

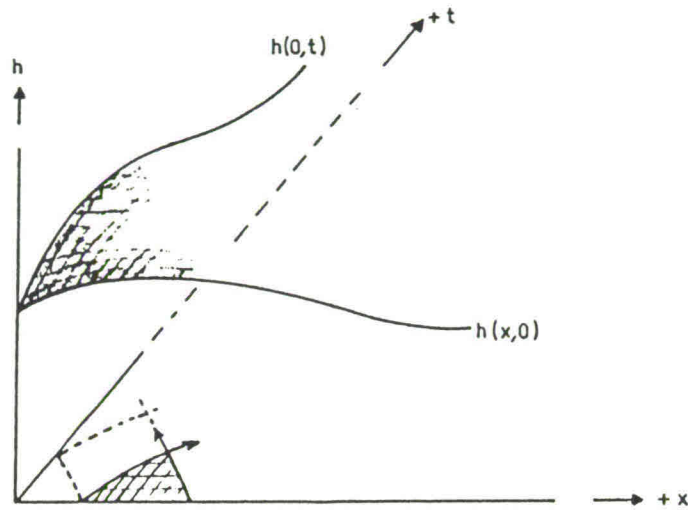
Lange golven

Handleiding
Deel II bijlagen

K. 3-96
k 3.89

April 1987

C. Verspuy



VLOEISTOFMECHANICA

HANDLEIDING COLLEGE b73

LANGE GOLVEN

DEEL II

BIJLAGEN

C. Verspuy

april 1987

Technische Universiteit Delft
 Faculteit der Civiele Techniek

UITGAVE JULI 1985	herdruk mei 1986	herdruk april '87	b73	200078					f 6,--
----------------------	---------------------	----------------------	-----	--------	--	--	--	--	--------

INHOUD DEEL II

	blz.
<u>BIJLAGE I</u>	
Bijlage IA Integreren DVn naar x	I. 1
" IB "Starre-kolom" benadering voor gesloten leiding	I. 7
" IC Kombergings- en sluitgatberekeningen	I. 9
" ID Translatiegolven, partiële reflectie	I.14
 <u>BIJLAGE II</u>	
Analyseren getijbeweging met behulp van de Harmonische Methode	II. 1
 <u>BIJLAGE III</u>	
Integreren met behulp van karakteristieken	
III.1 Beginsel	III. 1
III.2 Algemene procedure	III.12
III.3 Toepassingen	III.17
 <u>BIJLAGE IV</u>	
Toevoeging basisvergelijkingen	IV. 1

Lijst van belangrijke symbolen

Referenties

LANGE GOLVEN B73

BIJLAGEN IA t/m ID

IA. Integreren DVn naar x

De voortplanting van een lange golf in een open leiding wordt hier beschreven met de continuïteitsvergelijking en de bewegingsvergelijking in de gedaante (zie par. 2.6) :

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{IA-1})$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A_s} \right) + gA_s \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} = 0 \quad (\text{IA-2})$$

Met de gemiddelde snelheid in het stroomvoerend dwarsprofiel $u = Q/A_s$ kan voor Q^2/A_s worden gelezen Qu .

Beschouwd wordt nu een beperkt gedeelte van de open leiding van $x = x_1$ tot $x = x_2 = x_1 + \Delta x$. Op een bepaald tijdstip t_1 kunnen de beide differentiaalvergelijkingen naar x worden geïntegreerd over de vaklengte. Dit geeft de volgende uitdrukkingen :

$$\int_1^2 \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int_1^2 - B \frac{\partial h}{\partial t} dx$$

$$\int_1^2 \frac{\partial h}{\partial x} dx = \int_1^2 \frac{-1}{gA_s} \left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Qu) \right] dx + \int_1^2 \frac{Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} dx$$

Bij elk van de integraal-tekens zijn eenvoudigheidshalve de ondergrens $x = x_1$ en de bovengrens $x = x_1 + \Delta x = x_2$ aangegeven met 1 resp. 2.

De termen onder de integraal-tekens variëren met de tijd en met de plaats. Op elk tijdstip zullen de over de vaklengte gemiddelde waarden worden gebruikt, aangegeven als h_g etc.

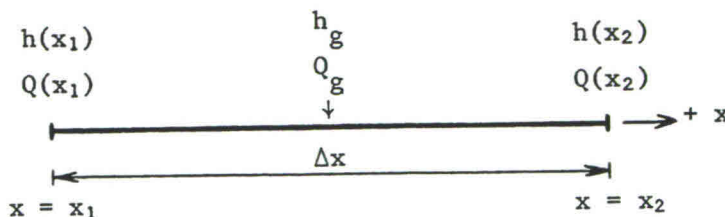


Fig. IA.1 Een vak met beperkte vaklengte Δx

Het resultaat van het integreren naar x van de beide DVn wordt dan bij benadering :

$$Q(x_2) - Q(x_1) = - B_g \Delta x \frac{dh_g}{dt} = - \Delta F \frac{dh_g}{dt} \quad (\text{IA-3})$$

$$h(x_2) - h(x_1) = - \frac{1}{g(A_s)_g} \left[\frac{dQ_g}{dt} \Delta x + Qu \Big|_{x_2} - Qu \Big|_{x_1} \right] - \frac{\Delta x}{(C^2 A^2 R)_s g} Q_g | Q_g | \quad (\text{IA-4})$$

In de verg. (IA-4) hebben de termen de dimensie van een verval.

In het nu volgende wordt ervan uitgegaan dat de functies $h(x_1, t)$, $Q(x_1, t)$, $h(x_2, t)$ en $Q(x_2, t)$ bekend zijn. De over de vaklengte gemiddelde waarde (h_g) zal worden benaderd met $\frac{1}{2}[h(x_1) + h(x_2)]$, en idem voor Q .

Op basis van de gegevens betreffende het dwarsprofiel over het beschouwde leidinggedeelte, kunnen bij de momentane waarden van h_g waarden worden bepaald voor resp. :

$$\Delta F, (A_s)_g, (C)_g \text{ en } (R)_g$$

- De verg. (IA-3) maakt nu controle-berekeningen mogelijk betreffende het verschil in debiet over het beschouwde vak, dat gelijk is aan de interne berging in m^3/s .
- Volgens verg. (IA-4) is het momentane verval over de vaklengte Δx gelijk aan de som van (drie bijdragen van resp.) :
 - de lokale traagheidsterm ;
 - de advectieve traagheidsterm ;
 - de weerstandsterm.

Op ieder tijdstip kunnen voor elk van deze termen momentane waarden worden berekend (dimensie [m], verval), waardoor inzicht in de samenhang mogelijk wordt. Indien bv. over een gehele periode van een getijgolf voor ieder uur waarden worden berekend, dan ontstaat inzicht in het gedrag van de termen van de bewegingsvergelijking. Niet alleen het gedrag van elk van de termen over een periode, maar vooral ook het gedrag van de termen t.o.v. elkaar is bij een analyse van belang (zie verder par. 3.1). In plaats van verg. (IA-4) kan men ook met een andere vergelijking werken (zie par. 3.2).

De *advectieve term* vergt enige extra aandacht. De bijdrage van deze term in het rechterlid van verg. (IA-4) luidt :

$$-\frac{1}{g(A_s)_g} \left[Q_2 u_2 - Q_1 u_1 \right] \quad (\text{IA-5})$$

Voor een nadere beschouwing van deze term worden de volgende invloeden onderscheiden :

- a. verandering van het dwarsprofiel;
- b. debiet-variatie $(\frac{\partial Q}{\partial x} \Delta x)$ als gevolg van $\frac{dh}{dt}$.

ad a. Beschouwd wordt eerst een leidinggedeelte waarvan de oppervlakte van het stroomvoerend dwarsprofiel (A_s) toeneemt in de positieve x-richting (zie Fig. IA-2). Het debiet is positief als het water stroomt in de + x-richting.

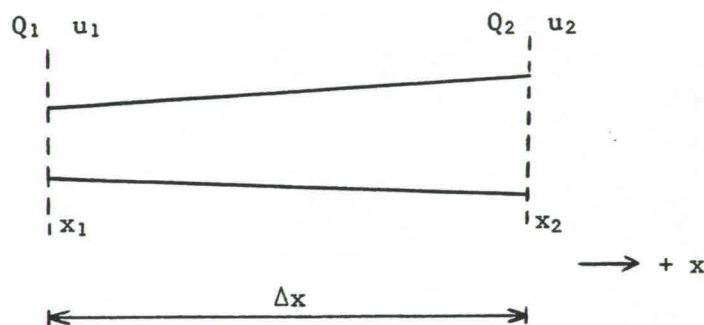


Fig. IA.2 - Toenemend dwarsprofiel

De invloed ad b. blijft voorlopig buiten beschouwing, met als gevolg dat over de vaklengte wordt gesteld $Q_2 = Q_1$.

- Op een tijdstip waarop het debiet positief is geldt dan :

$$Q_2 u_2 < Q_1 u_1 \quad (\text{IA-6})$$

- Op een tijdstip waarop het debiet negatief is geldt, omdat Q en u tegelijk van teken wisselen, eveneens :

$$Q_2 u_2 < Q_1 u_1 \quad (\text{IA-6})$$

De invloed ad a. geeft dus een bijdrage van de advectieve term die

voor beide stroomrichtingen hetzelfde teken heeft. De bijdrage aan het verval ($h_2 - h_1$) volgens (IA-5) is voor het voorbeeld met (IA-6) en (IA-7) dus steeds positief. (In de kleinste doorsnede (x_1) is bij eenzelfde debiet de snelheidshoogte groter dan in de grotere doorsnede (x_2), overeenkomend met een hogere waterstand in x_2 dan in x_1 .)

N.B. Een variatie van A_s met x doet zich voor bij niet prismatische leidingen en tevens als gevolg van het verval ($h_2 - h_1$) over de vaklengte. De laatstgenoemde invloed is echter meestal verwaarloosbaar omdat de vervallen zeer klein zijn t.o.v. de diepte (bv. 0,1 m t.o.v. 6 m).

ad b. De invloed van debietvariatiaties kan geïsoleerd worden besproken als een prismatisch leiding-gedeelte wordt beschouwd, zodat geldt :

$$(A_s)_2 = (A_s)_1 \tag{IA-8}$$

In dat geval resteert er een bijdrage van de advectieve term als gevolg van het verschil in debiet volgens verg. (IA-3). Volgens verg. (IA-5) geldt voor

- een positief teken van $\frac{dh}{dt}$: $Q_2 < Q_1$
- " negatief " " " : $Q_2 > Q_1$

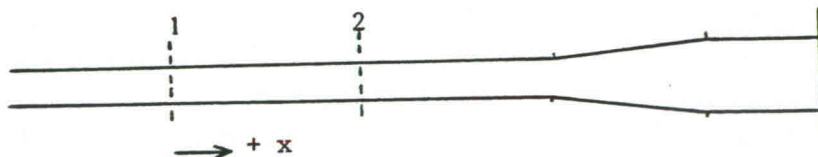


Fig. IA.3 - Prismatisch leiding-gedeelte

Het tijdstip van de kentering (tekenwisseling debiet) valt naar mate de bekkenlengte groter is een langere tijd na het tijdstip waarop $\frac{dh}{dt}$ van teken wisselt. Eenvoudigheidshalve wordt verondersteld dat deze tijdstippen precies samenvallen. Er is dan zekerheid dat bij een positieve waarde van $\frac{dh}{dt}$ het water in de vloedrichting stroomt. Het vloeddebiet is positief omdat de positieve x -richting in de vloedrichting is gekozen (zie Fig. IA.3).

Voor de gehele vloedperiode geldt dan volgens verg. IA-3 $Q_2 < Q_1$ en vervolgens :

$$Q_2 u_2 < Q_1 u_1 \quad (\text{IA-9})$$

Tijdens de gehele ebperiode is $\frac{dh}{dt}$ negatief en dus geldt volgens verg. (IA-3) $Q_2 > Q_1$, waarbij deze debieten negatief zijn.

Met $(A_s)_2 = (A_s)_1$ geldt vervolgens voor de negatieve snelheden $u_2 > u_1$. Voor het product Qu geldt voor de ebperiode ook :

$$Q_2 u_2 < Q_1 u_1 \quad (\text{IA-10})$$

De hier besproken bijdrage van de advectieve term aan het verval $(h_2 - h_1)$ heeft voor eb en vloed (nagenoeg) steeds hetzelfde teken. Bij bijdrage volgens (IA-5) is voor dit voorbeeld met (IA-9) en (IA-10) steeds positief.

Vaak wordt de invloed van de advectieve term verwaarloosd t.o.v. die van de lokale traagheidsterm en de weerstandsterm, (achteraf controleerbaar). Bij praktijkproblemen kunnen dwarsprofiel-variatioes in één vak voorkomen van bv. 30% of meer. In het algemeen is het belangrijk om de advectieve term op te nemen in een model en de relatieve invloed vast te stellen. Voor een toepassing van de naar x geïntegreerde continuïteitsvergelijking wordt een open leiding beschouwd, verdeeld in vijf vakken I t/m V (zie Fig. IA-4). Verondersteld wordt dat in alle punten x_1 t/m x_6 het verloop van de waterstand in de tijd door meting bekend is. Verg. (IA-3) geeft voor het eerste vak :

$$Q(x_2) = Q(x_1) - \Delta F_I \left(\frac{dh}{dt} \right)_I \quad (\text{IA-11})$$

en soortgelijke betrekkingen voor de overige vakken. Gesommeerd over alle vijf vakken resulteert dit in :

$$Q(x_6) = Q(x_1) - \sum_{n=I}^{n=V} (\Delta F)_n \left(\frac{dh}{dt} \right)_n \quad (\text{IA-12})$$

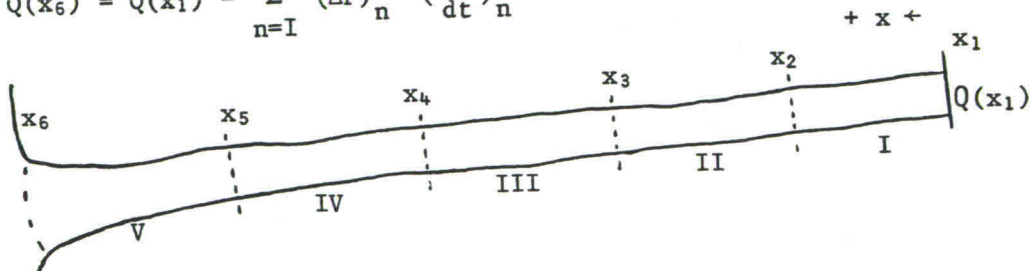


Fig. IA.4 - Integreren continuïteitsvergelijking

Als het debiet op een bepaalde plaats $x = x_1$ bekend is, dan kan op ieder tijdstip het debiet op een andere plaats worden bepaald indien :

- de kombergingsoppervlakte $\Delta F(h)$ van alle tussengelegen vlakken bekend is;
- het verloop van de waterstand in voldoende mate bekend is.

In veel situaties kan van een vergelijking zoals verg. (IA-12) een nuttig gebruik worden gemaakt.

I.B. "Starre kolom"-benadering voor gesloten leiding

Hier wordt een geheel gevulde buisleiding beschouwd, waarbij gesteld wordt :

- de vloeistof is onsamendrukbaar;
- de leiding is onvervormbaar.

De continuïteitsvergelijking (2-67) resp. (2-72) voor een prismatische gesloten leiding gaat dan (omdat $c \rightarrow \infty$) over in :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{IB-1})$$

Voor de beschouwde leiding geldt $u = f(t)$ en $A_s = \text{constant}$ en $Q = f_1(t)$, zodat er sprake is van een "starre kolom" vloeistof.

In de bewegingsvergelijking (2-71) resteren drie termen :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{u|u|}{C^2 R} = 0 \quad (\text{IB-2})$$

De bewegingsvergelijking in Q en h luidt dan :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + gA \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} = 0 \quad (\text{IB-3})$$

Evenals bij open leidingen (Bijlage IA) kan over een gedeelte van de gesloten leiding (zie Fig. 1B.1) van $x = x_1$ tot $x = x_2$ worden geïntegreerd.

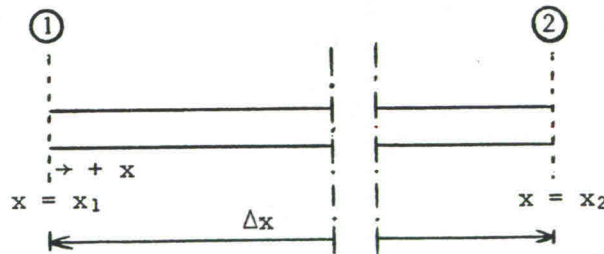


Fig. 1B.1 - Gesloten leiding

Dit geeft de volgende uitdrukking :

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial h}{\partial x} dx = - \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} dx - \int_{x_1}^{x_2} \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} dx$$

ofwel

$$h(x_2) - h(x_1) = - \Delta x \left[\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} \right]$$

Bij een buisleiding variëren de grootheden in het rechter lid niet met x , zodat voor Δx de leidinglengte L kan worden ingevoerd :

$$h(x_2) - h(x_1) = - \frac{L}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - L \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} \quad (\text{IB-4})$$

Aan deze verg. (IB-4) worden in par. 4.6.1 voor enkele problemen randvoorwaarden toegevoegd en eenvoudige analytische oplossingen besproken. Daarbij wordt het criterium voor de starre kolom benadering (zie par. 3.4) getoetst.

In par. 4.6.2 wordt besproken dat voor een smalle open leiding tussen twee reservoirs soms een analoge aanpak mogelijk is.

IC. Kombergings- en sluitgat-berekeningen

Direct aansluitend bij par. 3.2 wordt hier als voorbeeld een prismatisch bekken beschouwd met verticale wanden, met $B = B_s = 200$ m en $L = 4$ km (zie Fig. IC.1). De kombergingsoppervlakte is dus $\Delta F = 0,8 \star 10^6$ m² (constant). Bij een gemiddelde diepte $a_0 = 10$ m is $c \approx \sqrt{ga} \approx 10$ m/s. Voor een getijgolf (M_2) met $\tau = 44,7$ ks is de golflengte λ dan gelijk aan ca 450 km, zodat $L/\lambda \approx 10^{-2}$ en een kombergingsbeschouwing dus zeker verantwoord is.

Voor $h(0,t) = \hat{h} \sin \frac{2\pi t}{\tau}$ met $\hat{h} = 1$ m volgt dan voor het debiet aan de ingang van het bekken $Q(0,t) = \hat{Q}(0) \cos \frac{2\pi t}{\tau}$, waarin :

$$\hat{Q}(0) = \Delta F \frac{2\pi}{\tau} \hat{h} \tag{IC-1}$$

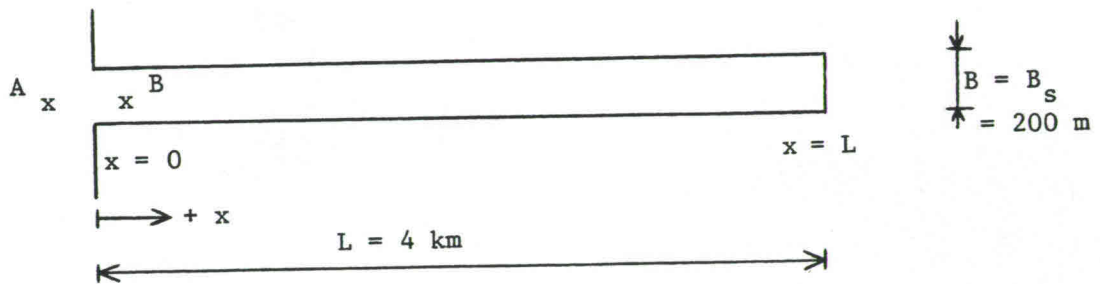


Fig. IC.1 - Prismatisch bekken, $\Delta F = 0,8 \star 10^6$ m²

- Schets de beide functies $h(0,t)$ en $Q(0,t)$ in één figuur en geef een interpretatie (incl. tekens) van alle extreme waarden.

Vervolgens wordt in de monding een sterke vernauwing (sluitgat) gesitueerd met een gemiddeld effectief dwarsprofiel $\mu A_s = 100$ m², hetgeen aanleiding geeft tot ondermeer de volgende vragen :

- in hoeverre dringt het getij door in het bekken ?
- wat worden de maximale snelheden in het sluitgat ?

Voor een sluitgat-berekening is in par. 3.2 de volgende DV opgesteld :

$$\frac{dh_B(t)}{dt} = [s] \frac{\mu A_s}{F} \left[2g |h_A(t) - h_B(t)| \right]^{1/2} \tag{3-11}$$

door het combineren van de twee daar beschreven vergelijkingen :

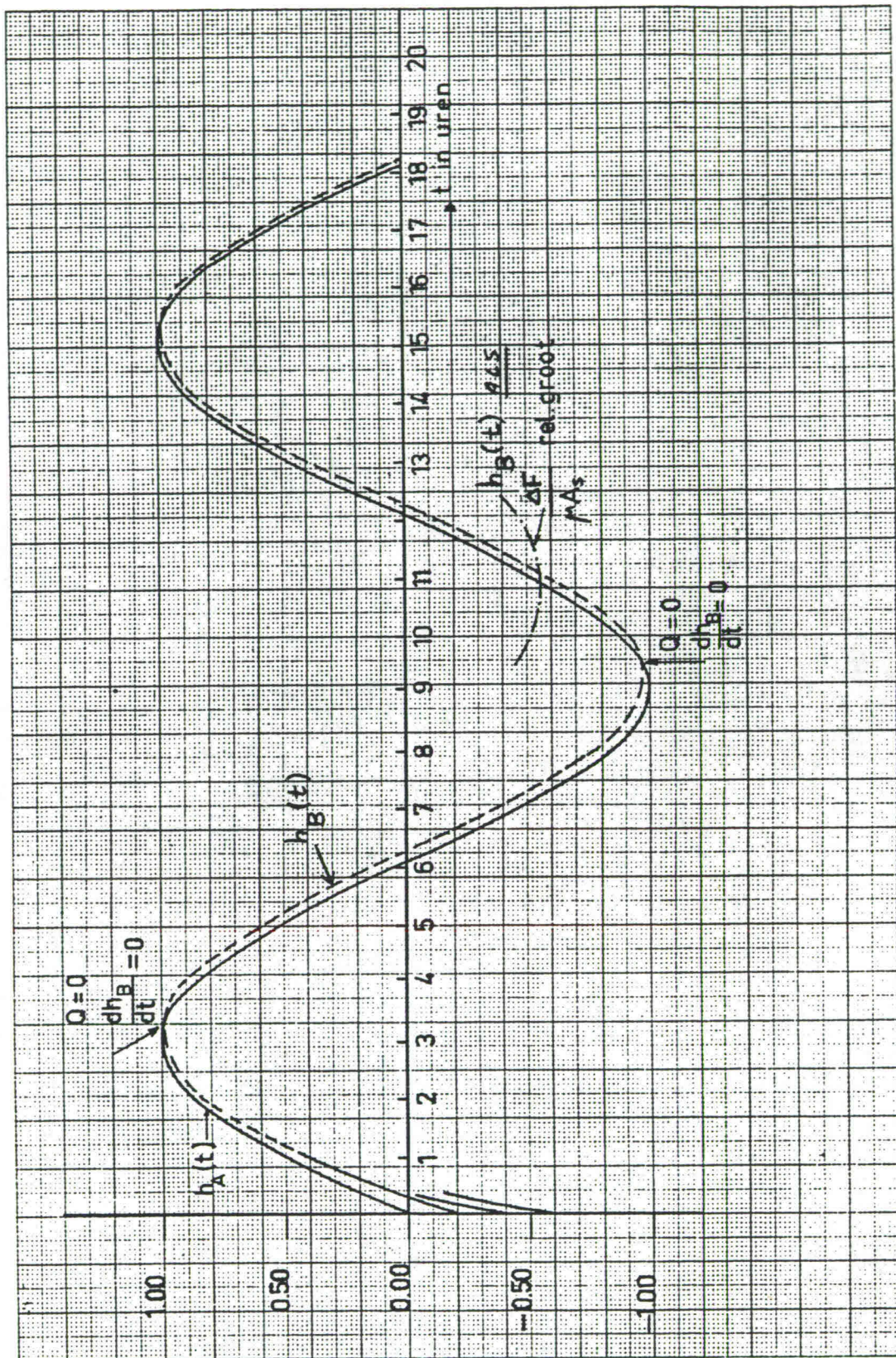


Fig. I.C.2 - Resultaat sluitgat berekening

$$Q(0,t) = \Delta F \frac{dh_B(t)}{dt} \quad (3-10)$$

$$h_A(t) - h_B(t) = \frac{Q(0,t) |Q(0,t)|}{\mu^2 A_s^2 2g} \quad (3-9)$$

Voor het bovenomschreven probleem is d.m.v. een numerieke integratie van verg. (3-11) de oplossing $h_B(t)$ verkregen, die in Fig. IC.2 gestippeld is weergegeven. Het geringe verschil tussen $h_A(t)$ en $h_B(t)$ stuit op enige twijfel bij de opdrachtgever, gezien het feit dat de effectieve sluitgatoppervlakte (μA_s) slechts 100 m^2 bedraagt t.o.v. een kombergingsoppervlak (ΔF) van bijna 10^6 m^2 . Dit is aanleiding om hier met verg. (3-10) en (3-9) enkele contrôles uit te voeren.

De periode van de randvoorwaarde $h_A(t)$ blijkt te zijn ingevoerd als $\tau = 12$ uur en de berekening is uitgevoerd voor totaal 18 uur (met kleine tijdstappen $\Delta t = 150 \text{ s}$ i.v.m. de stabiliteit van het rekenproces).

- Rond het tijdstip $t = 6$ uur geldt :

$$\frac{dh_B}{dt} \cong \frac{dh_A}{dt} = - \omega \hat{h}_A \cong - 1,4 \times 10^{-4} \text{ m/s (daling)}$$

Uit verg. (3-10) volgt dan : $Q(0) \cong - 0,8 \times 10^6 \times 1,4 \times 10^{-4} = - 112 \text{ m}^3/\text{s}$.
De snelheid in het sluitgat is op dit tijdstip $u \cong - 1,12 \text{ m/s}$.

Uit verg. (3-9) volgt dan voor het verval $h_A - h_B \cong - 0,06 \text{ m}$, hetgeen overeen komt met het berekende verval rond $t = 6$ uur in Fig. IC.2.

Kennelijk is in het beschouwde geval $\mu A_s / \Delta F$ voldoende groot, ook gezien de matige getij-amplitude en de getijperiode van 12 u, om de maximale snelheden in het sluitgat beperkt te houden met als gevolg een relatief gering verval.

⇒ Ga na wat de invloed is van een tweemaal zo grote kombergingsoppervlakte.

- Rond het tijdstip $t = 12$ uur is er sprake van een maximaal debiet in de andere richting (instroming). Dus dan geldt $Q(0) = 112 \text{ m}^3/\text{s}$, $u = 1,12 \text{ m/s}$ en $h_A - h_B = + 0,06 \text{ m}$.
- Even ná de tijdstippen $t = 3$ uur en $t = 9$ uur snijden de punten $h_A(t)$ en $h_B(t)$ elkaar, met als gevolg dat het verval in verg. (3-9) nul is. Het debiet is dan gelijk nul, zodat met verg. (3-10) volgt $\frac{dh_B}{dt} = 0$. Bij een snijpunt bereikt de functie $h_B(t)$ juist een extreme waarde (omdat de traagheid is verwaarloosd).

• Het tijdstip $t = 0$ wordt tenslotte apart beschouwd, omdat het feit dat de oplossing afhankelijk is van een beginvoorwaarde ($h_B(0)$) enige extra aandacht verdient. Bij de oplossing was kennelijk als beginvoorwaarde gekozen : $h_B(0) = - 0,20$ m.

Vergelijkt men de oplossing over het tijdsinterval 0 - 3 uur met de oplossing over het tijdsinterval 12 - 15 uur, dan blijkt

- dat de oplossing als gevolg van de periodieke randvoorwaarde periodiek wordt,
- dat de invloed van de beginvoorwaarde zichtbare verschillen geeft over ca. 2 uren ($t = 0$ tot $t = 2$ u.)

De tijd waarover de invloed van de beginvoorwaarde verdwijnt (hier slechts enkele uren) wordt wel de "inspeeltijd" genoemd.

Het is illustratief om na te gaan hoe de oplossing ongeveer zal verlopen voor een andere waarde van de beginvoorwaarde.

Kiest men bv. $h_B(0) = - 0,60$ m dan is op het tijdstip $t = 0$ het verval $h_A - h_B = 0,60$ m. Uit verg. (3-9) volgt dan op $t = 0$:

$$Q(0,0) = 100 * \sqrt{2g * 0,60} \approx 100 \sqrt{12} = 346 \text{ m}^3/\text{s}$$

Dit geeft volgens verg. (3-10) :

$$\frac{dh_B(0)}{dt} = \frac{346}{0,8 * 10^6} = 4,3 * 10^{-4} \text{ m/s}$$

In Tabel IC.1 zijn voor drie verschillende beginvoorwaarden voor het voorbeeld waarden voor $Q(0,0)$ en $\frac{dh_B(0)}{dt}$ verzameld.

$h_B(0)$ [m]	$h_A(0) - h_B(0)$ [m]	$Q(0,0)$ [m ³ /s]	$\frac{dh_B(0)}{dt}$ [m/s]
- 0,20	0,20	200	$2,5 \cdot 10^{-4}$
- 0,40	0,40	283	$3,5 \cdot 10^{-4}$
- 0,60	0,60	346	$4,3 \cdot 10^{-4}$

Tabel IC.1 - Verschillende beginvoorwaarden bij het voorbeeld.

De waarde van $\frac{dh_B(0)}{dt}$ neemt sterk toe bij toename van het verschil tussen de beginvoorwaarde en $h_A(0)$. In Fig. IC.2 is de aanzet van de oplossing bij bovengenoemde beginvoorwaarden geschetst. Dit illustreert het "inspelen" van de oplossing, een verschil in de beginvoorwaarde dempt als gevolg van de weerstand (verliezen over de opening) vrij snel uit in dit probleem.

Opmerking:

Ook bij andere lange golf problemen worden de beginvoorwaarden (indien onbekend) geschat. De inspeeltijd is algemeen afhankelijk van de verhouding tussen weerstand en traagheid.

Uiteraard zijn de praktische problemen minder eenvoudig dan het voorbeeld. Vaak varieert bv. ΔF vrij sterk met het niveau van de waterstand $h_B(t)$, met als gevolg vervorming van de functies $h_B(t)$ en $Q(0,t)$.

Voor de kombergingsbeschouwing zijn er beperkingen aan de lengte-afmetingen (bv. $L/\lambda < 1/20$), de vorm is verder niet van belang.

Voor de oplossing is de verhouding $\Delta F/(\mu A_s)$ van essentiële betekenis; voor grote waarden daarvan zal de functie $h_B(t)$ meer in fase verschuiven t.o.v. $h_A(t)$ en meer worden gedempt. In Fig. IC.2 is een gedeelte van een dan mogelijke functie $h_B(t)$ ter illustratie aangegeven.

Complicaties die zich kunnen voordoen zijn bv. tijdelijk "volkomen overlaat"-situaties in een sluitgat met drempel (zie college b70), tijdelijk droogvallen van platen in het bekken, etc.

ID. Translatiegolven, partiële reflectie

De beschouwingen in deze bijlage sluiten direct aan bij par. 3.3.3 waarin voor translatiegolven naast verg. (3-29), voor de voortplantingssnelheid c , een continuïteitsvergelijking (3-23)

$$\Delta Q = B c \Delta h \quad (\text{ID-1})$$

is afgeleid. Deze relatie wordt hier gebruikt om de invloed van een plotselinge verandering van het dwarsprofiel te analyseren. Daartoe worden in een kanaal A-C (zie Fig. ID.1) twee gedeelten onderscheiden met $B_1 c_1 \neq B_2 c_2$ als gevolg van verschillen in de bergende breedte en/of waterdiepte. Enige tijd nadat een golf met golfhoogte $(\Delta h)_1$ vanuit A het punt B heeft

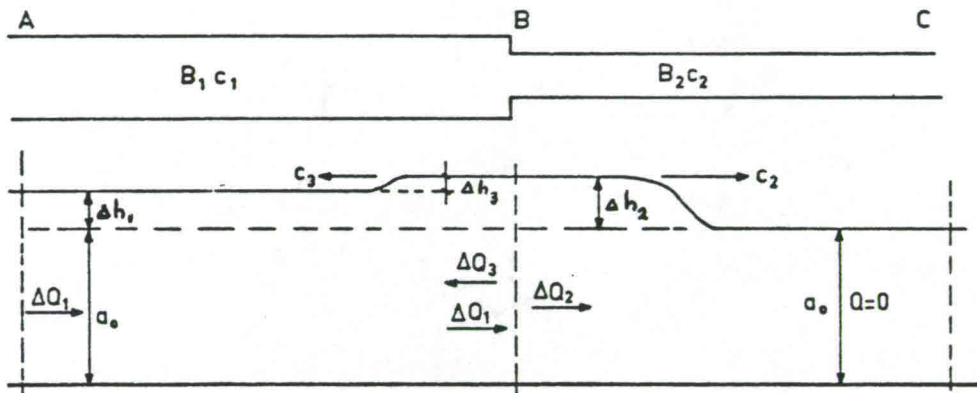


Fig. ID.1 - Verandering dwarsprofiel

bereikt, is in Fig. ID.1 de situatie weergegeven.

Verondersteld zijn drie golfcomponenten met resp. :

- inkomend : Δh_1 , ΔQ_1 , c_1
- doorgaand : Δh_2 , ΔQ_2 , c_2
- gereflecteerd : Δh_3 , ΔQ_3 , c_3

Er gelden bij punt B twee voorwaarden :

$$\Delta h_1 + \Delta h_3 = \Delta h_2 \quad (\text{ID-2})$$

$$\Delta Q_1 = \Delta Q_2 + \Delta Q_3 \quad (\text{ID-3})$$

Opm.: Hierbij is de tekenafspraken *niet* ΔQ positief in positieve x-richting (gebruikelijk), doch worden alle ΔQ positief genoemd in de getekende looprichting.

Met verg. (ID-1) voor elk van de drie golfcomponenten volgt uit verg. (ID-3) :

$$B_1 c_1 \Delta h_1 = B_2 c_2 \Delta h_2 + B_3 c_3 \Delta h_3 \quad (\text{ID-4})$$

Omdat $B_3 = B_1$ en $c_3 \approx c_1$ (bij benadering) volgt uit verg. (ID-4) :

$$B_1 c_1 (\Delta h_1 - \Delta h_3) = B_2 c_2 \Delta h_2 \quad (\text{ID-5})$$

Uit verg. (ID-2) en (ID-5) kunnen door elimineren van Δh_3 resp. Δh_2 de volgende uitdrukkingen worden afgeleid :

$$\Delta h_2 = \Delta h_1 \frac{2 B_1 c_1}{B_1 c_1 + B_2 c_2} \quad (\text{ID-6})$$

$$\Delta h_3 = \Delta h_1 \frac{B_1 c_1 - B_2 c_2}{B_1 c_1 + B_2 c_2} \quad (\text{ID-7})$$

N.B.: Bij splitsingspunten gelden soortgelijke betrekkingen als de bovenstaande, die zijn afgeleid voor een profielverandering in een enkele doorgaande leiding.

Vragen :

1. Wat worden voor $B_2 c_2 = \frac{1}{2} B_1 c_1$ de waarden voor $\Delta h_2/\Delta h_1$ en $\Delta h_3/\Delta h_1$?
2. Bepaal $\Delta h_2/\Delta h_1$ en $\Delta h_3/\Delta h_1$ ook voor het geval $B_2 c_2 = 3 B_1 c_1$.
3. Ga na wat de uitdrukkingen voor $B_2 c_2 = 0$ resp. $B_2 c_2 = \infty$ opleveren.

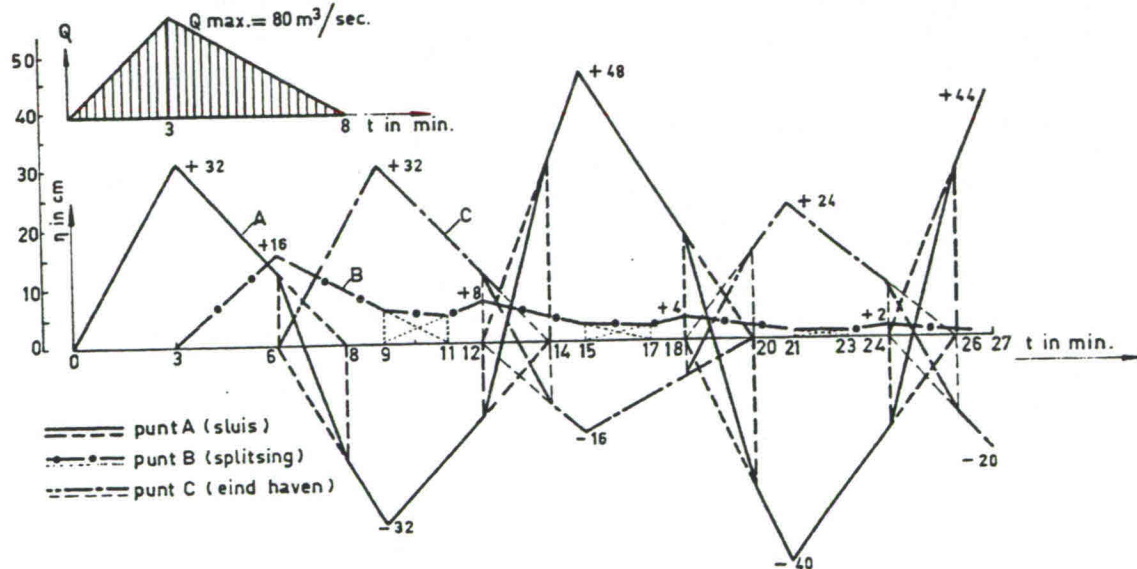
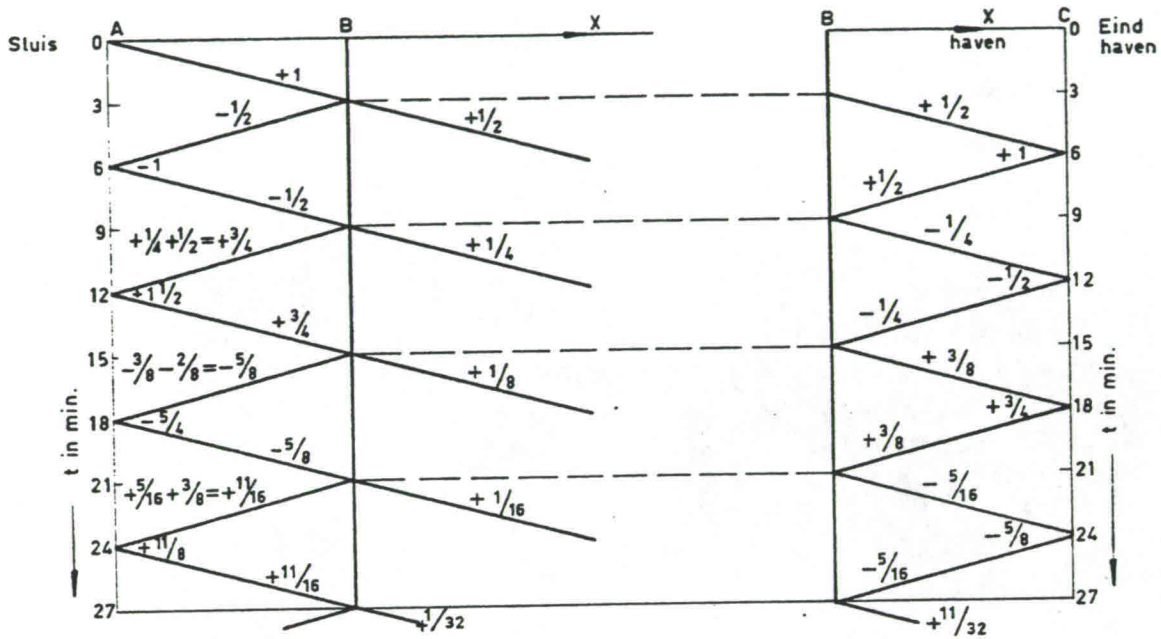
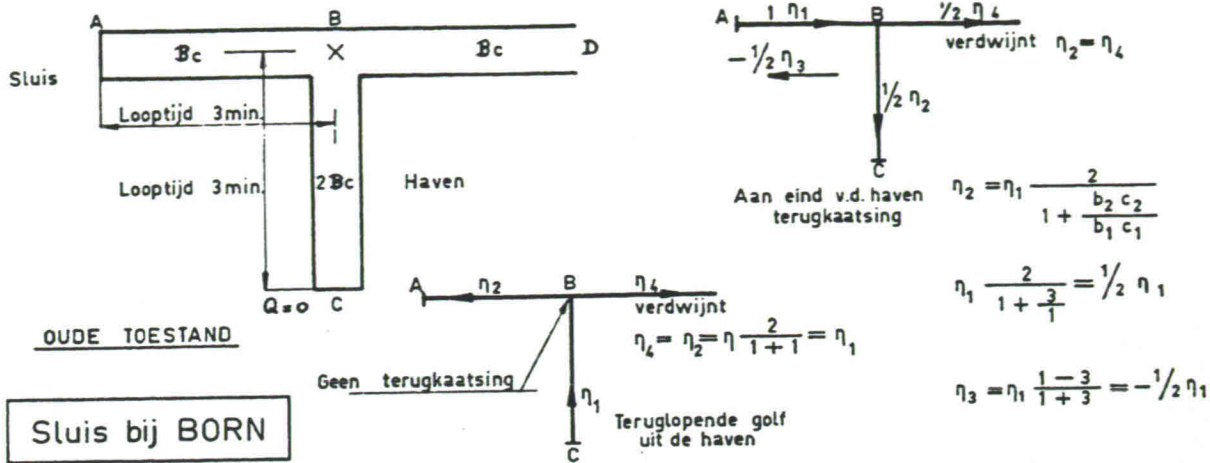
Bij 1. is $\Delta h_3/\Delta h_1 > 0$ en is sprake van positieve reflectie; bij 2. is $\Delta h_3/\Delta h_1 < 0$ en is sprake van negatieve reflectie. Bij 3. is $|\Delta h_3| = |\Delta h_1|$ en is daarom de reflectie niet partiëel maar volledig (positief of negatief).

De Fig. ID.2 is ter illustratie toegevoegd. Er wordt een indruk gegeven van het gebruik van verg. (ID-6) en (ID-7), waarbij $\Delta h_1 = \eta_1$ etc. De situatie deed zich voor bij de sluis bij Born (verval ruim 11 m). Omdat het hier alleen gaat om een beeld t.b.v. het denken in looptijden L/c wordt volstaan met een enkele opmerking:

- (i) De beschouwde (oude) toestand bij de sluis Born gaf aanleiding tot *interferenties*. Het ledigen of vullen van de sluiscolk veroorzaakt een translatiegolf vanaf A. Deze wordt bij B gedeeltelijk terugge-

kaatst, en gedeeltelijk doorgelaten naar C en naar D. De golven vanaf B worden op hun beurt vanaf A en C, waar $Q = 0$, volledig teruggekaatst. Doordat de looptijd van de golf over het traject AB gelijk is aan die over BC komen golven die A en C gelijktijdig verlaten, ook gelijktijdig in B aan.

- (ii) De schutgolf is driehoekig met $Q_{\max} = 80 \text{ m}^3/\text{s}$ en $\eta_{\max} = 0,32 \text{ m}$. Er geldt dus $Bc = 80/0,32 = 250 \text{ m}^2/\text{s}$.
- (iii) De maximale waarde van Q wordt bereikt na 3 minuten. De lijnen in het x - t -diagram geven de loop van het golffront aan. Omdat er is uitgegaan van onvervormde voortplanting, komt de golftop dus steeds 3 minuten later.



$\eta_1 = \Delta h_1$ etc. (zie verg. (ID-6) en (ID-7))

Fig. ID.2. Translatiegolf-reflecties

LANGE GOLVEN b73

BIJLAGE II

II. Analyseren getijbeweging m.b.v. de harmonische methode

II.A De getijbeweging op een bepaalde plaats op aarde (langs een kust) kan in detail worden geanalyseerd. Indien men de beschikking heeft over lange series waarnemingen (bv. registraties in peilkelders, zie par. 4.6.1) dan kan m.b.v. een getij-analyse een groot aantal getij-componenten worden onderscheiden en vastgesteld. In voorspellingen van de getijbeweging m.b.v. deze astronomische getij-componenten wordt zowel internationaal als nationaal door speciale overheidsdiensten voorzien. (Vb. getijtafels en tijdstippen HW, LW in agenda's). Voor de achtergronden betreffende de getij-analyse-technieken kan worden verwezen naar het college b75.

In het kader van b73 wordt bij een bepaalde probleem-analyse uitgegaan van geregistreerde waterstanden (en debieten) over een beperkte periode bv. 1 à 2 etmalen. Dergelijke functies worden als representatief beschouwd en daarmee wordt na het ijken en verifiëren van een model de invloed van een of andere ingreep vastgesteld. Deze werkwijze maakt het mogelijk een getijkromme weer te geven als de som van een beperkt aantal sinus-vormige functies. Een functie $h(x_1, t)$ kan worden benaderd m.b.v. een Fourier-reeks met bijvoorbeeld 3 à 4 periodieke componenten :

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{n=4} A_n \cos n\omega_1 t + B_n \sin n\omega_1 t \quad (\text{II-1})$$

Dan is de frequentie van de eerste component ω_1 (bekend verondersteld) en volgen uit een Fourier-reeks ontwikkeling (zie par. 4.2) de waarden van het gemiddelde (A_0) en van de amplituden van de componenten : $A_1 \dots A_4$ en $B_1 \dots B_4$.

Indien deze waarden zijn berekend m.b.v. een standaardprogramma, kan men via een synthese nagaan in hoeverre de reeks de oorspronkelijke functie benadert. In Fig. II.1 wordt ter illustratie een functie samengesteld uit slechts twee harmonische componenten.

Bij een numerieke oplossingsmethode (zie hoofdstuk 6) worden randvoorwaarden vaak in de vorm van een Fourier-reeks ingevoerd, omdat dit veel eenvoudiger is dan omvangrijke rijen functiewaarden (kans op fouten).

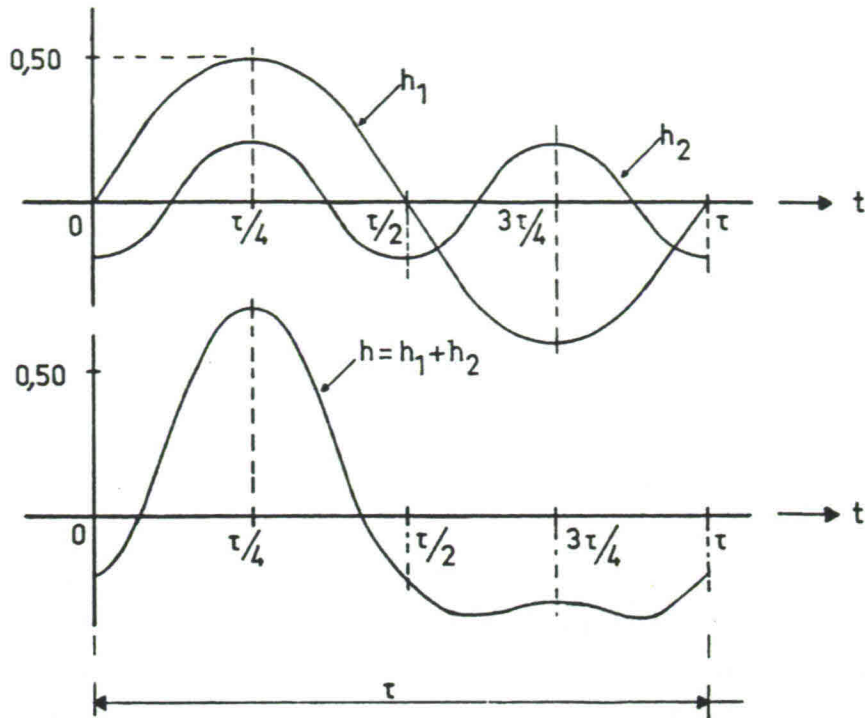


Fig. II.1 - $h = h_1 + h_2$
 $h_1 = \hat{h}_1 \sin(\omega t - \kappa_1)$ met $\hat{h}_1 = 0,5$ m en $\kappa_1 = 0$
 $h_2 = \hat{h}_2 \sin(2\omega t - \kappa_2)$ met $\hat{h}_2 = 0,2$ m en $\kappa_2 = \frac{1}{2}\pi$
 de periode $\tau = 2 \pi / \omega$

Langs de Nederlandse kust doet zich een half-daags getij voor, waarbij de zogenaamde M_2 -component met een periode van 12 uur en 25 minuten ($\tau = 44,7$ ks en $\omega = 2 \pi / \tau = 1,405 \cdot 10^{-4}$ rad/s) sterk overheerst. Daarnaast blijkt dat een enkeldaagse component en enkele hogere harmonischen met frequenties $2\omega, 3\omega, \dots$ (ondiep water, vervorming, zie par. 4.5) worden gevonden.

Er zijn gebieden op aarde waar de enkeldaagse componenten overheersen (bv. in Indonesië).

Bij lineaire DVn geldt het beginsel van superpositie. Een bepaalde oplossing kan dan worden gezien als de som van de oplossingen van een (groot) aantal componenten.

Om de op te lossen DVn bij lange-golfproblemen meestal een duidelijk niet-lineair karakter bezitten, stuit het toepassen van het superpositie beginsel op praktische bezwaren.

De toepassing van de harmonische methode (par. 4.1 t/m 4.5, zie hierna II.B) blijft beperkt tot functies waarvan het verloop in de tijd goed kan worden

benaderd als een gemiddelde waarde plus één sinusvormige functie. Bij de harmonische methode wordt de aandacht derhalve uitsluitend gericht op een sterk overheersende Fourier-component. Het bovenstaande geeft kort aan hoe men een dergelijke benadering kan plaatsen binnen een meer volledige analyse.

Hierna wordt in II.B gerekend met bv. een functie $h(x_1, t)$, waarvoor twee gelijkwaardige reële uitdrukkingen mogelijk zijn :

$$\bullet \quad h(x_1, t) = h_0 + A(x_1) \cos \omega t + B(x_1) \sin \omega t \quad (\text{II-2})$$

$$\bullet \quad h(x_1, t) = h_0 + \hat{h}(x_1) \cos \{\omega t - \kappa(x_1)\} \quad (\text{II-3})$$

Hierbij is h_0 (de gemiddelde waterstand t.o.v. een horizontaal referentievlak) constant (in x) verondersteld, en geldt verder :

$$\hat{h}(x_1) = \sqrt{\{A(x_1)\}^2 + \{B(x_1)\}^2}$$

$$\kappa(x_1) = \arctg \frac{B(x_1)}{A(x_1)}$$

Overeenkomstig de uitdrukking (II-3) is het gebruikelijk om de fasehoek als een negatieve hoek aan te geven (afspraak). De maximale waarde van de functie wordt dan bereikt na $\Delta t = \kappa(x_1)/\omega$ gemeten vanaf het tijdstip $t = 0$ (zie later Fig. II.2).

Uitgaande van (II-3) is de relatie daarvan met (II-2) gedefinieerd door :

$$\cos \{\alpha - \beta\} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Bij de harmonische methode wordt gerekend met complexe functies (zie (4-55) en (4-56) in par. 4.3), waarbij de relatie met de reële functies éénmaal wordt vastgelegd. Algemeen wordt geschreven $\cos \alpha = R_e \{e^{i\alpha}\}$.

Uitgaande van de uitdrukking (II-3) volgt dan :

$$h(x_1, t) = h_0 + \hat{h}(x_1) R_e \left[e^{i\{\omega t - \kappa(x_1)\}} \right]$$

of

$$\bullet \quad h(x_1, t) = h_0 + R_e \{ \hat{h}(x_1) e^{-\kappa(x_1)} e^{i\omega t} \} \quad (\text{II-6})$$

ofwel, met invoering van de complexe grootheid $h_c(x_1) \equiv \hat{h}(x_1) e^{-\kappa(x_1)}$

$$h(x_1, t) = h_0 + R_e \{ h_c(x_1) e^{i\omega t} \}$$

Hierin is $e^{i\omega t}$ zonder meer bekend; de periodieke variatie in de tijd ligt vast. Als $h(x_1, t)$ een randvoorwaarde is dan wordt in de berekening ingevoerd :

$$h_c(x_1) = \hat{h}(x_1) \left[\cos \{-\kappa(x_1)\} + i \sin \{-\kappa(x_1)\} \right] \quad (\text{II-7})$$

Als uit een berekening een resultaat volgt $h_c(x_1) = a + b i$ dan volgt:

$$\text{voor de amplitude} \quad : \hat{h}(x_1) = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{II-8})$$

$$\text{en voor de fasehoek} \quad : \kappa(x_1) = \text{arctg}(b/a)$$

Het teken en de juiste waarde van de fasehoek kan eenvoudig worden voorgesteld door het reële deel (a) en het imaginaire deel (b) uit te zetten in een complex vlak :

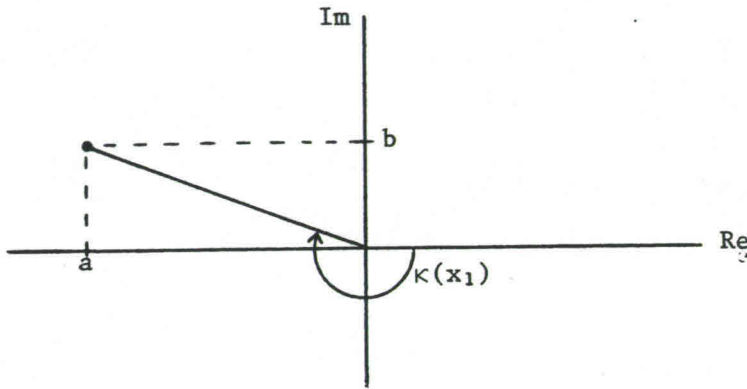


Fig. II.2 - Bepalen fasehoek

Stel dat b positief is en a negatief, dan blijkt uit de Fig. II.2 direct welke hoek men zoekt. In de figuur is volgens afspraak de fasehoek als een negatieve hoek ($\kappa(x_1)$) aangegeven.

De relatie tussen (II-3) en (II-6) kan nog worden verduidelijkt met Fig. II.3, waarbij het periodiek in de tijd variëren met een pijl \curvearrowright ωt is aangegeven. (zie blz. II-5).

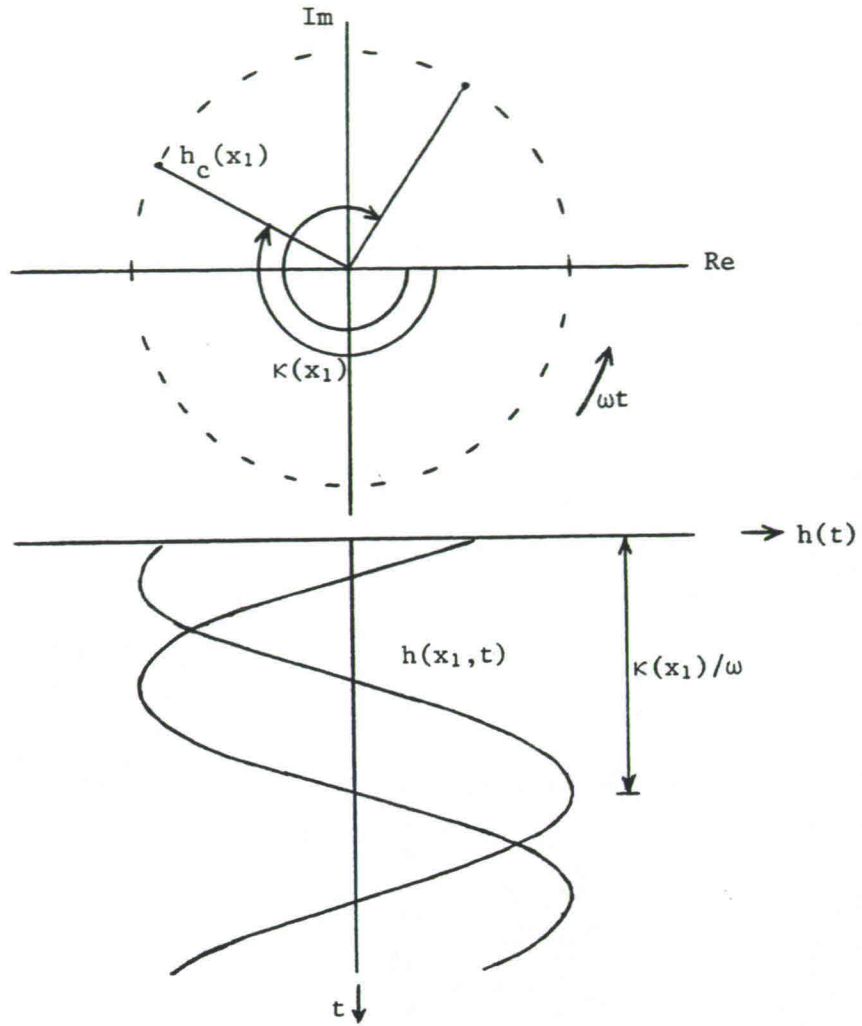


Fig. II.3 - Relatie tussen $h_c(x_1)$ en $h(x_1, t)$

II.B Toepassen van de harmonische methode

De in par. 4.3 besproken vierpool-vergelijkingen leggen een verband tussen $h_c(0)$ en $Q_c(0)$ aan de ene zijde van een vak en $h_c(L)$ en $Q_c(L)$ aan de andere zijde van dat vak :

$$h_c(L) = L_v h_c(0) + M_v Q_c(0) \quad (4-67)$$

$$Q_c(L) = N_v h_c(0) + O_v Q_c(0) \quad (4-68)$$

Bij het berekenen van de vakconstanten kan men gebruik maken van de volgende regels :

$$\begin{aligned} \cosh(a + ib) &= \cosh a \cosh ib + \sinh a \sinh ib \\ &= \cosh a \cos b + i \sinh a \sin b \end{aligned} \quad (II-9)$$

$$\begin{aligned} \sinh(a + ib) &= \sinh a \cosh ib + \cosh a \sinh ib \\ &= \sinh a \cos b + i \cosh a \sin b \end{aligned} \quad (II-10)$$

Opmerking:

In (II-9) en (II-10) is gebruik gemaakt van :

$$\cosh ib = \frac{1}{2}(e^{ib} + e^{-ib}) = \cos b$$

$$\sinh ib = \frac{1}{2}(e^{ib} - e^{-ib}) = i \sin b$$

Algemene toepassing :

Om de oplossingsmethode te illustreren wordt nu eerst een eenvoudige berekening besproken.

Beschouwd wordt eerst een gedeelte van een open leiding waarin zich een periodiek lange golf voortplant. Verondersteld wordt dat men te maken heeft met een prismatische bak waarvan de lengte niet te groot is, zodat het gedeelte als één vak mag worden behandeld.



Fig. II.4 - Een vak met lengte L

De positieve x-as is gekozen van punt (1) naar punt (2), de vierpool-vergelijkingen (4-67) en (4-68) geven dan :

$$h_c(2) = L_v h_c(1) + M_v Q_c(1) \quad (\text{II-11})$$

$$Q_c(2) = N_v h_c(1) + O_v Q_c(1) \quad (\text{II-12})$$

De verschillende mogelijke problemen kunnen, gezien de vergelijkingen (II-11) en (II-12), worden onderscheiden in drie gevallen :

1. $h(1)$ en $Q(1)$ bekend
2. $h(1)$ en $Q(2)$ bekend
3. $h(1)$ en $h(2)$ bekend

Opmerkingen :

- (i) Een probleem waarbij op twee randen het debiet Q gegeven is, laat meerdere oplossingen toe. Voor een eenduidige oplossing is informatie betreffende de waterstand nodig.
- (ii) In par. 4.4 wordt een probleem ad. 2 besproken, waarbij naast $h(1,t)$ de tweede randvoorwaarde gegeven is als $Q(2,t) = 0$ voor alle waarden van t . Het gaat daar om zgn. seiches (staande golven).

Getallen-voorbeeld :

Hier wordt verondersteld dat de functies $h(1,t)$ en $h(2,t)$ gegeven zijn t.o.v. een referentievlak dat overeenkomt met de gemiddelde waterstand :

$$h(1,t) = 0,00 + \hat{h}(1) \cos \{ \omega t - \kappa(1) \} \quad (\text{II-13})$$

$$h(2,t) = 0,00 + \hat{h}(2) \cos \{ \omega t - \kappa(2) \} \quad (\text{II-14})$$

Hierin zijn : $\hat{h}(1) = 0,50 \text{ m}$, $\kappa(1) = 105^\circ$
 $\hat{h}(2) = 0,60 \text{ m}$, $\kappa(2) = 100^\circ$

Deze probleemstelling komt bv. voor bij een verbindingskanaal tussen twee estuaria.

De overige gegevens zijn :

gemiddelde diepte t.o.v. de gemiddelde waterstand $a_0 = 5,00 \text{ m}$
stroomvoerende breedte $B_s =$ bergende breedte $B = 300 \text{ m}$

vaklengte L	= 5000 m
coëfficiënt van Chézy C	= 50 m ^{1/2} s ⁻¹
hydraulische straal (R = a _o gesteld)	= 5,00 m

De periode $\tau = 44,7$ ks, zodat $\omega = 2 \pi/\tau = 1,405 \cdot 10^{-4}$ rad/s.

Voor de amplitude van het debiet in het midden van het vak wordt geschat $\hat{Q}_{\text{gem}} = 800 \text{ m}^3/\text{s}$.

Volgens verg. (4-75) is :

$$p = \omega \sqrt{mB} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{k}{\omega m}\right)^2}} = 0,1862 \cdot 10^{-4}$$

Voor q vindt men dan $q = 0,2737 \cdot 10^{-4}$

Dus $rL = pL + iqL = 0,0931 + 0,1369 i$ en

$$\begin{aligned} \cosh pL &= 1,0043 & \cos qL &= 0,9907 \\ \sinh pL &= 0,0932 & \sin qL &= 0,1365 \end{aligned}$$

Bij het bepalen van de vakconstanten wordt rekening gehouden met de vergelijkingen (II-9) en (II-10). Men vindt dan achtereenvolgens :

- $L_v = \cosh rL = \cosh pL \cos qL + i \sinh pL \sin qL$
 $= 0,9950 + 0,0127 i$
- $M_v = -\frac{r}{B\omega i} \sinh rL = (-0,1205 - 0,0482 i) \cdot 10^{-3} \quad [s/m^2]$
- $N_v = -\frac{B\omega i}{r} \sinh rL = (0,000894 - 0,2104 i) \cdot 10^3 \quad [m^2/s]$
- $O_v = L_v = 0,9950 + 0,0127 i$

Uit de gegeven randvoorwaarden volgt :

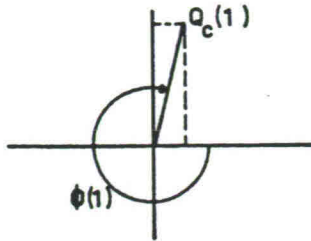
$$\begin{aligned} h_c(2) &= 0,60 \{ \cos(-100^\circ) + i \sin(-100^\circ) \} = \\ &= 0,60 \{ -0,17365 + i(-0,98481) \} = -0,1042 - 0,5909 i \\ h_c(1) &= 0,50 \{ \cos(-105^\circ) + i \sin(-105^\circ) \} = \\ &= 0,50 \{ -0,25882 + i(-0,96593) \} = -0,1294 - 0,4830 i \end{aligned}$$

Uit verg. (II-11) volgt nu :

$$Q_c(1) = \frac{\{h_c(2) - L_v h_c(1)\}}{M_v}$$

$$Q_c(1) = \frac{\{(-0,1042 - 0,5909 i) - (+0,9950 + 0,0127 i) \times (-0,1294 - 0,4830 i)\}}{(-0,1205 - 0,0482 i) 10^{-3}}$$

$$= \frac{0,0184 - 0,1087 i}{-0,1205 - 0,0482 i} 10^3 = (0,1793 + 0,8300 i) 10^3 \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$



Uit dit resultaat volgt :

$$Q(1,t) = \hat{Q}(1) \cos \{\omega t - \phi(1)\}$$

$$\text{met } \hat{Q} = 850 \text{ m}^3/\text{s}$$

$$\text{en } \phi(1) = 282^\circ \text{ (zie Fig. II.5)}$$

Fig. II.5 - Fasehoek $\phi(1)$

Uit verg. (II-12) volgt :

$$Q_c(2) = N_v h_c(1) + 0_v Q_c(1) = (+0,894 - 0,2104 \times 10^3 i) \times (-0,1294 - 0,4830 i) +$$

$$+ (0,9950 + 0,0127 i) \times (+0,1793 + 0,8300 i) 10^3 =$$

$$= \left| (-0,1017 + 0,0268 i) + (0,1678 + 0,8281 i) \right| 10^3 =$$

$$= (+0,0661 + 0,8549 i) 10^3 \quad [\text{m}^3/\text{s}]$$

Uit dit laatste resultaat volgt $Q(2,t) = \hat{Q}(2) \cos \{\omega t - \phi(2)\}$ met $Q(2) \cong 860 \text{ m}^3/\text{s}$ en $\phi(2) \cong 274^\circ$.

Opmerking :

De bovengenoemde schatting $\hat{Q}_{\text{gem}} = 800 \text{ m}^3/\text{s}$ blijkt bij vergelijking met $\frac{\hat{Q}(2) + \hat{Q}(1)}{2} = \frac{860 + 850}{2} = 855 \text{ m}^3/\text{s}$ vrij goed te zijn.

Men zou berekeningen nog een keer kunnen herhalen voor een schatting van bv. $\hat{Q}_{\text{gem}} = 840 \text{ m}^3/\text{s}$.

Overzicht resultaten :

Vakconstanten :

$$L_v = 0,9950 + 0,0127 i$$

$$M_v = (-0,1205 - 0,0482 i) 10^{-3}$$

$$N_v = +0,894 - 0,2104 \times 10^3 i$$

$$0_v = 0,9950 + 0,0127 i$$

Vakgrens (2)

$$h_c(2) = -0,1042 - 0,5909 i$$

$$\hat{h}_c(2) = 0,60 \text{ m}, \kappa(2) = 100^\circ$$

$$Q_c(2) = (+0,0661 + 0,8550 i) \times 10^3$$

$$\hat{Q}_c(2) \cong 860 \text{ m}^3/\text{s}, \phi(2) \cong 274^\circ$$

Vakgrens (1)

$$h_c(1) = -0,1294 - 0,4830 i$$

$$\hat{h}_c(1) = 0,50 \text{ m}, \kappa(1) = 105^\circ$$

$$Q_c(1) = (+0,1793 + 0,8300 i) \times 10^3$$

$$\hat{Q}_c(1) \cong 850 \text{ m}^3/\text{s}, \phi(1) \cong 282^\circ$$

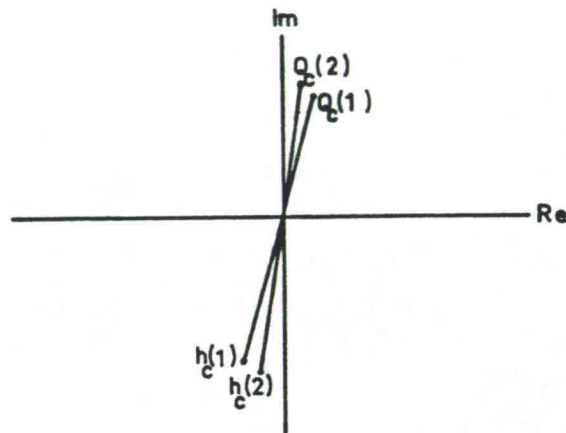


Fig. II.6 - Resultaten in complex vlak

Bij de bovenstaande toepassing van de harmonische methode worden voor een bepaald vak de amplitude en de fasehoek van twee bekende functies ingevoerd en van twee onbekende functies de fase en de amplitude berekend. Het verloop van de functies in de tijd ligt van het begin af aan vast.

Bij de meeste praktijk-problemen betreffende een benedenrivier of een hele delta voor getijgolven (resp. een haven-complex met seiches) is een schematisatie tot een systeem van takken en knooppunten nodig. Naarmate het probleem meer gecompliceerd is, zal men eerder een numerieke berekening (zie hoofdstuk 6) overwegen. De vaklengte (globaal $1/20 \text{ à } 1/50 \lambda$) kan ten behoeve van een goede weergave van dwarsprofiel-variatiës e.d. verschillen binnen een probleem. Indien men de harmonische methode toepast (zie bv. toetsprobleem Oefening II) dan dient men ook een prismatische leiding in vakken te verdelen. In de lineaire weerstandsterm is de factor k ondermeer afhankelijk van de amplitude van de functie Q (in het midden van een vak). Het voldoende nauwkeurig verdisconteren van de weerstand beperkt dus op zichzelf reeds de vaklengte.

De resultaten van een bepaalde berekening kunnen overzichtelijk worden weergegeven door het uitzetten van de complexe functies h_c en Q_c in een complex vlak. Doet men dit voor een vrij lange onvertakte rivier dan krijgt men bv. de Fig. II.7. Het debiet in punt 8 is nul en het debiet in punt 7 relatief klein. Het karakter van het getij-probleem komt duidelijk uit een dergelijke figuur naar voren (zie ook Oefening II); dit betreft de begrippen faseverschuiving, demping en opslingering).

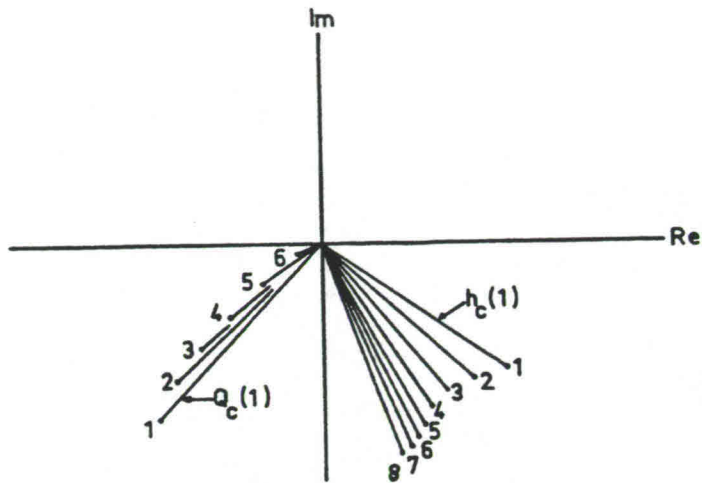


Fig. II.7 - Voorbeeld resultaten in complex vlak

Men kan zich het verloop van de functies h en Q in de tijd nu voorstellen door van de vectoren de projecties op de reële as (het reële deel) te beschouwen indien deze vectoren tegelijk met constante hoeksnelheid (ω) ronddraaien (wijzer-diagram, zie ook Fig. II.3).

LANGE GOLVEN b73

BIJLAGE III

Bijlage III: Integratie met karakteristieken

III.1. Beginsel

Om het begrip karakteristieken te verduidelijken wordt in het volgende aandacht besteed aan een partiële differentiaalvergelijking van de eerste orde. Beschouwd wordt een differentiaalvergelijking, die overeenkomt met de vergelijking die in par. 3.3.5 is afgeleid voor een kinematische golf. De algemene gedaante van deze vergelijking is als volgt:

$$A_1 \frac{\partial h}{\partial x} + B_1 \frac{\partial h}{\partial t} = E_1 \quad (\text{III-1})$$

Als de coëfficiënten A_1 , B_1 en E_1 niet afhankelijk zijn van de afgeleiden van h doch eventueel wel van x , t en h , dan wordt verg. (III-1) quasi-lineair genoemd.

De gevraagde oplossing voor de verg. (III-1) wordt gevormd door $h = h(x,t)$. Deze oplossing is voor te stellen als een oppervlak in de (x,t,h) -ruimte (zie Fig. III-1)

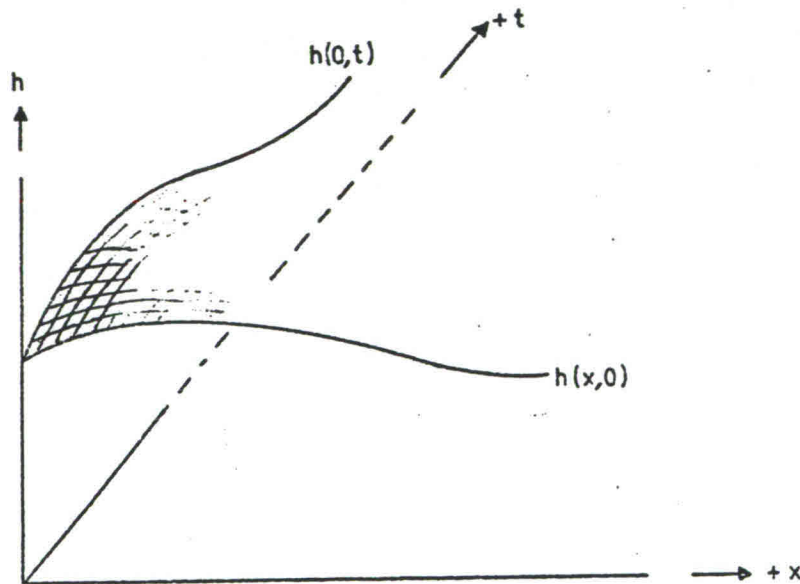


Fig. III.1. Integraal-oppervlak $h(x,t)$ in de (x,t,h) -ruimte

Het op te lossen probleem is voor het eerst door Cauchy (1789-1857) als volgt geformuleerd: "Is het mogelijk een oplossing van de partiële differentiaal-vergelijking te vinden in de vorm van een integraal-oppervlak als van dat oppervlak één ruimtekromme BK gegeven is?"

De bekende kromme BK wordt wel de *beginkromme* genoemd. Beschouwd wordt nu één of andere continue differentieerbare kromme f in de (x,t,h) -ruimte, die wordt voorgesteld door een parametervoorstelling met p als parameter:

$$x = x(p), t = t(p) \text{ en } h = h(p) \quad (\text{III-2})$$

Verondersteld wordt dat deze kromme f in het gezochte integraal-oppervlak ligt.

In alle punten van deze kromme f geldt de volgende relatie:

$$\frac{dh}{dp} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dp} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dt}{dp} \quad (\text{III-3})$$

In verg. (III-3) zijn $\frac{\partial h}{\partial x}$ en $\frac{\partial h}{\partial t}$ de partiële afgeleiden, d.w.z. hellingsrichtingen in punten van het gezochte integraal-oppervlak h waar de kromme f in ligt.

De verg. (III-1) en verg. (III-3) vormen nu samen een stelsel van twee vergelijkingen voor de onbekenden $\partial h/\partial x$ en $\partial h/\partial t$, waarvoor resp. h_x en h_t wordt geschreven:

$$\left. \begin{aligned} A_1 h_x + B_1 h_t &= E_1 \\ \frac{dx}{dp} h_x + \frac{dt}{dp} h_t &= \frac{dh}{dp} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III-4})$$

In matrix-vorm kan het stelsel verg. (III-4) worden geschreven als:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ \frac{dx}{dp} & \frac{dt}{dp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_x \\ h_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ \frac{dh}{dp} \end{pmatrix} \quad (\text{III-5})$$

Volgens de regel van Cramer geldt:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{D^I}{D} \quad (\text{III-6})$$

met

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ \frac{dx}{dp} & \frac{dt}{dp} \end{vmatrix} \quad (\text{III-7})$$

respectievelijk

$$D^I = \begin{vmatrix} E_1 & B_1 \\ \frac{dh}{dp} & \frac{dt}{dp} \end{vmatrix} \quad (\text{III-8})$$

en $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{D^{II}}{D}$ (III-9)

met D volgens verg. (III-7) en met

$$D^{II} = \begin{vmatrix} A_1 & E_1 \\ \frac{dx}{dp} & \frac{dh}{dp} \end{vmatrix} \quad (\text{III-10})$$

Voor de waarde van de determinant D bestaan nu twee mogelijkheden, die hierna beide zullen worden onderzocht:

(i) $D \neq 0$

(ii) $D = 0$

ad(i) $D \neq 0$

Het stelsel verg. (III-4) is dan eenduidig oplosbaar.

De partiële afgeleiden h_x en h_t kunnen langs de kromme f worden opgelost, mits f een bekende kromme (b.v. BK) is, d.w.z. mits de functies (III-2) bekend zijn.

Indien voor een bepaalde p uit verg. (III-2) x, t en h bekend zijn dan kunnen ook A_1 , B_1 en E_1 (eventueel functies van x, t en h) worden bepaald.

Als h_x en h_t langs de gehele kromme f bepaald zouden zijn, dan kan men in principe een andere kromme f', in het integraal-opper-

vlak en in de nabijheid van f , bepalen. Dit komt neer op een differentie-methode.

ad (ii) $D = 0$

De mogelijkheid dat de vergelijkingen *strijdig* zijn kan hier buiten beschouwing blijven, omdat de kromme f dan niet in het integraal-oppervlak zou liggen.

Als het stelsel (III-4) *afhankelijk* is, geldt de volgende relatie:

$$\frac{dx}{dp} : \frac{dt}{dp} : \frac{dh}{dp} = A_1 : B_1 : E_1 \quad (\text{III-11})$$

Uit deze relatie (III-11) volgt dat bij afhankelijke vergelijkingen geldt (zie verg. III-7, 8 en 10):

$$D = D^I = D^{II} = 0 \quad (\text{III-12})$$

Deze laatste mogelijkheid wordt hierna nog nader onderzocht.

Aan de relatie (III-11) kan worden voldaan door oneindig veel krommen in de (x,t,h) -ruimte. Deze krommen zijn alle oplossingen voor het volgende stelsel differentiaal-vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp} &= A_1(x,t,h) \\ \frac{dt}{dp} &= B_1(x,t,h) \\ \frac{dh}{dp} &= E_1(x,t,h) \end{aligned} \quad (\text{III-13})$$

Zo'n kromme als oplossing van dit stelsel noemt men een *karacteristiek*. Door ieder willekeurig punt in de (x,t,h) -ruimte (d.w.z. een bepaalde waarde voor p) gaat een karakteristiek.

De bekende beginkromme BK vormt een verzameling van punten. Door elk van deze punten gaat één karakteristiek, tenzij BK ergens zou samenvallen met een karakteristiek.

De karakteristieken door de punten van de kromme BK spannen samen (een gedeelte van) het gezochte integraal-oppervlak op (zie in Fig. III.2 b.v. de karakteristieken k_1, k_2, k_3 en k_4). De projecties van deze karakteristieken op het x/t -vlak, die wel sub-karakteristieken worden genoemd, zullen hierna worden aangeduid met karakteristieke richtingen in het x,t -vlak.

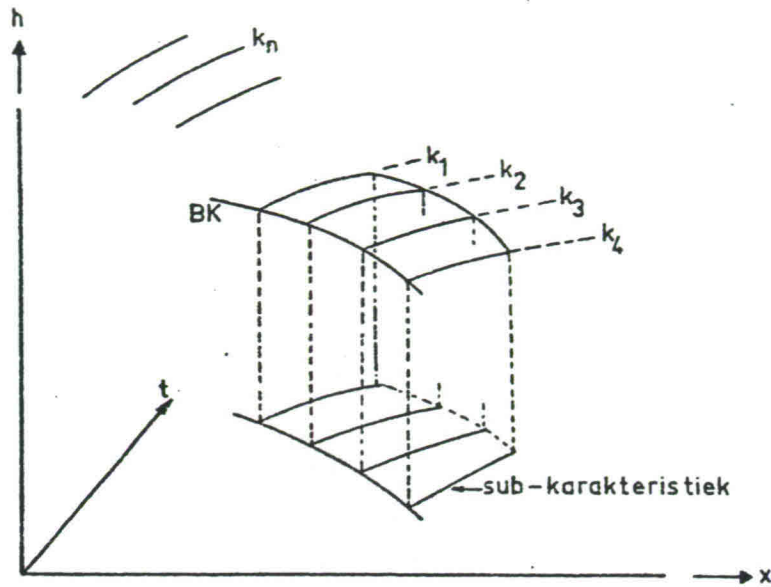


Fig. III.2. Karakteristieken door punten van een beginnkromme BK

Opmerking:

Ook door punten die niet op de beginnkromme BK liggen (oneindig veel) gaat een karakteristiek (zie b.v. de karakteristiek k_n in Fig. III.2).

Voor de hier besproken oplossingsmethode zijn van belang:

- karakteristieken in het gezochte oppervlak waarbij geldt $D = 0$;
- niet-karakteristieke krommen in het oppervlak waarbij geldt $D \neq 0$;
hiertoe kan ook de hierbovengenoemde beginnkromme BK behoren.

De kromme f kan een karakteristiek maar ook een niet-karakteristieke kromme zijn in het integraal-oppervlak.

De karakteristieken $k_1 \dots k_4$ in Fig. III.2 gaan door vier punten van de bekende beginnkromme BK. Verondersteld wordt nu dat voor deze vier punten geldt dat in de parameteraanpak $x(p)$, $t(p)$, $h(p)$ van elk van de karakteristieken $p = p_0$.

De oplossing $h(x,t)$ is nu voor $p = p_1$ te bepalen door langs de verschillende karakteristieken op te schuiven tot waar $p = p_1$. De veranderingen van h met p kunnen worden bepaald door het oplossen van een gewone differentiaalvergelijking, die volgt uit verg. (III-11):

$$\frac{dh}{dp} = \frac{E_1}{B_1} \frac{dt}{dp} = \frac{E_1}{A_1} \frac{dx}{dp} \quad (\text{III-14})$$

Daarbij kan een differentie-benadering worden toegepast.

Er blijkt dus op eenvoudige wijze langs karakteristieken te kunnen worden geïntegreerd.

Opmerking:

Het bijzondere van integreren langs karakteristieken is dat daarbij de partiële afgeleiden (hier h_x en h_t) zelf niet behoeven te worden berekend.

Door de determinanten gelijk aan nul te stellen (zie verg. III-12) en daarbij verg. (III-7), verg. (III-8) resp. (III-10) uit te schrijven, kunnen de karakteristieke vergelijkingen systematisch worden gevonden.

$D = 0$ geeft:

$$A_1 \frac{dt}{dp} = B_1 \frac{dx}{dp} \quad (\text{III-15})$$

Dus

$$\frac{dx}{dp} : \frac{dt}{dp} = A_1 : B_1$$

waaruit volgt:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A_1}{B_1} \quad (\text{III-16})$$

$D^I = 0$ geeft:

$$E_1 \frac{dt}{dp} = B_1 \frac{dh}{dp} \quad (\text{III-17})$$

$D^{II} = 0$ geeft:

$$A_1 \frac{dh}{dp} = E_1 \frac{dx}{dp} \quad (\text{III-18})$$

Uit verg. (III-17) volgt met verg. (II-15):

$$\frac{dh}{dp} = \frac{E_1}{B_1} \frac{dt}{dp} = \frac{E_1}{A_1} \frac{dx}{dp} \quad (\text{III-19})$$

Uit verg. (III-18) volgt met verg. (III-15):

$$\frac{dh}{dp} = \frac{E_1}{A_1} \frac{dx}{dp} = \frac{E_1}{B_1} \frac{dt}{dp} \quad (\text{III-20})$$

Men noemt nu $dx/dt = A_1/B_1$ volgens verg. (III-16) de *karakteristieke richting in het x, t -vlak*.

Langs de karakteristieken geldt een gewone differentiaal-vergelijking (*de karakteristieke relatie*), die volgt uit het gelijk nul stellen van één van de z.g. co-factoren D^I resp. D^{II} .

Als voldaan wordt aan verg. (III-12) dan volgt uit verg. (III-6) en verg. (III-9) dat de afgeleiden $\partial h/\partial x$ en $\partial h/\partial t$ onbepaald zijn.

De partiële afgeleiden *kunnen* onder die voorwaarden verschillende waarden aannemen, waaruit volgt dat een discontinuïteit in de afgeleiden (zie Fig. (III.3)) langs een karakteristiek kan bestaan.

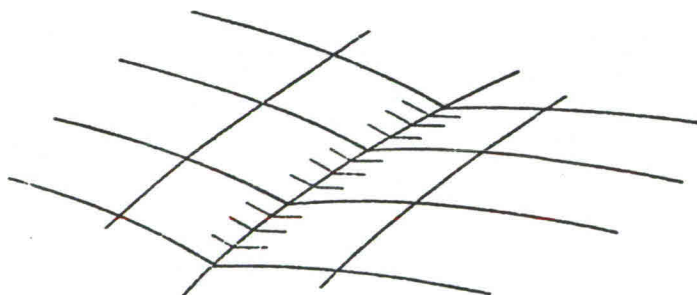


Fig. III.3. Discontinuitéit in de afgeleiden

Een discontinuïteit in de afgeleiden vormt een knik in het integraaloppervlak, die samenvalt met een karakteristiek.

Opmerking:

Deze eigenschap van karakteristieken wordt vaak als uitgangspunt gekozen bij het opzetten van de theorie.

Voorbeeld kinematische golf

In par. 3.3.5 is voor de kinematische golf de volgende differentiaalvergelijking afgeleid (zie verg. (3-46) en zie ook verg. (3-47)):

$$(3/2 u) \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial t} = 0 \quad (\text{III-21})$$

In deze verg. (III-21) zijn de coëfficiënten A_1 , B_1 en E_1 (zie verg. (III-1), met a in plaats van h):

$$A_1 = (3/2 u), B_1 = 1 \text{ en } E_1 = 0 \quad (\text{III-22})$$

Voor de vergelijkingen (III-13) wordt in dit geval gevonden:

$$\frac{dx}{dp} = (3/2 u), \frac{dt}{dp} = 1 \text{ en } \frac{da}{dp} = 0 \quad (\text{III-23})$$

De algemene oplossing voor dit stelsel vergelijkingen luidt:

$$x = (3/2 up) + x_0, t = p + t_0, a = a_0 \quad (\text{III-24})$$

De uitdrukkingen (III-24) vormen de parameter-voorstelling van de karakteristieken; x_0 , t_0 en a_0 worden bepaald door de beginkromme BK. In het voorgaande is er vanuit gegaan dat als bekende beginkromme iedere niet-karakteristieke kromme in het gezochte integraal-oppervlak dienst kan doen.

Bij praktische problemen is de beginkromme gegeven op een bepaald tijdstip $t = t_0$ en wordt naar de oplossing op latere tijdstippen gevraagd (beginvoorwaarden-problemen).

Verondersteld wordt nu dat op het tijdstip $t = 0$ de waterdiepte $a(x,0)$ bekend is. Het ligt nu voor de hand om, in plaats van de algemene parameter p , de tijd t als parameter te kiezen. Men krijgt i.p.v. het stelsel verg. (III-4) het volgende stelsel vergelijkingen voor de partiële afgeleiden van in dit geval $a(x,t)$:

$$\begin{aligned} A_1 a_x + B_1 a_t &= E_1 \\ \frac{dx}{dt} a_x + a_t &= \frac{da}{dt} \end{aligned} \quad (\text{III-25})$$

Of in matrix-vorm:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ \frac{dx}{dt} & 1 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{x} = \begin{vmatrix} a_x \\ a_t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 \\ \frac{da}{dt} \end{vmatrix} \quad (\text{III-26})$$

De waarde $D = 0$ geeft nu:

$$A_1 - B_1 \frac{dx}{dt} = 0 \quad (\text{III-27})$$

Voor de karakteristieke richting in het x,t -vlak volgt uit verg. (III-27) direct:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{A_1}{B_1} \quad (\text{III-28})$$

Uit $D^I = 0$ volgt:

$$\frac{da}{dt} = \frac{E_1}{B_1} \quad (\text{III-29})$$

Opmerking:

Uit $D^{II} = 0$ volgt als rekening wordt gehouden met verg. (III-28):

$$\frac{da}{dt} = \frac{E_1}{A_1} \frac{dx}{dt} = \frac{E_1}{B_1} \quad (\text{III-30})$$

Ook uit dit resultaat blijkt dat de voorwaarden $D^I = 0$ en $D^{II} = 0$ tot dezelfde vergelijking leiden.

Als in verg. (III-28) en verg. (III-29) de grootheden uit verg. (III-22) worden gesubstitueerd krijgt men

$$\frac{dx}{dt} = 3/2 u \quad (\text{III-31})$$

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad (\text{III-32})$$

Voor dit voorbeeld blijkt dat langs de karakteristieke richtingen in het x/t -vlak geldt dat a constant is.

De oplossing van verg. (III-21) kan nu voor bekende beginvoorwaarden $a(x,0)$ en $u(x,0)$ eenvoudig worden gevonden (zie Fig. III.4).

Beschouwt men een aantal punten $(x_i, 0)$ op de x-as (dus voor $t = 0$) dan kunnen de karakteristieke richtingen worden bepaald met (III-31). Langs de karakteristieke richtingen, die in het x/t-diagram zijn getekend, verandert de waterdiepte a niet. De oplossing kan voor b.v. $t = t_1$ en $t = t_3$ gemakkelijk worden bepaald (zie Fig. III.4).

Opmerkingen:

- (i) Omdat de gemiddelde snelheid u variëert, lopen de karakteristieke richtingen niet evenwijdig. Het gevolg is dat deze benadering voor een hoogwatergolf (zie par. 3.3.5) een golf geeft, die tijdens het voortplanten aan vervorming onderhevig is.
- (ii) Zoals in par. 3.3.5. uitvoeriger wordt beschreven levert het constant stellen van de coëfficiënt $(3/2 u)$ in verg. (III-21) :

$$c = 3/2 u = \text{constant} \quad (\text{III-33})$$

de differentiaal-vergelijking voor de zich *onvervormd* voortplantende kinematische golf. Bij de hierboven beschreven oplossing volgt uit verg. (III-33) dat de karakteristieke richtingen ($dx/dt = c$) dan evenwijdig zouden lopen. Dit beeld sluit goed aan bij een beschouwing waarbij met een meebewegend assenstelsel wordt gewerkt.

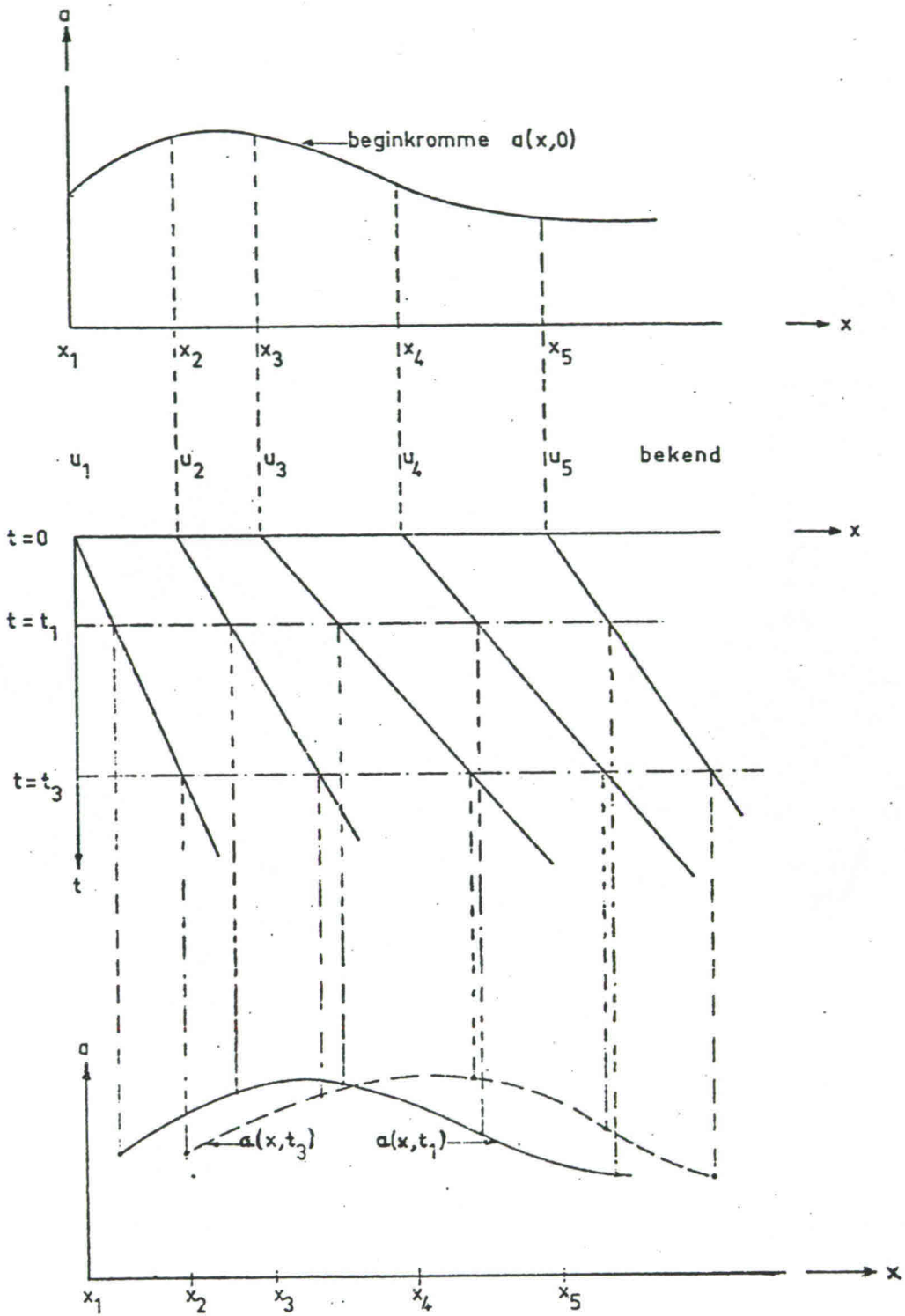


Fig. III.4 - Voortplanting van een hoogwatergolf (kinematische golf);
vervorming a.g.v. $\frac{dx}{dt} = c(u)$ en $u = u(x)$.

III.2. Algemene procedure

De voortplanting van lange golven in open respectievelijk gesloten leidingen kan worden beschreven met een stelsel van twee simultane partiële differentiaalvergelijkingen van de eerste orde:

- een bewegingsvergelijking en
- een continuïteitsvergelijking.

Afhankelijk van het beschouwde probleem en van de voor een bepaalde benadering gemaakte veronderstellingen krijgt men te maken met een bepaald stelsel vergelijkingen. Indien een oplossing door integratie langs karakteristieken wordt overwogen dan dienen eerst karakteristieke richtingen te worden afgeleid. Daarvoor wordt hierna een algemene procedure opgezet.

Beschouwd wordt een stelsel quasi-lineaire differentiaal-vergelijkingen van de volgende gedaante:

$$A_1 \frac{\partial h}{\partial x} + B_1 \frac{\partial h}{\partial t} + C_1 \frac{\partial u}{\partial x} + D_1 \frac{\partial u}{\partial t} = E_1 \quad (\text{III-34})$$

$$A_2 \frac{\partial h}{\partial x} + B_2 \frac{\partial h}{\partial t} + C_2 \frac{\partial u}{\partial x} + D_2 \frac{\partial u}{\partial t} = E_2 \quad (\text{III-35})$$

Opmerkingen:

- (i) Als afhankelijk variabelen zijn gekozen $h(x,t)$ en $u(x,t)$. In plaats daarvan kan men natuurlijk ook $a(x,t)$ en $Q(x,t)$ of $a(x,t)$ en $u(x,t)$ kiezen.
- (ii) De coëfficiënten $A_1 \dots E_1$ en $A_2 \dots E_2$ kunnen functies van x en t en eventueel ook van h en u zijn.

De gevraagde oplossing $h(x,t)$ en $u(x,t)$ kan men zich voorstellen als twee integraal-opervlakken in resp. de (x,t,h) -ruimte en de (x,t,u) -ruimte.

In aansluiting op de beschouwingen onder par. III.1 kunnen nu de eigenschappen worden bestudeerd van een kromme in het oppervlak $h(x,t)$ en een kromme in het oppervlak $u(x,t)$, die dezelfde projectie in het x,t -vlak hebben.

Indien weer een parameter-voorstelling met een willekeurige parameter p wordt gebruikt dan gelden voor punten op deze krommen resp. de volgende relaties:

$$\frac{dx}{dp} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{dt}{dp} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dp} \quad (\text{III-36})$$

$$\frac{dx}{dp} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dt}{dp} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dp} \quad (\text{III-37})$$

Zoals hiervoor is gesteld is het bij praktische problemen aantrekkelijk om in plaats van een algemene parameter p de fysisch belangrijke parameter t te kiezen.

Langs de ruimtekrommen gelden dan respectievelijk de volgende relaties:

$$\frac{dx}{dt} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dt} \quad (\text{III-38})$$

$$\frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt} \quad (\text{III-39})$$

Vergelijkingen (III-38) en (III.39) worden aansluitend bij verg. (III-34) en (III-35) geschreven als:

$$\frac{dx}{dt} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + 0 + 0 = \frac{dh}{dt} \quad (\text{III-40})$$

$$0 + 0 + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{dt} \quad (\text{III-41})$$

De vergelijkingen (III-36), (III-37), (III-40) en (III-41) vormen een stelsel, dat in matrix-vorm als volgt kan worden geschreven:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \frac{dx}{dt} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dx}{dt} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \frac{dh}{dt} \\ \frac{du}{dt} \end{vmatrix} \quad (\text{III-42})$$

Ook nu wordt verondersteld dat het stelsel afhankelijk is, waaruit (geheel analoog aan het onder III.1 in deze bijlage gestelde) volgt dat de determinanten gelijk nul gesteld kunnen worden. Onder deze voorwaarden blijkt bij het toepassen van de regel van Cramer dat de partiële afgeleiden onbepaald zijn.

De voorwaarde $D = 0$ geeft:

$$D = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ \frac{dx}{dt} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{dx}{dt} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III-43})$$

Uitwerken van verg. (III-43) geeft achtereenvolgens:

$$\frac{dx}{dt} \times \begin{vmatrix} B_1 & C_1 & D_1 \\ B_2 & C_2 & D_2 \\ 0 & \frac{dx}{dt} & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & C_2 & D_2 \\ 0 & \frac{dx}{dt} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III-44})$$

of

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{dt} \{ (B_1 C_2 - B_2 C_1) + \frac{dx}{dt} (B_2 D_1 - B_1 D_2) \} + \\ & - \{ (A_1 C_2 - A_2 C_1) - \frac{dx}{dt} (A_1 D_2 - A_2 D_1) \} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-45})$$

Voor verg. (III-45) kan nu worden geschreven:

$$\alpha \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \beta \left(\frac{dx}{dt} \right) + \gamma = 0 \quad (\text{III-46})$$

waarin

$$\begin{aligned} \alpha &= B_2 D_1 - B_1 D_2 \\ \beta &= A_1 D_2 - A_2 D_1 + B_1 C_2 - B_2 C_1 \\ \gamma &= A_2 C_1 - A_1 C_2 \end{aligned} \quad (\text{III-47})$$

Voor de karakteristieke richtingen in het x,t-vlak volgt uit verg.

(III-46):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \quad (\text{III-48})$$

Opmerkingen:

(i) De grootheden α , β en γ worden zoals uit verg. (III-47) blijkt bepaald door de coëfficiënten $A_1 \dots D_1$ en $A_2 \dots D_2$ uit de differentiaalvergelijkingen.

Er zijn bij de uitwerking van verg. (III-48) voor een bepaald stelsel vergelijkingen in principe drie mogelijkheden:

- Als er *twee reële karakteristieke richtingen* worden gevonden, noemt men het stelsel *partiële differentiaalvergelijkingen hyperbolisch*.
- Indien *twee samenvallende reële karakteristieke richtingen* worden gevonden, dan heeft men te maken met een *parabolisch stelsel*.
- Als er *complexe uitdrukkingen* voor de karakteristieke richtingen worden gevonden dan heet het stelsel *elliptisch*.

Dit onderscheid in typen differentiaal-vergelijkingen blijkt van belang voor het karakter van de fysische verschijnselen, die daarmee worden beschreven. In par. III.3. worden enkele voorbeelden behandeld.

(ii) Omdat de differentiaal-vergelijkingen die de voortplanting van lange golven beschrijven van het hyperbolische type zijn, zal men steeds twee verschillende reële karakteristieke richtingen vinden.

Voor de tweede voorwaarde kan b.v. worden gekozen $D^{\text{III}} = 0$, dit geeft:

$$D^{\text{III}} = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & E_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & E_2 & D_2 \\ \frac{dx}{dt} & 1 & \frac{dh}{dt} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{du}{dt} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III-49})$$

Uitwerken van verg. (III-49) geeft achtereenvolgens:

$$-\frac{du}{dt} \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ \frac{dx}{dt} & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & E_1 \\ A_2 & B_2 & E_2 \\ \frac{dx}{dt} & 1 & \frac{dh}{dt} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{III-50})$$

Dus

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dt} \{ (B_2 D_1 - B_1 D_2) \frac{dx}{dt} + (A_1 D_2 - A_2 D_1) \} + \frac{dh}{dt} (A_1 B_2 - A_2 B_1) + \\ & + \frac{dx}{dt} (B_1 E_2 - B_2 E_1) + (A_2 E_1 - A_1 E_2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{III-51})$$

Voor een bepaald stelsel vergelijkingen volgen de karakteristieke richtingen in het x, t -vlak uit verg. (III-48), indien daarin de factoren α , β en γ uit (III-47) worden gesubstitueerd.

Als de gevonden relaties voor dx/dt in verg. (III-51) worden gesubstitueerd dan geeft deze laatste vergelijking een tweetal gewone differentiaal-vergelijkingen in h , u en t .

Indien de termen E_1 en E_2 beide gelijk nul zijn dan volgt uit verg. (III-51) een relatie voor dh/du :

$$\frac{dh}{du} = \frac{(B_1 D_2 - B_2 D_1) \frac{dx}{dt} + (A_2 D_1 - A_1 D_2)}{(A_1 B_2 - A_2 B_1)} \quad (\text{III-52})$$

Door in verg. (III-52) de resultaten van verg. (III-48) te substitueren worden twee relaties voor dh/du gevonden, die de *karakteristieke vergelijkingen in het h, u -vlak* worden genoemd bij de *karakteristieke richtingen in het x, t -vlak*.

De resultaten van bovenstaande afleiding biedt de mogelijkheid om voor alle voorkomende differentiaal-vergelijkingen systematisch karakteristieke vergelijkingen af te leiden. Vooral indien men te maken heeft met meer gecompliceerde vergelijkingen biedt deze algemene procedure goede controle-mogelijkheden.

III.3. Toepassingen

III.3.1. Toepassingen algemene procedure

Voorbeeld 1

Beschouwd wordt eerst een stelsel partiële differentiaalvergelijkingen, dat in par. 3.4 is aangegeven met verg. (2-41) en verg. (2-42). De term met de bodemhelling en de weerstandsterm zijn samen W genoemd.

$$g \frac{\partial a}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = W \quad (\text{III-53})$$

$$u \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{III-54})$$

Opmerkingen:

- (i) Hier neemt $a(x,t)$ de plaats in van de afhankelijk variabele $h(x,t)$.
- (ii) In verg. (III-53) wordt $W = 0$ gesteld.

Vergelijkt men het stelsel verg. (III-53) en (III-54) met de algemene verg. (III-34) en (III-35) dan blijkt dat in dit geval:

$$A_1 = g, B_1 = 0, C_1 = u, D_1 = 1 \text{ en } E_1 = 0 \quad (\text{III-55})$$

$$A_2 = u, B_2 = 1, C_2 = a, D_2 = 0 \text{ en } E_2 = 0$$

Met verg. (III-47) wordt gevonden:

$$\alpha = 1, \beta = -2u \text{ en } \gamma = u^2 - ga \quad (\text{III-56})$$

en dus geeft verg. (III-46) in dit geval:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2u \left(\frac{dx}{dt}\right) + u^2 - ga = 0 \quad (\text{III-57})$$

Uit verg. (III-57) volgen voor de karakteristieke richtingen in het x,t -vlak de bekende relaties:

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{ga} \quad (\text{III-58})$$

De termen E_1 en E_2 zijn beide gelijk aan nul.

In dit geval worden met verg. (III-52) de volgende karakteristieke vergelijkingen in het a,u -vlak gevonden:

$$\frac{da}{du} = \frac{-\frac{dx}{dt} + u}{g} \quad (\text{III-59})$$

of na substitutie van verg. (III-58):

$$\frac{da}{du} = \mp \sqrt{\frac{a}{g}} \quad (\text{III-60})$$

Met de bekende karakteristieke vergelijkingen (III-58) en (III-60) voor het hier beschouwde stelsel met $W = 0$, die ook zijn opgenomen in Tabel 5.1 wordt het integreren langs karakteristieken beschreven in par. 5.3.

Voorbeeld 2

In par. III.2. zijn verschillende typen differentiaalvergelijkingen onderscheiden. Daarop aansluitend wordt nu ter illustratie een twee-dimensionale potentiaalstroming beschouwd, die zoals bekend is kan worden beschreven met de vergelijking van Laplace:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{III-61})$$

Deze vergelijking (III-61) is equivalent met het volgende stelsel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{III-62})$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (\text{III-63})$$

Als er een snelheidspotentiaal ϕ is gedefiniëerd met

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (\text{III-64})$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{III-65})$$

Vergelijking (III-63) volgt uit de voorwaarde voor rotatievrijheid ($\text{rot } \vec{u} = 0$). Hieraan wordt met verg. (III-64) en (III-65) voldaan, omdat

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} \quad (\text{III-66})$$

Voor het stelsel verg. (III-62) en (III-63) vindt men de volgende coëfficiënten:

$$\begin{aligned} A_1 = 0, \quad B_1 = 1, \quad C_1 = 1, \quad D_1 = 0 \quad \text{en} \quad E_1 = 0 \\ A_2 = -1, \quad B_2 = 0, \quad C_2 = 0, \quad D_2 = 0 \quad \text{en} \quad E_2 = 0 \end{aligned} \tag{III-67}$$

Met de verg. (III-47) wordt gevonden:

$$\alpha = -1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = -1$$

Voor de karakteristieke richtingen (in dit geval in het x,y-vlak) wordt een complexe uitdrukking gevonden:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\pm \sqrt{-4}}{-2} = \mp \sqrt{-1} = \mp i \tag{III-68}$$

Het stelsel vergelijkingen is *elliptisch* zodat de karakteristieken geen oplossing bieden.

Opmerkingen:

- (i) Bij elliptische problemen is een discontinuïteit in de afgeleiden niet mogelijk, behalve eventueel in de randvoorwaarden.
- (ii) Voorbeelden van elliptische problemen zijn b.v. ook grondwaterproblemen. Langs de randen kunnen zich knikken (singuliere punten) voordoen.

Voorbeeld 3

De voortplanting van een lange golf in een open leiding kan zoals blijkt uit par. 2.4. (onder daar genoemde voorwaarden) worden beschreven met het stelsel verg. (2-36) en (2-37).

Daarbij is (uitgaande van de vergn. (2-33) en (2-34)) geschreven :

$$\frac{\partial Z_1}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{en} \quad \frac{\partial Z_1}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x}$$

en is in de advectieve term (met $\partial A_s / \partial x = 0$) gesubstitueerd :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -B \frac{\partial h}{\partial t}$$

Het gaat dan om het volgende stelsel partiële differentiaalvergelijkingen in $h(x,t)$ en $Q(x,t)$:

$$\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{2BQ}{gA_s^2} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{gA_s} \frac{\partial Q}{\partial t} = - \frac{Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} \quad (\text{III-69})$$

$$B \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (\text{III-70})$$

Voor dit stelsel vindt men de volgende coëfficiënten:

$$\begin{aligned} A_1 &= 1 & B_1 &= - \frac{2B}{gA_s^2} Q & C_1 &= 0 & D_1 &= \frac{1}{gA_s} & \text{en} & E_1 &= \frac{-Q|Q|}{C^2 A_s^2 R} = W. \\ A_2 &= 0 & B_2 &= B & C_2 &= 1 & D_2 &= 0 & \text{en} & E_2 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III-71})$$

In dit geval zijn de termen in het rechterlid van de bewegingsvergelijking niet gelijk nul. Ten behoeve van het overzicht wordt de term W ingevoerd.

Met verg. (III-47) wordt gevonden:

$$\alpha = \frac{B}{gA_s}, \quad \beta = - \frac{2B}{gA_s^2} Q, \quad \gamma = -1$$

Voor de karakteristieke richtingen in het x,t-vlak wordt door substitueren van deze factoren in verg. (III-48) gevonden:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{A_s} \pm \sqrt{\frac{Q^2}{A_s^2} + \frac{gA_s}{B}} \quad (\text{III-72})$$

Substitueren van de onder (III-71) genoemde coëfficiënten in verg. (III-51) geeft in dit geval:

$$\frac{dQ}{dt} \left\{ \left(\frac{B}{gA_s} \right) \frac{dx}{dt} \right\} + \frac{dh}{dt} \{B\} - \frac{dx}{dt} (BW) = 0 \quad (\text{III-73})$$

Uit verg. (III-73) volgt:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{dQ}{dt} \left(\frac{1}{gA_s} \frac{dx}{dt} \right) - W \frac{dx}{dt} = 0 \quad (\text{III-74})$$

Indien de termen in het rechterlid van de verg. (III-69) gelijk nul zijn, dan kan in verg. (III-74) $W = 0$ worden gesteld. Dit geeft

$$\frac{dh}{dt} + \frac{dQ}{dt} \left(\frac{1}{gA_s} \frac{dx}{dt} \right) = 0 \quad (\text{III-75})$$

Uit verg. (III-72) en verg. (III-74) kunnen eenvoudiger karakteristieke vergelijkingen worden afgeleid door te veronderstellen:

$$Fr = \frac{\frac{Q}{A_s}}{\sqrt{\frac{gA_s}{B}}} \ll 1 \quad (\text{III-76})$$

Uit verg. (III-72) volgt dan:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{gA_s}{B}} \quad (\text{III-77})$$

Uit verg. (III-74) kan dan worden gevonden:

$$\pm B \sqrt{\frac{gA_s}{B}} \frac{dh}{dt} + \frac{dQ}{dt} = gA_s W \quad (\text{III-78})$$

Voorbeeld 4

Zoals blijkt uit par. 2.5. kan de voortplanting van een drukgolf door een ronde buisleiding (geheel gevuld met vloeistof) worden beschreven met het stelsel verg. (2-68) en verg. (2-67) :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = g \sin \beta - g \frac{u|u|}{C^2 R} \quad (\text{III-79})$$

$$\frac{u}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{III-80})$$

Hierin is

$$\frac{1}{c^2} = \frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{E} \frac{\delta}{D} \quad (\text{III-81})$$

en zijn de druk p en de gem. snelheid u de afhankelijk variabelen.

Voor het stelsel vindt men de volgende coëfficiënten:

$$A_1 = \frac{1}{\rho} \quad B_1 = 0 \quad C_1 = u \quad D_1 = 1 \quad E_1 = W \quad (\text{III-82})$$

$$A_2 = \frac{u}{c^2} \quad B_2 = \frac{1}{c^2} \quad C_2 = \rho \quad D_2 = 0 \quad E_2 = 0$$

De term W is ingevoerd voor het rechterlid van verg. (III-79).

Met verg. (III-47) wordt in dit geval gevonden:

$$\alpha = \frac{1}{c^2}, \quad \beta = -\frac{2u}{c^2}, \quad \gamma = \frac{u^2}{c^2} - 1$$

Voor de karakteristieke richtingen in het x,t-vlak volgt dan uit verg. (III-48):

$$\frac{dx}{dt} = u \pm c$$

en omdat in normale gevallen steeds geldt $u \ll c$

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \quad (\text{III-83})$$

- Hieruit blijkt dat c gedefiniëerd volgens verg. (III-81) de karakteristieke voortplantingssnelheid is.

Substitueren van de coëfficiënten in verg. (III-51) geeft in dit geval de volgende vergelijking (met $E_2 = 0$ en $E_1 = W$):

$$\frac{dp}{dt} \left\{ \frac{1}{\rho c^2} \right\} + \frac{du}{dt} \left\{ \frac{1}{c^2} \frac{dx}{dt} - \frac{u}{c^2} \right\} - \frac{dx}{dt} \frac{W}{c^2} + \frac{Wu}{c^2} = 0 \quad (\text{III-84})$$

Met de voorwaarde $u \ll c$ en door substitueren van verg. (III-83) volgt uit verg. (III-84):

$$+ \frac{1}{\rho c} \frac{dp}{dt} + \frac{du}{dt} = W \quad (\text{III-85})$$

III.3.2. Toepassing voor een lange golf in een open leiding

Voor deze toepassing wordt een aan een zijde afgesloten bekken beschouwd, dat aan de andere zijde in open verbinding staat met een relatief diepe zee (zie Fig. III.5).

De lengte van het bekken is 4800 m.

Verondersteld wordt dat van het bekken de bodem horizontaal is $i_b = 0$ en de wanden vertikaal zijn $B = B_s$. Hierna wordt een golfverschijnsel beschouwd, dat vanuit de zee doordringt in het bekken.

Als een strook met een breedte gelijk aan de eenheid wordt beschouwd dan kunnen als variabelen worden gekozen de waterdiepte a en de gemiddelde snelheid in u.

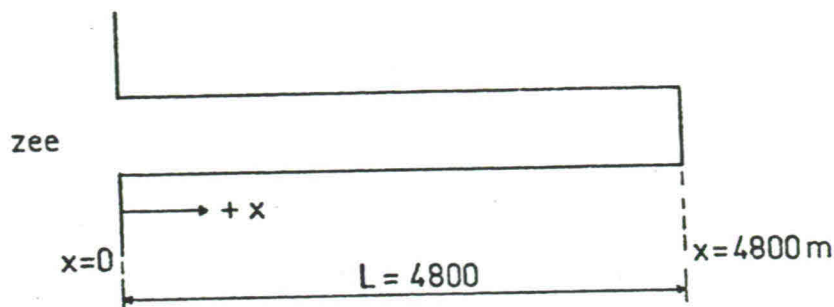


Fig. III.5. Afgesloten bekken aan zee

Karakteristieke relaties

In Tabel 5.1 zijn onder (5) de karakteristieke vergelijkingen vermeld, die voor het stelsel DVn (2-41) en (2-42) volgen uit verg. (III-48) en (III-51). Met $E_2 = 0$ en

$$E_1 = -g \frac{u|u|}{C a} = W$$

kunnen de volgende relaties worden gevonden :

$$\frac{dx}{dt} = u \pm \sqrt{ga} \tag{III-88}$$

$$\frac{du}{dt} \pm \sqrt{\frac{g}{a}} \frac{da}{dt} = -g \frac{u|u|}{C^2 a} \tag{III-89}$$

De positieve x-richting wordt gekozen van de zee naar de afgesloten zijde.

Randvoorwaarden

Voor $x = 0$ geldt dat het verloop van de waterstanden in de tijd gegeven is. De functie $a(0,t)$ is weergegeven in Fig. III.6.

Voor $x = 4800$ m geldt, omdat het bekken is afgesloten dat $u(4800,t) = 0$ voor alle waarden van t .

Beginvoorwaarden

Op het tijdstip $t = 0$ moeten, voor iedere waarden van x , a en u gegeven zijn. Voor dit probleem is gegeven:

$$a(x,0) = a(0,0) = 3,60 \text{ m}$$

$$u(x,0) = 0$$

In Fig. III.6 is een x,t-diagram getekend, waarbij de +t-as naar beneden is gekozen. In dit x,t-diagram zijn de bovenstaande begin- en randvoorwaarden aangegeven.

De lengte van het bekken is verdeeld in vier gelijke delen, zodat op het tijdstip $t = 0$ vijf discrete punten worden beschouwd:

de punten 0,00; 2,00; 4,00; 6,00 en 8,00 (zie aanduiding Fig. III.6).

In deze punten is de toestand bekend $a = 3,60 \text{ m}$ en $u = 0$; deze is aangegeven in het a,u-diagram.

De karakteristieke richtingen in het x,t-diagram voor deze punten volgen uit verg. (III-88):

$$\frac{dx}{dt} = 0 \pm \sqrt{10 \times 3,60} = 6 \text{ m/s}$$

Langs de karakteristieke richtingen in het x,t-diagram gelden de volgende karakteristieke vergelijkingen in het u,a-diagram:

$$du \pm \sqrt{\frac{g}{a}} da = -g \frac{u|u|}{c^2 a} dt \quad (\text{III-91})$$

Dit geeft in dit geval voor de vijf beschouwde punten dezelfde relatie:

$$du \pm \sqrt{\frac{10}{3,6}} da = 0 \quad (\text{III-92})$$

of

$$\frac{da}{du} = \mp 0,6 \text{ s} \quad (\text{III-93})$$

De negatieve karakteristiek door punt 0,0 en de positieve karakteristiek door punt 8,00 vallen buiten het x,t-diagram. Door de punten 2,00, 4,00 en 6,00 kunnen twee karakteristieken worden getekend (zie het x,t-diagram in Fig. III.6).

De positieve karakteristiek door punt 0,00 en de negatieve karakteristiek door punt 4,00 snijden elkaar in punt 3,01. Omdat de toestand in de punten 2,00 en 4,00 gelijk is wordt ook de toestand in punt 3,01 gelijk aan:

$$a = 3,60 \text{ m en } u = 0$$

De positieve karakteristiek door punt 2.00 en de negatieve karakteristiek door punt 4.00 snijden elkaar in punt 3.01. Omdat de toestand in de punten 2.00 en 4.00 gelijk is wordt ook de toestand in punt 3.01 gelijk aan:

$$a = 3,60 \text{ m en } u = 0$$

De positieve karakteristiek door punt 1.01 en de negatieve karakteristiek door punt 3.01 snijden elkaar in punt 2.02. De toestand in punt 2.02 wordt eveneens gelijk aan

$$a = 3,60 \text{ m en } u = 0$$

Na het voorgaande is het duidelijk dat het bepalen van de toestand in de punten 4.02, 6.02, 3.03, 5.03 en 4.04 in het x,t-diagram bij deze beginvoorwaarden steeds dezelfde toestand oplevert.

Het resultaat is een gelijkbenige driehoek 0.00-8.00-4.04 in het x,t-diagram, waarbinnen de toestand bepaald wordt door de beginvoorwaarden (rusttoestand).

De positieve karakteristiek door punt 7.01 snijdt de rand op de plaats $x = 4800 \text{ m}$ in punt 8.02. De randvoorwaarde in dat punt is $u = 0$, hetgeen tot gevolg heeft dat de toestand in punt 8.02 wordt:

$$a = 3,60 \text{ m en } u = 0$$

Indien de methode verder wordt uitgevoerd dan blijkt dat bij deze beginvoorwaarden en bij deze randvoorwaarden de rusttoestand geldt voor de driehoek 0.00-8.00-8.08.

De negatieve karakteristiek door punt 2.02 snijdt de rand op de plaats $x = 0$ in het punt 4.00. De randvoorwaarde in dat punt kan worden afgelezen uit de figuur $a(0,t)$. De toestand in punt 0.04 wordt gevonden in het a,u-diagram op het snijpunt van de karakteristiek

$$\frac{da}{du} = + 0,6 \text{ s}$$

en de voorwaarde $a = 3,40 \text{ m}$, dit geeft:

$$a = 3,40 \text{ m en } u = - 0,33 \text{ m/s.}$$

Nu wordt vanuit de punten 0.04 en 4.04 de toestand in een nieuw punt bepaald.

De negatieve karakteristiek door punt 4.04 wordt daartoe gesneden met de positieve karakteristiek door punt 0.04, die de volgende richting heeft:

$$\frac{dx}{dt} = u + \sqrt{ga} = - 0,33 + \sqrt{34} = - 0,33 + 5,83 = 3,50 \text{ m/s}$$

Het snijpunt is 2.06 genoemd, hoewel dit punt niet meer samenvalt met een punt in het roosterwerk met de maxen $\Delta x = 600 \text{ m}$, $\Delta t = 100 \text{ s}$.

Opmerkingen:

- (i) Hier komt een nadeel van de methode naar voren. Door de variaties van de waterdiepte a en de gemiddelde snelheid u in karakteristieke richtingen dx/dt krijgen de snijpunten in het x,t -diagram een vrij willekeurige ligging.
- (ii) De karakteristieken worden berekend met de waarden in het bekende punt (vertrekpunt).

Langs de karakteristiek door punt 4.04 geldt de relatie $da/du = + 0,6 \text{ s}$ door het punt (0,3,60) in het a,u -diagram.

Langs de karakteristiek door punt 0.04 geldt:

$$du = - \sqrt{\frac{g}{a}} da - g \frac{u|u|}{c^2 a} dt \quad (\text{III-94})$$

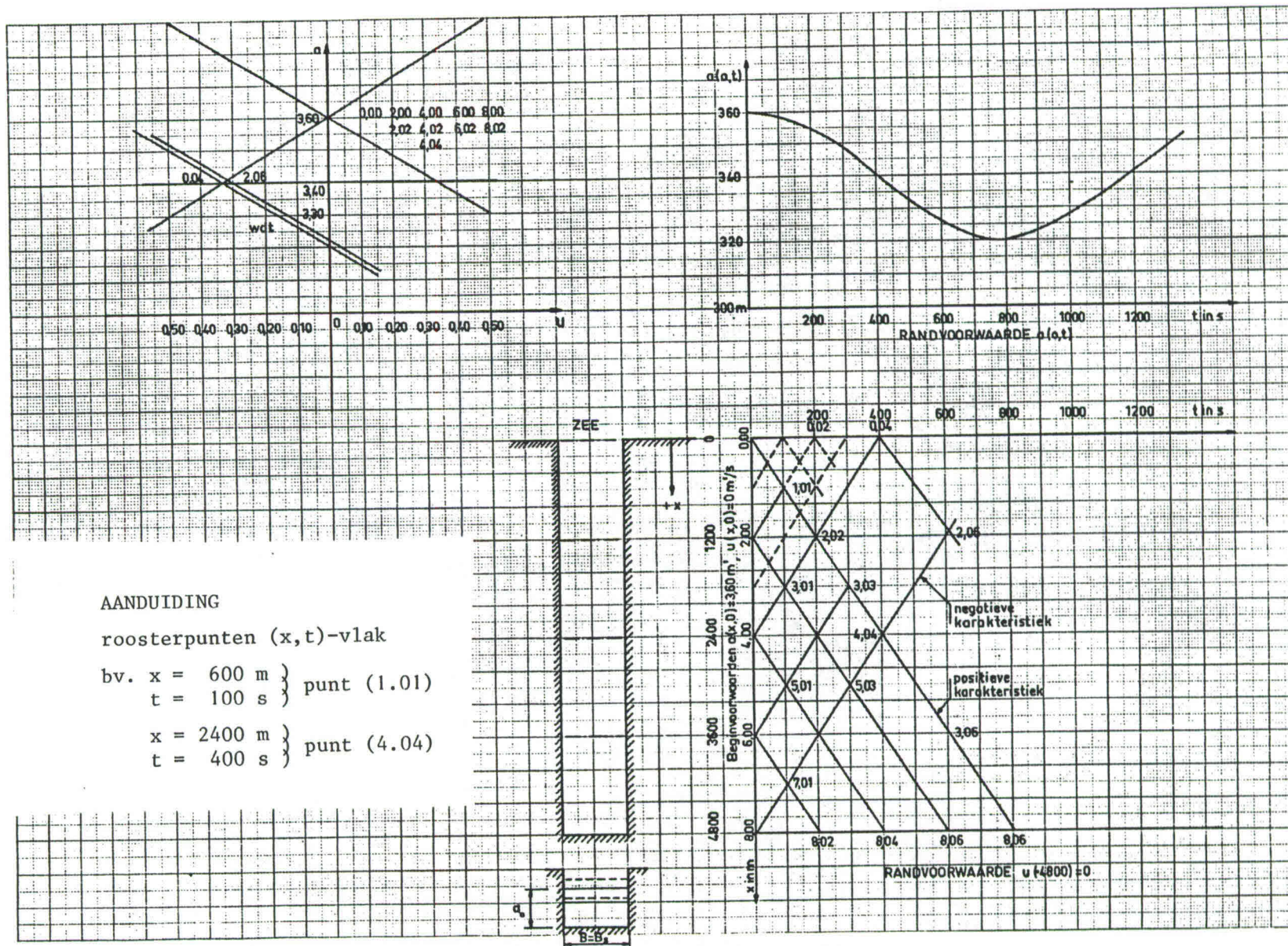
Voor het bepalen van de invloed van de weerstandsterm worden waarden in het punt 0.04 gesubstitueerd, terwijl voor het verschil in tijd tussen punt 2.06 en punt 0.04 wordt ingevoerd $dt = 208 \text{ s}$. Voor de coëfficiënt van Chézy wordt aangehouden $C = 50 \text{ m}^{\frac{1}{2}}\text{s}^{-1}$.

Gevonden wordt dan:

$$- g \frac{u|u|}{c^2 a} dt = - 10 \frac{- (0,33)^2}{2500 \times 3,40} 208 = + 0,027 \text{ m/s}$$

Met $\sqrt{g/a} = \sqrt{10/3,40} = 1,71 \text{ s}^{-1}$ wordt voor verg. (III-94) gevonden:

$$du = 1,71 da + 0,027 \quad (\text{III-95})$$



AANDUIDING

roosterpunten (x,t) -vlak

- bv. $x = 600 \text{ m}$ } punt (1.01)
- $t = 100 \text{ s}$ }
- $x = 2400 \text{ m}$ } punt (4.04)
- $t = 400 \text{ s}$ }

Fig. III.6 - Toepassing voor een lange golf in een open leiding

Verg. (III-95) kan nu worden geïnterpreteerd als een rechte lijn met de richting $du/da = -1,71$, die over een afstand $0,027$ in de richting van de positieve u -as (evenwijdig) wordt verschoven (zie Fig. III.7).

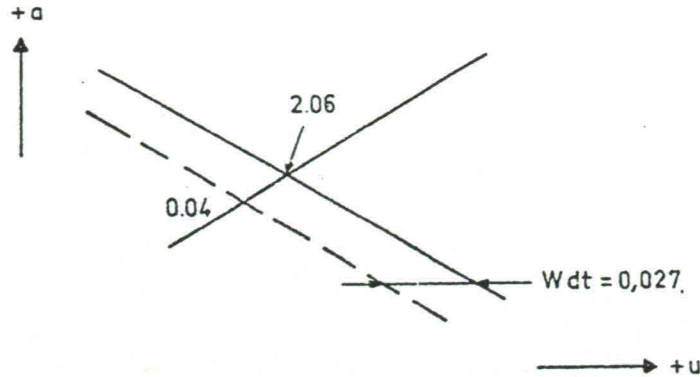


Fig. III.7 Verdisconteren van de weerstandsterm

De toestand in het punt 2.06 wordt nu bepaald door het snijpunt van deze lijn en de andere karakteristiek vanuit het punt (3.60,0).

De toestand in punt 2.06 wordt: $a = 3,41$ m, $u \approx -0,31$ m/s.

Voor een nauwkeurige benadering van het probleem dient men de randvoorwaarde met kleinere tijdstappen in te voeren. Dat betekent dat men een veel fijner net van karakteristieken in het x,t -diagram krijgt (zie stippellijnen).

Bij een fijn net van karakteristieken brengt het verdisconteren van de weerstandsterm op de hierboven aangegeven wijze veel werk met zich mee.

In de hierna volgende toepassing wordt een andere mogelijkheid voor het verdisconteren van de invloed van de weerstand besproken, die ook bij open leidingen kan worden toegepast. Daarbij wordt de invloed van de weerstand "vertaald" in een vertragsingsverlies dat op een vaste plaats wordt verdisconteerd (zie ook Oefening III).

III.3.3. Toepassing voor een drukgolf in een gesloten leiding

Beschouwd wordt een ronde leiding, die de verbinding vormt tussen twee reservoirs (zie Fig. III.8).

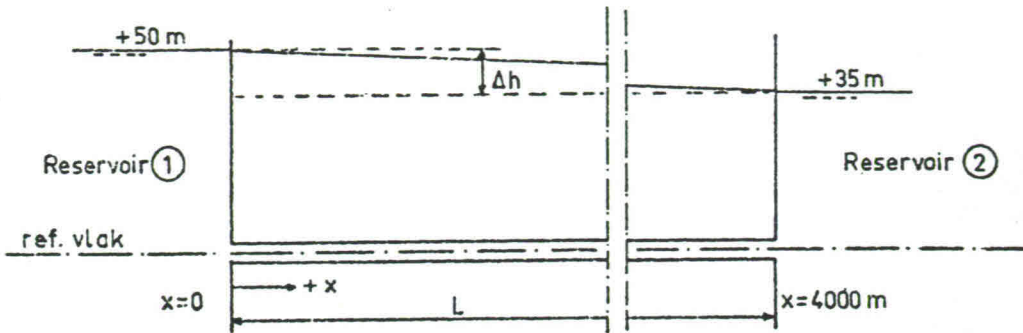


Fig. III.8 Leiding tussen twee reservoirs

De leiding is horizontaal, de lengte is 4000 m, de inwendige diameter is 0,40 m. De as van de leiding wordt gekozen als referentievlak. Het piëzometrisch niveau in de beide reservoirs is constant en gelijk aan resp.

$$h_1 = 50 \text{ m} \qquad h_2 = 35 \text{ m}$$

De positieve x-richting wordt gekozen van ① naar ②. Op de plaats $x = 4000 \text{ m}$ bevindt zich een afsluiter die volledig is geopend, zodat permanent water van ① naar ② stroomt.

In- en uitstroomverliezen worden verwaarloosd en voor de coëfficiënt van Chézy wordt aangehouden $C = 40 \text{ m}^{1/2}/\text{s}^{-1}$.

Het wrijvingsverlies kan worden berekend met

$$\Delta h = - \frac{u|u|}{C^2 D/4} L \qquad \text{(III-96)}$$

Voor de gemiddelde snelheid u volgt uit verg. (III-96) dan

$$u = \sqrt{\frac{15 \times 1600 \times 0,10}{4000}} = 0,78 \text{ m/s.}$$

Als gevolg van de weerstand neemt het piëzometrisch niveau in de leiding lineair af van 50 m bij $x = 0$ tot 35 m bij $x = 4000 \text{ m}$.

Verondersteld wordt nu dat er op de plaats $x = 0$ een zodanige plotselinge vernauwing aanwezig is dat daardoor een vertragsingsverlies $\Delta h_{\text{vertr.}} = 15$ m ontstaat. Dus er wordt plaatselijk een verval ingevoerd dat gelijk is aan het totale verval als gevolg van de wandweerstand.

Op deze wijze is het mogelijk om de invloed van de weerstand op een bepaalde plaats (discreet en dus eenvoudiger) te verdisconteren.

Op een bepaald tijdstip $t = 0$ wordt de afsluiter op de plaats $x = 4000$ m dichtgedraaid. De consequenties hiervan zullen worden nagegaan.

Beginvoorwaarden:

Omdat het wrijvingsverlies op de plaats $x = 0$ is geconcentreerd gedacht, geldt voor de stationaire stromingstoestand overal in de leiding:

$$h = 35 \text{ m en } u = 0,78 \text{ m/s.}$$

Randvoorwaarden:

Op de plaats $x = 0$ geldt een relatie tussen het bekende niveau in het reservoir ①, het piëzometrisch niveau in de leiding (na de veronderstelde vernauwing) en de snelheid u :

$$h(0,t) = h_1 - \zeta u(0,t) |u(0,t)| \quad (\text{III-97})$$

$$\text{waarin } \zeta = \frac{4L}{C^2 D} = \frac{4 \times 4000}{1600 \times 0,40} = 25 \text{ s}^2/\text{m.}$$

Verg. (III-97) geeft de randvoorwaarde op de plaats $x = 0$, in de vorm van een verband tussen de functies $h(0,t)$ en $u(0,t)$, Voor positieve waarden van u geldt:

$$h(0) = 50 - 25 u^2 \quad (\text{III-98})$$

terwijl voor negatieve waarden van u geldt:

$$h(0) = 50 + 25 u^2 \quad (\text{III-99})$$

Deze randvoorwaarden kunnen in het h,u -diagram worden weergegeven als twee parabool-helften die in het punt $u = 0, h = 50$ m aan elkaar aansluiten.

Op de plaats $x = 4000$ m ($x = L$) worden door het sluiten van de afsluiter de uitstroomverliezen geleidelijk groter. De hier optredende vertragsings-

verliezen zullen op een bepaald moment niet meer verwaarloosbaar klein zijn. Er geldt een relatie die overeenkomt met verg. (III-97).

Indien op een bepaald tijdstip het doorstroomprofiel van de afsluiter is verminderd tot A_a dan geldt voor het debiet $Q = u A_s$ dat door de leiding stroomt:

$$Q = u A_s = m A_a \sqrt{2g \Delta h} \quad (\text{III-100})$$

waarin $\Delta h = h(L,t) - h_2$.

Het product van de afvoercoëfficiënt m en A_a wordt het effectieve doorstroomprofiel van de afsluiter A_e genoemd.

Uit verg. (III-100) volgt nu:

$$\Delta h = \left(\frac{A_s}{m A_a} \right)^2 \frac{u |u|}{2g} \quad (\text{III-101})$$

Men vindt dus de volgende relatie:

$$h(L,t) = h_2 + \left(\frac{A_s}{A_e} \right)^2 \frac{1}{2g} u(L,t) |u(L,t)| \quad (\text{III-102})$$

Voor positieve waarden van u geldt:

$$h(L) = h_2 + 0,05 \left(\frac{A_s}{A_e} \right)^2 u^2 \quad (\text{III-103})$$

terwijl voor eventuele negatieve waarden van u zal gelden:

$$h(L) = h_2 - 0,05 \left(\frac{A_s}{A_e} \right)^2 u^2 \quad (\text{III-104})$$

Deze randvoorwaarden blijken in het h,u -diagram te kunnen worden weergegeven als parabolen, waarbij de verhouding A_s/A_e een belangrijke rol speelt.

Karakteristieke relaties:

In Tabel 5.1 zijn onder (6) voor het stelsel DVn (2-71) en (2-72) de karakteristieke vergelijkingen vermeld. Met $E_2 = 0$ en $E_1 = 0$ wordt gevonden :

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \quad (\text{III-105})$$

$$\frac{du}{dt} \pm \frac{g}{c} \frac{dh}{dt} = 0 \quad (\text{III-106})$$

Hierin is c volgens verg. (2-66) gelijk aan

$$c = \sqrt{\frac{1}{\frac{\rho}{K} + \frac{\rho}{E} \frac{\delta}{D}}} \quad (\text{III-107})$$

Zoals ook bij de hierna te bespreken oplossing zal blijken is c volgens verg. (III-107) de voortplantingssnelheid van een drukgolf door de leiding.

- Voor water met een soortelijke dichtheid $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ en een compressiemodulus $K = 2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ en een stalen leiding waarvoor geldt $\delta/D = 0,01$ en $E = 2 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ wordt gevonden uit verg. (III-107) :

$$c = 1000 \text{ m/s}$$

- Een gering percentage (fijn verdeeld) gas in het water geeft een sterke verlaging van de compressiemodulus en daardoor een verlaging van de voortplantingssnelheid c .
Om een indruk te geven zijn in Fig. III.9 resultaten van experimenten vergeleken met resultaten van berekeningen, waarbij de compressiemodulus is bepaald met verg. (2-73). Deze resultaten zijn overgenomen uit de literatuur (Streeter en Wylie, 1967).
- Ook een lagere waarde voor E (meer elastisch buismateriaal) of voor δ/D (relatief dunne buiswand) geeft een lagere waarde voor de voortplantingssnelheid c .

Voor dit voorbeeld wordt verondersteld dat de eigenschappen van de vloeistof, de buis en het buismateriaal zodanig zijn dat wordt gevonden:

$$c = 750 \text{ m/s}$$

Voor de karakteristieke vergelijkingen volgt dan:

$$\frac{dx}{dt} = \pm 750 \text{ m/s} \quad (\text{III-108})$$

$$\frac{du}{dh} = \mp \frac{1}{75} \text{ 1/s} \quad (\text{III-109})$$

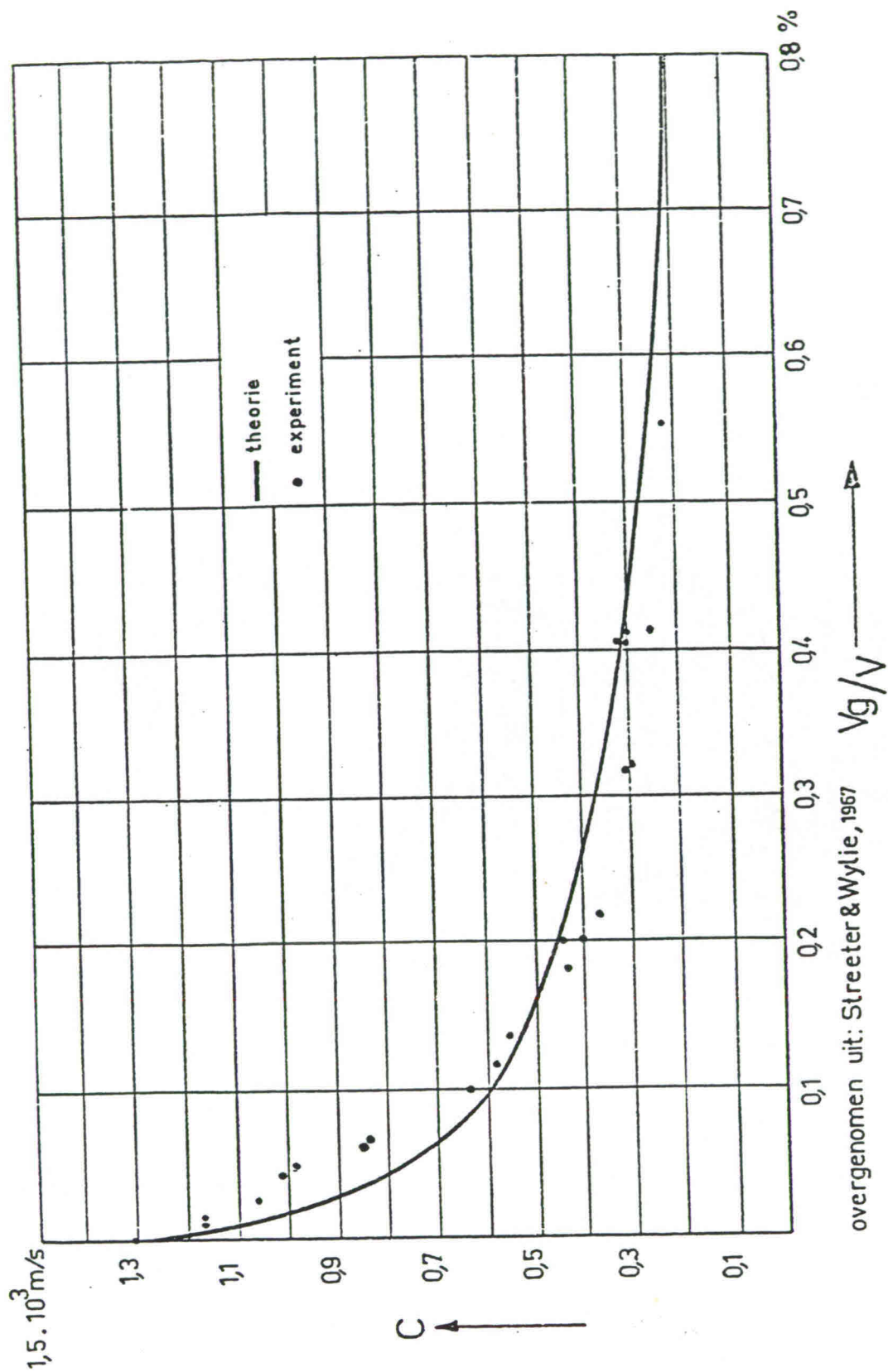


Fig. III.9. De invloed van gas in water op de waarde voor c .

Het x,t-diagram en u,h-diagram

In de Fig. III.10 is naast een h,u-diagram een x,t-diagram getekend met de x-as naar rechts en de t-as naar beneden.

De gekozen schalen zijn aangegeven. Voor de eenvoud is de tijd uitgedrukt in de looptijd $T_1 = L/c$.

Als de randvoorwaarde verg. (III-103) bij de afsluiter wordt getekend voor b.v. een verhouding $A_e/A_s = 0,8$, d.w.z. de afsluiter is nog voor 80% open, dan is voor $u = 2\text{m/s}$:

$$h(L) \approx h_2 + 0,30 \text{ m} \approx h_2$$

Ook als de afsluiter voor 80% open is zijn de vertragingsverliezen nog gering, de parabool volgens verg. (III-103) wijkt nauwelijks af van de rechte $h(L) = h_2$.

Een gedeelte van het h/u-diagram in de omgeving van het punt $h = 35 \text{ m}$, $u = + 0,78 \text{ m/s}$ is op een grotere schaal getekend. Er zal in het begin van de berekening met dit vergrote gedeelte worden gewerkt.

Berekening:

Op de plaats $x = 0$, d.w.z. direkt rechts van de vernauwing, geldt op het tijdstip $t = 0$ de toestand (permanente stroming):

$$h = + 35 \text{ m} \quad u = + 0,78 \text{ m/s}$$

Wordt deze beginvoorwaarde ingevoerd in het h,u-diagram dan blijkt deze toestand uiteraard een punt te zijn van de parabool, die de randvoorwaarde op deze plaats volgens verg. (III-98) weergeeft.

Op het tijdstip $t = 0$ gelden overal in de leiding dezelfde beginvoorwaarden:

$$h = + 35 \text{ m} \quad u = + 0,78 \text{ m/s}$$

In het x,t-diagram is het punt $x = 4000 \text{ m}$, $t = 0$ het punt 0 genoemd. De negatieve karakteristiek (zie verg. III-108) door punt 0 snijdt de rand $x = 0$ in punt 1. Bij de hier geldende randvoorwaarde en de bovengenoemde beginvoorwaarden is de toestand voor alle punten in de driehoek met hoekpunten: punt 0,0, punt 0 en punt 1 gelijk aan:

$$h = + 35 \text{ m} \quad u = + 0,78 \text{ m/s.}$$

Veranderingen van de toestand, als gevolg van het sluiten van de afsluiter, kunnen worden gevonden door vanuit punten met bekende toestand (binnen bovengenoemde driehoek) karakteristieken met deze rand te snijden.

Voor de eenvoud wordt punt 1 beschouwd. De positieve karakteristiek vanuit punt 1 snijdt de rand $x = 4000$ m in punt 2. Zoals is aangegeven is in dat punt 2 bekend dat de afsluiter nog voor 40% geopend is. De negatieve karakteristiek volgens verg. (III-109) door punt 1 in het (vergrote) u, h -diagram wordt gesneden met de randvoorwaarde volgens verg. (III-103), waarin $A_s/A_e = 1/0,4$ is gesubstitueerd. Dit geeft de toestand in punt 2 van het x, t -diagram.

Opmerkingen:

- (i) Het vertragingsverlies over de afsluiter blijkt nog steeds gering te zijn, zodat het in dit geval niet veel zin heeft om de toestand in punten tussen punt 0 en punt 2 op de rand $x = 4000$ te bepalen.
- (ii) In het algemeen dient men een fijner net van karakteristieken in het x, t -diagram te gebruiken (zie ook toepassing III.3.2.).

De negatieve karakteristiek vanuit punt 2 in het x, t -diagram snijdt de rand $x = 0$ in punt 3.

De toestand in dit punt wordt gevonden door in het u, h -diagram de positieve karakteristiek door punt 2 te snijden met de randvoorwaarde volgens verg. (III-98).

De positieve karakteristiek vanuit punt 3 in het x, t -diagram snijdt de rand $x = 4000$ m in punt 4.

Zoals is aangegeven is in punt 4 bekend dat de afsluiter nog voor 20% geopend is.

De negatieve karakteristiek door punt 3 in het u, h -diagram wordt gesneden met de randvoorwaarde volgens verg. (III-103), waarin $A_s/A_e = 1/0,2$ is gesubstitueerd. Voor de toestand in punt 4 wordt gevonden:

$$h \approx + 35,7 \text{ m} \quad u \approx + 0,77 \text{ m/s}$$

Vervolgens wordt ook de toestand in de punten 5, 6 en 7 van het x, t -diagram op de bovenomschreven wijze bepaald.

De toestand in de punten 6 en 7 is overgebracht naar het oorspronkelijke u, h -diagram.

Vervolgens wordt de toestand in punt 8 van het x,t-diagram bepaald, waarin bekend is dat de afsluiter nog voor 5% geopend is. De toestand in punt 9 wordt daarna gevonden door in het u,h-diagram de positieve karakteristiek vanuit punt 8 te snijden met de randvoorwaarde volgens verg. (III-98).

De positieve karakteristiek vanuit punt 9 in het x,t-diagram snijdt de rand $x = 4000$ m in punt 10.

In dat punt is gegeven dat de afsluiter geheel gesloten is.

De negatieve karakteristiek door punt 9 in het u,h-diagram snijdt de randvoorwaarde $u = 0$ in punt 10. De toestand in punt 10 wordt dus:

$$h = + 86 \text{ m} \quad u = 0$$

Opmerking:

Men kan de invloed van de randvoorwaarde op de rand $x = 4000$ m nauwkeuriger verdisconteren door tussen de punten 8 en 10 meerdere punten in de berekening op te nemen.

De negatieve karakteristiek door punt 10 in het x,t-diagram snijdt de rand $x = 0$ in punt 11. De toestand in dit punt wordt gevonden door in het u,h-diagram de positieve karakteristiek door punt 10 te snijden met de randvoorwaarde, waarbij u negatief blijkt te worden en daarom verg. (III-99) geldt.

De positieve karakteristiek door punt 11 in het x,t-diagram snijdt de rand $x = 4000$ m in punt 12. De afsluiter blijft gesloten zodat op deze rand verder geldt $u = 0$. De toestand in punt 12 volgt uit het snijpunt van de negatieve karakteristiek door punt 11 in het u,h-diagram en de voorwaarde $u = 0$.

Bij het voortzetten van de berekening vindt men de toestand in de punten 13, 14, 15, 16 etc., door de karakteristieken in het u,h-diagram vanuit de punten 12, 13, 14, 15 etc. te snijden met de randvoorwaarden:

- op de rand $x = 0$: verg. (III-98) of verg. (III-99)
- op de rand $x = 4000$ m: $u = 0$

Het resultaat blijkt te zijn dat in het u,h-diagram een hoekige spiraal wordt doorlopen, die tenslotte zal uitkomen in het punt $h = + 50$ m, $u = 0$.

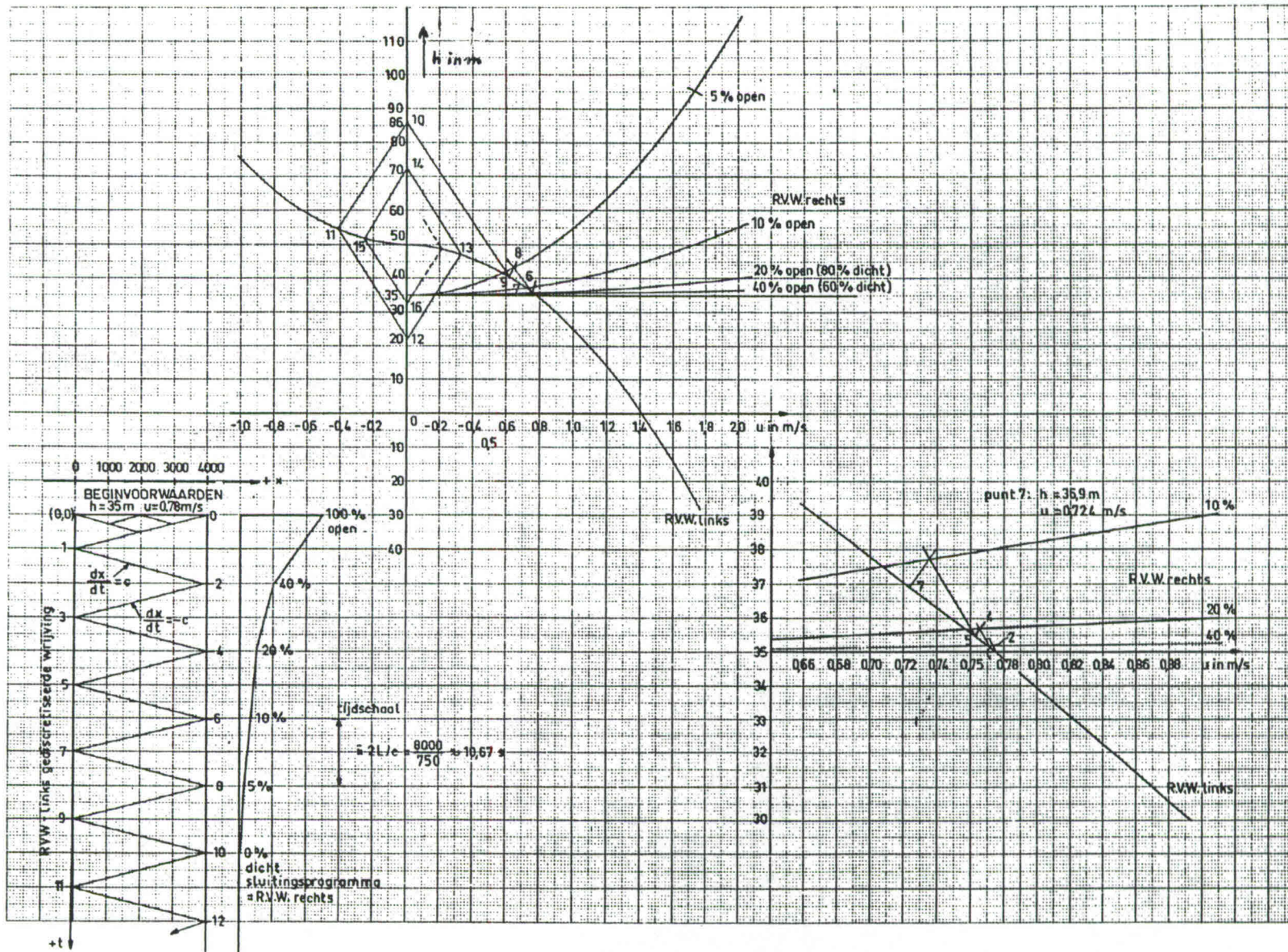


Fig. III.10 - Toepassing voor een drukgolf in een gesloten leiding

Interpretatie:

In het algemeen is het voor een juiste interpretatie van de berekeningsresultaten van belang het verloop van de afhankelijk variabelen uit te zetten als functie van de tijd en als functie van de plaats.

In Fig. III.11 is het verloop van het piëzometrisch niveau h en de snelheid u op de plaats $x = 4000$ m uitgezet tegen de tijd.

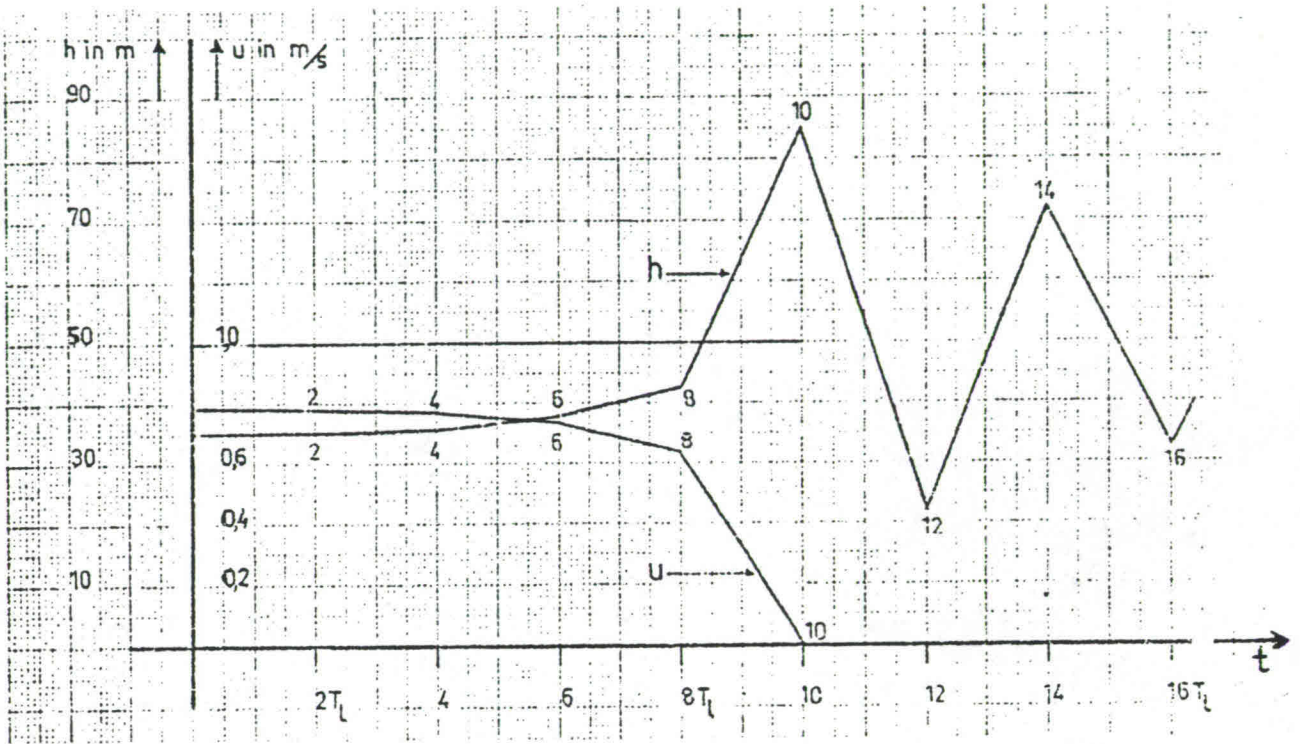


Fig. III.11 Verloop h en u bij de afsluiter

Eenvoudigheidshalve is de tijd uitgedrukt in de looptijd $T_1 = L/c$. Voor het voorbeeld is $T_1 = \frac{4000}{750} \approx 5,3$ s.

De in de punten 2 t/m 16 gevonden discrete waarden zijn door rechte lijnen verbonden.

In het algemeen zal men voor zekerheid omtrent het verloop van de funkties een (veel) groter aantal punten in de berekening moeten betrekken.

In de werkelijkheid zullen de funkties, ook de voorwaarde op de plaats $x = 4000$ m, min of meer vloeiend verlopen.

Met de gevonden resultaten kan het verloop van h en u op de rand $x = 0$ eveneens worden getekend.

Voor het verloop van h en u op andere plaatsen in de leiding dient men meer punten in het x,t -diagram in de berekening te betrekken.

Een groot aantal punten in het x,t -diagram is ook nodig voor het leren kennen van het verloop van h en u op bepaalde tijdstippen in de x -richting (dus langs de as van de leiding).

Hoewel de bovenomschreven benadering zeer grof is, geeft deze toch reeds inzicht in het verschijnsel:

- Het sluiten van de afsluiter heeft in het begin weinig invloed. Pas bij de situatie "10% open" is van een noemenswaardige drukverhoging sprake.
- Door het sluiten van de afsluiter ontstaat een drukgolf, die zich door de leiding voortplant met de snelheid c en bij de rand $x = 0$ wordt gereflecteerd.
- Omdat het sluiten geleidelijk plaatsvindt (zie sluitingsprogramma) wordt de drukgolf ook geleidelijk opgebouwd. Omdat de tijd waarin de afsluiter dichtgaat groter is dan twee maal de looptijd $T_s > 2 L/c$ worden de drukvariatiëen beperkt.
- Indien men de drukvariatiëen veel sterker wil beperken, dan dient de periode tussen "10% open" en "volledig gesloten" veel groter te worden gekozen.
- Als de afsluiter volledig gesloten is doet zich in de leiding een gedempte periodieke oscillatie voor, die wordt bepaald door de randvoorwaarden aan beide zijden.

De demping is een gevolg van weerstand, die hier d.m.v. de aangepaste randvoorwaarde op de plaats $x = 0$ is verdisconteerd.

Een berekening voor een gesloten leiding, waarbij de voortplanting van drukgolven niet wordt verwaarloosd, wordt een *waterslagberekening* genoemd. Indien bij relatief langzaam verlopende verschijnselen de voortplanting van drukgolven geheel buiten beschouwing kan blijven spreekt men van een *starre kolom benadering* (zie par. 3.4 en ook par. 4.6.1).

Bij de hiervoor besproken toepassing voor een gesloten leiding werd de weerstand discreet ingevoerd. Dat maakt het integreren met karakteristieken veel eenvoudiger dan wanneer de weerstand continu wordt verdisconteerd (zie toepassing in III.3.2.).

Het discreet invoeren van de weerstand d.m.v. een verlies op een vaste plaats is in beginsel ook mogelijk bij problemen in open leidingen. (zie Oefening III).

In de praktijk wordt waterslag in gesloten leidingen b.v. veroorzaakt door het afslaan van een pomp. Men gaat sterke drukvariaties tegen door een *bufferschacht* of een *windketel* in een ontwerp op te nemen (zie b.v. Kranenburg, 1970).

Bij praktijkproblemen heeft men in de meeste gevallen te maken met een netwerk van leidingen hetgeen uiteraard meer gecompliceerde berekeningen noodzakelijk maakt (zie b.v. Fox, 1977).

LANGE GOLVEN b73

BIJLAGE IV

IV. Toevoeging basisvergelijkingen

In hoofdstuk 2 is de stof opgenomen, waarop in de hoofdstukken 3 t/m 6 wordt voortgebouwd. In deze Bijlage IV worden als aanvulling enige beschouwingen gegeven, die de samenhang tussen een 3-D stroming en een 2-D model resp. een 1-D model illustreren. In de 3-D ruimte dient in feite bij elk probleem van een 3-D stroming te worden uitgegaan.

De stroming is steeds turbulent, omdat door de relatief grote afmetingen en snelheden aan het criterium $Re > 800$ wordt voldaan. De snelheidscomponenten kunnen momentaan worden opgevat als :

$$U = u + u' , V = v + v' \text{ en } W = w + w' \tag{IV-1}$$

waarin u' , v' en w' de turbulente fluctuaties zijn t.o.v. de over een beperkte tijd (bv. enkele minuten) gemiddelde waarden u , v en w .

In Fig. IV.1 is als voorbeeld een registratie weergegeven van de snelheid in een van de goten, die bij het Practicum b70 worden gebruikt. De registratie met Laser Doppler apparatuur (a) zie Fig. IV.1) geeft meer detail te zien dan die met een zgn. micro-molen (b), op een andere plaats):

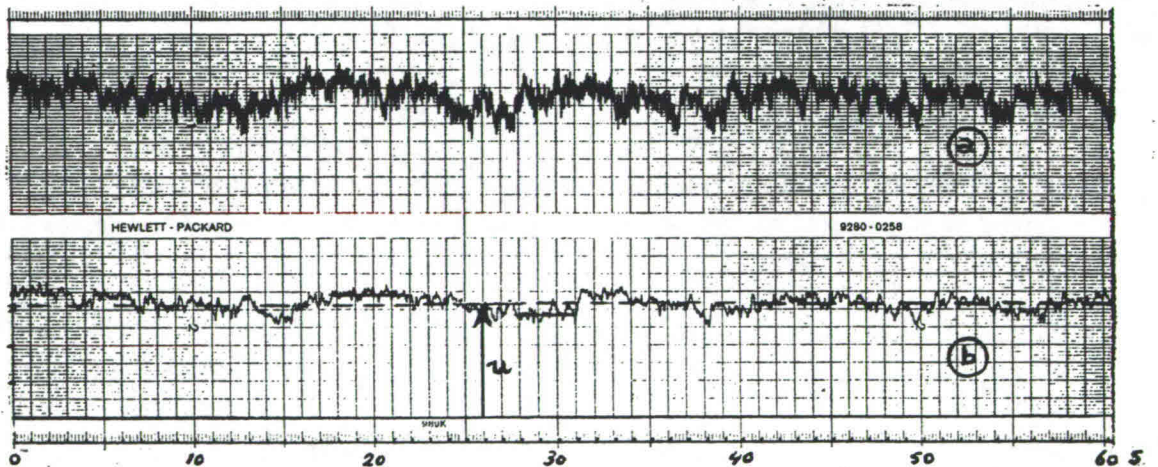


Fig. IV.1 - Definitie u

Zoals ook in Fig. IV.1 is te zien, kan de gemiddelde snelheid (u) worden

gedefinieerd als :

$$u = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} U dt \quad (\text{IV-2})$$

Deze definitie impliceert dat

$$\overline{u'} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} u' dt = 0 \quad (\text{IV-3})$$

Uit Fig. IV.1 blijkt dat bij de beschouwde stroming voor een relatief kleine middelingsduur verschillende waarden voor u worden gevonden.

Hier bleken in een ogenschijnlijk stationaire stroming (goot) nader beschouwd geringe variaties (kleine golven) voor te komen.

Bij lange-golfverschijnselen kan een middelingsduur $(t_2 - t_1)$ worden gekozen die klein is t.o.v. de tijdschaal van het beschouwde verschijnsel.

Bij een getijgolf met een periode $\tau = 12$ u. 25 min. kan bv. worden gemiddeld over 1 min.

Algemeen moet de middelingstijd $(t_2 - t_1)$ *voldoende klein* t.o.v. de kenmerkende tijd van het verschijnsel (zie ook par. 3.1) zijn, en *voldoende groot* t.o.v. de tijdschaal van de turbulente fluctuaties.

Beschouwt men een term waarin de snelheid lineair voorkomt, bijvoorbeeld $\frac{\partial}{\partial x} (U)$, dan kan worden geschreven :

$$\frac{\partial}{\partial x} (U) = \frac{\partial}{\partial x} (u + u') = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x} \quad (\text{IV-4})$$

Als dan over een tijdsinterval $t_2 - t_1$ wordt gemiddeld, dan is $\overline{u'}$ volgens (IV-3) per definitie nul, zodat kan worden gesteld :

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x} (U)} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{U} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{IV-5})$$

Voor het afleiden van bewegingsvergelijkingen en continuïteitsvergelijkingen voor 3-D, 2-D en 1-D modellen kan als uitgangspunt een impulsbalans resp. een massabalans voor een infinitesimaal volume-elementje in het stro-

mende medium worden gekozen. De componenten in x-, y- en z-richting (vertikaal) van de momentane snelheid in een punt worden U, V en W genoemd.

De samendrukbaarheid van water kan bij een stroming met een vrij oppervlak worden verwaarloosd, dan geldt :

$$\frac{d\rho}{dt} = 0$$

Naast behoud van massa is er dan ook sprake van behoud van volume, zodat dan in een punt van een 3-D stroming geldt $\text{div } \vec{U} = 0$ of

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV-6})$$

Als nu elk van de termen van verg. (IV-6) wordt gemiddeld over een tijdsduur $t_2 - t_1$ (zie blz. IV.2) dan geldt verg. (IV-6) ook voor de tijdsgemiddelde snelheidscomponenten u, v en w, omdat alle termen lineair zijn. In elk punt van een 3-D stroming geldt de continuïteitsvergelijking :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV-7})$$

Uitgaande van verg. (IV-7) wordt nu eerst een 2-D lange-golfprobleem beschouwd. Als voorbeeld wordt de getijbeweging in een ondiepe zee gekozen.

Continuïteitsvergelijking voor een 2-D getijprobleem

In Fig. IV.2 is een schets van de Noordzee gegeven. De horizontale afmetingen zijn zeer groot t.o.v. de diepte. De dichtheid (ρ) wordt constant gesteld in de vertikaal (z-richting). De getijbeweging kan dan met een 2-D model worden beschreven.

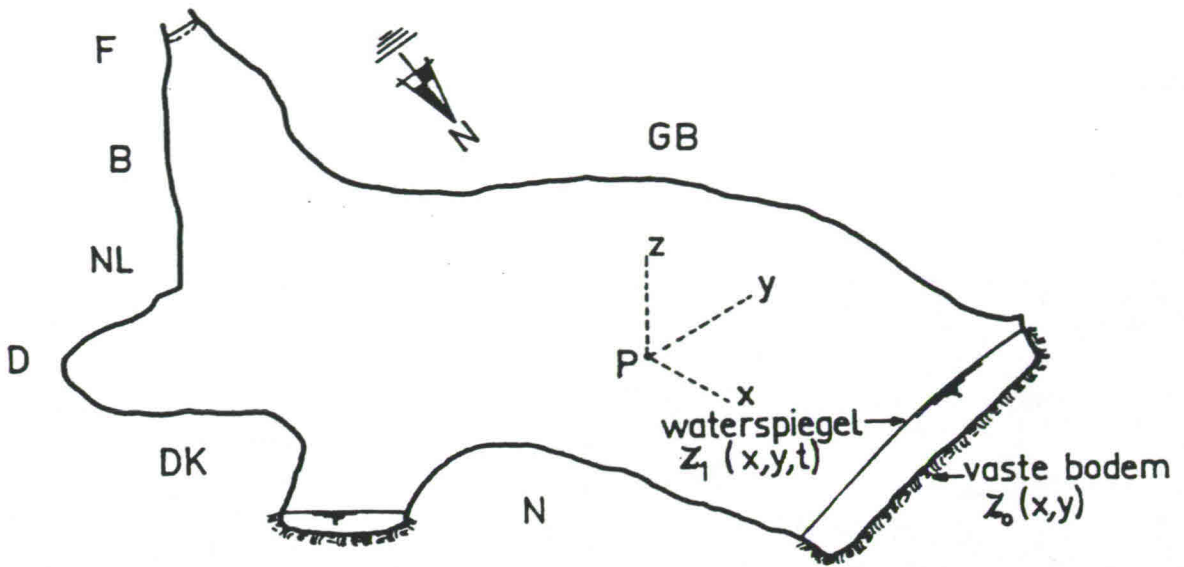


Fig. IV.2 - Getijbeweging in de Noordzee (horizontaal sterk samengetrokken).

In de nabijheid van een willekeurig punt $P(x_1, y_1)$ wordt nu een relatief kleine waterkolom beschouwd (zie Fig. IV.3).

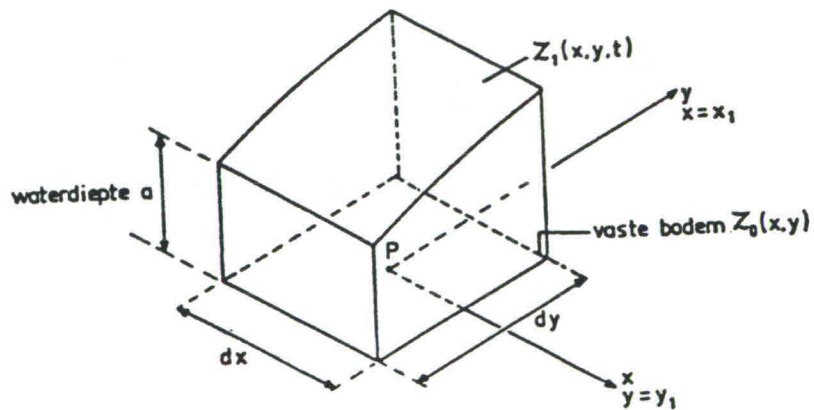


Fig. IV.3 - Waterkolom

De doorsnede met een horizontaal vlak is een rechthoek met zijden dx en dy .

De onderbegrenzing is een vaste bodem $Z_0(x,y)$, terwijl de bovenbegrenzing gevormd wordt door de waterspiegel $Z_1(x,y,t)$.

Een verticale doorsnede in P evenwijdig met de x-richting resp. de y-richting geeft de volgende figuren :

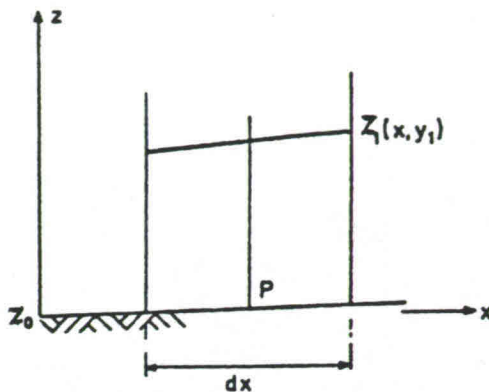


Fig. IV.4 - Vertikale doorsnede
// x-richting

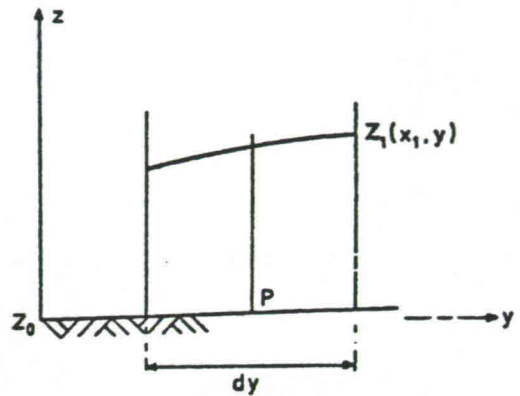


Fig. IV.5 - Vertikale doorsnede
// y-richting

In ieder punt van de vloeistof geldt de continuïteitsvergelijking (IV-7). Deze vergelijking wordt naar z geïntegreerd tussen de grenzen $z = Z_0$ en $z = Z_1$.

$$\int_{Z_0}^{Z_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = 0$$

of

$$\underbrace{\int_{Z_0}^{Z_1} \frac{\partial u}{\partial x} dz}_I + \underbrace{\int_{Z_0}^{Z_1} \frac{\partial v}{\partial y} dz}_II + \underbrace{\int_{Z_0}^{Z_1} \frac{\partial w}{\partial z} dz}_III = 0 \quad (IV-8)$$

Opmerking

De functies u , v , w en ook Z_1 variëren in de tijd. Ter wille van de overzichtelijkheid is de afhankelijkheid met de tijd hierna *niet* aangegeven en de afhankelijkheid van x , y en z alléén indien een bepaalde waarde van z resp. $z = Z_0$ of $z = Z_1$ moet worden vermeld.

Op de begrenzingsen $z = Z_0$ en $z = Z_1$ gelden kinematische randvoorwaarden, inhoudende dat een deeltje in een grensvlak ($z = Z_0$ resp. $z = Z_1$) dat vlak niet verlaat. Dit komt ermee overeen dat de totale afgeleide van Z_0 resp. Z_1 (een deeltje volgend) gelijk is aan de verticale deeltjessnelheid. Voor het oppervlak $z = Z_1(x,y,t)$ geeft dit :

$$\bullet \quad \frac{\partial Z_1(x,y)}{\partial t} + u(x,y,Z_1) \frac{\partial Z_1(x,y)}{\partial x} + v(x,y,Z_1) \frac{\partial Z_1(x,y)}{\partial y} = w(x,y,Z_1) \quad (\text{IV-9})$$

De bodem wordt onbeweeglijk verondersteld, d.w.z. $\frac{\partial Z_0}{\partial t} = 0$, zodat voor $z = Z_0(x,y)$ geldt :

$$\bullet \quad u(x,y,Z_0) \frac{\partial Z_0(x,y)}{\partial x} + v(x,y,Z_0) \frac{\partial Z_0(x,y)}{\partial y} = w(x,y,Z_0) \quad (\text{IV-10})$$

Eerst worden nu de termen I en II uit verg. (IV-8) nader beschouwd. Men mag de volgorde van differentiëren en integreren omkeren, echter men moet er rekening mee houden dat de integratiegrenzen zelf afhankelijk zijn van x en y : $Z_0(x,y)$ en $Z_1(x,y)$.

In het algemeen geldt voor een functie $f = f(x,z)$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,z) dz = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f(x,z)}{\partial x} dz + f(x,b) \frac{db}{dx} - f(x,a) \frac{da}{dx} \quad (\text{IV-11})$$

De juistheid van verg. (IV-11) kan worden aangetoond door de definitie van de differentiaalrekening consequent toe te passen.

De termen I en II kunnen nu als volgt worden vervangen :

$$\text{term I} = \int_{Z_0}^{Z_1} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_0}^{Z_1} u dz - u(x,y,Z_1) \frac{\partial Z_1(x,y)}{\partial x} + u(x,y,Z_0) \frac{\partial Z_0(x,y)}{\partial x} \quad (\text{IV-12})$$

$$\text{term II} = \int_{Z_0}^{Z_1} \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_0}^{Z_1} v dz - v(x,y,Z_1) \frac{\partial Z_1(x,y)}{\partial y} + v(x,y,Z_0) \frac{\partial Z_0(x,y)}{\partial y} \quad (\text{IV-13})$$

Uitwerken van de term III geeft :

$$\int_{Z_0}^{Z_1} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w(x,y,Z_1) - w(x,y,Z_0) \quad (\text{IV-14})$$

Verg. (IV-8) gaat met verg. (IV-12), (IV-13) en (IV-14) over in :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_0}^{Z_1} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_0}^{Z_1} v dz - \left[\underbrace{u(x,y,Z_1) \frac{\partial Z_1(x,y)}{\partial x} + v(x,y,Z_1) \frac{\partial Z_1(x,y)}{\partial y} - w(x,y,Z_1)}_{(a)} \right] \\ + \left[\underbrace{u(x,y,Z_0) \frac{\partial Z_0(x,y)}{\partial x} + v(x,y,Z_0) \frac{\partial Z_0(x,y)}{\partial y} - w(x,y,Z_0)}_{(b)} \right] = 0 \quad (\text{IV-15}) \end{aligned}$$

De termen tussen de grote haken, die met resp. (a) en (b) zijn aangegeven, komen voor in resp. de randvoorwaarden (IV-9) en (IV-10).

Substitueren we deze kinematische voorwaarden in verg. (IV-15) dan resulteert dat in de volgende vergelijking :

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{Z_0}^{Z_1} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{Z_0}^{Z_1} v dz + \frac{\partial Z_1(x,y)}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV-16})$$

In de verticale richting worden tussen $z = Z_0$ en $z = Z_1$ gemiddelde snelheidscomponenten \bar{u} en \bar{v} gedefinieerd met :

$$\bar{u} = \frac{1}{Z_1 - Z_0} \int_{Z_0}^{Z_1} u dz \quad \text{en} \quad \bar{v} = \frac{1}{Z_1 - Z_0} \int_{Z_0}^{Z_1} v dz$$

Als wordt gesteld $Z_1 - Z_0 = a$ gaat verg. (IV-16) over in :

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}a) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{v}a) + \frac{\partial Z_1}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV-17})$$

Opmerkingen :

- (i) De verg. (IV-17) kan direct worden afgeleid door een volume-balans op te zetten voor de kolom van Fig. IV.3 en daarbij rechtstreeks met de in de vertikaal gemiddelde snelheidscomponenten \bar{u} en \bar{v} te werken.

- (ii) Indien in plaats van een zee-gebied een langgerekt estuarium wordt beschouwd en de x-as in de lengterichting daarvan wordt gekozen, dan is een 1-D model mogelijk (zie par. 2.1). Bij een schematisatie tot een leiding kan direct de continuïteitsvergelijking (2-34) worden afgeleid :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + B \frac{\partial Z_1}{\partial t} = 0 \quad (2-34)$$

In deze verg. (2-34) komt de x-richting overeen met de as van een willekeurige leiding.

Uit verg. (IV-17) kan een 1-D vergelijking worden afgeleid door zorgvuldig over de breedte te integreren. In een eenvoudig geval van een prismatische leiding, waarbij $\frac{\partial Z_1}{\partial t}$ constant is over de gehele bergende breedte B en \bar{v} nul is, volgt verg. (2-34) door integreren over de breedte van

$$\frac{\partial}{\partial x} (\bar{u}a) + \frac{\partial Z_1}{\partial t} = 0 \quad (IV-18)$$

- (iii) Verg. (IV-17) is aan het slot van par. 2.4 opgenomen in het stelsel DVn (2-44).

In het voorgaande is een verband gelegd tussen de continuïteitsvergelijkingen betreffende resp. :

- een infinitesimaal volume-element rond een willekeurig punt in een 3-D stroming;
- een elementair blokje (zie Fig. IV.3) in een 2-D stroming;
- een belansgebied in een open leiding d.w.z. bij duidelijke 1-D stroming.

Op zichzelf is de samenhang tussen deze drie mogelijke beschouwingswijzen van belang met name in gevallen waarin een 1-D beschouwing niet meer is toegestaan, zoals in mondingsgebieden, zeegebieden etc.

Aan bovenstaande afleidingen worden hierna enige opmerkingen betreffende de bewegingsvergelijkingen verbonden, waarbij de aanpak grotendeels analoog is.

Bewegingsvergelijkingen voor 2-D getijproblemen

Ook voor de bewegingsvergelijkingen kan het verband tussen 3-D, 2-D en 1-D beschouwingen worden aangegeven. Als uitgangspunt kunnen dan de Navier/Stokes-vergelijkingen worden gekozen, die gelden in een punt van een 3-D stroming. Hier worden alleen de opvolgende stappen, die kunnen worden onderscheiden, kort genoemd :

- a. middeling over een beperkte tijdsduur (zie college b70);
- b. door de lange-golfbenadering reduceert de vergelijking in de z-richting tot een uitdrukking voor de hydrostatische drukverdeling;
- c. integreren van de termen in de vergelijkingen in x- en y-richting over de waterdiepte (van $z = Z_0$ tot $z = Z_1$, zoals hierboven is gedaan voor de continuïteitsvergelijking);
- d. het verdisconteren van krachten als gevolg van resp.:
 - de drukgradiënten (t.g.v. verhang waterspiegel in x- en y-richting);
 - de schuifspanningscomponenten aan de *bodem*;
 - de eventuele schuifspanningscomponenten t.g.v. wind aan de vrije *waterspiegel*;
- e. het verdisconteren van de Coriolis-krachten t.g.v. de aardrotatie.

De resulterende bewegingsvergelijkingen in x- en y-richting zijn opgenomen in het stelsel (2-44), waarbij de termen ad. d en ad. e nader zijn omschreven (zie slot par. 2.4).

Voor meer informatie betreffende het stelsel DVn (2-44) wordt verwezen naar literatuur (Jansen, 1979; Kuipers en Vreugdenhil, 1973; Leendertse, 1967).

De DVn voor een 1-D stroming kunnen uit het stelsel (2-44) worden afgeleid door (over het totale dwarsprofiel van een leiding) te integreren in de breedterichting (y-richting \perp de as van de leiding).

Referenties

- Abbott, M.B. (1979) "Computational Hydraulics", Pitman Publ. Ltd. London
- Booij, N. (1978) "Report on the ICES subsystem FLOWS", Communications on Hydraulics, Report no. 78-3 Vakgroep Vloeistofmechanica, TH Delft
- Chow, Ven te (1959) "Open Channel Hydraulics", Mc.Graw-Hill, New York
- Cunge, J.A., F.M. Holly jr. en A.Verwey (1980) "Practical aspects of computational River Hydraulics", Pitman Publ. Ltd. London
- Dronkers, J.J. (1964) "Tidal computations in rivers and coastal waters", North-Holland Publ. Cie., Amsterdam
- Eagleson, P.S. (1970) "Dynamic Hydrology", Mc. Graw-Hill, New York
- Fox, J.A. (1977) "Hydraulic analysis of unsteady flow in pipe networks", McMillan, London
- Henderson, F.M. (1970) "Open-channel flow", McMillan, New York
- Jansen, P.Ph. (1978) "Principle of River Engineering", Pitman Publ. Ltd. London
- Kranenburg, C. (1970) "Waterslagberekeningen voor leidingen met bufferschacht of luchtketel", De Ingenieur, 11, pp. 153-162
- Kranenburg, C. (1974) "Gas release during transient cavitation in pipes", Journal of the Hydr. Div., ASCE 100 HY 10, pp. 1383-1398
- Kuipers, J. en Vreugdenhil, C.B. (1973) "Calculations of two-dimensional horizontal flow", Speurwerkrapport S163, Waterloopkundig Laboratorium, Delft
- Kuipers, L. en Timman, R., ed. (1966) "Handboek der Wiskunde I", Scheltema en Holkema N.V., Amsterdam
- Lax, P.D. (1954) "Weak solutions and non-linear hyperbolic equations and their numerical computations", Comp. P. Appl. Math., 7, pp. 159-163
- Leendertse, J.J. (1967) "Aspects of a computational model for long period water-wave-propagation". Proefschrift, Delft.
- Le Méhauté, B. (1976) "An introduction to hydrodynamics and water waves", Springer-Verlag, New York

- Lighthill, M.J. en (1955) "On kinematic waves" I. Flood movement in
Whitham, G.B. long rivers, Proc. Roy. Soc. (London) Vol. 229
Lorentz, H.A. (1926) "Verslag Staatscommissie Zuiderzee, 1918-1926"
Algemene Landsdrukkerij, Den Haag
- Mazure, J.P. (1937) "De berekening van getijden en stormvloeden
op benedenrivieren", Proefschrift, Delft.
- Richtmeijer, R.D. en (1967) "Difference methods for initial value pro-
blems", Interscience Publ., New York
Morton, K.W.
- Rouse, H. (1950) "Engineering hydraulics", Wiley & Sons,
New York
- Schönfeld, J.A. (1948) "Voortplanting en verzwakking van hoogwater-
golven op een rivier", De Ingenieur, 23 jan.
1948.
- Schönfeld, J.C. (1951) "Propagation of Tides and similar Waves",
Proefschrift, TH Delft, Staatsdrukkerij,
Den Haag
- Stoker, J.J. (1957) "Water waves", Interscience Publ., New York
- Streeter, V.L. en (1967) "Hydraulic Transients", Mc. Graw-Hill,
Wylie, E.B. New York
- Streeter, V.L. en (1978) "Fluid transients", Mc. Graw-Hill, New York
Wylie, E.B.
- Stroband, H.J. (1947) "Een bijdrage tot de kennis van de getij-
beweging op de benedenrivieren en zee-armen",
De Ingenieur, nr. 36.
- Verwey, A. (1973) "Mathematical model for flow in rivers with
realistic bed configuration", Intern Report,
International Courses in Hydraulic and Sani-
tary Engineering (IHE), Delft
- Vreugdenhil, C.B. (1973) "Computations methods for channel flow",
Verslagen en Mededelingen Commissie Hydro-
logisch Onderzoek TNO no. 18.
- Vreugdenhil, C.B. en (1975) "Hydrological transport phenomena in estua-
ries and coastal waters", ASCE Symposium,
Voogt, J. San Francisco
- Yevjevich, V. en (1975) "Unsteady Flow in Open Channels", Water
Mahmood, K., ed. Resources Publications, Vol. I, II, III,
Colorado, U.S.A.

Lijst van belangrijke symbolen

Symbol	Omschrijving	Dimensie
a	waterdiepte	[L]
	$a(x, t) = Z_1(x, t) - Z_0(x)$	
A	oppervlak van het dwarsprofiel	[L ²]
A _s	oppervlak van een stroomvoerend profiel	[L ²]
B	bergende breedte	[L]
B _s	stroomvoerende breedte	[L]
c	voortplantingssnelheid	[LT ⁻¹]
C	coëfficiënt van Chézy	[L ^{1/2} T ⁻¹]
D	diameter	[L]
e	grondtal natuurlijke logaritmie	[-]
f	kracht per eenheid van lengte	[MT ⁻²]
ΔF	kombergingsoppervlak	[L ²]
Fr	getal van Froude (Fr = u/√ga)	[-]
g	versnelling zwaartekracht	[LT ⁻²]
h	waterstand, piëzometrisch niveau	[L]
i _b	bodemhelling	[-]
k	constante factor in de weerstandsterm	[L ⁻³ T]
k*	getal van Lorentz	[-]
K	compressiemodulus	[ML ⁻¹ T ⁻²]
L	lengte	[L]
L _v	vakconstante	[-]
M _v	vakconstante	[L ⁻² T]
N _v	vakconstante	[L ² T ⁻¹]
O _v	vakconstante	[-]
p	druk	[ML ⁻¹ T ⁻²]
P	omtrek (natte omtrek)	[L]
q	faseverschuivingsfactor per lengte-eenheid	[L ⁻¹]
Q	afvoer (debiet)	[L ³ T ⁻¹]
r	voortplantingsconstante per lengte-eenheid	[L ⁻¹]
R	hydraulische straal R = A _s /P	[L]
t	tijd	[T]
u	(tijdsgemiddelde van de) snelheid in x-richting	[LT ⁻¹]
u'	turbulente snelheidsfluctuatie in x-richting	[LT ⁻¹]
\vec{u}	snelheidsvector (richting en grootte)	[LT ⁻¹]
U	momentane snelheid in x-richting	[LT ⁻¹]

v	(tijdsgemiddelde van de) snelheid in y-richting	$[LT^{-1}]$
v'	turbulente snelheidsfluctuatie in y-richting	$[LT^{-1}]$
V	momentane snelheid in y-richting	$[LT^{-1}]$
w	(tijdsgemiddelde van de) snelheid in z-richting	$[LT^{-1}]$
w'	turbulente snelheidsfluctuatie in z-richting	$[LT^{-1}]$
W	momentane snelheid in z-richting	$[LT^{-1}]$
x	ordinaat (horizontaal)	$[L]$
y	ordinaat (horizontaal)	$[L]$
z	ordinaat (vertikaal)	$[L]$
Z ₀	bodemniveau t.o.v. horizontaal referentievlak	
Z ₁	waterspiegelniveau t.o.v. horizontaal ref. vlak	
β	hellingshoek	$[-]$
μ	afvoercoëfficiënt	$[-]$
ν	kinematische viscositeit	$[L^2T^{-1}]$
ρ	dichtheid (soortelijke massa)	$[ML^{-3}]$
τ	schuifspanning	$[ML^{-1}T^{-2}]$
	periode	$[T]$
λ	golflengte	$[L]$
	weerstandsfactor (g/C^2)	$[-]$
κ	fasehoek van $h(x,t)$	$[-]$
φ	fasehoek van $Q(x,t)$	$[-]$
σ	spanning	$[ML^{-1}T^{-2}]$

