Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Primitiveren met elementaire functies

(Engelse titel: Integration of elementary functions)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Maarten Jonathan Vonk

Delft, Nederland
December 2019

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

"Primitiveren met elementaire functies"

(Engelse titel: "Integration of elementary functions)"

Maarten Jonathan Vonk

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr. K.P. Hart

Overige commissieleden

Dr. E. Coplakova

drs. E.M. van Elderen

December, 2019

Delft

PRIMITIVEREN MET ELEMENTAIRE FUNCTIES

MAARTEN VONK [4402146]

1. **Inleiding**

Ik heb de stelling van Liouville-Rosenlicht bestudeerd aan de hand van het artikel Primitiveren door Middel van Elementaire functies van A.W. Grootendorst. Ik heb het artikel doorgespit, om het begrijpen en in mijn eigen woorden uit te kunnen leggen. Dit artikel gebruik ik als rode lijn voor mijn verslag, waarbij ik ook zijsporen in duik.

In de komende paragrafen gaan we door het proces om de stelling van Liouville-Rosenlicht te begrijpen en te kunnen bewijzen. De zijsporen in het artikel zijn er om voorkennis op te bouwen, hulpstellingen te bewijzen, om het bewijs te ondersteunen en om uit te zoeken hoe we de stelling kunnen toepassen. Op een aantal plekken in het oorspronkelijke artikel vond ik de manier waarop de stof uitgelegd werd (voor mijn niveau) te abstract of te kort door de bocht bewezen, waardoor ik daar eigen toevoegingen heb geschreven ter ondersteuning.

De paragrafen 2 en 3 zijn bedoeld om voorkennis op te bouwen over differentiaalalgebra die nodig is om het bewijs te begrijpen. In paragraaf 4 bewijzen we een paar hulpstellingen die we gebruiken bij het bewijs van de stelling. In paragraaf 5 schetsen we een aanleiding voor de noodzaak van de stelling. In paragraaf 6 geven we het daadwerkelijke bewijs. Waarna in paragraaf 7 nog een uitbreiding wordt gegeven van de stelling en in de latere paragrafen wordt gekeken naar toepassingen van de stelling van Liouville-Rosenlicht.
Hieronder staat alles nog eens duidelijk op een rijtje:

Inhoudsopgave

2. **Het Begrip Differentiaallichaam**

Een commutatief lichaam K heet een *differentiaallichaam* indien er een afbeelding is gedefinieerd van K naar K (die we differentiatie noemen en die we aangeven met $(a \mapsto a')$ die voldoet aan de volgende eisen:

$$(a+b)' = a' + b' \text{ en } (ab)' = a'b + ab'$$

Date: 29 april 2020.

Men noemt a' de afgeleide van a en a een primitieve van a'.
Men bewijst dan eenvoudig:

$$i.\ (a^n)' = na^{n-1}a' \qquad (n \in \mathbb{Z})$$
$$ii.\ \left(\frac{a}{b}\right)' = \frac{a'b - ab'}{b^2} \qquad (b \neq 0).$$

De elementen van K met afgeleide nul noemt men de *constanten* van K. Deze constanten vormen een deellichaam van K.
Een *differentiaaluitbreiding* L van het differentiaallichaam K is een lichaam dat K omvat en dat voorzien is van een differentiatie, die, indien beperkt tot K, samenvalt met de reeds op K gedefinieerde differentiatie.
We geven zo'n uitbreiding van K aan met: $K \subset L$. Zoals bijvoorbeeld $\mathbb{Q}(x) \subset \mathbb{R}(x)$. Waarbij
$\mathbb{Q}(x) = \{\frac{p_0+p_1x+\cdots+p_nx^n}{q_0+q_1x+\cdots+q_mx^m}$: met $n, m \in \mathbb{N}, p_i, q_i \in \mathbb{Z}\}$ en
$\mathbb{R}(x) = \{\frac{r_0+r_1x+\cdots+r_nx^n}{s_0+s_1x+\cdots+s_mx^m}$: met $n, m \in \mathbb{N}, r_i, s_i \in \mathbb{R}\}$

3. **Elementaire uitbreidingen**

Allereerst twee definities:

i) Laat $K \subset L$ een differentiaaluitbreiding zijn van het differentiaallichaam K, dan is een element a van L een *exponentiaal* over K indien er in K een element b is, zodanig dat $a' = ab'$; a heet dan een *exponentiaal van* b.
Hier heeft de situatie uit de analyse model gestaan: als $f(x)$ en $g(x)$ tot $\mathbb{R}(x)$ behoren en $f(x) = e^{g(x)}$, dan geldt immers: $f'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = f(x) \cdot g'(x)$.

ii) Laat $K \subset L$ een differentiaaluitbreiding zijn van het differentiaallichaam K, dan is een element a van L een *logaritme over* K indien er in K een element b is, z.d.d. $a' = \frac{b'}{b}$; a heet dan de *logaritme van* b.
Ook hier heeft de analyse model gestaan: Als $f(x)$ en $g(x)$ tot $\mathbb{R}(x)$ behoren en $f(x) = \log\{g(x)\}$, dan geldt: $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$.

In dit artikel speelt de volgende definitie een belangrijke rol:
Als K een differentiaallichaam is en L een differentiaallichaam dat K omvat (d.w.z. $K \subset L$), dan heet L een *elementaire uitbreiding van* K als L onstaan is door achtereenvolgende adjuncties van algebraïsche elementen, exponentialen of logaritmen, dat wil zeggen

$$L = K(t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

waarbij t_i òf algebraïsch[1] is over $K(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1})$ òf een exponentiaal òf een logaritme is over $K(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1})$.

Intermezzo (verduidelijking bij het bovenstaande):
Er is onderscheid tussen $K[t]$ en $K(t)$.
$K[t]$ bestaat uit alle elementen van de vorm $k_0 + k_1 \cdot t + k_2 \cdot t^2 + \cdots + k_m \cdot t^m$, met $k_i \in K$.
$K(t)$ is het kleinste lichaam waarin K en t in zitten. Wat wil dat zeggen? We nemen $K[t]$ als basis, en we voegen er de operatie delen aan toe. Dus we krijgen alle elementen die we kunnen vinden door twee elementen van $K[t]$ op elkaar te delen. Formeel heet dit: $K(t) = \{\frac{p}{q}$: waarbij $p, q \in K[t]\}$.

Beide notaties komen veel voor in dit artikel, dus is het handig om hier goed de notatie te begrijpen.
Voorbeeld 1:
$\mathbb{Q}[\pi] = \{n_0 + n_1 \cdot \pi + \cdots + n_m \cdot \pi^m : n_i \in \mathbb{Q}\}$
$\mathbb{Q}(\pi) = \left\{\frac{n_0+n_1\cdot\pi+\cdots+n_m\cdot\pi^m}{p_0+p_1\cdot\pi+\cdots+p_l\cdot\pi^l} : n_i, p_j \in \mathbb{Q}\right\}$
We nemen nu een willekeurig element k dat een samenstelling is van elementen van $\mathbb{Q}$ en π met de

[1]Voor de definitie van algebraïsch; zie hoofdstuk 11.

bewerkingen $+, -, \cdot$ en $\div$.

$$\begin{aligned}
k &= \pi + \frac{3}{\pi^3} - \frac{2+\pi}{1+2\pi} \\
&= \frac{\pi \cdot \pi^3 \cdot (1+2\pi)}{\pi^3 \cdot (1+2\pi)} + \frac{3 \cdot (1+2\pi)}{\pi^3 \cdot (1+2\pi)} - \frac{(2+\pi)\cdot \pi^3}{\pi^3 \cdot (1+2\pi)} \\
&= \frac{2\pi^5 + \pi^4 + 3 + 6\pi - 2\pi^3 - \pi^4}{(1+2\pi)\pi^3} \\
&= \frac{3 + 6\pi - 2\pi^3 + 2\pi^5}{\pi^3 + 2\pi^4}
\end{aligned}$$

We zien dat k van de vorm $\left\{\frac{n_0+n_1\cdot\pi+\cdots+n_m\cdot\pi^m}{p_0+p_1\cdot\pi+\cdots+p_l\cdot\pi^l} : n_i, p_j \in \mathbb{Q}\right\}$ is, dus weten we $k \in \mathbb{Q}(\pi)$. Deze breuk is niet verder te vereenvoudigen, dus $k \notin \mathbb{Q}[\pi]$.

Voorbeeld 2:
$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{n_0 + n_1 \cdot \sqrt{2} + \cdots + n_m \cdot \sqrt{2}^m : n_i \in \mathbb{Q}\}$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{\frac{n_0+n_1\cdot\sqrt{2}+\cdots+n_m\cdot\sqrt{2}^m}{p_0+p_1\cdot\sqrt{2}+\cdots+p_l\cdot\sqrt{2}^l} : n_i, p_j \in \mathbb{Q}\right\}$
Omdat $\sqrt{2}$ algebraïsch is, want $\sqrt{2}^2 = 2$, kunnen we elke even macht m van $\sqrt{2}$ vereenvoudigen tot een macht van 2. Dus zien de verzamelingen er bij nader inzien als volgt uit:
$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{n_0 + n_1 \cdot \sqrt{2} : n_i \in \mathbb{Q}\}$
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{\frac{n_0+n_1\cdot\sqrt{2}}{p_0+p_1\cdot\sqrt{2}} : n_i, p_j \in \mathbb{Q}\right\}$, waarbij voor $q \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ geldt:
$q = \frac{n_0+n_1\cdot\sqrt{2}}{p_0+p_1\cdot\sqrt{2}} = \frac{n_0+n_1\cdot\sqrt{2}}{p_0+p_1\cdot\sqrt{2}} \cdot \frac{p_1\sqrt{2}-p_0}{p_1\sqrt{2}-p_0} = \frac{2n_1p_1 - n_0p_0 + (n_0p_1 - n_1p_1)\sqrt{2}}{2p_1^2 - p_0^2}$
$= \frac{2n_1p_1 - n_0p_0}{2p_1^2 - p_0^2} + \frac{n_0p_1 - n_1p_1}{2p_1^2 - p_0^2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, dus zien we $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$

Einde interemezzo

4. Twee belangrijke hulpstellingen

Allereerst dit: als $K \subset L$ een differentiaaluitbreiding is van K en $\alpha \in L$, dan krijgt men vaak te maken met de afgeleide van een "polynoom"$p(\alpha) \in K[\alpha]$. Zo'n polynoom is van de vorm:

$$\begin{aligned}
p(\alpha) &= a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0, \ (a_i \in K), \quad \text{met als afgeleide:} \\
(p(\alpha))' &= a_n'\alpha^n + a_n \cdot n\alpha^{n-1}\alpha' + a_{n-1}'\alpha^{n-1} + a_{n-1}\cdot(n-1)\alpha^{n-2}\alpha' + \cdots + a_0' \\
&= (a_n'\alpha^n + a_{n-1}'\alpha^{n-1} + \cdots + a_0') + (na_n\alpha^{n-1} + (n-1)a_{n-1}\alpha^{n-2} + \cdots + a_1)\alpha'
\end{aligned}$$

De differentiatie van $p(\alpha)$ wordt hier buiten de haakjes gedaan, dus nemen we van a_i en α de afgeleide, waardoor we bijvoorbeeld krijgen dat
$(a_n\alpha^n)' = a_n'\alpha^n + a_n \cdot n\alpha^{n-1}\alpha'$.
We hebben ook nog een paar andere manieren om de afgeleide te nemen van het polynoom, we gebruiken hierbij de volgende notatie (merk op dat het niet de gebruikelijke notatie uit de analyse is):

$$\begin{aligned}
&\text{Indien } f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \text{ dan zijn de afgeleiden:} \\
&\quad f_x(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 \\
&\quad f'(x) = a_n'x^n + a_{n-1}'x^{n-1} + \cdots + a_0'.
\end{aligned}$$

Er geldt dan:

$$(f(\alpha))' = f'(\alpha) + (f_x(\alpha))\alpha'.$$

Voor het volgende stuk hebben we de defnitie van de graad van een polynoom nodig:
De *graad* van een polynoom $f(t) \in K(t)$, waarbij t transcendent is over K, is te vinden als je $f(t)$ in de volgende vorm kunt schrijven:
$f(t) = a_nt^n + +a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_0$, waarbij voor de kopcoëfficient geldt dat $a_n \neq 0$, de graad van $f(t)$ is dan n. We schrijven dit als $gr(f(t)) = n$

Het gaat nu om de volgende hulpstellingen.

Hulpstelling A. *Laat K een differentiaallichaam zijn en $K(t)$ een differentiaaluitbreiding van K* met hetzelfde constantenlichaam als K*, waarbij t transcendent*[2] *is over K en $t' \in K$, hetgeen bijvoorbeeld het geval is als t een logaritme is over K.*

Voor een polynoom $f(t) \in K[t]$ met graad ≥ 1, geldt dan het volgende:

i. $gr(f(t))' = gr(f(t))$ indien de kopcoëfficiënt niet constant is.

ii. $gr(f(t))' = gr(f(t)) - 1$ indien de kopcoëfficiënt wel constant is.

Bewijs.

$$\begin{aligned} \text{Stel } f(t) &= a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0, \text{ dan} \\ (f(t))' &= a_n' t^n + n a_n t^{n-1} t' + a_{n-1}' t^{n-1} + \cdots + a_0' \\ &= a_n' t^n + (n a_n t' + a_{n-1}') t^{n-1} + \cdots + a_0' \end{aligned}$$

Als a_n niet constant is, dan is per definitie $a_n' \neq 0$ en dus $gr(f(t)) = gr(f(t))'$.
Als we a_n wel constant nemen, dan is $a_n' = 0$, dus is de coëfficiënt van t^n in de afgeleide van $f(t)$ gelijk aan 0. We kijken naar de coëfficiënt van t^{n-1}:

$$\begin{aligned} & n a_n t' + a_{n-1}', \text{ een primitieve hiervan is:} \\ & n a_n t + a_{n-1} \end{aligned}$$

We zien dat deze primitieve niet constant is, want t is transcendent over K, dus de afgeleide van het geheel is niet 0, dus de coëfficiënt van t^{n-1} in $(f(t))'$ is ongelijk aan nul. Hieruit volgt
$(f(t))' = (n a_n t' + a_{n-1}') t^{n-1} + \cdots + a_0'$, met $n a_n t' + a_{n-1}' \neq 0$. Hieruit volgt dat $gr(f(t))' = n - 1$. □

Hulpstelling B. *Laat K een diffentiaallichaam zijn en $K(t)$ een differentiaaluitbreiding van K* met hetzelfde constantenlichaam *als K, waarbij t transcendent is over K en $\frac{t'}{t} \in K$ hetgeen zich voordoet als t een exponentiaal over K is.*
Er geldt het volgende:

i. Voor alle $a \in K$ en alle $n \in \mathbb{Z}$ met $a \neq 0$, $n \neq 0$ zal

$$(at^n)' = ct^n \quad \textit{voor zekere} \;\; c \in K (c \neq 0).$$

ii. Voor alle $f(t) \in K[t]$ met graad ≥ 1 geldt:

$$gr(f(t))' = gr(f(t))$$

iii. $f(t)$ deelt $(f(t))'$ dan en slechts dan als $f(t)$ een éénterm is.

Bewijs.
i. Stel $\frac{t'}{t} \in K$, zeg $t' = bt$ met $b \in K$, dan geldt
$(at^n)' = a't^n + ant^{n-1}t' = (a' + nab)t^n$. We noemen $c = (a' + nab)$ en zien dat $c \in K$. Stel nu dat $c = 0$, dan zou dat betekenen dat $(at^n)' = ct^n = 0$, dus dat at^n constant is, dus ook in K zit. Maar dat zou betekenen dat t algebraïsch is, terwijl we hadden gesteld dat t transcendent is over K, dus kan die term niet in K zitten, tegenspraak.

ii. Zij $f(t) \in K[t]$ een willekeurig polynoom van graad $n \geq 1$:

$$f(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_0$$

Bij het nemen van de afgeleide noemen we voor elke $0 \leq i \leq n$; $c_i = a_i' + i a_i b$:

$$(f(t))' = c_n t^n + c_{n-1} t^{n-1} + \cdots + c_0 \text{ met } c_n \neq 0 \text{ (zie i)},$$

We zien dat de kopcoëfficiënt netjes ongelijk aan nul is, dus $gr(f(t)) = gr(f(t))'$

iiia. Zij $f(t) \in K[t]$ zo dat $f(t)|(f(t))'$ en $f(t)$ geen éénterm is.

$$f(t) = a_n t^n + \cdots + a_m t^m + \cdots + a_0$$

Dan geldt $a_n \neq 0$ en voor zekere $0 \leq m < n$ ook $a_m \neq 0$
We zien vervolgens dat

$$(f(t))' = (a_n' + n a_n b) t^n + \cdots + (a_m' + m a_m b) t^m + \cdots + a_0'.$$

[2]Voor de definitie van transcendent; zie hoofdstuk 11.

We weten dat $(f(t))'$ een veelvoud is van $f(t)$ met dezelfde graad, dat betekent dat er een $c \neq 0$ met graad 0 bestaat (dus $c \in K$) zodat

$$\begin{aligned}(f(t))' =& c \cdot f(t)\\ =& c \cdot a_n t^n + \dots + c \cdot a_m t^m + \dots + c \cdot a_0\\ (f(t))' =& (a_n' + na_n b)t^n + \dots + (a_m' + ma_m b)t^m + \dots + a_0', \text{ we zien}\\ & a_i' + ia_i b = c \cdot a_i \quad \text{voor alle } i = 0, \dots n,\end{aligned}$$

want alle coëfficiënten van t^i moeten in verhouding zijn, zodat $f'(t)$ deelbaar is door $f(t)$, dus volgt hieruit: $c \cdot a_i = (a_i' + ia_i b)$ voor elke $0 \leq i \leq n$. daaruit kunnen we de volgende gelijkheid halen:

$$\begin{aligned}c = \frac{(f(t))'}{f(t)} =& \frac{(a_n' + na_n b)t^n + \dots + (a_m' + ma_m b)t^m + \dots}{a_n t^n + \dots + a_m t^m + \dots}\\ =& \frac{a_n' + na_n b}{a_n} = \frac{a_m' + ma_m b}{a_m},\end{aligned}$$

we weten dat $b = \frac{t'}{t}$, dus gaan we verder met

$$\begin{aligned}&\frac{a_n'}{a_n} + \frac{na_n \frac{t'}{t}}{a_n} = \frac{a_m'}{a_m} + \frac{ma_m \frac{t'}{t}}{a_m}, \text{ we schruiven alles naar één kant}\\ &\frac{a_n'}{a_n} - \frac{a_m'}{a_m} + n\frac{t'}{t} - m\frac{t'}{t} = 0\end{aligned}$$

We willen deze uitdrukking nu praten naar

$$\left(\frac{a_n t^n}{a_m t^m}\right)' = 0$$

Als dit lukt kunnen we hier namelijk een tegenspraak uit halen, omdat t^{n-m} niet constant kan zijn. Dit doen we door de vorige uitdrukking met $\frac{a_n}{a_m} \cdot \frac{t^n}{t^m}$ te vermenigvuldigen, vervolgens krijgen we

$$\left(\frac{a_n'}{a_n} - \frac{a_m'}{a_m} + n\frac{t'}{t} - m\frac{t'}{t}\right) \cdot \frac{a_n}{a_m} \cdot \frac{t^n}{t^m} = 0 \cdot \frac{a_n}{a_m} \cdot \frac{t^n}{t^m} =$$

$$\left(\frac{a_n'}{a_m} \cdot \frac{t^n}{t^m}\right) + \left(a_n \cdot -\frac{a_m'}{a_m^2} \cdot \frac{t^n}{t^m}\right) + \left(\frac{a_n}{a_m} \cdot \frac{n\frac{t'}{t} \cdot t^n}{t^m}\right) + \left(\frac{a_n}{a_m} \cdot -m\frac{t'}{t} \cdot \frac{t^n}{t^m}\right) = 0$$

Als je goed kijkt zie je dat we hier de afgeleide hebben gevonden van de gewilde uitdrukking $\frac{a_n}{a_m} \cdot \frac{t^n}{t^m}$. Elk van de vier stukken van de vergelijking is namelijk de uitdrukking $\left(\frac{a_n t^n}{a_m t^m}\right)$ afgeleid naar één van de vier onderdelen.
Zo is $\left(\frac{a_n'}{a_m} \cdot \frac{t^n}{t^m}\right)$ de afgeleide naar a_n, $\left(a_n \cdot -\frac{a_m'}{a_m^2} \cdot \frac{t^n}{t^m}\right)$ de afgeleide naar a_m, $\left(\frac{a_n}{a_m} \cdot \frac{n\frac{t'}{t} \cdot t^n}{t^m}\right)$ die naar t^n en $\left(\frac{a_n}{a_m} \cdot -m\frac{t'}{t} \cdot \frac{t^n}{t^m}\right)$ de afgeleide naar t^m.
Dus hebben we gevonden dat $\left(\frac{a_n t^n}{a_m t^m}\right)' = 0$, wat betekent dat $\frac{a_n}{a_m} t^{n-m}$ constant is in $K[t]$, en dus ook in K, want K en $K[t]$ hebben hetzelfde constantenlichaam. Een uitdrukking $c \cdot t^k$, met $c \in K$, $k \geq 1$ en t transcendent over K kan alleen constant zijn indien $c = 0$, wat betekent dat $\frac{a_n}{a_m} = 0$, maar dat kan niet, want we hadden aangenomen dat die beide niet nul zijn in K. Tegenspraak; als $f(t)|(f(t))'$, dan moet $f(t)$ een éénterm zijn.

iii.b Het is de andere kant op triviaal: Als $f(t)$ een éénterm is, zeg $f(t) = at^m$ met $a \neq 0$, dan geldt, zoals we zagen: $(f(t))' = (a' + mab)t^m$ en dus $f(t)|(f(t))'$. Want in een lichaam zijn twee willekeurige elementen, ongelijk aan nul, deelbaar op elkaar. □

5. **Het Centrale Probleem**

We hebben nu de differentiatie gedefinieerd, zodat we voor een lichaam K aan iedere $a \in K$ een afgeleide $a' \in K$ kunnen toewijzen. Nu kunnen we ons ook de vraag stellen: Bestaat er voor elke $a \in K$ ook een $y \in K$, zodat $y' = a$? In het algemeen zal het antwoord op deze vraag nee zijn.
Daarom zullen we K hiervoor uitbreiden naar een differentiaallichaam L (met uiteraard een differentiatie die op de elementen van K dezelfde bewerking uitvoert als de differentiatie in K zelf). We hopen in deze

uitbreiding van K wel een oplossing te vinden. Deze uitbreiding wordt gevormd door achtereenvolgende adjuncties (ook wel 'samenstellingen') van algebraïsche elementen, logaritmen en exponentialen.
Klein voorbeeld: We werken in $\mathbb{Q}(x)$ en we hebben het volgende element waar we een primitieve voor willen vinden.

$$a = \frac{2x}{x^2+1} \in \mathbb{Q}(x)$$

Noem nu $b = x^2 + 1$, dan $b' = 2x$. Zo is $a = \frac{b'}{b}$, dus is a de afgeleide van de logaritme van b. De primtieve van a is dan $y = \log b \notin \mathbb{Q}(x)$, dus moeten we het lichaam $K = \mathbb{Q}(x)$ uitbreiden naar een lichaam waar y wel in zit. Dit is vrij simpel, we voegen gewoon y toe aan het lichaam en we krijgen: $L = K(y) = \mathbb{Q}(x, \log b)$.
L is nu het uitgebreide differentiaallichaam van K waarin de primitieve van a ligt.

Nog een voorbeeld waar we naar kunnen kijken: $a = \frac{1}{x^2+1} \in K = \mathbb{R}(x)$.
We willen een uitbreiding van $\mathbb{R}(x)$ construeren waarin $y' = \frac{1}{x^2+1}$ een oplossing heeft. Allereerst gaan we kijken wat voor elementen we nodig hebben door te breuksplitsen. De nulpunten van x^2+1 zijn i en $-i$, (hier zien we ook alvast dat we $\mathbb{R}(x)$ moeten uitbreiden met i naar $\mathbb{R}(x,i)$):

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+1} =& \frac{A}{x+i} + \frac{B}{x-i} = \frac{A(x-i)+B(x+i)}{x^2+1} \\
=& \frac{(A+B)x + (-A+B)i}{x^2+1} = \frac{0x+1}{x^2+1}, \text{ dit geeft 2 vergelijkingen} \\
& 1. A + B = 0, \text{ waaruit volgt } \quad A = c + di \text{ en } B = -c - di. \in \mathbb{R}, \\
& 2. -iA + iB = 1, \text{ er volgt } \quad i = A - B = 2c + 2di
\end{aligned}$$

Dit geeft $c = 0$ en $d = \frac{1}{2}$, en dus

$$\frac{1}{x^2+1} = \frac{\frac{1}{2}i}{x+i} + \frac{-\frac{1}{2}i}{x-i} \tag{1}$$

Met behulp van deze breukspliting kunnen we een integraal nemen over a:

$$\begin{aligned}
\int \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dx &= \frac{1}{2}i \int \left(\frac{1}{x+i} + \frac{1}{-x+i}\right) dx \\
&= \frac{1}{2}i \left(\log(x+i) - \log(-x+i)\right) \\
&= \frac{1}{2}i \left(\log\left(\frac{x+i}{-x+i}\right)\right) = \frac{1}{2i}\left(\log\left(\frac{xi+1}{-xi+1}\right)\right)
\end{aligned}$$

We moeten dus het lichaam $\mathbb{R}(x)(i)$ tot $\mathbb{R}(x)(i, \log(ix+1), \log(-ix+1))$ verder uitbreiden. In dit lichaam hebben we een oplossing voor $y = a'$ gevonden.

We noemen dit soort uitbreidingen elementaire uitbreidingen. Maar ook op deze manier zullen we niet altijd een uitbreiding L vinden waarin een y ligt, zodat $y' = a$. Neem bijvoorbeeld een lichaam K met een element $a = e^{x^2}$, dan is er -zoals we zullen zien- geen oplossing voor $y' = e^{x^2}$ in een elementaire uitbreiding van K.
De centrale vraag is nu: Hoe kunnen we aan de vorm van een element $a \in K$ zien of er een elementaire differentiaaluitbreiding $K \subset L$ bestaat waarin een primitieve y van a ligt. En als vraag daarbij -als deze bestaat- is er dan ook een algoritme waarmee deze y expliciet berekend kan worden?
Het antwoord op de eerste vraag wordt gegeven door de stelling van Liouville-Rosenlicht.
De tweede vraag werd voor een deel beantwoord door R. Risch in 1969 en J.H. Davenport in 1984. In dit verslag gaan we ook een beetje op de vraag in, maar niet zo diep als in die artikelen.

6. **De Stelling van Liouville-Rosenlicht**

De stelling waar deze paragraaf naar vernoemd is geeft antwoord op de vraag onder welke voorwaarde de vergelijking $y' = a$ -waarbij a in een differentiaallichaam K ligt- een oplossing heeft in een elementaire uitbreiding L van K.
De stelling gaat als volgt:

Stelling 1. *Laat K een differentiaallichaam zijn met karakteristiek nul*[3] *en laat $a \in K$. Er bestaat dan een elementaire differentiaaluitbreiding L van K -met hetzelfde constantenlichaam als K- met een $y \in L$ zodat $y' = a$, dan en slechts dan als a de volgende gedaante heeft:*

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v', \tag{2}$$

waarbij $u_1, u_2, \ldots, u_n$ en v elementen van K zijn en $c_1, c_2, \ldots c_n$ constanten van K.

Opmerkingen vooraf:

i. We zien dat $\frac{u_i'}{u_i}$ de logaritme van u_i als primitieve heeft, dat maakt het bewijzen de ene kant op makkelijk.

ii. De voorwaarde dat L hetzelfde constantenlichaam heeft als K is essentieel, immers neem weer als voorbeeld $K = \mathbb{R}(x)$ en kies $a = \frac{1}{x^2+1}$. Er geldt dan, als $y' = a : y = \arctan x = \frac{1}{2i}\left(\log\left(\frac{xi+1}{-xi+1}\right)\right)$. We kunnen dus een primitieve vinden, maar deze ligt in de elementaire uitbreiding $L = \mathbb{R}(x)(i, \log xi + 1, \log -xi + 1)$.
Deze uitbreiding heeft meer constanten dan $\mathbb{R}(x)$ en het is ook niet zo dat we kunnen schrijven

$$\frac{1}{x^2+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v',$$

met c_i constant in $\mathbb{R}(x)$ en u_i en v in $\mathbb{R}(x)$, hetgeen we zullen bewijzen in hoofdstuk 10. Zien we L als uitbreiding van $\mathbb{C}(x)$, dan is de schrijfwijze wel mogelijk zoals we al in vergelijking (1) hebben gezien.

Bewijs.
Het bewijs is de ene kant op heel gemakkelijk. We zien aan de vorm de som dat $\frac{u_i'}{u_i}$ de afgeleide is van de logaritme van u_i, dus als primitieve heeft dit: $t_i = \log u_i$. De gevraagde uitbreiding van K is dan $L = K(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, waarin de primitieve van a ligt, namelijk:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i \log u_i + v.$$

Conclusie: Als $a \in K$ van de gevraagde vorm in stelling (1) is, dan kunnen we de primitieve y, zodat $y' = a$, vinden in de differentiaaluitbreiding
$L = K(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ met $t_i = \log u_i$.

Dan hoeven we de stelling alleen nog de lastige kant op te bewijzen:
Indien er een uitbreiding $L = K(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ van het differentiaallichaam K bestaat (met hetzelfde constantenlichaam als K), waarbij alle $t_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ algebraïsch zijn over $K(t_1, t_2, \ldots, t_{i-1})$ óf logaritmen of exponentialen over K zijn en indien de vergelijking $y' = a$ in L een oplossing heeft, dan heeft a de gedaante:

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v',$$

waarbij $u_1, u_2, \ldots, u_n$ en v in K en $c_1, c_2, \ldots c_n$ constanten van K.

Dit bewijs gaat via volledige inductie naar het aantal elementen dat we toevoegen aan het lichaam K om een oplossing te kunnen vinden in de elementaire differentiaaluitbreiding L. We gaan dus eerst voor nul toegevoegde elementen controleren of het dan klopt. Vervolgens gaan we er vanuit dat we een primitieve $y \in L = K(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ van $a \in K$ kunnen schrijven in de gevraagde vorm van stelling (1) met behulp van de inductie veronderstelling. Als we dan kunnen bewijzen dat hetzelfde kan voor een $p + 1$-aantal elementen; dan weten we dat het voor alle waarden van p mogelijk is.

$\underline{p = 0}$: Voor $p = 0$ geldt $L = K$, dus we weten dat een zekere $a \in K$ een oplossing voor $y' = a$ heeft met $y \in L = K$. Dan zien we $a = y' = v'$ met $v = y \in K$, dus is a van de gevraagd vorm in stelling (1). Hierdoor mogen we er vanuit gaan dat voor zekere $p \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ de stelling juist is, dat wil zeggen: als $a \in K$ en $y' = a$ oplosbaar is in $L = K(t_1, t_2, \ldots, t_p)$ (met hetzelfde constantenlichaam en t_i zoals hierboven beschreven), dan heeft a de vereiste vorm. Dit is de inductieveronderstelling. Deze moeten we gebruiken om aan te tonen dat het ook juist is voor $p + 1$.

[3]Een lichaam met karakteristiek nul is een lichaam waarin elke eindige som van de vorm $1 + 1 + \cdots + 1$ ongelijk aan nul is.

$\underline{p+1}$: We nemen aan dat voor zekere $a \in K$ de vergelijking $y' = a$ een oplossing voor y heeft in $L = K(t_1, t_2, \ldots t_{p+1})$. Nu kunnen we een leuk trucje uithalen. We zeggen dat $a \in K(t_1)$ en dat $L = K(t_1)(t_2, \ldots, t_{p+1})$. Nu we het in deze vorm schrijven, mogen we de inductieveronderstelling gebruiken. We hebben namelijk een a in een differentiaallichaam waarvan we een primitieve kunnen vinden in een differentiaaluitbreiding van dat lichaam met een p-aantal toegevoegde elementen.

Dus als $y \in L$ bestaat zodat $y' = a$, dan kunnen we $a \in K(t_1)$ van de volgende vorm schrijven: (voor het gemak schrijven we verder t in plaats van t_1)

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(u_i(t))'}{u_i(t)} + (v(t))', \tag{3}$$

met $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t)$ en $v(t)$ in $K(t)$ en $c_1, c_2, \ldots c_n$ constanten in $K(t)$, dus in K $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Nu moeten we aantonen dat $u_1(t), u_2(t), \ldots u_n(t), v(t)$ in K liggen, ofwel: we moeten t wegpraten. We onderscheiden drie gevallen:

A. t is transcendent over K en een logaritme over K, dus $t' = \frac{d'}{d}$ $(d \in K)$.

B. t is transcendent over K en een exponentiaal over K, dus $t' = td'$ $(d \in K)$.

C. t is algebraïsch over K (niet constant).

A. Allereerst merken we op dat we elke $u_i(t)$ in vergelijking (3) kunnen schrijven als het product van een element van K en van machten van monische irreducibele polynomen in $K[t]$. Immers, die $u_i(t)$ is te ontbinden in machten van irreducibele polynomen (met positieve en/of negatieve machten), waarna je de polynomen monisch kunt maken door alle kopcoëfficiënten te verwerken in het element van K.
Dan zien we $u_i(t) = k_i \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \cdots \cdot p_m^{n_m}$, met $p_i \in K[t]$ irreducibel, $k_i \in K$ constant, $n_i \in \mathbb{Z}$ en $m \in \mathbb{N}$
Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
c_i \frac{u_i'(t)}{u_i(t)} &= \text{ (voor het gemak schijven we hier } p_i \text{ in plaats van } p_i(t))\\
&= c_i \left(\frac{k_i \cdot (p_1^{n_1})' \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}}{u_i(t)} + \cdots + \frac{k_i \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot (p_q^{n_q})'}{u_i(t)} \right)\\
&= c_i \left(n_1 \frac{p_1'}{p_1} \cdot \frac{k_i \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}}{u_i(t)} + \cdots + n_q \frac{p_q'}{p_q} \cdot \frac{k_i \cdot p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot p_q^{n_q}}{u_i(t)} \right)\\
&= d_1 \frac{p_1'}{p_1} \cdot \frac{u_i(t)}{u_i(t)} + \cdots + d_q \frac{p_q'}{p_q} \cdot \frac{u_i(t)}{u_i(t)} = \sum_{s=1}^{q} d_s \frac{p_s'(t)}{p_s(t)},
\end{aligned}$$

en als we alle $\frac{u_i'(t)}{u_i(t)}$ samen nemen krijgen we:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(u_i(t))'}{u_i(t)} = \sum_{s=1}^{m} d_s \frac{p_s'(t)}{p_s(t)},$$

waarbij $d_s \in K$, $p_s(t) \in K[t]$ monisch irreducibel en onderling verschillende elementen, $c_i \in K$ constant en $m, n \in \mathbb{N}$.

Dan kijken we nu naar $v(t)$. Ook $v(t)$ bestaat uit het product van een element van K en machten van irreducibele polynomen. Via partiële breuksplitsing zien we dat $v(t)$ te schrijven is als een polynoom in $K[t]$ en een som van termen van de vorm $\frac{h(t)}{(f(t))^r}$, kortom:

$$v(t) = P(t) + \sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{h_{ij}(t)}{(f_i(t))^j},$$

met $P(t) \in K[t]$, $b, n_i \in \mathbb{N}$ en $h_{ij}(t)$ en $f_i(t) \in K[t]$; $gr(h_{ij}(t)) < gr(f_i(t))$;
$(i = 1, \ldots, b)$; $f_i(t)$ monisch en irreducibel.

Volgens hulpstelling A geldt dan $gr(f_i(t))' = gr(f_i(t)) - 1$ en dus $f_i(t) \nmid (f_i(t))'$, we gaan met behulp hiervan laten zien dat de somrij van $v(t)$ gelijk aan nul moet zijn:
Laat nu $j(\geq 1)$ de grootste exponent zijn waarmee zekere $f_i(t)$ in een noemer in $v(t)$ voorkomt, dan bevat $(v(t))'$ een term $\frac{-j \cdot h_{ij}(t)(f_i(t))'}{(f_i(t))^{j+1}}$, en omdat $f_i(t) \nmid (f_i(t))'$, blijft $(f_i(t))^{j+1}$ in de noemer. Deze kan niet wegvallen tegen een andere term in $(v(t))'$, want dit is de grootste macht van $f_i(t)$. Maar deze term moet wel ergens tegen wegvallen, want in uitdrukking (3) zien we dat $a \in K$, dus onafhankelijk van t is. Dus

moet het tegen een term in $\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(u_i(t))'}{u_i(t)}$ wegvallen, echter zijn hierin alle noemers eerste machten van irreducibele polynomen, dus kan het daar ook niet tegen wegvallen. De conlusie is; de enige manier hoe a onafhankelijk van t wordt is dat de term $\frac{-j \cdot h_{ij}(t)(f_i(t))'}{(f_i(t))^{j+1}}$ gelijk is aan nul. We weten $j \neq 0$ en $(f_i(t))' \neq 0$, dus dan is $h_{ij}(t) = 0$. Met andere woorden, de term van $\sum_{i=1}^{b} \sum_{j=1}^{n_i} \frac{h_{ij}(t)}{(f_i(t))^j}$ met de grootste exponent in de noemer is gelijk aan nul, ofwel er bestaat, met behulp van inductie, geen zo'n term; de hele somrij is gelijk aan nul. We houden over: $v(t) \in K[t]$ $(v(t) = P(t))$.

Ook geldt voor $\sum_{s=1}^{m} \frac{(p_s(t))'}{p_s(t)}$; als $p_s(t)$ een t bevat, dan moet deze ook ergens tegen wegvallen. Maar $p_s(t) \nmid (p_s(t))'$, dus voor elke $p_s(t)$ is $\frac{(p_s(t))'}{p_s(t)}$ niet te vereenvoudigen en alle $p_s(t)$ zijn verschillend, dus kunnen de termen ook niet tegen elkaar wegvallen. Hieruit volgt voor elke $s(= 1, \dots, m)$: $\frac{(p_s(t))'}{p_s(t)} \in K$, dus $p_s(t) \in K$ $(p_s(t) = p_s)$. Hieruit volgt:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(u_i(t))'}{u_i(t)} = \sum_{s=1}^{m} d_s \frac{p_s'}{p_s}$$

Verder is het eenvoudig in te zien dat $\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(u_i(t))'}{u_i(t)}$ geen termen $t^l (l \geq 1)$ kan bevatten, omdat de optredende noemers niet kunnen wegvallen om dezelfde reden als bij $f_i(t)$ hierboven. Dus om, in (3), $a \in K$ te kunnen krijgen, moet $(v(t))' \in K$.
Op grond van hulpstelling A geldt dan $v(t) = c_0 t + v_0$ met c_0 en v_0 in K en zelfs c_0 constant in K. Dan geldt: $(v(t))' = c_0 t' + v_0'$, waarin t een logaritme is met $t' = \frac{d'}{d}$. De uitdrukking (3) krijgt dan de gewenste vorm zoals in (2):

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(u_i(t))'}{u_i(t)} + (v(t))' = \sum_{s=1}^{m} d_s \frac{p_s'}{p_s} + c_0 \frac{d'}{d} + v_0' \tag{4}$$

met $p_1, p_2, \dots, p_n, d$ en v_0 in K en $d_1, \dots, d_m, c_0$ constant in K.

B. In het geval dat t transcendent is en een exponentiaal is met $t' = td' (d \in K)$ gaat de redenering van A voor een gedeelte ook op. Maar de bewering
$(f_i(t)) \nmid (f_i(t))'$ is niet voor alle $f_i(t)$ waar. In hulpstelling B staat:

$f(t) \mid (f(t))'$ dan en slechts dan als $f(t)$ een éénterm is.

We hebben $f_i(t)$ monisch en irreducibel verondersteld, dus dat geeft alleen de optie $f(t) = t$. Nu is $v(t)$ nog niet gegarandeerd een polynoom in $K[t]$, maar kan de vorm $v(t) = \frac{a_{-m}}{t^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \dots a_n t^n$ hebben.
Ook met betrekking tot $u_i(t)$ verandert er iets: die termen hoeven niet allemaal in K te liggen, één ervan, zeg u_1 kan t zijn; er geldt dan toch: $\frac{(u_1(t))'}{u_1(t)} = \frac{t'}{t} = d'$ $(d \in K)$, dus die term kunnen we in uitdrukking (4) netjes onder v_0 schuiven. Het is hier niet nodig om meerdere $u_i(t) = t^n (n \in \mathbb{Z})$ te hebben. Dit levert namelijk hetzelfde resultaat als u_1, want $\frac{(t^n)'}{t^n} = \frac{nd't^n}{t^n} = nd'$, deze term is ook op te vangen met $c_1 d'$. Omdat $\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(u_i(t))'}{u_i(t)} \in K$ geldt ook weer $(v(t))' \in K$, hetgeen op grond van hulpstelling B_{ii} betekent dat $v(t) \in K$, zeg $v(t) = v_0$. Op grond hiervan krijgt a in uitdrukking (3) de gewenste vorm:

$$a = c_1 \frac{t'}{t} + \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v_0' = \sum_{i=2}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + (c_1 d + v_0)'$$

met $u_2, u_3, \dots, u_n, (c_1 d + v_0)$ in K en $c_2, c_3, \dots, c_n$ constant in K.

Einde bewijs deel B. Voordat we aan het bewijs van deel C beginnen bouwen we nog iets meer voorkennis op.

Intermezzo
We gaan zometeen de geconjugeerde nulpunten van een algebraïsch element t gebruiken. Voordat we dat doen is het handig om te weten hoe dat werkt.

t is algebraïsch over K met een definiërend polynoom $P(x)$ van graad $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. We weten van dit polynoom dat het geen nulpunten in K heeft, anders zou het minimumpolynoom van t namelijk een lagere graad hebben. De hoofdstelling van de algebra vertelt ons dat het polynoom $\frac{P(x)}{x-t}$ nog $s - 1$ nulpunten heeft die algebraïsch zijn over K. Die nulpunten liggen wel in $K(t)$. Met andere woorden: We kunnen het polynoom $P(x)$ als volgt ontbinden

$$P(x) = (x - \tau_1)(x - \tau_2)\dots(x - \tau_s)$$

met de nulpunten, die we dus ook wel geconjugeerden van t noemen, $\tau_1 = t, \tau_2, \dots, \tau_s \in K(t)$.
Deze geconjugeerden hebben de eigenschap dat er bewerkingen (lichaamsautomorfismen) bestaan, bijvoorbeeld σ, zodat $\sigma(\tau_i) = \tau_j$ $(i \neq j)$, terwijl $\sigma(k) = k$ voor $k \in K$. Deze bewerking heet conjugeren en die gaan we zometeen gebruiken.
Deze bewerking is het meest bekend in het geval dat we een element van $\mathbb{C}$ complex conjugeren.
Klein voorbeeld: $p(x) = x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$.
$p(x)$ is irreducibel in $\mathbb{R}(x)$, maar we zien zo dat $\tau_1 = 1 + 2i \in \mathbb{C}$ een nulpunt is. In dit geval kunnen we de bekende manier van conjugeren gebuiken:
$\overline{\tau_1} = \overline{1 + 2i} = 1 - 2i = \tau_2$.
τ_2 is ook een nulpunt van $p(x)$ en we zien inderdaad dat $\overline{k} = k$ voor $k \in \mathbb{R}$.
Bij het conjugeren is het belangrijk om te weten dat het conjugeren van een geheel te doen is door elk apart stukje te conjugeren. Als we bijvoorbeeld $p(x)$ conjugeren krijgen we: $\overline{p(x)} = \overline{x}^2 - \overline{2}\overline{x} + \overline{5} = \overline{x}^2 - 2\overline{x} + 5$.

Ook is het belangrijk om te weten dat het product van de geconjugeerden altijd in K zit, net zo zit de som altijd in K.
Met het gebruiken van de complexe conjugatie is dat meteen duidelijk, neem bijvoorbeeld $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(i)$; $z \in \mathbb{C}$ $(z = a + bi)$, dan:

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 \in \mathbb{Q} \\ z + \overline{z} &= (a + bi) + (a - bi) = 2a \in \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Als we nu weer het algemene geval met $P(x)$ en $\tau_1, \dots \tau_s$ als (geconjugeerde) nulpunten nemen, dan zien we dat:

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - \tau_1)(x - \tau_2)\dots(x - \tau_s) = x^s + p_{s-1}x^{s-1} + \dots + p_0 \\ &= x^s + (\tau_1 + \dots + \tau_s)x^{s-1} + \dots + \tau_1 \cdot \tau_2 \dots \tau_s \end{aligned}$$

Hier zien we dat $p_{s-1} = (\tau_1 + \dots + \tau_s) \in K$ en $p_0 = (\tau_1 \cdot \tau_2 \dots \tau_s) \in K$, dus dat het product en de som van de geconjugeerden in K liggen.

Nu behandelen we een iets complexer voorbeeld:
We zoeken het definiërende polynoom van $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$, dat algebraïsch is over $\mathbb{Q}$. We observeren dat $\alpha^4 = -1$, dus $\alpha^4 + 1 = 0$, dus $q(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Q}(x)$ is een polynoom waarvoor $q(\alpha) = 0$. Als we niet een polynoom $p(x)$ met $p(\alpha) = 0$ kunnen vinden met graad ≤ 3, dan is $q(x)$ het definiërende polynoom van α.

Stel er bestaat wel een polynoom $p(x) \in \mathbb{Q}(x)$ met graad ≤ 3, zodat $p(\alpha) = 0$:

$$p(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + p_3 x^3$$

We weten dat $p(x)$ niet eerstegraads is, anders zou α in $\mathbb{Q}$ zitten, want het nulpunt van een eerstegraads polynoom $p(x) = x - a$ met $a \in \mathbb{Q}$ is a. Als het tweedegraads is, dan is $p(x)$ van de vorm:
$p(x) = x^2 + p_1 x + p_0$, $p_i \in \mathbb{Q}$. De eis is $p(\alpha) = 0$ We zien

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(p(\alpha)) &= \mathrm{Im}((\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i))^2 + \frac{p_1}{2}\sqrt{2}(1+i) + p_0) \\ &= 1 + \frac{p_1}{2}\sqrt{2} = 0, \text{ er volgt} \\ p_1 &= -\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}. \end{aligned}$$

We zien dat $p(x)$ niet van graad 2 kan zijn.

Als $p(x)$ van graad 3 zou zijn, dan is $p(x)$ van de vorm:

$$\begin{aligned}
p(x) &= p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + x^3, \quad \text{dan is:} \\
\mathrm{Re}(p(\alpha)) &= \mathrm{Re}(p_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot p_1(1+i) + p_2 \cdot i + \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1+i)) \\
&= p_0 + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot p_1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \text{er volgt} \\
p_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-p_1)
\end{aligned}$$

We zien dat $\frac{1}{2}\sqrt{2} \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ en $(1-p_1) \in \mathbb{Q}$, dus zit p_0 in $(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$ tenzij $p_1 = 1$. We willen $p_0 \in \mathbb{Q}$, dus volgt $p_0 = 0$ en $p_1 = 1$. Echter volgt uit $p_0 = 0$ dat $x = 0$ een nulpunt van $p(x)$ is, waardoor $p(x)$ reducibel is in $\mathbb{Q}$. Maar het minimum polynoom van α moet natuurlijk irreducibel moet zijn, anders is het geen minimum polynoom.
<u>Conclusie:</u> Het minumpolynoom van α heeft graad 4, en is dan $q(x) = x^4 + 1$.

We werken, dus met $q(x) = x^4 + 1 \in \mathbb{Q}(x)$ en $\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)$. Alle elementen $k \in \mathbb{Q}(\alpha)$ kunnen uniek geschreven worden als $k = b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + b_3\alpha^3$.
De nulpunten van $q(x)$ zijn:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i) = \alpha, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1+i) = \alpha^3,$$
$$\alpha_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(-1-i) = -\alpha, \qquad \alpha_4 = \frac{1}{2}\sqrt{2}(1-i) = -\alpha^3.$$

We zoeken nu functies die deze elementen naar elkaar conjugeren, terwijl de functies de elementen van $\mathbb{Q}$ op hun plek laten.
Belangrijk bij het construeren van deze functies; we hoeven alleen 1 en α een beeld te geven en de functie een multiplicatief en additief homomorfisme te laten zijn. De rest van de functie volgt daaruit. Een willekeurig element k, zoals hierboven besproken krijgt namelijk het beeld:
$f(k) = f(b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + b_3\alpha^3) = b_0 f(1) + b_1 f(1)f(\alpha) + b_2 f(1)f(\alpha)^2 + b_3 f(1)f(\alpha)^3$.
Elke conjugatie functie stuurt 1 naar 1.

Als eerste zoeken we een functie ϕ die α_1 naar α_2 stuurt, dus met $\phi(\alpha) = \alpha^3$.
De functie stuurt $k \in \mathbb{Q}(\alpha)$ naar (let op: $\alpha^4 = -1$ en $\alpha^8 = 1$):
$\phi(k) = b_0 + b_1\alpha^3 + b_2\alpha^6 + b_3\alpha^9 = b_0 + b_3\alpha - b_2\alpha^2 + b_1\alpha^3$.
We zien ook:

$$\phi(\alpha_1) = \phi(\alpha) = \alpha^3 = \alpha_2 \qquad \phi(\alpha_2) = \phi(\alpha^3) = \alpha^9 = \alpha_1$$
$$\phi(\alpha_3) = \phi(-\alpha) = -\alpha^3 = \alpha_4 \qquad \phi(\alpha_4) = \phi(-\alpha^3) = -\alpha^9 = -\alpha = \alpha_3$$

Als we dit op dezelfde manier doen voor $\sigma : \alpha_1 \to \alpha_3$ ofwel $\sigma(\alpha) = -\alpha$ en
$\psi : \alpha_1 \to \alpha_4$ ofwel $\psi(\alpha) = -\alpha^3$ krijgen we:

$$\sigma(k) = b_0 - b_1\alpha + b_2\alpha^2 - b_3\alpha^3 \qquad \psi(k) = b_0 - b_3\alpha - b_2\alpha^2 - b_1\alpha^3,$$

met

$$\begin{aligned}
\sigma(\alpha_1) &= \sigma(\alpha) = -\alpha = \alpha_3 & \psi(\alpha_1) &= \sigma(\alpha) = -\alpha^3 = \alpha_4 \\
\sigma(\alpha_2) &= \sigma(\alpha^3) = -\alpha^3 = \alpha_4 & \psi(\alpha_2) &= \psi(\alpha^3) = -\alpha^9 = \alpha_3 \\
\sigma(\alpha_3) &= \sigma(-\alpha) = (-1)^2\alpha = \alpha_1 & \psi(\alpha_3) &= \psi(-\alpha) = \alpha^3 = \alpha_2 \\
\sigma(\alpha_4) &= \sigma(-\alpha^3) = (-1)^2 = \alpha^3 = \alpha_2 & \psi(\alpha_4) &= \psi(-\alpha^3) = \alpha^9 = \alpha_1
\end{aligned}$$

In de tabel hieronder zien we waar elke bewerking de geconjugeerden naar afbeeld. Daarnaast zien we dat deze functies, samen met de identiteitsfunctie, de viergroep van Klein vormen. Een verzameling van conjugatiefuncties, behorende bij een aantal geconjugeerde elementen, vormen altijd samen een groep.

bewerking	α_1	α_2	α_3	α_4	k
$\mathrm{id}(\alpha) = \alpha$	α_1	α_2	α_3	α_4	k
$\phi(\alpha) = \alpha^3$	α_2	α_1	α_4	α_3	k
$\sigma(\alpha) = -\alpha$	α_3	α_4	α_1	α_2	k
$\psi(\alpha) = -\alpha^3$	α_4	α_3	α_2	α_1	k

V_4	id	ϕ	σ	ψ
id	id	ϕ	σ	ψ
ϕ	ϕ	id	ψ	σ
σ	σ	ψ	id	ϕ
ψ	ψ	σ	ϕ	id

Einde Intermezzo

C. In dit geval is t algebraïsch over K, dan is er een éénduidig bepaald monisch, irreducibel polynoom $p(y) \in K[y]$ - zeg van graad s - zodanig dat $p(t) = 0$, het zogenaamde definiërende polynoom van t. Dit polynoom is dus van de vorm
$p(y) = a_s y^s + a_{s-1}y^{s-1} + \cdots + a_1 y + a_0$ met $a_0, \ldots a_s \in K$.

Voor de beeldvorming: Je kunt y hierin als een soort dummy variable zien waar je wat je wilt kunt invullen; in dit geval dus t.
Voorbeeld: $K = \mathbb{Q}(x)$, α is algebraïsch over K, dus α is het nulpunt van een polynoom $q(y) \in K[y]$:
$q(\alpha) = f_m(x)\alpha^m + f_{m-1}(x)\alpha^{m-1} + \cdots + f_1(x)\alpha + f_0(x) = 0$.
Het is belangrijk om het algebraïsche element op deze manier te zien, omdat de stelling die we behandelen eist dat we in de differentiaaluitbreiding geen nieuwe constanten toevoegen. Dus bijvoorbeeld $t = \sqrt{2}$ wanneer we in $\mathbb{Q}$ werken is niet toegestaan. We hebben ook bij het primitiveren van $\frac{1}{x^2+1}$ gezien dat we met de stelling niet $i \in \mathbb{C}$ mogen toevoegen, omdat die constant is.

Met de uitbreiding van K naar $K(t)$ komt dat je elk element van $K(t)$ op een unieke manier kunt schrijven als een polynoom in t met coëfficiënten in K en graad ten hoogste $(s-1)$.

Bij $u_i(t)$ en $v(t)$ behoren dus polynomen $U_i(y)$ en $V(y)$ in $K[y]$ zodanig dat

$$\begin{aligned} u_i(t) &= U_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ \text{en } v(t) &= V(t) \qquad \text{op unieke manier geschreven zijn.} \end{aligned}$$

We stellen de geconjugeerden van t, dat wil zeggen t en de andere nulpunten van $p(y) = 0$, voor door:

$$\tau_1 (= t), \tau_2, \ldots, \tau_s$$

Als we nu op dezelfde manier het element $a \in K(t)$ conjugeren, dan krijgen we als geconjugeerden: $\alpha_1 (= a), \ldots \alpha_s$. Die hebben een verschillende naam, maar zijn allemaal gelijk aan a zelf, dat komt omdat het conjugeren ten opzichte van het lichaam K is, dus wordt $a \in K$ naar a zelf gestuurd. (Net als dat de complex geconjugeerde van een reeël getal gelijk aan het getal zelf is; $\overline{k} = k$, als $k \in \mathbb{R}$) Dus kunnen we de vergelijking

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(u_i(\tau_1))'}{u_i(\tau_1)} + (v(\tau_1))'$$

op dezelfde manieren conjugeren, met de conjugatiefunctie die τ_1 naar τ_j stuurt $(j = 1, \ldots s)$ (van de eerste naar de tweede vergelijking hieronder gebruiken we dat het conjugeren van het geheel uitgewerkt wordt door alle losse termen te conjugeren):

$$\begin{aligned} \overline{a} &= \overline{\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(U_i(\tau_1))'}{U_i(\tau_1)} + (V(\tau_1))'} = \\ \alpha_j &= \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(U_i(\overline{\tau_1}))'}{U_i(\overline{\tau_1})} + (V(\overline{\tau_1}))' = \\ a &= \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(U_i(\tau_j))'}{U_i(\tau_j)} + (V(\tau_j))' \end{aligned}$$

Nu sommeren we de bovenstaande vergelijking van $j = 1$ tot en met $j = s$, en delen dat door s. We weten dat we bij het conjugeren van een geheel elk stukje apart mogen conjugeren:

$$
\begin{aligned}
a &= \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s} \frac{(U_i(\tau_1))'}{U_i(\tau_1)} + \cdots + \frac{c_i}{s} \frac{(U_i(\tau_s))'}{U_i(\tau_s)} + \frac{(V(\tau_1))' + \cdots + (V(\tau_s))'}{s} \\
a &= \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s} \frac{(U_i(\tau_1))' U_i(\tau_2) \ldots U_i(\tau_s)}{U_i(\tau_1) U_i(\tau_2) \ldots U_i(\tau_s)} + \cdots + \frac{U_i(\tau_1) \ldots U_i(\tau_{s-1})(U_i(\tau_s))'}{U_i(\tau_1) U_i(\tau_2) \ldots U_i(\tau_s)} \\
&\quad + \frac{(V(\tau_1))' + \cdots + (V(\tau_s))'}{s} \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{(U_i(\tau_1) U_i(\tau_2) \ldots U_i(\tau_s))'}{U_i(\tau_1) U_i(\tau_2) \ldots U_i(\tau_s)} + \left[\frac{(V(\tau_1))' + \cdots + (V(\tau_s))'}{s} \right]
\end{aligned}
$$

We zien in de somrij $U_i(\tau_1)$ en zijn geconjugeerden met elkaar vermenigvuldigd en in het stuk tussen haken een som wordt genomen van $V'(\tau_1)$ en zijn geconjugeerden. In de intermezzo hebben we vastgesteld dat zo'n product en zo'n som altijd in K liggen. We kunnen zeggen voor zekere $p_i, q \in K$:
$p_i = U_i(\tau_1)U_i(\tau_2)\ldots U_i(\tau_s)$ $(i = 1, ..n)$ en $q = \frac{1}{s}(V(\tau_1) + \cdots + V(\tau_s))$, zodat de vergelijking hierboven als volgt te herschrijven is

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{p_i'}{p_i} + q',$$

□

7. De Uitbreiding van de Stelling van Liouville-Rosenlicht

Van de stelling van Liouville-Rosenlicht bestaat een sterkere variant die in het artikel van Grootendorst slechts benoemd wordt, niet bewezen. Voor het bewijs wordt verwezen naar de literatuur van Davenport, Levelt of Risch. Deze stelling laat toe dat het constantenlichaam van de uitbreiding L van het differentiaallichaam K groter is dan het constantenlichaam van K.

Opmerking: In zekere zin is het niet noodzakelijk om de uitgebreide stelling van Liouville-Rosenlicht te bewijzen. De vraag naar de uitgebreide stelling komt namelijk omdat je in de eerste stelling geen constanten mag toevoegen aan K. Dit probleem is te verhelpen: Wanneer je a in een lichaam K hebt, kun je in plaats daarvan a in de algebraïsche afsluiting van K nemen, zodat er in een elementaire uitbreiding L van K geen algebraïsche constanten meer toegevoegd kunnen worden. In de algebraïsche afsluiting is ieder polynoom te ontbinden in eerstegraads factoren. Zo is bijvoorbeeld $\mathbb{C}$ de algebraïsche afsluiting van $\mathbb{R}$.

We duiken nu een stukje dieper in de uitgebreide stelling van Liouville-Rosenlicht met het artikel van Risch uit 1969. Hij introduceert de stelling met het volgende voorbeeld:

We vragen ons af of er écht nieuwe constanten nodig zijn voor het integreren van zekere elementen van een differentiaallichaam K, we nemen als voorbeeld in $\mathbb{Q}(z)$

$$\int \frac{1}{z^2 - 2} dz = \frac{\sqrt{2}}{4} \log \frac{z - \sqrt{2}}{z + \sqrt{2}}.$$

De gevonden primitieve lijkt te impliceren dat we het toevoegen van $\sqrt{2}$ echt nodig hebben. Maar om het zeker te weten gaan we het toch bewijzen:

Stelling 2. *Laat L een elementaire uitbreiding van $K(z)$ zijn, waarbij K een constantenlichaam is en z transcendent over K met $z' = 1$. Zij $y \in L$ en $y' = \frac{1}{z^2-2}$, dan $\sqrt{2} \in L$.*

Bewijs. Zij K een constantenlichaam en $a = \frac{1}{z^2-2} \in K(z)$. Zij L een elementaire differentiaaluitbreiding van $K(z)$, zodat er een $y \in L$ bestaat met $y' = \frac{1}{z^2-2}$. Zonder verlies van algemeenheid mogen we aannemen dat K het constantenlichaam van L is. We stellen nu dat $\sqrt{2} \notin K$ (zodat we hier een tegenspraak uit kunnen afleiden). De stelling van Liouville-Rosenlicht geeft ons dat y in de volgende vorm te schrijven is:
$y = \sum_{i=1}^{n} c_i \log(u_i) + v$, met $c_i \in K, u_i, v \in K(z)$ (voor $i = 1, \ldots, n$).

We mogen aannemen dat de u_i irreducibel zijn, (want als $u_i = p \cdot q$, dan $\log(u_i) = \log(p) + \log(q)$, dus kunnen ze als aparte termen gerekend worden). Merk op dat als $\sqrt{2} \notin K$, dan is $z^2 - 2$ irreducibel in $K(z)$. We breuksplitsen v en differentiëren de uitdrukking

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i \log(u_i) + v, \text{ tot:}$$
$$y' = a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v', \text{ we zien}$$
$$v(z) = p(z) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_{ij}}{(f_i(z))^j}$$

met $p(z) \in K[z], \alpha_{ij} \in K$ en $f_i(z) \in K[z]$ irreducibel.
Zij i willekeurig en j zo groot mogelijk waarvoor $\alpha_{ij} \neq 0$. Dan geeft dit in y' een term $\frac{-j \cdot f_i'(z) \cdot \alpha_{ij}}{(f_i(z))^{j+1}}$ die niet vereenvoudigbaar is, waardoor die niet kan wegvallen tegen een andere term en als term met een grotere macht dan 1 niet gelijk kan zijn aan een irreducibel element als $z^2 - 2$. Dit werkt dus niet, dus moet $\alpha_{ij} = 0$ zijn voor alle i en j. $p'(z) \in K[z]$ helpt ook niet om $\frac{1}{z^2-2}$ te krijgen en valt niet weg tegen een term $\frac{u_i'}{u_i}$.

Dus $a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} = \frac{1}{z^2-2}$, met $u_i \in K[z]$ irreducibel. Omdat de u_i irreducibel zijn, is de enige term u_i die in aanmerking komt, zeg u_1, $u_1 = z^2 - 2$, dat moeten we immers in de noemer krijgen. Er volgt $c_1 \frac{u_1'}{u_1} = \frac{c_1 \cdot 2z}{z^2-2}$. Maar er bestaat geen $c_1 \in K$ zodat $c_1 \cdot 2z = 1$. Dus $a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v' = \frac{1}{z^2-2}$ is met de genomen aannames niet mogelijk, dus moet $\sqrt{2}$ wel in K, dus ook in L zitten.

□

Voor het bewijzen van de uitgebreide stelling introduceert Risch een hulpstelling:

Hulpstelling C. *Laat $x_1, \ldots, x_n$ variabelen zijn over een lichaam L dat een universele lichaamsuitbreiding van K is en laat C het constantenlichaam van K zijn, laat $p(x_1, \ldots, x_n)$ en $q(x_1, \ldots, x_n)$ in $L[x_1, \ldots, x_n]$. Zij $c_1, \ldots, c_n \in D$ (D = het constanten lichaam van L) zodat $p(c_1, \ldots, c_n) = 0$ en $q(c_1, \ldots c_n) \neq 0$. Dan zijn er ook $k_1, \ldots, k_n$ in $\overline{C}$ ($\overline{C}$ is de algebraïsche afsluiting van C) zodat $p(k_1, \ldots, k_n) = 0$ en $q(k_1, \ldots, k_n) \neq 0$.*[4]

Met andere woorden; de hulpstelling zegt: Als we in een willekeurige uitbreiding constanten kunnen vinden om een polynoom gelijk aan nul te laten zijn, dan bestaan er ook zulke constanten (al dan niet dezelfde) in de algebraïsche aflsuiting van K.

Dan formuleert Risch de uitgebreide stelling van Liouville-Rosenlicht als volgt:

Stelling 3. *Laat K een differentiaallichaam zijn met constantenlichaam C. Zij $a \in K$ en neem aan dat er een y in een elementaire uitbreiding L over K bestaat, zodat $y' = a$. Dan bestaat er een $v \in K, c_i \in \overline{C}$ ($\overline{C}$ is de algebraïsche afsluiting van C), $u_i \in \overline{C}K$ zodat $a = \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$ waarbij elk automorfisme van $\overline{C}K$ over K de termen van de som permuteerd.*

Bewijs. (Van de uitgebreide stelling van Liouville-Rosenlicht)
Door het toevoegen van de constanten $c_1, \ldots, c_n$ aan K kunnen we de eerste stelling van Liouville-Rosenlicht toepassen om te zeggen dat y, als oplossing van $y' = a$, er als volgt uit moet zien:

$$y = \sum_{i=1}^{k} c_i \cdot \log\left(\frac{p_i(c_1, \ldots, c_n)}{q_i(c_1, \ldots, c_n)}\right) + \frac{p_0(c_1, \ldots, c_n)}{q_0(c_1, \ldots, c_n)},$$

waarbij elke p_i, q_i een polynoom met coëfficiënten in K is en

$$p_i(c_1, \ldots, c_n) \neq 0, \qquad i = 1, \ldots, k,$$
$$q_i(c_1, \ldots, c_n) \neq 0, \qquad i = 0, \ldots k.$$

De p_i moeten niet 0 zijn, omdat de termen anders voor niks in de somrij staan en de q_i moeten niet 0 zijn, omdat we anders door 0 delen. Door y te differentiëren krijgen we

[4]Voor het bewijs, zie I. Kaplansky, An introduction to differential algebra, Hermann, Paris, 1957.

$$a = \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{\overline{p}_i'\overline{q}_i - \overline{q}_i'\overline{p}_i}{\overline{p}_i\overline{q}_i} + \frac{\overline{p}_0'\overline{q}_0 - \overline{q}_0'\overline{p}_0}{\overline{q}_0^2}$$

waarbij $\overline{p_i}$ en $\overline{q_i}$ de uitkomsten van de polynomen p_i en q_i zijn waar $c_1, \ldots, c_n$ ingevuld zijn. Nu gaan we ernaar toe werken dat we de hulpstelling kunnen gebruiken. We pakken de bovenstaande vergelijking en halen alles naar één kant:

$$a - \sum_{i=1}^{k} c_i \frac{\overline{p}_i'\overline{q}_i - \overline{q}_i'\overline{p}_i}{\overline{p}_i\overline{q}_i} + \frac{\overline{p}_0'\overline{q}_0 - \overline{q}_0'\overline{p}_0}{\overline{q}_0^2} = 0$$

Als we nu hiervan één grote breuk $\frac{P(x_1,\ldots,x_n)}{Q(x_1,\ldots,x_n)}$ maken, dan zien we dat
$P(c_1, \ldots, c_n) = 0$ en

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = q_0^2(x_1, \ldots, x_n) \prod_{i=1}^{k} p_i(x_1, \ldots, x_n) q_i(x_1, \ldots, x_n) \neq 0,$$

Nu kunnen we hulpstelling C toepassen op P en Q zodat we bewezen hebben dat er ook $k_1, \ldots k_n$ in $\overline{C}$ bestaan zodat $P(k_1, \ldots, k_n) = 0$ en $Q(k_1, \ldots, k_n) \neq 0$. Dus mogen we diezelfde constanten $k_1, \ldots, k_n$ gebruiken in de plaats van $c_1, \ldots, c_n$ in de uitdrukking van $a \in K$. Dus kunnen we a als volgt schrijven

$$a = \sum_{i=1}^{k} k_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

met $k_i \in \overline{C}$, $u_i, v \in \overline{C}K$ (voor $i = 1, \ldots, k$). □

8. **Een toepassing van de stelling van Liouville-Rosenlicht**

In deze paragraaf zullen we voor een bepaald soort integralen nagaan onder welke voorwaarden deze elementair zijn, waarmee we bedoelen dat ze liggen in een elementaire uitbreiding van $\mathbb{C}(z)$. Hierbij is, zoals gebruikelijk, $\mathbb{C}(z)$ het lichaam van de rationale functies in de complexe variabele z met complexe coëfficiënten.

Daarvoor hebben we de volgende hulpstelling nodig:

Hulpstelling D.
Indien $g(z) \in \mathbb{C}(z)$ en niet constant, dan is $e^{g(z)}$ niet algebraïsch over $\mathbb{C}(z)$.

Bewijs. Stel dat $e^{g(z)}$ wèl algebraïsch is over $\mathbb{C}(z)$, dan voldoet $e^{g(z)}$ aan een betrekking van de gedaante

$$p(e^{g(z)}) = e^{ng(z)} + a_{n-1}(z)e^{(n-1)g(z)} + \cdots + a_0(z) = 0 \tag{5}$$

met $p(y) \in \mathbb{C}[y]$ het definiërend polynoom van $e^{g(z)}$ en $a_i(z) \in \mathbb{C}(z)$,
$(i = 0, 1, \ldots n - 1)$.

Differentiatie geeft dan

$$ng'(z) \cdot e^{ng(z)} + \{a_{n-1}'(z) + (n-1)a_{n-1}(z)g'(z)\}e^{(n-1)g(z)} + \cdots + a_0'(z) = 0 \tag{6}$$

hetgeen weer een polynoom is in $e^g(z)$ van de graad n. Aangezien $p(y)$ het definiërend polynoom van $e^{g(z)}$ is, moeten in de vergelijkingen (5) en (6) de coëfficiënten evenredig zijn, dus (onder andere)

$$\frac{ng'(z)}{1} = \frac{a_0'(z)}{a_0(z)}.$$

Er zijn twee mogelijkheden:

1. $\frac{a_0'(z)}{a_0(z)} = 0$, deze optie levert meteen op dat $g(z)$ constant is, terwijl we eisen dat $g(z)$ niet constant is. Dus deze optie kunnen we overboord gooien.

2. $\frac{a_0'(z)}{a_0(z)}$ is een som van breuken van de vorm $\frac{\alpha}{z-\beta}$.
We gaan verder met 2, eerst leggen we uit waarom dit de enige ander mogelijkheid is naast 1.

Omdat we in $\mathbb{C}(z)$ werken heeft elk polynoom $w(z) \in \mathbb{C}(z)$ van willekeurige graad $m \in \mathbb{N}$ ook een m aantal nulpunten. Dus $w(z) = (z-\beta_1)(z-\beta_2)\dots(z-\beta_m)$. Ook geldt voor $\frac{a_0'(z)}{a_0(z)}$ dat alle nulpunten die dubbel zijn of nog vaker voorkomen in de noemer wegvallen, omdat die met één zo'n nulpunt minder in de teller staan: Zie bijvoorbeeld $w(z) = z^2 - 2z + 1 = (z-1)(z-1)$, dan $\frac{w'(z)}{w(z)} = \frac{2(z-1)}{(z-1)^2} = \frac{2}{z-1}$.
Daarom kunnen we $\frac{a_0'(z)}{a_0(z)}$ schrijven als een som van breuken van de vorm $\frac{\alpha}{z-\beta}$.

Daarnaast zien we dat $g(z)$ deze vorm heeft: $g(z) = f(z) + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j}$ met $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ en $\alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{C}$. We zien dat $g'(z)$ geen termen in de somrij kan hebben, want stel dat het wel kan, dan heeft $g'(z)$ minstens één term van de vorm $\frac{-j\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^{j+1}}$, met $j+1 \geq 2$. Die term kan niet vereenvoudigd worden, wat maakt dat $ng'(z)$ niet gelijk kan zijn aan $\frac{a_0'(z)}{a_0(z)}$ die alleen breuken met eerstegraads noemers bevat. Dus volgt $g(z) \in \mathbb{C}[z]$.
We probereren hetzelfde te krijgen met $ng'(z)$ als met $\frac{a_0'(z)}{a_0(z)}$, namelijk slechts vereenvoudigde breuken met eerstegraadspolynomen in de noemer. Die krijgen we niet door $f(z) \in \mathbb{C}[z]$ af te leiden, daar krijgen we alleen termen in $\mathbb{C}[z]$ van terug. We zien dat optie 2 ook niet mogelijk is, dus de aanname was onjuist.
Conclusie: Als $e^{g(z)}$ algebraïsch is, dan is $g(z)$ constant. Dus als $g(z)$ niet constant is, dan is $e^{g(z)}$ niet algebraïsch.

□

We stellen ons nu de vraag: Wanneer heeft $a = f(z)e^{g(z)}$ een elementaire primitieve? (Waarbij $f(z), g(z) \in \mathbb{C}(z); f(z) \neq 0; g(z)$ niet constant).
We schijven in het vervolg voor het gemak $e^{g(z)} = t$, dan is t transcendent over $\mathbb{C}(z)$, zoals we net bewezen hebben, en $\frac{t'}{t} = g'(z) \in \mathbb{C}(z)$. Verder ligt $f(z)e^{g(z)}$ in $\mathbb{C}(z,t)$, waarbij $\mathbb{C}(z,t)$ een transcendente uitbreiding is van $\mathbb{C}(z)$.

We vragen ons nu af of er een elementaire uitbreiding bestaat van $\mathbb{C}(z,t)$ waarin een y ligt met $y' = f(z)e^{g(z)} = f(z)\cdot t$.

Voor de duidelijkheid: $\mathbb{C}(z,t)$ speelt hier de rol van K en $f(z)\cdot t$ die van a in de uitdrukking (2). Daarmee zien we dat de noodzakelijke en voldoende voorwaarde opdat $f(z)e^{g(z)}$ elementair integreerbaar is, is dat er constanten $c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{C}$ bestaan en $u_1, u_2, \dots, u_n, v \in \mathbb{C}(z,t)$ zodanig dat

$$f \cdot t = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v',$$

Merk op dat f, u_i en v staan voor: $f(z), u_i(z,t)$ en $v(z,t)$.
We zien dat de rechterhelft van deze uitdrukking er hetzelfde uit ziet als bij deel B van paragraaf 6, dus mogen we diezelfde redenatie volgen zolang er niet gebruikt wordt dat $a \in \mathbb{C}(z)$ (we nemen daar echter nog niets van aan).

We ontbinden u_i in irreducibele factoren in $\mathbb{C}(z,t)$ (met uiteraard eventueel negatieve machten over die irreducibele factoren) en kunnen dan garanderen dat deze factoren òf tot $\mathbb{C}(z)$ behoren òf monische, irreducibele veeltermen in $\mathbb{C}(z)[t]$ zijn. Verder splitsen we v in een veelterm in $\mathbb{C}(z)[t]$ en partiële breuken door middel van breuksplitsen).

Evenals bij het bewijzen van geval B van de stelling van Liouville-Rosenlicht kunnen we dan bewijzen dat $u_i \in \mathbb{C}(z)$ òf $u_i = t$ en dat de enige noemers in v kunnen zijn: machten van t. Voor de u_i geldt ook hier dat $\frac{u_i'}{u_i} \in \mathbb{C}(z)$, er geldt immers ook voor $u_i = t$; $\frac{u_i'}{u_i} = \frac{t'}{t} = g'(z) \in \mathbb{C}(z)$. En v ziet er als volgt uit: $v = \sum_j b_j t^j$ met $b_j \in \mathbb{C}(z)$ en j eventueel negatief geheel.

We hebben echter:

$$f \cdot t = \sum_{i=0}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + \big(\sum_j b_j t^j\big)' \tag{7}$$

met $c_i \in \mathbb{C}$ en $b_j \in \mathbb{C}(z)$.
Voor v' geldt $(v(t))' = \frac{a_{-m}}{t^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \cdots + a_p t^p$. Met hulpstelling B_i zien we voor elke term van v (met een verschillende macht van t) $(b_j t^j)' = a_j t^j$

Het linkerlid is van de eerste graad in t, dus het rechterlid ook. Daaruit volgt $(v(t))' = a_0 + a_1 t$ (met a_0 erbij, omdat dat kan wegvallen tegen de $\frac{u_i'}{u_i}$) en hieruit volgt weer met hulpstelling B_i dat $v(t) = b_0 + b_1 t$. Maar dan geldt

$$(v(t))' = b_0' + b_1' t + b_1 t' = b_0' + (b_1' + b_1 g')t$$

en als we vergelijking (7) opsplitsen in het eerstegraads en het nuldegraads deel krijgen we:

$$f = b_1' + b_1 g'$$
$$\sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + b_0' = 0$$

Als we nu voor b_1 schrijven: $h(z)$, dan is dus voor de integreerbaarheid van $f(z)e^{g(z)}$ vereist dat er een $h(z) \in \mathbb{C}(z)$ bestaat zodanig dat

$$f(z) = h'(z) + h(z)g'(z). \tag{8}$$

Omgekeerd is het eenvoudig te zien dat deze voorwaarde voldoende is. Immers, als we de bovenstaande gelijkheid aannemen, dan geldt

$$(h(z)e^{g(z)})' = h'(z)e^{g(z)} + h(z)g'(z)e^{g(z)} = f(z)e^{g(z)}.$$

De genoemde voorwaarde die we oplegden aan $f(z)$ in uitdrukking (8) is dus nodig en voldoende voor de integreerbaarheid van $f(z)e^{g(z)}$.

9. **Enkele Concrete Voorbeelden**

Nu we de stelling van Louiville-Rosenlicht hebben afgeleid kunnen we die meteen een paar keer toepassen. Ik heb zelf ook een vierde voorbeeld toegevoegd.

Voorbeeld 1: We beschouwen de volgende integraal in $\mathbb{C}(z)$:

$$\int e^{z^2} dz$$

We willen erachter komen of de primitieve van e^{z^2} in elementaire functies uit te drukken is. Als we de notatie van de vorige paragraaf aanhouden kunnen we invullen dat voor deze integraal geldt: $f(z) = 1$ en $g(z) = z^2$. De vraag is nu of er een $h(z) \in \mathbb{C}(z)$ bestaat zodanig dat:

$$1 = h'(z) + h(z) \cdot 2z$$

Intermezzo:
Voor de komende voorbeelden vind ik het handig om het volgende te bewijzen:

<u>Lemma 1:</u> Als in de uitdrukking $\int f(z)e^{g(z)}dz$ de coëfficienten $f(z)$ en $g(z)$ in $\mathbb{C}[z]$ zitten, dan is de primtieve, indien die in elementaire vorm bestaat, van de vorm $h(z)e^{g(z)}$ met $h(z) \in \mathbb{C}[z]$.

Bewijs.
In paragraaf 8 hebben we al bewezen dat de primitieve van de vorm $h(z)e^{g(z)}$ met $f(z) = h'(z) + h(z)g'(z)$ moet zijn, met $h(z) \in \mathbb{C}(z)$.
Zij $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$ en $h(z) \in \mathbb{C}(z)$.
Nu gaan we $h(z)$ breuksplitsen. We schrijven $h(z) = p(z) + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j}$, waarbij $p(z) \in \mathbb{C}[z], \alpha_{ij}, \beta_i \in \mathbb{C}, \beta_i \neq \beta_k$ voor $i \neq k$. We zien:

$$\begin{aligned} f(z) &= h'(z) + h(z)g'(z) \\ &= p'(z) + \sum_{i,j} \frac{-j\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^{j+1}} + g'(z)p(z) + g'(z)\sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j} \end{aligned}$$

Zij i willekeurig en zij j de grootste waarde waarvoor $\alpha_{ij} \neq 0$ (we nemen hier aan dat er een α_{ij} ongelijk aan 0 bestaat). Dan hebben we in het linkerlid van de bovenstaande vergelijking $f(z) \in \mathbb{C}[z]$, dus moet het rechterlid ook in $\mathbb{C}[z]$ zitten. Daarvoor kijken we naar de term $\frac{-j\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^{j+1}}$, want die moet tegen iets anders in het rechterlid wegvallen, omdat het rechterlid zonder breuken geschreven moet kunnen worden.

De term valt niet weg tegen een andere term in $h'(z)$, want $\beta_i \neq \beta_k$ voor $i \neq k$.
Ook zien we dat $h(z) \cdot g'(z)$ niet een term heeft waartegen deze term kan wegvallen. Immers, we hebben i en j zo gekozen dat j de grootste waarde is waarvoor $\alpha_{ij} \neq 0$. Dus bevat $h(z)$ geen term met $(z-\beta_i)^{j+1}$ (of met een grotere macht) in de noemer, ook $g'(z)$ voegt niks aan die macht toe, want $g'(z) \in \mathbb{C}[z]$.
Dus moet $\alpha_{ij} = 0$ zijn, om het rechterlid binnen $\mathbb{C}[z]$ te krijgen. Dit gaat fout met $\alpha_{ij} \neq 0$. Dus was de aanname dat er een α_{ij} ongelijk aan 0 bestaat niet waar.
<u>Conclusie:</u> $h(z) = p(z) + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j} = p(z) \in \mathbb{C}[z]$ □

Einde Intermezzo
We zien dat $f(z) = 1, g(z) = z^2 \in \mathbb{C}[z]$, dus mogen we Lemma 1 gebruiken, zodat we $h(z)$ alleen hoeven te zoeken in $\mathbb{C}[z]$. Dus $h(z)$ moet een polynoom zijn van graad $n \in \mathbb{N}$; $h(z) = a_n z^n + \cdots + a_0,\ a_n \neq 0$. In de vergelijking

$$1 = h'(z) + 2zh(z)$$

zien we dat het rechterlid een term $2a_n z^{n+1}$ bevat die het rechtlid niet bevat en niet kan wegvallen tegen een andere term, want het is de term van de hoogste graad. De vergelijking is dus niet oplosbaar in $\mathbb{C}(z)$ en dus is e^{z^2} niet oplosbaar in een elementaire uitbreiding van $\mathbb{C}(z)$.

Voorbeeld 2: We beschouwen $\int \frac{e^z}{z} dz$. Hier geldt $f(z) = \frac{1}{z}$ en $g(z) = z$. We moeten dus in $\mathbb{C}(z)$ een $h(z)$ bepalen zodanig dat

$$\frac{1}{z} = h'(z) + h(z)$$

om weer aan uitdrukking (8) te voldoen.
We stellen weer:

$$h(z) = p(z) + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j}$$

We zien om dezelfde reden dat $p(z) = 0$ (de term $a_n z^n$ valt niet weg), dus houden we de somrij over:

$$\frac{1}{z} = -\sum_{i,j} \frac{j\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^{j+1}} + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j}$$

Als we het bewijs van Lemma 1 volgen en $\frac{1}{z}$ invullen voor $f(z)$ zien we ook dat alle α_{ij} nul moeten zijn. Maar $\frac{1}{z} = 0$ is geen oplossing voor die vergelijking, dus bestaat er ook in dit voorbeeld geen primitieve voor $\frac{e^z}{z}$ in een elementaire uitbreiding van $\mathbb{C}(z)$.

Voorbeeld 3: We beschouwen de integraal $\int \frac{\sin(iz)}{z} dz$.
In feite gaat het om $\int \frac{e^z - e^{-z}}{z} dz$. We zoeken een oplossing in elementaire utibreiding van $\mathbb{C}(z,t)$, waarin $t = e^z$. We gebruiken de stelling van Liouville-Rosenlicht:

$$a = \frac{t^2-1}{tz} = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i'}{u_i} + v',$$

Waarbij $u_i, v \in \mathbb{C}(z,t)$ en $c_i \in \mathbb{C}$. In het bewijs van de stelling van Liouville-Rosenlicht, deel B, hebben we gezien dat als we $u_i \in K(t)$ hebben, dat dan alleen eventueel één term u_i, zeg $u_1 = t$, t bevat. We kunnen dezelfde redenering volgen door $\mathbb{C}(z)$ als K te nemen. Dan geldt nog dat voor zekere $u_1 = t$:

$\frac{u_i'}{u_i} = \frac{t'}{t} = 1 \in \mathbb{C}(z)$. De andere u_i zitten dan in $\mathbb{C}(z)$. Tevens geldt op grond van deze redenering dat $v(z,t) = \sum_j b_j t^j$, met $b_j \in \mathbb{C}(z)$ en j eventueel negatief, geheel. We vinden dus als eis:

$$\frac{t}{z} - \frac{-1}{tz} = A(z) + (v(z,t))',$$

waarbij $A(z) \in \mathbb{C}(z)$ ($A(z)$ vervangt $\sum_{i,j} \frac{u_i'}{u_i}$) en $v = \sum_j b_j t^j$. We zien aan de eis dat v als polynoom van t geen termen met graad ≥ 2 of ≤ -2 mag hebben, omdat die termen niet kunnen wegvallen. Dus:

$$\begin{aligned}
v(z,t) &= \frac{b_{-1}(z)}{t} + b_0(z) + b_1(z)t \\
(v(z,t))' &= \frac{b_{-1}'}{t} - b_{-1}\frac{t'}{t^2} + b_0' + b_1't + b_1t' \\
(v(z,t))' &= \frac{b_{-1}' - b_{-1}}{t} + b_0' + (b_1' + b_1)t
\end{aligned}$$

We zien in de eis dat in het linkerlid geen nuldegraads term in t aanwezig is, dus kunnen we $A(z)$ en $a_0'(z)$ aan nul gelijk stellen, we houden over:

$$-\frac{1}{zt} + \frac{t}{z} = \frac{b_{-1}' - b_{-1}}{t} + (b_1' + b_1)t$$

Het gedeelte met graad -1 levert ons de vergelijking $\frac{1}{z} = a_1'(z) + a_1(z)$ op, waarvan we in voorbeeld 2 hebben gezien dat daar geen oplossing voor is. Dus heeft ook $\frac{\sin(iz)}{z}$ geen elementaire primitieve.

Voorbeeld 4: We kijken naar $\int (6z^4 + 3z^2 + 4z)e^{z^3+1}dz$.
In termen van paragraaf 8; $f(z) = 6z^4 + 3z^2 + 4z$ en $g(z) = z^3 + 1$. De eis die we daarbij hebben gevonden is:

$$\begin{aligned}
f(z) &= h'(z) + h(z) \cdot g'(z) \\
6z^4 + 3z^2 + 4z &= h'(z) + 3z^2h(z)
\end{aligned}$$

We observeren dat $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$, dus mogen we door Lemma 1 aannemen dat $h(z)$ ook in $\mathbb{C}(z)$ te vinden is indien er een $h(z)$ met deze eis bestaat. We zien dat we in het rechterlid een term van te hoge graad overhouden die niet in het linkerlid zit als we $gr(h(z)) \geq 3$ zouden nemen, wel hebben we een tweedegraads term nodig om ook in het rechterlid een 4^e graads polynoom te krijgen, dus $gr(h(z)) = 2$. Zeg $h(z) = a_2z^2 + a_1z + a_0$. Er volgt:

$$\begin{aligned}
h'(z) + 3z^2h(z) =& 3a_2z^4 + 3a_1z^3 + 3a_0z^2 + 2a_2z + a_1 \\
=& \ 6z^4 \ + \ 0z^3 \ + \ 3z^2 + \ 4z + \ 0, \text{ er volgt} \\
& a_2 = 2, a_1 = 0 \text{ en } a_0 = 1, \text{ dus } h(z) = z^2 + 1 \text{ en} \\
& h(z)e^{g(z)} = (z^2+1)e^{z^3+1}
\end{aligned}$$

is inderdaad de primitieve die we zochten.

Voorbeeld 5: Zij K een constantenlichaam en $f(z)$ willekeurig in $K(z)$ met $z' = 1$. We beschouwen de integraal van $f(z)$. We zoeken een primitieve indien nodig in een elementaire uitbreiding L van $\overline{K}$ (met algebraïsche constanten). We beginnen door $f(z)$ te breuksplitsen:

$$f(z) = p(z) + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j}$$

met $p(z) = p_0 + p_1z + \cdots + p_nz^n$, $\alpha_{ij}, \beta_i \in \overline{K}$.
Voor $j = 1$ weten we dat

$$\int \frac{\alpha_{i,1}}{z - \beta_i}dz = \alpha_{i,1}\log(z - \beta_i).$$

Voor $j \geq 2$ weten we dat

$$\int \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j}dz = -\frac{\alpha_{ij}}{(n-1)(z-\beta_i)^{j-1}}.$$

Dus de primitieve van $f(z)$ is als volgt:

$$\int f(z) = \int \big(p(z) + \sum_{i,j} \frac{\alpha_{ij}}{(z-\beta_i)^j}\big) = k + p_0 z + \frac{p_1}{2} z^2 + \dots \frac{p_n}{n+1} p^{n+1}$$
$$+ \sum_i \alpha_{i,1} \log{(z-\beta_i)} - \sum_{i,j>1} \frac{\alpha_{ij}}{(n-1)(z-\beta_i)^{j-1}}.$$

De integraal van $f(z) \in K(z)$ bestaat altijd in elementaire vorm.
Het vinden van een y in een elementaire uitbreiding van $K(z)$, zodat $y' = a$ kan echter lastiger blijken dan het hier lijkt. Het vergt namelijk dat je de noemers van de breuken in $f(z)$ kunt ontbinden in irreducibele factoren. Wat lastig is wanneer de graad van die polynomen hoger wordt. Voor het ontbinden van een tweedegraadspolynoom bestaat er de abc-formule. Zo zijn er ook formules voor derde-en vierdegraads functies. Daarmee kun je tot zover in principe analytisch de nulpunten vinden. Maar voor functies met hogere graad bestaan deze formules niet. Sterker nog; er is bewezen dat er niet zo'n formule mogelijk is voor polynomen van graad 5. In dat geval kun je proberen om op goed geluk nulpunten te vinden en het polynoom uit te delen naar $(z - \beta_i)$ totdat je het polynoom hebt gereduceerd tot een vierdegraads functie. Succes niet gegarandeerd.

Voorbeeld 6:
We bewijzen nu de bewering in paragraaf 6 dat er geen y in een uitbreiding, L, van K met hetzelfde constantenlichaam bestaat, zodat $y' = a$ voor $a = \frac{1}{x^2+1} \in \mathbb{R}(x)$. We gebruiken de stelling van Liouville-Rosenlicht en kijken of we a in de volgende vorm kunnen schrijven

$$a = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

met $u_i, v \in \mathbb{R}(x)$ en $c_i \in \mathbb{R}$. Zonder verlies van algemeenheid kunnen we zeggen dat de $u_i(x)$ irreducibel zijn, op dezelfde manier als we in het bewijs van de stelling van Liouville Rosenlicht hebben gedaan. Ook kunnen we zonder verlies van algemeenheid zeggen dat elke u_i in $\mathbb{R}[x]$ zit, omdat $u_i = \frac{1}{p_i(x)}$ met $p_i \in \mathbb{R}[x]$ irreducibel, dan geldt:

$$\frac{u_i'}{u_i} = \frac{\frac{-p_i'}{p_i^2}}{p_i} = -\frac{p_i'}{p_i}.$$

Deze term kunnen we ook maken door $u_i = -p_i$ te kiezen. Daarnaast hebben we $v = p_0(x) + \sum_{ij} \frac{\alpha_{ij}}{p_i^j}$, met $p_i \in \mathbb{R}[x]$ irreducibel en $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}[x]$, zodat $\mathrm{gr}(\alpha_{ij}) < \mathrm{gr}(p_i(x))$. We zien $p_0' \in \mathbb{R}(x)$, daar hebben we niets aan, dit omdat we om a $= \frac{1}{x^2+1}$ te krijgen geen factoren in $\mathbb{R}(x)$ nodig hebben. Dan is alleen de term van v' interessant waarbij $p_1 = x^2 + 1$, met $\alpha_{1j} = bx + c$, omdat we om a te krijgen geen termen met een andere noemer kunnen gebruiken. We kijken naar

$$\left(\frac{\alpha_{1j}}{p_1}\right)' = \left(\frac{bx+c}{x^2+1}\right)' = \frac{b(x^2+1) - 2x(bx+c)}{(x^2+1)^2} = \frac{b(x^2+1) - 2bx^2 + 2cx}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{b(x^2+1) - 2b(x^2+1) + 2b + 2cx}{(x^2+1)^2} = \frac{-b}{x^2+1} + \frac{2cx+2b}{(x^2+1)^2}$$

We zien dat $(x^2+1) \not| \, (2cx+2b)$ als $b, c \neq 0$. Als $b, c \neq 0$ krijgen we een term met $(x^2+1)^2$ in de noemer die we ook niet weg kunnen krijgen met hogere machten p_1^j, omdat we dan weer een extra term met nog grotere noemers krijgen die niet te vereenvoudigen zijn. Ook valt de term met $(x^2+1)^2$ niet weg tegen een term $\frac{u_i'}{u_i}$, omdat u_i irreducibel is. Uit v' kunnen we dus geen term halen die gelijk is aan $\frac{1}{x^2+1}$, dan is de enige optie nog een term $c_i \frac{u_i'}{u_i}$ zoeken die daaraan gelijk kan zijn.
We hebben $x^2 + 1$ nodig in de noemer, dus we kiezen $u_1 = x^2 + 1$. We zien

$$c_1 \frac{u_1'}{u_1} = c_1 \frac{2x}{x^2+1} = \frac{c_1 2x}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1}, \text{ dit geeft}$$
$$c_1 2x = 1, \text{ met } \; c_1 \in \mathbb{R}$$

Dat is niet mogelijk. We kunnen dus geen term in $\sum_{i=1}^{n} \frac{u_i'}{u_i} + v'$ krijgen die gelijk is aan $\frac{1}{x^2+1}$. Dus er bestaat geen y in een elementaire uitbreiding van $\mathbb{R}(x)$ zonder toegevoegde constanten, zodat $y' = a$.

10. **Algoritmen voor het Daadwerkelijk Uitvoeren van Integratie**

Het is nu duidelijk dat we, als we een functie in de vereiste vorm kunnen praten, we weten dat er een primitieve bestaat. Als we die vorm hebben gevonden is het ook eenvoudig om die primitieve te vinden. We hebben dan namelijk:

$$a = \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{u_i'}{u_i} + v'$$

We zien dan dat de primtieve als volgt is:

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i \log u_i + v$$

Maar hoe onderzoek je dan of een functie in die vorm te gieten is? Dat blijkt niet altijd makkelijk te zijn. Er zijn wel twee stellingen die nog kunnen helpen bij het verder komen in het gebied. Stellingen die zeggen dat er een algoritme moet bestaan. In 1969 bewees Risch de volgende

Stelling 4. *Laat $K = C(x, t_1, t_2, \ldots t_n)$ een functielichaam zijn waarbij C het constantenlichaam van K is en elke t_i transcendent is over $C(x, t_1, t_2, \ldots t_{i-1})$ en wel een logaritme of een exponentiaal daarover. Er bestaat dan een algoritme dat van elk element van K kan uitwijzen of het een elementaire integraal heeft in K en - indien die bestaat - deze integraal ook kan bepalen.*

Davenport bewees in 1984 een uitbreiding van deze stelling, waarbij het differentiaallichaam K twee variabelen, x en y, kan bevatten (voor de rest is de stelling hetzelfde als de vorige). De algoritmes hiervoor zijn echter zeer gecompliceerd.

11. **Begrippenlijst**

- Algebraïsch: Een element α heet algebraïsch over een lichaam K, als $\alpha \notin K$ en er een polynoom $p(x) \neq 0$ in $K[x]$ bestaat zodat $p(\alpha) = 0$. Het polynoom met de laagste graad, die tevens monisch is, waarvoor dit geldt heet het definiërend/minimum polynoom van α.
- Transecendent: Een element α heet transcendent over een lichaam K, als $\alpha \notin K$ en α niet algebraïsch is.
- Geconjugeerden: Dit kunnen we mooi uitleggen aan de hand van het bovenstaande begrip: Als we het bovenstaande minimum polynoom opdelen in factoren van graad 1 krijgen we $p(x) = (x - \alpha_1) \ldots (x - \alpha_n)$, waaruit volgt dat $\alpha_1 (= \alpha), \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de geconjugeerden van α zijn. Deze geconjugeerden hebben de eigenschap dat er functies bestaan waarvoor $\phi(\alpha_i) = \alpha_j$, terwijl $\phi(k) = k$ voor $k \in K$.
- Differentiaallichaam: Een commutatief lichaam K heet een *differentiaalichaam* indien er een afbeelding is gedefinieerd van K naar K (die we differentiatie noemen en die we aangeven met $a \mapsto a'$) die voldoet aan de volgende eisen:
$$(a + b)' = a' + b' \text{ en } (ab)' = a'b + ab'$$
- Differentiaaluitbreiding: Een *differentiaaluitbreiding* L van het differentiaallichaam K is een lichaam dat K omvat en dat voorzien is van een differentiatie, die -indien beperkt tot K- samenvalt met de reeds op K gedefinieerde differentiatie.
Als L een elementaire uitbreiding van K is, dan is L ontstaan door het, stuk voor stuk, toevoegen van logaritmen, exponenten en algebraïsche elementen over K.

12. **Literatuur**

(1) A.W. Grootendorst, 1994, Primitiveren door Middel van Elementaire Functies.
(2) E. Risch, 1969, The Problem of Integration in Finite Terms, p. 170-171.
(3) M. Rosenlicht, 1972, Integration in Finite Terms, University of California, Berkeley.

13. **Dankwoord**

Na een lange periode van 16 maanden is het eindelijk zover. Met het schrijven van dit dankwoord ben ik eindelijk klaar met het schrijven van mijn bachelor eindproject. Ik heb in dit proces veel geleerd over differentiaalalgebra en over mijzelf, zoals waar ik in mijn werk wel en niet energie uit kan halen. Graag wil ik ook deze gelegenheid nemen om mensen, die mij erg gesteund hebben in deze periode, te bedanken.

Allereerst wil ik mijn begeleider, dr. K.P. Hart, hartelijk bedanken voor de keren dat u mij heeft geholpen als ik vast liep. Onze gesprekken waren erg leerzaam en hielpen mij steeds verder.

Zoals de duur van mijn project doet vermoeden, was het niet de meest simpele taak en tijd van leven geweest. Ik wil daarbij mijn vriendin, Arina, bedanken die mij heeft geleerd dat het prima is om niet op volle kracht vooruit te gaan. Bedankt voor de opbouwende gesprekken.

Ook de gesprekken om het juiste perspectief op de zaken te houden met mijn ouders, vrienden en huisgenoten hebben mij erg geholpen.

Maarten Vonk