



Technische Hogeschool Delft

Afdeling der Civiele Techniek
vakgroep Dynamica en Systemen

VLOEISTOFBEWEGINGEN IN RECHTHOEKIGE TANKS TEN GEVOLGE VAN KLEINE HARMONISCHE TRANSLATIES EN ROTATIES VAN DE TANK

Ir. H.A. Dieterman

Vloeistofbewegingen in rechthoekige tanks
ten gevolge van kleine harmonische trans-
laties en rotaties van de tank.

Ir. H.A. Dieterman

juni 1982.

Dit rapport bevat het verslag van een deelonderzoek binnen het project 08.81.01.4, dat behoort tot het thema "Trillingen van constructies en de bestrijding daarvan door middel van adapterende hulpsystemen". Dit thema maakt deel uit van het onderzoekprogramma van de vakgroep Dynamica en Systemen van de afdeling der Civiele Techniek.

Het rapport is intern verspreid in beperkte kring (zie bijgevoegde verzendlijst).

Ik dank prof.dr.ir. J.C. Schönfeld voor zijn waardevolle commentaren op het concept van dit rapport.

Tevens wil ik de typekamer van de afdeling bedanken voor de verzorging van het typewerk.

Samenvatting.

In dit rapport wordt een methode ontwikkeld om de harmonische responsie van een vloeistof in een tank te bepalen in geval van kleine translaties en rotaties van de tank.

De vloeistof is als incompressibel en niet-viskeus benaderd. De beschouwde tankgeometrie is rechthoekig en de tank is benaderd als een star lichaam.

Ter oplossing van het resulterende niet-homogene randvoorwaardenprobleem wordt gebruik gemaakt van de methode van scheiden van variabelen. Er zijn bij de aanpassing van de randvoorwaarden verschillende onderlinge volgordes mogelijk, die nader worden belicht.

Gekozen wordt voor het eerst aanpassen van de inhomogene randvoorwaarden. Dit wordt nader uitgewerkt. Hierbij vervult de asymptotische oplossing voor de potentiaalfunctie bij de eigenwaarde nul een belangrijke rol.

De potentiaalfuncties zijn bepaald in geval van translatie en rotatie van de tank. Verder is aangegeven hoe de resulterende krachten en momenten op de tankwanden ende oppervlakverplaatsing van de vloeistof kunnen worden bepaald.

Inhoudsopgave.

blz.

1.	Inleiding.	2
2.	Probleemstelling.	4
	2.1. Het vloeistofmodel	4
	2.2. Begin (eind)voorwaarden.	6
	2.3. Randvoorwaarden.	7
3.	Scheiden van variabelen.	11
4.	Bepaling van de potentiaal ϕ in geval van een translatie van de bak.	15
	4.1. Verwerken van de wandvoorwaarden.	15
	4.2. Verwerken van de bodemvoorwaarde.	17
	4.3. Verwerken van de oppervlakvoorwaarde.	18
	4.4. Berekening van belangrijke dynamische grootheden.	20
5.	Bepaling van de potentiaal ϕ in geval van een rotatie van de bak.	22
	5.1. Verwerken van de wandvoorwaarden.	22
	5.2. Verwerken van de bodemvoorwaarde.	24
	5.3. Verwerken van de oppervlakvoorwaarde.	25
	5.4. Berekening van belangrijke dynamische grootheden.	26
6.	Slotbeschouwing.	27

1. Inleiding.

We zullen de vloeistofbewegingen bepalen in een rechthoekige tank ten gevolge van kleine harmonische oscillaties van de tank als geheel. Hierbij denken we de tank als een star lichaam, en voor de vloeistof gebruiken we het model van de "ideale" vloeistof d.w.z. we benaderen de vloeistof als homogeen, wrijvingsloos en incompressibel.

Door de vloeistofbewegingen verder als wervelvrij te behandelen is het snelheidsveld af te leiden van een scalar-potentiaal.

De veronderstelling dat de amplitudes van de tankoscillaties klein zijn heeft tot gevolg dat Euler- en Lagrangebalansen asymptotisch tot elkaar naderen, waardoor de randvoorwaarden en vrije oppervlakvoorwaarden gelineariseerd kunnen worden.

De scalarpotentiaal ϕ moet dan voldoen aan de Laplace-vergelijking $\nabla^2 \phi = 0$, vanwege de onsamendrukbaarheid en afwezigheid van positieve dan wel negatieve bronnen, en voorts aan gelineariseerde randvoorwaarden op bodem, wanden en vrij oppervlak.

De oplossing van de potentiaal ϕ bepalen we met behulp van de methode van scheiden van variabelen.

We zullen de randvoorwaarden in een vaste volgorde gaan aanpassen. We zullen namelijk eerst de wandvoorwaarden, vervolgens de bodem- en tenslotte de oppervlakvoorwaarde aanpassen.

Dit leidt tot een oplossing voor de scalarpotentiaal ϕ , waarbij de eigenfrequenties van de vloeistofbeweging inclusief de asymptotische oplossing voor ϕ bij de eigenwaarde nul een belangrijke rol vervullen. De vrije oppervlakvoorwaarde in het geval van translatie alsmede de bodemvoorwaarde in het geval van rotatie van de tank moeten bij deze volgorde van aanpassing van voorwaarden ontwikkeld worden in een Fourier-reeks van harmonische functies.

Een andere volgorde van aanpassing van de randvoorwaarden leidt tot een meer fysische structurering van het probleem. Door namelijk eerst de oppervlakvoorwaarde bij een bepaalde frequentie aan te passen, krijgen we een andere deelverzameling van de parameter-familie λ . Voor deze deelverzameling blijken harmonische en hyperbolische functies orthogonaal, waarvan gebruik wordt gemaakt om de wandvoorwaarden aan te passen, door middel van een kleinste kwadraten benadering. Deze weg leidt tot een ander toepassingsgebied van de theorie en leidt tot een snellere convergentie van de potentiaal ϕ in de parameter λ .

Hierbij dient wel te worden aangetekend dat de convergentiesnelheid mede bepaald wordt door de lengte/hoogte verhouding van de vloeistof in de bak. Voor tanks waarvan de lengte/hoogte verhouding klein is t.o.v. 1 verdient een oplossing als de eerstgenoemde, die in deze publicatie gevolgd wordt, de voorkeur. Is de lengte/hoogte verhouding groter dan 1 dan verdient de laatstgenoemde volgorde van aanpassing van voorwaarden de voorkeur zoals in een volgende publicatie zal worden duidelijk gemaakt.

We bepalen eerst de potentiaal voor de vloeistofbeweging in de tank met rechthoekige dwarsdoorsnede, waarbij de tank in zijn geheel een horizontale translatie van de vorm $\text{Re}(V_1 e^{i\Omega t})$ krijgt opgelegd. Vervolgens bepalen we ϕ voor een rotatiebeweging van de vorm $\text{Re}(W_1 e^{i\Omega t})$ om het massacentrum van de vloeistof in rust, met de rotatie-as evenwijdig aan de vloeistofspiegel in rust.

Voor een rotatie met translatie van het massacentrum zijn de resulterende krachten en momenten op de tankwanden dan te bepalen door superpositie.

In een vervolg-publicatie zullen we de hier gevolgde weg nader uitwerken en gebruiken voor een analytisch gediscrètiseerd model voor het dynamisch gedrag van een watertoren.

2. Probleemstelling.

2.1. Het vloeistofmodel.

We beschouwen een enkelvoudig samenhangende drie-dimensionale starre tankconfiguratie waarin zich een vloeistof bevindt, die homogeen en onsa-
mendrukbaar is. De rand van de tank/geven we aan met S . Het geheel be-
vindt zich in een lokaal gravitatieveld met potentiaal V .

We beschouwen van de vloeistof het snelheids(vector)veld t.o.v. een
Eulers (Cartesisch) coördinatenstelsel.

Dit vectorveld is bij geschikte randvoorwaarden op S eenduidig te
splitsen in een wervelvrije en een divergentievrije deelverzameling.¹⁾

Het wervelvrije vectorveld $\vec{u}_1$ is van een scalar-potentiaal ϕ af te
leiden in de vorm:

$$\vec{u}_1 = \text{grad } \phi + \text{constante} \quad (1)$$

Het divergentievrije vectorveld $\vec{u}_2$ is van een vectorpotentiaal $\vec{\psi}$ af
te leiden in de vorm:

$$\vec{u}_2 = \text{rot } \vec{\psi} + \text{constante} \quad (2)$$

Bij geschikte randvoorwaarden op S is het snelheidsveld $\vec{u}$ van de
vloeistof in de tank dan te schrijven als:

$$\vec{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi} \quad (3)$$

De incompressibiliteit van de vloeistof leidt tot de Laplace-vergelij-
king nl.

$$\text{div } \vec{u} = \text{div } (\text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi}) = \nabla^2 \phi = 0 \quad (4)$$

Onder de aanname dat de optredende snelheidsgroottes zodanig zijn dat
het Reynolds getal Re steeds kleiner is dan Re_{crit} , wordt de dynamica
van de vloeistofbeweging beschreven door de Navier-Stokes vergelijkingen:

¹⁾ A. Sommerfeld, Mechanik der deformierbaren Medien, Vorlesungen über
theoretischen Physik (1978) Thun, § 20 pp. 131-135.

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} - \mu \nabla^2 \vec{u} + \text{grad } p = \text{grad } V \quad (5)$$

Hierin zijn:

- ρ = de dichtheid van de vloeistof.
- $\vec{u}$ = het snelheidsveld.*
- μ = de dynamische viscositeit.
- p = de druk.
- V = de potentiaal van het zwaarteveld.

Definiëren we de wervelsterkte $\vec{\omega}$ als:

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} \quad (6)$$

en kiezen we de z-as vertikaal naar boven, dan is (5) m.b.v.

$$(\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} = \text{grad } \frac{u^2}{2} + \vec{u} * \text{rot } \vec{u} \quad (7)$$

om te werken tot

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} * \vec{u} - \nu \nabla^2 \vec{u} + \text{grad } U = 0 \quad (8)$$

met

$$U = \frac{p}{\rho} + gz + \frac{u^2}{2} \quad (9)$$

In (8) is $\nu = \mu/\rho$ de kinematische viscositeit en in (9) is voor de zwaartepotentiaal $V = -gz$ gesubstitueerd.

We nemen nu verder aan dat de snelheden, die in het stromingsveld optreden klein zijn, bv. orde λ . Dan is eenvoudig in te zien, dat de termen $\vec{\omega} * \vec{u}$ en $u^2/2$ in (9) beiden van de orde λ^2 zijn en dus in dit geval te verwaarlozen. Dan is (8) met behulp van (3) om te werken tot:

$$\text{grad } \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nu \nabla^2 \phi + \frac{p}{\rho} + gz \right) + \text{rot } \left(\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{\psi} \right) = \vec{0} \quad (10)$$

Aan deze vectorvergelijking kan in het algemeen alleen worden voldaan als:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} - \nu \nabla^2 \phi + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (11)$$

en

$$\frac{\partial \vec{\psi}}{\partial t} - \nu \nabla^2 \vec{\psi} = \vec{g}(t) \quad (12)$$

Vergelijking (11) is een uitbreiding van de Euler-Bernoulli-vergelijking voor viskeuze vloeistoffen en (12) beschrijft de werveldynamica als we ons realiseren dat:

$$\vec{\omega} = \text{rot } \vec{u} = \text{rot}(\text{grad } \phi + \text{rot } \vec{\psi}) = - \nabla^2 \vec{\psi} \quad (13)$$

In het geval van een wervelvrije stroming $\vec{\omega} = \vec{0}$ volgt dat de wervelpotentiaal $\vec{\psi}$ niet van de ruimte-coördinaten afhangt en dus geen bijdrage meer levert tot het snelheidsveld.

Als we de vloeistof tenslotte als niet-viskeus benaderen ($\nu \rightarrow 0$) en dus met de eerdere beperkingen als ideaal opvatten, dan vereenvoudigt (11) tot:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = f(t) \quad (14)$$

Zonder verlies van algemeenheid kunnen we de functie $f(t)$ in de scalarpotentiaal ϕ opnemen.

Het vloeistofmodel dat we verderop zullen gebruiken voldoet aan de vergelijkingen (4) en (14).

2.2. Begin (eind)voorwaarden.

We willen de vloeistofbewegingen berekenen die het gevolg zijn van een opgelegde harmonische translatie en rotatie met kleine amplitude van de rand S van de tankgeometrie.

Daarbij ontstaan naast de gedwongen responsie ook eigenbewegingen, die mede bepaald worden door de begin (eind)voorwaarden van de vloeistofbeweging.

We zullen in deze publicatie hoofdzakelijk ingaan op de gedwongen responsie en slechts zijdelings ingaan op de eigenbewegingen. De partiële differentiaalvergelijking (4) waaraan de potentiaal moet voldoen is lineair. Ook de voorwaarde (14) en de nog te behandelen randvoorwaarden zijn lineair, dan wel zullen gelineariseerd worden. Het superpositiebeginsel zal dan van toepassing zijn.

We zullen excitaties beschouwen van de vorm

$$f = f_0 e^{pt} \quad (15)$$

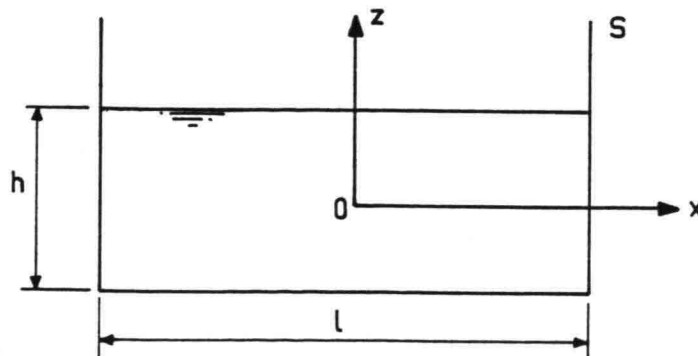
met $p = i\Omega$

De excitatie van de vloeistof heeft een periodiek karakter en we zoeken dus oplossingen van de resulterende vloeistofbeweging met dezelfde periode.

Gezien de schrijfwijze van (15) wordt aan het eind van de berekeningen de fysische oplossing van het probleem verkregen door het reële deel van het resultaat te bepalen.

2.3. Randvoorwaarden.

De eerder ingevoerde tankgeometrie met rand S gaan we nu nader omschrijven. We denken de tank als een rechthoekige bak met lengte l waarin zich vloeistof bevindt tot een hoogte h . De atmosferische druk boven de vloeistof kunnen we zonder bezwaar nul stellen.



We kiezen het coördinatenstelsel Oxz met de oorsprong in het massacentrum van de vloeistof in rust.

Aangezien Eulerse en Lagrangiaanse interpretaties van snelheden asymptotisch tot elkaar naderen bij de veronderstelling van kleine snelheden, kunnen we de volgende randvoorwaarden afleiden.²⁾

Op de rand S geldt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = u_n \quad (16)$$

Langs de verticaal en aan het vrije vloeistofoppervlak, beschreven met $z = \eta(x, t)$, geldt:

$$u_z = \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

en voorts:

$$g\eta + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad z = \frac{h}{2} \quad (17)$$

waaruit volgt:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = \frac{h}{2} \quad (18)$$

bekend uit de lineaire korte-golf-theorie.

De druk op diepte z volgt uit (14) waarbij we $p(x, z, t)$ als overdruk interpreteren:

$$p(x, z, t) = -\rho g(z - \frac{h}{2}) - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (19)$$

In het geval van een kleine harmonische translatie van de bak in de vorm:

$$\vec{v} = v_{1x} e^{i\Omega t} \vec{e}_x + v_{1z} e^{i\Omega t} \vec{e}_z \quad (20)$$

²⁾ J.J. Stoker, *Waterwaves*, (1957), New York, § 1 en § 2.

gecombineerd met een kleine harmonische rotatie van de bak in de vorm:

$$w_y = W_1 e^{i\Omega t} \quad (21)$$

om het zwaartepunt van de vloeistof in rust gaan we de randvoorwaarden op S nader bepalen.

Er ontstaan niet-homogene randvoorwaarden langs wanden en bodem, die we niet exact in rekening brengen, maar bij wijze van benadering (linearisatie) langs de rand. Dit is mogelijk vanwege de klein veronderstelde amplitudes van de harmonische bewegingen.

De randvoorwaarden (16) op S kunnen we met (20) en (21) nader uitwerken tot:

$$u_n = u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = (V_{1x} + W_1 z) e^{i\Omega t} \quad x = \pm \ell/2 \quad (22)$$

en

$$u_n = u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = (V_{1z} - W_1 x) e^{i\Omega t} \quad z = -\frac{h}{2} \quad (23)$$

Aangezien we te maken hebben met een gelineariseerd probleem kunnen we de randvoorwaarden (22) en (23) ook splitsen in een zuivere translatie en een zuivere rotatie en de oplossingen daarvoor apart bepalen en deze vervolgens superponeren. Uit overwegingen van overzichtelijkheid zullen we deze weg hier volgen.

Bij de translatie volgt dan:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = V_{1x} e^{i\Omega t} \quad x = \pm \frac{1}{2} \ell \quad (24a)$$

en

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = V_{1z} e^{i\Omega t} \quad z = -\frac{h}{2} \quad (24b)$$

en bij de rotatie:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = W_1 z e^{i\Omega t} \quad x = + \frac{1}{2} \ell \quad (25a)$$

en

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = - W_1 x e^{i\Omega t} \quad z = - \frac{h}{2} \quad (25b)$$

Bij de gedwongen translatie van de bak zullen we het geval dat er een horizontale beweging is opgelegd ($V_{1z} \equiv 0$) nader uitwerken, omdat de aanpassing aan een verticale beweging van de tank geen nieuwe inzichten oplevert.

De potentiaalfunctie die voldoet aan de Laplace-vergelijking en de randvoorwaarden in het geval van een zuivere verticale translatie van de bak ($V_{1z} \neq 0$, $V_{1x} = W_1 = 0$) is $\phi = (z V_{1z} + \text{constante})$.

De oppervlakvoorwaarde (18) blijft zowel in het geval van translatie als van rotatie homogeen.

Voor het vrije vloeistof-oppervlak volgend uit (17) moeten we bij berekening van de vloeistofhoogte δ t.o.v. de vloeistof in rust in het geval van de opgelegde rotatie corrigeren volgens:

$$\delta(x, z, t) = \eta(x, z, t) - x\theta_1 e^{i\Omega t}$$

met $i\Omega\theta_1 = W_1$ en η volgend uit (17).

3. Scheiden van variabelen.

We staan nu voor de opgave om de potentiaal ϕ te bepalen, die voldoet aan de differentiaalvergelijking (4) met de randvoorwaarden uit 2.3. in geval van gedwongen translatie dan wel rotatie van de bak. De differentiaalvergelijking en de randvoorwaarden zijn lineair, zodat het superpositiebeginsel geldt en de tijdsafhankelijkheid van ϕ , gezien de excitaties, geschreven kan worden als:

$$\phi(x, z, t) = \phi_0(x, z) e^{i\Omega t} \quad (26)$$

Voor de bepaling van de functie ϕ_0 maken we gebruik van de methode van scheiden van variabelen, en stellen:

$$\phi_0(x, z) = X(x) \cdot Z(z) \quad (27)$$

Substitutie van (27) in de Laplace-vergelijking (4) geeft:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = - \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} \quad (28)$$

Links van het gelijkteken staat een functie van uitsluitend x en rechts van het gelijkteken een functie van alleen z . Dientengevolge kan slechts aan (28) voldaan zijn als beide leden constant zijn. We noemen de constante $-\lambda^2$; de parameters λ behoren tot de verzameling van de complexe getallen: $\lambda \in \mathbb{C}$.

Uitwerken van (28) geeft:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0 \quad \text{en} \quad \frac{d^2 Z}{dz^2} - \lambda^2 Z = 0 \quad (29)$$

Behalve dat X een functie van x is, hangt X ook nog van de parameter λ af; evenzo hangt Z behalve van z ook van λ af. De oplossingen van (29) zijn dus te schrijven als:

$$X = X(x ; \lambda) \quad \text{en} \quad Z = Z(z ; \lambda) \quad (30)$$

Voor elke waarde van λ kan een bijdrage geleverd worden tot de functie Φ_0 van de vorm:

$$\Phi_1(x, z; \lambda) = X(x; \lambda) \cdot Z(z; \lambda) \quad (31)$$

Uitwerken van de oplossingen van (29) resulteert voor (31) in:

$$\Phi_1(x, z; \lambda) = \cos \lambda x (A \cosh \lambda z + C \sinh \lambda z) + \sin \lambda x (B \cosh \lambda z + D \sinh \lambda z) \quad (32)$$

Hierin zijn ook de coëfficiënten A, B, C en D nog als nader te bepalen functies van λ te beschouwen. Voor $|\lambda| \ll 1$ volgt:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, z; \lambda) &= \left(1 - \frac{\lambda^2 x^2}{2}\right) \left(A \left(1 + \frac{\lambda^2 z^2}{2}\right) + C \lambda z\right) + \lambda x \left(B \left(1 + \frac{\lambda^2 z^2}{2}\right) + D \lambda z + O(\lambda^3)\right) \\ &= A + \lambda Bx + \lambda Cz + \lambda^2 Dxz - \lambda^2 \frac{Ax^2}{2} + \lambda^2 \frac{Az^2}{2} + O(\lambda^3) \end{aligned}$$

Als we veronderstellen dat A, λB , λC en $\lambda^2 D$ eindig blijven als λ naar nul gaat, dan volgt met:

$$A \rightarrow a, \quad \lambda B \rightarrow b, \quad \lambda C \rightarrow c \quad \text{en} \quad \lambda^2 D \rightarrow d \quad (33)$$

de asymptotische oplossing voor Φ_1 , nl.

$$\Phi_1(x, z; 0) = a + bx + cz + dxz \quad (34)$$

Het is gemakkelijk te verifiëren dat de uitdrukking (34) voldoet aan de Laplace-vergelijking zoals te verwachten was.

We hebben hiermee de deeloplossing $\Phi_1(x, z; \lambda)$ bepaald die voldoet aan de Laplace-vergelijking voor elke parameter $\lambda \in \mathbb{C}$.

We moeten deze deeloplossingen $\Phi_1(x, z; \lambda)$ gaan aanpassen aan de randvoorwaarden van bodem, wanden en vrij oppervlak teneinde de potentiaalfunctie ϕ te bepalen.

Er zijn echter meerdere mogelijkheden om de genoemde randvoorwaarden aan te passen.

Een manier is om elke randvoorwaarde apart te beschouwen, waarbij de resterende randvoorwaarden homogeen gedacht zijn, en de bijbehorende deeloplossingen te bepalen. Door deze procedure voor elk der randvoorwaarden te volgen en alle deelresultaten te superponeren wordt de totale oplossing verkregen.

Een andere manier is om de deeloplossingen successievelijk aan te passen aan de randvoorwaarden er vanuit gaand dat er een oplossing bestaat en deze uniek is.

Bij deze successieve aanpassing ligt de volgorde waarin de randvoorwaarden worden aangepast niet vast.

Er zijn twee wegen aan te wijzen, namelijk een weg waarlangs eerst de homogene randvoorwaarden en vervolgens de inhomogene randvoorwaarden worden aangepast en een weg waarlangs deze volgorde verwisseld is.

De wegen leiden tot verschillende deelverzamelingen (discrete spectra) van de parameter λ binnen $\mathcal{C}$, waardoor ook de deeloplossingen $\Phi_1(x, z; \lambda)$ in de resulterende potentiaalfunctie ϕ verschillend van karakter zijn. Te noemen valt daarbij het convergentiekarakter.

Er zijn ook nog mengvormen van bovengenoemde wegen mogelijk echter zij leiden niet tot andere resulterende potentiaalfuncties.

Een vergelijking van de verschillende wegen o.a. op convergentiekarakter van de oplossingen zal zoals reeds in de inleiding is aangekondigd in een toekomstige publicatie worden behandeld.

In deze publicatie gaan we de weg, waarop de inhomogene randvoorwaarden voor de homogene worden aangepast, en wel die waarbij de wandvoorwaarden het eerst worden aangepast. De oplossing (32) voldoet aan de Laplace-vergelijking voor elke waarde van λ , dus ook voor $\lambda = 0$. Om voor deze laatstgenoemde waarde de oplossing niet te laten ontaarden, hebben we de coëfficiënten A , etc. voor $\lambda \rightarrow 0$ met asymptotiek bepaald, hetgeen resulteerde in (34). We kunnen deze uitdrukking dan ook gebruiken, naast (32) voor alle andere waarden van λ .

Dit houdt in dat we bij elke randvoorwaarde eerst $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, etc. behandelen voor alle parameterwaarden $\lambda \neq 0$, die nog in aanmerking komen om daarna nog (voorzover nodig) a , b , c en d te behandelen voor $\lambda = 0$.

We stellen dat de oplossing die aan de randvoorwaarden voldoet geschreven kan worden als:

$$\phi(x, z, t) = \sum_{\Lambda} \phi_1(x, z; \lambda) e^{i\Omega t}$$

waarin $\sum_{\Lambda}$ een sommatie over λ voorstelt met $\lambda \in \Lambda$ en Λ een nog nader te bepalen deelverzameling van $\mathcal{C}$ is, die wordt bepaald door het proces waarmee de aanpassing van ϕ_1 aan de randvoorwaarden wordt uitgevoerd.

4. Bepaling van de potentiaal ϕ in geval van een translatie van de bak.

We beschouwen een translatie van de bak van de vorm $\vec{v} = V_1 e^{i\Omega t} \vec{e}_x$, waarbij de amplitude klein verondersteld is. De verticale translatie laten we buiten beschouwing daar dit niet tot aanvullende inzichten leidt.

In dat geval moet de vloeistof in de bak voldoen aan de Laplace-vergelijking

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (36)$$

met de randvoorwaarden (24a) en (24b) met $V_{1z} \equiv 0$.

4.1. Verwerken van de wandvoorwaarden.

Het aanpassen van de algemene oplossing (32) aan de wandvoorwaarden (24a), rekening houdend met (26), heeft tot consequentie dat de parameterverzameling $\lambda \in \mathcal{C}$ beperkt wordt tot een deelverzameling ervan. Elk van de elementen van deze deelverzameling levert een bijdrage tot de aanpassing van de potentiaalfunctie.

Aangezien we te maken hebben met een gelineariseerd probleem kunnen we alle deeloplossingen superponeren tot de functie die voldoet aan de wandvoorwaarden.

Als we schrijven dat:

$$\begin{aligned} C_1(z; \lambda) &= A \cosh \lambda z + C \sinh \lambda z \\ C_2(z; \lambda) &= B \cosh \lambda z + D \sinh \lambda z \end{aligned} \quad (37)$$

dan volgt met (24a), (26) en (32):

$$\begin{pmatrix} -\lambda \sin \frac{1}{2} \lambda \ell & \lambda \cos \frac{1}{2} \lambda \ell \\ \lambda \sin \frac{1}{2} \lambda \ell & \lambda \cos \frac{1}{2} \lambda \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(z; \lambda) \\ C_2(z; \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

Deze vergelijking moet voldoen voor z : $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$.

Aan deze vergelijking kan voor $\lambda \neq 0$ niet voldaan worden door een geschikte keuze van de constanten in (37).

Beschouwen we de asymptotische oplossing (34) voor $\lambda = 0$ dan moet voldaan worden aan:

$$b + dz = V_1 \quad (39)$$

We kunnen dus aan de wandvoorwaarden voldoen met een deeloplossing voor $\lambda = 0$, door te kiezen:

$$b = V_1 \quad \text{en} \quad d = 0$$

zodat de deeloplossing vereenvoudigt tot:

$$\Phi_1(x, z; 0) = a + xV_1 + cz \quad (40)$$

Dit betekent dat voor $\lambda \neq 0$ op de wanden voldaan moet worden aan:

$$\begin{pmatrix} -\lambda \sin \frac{1}{2} \lambda \ell & \lambda \cos \frac{1}{2} \lambda \ell \\ \lambda \sin \frac{1}{2} \lambda \ell & \lambda \cos \frac{1}{2} \lambda \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(z; \lambda) \\ C_2(z; \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dit betekent dat gezien het bereik van z waarvoor (41) geldig is, de determinant van (41) nul moet zijn.

Dit leidt tot:

$$\lambda_k = \pm k \frac{\pi}{\ell} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

en tot

$$C_2(\lambda_k; z) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda_k \ell C_1(\lambda_k; z) \quad (42)$$

waarbij we bedenken dat de functies C_1 en C_2 beide eindig blijven op het interval $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$.

Daarmee wordt de deeloplossing behorende bij λ_k :

$$\Phi_1(x, z; \lambda_k) = (A_k \cosh \lambda_k z + C_k \sinh \lambda_k z) \cos \lambda_k (x - \frac{1}{2} \ell) \quad (43)$$

We hebben nu een aftelbaar oneindige verzameling (een zgn. discreet spectrum) van reële λ -waarden binnen de verzameling van de complexe getallen $\mathbb{C}$, behorende bij alle mogelijke deeloplossingen die voldoen aan de wandvoorwaarden. Met deze - voor de "methode van scheiden van variabelen" karakteristieke - verzameling is in feite de eerder genoemde deelverzameling Λ bepaald. Ter voldoening van de andere twee randvoorwaarden hoeven namelijk geen verdere beperkingen aan Λ te worden opgelegd ter bepaling van de nog onbekende coëfficiënten A_k en C_k . De functie die moet voldoen aan bodem- en oppervlakvoorwaarde is dus te schrijven als

$$\phi(z, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \Phi_1(x, z; \lambda_k) e^{i\Omega t} + \Phi_1(x, z; 0) e^{i\Omega t}$$

4.2. Verwerken van de bodemvoorwaarde.

Op de bodem moet (24b) met $V_{1z} \equiv 0$ gelden voor het bereik x : $-\frac{1}{2} \ell \leq x \leq +\frac{1}{2} \ell$. Dit leidt tot de eis dat:

$$\sum_k \lambda_k (-A_k \sinh \lambda_k \frac{h}{2} + C_k \cosh \lambda_k \frac{h}{2}) \cos \lambda_k (x - \frac{1}{2} \ell) + c = 0$$

Hetgeen vereist dat:

$$\frac{C_k}{A_k} = \tanh \lambda_k \frac{h}{2} \quad \text{en} \quad c = 0$$

Met dit tussenresultaat is de functie die voldoet aan de bodem- en wandvoorwaarden te schrijven als:

$$\phi(x, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \lambda_k \left(x - \frac{1}{2} \ell\right) \frac{\cosh \lambda_k \left(z + \frac{h}{2}\right)}{\cosh \lambda_k \frac{h}{2}} e^{i\Omega t} + (a + V_1 x) e^{i\Omega t} \quad (44)$$

De sommatie over positieve k-waarden wordt verklaard door het even karakter van de betrokken functies. Feitelijk voldoet nog elke deeloplossing in (44) aan zowel bodem- als wandvoorwaarde.

4.3. Verwerken van de oppervlakvoorwaarde.

Het tussenresultaat (44) moeten we tenslotte nog aanpassen aan de vrije oppervlakvoorwaarde (18). Dit vereist:

$$\sum_{k=1}^{\infty} A'_k (-\Omega^2 + g\lambda_k \operatorname{tgh} \lambda_k h) \cos \lambda_k \left(x - \frac{1}{2} \ell\right) - \Omega^2 a = x\Omega^2 V_1 \quad (45)$$

Hierin is:

$$A'_k = A_k \frac{\cosh \lambda_k h}{\cosh \lambda_k \frac{h}{2}}$$

Aangezien (45) moet gelden voor het bereik x : $\frac{1}{2} \ell \leq x \leq \frac{1}{2} \ell$ volgt dat de constante a nul moet zijn.

Teneinde de uitdrukking $g\lambda_k \operatorname{tgh} \lambda_k h$ in (45) nader te interpreteren, stellen we de amplitude van de opgelegde translatie $V_1 \equiv 0$. In feite bepalen we dan de eigenbewegingen van de vloeistof in de bak en worden de constanten A'_k bepaald door de beginvoorwaarden. In dat geval bepalen we met (45) de eigenfrequenties. Met $\Omega = \omega_k$, volgt dan:

$$\omega_k^2 = g\lambda_k \operatorname{tgh} \lambda_k h \quad (46)$$

een bekende uitdrukking uit de korte golf-theorie. Voor de potentiaal-functie volgt bij eigenbewegingen:

$$\phi_e(x, z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \cos \lambda_k \left(x - \frac{1}{2} \ell\right) \frac{\cosh \lambda_k \left(z + \frac{h}{2}\right)}{\cosh \lambda_k \frac{h}{2}} e^{i\omega_k t} \quad (47)$$

Met (46) en $a = 0$ volgt voor (45):

$$\sum_{k=1}^{\infty} A'_k (\omega_k^2 - \Omega^2) \cos \lambda_k (x - \frac{1}{2} \ell) = x \Omega^2 V_1 \quad (48)$$

Teneinde de nog onbekende coëfficiënten A'_k te bepalen ontwikkelen we de coördinaat x in het rechterlid in een Fourier-reeks van de vorm:

$$\frac{x}{\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos \lambda_k (x - \frac{\ell}{2}) \quad (49)$$

met:

$$a_k = \frac{2}{\ell} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} \frac{x}{\ell} \cos \lambda_k (x - \frac{\ell}{2}) dx \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell/2}^{+\ell/2} x dx$$

Uitwerking geeft:

$$a_k = \frac{4}{k^2 \pi^2} \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (50)$$

$$a_k = 0 \quad k = 0, 2, 4, \dots$$

Hiermee volgt voor de coëfficiënten A'_k :

$$A'_k = \frac{4 \Omega^2 V_1 \ell}{(\omega_k^2 - \Omega^2) \pi^2 k^2} \quad k = 1, 3, 5, \dots \quad (51)$$

$$= 0 \quad k = 0, 2, 4, \dots$$

en tenslotte voor de potentiaalfunctie:

$$\phi(x, z, t) = V_1 e^{i\Omega t} \left\{ x + \sum_{k=1}^{\infty} A'_k \frac{\cosh \lambda_k (z + \frac{h}{2})}{\cosh \lambda_k h} \cos \lambda_k (x - \frac{\ell}{2}) \right\} \quad (52)$$

met A'_k en λ_k volgend uit resp. (51) en (41).

Contrôle van (52) met (36) en de randvoorwaarden (18) en (24) bevestigen het resultaat.

4.4. Berekening van belangrijke dynamische grootheden.

De snelheidscomponenten van de vloeistofbeweging in de bak volgen uit:

$$\vec{v} = \text{grad } \phi$$

Teneinde de resulterende krachten en momenten te bepalen, die de vloeistofbeweging op de tankwanden uitoefent, moeten we de druk op diepte z bepalen. Met (19) volgt:

$$p(x, z, t) = -\rho g(z - \frac{h}{2}) - \rho \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

en met (52) is deze te berekenen.

De resulterende kracht in de x -richting volgt uit:

$$F_x = b \int_{-h/2}^{+h/2} \left\{ p(\frac{1}{2} \ell, z, t) - p(-\frac{1}{2} \ell, z, t) \right\} dz \quad (53)$$

waarin b de breedte van de bak voorstelt.

Het moment M_y om het zwaartepunt van de vloeistof in rust, dus de oorsprong, is te berekenen met:

$$M_y = b \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ p(\frac{1}{2} \ell, z, t) - p(-\frac{1}{2} \ell, z, t) \right\} z dz \quad (54)$$

Tenslotte kunnen we de hoogte van de vloeistofspiegel η t.o.v. de rustpositie berekenen met (17), nl.

$$\eta = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad z = + \frac{h}{2} \qquad (55)$$

5. Bepaling van de potentiaal ϕ in geval van rotatie van de bak.

We beschouwen een rotatie van de bak van de vorm $\vec{w}_y = W_1 e^{i\Omega t} \vec{e}_y$, waarbij W_1 klein verondersteld is en $\vec{e}_y$ rechtscyclisch met het coördinatenstelsel Oxz is verbonden.

Ook nu moeten we de Laplace-vergelijking (36) oplossen voor de randvoorwaarden als bepaald in (25^a) en (25^b).

De asymptotische deeloplossing:

$$\phi_1(x, z, t; \lambda = 0) = dxz e^{i\Omega t} \quad (56)$$

kan worden gebruikt om hetzij de wandvoorwaarden dan wel de bodemvoorwaarden te bevredigen. Als we eerst de bodemvoorwaarde voldoen, dan moet ter voldoening van de wandvoorwaarden een reeksontwikkeling van z in hyperbolische functies plaatsvinden en als we eerst de wandvoorwaarden voldoen, dan moet vervolgens naar x ontwikkeld worden, waarbij de reeks de standaardvorm van een Fourierreeks aanneemt van hetzelfde type als gebruikt in 4.3.

5.1. Verwerken van de wandvoorwaarden.

Met de oplossing (32) die ook nu van toepassing is, volgt met (37) uit de voorwaarde (25^a) voor de λ -waarden ongelijk aan nul.

$$\begin{pmatrix} \lambda \sin \frac{1}{2} \lambda \ell & \cos \frac{1}{2} \lambda \ell \\ -\lambda \sin \frac{1}{2} \lambda \ell & \cos \frac{1}{2} \lambda \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1(z; \lambda) \\ C_2(z; \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_1 z \\ W_1 z \end{pmatrix} \quad (57)$$

Deze vergelijking moet gelden voor het bereik z : $-\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2}$.

Na enig rekenwerk volgt dat hier niet aan voldaan kan worden door geschikte keuze van de coëfficiënten in $C_1(z; \lambda)$ en $C_2(z; \lambda)$ voor $\lambda \neq 0$.

Proberen we de asymptotische oplossing (34) dan moet voldaan worden aan:

$$b + dz = W_1 z \quad (58)$$

waaraan voldaan kan worden voor $b = 0$ en $d = W_1$.

Dit heeft consequenties voor (57) want er moet nu aan voldaan worden met een rechterlid gelijk nul.

Dit houdt in dat:

$$\lambda_k = \pm k \pi / \ell \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (59)$$

waarbij tevens weer geldt:

$$C_2(z; \lambda_k) = \operatorname{tg} \frac{1}{2} \lambda_k \ell \quad C_1(z; \lambda_k) \quad (60)$$

Voor de deeloplossing behorende bij λ_k volgt:

$$\phi_1(x, z; \lambda_k) = (A_k \cosh \lambda_k x + C_k \sinh \lambda_k z) \cos \lambda_k (x - \frac{1}{2}\ell)$$

en voor de deeloplossing bij $\lambda = 0$

$$\phi_1(x, z; 0) = a + cz + W_1 xz$$

Ook nu is de deelverzameling Λ weer bepaald en gelijk aan die in het geval van translatie van de bak, zodat we de potentiaalfunctie

$$\phi = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \phi_1(x, z; \lambda_k) e^{i\Omega t} + \phi_1(x, z; 0) e^{i\Omega t} \quad (61)$$

aan de resterende voorwaarden gaan aanpassen.

5.2. Verwerken van de bodemvoorwaarde

Op de bodem geldt (25b) voor het bereik x : $-\frac{1}{2} \ell \leq x \leq +\frac{1}{2} \ell$

Dit leidt tot:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda_k A_k \sinh \lambda_k \frac{h}{2} + \lambda_k C_k \cosh \lambda_k \frac{h}{2}) \cos \lambda_k (x - \ell/2) + c + W_1 x = -W_1 x \quad (62)$$

Hierbij is aangenomen, dat A_k een even functie en C_k een oneven functie van λ_k voorstellen, hetgeen blijkt uit de sommatie over de positieve λ_k -waarden.

Met gebruikmaking van de Fourier-reeks (49) volgt:

$$C_k = A_k \operatorname{tgh} \lambda_k \frac{h}{2} - \frac{2W_1 \ell a_k}{\lambda_k \cosh \lambda_k \frac{h}{2}} \quad (63)$$

en

$$c = 0$$

in (63) zijn a_k de Fourier-coëfficiënten (50).

De potentiaalfunctie die voldoet aan wand- en bodemvoorwaarden wordt hiermee:

$$\phi = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left(A_k \frac{\cosh \lambda_k (z + h/2)}{\cosh \lambda_k h/2} - \frac{2W_1 \ell a_k}{\lambda_k \cosh \lambda_k \frac{h}{2}} \sinh \lambda_k z \right) \cdot \cos \lambda_k (x - \ell/2) + a + W_1 x \right\} e^{i\Omega t} \quad (64)$$

5.3. Verwerken van de oppervlakvoorwaarde

Teneinde de nog resterende coëfficiënten als functie van λ_k te bepalen, moeten we (64) tenslotte aanpassen aan de oppervlakvoorwaarde (18):

Enig rekenwerk geeft:

$$A_k = \frac{-W_1 \ell A_k}{(\omega_n^2 - \Omega^2)} \left\{ \frac{2\Omega^2}{\lambda_k} \operatorname{tgh} \frac{\lambda_k h}{2} - g - \frac{h}{2} \Omega^2 \right\} \frac{\cosh \lambda_k h/2}{\cosh \lambda_k h} \quad (65)$$

en

$$a = 0$$

waarmee de gezochte potentiaalfunctie volgt, nl:

$$\begin{aligned} \phi(x, z, t) = W_1 \ell e^{i\Omega t} & \left\{ \frac{xz}{\ell} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_k}{(\omega_n^2 - \Omega^2) \lambda_k \cosh \lambda_k h} \right. \\ & \cdot \left\{ 2\Omega^2 \sinh \lambda_k (z-h/2) + (g + \frac{h}{2} \Omega^2) \lambda_k \cosh \lambda_k (z + \frac{h}{2}) + \right. \\ & \left. \left. - 4g \lambda_k \sinh \lambda_k z \sinh \lambda_k \frac{h}{2} \right\} \cos \lambda_k (x-\ell/2) \right\} \quad (66) \end{aligned}$$

met a_k en λ_k als vermeld in resp. (50) en (59).

Contrôle met de Laplace-vergelijking en de randvoorwaarden (18) en (25) bevestigen het resultaat (66).

5.4. Berekening van belangrijke dynamische grootheden

De snelheidscomponenten in de x- en z-richting volgen uit:

$$\vec{v} = \text{grad } \phi \quad (67)$$

Voor de druk op diepte z volgt:

$$p(x, z, t) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g(z - h/2 - x\theta_1 e^{i\Omega t}) \quad (68)$$

Hierin is de laatste term een correctie voor de hoogte z t.g.v. een verdraaiing van de bak over een hoek θ_1 (er geldt $i\Omega\theta_1 = W_1$).

Integratie van de druk over de tankwanden geeft de resulterende kracht op de bak in de x-richting:

$$F_x = b \int_{-h/2}^{+h/2} \{p(\frac{1}{2}l, z, t) - p(-\frac{1}{2}l, z, t)\} dz \quad (69)$$

Voor het moment om de oorsprong volgt

$$M_y = b \int_{-h/2}^{+h/2} \{p(\frac{1}{2}l, z, t) - p(-\frac{1}{2}l, z, t)\} z dz \quad (70)$$

De verplaatsing van het vrije oppervlak t.o.v. de vloeistof in rust in het ruimtevaste coördinatenstelsel is:

$$\delta = \eta - x\theta_1 e^{i\Omega t} \quad (71)$$

$$\text{met } \eta = -\frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad \text{voor } z = \frac{h}{2}$$

6. Slotbeschouwing

De resultaten van de hoofdstukken 4 en 5 kunnen op elkaar gesuperponeerd worden, aangezien we met een lineaire differentiaalvergelijking en lineaire randvoorwaarden te maken hebben.

Ook kunnen we de hier uitgevoerde analyse herhalen voor rotatiesymmetrische geometriën van de bak. In een volgende publicatie zullen we dit uitvoeren voor een ring-gecompartimenteerde cilindrische bak als onderdeel van een analytisch gediscretiseerd model van een watertoren. Daarin zullen de krachten en momenten, die de vloeistofbeweging op de bak uitoefent, ook expliciet worden berekend en gebruikt.

Een andere uitbreiding van de hier ontwikkelde analyse is het werken met een elastische tank. Dit geeft dan mogelijkheden om vloeistof- vaste stof interacties beter in model te krijgen.

Ook zou er een uitbreiding mogelijk zijn door te rekenen met een viskeuze vloeistof.

Zoals reeds is aangekondigd zal binnen afzienbare tijd een publicatie verschijnen, waarin andere volgordes van aanpassen van randvoorwaarden worden uitgewerkt en met de huidige resultaten zullen worden vergeleken. Verder zal in dat artikel ook de samenhang met de Sturm-Liouvilletheorie worden nagegaan.

