o.b. 2

HANDLEIDINGEN BIJ HET ONDERWIJS AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL TE DELFT — ONDER REDACTIE VAN DE CENTRALE COMMISSIE VOOR STUDIEBELANGEN

No. 55. Prijs f 1.90* f 2.50

VRAAGSTUKKEN OVER HOGERE ALGEBRA

DOOR

Ir W. J. VOLLEWENS

DELFTSCHE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ — DELFT — 1949

WOORD VOORAF.

Deze handleiding geeft 250 vraagstukken over algebra met antwoorden. Deze antwoorden zijn voorzien van min of meer uitvoerige aanwijzingen voor de oplossing. Gaarne betuig ik hier mijn hartelijke dank aan Prof. Dr. Fred. Schuh, die alle antwoorden heeft nagerekend en gecontroleerd.

Voor de theorie zie men Handleiding 54: Algebra Hoofdstukken.

W. J. VOLLEWENS.

INHOUD.

VRAAGSTUKKEN OVER HOGERE ALGEBRA.

A. Determinanten.

1. Wat verstaat men onder *permutaties* van n elementen? Bewijs dat het aantal daarvan gelijk is aan $n!$ (n-faculteit).
2. Zijn er onder n elementen k gelijke elementen (terwijl de overige alle verschillend zijn), dan is het aantal permutaties gelijk aan $\frac{n!}{k!}$ Toon dit aan.
3. Wat verstaat men onder een inversie? Wanneer zegt men dat een permutatie behoort tot de even klasse en wanneer tot de oneven klasse?
4. Verwisselt men in een permutatie twee naast elkaar staande elementen, dan verandert de permutatie van klasse. Bewijs dit.
5. Verwisselt men in een permutatie twee willekeurige elementen, dan verandert de permutatie van klasse. Bewijs dit.
6. Het aantal permutaties van even klasse is gelijk aan het aantal der oneven klasse. Toon dit aan.
7. Wat verstaat men onder *variaties* p aan p van n elementen? ($p \leqq n$). Bewijs dat het aantal daarvan gelijk is aan
$$\frac{n!}{(n-p)!} = n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+1).$$
8. Wat verstaat men onder *combinaties* p aan p van n elementen? Bewijs dat het aantal daarvan gelijk is aan
$$C_n^p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+1)}{p!}.$$
9. Is n geheel en positief dan is
$$(x+a)^n = x^n + C_n^1\, x^{n-1}\,.\,a + C_n^2\, x^{n-2}\,.\,a^2 + C_n^3\, x^{n-3}\,.\,a^3 + \ldots + $$
$$+ C_n^{n-1}\, x\,.\,a^{n-1} + a^n.$$
of:
$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}\, a^{n-1}\,.\,b + \frac{n(n-1)}{2!}\, a^{n-2}\, b^2 + \ldots. + b^n.$$
Toon dit aan door uit te gaan van het product:
$$(a+b_1)(a+b_2)(a+b_3)\ldots.(a+b_n).$$
10. Toon aan: $C_n^p = C_n^{n-p}$.
11. Eveneens: $C_n^p = \frac{n-p+1}{p}\,.\,C_n^{p-1}$.

12. Toon aan: $1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^n = 2^n$.
13. Eveneens: $1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 \dots + (-1)^n . C_n^n = 0 \; (n \geqq 1)$.
14. Wat verstaat men onder een *determinant*? Wat onder de *elementen*, de *rijen* en de *kolommen* daarvan? Wat onder de *orde* (ook wel de *graad*) van een determinant. Wat zijn de *termen* van een determinant? Hoe bepaalt men de *tekens* van de termen van een determinant? Wat is de *waarde* van een determinant?
15. Toon aan dat een determinant van de n^e orde $n!$ termen heeft.
16. De waarde van een determinant verandert niet als men de rijen tot kolommen maakt en de kolommen tot rijen (zodat de p^e rij wordt de p^e kolom en de q^e kolom de q^e rij). Toon dit aan.
17. Wat verstaat men onder de *hoofddiagonaal*, wat onder de *nevendiagonaal* van een determinant?
18. Verwisselt men in een determinant 2 rijen of kolommen, dan wordt de waarde van de determinant tegengesteld. Bewijs dit.
19. Een determinant met 2 gelijke rijen of kolommen heeft de waarde 0. Toon dit aan.
20. Vermenigvuldigt men alle elementen van een rij of kolom met eenzelfde getal, dan wordt de waarde van de determinant met dat getal vermenigvuldigd. Bewijs dit.
21. Zijn de elementen van een rij of kolom alle evenredig met de overeenkomstige elementen van een andere rij of kolom, dan is de waarde van de determinant 0. Bewijs dit.
22. De waarde van een determinant verandert niet als men de elementen van een rij of kolom vermeerdert met getallen, die evenredig zijn met de overeenkomstige elementen van een andere rij of kolom. Bewijs dit.
23. Zij a_{pq} het element van een determinant dat in de p^e rij en in de q^e kolom staat en zet men in alle termen van de determinant, waarin a_{pq} voorkomt, dit element buiten haakjes, dan heet de vorm tussen haakjes de *coëfficiënt* (of het *algebraisch complement*) van a_{pq} en deze wordt aanduid door A_{pq}. De waarde Δ van de determinant is dan gelijk aan:
$$\Delta = a_{p1} A_{p1} + a_{p2} A_{p2} + a_{p3} A_{p3} + \dots + a_{pn} A_{pn}$$
waardoor de determinant *ontwikkeld is naar de elementen van de p^e rij*. Evenzo kan een determinant ontwikkeld worden *naar de elementen van de q^e kolom:*
$$\Delta = a_{1q} A_{1q} + a_{2q} A_{2q} + a_{3q} A_{3q} + \dots + a_{nq} A_{nq}.$$
Ga dit na.
24. Vermenigvuldigt men de elementen van een rij of kolom met de overeenkomstige coëfficiënten van een andere rij of kolom en telt men de komende producten op, dan is de som gelijk 0. Bewijs dit.

25. Wat verstaat men onder de *onderdeterminant* of *minor* van een element van een determinant?

26. Is D_{pq} de onderdeterminant van het element a_{pq} van een determinant, dan is:

$$A_{pq} = (-1)^{p+q} . D_{pq}.$$

27. Bewijs dat:

$$\begin{vmatrix} bc & 1 & a \\ ca & 1 & b \\ ab & 1 & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

zonder de determinanten uit te schrijven.

28. Bewijs:

$$\begin{vmatrix} yz & zx & xy \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x & y & z \end{vmatrix} = (y-z)(x-z)(x-y)(yz+zx+xy).$$

29. Bewijs:

$$\begin{vmatrix} x & p & q & r & 1 \\ a & x & s & t & 1 \\ a & b & x & u & 1 \\ a & b & c & x & 1 \\ a & b & c & d & 1 \end{vmatrix} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

30. Bewijs de betrekking:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix} = -(x+y+z)(y+z-x)(z+x-y)(x+y-z)$$

zonder de determinant te ontwikkelen en zonder de factoren in het 2e lid met elkaar te vermenigvuldigen.

31. Bewijs zonder de determinant uit te schrijven:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix} = -(a-c)(b-d)(a-b+c-d).$$

32. De lengten der zijden van een driehoek zijn a, b en c. Bewijs dat de oppervlakte van die driehoek gelijk is aan $\frac{1}{4}$ maal de wortel uit:

$$-\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

33. Toon aan:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & z & y \\ -b & -z & 0 & x \\ -c & -y & -x & 0 \end{vmatrix} = (ax - by + cz)^2.$$

34. Bewijs:

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$$

35. Bewijs:

$$\begin{vmatrix} \beta + \gamma & \gamma + \alpha & \alpha + \beta \\ \beta' + \gamma' & \gamma' + \alpha' & \alpha' + \beta' \\ \beta'' + \gamma'' & \gamma'' + \alpha'' & \alpha'' + \beta'' \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

36. Bewijs:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b) \\ .(d-b)(d-c).$$

(Determinant van *Vandermonde*).

37. Bewijs:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c). \\ (ab + ac + ad + bc + bd + cd).$$

38. Eveneens:

$$\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c). \\ (abc + abd + acd + bcd).$$

39. Bewijs:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(b-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc).$$

40. Bewijs:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = (a+b+c)(bc + ca + ab - a^2 - b^2 - c^2).$$

41. Zijn Δ_1 en Δ_2 twee determinanten van de n^e orde (graad):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11}\, a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \dots a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1}\, a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{en } \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_{11}\, b_{12} \dots b_{1n} \\ b_{21}\, b_{22} \dots b_{2n} \\ \vdots \\ b_{n1}\, b_{n2} \dots b_{nn} \end{vmatrix}$$

dan is het product van Δ_1 en Δ_2 weer een determinant van de n^e orde waarvan het element uit de p^e rij en de q^e kolom is:

$$a_{p_1} b_{q_1} + a_{p_2} b_{q_2} + a_{p_3} b_{q_3} + \dots + a_{pn} b_{qn}.$$

Bewijs dit.

Door verwisseling van rijen en kolommen in één of beide determinanten Δ_1 en Δ_2 kan met het element van de p^e rij en q^e kolom van de product-determinant ook schrijven:

$$a_{p_1} b_{1q} + a_{p_2} b_{2q} + \dots + a_{pn} b_{nq}$$

of ook:

$$a_{1p} b_{1q} + a_{2p} b_{2q} + \dots + a_{np} b_{nq}.$$

42. Wat verstaat men onder de *reciproke* determinant Δ' van een determinant Δ?

Bewijs dat als Δ een determinant van de n^e orde graad) is:

$$\Delta' = \Delta^{n-1}.$$

B. Toepassingen van Determinanten.

43. Hoe luidt de regel van *Cramer* voor de oplossing van n niet homogene lineaire vergelijkingen met n onbekenden waarvan de determinant ongelijk nul is?

44. Indien gegeven zijn p vergelijkingen met q onbekenden, wat verstaat men dan onder de *matrix* der coëfficiënten van de onbekenden? Wanneer is die matrix een determinant?

45 Wat verstaat men onder een *hoofddeterminant* bij p vergelijkingen met q onbekenden?

46. Voor de oplossing van p niet-homogene lineaire vergelijkingen met q onbekenden geldt de *stelling van Rouché:*
Is r de orde van de hoofddeterminant (rang van de matrix) en is:
$p = r$ en $q = r$ dan is er één oplossing;
$p = r$ en $q > r$ dan zijn de r onbekenden, die in de hoofddeterminant betrokken zijn, lineair uitdrukbaar in de $q - r$ overige onbekenden. Er zijn dan ∞^{q-r} oplossingen;
$p > r$ en zijn niet *alle karakteristieke determinanten gelijk* 0 dan is er geen oplossing; het gegeven stelsel vergelijkingen is dan *strijdig;*
$p > r$ en zijn alle karakteristieke determinanten gelijk aan 0 dan is er één oplossing als $q = r$; is $q > r$ dan zijn de r onbekenden, die in de hoofddeterminant betrokken zijn, lineair uitdrukbaar in de $q - r$ overige onbekenden. Het aantal oplossingen is dan ∞^{q-r}.
Ga dit na.

47. Onderzoek het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} ax + ay + bz &= 1 \\ ax + cy + bz &= 1 \\ bx + by + az &= 1. \end{aligned}$$

voor alle waarden van a, b en c.

48. Bepaal x, y, z en w uit de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ ax + by + cz + dw &= 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z + d^2w &= 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z + d^3w &= 0. \end{aligned}$$

49. Bepaal x, y en z uit de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= b + c \\ bx + cy + az &= c + a \\ cx + ay + bz &= a + b. \end{aligned}$$

De constanten a, b en c zijn reëel.

50. Aan het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} Ax + By - Cz &= 9 \\ -5x + Ay + 7\,Cz &= A + B \\ Bx + Cy - Az &= 8 \end{aligned}$$

wordt voldaan door $x = 5$, $y = 1$, $z = 4$.
Bepaal door middel van determinanten de waarde van A.

51. Bepaal (met behulp van determinanten) A zodanig, dat het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} 2\,x + 2\,y + z &= 9 \\ x - 2\,y + 2\,z &= 3 \\ 5\,x - Ay + 3\,z &= 0 \\ Ax + 2\,y - 3\,z &= 2 \end{aligned}$$

één oplossing heeft.

52. Los x op uit:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 2 & x & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 0.$$

53. Los het volgend stelsel vergelijkingen op:

$$\begin{aligned} mx + y + z &= 1 \\ x + my + z &= m \\ x + y + mz &= m^2. \end{aligned}$$

54. Waaraan moeten a, b en c voldoen, zo

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z &= a^3 \\ x + by + b^2z &= b^3 \\ x + cy + c^2z &= c^3 \end{aligned}$$

één oplossing geven. Bepaal deze.

55. Aan welke voorwaarden moeten a, b en c voldoen, willen de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= 1 \\ ax + by + az &= 1 \\ bx + ay + bz &= 1 \end{aligned}$$

één oplossing bezitten?

Bepaal in de onderstelling, dat aan die voorwaarden voldaan is, gebruik makende van determinanten, de oplossing van het stelsel.

56. Los op de homogene vergelijkingen:

$$\begin{aligned} ax + ay + bz - t &= 0 \\ ax + cy + bz - t &= 0 \\ bx + by + az - t &= 0. \end{aligned}$$

57. Bespreek de oplossing van het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} ax \qquad\qquad + bz &= a \\ ax + \qquad by \qquad &= 3\,b \\ 2\,ax + \qquad by + bz &= 5\,c \\ a(c+2)x + b(c+1)y + bz &= 7\,a. \end{aligned}$$

58. Elimineer x, y en z uit de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z &= a^4 \\ x + by + b^2z &= b^4 \\ x + cy + c^2z &= c^4 \\ x + dy + d^2z &= d^4. \end{aligned}$$

59. Elimineer x, y en z uit de vergelijkingen:

$$\begin{aligned} ax + by \qquad &= c^2 \\ -cy + az &= b^2 \\ cx \qquad + bz &= a^2 \\ 2\,acx + bcy + abz &= abc. \end{aligned}$$

60. Los op het stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned} x - y + 2\,z - 3\,u &= 0 \\ 2\,x + 3\,y - 5\,z + 4\,u &= 0 \\ x - 6\,y + 11\,z - 13\,u &= 0 \\ 8\,x + 7\,y - 11\,z + 6\,u &= 0. \end{aligned}$$

C. Reeksen.

61. Wat verstaat men onder een variant u_n? Wanneer zegt men dat een variant u_n een (eindige) limiet bezit voor $n \leftarrow \infty$?

62. Wat is een monotoon stijgende variant? En een monotoon dalende variant? Welke stellingen gelden voor monotoon stijgende en monotoon dalende varianten, die beneden, resp. boven een eindige grens blijven?

63. Wat verstaat men onder een (oneindig voortlopende) reeks. Wanneer heet een reeks convergent, wanneer divergent?

64. Wat verstaat men bij een convergente reeks onder de som der reeks? Wat zijn gedeeltelijke sommen?

65. Toon aan dat de rekenkundige reeks:

$$a + (a + v) + (a + 2\,v) + \ldots.$$

divergent is.

66. Toon aan dat de meetkundige reeks:

$$a + ar + ar + \ldots. \quad (a \neq 0)$$

convergent is voor $|r| < 1$ en divergent voor $|r| \geqq 1$. Wat is — in geval van convergentie — de som der meetkundige reeks?

67. Wat is een schommelende (oscillerende) reeks? Geef een voorbeeld.

68 Bewijs dat voor de (z.g. rekenmeetkundige) reeks:

$$r + 2\,r^2 + 3\,r^3 + 4\,r^4 \ldots.$$

geldt (als $r \neq 1$):

$$S_n = r\,\frac{1 - r}{(1 - r)^2} - \frac{nr^{n+1}}{1 - r^n}$$

en ook dat als $|r| < 1$:

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{r}{(1 - r)^2}.$$

Wanneer is deze reeks convergent en wanneer divergent?

69. Voor de reeks:

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

geldt:

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Bewijs dit en toon aan dat de reeks convergent is met $S = 1$.

70. Bewijs dat de reeks:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots.$$

convergent is met $S=\frac{1}{2}$.

71. Toon aan dat de reeks:

$$\frac{1}{a(a+v)}+\frac{1}{(a+v)(a+2v)}+\frac{1}{(a+2v)(a+3v)}+\ldots..$$

$(a>0,\ v>0)$ convergeert en bewijs dat de som gelijk is aan $\frac{1}{av}$.

72. Bewijs, dat de reeks:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{4.6}+\frac{1}{5.7}+\ldots...$$

convergeert en $\frac{3}{4}$ tot som heeft.

73. Bewijs, dat de reeks:

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.6}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{5.8}+\ldots..$$

convergeert en $\frac{11}{18}$ tot som heeft.

74. Toon aan, dat de reeks waarvan de algemene (n^e) term is:

$$u_n=e^{\frac{1}{n+1}}\left(e^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right)$$

convergent is en dat de som gelijk is aan $e-1$.

75. Bewijs dat:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x\ldots.+\sin nx=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

voor $x\neq 2k\pi$ (k geheel).

Wat volgt hieruit omtrent dc convergentie of divergentie van de reeks:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots.$$

76. Bepaal S_n voor de reeks:

$$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\ldots.$$

en bewijs dat deze reeks divergent is.

77. Toon aan dat een convergente reeks convergent blijft en een divergente reeks divergent als men een eindig aantal termen aan het begin der reeks weglaat.

78. Bewijs de stelling: Is de reeks $u_1+u_2+u_3+\ldots.$ convergent, dan is: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0.$

Bestaat deze limiet dus niet, of is deze niet gelijk aan 0, dan is de reeks divergent.

79. Bewijs dat de harmonische reeks:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots\ldots$$

divergent is.

80. Bewijs dat de reeks:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\ldots\ldots$$

divergent is.

81. Bewijs, zonder S_n te berekenen, de divergentie van de reeks:

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots.\ (\alpha\neq 2\pi k)$$

82. Evenzo de divergentie van de reeks:

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots.$$

83. Bewijs dat de reeks:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots\ldots$$

divergent is.

84. Van een reeks is voor alle (gehele positieve) waarden van n de som der eerste n termen:

$$S_n=\left(1+\frac{1}{5n-4}\right)^n$$

Bewijs dat de reeks convergent is en bepaal de som der reeks.

Bepaal ook de eerste 3 termen en de n^e term.

85. Van een oneindig voortlopende reeks wordt de som der eerste n termen gegeven door de formule:

$$S_n=\sqrt[n]{1+\sqrt{n}}.$$

Onderzoek of deze reeks convergeert of divergeert.

86. Van een reeks is voor iedere (gehele en positieve) waarde van n de som der eerste n termen:

$$S_n=\frac{2^n+n}{2\,.\,2^n+3n}.$$

Bewijs dat deze reeks convergent is en bepaal de som.

Geef een uitdrukking voor de n^e term en schrijf de eerste 4 termen op.

87. Bewijs de stelling: Is

$$u_1+u_2+u_3+u_4+\ldots.$$

een reeks met louter positieve termen en

$$v_1+v_2+v_3+v_4+\ldots.$$

eveneens een reeks met positieve termen, dan is:

a. *als de v-reeks convergent* is en van een zekere index af geldt:

$$u_n \leqq v_n$$

ook de u-reeks convergent en

b. als de v-reeks divergent is en van een zekere index af geldt:

$$u_n \geqq v_n$$

ook de u reeks divergent.

De v-reeks heet dan de *vergelijkingsreeks* en men spreekt in het eerste geval van een *majorantenreeks*, in het tweede van een *minorantenreeks*.

88. Is $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \ldots.$ een convergente reeks met positieve termen en geldt voor de reeks met positieve termen:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots.$$

van zekere index af steeds:

$$\frac{u_n}{v_n} \leqq A$$

waarin A een constant getal is, dan is ook de u-reeks convergent.

Is de v-reeks divergent en geldt van zekere index af steeds

$$\frac{u_n}{v_n} \geqq B$$

waarin B een constant positief getal is, dan is ook de u-reeks divergent. Bewijs dit.

89. Is (met dezelfde notaties als in 780)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = C$$

waarin C een eindig getal is $\neq 0$, dan zijn de u-reeks en de v-reeks beide convergent of beide divergent. Bewijs dit.

90. Is (met dezelfde notaties als No. 780) van een zekere index af steeds:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

en is de v-reeks convergent, dan is ook de u-reeks convergent; alle termen zijn positief. Bewijs dit en ook:

Is van zekere index af:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

en is de v-reeks divergent, dan is ook de u-reeks divergent.

91. Bewijs, dat de reeks:

$$\frac{|\sin a|}{1} + \frac{|\sin 2a|}{2} + \frac{|\sin 4a|}{4} + \frac{|\sin 8a|}{8} + \ldots.$$

convergeert.

92. Bewijs dat de reeks:

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\ldots\ldots$$

divergeert als $p \leqq 1$.

93. Bewijs dat de reeks:

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots\ldots$$

convergeert als $p \geqq 2$ is.

94. Heeft bij een reeks met positieve termen $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ het product nu_n een positieve limiet L voor $n \to \infty$, dan is de reeks divergent.

95. Bewijs dat de reeks:

$$\frac{1}{|\sin\alpha|}+\frac{1}{2\,|\sin 2\alpha|}+\frac{1}{3\,|\sin 3\alpha|}+\frac{1}{4\,|\sin 4\alpha|}+\ldots\ldots$$

divergent is.

96. Bewijs dat de reeks:

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\ \ldots\ldots \qquad (\alpha>0).$$

divergent is.

97. Bewijs dat de reeks:

$$\sin\alpha+\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{3}+\sin\frac{\alpha}{4}\ \ldots\ldots \qquad (\alpha>0)$$

divergent is.

98. Bewijs dat de reeks:

$$\sin\frac{\alpha}{1^2}+\sin\frac{\alpha}{2^2}+\sin\frac{\alpha}{3^2}+\sin\frac{\alpha}{4^2} \qquad (\alpha>0)$$

convergeert.

99. Bewijs dat de reeks:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{1^2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{3^2}+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4^2}\ \ldots\ldots \qquad \alpha>0$$

convergeert.

100. Bewijs dat de reeks:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\ldots\ldots$$

(waarin $u_n = \dfrac{1}{3n-2}$) divergent is.

101. Bewijs dat de reeks:

$$\ln x + \tfrac{1}{2}\ln 2x + \tfrac{1}{3}\ln 3x \ldots\ldots \quad (x>0)$$

waarbij

$$u_n = \frac{1}{n} \ln nx$$

divergent is.

102. Evenzo dat de reeks:

$$\ln x + \tfrac{1}{2} \ln \frac{x}{2} + \tfrac{1}{3} \ln \frac{x}{3} + \ldots . \qquad (x > 0)$$

waarbij

$$u_n = \frac{1}{n} \ln \frac{x}{n}$$

divergent is.

103. Evenzo dat de reeks:

$$\frac{1}{e^x + 1} + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{e^{x/2} + 1} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{e^{x/3} + 1} + \ldots .$$

waarbij

$$u_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{e^{x/n} + 1}$$

divergent is.

104. Bewijs dat de reeks met positieve termen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots .$$

convergent is, indien van een zekere index af, geldt:

$$\sqrt[n]{u_n} \leqq r < 1$$

en divergent, indien:

$$\sqrt[n]{u_n} \geqq 1$$

(convergentie-kenmerk van Cauchy).

105. Bestaat (zie 796) de limiet:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = A$$

dan is de reeks:
convergent als $A < 1$.
divergent als $A > 1$.
Is $A = 1$ dan geeft dit kenmerk (van Cauchy) in limietvorm geen beslissing. Wordt deze limiet A echter genaderd van de grote kant, dan is de reeks divergent.

105. Is voor een reeks:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots .$$

met positieve termen, van zekere index af

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq r < 1$$

dan is de reeks convergent. Is van zekere index af

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqq 1$$

dan is de reeks divergent. (Convergentiekenmerk van d'Alembert).
Bewijs dit:

107. Bestaat (zie 798) de limiet:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = B$$

dan is de reeks

convergent als $B < 1$ en divergent als $B > 1$

Is $B = 1$ en nadert $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ van de grote kant tot 1, dan is de reeks divergent; nadert $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ van de kleine kant tot 1 dan geeft dit kenmerk (van d'Alembert in limietvorm) geen beslissing.
Bewijs dit.

108. Indien voor een reeks met positieve termen, de beide limieten

$$A = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{u_n} \text{ en } B = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

bestaan, dan is $A = B$.
Bewijs dit:

109. Bewijs dat de reeks:

$$\frac{a}{\sqrt{1}} + \frac{a^2}{\sqrt{2}} + \frac{a^3}{\sqrt{3}} + \frac{a^4}{\sqrt{4}} + \frac{a^5}{\sqrt{5}} + \ldots \qquad (a > 0)$$

convergeert voor $a < 1$ en divergeert voor $a \geqq 1$.

110, Bewijs dat de reeks:

$$\frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} \ldots\ldots$$

convergeert voor alle positieve waarden a.

111. Bewijs dat de reeks met algemene term:

$$u_n = n \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$$

convergent is.

112. Als van een reeks:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

met positieve termen, van zekere index af geldt:

$$u_{n+1} < u_n$$

dan is de reeks tegelijk convergent of divergent met de reeks:

$$u_1 + 2\,u_2 + 4\,u_4 + 8\,u_8 + \ldots\ldots$$

Bewijs dit.

113. Bewijs, dat de hyperharmonische reeks:

$$\frac{1}{1^p} + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots\ldots$$

convergeert voor $p > 1$ en divergeert voor $p \leqq 1$.

114. Bewijs dat de reeks:

$$\frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} \ldots\ldots$$

divergent is.

115. Bewijs dat de reeks (eerste reeks van Bertrand):

$$\frac{1}{2(\ln 2)^p} + \frac{1}{3(\ln 3)^p} + \frac{1}{4(\ln 4)^p} + \ldots\ldots$$

convergent is als $p > 1$ en divergeert als $p \leqq 1$.

116. Wat verstaat men onder een alternerende reeks? Bewijs, dat voor een alternerende reeks geldt de stelling:
Een alternerende reeks is convergent als de termen voor onbepaald toenemende waarden van n in absolute waarde monotoon tot nul naderen (*Leibniz*).

117. Bewijs dat de reeks:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\ldots$$

(alternerende harmonische reeks) convergent is.

118. Bewijs dat bij een convergente alternerende reeks, waarvan iedere term in absolute waarde groter is dan de volgende, de restterm R_n positief is ($S_n < S$) of negatief is ($S_n > S$) al naarmate S_n met een negatieve of een positieve term eindigt.
De restterm is in absolute waarde kleiner dan de eerste niet in S_n voorkomende term. Bewijs dit.

119. Wanneer zegt men dat een reeks met oneindig veel positieve en oneindig veel negatieve termen, *absoluut convergent* is en wanneer *relatief convergent*.
Bewijs dat een reeks convergent is als zij absoluut convergent is.

120. Is de reeks:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots\ldots$$

convergent? Absoluut convergent?

121. Is de reeks:

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\ldots\ldots$$

convergent? Absoluut of relatief convergent?

122. Onderzoek de reeks:

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sin n\,\alpha.$$

123. Evenzo de reeks:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\sin\frac{\alpha}{n}.$$

124. Evenzo de reeks:

$$u_n = \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

125. Past men bij een reeks met oneindig veel positieve en oneindig veel negatieve termen, op de reeks der absolute waarden, het convergentie-kenmerk (in limietvorm) van d'Alembert toe:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = B$$

of dat van Cauchy:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|} = A$$

dan is

voor $A < 1$ of voor $B < 1$ de reeks absoluut convergent

en

voor $A > 1$ of voor $B > 1$ de reeks divergent.

Bewijs dit:

126. Wat is een machtreeks? Pas de stelling van 125 toe op machtreeksen. Wat is het convergentie-interval bij een machtreeks? Men kan aannemen, dat de kenmerken van d'Alembert en Cauchy uitsluitsel geven.

127. Onderzoek de machtreeks:

$$u_n = \frac{x^n}{n}.$$

128. Onderzoek de reeks:

$$u_n = \frac{x^n}{2^n}.$$

129. Onderzoek de reeks:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\,.\,\sin\frac{\alpha}{n}\,.\,x^n$$

130. Onderzoek de reeks:

$$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n x^n$$

131. Bewijs dat de reeks:

$$1 - \frac{1}{2 \ln 2} + \frac{1}{3 \ln 3} - \frac{1}{4 \ln 4} + \ldots\ldots$$

relatief convergent is.

132. Onderzoek de reeks:

$$x + \frac{3\, x^2}{2\sqrt{2}} + \frac{3^2\, x^3}{3\sqrt{3}} + \frac{3^3 \,.\, x^4}{4\sqrt{4}} + \ldots\ldots$$

133. Onderzoek de machtreeks:

$$u_n = \frac{\cos n\pi}{n \ln n} \,.\, x^n \qquad (n \geqq 2)$$

134. Onderzoek de reeks:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \ldots\ldots$$

135. Eveneens de reeks:

$$\frac{\cos \pi}{\sqrt{2^3+1}} + \frac{\cos 2\pi}{\sqrt{3^3+1}} + \frac{\cos 3\pi}{\sqrt{4^3+1}} + \frac{\cos 4\pi}{\sqrt{5^3+1}} + \ldots\ldots$$

136. Eveneens de reeks:

$$1 + \tfrac{1}{2} \sin\left(-\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{1}{3} \sin \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} \sin\left(-\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{5} \sin \tfrac{1}{5} + \ldots\ldots$$

137. Onderzoek de machtreeks:

$$\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \frac{x^4}{4^2} + \ldots\ldots$$

138. Onderzoek de reeks:

$$\left(1 + \frac{p}{1}\right) + \left(1 + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{p}{3}\right)^3 + \ldots\ldots$$

139. Onderzoek de reeks:

$$\left|\sin \frac{x}{p}\right|^{3/2} + \left|\sin \frac{x}{p+1}\right|^{3/2} + \left|\sin \frac{x}{p+2}\right|^{3/2} + \ldots\ldots$$

140. Onderzoek de reeks:

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} + \frac{1}{e^{\sqrt{3}}} + \frac{1}{e^{\sqrt{4}}} + \ldots\ldots$$

141. Van een reeks wordt de n^e term gegeven door de formule:

$$u_n = \frac{(2x+1)^n}{\operatorname{arctg} e^n}$$

waarin het symbool arctg een hoek aanduidt, gelegen tussen 0 en $\frac{\pi}{2}$. Voor welke waarden van x is deze reeks convergent en voor welke divergent?

142. Onderzoek de reeks:

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n \ln n}{n^2 + 1}$$

en bewijs de gebruikte stelling.

143. Van een oneindige reeks is:

$$u_n = \frac{e^{n(x-x^2)}}{\ln(n+1)}$$

Voor welke waarden van x is deze reeks covergent en voor welke divergent?

144. Onderzoek voor welke reële waarden van x de volgende reeks convergeert:

$$\frac{e^x - 2}{1} + \frac{(e^x - 2)^2}{2} + \frac{(e^x - 2)^3}{3} + \frac{(e^x - 2)^4}{4} + \ldots\ldots$$

Bepaal voor het geval van convergentie de som van de reeks.

145. Van een reeks wordt de n^e term gegeven door de formule:

$$u_n = \frac{(-1)^{n-1}\, e^{\cos \frac{4n-3}{4}\pi}}{n}$$

a. Schrijf de eerste 6 termen der reeks op en vereenvoudig hen zoveel mogelijk.

b. Onderzoek of de reeks convergeert of divergeert.

146. Van een reeks is (voor iedere gehele positieve waarde van n) de som der eerste n termen bepaald door:

$$S_n = \left(1 + \sin \frac{a}{n}\right)^n$$

Onderzoek de convergentie dezer reeks.

147. Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots.$$

convergeert en bepaal voor die waarden haar som.

148. Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks:

$$1 + 2\frac{x}{x+1} + 3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 4\left(\frac{x}{x+1}\right)^3 + \ldots\ldots$$

convergeert en bepaal voor die waarden haar som.

149. Gegeven de reeks:

$$x + \frac{x^2\sqrt{2}}{2} + \frac{x^3\sqrt[3]{3}}{3} + \frac{x^4\sqrt[4]{4}}{4} + \frac{x^5\sqrt[5]{5}}{5} + \ldots\ldots$$

Voor welke waarden van x is deze reeks convergent en voor welke divergent?

150. Van een reeks is de algemene term:

$$u_n = \frac{x^n}{n+1} \sin \frac{a}{n}.$$

Onderzoek voor welke waarden van x de reeks convergent is en voor welke waarden divergent.

151. Onderzoek voor welke waarden van x de volgende reeks convergeert en voor welke zij divergeert:

$$\frac{1}{2^2} x^2 \sin \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3^2} x^3 . \sin \frac{\pi}{3} + \frac{3}{4^2} x^4 . \sin \frac{\pi}{4} + \ldots\ldots$$

152. Onderzoek voor welke waarden van x de reeks:

$$\frac{x}{1} + \frac{(2\,x)^2}{1!\,2!} + \frac{(3\,x)^3}{1!2!3!} + \frac{(4\,x)^4}{1!2!3!4!} + \ldots\ldots$$

convergeert.

153. Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks, waarvan de n^e term is:

$$u_n = \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} \cdot \sin \frac{a}{n} . x^n,$$

convergeert.

154. Van een reeks wordt de n^e term gegeven door de formule:

$$u_n = 2^{-n-\ln n} \mid \sin x \mid^{-n+\ln n}$$

Voor welke waarden van x is de reeks convergent en voor welke divergent?

155. Onderzoek voor reële waarden van x de machtreeks:

$$\frac{x}{1^2 . 3^2} + \frac{2\,x^2}{3^2 . 5^2} + \frac{3\,x^3}{5^2 . 7^2} + \frac{4\,x^4}{7^2 . 9^2} + \frac{5\,x^5}{9^2 . 11^2} + \ldots\ldots$$

156. Onderzoek (voor reële waarden van x) de reeks:

$$\frac{x}{1 . 2} - \frac{x^5}{3 . 2^2} + \frac{x^9}{5 . 2^3} - \frac{x^{13}}{7 . 2^4} + \frac{x^{17}}{9 . 2^5} - \frac{x^{21}}{11 . 2^6} + \ldots\ldots$$

157. Onderzoek (voor reële waarden van x) de reeks:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{2\,x^2} + \frac{1}{3\,x^3} - \frac{1}{4\,x^4} + \ldots\ldots$$

158. Onderzoek de reeks:

$$1 + e^x + e^{2x} + e^{3x} + e^{4x} + \ldots.$$

voor reële waarden van x op convergentie.

159. Eveneens voor reële waarden van x de reeks:

$$\frac{e^x}{1} + \frac{e^{2x}}{2} + \frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{4x}}{4} + \ldots\ldots$$

160. Eveneens de reeks:

$$\frac{e^x}{1^2} + \frac{e^{2x}}{2^2} + \frac{e^{3x}}{3^2} + \frac{e^{4x}}{4^2} + \ldots\ldots$$

161. Onder de *binomiaalreeks* verstaat men de machtreeks:

$$1 + \frac{p}{1}x + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \ldots.$$

Voor p gelijk nul of gelijk aan een natuurlijk getal is de reeks afbrekend.
Is p niet gelijk aan nul of aan een natuurlijk getal dan is:
als $-1 < x < 1$ de reeks absoluut convergent;
als $x > 1$ of $x < -1$ de reeks divergent.
Is $x = 1$ dan is de reeks divergent voor $p \leqq -1$
absoluut convergent voor $p > 0$
en relatief convergent voor $-1 < p < 0$.
Is $x = -1$ dan is de reeks divergent voor $p \leqq -1$
absoluut convergent voor $p > 0$
en divergent voor $-1 < p < 0$.
Ga dit na (Handleiding 54).

162. Onderzoek of de reeks:

$$u_n = \frac{\ln n}{n(n+1)}$$

convergent of divergent is.

163. Onderzoek de reeks:

$$u_n = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

op convergentie of divergentie.

164. Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks met de n^e term:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\, e^{n(x^2-4x+3)}.$$

convergeert en voor welke waarden van x zij divergent is.

6: *a*. Onderzoek voor welke reële waarden van x de reeks:

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$$

convergent is.

b. Bepaal voor die waarden de som van de reeks.

c. Bereken de som van $x = 1$ en $x = -1$.

166. Van een oneindig voortlopende reeks wordt de n^e term gegeven door de formule:

$$u_n = \frac{x^n}{n} \{2^{-n} + (-1)^n . 3^{-n}\}.$$

Onderzoek voor welke waarden van x de reeks convergeert en bepaal in het geval van convergentie de som van de reeks.

D. Complexe getallen.

167. Hoe definieert men de som, het verschil, het product en het quotient van twee complexe getallen?

168. Wat verstaat men onder twee toegevoegd complexe getallen? Wat is de som, het verschil, het product en het quotient van twee toegevoegd complexe getallen?

169. Wat verstaat men onder de commutatieve eigenschap der optelling en wat onder de associatieve eigenschap? Gelden deze eigenschappen voor complexe getallen?

170. Wat is de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging; de associatieve eigenschap en de distributieve eigenschap (ten opzichte van de optelling)?

171. Wat verstaat men onder een complex vlak? Hoe tekent men daarin de beeldpunten van complexe getallen? En hoe construeert men het beeldpunt van de som en van het verschil van twee complexe getallen als de beeldpunten van die getallen gegeven zijn?
Wat voor bijzonders hebben de beeldpunten van zuiver imagniaire getallen? Van twee toegevoegd complexe getallen? Van tegengestelde complexe getallen?

172. Wat is de modulus van een complex getal en wat het argument daarvan? Wat weet ge van de modulus van de som van twee getallen en van het verschil daarvan vergeleken met de som of het verschil der moduli dier getallen?

173. Bepaal modulus en argument van:
a. i; *b.* $1+i$; *c.* $1-i$; *d.* $2\pi i$; *e.* $-1+\frac{1}{3}i\sqrt{3}$;
f. $1-i\sqrt{3}$; *g.* -2; *h.* $-2-2i$.
Bewijs dat de modulus van het product van twee of meer complexe getallen gelijk is aan het product der moduli van de factoren en het argument aan de som der argumenten.
Hoe worden deze eigenschappen voor het quotient van twee complexe getallen?

174. Hoe construeert men het beeldpunt van het product en van het quotient van twee complexe getallen waarvan de beeldpunten gegeven zijn in een complex vlak?

175. Leid af de formule van *de Moivre*:

$$\{ r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \}^n = r^n(\cos n \varphi + i \sin n \varphi)$$

voor n geheel positief, voor n geheel negatief en voor n gebroken.

176. Leid uit de formule van de Moivre voor $r = 1$:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n \varphi + i \sin n \varphi$$

formules af voor $\cos 2 \varphi$, $\cos 3 \varphi$, $\cos 4 \varphi$, $\cos 5 \varphi$ en $\sin 2 \varphi$, $\sin 3 \varphi$, $\sin 4 \varphi$ en $\sin 5 \varphi$.

177. Los z op uit:

$$z^2 = i.$$

178. Evenzo uit:

$$z^3 = 1$$
$$z^3 = i$$
$$z^3 = -1$$
$$z^3 = -i$$
$$z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i).$$

179. Eveneens uit:

$$z^4 = 1$$
$$z^4 = -1$$
$$z^4 = i$$
$$z^4 = -i.$$

180. Los z op uit:

$$z^n = a + bi \quad (a + bi \neq 0),$$

waarin n een natuurlijk getal > 2 is, en toon aan dat de beeldpunten der wortels van deze vergelijking in een complex vlak hoekpunten zijn van een regelmatige n-hoek, waarvan het middelpunt in de oorsprong ligt.

181. Druk $\cos 5 \varphi + i \sin 5 \varphi$ uit in machten van $\sin \varphi$ en $\cos \varphi$. Leid daaruit een uitdrukking af voor $\operatorname{tg} 5 \varphi$ in de gedaante van een breuk, waarvan teller en noemer veeltermen in $\operatorname{tg} \varphi$ zijn.

182. Bewijs de formule van *Euler*:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

183. *a.* Toon aan, dat in het complexe vlak de beeldpunten van de wortels van de vergelijking:

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = 1 \quad (n \text{ geheel en } > 2)$$

de hoekpunten zijn van een regelmatige n-hoek.

b. Onder r_n verstaat men de straal van de grootste cirkel om de oorsprong waarbinnen geen van 0 verschillende wortel van de vergelijking ligt.
Bepaal $\lim_{n \to \infty} r_n$.

184. Men beschouwt in het complexe vlak $(z = x + y\,i)$ alle punten, waarvoor $x + y = 1$ is. Teken de meetkundige plaats van deze punten. Bepaal die punten van deze meetkundige plaats waarvoor de modulus van $\dfrac{2z+1}{z+1}$ een uiterste waarde heeft.

185. Leid af de formules:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos nx = \frac{e^{nix} + e^{-nix}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{nix} - e^{-nix}}{2i}$$

en leid met behulp hiervan af:

$$1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)x \,.\, \cos \frac{1}{2} nx}{\sin \frac{1}{2} x}$$

en

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \frac{1}{2}(n+1)x \,.\, \sin \frac{1}{2} nx}{\sin \frac{1}{2} x}$$

waarbij ondersteld is dat x geen veelvoud van 2π is

186. Leid af:

$$\cos ix = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$$

$$\sin ix = \frac{1}{2i}(e^{-x} - e^{x}) = i \operatorname{sh} x.$$

187. Eveneens:

$$\sin(x + iy) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y$$

$$\cos(x + iy) = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y$$

$$\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\sin 2x - i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y - \cos 2x}$$

$$\operatorname{cotg}(x + iy) = \frac{\sin 2x + i \operatorname{sh} 2y}{\operatorname{ch} 2y + \cos 2x}$$

188. Bewijs:

$$\operatorname{tg} iy = i \operatorname{th} y \quad \text{en} \quad \operatorname{cotg} iy = -i \operatorname{cth} y.$$

189. Evenzo:

$$\operatorname{ch} ix = \cos x, \quad \operatorname{sh} ix = i \sin x,$$

$$\operatorname{th} ix = i \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cth} ix = -i \operatorname{cotg} x.$$

190. Bewijs de formules:

$$\text{sh}\,(-x) = \text{sh}\,x, \quad \text{ch}\,(-x) = \text{ch}\,x,$$
$$\text{ch}^2\,x - \text{sh}^2\,x = 1, \quad \text{sh}\,2\,x = 2\,\text{sh}\,x\,\text{ch}\,x,$$
$$\text{ch}\,2\,x = \text{ch}^2\,x + \text{sh}^2\,x = 2\,\text{ch}^2\,x - 1 = 1 + 2\,\text{sh}^2\,x,$$
$$\text{sh}\,(a+b) = \text{sh}\,a\,\text{ch}\,b + \text{ch}\,a\,\text{sh}\,b,$$
$$\text{ch}\,(a+b) = \text{ch}\,a\,\text{ch}\,b + \text{sh}\,a\,\text{sh}\,b,$$
$$\text{tgh}\,(a+b) = \frac{\text{tgh}\,a + \text{tgh}\,b}{1 + \text{tgh}\,a\,\text{tgh}\,b}.$$

191. Bewsij: $\text{arcth}\,x = \frac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ $(-1 < x < 1)$.

192. Eveneens: $\text{arccth} = \frac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ $(x > 1$ of $< -1)$.

193. Bewijs de formules: $e^{2\pi i} = 1$ $e^{\pi i} = -1$ en $e^{\frac{1}{2}\pi i} = i$.

194. Leid af de formule:

$$\ln z = \ln r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \ln r + i(\varphi + 2\,k\,\pi). \quad (k \text{ geheel}).$$

195. Bewijs:

$$\ln 1 = 2\,\pi\,ki, \quad \ln e = 1 + 2\,\pi\,ki \quad \ln e^z = z + 2\,\pi\,ki$$

waarin k geheel.

196. Los op de vergelijking:

$$\cos(x + yi) = \frac{5}{4}.$$

197. Evenzo:

$$\sin(x + yi) = \frac{5}{4}.$$

198. Evenzo:

$$\cos(x + yi) = -\frac{4}{3}\,i.$$

199. Evenzo:

$$\sin(x + yi) = -\frac{4}{3}\,i.$$

200. Bewijs:

$$\text{arctg}\,z = \frac{1}{2\,i}\ln\frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

201. Als $Z = e^z$ en $z = x + iy$, welke figuur in het Z-vlak komt dan overeen met de kromme $y = \operatorname{arctg} x$ in het z-vlak?

202. Bepaal de Neperiaanse logarithme van

$$i - 1.$$

203. Men vraagt de reële getallen x en y te bepalen uit:

$$\cos(x + iy) = 3 + 4\,i.$$

204. Bepaal de waarden van:

$$z^{\ln z}$$

voor $z = -1$.

205. Vereenvoudig:

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2xi} - 1}{e^{2xi} + 1}$$

en bewijs de gebruikte eigenschap.

206. Bepaal de verschillende waarden van:

$$\ln(1 + z)$$

als gegeven is, dat $z^3 = 1$.

207. Bepaal alle waarden van:

$$\ln \ln z$$

indien $z = e^{\pi}$.

208. Druk $\cos 3\,\varphi + i \sin 3\,\varphi$ uit in machten van $\sin \varphi$ en $\cos \varphi$. Leid daaruit een uitdrukking af voor $\operatorname{cotg} 3\,\varphi$ in de gedaante van een breuk, waarvan teller en noemer veeltermen in $\operatorname{cotg} \varphi$ zijn.

209. Bepaal het reële en het imaginaire stuk van:

$$\ln \frac{1}{1 + e^{i\varphi}}$$

als φ een getal voorstelt. Teken voor het geval $0 < \varphi < \pi$ het getal

$$1 + e^{i\varphi}$$

in het complexe vlak en controleer op deze wijze uw uitkomst.

210. Bereken:

$$\lim_{n \to \infty} \left\{ 1 + \frac{2 + 5\,i}{n} \right\}^n$$

en teken het antwoord in het complexe vlak (n reëel).

211. Bepaal:

$$\lim_{z \to 0} \left(z \sin \frac{1}{z}\right)$$

in de gevallen:

a. z is reëel.

b. $z = iy$ wanneer y reëel is.

212. Bepaal het reële en imaginaire stuk van:

$$\frac{1}{1 - e^{i\delta}} \quad (\delta \text{ reëel, } 0 < \delta < \pi).$$

Bepaal ook modulus en argument van dat getal en bepaal het reële en imaginaire stuk van:

$$\ln \frac{1}{1 - e^{i\delta}}.$$

213. Teken in het complexe z-vlak de meetkundige plaats van de beeldpunten van de getallen z, waarvoor:

$$|z - 4 - 3i| = 5.$$

Bewijs dat voor die waarden van z het quotient

$$\frac{z - 6i}{z - 8}$$

een zuiver imaginair getal is.

214. *a.* Toon aan dat de vergelijking:

$$z^2 - 2pz + 3 = 0$$

twee imaginaire wortels heeft als p een reëel getal is, dat voldoet aan de ongelijkheid:

$$p^2 < 3.$$

b. Noem de beeldpunten van de wortels in het complexe vlak A en B. Beschrijf en teken de meetkundige plaats van A en B bij veranderlijke p.

c. Bepaal die waarden van p, waarbij A, B en O (de oorsprong) de hoekpunten zijn van een gelijkzijdige driehoek.

215. Toon aan dat voor alle complexe getallen $z (\neq 3)$ waarvoor:

$$|z - 1| = 2.$$

het quotient:

$$\frac{z + 1}{z - 3}$$

zuiver imaginair is.

216. Welke banen beschrijven in het complexe vlak de vier wortels van de vergelijking:

$$z^4 - 2\lambda z^2 + 1 = 0$$

als λ het reële interval $(-1, 1)$ doorloopt?

217. Men beschouwt in het complexe vlak ($z = x + yi$) alle punten waarvoor:

$$|z^2| = z.$$

Teken de meetkundige plaats van deze punten.
Bepaal die punten van deze meetkundige plaats, waarvoor de modulus van:

$$\frac{2z + 1}{z + 1}$$

een uiterste waarde heeft.

218. Wanneer $z = x + iy$ en $Z = \frac{1}{z}$ welke figuur in het Z-vlak komt dan overeen met de cirkel:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \qquad (R > 0)$$

in het z-vlak?

219. Is $w = u + vi$ en $z = x + yi$ en bestaat tussen w en z de betrekking:

$$w = z + b$$

waarin b een gegeven complex getal is, dan gaat een figuur in het z-vlak door een translatie (evenwijdige verschuiving) over in de corresponderende figuur in het w-vlak. Bewijs dit.
(Ondersteld wordt dat de complexe vlakken w en z met elkaar samenvallen, de positieve u-as langs de positieve x-as en de positieve v-as langs de positieve y-as).

220. Is:

$$w = az$$

waarin a een constant van 1 verschillend unimodulair complex getal is (dus $a = \cos\alpha + i \sin\alpha$ met α constant en reëel en geen veelvoud van 2π), dan ontstaat de met een figuur in het z-vlak corresponderende figuur in het w-vlak door een draaiing (rotatie) om de oorsprong O over een hoek α in positieve zin. Toon dit aan.

221. Door de betrekking

$$w = z(\cos\alpha + i \sin\alpha) + b$$

waarin α een reële constante is en geen veelvoud van 2π terwijl b een complexe constante is, wordt een figuur in het z-vlak omgezet in een figuur in het w-vlak. Bewijs dat dit een draaiing is over de hoek α om het punt

$$\tfrac{1}{2} b(1 + i \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\alpha).$$

E. Hogere-machtsvergelijkingen.

222. Deelt men een veelterm:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

door $x - p$, dan is de rest der deling gelijk aan $f(p)$. Bewijs dit.

223. Bewijs dat de vergelijking

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \qquad (a_0 \neq 0)$$

hoogstens n wortels heeft.

224. Bewijs dat een k-voudige wortel van een hogere machtsvergelijking $f(x) = 0$ tevens een wortel is van de vergelijkingen

$$f'(x) = 0, f''(x) = 0, \dots, f^{(k-1)}(x) = 0$$

maar niet van de vergelijking:

$$f^{(k)}(x) = 0.$$

225. Indien de coëfficiënten van een hogere machtsvergelijking reële getallen zijn, dan zijn de imaginaire wortels dier vergelijking twee aan twee toegevoegd. Bewijs dit.

226. Toon aan dat een vergelijking van oneven graad met reële coëfficiënten minstens één reële wortel heeft.

227. Zijn in de vergelijking:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

alle coëfficiënten $a_i (i = 1, 2 \dots n)$ gehele getallen, dan kan een gebroken getal geen wortel van de vergelijking zijn. Bewijs dit.

228. Is x_1 een gehele wortel van de vergelijking:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0$$

waarin de coëfficiënten gehele getallen zijn, dan is x_1 een deler van a_n. (met het + of het — teken). Toon dit aan.

229. Hoe leidt men uit de vergelijking:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

een nieuwe vergelijking of:

a. waarvan de wortels de tegengestelden zijn van die der gegeven vergelijking;

b. waarvan de wortels de omgekeerden zijn van die der gegeven vergelijking;
c. waarvan de wortels p-maal zo groot zijn als die der gegeven vergelijking;
d. de wortels k kleiner zijn dan die van de gegeven vergelijking.

230. Men kan uit een gegeven hogere machtsvergelijking een andere afleiden waarvan de wortels k kleiner zijn dan die van de oorspronkelijke vergelijking, door het eerste lid der op nul herleide vergelijking te te schrijven als een veelterm in $x - k$, dus door herhaalde deling door $x - k$. Toon dit aan.

231. Zijn $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ de wortels van de vergelijking:

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n = 0$$

dan is de som der wortels gelijk aan $-a_1$.
Evenzo is de som der producten der wortels twee aan twee gelijk aan $+a_2$, de som der producten der wortels drie aan drie gelijk aan $-a_3$ enz. en het product van alle wortels gelijk aan $(-1)^n a_n$. Bewijs dit.

232. Bewijs dat de wortels van de vergelijking:

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

een rekenkundige reeks vormen indien:

$$2p^3 - 9pq + 27r = 0$$

233. Aan welke betrekking moeten de coefficienten van de vergelijikng

$$x^3 + px + q = 0$$

voldoen op dat de beeldpunten van de wortels in het complexe vlak de hoekpunten van een gelijkbenige rechthoekige driehoek vormen.

234. Hoe kan men het theorema van Rolle gebruiken om bij een hogere machtsvergelijking met reële coefficienten het aantal reële wortels te bepalen?

235. Zo de vergelijking:

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

drie gelijke wortels heeft, voldoen de coëfficiënten a, b en c aan de voorwaarde:

$$b = \tfrac{1}{3}a^2, \quad c = \tfrac{1}{27}a^3$$

en omgekeerd.
Gevraagd dit te bewijzen.

Bewijs, verder dat de voorwaarde, die nodig en voldoende is ook aldus kan worden geschreven:

$$3\,b = a^2 \quad 9\,c = ab.$$

Kan de voorwaarde (met nodig en voldoende) ook als:

$$3\,ac = b^2,\ 9\,c = ab$$

worden geschreven?

236. Pas het theorema van Rolle toe op de vergelijking:

$$x^5 + 5\,x^3 - 20\,x + 2 = 0.$$

237. Gegeven de vergelijking:

$$x^3 - 3\,x^2 - 2 = 0.$$

Wat leert het theorema van Rolle over de wortels en de intervallen, waarin ze liggen?

238. Wat leert omtrent de wortels van de vergelijking:

$$x^3 - 6\,x^2 - 12\,x + 112 = 0$$

het theorema van Rolle?

239. Men beschouwt de vergelijking:

$$x^4 - 2\,x + k = 0.$$

Voor welke waarden van k heeft de vergelijking twee reële wortels, voor welke geen enkele?

240. Gegeven is de vergelijking:

$$2\,x^3 + 3\,kx^2 - 1 = 0.$$

Voor welke waarden van k heeft deze vergelijking twee gelijke wortels? Substitueer een dezer waarden van k in de vergelijking en los haar op.

241. Gegeven is de vergelijking:

$$x^5 + kx^4 + k = 0.$$

Bepaal voor elke reële waarde van k het aantal reële wortels van deze vergelijking.

242. Bepaal de meervoudige wortels van de vergelijking:

$$x^6 + 6\,x^5 - 48\,x^3 - 48\,x^2 + 96\,x + 128 = 0.$$

Los daarna de vergelijking volledig op.

243. Bepaal het aantal reële wortels van de vergelijking:

$$x - \ln(1 + x) = k$$

a. als $k > 0$.
b. als $k = 0$.
c. als $k < 0$.

244. Bepaal voor willekeurige reële waarden van k het aantal reële wortels van:

$$x^5 - 5x^3 + 10x + k = 0.$$

245. Voor welke waarden van k heeft:

$$x^4 + 2x^3 - 5x^2 + k = 0$$

een dubbele wortel?
Los voor die waarden van k de vergelijking volledig op.

246. Hoe luidt het theorema van Sturm?

247. Bewijs met behulp van het theorema van Sturm, dat de vergelijikng:

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 8 = 0$$

een reële wortel heeft tussen 3 en 4 en verder 2 imaginaire wortels.

248. Bewijs met behulp van het theorema van Sturm, dat de wortels van:

$$4x^3 + 27x^2 + 18x - 41 = 0$$

alle reëel zijn.

249. Wat verstaat men bij het benaderen van een wortel van een hogere machtsvergelijikng onder de „regula falsi"? Pas deze toe op de vergelijking:

$$x^3 + x^2 - 1 = 0.$$

250. Wat verstaat men onder de benaderingsmethode van Newton? Pas deze toe op de vergelijking:

$$x^3 + x^2 - 1 = 0.$$

251. Bepaal de eerste 3 cijfers achter de komma van de tiendelige breuk die de negatieve wortel van de vergelijking:

$$x^4 - 2x - 2 = 0$$

benadert.

A. DETERMINANTEN

1. Een permutatie is een manier, waarop men de n elementen in volgorde kan plaatsen. Bij de eerste plaatsing heeft men keus uit n mogelijkheden, bij de tweede plaatsing uit $n - 1$ enz.

2. Van de $n!$ pemutaties, die men krijgt door de k elementen eerst als verschillend beschouwen, worden er telkens $k!$ dezelfde.

3. Een inversie van een permutatie der elementen $1, 2, \ldots, n$ krijgt men, als een groter getal aan een kleiner voorafgaat (al of niet onmiddellijk). Een permutatie heet *even* of *oneven*, al naar gelang daarin een even of een oneven aantal inversies voorkomt.

4. Het aantal inversies wordt 1 groter of 1 kleiner, al naar gelang de twee elementen aanvankelijk niet of wel een inversie vormen.

5. Staan er k elementen tussen de twee elementen, die verwisseld worden, dan kan men die verwisseling tot stand brengen door $(2k + 1)$ maal achtereen twee opvolgende elementen te verwisselen.

6. Door van ieder der $n!$ permutaties de eerste twee elementen te verwisselen, gaat iedere permutatie van even in oneven over of omgekeerd. De stelling geldt alleen $n \geqq 2$ is.

7. Onder een variatie p aan p van n elementen verstaat men een daaruit gelichte groep van p, met inachtneming van de volgorde dier p elementen. De formule voor het aantal variaties wordt op dezelfde wijze bewezen als die voor het aantal permutaties.

8. Een combinatie p aan p van n elementen verschilt daarin van een variatie, dat niet op de volgorde wordt gelet. Daardoor vloeien $p!$ varaties tot één combinatie samen.

9. In de formule
$$(a + b_1) \ldots (a + b_n) = a^n + a^{n-1} \Sigma b_1 + \\ + a^{n-2} \Sigma b_1 b_2 + \ldots + b_1 b_2 \ldots b_n$$
bevat $\Sigma b_1 b_2 \ldots b_p$ een aantal termen, dat gelijk is aan C_n^p.

10. De formule volgt uit die voor C_n^p, maar ook door te letten op de elementen, die niet in de combinatie voorkomen.

11. Men lette op de formule voor C_n^p.

12. De formule (die ook geldt voor $n = 0$) volgt uit $(1 + 1)^n = 2^n$.

13. De formule volgt uit $(1-1)^n = 0^n$. Het laatste lid is 0 voor $n > 1$ en 1 voor $n = 0$.

14 en 15. n^2 in een vierkant gerangschikte getallen (elementen); n heet de *graad* van de determinant. Het vierkant bestaat uit n (horizontale) *rijen* en ook uit n (verticale) *kolommen*. Een *term* van de determinant ontstaat door uit iedere rij een element te nemen, geen twee uit eenzelfde kolom, en het product te vormen van die n elementen en $(-1)^k$. We rangschikken de factoren in de volgorde van de rijen, waaruit ze genomen zijn; k is dan het aantal kolom-inversies, d.w.z. inversies van de indices, die de rangnummers van de bijbehorende kolommen aangeven. De verschillende termen krijgt men door de kolom-indices op alle mogelijke manieren te permuteren, zodat er $n!$ termen zijn. De som dier termen is de *waarde* van de determinant.

16. Verwisselt men twee factoren van een term, dan verandert de som van het aantal der kolom-inversies en het aantal r der rij-inversies met een even bedrag (zie 5). Rangschikt men de factoren naar de kolommen, dan wordt $k = 0$, zodat dan r een even bedrag verschilt van het getal k van 14.

17. De *hoofddiagonaal* loopt van links-boven naar rechts-onder. Voor de bijbehorende term staat de factor 1. De *nevendiagonaal* loopt van rechtsboven naar links-onder. Voor de bijbehorende term staat:
$(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} = (-1)^{[\frac{1}{2}n]}$.

18. Men lette op 5.

19. Door verwissling der gelijke rijen of kolommen vindt men, dat de determinant D voldoet aan $D = -D$.

20. Alle termen van de uitgeschreven determinant worden met dat getal vermenigvuldigd.

21. Door een factor buiten het determinant-teken te brengen, kan men een determinant maken met twee gelijke rijen of kolommen.

22. Men kan de nieuwe determinant schrijven als de som van de oorspronkelijke determinant en een determinant, die volgens 21 de waarde 0 heeft.

23. In iedere term van de uitgeschreven determinant komt één der getallen $a_{p1}, a_{p2}, \ldots, a_{pn}$ als factor voor.

24. De som is te schrijven als een determinant met twee gelijke rijen of kolommen.

25. De *onderdeterminant* van het element a_{pq} ontstaat uit de oorspronkelijke determinant door de p^e rij en de q^e kolom te schrappen.

26. Men bewijze eerst $A_{11} = D_{11}$ en brenge het algemene geval hiertoe terug door $(p - 1)$-maal twee rijen en $(q - 1)$-maal twee kolommen te verwisselen.

27. Vermenigvuldig de eerste rij met a, de tweede met b en de derde met c enz.

28. Trek de eerste kolom van de tweede en van de derde af, deel daarna de tweede kolom door $x - y$ en de derde door $x - z$, trek vervolgens de tweede kolom van de derde af enz.

29. Trek de laatste kolom a-maal van de eerste af, b-maal van de tweede enz.

30. Beschouw z als veranderlijke en bewijs, dat de determinant 0 is voor $z = \pm(x + y)$ en voor $z = \pm(x - y)$. Let op de coëfficiënt van z^4.

31. Trek de eerste rij van de derde af en de tweede van de vierde enz.

32. Men lette op $O = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$ en op 30.

33. Vermenigvuldig de eerste kolom met $x\,y\,z$, de tweede met x, de derde met y en de vierde met z. Deel daarna de tweede rij door $y\,z$, de derde door $x\,z$ en de vierde door $x\,y$. Tel vervolgens de tweede kolom en (-1)-maal de derde kolom bij de vierde op enz.

34. De termen, die in a, b, c, d van lagere dan de derde graad zijn, hebben alle een coëfficiënt 0 (determinant met uitsluitend elementen 1).

35. De determinant is te schijven als een som van 2^3 determinanten. Deze zijn alle 0 (twee gelijke kolommen), op twee na, die gelijk zijn.

36. Beschouwt men d als veranderlijke en merkt men op, dat de determinant 0 is voor $d = a$, voor $d = b$ en voor $d = c$, dan blijkt (in verband met de coëfficiënt van d^3), dat de determinant gelijk is aan:

$$(d - a)(d - b)(d - c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

37. Voeg een laatste rij 1, x, x^3, x^4 toe en schuif een derde kolom a^2, b^2, c^2, d^2, x^2 tussen. De nieuwe determinant is dan:

$$(b - a) \ldots (d - c)(x - a)(x - b)(x - c)(x - d).$$

Rangschik dit naar machten van x en ontwikkel de nieuwe determinant naar de laatste rij. Let op de coëfficiënten van x^2.

38. Let bij de in 37 bedoelde identiteit op de coëfficiënten van x.

39. Trek de eerste rij van de tweede en van de derde af en deel daarna de tweede rij door $b - a$ en de derde door $c - a$. Trek vervolgens de tweede rij van de derde af enz.

40. Tel de eerste en de tweede kolom bij de derde op enz.

41. Schrijf de nieuwe determinant als een som van n^n determinanten door erop te letten, dat de elementen van een zelfde kolom n-termen zijn. Men kan bij ieder der n^n determinanten n factoren b buiten het determinant-teken brengen (gehaald uit de kolommen). Dan ontstaat telkens een determinant met twee gelijke kolommen op $n!$ determinanten na, die alle in absolute waarde gelijk zijn aan de a-determinant. De som der termen, waarmede deze vermenigvuldigd is, is de b-determinant.

42. Men kan Δ' definiëren als de determinant, die de coëffciënten A_{pq} van Δ tot elementen heeft. Uit de vermenigvuldig-regel van 41 (in verband met 23 en 24) volgt $\Delta \,.\, \Delta' = \Delta^{n-1}$.
Het is beter de reciproke determinant Δ' te definiëren als de determinant, waarvan het element uit de p^e rij en q^{de} kolom is $\frac{\Delta_{pq}}{\Delta}$, waarbij $\Delta \neq 0$ ondersteld wordt. Dan is $\Delta \,.\, \Delta' = 1$, terwijl Δ dan de reciproke determinant van Δ' is.

B. TOEPASSINGEN VAN DETERMINANTEN.

43. Er is één oplossing. Iedere onbekende is gelijk aan het quotiënt van twee determinanten. De determinant in de noemer is de determinant D van de coëffciënten der onbekenden. De determinant in de teller ontstaat uit D door de coëfficiënten van de bijbehorende onbekende te vervangen door de bekende termen.

44. Het schema der in een rechthoek gerangschikte coëfficiënten.

45. Een van 0 verschillende determinant van de hoogste graad uit de matrix.

46. Is $p = r$, dan volgt alles uit de regel van Cramer. Is $p > r$ en is er een vergelijking, waarbij een van 0 verschillende karakteristieke determinant behoort, dan wordt aan die vergelijking door geen enkele oplossing van de p bij de hoofddeterminant betrokken vergelijkingen voldaan. Aan een vergelijking, waarbij een karakteristieke determinant 0 behoort, wordt door iedere oplossing van de p vergelijkingen voldaan; die vergelijking kan dus worden weggelaten.

47. De determinant D der onbekenden is $(c - a)(a^2 - b^2)$. Eerste geval: $a \neq c$, $a^2 \neq b^2$. Eén oplossing $y = 0$, $x = z = \frac{1}{a+b}$. Tweede geval: $a = c$, $a^2 \neq b^2$. Dan $x + y = z = \frac{1}{a+b}$, x of y willekeurig. Derde geval: $a = c = b \neq 0$. Dan $x + y + z = \frac{1}{a}$, twee der onbekenden willekeurig. Vierde geval: $a + b = 0$. Geen oplossingen. Vijfde geval: $a = b \neq c$, $a \neq 0$. Dan $y = 0$, $x + z = \frac{1}{a}$, x of z willekeurig.

48. Eerste geval: a, b, c, d alle verschillend. Dan $x = y = z = w = 0$. Tweede geval: twee der getallen a, b, c, d gelijk, b.v. $c = d$, overigens verschillend. Dan $x = y = z + w = 0$, z of w willekeurig. Derde geval: drie der getallen a, b, c, d gelijk, b.v. $b = c = d \neq a$. Dan $x = y + z + w = 0$, twee der onbekenden y, z, w willekeurig. Vierde geval: $a = b = c = d$. Dan $x + y + z + w = 0$, drie der onbekenden willekeurig.

49. De determinant van het stelsel is (zie 40):
$$-\tfrac{1}{2}(a + b + c)\{(b - c)^2 + (c - a)^2 + (a - b)^2\},$$
dus alleen 0 als $a + b + c = 0$ of $a = b = c$.
Eerste geval: $a + b + c \neq 0$, a, b en c niet alle gelijk. Dan één oplos-

sing $x = 0$, $y = z = 1$, zoals men het snelst ziet door het stelsel aldus te schrijven:

$$ax + b(y - 1) + c(z - 1) = 0,$$
$$bx + c(y - 1) + a(z - 1) = 0,$$
$$cx + a(y - 1) + b(z - 1) = 0.$$

Tweede geval:: $a + b + c = 0$, a, b en c niet alle gelijk. Dan $x + 1 = y = z$, een der onbekenden willekeurig. Derde geval: $a = b = c \neq 0$. Dan $x + y + z = 2$, twee der onbekenden willekeurig Vierde geval: $a = b = c = 0$. Alle onbekenden willekeurig.

50. $A = 2, B = 3, C = 1$.

51. Men vindt A uit $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 5 & -A & 3 & 0 \\ A & 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0,$

dus $A = 7$ of $A = -\frac{12}{5}$. Voor $A = 7$ heeft het stelsel de oplossing $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ en voor $A = -{}^{12}/_5$ de oplossing $x = -{}^{45}/_2$, $y = {}^{55}/_4$, $z = {}^{53}/_2$.

52. Door de eerste en de tweede rij bij de derde op tellen, krijgt men: $(x + 3)(x^2 - 3x + 3) = 0$, dus $x = -3$, $x = {}^3/_2 \pm \frac{1}{2} i \sqrt{3}$.

53. Eerste geval: $m \neq 1$ en $m \neq -2$. Dan één opl. $x = -\dfrac{m + 1}{m + 2}$ $y = \dfrac{1}{m + 2}$, $z = \dfrac{(m + 1)^2}{m + 2}$. Tweede geval: $m = 1$. Dan $x + y + z = 1$, twee der onbekenden willekeurig. Derde geval: $m = -2$. Geen oplossingen.

54. a, b en c alle verschillend. Dan $x = abc$, $y = -(bc + ca + ab)$, $z = a + b + c$.

55. $a \neq c$. $a^2 \neq b^2$. Dan $x = y = \dfrac{1}{a + b}$, $z = 0$ (vergelijk 47).

56. Eerste geval: $a \neq c$, $a \neq b$. Eén oplossing $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{1} = \dfrac{t}{a + b}$. Tweede geval: $a = c$, $a \neq b$. Dan $x + y = z$; $t = (a + b)z$; de verhouding van x en y willekeurig. Derde geval $a = c = b$. Dan $t = a(x + y + z)$; de verhoudingen van x, y en z willekeurig. Vierde geval: $a = b \neq c$. Dan $y = 0$, $t = a(x + z)$; de verhouding van x en z willekeurig.

57. Eerste geval: $b \neq 0$. Dan is $\begin{vmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{vmatrix}$ een hoofddeterminant. Er zijn alleen oplossingen (en wel $y = \dfrac{3b - ax}{b}$, $z = \dfrac{a(1 - x)}{b}$, x willekeurig),

als $a + 3b = 5c$ en $b(c + 1) = 2a$ is. Men kan dan b.v. c en a in b uitdrukken en vindt:

$$c = \frac{7b}{10 - b},\ a = b\,\frac{3b + 5}{10 - b},\ y = 3 + \frac{3b + 5}{b - 10}\,x,\ z = \frac{3b + 5}{b - 10}\,(x - 1);$$

hierin kan men b willekeurig nemen, mits $\neq 0$ en $\neq 10$.
Tweede geval: $b = 0$, a en c niet beide 0. Geen oplossingen.
Derde geval: $a = b = c = 0$. Dan x, y en z willekeurig.

58. $(b - a)(c - a)(d - a)(c - b)(d - b)(d - c)(a + b + c + d) = 0$ (vergelijk 37).

59. Alle determinanten van de derde graad uit de matrix van de coëfficiënten der onbekenden zijn 0. Eerste geval: $b \neq 0$. Dan is $\begin{vmatrix} b & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}$ een hoofddeterminant. Het 0 stellen van de karakteristieke determinanten geeft:

$$a^3 - b^3 - c^3 = 0,\quad a^3 + c^3 - abc = 0.$$

Tweede geval: $b = 0$, $c \neq 0$. Dan is $\begin{vmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{vmatrix}$ een hoofddeterminant, terwijl de karakteristieke determinanten niet beide 0 zijn. Derde geval: $b = c = 0$. Er is dan alleen oplosbaarheid, als ook $a = 0$; dan zijn x, y en z willekeurig. Daar de in het eerste geval gevonden voorwaarde voor $b = 0$ in $a = c = 0$ overgaat, geldt die oplosbaarheidsvoorwaarde in alle gevallen.

60. De hoofddeterminant is van de graad 2, b.v. $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ (linker bovenhoek). Men vindt $z = {}^5/_7\,(2x + y)$, $u = {}^1/_7\,(9x + y)$, x en y willekeurig.

C. REEKSEN.

61. Een variant u_n is een functie van het natuurlijke getal n. Met $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u$ is bedoeld: Bij ieder positief getal ε behoort een zodanig positief getal N, dan voor iedere n, die $> N$, geldt $|u_n - u| < \varepsilon$.

62. u_n is monotoon stijgend of dalend, als voor iedere index n geldt $u_{n+1} > u_n$ resp. $u_{n+1} < u_n$. Blijft u_m beneden resp. boven een vast getal, dan heeft u_n een eindige limiet voor $n \to \infty$.

63 en 64. De somvariant $U_n = \sum\limits_{j=1}^{n} n_n$; u_n heet een term van de reeks. Deze heet convergent of divergent, als U_n wel resp. geen eindige limiet heeft voor $n \to \infty$. In geval van convergent heet die limiet de som van de reeks, terwijl U_n een gedeeltelijke som genoemd wordt.

65. De somvariant is $n\,a + \frac{1}{2}n(n-1)v$. Deze heeft voor $n \to \infty$ alleen dan een limiet, als $v = 0$ en $a = 0$ is, dus als alle termen van de reeks 0 zijn.

66. Is $r \neq 1$, dan is de somvariant a $\dfrac{r^n - 1}{r - 1}$. Daar r^n alleen een limiet heeft (nl. 0) als $|r| < 1$ (steeds in de onderstelling $r \neq 1$), is de reeks alleen convergent voor $|r| < 1$ (daar de reeks voor $r = 1$ divergeert). In geval van convergentie is de som van de reeks $\dfrac{a}{1 - r}$.

67. Een reeks heet schommelend, als $|U_n|$ beneden een vast getal blijft (naar boven begrensd is), zonder een limiet te hebben voor $n \to \infty$. Een voorbeeld is $\sum\limits_{j=1}^{\infty} (-1)^j \; (-1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots)$.

68. Vermenigvuldig met $1 - 2r + r^2$. Is $|r| < 1$, dan $|r| = \dfrac{1}{1+k}$ $(k > 0)$ en

$$n\,|r|^n = \frac{n}{(1+k)^n} \leqq \frac{n}{1 + nk + \frac{1}{2}n(n-1)k^2} < \frac{2}{(n-1)k^2}\ (n \geqq 2),$$

dus $\lim\limits_{n \to \infty} nr^n = 0$.

Is $|r| \geqq 1$, dus $|r| = 1 + k (k \geqq 0)$, dan is $n\,|r|^n = n(1+k)^n \geqq n$ en dus (als $r \neq 1$): $\lim\limits_{n \to \infty} (n\,r^{n+2} - n\,r^{n+1} - r^{n+1}) =$

$$= \lim_{n \to \infty} n\,r^{n+1}\left(r - 1 - \frac{1}{n}\right) = \infty.$$

Bijgevolg is de reeks convergent voor $|r| <|$ en divergent voor $|r| \geqq 1$; volgens 65 geldt dit ook voor $r = 1$.

69. De formule voor S_n volgt uit $\dfrac{1}{j(j+1)} = \dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{j+1}$.

70. Uit $\dfrac{1}{(2j-1)(2j+1)} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2j-1} - \dfrac{1}{2j+1}\right)$

volgt $S_n = \frac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right)$.

71. Dit volgt uit $S_n = \dfrac{1}{v}\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a+nv}\right)$.

72. Uit $\dfrac{1}{j(j+2)} = \frac{1}{2}\left(\dfrac{1}{j} - \dfrac{1}{j+2}\right)$

volgt $S_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}\right)$.

73. Dit volgt uit $S_n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}\right)$.

74. Uit $u_j = e^{\frac{1}{j}} - e^{\frac{1}{j+1}}$ volgt $S_n = e - e^{\frac{1}{n+1}}$.

75. $e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix} + \ldots + e^{nix} = \dfrac{e^{\frac{1}{2}ix} - e^{(n+\frac{1}{2})ix}}{e^{-\frac{1}{2}ix} - e^{\frac{1}{2}ix}}$.

Alleen convergent voor $x = 2k\pi$.

76. Uit de formule van 75 volgt $S_n = \dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x} - \frac{1}{2}$ als $x \neq 2k\pi$ (k geheel). Dan heeft $\sin(n+\frac{1}{2})x$ geen limiet. Voor $x = 2k\pi$ is de reeks $(1 + 1 + \ldots)$ eveneens divergent.

77. Slaat U_n op de oorspronkelijke en V_n op de nieuwe reeks, dan is

$V_n = U_{n+k} - U_k$ (k het aantal weggelaten termen).

78. $u_n = U_n - U_{n-1}$. Is de reeks convergent, dan is

$$\lim_{n\to\infty} U_n = U = \lim_{n\to\infty} U_{n-1}.$$

79. $\dfrac{1}{2^n+1} + \dfrac{1}{2^n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2^{n+1}}$ (2^n termen) $> 2^n \cdot \dfrac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$.

80. Dit volgt uit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

81. Men lette op 78.

83. Dit volgt uit $\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{n}$ $(n > 1)$ en 79.

84. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{5n-4}} = e^{1/5}$. De n^e term is

$$\left(1 + \frac{1}{5n-4}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{5n-9}\right)^{n-1} \quad (n \geqq 2).$$

De eerste drie termen zijn $2 + \left(-\dfrac{23}{36}\right) + \left(\dfrac{1728}{1331} - \dfrac{49}{36}\right)$.

85. Uit $S_n = e^{\frac{1}{2n}\ln n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{1}{n}}$ volgt $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 1$, zodat de reeks convergeert.

86. Uit $S_n = \dfrac{1 + n \,.\, 2^{-n}}{2 + 3n \,.\, 2^{-n}}$ volgt $\lim S_n = \frac{1}{2}$.

Verder is $u_n = \dfrac{2^{n-1}(n-2)}{(2^{n+1} + 3n)(2^n + 3n - 3)}$

$(n \geqq 2)$. De begintermen zijn $\frac{3}{7} + 0 + \frac{2}{175} + \frac{4}{175}$.

87. *a.* Door begintermen weg te laten (zie 77), kan men bereiken, dat $u_n \leqq v_n$ voor iedere n geldt. Dan is $U_n \leqq V_n < V$; de stijgende variant U_n heeft dus een limiet voor $n \to \infty$. *b.* Men lette op $U_n \geqq V_n$ of redenere uit het ongerijmde.

88. Men lette op 87.

89. Van zeker rangnummer af is $\frac{1}{2} C < \dfrac{u_n}{v_n} < C + 1$.

90. We kunnen weer aannemen, dat de ongelijkheden voor iedere n gelden. (zie 77). Uit de ongelijkheden volgt dan door vermenigvuldiging $u_n \leqq \dfrac{u_1}{v_1} v_n$ resp. $u_n \geqq \dfrac{u_1}{v_1} v_n$. Zie verder 87.

91. Men lette op $|\sin 2^n \alpha| \leqq 1$ en 87.

92. Men lette op $\dfrac{1}{n^p} \geqq \dfrac{1}{n}$ en op 79 en 87.

93. Men lette op $\dfrac{1}{n_p} \leqq \dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n(n-1)}$ en op 79 en 87.

94. Dit volgt uit $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{\frac{1}{n}} = L$, in verband met 79 en 89.

95. Dit volgt uit $\dfrac{1}{n\,|\sin n\alpha|} \geqq \dfrac{1}{n}$.

96. Van zeker rangnummer af is $\operatorname{tg} \dfrac{\alpha}{n} > 0$. Verder is $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{n}}{\frac{1}{n}} = \alpha$.

97. Het bewijs is dat van 96.

98 en 99. Van zeker rangnummer af zijn de termen positief. Verder is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{a}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = a, \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{a}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = a.$$ Men lette op 93.

100. Men lette op $\lim_{n\to\infty} n\,u_n = \frac{1}{3}$ en 94.

101. Van zeker rangnummer af is $u_n > \frac{1}{n}$.

102. Van zeker rangnummer af zijn de termen negatief en in absolute waarde $> \frac{1}{n}$.

103. Men lette op $\lim_{n\to\infty} n\,u_n = \frac{1}{2}$.

104. Uit de eerste ongelijkheid volgt $u_n \leqq r^n$ $(r < 1)$ en uit de tweede ongelijkheid $u_n \geqq 1$. Men lette op 66 en 78.

105. Is $A < 1$, dan is van zeker rangnummer af $\sqrt[n]{u_n} < \frac{1}{2}(A+1)$. Is $A > 1$ of $A = 1$, terwijl de limiet van de grote kant genaderd wordt, dan is $\sqrt[n]{u_n} > 1$. Zie verder 104.

106. Men schrijve de eerste ongelijkheid als $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqq \frac{r^{n+1}}{r^n}$ en lette op 78 en 90.

107. Dit is tot 106 terug te brengen (vergelijk 105).

108. Is bv. $A < B$ en $A < p < B$, dan is de reeks met algemene term $\frac{u_n}{p^n}$ volgens het kenmerk van Cauchy convergent en volgens dat van d'Alembert divergent.

109. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$. Voor $a = 1$ zie 83.

110. $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

111. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} \sqrt[n]{n} = 1$.

112. We kunnen weer aannemen, dat de ongelijkheid voor iedere n geldt (zie 77). Men heeft dan:

$$u_2 + u_3 < 2\,u_2 < 2\,u_1$$
$$u_4 + u_5 + u_6 + u_7 < 4\,u_4 < 2(u_2 + u_3)$$
$$u_8 + u_9 + \ldots + u_{15} < 8\,u_8 < 2(u_4 + u_5 + u_6 + u_7)$$
$$u_{16} + u_{17} + \ldots + u_{31} < 16\,u_{16} < 2(u_8 + u_9 + \ldots + u_{15}) \text{ enz.}$$

113. Is $u_n = \frac{1}{n^p}$, dan $2^n u_{2^n} = \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^n$. Men lette op 66 en 112.

114 en 115. Is $u_n = \frac{1}{n(\ln n)^p} (n \geqq 2)$, dan $n^n u_{2^n} = \frac{1}{(n \ln 2)^p}$. Men lette op 112 en 113.

116. Alternerend wil zeggen, dat de termen afwisselend positief en negatief zijn. Is de reeks $t_1 - t_2 + t_3 - t_4 + \ldots$, waarin t_1, t_2 t_3 enz. positief zijn, dan is:

$$S_{2n} = (t_1 - t_2) + (t_3 - t_4) + (t_5 - t_6) + \ldots + (t_{2n-1} - t_{2n}) =$$
$$= t_1 - (t_2 - t_3) - (t_4 - t_5) - \ldots - (t_{2n-2} - t_{2n-1}) - t_{2n},$$

zodat S_{2n} een stijgende variant is, die beneden t_1 blijft en dus een limiet heeft voor $n \to \infty$. Uit $S_{2n+1} = S_{2n} + t_{2n+1}$ en $\lim\limits_{n \to \infty} t_n = 0$ volgt $\lim\limits_{n \to \infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n \to \infty} S_{2n}$.

117. Men lette op 116.

118. Uit $S_{2n+1} = t_1 - (t_2 - t_3) - (t_4 - t_5) - \ldots - (t_{2n} - t_{2n+1})$ blijkt, dat S_{2n+1} een dalende variant is. In verband met het stijgen van S_{2n} (zie 116) volgt hieruit $S_{2n} < S < S_{2n+1}$. Hieruit volgt:

$$0 < R_{2n} = S - S_{2n} < S_{2n+1} - S_{2n} = t_{2n+1}.$$

Uit $S_{2n} < S < S_{2n-1}$ volgt

$$0 < -R_{2n-1} = S_{2n-1} - S < S_{2n-1} - S_{2n} = t_{2n}.$$

119. Een reeks heet *absoluut convergent,* als de reeks van de absolute waarden der termen convergeert. Is de reeks van de absolute waarden divergent, maar de reeks zelf convergent, dan heet deze laatste *relatief convergent.* Is P_n de som van de positieve termen voorkomende onder de eerste n termen en N_n de som van de absolute waarden der daaronder voorkomende negatieve termen, dan is $P_n + N_n$ de som der moduli van de eerste n termen. Heeft die som dan een limiet L, dan is $P_n < L$ en $N_n < L$, zodat de stijgende (of in elk geval niet-dalende) varianten P_n en N_n eindige limieten P resp. N hebben. De som $P_n - N_n$ van de eerste n termen van de oorspronkelijke reeks heeft dus voor $n \to \infty$ de limiet $P - N$.

120. De reeks is absoluut convergent (zie 66).

121. De reeks is relatief convergent (zie 79 en 116).

122. Absoluut convergent (zie 93 of 113).

123. Absoluut convergent; $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{|u_n|}{n^2} = |a|$.

124. Relatief convergent. Men verdele de termen in groepen van vier. De eerste groep bevat 3 positieve termen en een term 0, de tweede groep 3

(absoluut kleinere) negatieve termen en een term 0 enz. Men lette verder op $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

125. Uit $A > 1$ volgt $|u_n| > 1$ en uit $B > 1$ volgt $|u_{n+1}| > |u_n|$ (van zekere index af) zodat niet voldaan is aan $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$.

126. Een machtreeks is een reeks van de vorm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, waarin x veranderlijk is. Is $\lim\limits_{n \to} \sqrt[n]{|a_n|} = A$ of $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = B$, dan is de reeks absoluut convergent voor $|x| < \frac{1}{A}$ resp. $|x| < \frac{1}{B}$ en divergent voor $|x| > \frac{1}{A}$ resp. $|x > \frac{1}{B}$ (zie 125). Het convergentiegebied is dus (als x reëel is) een interval met $x = 0$ als midden, zonder of met de eindpunten of met één eindpunt van het interval. Is $A = 0$ resp. $B = 0$, dan is de reeks voor iedere x convergent. Is $A = \infty$ resp. $B = \infty$, dan is de reeks alleen convergent voor $x = 0$.

127. Absoluut convergent voor $|x| < 1$, relatief convergent voor $x = -1$, divergent voor $x \geqq 1$ en voor $x < -1$.

128. Absoluut convergent voor $|x| < 2$, divergent voor $|x| \geqq 2$ (meetkundige reeks).

129. Is $\alpha = 0$, dan is de reeks convergent voor iedere x. Is $\alpha \neq 0$, dan is de reeks volgens 125 absoluut convergent voor $|x| \leqq 1$ en divergent voor $|x| > 1$. De absolute convergentie voor $|x| = 1$ volgt uit 113, in verband met $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\left|\sin \frac{\alpha}{n}\right|}{\frac{1}{n}} = |\alpha|$.

130. Uit $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \dfrac{1}{e}$ volgt, dat de reeks absoluut convergeert voor $|x| < 1$ en divergeert voor $|x| \geqq 1$.

131. Dit volgt uit 114 en 116.

132. Absoluut convergeert voor $|x| \leqq {}^1/_3$, divergent voor $|x| > {}^1/_3$ (zie 113).

133. Uit $u_n = (-1)^n \dfrac{x^n}{n \ln n}$ blijkt, dat de reeks absoluut convergeert voor $|x| < 1$, relatief convergeert voor $x = 1$ en divergeert voor $x > 1$ en voor $x \leqq -1$ (zie 114).

134. Relatief convergent.

135. Absoluut convergent (zie 113 met $p = {}^3/_2$).

136 en 137. Absoluut convergent.

138. Divergent wegens $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^p$.

139. Convergent voor iedere x (zie 113 met $p = {}^3/_2$).

140. Uit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{\ln n} = +\infty$ volgt, dat van zeker rangnummer af $\sqrt{n} > 2 \ln n$ dus $e^{\sqrt{n}} > e^{2 \ln n} = n^2$. De reeks is dus convergent (zie 93 of 113).

141. Daar $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} e^n = \frac{1}{2}\pi$ is de reeks absoluut convergent voor $|2x+1| < 1$ (dus $-1 < x < 0$) en divergent voor $|2x+1| \geqq 1$.

142. Van $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x^2+1}$ is de afgeleide negatief, als x boven zeker bedrag ligt. Bijgevolg is $f(n)$, op de duur afnemend. Daar $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = 0$, is de reeks relatief convergent (zie 116). Blijkens $f(n) > \dfrac{1}{n}$ voor $n \geqq 2$ is nl. de reeks der moduli divergent.

143. Uit $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{x-x^2} \left(1 + \dfrac{\ln \dfrac{n+1}{n+2}}{\ln(n+2)}\right) = e^{x-x^2}$ volgt, dat de reeks absoluut convergeert voor $x - x^2 < 0$ (dus $x < 0$ of $x > 1$) en divergeert voor $x - x^2 \geqq 0$. Voor $x - x^2 = 0$ is nl. $u_n > \dfrac{1}{n}$.

144. Absoluut convergent voor $|e^x - 2| < 1$, dus $0 < x < \ln 3$, relatief convergent voor $x = 0$, overigens divergent. Voor $0 \leqq x < \ln 3$ is de som $-\ln(3 - e^x)$.

145. Blijkens $u_n = (-1)^{n-1} e^{(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}$ is de reeks:

$$\frac{1}{1} e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{3} e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} + \frac{1}{5} e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - \frac{1}{6} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} + \ldots$$

Neemt men de termen 2 aan 2 samen, dan krijgt men de algemene term:

$$\frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}}}{2n-1} - \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}}}{2n} = e^{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} \frac{2n(e^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} - 1) + 1}{2n(2n-1)},$$

waaruit blijkt, dat de reeks divergeert (zie 79).

146. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} n \sin \frac{a}{n}} = e^a$. De reeks is dus convergent.

147. Absoluut convergent voor $|x| < 1$, divergent voor $x \geqq 1$. Door vermenigvuldiging met $1 - 2x + x^2$ vindt men voor de som:

$$\frac{1}{(1-x)^2} \quad (|x| < 1).$$

148. Absoluut convergent voor $-1 < \frac{x}{x+1} < 1$, dus $x > -\frac{1}{2}$. De som is dan $(x+1)^2$ (zie 147). Divergent voor $x \leqq -\frac{1}{2}$.

149. Daar $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, is de reeks absoluut convergent voor $|x| < 1$ en divergent voor $x \geqq 1$ en voor $x < -1$. Voor $x = -1$ is de reeks relatief convergent; men bewijze hiervoor, dat de functie $x^{\frac{1}{x}}$ afneemt als $x > 1$.

150. Is $a = 0$, dan absoluut convergent voor iedere x. Is $a \neq 0$, dan absoluut convergent voor $|x| \leqq 1$ en divergent voor $|x| > 1$.

151. Absoluut convergent voor $|x| \leqq 1$, divergent voor $|x| > 1$.

152. Absoluut convergent voor iedere x blijkens $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{x}{n!}$.

153. Dezelfde resultaten als bij 150.

154. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = |2 \sin x|^{-1} \cdot |\frac{1}{2} \sin x|^{\ln \frac{n+1}{n}}$. Absoluut convergent voor $|\sin x| > \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{6}\pi + g\pi < x < \frac{5}{6}\pi + g\pi$, g geheel), divergent voor $|\sin x| < \frac{1}{2}$. Voor $|\sin x| = \frac{1}{2}$ is $u_n = 2^{-2\ln n} = \frac{1}{n^{\ln 4}}$, dus convergent (wegens $4 > e$).

155. Absoluut convergent voor $|x| \leqq 1$, divergent voor $|x| > 1$.

156. Absoluut convergent voor $|x| < \sqrt[4]{2}$, relatief convergent voor $|x| = \sqrt[4]{2}$, divergent voor $|x| > \sqrt[4]{2}$.

157. Absoluut convergent voor $|x| > 1$, relatief convergent voor $x = 1$, overigens divergent.

158 en 159. Convergent voor $x < 0$, divergent voor $x \geqq 0$.

160. Convergent voor $x \leqq 0$, divergent voor $x > 0$.

161. Uit $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\left(1 - \frac{p+1}{n}\right) x$ (p niet 0 en geen natuurlijk getal) blijkt, dat de reeks absoluut convergeert voor $|x| < 1$ en divergeert voor $|x| > 1$. Is $|x| = 1$ en $p \leqq -1$, dan is $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqq 1$, dus de reeks divergent. Is $|x| = 1$, dan volgt uit $n\left(1 - \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\right) = p + 1$, dat de reeks alleen absoluut convergeert als $p > 0$ (kenmerk van Raabe). Is $x = -1$

en $-1 < p < 0$, dan zijn de termen alle positief en is de reeks divergent. Voor $x = 1$ en $-1 < p < 0$ is de reeks alternerend en nemen de termen in absolute waarde af blijkens $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\left(1 - \frac{p+1}{n}\right)$.
Volgens $1 - \delta^2 < 1$ $(\delta > 0)$ is dan:

$$|u_{n+1}| = \left(1 - \frac{p+1}{1}\right)\left(1 - \frac{p+1}{2}\right)\left(1 - \frac{p+1}{3}\right)\cdots\left(1 - \frac{p+1}{n}\right) <$$

$$< \frac{1}{\left(1 + \frac{p+1}{1}\right)\left(1 + \frac{p+1}{2}\right)\cdots\left(1 + \frac{p+1}{n}\right)} < \frac{1}{(p+1)\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right)}.$$

Volgens 79 is dus $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$, zodat de reeks relatief convergent is (zie 116).

Opmerking. Het kenmerk van Raabe voor een reeks met positieve termen u_n luidt: Is (van zeker rangnummer af) $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > k (k > 1)$, dan is de reeks convergent, is $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \leqq 1$, dan is de reeks divergent. Uit de eerste ongelijkheid volgt:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \frac{k}{n} < \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \frac{\frac{1}{n^k}}{\frac{1}{(n-1)^k}},$$

waaruit men in verband met 90 en 113 tot convergentie besluit. Uit tweede in het kenmerk genoemde ongelijkheid volgt:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 - \frac{1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}},$$

waaruit in verband met 79 en 90 divergentie volgt.
Bij dit bewijs is gebruik gemaakt van de ongelijkheid

$$1 - kx < (1-x)^k \quad (x < 1, x \neq 0, k > 1).$$

Om deze ongelijkheid te bewijzen, beschouwen we de functie: $f(x) = (1-x)^k - 1 + kx$. Uit $f'(x) = -k(1-x)^{k-1} + k$ volgt $f'(x) < 0$ voor $x < 0$ en $f'(x) > 0$ voor $x > 0$. Neemt x toe van $-\infty$ tot 1, dan neemt $f(x)$ af tot 0 voor $x = 0$, om vervolgens toe te nemen. Hieruit blijkt, dat $f(x) > 0$ voor $x \neq 0$.

162. Uit $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$, volgt $\ln n < \sqrt{n}$ van zekere index af. Hieruit volgt, dat de reeks convergeert.

163. Uit $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{u_n}{\dfrac{1}{n \ln n}}$ volgt, dat de reeks divergeert (zie 114).

164. De reeks convergeert voor $x^2 - 4x + 3 < 0$ (dus $1 < x < 3$) en divergeert voor $x^2 - 4x + 3 \geqq 0$.

165. De reeks convergeert absoluut voor $|x| \leqq 1$ en divergeert voor $|x| > 1$. Is $-1 \leqq x < 1$, dan is de som der reeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1.$$

Voor $x = -1$ is die som $1 - \ln 4$. Voor $x = 1$ is de som:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1-x}{x} \ln(1-x) + 1 = 1;$$

dit is ook rechtstreeks te zien (zie 69).

166. Uit $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n \left\{1 + (-1)^n \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right\}$ blijkt $\lim \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{2}|x|$. De deeks is dus absoluut convergent voor $|x| < 2$, divergent voor $x \geqq 2$ en voor $x < -2$. Zoals door splitsing in twee reeksen blijkt, is de reeks relatief convergent voor $x = -2$. De som van de reeks in geval van convergentie is:

$$-\ln(1 - \tfrac{1}{2}x) - \ln(1 + \tfrac{1}{3}x) = -\ln\left(1 - \frac{x + x^2}{6}\right).$$

D. Complexe getallen.

167. Voorlopig is een complex getal één paar (a, b) reële getallen.
Men definieert:
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,
$$(a, b) \times (c, d) = (ac - bd, ad + bc), \ (a, 0) = a.$$
Schrijft men ter afkorting $(0, 1) = i$, dan is $(a, b) = a + bi$ en $i^2 = -1$.
Aftrekking en deling worden (als steeds) gedefinieerd als omkering van optelling en vermenigvuldiging. Dit geeft:
$$(a + b\,i) - (c + d\,i) = (a - c) + (b - d)i,$$
$$\frac{a + b\,i}{c + d\,i} = \frac{(a + b\,i)(c - d\,i)}{(c + d\,i)(c - d\,i)} = \frac{(a\,c + b\,d) + (b\,c - a\,d)i}{c^2 + d^2}.$$

168. $a + b\,i$ en $a - b\,i$ heten toegevoegd,
$$(a + b\,i) + (a - b\,i) = 2a, \qquad (a + b\,i) - (a - b\,i) = 2\,b\,i,$$
$$(a + b\,i)(a - b\,i) = a^2 + b^2, \qquad \frac{a + bi}{a - bi} = \frac{(a^2 - b^2) + 2\,a\,b\,i}{a^2 + b^2}.$$

169. Voor complexe getallen geldt:
$\alpha + \beta = \beta + \alpha$ (commutatieve eigenschap)
$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ (associatieve eigenschap).

170. Voor complexe getallen gelden:
$\alpha \beta = \beta \alpha$ (commutatieve eigenschap),
$(\alpha \beta)\gamma = \alpha(\beta \gamma)$ (associatieve eigenschap),
$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha \gamma + \beta \gamma$ (distributieve eigenschap).

171. Het complexe vlak is het vlak, waarop men de complexe getallen afbeeldt. Het beeldpunt P van $a + b\,i$ is het punt met rechthoekige coördinaten a en b. Ook wordt $a + b\,i$ afgebeeld door de vector OP (waarin O de oorsprong, beeldpunt van het getal 0, is) en ook door een vector, die uit OP door evenwijdige verschuiving ontstaat. Het beeldpunt van $\alpha + \beta$ krijgt men door een bij β behorende vector aan te brengen, die het beeldpunt van α tot beginpunt heeft; het uiteinde van die vector is dan het beeldpunt van $\alpha + \beta$. Het verschil $\alpha - \beta$ wordt afgebeeld door de vector, die het beeldpunt van β tot beginpunt en dat van α tot eindpunt heeft. Door die vector met beginpunt naar O te verschuiven, krijgt men het beeldpunt van $\alpha - \beta$.
Een zuiver imaginair getal heeft zijn beeldpunt op de imaginaire as (de coördinaatas, waarop de i-coëfficiënten worden uitgezet), maar niet

in O. Beeldpunten van toegevoegd complexe getallen zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. de reële as; beeldpunten van tegengestelde getallen zijn elkaars spiegelbeeld t.o.v. O.

172. Onder de modulus $|a + bi| = r$ van $a + bi$ verstaat men $\sqrt{a^2 + b^2}$, de afstand van O tot het beeldpunt A van $a + bi$ (lengte van de vcetor, die $a + bi$ afbeeldt). Het argument φ van het (van 0 verschillende) complexe getal is de hoek, die men de positieve reële as (x-as) in positieve zin (die der draaiing van de positieve x-as door de rechte hoek naar de positieve imaginair as) moet draaien om langs OA te vallen, dus een hoek, die aan $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$ voldoet. Het complexe getal heeft oneindig veel argumenten, die onderling een veelvoud van 2π (360°) verschillen. Men heeft $|\alpha + \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$ (waarbij het gelijkteken alleen geldt) als de argumenten van α en β gelijk zijn (steeds van een veelvoud van 2π afgezien) $|\alpha + \beta| \geqq |\alpha| - |\beta|$ en $\geqq |\beta| - |\alpha|$. Dezelfde ongelijkheden gelden voor $|\alpha - \beta|$.

173. a. $|i| = 1$, $\arg i = \frac{1}{2}\pi$. b. $|1 + i| = \sqrt{2}$, $\arg (1 + i) = \frac{1}{4}\pi$.
c. $|1 - i| = \sqrt{2}$, $\arg (1 - i) = -\frac{1}{4}\pi$. d. $|2\pi i| = 2\pi$,
$\arg. 2\pi i = \frac{1}{2}\pi$.
e. $|-1 + \frac{1}{3} i\sqrt{3}| = \frac{2}{3}\sqrt{3}$, $\arg (-1 + \frac{1}{3} i\sqrt{3}) = \frac{5}{6}\pi$.
f. $|1 - i\sqrt{3}| = 2$, $\arg (1 - i\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}\pi$.
g. $|-2| = 2$, $\arg (-2) = \pi$.
h. $|-2 - 2i| = 2\sqrt{2}$, $\arg (-2 - 2i) = -\frac{3}{4}\pi$.

Telkens is slechts één waarde van het argument φ opgegeven, nl. die welke aan $-\pi < \varphi \leqq \pi$ voldoet, de zgn. hoofdwaarde van het argument. Is r de modulus, dan is het complexe getal α als $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ te schrijven. Is $\alpha' = r'(\cos \varphi' + i \sin \varphi')$, dan blijkt door uitvoering van de vermenigvuldiging:

$$\alpha\alpha' = rr' \{\cos (\varphi + \varphi') + i \sin (\varphi + \varphi')\},$$

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{r}{r'} \{\cos (\varphi - \varphi' + i \sin (\varphi - \varphi')\}.$$

$$|\alpha\alpha'| = |\alpha| \cdot |\alpha'|, \quad \left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right| = \frac{|\alpha|}{|\alpha'|},$$

$$\arg \alpha\alpha' \equiv \arg \alpha + \arg \alpha', \quad \arg \frac{\alpha}{\alpha'} \equiv \arg \alpha - \arg \alpha'.$$

Hierin betekent het congruentieteken $\equiv$, dat van een veelvoud van 2π wordt afgezien.

174. Is E het eenheidspunt, beeldpunt van het getal 1, en zijn A en B de beeldpunten van de complexe getallen α en β, dan ligt het beeldpunt C van $\alpha\beta$ zo, dat $\triangle OAC \sim \triangle OEB$ (rechtstreeks gelijkvormig); ook is

is dan $\triangle\, OBC \sim \triangle\, OEA$. Het beeldpunt D van $\frac{\alpha}{\beta}$ ligt zo, dat $\triangle\, OAD \sim \triangle\, OBE$; ook is dan $\triangle\, OED \sim \triangle\, OBA$.

175. De formule voor een natuurlijk getal n vindt men door herhaalde toepassing van de vermenigvuldiging met modulus en argument (zie 173). Voor n negatief geheel volgt de formule uit:

$$\frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \frac{1}{r}\,(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Is $n = \frac{p}{q}$ (p geheel, q een natuurlijk getal), dan is de formule zo op te vatten, dat het tweede lid een der complexe getallen is, waarvan de q^e macht gelijk is aan de p^e macht van $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

176. $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, $\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi$,
$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi$,
$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi$,
$\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$, $\sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi$,
$\sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi$,
$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi$.

177. $(x + iy)^2 = i$ geeft $x^2 - y^2 = 0$, $2xy = 1$, dus $x = y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$, dus $z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1 + i)$. Dit volgt ook uit $i = \cos(\frac{1}{2} + 2g)\pi + i\sin(\frac{1}{2} + 2g)\pi$ (g geheel), dus $z = \cos(\frac{1}{4} + g)\pi + i\sin(\frac{1}{4} + g)\pi$ ($g = 0$, of 1).

178. $(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$ geeft $z = 1$, $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$. Volgt ook uit $z = \cos {}^2\!/_3\, g\pi + i\sin {}^2\!/_3\, g\pi$ ($g = 0, \pm 1$).
$z = \cos({}^1\!/_6 + {}^2\!/_3\, g)\,\pi + i\sin({}^1\!/_6 + {}^2\!/_3\, g)\,\pi$ ($g = 0, \pm 1$), dus
$z = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} + i)$, $-i$. Ook te vinden uit $z^2 - iz - 1 = 0$, als men de wortel $-i$ ziet.
$z = -1$, $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$.
$z = \frac{1}{2}(\pm\sqrt{3} - i)$, i.
$z = 2\{\cos({}^1\!/_{12} + 2g)\pi + i\sin({}^1\!/_{12} + 2g)\pi\}$ ($g = 0, \pm 1$), dus
$z = \sqrt{2}\,(-1 + i)$,
$\frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + \frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})i$,
$-\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}) - \frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})i$.

179. Uit $(z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$ volgt $z = \pm 1, \pm i$.
$z = \cos(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}g)\pi + i\sin(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}g)\pi$ ($g = 0, \pm 1, 2$), dus
$z = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(\pm 1 \pm i)$. Volgt ook uit $(z^2 + 1)^2 - 2z^2 = 0$,
$z^2 \pm z\sqrt{2} + 1 = 0$.
$z = \cos({}^1\!/_8 + \frac{1}{2}g)\pi + i\sin({}^1\!/_8 + \frac{1}{2}g)\pi$ ($g = 0, \pm 1, 2$), dus
$z = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$,
$\pm \frac{1}{2}(\sqrt{2 - \sqrt{2}} - i\sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

$z = \pm \frac{1}{2}(\sqrt{2+\sqrt{2}} - i\sqrt{2-\sqrt{2}})$,

$\pm \frac{1}{2}(\sqrt{2-\sqrt{2}} + i\sqrt{2+\sqrt{2}})$ (i door $-i$ vervangen).

180. Is $a + bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$, dan:

$$z = \sqrt[n]{r}\left\{\cos\left(\frac{\varphi + 2g\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2g\pi}{n}\right)\right\} \quad (g = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

181. $\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi$.

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + \operatorname{tg}^5\varphi}{1 - 10\operatorname{tg}^2\varphi + 5\operatorname{tg}^4\varphi}.$$

182. Is x reëel, dan $e^x = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ (n een natuurlijk getal). Is z complex daarom bij definitie $e^z = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$. Dan is:

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n}\left\{\cos\left(n \operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right) + i\sin\left(n \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{n}\right)\right\} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}n\frac{x^2}{n^2}}\left\{\cos\left(\lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right) + i\left(\sin\lim_{n\to\infty} n\operatorname{arctg}\frac{x}{n}\right)\right\}.$$

Ook kan men de reeks voor $\cos x$ als definitie van $\cos z$ (z complex) overnemen.

183. *a.* $z = n\left(-1 + \cos\frac{2g\pi}{n} + i\sin\frac{2g\pi}{n}\right)$ $(g = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$;

$z = -n$ is het middelpunt en n de straal van de omgeschreven cirkel. De oorsprong $z = 0$ is een hoekpunt van de regelmatige n-hoek.

b. $r_n = 2n\sin\frac{\pi}{n}$ (zijde van de regelmatige n-hoek); $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 2\pi$.

184. Op de rechte is $r^2 = \left|\frac{2z+1}{z+1}\right|^2 = \frac{8x^2 - 4x + 5}{2(x^2+1)}$ Voor $x = -2$ heeft r het absolute maximum $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ en voor $x = \frac{1}{2}$ het absolute minimum $\sqrt{2}$.

185. De eerste vier formules volgen uit 182, de beide andere uit:

$$1 + e^{ix} + e^{2ix} + \ldots + e^{nix} = \frac{e^{-\frac{1}{2}ix} - e^{(n+\frac{1}{2})ix}}{e^{-\frac{1}{2}ix} - e^{\frac{1}{2}ix}} =$$

$$= \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x + \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x} + i\,\frac{\cos\frac{1}{2}x - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

186. Voor x reëel is (zie 182) $\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$, $\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$.

Voor imaginaire waarden van x neemt men dit als definitie over.

187. Door een soortgelijke berekening als die van 182 volgt uit de daar gegeven definitie $e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$. Daaruit leidt men af $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$. Uit de definitie van 186 volgt:
$\cos (z_1 + z_2) = \frac{1}{2}(e^{iz_1+iz_2} + e^{-iz_1-iz_2}) =$
$$= \tfrac{1}{2} (e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2}) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2.$$
De laatste omzetting berust op $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$ ook als z complex is. Evenzo blijkt, dat de formule voor $\sin (z_1 + z_2)$ blijft doorgaan als z_1 en z_2 complex zijn. Hieruit, in verband met de formules van 186, volgen de formules voor $\sin (x + iy)$ en $\cos(x + iy)$. Door i uit de noemer te verdrijven, vindt men de formules voor $\operatorname{tg} (x + iy)$ en $\operatorname{cotg} (x + iy)$.

188. Men lette op de formules van 186.

189. Is z complex, dan blijft $\operatorname{ch} z$ gedefinieerd als $\frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$ enz. De formules van 186 blijven dan doorgaan, als x imaginair is.

190. De formules volgen uit de definities.

191. Is $y = \operatorname{arcth} x$, dan is $x = \operatorname{th} y = \dfrac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}$ (dus $-1 < x < 1$), waaruit men e^{2y} (en dan verder y) kan oplossen.

192. Het bewijs is als dat van 191.

193. De formules volgen uit 182.

194. Met $w = \ln r (\cos \varphi + i \sin \varphi) (r > 0)$ is bedoeld iedere oplossing van de vergelijking $e^w = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.
Is $w = u + iv$, dus $e^w = e^u (\cos v + i \sin v)$ (zie 187), dan is $e^u = r$, $\cos v = \cos \varphi$, $\sin v = \sin \varphi$, dus $u = \ln r$ en $v = \varphi + 2 k \pi$ (k geheel).

195. De formules volgen uit 194.

196. Uit $\cos x \operatorname{ch} y = {}^5/_4$, $\sin x \operatorname{sh} y = 0$ (zie 187) volgt $\sin x = 0$ (daar $\operatorname{sh} y = 0$ dood loopt), $\cos x = 1$, $\operatorname{ch} y = {}^5/_4$, dus $x + iy = 2 g \pi \pm i \ln 2$ (g geheel). Ook kan men uit $\cos z = {}^5/_4$ afleiden $e^{iz} + e^{-iz} = {}^5/_2$ (zie 186), waaruit volgt $e^{iz} = 2$ of $\frac{1}{2}$, $iz = \pm \ln 2 + 2 g \pi i$.

197. Op de in 196 aangegeven wijze vindt men:
$$z = x + iy = (\tfrac{1}{2} + 2 g) \pi \pm i \ln 2.$$
Ook is het vraagstuk tot 196 terug te brengen:
$$\cos (\tfrac{1}{2} \pi - z) = {}^5/_4.$$

198. Volgens ieder der beide in 196 aangegeven methoden vindt men:
$$x + iy = \pm (\tfrac{1}{2} \pi + i \ln 3) + 2 g \pi \ (g \text{ geheel}).$$

199. $x + iy = 2 g \pi - i \ln 3, \quad (1 + 2 g) \pi + i \ln 3$ (g geheel).

200. Met $w = \operatorname{arctg} z$ is bedoeld iedere oplossing van $\operatorname{tg} w = z$, dus van $\dfrac{e^{iw} - e^{-iw}}{i(e^{iw} + e^{-iw})} = z$ (zie 186). Hieruit losse men e^{2iw} op.

201. Uit $x = \operatorname{tg} y (-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi)$, $Z = e^{\operatorname{tg} y}(\cos y + i \sin y)$ volgt als $Z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ gesteld wordt $r = e^{\operatorname{tg} \varphi}$ $(\varphi = y)$. Dit is de poolvergelijking van de gevraagde kromme. Neemt φ toe van $-\frac{1}{2}\pi$ tot $\frac{1}{2}\pi$, dan neemt r toe van 0 tot ∞. In het eindpunt O raakt de kromme aan de negatieve y-as. De kromme loopt in de positieve y-richting naar het oneindige, zonder asymptoot, daar $\lim\limits_{\varphi \to \frac{1}{2}\pi} e^{\operatorname{tg}\varphi} \cos \varphi = \infty$ $(\varphi < \frac{1}{2}\pi)$. Uit $r^2 + 2 r'^2 - r r'' = e^{2\operatorname{tg}\varphi}\left(1 + \dfrac{1 - \sin 2\varphi}{\cos^4 \varphi}\right)$ blijkt, dat de kromme geen buigpunt heeft. In het punt (1, 0) snijdt de kromme de x-as onder een hoek van 45°.

202. $\frac{1}{2} \ln 2 + i(\frac{3}{4} + 2g)\pi$ (g geheel) (zie 194).

203. Uit $\cos x \operatorname{ch} y = 3$, $\sin x \operatorname{sh} y = -4$ volgt in verband met $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ en $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$, dat $\cos x = 2\sqrt{2} - \sqrt{5}$, $\operatorname{ch} y = 2\sqrt{2} + \sqrt{5}$. Dit geeft (met $\varepsilon = \pm 1$ en g geheel):

$$y = \varepsilon \ln (2\sqrt{2} + \sqrt{5} + 2\sqrt{3 + \sqrt{10}}),$$
$$x = -\arccos(2\sqrt{2} - 5) + 2g\pi.$$

Ook vindt men de oplossing uit $e^{2zi} - 2(3 + 4i)e^{zi} + 1 = 0$, dus:

$$e^{zi} = 3 + 4i \pm 2\sqrt{-2 + 6i} =$$
$$= 3 + 2\varepsilon\sqrt{\sqrt{10} - 1} + i(4 + 2\varepsilon\sqrt{\sqrt{10} + 1}).$$

De verdere uitwerking is bewerkelijker dan de eerste berekening.

204. z^w wordt gedefinieerd als $e^{w \ln z}$. Dus is $z^{\ln z} = e^{(\ln z)^2}$. Voor $z = -1$ wordt dit $e^{-(2g+1)^2 \pi^2}$ (g geheel).

205. $\dfrac{1}{i} \dfrac{e^{xi} - e^{-xi}}{e^{xi} + e^{-xi}} = \operatorname{tg} x$.

206. $\ln 2 + 2g\pi i$, $\ln(\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} i\sqrt{3}) = (\frac{1}{3} + 2g)\pi i$ (g geheel).

207. $\ln (1 + 2gi)\pi = \frac{1}{2} \ln (1 + 4g^2) + i(\operatorname{arctg} 2g + 2h\pi)$ (g en h geheel).

208. $$\cos 3\varphi + i \sin 3\varphi = \cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi -$$
$$- 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi,$$
$$\operatorname{cotg} 3\varphi = \frac{\operatorname{cotg}^3 \varphi - 3 \operatorname{cotg} \varphi}{3 \operatorname{cotg}^2 \varphi - 1}.$$

209. $$\ln \frac{e^{-\frac{1}{2}i\varphi}}{e^{-\frac{1}{2}i\varphi} + e^{\frac{1}{2}i\varphi}} = \ln \tfrac{1}{2}(1 - i \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varphi) = -\ln 2 |\cos \tfrac{1}{2}\varphi| +$$
$$+ i(2g\pi - \tfrac{1}{2}\varphi) \text{ (g geheel).}$$

Is A het beeldpunt van $1 + e^{i\varphi}$ en E het eenheidspunt, dan is $\triangle EOA$ gelijkbenig met een basis $OA = 2 \cos \frac{1}{2}\varphi$. Verder is $\angle EOA = \frac{1}{2}\varphi$.

210. $$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{29}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}n} \left(\cos n \operatorname{arctg} \frac{5}{n+2} + i \sin n \operatorname{arctg} \frac{5}{n+2}\right) =$$
$$= e^{\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{2}\left(\frac{4}{n} + \frac{29}{n^2}\right)} (\cos 5 + i \sin 5) = e^2(\cos 5 + i \sin 5).$$

211. Is z reëel, dan is $|z \sin \frac{1}{z}| \leqq |z|$ dus de limiet 0. Is $z = iy$, dan $z \sin \frac{1}{z} = y \operatorname{sh} y$ (even functie). De limiet is dan $+\infty$.

212. $\frac{1}{1-e^{i\delta}} = \frac{1}{2}(1 + i \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\delta) = \frac{1}{2 \sin \frac{1}{2}\delta} \{\cos \frac{1}{2}(\pi - \delta) +$ $+ i \sin \frac{1}{2}(\pi - \delta)\}$, $\ln \frac{1}{1-e^{i\delta}} = -\ln(2 \sin \frac{1}{2}\delta) +$ $+ \{(2g + \frac{1}{2})\pi - \delta\}i$ (g geheel) (vergelijk 209).

213. Cirkel door O met het beeldpunt van $4 + 3i$ als middelpunt. De beeldpunten van de getallen $6i$ en 8 liggen op de cirkel diametraal tegenover elkaar. De vectoren, die $z - 6i$ en $z - 8$ afbeelden, staan dus loodrecht op elkaar.

214. *b*. Is $z = x + iy$, dan $x = p$, $y = \sqrt{3 - p^2}$. De meetkundige plaats van A en B is de cirkel $x^2 + y^2 = 3$ (middelpunt O, straal $\sqrt{3}$), met weglating van de snijpunten $(\pm\sqrt{3}, 0)$ met de x-as.
c. $\triangle OAB$ is gelijkzijdig als $AB = \sqrt{3}$, dus $2\sqrt{3 - p^2} = \sqrt{3}$, $p = \pm\, ^3/_2$.

215. De meetkundige plaats van het beeldpunt van z is een cirkel (middelpunt $z = 1$, straal 2), waarop de beeldpunten van -1 en 3 diametraal tegenover elkaar liggen (vergelijk 213).

216. Uit $(z^2 + 1)^2 - 2(1 + \lambda)z^2 = 0$ volgt $z = \pm\sqrt{\frac{1+\lambda}{2}} \pm i\sqrt{\frac{1-\lambda}{2}}$, dus $|z| = 1$. De beeldpunten der wortels liggen op de cirkel met O als middelpunt en straal 1 en zijn de hoekpunten van een rechthoek.

217. Cirkel $x^2 + y^2 = x$ door O met $\frac{1}{2}$ als middelpunt. Op die cirkel is:

$$r^2 = \left|\frac{2z+1}{z+1}\right|^2 = \frac{8x+1}{3x+1} = \frac{8}{3} - \frac{5}{3(3x+1)},$$

dus r minimaal (nl. 1) voor $x = 0$, dus in O, en maximaal (nl. $^9/_4$) voor $x = 1$ (dus in het eenheidspunt E).

218. Is $Z = X + iY$, dan is $x = \frac{X}{X^2 + Y^2}$, $y = -\frac{Y}{X^2 + Y^2}$, waardoor:

$$(a^2 + b^2 - R^2)(X^2 + Y^2) - 2aX + 2bY + 1 = 0.$$

Dit is een cirkel met $\frac{a}{a^2 + b^2 - R^2}$, $-\frac{b}{a^2 + b^2 - R^2}$ als middelpunt en $\frac{R}{|a^2 + b^2 - R^2|}$ als straal. Is $R^2 = a^2 + b^2$, d.w.z. gaat de cirkel in het z-vlak door O, dan gaat de cirkel in het Z-vlak over in de rechte $-2aX + 2bY + 1 = 0$.

219. Dit volgt uit de meetkundige betekenis der optelling van complexe getallen (zie 171).

220. Dit volgt uit $|w| = |z|$ en arg $w =$ arg $z + \alpha$, van een veelvoud van 2π afgezien.

221. Uit 220 volgt, dat draaiing over een hoek α om het beeldpunt van p wordt voorgesteld door:

$$w - p = (z - p)\ (\cos\alpha + i\sin\alpha).$$

Dit wordt de gegeven vergelijking, als $p(1 - \cos\alpha - i\sin\alpha) = b$, dus $p = \frac{1}{2} b\ (1 + i \operatorname{cotg} \frac{1}{2}\alpha)$.

E. Hogere-machtsvergelijkingen.

222. In $f(x) = (x - p)\ Q(x) + R$ stelle men $x = p$.

223. Zijn $x_1, x_2, \ldots, x_k$ verschillende wortels van $f(x) = 0$, dan bestaat, zoals door herhaalde deling blijkt, de identiteit

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k) Q(x).$$

Hierin is $Q(x)$ een veelterm in x van een graad $\geqq 0$ (die a_0 tot eerste coëfficiënt heeft). De identiteit is niet mogelijk voor $k > n$.

224. Dit volgt uit de reeks van Taylor:

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1\,!}(x - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2\,!}(x - x_1)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_1)}{n\,!}(x - x_1)^n$$

225. Is $a + bi$ $(b \neq 0)$ een imaginaire wortel van $f(x) = 0$, dan schrijve men de vergelijking aldus:

$$\{(x - a)^2 + b^2\}\ Q(x) + Ax + B = 0 \qquad (A \text{ en } B \text{ reëel}).$$

Door $x = a + bi$ te stellen, vindt men eerst $A = 0$ en dan $B = 0$, zodat ook $a - bi$ een wortel is. Door de redenering te herhalen na door $(x - a)^2 + b^2$ gedeeld te hebben, blijkt dat de multipliciteiten der toegevoegd imaginaire wortels gelijk zijn.

226. Dit blijkt uit $f(+\infty) = \infty$, $f(-\infty) = -\infty$ of omgekeerd.

227. Is $\frac{p}{q}$ (p geheel, q een natuurlijk getal en p en q onderling ondeelbaar) een wortel en vermenigvuldigt men na substitutie, met q^n, dan zijn alle termen, die op de eerste term p^n volgen, door q deelbaar, dus p^n ook. Dit kan alleen als $q = 1$, dus als het meetbare getal $\frac{p}{q}$ geheel is.

228. Substitueert men $x = x_1$ dan zijn alle termen, die aan a_n voorafgaan, deelbaar door x_1, dus a_n ook.

229. *a*. Men stelle $x = -y$.

b. Men stelle $x = \frac{1}{y}$ en vermenigvuldige met y^n.

c. Men stelle $x = \frac{y}{p}$ Vaak is het dan voordelig met p^n te vermenigvuldigen.

d. Men stelle $x = y + k$.

230. $f(x) = (x-k)Q_1(x) + b_n = (x-k)\{(x-k)Q_2(x) + b_{n-1}\} + b_n =$
$= (x-k)^2 Q_2(x) + (x-k)b_{n-1} + b_n =$
$= (x-k)^3 Q_3(x) + (x-k)^2 b_{n-2} + (x-k)b_{n-1} + b_n$
enz., waarna men $x - k = y$ stelle. De delingen worden met de rekenwijze (algorithmus) van Horner uitgevoerd.

231. Men schrijve de vergelijking aldus:

$$(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \ldots\ldots (x-x_n) = 0$$

en voere de vermenigvuldigingen uit, daarbij naar machten van x rangschikkend.

232. Vormen de wortels een rekenkundige reeks, dan zijn deze $-{}^1/_3\, p$, $-{}^1/_3\, p \pm v$. De vergelijking is dan:

$$(x + {}^1/_3\, p)^3 - v^2(x + {}^1/_3\, p) = 0,$$

dus ${}^1/_3\, p^2 - v^2 = q$, ${}^1/_{27}\, p^3 - {}^1/_3\, pv^2 = r$, waaruit de genoemde voorwaarde volgt. Deze is nodig en voldoende. De wortels vormen een rekenkundige reeks van reëele verschillende getallen als bovendien p reëel is en $q < {}^1/_3\, p^2$.

233. Is het hoekpunt van de rechte hoek het beeldpunt van a, dan zijn de beide andere hoekpunten voor te stellen door $a + b$ en $a + bi$. Men heeft dan:

$$3a + (1+i)b = 0, \quad 3a^2 + 2(1+i)ab + ib^2 = p,$$
$$a^3 + (1+i)a^2b + iab^2 = -q.$$

Door eliminatie van a volgt hieruit $3p = ib^2$, $27q = 5(i-1)b^3$. Eliminatie van b met $b \neq 0$ (daar anders de 3 punten samenvallen) geeft $50p^3 = 27q^2 \neq 0$. Een iets eenvoudiger berekening krijgt men door het midden van de schuine zijde (d.w.z. het daardoor voorgestelde getal) k te noemen. De hoekpunten zijn dan $k \pm l$ en $k + li$, zodat de vergelijking luidt $\{(x-k)^2 + l^2\}(x - k - li) = 0$. Hierdoor krijgt men $3k + il = 0$, $3k^2 - l^2 + 2ikl = p$, $(l^2 - k^2)(k + il) = q$, waaruit k en l moeten worden geëlimineerd.

234. Men bepaalt de reële wortels $p_1, p_2, \ldots, p_k$ van $f'(x) = 0$, opklimmend gerangschikt en bepaalt de tekens van $f(-\infty)$, $f(p_1)$, $f(p_2)$, ... $f(p_k)$, $f(+\infty)$. Is $a_0 > 0$, dan $f(-\infty) = (-1)^n . \infty$ en $f(+\infty) = +\infty$. Is p_j een onevenvoudige wortel van $f'(x) = 0$, dan is $f(p_j)$ extreem. In

een interval met tekenwisseling (variatie) ligt één enkelvoudige wortel van $f(x) = 0$. De in de rij voorkomende nullen wijzen de meervoudige wortels van $f(x) = 0$ aan.

235. Zijn de 3 wortels gelijk, dan is de vergelijking $(x + {}^1/_3\, a)^3 = 0$. Het stel betrekkingen $3\,b = a^2$, $27\,c = a^3$ en het stel $3\,b = a^2$, $9\,c = ab$ zijn gelijkwaardig, d.w.z. uit het ene stel volgt het andere en omgekeerd. Uit de betrekkingen volgt het stel $3\,ac = b^2$, $9\,c = ab$, waaruit alleen dan het oorspronkelijke stel volgt, als $b \neq 0$. De laatste voorwaarde is wel nodig, maar niet voldoende; is $b = c = 0$, dan is aan die voorwaarde voldaan, zonder dat de vergelijking drie gelijke wortels behoeft te hebben.

236. Uit $f(-\infty) = -\infty$, $f(-1) = 16$, $f(1) = -12$, $f(+\infty) = +\infty$ volgt, dat de vergelijking 3 reële wortels heeft. Deze zijn enkelvoudig, een wortel < -1, een tussen -1 en 1, en een > 1.

237. Eén reële wortel. Deze is enkelvoudig en > 2.

238. De wortels van $f'(x) = 0$ zijn $2 \pm 2\sqrt{2}$. Zonder de berekening geheel uit te voeren, ziet men snel, dat $f(2 \pm 2\sqrt{2}) > 0$. Er is dus één reële wortel. Deze is enkelvoudig en $< 2 - 2\sqrt{2}$.

239. Uit $f(-\infty) = +\infty$; $f(\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}) = -\tfrac{3}{4}\sqrt[3]{4} + k$, $f(+\infty) = +\infty$ volgt, dat de vergelijking twee reële (enkelvoudige) wortels heeft, als $k < \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{4}$. Is $k > \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{4}$, dan zijn er geen reële wortels. Is $k = \tfrac{3}{4}\sqrt[3]{4}$, dan heeft de vergelijking de dubbele wortel $\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{4}$ en verder twee imaginaire wortels.

240. De wortels van $f'(x) = 0$ zijn 0 en $-k$. Aan $f(x) = 0$ is niet voldaan door $x = 0$, terwijl $f(-k) = 0$ voor $k^3 = 1$. Er is dan een dubbele wortel $-k$ en de wortel $\dfrac{1}{2k^2} = \dfrac{k}{2}$, blijkens het product van de wortels. Voor $k = 1$ zijn de wortels -1, -1 en $\tfrac{1}{2}$. Voor $k = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varepsilon i\sqrt{3}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ zijn de wortels $\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\varepsilon i\sqrt{3}$, $\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\varepsilon i\sqrt{3}$, $-\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\varepsilon i\sqrt{3}$.

241. Uit $f(-\infty) = -\infty$, $f(0) = k$, $f(-{}^4/_5\,k) = k\left(\dfrac{256}{6125}\,k^4 + 1\right)$, $f(+\infty) = +\infty$ volgt dat de vergelijking voor $k < 0$ één reële wortel heeft; deze is enkelvoudig en $> -{}^4/_5\,k$. Voor $k > 0$ heeft de vergelijking eveneens één reële wortel; deze is enkelvoudig en $< -{}^4/_5\,k$. Voor $k = 0$ heeft de vergelijking 5 gelijke wortels 0.

242. We vereenvoudigen de vergelijking door $x = 2\,y$ te stellen tot:

$$y^6 + 3\,y^5 - 6\,y^3 - 3\,y^2 + 3\,y + 2 = 0.$$

Voor de G.G.D. van $f(y)$ en $f'(y)$ vindt men $y^3 + y^2 - y - 1$. Het valt onmiddellijk op, dat die G.G.D. aldus te ontbinden is $(y-1)(y+1)^2$. Bijgevolg heeft $f(y) = 0$ de dubbele wortel 1 en de drievoudige wortel

— 1. De wortels zijn dus 1, 1, — 1, — 1, — 1 en — 2; de wortel — 2 vindt men onmiddellijk uit het product 2 der wortels.
De bepaling van de G.G.D. is nogal bewerkelijk. Veel sneller bereikt men het doel door naar meetbare wortels te zoeken. Deze zijn geheel en deelbaar op 2 (zie 227 en 228), dus te zoeken onder ± 1, ± 2. Met de rekenwijze van Horner blijkt, dat $f(y)$ tweemaal door $y - 1$ en daarna driemaal door $y + 1$ deelbaar is.

243. Neemt x toe van -1 tot $+\infty$, dan neemt het eerste lid af van $+\infty$ tot 0 (voor $x = 0$), om vervolgens toe te nemen tot $+\infty$. Is $k > 0$, dan heeft de vergelijking dus een positieve en een negatieve wortel. Is $k = 0$, dan is er slechts de wortel 0. Is $k < 0$, dan zijn er geen reële wortels

244. Men heeft de volgende gevallen:

$k < -6$: wortel $> \sqrt{2}$;
$k = -6$: wortel 1 (dubbel), wortel $> \sqrt{2}$;
$-6 < k < -4\sqrt{2}$: wortel tussen -1 en 1; tussen 1 en $\sqrt{2}$ en een $> \sqrt{2}$;
$k = -4\sqrt{2}$: wortel tussen -1 en 1, wortel $\sqrt{2}$ (dubbel);
$-4\sqrt{2} < k < 4\sqrt{2}$: wortel tussen -1 en 1;
$k = 4\sqrt{2}$: wortel $-\sqrt{2}$ (dubbel), wortel tussen -1 en 1;
$4\sqrt{2} < k < 6$: wortel $< -\sqrt{2}$, een tussen $-\sqrt{2}$ en -1 en een tussen -1 en 1;
$k = 6$: wortel $< -\sqrt{2}$, wortel -1 (dubbel);
$k > 6$: wortel $< -\sqrt{2}$.

Men krijgt een duidelijke voorstelling van deze resultaten, door een grafiek te maken van $x^5 - 5x^3 + 10x$. Door deze te snijden met de rechte $y = -k$, krijgt men de wortels van de gegeven vergelijking. Men verschuive dus de x-as evenwijdig aan zich zelf naar boven en naar onderen.

245. $k = 0$: wortels $0, 0, -1 \pm \sqrt{6}$;
$k = 2$: wortels $1, 1, -2 \pm \sqrt{6}$;
$k = \frac{375}{4}$: wortels $-\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}, \frac{1}{2}(3 \pm i\sqrt{6})$.

246. Bepaal de G.G.D. van $f(x)$ en $f'(x)$ door herhaalde delingen, telkens de resten door hun tegengestelden vervangend. Is er geen dubbele wortel, dan ontstaat zo een rij veeltermen $f(x)$, $f'(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ..., $f_k(x)$, waarvan de laatste een van 0 verschillende constante is. Zijn a en b $(a < b)$ twee waarden van x, waarvoor geen dier functies 0 is, dan is het aantal tussen a en b gelegen wortels gelijk aan $V_a - V_b$. Hierin is

V_a het aantal variaties in teken, als men in de rij veeltermen $x = a$ substitueert, met een overeenkomstige betekenis van V_b.

247. De functies van Sturm krijgt men door de volgende delingen:

$$\begin{array}{l} 3x^2 - 10x + 8 / 3x^3 - 15x^2 + 24x - 24 \\ \qquad\qquad 3x^3 - 10x^2 + 8x \\ \hline \qquad\qquad -5x^2 + 16x - 24 \\ \qquad\qquad -15x^2 + 48x - 72 \\ \qquad\qquad -15x^2 + 50x - 40 \\ \hline \qquad\qquad\qquad -2x - 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + 16 / 3x^2 - 10x + 8 \\ \qquad\quad 3x^2 + 48x \\ \hline \qquad\quad -58x + 8 \\ \qquad\quad -58x - 928 \\ \hline \qquad\qquad\quad 936 \end{array}$$

Om gebroken coëfficiënten te vermijden, is tweemaal het deeltal met 3 vermenigvuldigd. Om kleinere coëfficiënten te krijgen, is de rest der eerste deling door 2 gedeeld. De laatste rest 936 is niets anders dan de waarde van $3x^2 - 10x + 8$ bij de substitutie $x = -16$. Dat die rest positief uitvalt is onmiddellijk te zien, zodat de laatste deling overbodig is. De funcies van Sturm zijn:

	x^3-5x^2+8x-8	$3x^2-10x+8$	$x+16$	-1	
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	-1	twee variaties
3	-2	5	19	-1	twee variaties
4	8	16	20	-1	één variatie
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-1	één variatie

248. De functies van Sturm zijn:

$4x^3 + 27x^2 + 18x - 41, \quad 2x^2 + 9x + 3, \quad 57x + 109, \quad 1$

De tweede functie, dus $f'(x)$, is door 6 gedeeld. De laatste functie is het tegengestelde van de waarde, die $2x^2 + 9x + 3$ aanneemt voor $x = -\frac{109}{57}$ (ongeveer -2). Men ziet onmiddellijk, dat die waarde van $2x^2 + 9x + 3$ negatief is, zodat de laatste functie van Sturm positief is. Daarvoor kan dus 1 worden genomen. Voor $x = -\infty$ krijgt men 3 variaties, voor $x = +\infty$ geen variaties.

249. Verschillen $f(a)$ en $f(b)$ van teken, dan geeft dit twee punten P en Q van de grafiek van $f(x)$ aan weerskanten van de x-as. Het snijpunt van de verbindingslijn PQ met de x-as geeft een benaderde waarde van de wortel van $f(x) = 0$. Die benaderde waarde is:

$$a + (b - a)\frac{f(a)}{f(a) - f(b)} = \frac{bf(a) - af(b)}{f(a) - f(b)}$$

Deze benaderingsmethode heet de regula falsi.
Voor de gegeven vergelijking geldt $f(0,7) = -0,167$, $f(0,8) = 0,152$.
De regula falsi geeft de benadering:

$$0,7 + 0,1 \cdot \frac{0,167}{0,167 + 0,152} = 0,7 + \frac{0,167}{3,19} = 0,7524.$$

Doordat de kromme tussen P en Q de bolle kant naar beneden keert (zie 250), is de gevonden benadering van de wortel te klein.

250. Kent men een benaderde waarde a van de wortel van $f(x) = 0$, dus een punt P van de grafiek van $f(x)$, dat dicht bij de x-as ligt, dan krijgt men dikwijls een betere benadering door in P de raaklijn aan te brengen en deze met de x-as te snijden (benaderingsmethode van Newton). Voor dit snijpunt geldt $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. Kent men twee waarden a en b van x, waarvoor de functiewaarden verschillend teken hebben, dus twee aan weerskanten van de x-as gelegen punten P en Q der grafiek, terwijl $f''(x)$ tussen a en b overal positief of overal negatief is (hetgeen meetkundig betekent, dat de grafiek tussen P en Q overal de bolle resp. holle kant naar beneden keert), dan is het meestal aan te bevelen de methode van Newton toe te passen op dat der getallen a en b, waarvoor de functiewaarde met $f''(x)$ in teken overeenstemt. Men komt dan zeker dichter bij de wortel aan dezelfde kant daarvan blijvend. Men overtuige zich hiervan door de figuur te tekenen.

De gegeven vergelijking heeft één reële wortel. Deze ligt tussen 0 en 1. Voor $x > 0$ is $f''(x) < 0$, waarom men de methode op $x = 1$ toepast. Men vindt dan de benaderde waarde $1 - \frac{1}{5} = 0,8$. Nu is $f(0,8) = 0,152$ en $f'(0,8) = 3,52$. Een betere benadering (aan dezelfde kant) is dus

$$0,8 - \frac{0,152}{3,52} = 0,7568.$$

Door de methode nog eens toe te passen, kan men een nog betere benadering vinden enz.

De benaderingsmethode van Horner geeft voor de wortel in 4 decimalen nauweurig 0,7549 De met de benaderingsmethode van Newton gevonden benadering 0,7568 ligt dus iets dichter bij de juiste waarde dan de in 249 met de regula falsi gevonden benadering 0,7524, maar aan de andere kant.

251. De vergelijking op de tegengestelde wortels luidt $y^4 + 2y - 2 = 0$. De positieve wortel hiervan is ongeveer 0,8. De verdere benadering volgens de methode van Horner is aldus:

1	0	0	2	—2
	0,8	0,64	0,512	2,0096
	0,8	0,64	2,512	0,0096
	0,8	1,28	1,536	
	1,6	1,92	4,048	
	2,4	1,92		
1	3,2	3,84		

Het volgende cijfer van de wortel is dus 0 en het daarop volgende cijfer — 2. De absolute waarde van de negatieve wortel is dus 0,8 — 0,002 = 0,798, naar boven afgerond.

Opmerking. Met betrekkelijk weinig werk meer, benadert men de wortel in 6 decimalen. De verdere berekening is dan:

1	3,2	3,84	4,048	0,0096
		—0,01	—0,0115	—0,012110
		3,83	4,0365	—0,002510
		—0,01	—0,0115	0,002416
		3,82	4,0250	—0,000094
			23	0,000081
			4,0273	—0,000013

De wortel van de vergelijking in y is dus 0,80(—3)623, waarbij het negatieve cijfer tussen haakjes geplaatst is De negatieve wortel van de oorspronkelijke vergelijking is dus:

$$x = -(0{,}800623 - 0{,}003) = -0{,}797623.$$

Bij de berekening van de laatste drie decimalen van de wortel zijn cijfers, die daarop kennelijk geen invloed hebben, weggelaten; m.a.w. verschillende getallen zijn afgerond (verkorte benaderingsmethode van Horner). Past men op de benaderde waarde 0,8 van y de benaderingsmethode van Newton (zie 250) toe, dan vindt men, blijkens $f(0{,}8) = 0{,}0096$, $f'(0{,}8) = 4{,}048$, de betere benadering (die in 4 decimalen nauwkeurig blijkt te zijn):

$$y = 0{,}8 - \frac{0{,}0096}{4{,}048} = 0{,}8 - 0{,}00237 = 0{,}79763.$$

Dit komt daarop neer, dat men, na de wortels met 0,8 verminderd te hebben, de termen met de tweede en hogere machten van de nieuwe onbekende verwaarloost. In combinatie met de benaderingsmethode van Horner kan dit dienen om het volgende cijfer te schatten.