

**ARCHIEF**

**Lab. v. Scheepsbouwkunde  
Technische Hogeschool  
Delft**

**EENIGE TOEPASSINGEN VAN DE LEER  
DER EIGENFUNCTIES OP VRAAGSTUKKEN  
UIT DE TOEGEPASTE MECHANICA.**

**EENIGE TOEPASSINGEN VAN  
DE LEER DER EIGENFUNCTIES  
OP VRAAGSTUKKEN UIT DE  
TOEGEPASTE MECHANICA.**

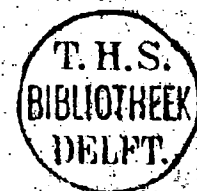
**PROEFSCHRIFT**

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR  
IN DE TECHNISCHE WETENSCHAP AAN DE TECH-  
NISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT, OP GEZAG VAN  
DEN RECTOR MAGNIFICUS, T. K. L. SLUYTERMAN,  
HOOGLEERAAR IN DE AFDEELING DER BOUWKUNDE,  
VOOR EENE COMMISSIE UIT DEN SENAAT TE VER-  
DEDIGEN OP WOENSDAG 17 APRIL 1929, DES NA-  
MIDDAGS TE 3 UUR

DOOR

**JACOBUS JOHANNES KOCH,**  
ELECTROTECHNISCH INGENIEUR,

GEBOREN TE TIEL.



GEDRUKT BIJ DE TECHNISCHE BOEKHANDEL EN DRUKKERIJ  
J. WALTMAN JR. DELFT — 1929.

3211

Bij het voltooien van dit proefschrift is het mij een behoefte, uiting te geven aan mijn gevoelens van dankbaarheid jegens allen, die tot mijn wetenschappelijke vorming hebben bijgedragen, in het bijzonder jegens de hoogleraren van de afdelingen Werktuig- en Scheepsbouwkunde en Electrotechniek van de Technische Hoogeschool.

Hooggeleerde BIEZENO, hooggeachte promotor, de acht jaren, gedurende welke ik als Uw assistent onder Uw leiding heb mogen werken, hebben mij een groote voldoening gegeven; steeds vond ik U bereid, mij met Uw raadgevingen, die voor mij van zooveel waarde waren, en met Uw vruchtbare kritiek ter zijde te staan. De dank voor Uw steun, mij bij de bewerking van dit proefschrift verleend, laat zich niet in enkele woorden uitdrukken. De vele leerrijke gesprekken, die ik met U mocht voeren en de ondersteuning met Uw groote kennis hebben een diepen indruk op mij gemaakt.

Hooggeleerde BURGERS, ook U dank ik voor het vele, wat gij in het belang van dit geschrift hebt willen doen.

Hooggeleerde FELDMANN, het aandeel dat gij in mijn vorming tot ingenieur hebt gehad, zal steeds in mijn herinnering blijven; met het door U gestelde probleem bij het ingenieursexamen hebt gij mij aangemoedigd tot het in dit proefschrift neergelegde werk. In het tweede hoofdstuk is de oplossing van dit probleem in algemeenen vorm neergelegd.

Het is mij een voorrecht allen, die op eenigerlei wijze bij het tot stand komen van dit proefschrift hun hulp hebben verleend, op deze plaats dank te zeggen.

# INHOUD.

	Pag.
INLEIDING . . . . .	I
HOOFDSTUK I. Kritische toerentallen van sneldraaiende assen.	
Buigings- en torsietrillingen van staven . . . . .	3
1. Kritische toerentallen. Het opstellen van de ver- gelijkingen . . . . .	3
2. Orthogonaliteit van de eigenoplossingen . . . . .	4
3. Convergentiebewijs van de gebruikelijke benaderings- methode . . . . .	5
4. Nieuwe benaderingsmethode . . . . .	7
5. Het bepalen van de hogere eigenwaarden en eigen- oplossingen . . . . .	10
6. Trillende staven . . . . .	12
7. Trillende staven (Vervolg). . . . .	13
8. Behandeling van continu verdeelde massa's . . . . .	18
9. Het vervangen van een elastische staaf, door een stijve staaf met elastische scharnieren . . . . .	20
10. Toepassing op het bepalen van trillingen van schepen . . . . .	23
11. Benaderingsmethode voor het bepalen van de eigen- trillingsgetallen van schepen . . . . .	25
12. Torsietrillingen . . . . .	26
13. Benaderingsmethode tot het bepalen van de trillings- getallen bij torsietrillingen . . . . .	28
HOOFDSTUK II. Berekening van staven, waarop periodiek ver- anderlijke krachten inwerken . . . . .	29
1. Het opstellen van de bewegingsvergelijkingen . . . . .	29
2. Behandeling van het vraagstuk met behulp van de leer der eigenfuncties . . . . .	29
3. Benaderingsmethode . . . . .	32
HOOFDSTUK III. Knik van staven . . . . .	34
1. Het opstellen van de vergelijkingen . . . . .	34

	Pag.
2. Orthogonaliteitsbewijs . . . . .	37
3. Benaderingsmethode tot het bepalen van de eerste eigenwaarden . . . . .	38
4. Knik van staven, waarbij de hoofdassen van traagheid der verschillende dwarsdoorsneden verschillende richting hebben. . . . .	41
5. Andere statisch bepaalde knikgevallen . . . . .	42
6. Statisch onbepaalde knikgevallen . . . . .	44
7. Orthogonaliteitsbewijs . . . . .	45
8. Benaderingsmethode . . . . .	46
<b>HOOFDSTUK IV. Berekening van staven, belast met samendrukkende en doorbuigende krachten . . . . .</b>	<b>48</b>
1. Het opstellen van de vergelijkingen . . . . .	48
2. Behandeling van het vraagstuk met behulp van de leer der eigenfuncties . . . . .	48
3. Benaderingsmethode . . . . .	50
4. Iteratiemethode. . . . .	53
5. Uitbreiding van de iteratiemethode. . . . .	54
<b>HOOFDSTUK V. Berekening van balken op veeren . . . . .</b>	<b>56</b>
1. Bestaande iteratiemethode. . . . .	56
2. De bij het vraagstuk behorende eigenbelastingen . . . . .	57
3. Orthogonaliteit van de eigenbelastingen . . . . .	59
4. Benaderingsmethode tot het bepalen van de eigenbelastingen . . . . .	60
5. Nieuwe benaderingsmethode tot het berekenen van balken op veeren . . . . .	62
6. Voorbeeld . . . . .	66
<b>HOOFDSTUK VI. Berekening van balkramen. . . . .</b>	<b>70</b>
1. Inleiding . . . . .	70
2. Splitsing van het gegeven laststelsel $B$ in $B_1$ en $B_2$ . . . . .	70
3. Splitsing van het laststelsel $B_2$ . . . . .	71
4. Vervolg . . . . .	71
5. Eigenbelastingen . . . . .	74
6. Orthogonaliteit van de eigenbelastingen . . . . .	78
7. Ontwikkeling van het laststelsel $B_6$ naar de eigenbelastingen . . . . .	79

	Pag.
8. Benaderingsmethode . . . . .	81
9. Voorbeeld . . . . .	82
<b>HOOFDSTUK VII. Berekening van vliegtuigvleugels . . . . .</b>	<b>94</b>
1. Inleiding . . . . .	94
2. Splitsing van het laststelsel $B$ . . . . .	95
3. Het bepalen van de grootheden $\alpha$ en $\varphi$ . . . . .	96
4. Splitsing van het laststelsel $B_2$ . . . . .	100
5. Splitsing van het laststelsel $B_4$ . . . . .	102
6. Eigenbelastingen. . . . .	104
7. Orthogonaliteit van de eigenbelastingen . . . . .	106
8. Benaderingsmethode tot het bepalen van de eigenbelastingen. . . . .	108
9. Iteratiemethode . . . . .	109

## Inleiding.

---

De ontwikkeling van de toegepaste mechanica in den loop der laatste 20 jaren heeft zich, — behalve door de ontsluiting van het wetenschapsgebied, waarop het onderzoek naar de plasticiteit valt — gekenmerkt door een streven, de vraagstukken der klassieke elasticiteitstheorie meer en meer voor *numerische* behandeling toegankelijk te maken.

Hiertoe bestond een natuurlijke aanleiding. De zich steeds ontwikkelende techniek kwam meer en meer voor vraagstukken te staan, die tot nog toe slechts theoretische beteekenis hadden gehad, doch die nu een numerieke behandeling eischten.

Tengevolge hiervan werd een leemte voelbaar, die in sterke mate de — weliswaar vaak kunstmatig opgeblazen, doch in werkelijkheid inderdaad bestaande — tegenstelling tusschen „theorie en praktijk” verscherpte.

Eenerzijds immers werd vastgesteld dat van menig vraagstuk de oplossing „bekend” was terwijl anderzijds werd aangemerkt, dat deze oplossing in een vorm was gegoten, die voor technisch gebruik ten eenenmale ongeschikt was.

Hierin is sindsdien door een groot aantal onderzoekers, die hun voorganger in W. RITZ vinden, verbetering gebracht. Wij wijzen in dit verband slechts op een aantal verhandelingen van TIMOSHENKO, VON KÄRMÄN, STODOLA, GRAMMEL, MARCUS, H. LORENZ, PÖSCHL, TERZAGHI, HENCKY, COURANT, VON MISES, GALERKIN, TREFFTZ, SOUTHWELL, BIEZENO en vele anderen, die er alle op gericht zijn wiskundige methoden dienstbaar te maken aan het zoeken naar numerieke eindresultaten.

Ook de hieronder volgende verhandeling tracht een bijdrage in genoemde richting te leveren, en wel door het aanpassen van de in de wiskunde reeds tot volle ontwikkeling gekomen leer der eigenfuncties aan verschillende vraagstukken der toegepaste mechanica. Daarbij worden een tweetal vereenvoudigingen ingevoerd.

In de eerste plaats wordt de elasticiteit eener constructie in een eindig aantal, doelmatig te kiezen punten geconcentreerd, zoodat steeds een eindig aantal eigenfuncties optreedt en de te behandelen vraagstukken van het terrein der differentiaalvergelijkingen (resp. integraalvergelijkingen) naar dat van de algebra worden overgebracht.

In de tweede plaats (en in verband hiermede) wordt iedere continue belasting vervangen door een met het getal der eigenbelastingen overeenkomend, eindig aantal geconcentreerde krachten of momenten.

Uit den aard der zaak zijn de gegeven oplossingen dus alle benaderingsoplossingen. De graad der benadering wordt echter steeds onderzocht. In meerdere gevallen blijkt de uitkomst die van met andere hulpmiddelen verkregen antwoorden te overtreffen.

Behalve aan de concrete oplossing der behandelde vraagstukken worden de eigenoplossingen dienstbaar gemaakt aan het verdiepen van het inzicht in den aard van reeds bestaande iteratiemethoden (hoofdstuk 1 § 3, hoofdstuk 5) en de draagwijdte en beteekenis van reeds bekende benaderingsformules (hoofdstuk 4 § 3).

Het proefschrift is gesplitst in twee deelen, waarvan het eerste trillings- en stabiliteitsvraagstukken behandelt, het tweede deel samenwerkende constructies.

## HOOFDSTUK I.

### Kritische toerentallen van sneldraaiende assen. Buigings- en torsietrillingen van staven.

#### 1. Kritische toerentallen. Het opstellen van de vergelijkingen.

Geven we een oorspronkelijk rechte — voldoende ondersteunde — as, die met een hoeksnelheid  $\omega$  draait, een kleine uitwijking, dan is het mogelijk, dat deze uitwijking onder inwerking van de traagheidskrachten blijft bestaan. Een toerental, waarbij dit geschiedt, heet een kritisch toerental; de daarmee corresponderende hoeksnelheid, een kritische hoeksnelheid  $\omega$ .

We beschouwen voorloopig het geval, dat de as een eindig aantal geconcentreerde massa's  $m_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) draagt, gelegen op afstanden  $x_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) van één der steunpunten en dat de massa van de as zelve ten opzichte van deze massa's te verwaarloozen is. Beperken we ons tot het geval, dat de doorbuiging van de as in één enkel vlak plaats heeft en noemen we op de gebruikelijke wijze  $\alpha_{ij}$  de verplaatsing van het punt  $i$  van de stilstaande as ten gevolge van een éénheidskracht in het punt  $j$  en  $\eta_i$  de verplaatsing van het punt  $i$  ten gevolge van alle krachten, dan vinden we, gebruikmakende van het principe van D'ALEMBERT, dat voor de bij een kritisch toerental optredende doorbuigingen geldt:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n m_j \omega^2 \alpha_{ij} \eta_j \quad (i = 1 \dots n) \quad \dots \quad 1)$$

$$\sum_{j=1}^n \left\{ m_j \alpha_{ij} \eta_j - \frac{\eta_i}{\omega^2} \right\} = 0 \quad (i = 1 \dots n) \quad \dots \quad 2)$$

Deze  $n$ , in de grootheden  $\eta_i$  homogene, vergelijkingen laten slechts dan een van nul verschillende oplossing toe, wanneer de determinant van de  $n^e$  orde, gevormd uit de coëfficiënten, nul is; dat wil zeggen, wanneer:

$$\begin{vmatrix} m_1 \alpha_{11} - \frac{1}{\omega^2} & m_2 \alpha_{12} & \dots & m_n \alpha_{1n} \\ m_1 \alpha_{21} & m_2 \alpha_{22} - \frac{1}{\omega^2} & \dots & m_n \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_1 \alpha_{n1} & m_2 \alpha_{n2} & \dots & m_n \alpha_{nn} - \frac{1}{\omega^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (3)$$

Deze  $n^e$  machtsvergelijking in  $\frac{1}{\omega^2}$  heeft uitsluitend positieve reële wortels, zoodat er  $n$  waarden  $\omega_k^2$  ( $k = 1 \dots n$ ) bestaan, waarbij aan de verg. 1) en 2) door van nul verschillende waarden  $\eta_i$  wordt voldaan. 1) Deze waarden van  $\omega_k^2$  zijn gerangschikt naar hun grootte, zóó, dat  $\omega_1^2 < \omega_2^2 < \omega_3^2 < \dots < \omega_n^2$ . Het bij de waarde  $\omega_k^2$  behorende systeem van verplaatsingen  $\eta$  wordt met  $\eta_k$  aangeduid. Meer in het bijzonder de verplaatsing van het punt  $i$  door  $\eta_{ki}$ . Een uitzonderingswaarde  $\omega_k^2$  waaronder de vergelijkingen 1) een andere oplossing toelaten dan  $\eta_i = 0$  ( $i = 1 \dots n$ ), heet een eigenwaarde van  $\omega^2$ . Een bijbehorend stelsel waarden  $\eta_{ki}$  ( $i = 1 \dots n$ ) een eigenoplossing van het stelsel 1). De bij een eigenwaarde  $\omega_k^2$  behorende eigenoplossingen verschillen slechts in een evenredigheidsfactor. In de keuze van dezen factor zijn we voorloopig vrij. Wordt hij zóó gekozen, dat:

$$\sum_{i=1}^n m_i \eta_{ki}^2 = 1 \quad (4)$$

is, dan heet de oplossing  $\eta_{ki}$  ( $i = 1 \dots n$ ) genormeerd. We zullen voortaan steeds aannemen, dat de eigenoplossingen genormeerd zijn.

**2. Orthogonaliteit van de eigenoplossingen.**

Een belangrijke eigenschap van de eigenoplossingen is hunne orthogonaliteit, welke wordt uitgedrukt door:

1) Door de rijen resp. met  $\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \dots, \sqrt{m_n}$  te vermenigvuldigen en de kolommen door resp.  $\frac{1}{\sqrt{m_1}}, \frac{1}{\sqrt{m_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{m_n}}$  te deelen, gaat verg. 3) over in een secularvergelijking. Zijn in een secularvergelijking alle coëfficiënten reëel, dan zijn ook alle wortels reëel. Zie o.a. SCHUB, Lessen over de Hoogere Algebra, Deel I blz. 489. Zijn de coëfficiënten bovendien (zooals in verg. 3)) invloedsfactoren van Maxwell, dan zijn alle wortels positief. (Zie BIEZENO, Z. f. a. M. a. M. Bd. 4 p. 93).

$$\sum_{i=1}^n m_i \eta_{ki} \eta_{li} = 0, \quad (k \neq l) \quad (5)$$

Vullen we voor  $\eta_{ki}$  de waarde in, bepaald door verg. 1), dan gaat verg. 5) over in:

$$\sum_{i=1}^n m_i \eta_{ki} \eta_{li} = \omega_k^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \alpha_{ij} \eta_{kj} \eta_{li} \quad (6)$$

Substitueeren we echter de uit verg. 1) volgende waarden van  $\eta_{li}$ , dan krijgen we:

$$\sum_{i=1}^n m_i \eta_{ki} \eta_{li} = \omega_l^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \alpha_{ij} \eta_{lj} \eta_{ki} \quad (7)$$

De uitdrukkingen onder het  $\sum \sum$  teeken in verg. 6) en 7) zijn aan elkaar gelijk, hetgeen onmiddellijk blijkt, wanneer we in het tweede lid van verg. 7)  $i$  en  $j$  met elkaar verwisselen en daarna, gebruikmakende van de stelling van MAXWELL  $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$  stellen. We vinden dus:

$$\omega_k^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \alpha_{ij} \eta_{kj} \eta_{li} = \omega_l^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \alpha_{ij} \eta_{kj} \eta_{li} \quad (8)$$

zoodat, wanneer  $\omega_k^2 \neq \omega_l^2$ :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_i m_j \alpha_{ij} \eta_{kj} \eta_{li} = 0 \quad (9)$$

Uit verg. 6) en 9) volgt daarna:

$$\sum_{i=1}^n m_i \eta_{ki} \eta_{li} = 0, \text{ voor } \omega_k^2 \neq \omega_l^2$$

**3. Convergentiebewijs van de gebruikelijke benaderingsmethode. 1)**

De algemeen gebruikelijke methode tot het bepalen van de eerste eigenwaarde is de volgende: Neem een willekeurige doorbuiging  $y_1$  van de as aan, d.w.z. neem een willekeurig stel waarden  $y_{i1}$  ( $i = 1 \dots n$ ) aan voor de doorbuigingen der massapunten.

1) Zie b.v. STODOLA, 5e druk, blz. 38r.  
 VIANELLO (voor knik) Z. d. V. d. I. 1898. p. 1436.  
 DELAPORTE. Revue de mécanique 1903 B. III. p. 517.  
 Een convergentiebewijs komt in deze werken echter niet voor.



$m_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) en laat in die punten in de richting van  $y_{it}$  krachten werken van de grootte  $m_i y_{it}$  (massa krachten bij een hoeksnelheid  $\omega = 1$ ). Noem de bij deze krachten optredende doorbuigingen  $y_{ai}$  en herhaal hetzelfde proces zóólang, totdat twee opeenvolgende krommen  $y_{n-1}$  en  $y_n$  gelijkvormig zijn. Het quotient

$$\frac{y_{n-1}}{y_n} = \omega_1^2 \dots \dots \dots 10)$$

bepaalt de eerste eigenwaarde  $\omega_1^2$  van  $\omega^2$ . We zullen de juistheid dezer uitspraak nader onderzoeken met behulp van de leer der eigenfuncties. We analyseeren daartoe  $y_1$  in de eigenoplossingen van de as, hetgeen steeds mogelijk is, daar er  $n$  doorbuigingen  $y_{ii}$  en ook  $n$  lineair van elkaar onafhankelijke eigenoplossingen  $\eta_k$  zijn. Men kan dus stellen:

$$y_{it} = a_1 \eta_{1i} + a_2 \eta_{2i} + \dots \dots \dots a_n \eta_{ni} \quad (i = 1 \dots n) \quad 11)$$

Passen we het bovengenoemde proces nu op de doorbuigingen  $y_{ii} = a_k \eta_{ki}$  ( $i = 1 \dots n$ ) — geleverd door den  $k^{en}$  term van bovenstaande ontwikkeling — toe, dan vindt men:

$$y_{ai} = \sum_{j=1}^n m_j a_k \alpha_{ij} \eta_{kj}, \quad (i = 1 \dots n) \quad 12)$$

of, indien we gebruikmaken van verg. 1):

$$y_{ai} = \frac{a_k}{\omega_k^2} \eta_{ki} \dots \dots \dots 13)$$

Daar  $y_{ii} = \sum_{k=1}^n a_k \eta_{ki}$ , levert het genoemde proces toegepast op  $y_{ii}$ :

$$y_{ai} = \frac{a_1}{\omega_1^2} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^2} \eta_{2i} + \dots \dots \dots \frac{a_n}{\omega_n^2} \eta_{ni} \quad (i = 1 \dots n) \quad 14)$$

Op de voorgeschreven wijze verder gaande, vinden we vervolgens:

$$y_{3i} = \frac{a_1}{\omega_1^4} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^4} \eta_{2i} + \dots \dots \dots \frac{a_n}{\omega_n^4} \eta_{ni} \quad (i = 1 \dots n)$$

$$y_{n-2,i} = \frac{a_1}{\omega_1^{2(n-2)}} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^{2(n-2)}} \eta_{2i} + \dots \dots \dots \frac{a_n}{\omega_n^{2(n-2)}} \eta_{ni} \quad (i = 1 \dots n)$$

$$y_{ni} = \frac{a_1}{\omega_1^{2(n-1)}} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^{2(n-1)}} \eta_{2i} + \dots \dots \dots \frac{a_n}{\omega_n^{2(n-1)}} \eta_{ni} \quad (i = 1 \dots n)$$

15)

Daar  $\omega_k^2$  met groeiende  $k$  steeds grooter wordt, zullen, wanneer  $n$  groot genoeg is, de termen met de hogere eigenoplossingen zeer klein worden ten opzichte van den eersten term.

We kunnen dan schrijven:

$$y_{n-1,i} \sim \frac{a_1}{\omega_1^{2(n-1)}} \eta_{1i} \quad (i = 1 \dots n)$$

$$y_{ni} \sim \frac{a_1}{\omega_1^{2(n-1)}} \eta_{1i} \quad (i = 1 \dots n) \quad 16)$$

zoodat inderdaad bij groote  $n$  *practisch* gelijkvormigheid is bereikt en bij  $n = \infty$  (omdat  $\frac{a_k}{a_1} \cdot \frac{\omega_1^{2(n-1)}}{\omega_k^{2(n-1)}}$  voor  $n = \infty$  naar nul convergeert) absolute gelijkvormigheid wordt verkregen.

Tevens blijkt, dat verg. 10) voor  $n = \infty$  exact is, en voor voldoende groote waarde van  $n$  een bevredigende benaderingsoplossing geeft.

#### 4. Nieuwe benaderingsmethode. <sup>1)</sup>

Het is echter mogelijk reeds uit de waarden van  $y_{ii}$  en  $y_{ai}$  ( $i = 1 \dots n$ )  $\omega_1^2$  met zeer grootę nauwkeurigheid te bepalen en wel uit:

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_{ii} y_{ai}}{\sum_{i=1}^n m_i y_{ai}^2} \quad 17)$$

<sup>1)</sup> J. J. KOCH. Bestimmung höherer kritischer Drehzahlen schnelllaufender Wellen. Verhandlungen des 2<sup>en</sup> internationalen Kongresses für technische Mechanik, Zürich, 1926.

Substitueeren we voor  $y_{1i}$  en  $y_{2i}$  de waarde uit verg. 11) en 14) in 17), dan vinden we, gebruikmakende van de orthogonaliteit van de eigenfuncties:

$$\sum_{i=1}^n m_i y_{1i} y_{2i} = \sum_{i=1}^n m_i \left\{ a_1 \eta_{1i} + a_2 \eta_{2i} + \dots + a_n \eta_{ni} \right\} \left\{ \frac{a_1}{\omega_1^2} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^2} \eta_{2i} + \dots + \frac{a_n}{\omega_n^2} \eta_{ni} \right\} =$$

$$= \frac{a_1^2}{\omega_1^2} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{1i}^2 + \frac{a_2^2}{\omega_2^2} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{2i}^2 + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^2} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{ni}^2 =$$

$$= \frac{a_1^2}{\omega_1^2} + \frac{a_2^2}{\omega_2^2} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^2} \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i y_{2i}^2 = \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \frac{a_1}{\omega_1^2} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^2} \eta_{2i} + \dots + \frac{a_n}{\omega_n^2} \eta_{ni} \right\}^2 =$$

$$= \frac{a_1^2}{\omega_1^4} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{1i}^2 + \frac{a_2^2}{\omega_2^4} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{2i}^2 + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^4} \sum_{i=1}^n m_i \eta_{ni}^2 =$$

$$= \frac{a_1^2}{\omega_1^4} + \frac{a_2^2}{\omega_2^4} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^4} \quad (19)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i y_{1i} y_{2i}}{\sum_{i=1}^n m_i y_{2i}^2} = \frac{\frac{a_1^2}{\omega_1^2} + \frac{a_2^2}{\omega_2^2} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^2}}{\frac{a_1^2}{\omega_1^4} + \frac{a_2^2}{\omega_2^4} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^4}} =$$

$$= \omega_1^2 \frac{1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2}}{1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^4}{\omega_2^4} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^4}{\omega_n^4}} \quad (20)$$

Deelen we teller en noemer van de laatste breuk uit verg. 20) op elkaar en verwaarloozen we de termen, waarin  $\frac{\omega_1}{\omega_k}$  ( $k = 2 \dots n$ ) in een zesde of hogere macht voorkomt, dan gaat het laatste lid van verg. 20) over in:

$$\omega_1^2 \left\{ 1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) + \dots + \frac{a_n^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} \right) \right\} \quad (21)$$

Verwaarloozen we bovendien de termen met de hogere eigenwaarden omdat  $\frac{\omega_1^2}{\omega_k^2}$  ( $k = 2 \dots n$ ) met  $k$  zeer sterk afneemt

(bij de prismatische staaf evenredig met  $\frac{1}{k^3}$ ), dan gaat verg. 21) weer over in:

$$\omega_1^2 \left\{ 1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) \right\} \cong \omega_1^2, \quad (22)$$

zoodat verg. 17) met een relatieve fout van ongeveer

$$\frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right)$$

bevredigd wordt. Nu zal  $\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}$  in een normaal geval ongeveer  $\frac{1}{16}$  bedragen, terwijl  $\frac{a_2^2}{a_1^2}$  bij een doelmatige keuze van  $y_1$  niet grooter dan  $\frac{1}{100}$  behoeft te zijn. De relatieve fout in  $\omega_1^2$  zal dus in het algemeen kleiner dan 0,1 0/0 zijn.

Willen we een nog grotere nauwkeurigheid bereiken, dan construeeren we bovendien de kromme  $y_3$  en bepalen de eerste eigenwaarde uit:

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_{2i} y_{3i}}{\sum_{i=1}^n m_i y_{3i}^2} \quad (23)$$

waarbij de optredende relatieve fout slechts ongeveer

$$\frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^6}{\omega_2^6} \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right)$$

bedraagt. Men vindt immers:

$$\sum_{i=1}^n m_i y_{2i} y_{3i} = \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \frac{a_1}{\omega_1^2} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^2} \eta_{2i} + \dots + \frac{a_n}{\omega_n^2} \eta_{ni} \right\} \left\{ \frac{a_1}{\omega_1^4} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^4} \eta_{2i} + \dots + \frac{a_n}{\omega_n^4} \eta_{ni} \right\} =$$

$$= \frac{a_1^2}{\omega_1^6} + \frac{a_2^2}{\omega_2^6} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^6} \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i y_{3i}^2 = \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \frac{a_1}{\omega_1^4} \eta_{1i} + \frac{a_2}{\omega_2^4} \eta_{2i} + \dots + \frac{a_n}{\omega_n^4} \eta_{ni} \right\}^2 =$$

$$= \frac{a_1^2}{\omega_1^8} + \frac{a_2^2}{\omega_2^8} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^8} \quad (25)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i y_{1i} y_{2i}}{\sum_{i=1}^n m_i y_{2i}^2} = \frac{\frac{a_1^2}{\omega_1^6} + \frac{a_2^2}{\omega_2^6} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^6}}{\frac{a_1^2}{\omega_1^8} + \frac{a_2^2}{\omega_2^8} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^8}} =$$

$$= \omega_1^2 \frac{1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^6}{\omega_2^6} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^6}{\omega_n^6}}{1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^8}{\omega_2^8} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^8}{\omega_n^8}} \cong$$

$$\cong \omega_1^2 \left\{ 1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^6}{\omega_2^6} \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) + \dots + \frac{a_n^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^6}{\omega_n^6} \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_n^2} \right) \right\} \cong$$

$$\cong \omega_1^2 \left\{ 1 + \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \frac{\omega_1^6}{\omega_2^6} \left( 1 - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \right) \right\} \cong \omega_1^2 \dots \dots \dots 26)$$

5. Het bepalen van de hogere eigenwaarden en eigenoplossingen.

Voortbouwende op het in § 4 behandelde kunnen we nu ook de hogere eigenwaarden en eigenoplossingen bepalen. Zoals uit § 3 blijkt, zal  $y_n$  bij geschikte keuze van  $y_1$  — hierdoor bepaald, dat  $a_1 \neq 0$  en  $a_2, \dots, a_n$  voldoende klein zijn — bij voldoende groote waarde van  $n$  met  $\eta_1$  gelijkvormig zijn. Door de ordinaten van deze kromme met een zoodanigen factor  $\beta$  te vermenigvuldigen, dat  $\sum_{i=1}^n m_i (\beta y_{ni})^2 = 1$  wordt, verkrijgt men dus de eerste eigenfunctie  $\eta_{1i}$  practisch nauwkeurig. Dikwijls is dit reeds het geval met  $y_2$ , n.l. dan, wanneer  $y_1$  en  $y_2$  reeds eenigermate gelijkvormigheid vertoonen.

We nemen nu een kromme  $s_1$  aan en bepalen in de ontwikkeling:

$$s_{1i} = \sum_{k=1}^n a_k \eta_{ki} \dots \dots \dots 26)$$

de coëfficiënt  $a_1$ . Dit geschiedt naar analogie van de wijze, waarop bij een functie de coëfficiënten van haar FOURIER-reeksontwikkeling worden gevonden. We vermenigvuldigen dus beide leden van verg. 26) met  $m_i \eta_{1i}$  en sommeeren daarna de beide leden over  $i$ . Men vindt dan:

$$\sum_{i=1}^n m_i s_{1i} \eta_{1i} = \sum_{i=1}^n \eta_{1i} \sum_{k=1}^n m_i a_k \eta_{ki} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_i a_k \eta_{ki} \eta_{1i} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n m_i a_k \eta_{ki} \eta_{1i} = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=1}^n m_i \eta_{ki} \eta_{1i} \dots \dots \dots 27)$$

Wegens de orthogonaliteit van  $\eta_k$  en  $\eta_1$  ( $k \neq 1$ ) wordt dit:

$$= a_1 \sum_{i=1}^n m_i \eta_{1i}^2 = a_1 \dots \dots \dots a_1 = \sum_{i=1}^n m_i \eta_{1i}^2$$

Bepalen we daarna een nieuwe functie  $\bar{s}_1$  uit:

$$\bar{s}_{1i} = s_{1i} - a_1 \eta_{1i} = \sum_{k=2}^n a_k \eta_{ki} \dots \dots \dots 28)$$

dan zal deze functie in hare ontwikkeling naar de eigenoplossingen geen term met  $\eta_{1i}$  bevatten. Op deze  $\bar{s}_1$  wordt het in § 3 aangegeven proces toegepast, waardoor een kromme  $s_2$  verkregen wordt. Door onnauwkeurigheid in de constructie of de berekening van  $a_1$  zal echter de eerste eigenfunctie voor een zeker bedrag in  $\bar{s}_1$  zijn blijven steken en dus vermenigvuldigd met den factor  $\frac{1}{\omega_1^2}$  in  $s_2$  ingeslopen zijn. Evenals uit  $s_1$  kan dit bedrag wederom uit  $s_2$  verwijderd worden, waardoor een kromme  $\bar{s}_2$  ontstaat, welke  $\eta_1$  niet bevat. We vinden uit  $\bar{s}_1$  en  $s_2$  nu als volgt met groote benadering de tweede eigenwaarde:

$$\frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{s}_{1i} s_{2i}}{\sum_{i=1}^n m_i \bar{s}_{1i}^2} = \frac{\frac{a_2^2}{\omega_2^2} + \frac{a_3^2}{\omega_3^2} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^2}}{\frac{a_2^2}{\omega_2^4} + \frac{a_3^2}{\omega_3^4} + \dots + \frac{a_n^2}{\omega_n^4}} =$$

$$= \omega_2^2 \frac{1 + \frac{a_3^2}{a_2^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2} + \dots + \frac{a_n^2}{a_2^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_n^2}}{1 + \frac{a_3^2}{a_2^2} \cdot \frac{\omega_2^4}{\omega_3^4} + \dots + \frac{a_n^2}{a_2^2} \cdot \frac{\omega_2^4}{\omega_n^4}} \cong$$

$$\cong \omega_2^2 \left\{ 1 + \frac{a_3^2}{a_2^2} \cdot \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2} \left( 1 - \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2} \right) \right\} \cong \omega_2^2 \dots \dots \dots 29)$$

De tweede eigenoplossing wordt op een factor na meestal voldoende nauwkeurig door  $\bar{s}_2$  voorgesteld, n.l. steeds dan, wanneer  $\bar{s}_1$  en  $\bar{s}_2$  blijken ongeveer gelijkvormig te zijn. Laat deze gelijkvormigheid te wenschen over, dan kunnen we achtereenvolgens  $\bar{s}_3, \bar{s}_4, \dots, \bar{s}_n$  berekenen, resp. teekenen.

Tot het bepalen van de derde eigenwaarde gaan we uit van een kromme  $u_1$  die noch de eerste noch de tweede eigenfunctie bevat, welke kromme analoog met  $\bar{x}_1$  bepaald wordt. Men neemt dus een kromme  $u_1$  aan:

$$u_{1i} = \sum_{k=1}^n a_k \eta_{ki} \dots \dots \dots 30)$$

en bepaalt:

$$a_1 = \sum_{i=1}^n m_i u_{1i} \eta_{1i}; a_2 = \sum_{i=1}^n m_i u_{1i} \eta_{2i} \dots \dots \dots 31)$$

zoodat:

$$\bar{u}_{1i} = u_{1i} - a_{1i} \eta_{1i} - a_{2i} \eta_{2i} = \sum_{k=3}^n a_k \eta_{ki} \dots \dots \dots 32)$$

$\omega_3^2$  is dan bepaald door:

$$\omega_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \bar{u}_{1i} \bar{u}_{2i}}{\sum_{i=1}^n m_i \bar{u}_{2i}^2} \dots \dots \dots 33)$$

Zoo voortgaande zijn ook, zij het met aanmerkelijk meer reken- of teekwerk, de hoogere eigenwaarden te bepalen.

6. Trillende staven.

We zullen allereerst een staaf beschouwen, waarbij de hoofdassen der dwarsdoorsneden in twee onderling loodrechte vlakken vallen. Het is dan slechts noodig de trilling in elk van deze vlakken afzonderlijk te onderzoeken.

De staaf zij voldoende ondersteund en draagster van een aantal massa's t.o.z. waarvan de massa der staaf zelve verwaarloosd mag worden. Voor de nomenclatuur zij verwezen naar § 1.

We kunnen ter bepaling van den oogenblikkelijken buigings-toestand het bewegende systeem vervangen door een stilstaand systeem, dat in de punten  $x_i$  belast is door de krachten

$$- m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2}$$

Voor de doorbuiging  $y_i$  vindt men dan:

$$y_i = - \sum_{j=1}^n m_j \alpha_{ij} \frac{d^2 y_j}{dt^2} \quad (i = 1 \dots \dots n) \dots \dots \dots 34)$$

Stellen we den eisch, dat alle massa's een naar den tijd sinus-vormige beweging uitvoeren met gelijke frequentie en phase, zoodat:

$$y_i = \eta_i \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = - \omega^2 \eta_i \sin \omega t \quad (i = 1 \dots \dots n), \dots \dots \dots 35)$$

dan gaan de verg. 34) over in:

$$\eta_i \sin \omega t = \sum_{j=1}^n m_j \omega^2 \alpha_{ij} \eta_j \sin \omega t$$

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n m_j \omega^2 \alpha_{ij} \eta_j \quad (i = 1 \dots \dots n) \dots \dots \dots 36)$$

De verg. 36) stemmen volkomen overeen met de verg. 1), zoodat voor hunne behandeling verwezen kan worden naar de §§ 1 tot en met 5. In het bijzonder blijkt, dat slechts voor bepaalde waarden van  $\omega^2$  aan den door de verg. 35) gestelden eisch kan worden voldaan, dat met elke eigenwaarde van  $\omega^2$  één trillingsvorm van de staaf (één eigenoplossing) correspondeert en dat een willekeurige trilling van de staaf als een lineaire combinatie van de  $n$  „eigen-trillingen” kan worden opgevat. De  $n$  „eigenwaarden” van  $\omega^2$  stellen het kwadraat van de trillingsgetallen der eigentrillingen voor.

Een ruimtelijke trilling van een staaf kan steeds ontbonden gedacht worden in twee onderling loodrechte vlakken, gaande door de as van de staaf en door de hoofdtraagheidsassen der dwarsdoorsnede. We hebben hier te maken met twee series van eigenwaarden en eigenoplossingen.

7. Trillende staven. (Vervolg).

Bij staven, waarvoor de hoofdtraagheidsassen van de opeenvolgende dwarsdoorsneden niet in twee platte vlakken liggen, zal het aangrijpingspunt eener kracht werkend in de richting van één der hoofdassen van de betrokken dwarsdoorsnede niet alleen een verplaatsing in de richting van de kracht ondervinden, doch ook

één verplaatsing loodrecht daarop. De trillingen in twee loodrechte vlakken zijn dus niet onafhankelijk van elkaar.

Geven we nu met de oneven  $y$ 's ( $y_1, y_3, y_5, \dots$ ) de normale verplaatsingen van de massa's in één bepaald vlak aan en met de even  $y$ 's ( $y_2, y_4, y_6, \dots$ ) de verplaatsingen van dezelfde massa's in een daarop loodrecht vlak en noemen we de eerste massa, naar het ons goedgevalt  $m_1$  of  $m_2$ , de tweede  $m_3$  of  $m_4$ , enz., dan kunnen de verg. 1) of 34) onveranderd opgeschreven worden. Hierin beteekent dan b.v.:  $\alpha_{12}$  de verplaatsing van de massa  $m_1$  in de normale richting van het tweede vlak tengevolge van een éénheidskracht — werkende op hetzelfde massapunt — in de normale richting van het eerste vlak. De verplaatsing  $\alpha_{12}$  valt dus in het eerste vlak.

Bij het bepalen van de grootte der  $\alpha$ 's denken we ons de staaf horizontaal, terwijl de even verplaatsingen in een vertikaal en de oneven verplaatsingen in een horizontaal vlak gemeten worden, resp. naar beneden en naar voren positief. Gezien van rechts naar links zij de hoofdas t.o.z. waarvan het traagheidsmoment  $I_1$  wordt genoemd ( $\bar{z}$ -as) een hoek  $\beta$  vanaf de horizontale as ( $\bar{x}$ -as) rechtsom gedraaid.

We moeten nu 8 formules afleiden, n.l. voor de grootheden  $\alpha_{2i,2j}, \alpha_{2i+1,2j}, \alpha_{2i,2j+1}$ , en  $\alpha_{2i+1,2j+1}$ , en wel voor het geval, dat  $x_{2i} < x_{2j}$  en dat  $x_{2i} > x_{2j}$ . We beperken ons tot de berekening van  $\alpha_{2i,2j}$  en  $\alpha_{2i+1,2j}$  voor het geval  $x_{2i} < x_{2j}$  en geven van de andere 6 berekeningen slechts het resultaat.

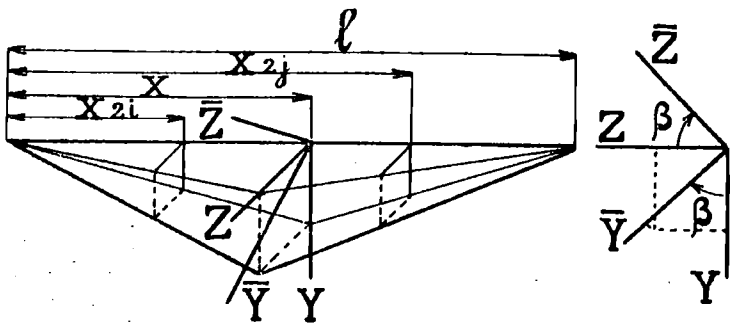


Fig. 1

Allereerst gaan we de verplaatsing na van het punt  $x_{2i}$ , wanneer de geheele staaf stijf is op een stukje  $dx$  na ter plaatse  $x$  (gemeten

vanaf het linker steunpunt. Werkt op het punt  $x_{2j}$  een verticale éénheidskracht, dan is het moment in het verticale vlak op de plaats  $x$

$$M = \frac{x(l-x_{2j})}{l} \quad (x < x_{2j})$$

$$M = \frac{(l-x)x_{2j}}{l} \quad (x > x_{2j}) \quad \dots \quad 37)$$

terwijl het moment in het horizontale vlak nul is. De momenten om de  $\bar{z}$ - en  $\bar{y}$ -as worden resp.

$$M_1 = M \cos \beta \text{ en } M_2 = M \sin \beta \quad \dots \quad 38)$$

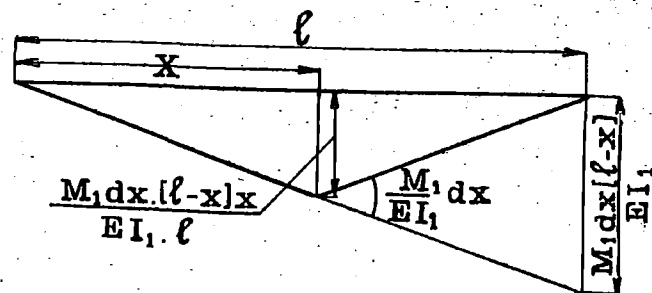


Fig. 2

Uit fig. 2 is af te lezen, dat de verplaatsingen van het punt  $x$  in de richting van de  $\bar{y}$ - en  $\bar{z}$ -as resp.

$$\frac{M_1}{EI_1} \cdot \frac{x(l-x)}{l} dx$$

en

$$-\frac{M_2}{EI_2} \cdot \frac{x(l-x)}{l} dx \quad \dots \quad 39)$$

bedragen. De ontbondenen dezer verplaatsingen in horizontale en vertikale richting zijn resp.:

$$\frac{M_1}{EI_1} \frac{x(l-x)}{l} \cos \beta dx + \frac{M_2}{EI_2} \frac{x(l-x)}{l} \sin \beta dx \text{ en}$$

$$\frac{M_1}{EI_1} \frac{x(l-x)}{l} \sin \beta dx - \frac{M_2}{EI_2} \frac{x(l-x)}{l} \cos \beta dx. \quad 40)$$

De verplaatsingen van het punt  $x_{ai}$  in verticale en horizontale richting worden resp.

$$\frac{M_1}{EI_1} \frac{x(l-x_{ai})}{l} \cos \beta dx + \frac{M_2}{EI_2} \frac{x(l-x_{ai})}{l} \sin \beta dx \quad (x < x_{ai})$$

$$\frac{M_1}{EI_1} \frac{x_{ai}(l-x)}{l} \cos \beta dx + \frac{M_2}{EI_2} \frac{x_{ai}(l-x)}{l} \sin \beta dx \quad (x > x_{ai})$$

en

$$\frac{M_1}{EI_1} \frac{x(l-x_{ai})}{l} \sin \beta dx - \frac{M_2}{EI_2} \frac{x(l-x_{ai})}{l} \cos \beta dx \quad (x < x_{ai})$$

$$\frac{M_1}{EI_1} \frac{x_{ai}(l-x)}{l} \sin \beta dx - \frac{M_2}{EI_2} \frac{x_{ai}(l-x)}{l} \cos \beta dx \quad (x > x_{ai}). \quad (41)$$

De gevraagde  $\alpha_{ai, aj}$  en  $\alpha_{ai+1, aj}$  worden verkregen door achtereenvolgens alle deelen van de staaf elastisch te veronderstellen en de daardoor verkregen verplaatsingen te sommeeren. Substitueeren we bovendien de uitdrukkingen 37) en 38) in 41), dan vinden we voor de  $\alpha$ 's:

$$\alpha_{ai, aj} = \frac{1}{l^2 E} \int_0^{x_{ai}} x^2 (l-x_{aj})(l-x_{ai}) \left\{ \frac{\cos^2 \beta}{I_1} + \frac{\sin^2 \beta}{I_2} \right\} dx +$$

$$+ \frac{1}{l^2 E} \int_{x_{ai}}^{x_{aj}} x \cdot x_{ai} (l-x_{aj})(l-x) \left\{ \frac{\cos^2 \beta}{I_1} + \frac{\sin^2 \beta}{I_2} \right\} dx +$$

$$+ \frac{1}{l^2 E} \int_{x_{aj}}^l x_{aj} \cdot x_{ai} (l-x)^2 \left\{ \frac{\cos^2 \beta}{I_1} + \frac{\sin^2 \beta}{I_2} \right\} dx \quad (42)$$

$$\alpha_{ai+1, aj} = \frac{1}{l^2 E} \int_0^{x_{ai}} x^2 (l-x_{aj})(l-x_{ai}) \left\{ \cos \beta \sin \beta \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \right\} dx +$$

$$+ \frac{1}{l^2 E} \int_{x_{ai}}^{x_{aj}} x \cdot x_{ai} (x-x_{aj})(l-x) \left\{ \cos \beta \sin \beta \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \right\} dx +$$

$$+ \frac{1}{l^2 E} \int_{x_{aj}}^l x_{aj} \cdot x_{ai} (l-x)^2 \left\{ \cos \beta \sin \beta \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \right\} dx \quad (43)$$

Schrijven we ter afkorting:

$$x^2 (l-x_{aj})(l-x_{ai}) = f_1$$

$$x \cdot x_{ai} (l-x_{aj})(l-x) = f_2$$

$$x_{aj} \cdot x_{ai} (l-x)^2 = f_3$$

$$x_{aj} \cdot x (l-x)(l-x_{ai}) = f_4 \quad (44)$$

$$\frac{\cos^2 \beta}{I_1} + \frac{\sin^2 \beta}{I_2} = g_1$$

$$\frac{\cos \beta \sin \beta}{l^2 E} \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) = g_2$$

$$\frac{\sin^2 \beta}{I_1} + \frac{\cos^2 \beta}{I_2} = g_3 \quad (45)$$

dan vinden we:

$$\alpha_{ai, aj} = \int_0^{x_{ai}} f_1 g_1 dx + \int_{x_{ai}}^{x_{aj}} f_2 g_1 dx + \int_{x_{aj}}^l f_3 g_1 dx \quad (x_{ai} < x_{aj})$$

$$\alpha_{ai, aj} = \int_0^{x_{aj}} f_1 g_1 dx + \int_{x_{aj}}^{x_{ai}} f_4 g_1 dx + \int_{x_{ai}}^l f_3 g_1 dx \quad (x_{ai} > x_{aj})$$

en op overeenkomstige wijze:

$$\alpha_{ai+1, aj} = \int_0^{x_{ai}} f_1 g_2 dx + \int_{x_{ai}}^{x_{aj}} f_2 g_2 dx + \int_{x_{aj}}^l f_3 g_2 dx \quad (x_{ai} < x_{aj})$$

$$\alpha_{ai+1, aj} = \int_0^{x_{aj}} f_1 g_2 dx + \int_{x_{aj}}^{x_{ai}} f_4 g_2 dx + \int_{x_{ai}}^l f_3 g_2 dx \quad (x_{ai} > x_{aj})$$

$$\alpha_{ai, aj+1} = \int_0^{x_{ai}} f_1 g_2 dx + \int_{x_{ai}}^{x_{aj}} f_2 g_2 dx + \int_{x_{aj}}^l f_3 g_2 dx \quad (x_{ai} < x_{aj})$$

$$\alpha_{ai, aj+1} = \int_0^{x_{aj}} f_1 g_2 dx + \int_{x_{aj}}^{x_{ai}} f_4 g_2 dx + \int_{x_{ai}}^l f_3 g_2 dx \quad (x_{ai} > x_{aj})$$

$$\alpha_{ai + 1, aj + 1} = \int_0^{x_{ai}} f_1 g_3 dx + \int_{x_{ai}}^{x_{aj}} f_2 g_3 dx + \int_{x_{aj}}^l f_3 g_3 dx \quad (x_{ai} < x_{aj})$$

$$\alpha_{ai + 1, aj + 1} = \int_0^{x_{aj}} f_1 g_3 dx + \int_{x_{aj}}^{x_{ai}} f_4 g_3 dx + \int_{x_{ai}}^l f_3 g_3 dx \quad (x_{ai} > x_{aj})$$

. . . . . 46)

8. Behandeling van continu verdeelde massa's.

In werkelijkheid zal bij trillende staven de massa dikwijls niet in eenige punten geconcentreerd zijn, doch continu over de lengte verdeeld. Ook de combinatie van beide gevallen doet zich voor. Van mathematisch standpunt ligt het voor de hand voor deze gevallen aan de in § 4 en 5 behandelde methode uitbreiding te geven door het uitvoeren van een limietovergang naar  $n = \infty$ . Deze overgang is dan ook reeds lang gemaakt. <sup>1)</sup> Wij zullen er echter hier niet op ingaan, omdat we juist omgekeerd het geval van continu verdeelde massa's willen terugbrengen tot dat met geconcentreerde massa's, teneinde het daardoor voor numerische behandeling makkelijker toegankelijk te maken.

Wij vervangen derhalve de continu verdeelde massa door een zoo gering mogelijk aantal geconcentreerde massa's die er als „gelijkwaardig” mee kunnen beschouwd worden en plaatsen daarbij ter vereenvoudiging van het cijferwerk, deze massa's op gelijke afstanden.

We verdeelen de staaf dus in een zeker aantal gelijke intervallen (4) is voor het bepalen van het eerste eigentrillingsgetal van een staaf reeds ruim voldoende) en vervangen de massa van elk interval door 3 geconcentreerde massa's, resp. in de uiteinden en het midden van het interval gelegen. Om de vervanging zoo nauwkeurig mogelijk te doen zijn, stellen we den eisch, dat voor elk interval het werkelijke en het vervangende massasysteem dezelfde massa hebben en voorts t.o.v. hunne lineaire en quadratische momenten gelijkwaardig zijn, d.w.z. dat (vergl. fig. 3)

<sup>1)</sup> Zie voor de uitvoerige behandeling b.v. R. COURANT und D. HILBERT, Methoden der mathematischen Physik.

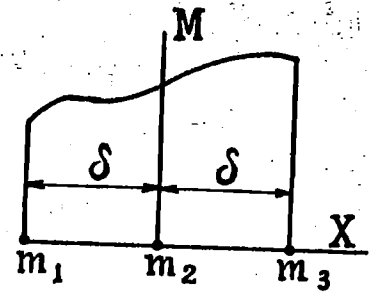


Fig. 3.

$$m_1 + m_2 + m_3 = \int_{-\delta}^{+\delta} m dx = F$$

$$-m_1 \delta + m_3 \delta = \int_{-\delta}^{+\delta} m x dx = S = \delta \bar{S}$$

$$m_1 \delta^2 + m_3 \delta^2 = \int_{-\delta}^{+\delta} m x^2 dx = I = \delta^2 \bar{I}$$

. . . . . 47)

Uit deze vergelijkingen vindt men:

$$m_1 = \frac{1}{2} (\bar{I} - \bar{S})$$

$$m_2 = F - \bar{I}$$

$$m_3 = \frac{1}{2} (\bar{I} + \bar{S})$$

. . . . . 48)

Daar bij elke intervalgrens 2 massa's samenvallen, zullen in totaal bij 4 intervallen slechts 9 massa's overblijven.

Wanneer behalve de verdeelde massa nog geconcentreerde massa's aanwezig zijn, die zich niet bevinden in de punten, waarin de verdeelde massa geconcentreerd is, zoo is het voor de numerische behandeling van het vraagstuk wenschelijk ook elk van deze massa's te vervangen door drie geconcentreerde massa's in de uiteinden en het midden van het bijbehorende interval. Men stelt in dit geval: (zie fig. 4)

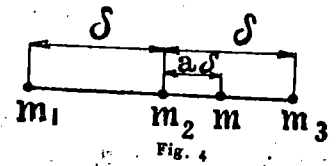


Fig. 4.

$$m_1 + m_2 + m_3 = m$$

$$-m_1 \delta + m_3 \delta = m a \delta$$

$$m_1 \delta^2 + m_3 \delta^2 = m a^2 \delta^2$$

. . . . . 49)

zoodat:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{1}{2} m (a^2 - a) \\ m_2 &= m (1 - a^2) \\ m_3 &= \frac{1}{2} m (a^2 + a) \end{aligned} \quad 50)$$

Als voorbeeld ter illustratie van de nauwkeurigheid van de hier behandelde methode diene de berekening van het eerste trillingsgetal van een prismatische staaf met constante massaverdeeling, welke aan één zijde ingeklemd is en aan de andere zijde vrij. De staaf is slechts in twee intervallen verdeeld, zoodat de massa in 5 punten ( $x = 0, \frac{1}{4}l, \frac{1}{2}l, \frac{3}{4}l$  en  $l$ ) geconcentreerd is. Wanneer de totale massa van de staaf  $m$  genoemd wordt, zijn de geconcentreerde massa's resp.  $\frac{1}{12}m, \frac{1}{3}m, \frac{1}{6}m, \frac{1}{3}m, \frac{1}{12}m$ . Nemen we voor de  $y_1$ 's aan:

0, 1, 4, 9 en 16, dan volgt hieruit voor de  $y_2$ 's:

$$\frac{m l^3}{1152 EI} \times \text{resp. } 0; 128; 449; 874 \text{ en } 1332.$$

We vinden dan voor  $\omega_1^2$ :

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 m_i y_{1i} y_{2i}}{\sum_{i=1}^5 m_i y_{2i}^2} = 12,37 \frac{EI}{m l^3} \quad 51)$$

De exacte berekening met behulp van de differentiaalvergelijking voor de staaf met gelijkmatig verdeelde massa levert:

$$\omega_1^2 = 1,8751^4 \frac{EI}{m l^3} = 12,36 \frac{EI}{m l^3} \quad 52)$$

waaruit blijkt, dat bij een onderverdeling in slechts 2 intervallen een resultaat bereikt wordt, waarbij de fout in  $\omega_1^2$  kleiner dan 0,1 % blijft.

9. Het vervangen van een elastische staaf, door een stijve staaf met elastische scharnieren.

Doordat de massa's in een aantal op den onderlingen afstand  $\delta$  gelegen punten geconcentreerd zijn, zal de momentenlijn, behorende bij de krachten  $m_1 y_{1i}$  ( $i = 1 \dots n$ ), ontleend aan de willekeurig aangenomen doorbuigingen  $y_{1i}$ , bestaan uit een aantal rechte

stukken. Om hierbij de elastische lijn ( $y_2$ ) te construeeren moet de ordinaat van deze momentenlijn door  $EI_x$  gedeeld en de aldus gevonden kromme (gereduceerde momentenlijn) tweemaal geïntegreerd worden. Wanneer  $EI_x$  een onregelmatig verloop heeft, zal deze integratie, al wordt zij graphisch uitgevoerd, zeer tijdroovend zijn. Wij vervangen daarom de werkelijke staaf door een andere bestaande uit stijve, door elastische scharnieren verbonden stukken. De elasticiteit van een staafinterval gelegen tusschen twee opeenvolgende massa's zal geconcentreerd worden in drie scharnieren, resp. aan de uiteinden en in het midden van dit interval.

De afstand van twee op elkaar volgende scharnieren is dus  $\frac{1}{2} \delta$ . We stellen nu den volgenden eisch: Wanneer we van de werkelijke en van de vervangende staaf een interval (lengte  $\delta$ ) aan één zijde inklemmen en dit zoodanig belasten, dat het moment linear (en zonder knik) verloopt, dan moeten de zakkings en de hoekverdraaiing van het andere uiteinde van de werkelijke en de vervangende staaf gelijk zijn.

a. Werkelijke staaf

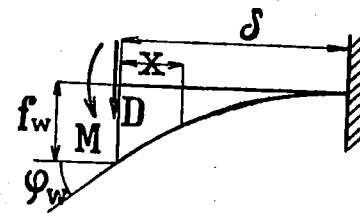


Fig. 5.

Uit fig. 5 is af te leiden:

$$M_x = M + D x \quad 53)$$

$$f_w = \int_0^\delta \frac{M_x}{EI_x} x dx = \frac{M}{EI_x} \int_0^\delta x dx + \frac{D}{EI_x} \int_0^\delta x^2 dx$$

$$\varphi_w = \int_0^\delta \frac{M_x}{EI_x} dx = \frac{M}{EI_x} \int_0^\delta dx + \frac{D}{EI_x} \int_0^\delta x dx \quad 54)$$



b) Vervangende staaf.

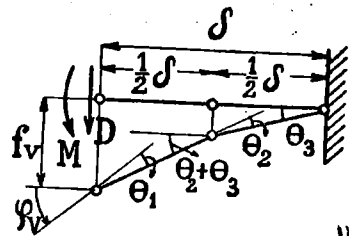


Fig. 6.

We vinden hier (zie fig. 6):

$$M_1 = M; M_2 = M + \frac{1}{2} D \delta; M_3 = M + D \delta \quad 55)$$

Noemen we de scharnierconstanten <sup>1)</sup> in de punten 1, 2 en 3 resp.  $k_1$ ,  $k_2$  en  $k_3$ , dan vinden we voor de relatieve verdraaiingshoeken  $\theta$  van de scharnieren:

$$\theta_1 = M k_1; \theta_2 = (M + \frac{1}{2} D \delta) k_2; \theta_3 = (M + D \delta) k_3, \quad 56)$$

waarna verder uit fig. 6 is af te leiden, dat

$$\begin{aligned} f_v &= \theta_3 \cdot \frac{1}{2} \delta + (\theta_2 + \theta_3) \cdot \frac{1}{2} \delta = \frac{1}{2} \theta_2 \delta + \theta_3 \delta = \\ &= M \delta (\frac{1}{2} k_2 + k_3) + D \delta^2 (\frac{1}{4} k_2 + k_3) \\ \varphi_v &= \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \\ &= M (k_1 + k_2 + k_3) + D \delta (\frac{1}{2} k_2 + k_3). \quad 57) \end{aligned}$$

De eisch dat voor elke waarde van  $M$  en  $D$ :  $f_w = f_v$  en  $\varphi_w = \varphi_v$  levert de volgende vergelijkingen ter bepaling van  $k_1$ ,  $k_2$  en  $k_3$ :

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + k_3 &= \int_0^\delta \frac{dx}{EI_x} \\ \frac{1}{2} k_2 + k_3 &= \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{x dx}{EI_x} \\ \frac{1}{4} k_2 + k_3 &= \frac{1}{\delta^2} \int_0^\delta \frac{x^2 dx}{EI_x} \quad 58) \end{aligned}$$

1) Onder scharnierconstante wordt verstaan de hoekverdraaiing van een scharnier onder invloed van een éénheidsmoment.

waaruit na uitwerking volgt:

$$\begin{aligned} k_1 &= \int_0^\delta \frac{dx}{EI_x} - \frac{3}{\delta} \int_0^\delta \frac{x dx}{EI_x} + \frac{2}{\delta^2} \int_0^\delta \frac{x^2 dx}{EI_x} \\ k_2 &= \frac{4}{\delta} \int_0^\delta \frac{x dx}{EI_x} - \frac{4}{\delta^2} \int_0^\delta \frac{x^2 dx}{EI_x} \\ k_3 &= -\frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{x dx}{EI_x} + \frac{2}{\delta^2} \int_0^\delta \frac{x^2 dx}{EI_x} \quad 59) \end{aligned}$$

10. Toepassing op het bepalen van trillingen van schepen.

Een in het water drijvend schip kan beschouwd worden als een staaf op een elastische onderlaag, welke onderlaag echter zoo slap is, dat bij de vervorming van het schip de krachten praktisch onveranderd blijven. De uiteinden van het schip blijven niet op hun plaats, zoodat de verg. 36) uit § 6 niet gebruikt kunnen worden. Denken we echter voorloopig het schip in zijn uiteinden, ter plaatse van de massa's  $o$  en  $n+1$  opgelegd, dan kan de definitie van de invloedsgetallen  $\alpha_{ij}$  onveranderd gehandhaafd blijven. In werkelijkheid krijgt een willekeurig punt nu nog een extra verplaatsing ten gevolge van de verplaatsingen van de punten  $o$  en  $n+1$ , daar de opleggingen in de uiteinden niet aanwezig zijn,

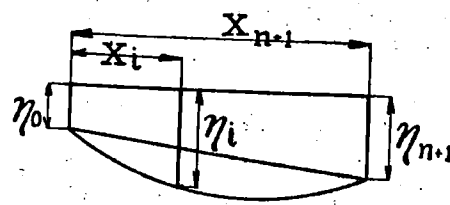


Fig. 7

zoodat de waarde die  $\eta_i$  (zie fig. 7) aanneemt wanneer het schip aan de bij de trilling optredende massakrachten is onderworpen, gelijk wordt aan:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n m_j \omega^2 \alpha_{ij} \eta_j + \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} \eta_0 + \frac{x_i}{x_{n+1}} \eta_{n+1} \quad (i=1 \dots n) \quad 60)$$

De grootheden  $\eta_0$  en  $\eta_{n+1}$  kunnen in  $\eta_1 \dots \eta_n$  worden uitgedrukt door de voorwaarde op te stellen, dat alle traagheidskrachten een evenwichtskrachtsysteem moeten vormen en dat dus:

$$\sum_{j=0}^n m_j \omega^2 (x_{n+1} - x_j) \eta_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} m_j \omega^2 x_j \eta_j = 0 \quad \dots \dots \dots 61)$$

Hieruit volgt:

$$\eta_0 = - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{m_0} \frac{x_{n+1} - x_j}{x_{n+1}} \eta_j,$$

$$\eta_{n+1} = - \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{m_{n+1}} \frac{x_j}{x_{n+1}} \eta_j \quad \dots \dots \dots 62)$$

Door deze waarden van  $\eta_0$  en  $\eta_{n+1}$  te substitueeren in de verg. 60), gaan deze over in:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n m_j \omega^2 \alpha_{ij} \eta_j - \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{m_0} \frac{x_{n+1} - x_j}{x_{n+1}} \eta_j -$$

$$- \frac{x_i}{x_{n+1}} \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{m_{n+1}} \frac{x_j}{x_{n+1}} \eta_j \quad (i = 1 \dots \dots n). \quad \dots 63)$$

of anders geschreven:

$$\eta_i = \sum_{j=1}^n m_j \eta_j \left\{ \omega^2 \alpha_{ij} - \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_{n+1} - x_j}{x_{n+1}} \cdot \frac{1}{m_0} -$$

$$- \frac{x_i}{x_{n+1}} \cdot \frac{x_j}{x_{n+1}} \cdot \frac{1}{m_{n+1}} \right\} \quad (i = 1 \dots \dots n) \quad \dots 64)$$

Het verdere verloop van de berekening der eigentrillingsgetallen en van de bijbehorende trillingsvormen geschiedt als in § I, alleen leiden de verg. 64) tot een determinant van de  $n^o$  orde,<sup>1)</sup> zoodat ook slechts  $n$  eigenoplossingen gevonden kunnen worden, terwijl er  $n + 2$  massa's zijn. Intusschen kan toch ook iedere willekeurige trillingsvorm van het systeem worden opgevat als een lineaire functie van de eigenoplossingen, omdat onder de  $n + 2$  waarden  $\eta_j$  van een dergelijken trillingsvorm er slechts  $n$  onafhankelijke voorkomen. (b.v.  $\eta_1 \dots \eta_n$ ). Voor de orthogonaliteitsbetrekking:

1) Deze determinant kan omgewerkt worden in een seculairvergelijking. Zie verder noot op blz. 4.

$$\sum_{i=0}^{n+1} m_i \eta_{ki} \eta_{li} = 0 \quad (k \neq l) \quad \dots \dots \dots 65)$$

kan naar § 2 verwezen worden.<sup>1)</sup>

### II. Benaderingsmethode voor het bepalen van de eigentrillingsgetallen van schepen.

De benaderingsberekening is analoog aan de in de §§ 4 en 5 ontwikkelde methode. We moeten er echter zorg voor dragen, dat de op het schip werkende krachten samen een evenwichtskrachtsysteem vormen. Daartoe nemen we een willekeurige uitwijkingskromme  $y_1$  aan en tellen hier een zóódanig rechtlijnig verloopende doorbuiging  $\alpha_1 + \beta_1 x_j$  bij op, dat  $y_{1j} = y_{1j} + \alpha_1 + \beta_1 x_j$  aan den gestelden eisch voldoet.

Daartoe moet:

$$\sum_{j=0}^{n+1} m_j y_{1j} = \sum_{j=0}^{n+1} m_j y_{1j} + \alpha \sum_{j=0}^{n+1} m_j + \beta \sum_{j=0}^{n+1} m_j x_j = 0$$

$$\sum_{j=0}^{n+1} m_j x_j y_{1j} = \sum_{j=0}^{n+1} m_j x_j y_{1j} + \alpha \sum_{j=0}^{n+1} m_j x_j + \beta \sum_{j=0}^{n+1} m_j x_j^2 = 0. \quad \dots 66)$$

De bepaling van  $\alpha$  en  $\beta$  uit de verg. 66) kan graphisch geschieden. Wanneer echter de massa's  $m_j$  ( $j = 0 \dots n + 1$ ) op gelijke afstanden gelegen zijn, is een numerische oplossing minder bewerkelijk.

1) Weliswaar moet een kleine wijziging in de bewijsvoering worden aangebracht, hierin bestaande dat in verg. 6) de termen

$$\omega^2 \sum_{i=0}^{n+1} m_i m_0 \alpha_{i0} \eta_{ki} \eta_{l0},$$

$$\omega^2 \sum_{i=0}^{n+1} m_i m_{n+1} \alpha_{i,n+1} \eta_{ki} \eta_{l,n+1},$$

en in verg. 7) de termen

$$\omega_k^2 \sum_{i=0}^{n+1} m_i m_0 \alpha_{i0} \eta_{li} \eta_{k0} \text{ en}$$

$$\omega_k^2 \sum_{i=0}^{n+1} m_i m_{n+1} \alpha_{i,n+1} \eta_{li} \eta_{k,n+1}$$

welke indientiek nul zijn wegens  $\alpha_{i0} = \alpha_{i,n+1} = 0$ , moeten worden bijgevoegd.

Op de kromme  $\bar{y}_1$  kan nu het in de §§ 3 en 4 beschreven proces toegepast worden, waardoor een kromme  $y_2$  ontstaat. Hieraan voegen we, even als bij  $y_1$  een lineair verloopende doorbuiging toe, zoodat de aan  $y_{2j} = y_{2j} + \alpha_2 + \beta_2 x_j$  te ontleenen krachten  $m_j y_{2j}$  ( $j = 0 \dots n + 1$ ) andermaal een evenwichtskrachtsysteem vormen. Uit  $\bar{y}_1$  en  $\bar{y}_2$  vinden we de gewone manier:

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} m_i \bar{y}_{1i} \bar{y}_{2i}}{\sum_{i=0}^{n+1} m_i \bar{y}_{1i}^2} \dots \dots \dots 67)$$

Het bepalen van de hogere eigenwaarden levert geen bijzondere moeilijkheden op, zoodat hiervoor naar § 5 verwezen kan worden.

Voor al bij de berekening van de eigentrillingsgetallen van schepen is het raadzaam zowel de elasticiteit als de massa van het schip volgens de in de §§ 8 en 9 ontwikkelde methode in eenige punten te concentreren, omdat zowel  $m$  als  $EI$  zeer grillig veranderen.

Voor de massa moet niet alleen de massa van het schip, doch ook de gereduceerde massa van het mectrillende water in rekening gebracht worden.

Indien het noodig mocht blijken, ook de vervorming van het schip tengevolge van de dwarskracht in rekening te brengen, dan kan dit zonder bezwaar geschieden, daar immers alleen de invloeds-grootheden  $\alpha_{ij}$  eenige wijziging ondergaan.

## 12. Torsietrillingen.

We beschouwen een as met  $n + 1$  gecentreerde massa's, waarvan de polaire traagheidsmomenten  $I_i$  ( $i = 0 \dots n$ ) genoemd zullen worden. De afstand van massa  $i$  tot massa  $0$  worde  $x$  genoemd, terwijl onder  $\alpha_{ij}$  de verdraaiing verstaan wordt, welke de doorsnede  $i$  ondergaat tengevolge van een eenheidskoppel werkende ter plaatse  $j$ , wanneer doorsnede  $0$  vastgehouden wordt. Noemen we de hoekverdraaiing van doorsnede  $i$   $\theta_i$ , dan levert het beginsel van D'ALEMBERT de volgende vergelijkingen:

$$\theta_i - \theta_0 = - \sum_{j=1}^n I_j \alpha_{ij} \frac{d^2 \theta_j}{dt^2} \quad (i = 1 \dots n), \dots \dots 68)$$

waarin  $\theta_0$  bepaald wordt uit de vergelijking:

$$\sum_{j=0}^n I_j \frac{d^2 \theta_j}{dt^2} = 0 \dots \dots \dots 69)$$

welke uitdrukt, dat de geheele as onder invloed van alle traagheidskrachten in evenwicht is.

Stellen we weer den eisch, dat alle massa's een naar den tijd sinusvormige beweging uitvoeren met gelijke frequentie en phase, zoodat gesteld kan worden:

$$\theta_i = \varphi_i \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 \theta_i}{dt^2} = - \omega^2 \varphi_i \sin \omega t \quad (i = 0 \dots n) \dots \dots 70)$$

dan leveren de verg. 68) en 69):

$$(\varphi_i - \varphi_0) \sin \omega t - \sum_{j=1}^n I_j \omega^2 \alpha_{ij} \varphi_j \sin \omega t \quad (i = 1 \dots n) \dots \dots 71)$$

$$- \sum_{j=0}^n I_j \omega^2 \varphi_j \sin \omega t = 0 \dots \dots \dots 72)$$

resp.:

$$\varphi_i - \varphi_0 = \sum_{j=1}^n I_j \omega^2 \alpha_{ij} \varphi_j \quad (i = 1 \dots n) \dots \dots 73)$$

$$\sum_{j=0}^n I_j \varphi_j = 0 \dots \dots \dots 74)$$

Uit verg. 74) volgt:

$$\varphi_0 = - \frac{1}{I_0} \sum_{j=1}^n I_j \varphi_j \dots \dots \dots 75)$$

zoodat de verg. 73) bij substitutie van deze uitdrukking worden:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^n I_j \left\{ \omega^2 \alpha_{ij} - \frac{1}{I_0} \right\} \varphi_j = 0 \quad (i = 1 \dots n) \dots \dots 76)$$

Het verdere verloop van de berekening wordt door § 1 weer gegeven; alleen krijgen we hier slechts  $n$  eigentrillingsvormen, terwijl er  $n + 1$  massa's zijn. Daar er echter wegens verg. 74) slechts  $n$  onafhankelijke hoekverdraaiingen zijn, kan wederom elke vervorming in de eigenoplossingen ontwikkeld worden.

De orthogonaliteitseigenschap luidt:

$$\sum_{i=0}^n I_i \varphi_{ki} \varphi_{li} = 0 \quad (k \neq l) \dots \dots \dots 77)$$

### 13. Benaderingsmethode tot het bepalen van de trillingsgetallen bij torsietrillingen.

Neem een stelsel verdraaiingshoeken  $\psi_{ii}$  ( $i = 1 \dots n$ ) aan en tel bij deze waarden een constante  $\alpha_1$  van zoodanig bedrag op, dat de nieuwe waarden  $\bar{\psi}_{ii} = \psi_{ii} + \alpha$  voldoen aan de vergelijking:

$$\sum_{i=0}^n I_i \bar{\psi}_{ii} = \sum_{i=0}^n I_i \psi_{ii} + \alpha_1 \sum_{i=0}^n I_i = 0 \dots 78)$$

Laat nu op de as momenten werken van de grootte  $I_i \bar{\psi}_{ii}$  ( $i = 0 \dots n$ ) en bepaal daarbij nieuwe verdraaiingen. Tel bij deze waarden  $\psi_{2i}$  ( $i = 0 \dots n$ ) opnieuw een constante  $\alpha_2$  op, zóó dat  $\sum_{i=0}^n I_i \bar{\psi}_{2i} = 0$  wordt en bepaal met  $\bar{\psi}_1$  en  $\bar{\psi}_2$  tenslotte  $\omega_1^2$  als volgt:

$$\omega_1^2 = \frac{\sum_{i=0}^n I_i \bar{\psi}_{1i} \cdot \bar{\psi}_{2i}}{\sum_{i=0}^n I_i \bar{\psi}_{2i}^2} \dots 79)$$

Voor de motiveering van verg. 79) kan naar § 4, voor het bepalen van de hogere eigentrillingsgetallen  $\omega_k$  naar § 5 verwezen worden.

## HOOFDSTUK II.

### Berekening van staven, waarop periodiek veranderlijke krachten inwerken.

#### 1. Het opstellen van de bewegingsvergelijkingen.

Werken op de staaf van hoofdstuk I, in de punten  $x_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) met den tijd veranderlijke krachten  $Q_i$  ( $i = 1 \dots n$ ), dan gaan de bewegingsvergelijkingen, hoofdstuk I, verg. 34) over in:

$$y_i = \sum_{j=1}^n \left( Q_j - m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} \right) \alpha_{ij} \dots 1)$$

Zijn er bovendien nog krachten, welke niet aangrijpen in de punten  $x_i$  ( $i = 1 \dots n$ ), dan vervangen we het door hen gevormde krachtstelsel door twee andere stelsels, die tezamen met het eerste identiek zijn. Het eene is zoo gekozen, dat de punten  $x_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) geen verplaatsing ondergaan, terwijl het andere slechts bestaat uit in de genoemde punten aangrijpende krachten. Het eerste krachtstelsel zal als gevolg van de eraan gestelde voorwaarde geen invloed op de beweging van de massa's uitoefenen.

#### 2. Behandeling van het vraagstuk met behulp van de leer der eigenfuncties.

We denken ons de doorbuiging  $y$  op eenig tijdstip van de beweging ontwikkeld in de in hoofdstuk I § 6 bepaalde eigendoorbuigingen van de staaf:

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_k \eta_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \dots 2)$$

waarin de coëfficiënten  $a_k$  (welke nu als functies van den tijd moeten worden opgevat) wederom bepaald zijn door:

$$a_k = \sum_{i=1}^n m_i y_i \eta_{ki} \quad (k = 1 \dots n) \dots 3)$$

Bij iedere eigendoorbuiging ( $\eta_k$ ) behoort een systeem van in de punten  $x_i$  aangrijpende krachten ( $P_{ki} = m_i \omega_k^2 \eta_{ki}$ ), dat in staat is de staaf deze doorbuigingen te geven.

Bij de  $n$  verschillende eigendoorbuigingen behooren dus ook  $n$  verschillende „eigenbelastingen”, zoodat het steeds mogelijk is een willekeurig in de punten  $x_i$  aangrijpend krachtsysteem te ontbinden in de bij de staaf behorende eigenbelastingen.

$$Q_i = \sum_{k=1}^n b_k P_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad 4)$$

De bepaling van de coëfficiënten  $b_k$  in deze ontwikkeling, is op eenvoudige manier mogelijk, indien men gebruik maakt van de betrekkingen:

$$\sum_{i=1}^n \frac{P_{ki} P_{li}}{m_i} = 0 \quad (k \neq l) \quad 5)$$

en

$$\sum_{i=1}^n \frac{P_{ki}^2}{m_i} = \omega_k^4 \sum_{i=1}^n m_i \eta_{ki}^2 = \omega_k^4 \quad 6)$$

die gemakkelijk geverifieerd worden door de waarden voor  $P_{ki}$  er in te substitueeren.

We vinden dan uit verg. 4):

$$Q_i \frac{P_{li}}{m_i} = \sum_{k=1}^n b_k \frac{P_{ki} P_{li}}{m_i} \quad (i = 1 \dots n) \quad 7)$$

waaruit door sommatie over den index  $i$  in beide leden volgt:

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i P_{li}}{m_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n b_k \frac{P_{ki} P_{li}}{m_i} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n b_k \frac{P_{ki} P_{li}}{m_i} = b_l \omega_l^4,$$

of met vervanging van den index  $l$  door  $k$ :

$$b_k = \frac{1}{\omega_k^4} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i P_{ki}}{m_i} \quad (k = 1 \dots n) \quad 8)$$

Substitutie van de verg. 2) en 4) in 1) levert nu:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k \eta_{ki} &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (b_k P_{kj} - m_j \frac{d^2 a_k}{dt^2} \eta_{kj}) \alpha_{ij} = \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n (\omega_k^2 b_k - \frac{d^2 a_k}{dt^2}) m_j \alpha_{ij} \eta_{kj} \quad (i = 1 \dots n) \quad 9) \end{aligned}$$

Met behulp van de verg. 1) hoofdstuk I kunnen de verg. 8) als volgt geschreven worden:

$$\sum_{k=1}^n a_k \eta_{ki} = \sum_{k=1}^n \left( \omega_k^2 b_k - \frac{d^2 a_k}{dt^2} \right) \frac{1}{\omega_k^2} \eta_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad 10)$$

Door elk van de vergelijkingen 10) te vermenvuldigen met  $m_i \eta_{ki}$  en deze zoo gevonden vergelijkingen te sommeeren, vinden we ten slotte, gebruik makende van de orthogonaliteit en van het genormeerd zijn van de functies  $\eta$ :

$$a_k = b_k - \frac{1}{\omega_k^2} \frac{d^2 a_k}{dt^2} \quad \text{of}$$

$$\frac{d^2 a_k}{dt^2} + \omega_k^2 a_k = \omega_k^2 b_k \quad (k = 1 \dots n) \quad 11)$$

De oplossing van deze differentiaalvergelijkingen luidt:

$$a_k = C_{k1} \cos \omega_k t + C_{k2} \sin \omega_k t + B.I. \quad (k = 1 \dots n) \quad 12)$$

Zijn de coëfficiënten  $b_k$  periodieke functies van den tijd, met dezelfde periode  $2\pi/\mu_i$ , dan kunnen ze in een reeks van Fourier ontwikkeld worden:

$$b_k = b_{k0} + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \sin(p\mu t + \varphi_{kp}) \quad (k = 1 \dots n) \quad 13)$$

Men vindt dan voor  $a_k$

$$\begin{aligned} a_k &= C_{k1} \cos \omega_k t + C_{k2} \sin \omega_k t + b_{k0} + \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_{kp}}{1 - \frac{p^2 \mu^2}{\omega_k^2}} \sin(p\mu t + \varphi_{kp}) \quad (k = 1 \dots n) \quad 14) \end{aligned}$$

De coëfficiënten  $C_{k1}$  en  $C_{k2}$  kunnen bepaald worden uit de beginvoorwaarden. Bevindt het systeem zich ten tijde  $t=0$  in den middenstand en in rust, dan luiden deze beginvoorwaarden:

$$0 = C_{k1} + b_{k0} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_{kp}}{1 - \frac{p^2 \mu^2}{\omega_k^2}} \sin \varphi_{kp}$$

$$0 = \omega_k C_{k2} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p \mu b_{kp}}{1 - \frac{p^2 \mu^2}{\omega_k^2}} \cos \varphi_{kp} \quad (k = 1 \dots n) \quad 15)$$

Is het systeem ten tijde  $t=0$  niet in rust en niet in den

middenstand, dan moeten de uitwijkingen  $y_0$  en de snelheden  $y_0'$  eerst in de eigenfuncties ontwikkeld worden.

$$y_{0i} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \eta_{ki}$$

$$y_{0i}' = \sum_{k=1}^n \beta_k \eta_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad 16)$$

waarin

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^n m_i y_{0i} \eta_{ki}$$

en

$$\beta_k = \sum_{i=1}^n m_i y_{0i}' \eta_{ki} \quad (k = 1 \dots n) \quad 17)$$

De eerste leden van de verg. 15) moeten dan vervangen worden door  $\alpha_k$  en  $\beta_k$ .

### 3. Benaderingsmethode.

Beschouwen we het geval, dat demping aanwezig is, en dat de wisselende krachten reeds geruimen tijd op het systeem hebben ingewerkt, dan is de beweging onafhankelijk geworden van de beginvoorwaarden, zoodat ze alleen beheerscht wordt door de bijzondere integraal van de dan geldende differentiaalvergelijking. Is de demping bovendien zeer klein, dan kan met groote benadering voor deze bijzondere integraal de uitdrukking

$$a_k = b_{k0} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_{kp}}{1 - \frac{p^2 \mu^2}{\omega_k^2}} \sin(p\mu t + \varphi_{kp}) \quad (k = 1 \dots n) \quad 18)$$

geschreven worden.

Voor de totale uitwijking vinden we dus:

$$y_i = \sum_{k=1}^n a_k \eta_{ki} = \sum_{k=1}^n \left\{ b_{k0} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{b_{kp}}{1 - \frac{p^2 \mu^2}{\omega_k^2}} \sin(p\mu t + \varphi_{kp}) \right\} \eta_{ki} =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left\{ b_{k0} + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \sin(p\mu t + \varphi_{kp}) \right\} \eta_{ki} +$$

$$+ \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \frac{p^2 \mu^2}{\omega_k^2} \frac{1}{1 - \frac{p^2 \mu^2}{\omega_k^2}} \sin(p\mu t + \varphi_{kp}) \eta_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad 19)$$

Zouden de krachten, die op het oogenblik aanwezig zijn onbeding langzaam op de staaf worden opgebracht, dan zouden statische doorbuigingen ontstaan ter grootte:

$$y_i \text{ stat.} = \sum_{k=1}^n \left\{ b_{k0} + \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \sin(p\mu t + \varphi_{kp}) \right\} \eta_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad 20)$$

Substitutie van 20) in 19) levert:

$$y_i = y_i \text{ stat.} + \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} \frac{\frac{p^2 \mu^2}{\omega_k^2}}{1 - \frac{p^2 \mu^2}{\omega_k^2}} \sin(p\mu t + \varphi_{kp}) \eta_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad 21)$$

In het algemeen zal  $b_{kp}$  voor grootere waarden van  $p$  zeer klein worden, zoodat de bijbehorende termen in de verg. 21) verwaarloosd kunnen worden. Bovendien kunnen alle termen met groote  $k$  verwaarloosd worden, omdat  $\omega_k^2$  voor groote waarden van  $k$  zeer groot wordt. Om de dynamische doorbuiging  $y_i$  te vinden behoeven we dus bij de statische doorbuiging  $y_i \text{ stat.}$  slechts enkele termen van de dubbelreeks uit de verg. 21) op te tellen.

Deze benadering is niet toelaatbaar, indien we in de buurt van een resonantiepoint komen ( $\omega_k \approx p\mu$ ;  $p = 1 \dots \infty$ ). In dat geval zal in de verg. 18) in plaats van de betreffende term de exacte waarde, volgende uit de differentiaalvergelijking geschreven moeten worden.

HOOFDSTUK III.

Knik van staven.

1. Het opstellen van de vergelijkingen.

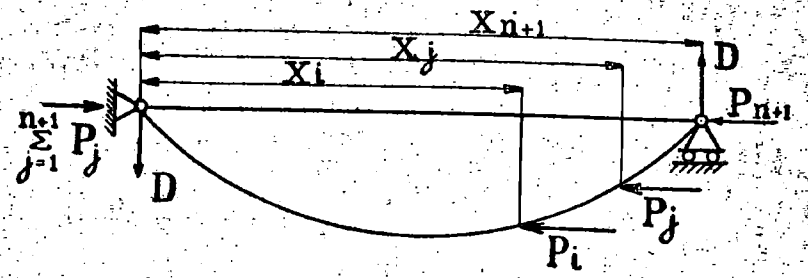


Fig. 8.

Als eerste voorbeeld van een op knik belaste staaf zal het in fig. 8 aangegeven belastingsgeval beschouwd worden. De krachten  $P$  werken alle in de richting van de aanvankelijk rechte staaf. Zij zijn voorloopig onbekend, doch staan in constante verhouding tot de krachten van een gegeven krachtsysteem  $Q_i$ , zoodat:

$$P_i = \lambda Q_i \quad (i = 1 \dots n + 1) \dots \dots \dots 1)$$

Bij niet te groote krachten (voldoend kleine waarde van  $\lambda$ ) kan de staaf slechts bij een rechte staafas in evenwicht zijn. Er zijn evenwel waarden van  $\lambda$  aan te wijzen (de „eigenwaarden” van het vraagstuk) waarbij ook evenwicht bij een uitgebogen staafas mogelijk is. Het is de bedoeling deze  $\lambda$ -waarden te bepalen en wel in de eerste plaats voor het geval dat de staaf uit een (eindig) aantal stijve stukken bestaat, door elastische scharnieren aan elkaar verbonden.

Aangenomen wordt dat de uitwendige krachten slechts in de scharnierpunten aangrijpen. Een kracht, welke aangrijpingspunt  $x$  tusschen twee scharnieren  $x_i$  en  $x_{i+1}$  inligt, kan worden vervangen door twee in  $x_i$  en  $x_{i+1}$  aangrijpende componenten, die zich omgekeerd verhouden als de segmenten  $x - x_i$  en  $x_{i+1} - x$ .

De elasticiteit van de scharnieren (de relatieve verdraaiing der betrokken scharnierelementen per eenheid van moment) wordt  $k$  genoemd. Voor het vervangen van een continu elastische staaf door een staaf bestaande uit stijve segmenten, verbonden door elastische scharnieren kan naar hoofdstuk 1 § 9 verwezen worden.

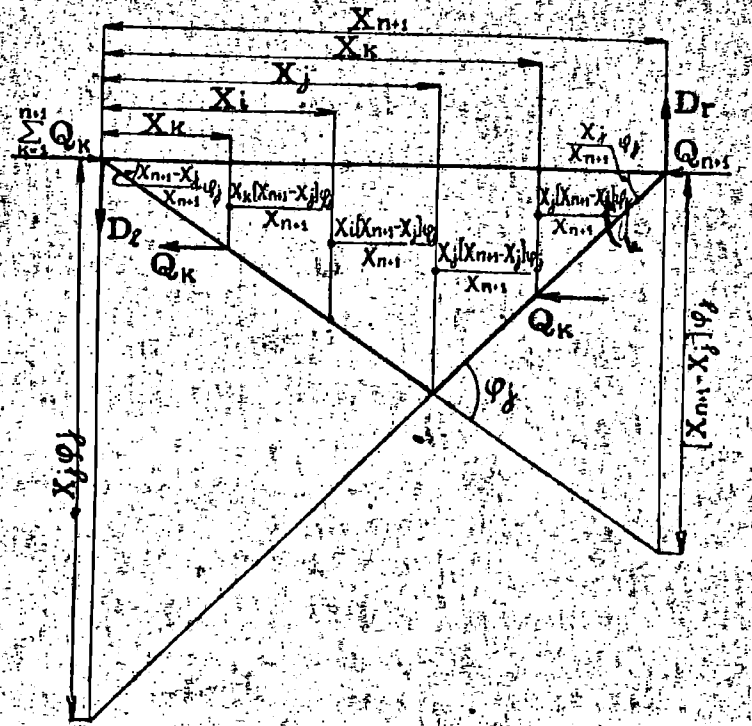


Fig. 9.

Worden alle scharnieren behalve het  $j$ ' vastgezet en wordt in dit scharnier een hoekverdraaiing  $\psi_j$  kunstmatig opgewekt, dan ontstaat ter plaatse  $x_i$  onder invloed van de krachten  $Q_1 \dots Q_{n+1}$ .

en de erdoor opgewekte reactie  $D_r$  (zie fig. 9) een moment  $M_i$ . Het „specifieke buigmoment”, dat is de grootte  $\frac{M_i}{\varphi_j}$  zullen we het invloedsgetal  $\alpha_{ij}$  noemen. Uit fig. 9 is de grootte van  $\alpha_{ij}$  gemakkelijk te berekenen. We vinden achtereenvolgens:

$$D_r = \sum_{k=i}^j \frac{x_k (x_{n+1} - x_j)}{x_{n+1}^2} \varphi_j Q_k + \sum_{k=j+1}^{n+1} \frac{x_j (x_{n+1} - x_k)}{x_{n+1}^2} \varphi_j Q_k \quad 2)$$

$$M_i = \varphi_j \alpha_{ij} = D_r (x_{n+1} - x_i) - \sum_{k=i+1}^j \left\{ \frac{x_k (x_{n+1} - x_j)}{x_{n+1}} - \frac{x_i (x_{n+1} - x_j)}{x_{n+1}} \right\} \varphi_j Q_k - \sum_{k=j+1}^{n+1} \left\{ \frac{x_j (x_{n+1} - x_k)}{x_{n+1}} - \frac{x_i (x_{n+1} - x_j)}{x_{n+1}} \right\} \varphi_j Q_k \quad 3)$$

$$\alpha_{ij} = \sum_{k=i}^j \frac{x_k (x_{n+1} - x_j) (x_{n+1} - x_i)}{x_{n+1}^2} Q_k + \sum_{k=i+1}^j \frac{x_i (x_{n+1} - x_j) (x_{n+1} - x_k)}{x_{n+1}^2} Q_k + \sum_{k=j+1}^{n+1} \frac{x_i (x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_j + x_kx_j)}{x_{n+1}^2} Q_k (x_i < x_j) \quad 4$$

Voor twee punten  $p$  en  $q$ , waarbij  $p$  rechts van  $q$  ligt, vindt men op overeenkomstige wijze:

$$\alpha_{pq} = \sum_{k=i}^q \frac{x_k (x_{n+1} - x_q) (x_{n+1} - x_p)}{x_{n+1}^2} Q_k + \sum_{k=q+1}^p \frac{x_q (x_{n+1} - x_p) (x_{n+1} - x_k)}{x_{n+1}^2} Q_k + \sum_{k=p+1}^{n+1} \frac{x_q (x_{n+1}^2 - 2x_{n+1}x_p + x_kx_p)}{x_{n+1}^2} Q_k (x_p > x_q) \quad 5)$$

Vervangt men in deze laatste formule  $p$  door  $j$  en  $q$  door  $i$ , dan blijkt, dat  $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$ .

De vergelijking welke het knikvraagstuk beheerscht kan nu in de hierboven gedefinieerde grootheden opgeschreven worden.

Immers, wanneer onder inwerking van een krachtsysteem  $\lambda Q_1 \dots \lambda Q_{n+1}$  een evenwichtsstand mogelijk is, waarbij in de scharnieren  $1 \dots n$  hoekverdraaiingen  $\varphi_1 \dots \varphi_n$  optreden, dan kan het moment  $M_i$  ter plaatse  $i$  eenzijdig uit de plaatselijke hoekverdraaiing  $\varphi_i$  en den elasticiteitsfactor  $k_i$  van het scharnier ( $M_i = \frac{\varphi_i}{k_i}$ ) bepaald worden, anderzijds met behulp van de invloedsgetallen  $\alpha_{ij}$ . Een hoekverdraaiing  $\varphi_j$  ter plaatse  $j$  veroorzaakt n.l. bij overigens stijf gedachte staaf ter plaatse  $i$  een moment  $\alpha_{ij} \varphi_j$  wanneer de uitwendige krachten  $Q_1 \dots Q_{n+1}$  groot zijn en dus een moment  $\lambda \alpha_{ij} \varphi_j$  wanneer deze krachten de  $\lambda$ -voudige waarde hebben. Totaal treedt dus ter plaatse  $i$  een moment  $\lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_j$  op, zoodat

$$\frac{\varphi_i}{k_i} = \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_j \quad (i = 1 \dots n) \quad 6)$$

De verg. 6) laten alleen dan een voor de  $\varphi$ 's van nul verschillende oplossing toe wanneer

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \frac{1}{k_1 \lambda} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \frac{1}{k_2 \lambda} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \frac{1}{k_n \lambda} \end{vmatrix} = 0 \quad 7)$$

zoodat  $n$  reële waarden van  $\lambda$  gevonden worden. 1) Bij elk dezer  $\lambda$ -waarden behoort een stel  $\varphi$ -waarden (of één z.g. eigenfunctie). In totaal zijn er dus ook  $n$  eigenfuncties. Daar de vormverandering van de staaf bepaald wordt door  $n$   $\varphi$ -waarden, kan elke willekeurige staafvorm dus zonder rest in de eigenfuncties ontwikkeld worden.

## 2. Orthogonaliteitsbewijs.

De orthogonaliteitseigenschap van de eigenfuncties luidt

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = 0 \quad (k \neq l) \quad 8)$$

1) Zie noot op blz. 4.



Uit de verg. 6) volgt.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = \sum_{i=1}^n \varphi_{ki} \lambda_l \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_{lj} = \lambda_l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_{ki} \varphi_{lj} \quad 9)$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = \sum_{i=1}^n \varphi_{li} \lambda_k \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_{kj} = \lambda_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_{kj} \varphi_{li} \quad 10)$$

De uitdrukkingen onder het  $\sum \sum$  teken in verg. 9) en 10) zijn aan elkaar gelijk hetgeen blijkt wanneer in één van beide  $i$  en  $j$  verwisseld worden en daarna  $\alpha_{ji}$  door  $\alpha_{ij}$  wordt vervangen. Wanneer  $\lambda_l \neq \lambda_k$ , dus wanneer  $l \neq k$  is, moet derhalve

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = 0$$

zijn. De eigenfuncties zijn ook nu weer slechts tot op een constanten factor bepaald. Wordt deze factor zóó gekozen, dat

$$\sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{ki}^2}{k_i} = 1$$

is, dan heeten de functies genormeerd.

### 3. Benaderingsmethode tot het bepalen van de eerste eigenwaarden.

Behalve de in § 1 beschreven exacte methode tot het berekenen van de eigenwaarden en eigenfuncties, welke voor een groot aantal scharnieren zeer bewerkelijk is, zal hier een benaderingsmethode gegeven worden, waarmee de eerste eigenwaarden en eigenfuncties met zeer voldoende nauwkeurigheid op eenvoudige wijze bepaald kunnen worden.

Neem een stel relatieve hoekverdraaiingen ( $\theta_i$ ) in de scharnieren aan, construeer hierbij de elastische lijn, bepaal daarbij de momenten tengevolge van de gegeven uitwendige belasting en bereken bij deze momenten de nieuwe hoekverdraaiingen ( $\theta_2$ ), door ze met de bijbehorende  $k$ 's te vermenigvuldigen. De eerste eigenwaarde volgt dan bij benadering uit:

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\theta_{1i} \theta_{2i}}{k_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{\theta_{2i}^2}{k_i}} \quad 11)$$

Om dit te bewijzen ontwikkelen we  $\theta_i$  in de eigenfuncties.

$$\theta_{1i} = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad 12)$$

Wordt hierop het bovengenoemde proces toegepast, dan vinden we voor  $\theta_2$ :

$$\theta_{2i} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_{ki} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad 13)$$

Substitutie van 12) en 13) in 11) levert:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\theta_{1i} \theta_{2i}}{k_i} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{ki} \right\} \cdot \left\{ \sum_{h=1}^n \frac{a_h}{\lambda_h} \varphi_{hi} \right\} \\ \sum_{i=1}^n \frac{\theta_{2i}^2}{k_i} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda_k} \varphi_{ki} \right\}^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{\lambda_k} \cdot \frac{1 + \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_k} \frac{a_k^2}{a_1^2}}{1 + \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_1^2}{\lambda_k^2} \frac{a_k^2}{a_1^2}} \sim \lambda_1 \left( 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \sim \lambda_1 \quad 14) \end{aligned}$$

De relatieve fout bedraagt ongeveer  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{a_2^2}{a_1^2}$ , welke fout meestal zeer gering is.

Berekenen we b.v. volgens de aangegeven methode de knikkracht van een aan beide zijden scharnierend bevestigde prismatische staaf, alléén belast door krachten aan de uiteinden, dan vinden we, wanneer we 7 elastische scharnieren aanbrengen (volgens hoofdstuk 1 § 9 verdeling in 4 intervallen) voor de knikkracht  $\frac{9,834 EI}{l^2}$ , zoodat dit bedrag slechts 0,37% verschilt van de exacte waarde  $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$ .

Voor het bepalen van de hogere eigenwaarden en eigenfuncties kan verwezen worden naar hoofdstuk 1 § 5.

Ter illustratie volgt hier een voorbeeld van een staaf, belast door één samendrukkende kracht aan het einde en één even groote en gelijkgerichte kracht in het midden. De staaf wordt in 8 intervallen verdeeld, zoodat 15 scharnieren ontstaan. De krachten  $Q_8$  en  $Q_{16}$  zijn dus 0, terwijl de andere nul zijn. In tabel I zijn de resultaten van de verschillende berekeningen opgenomen.



éene of in het andere der door genoemde assen bepaalde vlakken uit. 1)

Liggen de hoofdasen van de verschillende dwarsdoorsneden niet in twee platte vlakken, dan moeten we, indien de staaf evenals in § 1 weer door met elastische scharnieren aan elkaar verbonden stijve stukken vervangen wordt, aan ieder scharnier twee draaiingshoeken toekennen om de plaatselijke hoofdasen. Ter onderscheiding zal de draaiing om de eerste hoofdas met één streep en die om de tweede hoofdas met twee strepen aangegeven worden. Zoo beteekent  $\overline{\varphi}_j \alpha_{i\overline{j}}$  het moment om de eerste hoofdas in het punt  $x_i$  ten gevolge van alle  $Q$ -krachten, wanneer het scharnier ter plaatse  $x_j$  om de tweede hoofdas een verdraaiing  $\overline{\varphi}_j$  krijgt. Noemen we  $\beta_i$  den hoek, dien de eerste hoofdas van scharnier  $i$  maakt met een gegeven lijn loodrecht op de staafas en kennen we aan  $\alpha_{ij}$  de waarde toe, volgende uit de verg. 4) en 5), dan vinden we voor de nieuwe invloedsgröotheden:

$$\begin{aligned} \alpha_{i\overline{j}} &= \alpha_{ij} \cos(\beta_j - \beta_i) \\ \alpha_{\overline{i}j} &= \alpha_{ij} \cos(\beta_j - \beta_i) \\ \alpha_{i\overline{j}} &= \alpha_{ij} \sin(\beta_j - \beta_i) \\ \alpha_{\overline{i}j} &= -\alpha_{ij} \sin(\beta_j - \beta_i). \end{aligned} \quad (16)$$

Met deze invloedsgröotheden kunnen de verg. 6) onveranderd opgeschreven worden, alleen is het aantal vergelijkingen en onbekenden twee maal zoo groot als het aantal (dubbel-) scharnieren. Elke uitwijkingsvorm wordt nu gegeven door  $2n$  scharnierverdraaiingen. Er bestaan echter ook  $2n$  eigenfuncties, zoodat het steeds mogelijk blijft elke willekeurige (ruimte-) kromme in de eigenfuncties te ontwikkelen.

### 5. Andere statisch bepaalde knikgevallen.

De in de vorige paragrafen ontwikkelde methode blijft zooals vanzelf spreekt ook nog geldig voor andere statisch bepaalde knikgevallen, b.v. voor een staaf, die aan de ééne zijde ingeklemd en aan de andere vrij is. Alleen de  $\alpha$ 's nemen een andere waarde aan.

1) In het voorgaande hebben we ons slechts met één van deze vlakken bezig gehouden.

Als voorbeeld volge hier de berekening van een ter plaatse  $x_1 = 0$  ingeklemd en overigens vrije staaf, belast door een over de geheele lengte gelijkmatig verdeelde axiale belasting 1). De staaf is hiertoe in vier intervallen verdeeld, zoodat de vervangende staaf bestaat uit 8 stijve stukken verbonden met 8 elastische

TABEL II.

$i$	$8Q$	$100\beta_1$	$\frac{800}{l} \gamma_1$	$\frac{6400}{l^2 Q} M_2$	$\frac{24 EI}{l} k$	$\frac{24.6400 EI}{l^2 Q} \theta_1$
1	0,5	1	0	203,5	1	203,5
2	1	4	1	196	4	786
3	1	2	6	163,5	2	327
4	1	2	13	125	4	500
5	1	1	22	84,5	2	169
6	1	1	32	49,5	4	198
7	1	0	43	22	2	44
8	1	0	54	5,5	4	22
9	0,5		65			

scharnieren (zie tabel II, voor de beteekenis van de hoofden zij verwezen naar § 3). We vinden voor de eerste knikkraft:

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{i=1}^8 \frac{\theta_{1i} \theta_{0i}}{k_i}}{\sum_{i=1}^8 \frac{\theta_{0i}^2}{k_i}} = \frac{24.64 EI}{l^2 Q} \frac{1700}{336600} = 7,76 \frac{EI}{l^2 Q} \quad (17)$$

GREENHILL, MANTEL en BIEZENO vinden resp. 7,91, 8 en 7,80  $\frac{EI}{l^2 Q}$ , zoodat het verschil van de hier gevonden waarde met genoemde schrijvers resp. 2%, 3% en 0,5% bedraagt.

1) Zie voor de exacte behandeling van dit knikgeval:  
 A. G. GREENHILL, Cambridge Phil. Soc. Proc., vol. 4 (1881)  
 C. CHREE, Cambridge Phil. Soc. Proc., vol. 7 (1892)  
 W. MANTEL, Een bijzonder geval van knik, „De Ingenieur” 1905 blz. 465  
 C. B. BIEZENO, Over eenige bijzondere knikgevallen, „De Ingenieur” 1921, No. 27.

## 6. Statisch onbepaalde knikgevallen.

Is in tegenstelling met het in vorige paragrafen behandelde, de staaf uitwendig statisch onbepaald, b.v. aan de ééne zijde ingeklemd en aan de andere door een rolplegging ondersteund, dan treedt een wijziging in de berekening op.

We maken eerst van de inklemming een scharnier en laten daarna een zóó groot moment  $M_0$  aangrijpen, dat de staaf plaatselijk weer in haar oorspronkelijken stand teruggebracht wordt. In plaats van de verg. 6) moeten we nu schrijven:

$$\frac{\varphi_i}{k_i} = M_i + \lambda \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_j \quad (i = 1, \dots, n) \quad 18)$$

waarin

$$M_i = \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} M_0 \quad 19)$$

$M_0$  wordt vervolgens bepaald uit de voorwaarde, dat de verdraaiing van scharnier 0 evenredig is met  $M_0$

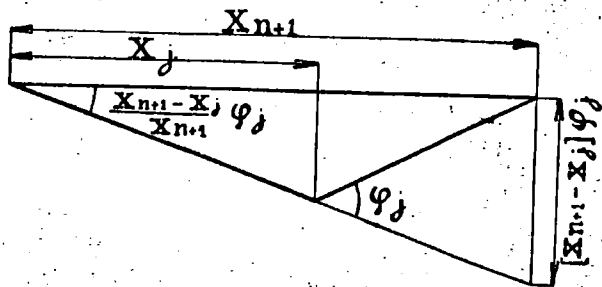


Fig. 10.

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j \frac{x_{n+1} - x_j}{x_{n+1}} = \varphi_0 = k_0 M_0 \quad (\text{zie fig. 10}). \quad 20)$$

De vergelijkingen 18), 19) en 20) vormen een stelsel van  $n + 1$  homogene lineaire vergelijkingen met  $n + 1$  onbekenden, n.l.  $n$   $\varphi$ -waarden en  $M_0$ . Van nul verschillende oplossingen voor  $\varphi$  zijn slechts mogelijk, wanneer de determinant van de  $(n + 1)^\circ$  orde, bepaald door de coëfficiënten nul is:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \frac{1}{k_1 \lambda} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} & \frac{x_{n+1} - x_1}{\lambda x_{n+1}} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \frac{1}{k_2 \lambda} & \dots & \alpha_{2n} & \frac{x_{n+1} - x_2}{\lambda x_{n+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \frac{1}{k_n \lambda} & \frac{x_{n+1} - x_n}{\lambda x_{n+1}} \\ \frac{x_{n+1} - x_1}{x_{n+1}} & \frac{x_{n+1} - x_2}{x_{n+1}} & \dots & \frac{x_{n+1} - x_n}{x_{n+1}} & k_0 \end{vmatrix} = 0 \quad 21)$$

De uitwerking van dezen determinant van de  $(n + 1)^\circ$  orde levert een  $n^\circ$  machtsvergelijking in  $\lambda$ , zoodat ook hier  $n$  verschillende eigenwaarden met de daarbij behorende eigenfuncties gevonden kunnen worden. <sup>1)</sup>

## 7. Orthogonaliteitsbewijs.

Het orthogonaliteitsbewijs voor de  $\varphi$ -functies verloopt analoog aan het in § 2 behandelde

$$\sum_{i=0}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = M_{i0} \sum_{i=0}^n \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} \varphi_{ki} + \sum_{i=0}^n \varphi_{ki} \lambda_i \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \varphi_j \quad 22)$$

De eerste term van het tweede lid van verg. 22) is, zóóals volgt uit verg. 20) gelijk nul. Aan den tweeden term kunnen we, zonder haar waarde te veranderen den term  $\lambda_i \alpha_{i0} \varphi_{ki} \varphi_{i0}$  toevoegen, daar  $\alpha_{i0} = 0$ . Verg. 22) gaat hierdoor over in:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = \lambda_i \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \varphi_{ki} \varphi_{lj} \quad 23)$$

Evenzoo vinden we:

$$\sum_{i=0}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = \lambda_k \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} \varphi_{li} \varphi_{kj} \quad 24)$$

waaruit evenals in § 2 volgt

$$\sum_{i=0}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = 0 \quad (k \neq l) \quad 25)$$

<sup>1)</sup> Zie noot op blz. 4.

### 8. Benaderingsmethode.

De benaderingsmethode voor het statisch onbepaalde knikgeval kan uitgevoerd worden op dezelfde wijze als in § 3.

We nemen weer een stel hoekverdraaiingen  $\theta_{zi}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) aan, construeeren daarbij de elastische lijn ( $y_1$ ) en bepalen de momenten ( $M_2$ ) tengevolge van de gegeven uitwendige krachten.

Daar de constructie statisch onbepaald is, zullen we deze momenten splitsen in twee deelen:

1e. de momenten, die zouden ontstaan, wanneer de linker-ondersteuning zuiver scharnierend was, ( $\bar{M}_2$ ), en

2e. de momenten tengevolge van het moment in de linkerinklemming ( $\bar{M}_2$ ).

Voor beide momenten worden de hoekverdraaiingen en de elastische lijn bepaald. De tweede elastische lijn moet een zoodanig aantal malen ( $\beta$ ) op de eerste gesuperponeerd worden, dat de verdraaiing van het linkerscharnier met het daar aanwezige moment correspondeert. De eerste eigenwaarde wordt weer gevonden uit:

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{\theta_{zi} \theta_{zi}}{k_i}}{\sum_{i=0}^n \frac{\theta_{zi}^2}{k_i}} \dots \dots \dots 26)$$

terwijl voor het bepalen van de hogere eigenwaarden naar het 2e deel van § 3 kan verwezen worden.

Als voorbeeld volge de berekening van de eerste knikkracht van een links ingeklemde, rechts scharnierend ondersteunde staaf, belast door krachten aan de uiteinden ( $Q_0 = Q$ ), met dezelfde scharnierverdeeling als bij het voorbeeld in § 5. (Zie tabel III).

Voor de eerste eigenwaarde vinden we:

$$\lambda_1 = \frac{24.8 EI}{l^2} \cdot \frac{176500}{1690000} = 20,07 \frac{EI}{l^2 Q} \dots \dots \dots 27)$$

Deze waarde wijkt slechts 0,6% af van de exacte waarde:

$$20,19 \frac{EI}{l^2 Q}$$

TABEL III.

$i$	$100\beta$	$\frac{800}{l} y_1$	$\frac{800}{l^2 Q} M_2$	$\frac{24 EI}{l} k$	$\frac{24.800 EI}{l^2 Q} k M_2$	$\frac{8.24.800 EI}{l^3 Q} j_2$	$\frac{8 \bar{M}_2}{\bar{M}_{20}}$	$\frac{8.24 EI}{l} k \frac{\bar{M}_2}{\bar{M}_{20}}$	$\frac{64.24 EI}{l^2 \bar{M}_{20}} j_2$	$\frac{800}{l^2 Q} M_2$	$\frac{24.800 EI}{l^2 Q} \theta_2$
0	-77	0	0	1	0	0	8	8	0	-410	-410
1	-86	77	308	4	308	0	7	28	8	-281,75	-1127
2	-2	240	480	2	480	308	6	12	44	-67,5	-135
3	58	405	1620	4	1620	1096	5	20	92	148,75	-595
4	96	512	1024	2	1024	3504	4	8	160	307	-614
5	107	525	2100	4	2100	6936	3	12	236	371,25	1485
6	96	432	864	2	864	12468	2	4	324	329,5	659
7	58	245	980	4	980	18864	1	4	416	193,75	775
8						26240			512		

## HOOFDSTUK IV.

### Berekening van staven, belast met samendrukkende en doorbuigende krachten.

#### 1. Het opstellen van de vergelijkingen.

We zullen voor de staaf, die door samendrukkende en doorbuigende krachten tezamen belast wordt alleen het statisch bepaalde geval behandelen, daar de berekening van uitwendig statisch onbepaalde staven in beginsel geen nieuwe moeilijkheden meebrengt. De nomenclatuur komt met die van hoofdstuk 3 overeen; de staaf wordt opnieuw door scharnierend met elkaar verbonden stijve stukken vervangen, de krachten worden opnieuw op de in hoofdstuk 3 § 1 aangegeven wijze over de scharnieren verdeeld.

Noemen we de momenten, voor zoover ze veroorzaakt worden door de doorbuigende krachten alléén:  $M_i$  ( $i = 1 \dots n$ ), dan luiden de vervormingsvergelijkingen, wanneer de hoekverdraaiingen in de punten  $1 \dots n$  met  $\psi_1 \dots \psi_n$  worden aangeduid:

$$\psi_i = k_i \left\{ M_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \psi_j \right\} \quad (i = 1 \dots n) \quad \text{I}$$

Zij vormen een stelsel van  $n$  niet homogene vergelijkingen met  $n$  onbekenden.

#### 2. Behandeling van het vraagstuk met behulp van de leer der eigenfuncties.

Zijn de eigenoplossingen ( $\varphi$ ) van de staaf behoorend bij de gegeven samendrukkende belasting bekend, dan kunnen we de door de momenten  $M_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) alléén veroorzaakte hoekverdraaiingen  $\theta_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) in de eigenoplossingen ontwikkelen. Noemen we de momenten, die nodig zijn, om de staaf de hoekverdraaiingen te doen verkrijgen, behoorende bij een genormeerde eigenoplossing, eigenmomenten ( $\mu$ ), dan is het ook mogelijk  $M_i$  direct in de eigenmomenten te analyseeren.

Uit verg. 8), hoofdstuk 3 volgt met de substituties

$$\varphi_{ki} = k_i \mu_{ki} \quad \text{en} \quad \varphi_{li} = k_i \mu_{li} \\ \sum_{l=1}^n k_l \mu_{li} \mu_{li} = 0 \quad (k \neq l) \quad \text{2)}$$

de orthogonaliteitseigenschap van de eigenmomenten. Uit

$$\sum_{l=1}^n \frac{\varphi_{li}^2}{k_l} = 1 \quad \text{volgt} \quad \sum_{l=1}^n k_l \mu_{li}^2 = 1$$

waaruit blijkt, dat de eigenmomenten ook genormeed zijn.

We stellen nu:

$$M_i = \sum_{k=1}^n a_k \mu_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad \text{3)}$$

waarin de  $a$ 's bepaald worden door:

$$a_k = \sum_{l=1}^n k_l M_l \mu_{kl} \quad (k = 1 \dots n) \quad \text{4)}$$

Bovendien ontwikkelen we de  $n$   $\psi$ 's in de  $n$  eigenfuncties  $\varphi$

$$\psi_i = \sum_{k=1}^n b_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad \text{5)}$$

waarin:

$$b_k = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_i \varphi_{ki}}{k_i} \quad (k = 1 \dots n) \quad \text{6)}$$

Door deze substituties gaan de verg. 1) over in

$$\sum_{k=1}^n b_k \varphi_{ki} = k_i \sum_{h=1}^n a_h \mu_{hi} + k_i \sum_{j=1}^n \sum_{h=2}^n b_h \alpha_{ij} \varphi_{hj} \quad (i = 1 \dots n) \quad \text{7)}$$

Met gebruikmaking van de verg. 6), hoofdstuk 3 kunnen de verg. 7) herleid worden tot:

$$\sum_{k=1}^n b_k \varphi_{ki} = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{ki} + \sum_{k=1}^n \frac{b_k \varphi_{ki}}{\lambda_k}$$

of:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k} b_k \varphi_{ki} = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad \text{8)}$$

Door beide zijden van de verg. 8) met  $\frac{\varphi_{li}}{k_l}$  ( $l = 1 \dots n$ ) te vermenigvuldigen, vinden we:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k} b_k \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_l} = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_l} \quad (i = 1 \dots n) \quad \text{9)}$$

waaruit na sommatie dezer  $n$  vergelijkingen volgt:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k} b_k \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_k \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} \quad (10)$$

of:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k} b_k \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = \sum_{k=1}^n a_k \sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} \quad (11)$$

Voor  $k \neq l$  wordt  $\sum_{i=1}^n \frac{\varphi_{ki} \varphi_{li}}{k_i} = 0$ , voor  $k = l$  één, zoodat verg. 11) overgaat in:

$$\frac{\lambda_l - 1}{\lambda_l} b_l = a_l \quad (12)$$

of na vervanging van  $l$  door  $k$ :

$$\frac{\lambda_k - 1}{\lambda_k} b_k = a_k \quad (13)$$

Hieruit volgt:

$$b_k = \frac{\lambda_k}{\lambda_k - 1} a_k = a_k + \frac{1}{\lambda_k - 1} a_k \quad (14)$$

Deze waarde voor  $b_k$  gesubstitueerd in de verg. 5) levert:

$$\begin{aligned} \psi_i &= \sum_{k=1}^n b_k \varphi_{ki} = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{ki} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - 1} a_k \varphi_{ki} = \\ &= k_i M_i + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - 1} a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad (15) \end{aligned}$$

### 3. Benaderingsmethode.

In verschillende leerboeken <sup>1)</sup> komt een benaderingsformule voor ter bepaling van de doorbuiging  $f$  in het midden van een staaf, die behalve door twee samendrukkende krachten in de uiteinden, bovendien op buiging belast is, door symmetrisch verdeelde, loodrecht op de staafas staande krachten.

Zij luidt:

$$f = \frac{n}{n-1} f_0 \quad (16)$$

<sup>1)</sup> Zie o. a. J. KLOPPER, Leerboek der toegepaste Mechanica II, 2e druk, p. 400.

TIMOSHENKO and LESSELS, Applied Elasticity, p. 163.

A. FÖPPL, Vorlesungen über technische Mechanik III, 4e druk, p. 338.

waarin  $f_0$  de doorbuiging tengevolge van de doorbuigende krachten alleen is en  $n$  de verhouding van de bij de staaf behorende knikkracht van EULER tot de grootte der in werkelijkheid optredende drukkkrachten.

De geldigheid dezer betrekking (die ter a. p. slechts empirisch wordt opgesteld), zoowel als de factoren welke deze geldigheid beheerschen, kunnen met behulp van de in § 1 en 2 gevonden resultaten systematisch worden onderzocht.

Daarbij beperken we ons niet tot de doorbuiging  $f$  in het midden van den balk, doch toonen aan, dat verg. 16) voor de doorbuiging in alle punten van de staaf een voldoende benadering geeft.

Te dien einde stellen we vast:

- 1e. dat de doorbuigingen van de staaf geheel bepaald zijn door de in de scharnieren optredende  $\psi$ -waarden,
- 2e. dat de percentische fout in een stel benaderingswaarden voor de doorbuigingen even groot is als die in het bijbehorende stel  $\psi$ -waarden,
- 3e. dat de waarde  $n$  van verg. 16) overeenkomt met de eerste eigenwaarde  $\lambda_1$ .

Het is dus voldoende aan te toonen, dat de exacte functie  $\psi$ , voldoende benaderd wordt door:

$$\bar{\psi}_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} k_i M_i, \text{ waarin immers } k_i M_i \text{ de verdraaiing voorstelt afkomstig van de doorbuigende krachten alleen.}$$

Nu is:

$$\bar{\psi}_i = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - 1} k_i M_i = k_i M_i + \frac{1}{\lambda_1 - 1} \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{ki} \quad (17)$$

zoodat de fout t. o. z. van het exacte antwoord uit verg. 15) wordt:

$$\psi_i - \bar{\psi}_i = \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{\lambda_1 - 1} - \frac{1}{\lambda_k - 1} \right) a_k \varphi_{ki} \quad (18)$$

die bij kleine waarden van  $a_k$  ( $k = 2 \dots n$ ) t. o. z. van  $a_1$  gering wordt.

Een nog betere benadering welke ook voor het geval, dat  $a_k$  ( $k = 2 \dots n$ ) niet meer klein is t. o. z. van  $a_1$  tot een goed resultaat leidt, is:

$$\bar{\psi}_i = k_i M_i + \frac{1}{\lambda_1 - 1} a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad (19)$$

De fout bedraagt hier slechts:

$$\psi_i - \bar{\psi}_i = - \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda_k - 1} a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad (20)$$

welk bedrag tengevolge van de grooter wordende waarden van  $\lambda_k$  met stijgende  $k$  zeker klein zal zijn.

Dat een voldoende nauwkeurigheid bereikt wordt, door slechts gebruik te maken van de eerste eigenoplossing, vindt zijn oorzaak in het feit, dat de eerste eigenwaarde zeker grooter dan 1 zal zijn, omdat anders reeds zonder doorbuigende belasting knik op zou treden. De volgende eigenwaarden zijn dus reeds tamelijk groot, zoodat  $\frac{1}{\lambda_k - 1}$  ( $k = 2 \dots n$ ) voldoende klein is. Hadden

we in de verg. 14) de splitsing van  $\frac{\lambda_k}{\lambda_k - 1}$  in 1 en  $\frac{1}{\lambda_k - 1}$  niet uitgevoerd, dan zou de uitdrukking  $\frac{\lambda_k}{\lambda_k - 1}$  niet klein zijn geworden, zoodat alle termen van de reeks in de verg. 15) gebruikt hadden moeten worden.

De gang van de berekening van het in § 1 opgeworpen vraagstuk is nu de volgende: Bepaal bij de gegeven samendrukkende belasting de eerste eigenwaarde en de eerste eigenoplossing op de in § 3, hoofdstuk 3 aangegeven manier. Construeer de momentenlijn behoorende bij de doorbuigende belasting en bepaal den factor, waarmede de eerste eigenoplossing in de ontwikkeling van deze momentenlijn naar de eigenmomenten voorkomt, uit:

$$a_1 = \sum_{i=1}^n k_i M_i \mu_{ii} = \sum_{i=1}^n M_i \varphi_{ii} \quad (21)$$

De optredende hoekverdraaiingen zijn dan uit de verg. 19) te vinden, waarna de elastische lijn geconstrueerd kan worden.

Werkt de axiale belasting in plaats van samendrukkend, uittrekkend, zoodat alle  $\lambda$ -waarden negatief uitvallen, dan kunnen meerdere van deze  $\lambda$ 's in absolute waarde klein zijn en zelfs beneden 1 liggen. Dit geval doet zich b.v. voor bij een aan twee zijden scharnierend gesteunde prismatische staaf, axiaal aan de uiteinden belast door trekkrachten, gelijk aan 10 maal de kniklast.

De eigenwaarden worden dan resp.  $-\frac{1}{10}$ ,  $-\frac{4}{10}$ ,  $-\frac{9}{10}$ ,  $-\frac{25}{10}$ .

$-\frac{36}{10}$  enz. In zoo'n geval zal het noodig zijn meerdere eigenwaarden en eigenoplossingen (hier minstens 3) te bepalen.

#### 4. Iteratiemethode.

Wanneer de staaf behalve aan een doorbuigende belasting ook aan een samendrukkende of een niet te grootte uittrekkende belasting ( $[\lambda_1] > 1$ ) is blootgesteld, kunnen we gebruik maken van een iteratiemethode, welke door BIEZENO is ingevoerd voor het berekenen van balken op veeren.<sup>1)</sup>

Bepaal de momenten ( $M_i$ ) optredende in de staaf tengevolge van de doorbuigende krachten, bepaal daarbij de hoekverdraaiingen ( $\theta_i = k_i M_i$ ) en construeer hiermede de elastische lijn.

Plaats nu op de zoo doorgebogen en voorloopig onvervormbaar gedachte staaf de axiale belasting en bepaal de hierdoor optredende extra momenten ( $M_{ii}$ ). Worden daarna de scharnieren weer elastisch gedacht, dan zouden tengevolge van de  $M_{ii}$ 's hoekverdraaiingen  $\theta_{ii} = k_i M_{ii}$  optreden. Deze extra hoekverdraaiingen veroorzaken extra doorbuigingen, waardoor de axiale krachten weer extra momenten ( $M_{ii}$ ) leveren. Zoo voortgaande zullen de opeenvolgende extrakrommen telkens kleiner ordinaten krijgen en bij onbepaalde herhaling van het proces naar nul convergeeren. De som van alle hoekverdraaiingen  $\theta_{mi}$  levert dan de gevraagde hoek  $\psi_i$ .

$$\psi_i = \theta_i + \sum_{m=1}^{\infty} \theta_{mi} \quad (i = 1 \dots n) \quad (22)$$

Het verloop van dit proces zal nader beschouwd worden aan de hand van de ontwikkeling naar de eigenoplossingen. De ontwikkeling van  $\theta_i$  luidt:

$$\theta_i = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad (23)$$

De bij deze  $\theta$ 's optredende extra hoekverdraaiingen tengevolge van de axiale belasting zijn:

$$\theta_{ii} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_j a_k \alpha_{ij} \varphi_{ki} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad (24)$$

Bij de tweede iteratie vinden we:

$$\theta_{oi} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^2} a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \quad (25)$$

<sup>1)</sup> Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik Bd. 4 p. 93



en na  $m$  iteraties:

$$\theta_{mi} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^m} a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \dots 26)$$

We vinden dus voor  $\psi_i$ :

$$\begin{aligned} \psi_i &= \theta_i + \sum_{m=1}^{\rho} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^m} a_k \varphi_{ki} = k_i M_i + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} \left( 1 - \left( \frac{1}{\lambda_k} \right)^{\rho} \right) a_k \varphi_{ki} = \\ &= k_i M_i + \sum_{k=1}^n \frac{1 - \left( \frac{1}{\lambda_k} \right)^{\rho}}{\lambda_k - 1} a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \dots 27) \end{aligned}$$

Wordt  $\rho$  oneindig, dan nadert  $\left( \frac{1}{\lambda_k} \right)^{\rho}$  tot nul, daar  $\lambda_k > 1$  ( $k = 1 \dots n$ ), zoodat de verg. 27) overgaan in:

$$\psi_i = k_i M_i + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k - 1} a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \dots 28)$$

waaruit blijkt, dat de zoo gevonden waarden  $\psi_i$  de juiste zijn (zie de verg. 15).

### 5. Uitbreiding van de iteratiemethode.

Wanneer niet alle  $\lambda$ 's in absolute waarde grooter zijn dan 1, hetgeen mogelijk is bij negatieve  $\lambda$ 's, dan nadert  $\frac{1}{\lambda_k^{\rho}}$  bij grooter wordende  $\rho$  niet voor alle waarden van  $k$  tot nul, zoodat de bovengenoemde iteratiemethode een divergent proces zou geven.

Is alleen  $|\lambda_1| < 1$ , en zijn alle overige  $\lambda$ 's absoluut genomen  $> 1$ , dan kan met een kleine wijziging de iteratiemethode toch gehandhaafd worden. <sup>1)</sup> Deze wijziging zal bovendien in de gevallen, dat alle  $\lambda$ 's grooter dan 1 zijn een besparing in reken- en tekenwerk opleveren. We passen het in § 4 aangegeven proces  $\rho$ -maal toe en bepalen uit de waarden  $\theta_{\rho-1, i}$  en  $\theta_{\rho i}$  de uitdrukking:

<sup>1)</sup> Zie: C. B. BIEZENO, Een toepassing van de leer der integraalvergelijkingen op de bepaling van de elastische lijn van een over zijn geheele lengte elastisch ondersteunden balk, Koninklijke Academie van Wetenschappen. Deel XXXII, No. 5.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\theta_{\rho-1, i} \theta_{\rho i}}{k_i} &= \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^{\rho-1}} a_k \varphi_{ki} \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^{\rho}} a_k \varphi_{ki} \right)}{\sum_{i=1}^n \frac{\theta_{\rho i}^2}{k_i}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^{\rho}} a_k \varphi_{ki} \right\}^2}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_i^{2\rho-1}}{\lambda_k^{2\rho-1}} \frac{a_k^2}{a_i^2} \right\}} = \lambda_1 \frac{1 + \sum_{k=2}^n \frac{\lambda_i^{2\rho-1}}{\lambda_k^{2\rho-1}} \frac{a_k^2}{a_i^2}}{1 + \sum_{k=2}^n \frac{\lambda_i^{2\rho}}{\lambda_k^{2\rho}} \frac{a_k^2}{a_i^2}} \dots 29) \end{aligned}$$

Daar de bedragen  $\sum_{k=2}^n \frac{\lambda_i^{2\rho-1}}{\lambda_k^{2\rho-1}} \frac{a_k^2}{a_i^2}$  en  $\sum_{k=2}^n \frac{\lambda_i^{2\rho}}{\lambda_k^{2\rho}} \frac{a_k^2}{a_i^2}$  wegens  $\lambda_k > \lambda_1$  ( $k > 1$ ) bij voldoende groote  $\rho$  zeer klein worden, blijkt deze uitdrukking de waarde van  $\lambda_1$  te benaderen. <sup>1)</sup>

De benaderingswaarden van  $\psi_i$  ( $i = 1 \dots n$ ) worden nu gevonden uit:

$$\theta_i + \sum_{m=1}^{\rho} \theta_{mi} + \frac{1}{\lambda_1 - 1} \theta_{\rho i} \quad (i = 1 \dots n) \dots 30)$$

Substitueeren we n.l. de waarden van  $\theta_{mi}$  uit de verg. 26) in de uitdrukkingen 30), dan gaan deze over in:

$$\theta_i + \sum_{m=1}^{\rho} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^m} a_k \varphi_{ki} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_1 - 1} \cdot \frac{1}{\lambda_k^{\rho}} a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \dots 31)$$

welke uitdrukkingen omgewerkt kunnen worden in den vorm

$$\theta_i + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^{\rho}} a_k \varphi_{ki} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{\lambda_k^{\rho}} \left( \frac{1}{\lambda_1 - 1} - \frac{1}{\lambda_k - 1} \right) a_k \varphi_{ki} \quad (i = 1 \dots n) \dots 32)$$

Daar  $\lambda_k > 1$  voor  $k > 1$ , wordt de laatste term van 32) bij genoegzaam groote  $\rho$  nul, zoodat we tenslotte vinden:

$$\theta_i + \sum_{m=1}^{\rho} \theta_{mi} + \frac{1}{\lambda_1 - 1} \theta_{\rho i} = \theta_i + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^{\rho}} a_k \varphi_{ki} = \psi_i \quad (i = 1 \dots n) \dots 33)$$

De tijdsbesparing ten opzichte van de in § 4 gegeven methode bestaat hierin, dat in § 4 het proces moest worden voortgezet tot de waarden  $\theta_{mi}$  klein werden, terwijl hier slechts een zoodanig aantal malen het genoemde proces behoeft te worden toegepast, totdat twee opeenvolgende elastische lijnen in voldoende mate gelijkvormig zijn,

<sup>1)</sup> We kunnen het proces afbreken, wanneer  $\theta_{\rho-1, i}$  en  $\theta_{\rho i}$  in voldoende mate gelijkvormig zijn.

## Berekening van balken op veeren.

## 1. Bestaande iteratiemethode.

De graphische berekening van elastische balken op veeren met behulp van een iteratiemethode is door BIEZENO behandeld in Z.f.a.M.u.M. Bd. 1 p. 93. <sup>1)</sup> De daar ontwikkelde methode stelt ons in staat de berekening van de veerreacties uit te voeren voor het geval, dat of de veeren betrekkelijk slap, of betrekkelijk stijf zijn t.o.z. van den balk.

Bij deze methode plaatsen we het gegeven laststelsel op den stijf gedachten balk en berekenen de daarbij optredende veerreacties uit het evenwicht en uit de voorwaarde dat de uiteinden van de veeren op een rechte lijn moeten blijven. Hadden we op den onbelasten, doch veerend ondersteunden balk deze nu gevonden veerreacties in omgekeerden zin als lasten gezet, dan zou de balk, al ware hij elastisch geweest, toch recht zijn gebleven en iedere veer had de erboven geplaatste last moeten dragen. Men behoeft dus slechts te onderzoeken, wat de veerreacties zijn wanneer op den balk het verschil van het gegeven en van het zoo juist genoemde laststelsel geplaatst wordt. Uit den aard der zaak zal dit krachtsysteem een evenwichtskrachtsysteem zijn. Dit evenwichtskrachtsysteem plaatsen we op den, van de veeren losgenomen balk en bepalen de vervorming.

Daarna wordt nagegaan, welk evenwichtskrachtsysteem op de veeren geplaatst moeten worden, om den doorgebogen balk er passend op te kunnen leggen. Dit zoo gevonden laststelsel wordt in omgekeerden zin op den balk geplaatst en de vervorming van dezen bepaald, enz. Bij herhaling van dit proces zullen de krachstelsels onder bepaalde omstandigheden tot nul convergereen. De

<sup>1)</sup> Zie ook Proceeding of the First International Congress for Applied Mechanics. Delft. 1924. p. 5—8.

som van de opeenvolgende krachstelsels — met wisselend teeken — zal dan gelijk zijn aan het totale veerkrachtenstelsel.

Meestal blijkt, dat reeds na een gering aantal iteraties opeenvolgende krachstelsels gelijkvormig zijn, waardoor bedoelde som van dit oogenblik af als die van een meetkundige reeks is op te vatten.

Deze methode zal bij een naar verhouding stijven balk goed convergereen. Is de balk daarentegen zeer slap t.o.z. van de veeren, dan geeft een dergelijke methode, waarbij echter de rol van balk en veeren verwisseld is, uitkomst.

## 2. De bij het vraagstuk behorende eigenbelastingen.

Onder een eigenbelasting zullen we een evenwichtskrachtsysteem verstaan, dat, geplaatst op de veeren, aan deze zoodanige indrukkingen verleent, dat de losse balk, belast met een gelijkvormig laststelsel van geschikt gekozen intensiteit, aangrijpende op de punten, waar de balk door de veeren gesteund wordt, (verder knooppunten genoemd) passend op de veeren geplaatst kan worden. De verhouding  $\lambda$  van de lasten op den balk tot die op de veeren wordt een eigenwaarde van het probleem genoemd.

Om dit „passen” van den balk op de veeren tot uitdrukking te brengen trekken we een rechte lijn door de uiterste knooppunten en bepalen de zakkingen t.o.z. van deze lijn. Noemen we  $\delta_i$  de veerconstante (de zakking per eenheid van kracht) van de  $i^e$  veer en  $\alpha_{ij}$  de verplaatsing van knooppunt  $i$  ten gevolge van een eenheidskracht in knooppunt  $j$  wanneer de balk alleen in de uiterste knooppunten vast is opgelegd, dan vinden we voor de zakking van de  $i^e$  veer t.o.z. van de rechte lijn die de uiteinden van de  $0^e$  en  $n+1^e$  veer verbindt:

$$P_i \delta_i - \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} P_0 \delta_0 - \frac{x_i}{x_{n+1}} P_{n+1} \delta_{n+1}, \quad (i = 1 \dots n) \quad 1)$$

en voor de zakking van het  $i^e$  knooppunt t.o.z. van de verbindingslijn der uiterste knooppunten

$$\sum_{j=1}^n \lambda P_j \alpha_{ij} \quad (i = 1 \dots n) \quad 2)$$

Stellen we den eisch, dat de krachten  $P_i$  ( $i = 0 \dots n+1$ )

een eigenbelasting vormen, dan moeten de uitdrukkingen uit verg. 1) en 2) aan elkaar gelijk zijn

$$P_i \delta_i - \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} P_0 \delta_0 - \frac{x_i}{x_{n+1}} P_{n+1} \delta_{n+1} = \sum_{j=1}^n \lambda P_j \alpha_{ij} \quad (i = 1 \dots n) \quad 3)$$

In de verg. 3) kunnen  $P_0$  en  $P_{n+1}$  in de overige krachten uitgedrukt worden, met behulp van de voorwaarde, dat de eigenbelasting een evenwichtskrachtsysteem moet vormen:

$$\sum_{j=0}^{n+1} P_j x_j = 0 \text{ en } \sum_{j=0}^{n+1} P_j (x_{n+1} - x_j) = 0 \quad 4)$$

waaruit volgt:

$$P_{n+1} = - \sum_{j=1}^n P_j \frac{x_j}{x_{n+1}}; P_0 = - \sum_{j=1}^n P_j \frac{x_{n+1} - x_j}{x_{n+1}} \quad 5)$$

Deze waarden, ingevuld in de verg. 3) levert:

$$P_i \delta_i + \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} \delta_0 \sum_{j=1}^n P_j \frac{x_{n+1} - x_j}{x_{n+1}} + \frac{x_i}{x_{n+1}} \delta_{n+1} \sum_{j=1}^n P_j \frac{x_j}{x_{n+1}} = \sum_{j=1}^n \lambda P_j \alpha_{ij} \quad 6)$$

of:

$$\sum_{j=1}^n P_j \left\{ \lambda \alpha_{ij} - \frac{(x_{n+1} - x_i)(x_{n+1} - x_j)}{x_{n+1}^2} \delta_0 - \frac{x_i x_j}{x_{n+1}^2} \delta_{n+1} \right\} - P_i \delta_i = 0, \quad (i = 1 \dots n) \quad 7)$$

een stelsel van  $n$  homogene lineaire vergelijkingen met  $n$  onbekenden ( $P_j$  ( $j = 1 \dots n$ )), waarvan een van 0 verschillende oplossing slechts mogelijk is, indien de determinant van de  $n^e$  orde, gevormd uit de coëfficiënten de waarde nul heeft. Deze determinant levert een  $n^e$  graadsvergelijking voor  $\lambda$ , die in het algemeen  $n$  verschillende positieve reële wortels heeft. <sup>1)</sup> Bij elke wortel  $\lambda_k$  behoort een op een factor na bekende eigenbelasting  $P_{ki}$  ( $i = 0 \dots n+1$ ).

Wordt op het samenstel van balk en veeren een eigenbelasting geplaatst, dan wordt daarvan het  $\frac{\lambda}{1+\lambda}$  e deel door den balk en

het  $\frac{1}{1+\lambda}$  e deel door de veeren gedragen, daar immers in dat geval de veeren en de balk passend aan elkaar blijven sluiten.

<sup>1)</sup> Zie noot op blz. 4.

### 3. Orthogonaliteit van de eigenbelastingen.

De orthogonaliteitseigenschap van de eigenbelastingen luidt:

$$\sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} P_{li} \delta_i = 0 \quad (k \neq l) \quad 8)$$

Met behulp van verg. 3) vindt men n.l.

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} P_{li} \delta_i &= P_{l0} \delta_0 \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} P_{ki} + \\ &+ P_{l,n+1} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i}{x_{n+1}} P_{ki} + \lambda_l \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=1}^n P_{ki} P_{lj} \alpha_{ij} = \\ &= P_{l0} \delta_0 \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} P_{ki} + P_{l,n+1} \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i}{x_{n+1}} P_{ki} + \\ &+ \lambda_l \sum_{j=1}^n P_{k0} P_{lj} \alpha_{0j} + \lambda_l \sum_{j=1}^n P_{k,n+1} P_{lj} \alpha_{n+1,j} + \\ &+ \lambda_l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ki} P_{lj} \alpha_{ij} \quad 9) \end{aligned}$$

Nu is zowel  $\sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_{n+1} - x_i}{x_{n+1}} P_{ki}$  als  $\sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i}{x_{n+1}} P_{ki} = 0$ ,

omdat het krachtstelsel  $P_{ki}$  ( $i = 0 \dots n+1$ ) een evenwichtskrachtsysteem vormt, en de termen met  $\alpha_{0j}$  en  $\alpha_{n+1,j}$  kunnen worden weggelaten, omdat  $\alpha_{0j}$  en  $\alpha_{n+1,j}$  nul zijn.

Het tweede lid van verg. 9) gaat dan over in:

$$\lambda_l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ki} P_{lj} \alpha_{ij} \quad 10)$$

Op dezelfde manier vinden we:

$$\sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} P_{li} \delta_i = \lambda_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{li} P_{kj} \alpha_{ij} \quad 11)$$

Door in het tweede lid van verg. 11)  $i$  en  $j$  te verwisselen en onder toepassing van de stelling van Maxwell daarna  $\alpha_{ji} = \alpha_{ij}$  te stellen, vinden we:

$$\lambda_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{li} P_{kj} \alpha_{ij} = \lambda_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n P_{ki} P_{lj} \alpha_{ij} \quad 12)$$

waaruit weer volgt:

$$\frac{1}{\lambda_l} \sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} P_{lj} \delta_i = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} P_{li} \delta_i \quad 13)$$

zoodat:

$$\sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} P_{ii} \delta_i = 0 \quad (\lambda_i \neq \lambda_k) \quad \dots \quad 14)$$

of:

$$\sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} P_{li} \delta_i = 0 \quad (l \neq k) \quad \dots \quad 15)$$

De eigenbelastingen, waarvoor

$$\sum_{i=0}^{n+1} P_{ki}^2 \delta_i = 1 \quad (k = 1 \dots \dots n) \quad \dots \quad 16)$$

noemen we wederom genormeerde eigenbelastingen.

#### 4. Benaderingsmethode tot het bepalen van de eigenbelastingen.

We plaatsen op de knooppunten van den lossen balk een evenwichtskrachtsysteem  $Q_{ii}$  ( $i=0 \dots \dots n+1$ ) en bepalen (b.v. graphisch) de daarbij optredende verplaatsingen t. o. z. van de rechte verbindingslijn tusschen de knooppunten 0 en  $n+1$ . We onderzoeken nu welk evenwichtskrachtsysteem  $Q_{zi}$  ( $i=0 \dots \dots n+1$ ) op de veeren geplaatst moet worden, om deze t. o. z. van de rechte verbindingslijn van de uiteinden der uiterste veeren, gelijke doorbuigingen te doen verkrijgen als die van de overeenkomstige knooppunten van den balk t. o. z. van de verbindingslijn der uiterste knooppunten.

We denken ons het stelsel  $Q_{ii}$  ( $i=0 \dots \dots n+1$ ) ontwikkeld in de eigenbelastingen

$$Q_{ii} = \sum_{k=1}^n a_k P_{ki} \quad (i=0 \dots \dots n+1) \quad \dots \quad 17)$$

en laten voorloopig slechts één van die eigenbelastingen,  $a_i P_{ki}$  ( $i=0 \dots \dots n+1$ ) op den balk aangrijpen. Dan zullen de krachten, noodig, om den veeren in dat geval gelijke doorbuigingen te verleen gelijk zijn aan het  $\frac{1}{\lambda_k}$  e gedeelte van de overeenkomstige balkkrachten, dus  $\frac{a_k}{\lambda_k} P_{ki}$  ( $i=0 \dots \dots n+1$ ) (zie slotopmerking § 2). Hieruit volgt dat het laststelsel  $Q_{zi}$  ( $i=0 \dots \dots n+1$ ) de som wordt van alle eigenbelastingen  $\frac{a_k}{\lambda_k} P_{ki}$ :

$$Q_{zi} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda_k} P_{ki} \quad (i=0 \dots \dots n+1) \quad \dots \quad 18)$$

Herhaling van het besproken proces op  $Q_{zi}$  levert:

$$Q_{zi} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda_k^2} P_{ki} \quad (i=0 \dots \dots n+1)$$

$$Q_{mi} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda_k^{m-1}} P_{ki} \quad (i=0 \dots \dots n+1) \quad \dots \quad 19)$$

Bij groote  $m$  zal  $\frac{a_k}{\lambda_k^{m-1}}$  ( $k=2 \dots \dots n$ ), wegens het grooter worden van  $\lambda_k$  met toenemende  $k$ , zeer klein worden t.o.z. van  $\frac{a_1}{\lambda_1^{m-1}}$ , zoodat het stelsel  $Q_{mi}$  ( $i=0 \dots \dots n+1$ ) met zeer voldoende nauwkeurigheid evenredig zal zijn met de eerste eigenbelasting. Blijkt het, dat de stelsels  $Q_{zi}$  en  $Q_{zi}$  reeds eenigszins gelijkvormig zijn, dan behoeven we niet verder dan  $Q_{zi}$  te gaan. De grootte van de eerste eigenwaarde  $\lambda_1$  kan in het algemeen met ruim voldoende nauwkeurigheid bepaald worden uit:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n+1} Q_{zi} Q_{zi} \delta_i}{\sum_{i=0}^{n+1} Q_{zi}^2 \delta_i} = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k P_{ki} \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda_k} P_{ki} \right\} \delta_i}{\sum_{i=0}^{n+1} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda_k} P_{ki} \right\}^2 \delta_i} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{\lambda_k}}{\sum_{k=1}^n \frac{a_k^2}{\lambda_k^2}} = \lambda_1 \frac{1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_k^2}{a_1^2} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_k}}{1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_k^2}{a_1^2} \cdot \frac{\lambda_1^2}{\lambda_k^2}} \cong \lambda_1 \quad \dots \quad 20)$$

Voor het bepalen van de hogere eigenwaarden en eigenbelastingen kan verwezen worden naar de vorige hoofdstukken. We gaan bij het bepalen van deze eigenwaarden slechts zóóver, tot de waarde 1 overschreden wordt, omdat, zooals onder § 5 nader uiteen zal worden gezet, eigenbelastingen met  $\lambda > 1$  volgens de in § 1 genoemde iteratiemethode behandeld kunnen worden.

Uitdrukkelijk worde vermeld, dat de in § 5 uiteen te zetten methode uitsluitend aanbeveling verdient, wanneer de iteratiemethode van BIEZENO geen uitkomst geeft.

5. Nieuwe benaderingsmethode tot het berekenen van balken op veeren.

De gegeven belasting  $B$  wordt allereerst in twee deelen  $B_1$  en  $B_2$  gesplitst;  $B_1$  is een laststelsel, uitsluitend bestaande uit krachten ter plaatse van de knooppunten,  $B_2$  een evenwichtskrachtsysteem, dat, werkend op den lossen balk, de knooppunten in een rechte lijn doet blijven. De belasting  $B_2$  zal dus geen invloed op de veerkrachten uitoefenen. De splitsing in  $B_1$  en  $B_2$  is eenduidig. Om  $B_2$  te bepalen, plaatsen we op den balk, dien we in alle knooppunten vast ondersteunen, het gegeven laststelsel  $B$  en bepalen met behulp van een der bekende methoden de oplegreacties. Deze oplegreacties, tezamen met de gegeven belasting  $B$ , vormen  $B_2$ ;  $B_1$  bestaat dus, krachtens de betrekking  $B = B_1 + B_2$  uit de oplegreacties in tegengestelden zin.

$B_1$  wordt weer gesplitst in een evenwichtskrachtsysteem  $B_3$  en een laststelsel  $B_4$ , dat de eigenschap bezit, de uiteinden der veeren op een rechte lijn te houden, wanneer het op de veeren alléén geplaatst wordt. Plaatsen we dus  $B_4$  op de geheele constructie, dan blijft de balk recht en ondervindt geen krachten, terwijl de veeren het geheele laststelsel opnemen.  $B_3$  en  $B_1$  zijn statisch gelijkwaardig, daar  $B_3$ , het verschil van  $B_1$  en  $B_4$ , een evenwichtskrachtsysteem vormt. <sup>1)</sup>

We kunnen de krachten  $B_{4i}$  ( $i = 0 \dots n + 1$ ) van het stelsel  $B_4$  gelijkstellen aan:

$$B_{4i} = \frac{\alpha + \beta x_i}{\delta_i} \quad (i = 0 \dots n + 1) \quad \dots \quad 21)$$

zoodat de statische gelijkwaardigheid der belastingen  $B_1$  en  $B_4$  wordt uitgedrukt door:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n+1} B_{1i} &= \sum_{i=0}^{n+1} B_{4i} = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{\alpha + \beta x_i}{\delta_i} = \alpha \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{\delta_i} + \beta \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i}{\delta_i} \\ \sum_{i=0}^{n+1} x_i B_{1i} &= \sum_{i=0}^{n+1} x_i B_{4i} = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i (\alpha + \beta x_i)}{\delta_i} = \alpha \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i}{\delta_i} + \beta \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i^2}{\delta_i} \end{aligned} \quad \dots \quad 22)$$

<sup>1)</sup>  $B_1$  is, daar  $B_1 = B - B_2$  en  $B_2$  een evenwichtskrachtsysteem vormt, weer statisch gelijkwaardig met  $B$ , zoodat ook  $B_4$  en  $B$  statisch gelijkwaardig zijn.

waaruit volgt:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\left\{ \sum_{i=0}^{n+1} B_{1i} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i^2}{\delta_i} \right\} - \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} x_i B_{1i} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i}{\delta_i} \right\}}{\left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{\delta_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i^2}{\delta_i} \right\} - \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i}{\delta_i} \right\}^2} \\ \beta &= \frac{\left\{ \sum_{i=0}^{n+1} x_i B_{1i} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{\delta_i} \right\} - \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} B_{1i} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i}{\delta_i} \right\}}{\left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{\delta_i} \right\} \cdot \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i^2}{\delta_i} \right\} - \left\{ \sum_{i=0}^{n+1} \frac{x_i}{\delta_i} \right\}^2} \quad 23) \end{aligned}$$

De krachten  $B_{3i}$  zijn bepaald door  $B_{1i} - B_{4i}$ . Gebruikmakende van de ontwikkelbaarheid naar de eigenbelastingen kan  $B_3$  als volgt geschreven worden gedacht:

$$B_{3i} = \sum_{k=1}^n a_k P_{ki} \quad (i = 0 \dots n + 1) \quad \dots \quad 24)$$

met

$$a_k = \sum_{i=0}^{n+1} B_{3i} P_{ki} \delta_i \quad (k = 1 \dots n) \quad \dots \quad 25)$$

Plaatsen we de eigenbelasting  $P_{ki}$  ( $i = 0 \dots n + 1$ ) op den balk met veeren, dan zullen de veerreacties het  $\frac{1}{1 + \lambda_k}$ -de gedeelte van de eigenbelasting bedragen. Immers de balk ondervindt het verschil van de belasting en veerreacties, dus

$$\left( 1 - \frac{1}{1 + \lambda_k} \right) P_{ki} = \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} P_{ki} \quad (i = 0 \dots n + 1),$$

zoodat de per knooppunt resulterende krachten op den balk  $\lambda_k$  maal zoo groot zijn als de, de veeren belastende krachten. Balk en veeren zullen dus juist op elkaar passen, blijkens de definitie van de eigenbelastingen (begin § 2).

Op de veeren komt derhalve tengevolge van de belasting  $B_3$

$$V_i = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{1 + \lambda_k} P_{ki} \quad (i = 0 \dots n + 1) \quad \dots \quad 26)$$

Het is echter niet noodig alle eigenbelastingen te bepalen, daar een belasting, welke slechts bestaat uit eigenbelastingen, waarvan de eigenwaarden grooter dan 1 zijn, veel beter met de iteratiemethode van BIEZENO behandeld kan worden.

Het ligt dus voor de hand de belasting  $B_{3i} = \sum_{k=1}^n a_k P_{ki}$  te splitsen in twee gedeelten

$$\sum_{k=1}^{d-1} a_k P_{ki} \text{ en } \sum_{k=d}^n a_k P_{ki}$$

zoo, dat het eerste gedeelte alleen eigenbelastingen bevat met  $\lambda \leq 1$ , het tweede,  $B_{3i}$ , alleen eigenbelastingen met  $\lambda > 1$ . Alleen de  $\lambda$ 's van de eerstgenoemde eigenbelastingen behoeven dan bepaald te worden, evenals de bijbehorende krachten. De belasting  $B_{3i} = \sum_{k=d}^n a_k P_{ki}$ , die als verschil van  $B_{3i}$  en  $\sum_{k=1}^{d-1} a_k P_{ki}$  bepaald is, wordt in haar geheel met behulp van meergenoemde iteratiemethode behandeld.

Wordt op het laststelsel  $B_5$  het iteratieproces éénmaal toegepast, dan wordt voor het eerste stel veerkrachten gevonden

$$R_{3i} = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k} P_{ki} \quad (i = 0 \dots n+1) \quad 27)$$

Evenzoo vinden we vervolgens:

$$R_{2i} = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k^2} P_{ki} \quad (i = 0 \dots n+1)$$

$$R_{m-1,i} = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k^{m-1}} P_{ki} \quad (i = 0 \dots n+1)$$

$$R_{mi} = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k^m} P_{ki} \quad (i = 0 \dots n+1) \quad 28)$$

Dit proces wordt voortgezet, totdat  $R_{m-1,i}$  en  $R_{mi}$  ( $i = 0 \dots n+1$ ) voldoende gelijkvormig zijn. Splitsen we de veerkrachten  $V_i$ , behorende bij belasting  $B_{3i}$  in twee delen,  $V_i'$  en  $V_i''$ , resp. behorende bij de bekende eigenbelastingen en bij de belasting  $B_{3i}$ , dan kunnen we aantoonen, dat:

$$V_i'' = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{1 + \lambda_k} P_{ki} \quad (i = 0 \dots n+1) \quad 29)$$

ook met zeer goede benadering geschreven kan worden als

$$V_i'' = R_{3i} - R_{2i} + R_{3i} \dots + (-1)^m R_{m-1,i} + (-1)^{m+1} \frac{\lambda_d}{1 + \lambda_d} R_{mi} \quad 30)$$

We vinden n.l. in verband met verg. 27) en 28) voor het tweede lid van verg. 30):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=d}^n a_k \left\{ \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_k^3} - \dots + (-1)^m \frac{1}{\lambda_k^{m-1}} + \right. \\ & \left. + (-1)^{m+1} \frac{\lambda_d}{1 + \lambda_d} \frac{1}{\lambda_k^m} \right\} P_{ki} = \\ & = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{1 + \lambda_k} P_{ki} + \sum_{k=d+1}^n a_k (-1)^{m+1} \frac{1}{\lambda_k^m} \left\{ \frac{\lambda_d}{1 + \lambda_d} - \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} \right\} P_{ki} \approx \\ & \approx \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{1 + \lambda_k} P_{ki} = V_i'' \quad (i = 0 \dots n+1) \quad 31) \end{aligned}$$

De voorwaarde, waaronder bij voldoende groote  $m$

$$\sum_{k=d+1}^n a_k (-1)^{m-1} \frac{1}{\lambda_k^m} \left\{ \frac{\lambda_d}{1 + \lambda_d} - \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} \right\} P_{ki}$$

te verwaarlozen is, luidt  $\lambda_{d+1} > 1$ , waaraan zeker is voldaan, daar krachtens de veronderstelling  $\lambda_d$  reeds  $> 1$  is.

We behoeven slechts een zoodanig aantal eigenbelastingen te bepalen, dat de eigenwaarde van de eerstvolgende eigenbelasting  $> 1$  is. Daar het echter in het algemeen niet mogelijk is te voorspellen hoe groot de eigenwaarde van een nog niet bepaalde eigenbelasting is, zullen we meestal een eigenbelasting te veel bepalen, zoodat reeds  $\lambda_{d-1} > 1$  is. In dat geval zal echter  $\lambda_d$  zóveel grooter dan 1 zijn, dat zeker met slechts één iteratie een voldoende nauwkeurig resultaat wordt bereikt.

De  $\lambda_d$ , gebruikt in de verg. 30) kan benaderd gevonden worden uit:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{n+1} R_{m-1,i} R_{mi} \delta_i = \sum_{i=0}^{n+1} \left\{ \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k^{m-1}} P_{ki} \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k^m} P_{ki} \right\} \delta_i \\ & = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} R_{mi}^2 \delta_i}{\sum_{i=0}^{n+1} \left\{ \frac{a_k}{\lambda_k^m} P_{ki} \right\}^2 \delta_i} = \\ & = \frac{\sum_{k=d}^n \frac{a_k^2}{\lambda_k^{2m-1}}}{\sum_{k=d+1}^n \frac{a_k^2}{\lambda_k^{2m-1}} + 1} = \lambda_d \frac{\sum_{k=d}^n \frac{a_k^2}{\lambda_k^{2m-1}}}{1 + \sum_{k=d+1}^n \frac{a_k^2}{\lambda_k^{2m-1}}} \approx \lambda_d \quad 32) \end{aligned}$$

Het spreekt vanzelf, dat gedurende het iteratieproces de lagere eigenbelastingen in de  $R$ -belastingen kunnen optreden, omdat de

coëfficiënten  $a_k$  ( $k=1 \dots d-1$ ) slechts met een bepaalden graad van nauwkeurigheid bepaald kunnen worden, zoodat de belasting  $B_1$  niet geheel vrij van lagere eigenbelastingen behoeft te zijn, en ook omdat bij de opeenvolgende iteraties onnauwkeurigheden kunnen insluipen. Het bedrag waarmee deze lagere eigenbelastingen in een bepaald stadium van de iteratie voorkomen is echter gemakkelijk te bepalen (zie verg. 25)), zoodat zij steeds verwijderd kunnen worden.

Resumeërend vinden we voor de totale kracht, die de eerste veer op den balk uitoefent:

$$\frac{x + \beta x_i}{\delta_i} + V_i = \frac{\alpha + \beta x_i}{\delta_i} + \sum_{k=1}^{d-1} \frac{a_k}{1 + \lambda_k} P_{ki} + R_{ii} - R_{oi} + R_{3i} \dots + (-1)^{m+i} \frac{\lambda_d}{1 + \lambda_d} R_{mi} \quad (i=0 \dots n+1). \quad 33$$

Plaatsen we op den balk de gegeven belasting en de zoo gevonden veerkrachten, dan kan de momentenlijn geconstrueerd worden.

6. Voorbeeld.

Als voorbeeld zal behandeld worden de berekening van een prismatischen balk met stijfheidsfactor  $EI = 12 \cdot 10^8$  kg. cm., rustende op 7 gelijke veeren (veerconstante  $\delta = \frac{1}{1200}$  cm/kg) op gelijke afstanden van 100 cm. Het 4e veld is met 1680, het 6e met 3360 kg gelijkmatig belast.

We plaatsen den balk ter plaatse van de knooppunten op vaste steunpunten en bepalen met behulp van den driemomentenregel de oplegreacties. Deze, tezamen met de gegeven belasting, vormen het laststelsel  $B_2$ , hetwelk in fig. 11 is afgebeeld.

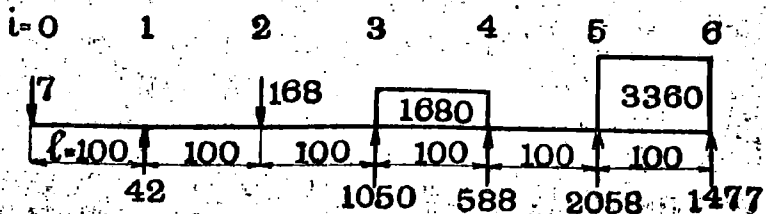


Fig. 11.

Het laststelsel  $B_1$ , slechts bestaande uit lasten in de knooppunten, is gelijk aan de van teeken omgedraaide oplegreacties uit fig. 11.

$$B_{1i} = \text{resp.: } -7; 42; -168; 1050; 588; 2058; 1466 \text{ kg.}$$

Met behulp van verg. 21) en 23) bepalen we daarna het laststelsel  $B_2$ , hetwelk zoo gekozen is, dat de balk recht blijft.

$$B_{2i} = \text{resp.: } -270; 60; 390; 720; 1050; 1380; 1710 \text{ kg.}$$

Door  $B_2$  van  $B_1$  af te trekken vinden we  $B_3$ :

$$B_{3i} = \text{resp.: } 263; -18; -558; 330; -462; 678; -233 \text{ kg.}$$

$B_3$  vormt een evenwichtskrachtsysteem op de knooppunten en kan dus in de eigenbelastingen gesplitst worden.

Bij prismatische balken met een gering aantal veeren (hier 7) kunnen de vervormingen van den balk het eenvoudigst berekend worden door gebruik te maken van de invloedsgetalen  $\alpha_{ij}$ , zooals deze gedefinieerd zijn in § 2. In dit geval zijn de grootheden  $\frac{18 EI}{l^3} \alpha_{ij}$  te ontleenen aan tabel IV:

TABEL IV.

$\frac{18 EI}{l^3} \alpha_{ij}$	$i = 1$	2	3	4	5
$j = 1$	25	38	39	31	17
2	38	64	69	56	31
3	39	69	81	69	39
4	31	56	69	64	38
5	17	31	39	38	25

Tot het benaderingsgewijze bepalen van de eerste eigenbelasting nemen we het laststelsel

$$Q_{1i} = \text{resp.: } -5; 0; 3; 4; 3; 0; -5$$

aan. Met behulp van de invloedsgetalen bepalen we de zakkingen  $y_{oi}$  van de tusschen-knooppunten t.o.z. van de verbindingslijn van de knooppunten 0 en 6:

$$\frac{18 EI}{l^3} y_{2i} = \text{resp.: } 363; 636; 738; 636; 363.$$

De werkelijke zakkingen  $y_{2i}$  zijn gelijk aan  $y_{1i} + \alpha + \beta x$  en de krachten, welke de veeren deze indrukking zouden verleenen zijn

$$Q_{2i} = \frac{y_{2i}}{\delta_i}$$

De grootheden  $\alpha$  en  $\beta$  worden bepaald uit de voorwaarde dat  $Q_{2i}$  een evenwichtskrachtsysteem vormt. We vinden:

$$\frac{18 EI \delta}{l^3} Q_{2i} = \text{resp.: } -391; -28; 245; 348; 245; -28; -391 \text{ kg.}$$

$$\text{Hierin is } \frac{18 EI \delta}{l^3} = \frac{18 \cdot 12 \cdot 10^8 \cdot \frac{1}{1200}}{100^3} = 18.$$

Het laststelsel  $Q_{2i}$  is nu practisch zuiver evenredig met de eerste eigenbelasting. De eerste eigenwaarde wordt gevonden uit:

$$\lambda_1 = \frac{\sum_{i=0}^6 Q_{2i} Q_{2i} \delta_i}{\sum_{i=0}^6 Q_{2i}^2 \delta_i} = 0,222$$

Voor de *genormeerde* eerste eigenbelasting vinden we:

$$P_{1i} = \text{resp.: } -18,27; -1,31; 11,45; 17,26; 11,45; -1,31; -18,27.$$

Vermoed wordt, dat de volgende eigenwaarde ( $\lambda_2$ ) reeds grooter dan 1 zal zijn.

Het bedrag  $a_1$ , waarmede  $P_{1i}$  in de ontwikkeling van  $B_3$  naar de eigenbelastingen voorkomt, wordt gevonden uit:

$$a_1 = \sum B_{2i} P_{1i} \delta_i = -6,46$$

Trekken we het laststelsel

$$a_1 P_{1i} = \text{resp.: } 118; 9; -74; -106; -74; 9; 118 \text{ kg.}$$

van  $B_{3i}$  af, dan vinden we:

$$R_i = \text{resp.: } 145; -27; -484; 436; -388; 669; -351 \text{ kg.}$$

welk laststelsel  $P_1$  dus niet bevat, zoodat hierop de iteratiemethode toegepast kan worden.

Na één iteratie vinden we:

$$R_{1i} = 101; -86; -132; 4; 110; 117; -114 \text{ kg.}$$

Hoewel  $R_i$  en  $R_{1i}$  nog niet gelijkvormig zijn, kunnen we toch reeds na deze ééne iteratie het proces afbreken. Voor de coëfficiënt  $\lambda_2$  wordt gevonden:

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=0}^6 R_i R_{1i} \delta_i}{\sum_{i=0}^6 R_{1i}^2 \delta_i} = 2,149$$

Van het laststelsel  $R_2$  wordt dus door de veeren gedragen:

$$\frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2} R_{1i} = \text{resp.: } 69; -59; -90; 3; 75; 80; -78 \text{ kg. en door den balk:}$$

$$R_i - \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2} R_{1i} =$$

$$\text{resp.: } 76; 32; -394; 433; -463; 589; -273 \text{ kg.}$$

Van het laststelsel  $a_1 P_{1i}$  wordt door de veeren gedragen:

$$\frac{1}{1 + \lambda_1} a_1 P_{1i} = \text{resp.: } 97; 8; -61; -88; -61; 8; 97 \text{ kg. en door den balk}$$

$$\frac{\lambda_1}{1 + \lambda_1} a_1 P_{1i} = \text{resp.: } 21; 1; -13; -18; -13; 1; 21 \text{ kg.}$$

In totaal dragen de veeren dus:

$$B_3 + \frac{1}{1 + \lambda_1} a_1 P_{1i} + \frac{\lambda_2}{1 + \lambda_2} R_{1i}$$

Dit is resp.:

$$-104; 9; 239; 635; 1064; 1468; 1729 \text{ kg.}$$

De totale belasting van den balk volgt uit fig. 12, waarin ook de momentenlijn van den balk is geteekend.

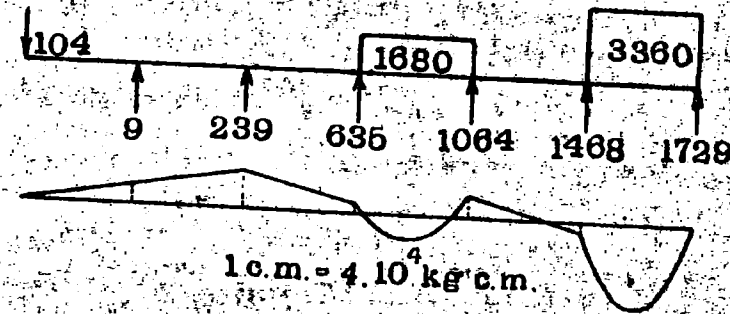


Fig. 12  
Het grootste moment is  $-44500 \text{ kg·cm}$ .



## Berekening van balkramen.

## 1. Inleiding.

Onder balkramen zullen in dit hoofdstuk constructies worden verstaan, bestaande uit twee stellen balken (ter onderscheiding langs- en dwarsbalken genoemd), die in de knooppunten slechts krachten loodrecht op het vlak van de constructie op elkaar kunnen uitoefenen. We beperken ons tot die gevallen, waarbij de balken van één stelsel op dezelfde wijze uitwendig gesteund zijn en waarbij het verloop van het traagheidsmoment van alle balken van één stelsel op een constanten factor na hetzelfde is.

Evenals bij de balken op veeren voeren we hier twee samenwerkende constructies in, n.l. langs- en dwarsbalken. Het gegeven laststelsel zal gesplitst worden in eenige laststelsels, waarvan sommige alleen door de langsbalken, sommige alleen door de dwarsbalken en andere door beide balkstelsels samen gedragen worden. De laatste zullen weer gesplitst worden in eigenbelastingen. Onder eigenbelasting wordt hier verstaan een laststelsel, dat geplaatst op de langsbalken alleen, aan deze zoodanige doorbuigingen geeft, dat zij passend geplaatst kunnen worden op de dwarsbalken, wanneer hierop een gelijkvormig laststelsel van doelmatig te bepalen intensiteit geplaatst wordt. Wordt een dergelijk laststelsel op het geheele balkraam geplaatst, dan zal elk der beide balkstelsels aan een krachtsysteem onderworpen zijn, dat met het gegeven laststelsel gelijkvormig is.

2. Splitsing van het gegeven laststelsel  $B$  in  $B_1$  en  $B_2$ .

Het gegeven laststelsel  $B$  splitsen we in een laststelsel  $B_1$  en een laststelsel  $B_2$ . Het laststelsel  $B_1$  bestaat uit de gegeven belasting  $B$  en de oplegreacties van het in de knooppunten vast ondersteunde balkraam. Het laststelsel  $B_2$  bestaat uit deze, van teeken omgekeerde

oplegreacties. Om de splitsing uit te voeren wordt elke balk in de knooppunten vast ondersteund en worden de daarbij optredende oplegreacties berekend. Dit kan bij niet prismatische balken graphisch, bij prismatische balken het beste met behulp van den 3-momentenregel uitgevoerd worden. Het gegeven laststelsel  $B$  samen met de som der aldus gevonden oplegreacties vormen het laststelsel  $B_1$ . Het behoeft geen betoog, dat het onverschillig is tot welk balkstelsel de  $m$  de knooppunten werkende belastingen gerekend worden.

3. Splitsing van het laststelsel  $B_2$ .

Beschouwen we het meest gecompliceerde geval, dat zowel langs- als dwarsbalken niet uitwendig bevestigd zijn, dan splitsen we het laststelsel  $B_2$  in twee laststelsels  $B_3$  en  $B_4$ .  $B_2$  wordt zoo gekozen, dat het alleen door de langsbalken opgenomen wordt, die daarbij zoo gebogen worden, dat de erop rustende dwarsbalken recht blijven. Het laststelsel  $B_4$  moet aan den eisch voldoen voor elken dwarsbalk afzonderlijk een evenwichtskrachtsysteem te vormen.

Het laststelsel  $B_4$  moet zijnerzijds weer gesplitst worden in een stelsel  $B_5$  en  $B_6$ . Bij het laststelsel  $B_5$  nemen de dwarsbalken alles op, terwijl de langsbalken recht blijven. Het laststelsel  $B_6$  vormt op elken langs- en dwarsbalk een evenwichtskrachtsysteem, zoodat het zowel door de langs- als door de dwarsbalken afzonderlijk gedragen kan worden. Langs- en dwarsbalken kunnen dus samenwerken tot het opnemen van het laststelsel  $B_6$ . Dit laatste is b.v. niet het geval met het laststelsel  $B_3$ , dat alleen door de langsbalken kan worden opgenomen.

## 4. Vervolg.

Daar het laststelsel  $B_4$  voor elken dwarsbalk een evenwichtskrachtsysteem vormt, moet laststelsel  $B_2$  per dwarsbalk met laststelsel  $B_3$  statisch gelijkwaardig zijn, dus:

$$\sum_{j=0}^n B_{ij}^2 (x_{n+1} - x_j) = \sum_{j=0}^n B_{ij}^3 (z_{n+1} - z_j) \quad (i = 0, \dots, m+1)$$

1) In het vervolg wordt onder  $B_{ij}^2$  verstaan de kracht van het systeem  $B_2$  met de knooppuntsindices  $ij$ .

$$\sum_{j=1}^{n+1} B_{ij}^2 z_j = \sum_{j=1}^{n+1} B_{ij}^3 z_j \quad (i=0 \dots m+1) \dots 1)$$

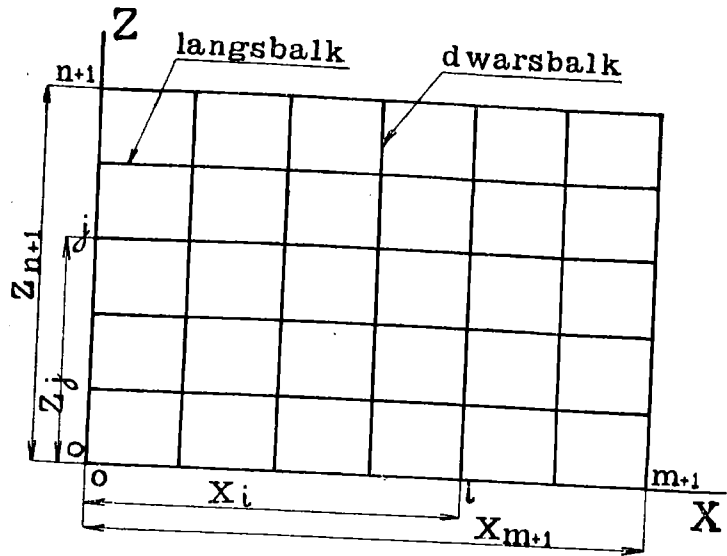


Fig. 13.

De eisch, dat bij laststelsel  $B_3$  de dwarsbalken recht blijven, kan als volgt uitgedrukt worden:

$$y_{ij} = \frac{z_{n+1} - z_j}{z_{n+1}} y_{i0} + \frac{z_j}{z_{n+1}} y_{i, n+1} \quad \left( \begin{matrix} i=0 \dots m+1 \\ j=1 \dots n \end{matrix} \right) \quad 2)$$

In § 1 hebben we ons de beperking opgelegd, dat het traagheidsmoment van alle langs- en van alle dwarsbalken gelijkvormig moest verlopen. We zullen de verhouding van de stijfheid van langsbalk  $j$  tot die van langsbalk 0  $\frac{1}{K_j}$  en de verhouding van de stijfheid van dwarsbalk  $i$  tot die van dwarsbalk 0  $\frac{1}{L_i}$  noemen.

Het is dan mogelijk de krachten  $B_{ij}^3$  in  $B_{i0}^3$  en  $B_{i, n+1}^3$  uit te drukken. Om langsbalk  $j$  de zakkingen  $y_{i0}$  ( $i=0 \dots m+1$ ) te verleen hebben we nodig de krachten  $\frac{B_{i0}^3}{K_j}$  ( $i=0 \dots m+1$ ). Om langsbalk  $j$  de zakkingen  $y_{i, n+1}$  ( $i=0 \dots m+1$ ) te verleen hebben we nodig de krachten  $\frac{K_{n+1}}{K_j} B_{i, n+1}^3$  ( $i=0 \dots m+1$ ), zoodat uit de verg. 2) volgt:

$$B_{ij}^3 = \frac{1}{K_j} \frac{z_{n+1} - z_j}{z_{n+1}} B_{i0}^3 + \frac{K_{n+1}}{K_j} \frac{z_j}{z_{n+1}} B_{i, n+1}^3 \quad \left( \begin{matrix} i=0 \dots m+1 \\ j=1 \dots n \end{matrix} \right) \quad 3)$$

Substitueeren we de zoo gevonden waarden van  $B_{ij}^3$  in de verg. 1), dan krijgen we:

$$\sum_{j=0}^n B_{ij}^2 (z_{n+1} - z_j) = B_{i0}^3 \sum_{j=0}^n \frac{1}{K_j} \cdot \frac{(z_{n+1} - z_j)^2}{z_{n+1}} +$$

$$+ B_{i, n+1}^3 \sum_{j=1}^n \frac{K_{n+1}}{K_j} \cdot \frac{z_j (z_{n+1} - z_j)}{z_{n+1}}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} B_{ij}^2 z_j = B_{i0}^3 \sum_{j=1}^n \frac{1}{K_j} \cdot \frac{z_j (z_{n+1} - z_j)}{z_{n+1}} +$$

$$+ B_{i, n+1}^3 \sum_{j=1}^{n+1} \frac{K_{n+1}}{K_j} \cdot \frac{z_j^2}{z_{n+1}} \quad (i=0 \dots m+1) \quad 4)$$

Uit de verg. 4) zijn  $B_{i0}^3$  en  $B_{i, n+1}^3$  ( $i=0 \dots m+1$ ) te berekenen, zoodat de verg. 3) ons  $B_{ij}^3$  ( $i=0 \dots m+1$ ;  $j=0 \dots n+1$ ) leveren. Alle  $B_3$ -krachten zijn dus bekend, waarna de  $B_4$ -krachten als het verschil van de  $B_2$ - en de  $B_3$ -krachten gevonden worden.

$$B_{ij}^4 = B_{ij}^2 - B_{ij}^3 \quad \left( \begin{matrix} i=0 \dots m+1 \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad 5)$$

Het splitsen van het krachtstelsel  $B_4$  in de krachtstelsels  $B_5$  en  $B_6$  geschiedt op dezelfde manier. Er zal hier volstaan worden met het neerschrijven van de formules:

$$\sum_{i=0}^m B_{ij}^4 (x_{m+1} - x_i) = \sum_{i=0}^m B_{ij}^5 (x_{m+1} - x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} B_{ij}^4 x_i = \sum_{i=1}^{m+1} B_{ij}^5 x_i \quad (j=0 \dots n+1) \quad 6)$$

$$y_{ij} = \frac{x_{m+1} - x_i}{x_{m+1}} y_{0j} + \frac{x_i}{x_{m+1}} y_{m+1, j} \quad \left( \begin{matrix} i=1 \dots m \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad 7)$$

$$B_{ij}^5 = \frac{1}{L_i} \frac{x_{m+1} - x_i}{x_{m+1}} B_{0j}^5 + \frac{L_{m+1}}{L_i} \frac{x_i}{x_{m+1}} B_{m+1, j}^5 \quad \left( \begin{matrix} i=1 \dots m \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad 8)$$

$$\sum_{i=0}^m B_{ij}^2 (x_{m+1} - x_i) = B_{oj}^5 \sum_{i=0}^m \frac{1}{L_i} \cdot \frac{(x_{m+1} - x_i)^2}{x_{m+1}} +$$

$$+ B_{m+1,j}^5 \sum_{i=1}^m \frac{L_{m+1}}{L_i} \cdot \frac{x_i (x_{m+1} - x_i)}{x_{m+1}}$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} B_{ij}^4 x_i = B_{oj}^5 \sum_{i=1}^m \frac{1}{L_i} \cdot \frac{x_i (x_{m+1} - x_i)}{x_{m+1}} +$$

$$+ B_{m+1,j}^5 \sum_{i=1}^{m+1} \frac{L_{m+1}}{L_i} \cdot \frac{x_i^2}{x_{m+1}} \quad (j=0 \dots n+1) \quad \dots 9)$$

$$B_{ij}^6 = B_{ij}^4 - B_{ij}^5 \quad \left( \begin{matrix} i=0 \dots m+1 \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad \dots 10)$$

Ter vereenvoudiging kan in de verg. 9)  $B_{ij}^4$  door  $B_{ij}^2$  vervangen worden. Immers het laststelsel  $B_{ij}$  wordt alleen door de langsbalken gedragen. Dit is slechts mogelijk indien het voor elken langsbalk afzonderlijk een evenwichtskrachtsysteem vormt. Voor dit systeem geldt dus per langsbalk:

$$\sum_{i=0}^m B_{ij}^3 (x_{m+1} - x_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} B_{ij}^3 x_i = 0 \quad (j=0 \dots m+1) \quad \dots 11)$$

Nu geldt voor elk knooppunt afzonderlijk:

$$B_{ij}^2 = B_{ij}^3 + B_{ij}^4 \quad \left( \begin{matrix} i=0 \dots m+1 \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad \dots 12)$$

zoodat ook

$$\sum_{i=0}^m B_{ij}^2 (x_{m+1} - x_i) = \sum_{i=0}^m B_{ij}^3 (x_{m+1} - x_i) + \sum_{i=0}^m B_{ij}^4 (x_{m+1} - x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^m B_{ij}^4 (x_{m+1} - x_i)$$

$$\sum_{i=1}^{m+1} B_{ij}^2 x_i = \sum_{i=1}^{m+1} B_{ij}^3 x_i + \sum_{i=1}^{m+1} B_{ij}^4 x_i = \sum_{i=1}^{m+1} B_{ij}^4 x_i \quad (j=0 \dots n+1)$$

$$\dots \dots \dots 13)$$

5. Eigenbelastingen.

Noemen we  $\alpha_{ir}^j$  de zakking van knooppunt  $i$  van langsbalk  $j$  tengevolge van een eenheidskracht in het knooppunt  $r$ , wanneer deze balk in de knooppunten 0 en  $m+1$  is opgelegd en  $\beta_{js}^i$  de

zakking van knooppunt  $j$  van dwarsbalk  $i$  tengevolge van een eenheidskracht in het knooppunt  $s$ , wanneer deze dwarsbalk in de knooppunten 0 en  $n+1$  is opgelegd, dan luidt de voorwaarde, dat de langs- en dwarsbalken op elkaar passen, wanneer de langsbalken met een laststelsel belast worden, hetwelk  $\lambda$  maal zoo groot is als het laststelsel  $P_{ij}$  ( $i=0 \dots m+1$ ;  $j=0 \dots n+1$ ) op de dwarsbalken: (zie fig. 14).

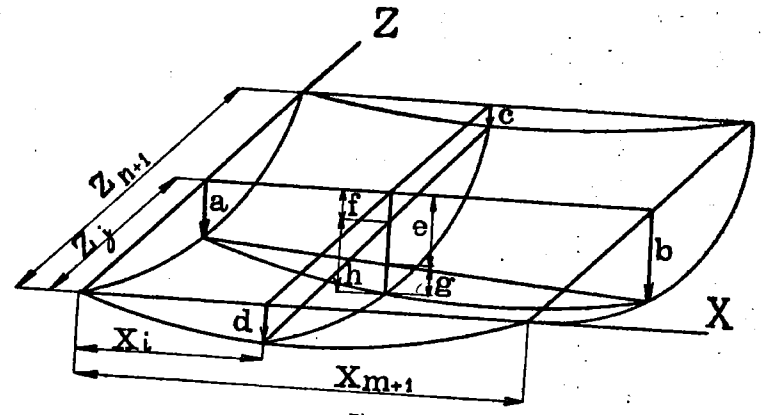


Fig. 14.

$$e + g = f + h \quad \dots \dots \dots 14)$$

waarin:

$$e = \frac{x_{m+1} - x_i}{x_{m+1}} a + \frac{x_i}{x_{m+1}} b;$$

$$f = \frac{z_{n+1} - z_j}{z_{n+1}} d + \frac{z_j}{z_{n+1}} c; \quad \dots \dots \dots 15)$$

Verder is:

$$a = \sum_{s=1}^n \beta_{js}^0 P_{0s}$$

$$b = \sum_{s=1}^n \beta_{js}^{m+1} P_{m+1,s}$$

$$c = \lambda \sum_{r=1}^m \alpha_{ir}^{m+1} P_{r,n+1}$$

$$d = \lambda \sum_{r=1}^m \alpha_{ir}^0 P_{r,0}$$

$$g = \lambda \sum_{r=1}^m \alpha_{ir}^j P_{r,j}$$

$$h = \sum_{s=1}^n \beta_{js}^i P_{is} \dots \dots \dots 16)$$

Substitutie van 15) en 16) in 14) levert:

$$\begin{aligned} & \frac{x_{m+1} - x_i}{x_{m+1}} \sum_{s=1}^n \beta_{js}^o P_{os} + \frac{x_i}{x_{m+1}} \sum_{s=1}^n \beta_{js}^{m+1} P_{m+1,s} + \lambda \sum_{r=1}^m \alpha_{ir}^j P_{rj} = \dots \\ & = \frac{z_{n+1} - z_j}{z_{n+1}} \lambda \sum_{r=1}^m \alpha_{ir}^o P_{ro} \frac{z_j}{z_{n+1}} \lambda \sum_{r=1}^m \alpha_{ir}^{n+1} P_{r,n+1} + \sum_{s=1}^n \beta_{js}^i P_{is} \\ & \quad \left( \begin{matrix} i = r = 1 \dots \dots m \\ j = s = 1 \dots \dots n \end{matrix} \right) \dots \dots \dots 17) \end{aligned}$$

Bovendien hebben we de beschikking over de evenwichtsvergelijkingen:

$$\sum_{r=0}^m P_{rs} (x_{m+1} - x_r) = 0; \sum_{r=1}^{m+1} P_{rs} x_r = 0 \quad (s = 1 \dots \dots n + 1) \dots \dots \dots 18)$$

$$\sum_{s=0}^n P_{rs} (z_{n+1} - z_s) = 0; \sum_{s=1}^{n+1} P_{rs} z_s = 0 \quad (r = 1 \dots \dots m + 1) \dots \dots \dots 19)$$

waaruit volgt:

$$P_{os} = - \sum_{r=1}^m P_{rs} \frac{x_{m+1} - x_r}{x_{m+1}}; P_{m+1,s} = - \sum_{r=1}^m P_{rs} \frac{x_r}{x_{m+1}} \dots \dots \dots 20)$$

$$P_{ro} = \sum_{s=1}^n P_{rs} \frac{z_{n+1} - z_s}{z_{n+1}}; P_{r,n+1} = - \sum_{s=1}^n P_{rs} \frac{z_s}{z_{n+1}} \dots \dots \dots 21)$$

Substitutie van 20) en 21) in 17) geeft:

$$\begin{aligned} & - \frac{x_{m+1} - x_i}{x_{m+1}} \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^m \beta_{js}^o P_{rs} \frac{x_{m+1} - x_r}{x_{m+1}} - \\ & - \frac{x_i}{x_{m+1}} \sum_{s=1}^n \sum_{r=1}^m \beta_{js}^{m+1} P_{rs} \frac{x_r}{x_{m+1}} + \lambda \sum_{r=1}^m \alpha_{ir}^j P_{rj} = \dots \\ & = - \frac{z_{n+1} - z_j}{z_{n+1}} \lambda \sum_{s=1}^m \sum_{r=1}^n \alpha_{ir}^o P_{rs} \frac{z_{n+1} - z_s}{z_{n+1}} - \\ & - \frac{z_j}{z_{n+1}} \lambda \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^n \alpha_{ir}^{n+1} P_{rs} \frac{z_s}{z_{n+1}} + \sum_{s=1}^n \beta_{js}^i P_{is} \\ & \quad \left( \begin{matrix} i = r = 1 \dots \dots m \\ j = s = 1 \dots \dots n \end{matrix} \right) \dots \dots \dots 22) \end{aligned}$$

De verg. 22) zijn  $mn$  lineaire homogene vergelijkingen met  $mn$  onbekenden. Een van nul verschillende oplossing is slechts mogelijk, wanneer de determinant bepaald door de coëfficiënten nul is. Deze determinant is een  $mn^e$  machtsvergelijking in  $\lambda$ , zoodat  $mn$  waarden van  $\lambda$  gevonden kunnen worden, waarbij  $mn$  eigenbelastingen behooren. Dit alles geldt nog voor balkramen met willekeurige balken.

Hebben echter de langs balken gelijkvormig verloopende traagheidsmomenten en is dit ook het geval met de dwarsbalken, dan kunnen de wortels van deze vergelijking eenvoudig gevonden worden.

We bepalen de eigenbelastingen en eigenwaarden van langs balk o, wanneer deze gesteund wordt door veeren ter plaatse van de knooppunten met veerconstanten  $L_i$  ( $i = 0 \dots \dots m + 1$ ) en noemen de lasten van de  $k^e$  eigenbelasting  $Q_i^k$  en de bijbehorende eigenwaarde  $\mu_k$ . Hetzelfde doen we met dwarsbalk o, welke dan in de knooppunten gesteund wordt door veeren met veerconstanten  $K_j$  ( $j = 0 \dots \dots n + 1$ ). De lasten van de  $l^e$  eigenbelasting worden dan  $R_j^l$  genoemd en de erbij behorende eigenwaarde  $\nu_l$ . Het blijkt nu, dat de eigenbelastingen  $P_{ij}^{kl}$  van het geheele balkraam uit de genoemde eigenbelastingen bepaald kunnen worden door te stellen:

$$P_{ij}^{kl} = Q_i^k \cdot R_j^l \quad \left( \begin{matrix} i = 0 \dots \dots m + 1 \\ j = 0 \dots \dots n + 1 \\ k = 1 \dots \dots m \\ l = 1 \dots \dots n \end{matrix} \right) \dots \dots \dots 23)$$

terwijl de bijbehorende eigenwaarden van het vraagstuk gevonden worden uit:

$$\lambda_{kl} = \frac{\mu_k}{\nu_l} \quad \left( \begin{matrix} k = 1 \dots \dots m \\ l = 1 \dots \dots n \end{matrix} \right) \dots \dots \dots 24)$$

Maken we gebruik van de vergelijkingen:

$$\alpha_{ir}^j = K_j \alpha_{ir}^o \quad \left( \begin{matrix} j = 1 \dots \dots n + 1 \\ i = 1 \dots \dots m \\ r = 1 \dots \dots m \end{matrix} \right) \dots \dots \dots 25)$$

$$\text{en } \beta_{js}^i = L_i \beta_{js}^o \quad \left( \begin{matrix} i = 1 \dots \dots m + 1 \\ j = 1 \dots \dots n \\ s = 1 \dots \dots n \end{matrix} \right) \dots \dots \dots 26)$$

welke volgen uit de gelijkvormigheid van langs- resp. dwarsbalken en substitueeren we 23) en 24) in 22), dan volgt na eenig omwerken en het bijvoegen van den term

$$\mu \nu \sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^n Q_r R_s \alpha_{ir}^0 \beta_{js}^0$$

aan beide zijden van het gelijkteken:

$$\begin{aligned} & \nu \sum_{s=1}^n \beta_{js}^0 R_s \left[ -Q_i L_i + \sum_{r=1}^m Q_r \{ \mu \alpha_{ir}^0 - \right. \\ & \left. - \frac{(x_{m+1} - x_i)(x_{m+1} - x_r)}{x_{m+1}^2} - \frac{x_i x_r}{x_{m+1}^2} \cdot L_{m+1} \} \right] = \\ & = \mu \sum_{r=1}^m \alpha_{ir}^0 Q_r \left[ -R_j K_j + \sum_{s=1}^n R_s \{ \nu \beta_{js}^0 - \right. \\ & \left. - \frac{(z_{n+1} - z_j)(z_{n+1} - z_s)}{z_{n+1}^2} - \frac{z_j z_s}{z_{n+1}^2} K_{n+1} \} \right] \quad \left( \begin{matrix} i=r=1 \dots m \\ j=s=1 \dots n \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad 27)$$

Wanneer  $Q$  en  $R$  de eigenbelastingen van langs- en dwarsbalk  $o$  zijn, dan zijn de vormen tusschen [ ] blijkens de verg. 7) hoofdstuk 5, nul, zoodat de verg. 27) bevredigd worden.

### 6. Orthogonaliteit van de eigenbelastingen.

Gebruikmakende van de orthogonaliteit van de eigenbelastingen van langs- en dwarsbalk  $o$  zullen we aantonen, dat als orthogonaliteitseigenschap voor de eigenbelastingen van het balkraam geldt:

$$\sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} P_{ij}^{kl} P_{ij}^{pq} K_j L_i = 0 \quad (k \neq p \text{ en/ of } l \neq q)$$

Door substitutie van de verg. 23) in verg. 28) vinden we:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} P_{ij}^{kl} P_{ij}^{pq} K_j L_i = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} Q_i^k R_j^l Q_i^p R_j^q K_j L_i = \\ & = \left\{ \sum_{i=0}^{m+1} Q_i^k Q_i^p L_i \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=0}^{n+1} R_j^l R_j^q K_j \right\} \dots \dots \quad 29) \end{aligned}$$

De linker vorm tusschen accoladen is nul voor  $k \neq p$  en de rechter voor  $l \neq q$ , hetgeen volgt uit hoofdstuk 5 verg. 8), zoodat

de verg. 28) bevredigd worden. Zijn de eigenbelastingen  $Q_k$  en  $R_l$  genormeerd, dan is de eigenbelasting  $P_{kl}$  ook genormeerd, immers:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} (P_{ij}^{kl})^2 K_j L_i = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} (Q_i^k)^2 (R_j^l)^2 K_j L_i = \\ & = \left\{ \sum_{i=0}^{m+1} (Q_i^k)^2 L_i \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=0}^{n+1} (R_j^l)^2 K_j \right\} = 1 \cdot 1 = 1 \quad 30) \end{aligned}$$

### 7. Ontwikkeling van het laststelsel $B_6$ naar de eigenbelastingen.

Daar het laststelsel  $B_6$  per langs- en per dwarsligger een evenwichtskrachtsysteem vormt, bestaat het uit  $m \cdot n$  onafhankelijke krachten. Daar we de beschikking hebben over  $m \cdot n$  eigenbelastingen, is een ontwikkeling van  $B_6$  naar de eigenbelastingen altijd mogelijk.

$$B_{ij}^6 = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n a_{kl} P_{ij}^{kl} \quad \left( \begin{matrix} i=0 \dots m+1 \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad 31)$$

waarin  $a_{kl}$ , gebruikmakende van de orthogonaliteit en van het genormeerd zijn van de eigenbelastingen, berekend kan worden uit:

$$a_{kl} = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} B_{ij}^6 P_{ij}^{kl} K_j L_i \quad \left( \begin{matrix} k=1 \dots m \\ l=1 \dots n \end{matrix} \right) \quad 32)$$

Substitutie van 23) in 32) levert:

$$\begin{aligned} & a_{kl} = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} B_{ij}^6 Q_i^k R_j^l K_j L_i = \sum_{j=0}^{n+1} R_j^l K_j \sum_{i=0}^{m+1} B_{ij}^6 Q_i^k L_i \\ & \cdot \left( \begin{matrix} k=1 \dots m \\ l=1 \dots n \end{matrix} \right) \dots \dots \quad 33) \end{aligned}$$

Stellen we in de verg. 33)

$$\sum_{i=0}^{m+1} B_{ij}^6 Q_i^k L_i = b_{kj} \quad \left( \begin{matrix} k=1 \dots m \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad 34)$$

dan gaan de verg. 33) over in:

$$a_{kl} = \sum_{j=0}^{n+1} R_j^l b_{kj} K_j \quad \left( \begin{matrix} k=1 \dots m \\ l=1 \dots n \end{matrix} \right) \quad 35)$$

We bepalen dus eerst de  $b$ 's, dat wil zeggen, we ontwikkelen de belasting van elken langs- en dwarsligger in de eigenbelastingen van langs- en dwarsbalk  $o$  en bepalen daarna met de verg. 35) de coëfficiënten  $a_{kl}$

Het is echter ook mogelijk eerst de belasting van elken dwarsbalk in de eigenbelastingen van dwarsbalk o te ontwikkelen en daarna de  $a$ 's te berekenen. De verg. 33) kunnen n.l. ook als volgt geschreven worden:

$$a_{kl} = \sum_{i=0}^{m+1} \sum_{j=0}^{n+1} B_{ij}^6 Q_i^k R_j^l K_j L_i = \sum_{i=0}^{m+1} Q_i^k L_i \sum_{j=0}^{n+1} B_{ij}^6 R_j^l K_j \quad \left( \begin{matrix} k=1 \dots m \\ l=1 \dots n \end{matrix} \right) \quad 36)$$

waarin we nu

$$\sum_{j=0}^{n+1} B_{ij}^6 R_j^l K_j = c_{li} \quad \left( \begin{matrix} l=1 \dots n \\ i=0 \dots m+1 \end{matrix} \right) \quad 37)$$

stellen, waardoor 36) overgaat in:

$$a_{kl} = \sum_{i=0}^{m+1} Q_i^k c_{li} L_i \quad \left( \begin{matrix} k=1 \dots m \\ l=1 \dots n \end{matrix} \right) \quad 38)$$

Zijn alle  $a$ 's bekend, dan kunnen we de verschillende eigenbelastingen over langs- en dwarsbalken verdeelen. Vatten we b.v. de  $kl$ -de eigenbelasting in het oog. Wanneer we hiervan het  $\frac{\lambda_{kl}}{1 + \lambda_{kl}}$ -de gedeelte op de langsbalken en het  $\frac{1}{1 + \lambda_{kl}}$ -de gedeelte op de dwarsbalken zetten, dan zullen beide systemen balken, blijkens de definitie van de eigenbelasting op elkaar passen. De aangegeven verdeling van de eigenbelasting  $P_{kl}$  zal dus de juiste zijn.

Maken we gebruik van verg. 24) dan vinden we:

$$\frac{\lambda_{kl}}{1 + \lambda_{kl}} = \frac{\frac{\mu_k}{\nu_l}}{1 + \frac{\mu_k}{\nu_l}} = \frac{\mu_k}{\mu_k + \nu_l}$$

en

$$\frac{1}{1 + \lambda_{kl}} = \frac{1}{1 + \frac{\mu_k}{\nu_l}} = \frac{\nu_l}{\mu_k + \nu_l} \quad \left( \begin{matrix} k=1 \dots m \\ l=1 \dots n \end{matrix} \right) \quad 39)$$

Plaatsen we het geheele laststelsel  $B_6$  op het balkraam, dan zullen hiervan de langsbalken een laststelsel  $\bar{B}_6$  en de dwarsbalken een laststelsel  $\bar{B}_6$  dragen, waarbij  $\bar{B}_6$  en  $\bar{B}_6$  gegeven worden door:

$$\bar{B}_6 = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\mu_k}{\mu_k + \nu_l} a_{kl} P_{ij}^{kl}$$

$$\bar{B}_6 = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{\nu_l}{\mu_k + \nu_l} a_{kl} P_{ij}^{kl} \quad \left( \begin{matrix} i=0 \dots m+1 \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad 40)$$

## 8. Benaderingsmethode.

Wanneer we geen prijs stellen op een exacte bepaling van  $\bar{B}_6$  en  $\bar{B}_6$  doch deze krachtsverdeling slechts met een bepaalden graad van nauwkeurigheid willen kennen, dan kan de volgende benaderingsmethode toegepast worden.

We bepalen van langsligger o en van dwarsligger o de eerste eigenbelasting. We berekenen daarna de coëfficiënt  $b_{ij}$  ( $j=0 \dots n+1$ ) met behulp van de verg. 34) en hieruit  $a_{11}$ , met de verg. 35). Eveneens bepalen we  $c_{1i}$  ( $i=0 \dots m+1$ ) met de verg. 37) en eventueel hieruit als controle nogmaals  $a_{11}$ .

De belasting  $B_6$  kan nu in de volgende 4 deelen gesplitst worden:

$$B_{ij}^6 = B_{ij}^7 + B_{ij}^8 + B_{ij}^9 + B_{ij}^{10} \quad \left( \begin{matrix} i=0 \dots m+1 \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad 41)$$

waarin:

$$B_{ij}^7 = a_{11} P_{ij}^{11}$$

$$B_{ij}^8 = \sum_{l=2}^n a_{1l} P_{ij}^{1l} = b_{1j} Q_1^i - B_{ij}^7$$

$$B_{ij}^9 = \sum_{k=2}^m a_{k1} P_{ij}^{k1} = c_{1i} R_j^1 - B_{ij}^7$$

$$B_{ij}^{10} = \sum_{k=2}^m \sum_{l=2}^n a_{kl} P_{ij}^{kl} \quad \left( \begin{matrix} i=0 \dots m+1 \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad 42)$$

Bij het bepalen van het laststelsel  $B_9$  kunnen we ook uitgaan van het laststelsel, hetwelk verkregen wordt door  $B_7$  en  $B_8$  van  $B_6$  af te trekken.

$$\begin{aligned} B_{ij}^6 - B_{ij}^7 - B_{ij}^8 &= B_{ij}^6 - b_{1j} Q_1^i = \\ &= \sum_{k=2}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} P_{ij}^{kl} \quad \left( \begin{matrix} i=0 \dots m+1 \\ j=0 \dots n+1 \end{matrix} \right) \quad 43) \end{aligned}$$

Hieruit bepalen we de coëfficiënten:

$$d_{1i} = \sum_{j=0}^{n+1} (B_{ij}^6 - B_{ij}^7 - B_{ij}^8) R_j^1 K_j \quad (i=0 \dots m+1) \quad 44)$$

De belasting  $B_9$  wordt nu bepaald door:

$$B_{ij}^0 = d_{ij} R_j^i \quad \left( \begin{matrix} i = 0 \dots m + 1 \\ j = 0 \dots n + 1 \end{matrix} \right)$$

Voor het laststelsel  $B_7$  geschiedt de verdeling over langs- en dwarsbalken volgens de verg. 40).

Laststelsel  $B_8$  wordt behandeld volgens de iteratiemethode, beschreven in hoofdstuk 5, § 5, waarbij de dwarsbalken gesteund worden door veeren met veerconstanten  $K_j$  ( $j = 0 \dots n + 1$ ).

Evenzoo wordt het laststelsel  $B_9$  behandeld, waarbij t.o.z. van  $B_8$  langs- en dwarsbalken van functie verwisselen.

Het laststelsel  $B_{10}$  wordt naar schatting over langs- en dwarsbalken verdeeld. Willen we zeker zijn, dat niet een te gunstige belasting voor een van de balkstellen gevonden wordt, dan kunnen we  $B_{10}$  in zijn volle grootte zoowel op de langs- als op de dwarsbalken plaatsen. In het algemeen zullen we  $B_{10}$  in gelijke deelen over langs- en dwarsbalken verdeelen.

Zijn alle lasten over langs- en dwarsbalken verdeeld, dan kunnen de momentenlijnen geconstrueerd worden.

9. Voorbeeld.

Als voorbeeld zullen we een balkraam doorrekenen met 5 langs- balken en 7 dwarsbalken ( $m = 5, n = 3$ ), welke balken nergens uitwendig gesteund worden. De constructie is dus 15-voudig statisch

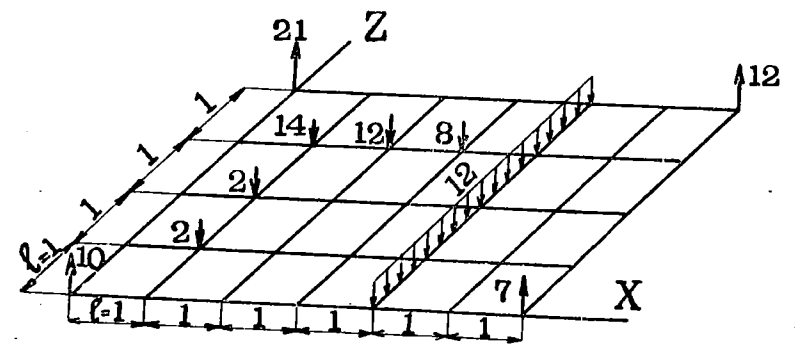


Fig. 15.

onbepaald. De balken hebben alle een gelijk constant traagheidsmoment; de knooppuntsafstanden zijn  $l$ . Deze afstand wordt als lengteeenheid ingevoerd.

De belasting  $B$  is uit fig. 15 af te lezen; zij bestaat uit eenige krachten in de knooppunten en uit een gelijkmatig verdeelde last op dwarsbalk 4, totaal groot 12.

Het laststelsel  $B_1$  bestaat uit een gelijkmatige belasting groot 12 op dwarsbalk 4 en krachten:  $-1,179$ ;  $-3,429$ ;  $-2,786$ ;  $-3,429$  en  $-1,179$  1) in de knooppunten 4,0; 4,1; 4,2; 4,3 en 4,4 2).

De krachten van laststelsel  $B_2$  zijn in tabel V vereenigd.

TABEL V.

$$B_2 = B - B_1.$$

4	-21	0	0	0	1,179	0	-12
3	0	14	12	8	3,429	0	0
2	0	2	0	0	2,786	0	0
1	0	2	0	0	3,429	0	0
$z=0$	-10	0	0	0	1,179	0	-7
$B_2$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

De resultaten van de splitsing van  $B_2$  in  $B_3$  en  $B_4$  en van  $B_4$  in  $B_5$  en  $B_6$  zijn te vinden in de volgende tabellen.

De waarden voor  $B_3$  worden gevonden met behulp van de verg. 3) en 4). De waarden voor  $B_5$  met behulp van de verg. 8) en 9).

1) Een naar boven werkende kracht wordt met het minusteeken aangegeven.  
 2) Dit laststelsel  $B_1$  bestaat immers volgens definitie uit de werkelijke belasting  $B$  van het balkraam en de oplegreacties die zouden ontstaan, wanneer het balkraam in alle knooppunten vast ondersteund was. De krachten, welke bij  $B$  op de knooppunten staan zullen in  $B_1$  geen bijdrage leveren, omdat de door deze krachten veroorzaakte oplegreacties op het teeken na er aan gelijk zijn. Het is dus voor het bepalen van  $B_1$  slechts noodig dwarsbalk 4 te beschouwen. De berekening is uitgevoerd met den driemomentenregel.

TABEL VI.

 $B_3$ .

4	-10,6	6	4,8	3,2	2,4	0	-5,8
3	-8,4	4,8	3,6	2,4	2,4	0	-4,8
2	-6,2	3,6	2,4	1,6	2,4	0	-3,8
1	-4	2,4	1,2	0,8	2,4	0	-2,8
$x=0$	-1,8	1,2	0	0	2,4	0	-1,8
$B_3$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

TABEL VII.

 $B_4 = B_2 - B_3$ .

4	-10,4	-6	-4,8	-3,2	-1,221	0	-6,2
3	8,4	9,2	8,4	5,6	1,029	0	4,8
2	6,2	-1,6	-2,4	-1,6	0,386	0	3,8
1	4	-0,4	-1,2	-0,8	1,029	0	2,8
$x=0$	-8,2	-1,2	0	0	-1,221	0	-5,2
$B_4$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

TABEL VIII.

 $B_5$ .

4	-7,566	-6,558	-5,552	-4,546	-3,540	-2,534	-1,528
3	9,265	7,959	6,653	5,347	4,041	2,735	1,429
2	0,813	0,770	0,727	0,684	0,641	0,598	0,555
1	0,836	0,816	0,796	0,776	0,756	0,736	0,716
$x=0$	-3,352	-2,988	-2,624	-2,260	-1,896	-1,532	-1,168
$B_5$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

TABEL IX.

 $B_6 = B_5 - B_4$ .

4	-2,834	0,558	0,752	1,346	2,318	2,534	-4,672
3	-0,865	1,241	1,747	0,253	-3,022	-2,735	3,371
2	5,387	-2,370	-3,127	-2,284	-0,255	-0,598	3,245
1	3,164	-1,216	-1,996	-1,576	0,263	-0,736	2,084
$x=0$	-4,848	1,788	2,624	2,260	0,674	1,532	-4,032
$B_6$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Voor de eerste genormeerde eigenbelasting van langsligger  $o$  wordt gevonden: <sup>1)</sup>

$$Q_i^1 = \text{resp.: } -0,529; -0,038; 0,331; 0,472; 0,331; -0,038; -0,529$$

en voor de eerste eigenwaarde:  $\mu_1 = 0,222 EI$ .

Evenzoo vinden we voor de eerste genormeerde eigenbelasting van dwarsliggers  $o$ :

$$R_j^1 = -0,528; 0,244; 0,568; 0,244; -0,528$$

en voor de bijbehorende eigenwaarde:  $\nu_1 = 0,912 EI$ .

We gaan nu over tot het bepalen van de coëfficiënten  $b_{ij}$  ( $j = 0 \dots 4$ ), dat wil zeggen, we bepalen met welk bedrag de eerste eigenbelasting van langsbalk  $o$  in de ontwikkeling van de belastingen van de verschillende langsbalken naar de eigenbelastingen van langsbalk  $o$  voorkomt. Voor deze coëfficiënten vinden we (zie verg. 34)

$$b_{ij} = \text{resp.: } 5,500; -1,602; -6,650; -4,010; 6,720,$$

waaruit we met behulp. van verg. 35) vinden:

$$a_{11} = -11,60.$$

De belasting  $B_7$  is hierdoor bekend:

<sup>1)</sup> Zie voor de berekening hiervan hoofdstuk 5, § 6.



TABEL X.

$$B_{ij}^I = a_{11} P_{ij}^{II} = -11,60 Q_i^I R_j^I,$$

4	-3,227	-0,231	2,021	2,876	2,021	-0,231	-3,227
3	1,490	0,107	-0,934	-1,327	-0,934	0,107	1,490
2	3,480	0,249	-2,180	-3,100	-2,180	0,249	3,480
1	1,490	0,107	-0,934	-1,327	-0,934	0,107	1,490
$z=0$	-3,227	-0,231	2,021	2,876	2,021	-0,231	-3,227
$\bar{B}_7$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Van deze belasting  $B_7$  wordt het  $\frac{\mu_1}{\mu_1 + \nu_1} = \frac{0,222}{0,222 + 0,912} = 0,196$ -de gedeelte door de langs- en het  $0,804$ -de gedeelte door de dwarsbalken gedragen. De belasting  $\bar{B}_7$  op de langsbalken wordt dus:

TABEL XI.

 $\bar{B}_7$ .

4	-0,633	-0,045	0,396	0,564	0,396	-0,045	-0,633
3	0,292	0,021	-0,183	-0,260	-0,183	0,021	0,292
2	0,682	0,049	-0,428	-0,608	-0,428	0,049	0,682
1	0,292	0,021	-0,183	-0,260	-0,183	0,021	0,292
$z=0$	-0,633	-0,045	0,396	0,564	0,396	-0,045	-0,633
$\bar{B}_7$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

en de belasting  $\bar{B}_7$  op de dwarsbalken:

TABEL XII.

 $\bar{B}_7$ .

4	-2,594	-0,186	1,625	2,312	1,625	-0,186	-2,594
3	1,198	0,086	-0,751	-1,067	-0,751	0,086	1,198
2	2,798	0,200	-1,752	-2,492	-1,752	0,200	2,798
1	1,198	0,086	-0,751	-1,067	-0,751	0,086	1,198
$z=0$	-2,594	-0,186	1,625	2,312	1,625	-0,186	-2,594
$\bar{B}_7$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Alvorens we belasting  $B_8$  bepalen, berekenen we eerst  $B_7 + B_8$  en trekken daarvan  $B_7$  af:

TABEL XIII.

$$B_{ij}^I + B_{ij}^8 = \sum_{l=1}^3 a_{il} P_{ij}^{II} = b_{ij} Q_i^I$$

4	-2,900	-0,208	1,819	2,582	1,819	-0,208	-2,900
3	0,846	0,061	-0,530	-0,753	-0,530	0,061	0,846
2	3,505	0,251	-2,195	-3,120	-2,195	0,251	3,505
1	2,118	0,152	-1,326	-1,882	-1,326	0,152	2,118
$z=0$	-3,550	-0,254	2,223	3,160	2,223	-0,254	-3,550
$B_7 + B_8$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Door hiervan  $B_7$  af te trekken vinden we voor  $B_8$ :

TABEL XIV.

$$B_{ij}^8 = \sum_{l=2}^3 a_{il} P_{ij}^l$$

4	0,327	0,023	-0,202	-0,294	-0,202	0,023	0,327
3	-0,644	-0,046	0,404	0,574	0,404	-0,046	-0,644
2	0,025	0,002	-0,015	-0,020	-0,015	0,002	0,025
1	0,628	0,045	-0,392	-0,555	-0,392	0,045	0,628
$z=0$	-0,323	-0,023	0,202	0,284	0,202	-0,023	-0,323
$B_8$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Op deze belasting  $B_8$  wordt een iteratiemethode toegepast, door eerst de geheele  $B_8$  op de dwarsbalken te plaatsen en dan te onderzoeken, welke lasten op de langsbalken geplaatst moeten worden om aan de knooppunten gelijke doorbuigingen te verlenen. Het is slechts noodig de vervormingen van dwarsbalk o te bepalen, daar de andere dwarsbalken immers met een gelijkvormig laststelsel belast worden. Eén iteratie blijkt voldoende te zijn.

Van  $B_8$  wordt door de langsbalken gedragen:

TABEL XV.

 $\bar{B}_8$ 

4	0,006	0	-0,004	-0,005	-0,004	0	0,006
3	-0,013	-0,001	0,008	0,012	0,008	-0,001	-0,013
2	0	0	0	0	0	0	0
1	0,012	0,001	-0,008	-0,011	-0,008	0,001	0,012
$z=0$	-0,006	0	0,004	0,005	0,004	0	-0,006
$\bar{B}_8$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

en door de dwarsbalken:

TABEL XVI.

 $\bar{B}_8$ 

4	0,321	0,023	-0,198	-0,289	-0,198	0,023	0,321
3	-0,631	-0,045	0,396	0,562	0,396	-0,045	-0,631
2	0,025	0,002	-0,015	-0,020	-0,015	0,002	0,025
1	0,616	0,044	-0,384	-0,544	-0,384	0,044	0,616
$z=0$	-0,317	-0,023	0,198	0,279	0,198	-0,023	-0,317
$\bar{B}_8$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Uit het laststelsel  $B_6 - B_7 - B_8$  bepalen we vervolgens volgens de verg. 44) de coëfficiënten  $a_{il}$ , waarvoor resp. gevonden wordt:

1,573; -3,046; 0,215; 1,940; 1,450; -3,805; 1,664,

waarna het laststelsel  $B_9$  bepaald wordt uit de verg. 45).

TABEL XVII.

 $B_9$ 

4	-0,823	1,593	-0,112	-1,015	-0,759	1,992	-0,871
3	0,380	-0,736	0,052	0,469	0,351	-0,919	0,402
2	0,886	-1,718	0,120	1,093	0,818	-2,145	0,938
1	0,380	-0,736	0,052	0,469	0,351	-0,919	0,402
$z=0$	-0,823	1,593	-0,112	-1,015	-0,759	1,992	-0,871
$B_9$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

De verdeling van  $B_9$  over langs- en dwarsbalken geschiedt evenals bij  $B_8$  met een iteratiemethode. Hierbij zijn echter dwars- en langsbalken van functie verwisseld. Op de dwarsbalken komt:

TABEL XVIII.

 $\bar{B}_9$ .

4	-0,115	0,191	0,044	-0,171	-0,047	0,163	-0,067
3	0,053	-0,088	-0,020	0,079	0,022	-0,075	0,031
2	0,124	-0,206	-0,048	0,184	0,050	-0,176	0,072
1	0,053	-0,088	-0,020	0,079	0,022	-0,075	0,031
$z=0$	-0,115	0,191	0,044	-0,171	-0,047	0,163	-0,067
$\bar{B}_9$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

en op de langsbalken:

TABEL XIX.

 $\bar{B}_9$ .

4	-0,708	1,404	-0,156	-0,844	-0,712	1,829	-0,804
3	0,327	-0,648	0,072	0,390	0,329	-0,844	0,371
2	0,762	-1,512	0,168	0,909	0,768	-1,969	0,866
1	0,327	-0,648	0,072	0,390	0,329	-0,844	0,371
$z=0$	-0,708	1,404	-0,156	-0,844	-0,712	1,829	-0,804
$\bar{B}_9$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Door de laststelsels  $B_7$ ,  $B_8$  en  $B_9$  van  $B_6$  af te trekken vinden we het restlaststelsel  $B_{10}$ :

TABEL XX.

 $B_{10}$ .

4	0,889	-0,829	-0,955	-0,221	1,258	0,750	-0,901
3	-2,091	1,916	2,224	0,537	-2,843	-1,877	2,123
2	0,996	-0,903	-1,052	-0,257	1,122	1,296	-1,198
1	0,666	-0,632	-0,723	-0,163	1,238	0,031	-0,436
$z=0$	-0,475	0,447	0,513	0,115	-0,790	-0,206	0,389
$B_{10}$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

welk laststelsel gelijkelijk over langs- en dwarsbalken verdeeld zal worden.

Door sommatie van  $B_3$ ,  $\bar{B}_7$ ,  $\bar{B}_8$ ,  $\bar{B}_9$  en  $1/2 B_{10}$  vinden we de totaalcrachten op de langsliggers  $\bar{B}$ .

TABEL XXI.

 $\bar{B}$ .

4	-11,491	6,945	4,559	2,805	2,709	2,159	-7,681
3	8,839	5,130	4,609	2,810	1,133	-1,762	-3,089
2	4,258	1,686	1,614	1,773	3,301	-1,272	-2,851
1	3,036	1,458	0,720	0,838	3,157	-0,807	-2,343
$z=0$	-3,384	2,782	0,500	-0,218	1,693	1,681	-3,049
$\bar{B}$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Voor de dwarsliggers moeten we sommeren:

$$\bar{B} = B_1 + B_5 + \bar{B}_7 + \bar{B}_8 + \bar{B}_9 + 1/2 B_{10}$$

TABEL XXII.

 $\bar{B}$ .

4	9,509	-6,945	-4,559	-2,805	-2,709	-2,159	-4,319
3	8,839	8,870	7,391	5,190	-1,133	1,762	3,089
2	4,258	0,314	-1,614	-1,773	-3,301	1,272	-2,851
1	3,036	0,542	-0,720	-0,838	-3,157	0,807	-2,343
$z=0$	-6,616	-2,782	-0,500	0,218	-1,693	-1,681	-3,951
$\bar{B}$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Bovendien staat op dwarsligger 4 nog een verdeelde belasting, groot 12.

Voor de momenten, die in langs- en dwarsbalken optreden, resp.  $\bar{M}$  en  $\bar{M}$  genaamd, vinden we:

TABEL XXIII.

 $\bar{M}$ .

4	o	-11,492	-16,039	-16,027	-13,211	-7,685	o
3	o	-8,837	-12,543	-11,641	-7,929	-3,083	o
2	o	-4,256	-6,826	-7,782	-6,964	-2,864	o
1	o	-3,033	-4,599	-5,454	-5,472	-2,332	o
$z=0$	o	-3,387	-3,992	-4,098	-4,421	-3,051	o
$\bar{M}$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

TABEL XXIV.

 $\bar{M}$ .

4	o	o	o	o	o	o	o
3	-9,517	-6,945	-4,556	-2,796	-1,212	-2,159	-4,328
2	-10,196	-5,020	-1,721	-0,403	-0,555	-2,556	-5,567
1	-6,616	-2,781	-0,501	-0,218	-0,200	-1,681	-3,955
$z=0$	o	o	o	o	o	o	o
$\bar{M}$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Voor dwarsligger 4 moet per veld nog een parabolisch momentenvlak worden toegevoegd met middenordinaat  $-\frac{3}{8}$ .

Om te onderzoeken welke fout we maximaal gemaakt kunnen hebben, door  $B_{10}$  willekeurig in twee gelijke delen te splitsen, geven we hier nog de momenten, veroorzaakt in langs- en dwarsbalken, wanneer deze afzonderlijk met  $\frac{1}{2} B_{10}$  belast worden, resp.  $\bar{M}_{10}$  en  $\bar{M}_{10}$ .

TABEL XXV.

 $\bar{M}_{10}$ .

4	o	0,447	0,479	0,034	-0,522	-0,449	o
3	o	-1,044	-1,130	-0,103	1,192	1,065	o
2	o	0,496	0,541	0,060	-0,551	-0,599	o
1	o	0,336	0,356	0,015	-0,409	-0,213	o
$z=0$	o	-0,237	-0,251	-0,008	0,293	0,198	o
$\bar{M}_{10}$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

TABEL XXVI.

 $\bar{M}_{10}$ .

4	o	o	o	o	o	o	o
3	0,452	-0,414	-0,481	-0,117	0,631	0,376	-0,442
2	-0,142	0,131	0,151	0,035	-0,160	-0,187	0,178
1	-0,237	0,223	0,257	0,059	-0,389	-0,101	0,198
$z=0$	o	o	o	o	o	o	o
$\bar{M}_{10}$	$x=0$	1	2	3	4	5	6

Het maximum moment in de langs balken is 16,039, terwijl dat, hetwelk veroorzaakt wordt door  $\frac{1}{2} B_{10}$  slechts 1,192 bedraagt. De grootste fout, dien we dus hebben kunnen maken is 7,4 %. Voor de dwarsbalken zijn deze getallen resp. 10,196; 0,631 en 6,2 %.

De werkelijk gemaakte fout zal waarschijnlijk kleiner, maar kan zeker niet grooter zijn. Een grootere nauwkeurigheid zou verkregen kunnen worden door van langs- en dwarsbalken meerdere eigenbelastingen te bepalen.

## HOOFDSTUK VII.

### Berekening van vliegtuigvleugels.

#### 1. Inleiding.

Het in dit hoofdstuk te berekenen geraamte van een vrijdragenden ééndekkervleugel, zooals deze bij de Fokker-verkeersvliegtuigen wordt toegepast, is in fig. 16 schematisch aangegeven.

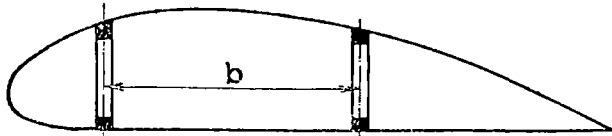


Fig. 16.

Ter vereenvoudiging van het vraagstuk beperken we ons tot het — tegenwoordig trouwens alleen nog toegepaste — geval, dat de hoofdliggers evenwijdig loopen. Verder wordt aangenomen, dat de ribben tegen buiging in een vlak loodrecht op het vlak van den vleugel oneindig stijf zijn en tegen wringing oneindig slap. De hoofdliggers worden beschouwd als zijnde elastisch tegen buiging, schuiving en wringing. De constructie wordt alleen loodrecht op haar vlak belast. De invloed van het, het geraamte omgevende triplex blijft onbesproken.

Het verschil tusschen deze vleugelconstructie en de balkramen, behandeld in hoofdstuk 6 bestaat hierin, dat in dit geval slechts 2 langsbalken (de hoofdliggers) aanwezig zijn. Daartegenover staat dat bij de balkramen geen wringing van de balken kon optreden daar deze slechts verticale krachten op elkaar konden uitoefenen' terwijl de hoofdliggers der vliegtuigvleugels tengevolge van de buiging der ribben wel gewrongen worden.

#### 2. Splitsing van het laststelsel $B$ .

De uitwendige belasting  $B$ , verdeeld over hoofdliggers en ribben, wordt in twee deelen  $B_1$  en  $B_2$  gesplitst. <sup>1)</sup> Het eerste gedeelte  $B_1$  is zóó gekozen, dat alle knooppunten in één plat vlak blijven liggen, terwijl het tweede,  $B_2$ , slechts bestaat uit krachten, aangrijpende op de knooppunten. We vinden het eerste gedeelte door hoofdliggers en ribben in de knooppunten vast te ondersteunen en er daarbij optredende oplegreacties te bepalen.

Het tweede gedeelte  $B_2$ , het verschil van  $B$  en  $B_1$  bestaat uit de oplegreacties met tegengesteld teekken. Het deel van deze oplegreacties, dat van de belasting der ribben afkomstig is, kan rechtstreeks uit het evenwicht van deze ribben bepaald worden. Daar de hoofdliggers echter balken op meer dan 2 steunpunten geworden zijn, moeten we voor het berekenen van de steunpuntreacties van de hoofdliggers vormveranderingsvergelijkingen te hulp roepen. Zijn de hoofdliggers prismatische balken, dan kan, indien de vervorming door de dwarskracht verwaarloosd wordt, de driemomentenregel gebruikt worden. Is dit niet het geval, dan verdient de hieronder gegeven berekeningswijze aanbeveling.

We snijden den balk boven elk steunpunt door, belasten elk veld met de gegeven belasting en bepalen, graphisch of numerisch de hoeken, die twee aangrenzende stukken bij elk steunpunt met elkaar maken. Deze hoeken, die we  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  zullen noemen worden gesplitst in een hoek  $\varphi'$  die het gevolg is van de buiging en een hoek  $\varphi''$  gevolg van schuiving. We moeten nu met een stel overgangsmomenten trachten deze hoeken  $\varphi$  weer tot nul terug te brengen. Het overgangsmoment bij het  $i^{\circ}$  steunpunt zal alleen zijn invloed uitoefenen op de hoeken boven het  $(i-1)^{\circ}$ ,  $i^{\circ}$  en  $(i+1)^{\circ}$  steunpunt. De hoekveranderingen in deze punten bij  $M_i = 1$  zullen resp.  $\alpha_{i-1,i}$ ,  $\alpha_{ii}$  en  $\alpha_{i+1,i}$  genoemd worden. Ze zijn evenals de hoeken  $\varphi$  samengesteld uit een term afkomstig van de buiging en een term afkomstig van de afschuiving. De overgangsmomenten zijn bepaald door de vergelijkingen:

<sup>1)</sup> Onder de belasting  $B$  wordt verstaan de krachten, door het triplex op het geraamte van hoofdliggers en ribben uitgeoefend. De vraag, hoe deze krachten berekend worden uit de luchtkrachten, die op het triplex inwerken, wordt hier niet behandeld.

$$\begin{aligned} \alpha_{11} M_1 + \alpha_{12} M_2 &= \varphi_1 \\ \alpha_{21} M_1 + \alpha_{22} M_2 + \alpha_{23} M_3 &= \varphi_2 \\ \alpha_{i, i-1} M_{i-1} + \alpha_{ii} M_i + \alpha_{i, i+1} M_{i+1} &= \varphi_i \\ \alpha_{n, n-1} M_{n-1} + \alpha_{nn} M_n &= \varphi_n \dots 1) \end{aligned}$$

3. Het bepalen van de grootheden  $\alpha$  en  $\varphi$ .

De berekening van de grootheden  $\alpha$  en  $\varphi$  voor zoover afkomstig van de buiging moge hier achterwege blijven. Het resultaat is

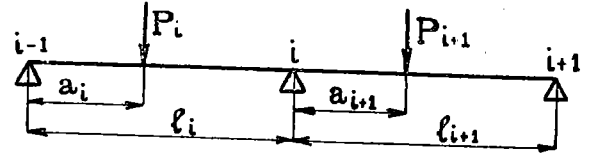


Fig. 17

$$\begin{aligned} \alpha'_{i-1, i} &= \frac{l_i}{12 E} \left\{ \frac{I}{I_{i-1}} + \frac{I}{I_i} \right\} \\ \alpha'_{ii} &= \frac{l_i}{12 E} \left\{ \frac{I}{I_{i-1}} + \frac{3}{I_i} \right\} + \frac{l_{i+1}}{12 E} \left\{ \frac{I}{I_{i+1}} + \frac{3}{I_i} \right\} \\ \alpha'_{i+1, i} &= \frac{l_{i+1}}{12 E} \left\{ \frac{I}{I_{i+1}} + \frac{I}{I_i} \right\} \\ \varphi'_i &= \sum \frac{P_i a_i (l_i - a_i)}{12 l_i^2 E} \left\{ \frac{l_i^2 + l_i a_i - a_i^2}{I_{i-1}} + \frac{l_i^2 + l_i a_i + a_i^2}{I_i} \right\} + \\ &+ \sum \frac{P_{i+1} a_{i+1} (l_{i+1} - a_{i+1})}{12 l_{i+1}^2 E} \left\{ \frac{l_{i+1}^2 + l_{i+1} a_{i+1} - a_{i+1}^2}{I_{i+1}} + \right. \\ &\left. + \frac{3 l_{i+1}^2 - 3 l_{i+1} a_{i+1} + a_{i+1}^2}{I_i} \right\} \dots 2) \end{aligned}$$

Daarbij is aangenomen dat  $\frac{1}{I}$  tusschen iedere twee knooppunten lineair verloopt.

Voor het berekenen van de vervorming tengevolge van de afschuiving zal een nadere beschouwing noodig zijn. Ook hierbij zullen we eenige vereenvoudigingen invoeren, die echter geen al te groote fout veroorzaken.

De vorm van de dwarsdoorsnede der hoofdliggers is uit fig. 18 te zien. Bij het berekenen van het traagheidsmoment kunnen voor het hier in het oog gevatte doel de eigentraagheidsmomenten van boven- en onderflens, evenals de traagheidsmomenten van de zijkanten verwaarloosd worden. Bij de bepaling van het statisch moment worden de bedragen, die geleverd worden door de zijkanten, verwaarloosd.

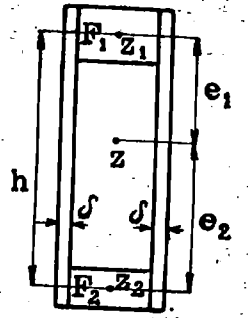


Fig. 18

De schuifspanning in de zijkanten wordt gevonden uit de bekende formule:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{1}{2\delta} \frac{d}{dx} \left( \frac{MS}{I} \right) = \frac{1}{2\delta} \left\{ \frac{DS}{I} + M \frac{d}{dx} \left( \frac{S}{I} \right) \right\} \dots 3) \\ I &= F_1 e_1^2 + F_2 e_2^2 = F_1 \left( \frac{F_2}{F_1 + F_2} h \right)^2 + F_2 \left( \frac{F_1}{F_1 + F_2} h \right)^2 = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} h^2 \\ S &= F_1 e_1 = F_2 e_2 = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2} h; \quad \frac{S}{I} = \frac{1}{h} \dots 4) \\ \tau &= \frac{1}{2\delta} \left\{ \frac{D}{h} - \frac{M}{h^2} \cdot \frac{dh}{dx} \right\} \dots 5) \end{aligned}$$

We stellen ons nu de vraag, hoe groot in punt 1 (fig. 19) de zakking en hoekverdraaiing is, wanneer de, in punt 2 ingeklemde balk willekeurig belast is en wel alleen, voor zoover deze verplaatsing en verdraaiing afhankelijk zijn van de vervorming door de afschuiving.

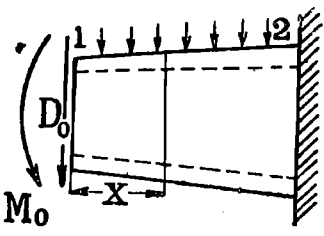


Fig. 19

We plaatsen daarvoor in punt 1 een kracht  $D_0$  en een moment  $M_0$  op den balk, berekenen den schuifkrachtenarbeid, differentieeren dezen naar  $D_0$  en  $M_0$  en stellen daarna  $D_0$  en  $M_0$  nul.

Het moment en de dwarskracht in punt  $x$  zijn samengesteld uit het moment  $M$  en de dwarskracht  $D$  veroorzaakt door de gegeven

uitwendige krachten en uit het moment  $M_0 + D_0 x$  en de dwarskracht  $D_0$  tengevolge van het extra moment  $M_0$  en de kracht  $D_0$ .

$$\begin{aligned} M_x &= M + M_0 + D_0 x \\ D_x &= D + D_0 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots 6)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial D_0} = x; \quad \frac{\partial M_x}{\partial M_0} = 1;$$

$$\frac{\partial D_x}{\partial D_0} = 1; \quad \frac{\partial D_x}{\partial M_0} = 0 \quad \dots \dots \dots 7)$$

$$A = \int_1^2 \frac{\tau^2 \cdot 2 \delta h dx}{2 G} = \int_1^2 \left\{ D_x - \frac{M_x}{h} \frac{dh}{dx} \right\}^2 \frac{dx}{4 G \delta h} \quad 1) \quad \dots \dots 8)$$

$$\frac{\partial A}{\partial D_0} = \int_1^2 \frac{\left\{ D - \frac{M}{h} \frac{dh}{dx} \right\} \cdot \left\{ 1 - \frac{x}{h} \frac{dh}{dx} \right\} dx}{2 G \delta h}$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = \int_1^2 \frac{\left\{ D - \frac{M}{h} \frac{dh}{dx} \right\} \cdot \left\{ -\frac{1}{h} \frac{dh}{dx} \right\} dx}{2 G \delta h} \quad \dots \dots \dots 9)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial A}{\partial D_0} = \frac{1}{2 G \delta} \left[ \left\{ \frac{M}{2h} + \frac{Dx}{2h} - \frac{Mx}{2h^2} \frac{dh}{dx} \right\} \int_1^2 -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{qx dx}{h} + \frac{1}{2} \int_1^2 Mx \frac{\frac{d^2h}{dx^2} dx}{h^2} \right]$$

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = \frac{1}{2 G \delta} \left[ \left\{ \frac{D}{2h} - \frac{M}{2h^2} \frac{dh}{dx} \right\} \int_1^2 -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{q dx}{h} + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{M \frac{d^2h}{dx^2} dx}{h^2} \right] \quad \dots \dots \dots 10)$$

1) De schuifarbeid in boven- en onderflens is verwaarloosd.

Maken we de vereenvoudigende veronderstelling, dat  $h$  tussen twee opeenvolgende knooppunten lineair verloopt, dan is  $\frac{d^2h}{dx^2} = 0$

en  $\frac{dh}{dx} = \frac{h_2 - h_1}{l}$ . De zakking en de verdraaiing van punt 1 gaan dan over in:

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial A}{\partial D_0} = \frac{1}{4 G \delta} \left\{ \frac{M_2}{h_2} - \frac{M_1}{h_1} + \frac{D_2 l}{h_2} - \frac{M_2 (h_2 - h_1)}{h_2^2} - \int_0^l \frac{qx dx}{h_1 + \frac{h_2 - h_1}{l} x} \right\} \\ \varphi &= \frac{\partial A}{\partial M_0} = \frac{1}{4 G \delta} \left\{ \frac{D_2}{h_2} - \frac{D_1}{h_1} - \frac{M_2 (h_2 - h_1)}{l h_2^2} - \frac{M_1 (h_2 - h_1)}{l h_1^2} - \int_0^l \frac{qx dx}{h_2 + \frac{h_2 - h_1}{l} x} \right\} \quad \dots \dots \dots 11) \end{aligned}$$

Om tot de coëfficiënten  $\alpha''$  en  $\varphi''$  te komen moeten de volgende belastingsgevallen onderzocht worden.

a.

$$M_1 = 1; \quad M_2 = 0;$$

$$D_1 = D_2 = -\frac{1}{l}$$

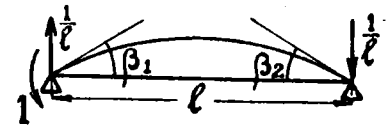


Fig. 20

$$\beta_1 = \varphi - \frac{f}{l} = \frac{1}{4 G \delta} \left\{ -\frac{1}{l h_2} + \frac{1}{l h_1} + \frac{h_2 - h_1}{l h_1^2} + \frac{1}{l h_1} + \frac{1}{l h_2} \right\} = \frac{h_1 + h_2}{4 G \delta l h_1^2}$$

$$\beta_2 = \frac{f}{l} = \frac{1}{4 G \delta} \left\{ -\frac{1}{l h_1} - \frac{1}{l h_2} \right\} = -\frac{h_1 + h_2}{4 G \delta l h_1 h_2} \quad \dots \dots \dots 12)$$

b.

$$M_1 = M_2 = 0;$$

$$D_1 = -\frac{l-a}{l} P; \quad D_2 = \frac{a}{l} P.$$

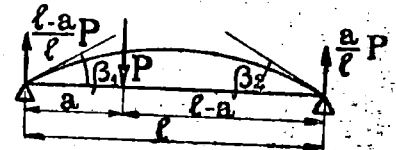


Fig. 21

$$\beta_1 = \varphi - \frac{f}{l} = \frac{P}{4 G \delta l} \left\{ \frac{a}{h_2} + \frac{l-a}{h_1} - \frac{l}{\frac{l-a}{l} h_1 + \frac{a}{l} h_2} - \frac{a}{h_2} + \frac{a}{\frac{l-a}{l} h_1 + \frac{a}{l} h_2} \right\} = \frac{Pa(l-a)(h_1-h_2)}{4 G \delta l h_1 \{l h_1 + a(h_2-h_1)\}};$$

$$\beta_2 = \frac{f}{l} = \frac{P}{4 G \delta l} \left\{ \frac{a}{h_2} - \frac{a}{h_1 + \frac{h_2-h_1}{l} a} \right\} = \frac{Pa(l-a)(h_1-h_2)}{4 G \delta l h_2 \{l h_1 + a(h_2-h_1)\}} \quad 13)$$

We vinden met behulp van de waarden, afgeleid in de verg. 12) en 13) voor de  $\alpha$ 's en de  $\varphi$ 's

$$\alpha''_{i-1,i} = -\frac{h_i + h_{i-1}}{4 G \delta l_i h_i h_{i-1}};$$

$$\alpha''_{ii} = \frac{h_i + h_{i+1}}{4 G \delta l_i h_i^2} + \frac{h_i + h_{i+1}}{4 G \delta l_{i+1} h_i^2};$$

$$\alpha''_{i+1,i} = -\frac{h_i + h_{i+1}}{4 G \delta l_{i+1} h_i h_{i+1}};$$

$$\varphi''_i = \sum \frac{P_i a_i (l_i - a_i) (h_{i-1} - h_i)}{4 G \delta l_i h_i \{l_i h_{i-1} + a_i (h_i - h_{i-1})\}} + \sum \frac{P_{i+1} a_{i+1} (l_{i+1} - a_{i+1}) (h_{i+1} - h_i)}{4 G \delta l_{i+1} h_i \{l_{i+1} h_i + a_{i+1} (h_{i+1} - h_i)\}} \quad 14)$$

Zijn de  $\alpha$ 's en de  $\varphi$ 's eenmaal bekend, dan kunnen de overgangsmomenten uit de verg. 1) berekend worden, waarna de oplegreacties uit het evenwicht volgen.

#### 4. Splitsing van het laststelsel $B_2$ .

Hierdoor zijn dus ook de krachten van het laststelsel  $B_2$  bekend, daar deze gelijk zijn aan de oplegreacties in tegengestelden zin. Dit laststelsel  $B_2$  zullen we nu weer in twee laststelsels  $B_3$  en  $B_4$  splitsen: Laststelsel  $B_3$  moet de twee hoofdliggers zóó buigen, dat de zakkings van de overeenkomstige knooppunten der twee hoofdliggers gelijk zijn en laststelsel  $B_4$  moet bestaan uit krachten, die in overeenkomstige knooppunten van de twee hoofdliggers op het teeken na gelijk zijn.

Om deze splitsing uit te voeren denken we ons de twee hoofdliggers naast elkaar gelegd en in de knooppunten scharnierend gekoppeld. We plaatsen op dit samenstel van balken het laststelsel  $B_2$  en bepalen de verplaatsing van de knooppunten. Vervolgens gaan we na, welk laststelsel in de knooppunten bij de twee balken afzonderlijk moet worden aangebracht om aan deze knooppunten dezelfde verplaatsingen te geven. Deze lasten vormen het laststelsel  $B_3$ . Het verschil tusschen  $B_2$  en  $B_3$  is het laststelsel  $B_4$ .

Het gemakkelijkst is het bovengenoemde voorschrift uit te voeren met de zoeven gebruikte veranderde 3-momentenvergelijking, aangevuld met een term, welke de verplaatsingen van de knooppunten bevat. De termen afkomstig van de krachten in de velden zijn hier 0. Noemen we verder  $\bar{\alpha}$  en  $\bar{M}$  de grootheden voor den 1<sup>en</sup> ligger (voorligger),  $\bar{\alpha}$  en  $\bar{M}$  die voor den 2<sup>en</sup> ligger (achterligger), verder  $\alpha = \bar{\alpha} + \bar{\alpha}$  en  $M = \bar{M} + \bar{M}$ , dan vindt men:

$$\bar{\alpha}_{i-1} \bar{M}_{i-1} + \bar{\alpha}_{ii} \bar{M}_i + \bar{\alpha}_{i,i+1} \bar{M}_{i+1} = \frac{y_{i-1} - y_i}{l_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}};$$

(i = 1 . . . . . n);

resp.

$$\bar{\alpha}_{i-1} \bar{M}_{i-1} + \bar{\alpha}_{ii} \bar{M}_i + \bar{\alpha}_{i,i+1} \bar{M}_{i+1} = \frac{y_{i-1} - y_i}{l_i} + \frac{y_{i+1} - y_i}{l_{i+1}}$$

(i = 1 . . . . . n) . . . . . 15)

waaruit volgt:

$$\bar{\alpha}_{i-1} \bar{M}_{i-1} + \bar{\alpha}_{ii} \bar{M}_i + \bar{\alpha}_{i,i+1} \bar{M}_{i+1} = \bar{\alpha}_{i-1} \bar{M}_{i-1} + \bar{\alpha}_{ii} \bar{M}_i + \bar{\alpha}_{i,i+1} \bar{M}_{i+1}, \quad (i = 1 . . . . . n) \quad 16)$$

Hiervoor schrijven we:

$$(\bar{\alpha}_{i-1} + \bar{\alpha}_{i,i-1}) \bar{M}_{i-1} + (\bar{\alpha}_{ii} + \bar{\alpha}_{ii}) \bar{M}_i + (\bar{\alpha}_{i,i+1} + \bar{\alpha}_{i,i+1}) \bar{M}_{i+1} = \bar{\alpha}_{i-1} (\bar{M}_{i-1} + \bar{M}_{i-1}) + \bar{\alpha}_{ii} (\bar{M}_i + \bar{M}_i) + \bar{\alpha}_{i,i+1} (\bar{M}_{i+1} + \bar{M}_{i+1})$$

(i = 1 . . . . . n) . . . . . 17)

of:

$$\bar{\alpha}_{i-1} \bar{M}_{i-1} + \bar{\alpha}_{ii} \bar{M}_i + \bar{\alpha}_{i,i+1} \bar{M}_{i+1} = \bar{\alpha}_{i-1} \bar{M}_{i-1} + \bar{\alpha}_{ii} \bar{M}_i + \bar{\alpha}_{i,i+1} \bar{M}_{i+1}, \quad (i = 1 . . . . . n) \quad 18)$$

Noemen we bij het laststelsel  $B_2$  de krachten op den eersten ligger  $\bar{B}_2$ , die op den tweeden ligger  $\bar{B}_2$  en  $B_2 = \bar{B}_2 + \bar{B}_2$  de som



van twee overeenkomstige krachten, verder bij het laststelsel  $B_3$  de krachten op den eersten ligger  $\bar{B}_3$ , die op den tweeden ligger  $\bar{B}_3$  en  $B_3 = \bar{B}_3 + \bar{B}_3$  de som van twee overeenkomstige krachten, dan is

$$\bar{B}_2 + \bar{B}_2 = B_2 = B_3 = \bar{B}_3 + \bar{B}_3 \dots 19)$$

Het laststelsel  $B_4$  op den eersten ligger wordt dan:

$$B_4 = \bar{B}_2 - \bar{B}_3, \text{ en op den tweeden ligger } \bar{B}_2 - \bar{B}_3 = -B_4.$$

$\bar{B}_2$  en  $\bar{B}_3$  zijn dus gegeven,  $\bar{B}_3$ ,  $\bar{B}_3$  en  $B_4$  moeten bepaald worden.

De momenten  $M$  kunnen het eenvoudigst bepaald worden uit:

$$\begin{aligned} M_1 &= B_{20} l_1 \\ M_2 &= B_{20} l_1 + (B_{20} + B_{21}) l_2 \\ M_3 &= B_{20} l_1 + (B_{20} + B_{21}) l_2 + (B_{20} + B_{21} + B_{22}) l_3 \\ &\text{enz.} \dots 20) \end{aligned}$$

Deze waarden van  $M$  worden gesubstitueerd in de verg. 18), waarna de  $\bar{M}$ 's bepaald worden. Zijn deze bekend, dan kunnen met behulp der vergelijkingen:

$$\bar{B}_{3i} = -\frac{1}{l_i} (\bar{M}_i - \bar{M}_{i-1}) - \frac{1}{l_{i+1}} (\bar{M}_i - \bar{M}_{i+1}) \dots 21)$$

de  $\bar{B}_3$ 's bepaald worden. De  $\bar{B}_3$ 's en de  $B_4$ 's volgen uit verg. 19).

### 5. Splitsing van het laststelsel $B_4$ .

Tot nu toe is de wringing van de hoofdliggers niet ter sprake gekomen, daar de laststelsels  $B_1$  en  $B_3$  zóó gekozen waren, dat geen wringing optrad. Bij het laststelsel  $B_4$  is dit wel het geval. We zullen het laststelsel  $B_4$  nu nog splitsen in de laststelsels  $B_5$  en  $B_6$ , waarbij het eerste zóó gekozen is, dat de hoofdliggers uitsluitend gewrongen en niet gebogen worden, terwijl het laststelsel  $B_6$  per hoofdligger een evenwichtskrachtsysteem vormt. Onder invloed van dit laatste laststelsel zullen de liggers zoowel gebogen als gewrongen worden.

De laststelsels  $B_5$  en  $B_6$  hebben beide dezelfde eigenschap als  $B_4$ , n.l., dat de krachten op overeenkomstige knooppunten van de twee liggers gelijk en tegengesteld zijn.

Daar bij het laststelsel  $B_5$  de liggers niet gebogen mogen worden, moeten zij recht blijven. Hun hartlijnen kunnen echter een hoek

$\theta$  insluiten. Twee opeenvolgende knooppuntsdoorsneden  $i - i$  en  $i$  zullen dus t. o. z. van elkaar een hoek  $\theta \frac{l_i}{b}$  verdraaien. ( $b$  is de afstand van de hoofdliggers). Noemen we bij den eersten ligger de verwringing van de twee einddoorsneden van veld  $i$  (liggende tusschen de knooppunten  $i - i$  en  $i$ ) tengevolge van een eenheids-wringmoment:  $\bar{\beta}_i$ , dezelfde grootheid voor den tweeden ligger:  $\bar{\beta}_i$  en  $\beta_i$  dezelfde grootheid voor de twee door ribben gekoppelde liggers, dan vinden we voor het wringmoment in het 1<sup>e</sup> veld:

$$W_i = \theta \frac{l_i}{b} \cdot \frac{1}{\beta_i}, \quad (i = 1 \dots n + 1) \dots 22)$$

$$\text{waarin } \frac{1}{\beta_i} = \frac{1}{\bar{\beta}_i} + \frac{1}{\bar{\beta}_i} \quad (i = 1 \dots n + 1) \dots 23)$$

De hiervoor benodigde in de knooppunten aangrijpende uitwendige krachten  $B_5$  volgen uit het evenwicht, n.l.

$$B_{5i} = \frac{W_{i+1} - W_i}{b} = \frac{\theta}{b^2} \left\{ \frac{l_{i+1}}{\beta_{i+1}} - \frac{l_i}{\beta_i} \right\} \quad (i = 1 \dots n)$$

$$B_{50} = \frac{\theta}{b^2} \frac{l_1}{\beta_1}$$

$$B_{5, n+1} = -\frac{\theta}{b^2} \cdot \frac{l_{n+1}}{\beta_{n+1}} \dots 24)$$

Daar het laststelsel  $B_6$  per ligger een evenwichtskrachtsysteem moet vormen, moet het laststelsel  $B_5$  met  $B_4$  per ligger statisch gelijkwaardig zijn. Noemen we  $x_i$  den afstand van knooppunt  $i$  tot knooppunt 0, dan luiden de twee vergelijkingen, die deze statische gelijkwaardigheid uitdrukken:

$$\sum_{i=1}^{n+1} B_{4i} x_i = \sum_{i=1}^{n+1} B_{5i} x_i \dots 25)$$

$$\sum_{i=0}^{n+1} B_{4i} = \sum_{i=0}^{n+1} B_{5i} \dots 26)$$

Verg. 25) stelt ons in staat den evenredigheidsfactor  $\theta$  in de verg. 24) te bepalen, terwijl verg. 26) slechts een identiteit oplevert, daar beide leden nul zijn. Dat het rechterlid nul is volgt uit een sommatie van alle vergelijkingen 24). Het nul zijn van het linkerlid is noodzakelijk voor het evenwicht van de geheele constructie. Bij een symmetrisch belaste vleugel is uit symmetrie-overwegingen  $\theta = 0$ , zoodat het geheele laststelsel  $B_6$  vervalt.

## 6. Eigenbelastingen.

Het laststelsel  $B_6$  zullen we splitsen in eigenbelastingen. Onder eigenbelasting verstaan we een laststelsel dat:

1<sup>o</sup>. uitsluitend bestaat uit in de knooppunten aangrijpende krachten, die voor overeenkomstige punten der hoofdliggers op het teeken na gelijk zijn,

2<sup>o</sup>. per hoofdligger een evenwichtskrachtsysteem vormt,

3<sup>o</sup>. geplaatst op de van de ribben vrijgemaakte hoofdliggers, aan deze een doorbuiging geeft, welke zij ook als onderdeel van de geheele constructie verkrijgen, wanneer daarop het  $\frac{1+\lambda}{\lambda}$  voud van de eigenbelasting geplaatst wordt.

Van een dergelijk laststelsel zullen de hoofdliggers het  $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ -e gedeelte opnemen terwijl de ribben de rest doen.

Voor het evenwicht van de ribben zijn momenten noodig, geleverd door de hoofdliggers. De reactiemomenten, werkende van de ribben op de hoofdliggers zullen deze wringen. Het laststelsel wordt dus gedeeltelijk door de buiging en gedeeltelijk door de wringing van de hoofdliggers opgenomen.

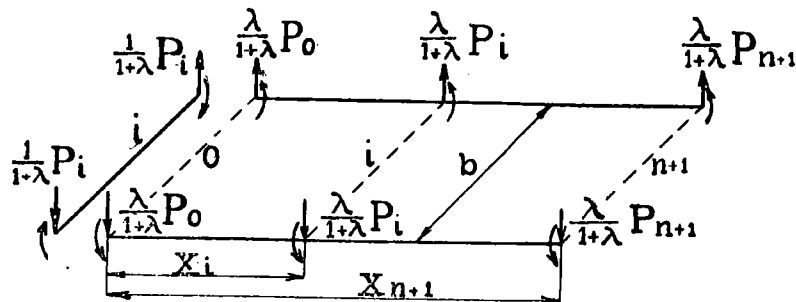


Fig. 22.

We noemen de kracht op knooppunt  $i$  van den eersten ligger  $P_i$  (op den tweeden ligger is de overeenkomstige kracht dus  $-P_i$ ), de zakking van hetzelfde knooppunt, wanneer de eigenbelasting op de geheele constructie staat t.o.z. van de rechte verbindinglijn van de uiterste knooppunten  $\bar{\eta}_i$  en de zakking van dit knooppunt

tengevolge van een éenheidskracht in knooppunt  $j$  van den eersten ligger wanneer alle ribben doorgezaagd zijn en de ligger aan de uiteinden is opgelegd  $\bar{\beta}_{ij}$ .

Dezelfde grootheden bij den tweeden ligger worden resp.  $\bar{\eta}_i$  en  $\bar{\beta}_{ij}$  genoemd. Bovendien worden de volgende grootheden ingevoerd:

$$\eta_i = \bar{\eta}_i - \bar{\eta}_i \quad (i = 1 \dots n) \dots 27)$$

$$\beta_{ij} = \bar{\beta}_{ij} + \bar{\beta}_{ij} \quad (i = 1 \dots n) \dots 28)$$

Met  $\gamma_{ij}$  wordt voorts aangegeven de verdraaiing van de liggers in knooppunt  $i$  tengevolge van een, de liggers samen belastend, éenheidskoppel ter plaatse van de knooppunten  $j$ , wanneer de liggers in knooppunt 0 vastgeklemd worden. De hoofdliggers worden hierbij met de ribben gekoppeld, zoodat zij gedwongen zijn in corresponderende knooppunten gelijke hoekverdraaiingen te ondergaan. De liggers worden hierbij verondersteld geen buigingsstijfheid te bezitten. <sup>1)</sup>

We zullen van den voorligger knooppunt 0 en  $n+1$  en van den achterligger knooppunt 0 vasthouden. In de zakking  $c$  van knooppunt  $n+1$  van den achterligger en de hiervóór gedefinieerde invloedsgrootheden  $\beta$  en  $\gamma$  kunnen de knooppuntsverplaatsingen welke onder invloed van een eigenbelasting optreden, dan als volgt uitgedrukt worden:

$$\bar{\eta}_i = \frac{\lambda}{1+\lambda} \sum_{j=1}^n P_j \bar{\beta}_{ij} \quad (i = 1 \dots n) \dots 29)$$

$$\bar{\eta}_i + c \frac{x_i}{x_{n+1}} = - \frac{\lambda}{1+\lambda} \sum_{j=1}^n P_j \bar{\beta}_{ij} + c \frac{x_i}{x_{n+1}} \quad (i = 1 \dots n) \dots 30)$$

Voor de verdraaiingen van de hoofdliggers vinden we:

$$\psi_i = \frac{1}{1+\lambda} \sum_{j=1}^{n+1} P_j b \gamma_{ij} \quad (i = 1 \dots n+1) \dots 31)$$

De voorwaarden, dat ribben en liggers aan elkaar passen luiden:

$$\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_i - c \frac{x_i}{x_{n+1}} = b \psi_i \quad \text{of volgens verg. 27)}$$

<sup>1)</sup> Indien noodig kan hier de verhooging van de torsiestijfheid door de triplexbekleding in rekening gebracht worden.

$$\eta_i - c \frac{x_i}{x_{n+1}} = b \psi_i \quad (i = 1 \dots n) \dots 32)$$

$$\text{en } -c = b \psi_{n+1} \dots 33)$$

Substitutie van de aan 28), 29), 30) en 33) te ontleenen waarden voor  $\beta$ ,  $\bar{\eta}$ ,  $\bar{\eta}$  en  $c$  in 32) levert:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{1 + \lambda_j} \sum_{j=1}^n P_j \beta_{ij} + \frac{x_i}{x_{n+1}} b \frac{1}{1 + \lambda_j} \sum_{j=1}^n P_j b \gamma_{n+1, j} = \\ = b \frac{1}{1 + \lambda_j} \sum_{j=1}^{n+1} P_j b_j \gamma_{ij} \quad (i = 1 \dots n) \dots 34) \end{aligned}$$

Daar een eigenbelasting per ligger een evenwichtskrachtsysteem moet vormen, kan  $P_{n+1}$  in de andere krachten uitgedrukt worden.

$$P_{n+1} = - \sum_{j=1}^n \frac{x_j}{x_{n+1}} P_j \dots 35)$$

Hierdoor gaan de verg. 34) over in:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n P_j \left[ \lambda \beta_{ij} + b^2 \left\{ \frac{x_i}{x_{n+1}} (\gamma_{n+1, j} - \frac{x_j}{x_{n+1}} \gamma_{n+1, n+1}) - \right. \right. \\ \left. \left. - \gamma_{ij} + \frac{x_j}{x_{n+1}} \gamma_{i, n+1} \right\} \right] = 0 \quad (i = 1 \dots n) \dots 36) \end{aligned}$$

Van nul verschillende oplossingen van dit stelsel zijn slechts dan mogelijk, wanneer de determinant van de  $n^e$  orde gevormd door de coëfficiënten, nul is. Deze determinant levert ons  $n$  verschillende positieve reële wortels voor  $\lambda$ . Bij elke waarde van  $\lambda$  ( $\lambda_i$ ) kan een eigenbelasting gevonden worden, zoodat er ook  $n$  verschillende eigenbelastingen bestaan. Daar de belasting  $B_0$   $n$  onafhankelijke krachten bevat, kan elke belasting  $B_0$  zonder rest naar deze  $n$  eigenbelastingen ontwikkeld worden.

### 7. Orthogonaliteit van de eigenbelastingen.

De orthogonaliteitseigenschap van de eigenbelastingen luidt:

$$\sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} \eta_{li} = 0 \text{ voor } (k \neq l) \dots 37)$$

Uit de verg. 29) en 30) volgt:

$$\eta_{li} = \bar{\eta}_{li} - \bar{\eta}_{li} = \frac{\lambda_l}{1 + \lambda_l} \sum_{j=1}^n P_{lj} \beta_{ij} \quad (i = 1 \dots n) \dots 38)$$

Voegen we aan het rechterlid 2 termen met  $\beta_{i0}$  en  $\beta_{i, n+1}$  toe, dan verandert de waarde daarvan niet, daar beide termen nul zijn. Bovendien kunnen we de vergelijkingen uitbreiden tot de indiceswaarden  $i = 0$  en  $i = n + 1$ , daar voor deze waarden van  $i$  beide leden identiek nul zijn. De verg. 38) gaan hierdoor over in:

$$\eta_{li} = \frac{\lambda_l}{1 + \lambda_l} \sum_{j=0}^{n+1} P_{lj} \beta_{ij} \quad (i = 0 \dots n + 1) \dots 39)$$

Dit gesubstitueerd in verg. 37) geeft:

$$\sum_{i=0}^{n+1} P_{li} \eta_{li} = \frac{\lambda_l}{1 + \lambda_l} \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} P_{ki} P_{lj} \beta_{ij} \dots 40)$$

Eveneens geldt dus:

$$\sum_{i=0}^{n+1} P_{li} \eta_{ki} = \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} P_{li} P_{kj} \beta_{ij} \dots 41)$$

Door in het rechterlid van verg. 41)  $i$  en  $j$  te verwisselen en daarna  $\beta_{ji}$  door  $\beta_{ij}$  te vervangen vinden we:

$$\sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} P_{li} P_{kj} \beta_{ij} = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{n+1} P_{ki} P_{lj} \beta_{ij} \dots 42)$$

Bovendien is volgens de stelling van BETTI <sup>1)</sup>

$$\sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} \eta_{li} = \sum_{i=0}^{n+1} P_{li} \eta_{ki} \dots 43)$$

zoodat uit de verg. 40), 41), 42) en 43) volgt:

$$\frac{1 + \lambda_l}{\lambda_l} \sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} \eta_{li} = \frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k} \sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} \eta_{li} \dots 44)$$

$$\text{of } \sum_{i=0}^{n+1} P_{ki} \eta_{li} = 0 \quad (\lambda_k \neq \lambda_l) \quad \text{dus voor } l \neq k \dots 45)$$

Eigenbelastingen, waarbij de absolute waarde der krachten zóó gekozen is, dat

$$\sum_{j=0}^{n+1} P_{ki} \eta_{ki} = 1 \dots 46)$$

heeten genormeerde eigenbelastingen.

<sup>1)</sup> LOVE, Lehrbuch der Elastizität, p. 405.

8. Benaderingsmethode tot het bepalen van de eigenbelastingen.

We plaatsen op de knooppunten van den voorligger een evenwichtskrachtenstelsel  $Q_{ii}$  ( $i = 0 \dots n + 1$ ), op die van den achterligger  $-Q_{ii}$  ( $i = 0 \dots n + 1$ ) en bepalen, wanneer de ribben zijn doorgezaagd, de zakkingen  $y_{ii}$  en  $\bar{y}_{ii}$  ( $i = 1 \dots n$ ) van de knooppunten t.o.z. van de verbindingslijn van de uiterste dezer punten.

We onderzoeken daarna, welk evenwichtskrachtenstelsel  $Q_{ii}$  ( $i = 0 \dots n + 1$ ) extra op de knooppunten geplaatst moet worden, om de liggers in denzelfden vorm te brengen, nu echter met niet doorgezaagde ribben. We plaatsen daartoe weder knooppunt 0 en  $n + 1$  van den voorligger en knooppunt 0 van den achterligger op vaste steunpunten, terwijl de zakking van knooppunt  $n + 1$  van den achterligger, welke voorloopig nog onbekend is,  $c$  genoemd wordt. Deze  $c$  wordt dan gevonden uit de voorwaarde, dat  $Q_{ii}$  ( $i = 0 \dots n + 1$ ) een evenwichtskrachtenstelsel is. Denken we ons het laststelsel  $Q_{ii}$  ( $i = 0 \dots n + 1$ ) ontwikkeld in de eigenbelastingen:

$$Q_{ii} = \sum_{k=1}^n a_k P_{ki} \quad (i = 0 \dots n + 1) \quad \dots \quad 46)$$

en zouden we het zoeven genoemde proces toepassen op een laststelsel  $Q_1$ , dat identiek is met de  $k^e$  eigenbelasting  $P_k$  van den vleugel, dan zou het bijbehorende laststelsel  $Q_2$  het  $\frac{1}{\lambda_k}$  gedeelte van  $Q_1 = P_k$  bedragen hebben. Neemt echter  $Q_1$  den vorm aan van de verg. 46), dan zullen we voor  $Q_2$  vinden:

$$Q_{2i} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda_k} P_{ki} \quad \dots \quad 47)$$

Plaatsen we dit laststelsel  $Q_2$  weer op de liggers met doorgezaagde ribben en bepalen we op analoge wijze  $Q_3$ , dan vinden we daarvoor:

$$Q_{3i} = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\lambda_k^2} P_{ki} \quad \dots \quad 48)$$

Zoo voortgaande zullen we na eenige malen dit proces te hebben toegepast, een laststelsel vinden, hetwelk (doordat  $\lambda_k$  met toe-

nemende  $k$  sterk toeneemt) met de eerste eigenbelasting gelijkvormig zal zijn. Bij doelmatige keuze van  $Q_1$  kan dit reeds met  $Q_2$  het geval zijn. In ieder geval behoeven we het genoemde proces slechts zooveel malen te herhalen totdat twee opeenvolgende laststelsels *eenigszins* gelijkvormig zijn. De eerste eigenwaarde kan reeds als we  $\bar{y} - y = y$  stellen, bepaald worden uit:

$$\frac{\sum_{i=0}^{n+1} Q_{ii} y_{ii}}{\sum_{i=0}^{n+1} Q_{ii} \bar{y}_{ii}} = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k P_{ki} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k} \eta_{ki} \right\}}{\sum_{i=0}^{n+1} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \frac{1}{\lambda_k} P_{ki} \right\} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k} \eta_{ki} \right\}} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2 \frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k}}{\sum_{k=1}^n a_k^2 \frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k}} = \lambda_1 \frac{1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_k^2}{a_1^2} \frac{1 + \lambda_k}{1 + \lambda_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_k}}{1 + \sum_{k=2}^n \frac{a_k^2}{a_1^2} \frac{1 + \lambda_k}{1 + \lambda_1} \frac{\lambda_1^2}{\lambda_k^2}} \approx \lambda_1 \quad \dots \quad 49)$$

Voor het bepalen van de hogere eigenbelastingen en eigenwaarden kan naar de voorgaande hoofdstukken verwezen worden. Ook hier kan men zich beperken tot het zoeken van die eigenbelastingen, waarvan  $\lambda < 1$  is, daar voor de overige eigenbelastingen de hieronder volgende iteratiemethode vlugger tot het doel voert.

9. Iteratiemethode.

Het laststelsel  $B_6$  zou, indien alle eigenbelastingen bekend waren, in de eigenbelastingen ontwikkeld kunnen worden.

$$B_{6i} = \sum_{k=1}^n a_k P_{ki} \quad (i = 0 \dots n + 1) \quad \dots \quad 50)$$

waarin  $a_k$  bepaald is door:

$$a_k = \sum_{i=1}^n B_{6i} \eta_{ki} \quad (k = 1 \dots n) \quad \dots \quad 51)$$

Zijn echter slechts eenige eigenbelastingen bekend, dan kunnen ook alleen de overeenkomstige bedragen, waarmede zij voorkomen in de ontwikkeling van de verg. 50) bepaald worden. Het laststelsel  $B_6$  wordt dan gesplitst in het bij de bekende eigenbelastingen behorende gedeelte en in een rest  $R$  welke alleen de eigenbelastingen bevat, waarvan de bijbehorende eigenwaarden  $\lambda_k > 1$  zijn.

$$B_{6i} = \sum_{k=1}^{d-1} a_k P_{ki} + R_i \quad (i = 0 \dots n + 1) \quad \dots \quad 52)$$

waarin dus:

$$R_i = \sum_{k=d}^n a_k P_{ki} \quad (i = 0 \dots n+1) \dots 53)$$

Om het gedeelte van het laststelsel  $R$  te bepalen, dat door de wringing van de liggers wordt opgenomen maken we, evenals in hoofdstuk 5 gebruik van een iteratiemethode.

Plaatsen we het laststelsel  $R$  op de hoofdliggers, terwijl de ribben doorgezaagd zijn en onderzoeken we, welk laststelsel noodig is, om de hoofdliggers zóó te wringen, dat de ribben weer aan elkaar passen, dan vinden we:

$$R_{1i} = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k} P_{ki} \quad (i = 0 \dots n+1) \dots 54)$$

Na nog eenige malen ditzelfde proces te hebben toegepast krijgen we:

$$R_{m-1,i} = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k^{m-1}} P_{ki}$$

$$R_{mi} = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k^m} P_{ki} \quad (i = 0 \dots n+1) \dots 55)$$

Het gedeelte van  $R$ , dat gebruikt wordt om de liggers te wringen wordt gegeven door:

$$R_{vi} = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{1 + \lambda_k} P_{ki} \quad (i = 0 \dots n+1) \dots 56)$$

Het blijkt, dat dit met goede benadering voorgesteld wordt door:

$$R_{vi} = R_{1i} - R_{2i} + R_{3i} - \dots + (-1)^m R_{m-1,i} + (-1)^{m-1} \frac{\theta}{1 + \theta} R_{mi} \quad (i = 0 \dots n+1) \dots 57)$$

waarin de factor  $\theta$  gevonden wordt uit:

$$\theta = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} R_{m-1,i} y_{m-1,i}}{\sum_{i=0}^{n+1} R_{mi} y_{m-1,i}} = \frac{\sum_{i=0}^{n+1} \left\{ \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k^{m-1}} P_{ki} \right\} \left\{ \sum_{k=d}^n \frac{a_k (1 + \lambda_k)}{\lambda_k^m} \eta_{ki} \right\}}{\sum_{i=0}^{n+1} \left\{ \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{\lambda_k^m} P_{ki} \right\} \left\{ \sum_{k=d}^n \frac{a_k (1 + \lambda_k)}{\lambda_k^m} \eta_{ki} \right\}} = \frac{\sum_{k=d}^n a_k^2 \frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k^{2m-1}}}{\sum_{k=d}^n a_k^2 \frac{1 + \lambda_k}{\lambda_k^{2m}}} = \lambda_d \frac{1 + \sum_{k=d+1}^n \frac{a_k^2}{a_d^2} \frac{1 + \lambda_k}{1 + \lambda_d} \frac{\lambda_d^{2m-1}}{\lambda_k^{2m-1}}}{1 + \sum_{k=d+1}^n \frac{a_k^2}{a_d^2} \frac{1 + \lambda_k}{1 + \lambda_d} \frac{\lambda_d^{2m}}{\lambda_k^{2m}}} \approx \lambda^d \dots 58)$$

Dit ingevuld in de verg. 57) geeft:

$$R_{vi} = \sum_{k=d}^n a_k \left\{ \frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_k^2} + \frac{1}{\lambda_k^3} - \dots + (-1)^m \frac{1}{\lambda_k^{m-1}} + (-1)^{m-1} \frac{\lambda_d}{1 + \lambda_d} \frac{1}{\lambda_k^m} \right\} P_{ki} = \sum_{k=d}^n \frac{a_k}{1 + \lambda_k} P_{ki} + \sum_{k=d+1}^n (-1)^{m-1} \frac{1}{\lambda_k^m} \cdot \left( \frac{\lambda_d}{1 + \lambda_d} - \frac{\lambda_k}{1 + \lambda_k} \right) (i = 0 \dots n+1) \dots 59)$$

Deze waarden zullen, daar dikwijls reeds  $\lambda_{d-1} > 1$  is, bij genoegzaam groote  $m$  zeer weinig van de juiste  $R_{vi}$  verschillen. We zullen echter aan een getallenvoorbeeld laten zien, dat ook voor het geval  $\lambda_d, \lambda_{d+1}$ , enz. weinig van elkaar verschillen (dit treedt b.v. op bij het in rekening brengen van de vervorming door de dwarskracht) en  $m$  slechts 2 is, toch een zeer bevredigend resultaat verkregen wordt.

Stel dat alle  $a$ 's gelijk aan 1 zijn, dat de opeenvolgende eigenwaarden  $\lambda$  gelijk zijn aan 0,40; 1,—; 1,38; 1,60; 1,73; 1,80; 1,85, en dat in de rest  $R$  nog de 3e tot en met de 7e eigenbelasting aanwezig zijn.

Dan heeft men:

$$R_i = P_{3i} + P_{4i} + P_{5i} + P_{6i} + P_{7i}$$

$$R_{1i} = \frac{1}{1,38} P_{3i} + \frac{1}{1,60} P_{4i} + \frac{1}{1,73} P_{5i} + \frac{1}{1,80} P_{6i} + \frac{1}{1,85} P_{7i}$$

$$R_{2i} = \frac{1}{1,38^2} P_{3i} + \frac{1}{1,60^2} P_{4i} + \frac{1}{1,73^2} P_{5i} + \frac{1}{1,80^2} P_{6i} + \frac{1}{1,85^2} P_{7i} \quad (i = 0 \dots n+1) \dots 60)$$

$$\theta = \frac{\frac{2,38}{1,38^3} + \frac{2,60}{1,60^3} + \frac{2,73}{1,73^3} + \frac{2,80}{1,80^3} + \frac{2,85}{1,85^3}}{\frac{2,38}{1,38^4} + \frac{2,60}{1,60^4} + \frac{2,73}{1,73^4} + \frac{2,80}{1,80^4} + \frac{2,85}{1,85^4}} = \frac{2,996}{1,865} = 1,604$$

$$\frac{\theta}{1 + \theta} = \frac{1,604}{2,604} = 0,615 \dots 61)$$

$$\begin{aligned} & + \left( \frac{1}{1,73} - \frac{0,615}{1,73^2} \right) P_{5i} + \left( \frac{1}{1,80} - \frac{0,615}{1,80^2} \right) P_{6i} + \left( \frac{1}{1,85} - \frac{0,615}{1,85^2} \right) P_{7i} = \\ & = 0,401 P_{3i} + 0,385 P_{4i} + 0,372 P_{5i} + 0,366 P_{6i} + 0,362 P_{7i} \\ & \quad (i = 0 \dots n + 1) \dots 62) \end{aligned}$$

Dit moest zijn:

$$\begin{aligned} R_{3i} &= \frac{1}{2,38} P_{3i} + \frac{1}{2,60} P_{4i} + \frac{1}{2,73} P_{5i} + \frac{1}{2,80} P_{6i} + \frac{1}{2,85} P_{7i} = \\ &= 0,420 P_{3i} + 0,384 P_{4i} + 0,366 P_{5i} + 0,357 P_{6i} + 0,351 P_{7i} \\ & \quad (i = 0 \dots n + 1) \dots 63) \end{aligned}$$

zoodat de fout zeer gering blijkt te zijn.

I.

Wanneer bij de in de hoofdstukken 4, 5 en 7 behandelde constructies alle eigenwaarden  $> 1$  zijn, verdienen de op pag. 53, 56 en 109 behandelde iteratiemethoden de voorkeur.

Is slechts één eigenwaarde  $< 1$ , dan zijn de genoemde methoden gelijkwaardig. Zijn meerdere eigenwaarden  $< 1$ , dan zijn de iteratiemethoden niet zonder meer bruikbaar.

II.

Bij het bepalen van het trillingsgetal van een schip, is het berekende trillingsgetal dikwijls slechts door het invoeren van een abnormaal lage  $EI$  in overeenstemming te brengen met het experimenteel gevondene. Hierin kan verbetering verkregen worden door het in rekening brengen van het meetrillende water.

III.

De door MANTEL <sup>1)</sup> geciteerde methode tot het op knik berekenen van staven, welke aan ééne zijde zijn ingeklemd en over hun geheele lengte door axiale krachten belast worden, blijkt onjuiste resultaten te geven bij een aan twee zijden scharnierend bevestigde staaf.

IV.

De benaderingsformule  $f = \frac{n}{n-1} f_0$  ter berekening van de maximale doorbuiging van een op druk en buiging belaste staaf, is ook bruikbaar voor negatieve  $n$ -waarden.

V.

De door O. FÖPPL gegeven methode ter bepaling van de eigen-trillingsgetallen van staven (Z. f. a. M. u. M. 1927, blz. 72) moet in meer dan één opzicht worden afgekeurd.

<sup>1)</sup> „De Ingenieur” 1915, blz. 465.

De in verschillende gevallen, te berekenen van het moment in de spaken van tandwielen geven voor dit moment veel te groote waarden.

#### VII.

De gebruikelijke berekeningsmethode voor door steunbouten verstijfde vlakke ketelplaten leidt tot constructies, waarin de spanning tot dicht bij de vloeigrens oploopt.

#### VIII.

Voor de sterkteberekening van de wikkelkoppes van een draai-stroomgenerator onder de bij kortsluiting optredende belasting, kan volstaan worden met een statische berekening.

#### IX.

Onder de verschillende experimenteele methoden ter bestudeering van de differentiaalvergelijking  $\Delta u = 0$ , verdient althans voor het quantitative onderzoek de electriche methode de voorkeur.

#### X.

Bij het grooter worden der vliegtuigen zullen uit een oogpunt van sterkte tweedekkers de voorkeur verdienen boven eendekkers.

#### XI.

Het eindexamen H. B. S. in zijn tegenwoordigen vorm biedt onvoldoenden waarborg voor geschiktheid tot de studie aan de Technische Hoogeschool.

#### XII.

Het instituut der prijsvragen aan de Technische Hoogeschool mist grootendeels zijn doel, omdat zij die voor de beantwoording dezer vragen het meest in aanmerking komen door een te beperkt geredigeerd wetsartikel van mededinging worden uitgesloten.

---

1) Zie o.a.:

WESTENDORP. Handboek voor Werktuigkundigen, blz. 465.  
HÜTTE. 24<sup>e</sup> druk, Bd. II, blz. 1114.