



Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Robuust optimaliseren toegepast op een
elektriciteitsnetwerk model**
(Engelse titel: **Robust Optimisation applied to the
Optimal Power Flow model**)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute for Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

R.B.O. Kerkkamp

Delft, Nederland
Augustus 2011

Copyright © 2011 door R.B.O. Kerkkamp. Alle rechten voorbehouden.



BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

“Robuust Optimaliseren toegepast op een elektriciteitsnetwerk model”
(Engelse titel: “Robust Optimisation applied to the Optimal Power Flow model”)

R.B.O. Kerkkamp

Technische Universiteit Delft

Begeleiders

Prof.dr.ir. K. Aardal

Dr. F. Vallentin

Overige commissieleden

Prof.dr.ir. G. Jongbloed

Dr. G.F. Ridderbos

Augustus, 2011

Delft

Inhoudsopgave

1	Introductie	7
2	Elektriciteitsleer	8
2.1	Grootheden en notatie	8
2.1.1	Fasor notatie	8
2.1.2	Admittantie matrix	9
2.1.3	Vermogen	11
2.1.4	Eenheid <i>per unit</i>	11
2.2	Het elektriciteitsnetwerk model	12
2.2.1	Het AC model	13
2.2.2	Het DC model	16
2.3	<i>Optimal Power Flow</i>	19
2.3.1	Het AC optimalisatie model	19
2.3.2	Het DC optimalisatie model	20
2.3.3	Meerdere generatoren per knooppunt	21
2.3.4	Netwerkexpansie	22
2.4	Overzicht optimalisatie modellen	23
3	Robuuste optimalisatie	25
3.1	Robuust lineair optimaliseren	25
3.2	Een polyeder als verstoringsverzameling	28
3.2.1	Voorbeeld: een hyperkubus	30
3.3	Een <i>Conic Representable</i> verstoringsverzameling	32
3.3.1	Voorbeeld: een eenheidsbol	35
4	Toepassing op het DC model	37
4.1	Onzekere vraag	38
4.2	Onzekere maximale capaciteit	41
4.3	Onzekere admittantie matrix	42
4.4	Numerieke resultaten	45
5	Conclusies en aanbevelingen	50
6	Referenties	52
A	Conisch optimaliseren	53
A.1	Convexe kegels	53
A.2	Dualiteit	55
B	Netwerken	59
C	AIMMS code	62

Lijst van figuren

2.1	Een eenvoudig elektriciteitsnetwerk.	9
2.2	Voorbeeld van een elektriciteitsnetwerk.	10
4.1	De netwerken van de testcases.	48
B.1	Gerichte graaf van netwerk 1 en 2.	59
B.2	Gerichte graaf van netwerk 3.	60
B.3	Gerichte graaf van netwerk 4.	60
B.4	Gerichte graaf van netwerk 5.	61

Lijst van tabellen

2.1	Bekende en onbekende toestandsvariabelen in elk type knooppunt.	13
4.1	Minimale kosten van de netwerken.	49
4.2	Totaal gegenereerd vermogen in de netwerken.	49
4.3	Aantal lijnen die hun volledige capaciteit gebruiken.	49
B.1	Specificaties van netwerk 1.	59
B.2	Specificaties van netwerk 2.	59
B.3	Specificaties van netwerk 3.	60
B.4	Specificaties van netwerk 4.	60
B.5	Specificaties van netwerk 5.	61

Lijst van symbolen

Symbol	Eenheid	Betekenis
B	Siemens [S]	Susceptantie (<i>Susceptance</i>)
δ	Radialen [Rad]	Spanning fasorhoek (<i>Voltage phasor angle</i>)
ζ	-	Verstoringsvector (<i>Perturbation vector</i>)
G	Siemens [S]	Geleidbaarheid of conductantie (<i>Conductance</i>)
i	Ampère [A]	Elektrische stroom (<i>Current</i>)
I	Ampère [A]	Elektrische stroom fasor (<i>Current phasor</i>)
K	-	Reguliere convexe kegel (<i>Regular convex cone</i>)
L	-	Lorentz-kegel
P	Watt [W]	Actief vermogen (<i>Active power</i>)
ϕ	Radialen [Rad]	Fasehoek tussen de spanning en de stroom (<i>Phase of current</i>)
Q	Volt-Ampère reactief [var]	Reactief vermogen (<i>Reactive power</i>)
R	Ohm [Ω]	Weerstand (<i>Resistance</i>)
$\mathbb{R}_{\geq 0}^n$	-	Niet-negatieve orthant
S	Volt-Ampère [VA]	Complex vermogen (<i>Complex power</i>)
$ S $	Volt-Ampère [VA]	Schijnbaar vermogen (<i>Apparent power</i>)
$\mathcal{U}$	-	Onzekerheidsverzameling (<i>Uncertainty set</i>)
v	Volt [V]	Spanning (<i>Voltage</i>)
V	Volt [V]	Spanning fasor (<i>Voltage phasor</i>)
$ V $	Volt [V]	Lengte van de spanning fasor (<i>Voltage phasor magnitude</i>)
X	Ohm [Ω]	Reactantie (<i>Reactance</i>)
Y	Siemens [S]	Admittantie (<i>Admittance</i>)
Z	Ohm [Ω]	Impedantie (<i>Impedance</i>)
$\mathcal{Z}$	-	Verstoringsverzameling (<i>Perturbation set</i>)

1 Introductie

Het functioneren van elektriciteitsnetwerken wordt steeds belangrijker voor het dagelijks leven. Denk hierbij aan de robuustheid van het netwerk in geval van calamiteiten (bijvoorbeeld tijdens de ramp in Fukushima) of hoe Europa zo efficiënt mogelijk gebruik kan maken van (groene) energiebronnen. Om betrouwbare en efficiënte netwerken voor elkaar te krijgen, zijn er verschillende modellen en methodes ontwikkeld en nieuwere in ontwikkeling. Optimalisatie onder onzekerheid speelt hierbij een belangrijke rol en daar zullen wij in dit verslag op richten.

Dit verslag is het resultaat van een gezamenlijk project van de Optimalisatie en Electrical Power Systems afdelingen van faculteit EWI van de TU Delft. Het project heeft als voornaamste doel om een basis te leggen voor een samenwerking tussen de twee afdelingen. In hoofdstuk 2 worden daarom twee veelgebruikte modellen van een elektriciteitsnetwerk afgeleid, het AC en DC model, en de nodige notatie en grootheden behandeld. Deze modellen worden vaak in combinatie met Stochastische Optimalisatie gebruikt om de kwaliteit van een netwerk te beoordelen. Wij zullen echter een andere techniek gebruiken.

Wij zijn geïnteresseerd of Robuust Optimaliseren, een techniek om bij optimalisatie met onzekerheid om te gaan, (waardevolle) toepassingen heeft op de elektriciteitsnetwerk modellen. Daartoe beschrijft hoofdstuk 3 de wiskundige theorie van Robuust Lineair Optimaliseren. Paragrafen 3.2 en 3.3 tonen grote overeenkomsten, waarbij paragraaf 3.2 een eenvoudige onzekerheidsstructuur beschouwt en daardoor toegankelijker is. Paragraaf 3.3 behandelt een algemene onzekerheidsstructuur en vormt de basis voor Robuust Optimaliseren. Appendix A geeft de nodige wiskundige voorkennis voor hoofdstuk 3.

In hoofdstuk 4 passen we Robuust Optimaliseren toe op het DC model. Onze onderzoeksvraag is of Robuust Optimaliseren gebruikt kan worden om nuttige informatie over het elektriciteitsnetwerk te verkrijgen bij drie gevallen van onzekerheid (namelijk onzekere vraag, capaciteit of admittantie matrix). Hierbij denken we bij nuttige informatie over het netwerk aan het detecteren van transmissielijnen die (vaak) overbelast zullen zijn en welk effect de onzekerheid heeft op de productiekosten. Dit onderzoeken we door middel van de theorie en implementatie in AIMMS, waarbij we vijf testcases gebruiken. In appendix B staan alle specificaties van deze netwerken en appendix C geeft een beschrijving van de AIMMS code.

2 Elektriciteitsleer

In dit hoofdstuk zullen we de belangrijkste elektrotechnische theorie behandelen die nodig is voor het afleiden van de elektriciteitsnetwerk modellen. Paragraaf 2.1 licht de notatie en verschillende grootheden toe. Het model voor het elektriciteitsnetwerk zal worden toegelicht in paragraaf 2.2. Als laatste zal paragraaf 2.3 de optimalisatie modellen behandelen, waarmee we zullen gaan werken. Ook wordt een veel gebruikte methode voor expansie modellen vermeld, namelijk *Locational Marginal Pricing*.

2.1 Grootheden en notatie

Deze paragraaf behandelt de fasor notatie, die we voor de rest van het verslag zullen gebruiken voor de verschillende grootheden (zoals elektrische stroom, spanning en vermogen). Ook wordt de afleiding van de admittantie matrix gegeven en de genormaliseerde eenheid *per unit* toegelicht.

2.1.1 Fasor notatie

In de analyse van stroomnetwerken is het gebruikelijk om over te gaan in de zogeheten fasor notatie. Een fasor is een vector in het complexe vlak die een sinus of cosinus beschrijft. Een elektrische stroom $i(t)$ en spanning $v(t)$, gegeven door

$$\begin{aligned}i(t) &= A \cos(\omega t) = A \operatorname{Re} (e^{i\omega t}), \\v(t) &= B \cos(\omega t + \phi) = B \operatorname{Re} (e^{i(\omega t + \phi)}),\end{aligned}$$

met $i = \sqrt{-1}$, kunnen we in fasor notatie schrijven als

$$\begin{aligned}I &= |I| = |I| \angle 0, \\V &= |V| e^{i\phi} = |V| \angle \phi.\end{aligned}$$

Hierbij hebben we de elektrische stroom I als referentie fasor genomen, waardoor de hoek van I gelijk wordt aan 0 en de hoek van V ten opzichte van I ϕ radialen is. De lengtes $|I|$ en $|V|$ zijn niet de amplitudes van $i(t)$ en $v(t)$, maar worden gedefinieerd als de amplitude gedeeld door $\sqrt{2}$. Met andere woorden,

$$\begin{aligned}|I| &= \frac{1}{\sqrt{2}} |A|, \\|V| &= \frac{1}{\sqrt{2}} |B|.\end{aligned}$$

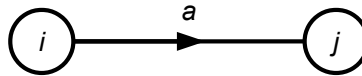
We zullen in de rest van dit verslag alleen de fasor notatie gebruiken.

2.1.2 Admittantie matrix

We beschouwen een elektriciteitsnetwerk bestaande uit twee knooppunten i en j die met elkaar verbonden zijn met een tak a (zie figuur 2.1). We hebben dan de volgende relatie in tak a :

$$I_a = Y_a V_a. \quad (2.1)$$

Hierbij is I_a de elektrische stroom door tak a , Y_a de admittantie en V_a de spanningsval. De admittantie is een grootte die weergeeft hoe eenvoudig elektrische stroom door een transmissielijn van een netwerk kan stromen. De elektrische stromen door de knooppunten i en j zijn respectievelijk I_i en I_j . De spanningen V_i en V_j in knooppunten i en j zijn ten opzichte van de referentie van het netwerk.



Figuur 2.1: Een eenvoudig elektriciteitsnetwerk.

De admittantie heeft de volgende relatie met de impedantie Z_a (ook wel complexe weerstand genoemd):

$$Y_a = \frac{1}{Z_a}.$$

Impedantie is te splitsen in een reëel deel (weerstand R_a) en een imaginair deel (reactantie X_a):

$$Z_a = R_a + \imath X_a.$$

Evenzo kunnen we de admittantie splitsen in een reëel deel (conductantie of geleidbaarheid G_a) en een imaginair deel (susceptantie B_a):

$$Y_a = G_a + \imath B_a.$$

Deze splitsing zullen we gebruiken bij het opstellen van de AC en DC *Power Flow* modellen in elektriciteitsnetwerken (zie paragraaf 2.2). Terugkerend naar het netwerk van figuur 2.1 kunnen we de relatie (2.1) anders formuleren. Als we de elektrische stroom oriënteren van knooppunt i naar knooppunt j dan is volgens de eerste wet van Kirchhoff¹ $I_i = I_a$ en $I_j = -I_a$. We krijgen dus

$$\begin{pmatrix} I_i \\ I_j \end{pmatrix} = I_a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

De spanningsval in de richting van I_a kunnen we noteren als $V_a = V_i - V_j$. Oftewel,

$$V_a = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i \\ V_j \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

¹De eerste wet van Kirchhoff vertelt ons dat in een knooppunt van een elektriciteitsnetwerk de binnenkomende stroom gelijk moet zijn aan de uitgaande stroom.

Combineren we de resultaten van (2.2) en (2.3) met vergelijking (2.1), dan krijgen we de uitdrukking

$$\begin{pmatrix} I_i \\ I_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} Y_a \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i \\ V_j \end{pmatrix}.$$

Oftewel,

$$\begin{pmatrix} I_i \\ I_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_a & -Y_a \\ -Y_a & Y_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i \\ V_j \end{pmatrix}.$$

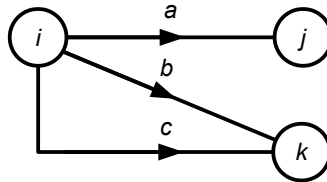
In hoofdstuk 7 van [6] wordt deze methode uitgebreid voor een compleet elektriciteitsnetwerk en ook voor complexe verbindingen. Hieruit volgt dat we de volgende relatie hebben:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Y}\mathbf{V}, \quad (2.4)$$

waarbij $\mathbf{I}$ en $\mathbf{V}$ vectoren zijn van de elektrische stroom en de spanning in elk knooppunt van het netwerk. De admittantie matrix $\mathbf{Y}$ is symmetrisch en wordt in het algemeen als volgt geconstrueerd:

- De diagonaal elementen Y_{ii} zijn gelijk aan de som van alle admittanties van de takken die direct verbonden zijn met knooppunt i .
- De overige elementen Y_{ij} zijn gelijk aan de negatieve waarde van de som van admittanties van takken die knooppunt i met knooppunt j verbinden.

De admittantie matrix is dus de Laplaciaan matrix (*Laplacian matrix of a weighted graph*) van het elektriciteitsnetwerk en beschrijft de relatie tussen de elektrische stroom $\mathbf{I}$, geïnjecteerd in het netwerk, en de spanning $\mathbf{V}$ in de knooppunten.



Figuur 2.2: Voorbeeld van een elektriciteitsnetwerk.

Voorbeeld 2.1.1. Beschouw het netwerk die is weergegeven in figuur 2.2. In dit geval is de admittantie matrix gelijk aan

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_a + Y_b + Y_c & -Y_a & -Y_b - Y_c \\ -Y_a & Y_a & 0 \\ -Y_b - Y_c & 0 & Y_b + Y_c \end{pmatrix},$$

waarbij Y_a , Y_b en Y_c de admittanties zijn van transmissielijnen a , b en c . ♦

2.1.3 Vermogen

Bij elektriciteitsnetwerken spelen drie typen vermogen een rol, namelijk complex, actief en reactief vermogen. Hierbij is het actief vermogen P het reële deel van het complex vermogen S . Actief vermogen geeft aan hoeveel energie een bepaalde richting op stroomt (ook wel energieverbruik per tijdseenheid). Het reactief vermogen Q is het imaginaire deel van het complex vermogen en speelt onder andere een rol bij de productie van warmte in transmissielijnen. Reactief vermogen is afwisselend positief en negatief, met een gemiddelde waarde van nul. Het geeft de activiteit aan van de reactantie X . We krijgen dus de relatie:

$$S = P + \imath Q.$$

Deze relatie is ook uit te drukken in het product van de spanning en de complex geconjugeerde van de elektrische stroom voor een knooppunt i :

$$S_i = V_i \bar{I}_i. \quad (2.5)$$

De fasehoek ϕ is de hoek tussen de spanning V en elektrische stroom I . De lengte van het complex vermogen ($|S|$) wordt ook het schijnbaar vermogen genoemd. Zie voor meer informatie bijvoorbeeld paragraaf 1.6 uit [10].

Zowel actief als reactief vermogen zijn belangrijk voor energienetwerken, omdat beide warmte produceren in transmissielijnen. Er is sprake van energieverlies: het verlies aan actief vermogen in een transmissielijn is gelijk aan $|I|^2 R$, het verlies aan reactief vermogen is $|I|^2 X$.

2.1.4 Eenheid *per unit*

Vaak worden de waarden van vermogen, stroomsterkte, spanning en impedantie weergegeven in *per unit* (p.u.). Deze eenheid is de werkelijke waarde gedeeld door een bepaalde referentie waarde. Stel namelijk dat we als basisspanning 100 kV nemen, dan is een spanning van 112 kV gelijk aan $\frac{112}{100} = 1.12$ p.u. Als men van vermogen, stroomsterkte, spanning en/of impedantie twee basiswaarden heeft vastgelegd, volgen de andere twee andere basiswaarden uit (combinaties van) de volgende relaties:

- basis stroomsterkte (A) = $\frac{\text{basis vermogen (VA)}}{\text{basis spanning (V)}}$,
- basis impedantie (Ω) = $\frac{\text{basis spanning (V)}}{\text{basis stroomsterkte (A)}}$.

Voor meer informatie over deze notatie en het omrekenen van de ene basis naar een andere basis, zie paragraaf 1.10 en 1.11 uit [6].

2.2 Het elektriciteitsnetwerk model

We beschouwen een vereenvoudiging van een elektriciteitsnetwerk, waarbij het netwerk uit N knooppunten (*buses* in het Engels) en M verbindingen tussen de knooppunten bestaat. Als het netwerk bijvoorbeeld op Europees niveau is, dan komt elk knooppunt overeen met een land. Elk knooppunt kan op een of meerdere manieren stroom opwekken (bijvoorbeeld door middel van kolencentrales of kerncentrales) of helemaal niet. Elk knooppunt in ons netwerk heeft dus een verzameling elektriciteitscentrales ter beschikking om vermogen te injecteren in het netwerk.

Een knooppunt in dit elektriciteitsnetwerk wordt (elektrotechnisch gezien) volledig beschreven door vier toestandsvariabelen:

- $|V|$: de lengte van de spanning (in fasor notatie),
- δ : de spanning fasorhoek,
- P : het geïnjecteerd actief vermogen,
- Q : het geïnjecteerd reactief vermogen.

Als deze vier toestandsvariabelen bekend zijn in elk knooppunt van het netwerk, kan daaruit alle voor ons interessante informatie gehaald worden. In het netwerk onderscheiden we drie typen knooppunten:

- *generator bus* (een bron in het netwerk),
- *load bus* (een put in het netwerk),
- *slack bus* (het referentie knooppunt van het netwerk).

Een *load bus* is een knooppunt dat alleen vermogen opneemt en geen vermogen produceert. In een *generator bus* wordt geproduceerd vermogen door elektriciteitscentrales geïnjecteerd in het netwerk. Hierbij is het belangrijk om stil te staan bij het feit dat in een *generator bus* ook een vraag naar vermogen kan zijn. In dit geval is het geïnjecteerd vermogen in een *generator bus* het netto vermogen (geproduceerd vermogen minus opgenomen vermogen).

We introduceren $P_{g,i}$, het totaal geproduceerd actief vermogen, en $P_{d,i}$, het opgenomen actief vermogen in knooppunt i . Analoog hebben we $Q_{g,i}$ en $Q_{d,i}$ voor het reactief vermogen. Verder hebben we N knooppunten, namelijk één *slack bus*, N_g *generator buses* en $N - N_g - 1$ *load buses*. Voor *load buses* geldt dus

$$\begin{aligned} P_{g,i} &= 0, & \forall i \in \{N_g + 2, \dots, N\}, \\ Q_{g,i} &= 0, & \forall i \in \{N_g + 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Verder wordt het geïnjecteerd (of opgenomen) vermogen in elk knooppunt i gegeven door

$$P_i = P_{g,i} - P_{d,i}, \quad (2.6)$$

$$Q_i = Q_{g,i} - Q_{d,i}. \quad (2.7)$$

Als laatste hebben we een referentie knooppunt van het netwerk nodig, de *slack bus*. Omdat we in de fasor notatie werken, zijn de spanning fasorhoeken in elk knooppunt ten opzichte van een bepaalde referentie spanning fasorhoek. Dit is de functie van de *slack bus*. Hierbij moet de *slack bus* in staat zijn om vermogen te injecteren in het netwerk (het is dus eigenlijk een *generator bus*). De reden hiervoor zal gegeven worden aan het eind van paragraaf 2.2.1.

2.2.1 Het AC model

Het zogeheten AC model vertelt ons welke waarden onbekende toestandsvariabelen hebben, gegeven een bepaald scenario van het elektriciteitsnetwerk. Met een scenario bedoelen we dat van elk knooppunt een subset van de toestandsvariabelen vast liggen (gegeven zijn). In ons geval zal een scenario in elk knooppunt twee toestandsvariabelen voorschrijven. De overige twee toestandsvariabelen van elk knooppunt zijn onbekend, maar kunnen bepaald worden met het AC model.

In elk van de drie typen knooppunten worden verschillende toestandsvariabelen voorgeschreven door een scenario. Voor een *load bus* zijn de gevraagde actief en reactief vermogens (P_d en Q_d) bekend en dus ook de opgenomen vermogens (P en Q). Een *generator bus* levert een gepland vermogen P met een vaste spanningslengte $|V|$. In de *slack bus* zijn de spanningslengte en de spanning fasorhoek gegeven. Als we ons netwerk van N knooppunten verdelen in $N_g < N$ *generator buses*, $N - N_g - 1$ *load buses* en één *slack bus*, geeft tabel 2.1 een scenario van het elektriciteitsnetwerk schematisch weer.

Type knooppunt	Aantal knooppunten	Bekend	Onbekend
Slack bus ($i = 1$)	1	$ V_i , \delta_i$	P_i, Q_i
Generator bus ($i = 2, \dots, N_g + 1$)	N_g	$ V_i , P_i$	δ_i, Q_i
Load bus ($i = N_g + 2, \dots, N$)	$N - N_g - 1$	P_i, Q_i	$\delta_i, V_i $

Tabel 2.1: Bekende en onbekende toestandsvariabelen in elk type knooppunt.

We gaan nu de zogeheten *Power Flow Equations* afleiden van het AC model. Herinner dat de relatie tussen de elektrische stroom, de admittantie matrix en de spanning als volgt is (zie ook vergelijking (2.4)):

$$\mathbf{I} = \mathbf{YV}.$$

Componentsgewijs hebben we dus

$$I_i = \sum_{n=1}^N Y_{in} V_n, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (2.8)$$

We schrijven de admittantie Y_{in} en spanning V_i om door gebruik te maken van Eulers identiteit:

$$V_i = |V_i| e^{j\delta_i} = |V_i| (\cos \delta_i + j \sin \delta_i), \quad (2.9)$$

$$Y_{in} = |Y_{in}| e^{j\theta_{in}} = |Y_{in}| (\cos \theta_{in} + j \sin \theta_{in}). \quad (2.10)$$

De resultaten (2.8), (2.9) en (2.10) substitueren we in de vergelijking (2.5) van het complex vermogen in knooppunt i :

$$\begin{aligned} S_i &= V_i \bar{I}_i = V_i \sum_{n=1}^N \bar{Y}_{in} \bar{V}_n = \sum_{n=1}^N |Y_{in}| |V_n| |V_i| \left(\cos(\delta_i - \delta_n - \theta_{in}) + j \sin(\delta_i - \delta_n - \theta_{in}) \right) \\ &= \sum_{n=1}^N |Y_{in}| |V_n| |V_i| \left(\cos(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) - j \sin(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) \right). \end{aligned}$$

Omdat $S_i = P_i + \imath Q_i$, geeft dit:

$$\begin{aligned} P_i &= \sum_{n=1}^N |Y_{in}| |V_n| |V_i| \cos(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) \\ &= |V_i|^2 G_{ii} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |Y_{in}| |V_n| |V_i| \cos(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} Q_i &= - \sum_{n=1}^N |Y_{in}| |V_n| |V_i| \sin(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) \\ &= -|V_i|^2 B_{ii} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |Y_{in}| |V_n| |V_i| \sin(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Hierbij hebben we gebruik gemaakt van de relatie:

$$G_{ii} + \imath B_{ii} = Y_{ii} = |Y_{ii}| (\cos \theta_{ii} + \imath \sin \theta_{ii}).$$

Merk op dat voor een transmissielijn (een tak) van knooppunt i naar n geldt dat het vermogen door die lijn gegeven wordt door

$$\begin{aligned} P_{in} &= |Y_{in}| |V_n| |V_i| \cos(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i), \\ Q_{in} &= -|Y_{in}| |V_n| |V_i| \sin(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i). \end{aligned}$$

Oftewel,

$$P_i = \sum_{n=1}^N P_{in}, \quad Q_i = \sum_{n=1}^N Q_{in}.$$

Vergelijkingen (2.11) en (2.12) zijn de *Power Flow Equations*. Deze leiden na substitutie in vergelijkingen (2.6) en (2.7) tot de *Power Balance Equations*:

$$P_{g,i} - P_{d,i} - |V_i|^2 G_{ii} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |Y_{in}| |V_n| |V_i| \cos(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) = 0, \quad (2.13)$$

$$Q_{g,i} - Q_{d,i} + |V_i|^2 B_{ii} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |Y_{in}| |V_n| |V_i| \sin(\theta_{in} + \delta_n - \delta_i) = 0. \quad (2.14)$$

Het zogeheten *Load-flow* probleem is om gegeven een bepaald scenario (zie tabel 2.1) de spanningen (dat wil zeggen, $|\mathbf{V}|$ en $\boldsymbol{\delta}$) te bepalen, zodanig dat

- voor *load buses* aan vergelijkingen (2.13) en (2.14) voldaan wordt,
- voor *generator buses* aan vergelijking (2.13) voldaan wordt.

Omdat deze vergelijkingen niet lineair zijn, wordt meestal de Newton-Raphson methode toegepast. Hierbij wordt dan naar een oplossing $(|\hat{\mathbf{V}}|, \hat{\boldsymbol{\delta}})$ gezocht zodanig dat

$$P_{g,i} - P_{d,i} - |\hat{V}_i|^2 G_{ii} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |Y_{in}| |\hat{V}_n| |\hat{V}_i| \cos(\theta_{in} + \hat{\delta}_n - \hat{\delta}_i) < \epsilon,$$

$$Q_{g,i} - Q_{d,i} + |\hat{V}_i|^2 B_{ii} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |Y_{in}| |\hat{V}_n| |\hat{V}_i| \sin(\theta_{in} + \hat{\delta}_n - \hat{\delta}_i) < \epsilon.$$

voor een zekere foutmarge ϵ . Hierbij moet rekening gehouden worden dat in sommige knooppunten de lengte van de spanning of de spanning fasorhoek vastliggen (zoals bij de *slack bus* en de *generator buses*). Zie paragraaf 9.4 uit [6] voor meer informatie over het toepassen van de Newton-Raphson methode. We zullen Newton-Raphson niet expliciet toepassen en vermelden het voor de volledigheid. Deze techniek is niet van belang voor de rest van het verslag.

Nadat een oplossing $(|\mathbf{V}|, \boldsymbol{\delta})$ bepaald is, weten we dus het volgende:

- voor de *generator buses* zijn $|V_i|$, δ_i en P_i bekend,
- voor de *load buses* zijn $|V_i|$, δ_i , P_i en Q_i bekend.

Door vergelijking (2.12) toe te passen voor *generator buses* vinden we ook het reactief vermogen Q_i in die knooppunten. Nu rest alleen nog de waarden P_1 en Q_1 van de *slack bus* te bepalen.

Vergelijking (2.6) geldt voor alle knooppunten, dus deze vergelijking kunnen we sommeren, hetgeen leidt tot:

$$\sum_{i=1}^N P_i = \underbrace{\sum_{i=1}^N P_{g,i}}_{\text{Geproduceerd vermogen}} - \underbrace{\sum_{i=1}^N P_{d,i}}_{\text{Opgenomen vermogen}} = \underbrace{P_L}_{\text{Verlies actief vermogen}}. \quad (2.15)$$

Als het geproduceerd vermogen groter is dan het opgenomen vermogen, dan moet er verlies optreden. Dit verlies aan actief vermogen P_L moet gelijk zijn aan de som van alle bijdragen $|I|^2 R$: het verlies aan actief vermogen in een transmissielijn (zie paragraaf 2.1.3). De grootte van de stroomsterkte in elke transmissielijn is pas bekend nadat het *Load-flow* probleem opgelost is. De waarde van P_L is dus oorspronkelijk onbekend.

De waarde van P_1 volgt uit vergelijking (2.15), nadat we de waarde van P_L weten, dus als het *Load-flow* probleem opgelost is. We krijgen namelijk:

$$P_1 = P_L - \sum_{i=2}^N P_i = P_L - \sum_{i=2}^N P_{g,i} + \sum_{i=2}^N P_{d,i}, \quad (2.16)$$

$$P_{g,1} = P_1 + P_{d,1}. \quad (2.17)$$

Op analoge wijze vinden we voor het reactief vermogen:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^N Q_i &= \sum_{i=1}^N Q_{g,i} - \sum_{i=1}^N Q_{d,i} = Q_L. \\
Q_1 &= Q_L - \sum_{i=2}^N Q_i = Q_L - \sum_{i=2}^N Q_{g,i} + \sum_{i=2}^N Q_{d,i}, \\
Q_{g,1} &= Q_1 + Q_{d,1}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Hierbij is Q_L het totale verlies aan reactief vermogen en gelijk aan de som van alle bijdragen $|I|^2 X$ in alle transmissielijnen (zie paragraaf 2.1.3). Met

$$I_{ij} = Y_{ij}(V_i - V_j) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, i \neq j,$$

krijgen we de uitdrukkingen

$$\begin{aligned}
P_L &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |I_{ij}|^2 R_{ij}, \\
Q_L &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |I_{ij}|^2 X_{ij}.
\end{aligned}$$

2.2.2 Het DC model

Een veel gebruikte benadering van het AC model is het DC model. Het voordeel van het DC model is dat de *Power Flow Equations* lineair worden. Vanwege extra aannames en benaderingen is het DC model wel minder nauwkeurig dan het AC model.

We maken de volgende aannames en benaderingen:

- Actief vermogen:
 - de lengtes van de spanning in elk knooppunt zijn 1 p.u. (*per unit*);
 - de weerstand van transmissielijnen worden verwaarloosd: $G_{ij} = 0$ en $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}$;
 - de verschillen tussen de spanning fasorhoeken zijn klein: $\sin(\delta_i - \delta_j) \approx \delta_i - \delta_j$ en $\cos(\delta_i - \delta_j) \approx 1$.
- Reactief vermogen:
 - de lengtes van de spanning in elk knooppunt liggen in de buurt van 1 p.u.;
 - de weerstand van transmissielijnen worden verwaarloosd: $G_{ij} = 0$ en $\theta_{ij} = \frac{\pi}{2}$;
 - de verschillen tussen de spanning fasorhoeken zijn klein: $\sin(\delta_i - \delta_j) \approx \delta_i - \delta_j$ en $\cos(\delta_i - \delta_j) \approx 1$.

Uit de praktijk blijkt dat deze aannames vaak zonder problemen gemaakt kunnen worden. Onder deze aannames volgen uit (2.11) en (2.12) de vereenvoudigde *Power Flow Equations*:

$$P_i = - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |B_{in}|(\delta_n - \delta_i), \quad (2.19)$$

$$Q_i = -|V_i|^2 B_{ii} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |B_{in}| |V_n| |V_i|. \quad (2.20)$$

Merk hierbij op dat $Y_{in} = B_{in}$. Deze laatste vergelijking is nog niet lineair en daarom beschouwen we alleen de variatie $\Delta|V|$ van de spanningen rond 1 p.u.:

$$|V| = 1 + \Delta|V| \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 + \Delta|V|} \approx 1 - \Delta|V|.$$

We herschrijven vergelijking (2.20):

$$\frac{Q_i}{|V_i|} = -|V_i| B_{ii} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |B_{in}| |V_n|.$$

Gebruikmakend van de aanname dat de spanningen rond de 1 p.u. liggen, krijgen we

$$Q_i(1 - \Delta|V_i|) \approx -(1 + \Delta|V_i|)B_{ii} - \underbrace{\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{N_g+1} |B_{in}| |V_n|}_{|V_n| \text{ zijn bekend}} - \underbrace{\sum_{\substack{n=N_g+2 \\ n \neq i}}^N |B_{in}| (1 + \Delta|V_n|)}_{|V_n| \text{ zijn onbekend}}.$$

Oftewel,

$$\underbrace{Q_i + B_{ii} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^{N_g+1} |B_{in}| |V_n| + \sum_{\substack{n=N_g+2 \\ n \neq i}}^N |B_{in}|}_{\text{Bekend}} \approx \Delta|V_i| (Q_i - B_{ii}) - \underbrace{\sum_{\substack{n=N_g+2 \\ n \neq i}}^N |B_{in}| \Delta|V_n|}_{\text{Onbekend}}. \quad (2.21)$$

Hiermee hebben we een lineair stelsel met vergelijkingen (2.19) en (2.21) gekregen in de variabelen $|V_n|$ en $\Delta|V_n|$. Dit stelsel vormt de *Power Flow Equations* van het DC model.

Wij zullen ons alleen richten op een verdere vereenvoudiging, namelijk dat we het reactief vermogen niet beschouwen. We zijn dus alleen geïnteresseerd in de volgende vergelijking:

$$P_i = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |B_{in}|(\delta_i - \delta_n).$$

Hieruit volgt de *Power Balance Equation* van ons vereenvoudigde DC model:

$$P_{g,i} - P_{d,i} - \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq i}}^N |B_{in}|(\delta_i - \delta_n) = 0. \quad (2.22)$$

Het DC *Load-flow* probleem is om δ te bepalen ($|\mathbf{V}| = \mathbf{1}$ volgens onze aannames), met de eis dat

- voor *load buses* en *generator buses* aan vergelijking (2.22) voldaan wordt.

Ook hier geldt weer dat in sommige knooppunten de spanningslengte of de spanning fasorhoek vastliggen. Met onze oplossing δ zijn alle toestandsvariabelen bekend in *generator* en *load buses* (we negeren de waarde van Q_i in elk knooppunt). Nu rest alleen nog de waarde van de toestandsvariabele P_1 van de *slack bus* te bepalen. Deze waarde krijgen we door te realiseren dat vergelijking (2.16) nu vereenvoudigd is, omdat we de weerstand van transmissielijnen hebben verwaarloosd. Met andere woorden, we hebben $P_L = 0$. Dit geeft ons:

$$\begin{aligned} P_1 &= \sum_{i=2}^N P_{d,i} - \sum_{i=2}^N P_{g,i}, \\ P_{g,1} &= P_{d,1} + P_1. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Omdat een scenario de waarden P_i vastlegt voor alle knooppunten behalve de *slack bus*, weten we de waarden van P_1 en $P_{g,1}$ ook en kunnen deze waarden al van tevoren berekend worden.

We kunnen dus concluderen dat voor ons eenvoudige DC model alleen de spanning fasorhoeken van *generator* en *load buses* onbekend zijn en dat die moeten voldoen aan vergelijking (2.22).

2.3 Optimal Power Flow

In de vorige paragraaf hadden wij het over *Power Flow Equations* die gelden voor een gegeven scenario. Hierbij is het netwerk statisch: het geïnjecteerd vermogen (dus ook het geproduceerd vermogen) is bekend. Alleen de spanningslengtes en spanning fasorhoeken moeten nog bepaald worden, waaruit we kunnen afleiden hoe het vermogen getransporteerd wordt door de transmissielijnen. In deze paragraaf zullen we optimalisatie modellen beschrijven die het optimale scenario met bijbehorende spanningen bepaalt: de *Optimal Power Flow (OPF)*. Welk scenario optimaal is, wordt bepaald door de doelfunctie. Deze bestaat bijvoorbeeld uit de kosten voor het genereren van vermogen.

We zullen zowel voor het AC model als voor het vereenvoudigde DC model de optimalisatie modellen opstellen. Ook hierbij geldt dat het DC optimalisatie model eenvoudiger is dan die van het AC model.

2.3.1 Het AC optimalisatie model

Voor het optimalisatie model van het AC model beginnen we met het opstellen van de *Power Balance* vergelijkingen (zie (2.13) en (2.14)). Dit geeft ons de voorwaarden dat de oplossing $(|\mathbf{V}|, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{P}_g, \mathbf{Q}_g)$ moet voldoen aan:

$$\begin{aligned}
P_{g,i} - P_i &= P_{d,i}, & \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
P_i - \sum_{j=1}^N P_{ij} &= 0, & \forall i \in \{2, \dots, N\}, \\
P_{ij} - |Y_{ij}| |V_j| |V_i| \cos(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) &= 0, & \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
Q_{g,i} - Q_i &= Q_{d,i}, & \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
Q_i - \sum_{j=1}^N Q_{ij} &= 0, & \forall i \in \{2, \dots, N\}, \\
Q_{ij} + |Y_{ij}| |V_j| |V_i| \sin(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) &= 0. & \forall i, j \in \{1, \dots, N\}.
\end{aligned}$$

Hierbij zijn $P_{d,i}$, $Q_{d,i}$, $|Y_{ij}|$ en θ_{ij} bekend. Verder moeten we met de *slack bus* rekening houden met de vergelijkingen (2.16) en (2.18). We krijgen de voorwaarden:

$$\begin{aligned}
P_L - \sum_{i=1}^N P_i &= 0, \\
P_L - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |Y_{ij}| (V_i - V_j)^2 R_{ij} &= 0, \\
Q_L - \sum_{i=1}^N Q_i &= 0, \\
Q_L - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |Y_{ij}| (V_i - V_j)^2 X_{ij} &= 0.
\end{aligned}$$

In deze voorwaarden zijn ook de weerstand R_{ij} en reactantie X_{ij} bekend. Met deze voorwaarden hebben we het gedrag van het netwerk vastgelegd. Nu rest nog restricties op te leggen op de capaciteit van de transmissielijnen en de elektriciteitscentrales:

$$\begin{aligned} \text{(transport)} \quad & P_{ij}^{\min} \leq P_{ij} \leq P_{ij}^{\max}, & \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\ \text{(productie)} \quad & P_{g,i}^{\min} \leq P_{g,i} \leq P_{g,i}^{\max}, & \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\ \text{(productie)} \quad & Q_{g,i}^{\min} \leq Q_{g,i} \leq Q_{g,i}^{\max}, & \forall i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Omdat we in fasor notatie werken, kunnen we de volgende voorwaarde stellen aan de spanning fasorhoeken:

$$-\pi < \delta_i \leq \pi, \quad \forall i \in \{2, \dots, N\}.$$

Herinner dat voor de *slack bus* ($i = 1$) de spanning fasorhoek gelijk gesteld is aan nul:

$$\delta_1 = 0.$$

Als laatste is het belangrijk om eisen te stellen aan de spanningslengte in alle knooppunten. Deze moet binnen een bepaald interval blijven:

$$V_i^{\min} \leq |V_i| \leq V_i^{\max}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Hiermee hebben we alle voorwaarden vastgelegd waaraan de oplossing moet voldoen. Uiteraard moet nog bepaald worden hoe we de oplossingen gaan waarderen, zodat een optimum bepaald kan worden. De doelfunctie bestaat uit twee delen:

- termen afhankelijk van gegenereerd vermogen,
- termen afhankelijk van verloren vermogen door het transport.

Oftewel, we hebben als doelfunctie

$$\min \quad \alpha \sum_{i=1}^N (a_i P_{g,i}^2 + b_i P_{g,i} + c_i) + \beta P_L + \gamma Q_L,$$

waarbij α, β, γ niet-negatieve weegfactoren zijn. Merk op dat we hebben gekozen voor een kwadratische functie om de kosten weer te geven van het produceren van elektriciteit, waarbij de constante bijdrage c_i geen effect heeft op het optimum. Dit optimalisatie model voor het AC model is samengevat in paragraaf 2.4.

2.3.2 Het DC optimalisatie model

Zoals al opgemerkt is, is het optimalisatie model voor het DC model eenvoudiger dan die van het AC model. Dit komt voornamelijk door het verwaarlozen van de weerstand en het negeren van het reactief vermogen. Opnieuw beginnen we met het voorschrijven van het gedrag in het netwerk (zie vergelijking (2.22)):

$$\begin{aligned} P_{g,i} - P_i &= P_{d,i}, & \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\ P_i - \sum_{j=1}^N P_{ij} &= 0, & \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\ P_{ij} - |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) &= 0, & \forall i, j \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Het is belangrijk om op te merken dat voor het DC model vergelijking (2.24) ook geldt voor de *slack bus*. Dit komt omdat er geen verlies is van actief vermogen en uit vergelijking (2.23) volgt dat

$$P_1 = - \sum_{i=2}^N P_i = - \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^N P_{ij} = - \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^N |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j).$$

Omdat de admittantie matrix symmetrisch is, krijgen we

$$\begin{aligned} P_1 &= - ((|B_{21}|(\delta_2 - \delta_1) + 0 + |B_{23}|(\delta_2 - \delta_3) + |B_{24}|(\delta_2 - \delta_4) + \dots) \\ &\quad - ((|B_{31}|(\delta_3 - \delta_1) + |B_{32}|(\delta_3 - \delta_2) + 0 + |B_{34}|(\delta_3 - \delta_4) + \dots) \\ &\quad - ((|B_{41}|(\delta_4 - \delta_1) + |B_{42}|(\delta_4 - \delta_2) + |B_{43}|(\delta_4 - \delta_3) + 0 + \dots) \\ &\quad - \dots \\ &= - \sum_{i=2}^N |B_{i1}|(\delta_i - \delta_1) = \sum_{i=2}^N |B_{1i}|(\delta_1 - \delta_i) = \sum_{i=1}^N |B_{1i}|(\delta_1 - \delta_i) = \sum_{i=1}^N P_{1i}. \end{aligned}$$

Verder schrijven we capaciteiten van de transmissielijnen en generatoren voor:

$$\begin{aligned} \text{(transport)} \quad & P_{ij}^{\min} \leq P_{ij} \leq P_{ij}^{\max}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\ \text{(productie)} \quad & P_{g,i}^{\min} \leq P_{g,i} \leq P_{g,i}^{\max}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Omdat de lengte van de spanningen vast ligt ($|\mathbf{V}| = \mathbf{1}$ p.u.), hebben we alleen nog de eis dat de spanning fasorhoeken tussen $-\pi$ en π liggen:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 0, \\ -\pi &< \delta_i \leq \pi, \quad \forall i \in \{2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

De bovengenoemde voorwaarden zijn de voorwaarden van het DC optimalisatie model. De doelfunctie van dit model bevat alleen de productie kosten, aangezien het verlies van actief vermogen wordt verwaarloosd en we reactief vermogen buiten beschouwing laten. We krijgen dus als doelfunctie:

$$\min \quad \sum_{i=1}^N (a_i P_{g,i}^2 + b_i P_{g,i} + c_i).$$

Ook dit model is samengevat in paragraaf 2.4.

2.3.3 Meerdere generatoren per knooppunt

In ons model voor het elektriciteitsnetwerk heeft elk knooppunt mogelijk beschikking tot meerdere elektriciteitscentrales. De ontwikkelde optimalisatie modellen van paragrafen 2.3.1 en 2.3.2 gaan uit van één generator per knooppunt. Deze modellen zijn eenvoudig aan te passen voor meerdere generatoren. Noem $G(i)$ het aantal generatoren van knooppunt i , dan krijgen we

$$\begin{aligned} P_{g,i} &= \sum_{k=1}^{G(i)} P_{g,i(k)}, \\ Q_{g,i} &= \sum_{k=1}^{G(i)} Q_{g,i(k)}. \end{aligned}$$

Door deze vergelijkingen toe te voegen aan de voorwaarden, hebben we het netwerk correct weergegeven. Nu moet alleen nog de doelfunctie aangepast worden naar:

$$\min \quad \alpha \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{G(i)} \left(a_{i(k)} P_{g,i(k)}^2 + b_{i(k)} P_{g,i(k)} + c_{i(k)} \right) + \beta P_L + \gamma Q_L.$$

In het DC optimalisatie model wordt dit dus

$$\min \quad \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^{G(i)} \left(a_{i(k)} P_{g,i(k)}^2 + b_{i(k)} P_{g,i(k)} + c_{i(k)} \right).$$

Elke generator $i(k)$ heeft zijn eigen coëfficiënten $a_{i(k)}$, $b_{i(k)}$ en $c_{i(k)}$, waarbij de constante bijdrage $c_{i(k)}$ geen effect heeft op het optimum.

2.3.4 Netwerkexpansie

Het kan voorkomen dat een elektriciteitsnetwerk niet optimaal is in de zin dat een of meerdere transmissielijnen hun volledige capaciteit gebruiken (ook wel *congested lines* genoemd). Hierdoor moet vaak een duurdere elektriciteitscentrale vermogen produceren, hetgeen zorgt voor hogere kosten. Om dit effect tegen te gaan, kunnen onze modellen uitgebreid worden door toe te staan dat er nieuwe transmissielijnen (nieuwe verbindingen) geplaatst worden.

Het toevoegen van lijnen is eenvoudig te modelleren met binaire of niet-negatieve geheeltallige variabelen. Hierbij moet wel rekening gehouden worden dat niet alleen de maximale capaciteit van een lijn ($P_{ij}^{\min}$ en $P_{ij}^{\max}$) verandert, maar ook de admittantie matrix. Dit heeft als gevolg dat het model niet-lineair wordt.

Om te evalueren of er sprake is van een optimaal netwerk wordt vaak de *Locational Marginal Price* (*LMP*) van elk knooppunt gebruikt. Dit zijn de kosten om één eenheid meer vermogen te leveren aan een knooppunt dan gevraagd, waarbij het vermogen geleverd wordt op de goedkoopst mogelijke manier. Oftewel, dit zijn de schaduw prijzen van de voorwaarden $P_{g,i} - P_i = P_{d,i}$ voor alle $i \in \{1, \dots, N\}$. Als deze schaduw prijzen allemaal aan elkaar gelijk zijn, zijn er geen opstoppen in het netwerk. Deze bewering maken we vanuit de economische interpretatie, een wiskundig bewijs zou nog nodig zijn. Echter zullen we netwerkexpansie niet verder in ons verslag behandelen.

Vaak worden de *Karush-Kuhn-Tucker* (*KKT*) condities gebruikt om de schaduw prijzen te berekenen. Zie voor meer informatie over deze condities bijvoorbeeld paragraaf 5.5.3 in [5].

2.4 Overzicht optimalisatie modellen

Het AC optimalisatie model wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \alpha \sum_{i=1}^N (a_i P_{g,i}^2 + b_i P_{g,i} + c_i) + \beta P_L + \gamma Q_L, \\
\text{s.t.} \quad & P_{g,i} - P_i = P_{d,i}, & \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
& P_i - \sum_{j=1}^N P_{ij} = 0, & \forall i \in \{2, \dots, N\}, \\
& P_{ij} - |Y_{ij}| |V_j| |V_i| \cos(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) = 0, & \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
& Q_{g,i} - Q_i = Q_{d,i}, & \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
& Q_i - \sum_{j=1}^N Q_{ij} = 0, & \forall i \in \{2, \dots, N\}, \\
& Q_{ij} + |Y_{ij}| |V_j| |V_i| \sin(\theta_{ij} + \delta_j - \delta_i) = 0, & \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
& P_L - \sum_{i=1}^N P_i = 0, \\
& P_L - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |Y_{ij}(V_i - V_j)|^2 R_{ij} = 0, \\
& Q_L - \sum_{i=1}^N Q_i = 0, \\
& Q_L - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |Y_{ij}(V_i - V_j)|^2 X_{ij} = 0, \\
& P_{ij}^{\min} \leq P_{ij} \leq P_{ij}^{\max}, & \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
& P_{g,i}^{\min} \leq P_{g,i} \leq P_{g,i}^{\max}, & \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
& Q_{g,i}^{\min} \leq Q_{g,i} \leq Q_{g,i}^{\max}, & \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
& -\pi < \delta_i \leq \pi, & \forall i \in \{2, \dots, N\}, \\
& V_i^{\min} \leq |V_i| \leq V_i^{\max}, & \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
& \delta_1 = 0.
\end{aligned}$$

Het DC optimalisatie model is:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^N (a_i P_{g,i}^2 + b_i P_{g,i} + c_i), \\
\text{s.t.} \quad & P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) = P_{d,i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
& P_{ij}^{\min} \leq |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) \leq P_{ij}^{\max}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
& P_{g,i}^{\min} \leq P_{g,i} \leq P_{g,i}^{\max}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
& -\pi < \delta_i \leq \pi, \quad \forall i \in \{2, \dots, N\}, \\
& \delta_1 = 0.
\end{aligned}$$

3 Robuuste optimalisatie

Robuust optimaliseren is een optimalisatie techniek die redelijk nieuw in de wiskunde is: een van de eerste stappen naar robuust optimaliseren wordt toegeschreven aan een artikel van Soyster uit 1973. In de laatste jaren hebben vooral Ben-Tal, El Ghaoui, Nemirovski en Bertsimas de theorie uitgewerkt, waarbij Bertsimas een andere aanpak heeft dan Ben-Tal, El Ghaoui en Nemirovski. Robuust optimaliseren is een methode om optimalisatie problemen met onzekerheid aan te pakken door te kijken naar de meest beperkende gevallen.

Wij richten ons op de aanpak van Ben-Tal, El Ghaoui en Nemirovski en zullen eerst lineaire optimalisatie problemen met een polyeder² als verstoringsverzameling bekijken, zie paragraaf 3.2. De verstoringsverzamelingen geven de structuur van de parameters met onzekerheid weer. Vervolgens breiden we deze techniek uit met een zogeheten *Conic Representable* verstoringsverzameling in paragraaf 3.3. De beschreven technieken zijn gebaseerd op hoofdstuk 1 uit [1]. Voor een toelichting van de methodes van Bertsimas verwijzen we naar [2], [3] en [4].

Appendix A behandelt de nodige voorkennis voor paragraaf 3.3, zoals de definities van een (convexe) kegel, de duale kegel, dualiteit, het (relatief) inwendige van een verzameling en het affiene omhulsel van een verzameling.

3.1 Robuust lineair optimaliseren

We beschouwen een lineair optimalisatie probleem met onzekerheid (ook wel *Uncertain Linear Optimization* genoemd). Dit is een verzameling

$$\left\{ \inf_x \{c^\top x + d : Ax \leq b\} : \left[\frac{c^\top}{A} \middle| \frac{d}{b} \right] \in \mathcal{U} \right\} \quad (3.1)$$

van lineaire optimalisatie instanties

$$\inf_x \{c^\top x + d : Ax \leq b\},$$

waarbij de waarde van de parameters per instantie kunnen verschillen. Hierbij zijn er m voorwaarden en n variabelen: $c \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $b \in \mathbb{R}^m$. Met andere woorden, we beschouwen een lineair optimalisatie probleem waarbij de parameters onzeker zijn. De structuur van de onzekerheid van de parameters wordt weergegeven door de onzekerheidsverzameling $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^{(m+1) \times (n+1)}$. We nemen aan dat deze onzekerheidsverzameling $\mathcal{U}$ op een lineaire manier geparametriseerd kan worden door een verstoringsvector ζ , gelegen in een verstoringsverzameling $\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^L$. Oftewel,

$$\mathcal{U} = \left\{ \underbrace{\left[\frac{c_0^\top}{A_0} \middle| \frac{d_0}{b_0} \right]}_{D_0} + \sum_{l=1}^L \zeta_l \underbrace{\left[\frac{c_l^\top}{A_l} \middle| \frac{d_l}{b_l} \right]}_{D_l} : \zeta \in \mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^L \right\}.$$

Hierbij kunnen we de matrix D_0 zien als de gemiddelde of verwachte waarde van onze parameters en de matrices D_l als afwijkingen van die gemiddelde waarde.

²Een polyeder definiëren we als de doorsnede van een eindig aantal halfruimtes en kan onbegrensd zijn. Zie ook paragraaf 2.2.4 in [5] of appendix A.

Deze structuur wordt behouden als $\mathcal{Z}$ een lineaire afbeelding is van een andere verstoringsverzameling $\hat{\mathcal{Z}} \subseteq \mathbb{R}^K$. Stel namelijk dat $\hat{\mathcal{Z}} \rightarrow \mathcal{Z}$ door $\zeta \mapsto p + P\zeta$ met $p \in \mathbb{R}^L$ en $P \in \mathbb{R}^{L \times K}$. Er geldt

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \left\{ D_0 + \sum_{l=1}^L \zeta_l D_l : \zeta \in \mathcal{Z} \subseteq \mathbb{R}^L \right\} \\ &= \left\{ D_0 + \sum_{l=1}^L \left(p_l + \sum_{k=1}^K P_{lk} \zeta_k \right) D_l : \zeta \in \hat{\mathcal{Z}} \subseteq \mathbb{R}^K \right\} \\ &= \left\{ \left(D_0 + \sum_{l=1}^L p_l D_l \right) + \sum_{k=1}^K \zeta_k (P_{lk} D_l) : \zeta \in \hat{\mathcal{Z}} \subseteq \mathbb{R}^K \right\}. \end{aligned}$$

Voorbeeld 3.1.1. Stel dat alleen matrix A onzekerheden bevat en dat deze matrix gegeven wordt door

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad a \in [-1, 1], b \in [0, 1], c \in [-1, 0].$$

We kunnen deze onzekerheid omschrijven met de volgende onzekerheidsverzameling $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \zeta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \zeta_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \zeta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \zeta \in [-1, 1] \times [0, 1] \times [-1, 0] \right\}.$$

Een andere manier om de onzekerheid vast te leggen is:

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \zeta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \zeta_2 \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} + \zeta_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} : \zeta \in [-1, 1]^3 \right\}.$$

De verstoringsverzameling $\mathcal{Z}$ is in dit geval een kubus. ♦

Om de techniek verder te beschrijven, moeten we eerst de volgende aannames met betrekking tot de karakteristieken van ons model maken.

A.1 De waarden van de beslissingsvariabelen van (3.1) moeten bepaald worden voordat de realisatie van de onzekere parameters bekend is.

A.2 De voorwaarden van (3.1) zijn bindend en kunnen niet overschreden worden.

Een vector $x \in \mathbb{R}^n$ heet nu een robuust toelaatbare oplossing van (3.1) als het voldoet aan alle mogelijke realisaties van voorwaarden (alle instanties) in de onzekerheidsverzameling $\mathcal{U}$, dat wil zeggen als

$$Ax \leq b, \quad \forall (c, d, A, b) \in \mathcal{U}.$$

We zijn hierbij overgestapt naar een andere notatie: $(c, d, A, b) \in \mathcal{U}$ wil zeggen dat de matrix zoals in (3.1) in $\mathcal{U}$ ligt.

De robuuste waarde van de doelfunctie $\hat{c}$ behorende bij deze toelaatbare oplossing x is de grootste waarde van alle instanties van de doelfunctie in U voor deze oplossing. Oftewel,

$$\hat{c}(x) = \sup_{(c,d,A,b) \in \mathcal{U}} (c^\top x + d). \quad (3.2)$$

Deze definities leiden tot het *Robust Counterpart* (RC) probleem van ons lineaire optimalisatie probleem met onzekerheid:

$$\inf_x \left\{ \sup_{(c,d,A,b) \in \mathcal{U}} (c^\top x + d) : Ax \leq b, \quad \forall (c,d,A,b) \in \mathcal{U} \right\}. \quad (3.3)$$

De optimale oplossing x^* van (3.3) heet de robuuste optimale oplossing met bijbehorende robuuste optimale waarde $\hat{c}(x^*)$.

We kunnen het RC probleem herformuleren, zodat de onzekere parameters alleen in de voorwaarden voorkomen. Dit kunnen we doen door een *dummy* variabele t toe te voegen:

$$\inf_{x,t} \{ t : c^\top x - t \leq -d, \quad Ax \leq b, \quad \forall (c,d,A,b) \in \mathcal{U} \}.$$

We kunnen ook de rechterzijde van de voorwaarden (b en $-d$) herschrijven, zodat alle onzekerheid van de voorwaarden bevat is in een nieuwe matrix A' . Introduceer daartoe *dummy* scalaire variabelen u en v die altijd gelijk zijn aan 1. We krijgen dan

$$\inf_{x,t,u,v} \{ t : c^\top x - t + du \leq 0, \quad Ax - vb \leq 0, \quad u = 1, v = 1, \quad \forall (c,d,A,b) \in \mathcal{U} \}.$$

Definieer nu een nieuwe variabele $x' = (x, t, u, v)^\top$. We krijgen het equivalente model

$$\inf_{x'} \{ c'^\top x' : A'x' \leq b', A' \in \mathcal{U}' \},$$

waarbij

$$\begin{aligned} c' &= (0|1|0|0)^\top, \\ A' &= \left(\begin{array}{c|c|c|c} c & -1 & -d & 0 \\ \hline A & 0 & 0 & -b \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right), \\ b' &= (0|0|1, -1|1, -1)^\top. \end{aligned}$$

Alleen de matrix A' bevat nog onzekerheid die omschreven wordt door de nieuwe bijbehorende onzekerheidsverzameling $\mathcal{U}'$. Deze laatste vorm wordt gebruikt in de methodes van Bertsimas. Ben-Tal en Nemirovski gebruiken de vorm waarbij zowel A als b onzekerheid kunnen bevatten. Kortom, in het vervolg zullen we altijd aannemen dat de doelfunctie geen onzekerheid bevat.

De volgende stap is om te beseffen dat we elke voorwaarde apart kunnen beschouwen. Omdat $Ax \leq b$ voor alle $(A, b) \in \mathcal{U}$ moet gelden, is dit hetzelfde³ als $a_i^\top x \leq b_i$ voor alle $(a_i, b_i) \in \mathcal{U}_i$ voor elke voorwaarde $i \in \{1, \dots, m\}$. De onzekerheidsverzameling $\mathcal{U}_i$ is de projectie van $\mathcal{U}$ op voorwaarde i : $\mathcal{U}_i = \{(a_i, b_i) : (A, b) \in \mathcal{U}\}$. Dit heeft als gevolg dat het niet uitmaakt of we met $\mathcal{U}$ of met $\hat{\mathcal{U}} = \mathcal{U}_1 \times \dots \times \mathcal{U}_m$ werken.

Samenvattend kunnen we dus werken met een model waarin alleen de voorwaarden onzekerheid bevatten en waar we elke voorwaarde apart kunnen beschouwen met betrekking tot die onzekerheid. De vraag is nu of dit *Robust Counterpart* probleem in polynomiale tijd oplosbaar is (*computationally tractable* genoemd). Het blijkt dat dit het geval is als de onzekerheidsverzameling $\mathcal{U}$ zelf *computationally tractable* is (zie paragraaf 1.3 uit [1]). Dat wil zeggen:

- het affine omhulsel (*affine hull*) van $\mathcal{U}$ is van tevoren bekend,
- een punt in het relatief inwendige (*relative interior*) van $\mathcal{U}$ is van tevoren bekend,
- we hebben een (efficiënte) methode om voor een u in polynomiale tijd te bepalen of u wel of geen element van $\mathcal{U}$ is.

3.2 Een polyeder als verstoringsverzameling

In deze paragraaf zullen wij ons beperken tot een eenvoudige structuur van de onzekerheidsverzameling $\mathcal{U}$ die *computationally tractable* is, namelijk

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \end{pmatrix} + \sum_{l=1}^L \zeta_l \begin{pmatrix} a^l \\ b^l \end{pmatrix} : \zeta \in \mathcal{Z} \right\}, \quad (3.4)$$

waarbij $\mathcal{Z}$ een polyeder is. De volgende stelling laat zien hoe we het *RC* probleem kunnen aanpakken.

Stelling 3.2.1. *Beschouw de voorwaarde*

$$a^\top x \leq b, \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \end{pmatrix} + \sum_{l=1}^L \zeta_l \begin{pmatrix} a^l \\ b^l \end{pmatrix} : \zeta \in \mathcal{Z} \right\}, \quad (3.5)$$

waarbij $a, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ en $\mathcal{Z}$ een polyeder is:

$$\mathcal{Z} = \{\zeta \in \mathbb{R}^L : B\zeta \leq p\} = \{\zeta \in \mathbb{R}^L : p - B\zeta \in \mathbb{R}_{\geq 0}^M\}.$$

Dan is de bijbehorende robuuste voorwaarde:

$$\begin{aligned} p^\top y + (a^0)^\top x &\leq b^0, \\ (-B^\top y)_l + (a^l)^\top x &= b^l, \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}, \\ y &\in \mathbb{R}_{\geq 0}^M. \end{aligned}$$

³Hierbij is a_i de i -de rij van A geschreven als een kolomvector.

Bewijs. De volgende situaties zijn equivalent aan elkaar:

$$\begin{aligned}
& x \text{ is een toegelaten oplossing voor (3.5),} \\
\Leftrightarrow & \sup_{\zeta \in \mathcal{Z}} \left\{ \left((a^0) + \sum_{l=1}^L \zeta_l a^l \right)^\top x - \left(b^0 + \sum_{l=1}^L \zeta_l b^l \right) \right\} \leq 0 \\
\Leftrightarrow & \sup_{\zeta \in \mathcal{Z}} \left\{ (a^0)^\top x - b^0 + \sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) \right\} \leq 0 \\
\Leftrightarrow & \sup_{\zeta \in \mathcal{Z}} \left\{ \sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) \right\} \leq b^0 - (a^0)^\top x \\
\Leftrightarrow & \sup_{\zeta \in \mathbb{R}^L} \left\{ \sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) : B\zeta \leq p \right\} \leq b^0 - (a^0)^\top x. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Oftewel, beschouw het maximalisatie probleem

$$\sup_{\zeta} \left\{ \sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) : B\zeta \leq p, \quad \zeta \in \mathbb{R}^L \right\}. \tag{3.7}$$

De duale van dit probleem is

$$\inf_y \{ p^\top y : (B^\top y)_l = (a^l)^\top x - b^l, \forall l \in \{1, \dots, L\}, \quad y \in \mathbb{R}_{\geq 0}^M \}. \tag{3.8}$$

We veronderstellen dat het probleem (3.7) een toegelaten oplossing heeft en begrensd is. Dan volgt uit sterke dualiteit dat de optima ζ^* van (3.7) en y^* van (3.8) bestaan en voldoen aan

$$\sum_{l=1}^L \zeta_l^* ((a^l)^\top x - b^l) = p^\top y^*.$$

Als er nu een toegelaten oplossing y bestaat voor probleem (3.8) met $p^\top y \leq b^0 - (a^0)^\top x$, dan geldt in het bijzonder dat het optimum $p^\top y^* \leq p^\top y \leq b^0 - (a^0)^\top x$. In dit geval wordt er voldaan aan ongelijkheid (3.6) en is x een toegelaten oplossing voor (3.5). Als gevolg van het bovenstaande moeten we voorwaarde (3.5) vervangen met

$$p^\top y + (a^0)^\top x \leq b^0,$$

waarbij y voldoet aan

$$\begin{aligned}
(B^\top y)_l &= (a^l)^\top x - b^l, & \forall l \in \{1, \dots, L\}, \\
y &\geq 0.
\end{aligned}$$

□

Merk op dat we het optimum van (3.8) niet per se nodig hebben, maar slechts een toegelaten oplossing die aan de eisen voldoet. Dit zorgt ervoor dat we niet herhaaldelijk het optimum y^* hoeven te berekenen met de beschreven methode. Deze stelling laat zien dat als we in het begin een lineair optimalisatie probleem met een polyeder als verstoringsverzameling hebben, we als robuust model weer een lineair optimalisatie probleem krijgen.

3.2.1 Voorbeeld: een hyperkubus

Stel $\mathcal{Z} = \{\zeta \in \mathbb{R}^L : -1 \leq \zeta_l \leq 1, \forall l \in \{1, \dots, L\}\}$, oftewel een hyperkubus. Gebruikmakend van de notatie in de vorige paragraaf, kunnen we de matrix B definiëren als

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}.$$

De matrix B heeft dimensie $2L \times L$. Verder heeft vector $p = (1, \dots, 1)^\top$ dimensie $2L \times 1$. Stelling 3.2.1 geeft ons de robuuste voorwaarden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2L} y_k + (a^0)^\top x &\leq b^0, \\ -y_{2l-1} + y_{2l} + (a^l)^\top x &= b^l, \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}, \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

We kunnen de robuuste voorwaarden ook op een andere manier bepalen, namelijk

voorwaarde (3.5)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \left((a^0) + \sum_{l=1}^L \zeta_l (a^l) \right)^\top x \leq \left(b^0 + \sum_{l=1}^L \zeta_l b^l \right), \quad \forall \zeta \in \mathcal{Z} \\ \Leftrightarrow & \sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) \leq b^0 - (a^0)^\top x, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^L : |\zeta_l| \leq 1, \forall l \in \{1, \dots, L\} \\ \Leftrightarrow & \max_{\zeta \in \mathbb{R}^L} \left(\sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) : -1 \leq \zeta_l \leq 1, \forall l \in \{1, \dots, L\} \right) \leq b^0 - (a^0)^\top x. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Het maximum in (3.9) is gelijk aan $\sum_{l=1}^L |(a^l)^\top x - b^l|$. Oftewel,

$$(a^0)^\top x + \sum_{l=1}^L |(a^l)^\top x - b^l| \leq b^0. \quad (3.10)$$

Deze voorwaarde is equivalent met de voorwaarden:

$$(a^0)^\top x + \sum_{l=1}^L u_l \leq b^0, \quad (3.11)$$

$$-u_l \leq (a^l)^\top x - b^l \leq u_l, \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}, \quad (3.12)$$

$$u_l \geq 0, \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}. \quad (3.13)$$

Hierbij bedoelen we met equivalent dat als er een x is die aan voorwaarde (3.10) voldoet, dan is er een u die met deze x aan voorwaarden (3.11), (3.12) en (3.13) voldoet en vice versa. Stel namelijk dat x voldoet aan (3.10). Neem $u_l = |(a^l)^\top x - b^l|$ voor $l \in \{1, \dots, L\}$, dan voldoet u direct aan (3.11), (3.12) en (3.13). Anderzijds geldt vanwege (3.12) dat $u_l \geq |(a^l)^\top x - b^l|$. We krijgen dan

$$(a^0)^\top x + \sum_{l=1}^L |(a^l)^\top x - b^l| \leq (a^0)^\top x + \sum_{l=1}^L u_l \stackrel{(3.11)}{\leq} b^0.$$

Dus de voorwaarden zijn equivalent.

Een voor de hand liggende vraag is nu of de twee methodes (de stelling en direct oplossen) equivalente robuuste voorwaarden opleveren. Dit blijkt het geval te zijn. We verwijzen met ‘methode 1’ naar de voorwaarden die verkregen zijn met de stelling en met ‘methode 2’ naar de voorwaarden met het direct oplossen. We zullen aantonen dat de toegelaten oplossingen van methode 1 bevat zijn in de toegelaten oplossingen van methode 2 en vice versa.

Stel x is een toegelaten oplossing volgens methode 1. We hebben dus een y die aan de voorwaarden van methode 1 voldoet. Neem $u_l = y_{2l-1} + y_{2l}$ voor alle $l \in \{1, \dots, L\}$. Dan geldt:

- $u_l \geq 0$, omdat $y \geq 0$ (hetgeen we vaker zullen gebruiken),
- $(a^0)^\top x + \sum_{l=1}^L u_l = (a^0)^\top x + \sum_{l=1}^L (y_{2l-1} + y_{2l}) = (a^0)^\top x + \sum_{k=1}^{2L} y_k \leq b^0$,
- $-u_l = -y_{2l-1} - y_{2l} \leq y_{2l-1} - y_{2l} = (a^l)^\top x - b^l$,
- $u_l = y_{2l-1} + y_{2l} \geq y_{2l-1} - y_{2l} = (a^l)^\top x - b^l$.

Oftewel, we voldoen aan de voorwaarden van methode 2. Dus de toegelaten oplossingen bepaald met methode 1 zijn bevat in de toegelaten oplossingen bepaald met methode 2.

De andere kant op gaat iets subtieler. Stel x is een toegelaten oplossing volgens methode 2. We hebben dan een u die aan de voorwaarden van methode 2 voldoet. Noem $u_l^* = |(a^l)^\top x - b^l|$, dan geldt $u_l^* \leq u_l$ voor alle $l \in \{1, \dots, L\}$. Nu moeten we twee gevallen onderscheiden: $(a^l)^\top x - b^l \geq 0$ en $(a^l)^\top x - b^l < 0$. In het eerste geval (niet-negatief) nemen we $y_{2l-1} = (a^l)^\top x - b^l = u_l^*$ en $y_{2l} = 0$ voor alle $l \in \{1, \dots, L\}$. Dan geldt:

- $y \geq 0$,
- $-y_{2l-1} + y_{2l} + (a^l)^\top x = -((a^l)^\top x - b^l) + (a^l)^\top x = b^l$,
- $\sum_{k=1}^{2L} y_k + (a^0)^\top x = \sum_{l=1}^L u_l^* + (a^0)^\top x \leq \sum_{l=1}^L u_l + (a^0)^\top x \leq b^0$.

Dus de toegelaten oplossingen van methode 2 zijn bevat in die van methode 1 voor dit geval. In het tweede geval (negatief) nemen we $y_{2l-1} = 0$ en $y_{2l} = b^l - (a^l)^\top x = u_l^*$ voor alle $l \in \{1, \dots, L\}$. Met deze keuze vinden we dat

- $y \geq 0$,
- $-y_{2l-1} + y_{2l} + (a^l)^\top x = b^l - (a^l)^\top x + (a^l)^\top x = b^l$,
- $\sum_{k=1}^{2L} y_k + (a^0)^\top x = \sum_{l=1}^L u_l^* + (a^0)^\top x \leq \sum_{l=1}^L u_l + (a^0)^\top x \leq b^0$.

Ook in dit geval zijn de toegelaten oplossingen van methode 2 bevat in die van methode 1. We concluderen dat beide methodes equivalent zijn.

3.3 Een *Conic Representable* verstoringsverzameling

We zullen in deze paragraaf een algemenere structuur voor de onzekerheidsverzameling $\mathcal{U}$ bekijken, waardoor het *Robust Counterpart* probleem *computationally tractable* is. Raadpleeg appendix A voor de gebruikte notatie en definities. Daarvoor definiëren we eerst een *Conic Representable* verzameling.

Definitie 3.3.1. Een verzameling $\mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$ heet *Conic Representable* (*CR*) als er reguliere⁴ kegels $\mathbf{K}^1, \dots, \mathbf{K}^M$ met $\dim \mathbf{K}^i = m_i$ voor alle $i \in \{1, \dots, M\}$, extra variabelen $u_i \in \mathbb{R}^{k_i}$, matrices $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times (n+k_i)}$ en vectoren $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ bestaan, zodanig dat:

$$x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow A_i \begin{pmatrix} x \\ u_i \end{pmatrix} - b_i \succeq_{\mathbf{K}^i} 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, M\}.$$

Anders gezegd, $\mathcal{X}$ is *CR* als het een projectie van de oplossingsruimte van de beschreven ongelijkheden op $\mathbb{R}^n$ is. ■

We zullen een aantal voorbeelden geven van voorwaarden waarvan de toegelaten oplossingen *CR* verzamelingen zijn.

Voorbeeld 3.3.2. De voorwaarde $|Ax + b| \leq c$ met $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}^m$ is equivalent aan het stelsel voorwaarden

$$\begin{aligned} -u_i &\leq a_i^\top x + b_i && \leq u_i, && \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ 0 &\leq u_i && \leq c_i, && \forall i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Oftewel, de voorwaarde is equivalent met

$$\begin{aligned} a_i^\top x + b_i + u_i &\in \mathbb{R}_{\geq 0}, && u_i - a_i^\top x - b_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, && \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ u_i &\in \mathbb{R}_{\geq 0}, && c_i - u_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, && \forall i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned} \quad \blacklozenge$$

Voorbeeld 3.3.3. Als we de voorwaarde $\|Ax + b\|_2 \leq c$ met $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ bekijken, is deze equivalent aan de voorwaarde

$$P(Ax + b) + cp \in \mathbf{L}^{m+1},$$

waarbij $P(Ax + b) = \begin{bmatrix} Ax + b \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$, $p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m+1}$ en $\mathbf{L}^{m+1}$ een Lorentz-kegel is. ◆

Voorbeeld 3.3.4. Voor de voorwaarde $\|Ax + b\|_\infty \leq c$ met $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ is het equivalente stelsel van voorwaarden:

$$\begin{aligned} a_i^\top x + b_i + u &\in \mathbb{R}_{\geq 0}, && u - a_i^\top x - b_i \in \mathbb{R}_{\geq 0}, && \forall i \in \{1, \dots, m\}, \\ u &\in \mathbb{R}_{\geq 0}, && c - u \in \mathbb{R}_{\geq 0}, && \forall i \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Hierbij is $\|y\|_\infty = \max\{|y_i| : i \in \{1, \dots, m\}\}$ voor $y \in \mathbb{R}^m$. ◆

⁴Een reguliere kegel is een puntige convexe kegel die gesloten is en een niet-leeg inwendige heeft. Een voorbeeld van een reguliere kegel is $\mathbb{R}_{\geq 0}^n$, het niet-negatieve orthant.

Stel $\mathcal{U}$ wordt gegeven door

$$\mathcal{U} = \left\{ \begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \end{pmatrix} + \sum_{l=1}^L \zeta_l \begin{pmatrix} a^l \\ b^l \end{pmatrix} : \zeta \in \mathcal{Z} \right\},$$

waarbij $\mathcal{Z}$ een CR verzameling is:

$$\mathcal{Z} = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^L : \exists u \in \mathbb{R}^K : P\zeta + Qu + p \in \mathbf{K} \subseteq \mathbb{R}^M \right\}, \quad (3.14)$$

met $\mathbf{K}$ een reguliere kegel, $P \in \mathbb{R}^{M \times L}$, $Q \in \mathbb{R}^{M \times K}$ gegeven matrices en $p \in \mathbb{R}^M$ een gegeven vector. We nemen hierbij aan dat

$$\exists \tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^L, \tilde{u} \in \mathbb{R}^K : P\tilde{\zeta} + Q\tilde{u} + p \in \text{int } \mathbf{K}.$$

In dit geval kunnen we het *Robust Counterpart* probleem bepalen, hetgeen we in de volgende stelling bewijzen.

Stelling 3.3.5. *Beschouw de voorwaarde*

$$a^\top x \leq b, \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \end{pmatrix} + \sum_{l=1}^L \zeta_l \begin{pmatrix} a^l \\ b^l \end{pmatrix} : \zeta \in \mathcal{Z} \right\}, \quad (3.15)$$

waarbij $a, x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ en $\mathcal{Z}$ een CR verzameling is:

$$\mathcal{Z} = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^L : \exists u \in \mathbb{R}^K : P\zeta + Qu + p \in \mathbf{K} \subseteq \mathbb{R}^M \right\}.$$

Verder hebben we een strikt toegelaten paar vectoren $\tilde{\zeta}$ en $\tilde{u}$:

$$\exists \tilde{\zeta} \in \mathbb{R}^L, \tilde{u} \in \mathbb{R}^K : P\tilde{\zeta} + Q\tilde{u} + p \in \text{int } \mathbf{K}.$$

Dan is de bijbehorende robuuste voorwaarde:

$$\begin{aligned} p^\top y + (a^0)^\top x &\leq b^0, \\ Q^\top y &= 0, \\ (P^\top y)_l + (a^l)^\top x &= b^l, \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}, \\ y &\in \mathbf{K}_*, \end{aligned}$$

met $\mathbf{K}_* = \{y \in \mathbb{R}^M : y^\top z \geq 0, \forall z \in \mathbf{K}\}$ de duale kegel van $\mathbf{K}$.

Bewijs. Het bewijs volgt dezelfde structuur als het bewijs van stelling 3.2.1. De volgende situaties zijn equivalent aan elkaar:

$$\begin{aligned} &x \text{ is een toegelaten oplossing voor (3.15)} \\ \Leftrightarrow &\sup_{\zeta \in \mathcal{Z}} \left\{ \left((a^0) + \sum_{l=1}^L \zeta_l a^l \right)^\top x - \left(b^0 + \sum_{l=1}^L \zeta_l b^l \right) \right\} \leq 0 \\ \Leftrightarrow &\sup_{\zeta \in \mathcal{Z}} \left\{ \sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) \right\} \leq b^0 - (a^0)^\top x \\ \Leftrightarrow &\sup_{\zeta \in \mathbb{R}^L, u \in \mathbb{R}^K} \left\{ \sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) : P\zeta + Qu + p \in \mathbf{K} \right\} \leq b^0 - (a^0)^\top x. \quad (3.16) \end{aligned}$$

We moeten dus het volgende maximalisatie probleem beschouwen:

$$\sup_{\zeta, u} \left\{ \sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) : P\zeta + Qu + p \in \mathbf{K}, \quad \zeta \in \mathbb{R}^L, u \in \mathbb{R}^K \right\}. \quad (3.17)$$

Om een bovengrens te vinden van dit maximalisatie probleem, gebruiken we het duale probleem

$$\inf_y \{ p^\top y : -Q^\top y = 0, \quad -(P^\top y)_l = (a^l)^\top x - b^l, \forall l \in \{1, \dots, L\}, \quad y \in \mathbf{K}_* \}. \quad (3.18)$$

We veronderstellen dat (3.17) begrensd is. Omdat we een strikt toegelaten paar vectoren $\tilde{\zeta}$ en $\tilde{u}$ hebben, heeft (3.17) een strikt toegelaten oplossing. Uit sterke dualiteit volgt nu dat de optima ζ^* van (3.17) en y^* van (3.18) bestaan en voldoen aan

$$\sum_{l=1}^L \zeta_l^* ((a^l)^\top x - b^l) = p^\top y^*.$$

Als we een toegelaten oplossing y hebben voor (3.18) met $p^\top y \leq b^0 - (a^0)^\top x$, dan geldt dezelfde ongelijkheid voor het optimum van de duale: $p^\top y^* \leq p^\top y \leq b^0 - (a^0)^\top x$. Hieruit volgt dat er voldaan wordt aan ongelijkheid (3.16) en is x een toegelaten oplossing voor (3.15). Kortom, we moeten voorwaarde (3.15) vervangen met

$$p^\top y + (a^0)^\top x \leq b^0,$$

waarbij y voldoet aan

$$\begin{aligned} Q^\top y &= 0, \\ (P^\top y)_l + (a^l)^\top x &= b^l, \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}, \\ y &\in \mathbf{K}_*. \end{aligned}$$

□

Als we over $\mathbf{K}_*$ efficiënt kunnen optimaliseren, dan kunnen we het robuuste model in polynomiale tijd oplossen. Merk op dat als $\mathcal{Z}$ een polyeder is zoals in het voorbeeld van paragraaf 3.2, dan is deze te herschrijven als een CR verzameling: neem $P = -B$, $Q = 0$, $p = p$ en $\mathbf{K} = \mathbb{R}_{\geq 0}^M$. Stelling 3.2.1 is dus een speciaal geval van stelling 3.3.5.

Als de kegel $\mathbf{K}$ een direct product is van meerdere (eenvoudigere) kegels $\mathbf{K}^1, \dots, \mathbf{K}^S$, oftewel als

$$\mathcal{Z} = \{ \zeta \in \mathbb{R}^L : \forall s \in \{1, \dots, S\} \quad \exists u^s \in \mathbb{R}^{K_s} : P_s \zeta + Q_s u^s + p_s \in \mathbf{K}^s \subseteq \mathbb{R}^{N_s} \},$$

dan wordt de robuuste voorwaarde gegeven door het volgende stelsel van voorwaarden in de variabelen $x, y^1, \dots, y^S$:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S p_s^\top y^s + (a^0)^\top x &\leq b^0, \\ Q_s^\top y^s &= 0, \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}, \\ \sum_{s=1}^S (P_s^\top y^s)_l + (a^l)^\top x &= b^l, \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}, \\ y^s &\in \mathbf{K}_s^*, \quad \forall s \in \{1, \dots, S\}. \end{aligned}$$

3.3.1 Voorbeeld: een eenheidsbol

In dit voorbeeld beschouwen we het geval dat de verstoringverzameling $\mathcal{Z}$ de eenheidsbol is:

$$\mathcal{Z} = \{\zeta \in \mathbb{R}^L : \|\zeta\|_2 \leq 1\}.$$

Deze CR verzameling kunnen we ook weergeven als

$$\mathcal{Z} = \{\zeta \in \mathbb{R}^L : P\zeta + p \in \mathbf{L}^{L+1}\},$$

waarbij $P\zeta = \begin{bmatrix} \zeta \\ 0 \end{bmatrix}$ en $p = e_{L+1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Volgens stelling 3.3.5 is de robuuste voorwaarde nu

$$\begin{aligned} p^\top y + (a^0)^\top x &\leq b^0, \\ (P^\top y)_l + (a^l)^\top x &= b^l, \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}, \\ y &\in \mathbf{L}^{L+1}. \end{aligned}$$

Merk op dat $\mathbf{L}_*^{L+1} = \mathbf{L}^{L+1}$. Vullen we onze waarden voor P en p in, dan krijgen we

$$\begin{aligned} y_{L+1} + (a^0)^\top x &\leq b^0, \\ y_l + (a^l)^\top x &= b^l, \quad \forall l \in \{1, \dots, L\}, \\ y &\in \mathbf{L}^{L+1}. \end{aligned}$$

Aan de andere kant kunnen we ook direct de robuuste voorwaarde bepalen:

$$\begin{aligned} &\left((a^0) + \sum_{l=1}^L \zeta_l (a^l) \right)^\top x \leq \left(b^0 + \sum_{l=1}^L \zeta_l b^l \right), \quad \forall \zeta \in \mathcal{Z} \\ \Leftrightarrow & (a^0)^\top x + \sum_{l=1}^L \zeta_l (a^l)^\top x \leq b^0 + \sum_{l=1}^L \zeta_l b^l, \quad \forall \zeta \in \mathbb{R}^L : \|\zeta\|_2 \leq 1 \\ \Leftrightarrow & \max_{\|\zeta\|_2 \leq 1} \left(\sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) \right) \leq b^0 - (a^0)^\top x \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\sum_{l=1}^L ((a^l)^\top x - b^l)^2} \leq b^0 - (a^0)^\top x. \end{aligned}$$

De laatste stap volgt uit de Cauchy-Schwarz ongelijkheid. Neem $y_l = ((a^l)^\top x - b^l)$ voor alle $l \in \{1, \dots, L\}$. Er geldt namelijk voor $\|\zeta\|_2 \leq 1$:

$$|\langle \zeta, y \rangle| \leq \|\zeta\|_2 \|y\|_2 \leq \|y\|_2.$$

Neem nu

$$\xi = \frac{y}{\|y\|_2} \quad \Rightarrow \quad \|\xi\|_2 = \frac{1}{\|y\|_2} \|y\|_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \xi \in \mathcal{Z}.$$

Verder geldt

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{l=1}^L \xi_l ((a^l)^\top x - b^l) \right) &= \langle \xi, y \rangle \\
&= \frac{1}{\|y\|_2} \langle y, y \rangle = \|y\|_2 \\
&= \sqrt{\sum_{l=1}^L ((a^l)^\top x - b^l)^2}.
\end{aligned}$$

Oftewel, deze ξ maximaliseert $\left(\sum_{l=1}^L \zeta_l ((a^l)^\top x - b^l) \right)$ voor alle $\|\zeta\|_2 \leq 1$.

De voorwaarden die volgen uit de stelling en de voorwaarden die volgen uit het direct oplossen zijn duidelijk equivalent. Uit de methode van de stelling volgt namelijk dat $y_l = b^l - (a^l)^\top x$ voor alle $l \in \{1, \dots, L\}$ en $y_{L+1} \leq b^0 - (a^0)^\top x$. Uit $y \in \mathbf{L}^{L+1}$ volgt nu

$$\sqrt{\sum_{l=1}^L (b^l - (a^l)^\top x)^2} = \sqrt{\sum_{l=1}^L y_l^2} \leq y_{L+1} \leq b^0 - (a^0)^\top x.$$

Uiteraard is $(b^l - (a^l)^\top x)^2$ gelijk aan $((a^l)^\top x - b^l)^2$.

4 Toepassing op het DC model

Herinner dat het *DC Optimal Power Flow* model (dit keer met een lineaire doelfunctie) beschreven wordt door het volgende optimalisatie model:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{i=1}^N (c_i P_{g,i} + d_i), \\
 \text{s.t.} \quad & P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) = P_{d,i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
 & P_{ij}^{\min} \leq |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) \leq P_{ij}^{\max}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
 & P_{g,i}^{\min} \leq P_{g,i} \leq P_{g,i}^{\max}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
 & -\pi \leq \delta_i \leq \pi, \quad \forall i \in \{2, \dots, N\}, \\
 & \delta_1 = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

We veronderstellen dat de (productie-) kosten (c en d) en de maximale productiecapaciteit ($P_{g,i}^{\min}$ en $P_{g,i}^{\max}$) bekend zijn en geen onzekerheid bevatten. De overige netwerkparameters en vraag naar vermogen beschouwen we wel als onzeker, waarbij we drie gevallen zullen onderzoeken:

- alleen de vraag $P_{d,i}$ bevat onzekerheid,
- alleen de maximale capaciteit van een transmissielijn $P_{ij}^{\min}$ en $P_{ij}^{\max}$ bevat onzekerheid,
- alleen de admittantie matrix $Y = B$ bevat onzekerheid.

We zullen de drie gevallen apart beschouwen. Dit doen we omdat we dan de invloeden direct kunnen koppelen aan de onzekerheid van een bepaalde parameter.

Onze onderzoeksvragen zijn:

1. Kan robuust optimaliseren gebruikt worden om nuttige informatie over het elektriciteitsnetwerk te verkrijgen bij onzekere vraag $P_{d,i}$ of capaciteit $P_{ij}^{\min}$ en $P_{ij}^{\max}$?
2. Heeft (kleine) onzekerheid in de admittantie matrix B_{ij} een (grote) invloed op de optimale oplossing en de prestaties van het netwerk?

Hierbij denken we bij nuttige informatie over het netwerk aan het detecteren van transmissielijnen die (vaak) overbelast zullen zijn en waar stijging van de vraag of daling van de capaciteit de grootste invloed heeft op de prestaties van het netwerk. Met de prestaties van het netwerk bedoelen we de resulterende productiekosten (de waarde van de doelfunctie) in het optimum en hoeveel transmissielijnen aan hun maximale capaciteit zitten.

We onderzoeken de invloed van onzekere vraag, omdat de vraag niet van tevoren bekend is. De vraag verschilt per tijdstip en is onderhevig aan externe invloeden (denk aan het weer, zeldzame activiteiten, et cetera). Omdat er veel gegevens zijn van de vraag in elk knooppunt, wordt vaak stochastische optimalisatie toegepast om een optimale configuratie van het netwerk en productie te bepalen. Hierbij zijn vele simulaties nodig en wij vragen ons af of we met robuust optimaliseren soortgelijke netwerkinformatie kunnen krijgen, zonder vele simulaties uit te voeren. Robuust optimaliseren moet iets bieden wat we niet met stochastisch of ‘normale’ optimalisatie kunnen krijgen.

Een model voor het elektriciteitsnetwerk is een versimpelde weergave van de werkelijkheid waarbij de transmissielijnen vaak samengevoegd worden gemodelleerd. Zo bestaat er een model van het Europese elektriciteitsnetwerk met 26 knooppunten en 46 transmissielijnen, uiteraard minder knooppunten en lijnen dan in de werkelijkheid. We veronderstellen dat de waarde van de admittantie (B) meetfouten bevat en dat door het samenvoegen van lijnen ook onnauwkeurigheden ontstaan. Hoe groot deze fouten en afwijkingen zijn, weten we niet. Daarom zullen we met verschillende onzekerheidsverzamelingen gaan werken.

We zullen minder nadruk leggen op onzekere maximale capaciteit van de transmissielijnen. Vanwege dezelfde redenen als voor de admittantie matrix (meetfouten en het samenvoegen van lijnen) vinden wij het aannemelijk dat de capaciteiten ook onzekerheid bevatten.

4.1 Onzekere vraag

Allereerst gaan we het bijbehorende *Uncertain Linear Optimization* probleem beschouwen, waarbij de vraag $P_{d,i}$ onzeker is. We veronderstellen dat van elke vraag $P_{d,i}$ in een knooppunt i een empirische verdeling beschikbaar is. Van deze verdelingen bepalen we voor elk knooppunt het interval $[P_{d,i}^a, P_{d,i}^b]$, zodat $\Pr(P_{d,i} \in [P_{d,i}^a, P_{d,i}^b]) = (1 - \alpha_i)$ met $\alpha_i \in [0, 1]$ en $\frac{1}{2}(P_{d,i}^a + P_{d,i}^b)$ de verwachte waarde is. Hierbij staat $\Pr(A)$ voor de kans op gebeurtenis A . Van alle mogelijke scenario's van vraag naar vermogen maken we dus een selectie van de meest waarschijnlijke scenario's. Nu kunnen we de onzekerheid van $P_{d,i}$ als volgt modelleren:

$$P_{d,i} = \frac{P_{d,i}^a + P_{d,i}^b}{2} + \zeta_i \frac{P_{d,i}^b - P_{d,i}^a}{2}, \quad \zeta_i \in [-1, 1], \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.2)$$

Voor $\zeta_i = -1$ krijgen we dus $P_{d,i} = P_{d,i}^a$ en voor $\zeta_i = 1$ is $P_{d,i} = P_{d,i}^b$. Hiermee hebben we de onzekerheidsverzameling $\mathcal{U}$ (die we niet expliciet uitschrijven) en de verstoringsverzameling $\mathcal{Z}_i = [-1, 1]$ bepaald. We nemen nu aan dat de verstoringsparameters ζ_i (en dus alle $P_{d,i}$) onafhankelijk van elkaar zijn, dat wil zeggen $\mathcal{Z} = [-1, 1]^N$. Later zullen we het geval met afhankelijkheid behandelen. Deze definitie van $P_{d,i}$ heeft als voordeel dat $\mathcal{Z}$ dezelfde structuur heeft als in het voorbeeld van paragraaf 3.2.1.

De robuuste oplossing moet voldoen aan alle scenario's in $\mathcal{U}$. We zien dat dit problemen geeft met voorwaarde (4.1): als $P_{d,i}$ niet constant is voor alle scenario's, dan bestaat er geen robuuste oplossing. Daarom moeten we deze voorwaarde aanpassen. We nemen als nieuwe voorwaarde dat het geïnjecteerd vermogen groter dan of gelijk aan het opgenomen vermogen moet zijn:

$$P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) \geq P_{d,i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.3)$$

Als we vergelijking (4.2) substitueren in voorwaarde (4.3) dan krijgen we

$$P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) \geq \frac{P_{d,i}^a + P_{d,i}^b}{2} + \zeta_i \frac{P_{d,i}^b - P_{d,i}^a}{2}, \quad \zeta_i \in \mathcal{Z}_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

We beschouwen nu alleen de voorwaarde voor knooppunt i . Deze kunnen we herschrijven naar

$$\begin{aligned}
& \zeta_i \frac{P_{d,i}^b - P_{d,i}^a}{2} \leq P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) - \frac{P_{d,i}^a + P_{d,i}^b}{2}, \quad \zeta_i \in [-1, 1] \\
\Leftrightarrow & \max_{\zeta_i \in [-1, 1]} \left(\zeta_i \frac{P_{d,i}^b - P_{d,i}^a}{2} \right) \leq P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) - \frac{P_{d,i}^a + P_{d,i}^b}{2} \\
\Leftrightarrow & \frac{P_{d,i}^b - P_{d,i}^a}{2} \leq P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) - \frac{P_{d,i}^a + P_{d,i}^b}{2}.
\end{aligned}$$

De laatste stap volgt uit het feit dat $P_{d,i}^b - P_{d,i}^a \geq 0$ (zie ook paragraaf 3.2.1). Dit resultaat is geldig voor elk knooppunt i , omdat de verstoringsverzamelingen $\mathcal{Z}_i$ hetzelfde zijn. We krijgen dus uiteindelijk de voorwaarden

$$P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) \geq P_{d,i}^b, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.4)$$

Omdat de doelfunctie alleen positieve coëfficiënten heeft, willen we de $P_{g,i}$ zo klein mogelijk houden. Dit leidt tot de conclusie dat we van ongelijkheden (4.4) gelijkheden kunnen maken:

$$P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) = P_{d,i}^b, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

De robuuste voorwaarde met onze huidige verstoringsverzameling $\mathcal{Z}$ is dus het *Optimal Power Flow* probleem waarbij de vraag in alle knooppunten maximaal is ($P_{d,i} = P_{d,i}^b$). In zo goed als alle geselecteerde scenario's wordt er dus te veel vermogen geleverd aan elk knooppunt, hetgeen in de werkelijkheid operationeel gezien niet mogelijk is, tenzij het extra vermogen lokaal opgeslagen of verspild kan worden. In de werkelijkheid zal dus het geleverd vermogen door de elektriciteitscentrales verminderd worden, afhankelijk van de situatie. De robuuste oplossing vormt dus geen goede standaard configuratie.

De robuuste oplossing vertelt ons wel waar de capaciteit van de elektriciteitslijnen onvoldoende is om te voldoen aan alle geselecteerde scenario's. We kunnen hierbij de volgende methodes gebruiken:

- Het uniform verhogen van de vraag: $\alpha_i = \alpha, \forall i \in \{1, \dots, N\}$. Hiermee kunnen we onderzoeken welke lijnen als eerste hun volledige capaciteit gebruiken.
- Het individueel verhogen van de vraag: $\alpha_j = \alpha$ en $\alpha_i = 0, \forall i \in \{1, \dots, N\} \setminus \{j\}$ voor een zekere $j \in \{1, \dots, N\}$. We kunnen onderzoeken voor welk knooppunt verhoging van de vraag de grootste negatieve invloed heeft op de prestaties van het netwerk. Merk op dat voor deze methode we N keer een optimum moeten vinden, hetgeen niet erg efficiënt is.
- Het combinatorisch verhogen van de vraag: alleen voor een aantal knooppunten de vraag verhogen. Bij deze methode zijn er vele combinaties mogelijk en dus moeten er ook vele optima bepaald worden als we alle combinaties langsgaan. Als we slechts een aantal combinaties gebruiken, moeten we wel goede argumenten hebben waarom we die combinaties gekozen hebben.

Alle genoemde methodes zijn niet vernieuwend, want het robuuste model komt neer op het verhogen van de vraag. De genoemde informatie die we met de methodes kunnen afleiden, kunnen we ook met ‘normale’ optimalisatie krijgen. Kortom, robuust optimaliseren toepassen op onzekere vraag met een hyperkubus als verstoringsverzameling heeft geen meerwaarde.

Stel nu dat er wel afhankelijkheid is tussen de verschillende $P_{d,i}$. Levert dit wel vernieuwende modellen? Als we naar de bovenstaande methode kijken, zien we snel dat dit geen effect zal hebben: we werken namelijk met de projectie van de verstoringsverzameling $\mathcal{Z}$ op elke voorwaarde. Omdat elke voorwaarde slechts één onzekere parameter bevat, krijgen we dezelfde resultaten (neem bijvoorbeeld $\mathcal{Z} = \{\zeta \in \mathbb{R}^N : \|\zeta\|_2 \leq 1\}$, dan is $\mathcal{Z}_i = [-1, 1]$ voor alle $i \in \{1, \dots, N\}$). Met andere woorden, we krijgen voor elke CR verstoringsverzameling analoge robuuste voorwaarden, waarbij alleen de maximale vraag van belang is.

We voegen daarom een nieuwe voorwaarde toe aan ons model, namelijk dat alle geproduceerde vermogen groter dan of gelijk aan alle vraag moet zijn:

$$\sum_{i=1}^N P_{g,i} \geq \sum_{i=1}^N P_{d,i}. \quad (4.5)$$

Dit is niets anders dan alle voorwaarden (4.3) sommeren en dus verandert de toevoeging van (4.5) de ruimte van toegelaten oplossingen niet. Voorwaarde (4.5) bevat N parameters die onzekerheid bevatten, dus de structuur van $\mathcal{Z}$ is belangrijk voor de robuuste voorwaarde van (4.5). Omdat we voor de voorwaarden (4.3) alsnog het oude resultaat krijgen (een belangrijk feit om bewust van te zijn), legt de nieuwe robuuste voorwaarde van (4.5) geen verdere beperkingen op. Sommeren we namelijk de robuuste voorwaarden (4.4), dan krijgen we

$$\sum_{i=1}^N P_{g,i} \geq \sum_{i=1}^N P_{d,i}^b \geq \sum_{i=1}^N P_{d,i}. \quad (4.6)$$

De laatste ongelijkheid volgt uit de definitie van $P_{d,i}$. Voor elke CR verstoringsverzameling zal de robuuste voorwaarde van (4.5) inhouden dat we in voorwaarde (4.5) $P_{d,i}$ gelijk nemen aan een zekere $P_{d,i}^* \in [P_{d,i}^a, P_{d,i}^b]$. Uit (4.6) volgt nu dat er automatisch voldaan wordt aan de robuuste voorwaarde van (4.5) vanwege de robuuste voorwaarden van (4.3).

Dit brengt ons terug naar onze onderzoeksvraag: kan robuust optimaliseren (zoals we het hier hebben toegepast) gebruikt worden om nuttige informatie over het elektriciteitsnetwerk te verkrijgen bij onzekere vraag $P_{d,i}$? We hebben laten zien dat dit niet het geval is: **robuust optimaliseren heeft geen meerwaarde boven ‘normaal’ optimaliseren en alle robuuste voorwaarden houden slechts in dat we de maximale vraag gebruiken.**

4.2 Onzekere maximale capaciteit

Stel nu dat de maximale capaciteit ($P_{ij}^{\min}$ en $P_{ij}^{\max}$) onzeker is. We nemen aan dat de capaciteit niet afhankelijk is van de richting van de stroom, dat wil zeggen $P_{ij}^{\min} = -P_{ij}^{\max}$. Net als bij onzekere vraag, hebben de voorwaarden slechts één onzekere parameter als de maximale capaciteit onzekerheid bevat. We krijgen dus hetzelfde verschijnsel dat de structuur van de onzekerheidsverzameling $\mathcal{Z}$ niet uitmaakt, alleen de waarden die $P_{ij}^{\max}$ aanneemt speelt een rol bij het vaststellen van de robuuste voorwaarde behorende bij P_{ij} (waarbij $P_{ij} = |B_{ij}|(\delta_i - \delta_j)$).

Dit heeft als gevolg dat de robuuste voorwaarde de kleinste waarde van $P_{ij}^{\max}$ gebruikt, dit is namelijk het meest restrictieve scenario. Het sommeren van voorwaarden, zoals we gedaan hadden bij onzekere vraag, vergt eerst nog een tussenstap. Als we de voorwaarden sommeren, moeten we namelijk de absolute waarde van P_{ij} gebruiken (omdat P_{ij} negatief kan zijn). We krijgen dan

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |P_{ij}| \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_{ij}^{\max}.$$

De analogie met onzekere vraag moge duidelijk zijn en we concluderen dat **robuust optimaliseren voor onzekere maximale capaciteit zoals we het hier hebben toegepast niet interessant is**. We zullen onzekere maximale capaciteit verder niet behandelen.

4.3 Onzekere admittantie matrix

Als laatste bekijken we het geval dat de admittantie matrix B onzekerheid bevat. Deze onzekerheid modelleren we als een bepaald percentage $\alpha_{ij} \in [0, 1]$ (bijvoorbeeld de percentuele meetfout) rond de gemeten waarde B_{ij}^0 :

$$B_{ij} = (1 + \alpha_{ij}\zeta_{ij})B_{ij}^0, \quad \zeta_{ij} \in \mathcal{Z}_{ij} = [-1, 1].$$

Hierbij is $\mathcal{Z}_{ij}$ de projectie van $\mathcal{Z}$ op de dimensie van ζ_{ij} , waarbij $\mathcal{Z}$ *Conic Representable* is. Houd er rekening mee dat de admittantie matrix symmetrisch is ($B_{ij} = B_{ji}$). Oftewel, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ en $\zeta_{ij} = \zeta_{ji}$ voor alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$. We bekijken opnieuw voorwaarde (4.3):

$$P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |(1 + \alpha_{ij}\zeta_{ij})B_{ij}^0| (\delta_i - \delta_j) \geq P_{d,i}, \quad \zeta_i \in \mathcal{Z}_i, \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

De verstoringsverzameling $\mathcal{Z}_i$ is de projectie van $\mathcal{Z}$ op voorwaarde i en heeft dimensie N . De structuur van $\mathcal{Z}_i$, de (on)afhankelijkheid van ζ_{ij} , zal dus een rol spelen. We nemen aan dat de meetfouten onafhankelijk van elkaar zijn, dat wil zeggen $\mathcal{Z} = [-1, 1]^{N \times N}$ en $\mathcal{Z}_i = [-1, 1]^N$. We bepalen de robuuste voorwaarde op dezelfde manier als voorheen:

$$\begin{aligned} P_{g,i} - P_{d,i} &\geq \sum_{j=1}^N |(1 + \alpha_{ij}\zeta_{ij})B_{ij}^0| (\delta_i - \delta_j), \quad \zeta_i \in \mathcal{Z}_i \\ \Leftrightarrow P_{g,i} - P_{d,i} &\geq \sum_{j=1}^N (1 + \alpha_{ij}\zeta_{ij}) |B_{ij}^0| (\delta_i - \delta_j), \quad \zeta_i \in \mathcal{Z}_i \\ \Leftrightarrow \max_{\zeta_i} \left\{ \sum_{j=1}^N (\alpha_{ij}\zeta_{ij}) |B_{ij}^0| (\delta_i - \delta_j) : \zeta_i \in [-1, 1]^N \right\} &\leq P_{g,i} - P_{d,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}^0| (\delta_i - \delta_j) \\ \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} |B_{ij}^0| |\delta_i - \delta_j| &\leq P_{g,i} - P_{d,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}^0| (\delta_i - \delta_j). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Omdat $(1 + \alpha_{ij}\zeta_{ij}) \in [1 - \alpha_{ij}, 1 + \alpha_{ij}]$ en $\alpha_{ij} \in [0, 1]$, kunnen we $|(1 + \alpha_{ij}\zeta_{ij})B_{ij}^0|$ vereenvoudigen naar $(1 + \alpha_{ij}\zeta_{ij})|B_{ij}^0|$. Voor de laatste stap verwijzen we naar het voorbeeld in paragraaf 3.2.1. Voorwaarde (4.7) kunnen we herformuleren, zodat we lineaire voorwaarden krijgen:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} |B_{ij}^0| u_{ij} \leq P_{g,i} - P_{d,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}^0| (\delta_i - \delta_j), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} -u_{ij} &\leq \delta_i - \delta_j \leq u_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\ u_{ij} &\geq 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

In tegenstelling tot het geval met onzekere vraag, weten we niet van tevoren welke waarde ζ_{ij} zal hebben (in de bovenstaande robuuste voorwaarde is $\zeta_{ij} = \pm 1$, met hetzelfde teken als $(\delta_i - \delta_j)$). Voordat we ingaan op de consequenties hiervan, gaan we eerst kijken naar de robuuste voorwaarden van

$$|B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) \leq P_{ij}^{\max}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \quad (4.10)$$

$$|B_{ij}|(\delta_i - \delta_j) \geq P_{ij}^{\min}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}. \quad (4.11)$$

Merk op dat bij deze voorwaarden slechts één parameter onzekerheid bevat. De structuur van $\mathcal{Z}$ speelt dus geen rol, net als bij onzekere vraag. We bepalen de robuuste voorwaarde:

$$\begin{aligned}
& |(1 + \alpha_{ij}\zeta_{ij})B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) \leq P_{ij}^{\max}, \quad \zeta_{ij} \in \mathcal{Z}_{ij} \\
\Leftrightarrow & \max_{\zeta_{ij}} \{ \alpha_{ij}\zeta_{ij} |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) : \zeta_{ij} \in [-1, 1] \} \leq P_{ij}^{\max} - |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j), \\
\Leftrightarrow & \alpha_{ij} |B_{ij}^0| |\delta_i - \delta_j| \leq P_{ij}^{\max} - |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j), \\
\Leftrightarrow & \alpha_{ij} |B_{ij}^0| u_{ij} \leq P_{ij}^{\max} - |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j).
\end{aligned}$$

Hierbij is u_{ij} gedefinieerd als in (4.8) en (4.9). Ook hier is het maximum afhankelijk van de waarde (het teken) van $(\delta_i - \delta_j)$: als $(\delta_i - \delta_j) < 0$ is $\zeta_{ij} = -1$, als $(\delta_i - \delta_j) \geq 0$ is $\zeta_{ij} = 1$.

Analoog krijgen we

$$\begin{aligned}
& |(1 + \alpha_{ij}\zeta_{ij})B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) \geq P_{ij}^{\min}, \quad \zeta_{ij} \in \mathcal{Z}_{ij} \\
\Leftrightarrow & \max_{\zeta_{ij}} \{ -\alpha_{ij}\zeta_{ij} |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) : \zeta_{ij} \in [-1, 1] \} \leq -P_{ij}^{\min} + |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) \\
\Leftrightarrow & \alpha_{ij} |B_{ij}^0| |\delta_i - \delta_j| \leq -P_{ij}^{\min} + |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) \\
\Leftrightarrow & \alpha_{ij} |B_{ij}^0| u_{ij} \leq -P_{ij}^{\min} + |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j).
\end{aligned}$$

Hoe kunnen we het resulterende robuuste model interpreteren? In de robuuste voorwaarden van (4.10) en (4.11) wordt de maximale capaciteit gecorrigeerd (verkleind) om ervoor te zorgen dat zelf bij het meest beperkende scenario de gevonden oplossing nog aan de voorwaarden voldoet. Deze correctie is afhankelijk van de gevonden oplossing.

De robuuste voorwaarde (4.7) kunnen we herschrijven:

$$\begin{aligned}
& P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} |B_{ij}^0| |\delta_i - \delta_j| \geq P_{d,i} \\
\Leftrightarrow & P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) \geq P_{d,i} + \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} |B_{ij}^0| |\delta_i - \delta_j|.
\end{aligned}$$

Aan de ene kant zien we een aangepaste *Power Balance* voorwaarde, waarbij de netto stroom naar binnen (buiten) kleiner (groter) is. Aan de andere kant kunnen we deze voorwaarde ook interpreteren als een normale *Power Balance* voorwaarde, waarbij de vraag in elk knooppunt is toegenomen. Deze toename in vraag is afhankelijk van de gevonden oplossing. We zien met de tweede interpretatie dat er een balans wordt gezocht tussen vermogen in het knooppunt zelf produceren ($P_{g,i}$) en vermogen van buiten importeren ($-\sum_{j=1}^N |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j)$). Als er veel vermogen wordt geïmporteerd, dan resulteert dit in een grotere vraag vanwege de term $\sum_{j=1}^N \alpha_{ij} |B_{ij}^0| |\delta_i - \delta_j|$.

Ook is het belangrijk om op te merken dat het robuuste model niet gelijk staat aan een bepaald scenario in $\mathcal{U}$ (zoals het geval was bij onzekere onafhankelijke vraag). We hebben afgeleid dat $\zeta_{ij} = \pm 1$, met hetzelfde teken als $(\delta_i - \delta_j)$. Stel nu dat knooppunten k en l met elkaar verbonden zijn en $\delta_k > \delta_l$. Dan geldt: $\zeta_{kl} = 1$ en $\zeta_{lk} = -1$, hetgeen een tegenspraak geeft met de symmetrie van de admittantie matrix B . Dus voor elke robuuste oplossing $(\delta^*, P_g^*, \zeta^*)$ geldt dat $\zeta^* \notin \mathcal{Z}$. Dit kan, omdat we alleen de projectie van $\mathcal{Z}$ op elke voorwaarde gebruiken.

We zien dat **robuust optimaliseren bij een onzekere admittantie matrix een toegevoegde waarde heeft**. De robuuste voorwaarden zijn niet triviaal en de toegevoegde termen zijn afhankelijk van de gevonden oplossing. Voor onze onderzoeksvraag of onzekerheid in de admittantie matrix grote invloed heeft op het optimum, zullen we ons robuuste model moeten toepassen op een aantal voorbeelden van netwerken (testcases).

Een beperking van het DC model is dat we geen realistische situaties kunnen bedenken waarin er afhankelijkheid is tussen de verstoringparameters ζ_{ij} van B_{ij} . Bij complexere structuren van $\mathcal{Z}$ zullen we namelijk genoodzaakt zijn om stelling 3.3.5 te gebruiken. Uiteraard kunnen we een afhankelijkheidsstructuur verzinnen, maar de daaruit volgende resultaten zullen puur illustratief zijn.

Nemen we bijvoorbeeld $\mathcal{Z}_i = \{\zeta_i \in \mathbb{R}^N : \|\zeta_i\|_2 \leq 1\}$, de eenheidsbol, dan krijgen we als robuuste voorwaarde van (4.3):

$$\begin{aligned}
P_{g,i} - P_{d,i} &\geq \sum_{j=1}^N |(1 + \alpha_{ij}\zeta_{ij})B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j), \quad \zeta_i \in \mathcal{Z}_i \\
\Leftrightarrow \max_{\zeta_i} &\left\{ \sum_{j=1}^N (\alpha_{ij}\zeta_{ij}) |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) : \|\zeta_i\|_2 \leq 1 \right\} \leq P_{g,i} - P_{d,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) \\
\Leftrightarrow &\sqrt{\sum_{j=1}^N (\alpha_{ij} |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j))^2} \leq P_{g,i} - P_{d,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j).
\end{aligned}$$

De robuuste voorwaarden van (4.10) en (4.11) zijn hetzelfde als bij het geval van onafhankelijke verstoring, $\mathcal{Z} = [-1, 1]^{N \times N}$.

4.4 Numerieke resultaten

In de voorgaande paragrafen hebben we drie gevallen van onzekerheid onderzocht. Onze conclusie is dat robuust optimaliseren, zoals wij het hebben toegepast, alleen bij een onzekere admittantie matrix een toegevoegde waarde heeft. Het robuuste model bij een onzekere admittantie matrix wordt (na verwaarlozing van de constante kosten d_i) gegeven door:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i=1}^N c_i P_{g,i}, \\
\text{s.t.} \quad & P_{g,i} - \sum_{j=1}^N |B_{ij}^0| (\delta_i - \delta_j) - \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} |B_{ij}^0| u_{ij} \geq P_{d,i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
& |B_{ij}^0| (\delta_i - \delta_j) + \alpha_{ij} |B_{ij}^0| u_{ij} \leq P_{ij}^{\max}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
& |B_{ij}^0| (\delta_i - \delta_j) - \alpha_{ij} |B_{ij}^0| u_{ij} \geq P_{ij}^{\min}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
& -u_{ij} \leq \delta_i - \delta_j \leq u_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
& u_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}, \\
& P_{g,i}^{\min} \leq P_{g,i} \leq P_{g,i}^{\max}, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}, \\
& -\pi < \delta_i \leq \pi, \quad \forall i \in \{2, \dots, N\}, \\
& \delta_1 = 0.
\end{aligned}$$

Om onze onderzoeksvraag te beantwoorden, maken we eerst twee aannames:

- de onzekerheid van de elementen van B is even groot: $\alpha_{ij} = \alpha$ voor alle $i, j \in \{1, \dots, N\}$,
- de capaciteit van een lijn is niet afhankelijk van de richting van de stroom: $P_{ij}^{\min} = -P_{ij}^{\max}$.

In figuur 4.1 staan de vijf netwerken die we zullen beschouwen. In appendix B staan deze netwerken weergegeven met alle specificaties. We hebben ons robuuste model geïmplementeerd in AIMMS (de code staat in appendix C). Aangezien we geen indicatie hebben van de grootte van de onzekerheid, zullen we de volgende gevallen onderzoeken: geen onzekerheid ($\alpha = 0$), kleine onzekerheid ($\alpha \in \{0.01, 0.05\}$) en relatief grote onzekerheid ($\alpha \in \{0.1, 0.15\}$).

Een samenvatting van de resultaten staat weergegeven in tabellen 4.1, 4.2 en 4.3. In tabel 4.1 staan de optimale doelfunctiewaarden voor elk netwerk voor elk van de vijf gevallen van onzekerheid ($\alpha \in \{0, 0.01, 0.05, 0.1, 0.15\}$). Ook geven we de relatieve waarde van het optimum in percentages ten opzichte van het optimum zonder onzekerheid ($\alpha = 0$). Als in de tabel ‘Inf’ staat, betekent dit dat ons robuust model geen oplossingen heeft. In de laatste kolom staat α^* voor de kleinste waarde van α waarbij het robuuste model geen oplossingen meer heeft voor dat netwerk. Deze waarde is bepaald met een stapgrootte van één procent (0.01).

Tabel 4.2 geeft voor dezelfde gevallen als tabel 4.1 aan hoeveel vermogen in totaal geproduceerd wordt in het optimum. Deze waarden staan ook relatief ten opzichte van het geval $\alpha = 0$ (in percentages). De laatste kolom vermeldt het maximaal aantal vermogen dat in het netwerk geproduceerd kan worden.

Als laatste hebben we in tabel 4.3 weergegeven hoeveel lijnen hun volledige capaciteit gebruiken in elk van de gevallen. Hierbij is het belangrijk om op te merken dat deze capaciteit robuust aangepast is (zie onze eerdere interpretatie van de robuuste voorwaarden van (4.10) en (4.11)). Dat wil zeggen, een lijn (i, j) gebruikt zijn volledige robuust aangepaste capaciteit als $|B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) + \alpha_{ij}|B_{ij}^0||\delta_i - \delta_j| = P_{ij}^{\max}$ of $|B_{ij}^0|(\delta_i - \delta_j) - \alpha_{ij}|B_{ij}^0||\delta_i - \delta_j| = P_{ij}^{\min}$.

Kijken we naar de toename in percentage van de kosten en de productie voor elke α , dan zien we dat beide ongeveer lineair schijnen toe te nemen met de waarde van α (alleen netwerk 5 heeft bij $\alpha = 0.15$ grotere waarden dan men zou verwachten bij een lineair verband). Merk echter op dat er überhaupt geen (lineair) verband hoeft te zijn, omdat de optimale oplossing per α kan veranderen.

Verder valt uiteraard op dat drie van de vijf netwerken geen oplossingen hebben bij relatief grote onzekerheid ($\alpha \in \{0.1, 0.15\}$). Zie ook de waarden van α^* : netwerk 3 heeft al geen oplossingen bij een onzekerheid van 7%. Daarentegen vormt voor netwerk 2 pas een onzekerheid van 50% een probleem. We zien in ieder geval dat de grootte van het netwerk niet direct een gevolg heeft voor de robuustheid van het netwerk.

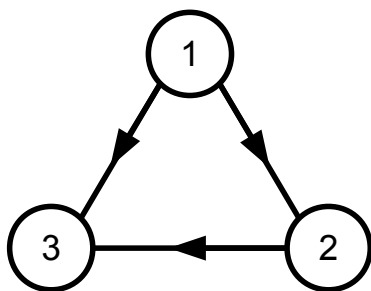
Om te onderzoeken waarom het robuuste model niet meer oplosbaar wordt, hebben we ook nog het grensgeval $\alpha = \alpha^* - 0.01$ bekeken. Daaruit kunnen we het volgende afleiden:

- **Netwerk 1** Zoals te zien is in tabel 4.2 ligt de productie al zeer dicht bij de maximale productie. Vanaf een onzekerheid van 9% moet er meer vermogen geproduceerd worden dan mogelijk is, waardoor het model onoplosbaar wordt. Zoals in tabel 4.3 te zien is, zijn er geen lijnen die hun maximale capaciteit gebruiken. Dit is ook het geval bij de grenswaarde $\alpha = 0.09$ en lijkt dus niet van belang te zijn.
- **Netwerk 2** Dit netwerk is zeer robuust omdat elk knooppunt zijn eigen vermogen kan produceren (zie appendix B). Echter kan knooppunt 3 slechts maximaal 20 MW produceren, hetgeen voor transport naar knooppunt 3 zal zorgen. Bij $\alpha = 0.49$ is het geproduceerd vermogen ongeveer 322.38 MW en gebruikt lijn $(2, 3)$ bijna al zijn capaciteit. Deze capaciteit is voor grotere waarden van α niet meer voldoende en zorgt ervoor dat het model geen oplossingen heeft (de generator in knooppunt 1 levert al maximaal vermogen).
- **Netwerk 3** Bij netwerk 3 gebruikt de lijn $(1, 2)$ bij elke α zijn maximale capaciteit (zie tabel 4.3). In tabel 4.2 is te zien dat het vermogen dat maximaal geproduceerd kan worden ruim voldoende is. Bij de grenswaarde $\alpha = 0.06$ wordt duidelijk dat lijn $(3, 4)$ ook zijn maximale capaciteit gaat gebruiken voor hogere waarden van α . Dit heeft als gevolg dat het model geen oplossingen meer heeft voor $\alpha \geq 0.07$.
- **Netwerk 4** Net als netwerk 3 heeft dit netwerk een lijn op maximale capaciteit, namelijk lijn $(1, 2)$. Bij $\alpha = 0.05$ gebruikt deze lijn net niet zijn volledige capaciteit, maar voor hogere waarden van α weer wel. Het blijkt zo te zijn dat door de opstopping in lijn $(1, 2)$ de rest van het gevraagde vermogen in knooppunt 2 geleverd wordt door de generatoren in knooppunten 3, 4 en 5. Vanaf $\alpha = 0.1$ kunnen deze generatoren niet meer het gewenste vermogen leveren.
- **Netwerk 5** Voor kleine waarden van α gebruikt lijn $(2, 3)$ zijn volledige capaciteit, maar voor voor grotere waarden verschuift het transport zich naar andere lijnen. Dit leidt tot opstoppen in de lijnen $(2, 6)$ en $(4, 6)$ bij $\alpha = 0.16$, waardoor de generator in knooppunt 6 niet zijn maximaal vermogen kan leveren aan het netwerk.

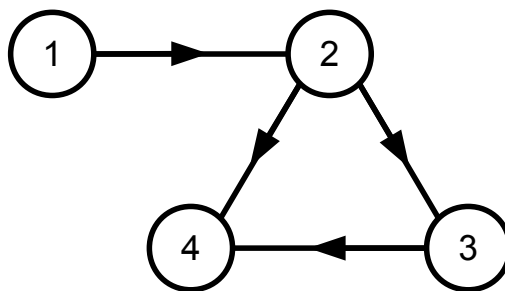
Als we kijken naar de eigenschappen van elk netwerk en de gevolgen op de robuustheid van het netwerk, dan kunnen we het volgende concluderen:

- Naarmate de onzekerheid toeneemt, neemt ook het geproduceerd vermogen toe. Dit komt overeen met onze interpretatie van de robuuste voorwaarden.
- Een netwerk waarin alle knooppunten beschikking hebben tot een generator is zeer robuust, mits de maximale capaciteit van die generatoren groot genoeg is. De onzekerheid in het transport via een knooppunt wordt opgevangen door de generatoren in dat knooppunt.
- Zodra het netwerk *load buses* bevat (die geen generatoren hebben), heeft dit een duidelijk negatief effect op de robuustheid. De capaciteit van de transmissielijnen gaat een belangrijke rol spelen en met name de transmissielijnen direct verbonden met de *load buses*.
- Het patroon van getransporteerd vermogen kan, afhankelijk van het netwerk, aanzienlijk wijzigen bij toenemende onzekerheid. Dit komt door de balans tussen het produceren van vermogen in een knooppunt zelf en het importeren van vermogen.
- Een onzekerheid van 1% leidt tot een kleine toename van de doelfunctiewaarde van een paar procent. Bij grotere onzekerheid is deze toename sterk afhankelijk van het netwerk, zo varieert de toename bij $\alpha = 0.05$ al tussen 3% tot 19% bij onze testcases.

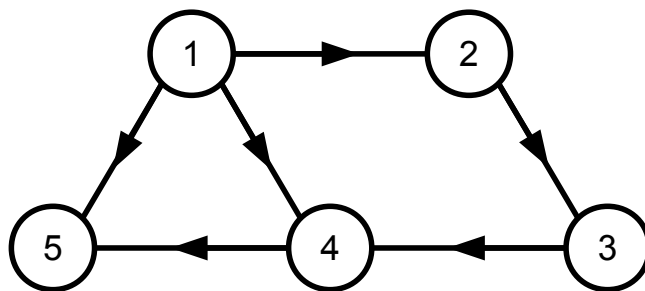
Robuuste optimalisatie levert een handige methode om te onderzoeken of de prestaties van het netwerk sterk afhangen van de waarden van de admittantie matrix. Merk hierbij wel op dat het robuuste model niet gelijk staat aan een bepaald scenario uit $\mathcal{U}$, maar een combinatie is van scenario's. De uiteindelijke admittantie matrix die gebruikt wordt in het robuuste model, kan in de werkelijkheid niet voorkomen, omdat deze niet symmetrisch is. Dus als uit het robuuste model volgt dat een netwerk geen oplossingen meer heeft, hoeft dit niet automatisch te betekenen dat in de werkelijkheid het netwerk geen oplossing heeft. Daarentegen, als het robuuste model een oplossing heeft die weinig verschilt met de oplossing zonder onzekerheid, zal in de werkelijkheid de oplossing ook niet veel verschillen.



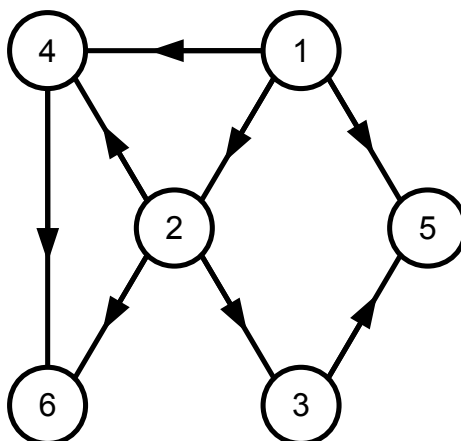
(a) Gerichte graaf van zowel netwerk 1 als netwerk 2.



(b) Gerichte graaf van netwerk 3.



(c) Gerichte graaf van netwerk 4.



(d) Gerichte graaf van netwerk 5.

Figuur 4.1: De netwerken van de testcases.

Netwerk	Onzekerheidsparameter α					α^*
	0	0.01	0.05	0.10	0.15	
1	120.00 (100%)	124.53 (103.77%)	142.93 (119.11%)	Inf (-%)	Inf (-%)	0.09
2	3815.90 (100%)	3839.75 (100.63%)	3934.40 (103.11%)	4052.08 (106.19%)	4170.73 (109.30%)	0.50
3	9000.00 (100%)	9197.25 (102.19%)	9936.15 (110.40%)	Inf (-%)	Inf (-%)	0.07
4	22254.09 (100%)	22697.48 (101.99%)	24462.88 (109.93%)	Inf (-%)	Inf (-%)	0.10
5	1624.90 (100%)	1661.08 (102.23%)	1812.75 (111.56%)	2024.62 (124.60%)	2314.12 (142.42%)	0.16

Tabel 4.1: Minimale kosten van de netwerken voor verschillende waarden van α .

Netwerk	Onzekerheidsparameter α					$\sum_{i=1}^N P_{g,i}^{\max}$
	0	0.01	0.05	0.10	0.15	
1	100.00 (100%)	102.26 (102.26%)	111.46 (111.46%)	- (-%)	- (-%)	120
2	257.90 (100%)	259.04 (100.44%)	263.54 (102.19%)	269.15 (104.36%)	274.80 (106.55%)	370
3	400.00 (100%)	406.58 (101.64%)	431.20 (107.80%)	- (-%)	- (-%)	900
4	1045.99 (100%)	1062.27 (101.56%)	1119.29 (107.01%)	- (-%)	- (-%)	1530
5	760.00 (100%)	773.13 (101.73%)	828.19 (108.97%)	904.87 (119.06%)	1001.37 (131.76%)	1140

Tabel 4.2: Totaal gegenereerd vermogen (in MW) in de netwerken.

Netwerk	Onzekerheidsparameter α				
	0	0.01	0.05	0.10	0.15
1	0	0	0	-	-
2	0	0	0	0	0
3	1	1	1	-	-
4	1	1	0	-	-
5	1	1	1	0	0

Tabel 4.3: Aantal lijnen die hun volledige capaciteit (robuust aangepast) gebruiken.

5 Conclusies en aanbevelingen

Onze onderzoeksvraag was of we robuust optimaliseren kunnen gebruiken om nuttige informatie over elektriciteitsnetwerken te verkrijgen, waarbij de methode een toegevoegde waarde moet hebben boven ‘normaal’ of stochastisch optimaliseren. Daarbij waren we voornamelijk geïnteresseerd in de productiekosten en hoeveel transmissielijnen hun volledige capaciteit gebruiken. We hebben drie gevallen van onzekerheid onderzocht: onzekere vraag, maximale capaciteit van transmissielijnen en admittantie matrix.

Als we robuust optimaliseren toepassen op onzekere vraag, maakt de structuur van de onzekerheid (de verstoringsverzameling $\mathcal{Z}$) niet uit. Dit is vanwege de projectie van $\mathcal{Z}$ op elke voorwaarde en omdat elke voorwaarde slechts één parameter met onzekerheid bevat. Het gevolg is dat het robuuste model de maximale vraag $P_{d,i}^b$ gebruikt (waarbij $P_{d,i} \in [P_{d,i}^a, P_{d,i}^b]$). Het robuuste model heeft daarom geen toegevoegde waarde. Vervolgens hebben we de voorwaarde

$$\sum_{i=1}^N P_{g,i} \geq \sum_{i=1}^N P_{d,i} \quad (5.1)$$

toegevoegd om ervoor te zorgen dat de structuur van $\mathcal{Z}$ wel een effect heeft op het robuuste model. Voor elke *Conic Representable* verstoringsverzameling $\mathcal{Z}$ bleek dat de toevoeging van voorwaarde (5.1) geen effect had op de robuuste oplossing, omdat er door de andere robuuste voorwaarden automatisch voldaan wordt aan de robuuste voorwaarde van (5.1).

Bij onzekere maximale capaciteit van transmissielijnen zagen we dat de voorwaarden dezelfde eigenschappen hebben als bij onzekere vraag (dat wil zeggen, elke voorwaarde bevat maximaal één onzekere parameter). We concluderen daarom dat onzekere maximale capaciteit niet leidt tot vernieuwende modellen, net als het geval was bij onzekere vraag.

Als laatste bekeken we de onzekere admittantie matrix. Omdat elke *Power Balance* vergelijking N elementen van deze admittantie matrix bevat, speelt de structuur van $\mathcal{Z}$ een belangrijke rol in het robuuste model. Wij hebben ons geconcentreerd op een onafhankelijke structuur ($\mathcal{Z} = [-1, 1]^{N \times N}$), omdat wij de onzekerheid in de admittantie matrix zagen als het gevolg van meetfouten (en het samenvoegen van lijnen). Ondanks de eenvoudige structuur leverde de methode een vernieuwend robuust model, waarbij de capaciteit van de transmissielijnen en de hoeveelheid getransporteerd vermogen worden aangepast afhankelijk van de gevonden oplossing. De aanpassing van het transport konden we ook interpreteren als een toename van de vraag in elk knooppunt, waarbij de toename afhankelijk is van de hoeveelheid transport. Hierdoor werd duidelijk dat het robuuste model een afweging maakt tussen vermogen in het knooppunt zelf genereren en vermogen importeren vanuit aanliggende knooppunten. Bij het importeren neemt echter de lokale vraag toe.

Het robuuste model kunnen we wel interpreteren, maar de uiteindelijke robuuste oplossing is sterk afhankelijk van het netwerk. Daarom hebben we vijf testcases bekeken van eenvoudige netwerken, waaruit we de volgende conclusies kunnen trekken:

- Naarmate de onzekerheid toeneemt, neemt ook het geproduceerd vermogen toe. Dit is in overeenkomst met onze interpretatie van de robuuste voorwaarden.
- Een netwerk waarin alle knooppunten beschikking hebben tot een generator is zeer robuust, mits de maximale capaciteit van die generatoren groot genoeg is. De onzekerheid in het transport via een knooppunt wordt opgevangen door de generatoren in dat knooppunt.
- Zodra het netwerk *load buses* bevat (die geen generatoren hebben), heeft dit een duidelijk negatief effect op de robuustheid. De capaciteit van de transmissielijnen gaat een belangrijke rol spelen en met name de transmissielijnen direct verbonden met de *load buses*.
- Het patroon van getransporteerd vermogen kan, afhankelijk van het netwerk, aanzienlijk wijzigen bij toenemende onzekerheid. Dit komt door de balans tussen het produceren van vermogen in een knooppunt zelf en het importeren van vermogen.
- Een onzekerheid van 1% leidt tot een kleine toename van de doelfunctiewaarde van een paar procent. Bij grotere onzekerheid is deze toename sterk afhankelijk van het netwerk, zo varieert de toename bij $\alpha = 0.05$ al tussen 3% tot 19% bij onze testcases.

Een belangrijk punt is echter dat het robuuste model niet gelijk staat aan een bepaald scenario uit $\mathcal{U}$, maar een combinatie is van scenario's. De admittantie matrix die in het robuuste model gebruikt wordt, kunnen we in de werkelijkheid niet tegenkomen, omdat deze niet symmetrisch is. Als voor een netwerk bij een bepaalde onzekerheid ons robuuste model geen oplossingen heeft, wil dat dus niet zeggen dat in de werkelijkheid het netwerk geen oplossing heeft voor die grootte van meetfouten. Als ons robuust model daarentegen een oplossing heeft, zal in de werkelijkheid het netwerk ook een oplossing hebben. Wij concluderen daarom dat ons model hooguit een indicatie kan geven of een netwerk gevoelig is voor onzekerheid in de admittantie matrix.

Wij hebben gezien dat nuttige toepassingen van de beschreven technieken van robuust optimaliseren beperkt zijn voor het DC model. Echter hebben wij slechts de eenvoudigste methodes van robuust optimaliseren toegelicht en toegepast. Zo beschrijft [1] twee uitbreidingen van robuust optimaliseren: de zogeheten *Globalized Robust Counterpart* en het *Adjustable Robust Counterpart* methoden. Bij *Globalized Robust Optimization* hoeft de robuuste oplossing niet meer voor alle mogelijke scenario's te voldoen aan de voorwaarden, maar moet de afwijking met de voorwaarden wel beperkt blijven. Bij *Adjustable Robust Optimization* hoeven niet alle beslissingsvariabelen robuust te zijn, maar kan een deel afhangen van de (waargenomen) verstoring in de parameters. Deze laatste methode kan bijvoorbeeld gebruikt worden bij het bepalen waar een nieuwe generator of een nieuwe transmissielijn geplaatst moet worden. Hierbij moet deze beslissing robuust zijn, maar de instellingen van het elektriciteitsnetwerk kunnen bepaald worden nadat de (onzekere) vraag bekend is.

6 Referenties

Literatuur

- [1] Ben-Tal, A., El Ghaoui, L. en Nemirovski, A., *Robust Optimization*. New Jersey: Princeton University Press, 2009.
- [2] Bertsimas, D., Brown, D.B., “Constructing Uncertainty Sets for Robust Linear Optimization”, *Operations Research*, vol. 57, no. 6, pp. 1483-1495, 2009.
- [3] Bertsimas, D., Litvinov, E., Sun, X., Zhao, J. en Zheng, T., “Adaptive Robust Optimization for the Security Constrained Unit Commitment Problem”, submitted to *IEEE Transactions on Power Systems*, 2011.
- [4] Bertsimas, D. en Sim, M., “The price of robustness”, *Operations Research*, vol. 52, pp. 35-53, 2004.
- [5] Boyd, S., Vandenberghe, L., *Convex Optimization*. New York: Cambridge University Press, 2004.
- [6] Grainger, J., Stevenson, W. Jr., *Power System Analysis*. Singapore: McGraw-Hill Inc., 1994.
- [7] Louie, H. en Strunz, K., “Locational Marginal Pricing in North American Power Systems”, *ETG Fachbericht Netzregelung und Systemführung*, 2008.
- [8] Nemirovski, A., *Lectures on Modern Convex Optimization*.
http://www2.isye.gatech.edu/~nemirovs/Lect_ModConvOpt.pdf.
- [9] Rider, M.J., Garcia, A.V. en Romero, R., “Power system transmission network expansion planning using AC model”, *IET Generation, Transmission & Distribution*, vol. 1, no. 5, pp. 731-742, 2007.
- [10] Schavemaker, P., Van der Sluis, L., *Electrical power system essentials*. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 2008.
- [11] Sun, J. en Tesfatsion, L., “DC Optimal Power Flow Formulation and Solution Using QuadProgJ”, *ISU Economics*, Working Paper No. 06014, 2010.
- [12] Vallentin, F., *Convex optimization*. Dictaat *Convex optimization and systems theory*, 2011.

A Conisch optimaliseren

In deze appendix zullen we de basiskennis van conisch optimaliseren (*Conic Optimization*) behandelen. Allereerst beginnen we met de definitie van convexe kegels, vervolgens behandelen we conisch optimaliseren en bewijzen we sterke dualiteit. De beschreven theorie is gebaseerd op paragrafen uit [8] en [12].

A.1 Convexe kegels

We noemen $\mathbb{E}^n$ de n -dimensionale Euclidische ruimte: een n -dimensionale reële vectorruimte met inwendig product $\langle x, y \rangle = x^\top y$ en norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ voor $x, y \in \mathbb{E}^n$. De bol met middelpunt $x \in \mathbb{E}^n$ en straal r geven we weer met

$$\mathbf{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{E}^n : \|x - y\| \leq r\}.$$

Een punt x in een deelverzameling $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^n$ heet een inwendig punt van $\mathcal{A}$ als er een $\epsilon > 0$ bestaat zodat $\mathbf{B}(x, \epsilon) \subseteq \mathcal{A}$. De verzameling van alle inwendige punten van $\mathcal{A}$, het inwendige van $\mathcal{A}$, wordt weergegeven met $\text{int } \mathcal{A}$. Als het inwendige alle punten van $\mathcal{A}$ bevat, dan is $\mathcal{A}$ een open verzameling. Anderzijds heet $\mathcal{A}$ gesloten als het complement van $\mathcal{A}$ (oftewel $\mathbb{E}^n \setminus \mathcal{A}$) open is. Verder behoort een punt $x \in \mathcal{A}$ tot de rand $\partial \mathcal{A}$ van $\mathcal{A}$ als voor elke $\epsilon > 0$ de bol $\mathbf{B}(x, \epsilon)$ zowel punten in $\mathcal{A}$ als in $\mathbb{E}^n \setminus \mathcal{A}$ bevat.

Een deelverzameling $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^n$ is convex als voor elk paar $x, y \in \mathcal{A}$ het gehele lijnstuk tussen x en y ook in $\mathcal{A}$ ligt, oftewel als $\{\alpha x + (1 - \alpha)y : 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq \mathcal{A}$. Een deelverzameling $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^n$ heet een affiene deelverzameling van $\mathbb{E}^n$ als het een getransleerde lineaire deelruimte is:

$$\mathcal{A} = \{x + y : y \in \mathcal{L}\},$$

waarbij $x \in \mathbb{E}^n$ en $\mathcal{L}$ een lineaire deelruimte van $\mathbb{E}^n$ is. De dimensie van $\mathcal{A}$ is de dimensie van $\mathcal{L}$. Een affiene deelruimte $\mathcal{A}$ is gesloten onder affiene lineaire combinaties:

$$\forall x_1, \dots, x_N \in \mathcal{A} \forall \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R} : \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \implies \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i \in \mathcal{A}.$$

Het affiene omhulsel (*affine hull*) van een verzameling $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^n$ wordt gegeven door

$$\text{aff } \mathcal{A} = \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i x_i : N \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_N \in \mathcal{A}, \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1 \right\}.$$

De dimensie van een deelverzameling $\mathcal{A}$ wordt gegeven door de dimensie van het affiene omhulsel van $\mathcal{A}$. Als nu een deelverzameling $\mathcal{A}$ een dimensie strikt kleiner dan n heeft, is het inwendige van de verzameling leeg. Daarom wordt vaak gekeken naar het relatief inwendige van $\mathcal{A}$: een punt x in een deelverzameling $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{E}^n$ heet een relatief inwendig punt van $\mathcal{A}$ als er een $\epsilon > 0$ bestaat zodat $\text{aff } \mathcal{A} \cap \mathbf{B}(x, \epsilon) \subseteq \mathcal{A}$. De verzameling van alle relatief inwendige punten wordt weergegeven met $\text{relint } \mathcal{A}$.

Naast deze algemene begrippen zullen we ook hypervlakken nodig hebben. Een hypervlak $\mathbf{H}$ liggend in $\mathbb{E}^n$ met normaalvector $u \in \mathbb{E}^n \setminus \{0\}$ wordt gedefinieerd als

$$\mathbf{H}(u, \beta) = \{x \in \mathbb{E}^n : \langle u, x \rangle = \beta\}$$

met $\beta \in \mathbb{R}$ en splitst $\mathbb{E}^n$ in twee halfruimtes:

$$\mathbf{H}^+ = \{y \in \mathbb{E}^n : \langle u, y \rangle \geq \langle u, x \rangle\}, \quad \mathbf{H}^- = \{y \in \mathbb{E}^n : \langle u, y \rangle \leq \langle u, x \rangle\}.$$

Een hypervlak $\mathbf{H}(u, \beta)$ scheidt twee verzamelingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ als

$$\mathcal{A} \subseteq \mathbf{H}^+, \quad \mathcal{B} \subseteq \mathbf{H}^-.$$

Een polyeder is de doorsnede van een eindig aantal halfruimtes en hypervlakken, waarbij de doorsnede niet begrensd hoeft te zijn. Een polyeder kan dus worden weergegeven als de oplossingsruimte van een eindig aantal lineaire ongelijkheden.

Voor ons bewijs van sterke dualiteit zullen we gebruikmaken van stelling 1.3.6 uit [12], die ons verteld wanneer we twee verzamelingen kunnen scheiden met een hypervlak. De stelling luidt:

Stelling A.1.1. *Laat $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ niet-lege convexe verzamelingen zijn met $\text{relint } \mathcal{A} \cap \text{relint } \mathcal{B} = \emptyset$, dan bestaat er een hypervlak $\mathbf{H}(u, \beta)$ die beide verzamelingen scheidt. Oftewel,*

$$\sup_{x \in \mathcal{A}} \langle u, x \rangle \leq \inf_{y \in \mathcal{B}} \langle u, y \rangle.$$

Een convexe verzameling die we zullen gebruiken, is de convexe kegel gedefinieerd als volgt:

Definitie A.1.2. Een niet-lege deelverzameling $\mathbf{K} \subseteq \mathbb{E}^n$ heet een convexe kegel als het gesloten is onder niet-negatieve lineaire combinaties:

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall x, y \in \mathbf{K} : \alpha x + \beta y \in \mathbf{K}. \quad \blacksquare$$

Een kegel die geen lijnen door de oorsprong bevat ($a \in \mathbf{K}$ en $-a \in \mathbf{K} \Rightarrow a = 0$), heet een puntige kegel (*pointed cone*). Elke puntige kegel induceert een partiële ordening $\succeq_{\mathbf{K}}$ van $\mathbb{E}^n$, waarbij $x \succeq_{\mathbf{K}} y \Leftrightarrow x - y \in \mathbf{K}$ voor alle $x, y \in \mathbb{E}^n$. Deze partiële ordening voldoet aan

- reflexiviteit: $\forall x \in \mathbb{E}^n : x \succeq_{\mathbf{K}} x$.
- antisymmetrie: $\forall x, y \in \mathbb{E}^n : x \succeq_{\mathbf{K}} y, y \succeq_{\mathbf{K}} x \Rightarrow x = y$.
- transitiviteit: $\forall x, y, z \in \mathbb{E}^n : x \succeq_{\mathbf{K}} y, y \succeq_{\mathbf{K}} z \Rightarrow x \succeq_{\mathbf{K}} z$.
- homogeniteit: $\forall x, y \in \mathbb{E}^n, \forall \alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} : x \succeq_{\mathbf{K}} y \Rightarrow \alpha x \succeq_{\mathbf{K}} \alpha y$.
- additiviteit: $\forall x, x', y, y' \in \mathbb{E}^n : x \succeq_{\mathbf{K}} y, x' \succeq_{\mathbf{K}} y' \Rightarrow x + x' \succeq_{\mathbf{K}} y + y'$.

Verder is het in de optimalisatie handig om alleen kegels te gebruiken die gesloten en een niet-leeg inwendige hebben. We noemen deze kegels regulier. We zullen alleen met reguliere kegels gaan werken en kunnen dan een strikte ongelijkheid definiëren:

$$x \succ_{\mathbf{K}} y \Leftrightarrow x - y \in \text{int } \mathbf{K}.$$

Twee reguliere kegels die we zullen gebruiken zijn:

- het niet-negatieve orthant $\mathbb{R}_{\geq 0}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0\}$,
- Lorentzkegels $\mathbf{L}^{n+1} = \left\{ (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq t \right\}$.

De duale kegel $\mathbf{K}_*$ van een kegel $\mathbf{K}$ is gedefinieerd als

$$\mathbf{K}_* = \{y \in \mathbb{E}^n : \langle y, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbf{K}\}.$$

Er geldt dat als $\text{int } \mathbf{K} \neq \emptyset$, dan is $\mathbf{K}_*$ een puntige kegel. Als $\mathbf{K}$ een gesloten, convexe en gepunte kegel is, dan is $\text{int } \mathbf{K}_* \neq \emptyset$. Verder geldt dat als $\mathbf{K}$ een gesloten kegel is, dan is $\mathbf{K}_*$ ook gesloten en $(\mathbf{K}_*)_* = \mathbf{K}$. Deze eigenschappen hebben als gevolg dat als $\mathbf{K}$ regulier is, dan is $\mathbf{K}_*$ ook regulier.

A.2 Dualiteit

Een conisch optimalisatie probleem wordt gegeven door

$$\sup_x \{c^\top x : Ax \preceq_{\mathbf{K}} b\}, \quad (\text{A.1})$$

waarbij $\mathbf{K}$ een reguliere kegel is, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en $b \in \mathbb{R}^m$. Voor ons is van belang om een bovengrens te vinden voor de optimale waarde van (A.1). Daarvoor zullen wij uiteindelijk de sterke dualiteit afleiden. Daartoe zoeken we λ 's uit een bepaalde deelverzameling van $\mathbb{R}^m$ die voldoen aan de ongelijkheid

$$\langle \lambda, Ax \rangle = \lambda^\top Ax \leq \langle \lambda, b \rangle = \lambda^\top b,$$

waarbij $Ax \preceq_{\mathbf{K}} b$ volgens het maximalisatie probleem (A.1). Als λ vervolgens voldoet aan $\langle \lambda, Ax \rangle = \langle c, x \rangle$, oftewel

$$A^* \lambda = c,$$

krijgen we $c^\top x = \lambda^\top Ax \preceq_{\mathbf{K}} \lambda^\top b$ en vormt $\lambda^\top b$ een bovengrens voor het optimum van (A.1). Hierbij is A^* de geconjugeerd getransponeerde matrix van A , waarvoor geldt dat $\langle A^* \lambda, x \rangle = \langle \lambda, Ax \rangle$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}^m$. Merk nu op dat

$$Ax \preceq_{\mathbf{K}} b \quad \Leftrightarrow \quad b - Ax \in \mathbf{K}$$

en

$$\langle \lambda, Ax \rangle \leq \langle \lambda, b \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \langle \lambda, b - Ax \rangle \geq 0.$$

Oftewel, we zoeken λ 's die voldoen aan $\langle \lambda, b - Ax \rangle \geq 0$ als $b - Ax \in \mathbf{K}$. Herinner nu dat de duale kegel van $\mathbf{K}$ gegeven wordt door

$$\mathbf{K}_* = \{y \in \mathbb{E}^n : \langle y, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbf{K}\}.$$

Dit zijn precies de vectoren die we zoeken, dus $\lambda \in \mathbf{K}_*$. Het duale probleem van (A.1) wordt gegeven door:

$$\inf_{\lambda} \{b^\top \lambda : A^* \lambda = c, \lambda \in \mathbf{K}_*\}.$$

De volgende stelling gaat in op dualiteitseigenschappen.

Stelling A.2.1. *Beschouw het conische optimalisatie probleem*

$$\sup_x \{c^\top x : Ax \preceq_{\mathbf{K}} b\}, \quad (\text{A.2})$$

waarbij $\mathbf{K}$ een reguliere kegel is en het duale probleem gegeven wordt door

$$\inf_{\lambda} \{b^\top \lambda : A^* \lambda = c, \lambda \in \mathbf{K}_*\}. \quad (\text{A.3})$$

Dan gelden de volgende uitspraken:

- (i) *De doelfunctiewaarde van de duale (A.3) is voor elke toegelaten oplossing λ groter dan of gelijk aan de doelfunctiewaarde van het originele probleem (A.2) voor elke toegelaten oplossing x . Oftewel,*

$$c^\top x \leq b^\top \lambda$$

voor elk paar toegelaten oplossingen (x, λ) .

- (ii) *Stel de optima worden bereikt in x^* en λ^* en $c^\top x^* = b^\top \lambda^*$, dan geldt*

$$\langle \lambda^*, Ax^* - b \rangle = 0.$$

- (iii) *Stel x en λ zijn toegelaten oplossingen voor (A.2) respectievelijk (A.3) en er geldt dat*

$$\langle \lambda, Ax - b \rangle = 0,$$

dan geldt dat $x = x^$ en $\lambda = \lambda^*$ optimaal zijn en $c^\top x^* = b^\top \lambda^*$.*

- (iv) *Als (A.2) van boven begrensd is en een strikt toelaatbare oplossing heeft ($\exists x : Ax \prec_{\mathbf{K}} b$), dan heeft de duale (A.3) een toegelaten oplossing en geldt dat de optimale waarden gelijk zijn: $c^\top x^* = b^\top \lambda^*$.*

Anderzijds, als de duale (A.3) van beneden begrensd is en een toelaatbare oplossing heeft ($\exists \lambda \in \text{int } \mathbf{K}_ : A^* \lambda = c$), dan is (A.2) oplosbaar en geldt $c^\top x^* = b^\top \lambda^*$.*

Bewijs. Eigenschap (i) volgt al uit de constructie van het duale probleem: $c^\top x = (A^* \lambda)^\top x = \langle \lambda, Ax \rangle \leq \langle \lambda, b \rangle = b^\top \lambda$. Voor eigenschap (ii) merken we op dat $\langle \lambda, Ax - b \rangle = \langle \lambda, Ax \rangle - \langle \lambda, b \rangle = \langle A^* \lambda, x \rangle - \langle \lambda, b \rangle = \langle c, x \rangle - \langle \lambda, b \rangle = 0$, waarbij we bij de laatste stap gebruik maken van het feit dat $c^\top x = b^\top \lambda$. Eigenschap (iii) volgt hier ook uit.

Nu rest nog eigenschap (iv) te bewijzen. We beginnen met de eerste uitspraak. De kern van het bewijs is dat we een toegelaten oplossing λ^* van (A.3) construeren die voldoet aan $b^\top \lambda^* \leq c^\top x^*$, dan volgt uit zwakke dualiteit (eigenschap (i)) dat λ^* optimaal is en $b^\top \lambda^* = c^\top x^*$.

Als $c = 0$, dan geldt $c^\top x^* = 0$. Merk op dat $\lambda^* = 0$ een toegelaten oplossing is van de duale en dat $0 = b^\top \lambda^* \leq c^\top x^*$. Dus volgt uit zwakke dualiteit dat $b^\top \lambda^* = c^\top x^*$.

Voor $c \neq 0$ moeten we meer werk verrichten. Beschouw daartoe de verzameling

$$\mathcal{M} = \{b - Ax : x \in \mathbb{R}^n, c^\top x \geq c^\top x^*\}.$$

We laten zien dat $\mathcal{M}$ niet-leeg is en dat $\mathcal{M} \cap \text{int } \mathbf{K} = \emptyset$. Voor de eerste bewering merken we op dat $b - Ax^* \in \mathcal{M}$. Stel er is een $(b - A\bar{x}) \in \mathcal{M} \cap \text{int } \mathbf{K}$, dat wil zeggen: $c^\top \bar{x} \geq c^\top x^*$ en $b - A\bar{x} \succ_{\mathbf{K}} 0$. Dan is er een $\epsilon > 0$ te vinden zodanig dat voor alle punten u in de bol $\mathbf{B}(b - A\bar{x}, \epsilon)$ geldt $u \succ_{\mathbf{K}} 0$. Stel dat $c_j > 0$ voor een zekere $j \in \{1, \dots, n\}$, dan geldt voor het punt⁵ $x = \bar{x} + \epsilon e_j$:

$$c^\top x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n c_i \bar{x}_i + c_j(\bar{x}_j + \epsilon) > \sum_{i=1}^n c_i \bar{x}_i \geq c^\top x^*.$$

Dit is in tegenspraak met het feit dat $c^\top x^*$ het maximum is. Als deze methode niet werkt (omdat er geen $c_j > 0$ is) dan volgt uit $c \neq 0$ dat er een $j \in \{1, \dots, n\}$ bestaat waarvoor $c_j < 0$. Beschouw dan het punt $x = \bar{x} - \epsilon e_j$:

$$c^\top x = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n c_i \bar{x}_i + c_j(\bar{x}_j - \epsilon) > \sum_{i=1}^n c_i \bar{x}_i \geq c^\top x^*.$$

Hieruit volgt ook de tegenspraak. Dus $\mathcal{M} \cap \text{int } \mathbf{K} = \emptyset$. Omdat $\mathbf{K}$ een niet-leeg inwendige heeft (dus dimensie m), volgt dat $\text{int } \mathbf{K} = \text{relint } \mathbf{K}$. Dus in het bijzonder: $\text{relint } \mathcal{M} \cap \text{relint } \mathbf{K} = \emptyset$.

Merk op dat $\mathcal{M}$ convex is: $\forall u, v \in \mathcal{M}$ met $u = b - Ay$ en $v = b - Az$, $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ geldt

$$\alpha u + (1 - \alpha)v = b - A(\alpha y + (1 - \alpha)z).$$

Nu is $c^\top(\alpha y + (1 - \alpha)z) \geq \alpha c^\top x^* + (1 - \alpha)c^\top x^* = c^\top x^*$. Dus $\alpha u + (1 - \alpha)v \in \mathcal{M}$ en is $\mathcal{M}$ convex. We kunnen nu beide verzamelingen $\mathcal{M}$ en $\mathbf{K}$ scheiden met een hypervlak $\mathbf{H}$ volgens stelling A.1.1. Oftewel, $\exists \lambda \in \mathbb{E}^n$:

$$\sup_{y \in \mathcal{M}} \langle \lambda, y \rangle \leq \inf_{x \in \mathbf{K}} \langle \lambda, x \rangle.$$

We beweren nu dat deze $\lambda \in \mathbf{K}_*$. Stel namelijk dat er een $x \in \mathbf{K}$ bestaat met $\langle \lambda, x \rangle < 0$. Merk op dat als $z \in \mathbf{K}$ en $\mu > 0$, dan ligt ook $\mu z \in \mathbf{K}$ vanwege de definitie van een kegel. Als we nu μ zeer groot nemen dan gaat $\langle \lambda, x \rangle$ richting $-\infty$, hetgeen een tegenspraak is met $\sup\{\langle \lambda, y \rangle : y \in \mathcal{M}\} \neq -\infty$. Dit laatste is waar, omdat $\mathcal{M}$ niet-leeg is. Dus $\langle \lambda, x \rangle \geq 0$ voor alle $x \in \mathbf{K}$. Met andere woorden, $\lambda \in \mathbf{K}_*$.

De volgende stap is om te laten zien dat $A^* \lambda = \mu c$ voor een zekere $\mu > 0$. Daarvoor merken we op dat $0 \in \mathbf{K}$, dus $\inf_{x \in \mathbf{K}} \langle \lambda, x \rangle = 0$ (dit volgt uit $\langle \lambda, x \rangle \geq 0, \forall x \in \mathbf{K}$). Oftewel,

$$\begin{aligned} & \sup\{\langle \lambda, y \rangle : y \in \mathcal{M}\} \leq \inf\{\langle \lambda, x \rangle : x \in \mathbf{K}\} = 0 \\ \Leftrightarrow & \sup\{\langle \lambda, b - Ax \rangle : x \in \mathbb{R}^n, c^\top x \geq c^\top x^*\} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \langle \lambda, b - Ax \rangle \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : c^\top x \geq c^\top x^* \\ \Leftrightarrow & \langle \lambda, Ax \rangle \geq \langle \lambda, b \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : c^\top x \geq c^\top x^*. \end{aligned} \tag{A.4}$$

⁵Hierbij is e_j de standaard orthonormale basisvector voor de j -de coördinaat: $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top$.

Beschouw nu de twee halfruimtes:

$$\begin{aligned}\mathbf{H}_1^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle c, x \rangle \geq c^\top x^*\}, \\ \mathbf{H}_2^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle A^* \lambda, x \rangle \geq \lambda^\top b\}.\end{aligned}$$

We gaan laten zien dat $\mathbf{H}_1^+ \subseteq \mathbf{H}_2^+$: neem een $x \in \mathbf{H}_1^+$, dan geldt dat $b - Ax \in \mathcal{M}$. Uit (A.4) volgt dat $\langle \lambda, b - Ax \rangle \leq 0$. Oftewel, $\langle \lambda, Ax \rangle \geq \langle \lambda, b \rangle \implies x \in \mathbf{H}_2^+$. Dus $\mathbf{H}_1^+ \subseteq \mathbf{H}_2^+$ en dit kan alleen als de normaalvectoren c en $A^* \lambda$ dezelfde richting op wijzen en in elkaars verlengde liggen. Anders gezegd, er bestaat een $\mu \geq 0$ zodanig dat

$$A^* \lambda = \mu c.$$

Stel dat $\mu = 0$ (dus $A^* \lambda = 0$), dan volgt uit (A.4):

$$\langle \lambda, b \rangle \leq \sup \{ \langle A^* \lambda, x \rangle : x \in \mathbb{R}^n, c^\top x \geq c^\top x^* \} = 0. \quad (\text{A.5})$$

Maar we hebben een strikt toegelaten oplossing $x \in \mathbb{R}^n$ met $b - Ax \in \text{int } \mathbf{K}$. Hiervoor geldt vanwege $\lambda \in \mathbf{K}_*$ dat

$$\begin{aligned}\langle \lambda, b - Ax \rangle &> 0 \\ \Leftrightarrow \quad \langle A^* \lambda, x \rangle &< \langle \lambda, b \rangle \leq 0.\end{aligned}$$

Dit is in tegenspraak met (A.5), omdat $\langle A^* \lambda, x \rangle = 0$. We concluderen dat er een $\mu > 0$ bestaat, waarvoor $A^* \lambda = \mu c$. Als laatste stap nemen we

$$\lambda^* = \frac{1}{\mu} \lambda,$$

waaruit volgt dat

$$\begin{aligned}\lambda^* &\in \mathbf{K}_*, \\ A^* \lambda^* &= c,\end{aligned}$$

dus λ^* is een toegelaten oplossing van de duale (A.3) met

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \quad b^\top \lambda^* &= \langle \lambda^*, b \rangle \leq \langle \lambda^*, Ax \rangle, & \forall x \in \mathbb{R}^n : c^\top x \geq c^\top x^* \\ \Rightarrow \quad b^\top \lambda^* &= \langle \lambda^*, b \rangle \leq \langle A^* \lambda^*, x \rangle = \langle c, x \rangle, & \forall x \in \mathbb{R}^n : c^\top x \geq c^\top x^* \\ & b^\top \lambda^* \leq \langle c, x^* \rangle = c^\top x^*.\end{aligned}$$

Uit zwakke dualiteit volgt nu dat $b^\top \lambda^* = c^\top x^*$ en dus is λ^* optimaal.

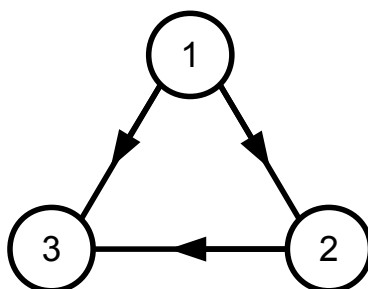
De tweede uitspraak van (iv) kan op een analoge manier bewezen worden, zie bijvoorbeeld [12]. Ook kan men redeneren dat de duale van (A.3) weer (A.2) moet zijn en kunnen we in het bovenstaande bewijs de twee problemen met elkaar omwisselen (zie [8]).

□

B Netwerken

De volgende figuren en tabellen geven alle specificaties van de vijf netwerken die we gebruiken om ons robuuste model te testen. De netwerken zijn overgenomen uit [7], [9] en [11] of zijn variaties van de daarin genoemde netwerken. Indien we de kosten niet konden terugvinden, hebben we de kosten gezet op 1, 2, 3, et cetera in volgorde van de knooppunten.

De waarden van de reactanties en admittanties hebben eenheid *per unit*, waarbij we 100 MW als basis vermogen nemen en 10 kV als basis spanning. Het vermogen is gegeven in MW. Verder geven we in de kolom ‘Type’ aan welk type dat knooppunt is: een *generator bus* wordt aangegeven met *PV*, een *load bus* met *PQ* en een *slack bus* met *V δ* . De symbolen staan voor de grootheden die bekend zijn in de knooppunten (zie ook tabel 2.1).



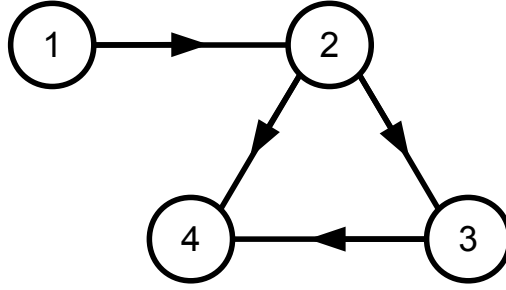
Figuur B.1: Gerichte graaf van netwerk 1 en 2.

i	Type	$P_{d,i}$	$P_{g,i}^{\min}$	$P_{g,i}^{\max}$	c_i	(i, j)	X_{ij}	B_{ij}	$P_{ij}^{\max}$
1	<i>PV</i>	0	0	80	1	(1, 2)	0.20	5.0	100
2	<i>PQ</i>	100	-	-	-	(1, 3)	0.40	2.5	100
3	<i>Vδ</i>	0	0	40	2	(2, 3)	0.25	4.0	100

Tabel B.1: Specificaties van netwerk 1.

i	Type	$P_{d,i}$	$P_{g,i}^{\min}$	$P_{g,i}^{\max}$	c_i	(i, j)	X_{ij}	B_{ij}	$P_{ij}^{\max}$
1	<i>Vδ</i>	154.74	20	200	14	(1, 2)	0.20	5.0	55
2	<i>PV</i>	51.58	10	150	21	(1, 3)	0.40	2.5	55
3	<i>PV</i>	51.58	5	20	11	(2, 3)	0.25	4.0	55

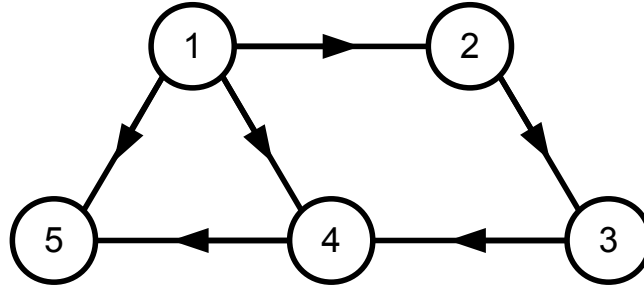
Tabel B.2: Specificaties van netwerk 2.



Figuur B.2: Gerichte graaf van netwerk 3.

i	Type	$P_{d,i}$	$P_{g,i}^{\min}$	$P_{g,i}^{\max}$	c_i	(i, j)	X_{ij}	B_{ij}	$P_{ij}^{\max}$
1	$V\delta$	0	0	500	20	(1, 2)	0.10	10	200
2	PQ	100	-	-	-	(2, 3)	0.10	10	120
3	PV	300	0	200	25	(2, 4)	0.10	10	120
4	PV	0	0	200	30	(3, 4)	0.10	10	50

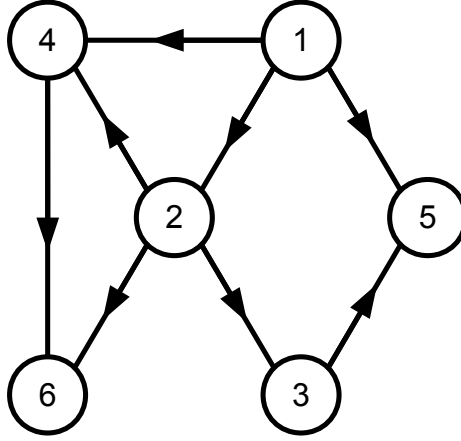
Tabel B.3: Specificaties van netwerk 3.



Figuur B.3: Gerichte graaf van netwerk 4.

i	Type	$P_{d,i}$	$P_{g,i}^{\min}$	$P_{g,i}^{\max}$	c_i	(i, j)	X_{ij}	B_{ij}	$P_{ij}^{\max}$
1	$V\delta$	0	0	210	16	(1, 2)	0.0281	35.5872	250
2	PQ	408.25	-	-	-	(1, 4)	0.0304	32.8947	150
3	PV	346.13	0	520	28	(1, 5)	0.0064	156.2500	400
4	PV	291.61	0	200	10	(2, 3)	0.0108	92.5926	350
5	PV	0	0	600	24	(3, 4)	0.0297	33.6700	240
						(4, 5)	0.0297	33.6700	240

Tabel B.4: Specificaties van netwerk 4.



Figuur B.4: Gerichte graaf van netwerk 5.

i	Type	$P_{d,i}$	$P_{g,i}^{\min}$	$P_{g,i}^{\max}$	c_i		(i, j)	X_{ij}	B_{ij}	$P_{ij}^{\max}$
1	$V\delta$	80	0	160	1		(1, 2)	0.400	2.500	120
2	PQ	240	-	-	-		(1, 4)	0.600	1.667	100
3	PV	40	0	370	2		(1, 5)	0.200	5.000	120
4	PQ	160	-	-	-		(2, 3)	0.200	5.000	120
5	PQ	240	-	-	-		(2, 4)	0.400	2.500	120
6	PV	0	0	610	3		(2, 6)	0.300	3.333	240
							(3, 5)	0.200	5.000	360
							(4, 6)	0.300	3.333	240

Tabel B.5: Specificaties van netwerk 5.

C AIMMS code

Hieronder staat de omschrijving van ons AIMMS model. De gebruikte AIMMS versie is 3.11.4.19500.

MAIN MODEL Main_RobustOPF

DECLARATION SECTION

```
SET:
  identifier : Buses
  index      : b
  comment    : "All buses of the network." ;

SET:
  identifier : Generators
  index      : g
  comment    : "All generators of the network." ;

SET:
  identifier : BusBranches
  subset of  : (Buses, Buses)
  tags       : (fb, tb)
  index      : bb
  order by   : bb.fb,bb.tb
  comment    : "All lines (between buses) of the network.
                Very important: do not make the matrix symmetrical,
                i.e. only add line(1,2) OR (2,1) if buses 1 and 2 are connected,
                not both (1,2) and (2,1).
                See also the definition of PowerFlow." ;

SET:
  identifier : GenBusBranches
  subset of  : (Generators, Buses)
  tags       : (fg, tb)
  index      : gb
  comment    : "Allocation of generators to buses." ;

SET:
  identifier : SlackBus
  subset of  : Buses
  index      : sb
  comment    : "Define slack bus." ;

PARAMETER:
  identifier : Admittance
  index domain : (bb)
  definition  : (1/Reactance(bb))
  comment    : "B = 1/X, where B = admittance and X = reactance." ;

PARAMETER:
  identifier : Reactance
  index domain : (bb)
  comment    : "Reactance X of each line." ;
```

```

PARAMETER:
  identifier   : PflowMin
  index domain : (bb)
  definition   : -PflowMax(bb)
  comment      : "Maximum flow in opposite direction of the definition
                  of the line (i.e. negative flow).
                  Assumption: line capacity does not depend on power flow direction." ;

PARAMETER:
  identifier   : PflowMax
  index domain : (bb)
  comment      : "Maximum line capacity for the power flow." ;

PARAMETER:
  identifier   : GenMin
  index domain : g
  comment      : "Minimum power generated." ;

PARAMETER:
  identifier   : GenMax
  index domain : g
  comment      : "Maximum power generated." ;

PARAMETER:
  identifier   : CostGenLinear
  index domain : (g)
  comment      : "Linear cost coefficient of power production." ;

PARAMETER:
  identifier   : PowerDemand
  index domain : (b)
  comment      : "Demand or load in each bus." ;

PARAMETER:
  identifier   : BaseMVA
  definition   : 100
  comment      : "Base MVA of apparent power." ;

PARAMETER:
  identifier   : Deviation
  range        : [0, 1]
  comment      : "Deviation in admittance:  $B_{real} = (1 \pm Deviation) * B_{input}$ ,
                  where  $B_{input}$  are the values of Admittance.
                  Assumption: Deviation must be in [0,1], otherwise the program
                  will contain errors (see Robust Optimization theory).
                  Set Deviation = 0 for normal optimization." ;

VARIABLE:
  identifier   : VoltageAngleDeg
  index domain : (b)
  definition   : VoltageAngle(b)/(2*3.141592654)*360
  comment      : "Voltage angles in degrees." ;

```

```

VARIABLE:
  identifier   : PowerInserted
  index domain : (b)
  definition   : sum[ gb | gb.tb = b, PowerGenerated(gb.fg) ]
  comment      : "Sum of all generated power supplied directly to the bus
                  from connected generators." ;

VARIABLE:
  identifier   : VoltageAngle
  index domain : (b)
  range        : (-3.141592654, 3.141592654]
  comment      : "Voltage angle in radians.
                  Decision variable." ;

VARIABLE:
  identifier   : PowerFlow
  index domain : (bb)
  definition   : BaseMVA*Admittance(bb)*(VoltageAngle(bb.fb)-VoltageAngle(bb.tb))
  comment      : "Power Flow:  $P_{f_{ij}} = B_{ij} * (\delta_i - \delta_j)$ .
                  Due to load (PowerDemand) being in MW, Admittance in per unit,
                  we need to convert the Power Flow value to MW.
                  Therefore we multiply by BaseMVA." ;

VARIABLE:
  identifier   : PowerGenerated
  index domain : (g)
  range        : nonnegative
  comment      : "Power generated.
                  Decision variable." ;

VARIABLE:
  identifier   : TotalGenerationCosts
  range        : free
  definition   : sum [ g, CostGenLinear(g)*PowerGenerated(g) ]
  comment      : "Total costs of generation.
                  Assumption: only linear terms.
                  Objective function." ;

VARIABLE:
  identifier   : AngleDifference
  index domain : bb
  range        : free
  definition   : VoltageAngle(bb.fb)-VoltageAngle(bb.tb)
  comment      : "Voltage angle difference." ;

VARIABLE:
  identifier   : AngleDifferenceDeg
  index domain : (bb)
  range        : free
  definition   : VoltageAngleDeg(bb.fb)-VoltageAngleDeg(bb.tb)
  comment      : "Voltage angle difference in degrees." ;

```

```

VARIABLE:
  identifier : SUMPowerInserted
  range      : free
  definition  : sum[ b, PowerInserted(b)]
  comment    : "Sum of all power inserted (generated).";

VARIABLE:
  identifier : SUMPowerDemand
  range      : free
  definition  : sum[ b, PowerDemand(b)]
  comment    : "Sum of all power load (demand).";

VARIABLE:
  identifier : u
  index domain : (bb)
  range      : nonnegative
  comment    : "In optimum: absolute value of AngleDifference.
                Needed for Robust Optimization.
                Decision variable for robust optimization." ;

VARIABLE:
  identifier : RO_PF
  index domain : (b)
  range      : free
  definition  : sum[ bb | bb.tb = b, PowerFlow(bb) ]
               - sum[ bb | bb.fb = b, PowerFlow(bb) ]
               -(sum[ bb | bb.tb = b, BaseMVA*Deviation*Admittance(bb)*u(bb) ]
               + sum[ bb | bb.fb = b, BaseMVA*Deviation*Admittance(bb)*u(bb) ])
  comment    : "Robust power flow for the power balance equations
                (see also the PowerFlowNetwork constraint).";

VARIABLE:
  identifier : RO_PFmin
  index domain : (bb)
  range      : free
  definition  : PowerFlow(bb) - BaseMVA*Deviation*Admittance(bb)*u(bb)
  comment    : "Robust power flow for the minimal line capacity
                (see also the LineCapacityMIN constraint).";

VARIABLE:
  identifier : RO_PFmax
  index domain : (bb)
  range      : free
  definition  : PowerFlow(bb) + BaseMVA*Deviation*Admittance(bb)*u(bb)
  comment    : "Robust power flow for the maximal line capacity
                (see also the LineCapacityMAX constraint).";

CONSTRAINT:
  identifier : VoltageAngleSlackBus
  index domain : sb
  definition  : VoltageAngle(sb) = 0
  comment    : "Set voltage angle for the slack bus to zero (for reference).";

```

```

CONSTRAINT:
  identifier   : LineCapacityMAX
  index domain : (bb)
  definition   : PowerFlow(bb)+BaseMVA*Deviation*Admittance(bb)*u(bb) <= PflowMax(bb)
  comment      : "Maximum line capacity constraint, with Robust Optimization." ;

CONSTRAINT:
  identifier   : LineCapacityMIN
  index domain : (bb)
  definition   : PowerFlow(bb)-BaseMVA*Deviation*Admittance(bb)*u(bb) >= PflowMin(bb)
  comment      : "Maximum line capacity for negative flow, with Robust Optimization." ;

CONSTRAINT:
  identifier   : GeneratorCapacity
  index domain : (g)
  definition   : GenMin(g) <= PowerGenerated(g) <= GenMax(g)
  comment      : "Capacity constraints on the generators." ;

CONSTRAINT:
  identifier   : PowerFlowNetwork
  index domain : (b)
  definition   : sum[ bb | bb.tb = b, PowerFlow(bb) ]
                - sum[ bb | bb.fb = b, PowerFlow(bb) ]
                -(sum[ bb | bb.tb = b, BaseMVA*Deviation*Admittance(bb)*u(bb) ]
                + sum[ bb | bb.fb = b, BaseMVA*Deviation*Admittance(bb)*u(bb) ])
                + PowerInserted(b) >= PowerDemand(b)
  comment      : "Power balance equation. Normal (non-robust) case:
                  \"flow in - flow out + generated power = power demand\".
                  \"sum[ bb | bb.tb = b, PowerFlow(bb) ]\"
                  -> all power flow to the bus
                  (this is because the BusBranches matrix is not symmetrical).
                  \"-sum[ bb | bb.fb = b, PowerFlow(bb) ]\"
                  -> minus all power flow from the bus
                  (this is because the BusBranches matrix is not symmetrical).

                  We want
                  \"-sum_j B_ij * (delta_i - delta_j)\"
                  = \"-sum_{bus b = i} B_ij * (delta_i - delta_j)\"
                  + \"-sum_{bus b = j} B_ij * (delta_i - delta_j)\"
                  = \"sum_{bus b = i} B_ij * (delta_j - delta_i)\"
                  + \"sum_{bus b = j} B_ij * (delta_j - delta_i)\"
                  = \"all power flow to bus\" + \"minus all power from bus\".

                  Robust case:
                  \"flow in - flow out - robustness correction
                  + generated power >= power demand\".
                  \"sum[ bb|bb.tb = b, BaseMVA*Deviation*Admittance(bb)*u(bb)]\"
                  -> robustness correction for flow to the bus.
                  \"sum[ bb|bb.fb = b, BaseMVA*Deviation*Admittance(bb)*u(bb)]\"
                  -> robustness correction for flow from the bus.
                  (The second expression is needed, because the BusBranches matrix
                  is not symmetrical.)" ;

```

```

CONSTRAINT:
  identifier   : uConstraint1
  index domain : (bb)
  definition   : -u(bb) <= VoltageAngle(bb.fb) - VoltageAngle(bb.tb)
  comment      : "Needed for Robust Optimization.
                  Eventually u_ij = | delta_i - delta_j |." ;

CONSTRAINT:
  identifier   : uConstraint2
  index domain : (bb)
  definition   : VoltageAngle(bb.fb) - VoltageAngle(bb.tb) <= u(bb)
  comment      : "Needed for Robust Optimization.
                  Eventually u_ij = | delta_i - delta_j |." ;

MATHEMATICAL PROGRAM:
  identifier   : MinTotalGenCosts
  objective    : TotalGenerationCosts
  direction    : minimize
  constraints   : AllConstraints
  variables    : AllVariables
  type         : Automatic
  comment      : "Mathematical program." ;

ENDSECTION ;

PROCEDURE
  identifier : MainInitialization
ENDPROCEDURE ;

PROCEDURE
  identifier : MainExecution
  body      :
    solve MinTotalGenCosts;
    if ( MinTotalGenCosts.ProgramStatus <> 'Optimal' ) then
      empty PowerGenerated, PowerFlow, VoltageAngle, VoltageAngleDeg,
        PowerInserted, TotalGenerationCosts, AngleDifference,
        AngleDifferenceDeg, SUMPowerInserted,u, RO_PF,RO_PFmax,RO_PFmin;
    endif;
ENDPROCEDURE ;

PROCEDURE
  identifier : MainTermination
  body      :
    if ( CaseSaveAll( confirm:2 ) = 1 ) then
      return 1;
    else
      return 0;
    endif ;
ENDPROCEDURE ;

ENDMODEL Main_RobustOPF ;

```