskundig bepaald door twee PDV-en voor de x en y coördinaat in D in het (ξ,η) vlak: $\mathcal{L}\{x\}=0$ en $\mathcal{L}\{y\}=0$. Evenzo wordt het getransformeerde potentiaalprobleem in D in het (ξ,η) vlak: $\mathcal{L}\{\phi\}=0$ bepaald door een PDV. Met geschikte gegeven randwaarden op ∂D zijn deze PDV-en op te lossen. Voor een aantal transformaties of systemen wordt bekeken hoe deze PDV-en eruit zien, zie Thompson, Warsi & Mastin (1982).

Algemene quasi-lineaire elliptische transformaties.

Deze transformaties worden door de vergelijkingen (3-1) gegenereerd, waarbij de functies $P(\xi, \eta)$ en $Q(\xi, \eta)$ zg. zelf gekozen control functies zijn om in bepaalde delen van Ω met sterke krommingen een redelijke nauwkeurigheid te verkrijgen.

$$\Delta \xi = P(\xi, \eta) \quad \Delta \eta = Q(\xi, \eta) \quad \underline{\xi} = (\xi, \eta) \in D, \quad \underline{x} \in \Omega \quad (3-1)$$

De variabelen worden nu verwisseld om de transformatie van D naar Ω te verkrijgen, en we krijgen dan de 2 volgende PDV-en in D voor $x(\xi, \eta)$ en $y(\xi, \eta)$.

$$\begin{aligned} g_{22}^x x_{\xi\xi} - 2g_{12}^x x_{\xi\eta} + g_{11}^x x_{\eta\eta} + g(P x_{\xi} + Q x_{\eta}) &= \mathcal{L}\{x\} = 0 \quad \text{in } D \\ g_{22}^y y_{\xi\xi} - 2g_{12}^y y_{\xi\eta} + g_{11}^y y_{\eta\eta} + g(P y_{\xi} + Q y_{\eta}) &= \mathcal{L}\{y\} = 0 \quad \text{in } D \end{aligned} \quad (3-2)$$

M.b.v. Dirichlet randwaarden voor x en y op ∂D , welke aan elkaar gekoppeld zijn via hun functie voorschrift $f(x, y) = 0$ of parametrisering $(x(s), y(s))$ op Γ , is (3-2) in principe op te lossen. Zo kunnen we b.v. voor ∂D_1 stellen dat $x = \xi$, hieruit volgt op een bepaald tijdstip t_i dat voor y geldt op ∂D_1 : $y = \eta(\xi, t_i)$ door timestepping toe te passen van (2-4a) omgezet in de (ξ, η) variabelen.

Indien (3-2) met de randwaarden is opgelost (of eventueel tegelijkertijd met het getransformeerde potentiaalprobleem) dan wordt het getransformeerde potentiaalprobleem in D weergegeven door de volgende PDV;

$$g_{22}^{\phi} \phi_{\xi\xi} - 2g_{12}^{\phi} \phi_{\xi\eta} + g_{11}^{\phi} \phi_{\eta\eta} + g(P \phi_{\xi} + Q \phi_{\eta}) = \mathcal{L}\{\phi\} = 0 \quad \text{in } D \quad (3-3)$$

Met de randwaarden op Γ in het (x, y) vlak omgezet in randwaarden op ∂D in het (ξ, η) vlak voor het potentiaalprobleem en middels timestepping van de tijdsafhankelijke randwaarden, kan dan (3-3) worden opgelost. De PDV-en (3-2,3) zijn dus voor de transformatie in D : $\mathcal{L}\{x\} = 0$ en $\mathcal{L}\{y\} = 0$ en het getransformeerde potentiaalprobleem in D : $\mathcal{L}\{\phi\} = 0$ hetzelfde.

De coëfficiënten g_{ij} in (3-2,3) ($i, j = 1, 2$) zijn de schaalfactoren in het kwadraat van de afbeelding van D naar Ω . Deze schaalfactoren zijn in principe onbekende functies van (ξ, η) , die volgen uit de oplossing van (3-2) met Dirichlet randwaarden op ∂D . Hierdoor worden de schaalfactoren uniek bepaald door de vorm of geometrie van Ω , aangezien D vast is. De coëfficiënten g_{ij} vormen de de zg. metrische covariante symmetrische tensor g en de coëfficiënten g^{ij} de zg. metrische contravariante symmetrische tensor g^{-1} .

$$g = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad |g| = g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 \quad (3-4a)$$

$$g_{ij} = \partial x / \partial \xi_i \cdot \partial x / \partial \xi_j \quad i, j=1,2 \quad \text{met } x=(x,y) \quad \text{en } \xi_1=\xi, \xi_2=\eta \quad (3-4b)$$

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{12} & g^{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{g} \begin{bmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad |g^{-1}| = \frac{1}{g} \quad (3-4c)$$

We werken (3-4b) uit.

$$g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2 \quad g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2 \quad g_{12} = x_\xi y_\eta + y_\xi x_\eta \quad (3-5)$$

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 > 0$$

Invullen van (3-5) in (3-2) maakt de PDV-en (3-2) nu niet-lineair, ook wel quasi-lineair genoemd. De PDV-en (3-2,3) zijn elliptisch, omdat $4g_{12}^2 - 4g_{22}g_{11} = -4g < 0$ in geheel D, zoals blijkt uit (3-5). Verder definiëren we nog het zg. celoppervlakte J, oftewel de Jacobiaan van de afbeelding, en de zg. celratio $\mathbb{K}$.

$$J = J(\xi, \eta) = \sqrt{g} \quad \text{en} \quad \mathbb{K} = \mathbb{K}(\xi, \eta) = \sqrt{g_{11}/g_{22}} \quad (3-6)$$

Als een zeer klein vierkantje in D door (3-2) afgebeeld wordt op een vierhoekig gebiedje in Ω : de "cel", dan stelt J het oppervlakte voor en $\mathbb{K}$ stelt de lengte/breedte verhouding voor van deze cel.

Thompson e.a (1974) gebruikte de transformatie (3-2,5) om potentiaalstroming om vleugelprofielen te berekenen. Aangezien D een rechthoekig gebied is konden zij nu de EDM gebruiken om (3-2,5) op te lossen. Aangezien de schaalfactoren in de randwaarden voor het getransformeerde potentiaal probleem (3-3) voorkomen moest dit na de oplossing van (3-2,5) worden opgelost. Haussling & Coleman (1979) gebruikte dezelfde methode op een tijdstip t_i om een niet-lineaire golf, opgewekt door eenparig bewegende cilinder in Ω , uit te rekenen. Het probleem werd instationair gemaakt door de snelheid gedurende een instelperiode langzaam op te voeren. Aangezien (3-2,5) niet-lineair is, werd gebruik gemaakt van een zeer snelle iteratie methode om het stelsel met de EDM verdiscretiseerde niet-lineaire vergelijkingen (3-2,5) voor elke tijdstap op te lossen.

Quasiconforme lineaire elliptische transformaties.

Indien de schaalfactoren $\sqrt{g_{ij}}$ op een of andere manier worden voorgeschreven, dan spreekt men van een quasiconforme transformatie. Men kan dit b.v. doen door g_{ij} $i, j=1,2$ rechtstreeks als functies van (ξ, η) voor te schrijven. Voor de transformatie en het getransformeerde potentiaalprobleem krijgen we weer de PDV-en (3-2,3). die nu lineair zijn. Door g_{ij} voor te schrijven op een

dusdanige wijze dat $g_{11}g_{22}-g_{12}^2=g > 0$, zijn de PDV-en elliptisch. De functies $P(\xi, \eta)$ en $Q(\xi, \eta)$ in (3-2,3) volgen nu uit de onderstaande relaties (3-7), waarin ϵ_{ij}^m , $m=1,2$ de zg. Christoffelsymbolen zijn en g^{ij} de coëfficiënten van de contravariante tensor g^{-1} uit (3-4c) zijn.

$$P(\xi, \eta) = - \sum_{i,j=1}^2 \sum g^{ij} \epsilon_{ij}^1 \quad \text{en} \quad Q(\xi, \eta) = - \sum_{i,j=1}^2 \sum g^{ij} \epsilon_{ij}^2 \quad (3-7)$$

$$\epsilon_{ij}^m = - \sum_{k=1}^2 g^{km} (\partial g_{ik} / \partial \xi_j + \partial g_{jk} / \partial \xi_i - \partial g_{ij} / \partial \xi_k) \quad \text{met} \quad \xi_1 = \xi, \quad \xi_2 = \eta$$

Orthogonale transformaties.

Een afbeelding wordt orthogonaal genoemd als a priori geldt cq. wordt voorgeschreven, dat $g_{12}=0$ in geheel D . Deze transformaties worden gegenereerd door de volgende vergelijkingen voor $(\xi, \eta) \in D$ en $(x, y) \in \Omega$. (Vergelijk met (3-1).)

$$\Delta \xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathfrak{K}} \right) \quad \wedge \quad \Delta \eta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \eta} \quad \underline{\xi} = (\xi, \eta) \in D, \quad \underline{x} \in \Omega \quad (3-8)$$

In (3-8) is $\mathfrak{K}$ de celratio uit (3-6): $\mathfrak{K} = \sqrt{g_{11}/g_{22}} \Rightarrow \frac{1}{\mathfrak{K}} = \sqrt{g_{22}/g_{11}}$, die in principe nog onbekend is. Door verwisseling van de variabelen krijgen we dan de twee volgende PDV-en voor $x(\xi, \eta)$ en $y(\xi, \eta)$, $(\xi, \eta) \in D$.

$$g_{22} x_{\xi\xi} + g_{11} x_{\eta\eta} + \sqrt{g} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathfrak{K}} \right) x_{\xi} + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \eta} x_{\eta} \right) = \mathcal{L}\{x\} = 0 \quad \text{in } D \quad (3-9a)$$

$$g_{22} y_{\xi\xi} + g_{11} y_{\eta\eta} + \sqrt{g} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{\mathfrak{K}} \right) y_{\xi} + \frac{\partial \mathfrak{K}}{\partial \eta} y_{\eta} \right) = \mathcal{L}\{y\} = 0 \quad \text{in } D$$

$\Leftrightarrow$

$$x_{\xi\xi} + \mathfrak{K}^2 x_{\eta\eta} - \frac{1}{\mathfrak{K}} x_{\xi} x_{\xi} + \mathfrak{K} x_{\eta} x_{\eta} = \mathcal{L}\{x\} = 0 \quad \text{in } D \quad (3-9b)$$

$$y_{\xi\xi} + \mathfrak{K}^2 y_{\eta\eta} - \frac{1}{\mathfrak{K}} y_{\xi} y_{\xi} + \mathfrak{K} y_{\eta} y_{\eta} = \mathcal{L}\{y\} = 0 \quad \text{in } D$$

Een orthogonale afbeelding voldoet naast (3-9b) ook aan de volgende "pseudo" Cauchy-Riemann vergelijkingen (3-10) in D en op ∂D . Deze vergelijkingen (3-10) verzekeren namelijk a priori orthogonaliteit, d.i. $g_{12}=0$.

$$x_{\xi} = \mathfrak{K} y_{\eta} \quad \wedge \quad y_{\xi} = -\mathfrak{K} x_{\eta} \quad \text{in } D \text{ en op } \partial D \quad (3-10)$$

De PDV-en (3-9b) zijn elliptisch omdat $-4\mathfrak{K}^2 < 0$. De PDV-en (3-9b) worden door substitutie van (3-5,6) niet-lineair.

Het getransformeerde potentiaalprobleem wordt de PDV (3-11): $\mathcal{L}\{\phi\}=0$, die weer hetzelfde is als voor x en y in (3-9b).

$$\phi_{\xi\xi} + \mathfrak{K}^2 \phi_{\eta\eta} - \frac{1}{\mathfrak{K}} \phi_{\xi} \phi_{\xi} + \mathfrak{K} \phi_{\eta} \phi_{\eta} = \mathcal{L}\{\phi\} = 0 \quad \text{in } D \quad (3-11)$$

Conforme lineair elliptische transformaties.

Wanneer de transformatie orthogonaal is, d.i. $g_{12}=0$ en de schaafactoren $\sqrt{g_{11}} \wedge \sqrt{g_{22}}$ of de celratio $\mathbb{K}=\sqrt{g_{11}/g_{22}}$ worden voor geschreven als functies van (ξ, η) , dan wordt de transformatie conform genoemd. Meestal wordt dit gedaan door de celratio $\mathbb{K}$ als volgt voor te schrijven, zoals Mobley & Stewart (1980) doen;

$$\mathbb{K} = \mu \frac{p'(\xi)}{q'(\eta)} \quad \text{met} \quad p'(\xi) = \frac{dp}{d\xi} \quad \text{en} \quad q'(\eta) = \frac{dq}{d\eta} \quad (3-12)$$

In (3-12) zijn $p(\xi)$ en $q(\eta)$ gegeven zg. 1-D stretching functies, die dezelfde rol vervullen als de control functies P en Q . De constante μ is de zg. conforme module en wordt (voorlopig) gelijkgesteld aan 1: $\mu=1$. Substitutie van (3-12) in (3-9b) maakt de PDV-en nu lineair. De PDV-en blijven hierbij orthogonaal en elliptisch.

Het nadeel van het vastleggen van de schaafactoren en met name $g_{12}=0$ is, dat voor b.v. de randwaarde op ∂D_1 nu niet gesteld kan dat $x=\xi$; de verdeling $x(\xi)$ op ∂D_1 is nog onbekend. Oftewel men weet nog niet hoe de punten van ∂D_1 worden afgebeeld op Γ_1 , op de hoekpunten na. Middels een iteratieve procedure zal deze verdeling $x(\xi)$ op ∂D_1 en op ∂D_3 dan worden gevonden, zie 3.2.3. Overigens kunnen op bepaalde delen van ∂D voor het x danwel y randwaarden-probleem de randwaarden van het Neumann type zijn, zie 3.2.3. Voor Neumann randwaarden kan gebruik gemaakt worden van de "pseudo" Cauchy-Riemann vergelijkingen (3-10) met $\mathbb{K}$ volgens (3-12). Als $\mathbb{K}=1$ dan worden de "pseudo" Cauchy-Riemann vergelijkingen (3-10) de normale Cauchy-Riemann vergelijkingen.

Een transformatie is zuiver conform als geldt dat $g_{12}=0$ en $\mathbb{K}=1$. De PDV-en (3-9b,11) reduceren dan tot de Laplace vergelijkingen (3-13,14) in D in het (ξ, η) vlak. De enige schaafactor die dan overblijft als onbekende is de Jacobiaan van de afbeelding (3-5,6) $J=\sqrt{g}=g_{11}=g_{22}$, die niet voorkomt in de PDV-en.

$$x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} = \Delta_{\underline{\xi}} x = 0 \quad \wedge \quad y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} = \Delta_{\underline{\xi}} y = 0 \quad \text{in } D \quad (3-13)$$

$$\phi_{\xi\xi} + \phi_{\eta\eta} = \Delta_{\underline{\xi}} \phi = 0 \quad \text{in } D \quad (3-14)$$

In (3-13,14) is $\Delta_{\underline{\xi}}$ de Laplace operator in het $\underline{\xi}=(\xi, \eta)$ vlak, wat differentiatie naar ξ en η betekent. In het vervolg zullen we deze subindex weglaten, aangezien duidelijk is dat D het vaste rekengebied is en alle formuleringen dus in het (ξ, η) vlak plaats vinden. Bij verwijzingen naar appendices moet dan, indien nodig, voor Ω , Γ en $\underline{x}=(x,y)$ resp. gelezen worden D , ∂D en $\underline{\xi}=(\xi, \eta)$, terwijl een eventueel parameterpunt $\underline{a}=(a,b)$ in het (ξ, η) vlak ligt.

De transformatie voor $x(\chi, \zeta)$ en $y(\chi, \zeta)$ is zuiver conform, als $x_{\chi\chi} + x_{\zeta\zeta} = 0 \wedge$

$y_{\chi\chi} + y_{\zeta\zeta} = 0$. Door de substitutie $\chi = \mu p(\xi)$ en $\zeta = q(\eta)$ krijgen we de transformatie voor $x(\xi, \eta)$ en $y(\xi, \eta)$, die gegeven wordt door (3-9b) met voor $\mathbb{K}$ de relatie (3-12). Deze transformatie (3-9b, 12) is nu niet meer zuiver conform, maar kan genereerd worden uit een zuiver conforme afbeelding. Vandaar de naam conforme transformaties.

3.2.2. Motivering van de conforme afbeelding voor de transformatie

De transformatie en het getransformeerde potentiaalprobleem is gegeven door 3 randwaarden problemen in D en op ∂D voor $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ en $\phi(\xi, \eta)$. Deze problemen zijn gekoppeld via hun randwaarden op ∂D . De PDV-en in D zijn voor alle drie hetzelfde: $\mathcal{L}\{\phi\} = 0$, waarbij voor ϕ dus ook x of y gelezen mag worden. Bekeken wordt nu of deze PDV $\mathcal{L}\{\phi\} = 0$, middels de (gegeneraliseerde) stelling van Green en de fundamentele functie, kan worden omgezet in een Rand Integraal Vergelijking: RIV. Als dit mogelijk is, dan kan de REM worden toegepast op deze 3 randwaarden problemen, zodat alleen discretisatie op ∂D nodig is, zie begin appendix B en B.1.

Een tweede orde PDV in het (ξ, η) vlak ziet er in het algemeen als volgt uit;

$$\mathcal{L}\{\phi\} = g^{11}\phi_{\xi\xi} + 2g^{12}\phi_{\xi\eta} + g^{22}\phi_{\eta\eta} + p^1\phi_{\xi} + p^2\phi_{\eta} + a\phi = h(\xi, \eta) \quad (3-15)$$

In (3-15) zijn g^{ij} , p^i , $i, j = 1, 2$ en a de zg. coëfficiënten van de PDV, en $h(\xi, \eta)$ het inhomogene deel van de PDV. Vergelijking van de PDV (3-15) met de algemene quasi-lineaire transformatie en quasiconforme transformatie (3-2, 3) levert dan;

$$gg^{11} = g_{22}, \quad gg^{12} = -g_{12}, \quad gg^{22} = g_{11}, \quad p^1 = P, \quad p^2 = Q, \quad a = 0 \text{ en } h = 0 \quad (3-16a)$$

En vergelijking van de PDV (3-15) met de orthogonale transformatie en conforme transformatie (3-9b, 11) levert;

$$g^{11} = 1, \quad g^{12} = 0, \quad g^{22} = \mathbb{K}^2, \quad p^1 = -\frac{1}{\mathbb{K}}\mathbb{K}_{\xi}, \quad p^2 = \mathbb{K}\mathbb{K}_{\eta}, \quad a = 0 \text{ en } h = 0 \quad (3-16b)$$

We definiëren nu de toegevoegde operator $\mathcal{L}^*$ van $\mathcal{L}$, zodanig dat;

$$\chi\mathcal{L}\{\phi\} - \phi\mathcal{L}^*\{\chi\} = \nabla \cdot \underline{\mathcal{B}}\{\phi, \chi\} \quad \text{met} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (3-17)$$

Toepassing van het divergentie theorema van Gauss, d.i. partieel integreren, op (3-17) geeft dan de tweede (gegeneraliseerde) stelling van Green.

$$\iint_D (\chi\mathcal{L}\{\phi\} - \phi\mathcal{L}^*\{\chi\}) d\xi d\eta = \oint_{\partial D} \underline{n} \cdot \underline{\mathcal{B}}\{\phi, \chi\} dS \quad (3-18)$$

In (3-18) $\hat{=}$ (B-3) is $\underline{n}$ de uitwendige normaalvector van D , S de booglengte van ∂D of omtrek van D en $\underline{\mathcal{B}}\{\phi, \chi\}$ een 1^e orde partiele differentiaal vector-operator, de zg. bilineaire concomitant, die volgt uit de definitie (3-22) van de toegevoegde operator $\mathcal{L}^*$ van $\mathcal{L}$. Verder is $\chi(\xi; \underline{a})$ de zg. fundamentele

functie, die voldoet aan (B-4)=(3-19).

$$\mathcal{L}^* \{ \chi(\underline{\xi}, \underline{a}) \} = -\delta(\underline{\xi} - \underline{a}) \quad \underline{\xi}, \underline{a} \in \mathbb{R}^2 \quad (3-19)$$

$$\text{en} \quad \iint_D \phi(\underline{\xi}) \delta(\underline{\xi} - \underline{a}) d\xi d\eta = \phi(\underline{a}) \quad \underline{\xi}, \underline{a} \in D \quad (3-19a)$$

Aangezien de PDV (3-15, 16a of b) homogeen is, gaat de stelling van Green (3-18) met de eis voor de fundamentele functie χ (3-19, 19a) over in de RIV (3-20) $\hat{=}$ (B-5) voor $\underline{\xi}, \underline{a} \in \partial D$. Hierbij dient speciale aandacht gegeven te worden aan $\Lambda(\underline{a})$ als $\underline{a} \in \partial D$, i.v.m. een eventueel optredende singulariteit in χ als $\underline{\xi} = \underline{a}$. $\Lambda(\underline{a}) = 0$ als $\underline{a} \in D_u$ en $\Lambda(\underline{a}) = 1$ als $\underline{a} \in D$. s (en s) is de parametrisering van ∂D .

$$\Lambda(\underline{a}) \phi(\underline{a}) = \oint_{\partial D} \underline{n}(\underline{\xi}) \cdot \underline{B} \{ \phi(\underline{\xi}), \chi(\underline{\xi}; \underline{a}) \} dS_{\underline{\xi}} \quad \underline{\xi}(s), \underline{a}(s) \in \partial D \quad (3-20)$$

De bilineaire concomitant $\underline{B}$ in de RIV (3-20) bevat randwaarden voor $\mathcal{R}\{\phi\}$ - $\mathcal{R}$ is een 1^e orde partiele differentiaal randoperator - die gegeven zijn: $f(s)$ en die nog onbekend zijn. Discretisatie van de RIV (3-20) met de REM levert de matrixvergelijking (3-21) voor de nog onbekende discrete randwaarden $\underline{u}$ en de gegeven discrete randwaarden $\underline{f}$ op de knooppunten $\underline{\xi}(s_j) = \underline{\xi}_j$ $j=1, 2, \dots, n$ van ∂D .

$$\underline{A} \underline{u} = \underline{B} \underline{f} = \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = \underline{A}^{-1} \underline{b} \quad (3-21)$$

Wil de REM dus toepasbaar zijn voor een transformatie en een getransformeerd potentiaalprobleem, dan dient voor de homogene PDV (3-15) met (3-16a of b) een toegevoegde operator $\mathcal{L}^*$ gedefinieerd te worden, zodat met (3-17) de stelling van Green (3-18) ontstaat, en dient de fundamentele functie χ bekend te zijn, die voldoet aan (3-19). Alhoewel de REM ook kan worden toegepast op sommige parabolische en hyperbolische PDV-en, zie b.v. einde van B.1, wordt hij in feite alleen gebruikt voor randwaarden problemen, waarvan de PDV elliptisch is. De PDV (3-15, 16a of b) is voor alle in 3.2.1 genoemde transformaties elliptisch en dat geldt ook voor zijn toegevoegde PDV.

Om een toegevoegde operator $\mathcal{L}^*$ van $\mathcal{L}$ te kunnen definiëren, dient de operator $\mathcal{L}$, dus de PDV (3-15), lineair te zijn. Door substitutie van (3-5, 6) in (3-16a of b) wordt de PDV (3-15) niet-lineair voor $\mathcal{L}\{x\} = 0$ en $\mathcal{L}\{y\} = 0$. Afsplitsing van het niet-lineaire deel zoals in (B-8) wordt voorgesteld heeft weinig zin, omdat praktisch alle termen in de PDV (3-15) niet-lineair worden. Bovendien ontstaat dan een inhomogene PDV, zodat discretisatie in D nodig is. Vanwege deze redenen vallen de algemene quasi-lineaire transformatie en de orthogonale transformatie af, daar zij niet met de REM kunnen worden opgelost.

Voor de quasi conforme transformatie stellen we dat g_{ij} $i, j=1, 2$ en via (3-7) P en Q bekend zijn als functies van (ξ, η) . Voor de conforme transfor-

matie stellen we dat $\mathbb{K}$ een functie is van (ξ, η) volgens (3-12), waarin de 1-D stretching functies bekend zijn. De PDV (3-15, 16a of b) is lineair en de toegevoegde operator $\mathcal{L}^*$ van $\mathcal{L}$ wordt als volgt gedefinieerd;

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^*\{\chi\} &= (g^{11}\chi)_{\xi\xi} + 2(g^{12}\chi)_{\xi\eta} + (g^{22}\chi)_{\eta\eta} - (p^1\chi)_{\xi} - (p^2\chi)_{\eta} + a\chi \\ &= g^{11}\chi_{\xi\xi} + 2g^{12}\chi_{\xi\eta} + g^{22}\chi_{\eta\eta} + (-p^1 + 2g_{\xi}^{11} + 2g_{\eta}^{12})\chi_{\xi} \\ &\quad + (-p^2 + 2g_{\xi}^{12} + 2g_{\eta}^{22})\chi_{\eta} + (a - p_{\xi}^1 - p_{\eta}^2 + g_{\xi\xi}^{11} + 2g_{\xi\eta}^{12} + g_{\eta\eta}^{22})\chi\end{aligned}\quad (3-22)$$

In (3-15, 22) zijn dus de coëfficiënten g^{ij} , p^i , $i, j=1, 2$ functies van (ξ, η) en $a=0$. (Voor de conforme transformatie geldt overigens uit (3-16b) dat $g^{11}=1$ en $g^{12}=0$.) Voor de bilineaire concomitant $\mathbb{B}=(\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2)$ in de vergelijkingen (3-18, 20) volgt dan met (3-17) en (3-15, 22);

$$\mathbb{B}_1\{\phi, \chi\} = g^{11}(\chi\phi_{\xi} - \phi\chi_{\xi}) + g^{12}(\chi\phi_{\eta} - \phi\chi_{\eta}) + (p^1 - g_{\xi}^{11} - g_{\eta}^{12})\phi\chi \quad (3-23)$$

$$\mathbb{B}_2\{\phi, \chi\} = g^{12}(\chi\phi_{\xi} - \phi\chi_{\xi}) + g^{22}(\chi\phi_{\eta} - \phi\chi_{\eta}) + (p^2 - g_{\xi}^{12} - g_{\eta}^{22})\phi\chi$$

De toegevoegde operator $\mathcal{L}^*$ wordt herschreven in de vorm van een algemene 2^e orde PDV operator, zie (3-15, 22).

$$\mathcal{L}^*\{\chi\} = g^{11}\chi_{\xi\xi} + 2g^{12}\chi_{\xi\eta} + g^{22}\chi_{\eta\eta} + b^1\chi_{\xi} + b^2\chi_{\eta} + c\chi \quad (3-24)$$

$$\text{en} \quad b^1 = -p^1 + 2g_{\xi}^{11} + 2g_{\eta}^{12}, \quad b^2 = -p^2 + 2g_{\xi}^{12} + 2g_{\eta}^{22}$$

$$c = a - p_{\xi}^1 - p_{\eta}^2 + g_{\xi\xi}^{11} + 2g_{\xi\eta}^{12} + g_{\eta\eta}^{22} \quad \text{met } a=0$$

In (3-24) zijn de coëfficiënten g^{ij} , b^i $i, j=1, 2$ en c dus weer functies van (ξ, η) . De PDV (3-24) is weer elliptisch omdat (3-15) met (3-16a of b) elliptisch is. De lineaire PDV (3-24) moet nu voldoen aan (3-19). Om de fundamentele functie $\chi(\underline{\xi}; \underline{a})$ te vinden, die voldoet aan (3-19, 24), voeren we de coördinaten transformatie $\alpha(\xi, \eta)$ en $\beta(\xi, \eta)$ uit zodanig dat (3-24) in zijn kanonieke of normaalvorm (3-25) wordt geschreven voor de onafhankelijke variabelen $\underline{\alpha}=(\alpha, \beta)$.

$$\mathcal{L}^*\{\chi(\underline{\alpha}; \underline{\alpha}_0)\} = \chi_{\alpha\alpha} + \chi_{\beta\beta} + d\chi_{\alpha} + e\chi_{\beta} + f\chi = -\delta(\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_0) \quad (3-25)$$

De fundamentele functie $\chi(\underline{\alpha}; \underline{\alpha}_0)$ in (3-25) heeft de volgende vorm, volgens Garabedian (1976);

$$\chi(\underline{\alpha}; \underline{\alpha}_0) = -\frac{1}{2\pi} A(\underline{\alpha}; \underline{\alpha}_0) \ln r + B(\underline{\alpha}; \underline{\alpha}_0) \quad (3-26)$$

$$\text{en} \quad A(\underline{\alpha}; \underline{\alpha}_0) \neq 0 \wedge A(\underline{\alpha}_0; \underline{\alpha}_0) = 1; \text{ de zg. Riemann functie}$$

$$B(\underline{\alpha}; \underline{\alpha}_0) \text{ is regulier als } \underline{\alpha} = \underline{\alpha}_0$$

$$r = |\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_0|; \text{ de afstand tussen } \underline{\alpha} \text{ en het parameterpunt } \underline{\alpha}_0$$

Voor de fundamentele functie $\chi(\underline{\xi}; \underline{a})$ van (3-19, 24) definiëren we de volgende

"afstand" $R(\underline{\xi}; \underline{a})$;

$$R = |\underline{\alpha} - \underline{\alpha}_0| \quad \text{met} \quad \underline{\alpha} = (\alpha(\xi, \eta), \beta(\xi, \eta)) \wedge \underline{\alpha}_0 = (\alpha(a, b), \beta(a, b)) \quad (3-27)$$

Analoog met (3-26) kan dan bewezen worden dat de fundamentele functie χ voor (3-19, 24) de volgende vorm heeft;

$$\chi(\underline{\xi}; \underline{a}) = -\frac{1}{2\pi} A(\underline{\xi}; \underline{a}) \ln R + B(\underline{\xi}; \underline{a}) \quad (3-28)$$

en $A(\underline{\xi}; \underline{a}) \neq 0 \wedge A(\underline{a}, \underline{a}) = 1$; de zg. Riemann functie

$B(\underline{\xi}; \underline{a})$ is regulier als $\underline{\xi} = \underline{a}$

R , zie (3-27)

Echter het vinden van de transformatie $\alpha(\xi, \eta)$ en $\beta(\xi, \eta)$ die (3-24) in zijn normaalvorm (3-25) overzet is een moeilijke, zelfs vaak een onmogelijke zaak. Dit geldt ook voor het vinden van de Riemann functie $A(\underline{\xi}; \underline{a})$ en $B(\underline{\xi}; \underline{a})$, zie Garabedian (1976). Om deze reden is dus de REM niet toepasbaar, omdat we de fundamentele functie χ (3-28) meestal niet kunnen vinden die voldoet aan (3-19, 24).

Dit geldt niet als alle coëfficiënten in de PDV (3-15) en dus in de toegevoegde PDV (3-24) constanten zijn. Middels een nu makkelijk te vinden transformatie $\alpha(\xi, \eta)$ en $\beta(\xi, \eta)$ is de PDV (3-24) om te zetten in zijn normaalvorm (3-25), waarbij de coëfficiënten d , e en f constanten zijn. En door de substitutie van de vergelijking $\chi(\alpha, \beta) = \exp(-\frac{d}{2}\alpha - \frac{e}{2}\beta) \cdot u(\alpha, \beta)$ in de normaalvorm (3-25) krijgen we de Laplace vergelijking $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} = 0$, danwel de Helmholtz vergelijking $u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + \gamma u = 0$, γ een constante. Hiervan zijn de fundamentele functies resp. de logaritmische potentiaal (A-9a) uit appendix A, danwel de (gemodificeerde als $\gamma < 0$) Besselfunctie van de 2^e soort (d.i. de Neumannfunctie) of van de 3^e soort (d.i. de Hankelfunctie, zie einde A.6) allebei met index of orde 0. In deze Besselfuncties is $\ln(\sqrt{\gamma}R)$ verdisconteerd.

Gesteld wordt nu, dat de schaaufactoren in het kwadraat voor de quasi-conforme transformatie; g_{22} , g_{12} en g_{11} constanten zijn in geheel D . Voor $g_{12} \neq 0$ is deze aanname eigenlijk onzinnig. Uit (3-7) volgt dan dat $P=Q=0$. Overeenkomstig stellen we dan voor een conforme transformatie dat de celratio in het kwadraat $\kappa^2 = \mu^2 = g^{22}$ constant is in geheel D . De coëfficiënten in de PDV (3-15, 16a of b) en zijn toegevoegde PDV (3-24) g^{11} , g^{12} en g^{22} zijn constanten, waarbij voor de conforme transformatie geldt dat $g^{11}=1$ en $g^{12}=0$. Tevens is af te leiden dat $p^1=p^2=0$ en met (3-24) dat $b^1=b^2=0$. We kunnen dus schrijven voor (3-15, 16a of b) en (3-24);

$$\mathcal{L}\{\phi\} = g^{11}\phi_{\xi\xi} + 2g^{12}\phi_{\xi\eta} + g^{22}\phi_{\eta\eta} = 0 \quad (3-29)$$

$$\mathcal{L}^*\{\chi\} = g^{11}\chi_{\xi\xi} + 2g^{12}\chi_{\xi\eta} + g^{22}\chi_{\eta\eta} = \mathcal{L}\{\chi\} \wedge \mathcal{L}\{\chi\} = -\delta(\underline{\xi} - \underline{a})$$

De operator $\mathcal{L}$ is nu aan zichzelf toegevoegd: $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$. De PDV (3-29) wordt in zijn normaalvorm omgezet, dit levert de Laplace vergelijking $\chi_{\alpha\alpha} + \chi_{\beta\beta} = 0$. Aangezien de transformatie $\alpha(\xi, \eta)$ en $\beta(\xi, \eta)$ nu makkelijk te vinden is, krijgt men met (3-16a), $P=Q=0$ en (3-4a,c) de fundamentele functie $\chi(\underline{\xi}, \underline{a})$ (3-30) voor de quasi conforme transformatie, en de fundamentele functie $\chi(\underline{\xi}, \underline{a})$ (3-31), zie ook Walker (1981), voor de conforme transformatie.

$$\begin{aligned}\chi(\underline{\xi}, \underline{a}) &= -\frac{\sqrt{g}}{2\pi} \ln R = -\frac{\sqrt{g}}{2\pi} \ln \sqrt{(g(\underline{\xi}-\underline{a})) \cdot (\underline{\xi}-\underline{a})} \\ &= -\frac{\sqrt{g}}{2\pi} \ln \sqrt{g_{11}(\xi-a)^2 + 2g_{12}(\xi-a)(\eta-b) + g_{22}(\eta-b)^2}\end{aligned}\quad (3-30)$$

$$\chi(\underline{\xi}; \underline{a}) = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln R = -\frac{1}{2\pi\mu} \ln \sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2 / \mu^2} \quad (3-31)$$

Substitutie van $\chi(\underline{\xi}; \underline{a})$ (3-30 of 31) in de bilineaire concomitant $\underline{B}=(B_1, B_2)$ (3-23), waarvan de termen met $\phi\chi$ nul zijn en met (3-16a of b), levert de RIV (3-20). Discretisatie van de RIV (3-20) met de REM geeft vervolgens de matrixvergelijking (3-21): $\underline{A}\underline{u}=\underline{b}$.

De schaafactoren g_{ij} , $i, j=1, 2$ of $\mathbb{K}=\mu$ zijn uniek bepaald door de geometrie of vorm van Ω . Afschatting van de schaafactoren door constanten heeft als consequentie dat als $\Omega(t)$ per tijdstap verandert, deze constante schaafactoren per tijdstap veranderen. T.a.v. de conforme module μ zie 3.3.1. Hierdoor veranderen de fundamentele functies (3-30 of 31) per tijdstap, zodat de matrix $\underline{A}$ in (3-21) niet constant zal zijn tijdens het tijdsproces. Dit is in strijd met de in 1.4 en 3.1 geformuleerde 'eis'.

De enige geschikte transformatie die nog over blijft is de zuiver conforme afbeelding: $g_{12}=0$ en $g_{11}=g_{22} \Rightarrow \mathbb{K}=\mu=1$. De PDV (3-15) met (3-16b) die aan zichzelf is toegevoegd wordt de Laplace vergelijking. De fundamentele oplossing is de logaritmische potentiaal (3-32)=(A-9a);

$$\begin{aligned}\chi(\underline{\xi}; \underline{a}) &= F(\underline{\xi}; \underline{a}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln |\underline{\xi}-\underline{a}| = -\frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2}\end{aligned}\quad (3-32)$$

In (3-32) zijn de schaafactoren verdwenen. De RIV (3-20) wordt nu met (3-32), (3-23) en $(\partial/\partial\xi, \partial/\partial\eta) \cdot \underline{n} = \partial/\partial n$ de RIV (3-32,33)=(2-18,19)=(A-9a,23,24b).

$$\Lambda(\underline{a})\phi(\underline{a}) = \oint_{\partial D} F(\underline{\xi}; \underline{a})q(\underline{\xi})dS_{\underline{\xi}} - \oint_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial n}(\underline{\xi}; \underline{a})\phi(\underline{\xi})dS_{\underline{\xi}} \quad \Leftrightarrow \quad (3-33)$$

$$H\{\phi\} = G\{q\} \quad \text{en} \quad \underline{\xi}(s), \underline{a}(s) \in \partial D$$

In (3-33) is $\Lambda(\underline{a})=1/2$, tenzij de knooppunten in de hoekpunten liggen, dan geldt t.p.v. de hoekpunten $\Lambda(\underline{a})=1/4$. Voor de rand integraal operator notatie, zie appendix B.2. En $q=\phi_n=\partial\phi/\partial n$. Discretisatie met de REM van

(3-32,33), zie 2.2.3 en appendix B.2,3,4, geeft dan;

$$H\phi = Gq \quad (3-34)$$

Reorganisatie van (3-34) in onbekende discrete randwaarden $\underline{u}$ en gegeven discrete randwaarden $\underline{f}$ op de knooppunten van ∂D geeft weer de matrixvergelijking (3-21): $\underline{Au} = \underline{b}$. Aangezien er geen schaaufactoren in (3-32,33) voorkomen, blijven de matrices H en $Q \Rightarrow B$ en A gedurende het gehele tijdsproces constant. Er is dus maar 1 keer matrix inversie van A nodig in het begin van het tijdsproces. Alleen de Jacobiaan is overgebleven en deze komt voor in de randwaarden, die tijdsafhankelijk zijn. Hierdoor zijn alleen de vectoren in (3-34,21) tijdsafhankelijk.

Conclusie: alleen de zuivere conforme afbeelding, leidt tot 3, via hun tijdsafhankelijke randwaarden op ∂D , gekoppelde randwaardenproblemen in D voor het potentiaalprobleem van niet-lineaire golven in Ω , die opgelost kunnen worden met de REM en waarvan de resulterende matrices constant zijn tijdens het timesteppingsproces. Deze 3 randwaarden problemen zijn door de zuivere conforme afbeelding potentiaalproblemen volgens A.1, omdat de 3 PDV-en in D de Laplace vergelijkingen (3-14,15) zijn. Voor de 3 potentiaalproblemen leidt dit dus tot de 3 RIV-en (3-33,32) op ∂D en door discretisatie van de REM tot de 3 matrixvergelijkingen (3-34,21). In (3-35) zijn $x_n = \partial x / \partial n$ en $y_n = \partial y / \partial n$, die dus van het Neumann type zijn, als zij zijn gegeven. En in (3-36) is $q = \phi_n = \partial \phi / \partial n$.

$$H\{x\} = G\{x_n\} \quad \wedge \quad H\{y\} = G\{y_n\} \quad \Rightarrow \quad Hx = Gx_n \quad \wedge \quad Hy = Gy_n \quad (3-35)$$

$$H\{\phi\} = G\{q\} \quad \Rightarrow \quad H\phi = Gq \quad (3-36)$$

Vanaf nu we spreken van de conforme afbeelding, als we in feite de zuivere conforme transformatie of afbeelding bedoelen.

3.2.3. Niet-lineaire golven opgelost m.b.v de conforme afbeelding op de rechthoek D

De randwaarden voor de conforme afbeelding op ∂D worden geformuleerd voor x of $x_n = \{x_\eta^1, -x_\xi^2, -x_\eta^3, x_\xi^4\}$ en y of $y_n = \{y_\eta^1, -y_\xi^2, -y_\eta^3, y_\xi^4\}$, zie (3-0). Voor het potentiaalprobleem worden de randwaarden (2-2a), (2-5) en (2-10) omgezet in de randwaarden voor (ξ, η) op ∂D . Ook de kinematische randwaarde (2-4a) wordt omgezet voor (ξ, η) op ∂D_1 . Er is gekozen voor een Eulerse beschrijving van de rand Γ , we komen hierop terug op het eind van de paragraaf. Er wordt gebruik gemaakt van de Cauchy-Riemann vergelijkingen (3-10) met $\Re=1$ op ∂D ;

$$x_\xi = y_\eta \quad \wedge \quad x_\eta = -y_\xi \quad \text{op } \partial D \text{ en in } D \quad (3-37)$$

Met behulp van (3-37) kunnen we nu de randwaarden op ∂D voor x of x_n en y of y_n opstellen op een tijdstip $t=t_1$, zodat de conforme afbeelding (3-13) op

een tijdstip $t=t_i$ eenduidig bepaald is, zie onderstaande fig. 3-1,2 en verder (3-0). Deze aanpak is hetzelfde als die van Mobley & Stewart (1980), alleen met $R=1$.

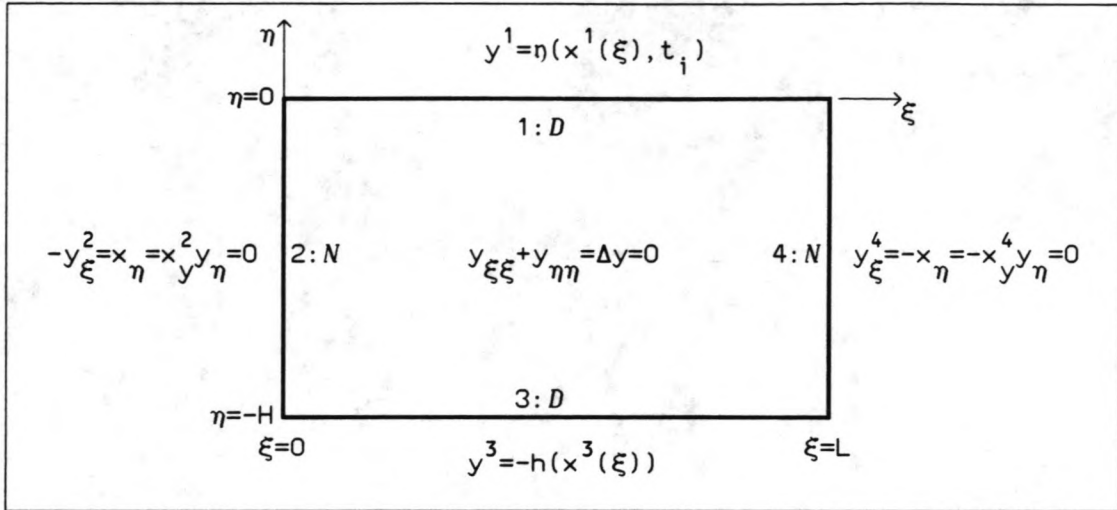


Fig. 3-1 De randwaarden y op ∂D voor de conforme afbeelding

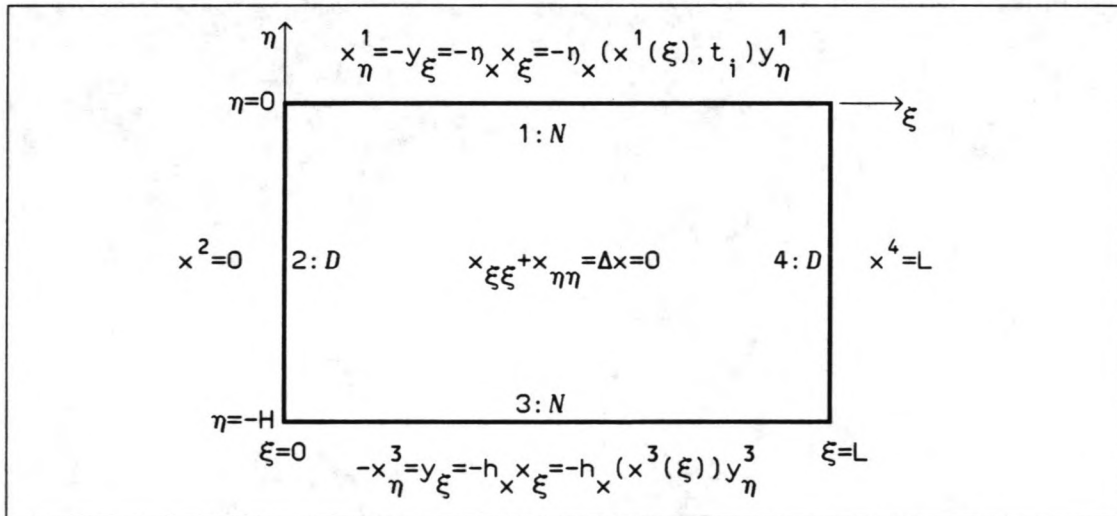


Fig. 3-2 De randwaarden x op ∂D voor de conforme afbeelding

De hoofdletters in fig. 3-1,2 in Italics slaan op een Dirichlet of Neumann randwaarde. De superindices geven het desbetreffende deel van de rand ∂D aan. De conforme afbeelding is nu eenduidig gegeven door de 2 RIV-en (3-35) op ∂D .

De randwaarden (2-2a,4a), (2-10) en (2-5) worden omgezet in randwaarden op resp. ∂D_1 , ∂D_{24} en ∂D_3 in de (ξ, η) variabelen. We maken hierbij gebruik van de volgende relaties;

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(\xi, \eta) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3-38)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{J}(y_{\eta} \phi_{\xi} - y_{\xi} \phi_{\eta}) \quad \text{en} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{J}(x_{\xi} \phi_{\eta} - x_{\eta} \phi_{\xi}) \quad (3-39)$$

$$J = \sqrt{g} = x_{\xi}^2 + x_{\eta}^2 = y_{\xi}^2 + y_{\eta}^2 = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \quad (3-40)$$

In het bijzonder kan voor de randen ∂D_{24} nog gesteld worden dat $\frac{dx}{dt}=0$ en $-y_{\xi}=x_{\eta}=0$. Voor de Eulerse kinematische randwaarde (2-4a) met gebruikmaking van (3-37,39,40) en $\eta_x = y_{\xi}/x_{\xi} = -x_{\eta}/y_{\eta}$ wordt dan verkregen (3-41a) en voor de Lagrange kinematische randwaarde (2-4b) met (3-37,39,40) wordt dan verkregen (3-41b).

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\phi_{\eta}}{y_{\eta}} \quad \text{op } \partial D_1 \quad (3-41a)$$

$$\frac{Dx}{Dt} = \frac{1}{J}(y_{\eta} \phi_{\xi} + x_{\eta} \phi_{\eta}) \quad \text{en} \quad \frac{Dy}{Dt} = \frac{1}{J}(y_{\eta} \phi_{\eta} - x_{\eta} \phi_{\xi}) \quad \text{op } \partial D_1 \quad (3-41b)$$

Voor het potentiaalprobleem $\Delta_{\xi} \phi = 0$ in D worden de randwaarden (2-2a), (2-10) en (2-5) omgezet in randwaarden op ∂D in het (ξ, η) vlak m.b.v. (3-37,38,39,40). De atmosferische druk aan het oppervlak wordt nul gesteld, d.w.z. $p_0=0$ en een inkomende golf wordt voorgeschreven door $\phi^I(x, y, t)$ voor $x=0$.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{1}{J}(y_{\eta} \phi_{\xi} + x_{\eta} \phi_{\eta}) \frac{dx}{dt} + \frac{1}{J}(y_{\eta} \phi_{\eta} - x_{\eta} \phi_{\xi}) \frac{dy}{dt} - g_z \eta - \frac{1}{2J}(\phi_{\xi}^2 + \phi_{\eta}^2) \quad \text{op } \partial D_1 \quad (3-42)$$

$$\frac{\phi_{\xi}}{x_{\xi}} - \frac{\partial \phi}{c \partial t} = \phi^I(y^2(\eta), t) - \frac{\phi_{\eta}}{c x_{\xi}} \frac{dy}{dt} \quad \text{op } \partial D_2 \quad (3-43)$$

$$\phi_{\eta} = 0 \quad \text{op } \partial D_3 \quad (3-44)$$

$$\frac{\phi_{\xi}}{x_{\xi}} + \frac{\partial \phi}{c \partial t} = \frac{\phi_{\eta}}{c x_{\xi}} \frac{dy}{dt} \quad \text{op } \partial D_4 \quad (3-45)$$

Laten nu alle benodigde gegevens op vorige tijdstippen bekend zijn. Middels expliciete timestepping met b.v. (2-14) wordt dan op een tijdstip $t=t_i$ gekregen uit (3-41a of b): $\eta(x^1(\xi), t_i)$ of $x^1(\xi)$ en $y^1(\xi)$ en de conforme afbeelding is nu gegeven, zoals geformuleerd in fig. 3-1,2. Door expliciete timestepping van (3-42) en (3-43,45), resulterend in Dirichlet randwaarden, of impliciete timestepping van (3-43,45), resulterend in Robin randwaarden, is dan het volgende randwaarde potentiaalprobleem, zoals geformuleerd in fig. 3-3, bekend op tijdstip $t=t_i$.

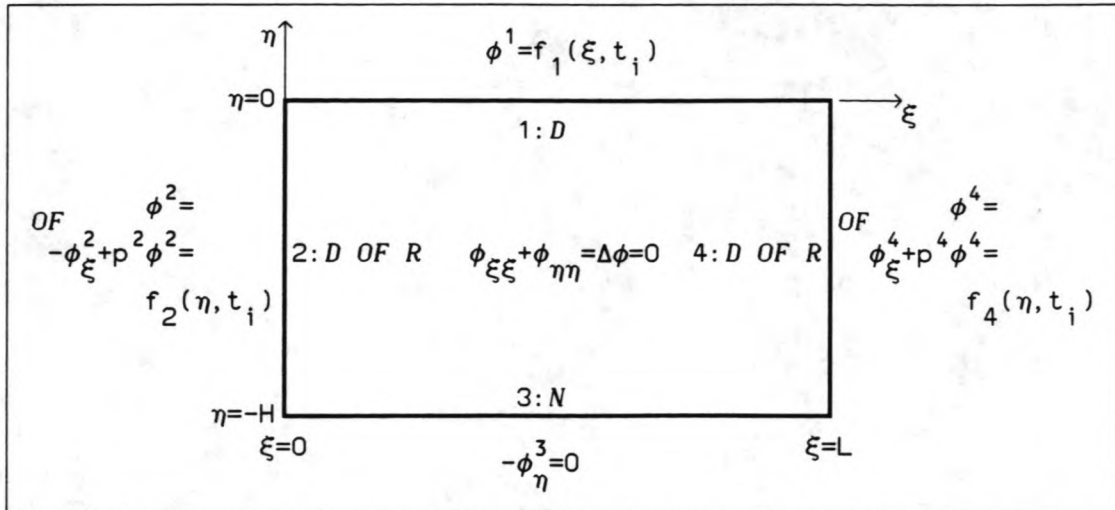


Fig. 3-3 Het potentiaalprobleem op een tijdstip t_i op D en ∂D

Door de conforme afbeelding in fig. 3-1,2 en het potentiaalprobleem in fig. 3-3 te berekenen, allebei met de REM, worden alle gegevens gevonden voor een volgende timestepping. Bij toepassing van een impliciet schema voor (3-43) en (3-45) zal de berekening van de conforme afbeelding plaats dienen te vinden voor de berekening van het potentiaalprobleem. Indien elke timestepping m.b.v. impliciete schema's gebeurt, dan zal de conforme afbeelding simultaan met het potentiaalprobleem op een tijds-iteratieve wijze berekend worden.

Voor de toepassing van de REM wordt de rechthoek D in N equidistante lineaire elementen met lengte S , zie appendix B.3,4. Als het aantal elementen in de lengte l en in de breedte m bedraagt, dan dient te gelden dat $(lS)/(mS) = l/m = L/H = \mu_\Omega$, zie 3.3.1. T.a.v. de problemen voor de REM in de hoekpunten van D , wordt voorlopig gekozen om deze af te ronden volgens de methode van Brebbia (1978), zie appendix B.5. Toepassing van de REM voor lineaire elementen levert dan de matrices H en G , waarbij de integralen (voor zover niet singulier, anders analytisch) m.b.v. van de 4-punts Gausskwadratuur zijn berekend, zie appendix B.4. Voor (3-35,36) krijgt men na reorganisatie van bekende en onbekende discrete randwaarden de volgende matrix vergelijkingen (3-46,47). De discrete randwaarden liggen op de knooppunten van ∂D , die de eindpunten zijn van de lineaire elementen, en tussen de discrete waarden is dus over een element lineair geïnterpoleerd.

$$H\underline{x} = G\underline{x}_\eta \Rightarrow \underline{u}^x = (A^{-1}B)^x \underline{f}^x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} & X_{14} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{34} \\ X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_\eta \\ 0 \\ -x_\eta \\ L \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

$$H\underline{y} = G\underline{y}_n \Rightarrow \underline{u}^y = (A^{-1}B)^y \underline{f}^y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \underline{y}_n^1 \\ \underline{y}_n^2 \\ -\underline{y}_n^3 \\ \underline{y}_n^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}^1 \\ \underline{0} \\ \underline{y}^3 \\ \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3-46)$$

$$H\underline{\phi} = G\underline{q} \Rightarrow \underline{u}^\phi = (A^{-1}B)^\phi \underline{f}^\phi \quad (3-47)$$

In principe is de conforme afbeelding berekend met (3-46) en het potentiaalprobleem is berekend met (3-47), waarbij alle in (3-46) en (3-47) voorkomende matrices constant blijven tijdens het timesteppingsproces.

Voor de conforme afbeelding dient zich echter het volgende probleem aan. De verdeling $x^3(\xi_j)$, $j=1,2..1 \Rightarrow \underline{x}^3$ is onbekend en dus is $\underline{y}^3$ onbekend, die echter als gegeven werd beschouwd. Voor een Eulerse (is expliciete) beschrijving van de vrije rand geldt hetzelfde voor $\underline{y}^1 = \underline{\eta}$. Voor een Lagrange (is impliciete) beschrijving van de vrije rand geldt dat direct na timestepping $\underline{x}^1$ en $\underline{y}^1$ nog niet voldoen aan (3-46). Om dit probleem in beide gevallen op te lossen passen we de volgende procedure toe op een tijdstip t_i t.a.v. de conforme afbeelding (3-46). Allereerst wordt als het ware een kromme getrokken trekken door de discrete punten $\underline{\eta}$ of $(\underline{x}^1, \underline{y}^1)$ op een tijdstip t_i middels interpolatie; men krijgt dan voor de vrije rand de expliciete beschrijving $\underline{y}^1 = \underline{\eta}(\underline{x})$ of impliciete beschrijving $f(\underline{x}^1, \underline{y}^1) = 0$ en tevens de tangentele afgeleide $\underline{\eta}_x$ of $\underline{y}_x^1$. Door de toepassing van lineaire elementen is dit in feite al gedaan middels rechte lijnige interpolatie. Men kan nu de volgende iteratieve methode toepassen; als $\underline{x}^1$ en $\underline{x}^3$ uit een vorige iteratiestap bekend zijn, dan volgt op een iteratie stap k uit hun functievoorschrift: $\underline{y}^1$, $\underline{\eta}_x = \underline{y}_x^1$ en $\underline{y}^3$, $\underline{h}_x = \underline{y}_x^3$. Uit fig. 3-1 volgt verder voor een iteratie stap k de discrete relatie (3-48), waarin D diagonaalmatrices zijn.

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_n^1 \\ \underline{x}_n^3 \\ -\underline{x}_n^1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} -D_{\underline{\eta}_x} & 0 \\ 0 & D_{\underline{h}_x} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \underline{y}_n^1 \\ \underline{y}_n^3 \\ -\underline{y}_n^1 \end{bmatrix}^k = \tilde{D}^k \begin{bmatrix} \underline{y}_n^1 \\ \underline{y}_n^3 \\ -\underline{y}_n^1 \end{bmatrix}^k \quad (3-48)$$

De discrete conforme afbeelding (3-46) wordt als volgt herschreven.

$$\begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^3 \\ \underline{x}^1 \end{bmatrix}^{k+1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{13} \\ X_{31} & X_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_n^1 \\ \underline{x}_n^3 \\ -\underline{x}_n^1 \end{bmatrix}^k + \begin{bmatrix} X_{14} \\ X_{34} \end{bmatrix} = \tilde{X} \begin{bmatrix} \underline{x}_n^1 \\ \underline{x}_n^3 \\ -\underline{x}_n^1 \end{bmatrix}^k + \underline{X} \quad (3-49)$$

$$\begin{bmatrix} \underline{y}_n^1 \\ \underline{y}_n^3 \\ -\underline{y}_n^1 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{13} \\ Y_{31} & Y_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{y}^1 \\ \underline{y}^3 \\ \underline{y}^1 \end{bmatrix}^k = \tilde{Y} \begin{bmatrix} \underline{y}^1 \\ \underline{y}^3 \\ \underline{y}^1 \end{bmatrix}^k$$

Samenvoeging van (3-48) en (3-49) levert de gehele iteratieve procedure in de matrixvergelijking (3-50)

$$\begin{bmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \\ \underline{x}^3 \end{bmatrix}^{k+1} = \tilde{\mathbf{X}} \mathbf{D}^k \tilde{\mathbf{Y}} \begin{bmatrix} \underline{y}^1 \\ \underline{y}^2 \\ \underline{y}^3 \end{bmatrix}^k + \underline{x} \quad (3-50)$$

In (3-50) zijn de matrices $\tilde{\mathbf{X}}$, $\tilde{\mathbf{Y}}$ en de vector $\underline{x}$ gedurende het gehele iteratieproces (en timesteppingsproces) constant. Verder is er per iteratiestap alleen matrix vermenigvuldiging nodig en geen matrix inversie cq. het oplossen van een stelsel lineaire vergelijkingen. Het iteratieproces wordt gestopt als het absolute verschil voor $\underline{x}^1$ en $\underline{x}^3$ van twee iteratie stappen kleiner is dan een bepaalde nauwkeurigheid ε . Bij een kleine tijdstap Δt zal het aantal iteraties per tijdstap Δt klein zijn. Vervolgens kan de gehele conforme afbeelding (3-46) worden berekend en tevens het potentiaalprobleem (3-47).

Lagrangse beschrijving vrije rand versus Eulerse beschrijving

Uit vergelijking (3-42) blijkt dat de potentiaal in feite een tijdpad volgt volgens de conforme afbeelding, dan dat de potentiaal het Eulerse tijdpad volgt. Voor het Lagrangse tijdpad van de potentiaal moet dit effect ook in rekening worden gebracht;

$$\frac{D\phi}{Dt}(\xi, \eta) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\xi, \eta) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (3-51)$$

Voor $\frac{D\phi}{Dt}(\xi, \eta, t)$ op ∂D_1 , d.w.z. de omgezette dynamische randwaarde (2-2b), krijgen we dus m.b.v. (3-37, 51, 39, 40), (2-2a) en $p_0=0$ exact dezelfde vergelijking als voor $\frac{\partial \phi}{\partial t}(\xi, \eta, t)$; nl. (3-42). Voor een zeer kleine tijdstap Δt bij timestepping kunnen we bij benadering stellen;

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\partial \phi}{\partial x} \wedge \frac{dy}{dt} \approx \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ en (3-37, 51, 39, 40), (2-2a), } p_0=0 \Rightarrow \quad (3-52)$$

$$\frac{D\phi}{Dt}(\xi, \eta) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\xi, \eta) \approx \frac{\partial \phi}{\partial t}(x, y) + (\nabla \phi)^2 = -g_z y + \frac{1}{2J}(\phi_\xi^2 + \phi_\eta^2)$$

Uit (3-52) en (2-3) volgt dat bij een zeer kleine tijdstap Δt geldt $\frac{D\phi}{Dt}(\xi, \eta, t) \approx \frac{D\phi}{Dt}(x, y, t)$.

Uit bovenstaande blijkt, dat voor de omgezette dynamische randwaarde (2-2a of 4a) geen verschil is te constateren. Het gevolg hiervan is dat t.a.v. het timesteppingsproces voor beiden beschrijvingen van de vrije rand, Lagrangse of Eulerse, geen verschil optreedt. Hierdoor zal een Lagrangse beschrijving van de vrije rand een voorkeur verdienen, aangezien dit een impliciete beschrijving van de rand $f(x, y)=0$ of $((x(s), y(s)))$ toestaat. Echter door de geometrie van D , een rechthoek, is het "handiger" om van een expliciete beschrijving van de vrije rand uit te gaan; $\partial D_1: y^1(\xi)=\eta(x^1(\xi), t) \Rightarrow$

$\Gamma_1: y=\eta(x,t)$, dit wil dus zeggen van een Eulerse beschrijving van de vrije rand.

Testprobleem

Ik heb het volgende testprobleem m.b.v. van de REM opgelost voor een vierkant D van $H=1$ bij $L=1$. $\Delta\phi=0$ in D , $q=\frac{\partial\phi}{\partial n}=0$ op ∂D_{13} , $\phi=0$ op ∂D_2 en $\phi=10$ op ∂D_4 (oplossing: $\phi=10\xi$ op ∂D_{13} , $q=-10$ op ∂D_2 en $q=10$ op ∂D_4). Voor de REM werd gebruik gemaakt van lineaire elementen, zie appendix B, wat een exacte oplossing voor dit testgeval moet opleveren. Echter doordat de hoekpunten werden afgerond, appendix B.5, en de integralen werden berekend met de 4-punts Gauss kwadratuur formule, appendix B.4, levert dit fouten op met name rondom de hoekpunten. Bij de meest geschikte "afronding" van de hoeken levert dit nog altijd een maximale relatieve fout op van ongeveer 5 procent. Ik wilde ditzelfde testgeval oplossen met lineaire elementen, maar nu zonder "afronding" van de hoekpunten, maar met lokaal discontinue lineaire elementen grenzend aan de hoekpunten, zoals beschreven in appendix B.5. Voordat ik hieraan toekwam, bleek echter dat de rechthoek als vast rekengebied D totaal ongeschikt was, daar nl. tijdens het tijdsproces de lengte/breedte verhouding diende te veranderen, wilde de afbeelding conform blijven, zie 3.3.1.

3.3. Bepaling van het vaste rekengebied D : de cirkel

3.3.1. De conforme module in conforme transformaties

Voor een gesloten regulier gebied Ω , waarvan 4 punten a priori vast op 4 punten van een ander gesloten regulier gebied D -b.v. de 4 hoekpunten van een rechthoek D - worden afgebeeld, dient de conforme module μ van Ω gelijk te zijn aan de conforme module van D , wil de afbeelding D naar Ω (zuiver) conform zijn, zie Heinrici (1986). De conforme module van een rechthoek D is de lengte/breedte verhouding. Mobley & Stewart (1980) geven aan, hoe voor een gebied als Ω uit fig. 2-1 met constante diepte een goede schatting voor de conforme module kan worden gegeven.

$$\mu_{\Omega} = \mu_D = L/H \quad (3-53)$$

Echter als $\Omega(t)$ verandert dan zal ook zijn conforme module veranderen, en dus zal ook de rechthoek D in de tijd moeten veranderen, wil (3-53) blijven gelden en de afbeelding conform blijven. De rechthoek is dus niet langer vast in de tijd, en zal geen constante matrix door discrepatie met de REM op leveren.

Indien we de rechthoek D toch vast houden in de tijd en stellen dat b.v. $\mu_D=L/H=1$ is constant in de tijd en de conforme module van Ω : $\mu_{\Omega}=\mu$ is constant in D , maar niet in de tijd, dan is de afbeelding van D naar Ω niet

meer (zuiver) conform (wel orthogonaal).

$$\mathbb{K} = \mu_{\Omega} / \mu_D = \mu \quad (3-54)$$

Met (3-54) en (3-9b,11) krijgen we nl. voor de afbeelding en het getransformeerde potentiaalprobleem de volgende PDV-en in D.

$$\begin{aligned} x_{\xi\xi} + \mu^2 x_{\eta\eta} &= \mathcal{L}\{x\} = 0 \quad \wedge \quad y_{\xi\xi} + \mu^2 y_{\eta\eta} = \mathcal{L}\{y\} = 0 \\ \phi_{\xi\xi} + \mu^2 \phi_{\eta\eta} &= \mathcal{L}\{\phi\} = 0 \end{aligned} \quad (3-55)$$

De operator $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ is aan zichzelf toegevoegd en de fundamentele functie $\chi(\xi; \underline{a})$ voor (3-55) is (3-31). Substitutie van (3-31) geeft de RIV (3-20) en discretisatie met de REM van (3-20) de matrixvergelijking (3-21): $\underline{A}\underline{u} = \underline{b}$. Doordat $\mu(t)$ in de tijd verandert, is de fundamentele functie $\chi(\xi; \underline{a})$ (3-31) niet constant in de tijd en daardoor is de matrix $\underline{A}$ niet meer constant in de tijd.

Het enige alternatief voor een eenvoudige geometrie waar Ω op afgebeeld kan worden is dan de cirkel D met straal R. In de volgende paragrafen bargumenteren we waarom we het probleem van niet-lineaire golven beperken tot het probleem van periodieke niet-lineaire golven met oneindige diepte volgens (2-12). De cirkelrand ∂D wordt dan middels een numerieke conforme afbeelding afgebeeld op ∂B , en deze weer op zijn beurt middels de exacte conforme afbeelding $z = \frac{i}{k} \ln w$ op Γ_1 , zie fig. 2-1. Het potentiaalprobleem $\Delta\phi = 0$ blijft onder deze conforme afbeeldingen invariant; $\Delta\phi = 0$ in D, B en Ω .

3.3.2. De conforme afbeelding rechtstreeks van de cirkel D naar Ω

De conforme afbeelding van de cirkel D naar Ω wordt gegeven door;

$$\Delta x = 0 \quad \wedge \quad \Delta y = 0 \quad \text{in } D \Leftrightarrow r < R \quad (3-13)$$

Het (getransformeerde) potentiaalprobleem is;

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{in } D \Leftrightarrow r < R \quad (3-14)$$

Op de cirkelrand ∂D : $r=R$ is dan de RIV (3-33,32) van toepassing. We verwisselen nu het parameterpunt $\underline{a}$ met het argumentpunt ξ , ook t.o.v. differentiatie en integratie. Dit is toegestaan, zie appendix A.4. Vervolgens schakelen we over op poolcoördinaten, zie appendix C.1; $\underline{a} = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha)$, $\rho = R$ en $\xi = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$. De RIV (3-33,32) op de cirkelrand $r=R$ wordt dan, zie 4.1.1;

$$\phi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\alpha) d\alpha - \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left[R \sqrt{2(1 - \cos(\alpha - \vartheta))} \right] q(\alpha) d\alpha \quad \Leftrightarrow \quad (3-56)$$

$$H\{\phi\} = G\{q\} \quad \text{en } q = \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \phi_r$$

Voor de (numerieke) conforme afbeelding krijgen we dan met discretisatie van

de REM op de cirkelrand $r=R$ weer (3-35);

$$H\{x\}=G\{x_r\} \wedge H\{y\}=G\{y_r\} \Rightarrow H_x=G_{x_r} \wedge H_y=G_{y_r} \quad (3-35)$$

Idem voor het potentiaalprobleem;

$$H\{\phi\}=G\{q\} \Rightarrow H_\phi=G_q \quad (3-36)$$

Reorganisatie van bekende randwaarden op de discrete punten (R, ϑ_j) op de cirkelrand in $\underline{f}$ en onbekende randwaarden in $\underline{u}$, geeft dan voor (3-35,36) de vergelijking (3-21);

$$\underline{A}\underline{u} = \underline{B}\underline{f} = \underline{b} \Rightarrow \underline{u} = \underline{A}^{-1}\underline{b} \quad (3-21)$$

I) We stellen dat de (numerieke) conforme afbeelding analoog wordt geformuleerd, zoals dat voor de rechthoek is gedaan, zonder expliciet de randwaarden op te stellen, zie onderstaande fig 3-4.

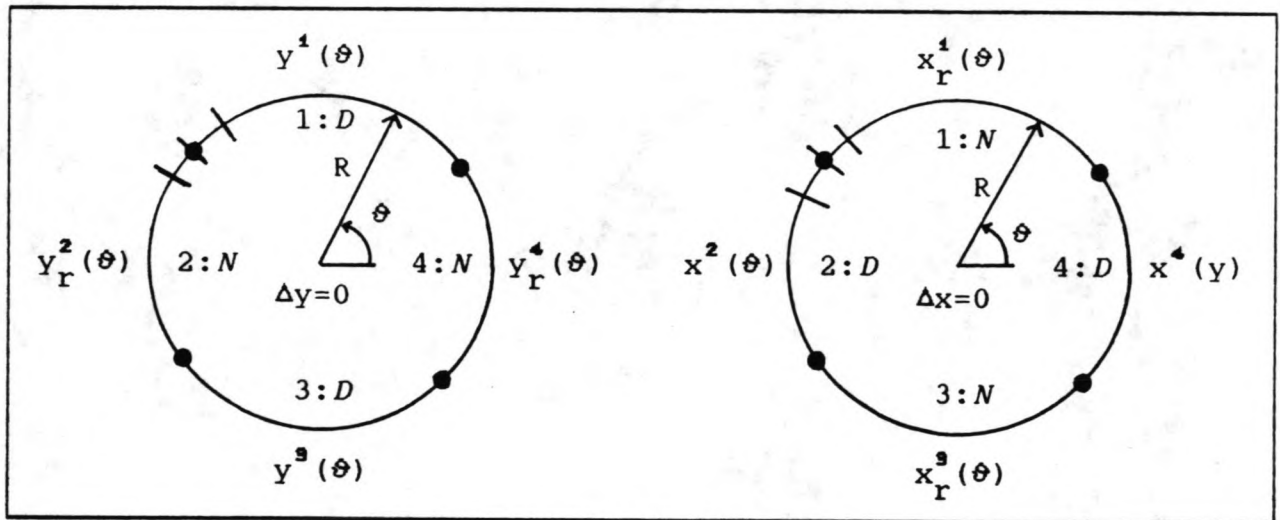


Fig. 3-4 De randwaarden x en y voor de conforme afbeelding

Aan deze methode zijn twee bezwaren verbonden.

I-1) Ten eerste is onbekend waar uiteindelijk de hoekpunten van Γ op de cirkelrand ∂D terecht komen. Dit zal geschat moeten worden. Ten tweede zullen de hoekpunten tijdens het timesteppingsproces niet vast op de cirkelrand blijven liggen. Dit komt doordat de conforme module μ_Ω in de tijd verandert en aangezien moet gelden dat $\mu_\Omega = \mu_D$, zullen de hoekpunten van Γ op de cirkelrand verschuiven. Dit vergt een nieuwe berekening van die elementen, die direct naast zo'n hoekpunt op de cirkelrand liggen, omdat daar de randwaarde van type en/of waarde verandert. Voor zowel H als G en dus ook A betekent dit een nieuwe evaluatie van $16n$ coëfficiënten per tijdstap, bij gebruik van n elementen. Echter de matrix A^{-1} zal door het Gauss eliminatie proces van A totaal "verstoord" worden, zodat per tijdstap het stelsel vergelijkingen (3-21) zal moeten worden opgelost, omdat H en G niet geheel con-

stant blijven in de tijd. Dit geldt ook voor het potentiaalprobleem (3-36).

I-2) Bij een overgang op een gladde kromme van een Dirichlet randwaarde naar een Neumann randwaarde levert de REM problemen op t.a.v. convergentie. De hoekpunten van Γ in fig. 3-4 zijn zg. randsingulariteiten op de cirkelrand. Deze extra complicatie vereist een lokale danwel globale aanpassing, zie appendix B.6.

II) We stellen de (numerieke) conforme afbeelding van D naar Ω op door de complexe functie $z=g(\zeta)=x+iy$, $\zeta=\xi+i\eta=re^{i\vartheta}$ in te voeren. Deze complexe functie $z=g(\zeta)$ is analytisch in de cirkel D , omdat (3-13) geldt: $\Delta x=0$ en $\Delta y=0$. Deze methode in zijn geheel is geschetst in onderstaande fig. 3-5.

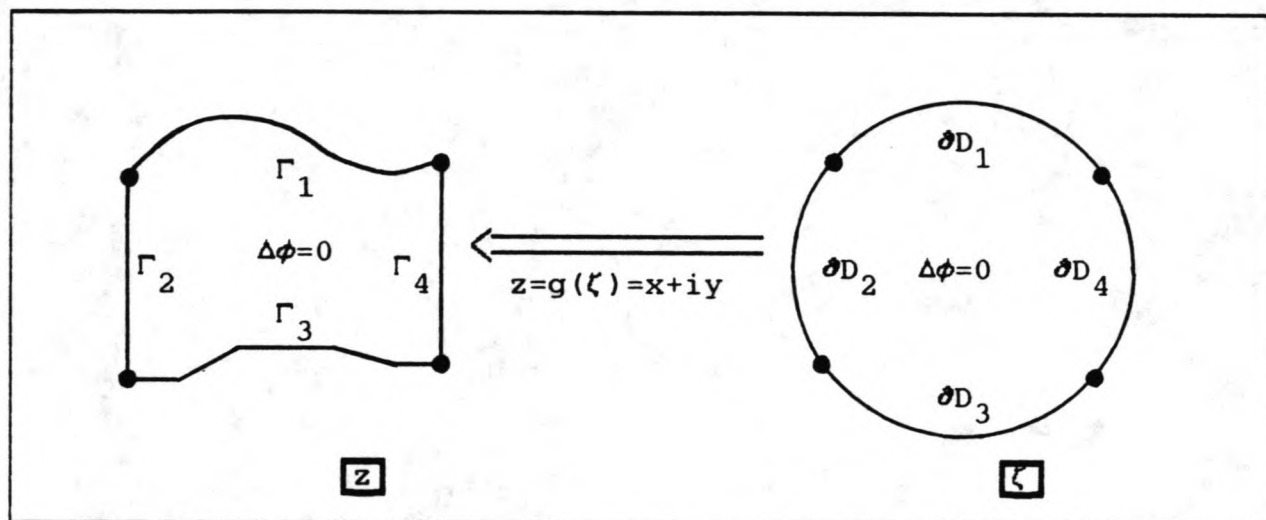


Fig 3-5 De conforme afbeelding van de cirkel D naar Ω

Op de cirkelrand $r=R$, $z=g^+(\zeta)=g(Re^{i\vartheta})=g^*(\vartheta)$, geldt dan de volgende relatie voor x en y , waarbij we voor de eenvoud stellen dat $g(0)=0 \Leftrightarrow x_m=0 \wedge y_m=0$, zie appendix D. (lees voor $w=u+iv$ nu $z=x+iy$)

$$y(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\vartheta-\alpha}{2}\right) x(\alpha) d\alpha \quad \Leftrightarrow \quad y = K\{x\} \quad \Rightarrow \quad \underline{y} = -K\underline{x} \quad \text{OF} \quad (3-57)$$

$$x(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\alpha-\vartheta}{2}\right) y(\alpha) d\alpha \quad \Leftrightarrow \quad x = -K\{y\} \quad \Rightarrow \quad \underline{x} = K\underline{y}$$

(3-57) vervangt nu (3-35). De integraal in (3-57) wordt de Hilbert integraal genoemd en x en y worden elkaars periodiek toegevoegde functies op de cirkelrand genoemd, omdat zij in de cirkel elkaars toegevoegde harmonische functies zijn. Het vinden van een periodiek toegevoegde functie, als de ander is gegeven, wordt periodieke conjugatie genoemd, en kan middels de Hilbert integraal (3-57) worden gedaan. De discretisatie van $y=K\{x\}$ of $x=-K\{y\}$ met de REM levert resp. de matrix vergelijking $\underline{y}=-K\underline{x}$ of $\underline{x}=K\underline{y}$, $y_j=y(R,\vartheta_j)$ en $x_j=x(R,\vartheta_j)$, waarvan de matrix K constant is tijdens het time-

steppingsproces. Net zoals voor bepaalde delen van de rand van de rechthoek geldt, geldt voor de gehele cirkelrand dat een verdeling op Γ : $(x_j, y_j) = (x(s_j), y(s_j))$ en $s_j = s(\vartheta_j)$ of $f(x_j, y_j) = 0$ a priori niet voldoet aan $y = -Kx$ of $x = Ky$. Middels een iteratie proces door de punten $(x_j, y_j) = (x(s_j), y(s_j))$ of $f(x_j, y_j) = 0$ op Γ zo te "verschuiven" dat wel aan $y = -Kx$ of $x = Ky$ wordt voldaan, wordt dan de numerieke conforme afbeelding op de cirkelrand: $z_j = x_j + iy_j = g^*(\vartheta_j)$ en $z_j \in \Gamma$ gevonden. Ook aan deze methode zijn twee bezwaren verbonden.

II-1) Aangezien de rand Γ van Ω rechte lijnstukken bevat nl. Γ_2 en Γ_4 heeft, levert dit ernstige problemen op t.a.v. de (numerieke) conforme afbeelding $z = g^+(\zeta)$ van de cirkelrand ∂D naar Γ , zie hoofdstuk 5. In feite is zo'n rechtstreekse (numerieke) conforme afbeelding van de cirkel D naar Ω , waarvan de rand Γ rechte lijnstukken bevat niet te vinden.

II-2) Voor het potentiaalprobleem (3-36) zal zowel H als $G \Rightarrow A$ tijdens het timesteppingsproces niet geheel constant zijn, door het verschuiven van de hoekpunten op de cirkelrand in de tijd, zie punt I-1) Ten tweede.

3.3.3. De conforme afbeelding van de cirkel D naar Ω via een tussengebied B

Middels de (inverse) Schwarz-Christoffel afbeelding, die conform is, kan Ω op een bijna cirkelachtig gebied B in het $w = u + iv$ vlak worden afgebeeld. Dus een gebied B met een gladde kromme ∂B , zonder hoekpunten en lijnstukken. Haas & Brauchli (1985) gebruiken deze methode om een gemengd potentiaalprobleem in een polygoon Ω op te lossen in de cirkel D , middels de RIV (3-56) voor de cirkelrand. De numerieke conforme afbeelding van de cirkelrand ∂D naar ∂B werd tot stand gebracht door de methode van Theodorsen (zie 5.1.) en de numerieke conforme afbeelding van $w \in \partial B$ naar $z \in \Gamma$ dus door de Schwarz-Christoffel afbeelding $z = x + iy = h^+(w)$, $w = u + iv$. De Schwarz-Christoffel afbeelding voor een bijna cirkelachtig gebied B naar een polygoon Ω luidt;

$$\frac{dz}{dw} = C \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{w}{w_k}\right)^{-\beta_k} \Rightarrow z = h(w) = z_c + C \int_0^w \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{w'}{w_k}\right)^{-\beta_k} dw', \quad (3-58)$$

In (3-58) zijn $\pi\beta_k$ de uitwendige hoeken van de lijnstukken z_k en w_k de a priori onbekende originelen of "pre-beelden" van z_k . z_c en C zijn vastgelegd door de normaliserings voorwaarden voor een conforme afbeelding, zie 5.1.

III) We definiëren nu twee (numerieke) conforme afbeeldingen van de cirkel D naar B door $w = g(\zeta) = u + iv$, $\zeta = re^{i\vartheta}$ en $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ voor $r < R$, en van B naar Ω door $z = h(w) = x + iy$: (3-58). Op de randen worden deze numerieke conforme afbeeldingen gegeven door $w = g^+(\zeta)$ voor ∂D naar $w \in \partial B$ en $z = h^+(w)$ voor ∂B naar $z \in \Gamma$. Voor $w = g^+(\zeta) = u(\vartheta) + iv(\vartheta)$ gelden weer de relaties (3-57) en de opmerkingen die onder 3.3.2. II) zijn gemaakt, met dien verstande dat men nu voor $z = x + iy$, $w = u + iv$ moet lezen en voor $\Gamma(s)$, $\partial B(\tau)$. De gehele procedure is ge-

schetst in onderstande fig. 3-6.

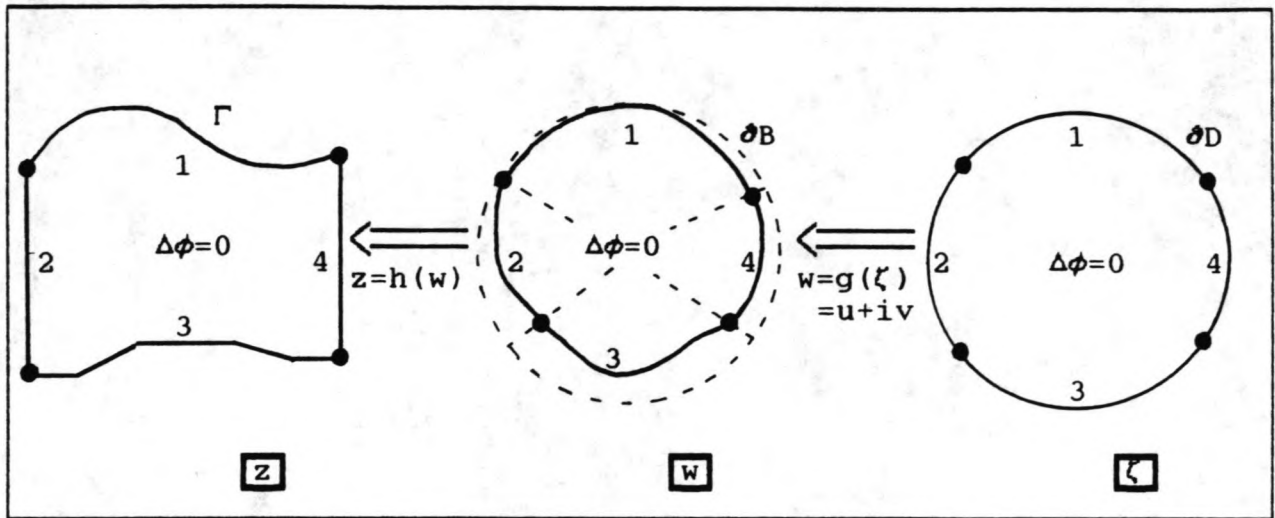


Fig. 3-6 De conforme afbeeldingen van de cirkel D via B naar Ω

Weer zijn er echter twee bezwaren verbonden aan deze procedure.

III-1) Ten eerste bestaat Γ uit een deel dat een gladde kromme is. Dit geeft een aanpassing voor $z=h(w)$: (3-58), die leidt tot een differentiaalintegraal vergelijking, zie Thompson e.a. (1982). Ten tweede is de iteratieve bepaling van de parameters w_k in (3-58) een moeilijke en tijdrovende zaak, zie Trefetchen (1980).

III-2) Voor het potentiaalprobleem (3-36) zal zowel H als $G \Rightarrow A$ tijdens het timesteppingsproces niet geheel constant zijn, door het verschuiven van de hoekpunten op de cirkelrand in de tijd, zie punt I-1) Ten tweede.

IV) Om bovenstaande problemen te vermijden beperken we het probleem van niet-lineaire golven tot periodieke (in de x-richting) niet-lineaire golven volgens (2-12). (3-58) voor de afbeelding van B naar Ω wordt dan vervangen door de gegeven exacte conforme afbeelding (2-12)=(3-59);

$$z = h(w) = \frac{i}{k} \ln w = x + iy \quad (3-59)$$

Op de randen krijgen we dan de exacte conforme afbeelding $z = \frac{i}{k} \ln w$ voor ∂B naar $z \in \Gamma_1$ en de numerieke conforme afbeelding $w = g^+(\zeta) = u + iv$ van $w \in \partial B$ naar de cirkelrand ∂D , zoals deze onder punt III) is geformuleerd. Aangezien het "hoekpunt" tijdens het timesteppingsproces (en iteratieproces) wordt vast gehouden, blijven de matrices H en G en dus ook A^{-1} voor het potentiaalprobleem $\Delta\phi=0$ constant in de tijd, zie de onderstaande fig. 3-7.

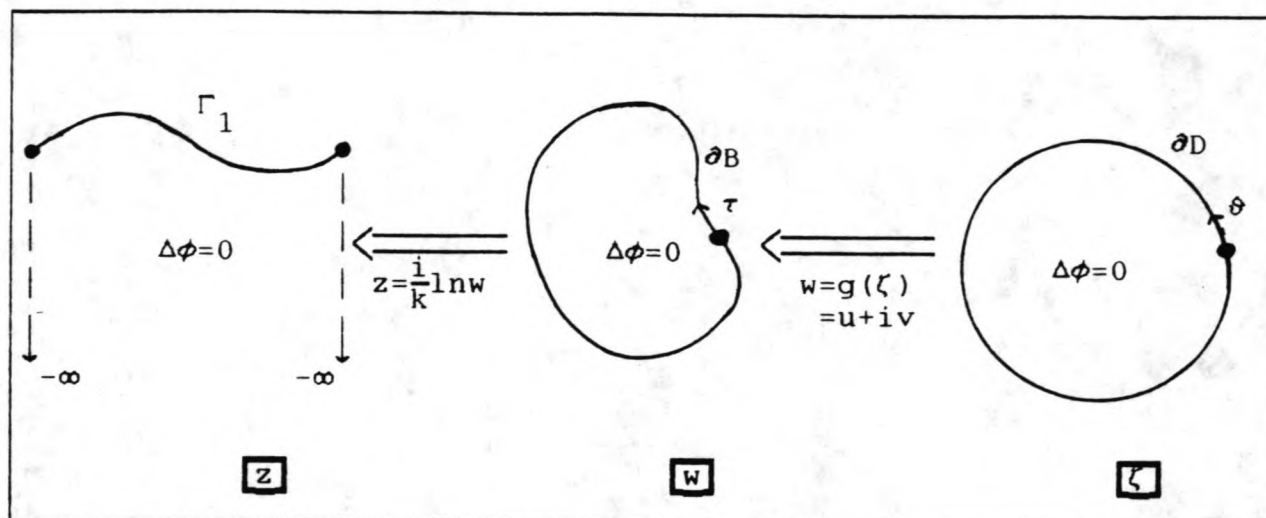


Fig. 3-7 De conforme afbeeldingen van de cirkel D naar Ω voor periodieke niet-lineaire golven

3.4. Numerieke formulering van niet-lineaire periodieke golven m.b.v. van een numerieke conforme afbeelding op de cirkel

We gaan nu op exact dezelfde wijze te werk als Fornberg (1981) en Meiron e.a. (1981). Op een gegeven tijdstip t_i voeren we de numerieke conforme afbeelding $w=g^+(\zeta)$ uit van de cirkelrand ∂D naar $w \in \partial B$. Fornberg en Meiron doen dit met de Fast Fourier Transformatie: FFT. Mijn numerieke conforme afbeelding zal gebaseerd zijn op de discretisatie van de Hilbert integraal (3-57) m.b.v. de REM. De berekening van K is beschreven in 4.3. De gehele numerieke procedure voor $w=g^+(\zeta)$ wordt beschreven in hoofdstuk 5. Het Dirichlet potentiaalprobleem omgezet voor de randwaarde (2-2b) in de poolcoördinaten (r, ϑ) in het (ξ, η) vlak op de cirkelrand $r=R$, wordt opgelost met de REM. De berekening van H en G is beschreven in 4.1. Fornberg en Meiron e.a. lossen dit ook op met de FFT. Voor een eventuele berekening van de potentiaal $\phi(r, \vartheta)$ of de conforme afbeelding $w=g(re^{i\vartheta})$ in de cirkel als de randwaarden bekend zijn, is uit gegaan van discretisatie van de Poisson integraal uit appendix C, die in 4.2 wordt gediscretiseerd met de REM.

Het timesteppings probleem wordt b.v. met een 4-de orde Adam-Bashforth (-Moulton) schema opgelost. En aangezien $q=\phi_r$, ϕ_ϑ en de Jacobiaan van de afbeelding bekend zijn en dus ϕ_s en $\phi_n \Leftrightarrow \phi_x$ en ϕ_y , kan de nieuwe rand (2-4b) $\Gamma_1(t_i+\Delta t)$ worden gevonden en de potentiaal $\phi(t_i+\Delta t)$ (2-2b) op de cirkelrand. Deze totale procedure voor niet-lineaire periodieke golven opgelost m.b.v. een numerieke conforme afbeelding vanaf de cirkelrand is beschreven in hoofdstuk 6, waarvan in 6.1 de Lagrangse dynamische randwaarde (2-2b) en kinematische randwaarde (4-2b) zijn omgezet in poolcoördinaten (r, ϑ) voor de cirkelrand $r=R$.

4. DE REM VOOR HET POTENTIALPROBLEEM OP DE CIRKEL

De Rand Integraal Vergelijking: RIV (appendix A), die op de cirkelrand ∂D het verband legt tussen de potentiaal ϕ en zijn flux q , de Poisson integraal (appendix C), waarmee men de potentiaal in de cirkel D kan berekenen uit de potentiaal op de cirkelrand ∂D , en de Hilbert integraal (appendix D), die het verband legt tussen de periodiek toegevoegde functies op de cirkelrand ∂D , worden in dit hoofdstuk verdiscretiseerd m.b.v. de REM. De matrices die hierdoor ontstaan zijn allen constant voor het timesteppingsproces, aangezien de cirkel D vast blijft in tijd.

Er wordt gekozen voor constante elementen t.a.v. alle drie de integralen, d.w.z. dat over een element j van de cirkelrand ∂D de potentiaal, flux of periodiek toegevoegde functie t.p.v. het middenpunt ϑ_j een constante waarde heeft. Deze keuze wordt gedaan om het zo simpel mogelijk te houden. Indien gekozen wordt voor lineaire elementen dat gaat men praktisch hetzelfde te werk als bij constante elementen. Alleen moeten nu de kernen in de integralen voor constante elementen vermenigvuldigd worden met 2 lineaire interpolatie functies en dan geïntegreerd worden, zie appendix B. (Indien men de nauwkeurigheid wil vergroten door het aantal elementen te verhogen, dan kan dat wel eens tegenvallen. Dit is te wijten aan de asymptotische convergentie van de REM, zie Wendland (1986). Over schakelen op lineaire elementen zou eventueel verbetering kunnen brengen.)

4.1. De Rand Integraal Vergelijking: RIV op de cirkelrand ∂D

4.1.1. De RIV in poolcoördinaten

Aangezien $\Delta\phi=0$ in de cirkel met straal R , is de RIV geldig in het $\underline{\xi}=(\xi,\eta)$ vlak, die is afgeleid in appendix A. Lees dus voor $\underline{x}$ nu $\underline{\xi}$. We verwisselen nu het parameterpunt $\underline{a}$ met het argumentpunt $\underline{\xi}$, ook t.a.v. integratie en differentiatie. Dit is toegestaan omdat de Laplace operator Δ aan zichzelf is toegevoegd en dientgevolge de kernen in de RIV symmetrisch zijn, zie appendix A.4,5 en B.1.

$$\Lambda(\underline{\xi})\phi(\underline{\xi}) = \oint_{\partial D} F(\underline{\xi};\underline{a}) \frac{\partial\phi}{\partial\nu}(\underline{a})d\theta - \oint_{\partial D} \frac{\partial F}{\partial\nu}(\underline{\xi};\underline{a})\phi(\underline{a})d\theta, \quad \underline{a} \in \partial D \quad \Rightarrow \quad (4-1)$$

$$\text{als } \underline{\xi}, \underline{a} \in \partial D \text{ dan } H\{\phi\} = G\{q\} \text{ en } q = \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = \frac{\partial\phi}{\partial n}$$

$$\text{en } F(\underline{\xi};\underline{a}) = -\frac{1}{2\pi} \ln r \quad \wedge \quad \frac{\partial F}{\partial\nu}(\underline{\xi};\underline{a}) = -\frac{1}{2\pi r^2} \underline{\nu} \cdot (\underline{a}-\underline{\xi})$$

$$r = |\underline{\xi}-\underline{a}|, \quad \underline{a} \in \partial D \quad (4-2)$$

$$\text{en } \Lambda(\underline{\xi}) = 1 \quad \text{als } \underline{\xi} \in D \quad (4-3a)$$

$$\Lambda(\underline{\xi}) = \frac{1}{2} \quad \text{als } \underline{\xi} \in \partial D \quad (4-3b)$$

$$\Lambda(\underline{\xi}) = 0 \quad \text{als } \underline{\xi} \in D_U = \mathbb{R}^2 \setminus \{D \cup \partial D\} \quad (4-3c)$$

In (4-1) zijn $H=H^+$ en G de in appendix B.2 gedefinieerde Fredholm integraal-operatoren van resp. de tweede en eerste soort. We schakelen nu over op poolcoördinaten, zie appendix C.1.

$$\underline{\xi} = (r \cos \vartheta, r \sin \vartheta) \quad \underline{a} = (\rho \cos \alpha, \rho \sin \alpha) \quad r = \frac{r}{R}$$

en $r \geq 0 \quad \rho = R \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \quad 0 \leq \vartheta < 2\pi$ (4-4)

$$\underline{v} = (\cos \alpha, \sin \alpha) \quad \frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial r} \quad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial \rho} \quad dG = R d\alpha$$

Door (4-4) in (4-2) te substitueren krijgen we;

$$\underline{a} - \underline{\xi} = R(\cos \alpha - r \cos \vartheta, \sin \alpha - r \sin \vartheta) \quad \underline{v} \cdot (\underline{a} - \underline{\xi}) = R(1 - r \cos(\alpha - \vartheta))$$

$$r = |\underline{\xi} - \underline{a}| = \sqrt{(\underline{a} - \underline{\xi}) \cdot (\underline{a} - \underline{\xi})} = R \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha - \vartheta)}$$

(4-5)

$$F(\underline{\xi}; \underline{a}) = -\frac{1}{2\pi} \ln \left[R \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha - \vartheta)} \right]$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(\underline{\xi}; \underline{a}) = -\frac{1}{2\pi R} \frac{1 - r \cos(\alpha - \vartheta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha - \vartheta)}$$

M.b.v. (4-5) en $dG = R d\alpha$ krijgen we dan voor (4-1,2,3) en $r = \frac{r}{R}$;

$$\Lambda(r) \phi(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r \cos(\alpha - \vartheta)}{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha - \vartheta)} \phi(R, \alpha) d\alpha$$

$$-\frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left[R \sqrt{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha - \vartheta)} \right] q(R, \alpha) d\alpha, \quad q = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \frac{\partial \phi}{\partial r} = \phi_r$$

(4-6)

$$\text{en } \Lambda(r) = 1 \quad \text{als } 0 \leq r < R \Leftrightarrow 0 \leq r < 1 \quad (4-7a)$$

$$\Lambda(r) = \frac{1}{2} \quad \text{als } r = R \Leftrightarrow r = 1 \quad (4-7b)$$

$$\Lambda(r) = 0 \quad \text{als } r > R \Leftrightarrow r > 1 \quad (4-7c)$$

M.b.v. van de Gauss conditie kunnen we voor $r=r=0$ de vergelijking (4-6,7a) reduceren tot de bekende middelwaarde eigenschap voor harmonische functies, zie appendix A.1 en appendix C.1.

$$\oint_{\partial D} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^{2\pi} q(R, \alpha) d\alpha = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\phi(0, \vartheta) = \phi(0) = \phi_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(R, \alpha) d\alpha = \hat{\phi} \quad (4-8)$$

In (4-8) is de cirkelrandoperator of "middelwaarde"-operator $\hat{\phi}$ gedefinieerd als een Fredholm integraaloperator van de eerste soort, waarvan de kern gelijk is aan 1. Vervolgens kunnen we de RIV in poolcoordinaten: (4-6,7b) voor $r=R \Leftrightarrow r=1$ wat vereenvoudigen.

$$\phi(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi(\alpha) d\alpha - \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left[R\sqrt{2(1-\cos(\alpha-\vartheta))} \right] q(\alpha) d\alpha \quad (4-9)$$

$$\text{met } q(\alpha) = \frac{\partial \phi}{\partial r}(\alpha) = \phi_r(\alpha)$$

De RIV op de cirkelrand: (4-9) kan ook in integraal operatoren worden beschreven zoals gedefinieerd in appendix B.2 en (4-8).

$$\begin{aligned} \phi &= \hat{\phi} - R\{q\} \Leftrightarrow \hat{\phi} - \phi = R\{q\} \Leftrightarrow H^*\{\phi\} - \phi = G\{q\} \Leftrightarrow \\ H\{\phi\} &= G\{q\} \Rightarrow H\{\phi\} = \hat{\phi} - \phi \text{ en } G = R \end{aligned} \quad (4-9a)$$

Voor een Dirichletprobleem krijgen we een Fredholm integraal vergelijking van de 1-ste soort. De homogene vergelijking $R\{q\}=0$ moet dan, net zoals voor een Fredholm integraal vergelijking van de 2-de soort geldt, de nuloplossing hebben, wil de niet homogene vergelijking een eenduidige oplossing hebben. Echter voor $R=1$ blijkt ook een constante hieraan te voldoen. Het Dirichlet-probleem is dan niet eenduidig bepaald. Geometrieën met een zg. conforme straal 1, Jaswon & Symm (1977) noemen ze Gamma-contouren, bezitten deze eigenschap. Aangezien het Neumannprobleem altijd op een constante na is bepaald, hebben de Gamma-contouren zelfs voor gemengde problemen geen eenduidige oplossing. Dit kan voorkomen worden door in het linkerlid van (4-9) een additieve constante toe te voegen en m.b.v. de Gaussconditie als extra vergelijking krijgen we weer een eenduidig bepaald gemengd probleem, zie Lamp e.a. (1982). Of men neemt ingeval van de cirkel de straal niet gelijk aan 1. Dit betekent dus dat na discretisatie met de REM niet alleen de H matrix singulier is maar ook de G matrix als $R=1$, zie verderop.

4.1.2. Discretisatie van de RIV met de REM

De RIV (4-9): $H\{\phi\}=G\{q\}$ wordt met de REM verdiscretiseerd tot de matrix vergelijking $H\phi=Gq$, zoals dit in appendix B is beschreven. Welke elementen we ook kiezen, de geometrische benadering van de cirkelrand is exact aangezien we op poolcoordinaten zijn overgeschakeld. We verdelen de cirkelrand in n elementen met (boog)lengtes $\Delta\alpha_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$, waarvan α_j en α_{j-1} , $j=1,2..n$ de eindpunten zijn. De discrete waarden $\phi_j = \phi(\vartheta_j)$ en $q_j = q(\vartheta_j)$ worden genomen ter plaatse van de middens $\vartheta_j = (\alpha_j + \alpha_{j-1})/2$ van deze elementen en over een element $\Delta\alpha_j$ constant verondersteld, zie fig. 4-1. Indien we dit nu toepassen op (4-9) voor elk punt ϑ_i , $i=1,2..n$, dan krijgen we de matrix vergelijking

$H\phi = Gq$. Dit is dus de toepassing van de REM (collocatiemethode) met constante elementen.

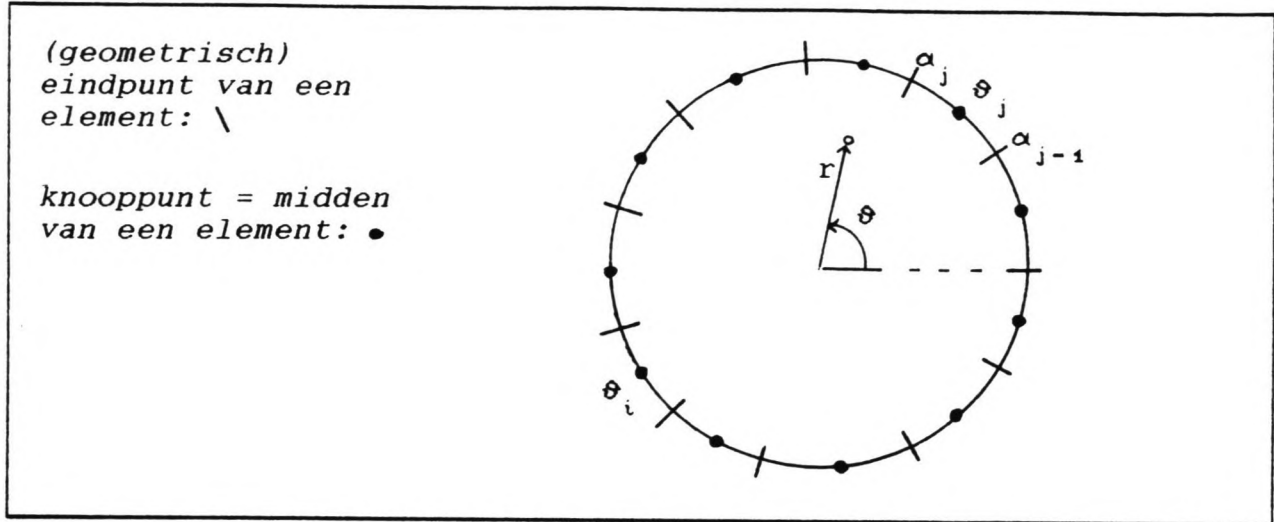


Fig. 4-1 Constante elementenverdeling voor de REM op de cirkelrand

$$\Delta\alpha_j = \alpha_j - \alpha_{j-1} \quad j=1, 2, \dots, n$$

$$\text{en} \quad \alpha_0 < \alpha_{j-1} < \alpha_j < \alpha_n \quad \alpha_0 = 0 \quad \alpha_n = 2\pi \quad j=2, 3, \dots, n-1 \quad (4-10)$$

$$\vartheta_j = \frac{1}{2}(\alpha_j + \alpha_{j-1}) \quad j=1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \vartheta_i = \frac{1}{2}(\alpha_i + \alpha_{i-1}) \quad i=1, 2, \dots, n$$

Verder voeren we de volgende notatie in;

$$\beta_{ij} = \alpha_j - \vartheta_i \quad \text{en} \quad \beta_{ij-1} = \alpha_{j-1} - \vartheta_i \quad i, j=1, 2, \dots, n \quad (4-11)$$

$$\int_{\Delta\alpha_j} g(\alpha - \vartheta_i) d\alpha = \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} g(\alpha - \vartheta_i) d\alpha = \int_{\beta_{ij-1}}^{\beta_{ij}} g(x) dx \quad \text{en} \quad x = \alpha - \vartheta_i \quad (4-12)$$

Indien we nu een equidistant rooster nemen -wat niet noodzakelijk is!-, d.w.z. dat alle n elementen dezelfde "booglengte" $\Delta\alpha_j = \Delta\alpha = 2\pi/n$ hebben, dan krijgen we voor (4-10, 11);

$$\begin{aligned} \Delta\alpha_j &= \alpha_j - \alpha_{j-1} = \frac{2\pi}{n} \quad j=1, 2, \dots, n \quad \text{en} \quad \alpha_j = \frac{2\pi}{n}j \quad j=0, 1, 2, \dots, n \\ \vartheta_j &= \frac{1}{2}(\alpha_j + \alpha_{j-1}) = \frac{\pi}{n}(2j-1) \quad j=1, 2, \dots, n \quad \Rightarrow \quad \vartheta_i = \frac{\pi}{n}(2i-1) \quad i=1, 2, \dots, n \\ \beta_{ij} &= \frac{\pi}{n}(2j-2i+1) \quad \beta_{ij-1} = \frac{\pi}{n}(2j-2i-1) \quad i, j=1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (4-13)$$

Passen we nu de REM met constante elementen toe op (4-9), zoals bovenstaand is beschreven, dan krijgen we voor elk knooppunt ϑ_i , $i=1, 2, \dots, n$;

$$\phi(\vartheta_i) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\alpha_j} d\alpha \phi(\vartheta_j) - \sum_{j=1}^n \frac{R}{\pi} \int_{\Delta\alpha_j} \ln \left[R\sqrt{2(1-\cos(\alpha-\vartheta_i))} \right] d\alpha q(\vartheta_j)$$

$$\Leftrightarrow \phi_i = \sum_{j=1}^n H_{ij}^* \phi_j - \sum_{j=1}^n G_{ij} q_j \quad \text{voor } i=1,2,\dots,n \quad (4-14)$$

In (4-14) zijn H_{ij}^* en $G_{ij} = G_{ij}^1 + G_{ij}^2$ de volgende bepaalde integralen voor $i, j=1,2,\dots,n$.

$$H_{ij}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\alpha_j} d\alpha \quad G_{ij}^1 = \left(\frac{R}{\pi} \ln R + \frac{R}{2\pi} \ln 2 \right) \int_{\Delta\alpha_j} d\alpha \quad (4-15)$$

$$G_{ij}^2 = \frac{R}{2\pi} \int_{\Delta\alpha_j} \ln(1-\cos(\alpha-\vartheta_i)) d\alpha \quad (4-16)$$

We betrekken het linkerlid van (4-14) in het rechterlid en krijgen dan de volgende matrix vergelijking.

$$(H^* - I)\underline{\phi} = G\underline{q} \quad \Leftrightarrow \quad H\underline{\phi} = G\underline{q} \quad (4-17)$$

In de matrix H worden de coëfficiënten gegeven door H_{ij} .

$$H_{ij} = H_{ij}^* \quad \text{als } i \neq j \quad \text{en} \quad H_{ii} = H_{ii}^* - 1 \quad \text{als } i=j \quad (4-18)$$

In de matrix G worden de coëfficiënten gegeven door G_{ij} .

We bereken nu de integralen H_{ij} : (4-15) en $G_{ij} = G_{ij}^1 + G_{ij}^2$: (4-16) analytisch. We krijgen dan voor $i, j=1,2,\dots,n$;

$$H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \Delta\alpha_j \quad \text{als } i \neq j \quad \text{en} \quad H_{ii} = \frac{1}{2\pi} \Delta\alpha_i - 1 \quad \text{als } i=j \quad (4-19)$$

$$G_{ij}^1 = \left(\frac{R}{\pi} \ln R + \frac{R}{2\pi} \ln 2 \right) \Delta\alpha_j \quad (4-20)$$

$$G_{ij}^2 = \frac{R}{2\pi} \left[G(x) \right]_{\beta_{ij-1}}^{\beta_{ij}} \quad \text{en} \quad G(x) = x \ln(1-\cos x) + 8\pi \sum_{k=0}^{21} \frac{\zeta(2k)}{2k+1} \left(\frac{x}{2\pi} \right)^{2k+1} \quad (4-21)$$

$x=\beta_{ij}$ of $x=\beta_{ij-1} \Rightarrow$ toepassing van (E-20) voor $G(x)$

Voor de afleiding van (4-21) zie appendix E. In (4-21) zijn $\zeta(2k)$ de even getallen van de Riemann-Zeta functie, zie Abromowitch & Stegun (1970). Door 21 termen in de reeks van (4-21) mee te nemen wordt G_{ij}^2 tot op 15 decimalen nauwkeurig berekend. Aangezien de matrices toch maar 1 keer worden opgebouwd, hoeft men hierin geen tijd te besparen.

Vergelijking (4-17) is dus de matrixvergelijking verkregen door discretisatie met de REM van (4-9). We tellen de kolommen op van H en G om hun eventuele singulariteit te bekijken.

$$\sum_{j=1}^n H_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha - 1 = 0 \quad (4-22)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n G_{ij} &= \left(\frac{R}{\pi} \ln R + \frac{R}{2\pi} \ln 2 \right) \int_0^{2\pi} d\alpha + \frac{R}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(1 - \cos(\alpha - \vartheta_i)) d\alpha \\ &= 2R \ln R + R \ln 2 + \frac{R}{2\pi} \int_{-\vartheta_i}^{2\pi - \vartheta_i} \ln(1 - \cos x) dx \\ &= 2R \ln R + R \ln 2 + \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} \ln(1 - \cos x) dx \\ &= 2R \ln R + R \ln 2 + \frac{R}{\pi} (-\pi \ln 2) = 2R \ln R \end{aligned} \quad (4-23)$$

Het Neumannprobleem is inderdaad niet eenduidig bepaald aangezien H singulier is en we via matrix 'inversie' dus geen oplossing kunnen krijgen. Het Dirichletprobleem moet wel eenduidig bepaald zijn, echter als $R=1$ dan is G singulier volgens (4-23) en dan kan geen oplossing worden bepaald. De cirkel met straal 1 is dus een Gamma-contour. Dit betekent dat, aangezien voor $R=1$ G en H singulier zijn, ook een gemengd randwaarde probleem geen oplossing zal hebben, daar de matrix A , zie volgende alinea, dan singulier is. De eventuele singulariteit van H en G is onafhankelijk van welk soort (d.w.z. welke interpolatie functies gebruikt worden) elementen men kiest, zoals uit de berekening van (4-22,23) blijkt.

Voor een willekeurig gemengd probleem, b.v. met een Robin randwaarde op een deel van ∂D , worden de gegeven randwaarden in (4-17) in de vector $\underline{f}$ gestopt, terwijl de nog onbekenden randwaarden in de vector $\underline{x}$ worden gestopt. We krijgen dan uit (4-17) de resulterende matrix vergelijking (4-24), die door inversie kan worden opgelost, want ook A is constant in de tijd.

$$H\underline{\phi} = G\underline{q} \Rightarrow A\underline{x} = B\underline{f} \Leftrightarrow A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \underline{x} = A^{-1}\underline{b} \quad (4-24)$$

In zijn algemeen zal noch A noch G , maar alleen H diagonaal dominant zijn. Daar de matrices vol zijn blijft voor inversie alleen nog maar LU decompositie mogelijk via het Gauss eliminatie proces. Echter volgens Haas & Brauchli (1986) zijn de matrices H en G zg. circulant, als gebruik is gemaakt van een equidistant rooster (4-13). Circulants kunnen m.b.v. de FFT, zie C.5. worden gediagonaliseerd en zijn zo dus snel en makkelijk te invertieren. Voor een gemengd probleem ontstaat een zg. Toeplitz matrix die niet m.b.v. de FFT kan worden geïnverteerd, maar inversie van zo'n matrix kan minder rekentijd kosten dan met Gauss eliminatie. Aangezien er toch maar 1 keer geïnverteerd hoeft te worden en we het potentiaal probleem zo algemeen mogelijk willen houden, is gekozen voor Gauss eliminatie met partiele pivoting.

4.1.3. Testgevallen

Er is alleen maar getest om te controleren of bovenstaande berekeningen klopte. Daartoe is een computerprogramma geschreven in FORTRAN 77, waarbij met double precision nauwkeurigheid, d.i. tot op 15 decimalen, is gewerkt. Voor de REM werden $n=8$ gelijkvormige elementen genomen; een equidistante verdeling. Voor het Dirichletprobleem werd op de gehele cirkelrand $\phi(R, \vartheta)=10$ genomen. De normal afgeleide moet dan zijn: $q(R, \vartheta)=0$. Dit werd exact gevonden. Ook indien een gemengd probleem werd voorgeschreven door voor 1 element $q(R, \vartheta)=0$ en de voor de rest $\phi(R, \vartheta)=10$ voor te schrijven, werden weer de exacte waarden gevonden, zie bijlage I. Er is geen onderzoek naar nauwkeurigheid en convergentie gedaan; b.v. met betrekking tot zg. randsingulariteiten, waar een Dirichlet voorwaarde in een Neumann overgaat en q naar oneindig gaat. Zie appendix B.6.

4.2. De Poisson integraal en de middelwaarde eigenschap

4.2.1. Discretisatie van de Poisson integraal met de REM

In principe zou na de oplossing van de randintegraal (4-9) m.b.v. van de REM dus de oplossing van (4-24), de potentiaal $\phi(r, \vartheta)$ in de cirkel berekend kunnen worden door discretisatie van (4-6, 7a) met de REM, aangezien zowel de potentiaal ϕ als zijn normaal afgeleide q op de gehele cirkelrand in de discrete punten (R, ϑ_j) nu bekend zijn.

$$\begin{aligned} \phi(r_i, \vartheta_i) = \phi_i &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\alpha_j} \frac{1-r\cos(\alpha-\vartheta_i)}{1+r^2-2r\cos(\alpha-\vartheta_i)} d\alpha \phi(R, \vartheta_j) \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \frac{R}{\pi} \int_{\Delta\alpha_j} \ln \left[R\sqrt{1+r^2-2r\cos(\alpha-\vartheta_i)} \right] d\alpha q(R, \vartheta_j) \quad \Leftrightarrow \\ \phi_i &= \sum_{j=1}^n E_{ij} \phi_j - \sum_{j=1}^n F_{ij} q_j \quad \text{voor } i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4-25)$$

$$r = r_i/R \quad 0 < r_i < R \quad \Rightarrow \quad 0 < r < 1 \quad 0 \leq \vartheta_i < 2\pi \quad (4-26)$$

Let op! In deze paragraaf 4.2 mag ϑ_i , $i=1, 2, \dots, m$, binnen de in (4-26) gestelde grenzen, willekeurig worden gekozen. Het is echter veel eenvoudiger om gebruik te maken van de discretisatie van de Poisson integraal dan van (4-25), omdat de analytische berekening van E_{ij} praktisch gelijk is aan die van de onderstaande P_{ij} , terwijl die van F_{ij} moeilijker is dan die van G_{ij} : (4-16). Bovendien heeft men alleen de potentiaal nodig op de gehele cirkelrand: $\phi(R, \alpha)=f(\alpha)$ om met de Poisson integraal (4-27) de potentiaal in de cirkel te berekenen, zie appendix C.

$$\phi(r, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr \cos(\alpha - \vartheta)} f(\alpha) d\alpha = P_r\{f\} \quad (4-27)$$

De randwaarden voor de potentiaal: $\phi(R, \vartheta_j) = f_j$, $j=1, 2, \dots, n$ zijn gegeven of bepaald uit (4-24) in de middens van de elementen en constant over die elementen, zie 4.1. Voor een potentiaal ϕ_i , $i=1, 2, \dots, m$, in de cirkel levert deze discretisatie van (4-27) met de REM de volgende uitdrukking.

$$\begin{aligned} \phi(r_i, \vartheta_i) &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\alpha_j} \frac{R^2 - r_i^2}{R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cos(\alpha - \vartheta_i)} d\alpha f(\vartheta_j) \quad \Leftrightarrow \\ \phi_i &= \sum_{j=1}^n P_{ij} f_j \quad \text{voor } i=1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (4-28)$$

In (4-28) is P_{ij} , zijnde de coëfficiënten van de "Poisson" matrix P , dan de volgende bepaalde integraal.

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\alpha_j} \frac{R^2 - r_i^2}{R^2 + r_i^2 - 2Rr_i \cos(\alpha - \vartheta_i)} d\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\alpha_j} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\alpha - \vartheta_i)} d\alpha \quad (4-29)$$

De integraal van (4-29) is, zie appendix E.6;

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[P(x) \right]_{\beta_{ij-1}}^{\beta_{ij}} \quad \text{en } P(x) = 2 \arctan \left(\frac{1+r}{1-r} \tan \left(\frac{x}{2} \right) \right) \quad (4-30)$$

$x = \beta_{ij}$ of $x = \beta_{ij-1} \Rightarrow$ toepassing van (E-54) voor $P(x)$

4.2.2. Discretisatie van de middelwaarde eigenschap met de REM

Als $r=r_0$ dan benaderen we $\phi_m = \hat{\phi}$ (4-8) op dezelfde wijze als dat voor de Poisson integraal (4-27) is gedaan. D.w.z. $\phi(R, \vartheta_j) = \phi_j$ t.p.v. de middens ϑ_j is constant over een element $\Delta\alpha_j$, $j=1, 2, \dots, n$.

$$\phi(0) = \phi_m = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\alpha_j} d\alpha \phi(R, \vartheta_j) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \Delta\alpha_j \phi_j = \sum_{j=1}^n m_j \phi_j \quad \Leftrightarrow \quad (4-31)$$

$$\phi(0) = \phi_m = \underline{m} \cdot \underline{\phi} \quad \text{en} \quad m_j = \frac{1}{2\pi} \Delta\alpha_j, \quad \phi_j = \phi(R, \vartheta_j)$$

(4-8) en ook zijn discretisatie met de REM (4-31) geldt voor elke harmonische functie ϕ in gebied Ω : $\Delta\phi=0$ in Ω , zolang de cirkel met straal R binnen dit gebied Ω ligt. Verder reduceert (4-31) tot het rekenkundig gemiddelde voor de n waarden ϕ_j als we een equidistant rooster nemen; $m_j=1/n$, zie (4-13).

4.2.3. Testgeval voor de Poisson integraal

We gaan weer uit van $n=8$ elementen op een equidistant rooster op de cirkelrand en berekenen voor $\phi(R, \vartheta)=10$ op de cirkelrand de potentiaal in een 25-tal inwendige punten van de cirkel m.b.v. (4-28,30). Deze gaven de exacte waarden te zien, zie bijlage II.

4.3. De Hilbert integraal

4.3.1. De discretisatie van de Hilbert integraal met de REM

We definiëren de analytische functie $w=g(\zeta)=u+iv$ in de cirkel $r<R$ en $\zeta=re^{i\vartheta}$. Aangezien $w=g(\zeta)$ is analytisch geldt dat $\Delta u=0$ en $\Delta v=0$ in de cirkel $r<R$. Op de cirkelrand $r=R$ geldt dan voor de functie $w=g^+(\zeta)=g(Re^{i\vartheta})=g^*(\vartheta)=u(\vartheta)+iv(\vartheta)$ de volgende relatie tussen zijn reële deel $u(\vartheta)$ en imaginaire deel $v(\vartheta)$, als we voor de eenvoud stellen dat $g(0)=0 \Leftrightarrow u_m=0 \wedge v_m=0$, zie appendix D;

$$v(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\vartheta-\alpha}{2}\right) u(\alpha) d\alpha \quad \Leftrightarrow \quad v = K\{u\} \quad \text{OF} \quad (4-32)$$

$$u(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\alpha-\vartheta}{2}\right) v(\alpha) d\alpha \quad \Leftrightarrow \quad u = -K\{v\}$$

De integraal in (4-32) is de Hilbert integraal. Discretisatie van de Hilbert integraal $-K$ met de REM voor n constante elementen gaat als volgt. De waarden van $v(\vartheta_i)$ en $u(\vartheta_i)$ worden ter plaatse van de middens van deze elementen gekozen en over resp. een element $\Delta\alpha_j$ en $\Delta\alpha_i$ constant verondersteld. Toepassing van dit voor elk knooppunt ϑ_i , $i=1,2..n$ op (4-32) geeft dan;

$$u(\vartheta_i) = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\alpha_j} \cot\left(\frac{\alpha-\vartheta_i}{2}\right) d\alpha v(\vartheta_j) \quad \text{voor } i=1,2..n \quad \Leftrightarrow$$

$$u_i = \sum_{j=1}^n K_{ij} v_j \quad \text{voor } i=1,2..n \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u} = K\underline{v} \quad (4-33)$$

$$\text{Idem } v_i = - \sum_{j=1}^n K_{ij} u_j \quad \text{voor } i=1,2..n \quad \Leftrightarrow \quad \underline{v} = -K\underline{u}$$

De coëfficiënten K_{ij} vormen de "Hilbert" matrix K ;

$$K_{ij} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta\alpha_j} \cot\left(\frac{\alpha-\vartheta_i}{2}\right) d\alpha \quad i, j=1,2..n \quad (4-34)$$

Berekening van K_{ij} (4-34), zie appendix E.7, levert;

$$K_{ij} = \frac{1}{2\pi} \left[K(x) \right]_{\beta_{ij-1}}^{\beta_{ij}} \text{ en } K(x) = \ln(1-\cos x) \quad \text{voor } i \neq j$$

$$x = \beta_{ij} \text{ of } x = \beta_{ij-1} \Rightarrow \text{toepassing van (E-9) voor } K(x)=g(x) \quad (4-35)$$

$$K_{ii} = 0 \quad \text{voor } i=j$$

De matrix K is singulier en tevens voor een equidistante verdeling van de elementen scheefsymmetrisch en circulant.

4.3.2. Testgeval

Voor $-K\{\sin\vartheta\} = \cos\vartheta$ is de discretisatie met de REM van de Hilbert integraal tot stand gebracht voor $n=8, 16, 32$ en 64 elementen, equidistant verdeeld. De maximale relatieve fout verminderde ongeveer van resp. 20%, 10%, 5% naar 2,5%. De fout blijkt dus van orde $\Delta\alpha = \frac{2\pi}{n}$: $O(\Delta\alpha) = O(\frac{1}{n})$ te zijn, zie bijlage III.

5. DE NUMERIEKE CONFORME AFBEELDING OP DE CIRKEL

5.1. De conforme afbeelding op de cirkel

5.1.1. Algemene theorie

Bekeken wordt de inverse conforme afbeelding van een regulier gebied B met Jordan kurve ∂B met parametrisering τ in het complexe $w=u+iv$ vlak, naar de cirkel D met cirkelrand ∂D , $|\zeta|=r=R$ en parametrisering ϑ , $0 \leq \vartheta < 2\pi$, in het complexe $\zeta=\xi+i\eta=re^{i\vartheta}$ vlak. Deze conforme afbeelding wordt dan gegeven door de complexe functie;

$$\zeta = f(w) \quad \text{voor } \zeta \in D \Leftrightarrow r < R \quad \text{en } w \in B. \quad (5-1)$$

De Riemann afbeeldingstheorie, zie Heinrici (1986), stelt dan dat deze complexe functie $f(w)$ aan de volgende eisen moet doen als $f(w)$ inderdaad een conforme afbeelding van B naar cirkel D tot stand wil brengen.

$$(1) \quad f(w) \text{ is analytisch en 1 op 1 in } B \quad (5-2a)$$

$$(2) \quad f(a) = 0, \quad f'(0) > 0 \quad \text{voor } a \in B \quad (5-2b)$$

Voorwaarde (5-2b) zijn de normaliseringscondities en leggen de additieve translatie en rotatie vast, die bij een conforme afbeelding kunnen worden gesuperponeerd, waarbij de conforme afbeelding conform blijft. Deze condities maken het probleem van het vinden van $f(w)$ dus eenduidig. In reële notatie moet (5-2a) dan luiden; $\Delta_{\underline{u}} \xi = 0$ en $\Delta_{\underline{u}} \eta = 0$ en 1 op 1 in B . Voor de conforme afbeelding;

$$w = f^{-1}(\zeta) = g(\zeta) = g(re^{i\vartheta}) \quad \text{voor } w \in B \quad \text{en } \zeta \in D \Leftrightarrow r < R \quad (5-3)$$

van de cirkel D naar B moet $g(\zeta)$ aan dezelfde eisen voldoen als (5-2a,b).

$$(1) \quad g(\zeta) \text{ is analytisch en 1 op 1 in de cirkel } D \quad (5-4a)$$

$$(2) \quad g(0) = a, \quad g'(0) > 0 \quad \text{en} \quad a = u_m + iv_m \in B \quad (5-4b)$$

In (5-4b) is $u_m = u(0)$ en $v_m = v(0)$. Ook dit probleem is met (5-4b) dan eenduidig. In reële vorm luidt (5-4a); $\Delta u = 0$ en $\Delta v = 0$ en 1 op 1 in D . Een belangrijke eigenschap van de conforme afbeelding is dat hij hoek bewarend moet zijn; een hoek β in een punt b van D moet een hoek β hebben in het punt $g(b)$ in B .

We breiden bovenstaande theorie uit naar de randen ∂B en $\partial D \Leftrightarrow r=R$, middels de Osgood-Caratheodory uitbreidings theorie voor conforme afbeeldingen op de cirkel. Indien men de conforme afbeelding naar de randen brengt;

$$w = g^+(\zeta) = g(Re^{i\vartheta}) = g^*(\vartheta) \quad \text{voor } w \in \partial B \quad \text{en } \zeta \in \partial D \Leftrightarrow r=R \quad (5-5)$$

moet $g(\zeta)$ $r \leq R$ aan de volgende eisen voldoen;

$$(1) \quad g^+(\zeta) \text{ is continue en 1 op 1 op de cirkelrand } \partial D \quad (5-6)$$

$$(2) \quad g(0) = a, \quad g'(0) > 0 \quad \text{en} \quad a = u_m + iv_m \in B \quad (5-4b)$$

$$(3) \quad g(\zeta) \text{ is analytisch en 1 op 1 in de cirkel } D \quad (5-4a)$$

Voor de inverse conforme afbeelding $\zeta = f^+(w)$ op de randen ∂D en ∂B geldt een analoge redenering als (5-6) met (5-2a,b). Uit (5-6,4b) en (5-4a) volgt de belangrijke conclusie dat als de conforme afbeelding $w = g^+(\zeta) = u + iv$ (5-6) op de randen is gevonden, die aan de normaliseringscondities (5-4b) voldoet, men ook de inwendige conforme afbeelding $w = g(\zeta) = u + iv$ (5-4a) kan vinden. Door b.v. de Dirichlet potentiaalproblemen $\Delta u = 0$ en $\Delta v = 0$ in D op te lossen m.b.v. van de Poisson integraal, zie appendix C en 4.2.

Een verdeling $\underline{u} = (u, v)$ dient nu aan twee eisen te voldoen, hetgeen equivalent is met het vinden van de conforme afbeelding $w = g^+(\zeta) = u + iv$ (5-6). Ten eerste moet $\underline{u}(\tau)$ op de rand ∂B met parametrisering τ liggen.

$$w(\tau) = \{\underline{u}(\tau) \mid \tau \mapsto \underline{u}(\tau) \wedge 0 \leq \tau < 2\pi\} = \partial B(\tau) \quad (5-7)$$

Ten tweede dient voor zo'n verdeling $\underline{u}(\vartheta) = (u(\vartheta), v(\vartheta))$ te gelden, dat $u(\vartheta)$ en $v(\vartheta)$ elkaars periodieke toegevoegde zijn op de cirkelrand ∂D , zie appendix D.

$$v = K\{u\} + v_m \quad \text{OF} \quad u = -K\{v\} + u_m \quad (5-8)$$

De periodieke conjugatie operator K wordt hier weergegeven door de (singuliere Cauchy hoofdwaaarde) Hilbert integraal uit appendix D.

$$K\{..(\vartheta)\} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\alpha - \vartheta}{2}\right) ..(\alpha) d\alpha \quad (5-9)$$

Door de invoering van de relatieve straal $r = r/R$ krijgen we de volgende notaties;

$$g(\zeta) = g(re^{i\vartheta}) = g(re^{i\vartheta}) \quad \text{en} \quad g^+(\zeta) = g(Re^{i\vartheta}) = g(e^{i\vartheta}) \quad (5-9a)$$

Door te stellen dat $g^+(\zeta) = g(e^{i\vartheta})$ voor de conforme afbeelding op de cirkelrand $r=R$, dient men er wel rekening mee te houden dat de Jacobiaan van de afbeelding vermenigvuldigd moet worden met $1/R$. Uit bovenstaande volgt dat het vinden van de conforme afbeelding $w(\tau) = g(e^{i\vartheta})$ gelijkwaardig is met het vinden van de zg. (genormaliseerde) Grens Correspondentie Functie: GCF $\tau = \tau(\vartheta)$.

$$w(\tau) = g(e^{i\vartheta}) \quad \Leftrightarrow \quad \tau = \tau(\vartheta) \quad \text{met} \quad 0 \leq \tau < 2\pi \quad \text{en} \quad \tau_0 = \tau(\vartheta_0) \quad (5-10)$$

$$\gamma(\vartheta) = \tau(\vartheta) - \vartheta \quad \Leftrightarrow \quad \tau(\vartheta) = \gamma(\vartheta) + \vartheta \quad (5-10a)$$

De functie $\gamma(\vartheta)$ in (5-10a) wordt de gereduceerde GCF genoemd. Vervanging van $\tau(\vartheta)$ door $\gamma(\vartheta) + \vartheta$ zorgt ervoor dat $w(\tau)$ nu een periodiciteit van 2π heeft;

$w(\gamma(\vartheta) + \vartheta + 2\pi) = w(\gamma(\vartheta) + \vartheta)$. Hierdoor is direct Fourieranalyse mogelijk. Veel auteurs, zie o.a. Gutknecht (1986), die de Fast Fourier Transformatie: FFT, appendix C.5, toepassen voor (numerieke) periodieke conjugatie, appendix D.3, maken daarom gebruik van de gereduceerde GCF $\gamma(\vartheta)$. Ik gebruik de gewone GCF $\tau(\vartheta)$. De GCF $\tau(\vartheta)$ en dus de conforme afbeelding $w(\tau) = g(e^{i\vartheta})$ wordt eenduidig vastgelegd door de normalerings condities (5-4b). De eerste conditie in (5-4b) voor de twee voorgeschreven reële waarden u_m en v_m kan middels de middelwaarde eigenschap voor harmonische functies worden toegepast op resp. de waarden $u(\vartheta)$ of $v(\vartheta)$ op de cirkelrand ∂D , zie appendix C.1 en 4.1.1.

$$g(0) = u_m + iv_m \Rightarrow u_m = \hat{u} \quad v_m = \hat{v} \quad (5-11)$$

In (5-11) is $\hat{\cdot}$ de middelwaarde operator op de cirkelrand $r=R$;

$$\hat{\cdot} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots(\alpha) d\alpha \quad (5-12)$$

De tweede conditie in (5-4b) is gelijkwaardig met het vasthouden van 1 punt op de randen tijdens het iteratie proces, dat hierna wordt beschreven.

$$g'(0) > 0 \Leftrightarrow w(\tau_0) = g(e^{i\vartheta_0}) = u_0 + iv_0 \Rightarrow v_0 = v_0^k = 0 \quad (5-13)$$

$$\text{met } \tau_0 = \tau(\vartheta_0), \quad u_0 = u(\tau_0), \quad v_0 = v(\tau_0), \quad v_0 = v(\vartheta_0)$$

Het zal geen verwondering opwekken dat het vinden van de exacte GCF $\tau = \tau(\vartheta)$ een onmogelijke opgave blijkt te zijn, zoals de integraalvergelijking (5-8,9) dit aantoon, omdat deze voor $\tau(\vartheta)$ niet-lineair is. Stel nu dat we een benadering van de GCF hebben gevonden: $\tau^k(\vartheta)$ en we corrigeren die met $v(\vartheta)$. Voor de conforme afbeelding op de cirkelrand (5-10) krijgen we dan met de correctie $v(\vartheta)$;

$$\tau(\vartheta) = \tau^k(\vartheta) + v(\vartheta) \Leftrightarrow w(\tau^k + v) = g(e^{i\vartheta}) \quad (5-14)$$

Echter het vinden van de exacte $v(\vartheta)$ is even moeilijk als het vinden van de GCF $\tau(\vartheta)$ zelf. De introductie van een correctie $v^k(\vartheta)$ maakt wel een iteratie procedure voor (5-14) mogelijk, b.v. met de Newton-Raphson iteratie, waarbij $v^k(\vartheta)$ de gezochte functie is en $\tau^k = \tau^k(\vartheta)$ bekend is.

$$g(e^{i\vartheta}) = w(\tau^{k+1}) \cong w(\tau^k) + w_\tau(\tau^k) v^k(\vartheta) \quad \text{met} \quad \tau^{k+1} = \tau^k + v^k \quad (5-15)$$

In (5-15) is w_τ de afgeleide van $w(\tau)$ naar τ en dientgevolge legt de toepassing van de Newton-Raphson iteratie extra eisen op voor de gladheid van de kromme ∂B . Toepassing van een iteratie procedure zoals (5-15) op (5-8,9) maakt de integraalvergelijking voor $v^k(\vartheta)$ nu lineair en daardoor is discretisatie van deze lineaire integraalvergelijking mogelijk met de REM op de cirkelrand, zie begin appendix B. De correctie $v^k(\vartheta)$ wordt per iteratieslag

k eenduidig vastgelegd door (5-11,12,13). De iteratie dient te convergeren, d.w.z. $k \rightarrow \infty \Rightarrow v^k(\vartheta) = 0$ en dan is bij convergentie de gezochte GCF gevonden: $k \rightarrow \infty \tau^{k+1}(\vartheta) = \tau^k(\vartheta) = \tau(\vartheta)$. Bij een Newton-Raphson iteratie zal het iteratieproces kwadratisch convergeren.

Echter voor het vinden van de GCF (5-10) komen niet alle Jordan curves ∂B in aanmerking. Uitgezonderd worden diegene die rechte lijnstukken bevatten, daar zij de resultaten voor het iteratief gedrag voor de conforme afbeelding sterk nadelig beïnvloeden. In feite is voor dergelijke randen geen numerieke conforme afbeelding te vinden. We houden Jordan curves over met hoekpunten en stukken gladde krommen; d.w.z. stukken krommen met een continue *veranderend* verloop van de raaklijn oftewel stukken krommen die in elk punt een kromming hebben. De Osgood-Caratheodory theorie (5-6) is dan uit breiden door "continue" aan te vullen met "stuksgewijs analytisch, behalve in de hoekpunten van ∂B ". Bij de numerieke oplossing van de GCF zorgen de hoekpunten vaak voor problemen t.a.v. de convergentie van een iteratie proces zoals de Newton-Raphson methode. Aangezien de kromme ∂B uit fig. 3-7 in ons geval geen hoekpunten heeft en in elk punt een kromming bezit, kan daarom een numerieke conforme afbeelding worden gevonden met een Newton-Raphson iteratie, die kwadratisch convergeert. (De kromme ∂B uit fig. 3-7 is "gladder" dan een Liapunow kromme in appendix A, aangezien een Liapunow kromme niet noodzakelijkerwijs overal een kromming hoeft te bezitten.)

Voor het vinden van de inverse conforme afbeelding $\zeta = f^+(w)$ op de randen geldt dat dit gelijkwaardig is met het vinden van de inverse GCF $\vartheta = \vartheta(\tau)$. Anders dan bij (5-10) hoeft hiervoor meestal geen iteratie procedure toegepast te worden, en volgt de inverse GCF $\vartheta = \vartheta(\tau)$ uit de relatie $\vartheta(\tau) = \arg[f^+(w)]$. Daardoor zijn meer algemene randen ∂B mogelijk, b.v. met hoekpunten, voor de inverse conforme afbeelding $\zeta = f^+(w)$ dan voor $w = g^+(\zeta)$. De bepaling van de inverse conforme afbeelding $\zeta = f^+(w)$ van een rand ∂B naar de cirkelrand ∂D , gebeurt voornamelijk door integraal vergelijkingen; lineaire, b.v. Fredholm integraal vergelijkingen van de eerste en tweede soort, zie appendix A.5, en niet-lineaire. Lineaire integraal vergelijkingen kunnen met de REM worden opgelost. Niet-lineaire integraal vergelijkingen moeten iteratief worden opgelost, zie Heinrici (1986).

5.1.2. Numerieke conforme afbeeldingen gebaseerd op periodieke functie conjugatie

De methode in 5.1.1 voor het vinden van een (numerieke) conforme afbeelding wordt in deze paragraaf meer algemeen beschreven, zie Gutknecht (1986). Alleen voor de conditie (5-11) beperken we ons in deze paragraaf tot $a=0$;

$$g(0) = u_m + i v_m = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u_m = v_m = 0 \quad (5-11a)$$

Allereerst wordt er een complexe hulpfunctie $G(\zeta) = h(g(\zeta)/\zeta)$ gedefinieerd, die in de cirkel $D \Leftrightarrow r < R$ analytisch is. Bijvoorbeeld;

$$G(\zeta) = h(g(\zeta)/\zeta) = g(\zeta)/\zeta \quad (5-16)$$

$$G(\zeta) = h(g(\zeta)/\zeta) = \text{Ln}[g(\zeta)/\zeta] \quad (5-17)$$

Het voordeel van de introductie van zo'n hulpfunctie is, dat de nu a priori aan de conditie (5-11a) wordt voldaan door (5-16) of zelfs aan de condities (5-11a,13) door (5-17). Er zijn ook nog hulpfuncties waar $g'(\zeta)$ in voorkomt, we laten deze hulpfuncties verder buiten beschouwing. We brengen nu zo'n hulpfunctie naar de randen ∂B en $\partial D \Leftrightarrow r=R$ en krijgen dan voor $G^+(\zeta) = G(e^{i\vartheta})$;

$$G(e^{i\vartheta}) = W(\tau) = U(\tau) + iV(\tau) \quad (5-18)$$

$U(\tau)$ en $V(\tau)$ met $\tau = \tau(\vartheta)$ dienen weer elkaars periodieke toegevoegde functies te zijn op de cirkelrand;

$$Q\{\tau\} = V - V_m - K\{U\} = 0 \quad (\text{OF} \quad Q\{\tau\} = U - U_m + K\{V\} = 0) \quad (5-19)$$

(5-19) is te vereenvoudigen als aan de conditie (5-11a) m.b.v. (5-16) wordt voldaan of zelfs aan de condities (5-11a,13) m.b.v. (5-17) wordt voldaan.

$$V_m = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \quad (\text{OF} \quad U_m = 0 \Rightarrow g(0) = 0) \quad \text{met (5-16)} \quad (5-20)$$

$$V_m = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \wedge g'(0) > 0 \quad \text{met (5-17)} \quad (5-21)$$

Men krijgt dan voor (5-19);

$$Q\{\tau\} = V - K\{U\} = 0 \quad (\text{OF} \quad Q\{\tau\} = U + K\{V\} = 0) \quad \text{met } \tau = \tau(\vartheta) \quad (5-22)$$

$$\text{dus } Q\{\tau(\vartheta)\} = V(\tau(\vartheta)) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\alpha - \vartheta}{2}\right) U(\tau(\alpha)) d\alpha = 0$$

(5-22) is een niet-lineaire integraalvergelijking voor $\tau(\vartheta)$, hetgeen het vinden van de exacte GCF $\tau(\vartheta)$, waarbij nog in geval van (5-16) aan (5-13) moet worden voldaan, een onmogelijke opgave maakt. Dit geldt ook als geen hulpfunctie wordt gedefinieerd, vergelijk (5-22) met (5-8,9).

Door het toepassen van een iteratie procedure wordt (5-22) nu in principe gelineairiseerd. Bijvoorbeeld m.b.v. van een Picard iteratie, ook wel successieve conjugatie genoemd;

$$Q\{\tau^{k+1}\} \cong \tau^{k+1} - T\{\tau^k\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau^{k+1} = T\{\tau^k\} \quad (5-23)$$

De integraal $T\{\tau^k(\vartheta)\}$ kan op verschillende wijzen numeriek worden gevalueerd, b.v. met Gauss kwadratuur, zie B.4, of met de FFT. Een andere iteratie methode is de Newton-Raphson iteratie;

$$Q\{\tau^{k+1}\} = Q\{\tau^k + v^k\} \cong Q\{\tau^k\} + Q_{\tau}\{v^k\} = 0 \quad (5-24)$$

$$Q_{\tau}\{v^k(\vartheta)\} = V_{\tau}(\tau^k(\vartheta))v^k(\vartheta) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\alpha - \vartheta}{2}\right) U_{\tau}(\tau^k(\alpha))v^k(\alpha) d\alpha$$

(5-24) is dan voor de gezochte correctie functie $v^k(\vartheta)$ een lineaire integraal vergelijking geworden; nl. een Fredholm integraal vergelijking van de tweede soort. Deze vergelijking kan b.v. met de REM gediscretiseerd worden.

I.p.v. de Newton-Raphson methode op (5-22) toe te passen kan men deze ook direct toepassen op (5-18), zoals dit in (5-15) is gedaan.

$$\begin{aligned} G(e^{i\vartheta}) &= W(\tau^{k+1}) = W(\tau^k + v^k) \cong W(\tau^k) + W_\tau(\tau^k) v^k \\ W(\tau^k) + W_\tau(\tau^k) v^k &= U(\tau^k) + U_\tau(\tau^k) v^k + i \left[V(\tau^k) + V_\tau(\tau^k) v^k \right] \end{aligned} \quad (5-25)$$

En aangezien het reële deel en imaginaire deel van (5-25) elkaars periodieke toegevoegde functies dienen te zijn levert dit met $V_m=0$ de lineaire integraalvergelijking (5-24) voor $v^k(\vartheta)$ op.

Een iteratie proces als (5-15,25) kan geïnterpreteerd worden als het schuiven van de (discrete) punten (u,v) -gebaseerd op een vaste (en equidistante) verdeling op de cirkelrand tijdens het iteratie proces-, zodat deze punten in eerste instantie bij benadering op ∂B liggen en tevens bij benadering geldt dat het reële deel en imaginaire deel van de numerieke conforme afbeelding elkaars periodieke toegevoegde functies zijn, zie verder 5.2.1.

5.1.3. Enkele bekende numerieke conforme afbeeldingen

De bekendste conforme afbeelding van de cirkelrand naar ∂B is de methode van Theodorsen, zie Gaier (1964). Voor de berekening van $g(e^{i\vartheta})$ maakt hij gebruik van een hulpfunctie (5-17). Voor de oplossing van (5-22) gebruikte hij de Picard iteratie (5-23). Het nadeel van de methode van Theodorsen is dat ∂B geen hoekpunten mag bevatten en dat bovendien B "ster"-achtig moet zijn; $w(\tau) = \rho(\tau) e^{i\tau}$. De rekentijd voor de methode van Theodorsen wordt voornamelijk bepaald door de numerieke discretisatie van de integraal uit (5-23) en/of door de oplossing van het stelsel (niet-)lineaire vergelijkingen. Met name door snelle indirecte iteratie methoden kan veel tijd bespaard worden. M.b.v. de FFT kan dan het aantal operaties voor de methode van Theodorsen beperkt blijven tot $O(n \log_2 n)$.

De methode van Anderson & Chakravarthy (1979), die geen gebruik maakt van een hulpfunctie, gaat uit van de Cauchy-Riemann vergelijkingen in poolcoördinaten in de cirkel, die werden gediscretiseerd m.b.v. de EDM.

$$u_r = \frac{1}{r} v_\vartheta \quad \text{en} \quad -v_r = \frac{1}{r} u_\vartheta \quad \text{voor } r \leq 1 \quad (5-26)$$

Dit gaf uit eindelijk een "invloeds" matrixvergelijking tussen voorgeschreven waarden v op de cirkelrand en nog onbekende waarden u op de cirkelrand: $A\underline{v} = \underline{u} - \underline{u}_m$ (dit komt dus overeen met mijn verdiscretiseerde vorm van (5-8,9): $K\underline{v} = \underline{u} - \underline{u}_m$). Hij schatte nu $\underline{u}$ en met $v_m = \hat{v}$ (5-11,12) als nevenvoorwaarde werd

dit t.o.v. $\underline{A}\underline{v}=\underline{u}-\underline{u}_m$ geminimaliseerd met de kleinste kwadraten methode, wat dus in feite hun iteratie proces is: $|Q\{\tau\}|^2=0$. Want dit stelsel niet-lineaire vergelijkingen werd opgelost met de iteratieve optimalisatie of gemodificeerde Newton methode. Dit is zeker qua rekentijd een kostbaar proces, aangezien het opstellen (aan het begin van het iteratie proces) van de invloedsmatrix $\underline{A}$ alleen al $O(n^3 \log_2 n)$ operaties kost, en de iteratie methode per iteratiestap $O(n^3)$.

De methode van Fornberg (1980) berekent m.b.v. de FFT de complexe Fouriercoëfficiënten voor $g(e^{i\vartheta})$, waarbij de coëfficiënten met een negatieve index nul dienen te zijn, zie D.3. Oftewel periodieke conjugatie werd tot stand gebracht door 2 FFT's toe te passen. Door ook de Fouriercoëfficiënt met index 0 op nul te houden werd aan (5-11a) voldaan, hetgeen dus equivalent is met het toepassen van de hulpfunctie (5-16). Hij past verder de Newton-Raphson iteratie (5-15) toe. Voorwaarde (5-13) werd toegepast door, net zoals bij Anderson & Chakravarthy (1979), de eerste vergelijking van het resulterende stelsel lineaire vergelijkingen $\underline{S}\underline{v}=\underline{c}$ weg te laten. Dit gereduceerde stelsel $\underline{S}^* \underline{v} = \underline{c}^*$ van $(n-1)$ bij $(n-1)$ werd met een snelle iteratie methode middels de FFT opgelost, zodat de gehele methode $O(n \log_2 n)$ operaties kost. Het zwakke punt van Fornberg is dat hij niet kan bewijzen waarom deze eerste vergelijking mag worden weggelaten.

De methode van Menikoff & Zemach (1980) lijkt veel op de methode van Theodorsen. Men gebruikt de hulpfunctie (5-17) en de parametrisering $w(\tau) = \rho(\tau)e^{i\tau}$. Alleen nu substitueren zij de inverse GCF $\vartheta = \sigma(\tau)$ in (5-19, tussen haken).

$$U(\vartheta) = U_m - K\{V(\vartheta)\} \quad \text{met } U(\vartheta) = \ln[\rho(\tau(\vartheta))] \text{ en } V(\vartheta) = \tau(\vartheta) - \vartheta = \gamma(\vartheta) \quad (5-29)$$

$$\text{en } K\{V(\vartheta)\} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\sigma-\vartheta}{2}\right) [V(\sigma) - V(\vartheta)] d\sigma$$

De definitie (5-29, onderste vergelijking) komt men ook wel eens tegen voor de Hilbert integraal, zie Heinrici (1986). Deze definitie maakt de Hilbert integraal nu niet singulier. M.b.v. van de volgende relaties;

$$-\cot\left(\frac{\sigma-\vartheta}{2}\right) = 2 \frac{d}{d\sigma} \ln \left| \sin\left(\frac{\vartheta-\sigma}{2}\right) \right|, \quad \frac{dV}{d\sigma} d\sigma = \left(\frac{d\tau}{d\sigma} - 1\right) d\sigma = d\tau - d\sigma$$

en de periodiciteit van de sinus kan door partiële integratie, waarbij ϑ door τ is vervangen, de niet-lineaire integraal vergelijking (5-29) voor τ als volgt worden herschreven.

$$\ln[\rho(\tau)] = U_m - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \frac{\sin[(\sigma(\tau) - \sigma(\alpha))/2]}{\sin[(\tau - \alpha)/2]} \right| d\alpha \quad (5-30)$$

Door de integraal van (5-30) numeriek met Gauss kwadratuur te berekenen ontstaat een stelsel niet-lineaire vergelijkingen, welke door de Newton methode

iteratief wordt opgelost. Dit kost $O(n^3)$ operaties. Het bijzondere van de methode (5-30) van Menikoff & Zemach is dat tijdens het iteratie proces de discrete equidistant verdeelde punten (u,v) op ∂B vast blijven, terwijl nu de originele punten op de cirkelrand "verschuiven" en niet equidistant verdeeld zijn.

5.2. De iteratie procedure voor de numerieke conforme afbeelding

Allereerst gebruik ik geen hulpfunctie. Hierdoor moet speciale aandacht worden geschonken aan (5-11,12). D.w.z. uitgaande van de tweede vergelijking van (5-8,9) moet nog worden voldaan aan de tweede conditie van (5-11,12).

$$u = -K\{v\} + u_m, \quad -K\{v(\tau(\vartheta))\} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\alpha-\vartheta}{2}\right) v(\tau(\alpha)) d\alpha \quad (5-31)$$

$$\text{en } v_m = \hat{v}, \quad \hat{v}(\tau(\vartheta)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\tau(\alpha)) d\alpha \Rightarrow g(0) = u_m + i v_m \quad (5-32)$$

Door nog te voldoen aan (5-13) is de numerieke conforme afbeelding eenduidig bepaald.

5.2.1. De Newton-Raphson iteratie

Gekozen wordt voor de Newton-Raphson iteratie procedure zoals deze in (5-15,25) is toegepast om de conforme afbeelding (5-10) iteratief te benaderen.

$$g(e^{i\vartheta}) = w(\tau^{k+1}(\vartheta)) \cong w(\tau^k(\vartheta)) + w_\tau(\tau^k(\vartheta)) v^k(\vartheta) \quad (5-15)$$

Of in kortere notatie voor (5-15);

$$w^{k+1} = w^k + w_\tau^k v^k \quad (5-32)$$

Splitzen van (5-32) in het reële deel en het imaginaire deel geeft dan;

$$u^{k+1} = u^k + u_\tau^k v^k \quad (5-33)$$

$$v^{k+1} = v^k + v_\tau^k v^k \quad (5-34)$$

Substitutie van (5-33,34) in (5-31) levert dan de lineaire integraal vergelijking (5-35) voor $v^k(\vartheta)$ en bij convergentie van de iteratie vinden we dan de conforme afbeelding (5-10) van de cirkelrand ∂D naar de rand ∂B , onder de voorwaarden (5-13,32).

$$-K\left\{v^k + v_\tau^k v^k\right\} + u_m = u^k + u_\tau^k v^k \Leftrightarrow -K\left\{v_\tau^k v^k\right\} - u_\tau^k v^k = K\{v^k\} + u^k - u_m \quad (5-35)$$

Toepassing van (5-34) op de conditie (5-32) geeft de volgende lineaire integraal vergelijking;

$$(v^k + v_{\tau}^k u^k)^{\wedge} = v_m \Leftrightarrow (v_{\tau}^k u^k)^{\wedge} = -\hat{v}^k + v_m \quad (5-36)$$

De iteratie procedure (5-35,36) is eenduidig bepaald als voor elke iteratiestap k (5-13) geldt.

Gekozen is voor de Newton-Raphson methode omdat ∂B geen hoekpunten bevat en overal glad is en zodat dus verwacht mag worden dat kwadratische convergentie van u^k zal plaats vinden. Voor een kromme ∂B met hoekpunten kan men eventueel de secanten iteratie toepassen.

$$w^{k+1} = w^k + w_{\delta}^k u^k \quad \text{en} \quad w_{\delta}^k = (w^k - w^{k-1}) / u^{k-1} \quad (5-37)$$

De toepassing van de secanten iteratie gaat op volstrekt analoge wijze als de Newton-Rapson iteratie. Alleen dient men nu voor $w_{\tau} = u_{\tau} + i v_{\tau}$ te lezen: $w_{\delta} = u_{\delta} + i v_{\delta}$ met (5-37). Verder zal de secanten methode langzamer convergeren dan de Newton-Raphson methode.

Door toepassing van (5-15) zal in eerste instantie $g(e^{i\vartheta})$ op een kromme ∂B^k liggen die ∂B benadert. Het punt $w^{k+1} = g(e^{i\vartheta})$ kunnen we op twee verschillende wijzen naar de rand ∂B terugbrengen, zie onderstaande fig. 5-1.

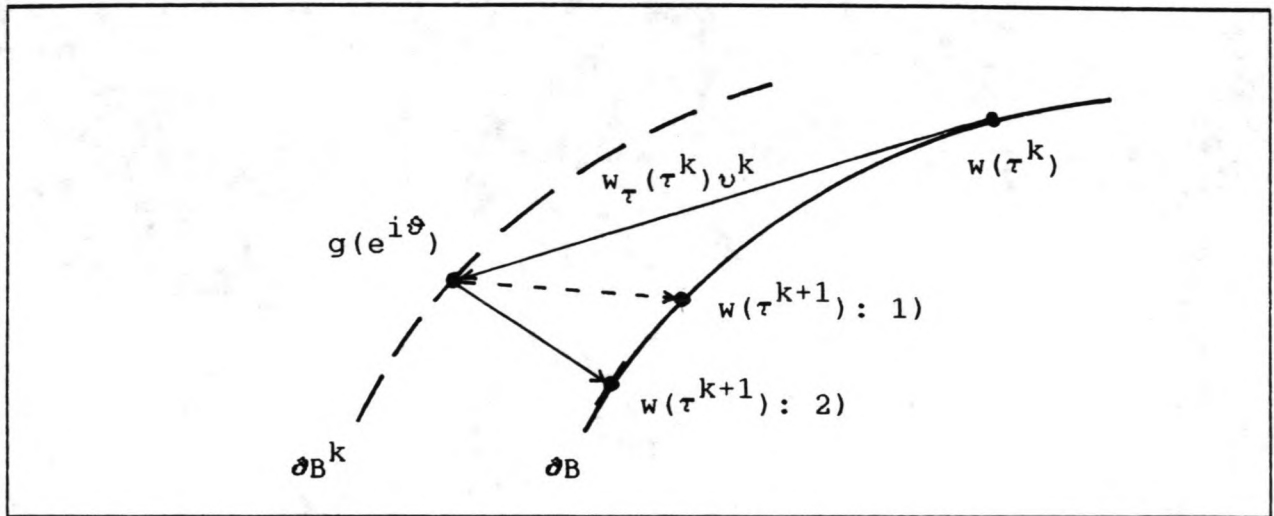


Fig. 5-1 Het terugbrengen van $w^{k+1} = g(e^{i\vartheta})$ naar de rand ∂B

1) In de geest van de lineairisatie, zoals we al in 5.1 hadden gesteld, wordt simpel gesteld;

$$w(\tau^{k+1}) = w(\tau^k + u^k) \Leftrightarrow \tau^{k+1}(\vartheta) = \tau^k(\vartheta) + u^k(\vartheta) \quad (5-38)$$

2) We projecteren het punt $g(e^{i\vartheta})$ loodrecht op ∂B . De oplossing $\tau = \tau^{k+1}(\vartheta)$ voor elke ϑ volgt dan uit de volgende transcendente vergelijking;

$$\operatorname{Re} \left[\frac{w(\tau) - g(e^{i\vartheta})}{w_{\tau}(\tau)} \right] = 0 \quad \text{met} \quad \tau = \tau^{k+1}(\vartheta) \quad (5-39)$$

Aangezien een exacte oplossing voor (5-39) bijna niet is te vinden en omdat

niet duidelijk is welke methode in iteratief opzicht beter is (d.w.z sneller convergeert), wordt gekozen voor (5-38).

5.2.2. De iteratie procedure toegepast op het impliciete functie voorschrift $f(u,v)=0$ van de rand ∂B

I.p.v. een parametrisering van ∂B , kan men ook uitgaan van een impliciet functie voorschrift $f(u,v)=0$ voor de rand ∂B .

$$\partial B = \{ \underline{u}=(u,v) \mid (u,v) \mapsto f(u,v)=0 \} \quad (5-40)$$

Toepassing van de Newton-Raphson iteratie voor een functie f met twee variabelen, welke moet voldoen aan $f(u,v)=0$ geeft;

$$\begin{aligned} f(u,v)=0 &\cong (u^{k+1}-u^k)f_u(u^k,v^k) + (v^{k+1}-v^k)f_v(u^k,v^k) + f(u^k,v^k) \cong \\ u^{k+1}f_u^k + v^{k+1}f_v^k &= u^k f_u^k + v^k f_v^k - f^k \end{aligned} \quad (5-41)$$

In (5-41) zijn f_u en f_v resp. de partiele afgeleiden van $f(u,v)$ naar u en v . Substitutie van (5-31) in het linkerlid van (5-41) geeft de volgende lineaire integraal vergelijkingen voor resp. v^{k+1} en u^{k+1} .

$$-K\{v^{k+1}\}f_u^k + v^{k+1}f_v^k = u^k f_u^k + v^k f_v^k - f^k - f_u^k u_m \quad \text{en} \quad u^{k+1} = -K\{v^{k+1}\} + u_m \quad (5-42)$$

Conditie (5-32) wordt dan;

$$\hat{v}^{k+1} = v_m \quad (5-43)$$

De iteratie procedure is eenduidig bepaald per iteratiestap als aan (5-13) wordt voldaan; $f^k(u_0, v_0) = f_0^k = f_0 = 0$ voor elke iteratiestap k . De secanten iteratie voor $f(u,v)=0$ luidt;

$$\begin{aligned} u^{k+1}F_u^k + v^{k+1}F_v^k &= u^k F_u^k + v^k F_v^k - f^k \\ \text{en } F_u^k &= (f^k - f^{k-1}) / (u^k - u^{k-1}), \quad F_v^k = (f^k - f^{k-1}) / (v^k - v^{k-1}) \end{aligned} \quad (5-44)$$

Ook hier gaat toepassing van de secanten methode volstrekt analoog aan de Newton-Raphson methode en dient men voor resp. f_u en f_v nu F_u en F_v te lezen met (5-44).

Door toepassing van (5-41) zal ook hier in eerste instantie $g(e^{i\theta}) = u^{k+1} + iv^{k+1}$ op een kromme ∂B^{k+1} liggen die ∂B benadert. Het punt (u^{k+1}, v^{k+1}) kunnen we weer op twee verschillende wijzen naar de rand ∂B , of in feite bij benadering naar ∂B_c^{k+1} , terugbrengen.

1) In de geest van de lineairisatie, wordt simpel gesteld;

$$u_c^{k+1} = u^{k+1} \quad \text{en} \quad v_c^{k+1} = v^{k+1} \quad (5-45)$$

2) We projecteren het punt (u^{k+1}, v^{k+1}) loodrecht op ∂B .

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} f_u(u,v) \\ f_v(u,v) \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad f(u,v) = 0 \quad (5-46)$$

Bij benadering kunnen we dan voor de oplossing u , v en λ van de drie bovenstaande niet-lineaire vergelijkingen (5-46) stellen;

$$u_c^{k+1} = u^{k+1} - \lambda_c f_u^{k+1} \quad \text{en} \quad v_c^{k+1} = v^{k+1} - \lambda_c f_v^{k+1} \quad (5-47)$$

met $\lambda_c = f^{k+1} / [(f_u^{k+1})^2 + (f_v^{k+1})^2]$

Beide methoden (5-45,47) brengen het punt (u^{k+1}, v^{k+1}) niet exact naar de rand ∂B terug, in tegenstelling tot (5-38,39). Hoewel (5-47) het punt (u^{k+1}, v^{k+1}) dichterbij de rand ∂B brengt en daardoor waarschijnlijk sneller convergeert, zal voor beide methoden (5-45,47) kwadratische convergentie plaatsvinden. Aangezien na het einde van het iteratie proces het punt (u^{k+1}, v^{k+1}) binnen een zelf gekozen nauwkeurigheid δ op ∂B ligt, is gekozen voor de simpele methode (5-45). Eventueel kan gekozen worden voor (5-47) om de convergentie snelheid op te voeren.

5.3. Discretisatie van de numerieke conforme afbeelding met de REM

5.3.1. Discretisatie met de REM van de integraal vergelijkingen

Numerieke periodieke conjugatie vindt plaats door de $-K$ operator in (5-31) met de REM voor n constante elementen te discretiseren. D.w.z. dat de waarden $\tau_j = \tau(\vartheta_j)$, $u_j = u(\tau_j)$ en $v_j = v(\tau_j)$ op de cirkelrand t.p.v. de middens ϑ_j van een element $\Delta\alpha_j$ constant zijn over dat element $\Delta\alpha_j$. Op dezelfde wijze discretiseren we de middelwaarde eigenschap (5-32) met de REM voor n constante elementen. Voor (5-31) en (5-32) krijgen we dan resp. de volgende matrix vergelijking (5-48), zie 4.3.1, en het volgende vector inproduct (5-49), zie 4.2.2.

$$u = -K\{v\} + u_m \quad \Rightarrow \quad \underline{u} = \underline{K}\underline{v} + \underline{u}_m \quad (5-48)$$

$$v_m = \hat{v} \quad \Rightarrow \quad v_m = \underline{m} \cdot \underline{v} \quad (5-49)$$

In (5-48) bestaat de matrix K uit de coëfficiënten K_{ij} , die in 4.3.1 zijn berekend en constant blijven tijdens het iteratie proces en timesteppingsproces. De vector $\underline{u}_m$ bestaat uit de voorgeschreven waarden u_m . In (5-49) bestaat de vector $\underline{m}$ uit de coëfficiënten m_j , die in 4.2.2 zijn berekend en constant blijven tijdens het iteratie proces en timesteppingsproces. De matrix K en de vector $\underline{m}$ hoeven dus maar 1 keer berekend te worden.

We discretiseren nu de lineaire integraal vergelijking (5-35) met de REM voor n constante elementen op dezelfde wijze als (5-48). De waarden τ_j , u_j ,

v_j , u_{τ_j} , v_{τ_j} en v_j zijn dus constant over een element $\Delta\alpha_j$, maar veranderen per iteratie stap k . Let op; we nummeren nu vanaf 0 i.p.v. 1: $i, j=0, 1, \dots, n-1$. Verder gaan we uit van een equidistant rooster op de cirkelrand, zie 4.1.2, hoewel dit niet noodzakelijk is.

$$\Delta\alpha_j = \alpha_{j+1} - \alpha_j = \frac{2\pi}{n}(j+1) - \frac{2\pi}{n}j = \Delta\alpha = \frac{2\pi}{n} \quad \text{en} \quad j=0, 1, \dots, n-1$$

$$\vartheta_j = (\alpha_{j+1} + \alpha_j)/2 = \frac{\pi}{n}(2j+1) \quad \text{en} \quad j=0, 1, \dots, n-1 \quad (5-50)$$

We krijgen dan voor (5-35) de volgende matrix vergelijking;

$$\left[\mathbf{K} \mathbf{D}_v^k - \mathbf{D}_u^k \right] \underline{v}^k = -\mathbf{K} \underline{v}^k + \underline{u}^k - \underline{u}_m \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{S} \underline{v} = \underline{c} \quad (5-51)$$

$$\text{dus} \quad \mathbf{S} = \mathbf{K} \mathbf{D}_v^k - \mathbf{D}_u^k = \mathbf{K} - \mathbf{D}_u^k \quad \text{en} \quad \underline{c} = -\mathbf{K} \underline{v}^k + \underline{u}^k - \underline{u}_m$$

In (5-51) zijn $\mathbf{D}_v^k = \text{diag}[\underline{v}_t^k]$ en $\mathbf{D}_u^k = \text{diag}[\underline{u}_t^k]$ diagonaal matrices. Ook (5-36) discretiseren we met de REM voor n constante elementen en krijgen dan;

$$\left[\mathbf{m} \mathbf{D}_v^k \right] \underline{v}^k = -\mathbf{m} \cdot \underline{v}^k + \underline{v}_m \quad \Leftrightarrow \quad \underline{d}^T \underline{v} = \underline{c}_m \quad (5-52)$$

$$\text{dus} \quad \underline{d}^T = \mathbf{m} \mathbf{D}_v^k \quad \text{en} \quad \underline{c}_m = -\mathbf{m} \cdot \underline{v}^k + \underline{v}_m$$

We implementeren nu voorwaarde (5-13): $v_0=0$ in (5-51,52) voor elke iteratie-stap k , zodat de numerieke conforme afbeelding eenduidig vastligt.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 & \mathbf{k}^{*T} \\ \mathbf{l} & \mathbf{S} \\ \mathbf{d}_0 & \underline{d}^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{v}_0 \\ \underline{v} \\ \underline{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{c}_0 \\ \underline{c} \\ \underline{c}_m \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \mathbf{k}^{*T} \\ \mathbf{S} \\ \underline{d}^{*T} \end{bmatrix} \underline{v}^* = \begin{bmatrix} \underline{c}_0 \\ \underline{c} \\ \underline{c}_m \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T} \underline{v}^* = \underline{b} \quad (5-53)$$

De superindex $*$ in (5-53) e.v. staat voor de gereduceerde. Voor een vector met n coëfficiënten wil dat zeggen dat de 0-de coëfficiënt is weggelaten; $\underline{v} = (\underline{v}_0, \underline{v}^*)$, $\underline{c} = (\underline{c}_0, \underline{c}^*)$, etc. Voor een matrix van n bij n betekent dit dat de 0-de rij en 0-de kolom is weggelaten.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_0 & \mathbf{k}^{*T} \\ \mathbf{l} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{k}^{*T} \\ \mathbf{l} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \quad (5-54)$$

Voor het resulterende stelsel lineaire vergelijkingen (5-53) wordt weleens de 0-de vergelijking weggelaten, zie 5.1.3, we krijgen dan;

$$\begin{bmatrix} \mathbf{S} \\ \underline{d}^{*T} \end{bmatrix} \underline{v}^* = \begin{bmatrix} \underline{c} \\ \underline{c}_m \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{T}^* \underline{v}^* = \underline{b}^* \quad (5-55)$$

De iteratie procedure loopt nu als volgt. We beginnen met een startvector $\tau_j^{*0} = \tau^{*0}(\vartheta_j) = \frac{2\pi}{n}j$, $j=1, 2, \dots, n-1$. (Voor de secanten iteratie zijn twee start-vectoren nodig.) Tijdens de gehele iteratie wordt gekozen voor $\tau_0 = \tau(\vartheta_0) = 0$. Per iteratie stap k wordt dan de matrix $\mathbf{T}$ uit (5-53) van $n+1$ bij $n-1$ en de

vector $\underline{b}$ van $n+1$ opgebouwd. Dit overbepaalde stelsel lineaire vergelijkingen (5-53) wordt vervolgens opgelost, zie de volgende paragraaf. De volgende iteratiestap $k+1$ kan dan met (5-38) worden uitgevoerd;

$$\underline{\tau}^{k+1} = \underline{v}^k + \underline{\tau}^k \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\tau}^{*k+1} = \underline{v}^* + \underline{\tau}^{*k} \quad (5-56)$$

De iteratie wordt beëindigd voor een zelf gekozen nauwkeurigheid ε , indien;

$$|v_j^*| < \varepsilon \quad \text{voor elke } j=1,2,\dots,n-1 \quad (5-57)$$

De numerieke conforme afbeelding is dan gevonden voor de discrete punten $(\underline{u}, \underline{v})$ op de rand ∂B als aan (5-57) is voldaan.

Uitgaande van een functie voorschrift $f(u,v)=0$ voor ∂B kunnen we op dezelfde wijze (5-42,43) discretiseren met de REM voor n constante elementen als op bovenstaande wijze is gedaan. Voor (5-42) met de REM en n constante elementen krijgen we;

$$\begin{aligned} \left[\underline{K} \underline{D}_u^k + \underline{D}_v^k \right] \underline{v}^{k+1} &= \underline{D}_v^k \underline{v}^k + \underline{D}_u^k \underline{u}^k - \underline{f}^k - \underline{D}_{u_m}^k \quad \text{en} \quad \underline{u}^{k+1} = \underline{K} \underline{v}^{k+1} + \underline{u}_m \quad \Leftrightarrow \\ S_f \underline{v} &= \underline{c}_f \quad \text{en} \quad \underline{u} = \underline{K} \underline{v} + \underline{u}_m \end{aligned} \quad (5-58)$$

$$\text{dus} \quad S_f = \underline{K} \underline{D}_u^k + \underline{D}_v^k = \underline{K} + \underline{D}_v^k \quad \text{en} \quad \underline{c}_f = \underline{D}_v^k \underline{v}^k + \underline{D}_u^k \underline{u}^k - \underline{f}^k - \underline{D}_{u_m}^k$$

Voor (5-43) krijgen we;

$$\underline{m} \cdot \underline{v}^{k+1} = v_m \quad \Leftrightarrow \quad \underline{m}^T \underline{v} = v_m \quad (5-59)$$

In (5-58) zijn $\underline{D}_u^k = \text{diag}[f_u^k]$ en $\underline{D}_v^k = \text{diag}[f_v^k]$ weer diagonaal matrices. Toepassing van (5-13): $f(u_0, v_0)=0$, voor elke iteratie stap k op (5-58,59) levert;

$$\begin{bmatrix} s_0 & k^{*T} \\ 1 & S_f^{*T} \\ m_0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ \underline{v} \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_f \\ v_m \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{bmatrix} u_0 \\ \underline{u} \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k^{*T} \\ 1 & K^{*T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_0 \\ \underline{v} \\ v_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ \underline{u}_m \\ u_m \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} k^{*T} \\ S_f^{*T} \\ m \end{bmatrix} \underline{v}^* = \begin{bmatrix} c_0 - s_0 v_0 \\ c_f - 1 v_0 \\ v_m - m_0 v_0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{cases} k^{*T} \underline{v}^* = u_0 - u_m \\ \underline{u}^* = \underline{K} \underline{v}^* + \underline{u}_m + 1 v_0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} k^{*T} \\ S_f^{*T} \\ m \end{bmatrix} \underline{v}^* = \begin{bmatrix} u_0 - u_m \\ c_0 - s_0 v_0 \\ c_f - 1 v_0 \end{bmatrix} \quad \text{en} \quad \underline{u}^* = \underline{K} \underline{v}^* + \underline{u}_m + 1 v_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$T_f \underline{v}^* = \underline{b}_f \quad \text{en} \quad \underline{u}^* = \underline{K} \underline{v}^* + \underline{u}_m + 1 v_0 \quad (5-60)$$

Voor de iteratie procedure beginnen we weer met een startvector v_j^{*0} , $j=1,2,..n-1$, waaruit volgens de tweede matrixvergelijking van (5-60) u_j^{*0} volgt, zodat T_f en b_f kunnen worden opgebouwd. Tijdens de gehele iteratie blijft $f(u_0, v_0)=0$, waarbij gekozen wordt voor $v_0=0$. Voor elke iteratiestap k wordt T_f en b_f opgebouwd en het overbepaalde stelsel lineaire vergelijkingen $T_f v^* = b_f^*$ opgelost. v^* en $u^* = K v^* + u_m^*$ kunnen volgens dan volgens (5-45) direct voor een volgende iteratie stap $k+1$ worden gebruikt. De iteratie wordt weer beëindigd als voldaan wordt aan;

$$|v_j^{*k+1} - v_j^{*k}| < \varepsilon \Rightarrow |f(v_j^*, u_j^*)| < \delta(\varepsilon) \text{ voor elke } j=1,2,..n-1 \quad (5-61)$$

De numerieke conforme afbeelding is dan gevonden voor de discrete punten (u, v) op de ∂B -benaderde, d.w.z. binnen de gestelde nauwkeurigheid $\delta(\varepsilon)$ - rand ∂B , als aan (5-61) is voldaan.

5.3.2. Het resulterende stelsel lineaire vergelijkingen

De numerieke conforme afbeelding leidt dus tot het overbepaalde stelsel lineaire vergelijkingen (5-53): $Tu^* = b^*$, d.w.z. $n+1$ vergelijkingen en $n-1$ onbekenden. Bij gebruik van een functie voorschrift $f(u, v)=0$ voor ∂B wordt ook zo'n overbepaald stelsel lineaire vergelijkingen (5-60) van $n+1$ bij $n-1$ verkregen: $T_f v^* = b_f^*$. We behandelen hier $Tu^* = b^*$, waarbij men in gedachte moet houden dat al het onderstaande ook voor $T_f v^* = b_f^*$ geldt. T.a.v. $Tu^* = b^*$ zijn twee belangrijke conclusies te trekken, die ernstige gevolgen hebben voor de rekentijd voor de oplossing van $Tu^* = b^*$.

(1) De diagonaal van de matrix S^* en de rijvector d^{*T} verandert per iteratiestap k , en daardoor verandert volgens (5-53) ook de matrix T per iteratiestap k . De matrix T blijft dus niet constant tijdens het iteratie proces en dientgevolge ook niet tijdens een timesteppingsproces, zie hoofdstuk 6. Het stelsel $Tu^* = b^*$ moet dus per iteratie stap k worden opgelost.

(2) Het stelsel $Tu^* = b^*$ is overbepaald. Ook als we de 0-de vergelijking weglaten krijgen we een overbepaald stelsel (5-55): $T^* u^* = b^*$, van n bij $n-1$. Fornberg (1980) krijgt bij weglating van de 0-de vergelijking wel een bepaald stelsel $S^* u^* = c^*$ van $n-1$ bij $n-1$, omdat hij in feite gebruik heeft gemaakt van een hulpfunctie (5-16), zodat a priori al aan (5-11a)=(5-49) met $v_m = u_m = 0$ was voldaan. Aangezien door eigenwaarde onderzoek vast kwam te staan dat S bij benadering singulier en S^* niet singulier was voor een aantal krommen ∂B per iteratiestap k , was het weglaten van de 0-de vergelijking "gerechtvaardigd". Aangezien ik zo'n "rechtvaardiging" niet heb onderzocht, laat staan dat ik een bewijs heb gevonden om de 0-de vergelijking weg te laten en aangezien ik dan toch nog een overbepaald stelsel $T^* u^* = b^*$ overhoud, handhaaf ik de 0-de vergelijking.

Een overbepaald stelsel lineaire vergelijkingen $T\underline{v}^* = \underline{b}$ heeft in principe meerdere oplossingen. Door een minimalisatie techniek als de kleinste kwadraten methode op $T\underline{v}^* = \underline{b}$ toe te passen, krijgt men een eenduidige oplossing voor $T\underline{v}^* = \underline{b}$.

$$T\underline{v}^* = \underline{b} \Rightarrow T^T T\underline{v}^* = T^T \underline{b} \Leftrightarrow \underline{v}^* = (T^T T)^{-1} T^T \underline{b} \quad (5-62)$$

Het oplossen van $T^T T\underline{v}^* = T^T \underline{b}$ met Gauss eliminatie, waarbij $T^T T$ in LU decompositie wordt omgezet, is qua rekentijd een zeer inefficiënte methode en tevens nogal onnauwkeurig t.a.v. de oplossing $\underline{v}^*$. Om (5-62) op te lossen maak ik gebruik van de methode van der Zwan (1978). Deze methode maakt gebruik van de decompositie RU van T . De matrix R met dimensie $n+1$ bij $n-1$ is een orthogonale matrix: $R^T R = D$ (D is een diagonaalmatrix). De matrix U is boven-driehoeksmatrix met dimensie $n-1$ bij $n-1$ en $U_{ii} = 1$. De decompositie van T in RU wordt uitgevoerd middels een orthogonalisatie proces volgens het principe van de Gram-Schmidt methode. Tevens wordt hierbij gebruik gemaakt van partiële pivoting. In dit orthogonalisatie proces wordt ook de rechterlidvector $\underline{b}$ betrokken: $\underline{b} = R\underline{h}$.

$$T\underline{v}^* = \underline{b} \Leftrightarrow RU\underline{v}^* = R\underline{h} \quad (5-63)$$

Toepassing van de kleinste kwadraten methode op (5-63) geeft;

$$T^T T\underline{v}^* = T^T \underline{b} \Leftrightarrow R^T RU\underline{v}^* = R^T R\underline{h} \Leftrightarrow U\underline{v}^* = \underline{h} \quad (5-64)$$

Terugsubstitutie van $U\underline{v}^* = \underline{h}$ levert de oplossing $\underline{v}^*$.

Voor een matrix T met dimensie $n+1$ bij $n-1$ is het aantal operaties ongeveer $O(n^3)$ voor het oplossen van $T\underline{v}^* = \underline{b}$ met deze methode. Indien de matrix T goed geconditioneerd is, d.w.z. dat de kolomvectoren een onafhankelijk stelsel vormen, dan is de met de methode van der Zwan berekende oplossing $\underline{v}^*$ exact. Andere directe procedures gebaseerd op de kleinste kwadraten methode zijn volgens van der Zwan kostbaarder qua rekentijd dan zijn methode voor de oplossing van $T\underline{v}^* = \underline{b}$. Weliswaar zijn er indirecte procedures en methoden gebaseerd op een andere minimalisatie techniek dan de kleinste kwadraten methode, doch de tijdwinst die deze methoden winnen t.o.v. de methode van van der Zwan gaat ten koste van de nauwkeurigheid van de oplossing $\underline{v}^*$. De methode kan vergeleken worden met Gauss eliminatie, als de matrix T vierkant is: n bij n . De decompositie van de vierkante matrix T resp. in RU met $\underline{b} = R\underline{h}$ en in LU met $\underline{b} = L\underline{h}$, en terugsubstitutie van $U\underline{v}^* = \underline{h}$ kost in beiden gevallen $O(n^3)$ operaties. Volgens van der Zwan is Gauss eliminatie tweemaal zo sneller dan zijn methode, toegepast op een bepaald stelsel lineaire vergelijkingen.

De gehele methode voor een numerieke conforme afbeelding kost dus $O(n^3)$ operaties.

5.4. Testgevallen, conclusies en aanbevelingen

5.4.1. Testgevallen voor de cirkel, twee ellipsen en het vierkant

Voor de testgevallen wordt de cirkelrand in $n=64$ gelijkvormige elementen verdeeld; een equidistant rooster (5-50). De startvector is $\tau_j^{*0} = \tau^{*0}(\vartheta_j) = \frac{2\pi}{64}j$, of $v_j^{*0} \Rightarrow u_j^{*0}$, en $j=1,2,\dots,63$. Tijdens de gehele iteratie procedure is gekozen voor $\tau_0 = \tau(\vartheta_0) = 0$ of $v_0 = v(\vartheta_0) = 0 \Rightarrow u_0$, en $\vartheta_0 = \pi/64$. In onderstaande tabel zijn de overige invoerparameters voor de verschillende testgevallen gegeven.

rand ∂B	$w(\tau)$ of $f(u,v)=0$	iteratie	ε	u_m	v_m
1) cirkel	$(\cos\tau, \sin\tau)$	Newton-R	0.0001	0	0
2) exc. cirkel	$(\cos\tau, \sin\tau)$	Newton-R	0.0001	0.5	0
3) ellips A	$(0.9\cos\tau, \sin\tau)$	Newton-R	0.0001	0	0
4) ellips A	$(0.9\cos\tau, \sin\tau)$	Secanten	0.0001	0	0
5) ellips A	$(100/81)u^2 + v^2 - 1 = 0$	Newton-R	0.0001	0	0
6) ellips B	$(5\cos\tau, 3\sin\tau)/4$	Newton-R	0.0001	0	0
7) vierkant	$(5-65)$	Secanten	0.01	0	0

Tabel 5-1 De invoerparameters voor de testgevallen

Het functievoorschrift $f(u,v)=0$ voor de rand ∂B van het vierkant luidt;

$$\begin{aligned}
 f(u,v) &= u-1 = 0 & \text{als } -u < v \leq u \\
 f(u,v) &= v-1 = 0 & \text{als } -v \leq u < v \\
 f(u,v) &= u+1 = 0 & \text{als } v \leq u < -v \\
 f(u,v) &= v+1 = 0 & \text{als } u < v \leq -u
 \end{aligned}
 \tag{5-65}$$

De uitvoerresultaten $\tau_j = \tau_j^{k+1}$, $u_j = u(\tau_j)$, $v_j = v(\tau_j)$ en v_j (of u_j , v_j en $f(u_j, v_j)$) voor $j=0,1,\dots,63$ voor de testgevallen zijn gegeven in de bijlagen IV tot en met IX, waarvan alleen de laatste iteratiestap k is afgedrukt, als de nauwkeurigheid ε is bereikt. De overige uitvoerparameters zijn getabelleerd in tabel 5-2. Voor de iteratiestap k definiëren we de volgende parameters voor de parametrisering τ resp. het functievoorschrift $f(u,v)=0$ van de rand ∂B .

$$\varepsilon_{\max}^k = |v_j^*|_{\max} < \varepsilon \quad \text{voor het punt } j \quad \text{en} \quad \delta_{\max}^k = 0
 \tag{5-66}$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{\max}^k &= |v_j^{*k+1} - v_j^{*k}|_{\max} < \varepsilon \quad \text{voor het punt } j \\
 \delta_{\max}^k &= |f(v_j^*, u_j^*)|_{\max} \quad \text{voor het punt } j
 \end{aligned}
 \tag{5-67}$$

In de grafieken van de testgevallen is gebruik gemaakt van een eventueel optredende symmetrie t.o.v. de u -as en/of v -as.

test	bijl.	grafiek	con.	k	$\epsilon_{\max}^k$	j	$\delta_{\max}^k$	j
1)	IV	-	ja	3	0.000000006	5	0	-
2)	V	fig. 5-2	ja	5	0.000000355	33	0	-
3)	VI	fig. 5-3	ja	3	0.000000926	26	0	-
4)	VII	fig. 5-3	ja	4	0.000000435	44	0	-
5)	VIII	fig. 5-3	ja	3	0.000042795	46	0.000000003	1
6)	IX	fig. 5-4	ja	5	0.000004018	33	0	-
7)	-	-	nee	15	>100	48	>100	49

Tabel 5-2 De uitvoerparameters voor de testgevallen

1) De cirkel $(u,v)=(\cos\tau,\sin\tau)$, zie bijlage IV. De exacte afbeelding is in dit geval bekend: $\tau_j^e = \tau_j^0 = \frac{2\pi}{64}j$, aangezien volgens (5-50) geldt dat $\vartheta_j = \frac{\pi}{64}(2j+1)$, $j=0,1,2,\dots,63$. We vergelijken de exacte oplossing τ_j^e met de gevonden oplossing $\tau_j = \tau_j^4$ voor $j=0,1,\dots,16$ (vanwege de symmetrie) in onderstaande tabel.

j	τ_j^e	τ_j	$ \tau_j^e - \tau_j $
0	0	0	0
1	0.0981748	0.1029236	0.0047488
2	0.1963495	0.2056076	0.0092581
3	0.2945243	0.3078353	0.0133110
4	0.3926991	0.4094300	0.0167309
5	0.4908739	0.5102632	0.0193893
6	0.5890486	0.6102554	0.0212068
7	0.6872234	0.7093726	0.0221492
8	0.7853982	0.8076199	0.0222217
9	0.8835729	0.9050345	0.0214616
10	0.9817477	1.0016788	0.0199311
11	1.0799225	1.0976351	0.0177126
12	1.1780972	1.1930001	0.0149029
13	1.2762720	1.2878811	0.0116091
14	1.3744468	1.3823935	0.0079467
15	1.4726216	1.4766574	0.0040359
16	1.5707963	1.5707963	0.0000000

Tabel 5-3 Vergelijking tussen de exacte en gevonden oplossing τ_j voor de conforme afbeelding naar de cirkel

De $k=3$ iteraties worden veroorzaakt door de additionele rotatie $\tau_0 = \tau(\vartheta_0) = 0$, $\vartheta_0 = \pi/64$. Uit $\epsilon_{\max}^1 = 0.022258248$ ($j=56$), $\epsilon_{\max}^2 = 0.000134593$ ($j=3$) en $\epsilon_{\max}^3 = 0.000000006$ ($j=5$) blijkt de kwadratische convergentie van de Newton-Raphson methode, aangezien de convergentiefactor: $\epsilon_{\max}^3 / \epsilon_{\max}^2 = 0.0000446$ of $\epsilon_{\max}^3 / |v_5^2| = 0.0000573$, praktisch nul is. De absolute fout $|\tau_j^e - \tau_j|$ is gegeven in de laatste kolom van tabel 5-3. De relatieve fout $|\tau_j^e - \tau_j| / |\tau_j^e|$ loopt van 4.8% voor $j=1$ vrijwel rechtlijnig terug naar 0% voor $j=16$. M.b.v. de bekende formule $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$ en $\sin x = x$ voor $x < 0.011111$ is voor de

absolute fout $|v_j^e - v_j|$ af te leiden dat $|v_j^e - v_j| < |\tau_j^e - \tau_j|$. Evenzo geldt dan $|u_j^e - u_j| < |\tau_j^e - \tau_j|$. Dit blijkt natuurlijk ook uit de gegevens van bijlage IV. De relatieve fout $|v_j^e - \tau_j| / |v_j^e|$ loopt van 4.7% voor $j=1$ terug naar 0% voor $j=16$ en omgekeerd loopt de relatieve fout $|u_j^e - u_j| / |u_j^e|$ van 4.1% voor $j=15$ terug naar 0% voor $j=0$. Kortom voor $j=0, 1, \dots, 63$ geldt;

$$|\tau_j^e - \tau_j| < 0.0222218 \quad \text{en} \quad \varepsilon = 0.0001 \ll 0.0222218 \quad (5-68)$$

$$\begin{aligned} |v_j^e - v_j| &< 0.0222218 \quad \text{en} \quad |v_j^e - v_j| / |v_j^e| < 4.7\% \\ |u_j^e - u_j| &< 0.0222218 \quad \text{en} \quad |u_j^e - u_j| / |u_j^e| < 4.1\% \end{aligned} \quad (5-69)$$

De fouten (5-68,69) worden veroorzaakt door discretisatie met de REM van de lineaire integraalvergelijkingen (5-35,36), oftewel door discretisatie met de REM voor $n=64$ constante elementen van de K en $\wedge$ operator, resulterend in resp. de K matrix en de $\underline{m}$ vector. Twee belangrijke conclusies zijn t.a.v. de fout in de numerieke conforme afbeelding te trekken. Ten eerste is bij een gestelde onnauwkeurigheid van $\varepsilon=0.0001$ voor de iteratie procedure, deze onnauwkeurigheid ε te verwaarlozen t.o.v. van de fout gemaakt bij de discretisatie met de REM voor $n=64$ constante elementen, waarbij de middens een equidistant rooster vormen. Ten tweede is deze fout stabiel tijdens het iteratie proces ($k=3$) en is de (globale) fout $O(\frac{1}{n})$. Dit kan worden aangetoond door (5-69) te vergelijken met de directe eenmalige discretisatie met de REM van $\cos(\vartheta) = -K\{\sin(\vartheta)\}$ uit bijlage III voor $j=1, 2, \dots, n$.

$$\begin{aligned} n=8 : |u_j^e - u_j| &< 0.1828012 \\ n=16 : |u_j^e - u_j| &< 0.0911545 \\ n=32 : |u_j^e - u_j| &< 0.0446967 \\ n=64 : |u_j^e - u_j| &< 0.0220342 \quad \text{en} \quad 2.2\% < |u_j^e - u_j| / |u_j^e| < 2.3\% \end{aligned} \quad (5-70)$$

Het enige verschil met (5-70) is dat de spreiding van de relatieve fout in (5-69) groter is. Misschien wordt dit veroorzaakt door de toepassing van de discretisatie met de REM van de $\wedge$ operator. De absolute fout (5-69) is overigens groter dan de absolute fout voor de methode Fornberg (1980) met $n=128$. Daarvoor is de absolute fout kleiner dan 0.0001.

2) De excentrische cirkel $(u, v) = (\cos \tau, \sin \tau)$ en $g(0)=0.5$, zie bijlage V en fig. 5-2. Het middelpunt $(0,0)$ van de cirkel D wordt dus afgebeeld op het punt $(u_m, v_m) = (0.5, 0)$ in de cirkel B. In fig. 5-2 is duidelijk te constateren dat de beeldpunten op "wijde" secties van ∂B , d.w.z. secties met de minste verandering of "vervorming" van de kromming $1/\rho$, worden samengedrukt, terwijl de beeldpunten op "nauwe" secties van ∂B , d.w.z. secties met de meeste verandering of "vervorming" van de kromming $1/\rho$, uit elkaar worden getrok-

ken. N.b.: de kromming $1/\rho$ wordt opgemeten vanuit het punt (u_m, v_m) .

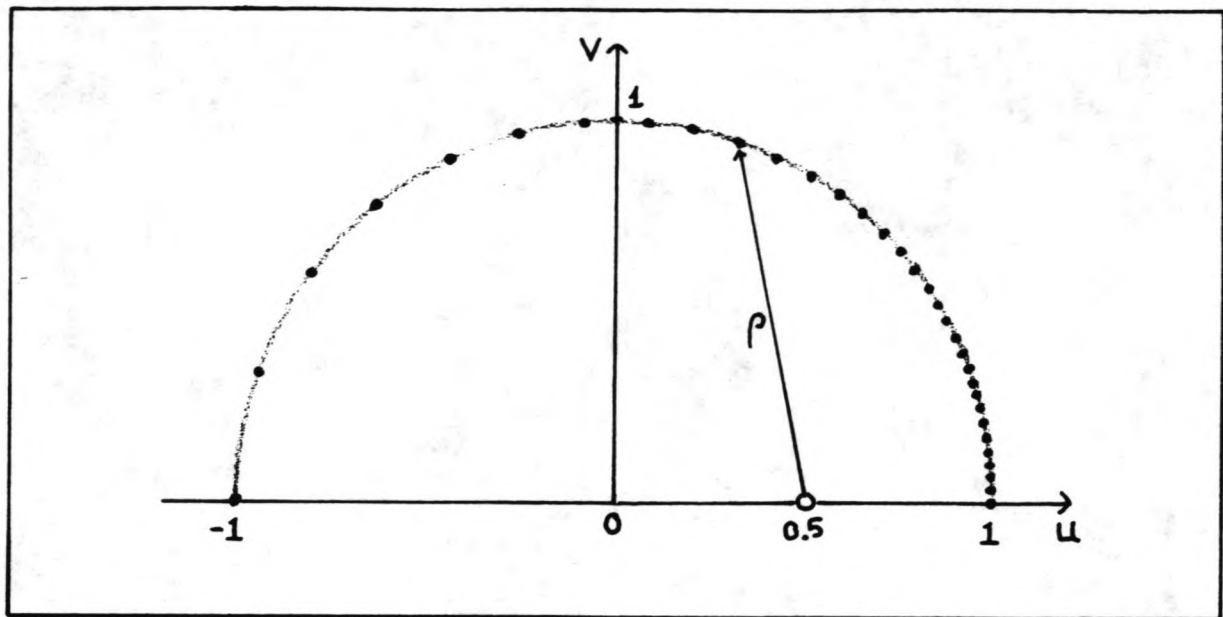


Fig. 5-2 De conforme afbeelding naar de excentrische cirkel

Voor elke conforme afbeelding vanaf de cirkel D, waarvan de discrete punten op de rand *equidistant* zijn verdeeld, afgebeeld naar een "vervormd" gebied B met "nauwe" en "wijde" secties van de rand ∂B , doet dit fenomeen zich voor. En des te meer het gebied B is vervormd, des te meer worden de beeldpunten op bepaalde secties van ∂B samengedrukt of uit elkaar getrokken. Door meer vervorming van B zijn er ook meer iteraties nodig, $k=5$ in dit geval, voor er aan de nauwkeurigheid $\epsilon=0.0001$ is voldaan.

3)-5) De ellips A $(u,v)=(0.9\cos\tau, \sin\tau) \Leftrightarrow (100/81)u^2+v^2-1=0$, zie bijlage VI-VIII en fig.5-3. Zoals verwacht convergeert de secanten methode langzamer dan de Newton-Raphson methode. Indien we uitgaan van het functievoorschrift voor de rand, dan is de convergentiesnelheid iets langzamer dan als we uitgaan van de parametrisering van de rand. Dit komt doordat de discrete punten (u^{k+1}, v^{k+1}) bij toepassing van het functievoorschrift bij benadering op de rand ∂B liggen en niet naar de rand worden teruggebracht. Het samendrukingsfenomeen doet zich nauwelijks voor, omdat de ellips A "cirkelachtig" is.

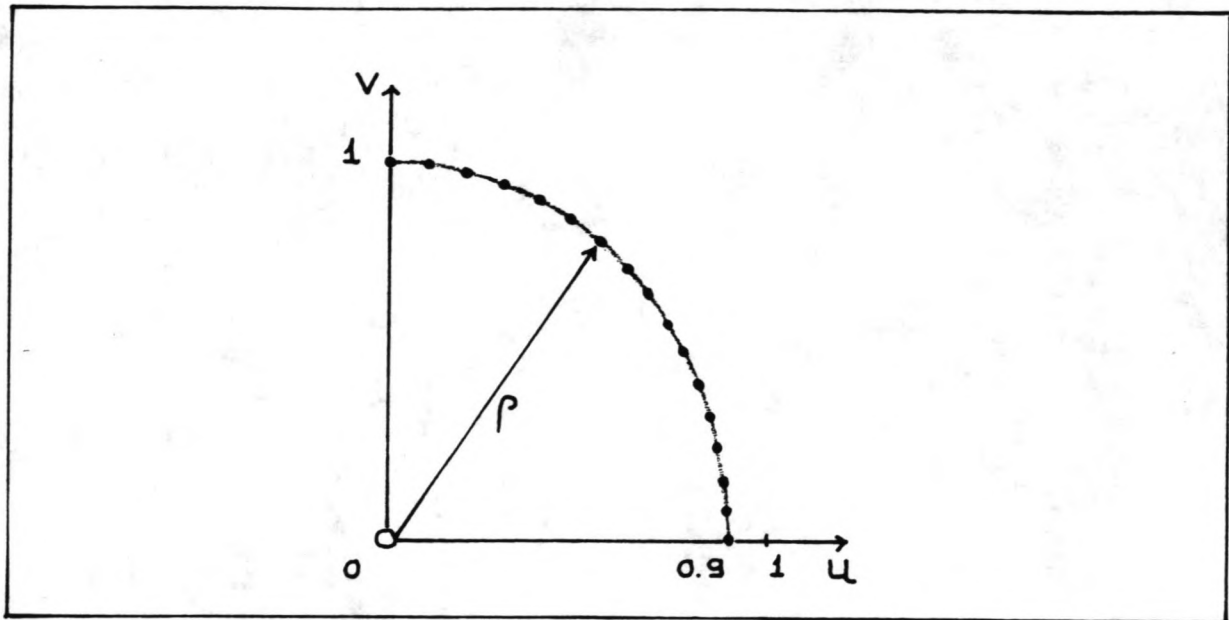


Fig. 5-3 De conforme afbeelding naar de ellips A

6) De ellips B $(u,v)=(1.25\cos\tau, 0.75\sin\tau)$, zie bijlage IX en fig. 5-4. Het samendrukkingsfenomeen doet zich voor, omdat ellips B een vervormd gebied is.

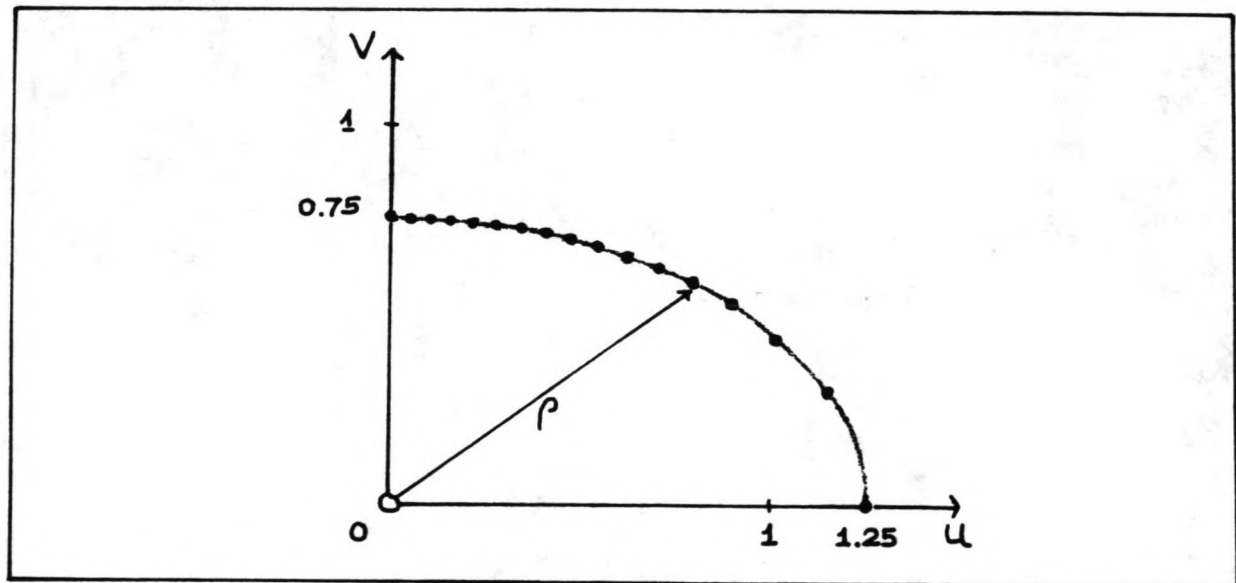


Fig. 5-4 De conforme afbeelding naar de ellips B

7) Het vierkant volgens (5-65). Er is tot $k=6$, $\varepsilon_{\max}^6=0.356835778$ ($j=48$) nog enige mate sprake van convergentie, waarbij de beeldpunten zich lijken te groeperen rond de hoekpunten van het vierkant. Daarna verspreiden de beeldpunten zich willekeurig over het (u,v) -vlak, totdat voor $k=15$ de iteratie wordt afgebroken. Voor het vierkant is dus geen numerieke conforme afbeelding te vinden. Dit komt mijn inziens doordat de rand rechte lijnstukken bevat, en niet zozeer door de aanwezigheid van hoekpunten, omdat de secanten methode is gebruikt.

Doordat nu de verdeling (u_j, v_j) op de rand ∂B bekend is, kan men met de discretisatie van de Poisson integraal met de REM de beeldpunten u_i en v_i van de inwendige conforme afbeelding voor B berekenen, zie 4.2. De matrix P hoeft voor een bepaald rooster van de cirkel D maar 1 keer berekend te worden.

$$u(r_i, \vartheta_i) = u_i = \sum_{j=0}^{n-1} P_{ij} u_j \quad \text{en} \quad v(r_i, \vartheta_i) = v_i = \sum_{j=0}^{n-1} P_{ij} v_j \quad (5-71)$$

met $0 < r_i = r_i/R < 1$ en $0 \leq \vartheta_i < 2\pi$

Ik heb dit voor de bovenstaande testgevallen niet uitgevoerd.

5.4.2. Conclusies en aanbevelingen

Uit de resultaten van bovenstaande testgevallen zijn een vijftal conclusies te trekken. De eerste drie conclusies gelden ook voor (sommige) andere numerieke conforme afbeeldingen van de cirkel D naar een gesloten regulier gebied B , terwijl de laatste twee specifiek voor mijn methode gelden.

1) Elke numerieke conforme afbeelding vanaf de cirkelrand ∂D naar de rand ∂B van een gesloten regulier gebied B wordt opgelost met een of andere iteratieve procedure. Of er ontstaat door de discretisatie van ∂D een stelsel niet-lineaire vergelijkingen, die middels een indirecte iteratieve manier wordt opgelost, of er ontstaat een stelsel lineaire vergelijkingen, die per iteratiestap verandert, omdat dit stelsel onderdeel is van een iteratieve procedure. Voor mijn methode is de toepassing van de iteratie procedure de linearisering van de niet-lineaire integraalvergelijking voor $\tau(\vartheta)$ (5-8,9), die de conforme afbeelding m.b.v. de Hilbert integraal weergeeft, zodat discretisatie met de REM mogelijk is.

2) Er is geen numerieke conforme afbeelding vanaf de cirkelrand ∂D rechtstreeks naar de rand ∂B van een gesloten regulier gebied B te vinden, als deze rand ∂B rechte lijnstukken bevat.

3) Het samendrukkingsfenomeen doet zich voor bij die numerieke conforme afbeeldingen, waarvan het gebied B vervormd is en de originelen op de cirkelrand ∂D equidistant verdeeld zijn. De vervorming cq. kromming $1/\rho$ wordt gemeten vanuit het punt (u_m, v_m) . Alle numerieke conforme afbeeldingen die voor periodieke conjugatie de FFT gebruiken, zoals Fornberg (1980), hebben te maken met dit fenomeen. Het vervelende van dit fenomeen is, dat de representatie -m.b.v. interpolatie tussen de discrete beeldpunten- van die secties van ∂B duidelijke afwijkingen vertoont, daar waar de beeldpunten uit elkaar worden getrokken. Fornberg kan dit alleen maar ondervangen door bij meer vervorming van B het aantal punten drastisch te verhogen. Zo werd bij het testgeval met functievoorschrift $\{(u-0.5)^2 + (v-\beta)^2\} \{1 - (u-0.5)^2 - v^2\} - 0.1 = 0$

voor de rand ∂B het aantal punten $n=128$ met machten van 2 verhoogt tot $n=16384$, waarbij de parameter β van $\beta=2$ loopte naar $\beta=0.5$. Aangezien de methode van Fornberg maar $O(n \log_2 n)$ operaties per iteratiestap kost, terwijl mijn methode $O(n^3)$ operaties per iteratiestap kost, zijn de gevolgen van dit fenomeen t.a.v. rekentijd voor de methode Fornberg veel minder desastreus dan voor mijn methode. Ook het aantal iteraties neemt toe bij meer vervorming van B . Dit kan voorkomen worden door een meer geschikte startvector te kiezen.

4) Mijn methode kost per iteratiestap en dientgevolge voor een numerieke conforme afbeelding $O(n^3)$ operaties. Dit komt doordat het resulterende stelsel lineaire vergelijkingen overbepaald is, dat op zijn beurt wordt veroorzaakt door het niet toepassen van een hulpfunctie, zoals (5-16), zodat a priori niet voldaan is aan (5-49). Mijn methode is dus in een aantal opzichten overeenkomstig met de methode van Anderson & Chakravarthy (1979).

5) Bij een geschikt gekozen nauwkeurigheid ϵ voor het iteratieproces is de fout van de discretisatie met de REM bepalend voor de fout in de numerieke conforme afbeelding. Deze fout is stabiel en is voor een equidistante verdeling van n originele punten op de cirkelrand van de $O(\frac{1}{n})$; bij gebruik van constante elementen voor de REM.

We bekijken een aantal mogelijke aanbevelingen naar aanleiding van de bovengenoemde vijf punten voor de conclusies.

1) Aan een iteratieve procedure van de numerieke conforme afbeelding vanaf de cirkelrand naar de rand ∂B van een gesloten regulier gebied B is niet te ontkomen.

2) Door het gebied B , waarvan de rand ∂B rechte lijnstukken bevat, middels de numerieke conforme Schwartz-Christoffel afbeelding op een "cirkelachtig" gebied E af te beelden, is het nu wel mogelijk om via ∂E door twee successieve numerieke conforme afbeeldingen de cirkelrand op de rand ∂B af te beelden, zie 3.3.3.

3) De methode van Zemach & Menikoff (1980) gaat uit van een willekeurige vaste discrete verdeling (u,v) op de rand ∂B . Indien deze verdeling equidistant is, dan doet voor een vervormd gebied B het samendrukkingsfenomeen zich voor op de cirkelrand. Aangezien mijn methode van een willekeurige verdeling van de originelen op de cirkelrand kan uitgaan, kan het mogelijk zijn om net zoals bij Zemach & Menikoff een min of meer equidistante verdeling van de beeldpunten (u,v) op ∂B te verkrijgen. Een probleem voor mijn methode is, dat de verdeling (u,v) a priori onbekend is. Middels een iteratieve schattings-correctie procedure zal dan een min of meer equidistante verdeling van (u,v) op ∂B gezocht moeten worden. Een tweede nadeel is dat daardoor de K

matrix en $\underline{m}$ vector niet meer constant zullen zijn, en zullen de $\underline{K}$ matrix en $\underline{m}$ vector tijdens zo'n iteratie procedure m.b.v. de REM elke iteratiestap moeten worden opgebouwd.

4) Door de introductie van een hulpfunctie (5-16) zal a priori voldaan zijn aan (5-49), met $v_m = u_m = 0$. Daardoor komt de laatste vergelijking van een stelsel als (5-53) te vervallen. Van dit stelsel kan wellicht ook de 0-de vergelijking worden weggelaten, zodat voldaan is aan voorwaarde (5-13). We houden dan een bepaald stelsel lineaire vergelijkingen $\underline{S}^* \underline{u} = \underline{b}^*$ van $(n-1)$ bij $(n-1)$ over. Oplossing van $\underline{S}^* \underline{u} = \underline{b}^*$ met Gauss eliminatie kost $O(n^3)$ operaties per iteratiestap. Voor een stelsel $\underline{S}^* \underline{u} = \underline{b}^*$, waarbij de eigenwaarden van $\underline{S}^*$ liggen tussen 0 en 1, en voornamelijk zijn samengetrokken bij 1, biedt de iteratieve geconjugeerde gradienten methode een beter alternatief ter oplossing van $\underline{S}^* \underline{u} = \underline{b}^*$. Per "binnen" iteratiestap zijn namelijk 4 FFT's nodig. Aangezien voor vermenigvuldiging met $\underline{K}$ 2 FFT's nodig zijn, vanwege de cyclische structuur van $\underline{K}$, kost de gehele numerieke conforme afbeelding $O(n \log_2 n)$ operaties. De toepassing van een hulpfunctie (5-16) zal in veel opzichten mijn methode overeenkomstig maken met de methode van Fornberg (1980).

5) De orde voor de fout in de numerieke conforme afbeelding kan worden verbeterd door hogere orde elementen voor de discretisatie met de REM te gebruiken. B.v. door de toepassing van lineaire elementen. Bij lineaire elementen worden de discrete waarden u_j, u_{j+1} en v_j, v_{j+1} t.p.v. van de eindpunten α_j, α_{j+1} van een element $\Delta\alpha_j$ gekozen. Tussen deze waarden wordt nu lineair geïnterpoleerd. Na assemblage van de n elementen ontstaat dan weer de matrix vergelijking $\underline{u} = \underline{K}\underline{v}$ als discretisatie van de Hilbert integraal $u = -K\{v\}$. Idem ontstaat het inproduct $v_m = \underline{m} \cdot \underline{v}$ als discretisatie van de middelwaarde eigenschap $v_m = \hat{v}$.

6. PERIODIEKE NIET-LINEAIRE VRIJE OPPERVLAKTEGOLVEN

6.1. De numerieke conforme afbeelding vanaf de cirkel toegepast op periodieke niet-lineaire golven

Het tijdsafhankelijke potentiaalprobleem van periodieke niet-lineaire golven over een oneindige diepte wordt berekend met de numerieke conforme afbeelding vanaf de vaste cirkelrand uit hoofdstuk 5. In hoofdstuk 3 is de verklaring gegeven voor het waarom van deze keuze.

6.1.1. De conforme afbeelding van de cirkelrand naar de vrije rand

De cirkel D in het $\zeta = \xi + i\eta = re^{i\theta}$ vlak wordt door de numerieke conforme afbeelding $w = g(\zeta)$ op het reguliere gebied B in het $w = u + iv$ vlak afgebeeld. Dit gebied B wordt door de exacte conforme afbeelding $z = \frac{i}{k} \ln w$ op het half oneindige gebied Ω in het $z = x + iy$ vlak afgebeeld.

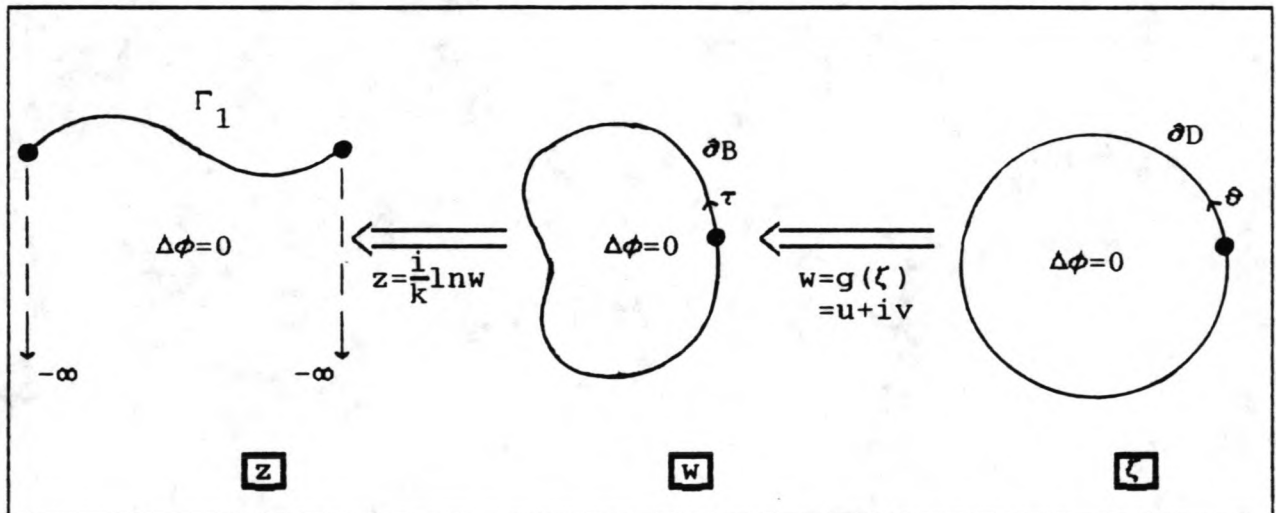


Fig. 6-1 De successieve conforme afbeeldingen, die de cirkel D via B op Ω afbeelden.

Het potentiaalprobleem van de periodieke niet-lineaire golven blijft voor B en de cirkel D een potentiaalprobleem, omdat de Laplace vergelijking invariant is voor conforme afbeeldingen.

$$\Delta \phi = 0 \quad \text{in } \Omega, B \text{ en } D: r < R \quad (6-1)$$

De gebieden $\Omega(t)$ en $B(t)$ zijn tijdsafhankelijk door de periodieke niet-lineaire golven, terwijl het rekengebied: de cirkel D vast blijft.

Door de inverse exacte conforme afbeelding $w = e^{-ikz}$ is automatisch voldaan aan de periodiciteit op de in- en uitstroomranden Γ_2 en Γ_4 . Ook aan de randwaarde $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ op Γ_3 is automatisch voldaan, omdat de bodem op oneindige diepte ligt. Dit betekent dat door de twee successieve conforme afbeeldingen de vaste cirkelrand $\partial D: r = R$ via de rand $\partial B(t)$ op de vrije rand $\Gamma_1(t)$ wordt afgebeeld. Aangezien zowel het potentiaalprobleem als de numerieke conforme

afbeelding $w=g^+(\zeta)$ door (niet-)lineaire randintegraalvergelijkingen op de vaste cirkelrand ∂D is gegeven, wordt eenmalige discretisatie van de cirkelrand m.b.v. van de REM toegepast, zodat alle berekeningen plaats vinden op de discrete punten van de cirkelrand.

Voor de eenvoud stellen we het golfgetal k en de zwaartekracht-versnelling g_z gelijk aan hun eenheden.

$$k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad L = \lambda = 2\pi \quad \text{en} \quad g_z = 1 \quad (6-2)$$

6.1.2. De omzetting van de randwaarden op de vrije rand in poolcoördinaten op de cirkelrand

De kinematische randwaarde (2-4a,b) voor resp. een Eulerse en een Lagrangse beschrijving op Γ_1 luidt;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \phi_y - \phi_x \eta_x \quad \text{voor} \quad y = \eta(x, t) \quad \Leftrightarrow \\ \operatorname{Im} \left[\frac{\partial z}{\partial t} \right] &= \phi_y - \phi_x \eta_x \quad \text{voor} \quad z = x + i\eta(x, t) \end{aligned} \quad (6-3a)$$

$$\frac{Dx}{Dt} = \phi_x \quad \text{en} \quad \frac{Dy}{Dt} = \phi_y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{Dz}{Dt} \equiv \frac{Dx}{Dt} + i \frac{Dy}{Dt} = \phi_x + i \phi_y \quad (6-3b)$$

De dynamische randwaarde (2-2a,b) voor resp. een Eulerse en een Lagrangse beschrijving op Γ_1 luidt met $g_z=1$ en $\rho_w=1$;

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\eta \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - p_0 \quad \text{of} \quad \frac{D\phi}{Dt} = -y \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - p_0 \\ \text{met} \quad (\nabla \phi)^2 &= \phi_x^2 + \phi_y^2 \end{aligned} \quad (6-4)$$

Zoals in 3.2.3 werd gesteld, volgt de dynamische randwaarde feitelijk het tijdspad van de conforme afbeelding vanaf de vaste cirkelrand, dan dat het Eulerse of het Lagrangse tijdspad volgt. Volgens (3-51) moet dan gelden met $|\zeta|=R$;

$$\left. \frac{D\phi}{Dt} \right|_{\zeta} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\zeta} = -y \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - p_0 + \phi_x \left(\frac{dx}{dt} \right) + \phi_y \left(\frac{dy}{dt} \right) \quad (6-5)$$

De keuze voor de Lagrangse kinematische randwaarde (6-3b) wordt bepaald doordat niet alleen de vrije rand m.b.v. van een parametrisering kan worden beschreven, maar bovendien door een impliciet functievoorschrift. De randwaarden (6-3b) en (6-5) worden nu omgezet in de poolcoördinaten (r, ϑ) voor de cirkelrand $r=R$. Hiertoe voeren we een volledige complexe schrijfwijze in door de introductie van de complexe potentiaal $\Phi = \phi + i\psi$. Deze complexe functie is analytisch in Ω , B en D , omdat zowel de reële potentiaal ϕ als de reële stroomfunctie ψ voldoet aan de Laplace vergelijking: $\Delta \phi = 0$ en $\Delta \psi = 0$, in Ω , B en D . De analyticiteit van Φ is uit te breiden naar de randen

Γ_1 , ∂B en ∂D . Ook voor de analytische conforme afbeeldingen $z = i \ln w$ en $w = g(\zeta)$ is hun analyticiteit naar de randen Γ_1 , ∂B en ∂D uit te breiden, vanwege de gladheid van de randkrommen. Hierdoor kunnen we gebruik maken van de Cauchy-Riemann relaties voor analytische functies op de randen. We brengen in het kort enige complexe notatie in herinnering. De complex toegevoegde van een complex getal $c = a + ib$ is gedefinieerd als $\bar{c} = a - ib$. Het kwadraat van de modulus van een complex getal $c = a + ib$ is gedefinieerd als $|c|^2 = c\bar{c} = a^2 + b^2$. Verder is de complex toegevoegde van het produkt van complexe getallen gelijk aan het produkt van de complexe toegevoegden van die getallen. M.b.v. de Cauchy-Riemann relaties is voor de complexe snelheid $\frac{d\Phi}{dz} = q$ het volgende af te leiden;

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} = \phi_x + i\psi_x = \phi_x - i\phi_y \Rightarrow \bar{\frac{d\Phi}{dz}} = \phi_x + i\phi_y \Rightarrow \left| \frac{d\Phi}{dz} \right|^2 = \phi_x^2 + \phi_y^2 \quad (6-6)$$

Met (6-6) zijn de kinematische randwaarde (6-3b) en de dynamische randwaarde (6-5) respectievelijk als volgt te schrijven;

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{\overline{d\Phi}}{dz} \quad \text{en} \quad \frac{Dz}{Dt} \equiv \frac{Dx}{Dt} + i \frac{Dy}{Dt} \quad (6-7)$$

$$\left. \frac{D\Phi}{Dt} \right|_{\zeta} = \left. \frac{\partial\Phi}{\partial t} \right|_{\zeta} = -y - \frac{1}{2} \left| \frac{d\Phi}{dz} \right|^2 - p_0 + \text{Re} \left[\frac{d\Phi}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right] \quad \text{en} \quad \frac{dz}{dt} \equiv \frac{dx}{dt} + i \frac{dy}{dt} \quad (6-8)$$

Vervolgens zetten we $\frac{d\Phi}{dz}$ om in de poolcoördinaten (r, ϑ) door de kettingregel voor differentieren toe te passen.

$$\frac{d\Phi}{dz} = \frac{d\Phi}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} = \frac{d\Phi}{d\zeta} \cdot \frac{\overline{dw}}{d\zeta} \cdot \frac{dw}{dz} \cdot \left| \frac{1}{\frac{dw}{d\zeta}} \right|^2$$

$$\text{en} \quad \frac{d\Phi}{d\zeta} = \frac{\partial\Phi}{i r \partial \vartheta} = -\frac{i}{r} (\phi_{\vartheta} + i\psi_{\vartheta}) = -\frac{i}{r} (\phi_{\vartheta} + i r \phi_r) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{i}{r} (w_{\vartheta}) \Rightarrow \frac{\overline{dw}}{d\zeta} = \frac{i}{r} (\bar{w}_{\vartheta}) \Rightarrow \left| \frac{dw}{d\zeta} \right|^2 = \left| \frac{w_{\vartheta}}{r} \right|^2$$

$$z = i \ln w \Leftrightarrow w = e^{-iz} \Rightarrow \frac{dz}{dw} = \frac{i}{w} \Leftrightarrow \frac{dw}{dz} = -i e^{-iz} = -i w$$

Resultierend krijgen we dan voor $\frac{d\Phi}{dz}$;

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dz} &= -i w \bar{w}_{\vartheta} (\phi_{\vartheta} + i r \phi_r) \left| \frac{1}{w_{\vartheta}} \right|^2 \Rightarrow \frac{\overline{d\Phi}}{dz} = i \bar{w} w_{\vartheta} (\phi_{\vartheta} - i r \phi_r) \left| \frac{1}{w_{\vartheta}} \right|^2 \Rightarrow \\ &\left| \frac{d\Phi}{dz} \right|^2 = (\phi_{\vartheta}^2 + r^2 \phi_r^2) \left| \frac{w}{w_{\vartheta}} \right|^2 \end{aligned} \quad (6-9)$$

Voor de tijdsafgeleiden $\frac{Dz}{Dt}$ en $\frac{dz}{dt}$ uit (6-7,8) stellen we dat hiervoor de kettingregel van toepassing is.

$$\frac{Dz}{Dt} = \frac{dz}{dw} \cdot \frac{Dw}{Dt} = \left(\frac{i}{w} \right) \frac{Dw}{Dt} \quad \text{en} \quad \frac{Dw}{Dt} \equiv \frac{Du}{Dt} + i \frac{Dv}{Dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = \left(\frac{i}{w}\right) \frac{dw}{dt} \quad \text{en} \quad \frac{dw}{dt} \equiv \frac{du}{dt} + i \frac{dv}{dt}$$

$$z = x+iy \quad 0 \leq x < 2\pi, \quad y \leq \eta(x,t) \quad \text{en} \quad w = u+iv$$

$$z = i \ln w \quad \Rightarrow \quad y = \ln |w| \quad \text{en} \quad x = -\arg(w) \quad (6-11)$$

$$w = e^{-iz} \quad \Rightarrow \quad v = -e^y \sin x \quad \text{en} \quad u = e^y \cos x$$

Voor de omzetting van de kinematische (6-7) en dynamische (6-8) randwaarde op de cirkelrand $r=R$ met $\phi_r \equiv q$ krijgen we dan m.b.v. (6-9,10,11);

$$\frac{Dw}{Dt} = w_{\vartheta} (\phi_{\vartheta} - i R q) \left| \frac{w}{w_{\vartheta}} \right|^2 \quad \Leftrightarrow \quad (6-12)$$

$$\frac{Du}{Dt} = (\phi_{\vartheta} u_{\vartheta} + R q v_{\vartheta}) \left| \frac{w}{w_{\vartheta}} \right|^2 \quad \text{en} \quad \frac{Dv}{Dt} = (\phi_{\vartheta} v_{\vartheta} - R q u_{\vartheta}) \left| \frac{w}{w_{\vartheta}} \right|^2$$

$$\frac{D\phi}{Dt} = -\ln |w| - \frac{1}{2} (\phi_{\vartheta}^2 + R^2 q^2) \left| \frac{w}{w_{\vartheta}} \right|^2 - p_0 + \operatorname{Re} \left[\frac{1}{w_{\vartheta}} (\phi_{\vartheta} + i R q) \frac{dw}{dt} \right] \quad (6-13)$$

6.1.3. Het timesteppingsschema

De tijdsafhankelijke randwaarden (6-12,13): $\frac{Df}{Dt} = g(f,t)$ worden van een tijdstip t_i naar een tijdstip $t_{i+1} = t_i + \Delta t$ opgehoogd, m.b.v. van het 4^e orde Adams-Bashforth-Moulton predictor-corrector meerstapsschema. Dit schema heeft een lokale fout van $O(\Delta t^5)$.

$$f_p^{i+1} = f^i + \frac{\Delta t}{24} (55g^i - 59g^{i-1} + 37g^{i-2} - 9g^{i-3}) \quad (6-14)$$

$$f^{i+1} = f^i + \frac{\Delta t}{24} (9g_p^{i+1} + 19g^i - 5g^{i-1} + g^{i-2}) \quad \text{en} \quad g_p^{i+1} = g(f_p^{i+1}, t_{i+1})$$

Er zijn dus 2 evaluaties van $g(f,t)$ nodig per tijdstap Δt : 1 voor het predictor-niveau en 1 voor het corrector-niveau.

6.1.4. Discretisatie op de cirkelrand met de REM

In de randwaarden (6-12,13) is op een tijdstip t_i de numerieke conforme afbeelding op de cirkelrand naar $w(\tau) = u(\tau) + iv(\tau) \in \partial B$ gegeven door $w = g^+(\zeta) \Leftrightarrow \tau = \tau(\vartheta)$. Door (numerieke) differentiatie volgt hieruit $w_{\vartheta} = u_{\vartheta} + iv_{\vartheta} \Leftrightarrow w_{\tau} \tau'(\vartheta) = (u_{\tau} + iv_{\tau}) \tau'(\vartheta)$ en $\tau'(\vartheta) = \frac{d\tau}{d\vartheta}$. Verder is op een tijdstip t_i het potentiaalprobleem op de cirkelrand gegeven door de integraalvergelijkingen $H\{\phi\} = G\{q\}$ en $\phi_{\vartheta} = -K\{Rq\}$, zie 4.1 en appendix D.

Discretisatie m.b.v. de REM voor n constante elementen, waarvan de mid-dens ϑ_j een equidistante verdeling vormen, leidt dan tot de bekende matrix-vergelijkingen voor resp. de numerieke conforme afbeelding en de integraal-verlijkingen, zie resp. hoofdstuk 5 en 4.

$$T^k \underline{u}^{*k} = \underline{b}^k \Rightarrow \underline{u}^{*k} \text{ en als } |v_j^{*k}| < \varepsilon \text{ dan } \underline{\tau} = \underline{u}^k + \underline{\tau}^k \Rightarrow$$

$$w(\tau_j) = u(\tau_j) + iv(\tau_j) \quad j=0,1..n-1 \Rightarrow \underline{w} = \underline{u} + i\underline{v} \Rightarrow$$

$$\underline{w}_g = \underline{u}_g + i\underline{v}_g \quad (6-15)$$

$$H\underline{\phi} = G\underline{q} \Rightarrow \underline{q} = G^{-1}H\underline{\phi} = C\underline{\phi} \quad (R \neq 1)$$

$$\underline{\phi}_g = K D_R \underline{q} \Rightarrow \underline{\phi}_g = K D_R G^{-1} H \underline{\phi} = E \underline{\phi} \quad (6-16)$$

De numerieke conforme afbeelding (6-15) is een iteratieproces. Na beëindiging van dit proces is de conforme afbeelding voor de discrete punten w_j van de rand $\partial B(\tau)$ gevonden. De overbepaalde matrix T^k verandert dus per iteratiestap en dientgevolge ook per tijdstap Δt , omdat $\partial B(\tau, t)$ tijdsafhankelijk is. Het aantal operaties voor twee numerieke conforme afbeeldingen per tijdstap Δt is dus $O(n^3)$. Overigens kan $\underline{w}_g$ uit $\underline{w}$ worden berekend m.b.v. de tweede matrixvergelijking van (6-16): $\underline{w}_g = K D_R G^{-1} H \underline{w} = E \underline{w}$.

Alle matrices in (6-16) zijn constant tijdens het timesteppings proces. Per tijdstap Δt wordt tweemaal de matrixvermenigvuldiging $\underline{q} = C\underline{\phi}$ en $\underline{\phi}_g = E\underline{\phi}$ uitgevoerd, wat $O(n^2)$ operaties kost. Echter doordat de matrices G , H en K ($D_R = \text{diag}(R, R, \dots, R)$) circulante matrices zijn, kan matrix vermenigvuldiging of inversie met 2 FFT's per circulante matrix worden uitgevoerd, zodat de berekening van $\underline{q}$ en $\underline{\phi}_g$ uit $\underline{\phi}$ $O(n \log_2 n)$ operaties per tijdstap Δt kost, zie C.6 en D.3.

6.1.5. De numerieke methode als geheel

- (1A) Op een tijdstip t_i (en vorige tijdstippen) is de numerieke conforme afbeelding voor de rand $\partial B(\tau^i)$ bekend in de discrete punten $w_j^i = w(\tau_j^i)$. Uit deze punten w_j^i volgen met (6-16) $w_{g,j}^i$, en met (6-11) de punten z_j^i , die de vrije rand $\Gamma(s_j^i)$ discreet weergeven, $j=0,1..n-1$.
- (1B) Ook is de potentiaal ϕ_j^i bekend op een tijdstip t_i (en vorige tijdstippen). Met (6-16) volgt hieruit q_j^i en $\phi_{g,j}^i$, $j=0,1..n-1$.
- (2A) Timestepping van (6-12) in de discrete punten ϑ_j op de cirkelrand met (6-14) levert $w_j^{0,i+1}$, en door een gesloten kromme tussen deze punten $w_j^{0,i+1}$ te trekken m.b.v. van kwadratische of trigonometrische interpolatie krijgen we $\partial B(\tau^{i+1})$, waarbij tevens de tangentiële afgeleide van $\partial B(\tau^{i+1})$ dient te worden berekend. Door nu $w_j^{0,i+1} \Leftrightarrow \tau_j^{0,i+1}$ als startvector te gebruiken, wordt met (6-15) de numerieke conforme afbeelding w_j^{i+1} voor $\partial B(\tau^{i+1})$ gevonden. Bij een kleine tijdstap Δt kan aldus het aantal iteraties per evaluatie voor de numerieke conforme afbeelding beperkt blijven tot 1.
- (2B) $(\frac{dw}{dt})_j^i$ kan bij benadering met Δt berekend worden uit w_j^i en w_j op vorige

tijdstippen of uit w_j^{i+1} , w_j^i en w_j op vorige tijdstippen, of door bij benadering te stellen dat $(\frac{dw}{dt})_j^i = (\frac{Dw}{Dt})_j^i$ volgens (6-12). Timestepping van (6-13) in de discrete punten ϑ_j op de cirkelrand met (6-14) levert ϕ_j^{i+1} . Er kan nu een volgende timestepping van t_{i+1} naar t_{i+2} worden uitgevoerd door de procedure weer bij (1) te beginnen. Aangezien per tijdstap Δt verreweg de meesterekentijd in beslag zal worden genomen door de oplossing van het overbepaalde stelsel lineaire vergelijkingen $Tu^* = b$ (minimaal 2 keer), zal het aantal operaties per tijdstap ongeveer $O(n^3)$ kosten.

6.2. Twee methoden voor periodieke niet-lineaire golven

6.2.1. Beschrijving van de twee methoden

De methode van Longuet-Higgins & Cokelet (1976): L-H.C. wordt vergeleken met de methode van Meiron, Orszag & Israeli (1980): M.O.I. en de methode van Fornberg (1981), voor de bepaling van lopende periodieke niet-lineaire golven over een oneindige diepte. De methode M.O.I. gebruikt evenals de methode Fornberg een numerieke conforme afbeelding vanaf de vaste cirkelrand $R=1$ naar $\partial B(t)$, die met m.b.v. van de FFT wordt geconstrueerd, zodat de discrete punten ϑ_j op de cirkelrand equidistant zijn verdeeld. De methoden M.O.I. en L-H.C. gebruiken het timesteppingsschema (6-14) en de methode Fornberg het bekende 2^e orde Euler-Heun predictor-corrector schema: $f_p^{i+1} = f^i + \Delta t(g^i)$ en $f^{i+1} = f^i + \frac{\Delta t}{2}(g_p^{i+1} + g^i)$.

De methode L-H.C. is beschreven in 2.3.2. en in een algemener verband in 2.2. De RIV $H\{\phi\} = G\{q\}$ (2-24) op ∂B wordt gediscretiseerd tot de matrix vergelijking $H\phi = Gq$, waarbij de discrete punten (u_j, v_j) gefixeerd zijn met vloeistofdeeltjes op de vrije rand (Lagrangse beschrijving) en op het tijdstip $t=0$ ongeveer equidistant verdeeld zijn op ∂B . Aangezien de rand $\partial B(t)$ tijdsafhankelijk is, moet de matrix vergelijking $H\phi = Gq$ voor elke tijdstap Δt tweemaal worden opgebouwd (80% van de rekentijd) en tweemaal worden opgelost met Gauss eliminatie, wat $O(n^3)$ operaties kost (20% van de rekentijd). L-H.C. stelt dat per tijdstap Δt ruwweg $O(n^2)$ operaties nodig zijn. De tijdstap Δt is zo gekozen dat geen enkel discreet punt (u_j, v_j) per tijdstap Δt meer verschuift dan de booglengte $(T_j)_{\min}$ tussen twee discrete punten op $\partial B(\tau^i)$. Zo niet, dan wordt Δt gehalveerd.

De methode M.O.I. gebruikt een numerieke conforme afbeelding vanaf de vaste cirkelrand $R=1$, voor de bepaling van periodieke niet-lineaire golven. De omgezette dynamische randwaarde op de cirkelrand $R=1$ met $\phi_r \equiv q$ wordt weergegeven door (6-13). De omgezette Eulerse kinematische randwaarde (6-3a) op de cirkelrand $R=1$ met $\phi_r \equiv q$ luidt;

$$\operatorname{Im}\left[\left(\frac{1}{w_\vartheta}\right)\frac{\partial w}{\partial t}\right] = -q\left|\frac{w}{w_\vartheta}\right|^2 \quad \left[\Rightarrow \quad \operatorname{Re}\left[\left(\frac{1}{w_\vartheta}\right)\frac{\partial w}{\partial t}\right] = \phi_\vartheta\left|\frac{w}{w_\vartheta}\right|^2 \right] \quad (6-17)$$

Het verschil van de methode M.O.I. met de methode Fornberg en mijn methode is, dat voor de numerieke conforme afbeelding geen iteratie procedure nodig is. De differentiaal vergelijking (6-17) relateert nl. de toename in de tijd van de conforme afbeelding aan de toename in de tijd van de bewegende rand ∂B . Deze differentiaal vergelijking geeft tevens de relatie tussen de oplossing van het potentiaalprobleem en de toename in de tijd van de vrije rand, d.i. dus de kinematische randwaarde. M.O.I. leidt nl. af, dat de functie $(1/w_\vartheta)\frac{\partial w}{\partial t}$ (en met $z=i\ln w$) in de gebieden en op de randen analytisch is. Volgens appendix D.3. geldt dan dat $\operatorname{Im}[(1/w_\vartheta)\frac{\partial w}{\partial t}]$ in een reële periodiek toegevoegde Fourierreeks is te ontwikkelen: $c_m=0$ voor $m<0$. En $N=(n-1)/2$.

$$\operatorname{Im}\left[\left(\frac{1}{w_\vartheta}\right)\frac{\partial w}{\partial t}\right] = \operatorname{Re}\left[\sum_{m=0}^N c_m e^{im\vartheta}\right] \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial t} = iw_\vartheta \cdot \sum_{m=0}^N c_m e^{im\vartheta} \quad (6-18)$$

De conforme afbeelding $w=g(e^{i\vartheta})$ kan ook in een Fourierreeks worden ontwikkeld, waarvoor geldt dat $a_k=0$ voor $k<0$. Aan de twee normaliseringscondities $g(0)=0$ en $g'(0)>0$ wordt a priori voldaan door te stellen dat $a_0=0$ en $\operatorname{Im}[a_1]=0$. Hierdoor is de numerieke conforme afbeelding in zijn differentiaalvorm (6-17,18) eenduidig bepaald.

$$w = \sum_{k=0}^N a_k e^{ik\vartheta} \quad \Rightarrow \quad w_\vartheta = \sum_{k=0}^N (ik) a_k e^{ik\vartheta} \quad (6-19)$$

Ook de potentiaal ϕ op de cirkelrand $R=1$ is in een reële Fourierreeks te ontwikkelen, waaruit dan ϕ_ϑ en $\phi_r \equiv q$ volgen, zie appendix C.5,6.

$$\phi = \sum_{l=0}^N \left[g_l \cos(l\vartheta) + h_l \sin(l\vartheta) \right] \quad \Rightarrow \quad (6-20)$$

$$q = \sum_{l=0}^N l \left[g_l \cos(l\vartheta) + h_l \sin(l\vartheta) \right] \quad \text{en} \quad \phi_\vartheta = \sum_{l=0}^N l \left[h_l \cos(l\vartheta) - g_l \sin(l\vartheta) \right]$$

De methode M.O.I. verloopt als geheel analoog aan mijn methode. De coëfficiënten a_k worden met de FFT uit w_j berekend en daaruit wordt met de FFT $w_{\vartheta j}$ berekend volgens (6-19). Evenzo worden de coëfficiënten g_l en h_l met de FFT uit ϕ_j berekend en daaruit wordt met de FFT q_j en $\phi_{\vartheta j}$ berekend volgens (6-20), $j=0,1,\dots,n$. Uit de differentiaalvergelijking (6-17,18) volgt dan met de FFT de coëfficiënten c_m en daaruit wordt $(\frac{\partial w}{\partial t})_j$ met de FFT berekend. Time-stepping naar $t_{i+1}=t_i+\Delta t$ met (6-14) voor (6-17,18) en (6-13) levert resp. w_j en ϕ_j op een tijdstip t_{i+1} . Dus zowel de numerieke conforme afbeelding als het potentiaalprobleem worden voor 2 evaluaties per tijdstap Δt met de FFT berekend. De gehele methode kost dan per tijdstap Δt $O(n \log_2 n)$ operaties.

6.2.2. De beginvoorwaarde op $t=0$: de Stokesgolf

Voor diep water kunnen niet-lineaire periodieke golven ontwikkeld worden in perturbaties series: de Stokesgolven. Met een zg. Pade sommatie zijn deze in principe divergerende series te benaderen. De theoretisch hoogste golf, die nog stabiel cq. vormvast is, heeft een golfhoogte/golflengte ratio van $(H/\lambda)_{\max} = 0.14107$. Als beginvoorwaarde wordt voor zo'n Pade approximatie van de symmetrische stabiele Stokesgolf gekozen, $H/\lambda < 0.14107$, waarbij de top op $x=\pi$ ligt.

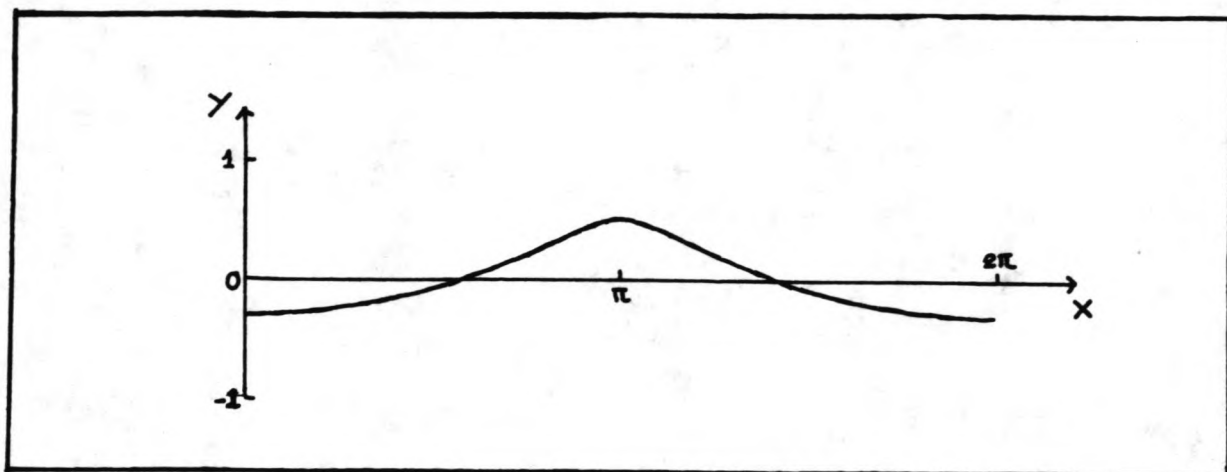


Fig. 6-2 Profiel van de Stokesgolf $H/\lambda=0.127$ op $t=0$

Door de coördinaten van het golfprofiel en de corresponderende waarden voor de potentiaal ϕ in het referentie assenstelsel, waarvoor het diepe water in rust was, in te voeren, krijgen we een van links naar rechts lopende, dus tijdsafhankelijke golfbeweging.

Voor de eerste 3 tijdstappen zal i.p.v. (6-14) het bekende 4^e orde Runge-Kutta timesteppingsschema worden gebruikt. Dit schema gebruikt nl. geen informatie van vorige tijdstappen, maar 4 mini-tijdstappen per tijdstap Δt . Het heeft een lokale fout van $O(\Delta t^5)$. Ook als de tijdstap tijdens het timesteppingsproces wordt veranderd, zal i.p.v. (6-14) voor de eerste 3 volgende tijdstappen dit schema gehanteerd worden.

6.2.3. Testgeval 1: de vrije lopende Stokesgolf

De druk p_0 op het vrije oppervlak is nul; $p_0=0$, zodat we een vrije lopende Stokesgolf dienen te krijgen. Aangezien de Stokesgolf stabiel, cq. vormvast is en zijn theoretische fasesnelheid c bekend is, kunnen de numerieke resultaten voor de methoden L-H.C., M.O.I. en Fornberg op elk tijdstip worden vergeleken met de Pade approximatie van het Stokesgolfprofiel.

methode	$H/\lambda \Rightarrow c/c_D$		n	Δt	operaties per Δt
L-H.C.	0.127	1.083	30	variabel?	$O(n^2)$ tot $O(n^3)$
M.O.I.	0.113	1.064	64	$2\pi/400$	$O(n \log_2 n)$
Fornberg	0.091	1.042	32?	?	$O(n \log_2 n)$

Tabel 6-1 De (invoer)gegevens voor de twee methoden

In tabel 6-1 is $c_D = \sqrt{g_z/k} = 1$ de fasesnelheid van de lineaire golf over een oneindige diepte, de zg. oneindige golf.

De resultaten zijn weergegeven in fig. 6-3 en fig 6-4. voor resp. de methode L-H.C. en de methode M.O.I. De methode Fornberg had na vijf perioden; $t = 5 \frac{\lambda}{c} = 30.15$, een volkomen overeenkomstig resultaat als de methode M.O.I. In de figuren is de getrokken kromme de Pade approximatie van het Stokesgolfprofiel en zijn de punten de resultaten van de numerieke methoden. Even als L-H.C. constateerde M.O.I. dat na enige tijd het golfprofiel een zaagtandachtig karakter kreeg. M.O.I. paste daarom de 5-punts "smoothing" procedure toe van L-H.C.: $\bar{f}_j = \frac{1}{16}(-f_{j-2} + 4f_{j-1} + 10f_j + 4f_{j+1} - f_{j+2})$, om de $10\Delta t$. L-H.C. zelf paste deze procedure toe om de $5\Delta t$.

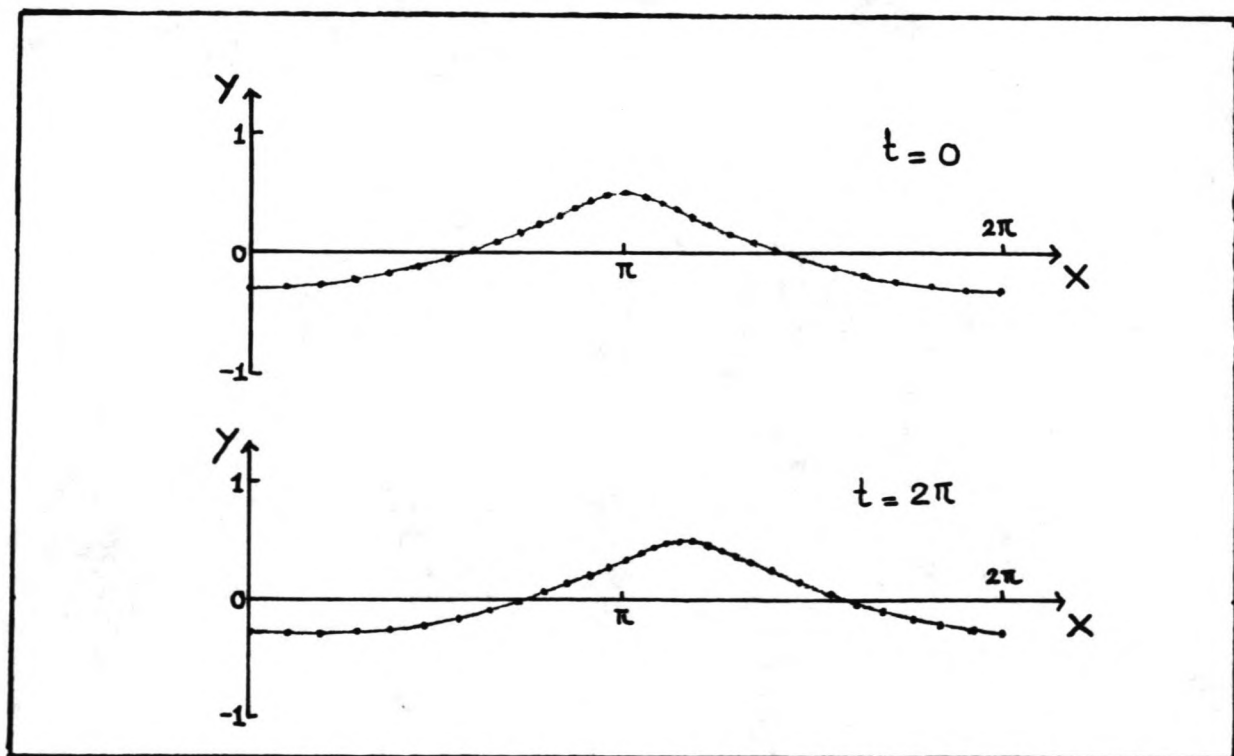


Fig. 6-3 Profiel van de Stokesgolf. Methode L-H.C. (n=30)

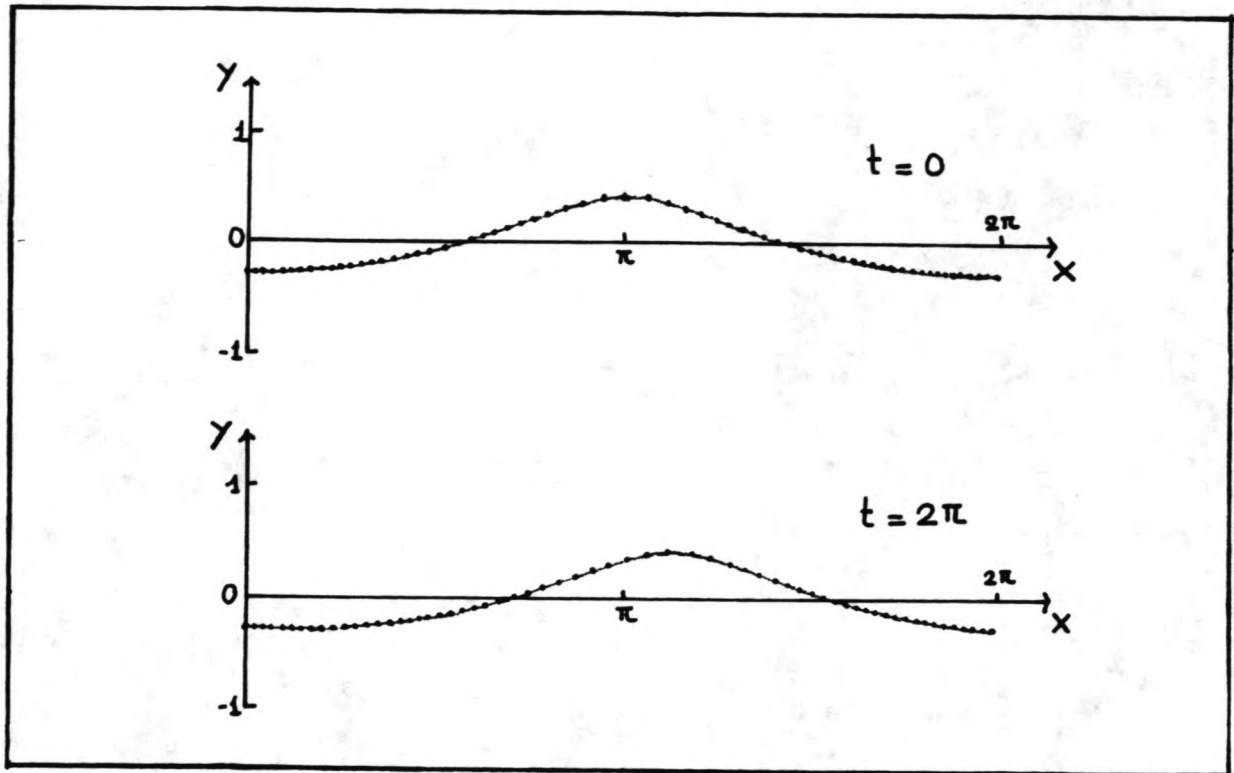


Fig. 6-4 Profiel van de Stokesgolf. Methode M.O.I. ($n=64$)

Beiden methoden zijn praktisch overeenkomstig met de golftheorie van Stokes voor periodieke niet-lineaire golven in diep water, zoals uit de fig. 6-3,4 blijkt. Het verschil tussen beiden methoden zit in de verdeling of resolutie van de punten op de verschillende tijdstippen. Ten eerste geldt voor de methode L-H.C. dat de punten (x_j, y_j) -die gefixeerd zijn met vloeistofdeeltjes- in de golftop dichter naar elkaar toe bewegen. L-H.C. gaven hiervoor een fysische verklaring. Voor de methode M.O.I. blijft de verdeling van de punten gelijk in de tijd. Dit komt omdat het gebied B (en rand ∂B) congruent blijft en alleen roteert om het punt $g(0)=0$ tijdens het timesteppingsproces, aangezien de Stokesgolf vormvast is. De punten $(x_j, y_j) = (x(\vartheta_j), y(\vartheta_j))$ volgen namelijk niet een vloeistofdeeltje op zijn pad, maar de numerieke conforme afbeelding. Ten tweede is de resolutie van de punten (x_j, y_j) voor de methode M.O.I. in het golfdal dichter dan in de golftop, terwijl voor de methode L-H.C. het omgekeerde geldt. Dit komt door het samendrukkingsfenomeen voor de numerieke conforme afbeelding. Aangezien het gebied B voor de Stokesgolf cirkelachtig is, is dit fenomeen nog niet zo nadrukkelijk aanwezig als bij meer vervormde gebieden B .

6.2.4. Testgeval 2: de brekende golf

Indien we voor $t=0$ de beginwaarde uit 6.2.3 kiezen en tevens een gegeven drukgolf p_0 gedurende een bepaalde tijd voorschrijven, dan zal een sterk niet-lineaire, instabiele cq. niet vormvaste, niet symmetrische, lopende golf zich ontwikkelen.

$$\begin{aligned} p_0 &= p_A \sin(t) \sin(x-ct) & \text{als } 0 \leq t \leq \pi \\ p_0 &= 0 & \text{als } t > \pi \end{aligned} \quad (6-21)$$

Volgens (6-21) loopt zo'n golf na $t=\pi$ vrij. L-H.C. heeft voor verschillende drukamplituden p_A deze brekende golven berekend. Het feit dat de deeltjes vanuit het golfdal naar de top dichter naar elkaar toe bewegen, heeft een zeer gunstig effect. Namelijk in secties van de vrije rand waar de kromming het sterkst is, is de resolutie van de punten ook het hoogst, zodat de brekende golf door de discrete punten (x_j, y_j) goed kan worden weergegeven op elk tijdstip. In fig. 6-5 is het profiel van de brekende golf weergegeven voor $p_A=0.0729$ op het tijdstip $t=5.89$, waarbij tussen de $n=60$ punten rechtlijnig is geïnterpoleerd. De brekende golf is van het "plunging" type.

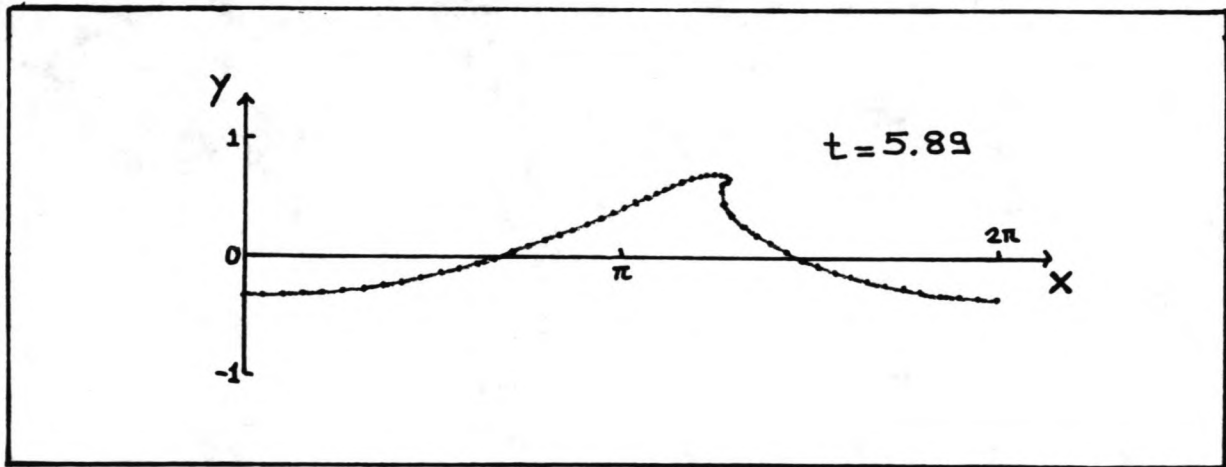


Fig.6-5 Profiel van de brekende golf. Methode L-H.C. ($n=60$)

De resolutie van de punten voor het golfprofiel wordt voor de methode M.O.I en Fornberg bepaald door de numerieke conforme afbeelding, zie 6.2.3. Het mag duidelijk zijn dat voor een brekend golfprofiel als in fig. 6-5 het gebied $B(t)$ steeds meer vervormd wordt tijdens het timesteppingsproces. Het samendrukkingsfenomeen treedt daardoor steeds nadrukkelijker op en de resolutie van de punten (x_j, y_j) wordt dichter in het golfdal en slechter in de golftop. Hierdoor zal het golfprofiel steeds slechter worden weergegeven en zal de methode M.O.I. en Fornberg zijn afgebroken, voordat een profiel als in fig. 6-5 is bereikt, tenzij een exorbitant n aantal punten wordt ge-

bruikt.

Om die reden paste M.O.I niet de FFT toe voor de constructie van de numerieke conforme afbeelding, maar de methode van Zemach & Menikoff (1980), om brekende golfprofielen te berekenen. M.O.I paste de conforme afbeelding van Zemach & Menikoff (en het potentiaalprobleem) aan voor tijdsafhankelijke "brekende" golfprofielen, zoals $x(s,t)=s+t \cdot \sin(s) \wedge y(s,t)=0.4 \sin(s)$, $1 \leq t \leq 2$. Het samendrukkingsfenomeen deed zich alleen nog bij zeer vervormde golfprofielen voor, maar kon sterk gereduceerd worden door een verdubbeling van het aantal discrete punten. Wel was bij meer vervorming van het golfprofiel tijdens het timesteppingsproces een zeer kleine tijdstap nodig om instabiliteit van de methode te voorkomen: $\Delta t = 0.001$. M.O.I. stelde dat deze methode, gebaseerd op de numerieke conforme afbeelding van Zemach & Menikoff (1980) per tijdstap Δt ongeveer $O(n^2)$ operaties kost. (Dit is discutabel aangezien de numerieke conforme afbeelding van Zemach & Menikoff $O(n^3)$ operaties kost.)

6.3. Conclusies met betrekking tot mijn methode

Voor de berekening van het profiel van de vrije lopende Stokesgolf uit 6.2.3 zou mijn methode dezelfde resultaten moeten opleveren als de methode van M.O.I. en Fornberg. Echter doordat dit $O(n^3)$ operaties per tijdstap Δt kost, heb ik dit uit het oogpunt van rekentijd niet geverifieerd. (Door introductie van een hulpfunctie voor de numerieke conforme afbeelding, waarbij a priori aan $g(0)=0$ is voldaan, kan dit verlaagd worden tot $O(n \log_2 n)$ operaties per tijdstap Δt , zie 5.4; conclusie en aanbeveling 4).)

Voor de berekening van het profiel van een brekende golf, is mijn methode niet geschikt, vanwege het samendrukkingsfenomeen op $\partial B(t)$ bij een equidistante vaste verdeling van de punten ϑ_j op de cirkelrand. Even als voor de methode Fornberg en M.O.I., waarbij de constructie van de numerieke conforme afbeelding m.b.v. de FFT tot stand werd gebracht, zal mijn methode worden afgebroken, door de zeer snelle afname van de resolutie voor de punten (x_j, y_j) op de golftop, tenzij een exorbitant n aantal punten wordt gebruikt. Gezien het feit dat $O(n^3)$ operaties per tijdstap Δt nodig zijn, zou dat voor mijn methode extreem veel rekentijd (en geheugenplaats) kosten.

Nu hoeven de middens ϑ_j bij discretisatie van de REM met constante elementen niet noodzakelijkerwijs equidistant verdeeld te zijn. De punten ϑ_j worden dan per tijdstap Δt op de cirkelrand zo "verschoven", dat de resolutie van de punten (x_j, y_j) -met name op de golftop- dusdanig geschikt is voor een representabele weergave van het (brekend) golfprofiel op elk tijdstip. Met andere woorden: het samendrukkingsfenomeen vindt plaats op de cir-

kelrand voor de punten ϑ_j , zie 5.4; conclusie en aanbeveling 3). Echter door zo'n tijdsgewijs verschuivingsproces van ϑ_j zullen de matrices K , H en G per tijdstap Δt veranderen. Nu dienen ook voor het gediscretiseerde potentiaalprobleem $H\phi = Gq$ de matrices H en G per tijdstap Δt opgebouwd te worden, en vooral de opbouw van G kost veel rekentijd, zie 4.1.3. Verder kost de oplossing van het stelsel lineaire vergelijkingen $H\phi = Gq$ met Gauss eliminatie $O(n^3)$ operaties per tijdstap Δt , aangezien de matrices H en G niet meer circulant zijn. Dus ook in tweede instantie is mijn methode met deze aanpassing voor de berekening van brekende golfprofielen uit het oogpunt van rekentijd ongeschikt.

7. CONCLUSIES

Dit verslag stond in het teken van onderzoek naar en constructie van een *efficiënte* -d.w.z. wat betreft benodigde rekentijd- numerieke methode ter bepaling van niet-lineaire vrije 2-D zwaartekrachts-oppervlakte golven in water. Het potentiaalprobleem in het fysisch gebied Ω en op zijn rand Γ wordt gediscretiseerd met de REM, zodat alleen discretisatie van de rand Γ nodig is, i.p.v. discretisatie in het gehele gebied Ω door toepassing van de EEM of EDM. Door de niet-lineariteit van de tijdsafhankelijke randwaarden op de vrije rand $\Gamma_1(t)$ zal het stelsel lineaire vergelijkingen, die het resultaat zijn van de discretisatie van het potentiaalprobleem, tijdens een time-steppingsprocedure veranderen en dientgevolge zal dit stelsel dan per tijdstap moeten worden opgebouwd en opgelost. Door nu het tijdsafhankelijke fysisch gebied Ω op een vast rekengebied D af te beelden ontstaat de mogelijkheid dat, via discretisatie van de transformatie en het getransformeerde potentiaalprobleem in D en op zijn rand ∂D , stelsels lineaire vergelijkingen worden verkregen waarvan de matrices constant blijven tijdens een timesteppingsproces, zodat deze matrices maar 1 keer moeten worden opgebouwd en eventueel maar 1 keer 'inversie' nodig is. Aangezien voor de discretisatie de REM wordt gebruikt vinden alle berekeningen plaats via de discrete punten op de vaste rand ∂D .

De homogene elliptische PDV $\mathcal{L}$ in het vaste rekengebied D geeft tesamen met de randwaarden op ∂D de transformatie $\mathcal{L}\{x\}=0$ en $\mathcal{L}\{y\}=0$ en het getransformeerde potentiaalprobleem $\mathcal{L}\{\phi\}=0$ weer. Invullen van de schaaufactoren g_{11}, g_{22} en g_{12} maakt de PDV niet-lineair en dus ongeschikt voor discretisatie met de REM. (Discretisatie met de EDM of EEM leidt tot een stelsel niet-lineaire vergelijkingen). Afschatting van deze schaaufactoren door ze constant in D te nemen leidt door discretisatie met de REM (of EDM of EEM) tot een stelsel lineaire vergelijkingen. Echter de matrices van dit stelsel zullen tijdens een timesteppingsproces veranderen, omdat de constanten schaaufactoren per tijdstap zullen veranderen, als het rekengebied D vast blijft, aangezien het fysisch gebied $\Omega(t)$ en $\Gamma(t)$ per tijdstap verandert. Door a priori te stellen dat $g_{12}=0$ en $\kappa=\sqrt{g_{11}/g_{22}}=1$ vallen de schaaufactoren buiten de PDV. Dit leidt tot een (zuivere) conforme afbeelding $\mathcal{L}=\Delta$, waarbij na discretisatie met de REM constante matrices ontstaan tijdens een time-steppingsproces. Tevens bleek dat dit alleen gold, als het vaste rekengebied D de cirkel is met vaste straal R . Aangezien de rechtstreekse conforme afbeelding van de cirkel naar een gebied $\Omega(t)$ met rechte lijnstukken problemen opleverde, werd het probleem beperkt tot periodieke niet-lineaire golven over een oneindige diepte. Een numerieke conforme afbeelding beeldt dan de

vaste cirkelrand ∂D $\zeta = \xi + i\eta = Re^{i\vartheta}$ op de rand $\partial B(t)$ van een gesloten regulier gebied $B(t)$ af, en de rand $w = u + iv \in \partial B(t)$ wordt middels de exacte conforme afbeelding $z = \frac{1}{k} \ln w$ op de vrije rand $z = x + iy \in \Gamma_1(t)$ afgebeeld.

De constructie van de numerieke afbeelding $w(\tau) = g(e^{i\vartheta}) \Leftrightarrow \tau = \tau(\vartheta)$ op een bepaald tijdstip van de cirkelrand naar de rand $\partial B(\tau)$ (τ is de parametrisering van ∂B) kan alleen worden opgezet met een iteratieve procedure: $\tau_{k+1} = \tau_k + u^k$. D.w.z. dat de verdeling (u, v) op $\partial B(\tau)$, uitgaande van een vaste verdeling ϑ op de cirkelrand, van te voren onbekend is. Dit komt omdat zo'n verdeling (u, v) tevens op de cirkelrand moet voldoen aan de Hilbert integraal $u = -K\{v\}$ (als $u_m = 0$) en de middelwaarde eigenschap $v_m = \hat{v}$. Dit is de prijs die als het ware betaald moet worden voor het a priori vastleggen van de schaafactoren $g_{12} = 0$ en $\mathbb{K} = \sqrt{g_{11}/g_{22}} = 1$. Discretisatie met de REM m.b.v. n constante elementen levert voor de Hilbertintegraal de matrix K en voor het potentiaalprobleem op de cirkelrand de matrixvergelijking $H\phi = Gq$. De coëfficiënten van deze matrices worden analytisch berekend en blijven constant tijdens een timesteppingsprocedure. Echter de matrix T van het resulterende stelsel lineaire vergelijkingen $Tu = b^*$ voor de numerieke conforme afbeelding verandert per iteratiestap en dientgevolge ook per tijdstap, omdat de rand ∂B tijdsafhankelijk is. Aangezien dit stelsel overbepaald is, zijn er $O(n^3)$ operaties nodig om dit stelsel op te lossen. (Middels een hulpfunctie, die er voor zorgt dat a priori aan $v_m = \hat{v}$, met $v_m = 0$ is voldaan, wordt de matrix T vierkant. M.b.v. van de iteratieve geconjugeerde gradienten methode, zijn er voor de oplossing van het nu bepaalde stelsel $O(n \log_2 n)$ operaties nodig.)

De bepaling van het profiel $\Gamma_1(t)$ van periodieke sterk niet-lineaire golven m.b.v. van een numerieke conforme afbeelding vanaf de vaste cirkelrand zal, door de slechter wordende resolutie van de punten (x_j, y_j) op de golftop tijdens het timesteppingsproces, voortijdig worden afgebroken, tenzij een extreem n aantal discrete punten wordt gebruikt. De oorzaak hiervan is het samendrukkingsfenomeen voor de numerieke conforme afbeelding vanaf de cirkelrand met een vaste equidistante verdeling ϑ_j ; een samengepakte resolutie van de beeldpunten (x_j, y_j) op het golfdal en een uit elkaar getrokken resolutie op de golftop. Een variabele verdeling ϑ_j op de cirkelrand tijdens het timesteppingsproces, zodat de beeldpunten (x_j, y_j) min of meer equidistant verdeeld zijn op het golfprofiel voor elk tijdstip, heeft het effect dat de matrices K , H en G per tijdstap moeten worden opgebouwd en dat het verdiscretiseerde potentiaalprobleem $H\phi = Gq$ per tijdstap (met Gauss eliminatie) moet worden opgelost.

De mogelijkheid om de efficiëntie van de numerieke bepaling van niet-lineaire golven te verbeteren middels een transformatie vanaf een vast rekengebied D naar het fysisch gebied $\Omega(t)$, - zodat met discretisatie op ∂D door

de REM de matrices van de stelsels lineaire vergelijkingen, voor zowel de transformatie als het getransformeerde potentiaalprobleem, constant blijven tijdens een timesteppingsprocedure -, bleek een illusie te zijn. Dit geldt ook voor andere discretisatie-technieken dan de REM, zoals de EDM in D, of de EEM in D. Ook de oplossing van het potentiaalprobleem en de constructie van een numerieke conforme afbeelding op de cirkelrand m.b.v. de FFT is, ondanks dat er maar $O(n \log_2 n)$ operaties per tijdstap nodig zijn, niet geschikt om sterk niet-lineaire periodieke golven te bepalen, vanwege het samendrukkingsfenomeen dat een extreem n aantal punten verlangt om een redelijke weergave van het golfprofiel te garanderen.

De bepaling van niet-lineaire vrije 2-D zwaartekrachts-oppervlakte golven in water m.b.v. van de REM kan daarom maar beter op de rand $\Gamma(t)$ van het fysisch gebied $\Omega(t)$ plaatsvinden, zoals beschreven in hoofdstuk 2. In ieder geval is dan een directe fysische relatie met een numerieke methode aanwezig. Verder zal de rekentijd voor een numerieke methode van secundair belang zijn. Het onderzoek naar en de constructie van een numerieke methode ter bepaling van niet-lineaire golven valt uiteen in twee punten.

(1) *De numerieke aspecten.* Discretisatie met de REM van het potentiaalprobleem op $\Gamma(t)$ op een tijdstip t_j geeft een stelsel lineaire vergelijkingen waarvan de matrix vol is, zodat dit stelsel dient te worden opgelost met Gauss eliminatie. Wellicht dat de complexe beschrijving $\Phi = \phi + i\psi$ een beter alternatief is. Discretisatie met de REM van de Cauchy integraal (2-26b) kan een matrix opleveren, die weliswaar vol is, maar ook diagonaal-dominant is. Het stelsel lineaire vergelijkingen kan dan met een iteratieve methode, zoals de geconjugeerde gradienten methode ($O(n \log_2 n)$ operaties per tijdstap), opgelost worden. De stabiliteit van een timesteppingsprocedure verlangt aandacht, met name de timestepping van de vrije rand $\Gamma_1(t)$. Het gebruik van lineaire elementen voor de REM is o.a. daarom aan te bevelen. Verder zal een foutenanalyse t.a.v. de REM en de timesteppingsprocedure gewenst zijn om o.a. een optimum tussen nauwkeurigheid en rekentijd te verkrijgen.

(2) *De randwaarden op de in- en uitstroomrand Γ_2 en Γ_4 .* Indien men zich niet wil beperken tot periodieke golven, door van een onregelmatig verloop van de bodem Γ_3 uit te gaan, dan zal men zwakreflecterende randwaarden als (2-10) op Γ_2 en Γ_4 dienen op te leggen. Eventueel kan onderzoek gedaan worden naar betere absorberende randwaarden voor de verstrooide golven t.g.v. 'diffractie' door de onregelmatige bodem van een inkomende niet-lineaire golf. De formulering van zwakreflecterende randwaarden in termen van de potentiaal ϕ en/of stroomfunctie ψ kan problemen opleveren, als men uitgaat

van de complexe beschrijving $\Phi = \phi + i\psi$ voor het potentiaalprobleem.

Tot slot nog een persoonlijke opmerking. Gezien de zwaarte van en de vereiste wiskundige kennis voor een onderwerp als de numerieke bepaling van niet-lineaire vrije 2-D zwaartekrachts-oppervlakte golven in water, lijkt mij het zinvol om in het kader van zo'n afstudeeronderwerp aan de sectie vloeistofmechanica van de faculteit Civiele Techniek een student van de faculteit Technische Wiskunde te betrekken. Zeker als men zo'n onderwerp uitbreidt met drijvende lichamen of zelfs tot 3-D problemen.

