

Grafentheorie

voor bouwkundigen

A.J. van Zanten

66572

Grafentheorie voor bouwkundigen

Bibliotheek TU Delft



C 0003813941

2414
501
6

Grafentheorie voor bouwkundigen

A.J. van Zanten

Delftse Universitaire Pers

CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Zanten, A.J. van

Grafentheorie voor bouwkundigen / A.J. van Zanten. – Delft

: Delftse Universitaire Pers. — III.

In opdracht van: Vereniging voor Studie- en
Studentenbelangen te Delft. – Met lit. opg., reg.

ISBN 90-407-1173-9

Trefw.: grafentheorie / bouwkunde.

© 1995 VSSD

Uitgegeven door:

Delftse Universitaire Pers

Stevinweg 1, 2628 CN Delft

tel. 015 - 2783254, telefax 015 - 2781661.

In opdracht van:

Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft

Poortlandplein 6, 2628 BM Delft

tel. 015 - 2782124, telefax 015 - 2787585, e-mail: VSSD@dutiws.twi.tudelft.nl

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen, of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 90-407-1173-9



Voorwoord

Het eerste deel van dit boek is een inleiding in de grafentheorie en haar toepassingen. Met name worden problemen uit de sfeer der bouwkunde in termen van grafen geformuleerd en vervolgens opgelost.

Veel van de behandelde stof is in uitgebreidere vorm terug te vinden in:

- [1] Baglivo, J.A. and Graver, J.E.,
Incidence and Symmetry in Design and Architecture, Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

In het bijzonder is de stof uit Hoofdstuk 2 over organisatiegrafen en uit Hoofdstuk 4 over het bestaan van half-regelmatige veelvlakken behandeld, op een wijze zoals dat in [1] is gebeurd.

Voor zelfstudie en voor verdere oriëntatie in bouwkundig getinte toepassingen van wiskunde in het algemeen en van grafentheorie in het bijzonder wordt dit boek zeer aanbevolen.

Een tweede boek dat men naast dit boek zou kunnen raadplegen is:

- [2] Wilson, R.J., *Introduction to Graph Theory*, Wiley and Sons, New York, 1986.

Dit is een inleiding in de abstracte grafentheorie en is minder toepassingsgericht dan [1]. Het is zeer geschikt om iets meer te leren omtrent de zuiver wiskundige aspecten van de in dit boek aangehaalde theorie.

Het onderwerp van het tweede deel is 'Netwerktheorie' en wel in het bijzonder het Theorema van Ford en Fulkerson over de maximale stroom in een netwerk. De presentatie van dit theorema en ook de behandeling van gevolgen en toepassingen zijn zoals in vrijwel elk leerboek dat aan deze materie een aantal hoofdstukken wijdt. Men zie hiervoor bijvoorbeeld:

- [3] Berge, C.
Graphs and Hypergraphs, North Holland, Amsterdam, 1973.
- [4] Grimaldi, R.P.
Discrete and Combinatorial Mathematics, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1989.
- [5] Liu, C.L.
Introduction to Combinatorial Mathematics, Mc Graw Hill, New York.
- [6] Wilson, R.J.,
Introduction to Graph Theory, Wiley and Sons, New York, 1986.

Vele voorbeelden en vraagstukken in dit deel hebben hun oorsprong in [3-6].

Opgemerkt zij nog dat de hier besproken algoritmen voor het berekenen van maximale stromen in netwerken de grondslag vormen voor computerprogramma's voor netwerken, zoals opgenomen in het software-pakket STELLA.

Delft, augustus 1995



Inhoud

VOORWOORD	5
1. BEGRIPPEN EN DEFINITIES UIT DE GRAFENTHEORIE	10
1.1. Inleiding	10
1.2. Definities en elementaire begrippen	14
1.3. Paden en afstanden	16
1.4. Organisatiegrafen	19
2. PLANAIRITEIT EN DUALITEIT	24
2.1. Planaire grafen	24
2.2. Duale grafen	29
2.3. Plattegrond en organisatiegraaf	32
2.4. Samenhang van grafen	37
3. OPTIMALE PADEN IN GRAFEN	42
3.1. Kortste-pad-algoritme	42
3.2. Optimale routes	47
3.3. Kritieke-pad-methode	48
4. REGELMATIGE EN HALF-REGELMATIGE VEELVLAKKEN	54
4.1. Formule van Euler	54
4.2. Regelmatige veelvlakken	56
4.3. Reguliere kaarten	58
4.4. Vlakkleuringen	60
4.5. Half-regelmatige veelvlakken	63
5. VRAAGSTUKKEN DEEL 1	73
Antwoorden	92
Oefententamen	93
Antwoorden oefententamen	94
6. NETWERKEN EN STROMEN	96
6.1. Inleiding en definities	96
6.2. Het begrip snede	100
6.3. Het max-flow min-cut theorema	104

7.	VARIANTEN EN UITBREIDINGEN VAN HET MAX-FLOW MIN-CUT THEOREMA	111
	7.1. Enkele toepassingen	111
	7.2. Een afvalwaterprobleem	116
	7.3. Het uitgebreide max-flow min-cut theorema	118
8.	MATCHINGTHEORIE	126
	8.1. Probleemstelling	126
	8.2. Volledige matching	128
	8.3. Maximale matching	133
9.	VRAAGSTUKKEN DEEL 2	141
	APPENDIX A: REGELMATIGE MOZAIËKEN	147
	APPENDIX B: HALF-REGELMATIGE MOZAIËKEN	148
	TREFWOORDENLIJST	151

Deel 1

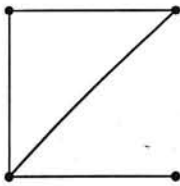
Grafentheorie

1

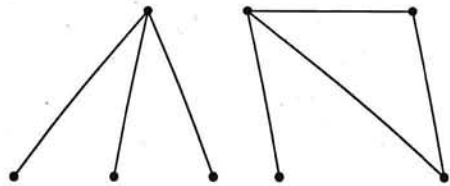
Begrippen en definities uit de grafentheorie

1.1. Inleiding

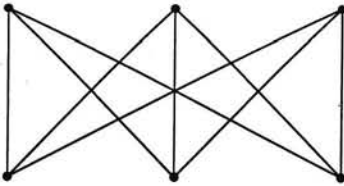
Een *graaf* bestaat in het algemeen uit een aantal punten en een aantal verbindingslijnen tussen (sommige van) die punten. De punten worden *knopen* genoemd en de verbindingslijnen takken. De figuren 1.1, 1.2, 1.3 en 1.4 geven alle een voorbeeld van een graaf.



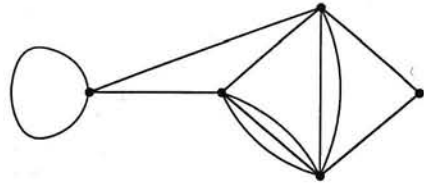
Figuur 1.1.



Figuur 1.2.



Figuur 1.3.

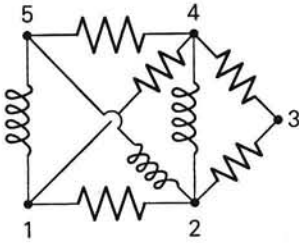


Figuur 1.4.

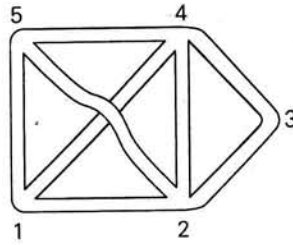
In bovenstaande figuren zijn de knopen aangegeven door dikke punten en de takken door rechte of kromme lijnen. Let erop dat in figuur 1.3 niet alle snijpunten van takken knopen zijn. Voorts laat figuur 1.2 een graaf zien die uit twee 'losse' gedeelten bestaat. In figuur 1.4 zien we dat twee knopen door meer dan één tak verbonden kunnen worden en ook dat een knoop met zichzelf verbonden kan zijn door een tak.

De *grafentheorie* is behalve een belangrijk zelfstandig wiskunde-onderwerp vooral ook een theorie met zeer veel toepassingen buiten de wiskunde. Vele problemen uit de natuurkunde, de scheikunde, de informatica, de sociale wetenschappen, de architectuur, etc. laten zich formuleren als grafentheoretische problemen.

Zo laten figuur 1.5 en figuur 1.6 een deel van een elektrisch netwerk zien, respectievelijk een deel van een wegenkaart.

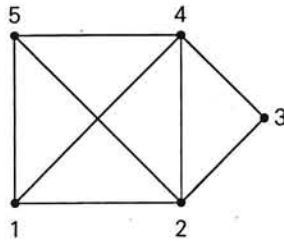


Figuur 1.5.



Figuur 1.6.

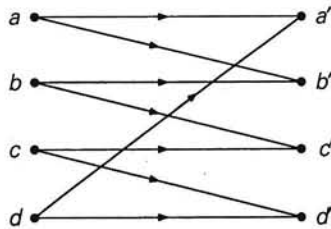
Beide figuren kunnen schematisch voorgesteld worden door de graaf uit figuur 1.7.



Figuur 1.7.

De knopen van deze graaf stellen de stroomvertakkingspunten uit figuur 1.5 voor respectievelijk de verkeersknooppunten uit figuur 1.6. De takken stellen de geleiders resp. de wegen voor.

Een voorbeeld uit de informatietheorie wordt geleverd door de graaf uit figuur 1.8.

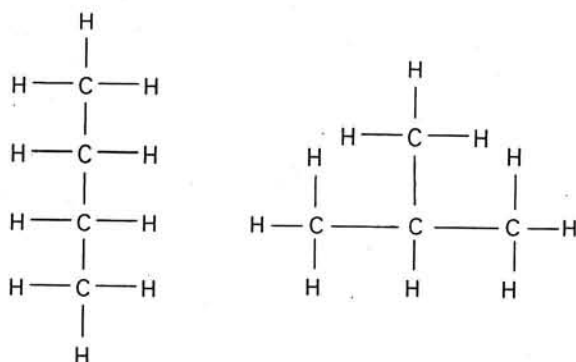


Figuur 1.8.

Door een of ander communicatiekanaal kunnen vier boodschappen a , b , c en d uitgezonden worden. Vanwege de storing in het kanaal kan een boodschap verkeerd ontvangen worden. De relatie tussen uitgezonden boodschappen en ontvangen boodschappen wordt voorgesteld door bovenstaande graaf. Zo kan boodschap a ontvangen worden als a' (goed) of als b' (verkeerd), etc.

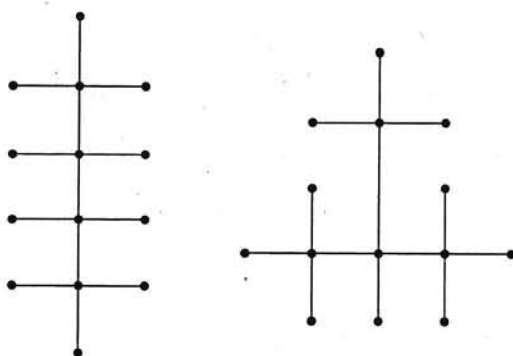
De graaf in figuur 1.8 vertoont nog een verschil met de eerder gegeven grafen: de takken zijn van een richting voorzien. Men spreekt van een *gerichte graaf*.

Tenslotte vermelden we in dit verband nog een voorbeeld uit de chemie. In figuur 1.9 zijn twee verschillende isomeren afgebeeld van het verzadigde koolwaterstofmolecuul C_4H_{10} .



Figuur 1.9.

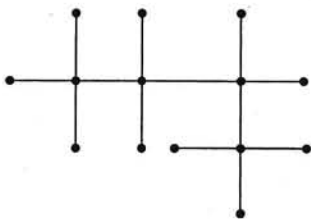
Deze moleculen (butaan resp. isobutaan) kunnen grafisch voorgesteld worden als in figuur 1.10.



Figuur 1.10.

Beide grafen bevatten vier knopen, waarin vier takken samenkomen, terwijl in elke andere knoop precies één tak komt. Algemeener kan men koolwaterstoffen met de formule C_nH_{2n+2} bestuderen. Het zal duidelijk zijn dat het aantal verschillende isomeren met deze chemische formule verkregen kan worden door het aantal verschillende grafen te tellen van het type zoals in figuur 1.10 is afgebeeld voor $n = 4$.

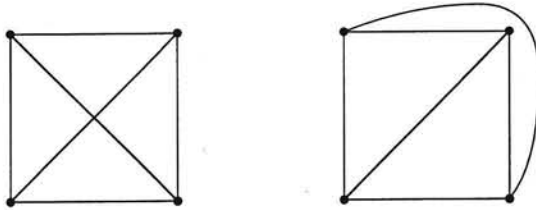
Over de begrippen verschillend en niet-verschillend in dit verband moeten we nog een opmerking maken. In figuur 1.11 is een graaf afgebeeld die *niet* verschillend is van de eerste graaf uit figuur 1.10.



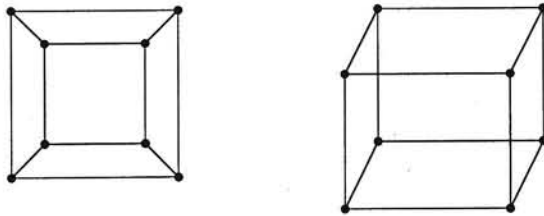
Figuur 1.11.

We kunnen de knopen van deze grafen zodanig nummeren dat in beide gevallen dezelfde paren knopen verbonden zijn door een tak. Men spreekt van *equivalente* of *isomorfe* grafen.

Figuur 1.12 bevat ook een tweetal isomorfe grafen, evenals figuur 1.13.



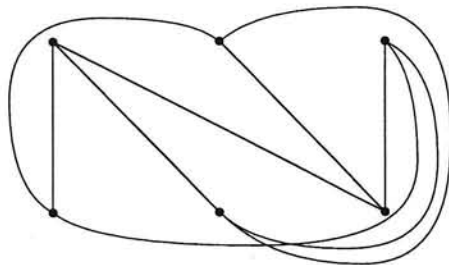
Figuur 1.12.



Figuur 1.13.

In beide voorbeelden betreft het één abstracte graaf, die op verschillende manieren is getekend.

Een laatste voorbeeld van dit verschijnsel is te zien in figuur 1.14, waar een graaf is getekend die isomorf is met de graaf uit figuur 1.3.



Figuur 1.14.

Beide zijn dus *representaties* (voorstellingen) van dezelfde (abstracte) graaf, die in de literatuur als $K_{3,3}$ te boek staat. Een verschil tussen beide representaties is dat in die van figuur 1.14 het aantal snijpunten tussen de takken, buiten de knopen van de graaf, veel kleiner is dan in die van figuur 1.3. Een bekend probleem is nu om de graaf zo te tekenen dat de takken elkaar *alleen* maar snijden in knopen. In puzzelrubrieken wordt dit vaak als volgt verwoord. De bovenste drie knopen stellen drie huizen voor en de onderste drie knopen stellen respectievelijk voor een

elektriciteitsaansluiting, een waterleidingaansluiting en een gasnetaansluiting. Het probleem is dan om van elk der drie huizen een pad aan te leggen naar elk der drie aansluitingspunten, onder de conditie dat paden uit verschillende huizen elkaar niet mogen kruisen. (De diepere menselijke achtergrond van deze voorwaarde laten we hier onbesproken!). Vanwege deze probleemstelling heet de graaf $K_{3,3}$ ook wel de *utility graph*.

In Hoofdstuk 2 komen we op dit probleem terug.

1.2. Definities en elementaire begrippen

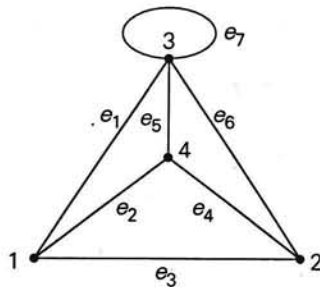
In deze paragraaf zullen we de in § 1.1 informeel ingevoerde begrippen enigszins formaliseren.

Definitie 1.1

Een graaf $G = (V, E)$ bestaat uit een verzameling knopen $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ en een verzameling takken $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, zodanig dat met elke tak een paar knopen $\{v_i, v_j\}$ correspondeert.

In deze definitie wordt toegelaten dat eenzelfde paar knopen $\{v_i, v_j\}$ met meer dan één tak correspondeert; men spreekt in dat geval van *parallele takken* of van een *meervoudige verbinding*. Bovendien is het geoorloofd om v_j gelijk te nemen aan v_i in $\{v_i, v_j\}$ een hiermee corresponderende tak heet *lus* of *loop*.

Voorbeeld 1.1



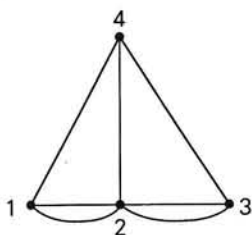
Figuur 1.15.

In de graaf in figuur 1.15 corresponderen met de takken e_1, e_2, \dots, e_7 de knopenparen $\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,2\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{2,3\}$ en $\{3,3\}$.

Kortheidshalve worden de takken in een graaf vaak aangeduid door de corresponderende knopenparen.

Voorbeeld 1.2

De graaf in figuur 1.16 kan gedefinieerd worden door de knopenverzameling $V = \{1, 2, 3, 4\}$ en de takken $\{1, 2\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ en $\{3, 4\}$.

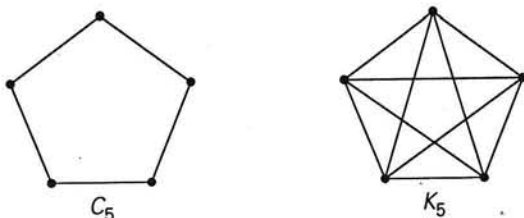


Figuur 1.16.

Als een tak e correspondeert met het knopenpaar $\{v_i, v_j\}$, dan zegt men dat e incident is met v_i en met v_j en omgekeerd zijn v_i en v_j incident met e . Twee knopen die incident zijn met eenzelfde tak heten *naburig*. Een knoop die met geen enkele tak incident is heet een *geïsoleerde knoop*.

Definitie 1.2

Een graaf die geen lussen en geen parallelle takken bezit heet enkelvoudig.

Voorbeeld 1.3

Figuur 1.17.

Beide grafen in figuur 1.17 zijn enkelvoudig. De linkergraaf wordt de *circuitgraaf* C_5 genoemd. De rechtergraaf bevat alle takken die een enkelvoudige graaf met 5 knopen kan bevatten. Daarom heet deze graaf de complete of volledige graaf K_5 .

Neemt men n knopen ($n \geq 3$) in plaats van vijf dan verkrijgt men als generalisatie van C_5 de circuitgraaf C_n en als generalisatie van K_5 de volledige graaf K_n . Daar men uit n knopen $\frac{1}{2}n(n-1)$ verschillende knopenparen $\{v_i, v_j\}$, met $v_i \neq v_j$, kan kiezen, is het aantal takken van K_n gelijk aan $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Opmerking

De terminologie in de grafentheorie verschilt nogal van boek tot boek. Zo heet wat wij in dit boek als graaf gedefinieerd hebben vaak multigraaf (zie bijvoorbeeld [1]), terwijl het woord graaf dan gebruikt wordt voor wat wij enkelvoudige graaf noemen.

Definitie 1.3

Twee enkelvoudige grafen G_1 en G_2 zijn isomorf als er een bijectieve afbeelding $f: V_1 \rightarrow V_2$ bestaat met de eigenschap dat wanneer $\{v_i, v_j\}$ een tak is van G_1 , het paar $\{f(v_i), f(v_j)\}$ een tak is van G_2 (of in het geval van parallelle takken, even vaak een tak is van G_2) en dat alle takken van G_2 zo verkregen worden.

De lezer ga voor zichzelf na dat het eerste deel van deze definitie overeenkomt met het hernummeren van de knopen van een van beide grafen, zoals in 1.1 werd opgemerkt.

We vermelden nog een aantal andere begrippen. Een deelgraaf van de graaf $G = (V, E)$ is een graaf $G' = (V', E')$ met $V' \subset V$ en $E' \subset E$, terwijl elke tak van E' slechts incident is met knopen uit V' . De *valentie* of *graad* $\rho(v)$ van een knoop v is gelijk aan het aantal takken waarmee v incident is; hierbij moet een tak twee keer worden geteld in het geval dat die tak een lus is. Als alle knopen v van G dezelfde valentie $\rho(v) = k$ hebben, dan heet G een reguliere graaf van graad k . Ga na dat de circuitgraaf C_5 en de volledige graaf uit Voorbeeld 1.3 allebei regulier zijn, van graad 2 respectievelijk 4.

De volgende eigenschap betreft een eenvoudig verband tussen de valenties van de knopen van een graaf en het aantal takken van die graaf.

Stelling 1.4

Als het aantal takken van een graaf G gelijk is aan m dan geldt voor de som van de valenties der knopen

$$\sum_i \rho(v_i) = 2m.$$

Bewijs

Wanneer er geen lussen zijn is elke tak incident met precies twee knopen. In de som van de valenties is de bijdrage van elke tak in dat geval dus gelijk aan 2, zodat de totale som gelijk is aan twee keer het aantal takken.

In het geval dat er wel lussen zijn is de formule ook nog juist. Immers, elke lus draagt 2 bij tot de valentie van de ene knoop waarmee die lus incident is. \square

Ga de juistheid van Stelling 1.4 na voor een aantal van de gegeven voorbeelden.

1.3. Paden en afstanden

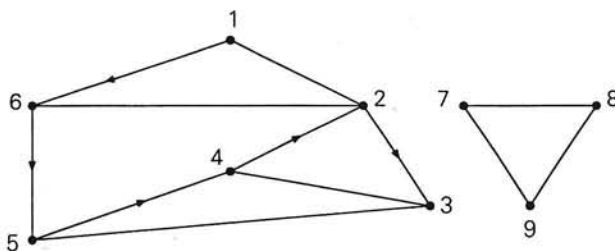
Allereerst definiëren we het begrip gerichte tak in een graaf. Een tak (v_i, v_j) heet gericht als er een richting aan is toegekend, zodanig dat één van de twee incidenten knopen, zeg v_i , de beginknoop is en de andere, in dit geval v_j , de eindknoop. Men schrijft (v_i, v_j) en men zegt wel dat (v_i, v_j) een geordend paar knopen is in

tegenstelling tot $\{v_i, v_j\}$, dat een ongeordend paar knopen voorstelt. Zie ook figuur 1.8.

Definitie 1.5

Een pad van een knoop a naar een knoop b is een rij gerichte takken $(v_0, v_1), (v_1, v_2), \dots, (v_{k-2}, v_{k-1}), (v_{k-1}, v_k)$ waarbij $v_0 = a$ en $v_k = b$, en wel zodanig dat een tak $\{v_i, v_j\}$ niet direct achter elkaar in tegengestelde richtingen wordt doorlopen. Het aantal takken k in deze rij is de lengte van het pad.

Voorbeeld 1.4



Figuur 1.18.

In de graaf van figuur 1.18 is $(v_1, v_6), (v_6, v_5), (v_5, v_4), (v_4, v_2), (v_2, v_3)$ een pad van lengte 5 van v_1 naar v_3 . Ook is $(v_1, v_2), (v_2, v_3)$ een pad van v_1 naar v_3 en wel van lengte 2. Zelfs is $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_2), (v_2, v_3)$ een pad van v_1 naar v_3 . De definitie laat toe dat een tak vaker dan één keer optreedt in een pad! Echter is $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_2), (v_2, v_3)$ géén pad van v_1 naar v_3 . Verder is er géén pad vanuit één der knopen in de linker deelgraaf naar één der knopen in de rechter deelgraaf.

Met Voorbeeld 1.4 voor ogen spreken we af dat een *component* van een graaf een deelgraaf is zodanig dat elk tweetal knopen van die deelgraaf verbonden is door een pad en dat elke knoop buiten die deelgraaf *niet* verbonden is met één der knopen van de deelgraaf. De graaf uit Voorbeeld 1.4 heeft dus twee componenten.

Definitie 1.6

De afstand van knoop a naar knoop b in een graaf G is de lengte van het kortste pad van a naar b .

In Voorbeeld 1.4 is de afstand van v_1 naar v_3 (en vanzelfsprekend ook van v_3 naar v_1) gelijk aan 2. De afstand van v_1 naar v_6 is 1. De afstand van v_1 naar v_7 is eigenlijk niet gedefinieerd, maar wordt in de praktijk vaak gelijk genomen aan ∞ . De afstand van v_1 naar v_1 zelf nemen we gelijk aan 0.

Definitie 1.7

De diameter van een graaf is gelijk aan het maximum van de afstanden tussen de knopen van de graaf.

De diameter van de linker component van de graaf in Voorbeeld 1.4 is gelijk aan 2. De diameter van de hele graaf is ∞ . Ga na dat de diameter van de circuitgraaf C_n gelijk is aan $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ (het grootste gehele getal $\leq \frac{n}{2}$) en dat die van K_n gelijk is aan 1.

Definitie 1.7

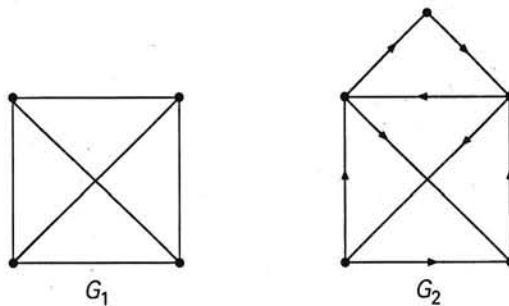
Een circuit is een pad waarvan de beginknoop gelijk is aan de eindknoop.

In Voorbeeld 1.4 is $(v_1, v_6), (v_6, v_2), (v_2, v_1)$ een circuit van lengte 3 en $(v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_5), (v_5, v_3), (v_3, v_2)$ is een circuit van lengte 6.

Een zeer bijzonder pad in een graaf is een zogenaamd *Eulerpad*. Dit is per definitie een pad dat elke tak van de graaf precies één keer bevat. Of wat uitvoeriger gezegd: elke tak van de graaf moet ergens in het pad optreden en mag niet op een andere plaats nog eens optreden.

Niet elke graaf bezit een Eulerpad!

Voorbeeld 1.5



Figuur 1.19.

De graaf G_1 bezit géén Eulerpad. De graaf G_2 heeft wel een Eulerpad, bijvoorbeeld het door pijlen aangegeven pad.

In de puzzelsfeer komt het probleem van het bestaan van een Eulerpad ook wel eens voor. De vraag is dan of men een bepaalde figuur (graaf) in één ononderbroken beweging van het potlood (d.w.z. zonder het potlood van het papier te lichten) kan tekenen, zonder een reeks getrokken lijn nog eens over te tekenen.

Wanneer de beginknoop van een Eulerpad gelijk is aan de eindknoop spreekt men over een *Eulercircuit*.

De volgende stelling doet een uitspraak over het bestaan van Eulerpaden en Eulercircuits in een *samenhangende* graaf (d.w.z. een graaf bestaande uit één component).

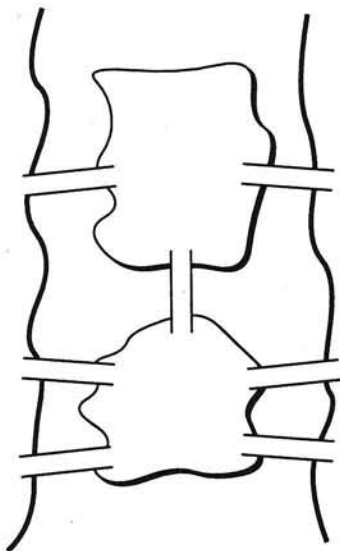
Stelling 1.9

Een samenhangende graaf G heeft een Eulercircuit dan en slechts dan als G geen knopen van oneven graad bezit; G heeft een Eulerpad dan en slechts dan als G géén of precies 2 knopen van oneven graad bezit.

Het bewijs wordt eenvoudig verkregen door zich te realiseren dat men bij het tekenen van een Eulerpad een knoop, als men er is 'binnengekomen', altijd weer moet kunnen verlaten via een nog niet getekende tak, behalve eventueel de 'begin- en de eindknoop.

Ga voor de grafen G_1 en G_2 uit Voorbeeld 1.5 de juistheid van Stelling 1.9 na.

Een historische toepassing is het beroemde Königsberger bruggenprobleem. (zie figuur 1.20).



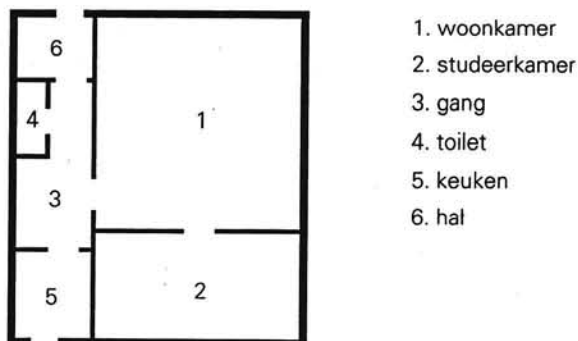
Figuur 1.20.

In een rivier (de Pregel) liggen twee eilanden die onderling en met de beide oevers verbonden zijn door zeven bruggen. Euler vroeg zich af of het mogelijk was om een wandeling te maken, zó dat men elk der zeven bruggen slechts één maal overkomt.

Dit probleem laat zich als volgt abstraheren. Elk afzonderlijk stuk land (twee eilanden en twee oevers) geven we weer door een knoop, terwijl we de bruggen door takken tussen de betreffende knopen voorstellen. Aldus krijgen we de graaf uit Voorbeeld 1.3 en het probleem van Euler is de vraag naar het bestaan van een Eulerpad in deze graaf. Aangezien de graaf vier knopen van oneven graad heeft, bestaat er volgens Stelling 1.9 hier géén Eulerpad.

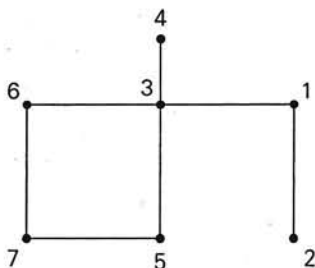
1.4. Organisatiegrafen

In figuur 1.21 is de plattegrond getekend van de benedenverdieping van een — in dit land — veel voorkomend type woning.



Figuur 1.16.

Wat ons op dit ogenblik slechts interesseert is de onderlinge bereikbaarheid van de verschillende vertrekken en de toegankelijkheid van buitenaf. Om dit beter zichtbaar te maken stellen we elk vertrek voor door een knoop en een doorgang van één vertrek naar een ander door een tak. De buitenwereld wordt ook door een knoop voorgesteld. We verkrijgen zo de graaf uit figuur 1.22.



Figuur 1.22.

Een dergelijke graaf wordt een *organisatiegraaf* genoemd.

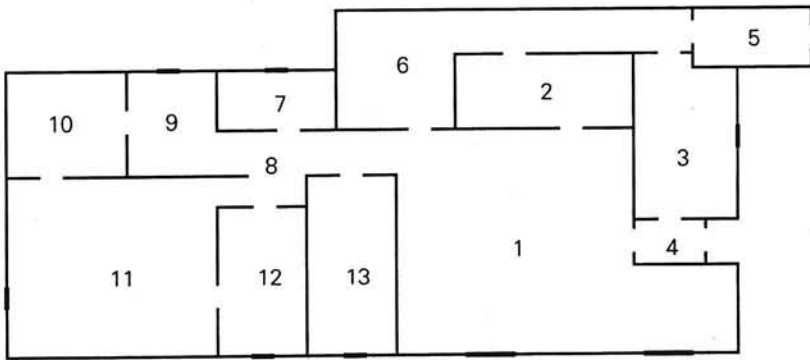
We doen hetzelfde voor de wat gecompliceerdere plattegrond van een bungalow. Behalve de doorgangen van het ene vertrek naar een ander of naar buiten geven we ook de ramen en de toegangen tot terrassen — zijnde directe verbindingen met de buitenwereld — aan met takken in de graaf.

In de praktijk is de gang van zaken meestal omgekeerd. Een opdrachtgever zal een aantal eisen op tafel leggen betreffende de onderlinge toegankelijkheid van de vertrekken van een nog te ontwerpen gebouw. Deze eisen worden verwerkt in een organisatiegraaf, waarbij dan vervolgens een plattegrond geconstrueerd moet worden.

We geven een voorbeeld (zie ook [1], Hoofdstuk 2).

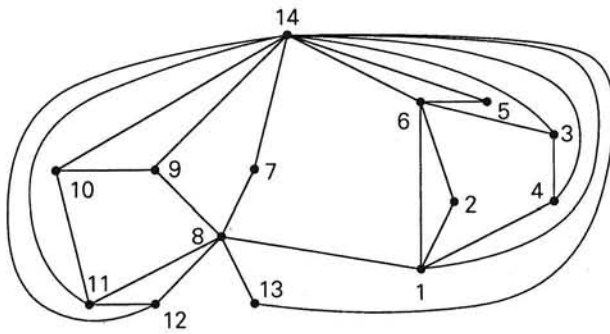
Iemand moet een kantoorgebouw ontwerpen met 17 vertrekken, die alle gelijkvloers liggen. Deze vertrekken zijn:

- (i) zeven werkkamers (1-7) met ramen; alle werkkamers geven toegang tot de typekamer; één werkkamer staat in directe verbinding met de receptie en de vergaderzaal;



- | | | | |
|--------------|-----------|---------------|----------------|
| 1. woonkamer | 4. hal | 7. hobbykamer | 10. terras |
| 2. eetkamer | 5. garage | 8. gang | 11. slaapkamer |
| 3. keuken | 6. terras | 9. slaapkamer | 12. badkamer |
| | | | 13. slaapkamer |

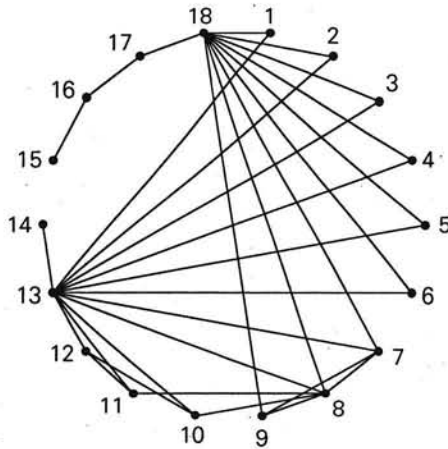
Figuur 1.18.



Figuur 1.19.

- (ii) een receptie (8) met toegang tot de typekamer en met een buitendeur;
- (iii) een vergaderzaal (9) met ramen en toegang tot de receptie;
- (iv) twee toiletruimten (10, 11), beide toegankelijk vanuit de receptie, de hal en de typekamer;
- (v) een hal (12) met toegang tot de typekamer;
- (vi) een typekamer (13);
- (vii) een koffiekamer (14) met ramen en toegankelijk vanuit de typekamer en de filmzaal;
- (viii) een filmzaal (15) zonder ramen en met toegang tot de voorraadkamer;
- (ix) een voorraadkamer (16) met toegang tot koffiekamer en typekamer;
- (x) een expeditieruimte (17) met toegang tot de buitenwereld en de voorraadkamer.

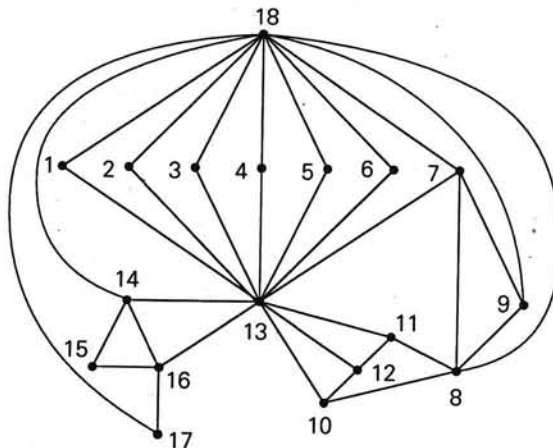
Figuur 1.20 representeert alle eisen door middel van een graaf. De buitenwereld wordt door knoop 18 voorgesteld.



Figuur 1.20.

De volgende stap is om een plattegrond te ontwerpen, waarvan de graaf uit figuur 1.20 de organisatiegraaf is. Hierbij kan zich de volgende moeilijkheid voordoen. Het zou kunnen zijn dat de eisen onderling strijdig zijn en dat er geen bijbehorende plattegrond is.

De knopen van de graaf immers moeten 'uitdijen' tot vertrekken en de takken moeten 'inkrimpen' tot deuren, ramen of openingen. Als twee takken elkaar snijden, zoals $\{1,13\}$ en $\{8,18\}$ in de figuur, dan zouden er twee deuren op dezelfde plaats moeten zitten, hetgeen niet kan. Met andere woorden, als met de organisatiegraaf een *echte* plattegrond correspondeert, dan moet de graaf zo getekend *kunnen* worden dat takken elkaar buiten de knopen nooit snijden. Men zegt dan dat de graaf isomorf is met een *planaire graaf* of kortweg dat de graaf *planair* is. De graaf uit figuur 1.20 heeft deze eigenschap, zoals de volgende figuur illustreert.



Figuur 1.21.

Is de 'organisatiegraaf' *niet-planair* dan kan er niet een plattegrond bij gemaakt worden. De graaf $K_{3,3}$ uit figuur 1.3 (of uit figuur 1.14) is een voorbeeld van een niet-planaire graaf. In z'n geval kan men pas een plattegrond construeren door extra ruimten (bijvoorbeeld gangen) aan het ontwerp toe te voegen.

Is de graaf planair dan is er meestal op meer dan één manier een plattegrond bij te ontwerpen. Welke men dan kiest hangt af van andere overwegingen.

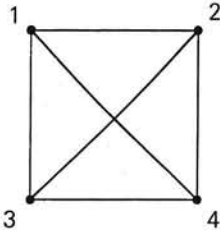
Maak voor uzelf bij de graaf uit figuur 1.21 een plattegrond.

2 Planariteit en dualiteit

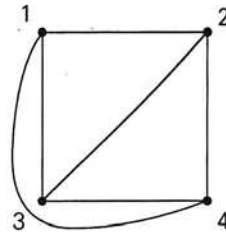
2.1. Planaire grafen

In het vorige hoofdstuk definieerden we een planaire graaf als een graaf die in het platte vak getekend kan worden, zodanig dat takken elkaar slechts snijden in knopen. Wat preciezer gezegd: een graaf is planair als hij *isomorf* is met een graaf die aan bovenstaande omschrijving voldoet.

We geven hiervan nog één eenvoudig voorbeeld. De graaf K_4 in figuur 2.1 voldoet niet aan de eis dat takken elkaar slechts in knopen snijden.



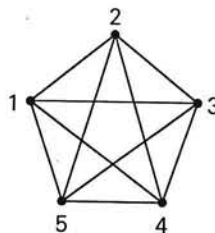
Figuur 2.1.



Figuur 2.2.

Als de graaf een wegennet voorstelt en men zou willen dat de wegen $\{1,4\}$ en $\{2,3\}$ elkaar niet kruisen, dan zou men ter plekke een viaduct moeten aanleggen. Met andere woorden men zou een *niet-planaire inbedding* hebben van de graaf, omdat men op twee niveaus wegen zou moeten aanleggen. Echter is de graaf toch planair, omdat hij isomorf is met de versie in figuur 2.2. Alle wegen bevinden zich daar in één vlak. De graaf $K_{3,3}$ uit figuur 1.3 is een voorbeeld van een niet-planaire graaf.

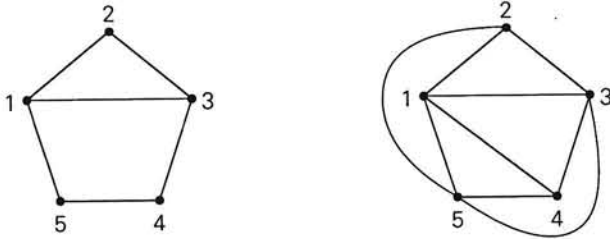
Vanzelfsprekend zou men graag een criterium hebben, waarmee men uit kan maken of een graaf planair is of niet. In de formulering van een dergelijk criterium zal $K_{3,3}$ een grote rol spelen, evenals de volledige graaf K_5 , waarvan een niet-planaire versie in figuur 2.3 getekend is.



Figuur 2.3.

Van deze graaf zullen we aantonen dat hij 'echt' niet-planair is, dat wil zeggen dat er *niet* een planaire versie van bestaat.

Stel dat we zo'n planaire versie proberen te construeren. We kunnen dan beginnen met het pentagon $\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,1\}\}$ en met *daarin* de tak $\{1,3\}$. (We zouden $\{1,3\}$ ook buitenom kunnen tekenen hetgeen tot een analoge redenering aanleiding geeft). We hebben dan figuur 2.4.a.

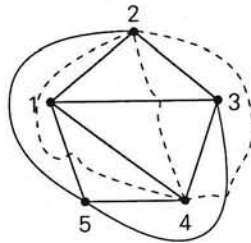


a.

b.

Figuur 2.4.

Vervolgens tekenen we de takken $\{2,5\}$, $\{3,5\}$ en $\{1,4\}$. Om nu een tak $\{2,4\}$ te tekenen ontkomt men er niet aan, om minstens één keer één van de reeds aanwezige takken te snijden, zoals figuur 2.5 aantoont.



Figuur 2.5.

Dus K_5 is niet-planair.

Soortgelijk is aan te tonen dat $K_{3,3}$ niet planair is.

Alvorens het criterium voor planariteit te formuleren hebben we nog het begrip *contractie* nodig.

Definitie 2.1

Een (tak)contractie in een graaf G wordt verkregen door een tak (v,w) weg te nemen uit G en de knopen v en w te identificeren, zodanig dat de resulterende knoop incident is met alle takken, waarmee v en w incident waren in G .

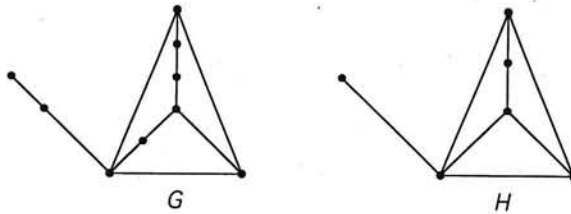
De resulterende graaf wordt wel met $G^{(e)}$ aangeduid, als $e = \{v,w\}$, en heet de *contractie van G naar de tak e* .

Definitie 2.2

Een contractie van een graaf G is een graaf die uit G verkregen kan worden door een reeks takcontracties.

Als H een contractie van G is zegt men ook wel dat G *contraheerbaar* is naar H .

Een bijzonder geval van contractie treedt op als men contraheert naar een tak die incident is met een knoop van valentie 2. In dat geval heten de beide grafen *homeomorf*.

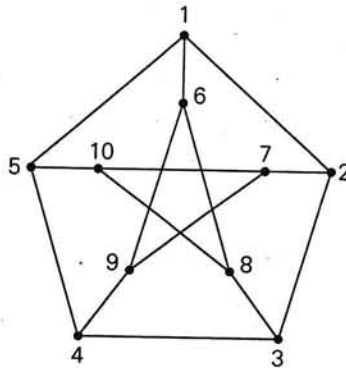
Voorbeeld 2.1

Figuur 2.6.

De grafen G en H zijn homeomorf.

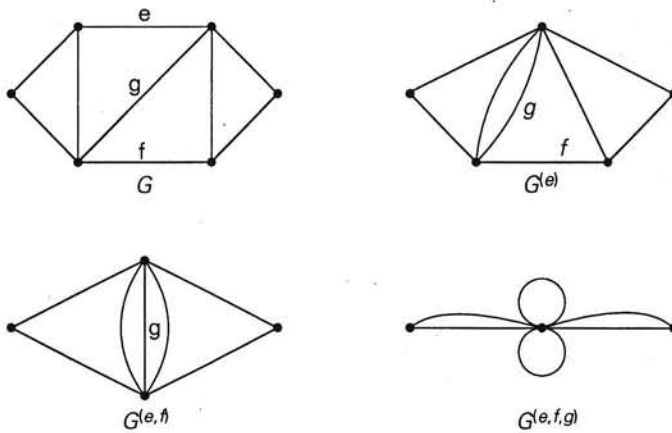
Voorbeeld 2.2

De in figuur 2.7 getekende reguliere graaf van valentie 3 met 10 knopen staat bekend als de Petersengraaf.



Figuur 2.7.

Het is duidelijk dat wanneer men achtereenvolgens contraheert naar de takken $\{1,6\}$, $\{2,7\}$, $\{3,8\}$, $\{4,9\}$ en $\{5,10\}$ de graaf K_5 ontstaat. Dus is K_5 een contractie van de Petersengraaf.

Voorbeeld 2.3

Figuur 2.8.

De grafen $G^{(e)}$, $G^{(e,f)}$ en $G^{(e,f,g)}$ ontstaan achtereenvolgens uit G door contractie naar e , f en g .

We komen nu tot het aangekondigde criterium voor het planair zijn van een graaf.

Stelling 2.3

Een graaf G is planair dan en slechts dan als G geen deelgraaf bevat die contraheerbaar is naar K_5 of naar $K_{3,3}$.

Het bewijs van deze stelling berust op de volgende twee equivalente en betrekkelijk eenvoudig te bewijzen eigenschappen:

- (i) Als G planair is, dan is elke contractie van G ook planair.
- (ii) Als G een contractie heeft die niet planair is, dan is ook G niet planair.

Het eigenlijke bewijs is lang en technisch en wordt hier weggelaten.

De stelling zegt dus dat in zekere zin de grafen K_5 en $K_{3,3}$ de enige essentiële niet-planaire grafen zijn.

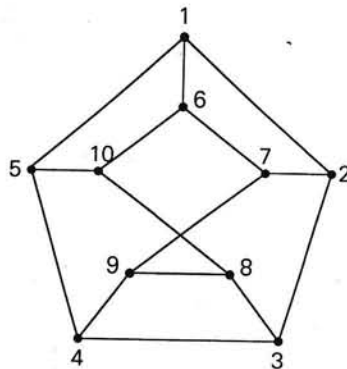
Bij het contraheren van een graaf, om na te gaan of deze planair is, mag men altijd meervoudige takken vervangen door één tak. Het al of niet planair zijn is hiervan onafhankelijk. Men krijgt aldus overzichtelijker figuren. Ga één en ander na voor de graaf in Voorbeeld 2.4.

Opmerking

Een andere versie van Stelling 2.3 zegt dat G planair is dan en slechts dan als G geen deelgraaf bevat die homeomorf is met K_5 of met $K_{3,3}$. Beide versies staan wel bekend als het Theorema van Kuratowski.

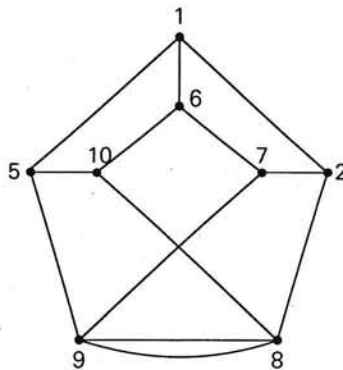
Uit Voorbeeld 2.2 volgt nu direct dat de Petersengraaf niet planair is. Een andere toepassing wordt door het volgende voorbeeld verschaft.

Voorbeeld 2.4



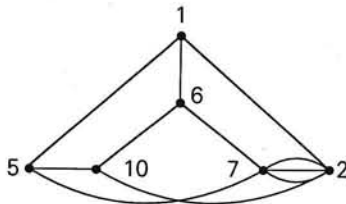
Figuur 2.9.

We contraheren deze graaf eerst naar de takken $\{4,9\}$ en $\{3,8\}$ tot de graaf van figuur 2.10.



Figuur 2.10.

waarna we nogmaals contraheren naar de takken $\{7,9\}$ en $\{2,8\}$. We krijgen dan figuur 2.11.



Figuur 2.11.

Laten we twee van de drie takken $\{2,7\}$ weg dan ontstaat een graaf die isomorf is met $K_{3,3}$ (ga dit na!). Hieruit volgt dat de oorspronkelijke graaf een deelgraaf bezit die contraheerbaar is tot $K_{3,3}$.

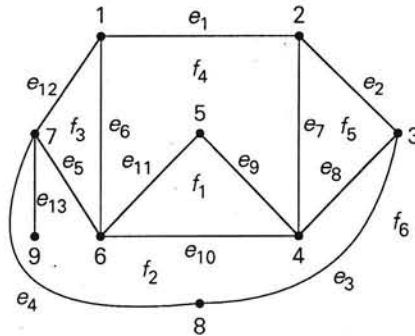
Dus is de gegeven graaf niet-planair. Het laatste voorbeeld toont aan dat het niet

altijd eenvoudig is om met Stelling 2.3 te beslissen of een graaf planair is. De stelling is dan vooral ook van theoretisch belang.

2.2. Duale grafen

Een planaire graaf (die in het platte vlak getekend is zonder kruisingen buiten de knopen) verdeelt het platte vlak in een aantal gebieden die we ook *gebieden*, *zijvlakken* of *zijden* noemen.

Voorbeeld 2.5



Figuur 2.12.

De graaf G verdeelt het platte vlak in 6 gebieden: f_1, f_2, \dots, f_6 . Elke tak is grens tussen twee verschillende gebieden of ligt geheel binnen een gebied, zoals e_{13} , en begrenst dat gebied dus eigenlijk twee keer. Het gebied f_6 heet het *buitengebied* van de graaf.

We komen tot de volgende definitie.

Definitie 2.4

Een kaart $M := (V, E, F)$ bestaat uit een verzameling V van knopen, een verzameling E van takken en een verzameling F van gebieden, zodanig dat (V, E) een samenhangende graaf is, elke tak ofwel twee gebieden begrenst ofwel hetzelfde gebied twee keer begrenst, en dat er een planaire voorstelling van (V, E) is, waarbij de elementen van F de gebieden van die planaire graaf zijn.

De gebieden van een kaart vertonen in veel opzichten gelijkenis met de knopen van een graaf. Zo is de *valentie* $\rho^*(f)$ van een gebied gelijk aan het aantal takken die dat gebied begrenzen, waarbij de takken die het gebied twee keer begrenzen ook twee keer worden geteld.

Analoog aan Stelling 1.4 geldt de volgende eigenschap.

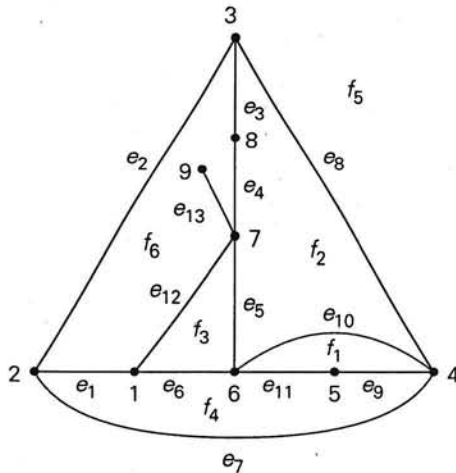
Stelling 2.5

Voor een kaart $M = (V, E, F)$ geldt

$$\sum_i \rho^*(f_i) = 2m.$$

Een bewijs wordt aan de lezer overgelaten.

Het buitengebied van een graaf wordt bij deze eigenschap (en bij andere) op dezelfde voet behandeld als de andere gebieden. Het is overigens vrij willekeurig welk gebied van een graaf tot buitengebied verklaard wordt. Zo hebben we in figuur 2.13 een graaf getekend die isomorf is met die uit Voorbeeld 2.5.



Figuur 2.13.

Nu is f_5 het buitengebied.

Er bestaat een eenvoudige techniek, om een planaire graaf zo te tekenen dat een van de voren aan te wijzen gebied het buitengebied wordt. In plaats van ingebed in een vlak denken we ons de graaf gelegen op een bol. 'Snijd' een gat in het aangewezen gebied en vouw vervolgens het boloppervlak uit, waarbij de randen van het gat de begrenzing vormen van het aldus ontstane platte oppervlak. Om dit echt 'plat' te krijgen zou men met een rubberen bol (bal) moeten beginnen, zodat men het oppervlak op de ene plaats meer kan uitrekken dan op een andere.

We kunnen zo bij elk gebied van de op de bol getekende graaf een planaire graaf verkrijgen met dat gebied als buitengebied. Eigenlijk zijn er bij elk gebied twee van zulke planaire grafen. Men krijgt het ene uit het andere door het vlak waarin de graaf getekend is in zijn geheel om te draaien. Dit correspondeert met het binnenste buiten trekken van het boloppervlak. Al deze $2|F|$ isomorfe planaire grafen stellen dus dezelfde kaart $M = (V, E, F)$ voor.

We komen nu tot de definitie van het begrip *duale kaart*.

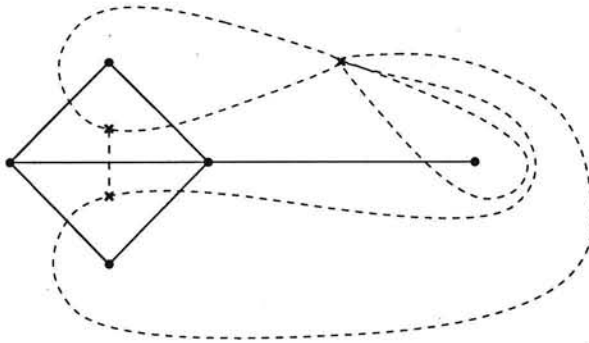
Definitie 2.6

Bij elke kaart $M = (V, E, F)$ behoort de duale kaart $M^* = (V^*, E^*, F^*) = (F, E, V)$. Hierbij is de duale knopenverzameling gelijk aan de oorspronkelijke verzameling gebieden en vice versa. De duale takkenverzameling is gelijk aan de oorspronkelijke takkenverzameling. Twee duale knopen in M^* zijn verbonden door een tak dan en slechts dan als deze tak de corresponderende gebieden in M begrenst.

De definitie biedt een duidelijk voorschrift om M^* te construeren. In elk gebied f_i van M kiezen we een punt v_i^* ; dit punt stelt een duale knoop voor. Vervolgens tekenen we voor elke tak e van M een lijn e^* die e kruist, maar géén andere takken van M , en die de knopen v_i^* verbindt die in de twee (niet noodzakelijk verschillende) gebieden f_i liggen, die door e begrensd worden.

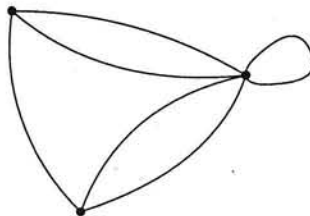
Voorbeeld 2.6

Uitgaande van een kaart M construeren we M^* . De knopen van M^* geven we in figuur 2.14 aan met kruisjes en de takken door gestippelde lijnen.



Figuur 2.14.

In figuur 2.15 is de duale kaart (ofwel de duale graaf) ook nog op de gewone manier getekend.



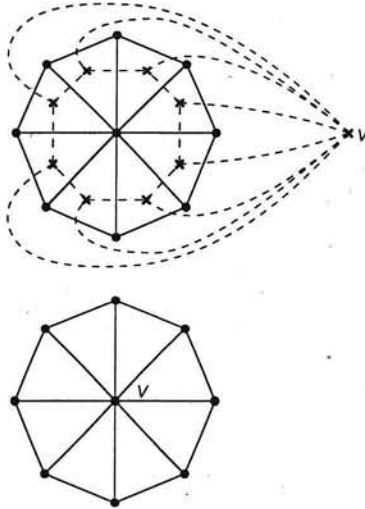
Figuur 2.15.

Uit het voorbeeld blijkt dat ook al is de oorspronkelijke, bij M behorende graaf G enkelvoudig, de duale graaf G^* niet enkelvoudig hoeft te zijn. De duale graaf in Voorbeeld 2.6 heeft zowel meervoudige takken als lussen. Ga voor uzelf na wanneer

dit in het algemeen het geval is.

In het volgende voorbeeld is de duale graaf enkelvoudig en zelfs isomorf met de oorspronkelijke graaf.

Voorbeeld 2.7



Figuur 2.16.

We merken nog op dat uit de definitie volgt dat de duale van de duale kaart (graaf) gelijk is aan de oorspronkelijke kaart (graaf), ofwel $(M^*)^* = M$.

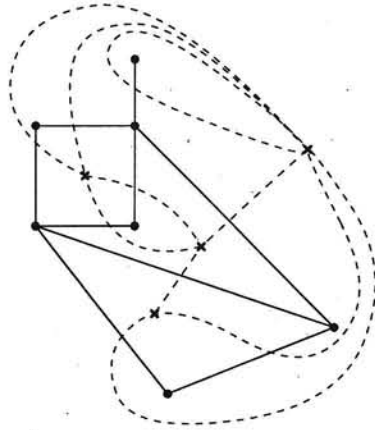
2.3. Plattegrond en organisatiegraaf

We komen nu terug op een probleem dat in § 1.4 gesteld werd. Wanneer men op grond van allerlei eisen een organisatiegraaf van een te construeren gebouw heeft getekend, hoe kan men dan een plattegrond verkrijgen die deze graaf als organisatiegraaf heeft?

We gaan ervan uit dat de graaf planair is en dat we reeds een in het platte vlak ingebedde versie ervan hebben, zoals de graaf in figuur 1.22. Bij de constructie van een plattegrond moeten de knopen 'uitdijen' tot vertrekken van eindige afmetingen, terwijl de gebieden ineen moeten 'schrompelen' tot niet bestaande ruimten. De takken moeten fysiek bestaande doorgangen worden tussen vertrekken onderling of tussen een vertrek en de buitenwereld. Dit brengt ons op het idee om hiervoor de duale kaart te gebruiken, waar knopen tot gebieden getransformeerd worden en gebieden tot knopen (zonder afmetingen), terwijl de takken van G 'intakt' blijven.

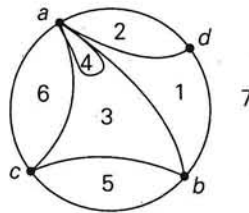
We zullen deze methode illustreren aan de hand van de plattegrond van figuur 1.21. Om het probleem nog wat meer structuur te geven eisen we dat de kamers 1 en 2

ramen moeten krijgen. De linker muren van de vertrekken 3, 4, 5 en 6 zijn blinde muren, die aan een andere woning grenzen. De organisatiegraaf die nu bij de plattegrond hoort is getekend in figuur 2.17 (getrokken lijnen):



Figuur 2.17.

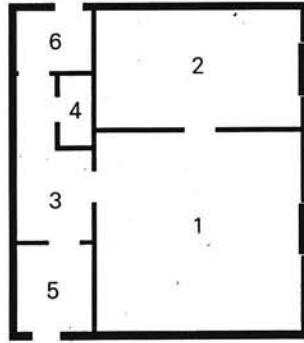
Volgens de in § 2.2 beschreven methode construeren we nu de duale graaf (gestipelde lijnen). In figuur 2.18 is dezelfde (duale) graaf op een 'gewone' manier getekend.



Figuur 2.18.

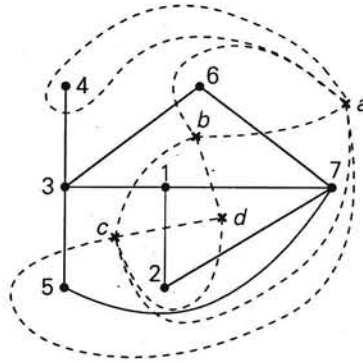
Omdat de organisatiegraaf planair is, is de duale graaf — de plattegrond dus — ook planair. Deze algemeen geldende eigenschap bewijzen we hier niet. Let erop dat wanneer in de graaf van figuur 2.17 een tak de knopen i en j verbindt, dezelfde tak in de duale graaf van figuur 2.18 de gebieden i en j scheidt.

Alle takken in de graaf van figuur 2.18 geven de mogelijkheid van doorgang of verbinding met de buitenwereld. Natuurlijk is figuur 2.18 niet een 'echte' plattegrond, daar de verschillende vertrekken een tamelijk exotische vorm hebben. Door echter de vertrekken te vervormen, zonder ze te splitsen of scheidingswanden te laten verdwijnen, kunnen we komen tot een reëlere plattegrond, zoals in figuur 2.19.

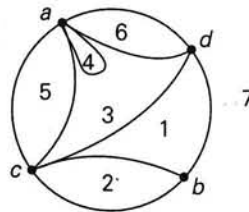


Figuur 2.19.

Vergelijken we deze plattegrond met die uit figuur 1.21, dan zien we dat ze verschillend zijn. Toch is aan alle eisen voldaan! Aan deze eisen kan kennelijk door meer dan één plattegrond voldaan worden. Dat we die van figuur 2.19 vonden en niet die van figuur 1.21 ligt aan de manier van tekenen van de organisatiegraaf. Hadden we die graaf, in plaats van de gedaante van figuur 2.17, de isomorfe gedaante van figuur 2.20 gegeven, dan zouden we met behulp van de gestippelde lijnen als duale graaf de graaf van figuur 2.21 vinden.

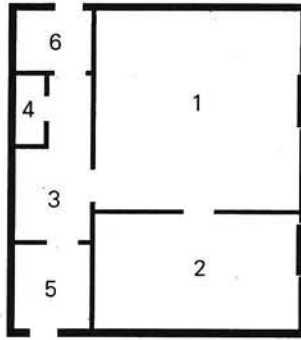


Figuur 2.20.



Figuur 2.21.

Deze plattegrond is om te vormen tot figuur 2.22.



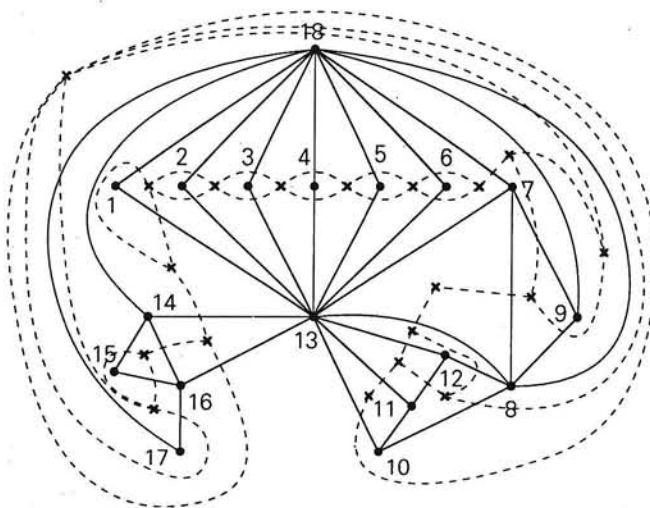
Figuur 2.22.

De laatste stap, om te komen tot figuur 2.19 respectievelijk figuur 2.22, heeft natuurlijk niets meer met grafentheorie te maken. Het enige dat de grafentheorie als inbreng heeft is het verifiëren van de consistentie van de eisen aangaande de verbindingen der vertrekken onderling en die met de buitenwereld, alsmede het bepalen van een of meer ruwe schetsen van plattegronden. De uiteindelijke vorm van de plattegrond wordt door andere factoren vastgelegd. Voor het omvormen van 'plattegronden' als in figuur 2.21 tot meer realistische plattegronden als in figuur 2.22 bestaan computerprogramma's.

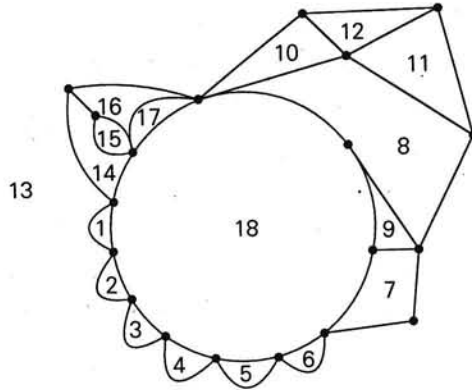
We geven nog een voorbeeld dat betrekking heeft op de organisatiegraaf voor het te ontwerpen kantoorgebouw uit § 1.4.

Voorbeeld 2.7

Eerst dualiseren we de planaire graaf uit figuur 1.26.



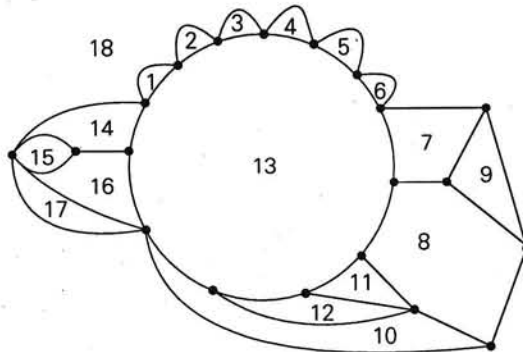
Figuur 2.23.



Figuur 2.24.

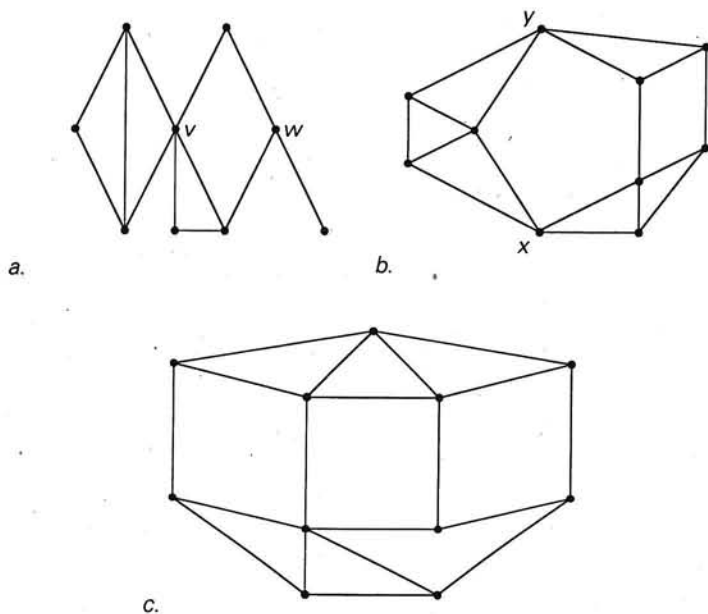
We tekenen de duale graaf (stippelijnen) weer op een normale manier en krijgen zo de tekening van figuur 2.24.

Opvallend in deze 'plattegrond' is dat het buitengebied een soort binnenplaats is, terwijl de typekamer samenvalt met de gehele wereld buiten het gebouw. In § 2.2 is uitgelegd wat hiervan de reden is. Om een plattegrond te krijgen waarbij het buitengebied 18 ook werkelijk aan de buitenkant van het gebouw ligt, moeten we als het ware een gat knippen in gebied 18 en de hele figuur binnenste buiten keren. Figuur 2.25 toont het resultaat.



Figuur 2.25.

Tenslotte geven we in figuur 2.26, nog een reëlere plattegrond, die uit figuur 2.25 kan worden verkregen door de vertrekken te vervormen, zonder de onderlinge verbindingen aan te tasten.



Figuur 2.27.

Voor 3-samenhangende planaire grafen geldt het Theorema van Whitney.

Stelling 2.7

Bij een planaire graaf die 3-samenhangend is hoort slechts één kaart.

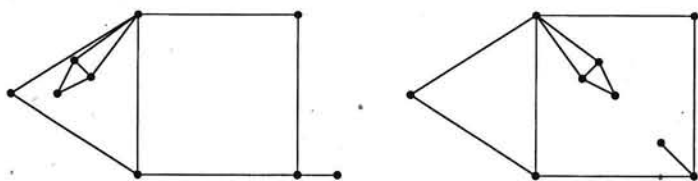
Opmerking

Hierbij is het van géén belang welk gebied het buitengebied is bij één of andere inbedding in het platte vlak. Die ene kaart die er volgens de stelling bestaat kunnen we ons het beste op een bol aangebracht denken (zie § 2.2). In welk gebied men een gat knipt om het boloppervlak plat uit te vouwen is niet van wezenlijk belang.

We bewijzen de stelling niet, maar geven een paar voorbeelden.

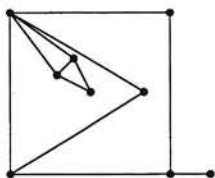
Voorbeeld 2.8

We geven twee verschillende inbeddingen in het platte vlak van graaf *a* uit figuur 2.27.



Figuur 2.28.

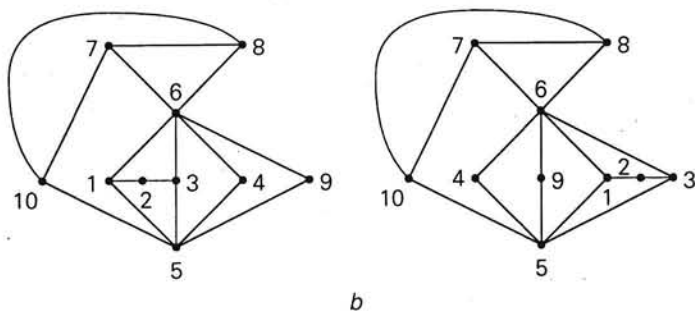
Hoewel alle drie figuren als graaf isomorf zijn, zijn ze als kaart verschillend, omdat sommige gebieden steeds door andere takken worden begrensd. Er zijn nog vele andere grafen die isomorf zijn met graaf *a* uit figuur 2.27, maar die aanleiding geven tot verschillende kaarten. Zo is er de graaf van figuur 2.29, die uit de eerste graaf in dit voorbeeld ontstaat door de hele subgraaf links van het vierkant naar binnen te draaien.



Figuur 2.29.

In feite kan men alle verschillende kaarten die behoren bij graaf *a* uit figuur 2.27 produceren door een deelgraaf, die via een scheidende verzameling van 1 of 2 knopen aan de rest is verbonden, te draaien om een of andere as door deze knoop (knoopen) en de rest van de graaf invariant te laten. Een *aanvulling op de stelling van Whitney* zegt nu, dat dit de enig mogelijke variaties zijn en dat *alle* isomorfe grafen die tot verschillende kaarten aanleiding geven zo zijn te krijgen.

Voorbeeld 2.9



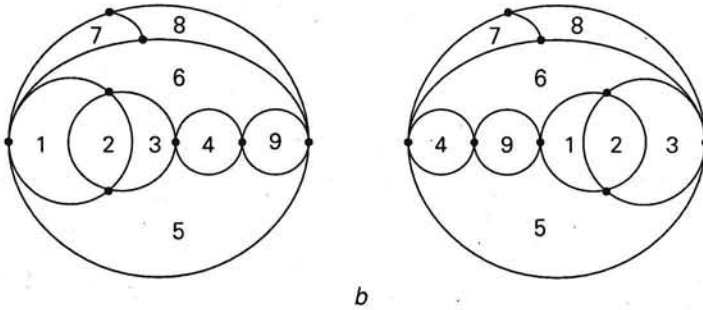
Figuur 2.30.

De grafen van figuur 2.30 zijn isomorf. Graaf *b* kan als volgt uit graaf *a* worden verkregen. De knopen 5 en 6 vormen een scheidende verzameling. Verschuif eerst de deelgraaf bestaande uit de knopen 1, 2, 3, 5 en 6 en de daarmee incidenten takken van links naar rechts.

Draai vervolgens de deelgraaf bestaande uit de knopen 4, 5, 6 en 9 en de daarmee incidenten takken over 180° van rechts naar links. Draai tenslotte de deelgraaf bestaande uit knoop 4 en de daarmee incidenten takken van rechts naar links ('over knoop 9 heen').

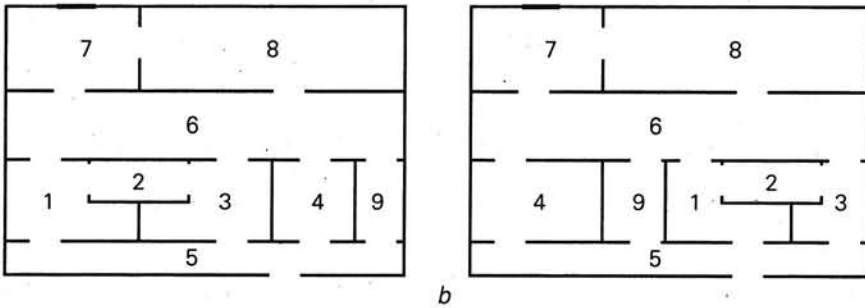
De kaarten die bij graaf *a* en *b* horen zijn duidelijk verschillend. Het zijn twee verschillende planaire inbeddingen van dezelfde abstracte graaf. Dus zullen de duale

grafan ook verschillen. De bijbehorende duale grafen zijn in figuur 2.31 getekend. Knoop 10 is gekozen als de knoop die met het buitengebied correspondeert. De lezer ga voor zichzelf na hoe deze tot stand zijn gekomen.



Figuur 2.31.

We vatten de grafen *a* en *b* nu op als organisatiegrafen van een te ontwerpen gebouw. Omdat de grafen isomorf zijn, voldoen ze aan hetzelfde eisenpakket wat betreft de onderlinge bereikbaarheid van de vertrekken. De plattegronden, voorgesteld door de duale grafen, kunnen dus allebei als uitgangspunt dienen voor het gebouw. We laten in figuur 2.32 van beide plattegronden nog een reëlere versie volgen, waarin alle vertrekken rechthoekig zijn.



Figuur 2.32.

In deze laatste versies zijn alle doorgangen en verbindingen, ook met de buitenwereld, expliciet getekend. Let erop dat de vertrekken 1 en 6 geen verbinding hebben, dat wil zeggen géén raam of deur, naar de buitenwereld. De muren die 1 en 6 van de buitenwereld scheiden zijn dus blinde muren.

Probeer nu volgens het beschreven procédé zelf nog andere plattegronden te construeren, die in overeenstemming zijn met de eisen.

Wanneer men op systematische wijze alle verschillende kaarten produceert die bij een gegeven organisatiegraaf horen, dan kan men dus via de duale kaarten (grafan) alle mogelijke plattegronden verkrijgen, die de gegeven graaf als organisatiegraaf hebben. (In Voorbeeld 2.9 werd daarmee een begin gemaakt.)

Het geschetste procédé heeft eigenlijk een nog algemenere toepassing. Zoals reeds eerder werd opgemerkt is het a priori niet duidelijk of een bepaalde graaf wel een echte organisatiegraaf kan zijn, dat wil zeggen of hij planair is. Met de besproken methode van 'het omdraaien van deelgrafen' kan men nu uitmaken of de bewuste graaf planair is of niet. Als bij systematische toepassing er géén planaire inbedding verschijnt is de graaf niet-planair en is dus niet op te vatten als een organisatiegraaf. De eisen die aanleiding waren om de graaf te bestuderen waren dus strijdig en dienen aangepast te worden. Vaak is dit een praktisch hulpmiddel om te beslissen of een graaf planair is dan Stelling 2.3.

3 Optimale paden in grafen

3.1. Kortste-pad-algoritme

In § 1.3 definieerden we de afstand $d(v,w)$ tussen twee knopen v en w van een graaf G als de lengte van het kortste pad tussen die twee knopen. Hierbij is de padlengte het aantal takken in dat pad.

Dit begrip afstand komt globaal overeen met de *Euclidische afstand* tussen punten in het platte vlak of in de ons omringende driedimensionale ruimte. De belangrijkste eigenschappen waaraan beide hierboven genoemde afstanden voldoen zijn:

- (i) $d(v,w) = d(w,v)$;
- (ii) $d(v,w) > 0, d(v,w) = 0 \leftrightarrow v = w$; (3.1)
- (iii) $d(v,w) \leq d(v,z) + d(z,w)$.

De twee eerste eigenschappen zijn direct duidelijk. Wat de derde eigenschap betreft, de zogenaamde driehoeksongelijkheid, kunnen we zeggen dat wanneer in plaats van \leq het $>$ -teken zou gelden voor een drietal knopen v, w en z in een graaf, het getal $d(v,w)$ niet de afstand zou zijn tussen v en w omdat er via z een korter pad van v naar w loopt.

In plaats van het zoëven besproken begrip afstand zullen we een algemener begrip invoeren. Daartoe zullen we de takken van de graaf G van een gewicht ofwel een label voorzien, dat aanduidt 'hoe moeilijk' het is om langs de betreffende tak te reizen, of 'hoe lang' die tak is, of 'hoeveel het kost'. Bovendien geven we de takken een richting, omdat het gewicht van die tak er van af kan hangen of we van de ene naar de andere knoop gaan of omgekeerd. Als praktijkgeval kunnen we hierbij denken aan een aantal wereldsteden die door de knopen van een graaf worden weergegeven. De takken corresponderen met vliegroutes tussen sommige van die steden. De gewichten stellen vlieggkosten voor. Deze kunnen afhangen van de vliegrichting in verband met luchtstromingen. Een ander voorbeeld is een aantal locaties (knopen) met tussen sommige locaties éénrichtingswegen (gerichte takken). Als we het aantal kilometers die men moet afleggen bij het reizen van x naar y aanduidt met $w(x,y)$, dan kan het voor zekere a en b gebeuren dat $w(a,b) \neq w(b,a)$ in verband met de verschillende wegen die men moet nemen van a naar b respectievelijk van b naar a . Wanneer we takken aangeven door knopenparen zullen dat daarom ook *geordende* knopenparen (a,b) of (b,a) moeten zijn in plaats van het ongeordende paar $\{a,b\}$.

Een pad van knoop x naar knoop y in een gerichte graaf is een rij takken, zodanig dat de eindknoop van een tak de beginknoop is van de volgende tak, terwijl x de beginknoop is van de eerste tak en y de eindknoop van de laatste tak:

$$(x,a), (a,b), (b,c), \dots, (v,z), (z,y). \quad (3.2)$$

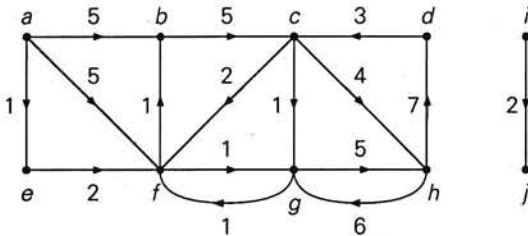
De lengte van een pad is de som van de gewichten van de takken in dit pad. Het pad (2) heeft dus een lengte

$$w(x,a) + w(a,b) + w(b,c) + \dots + w(v,z) + w(z,y). \quad (3.3)$$

De lengte van het kortste pad van knoop x naar knoop y definieert men nu weer als de afstand $d(x,y)$ van x naar y . In verband met de eerder gemaakte opmerkingen over de gewichten van de takken kan het zijn dat $d(x,y) \neq d(y,x)$ is. Ook kan het gebeuren dat $d(x,y)$ een (eindige) waarde heeft, terwijl $d(y,x)$ niet eens gedefinieerd is, namelijk als er wel een pad loopt van x naar y , maar niet van y naar x . In dit laatste geval krijgt $d(y,x)$ vaak de waarde ∞ .

We concluderen dat eigenschap (i) van (3.1) niet voor elk tweetal knopen hoeft te gelden. De hier ingevoerde afstand is dus geen afstand in 'klassieke zin'. Wel geldt altijd $d(x,y) \geq 0$, als tenminste alle takken niet-negatieve gewichten hebben; in § 3.1 en in § 3.2 zullen we dat steeds aannemen. Voorts definiëren we $d(x,x) = 0$ voor elke knoop $x \in VG$.

Voorbeeld 3.1



Figuur 3.1.

In de graaf van figuur 3.1 bestaan o.a. de volgende paden van a naar b :

- (i) (a,b) ;
- (ii) $(a,f), (f,b)$;
- (iii) $(a,e), (e,f), (f,b)$;
- (iv) $(a,e), (e,f), (f,g), (g,f), (f,b)$;
- (v) $(a,e), (e,f), (f,g), (g,h), (h,g), (g,f), (f,b)$.

Het pad met de kortste lengte is pad (iii) met lengte 4. Dus is $d(a,b) = 4$. Voorts is $d(b,a) = \infty$, omdat er geen pad bestaat van b naar a .

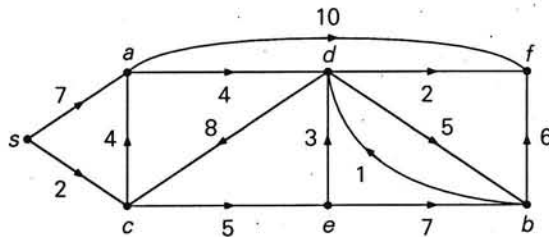
Men kan verder eenvoudig nagaan dat $d(b,h) = 9$ en $d(h,b) = 8$, $d(e,i) = d(i,e) = \infty$, etc.

We zullen nu een methode bespreken, waarmee we altijd de afstand kunnen bepalen tussen knopen in een takgelabelde, gerichte graaf, alsmede een pad, waarvan de lengte gelijk is aan die afstand. Zo'n pad hoeft niet eenduidig te zijn; er kan meer dan één 'kortste pad' zijn. De methode staat bekend als de *kortste-pad-algoritme* en staat op naam van Moore en Dijkstra. We gaan steeds uit van een enkelvoudige graaf. Mocht een graaf niet-enkelvoudig zijn, dan vervangen we meervoudige (parallele) takken door de tak met het kleinste gewicht; lussen laten we eenvoudig helemaal weg.

Stel we willen het (een) kortste pad van een knoop s naar een knoop f bepalen.

De methode bestaat eruit, dat we elke knoop v van de graaf een *tijdelijk label* geven, dat aangeeft hoe lang het kortste pad is van s naar die knoop v , tot op dat ogenblik gevonden. Zodra er een *korter pad* blijkt te bestaan van s naar v , wordt het label van $\text{lab}(v)$ verlaagd. Als in een bepaald stadium van de algoritme blijkt dat het label van v nooit verder verlaagd zal kunnen worden, markeren we het label van v als *definitief* en we zeggen dat $\text{lab}(v)$ zijn *eindwaarde* heeft gekregen. Deze conclusie kan getrokken worden, zodra blijkt dat alle paden van s naar v lopen via knopen die inmiddels ook al een definitief label hebben gekregen. Door vanuit s te starten en successievelijk steeds een volgende knoop een definitief label te geven, zullen we uiteindelijk het label van knoop f definitief kunnen maken.

We illustreren de details van de methode aan de hand van een voorbeeld.



Figuur 3.2.

In figuur 3.3 vindt men een overzicht van de labelwaarden van de knopen van de graaf. Een onderstreepte waarde duidt de eindwaarde van het betreffende label aan.

We beginnen met $\text{lab}(s) = 0$ te stellen en alle andere labels gelijk aan ∞ . Immers op dit ogenblik zitten we nog in de beginknoop s en hebben nog geen pad geconstrueerd naar enige andere knoop. Daar er zeker geen pad gevonden zal worden van s naar s dat korter is, maken we $\text{lab}(s)$ direct definitief (figuur 3.3 (1)).

	S	a	b	c	d	e	f
1.	Q	∞	∞	∞	∞	∞	∞
2.		7	∞	2	∞	∞	∞
3.		7	∞	2	∞	∞	∞
4.		6	∞		∞	7	∞
5.		6	∞		∞	7	∞
6.			∞		10	7	16
7.			∞		10	7	16
8.			14		10		16
9.			14		10		16
10.			14				12
11.			14				12
12.			14				

Figuur 3.3.

Vervolgens gaan we vanuit s verder via de takken (s,a) en (s,c) . Er blijkt dus een pad te zijn van s naar a ter lengte 7 en van s naar c ter lengte 2. Tot nog toe zijn dit de kortste paden vanuit s naar a respectievelijk c . Dus stellen we $\text{lab}(a) = 7$ en $\text{lab}(c) = 2$. Alle andere labels blijven ongewijzigd. Er zal nooit een pad naar c gevonden kunnen worden dat korter is. Immers zo'n pad zou dan via knoop a moeten lopen en zou daarom een lengte groter dan 7 krijgen. Dus maken we $\text{lab}(c)$ definitief (3).

Vervolgens gaan we uit c verder met het construeren van paden. Door tak (c,a) te nemen blijkt dat er een pad is van lengte 6 van s naar a . Daar dit korter is dan het tot nog toe gevonden pad van s naar a ($6 < 7$) verlagen we $\text{lab}(a)$ tot 6. Ook blijkt er een pad van s naar e te zijn met lengte 7. Daar $7 < \infty$, verlagen we $\text{lab}(e)$ tot 7(4). De kleinste labelwaarde is nu die van a . Lager zal $\text{lab}(a)$ nooit meer kunnen worden daar andere paden altijd een beginstuk zullen hebben gelijk aan één van de tot op dit ogenblik geconstrueerde paden en die zijn allemaal al langer. Dus maken we $\text{lab}(a)$ definitief (5). Nu gaan we verder met knoop a . Er blijkt een pad te zijn van s naar f van lengte $16 = \text{lab}(a) + w(a,f)$ en van s naar d van lengte $10 = \text{lab}(a) + w(a,d)$. Verlaag de labels (6) en maak vervolgens $\text{lab}(e)$ definitief, daar 7 op dit ogenblik de kleinste tijdelijke labelwaarde is (7). We gaan met knoop e verder. Er is een pad van lengte $10 = \text{lab}(e) + w(e,d)$ naar d en van lengte $14 = \text{lab}(e) + w(e,b)$ naar b . Bijgevolg verlagen we $\text{lab}(b)$ van ∞ naar 14, terwijl $\text{lab}(d)$ (en ook $\text{lab}(f)$) ongewijzigd blijft (8). De labelwaarde van d is dan de kleinste en $\text{lab}(d)$ wordt definitief (9). Uitgaande van d vinden we een pad van lengte $12 = \text{lab}(d) + w(d,f)$ van s naar f en een pad van lengte $15 = \text{lab}(d) + w(d,b)$ van s naar b . Daar $15 > 14$ is, hoeft $\text{lab}(b)$ niet aangepast te worden; $\text{lab}(f)$ wordt verlaagd tot 12 (10). De kleinste labelwaarde is nu $\text{lab}(f)$ en dus wordt 12 de eindwaarde van dit label (11). Hiermee is $d(s,f)$ bepaald. Een passant hebben we ook de afstanden bepaald van s naar a , c , d en e .

Eventueel kunnen we nog verder gaan en ook $d(s,b)$ bepalen (zie figuur 3.3) (12)). Daarmee zijn dan alle afstanden vanuit s bepaald.

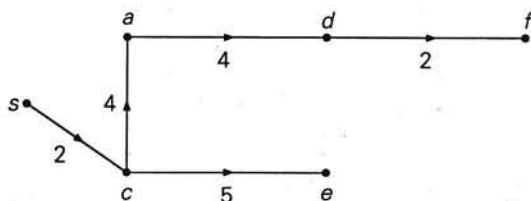
Het bijbehorende kortste pad van s naar f krijgen we door de takken te noteren die ervoor gezorgd hebben dat de labels hun eindwaarden kregen, *teruglopend vanuit f*

$\text{lab}(f)$ kreeg zijn eindwaarde door (d,f) , $\text{lab}(d)$ door (a,d) , $\text{lab}(a)$ door (c,a) en $\text{lab}(c)$ door (s,c) .

Een kortste pad van s naar f is dus (s,c) , (c,a) , (a,d) , (d,f) .

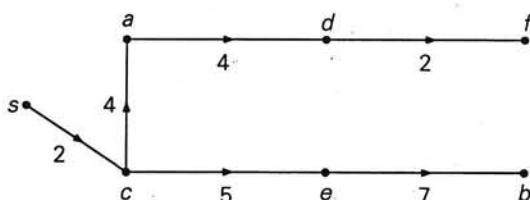
(Er is nog een pad van s naar f met lengte 12; dit loopt via c , e en d .)

Men kan ook tijdens het aanleggen van de tabel met labelwaarden elke keer de tak noteren die een label zijn eindwaarde gaf. Zo krijgt men een steeds aangroeiende verzameling takken waaruit men de kortste paden kan afleiden van s naar andere knopen. In ons voorbeeld vinden we zo figuur 3.4.



Figuur 3.4.

Als we stoppen nadat $\text{lab}(f)$ zijn eindwaarde heeft gekregen. Gaan we door totdat alle labels definitief zijn dan is het resultaat figuur 3.5.



Figuur 3.5.

Dit type graaf heet *afstandsboom*. Figuur 3.5 toont een volledige afstandsboom met wortel s . Figuur 3.4 stelt een partiële afstandsboom voor, ook met wortel s .

Opmerking

De kortste-pad-algoritme is zeer geschikt om in een computerprogramma te worden omgezet. Voor grote grafen (netwerken) zal men dat ook doen, omdat het 'met de hand' toepassen erg bewerkelijk wordt. Zeker als men *alle* afstanden in de graaf wil bepalen.

In de volgende paragraaf bespreken we een toepassing van de algoritme.

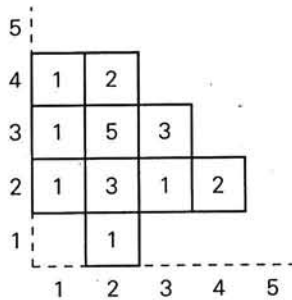
3.2. Optimale routes

Men kan de in § 3.1 besproken algoritme toepassen op het ontwerpen van optimale routes. Ook dit illustreren we aan de hand van een voorbeeld.

Door een woonwijk van een stedelijk gebied moet een nieuwe ontsluitingsroute worden aangelegd. De gemeentelijke autoriteiten eisen dat het aantal woningen die hiervoor gesloopt zullen worden zo klein mogelijk is.

Van de wijk wordt nu een ruwe topografische kaart gemaakt, met daarop aangegeven de relatieve woningdichtheden in verschillende delen van de wijk.

Figuur 3.6 laat hiervan een voorbeeld zien.

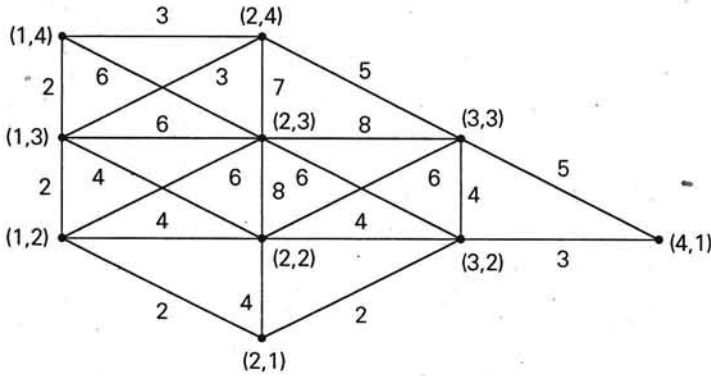


Figuur 3.6.

De kaart is opgedeeld in vierkante *cellen*, die corresponderen met in oppervlakte gelijke delen van de wijk. Het getal in een cel is een maat voor het aantal woningen in het betrokken gebied. Dit getal heet het *gewicht* van de cel. Zeg dat een getal n in cel c betekent dat er zich daar $100n$ woningen bevinden. Het geheel noemt men een *rooster*. De verschillende cellen geven we aan met coördinaten (zie figuur 3.6). Men gaat er van uit dat het aantal te slopen woningen binnen een cel evenredig is met de woningdichtheid in die cel, dus ook met het gewicht van die cel. Het is dus zaak een route te ontwerpen, zodanig dat de som van de gewichten van de cellen waar de route doorheen gaat minimaal is.

De route moet de wijk binnenkomen in cel (1,4) en weer verlaten via cel (4,2).

Bij het rooster construeren we nu een gelabelde graaf. De knopen zijn de cellen van het rooster. Twee knopen zijn verbonden door een tak dan en slechts dan als ze een grens of een hoekpunt gemeen hebben. Het gewicht van een tak is de som van de gewichten van de cellen die bij de knopen van die tak horen. Aldus representeert dit gewicht de sloopkosten voor dat stuk van de route dat door de aan elkaar grenzende cellen loopt, zeg van het middelpunt van de ene cel naar het middelpunt van de andere cel. We krijgen zo de graaf uit figuur 3.7.



Figuur 3.7.

Zoals men eenvoudig kan nagaan correspondeert een optimale route van cel s naar cel f in een rooster met een kortste pad van knoop s naar knoop f in de graaf, die bij dat rooster hoort. Immers, als een route loopt via de cellen $c_0 = s, c_1, c_2, \dots, c_k = f$, dan is het totale gewicht van die route

$$w(c_0) + w(c_1) + w(c_2) + \dots + w(c_k). \quad (3.4)$$

In de graaf is de lengte van het bijbehorende kortste pad gelijk aan

$$(w(c_0) + w(c_1)) + (w(c_1) + w(c_2)) + \dots + (w(c_{k-1}) + w(c_k)) = w(c_0) + 2[w(c_1) + w(c_2) + \dots + w(c_{k-1})] + w(c_k). \quad (3.5)$$

Omdat $w(c_0)$ en $w(c_k)$ zowel in de route als in het pad altijd meedoen, zal (3.4) minimaal zijn ten opzichte van alle routes van s naar f dan en slechts dan als (3.5) minimaal is ten opzichte van alle paden van s naar f . Anders gezegd, de routes in het rooster en in de graaf zijn tegelijk minimaal.

De optimale route in figuur 3.6 loopt via de cellen (1,4), (1,3), (1,2), (2,1), (3,2) en (4,2). Het is een taak voor de lezer om na te gaan, dat de kortste-pad-algoritme, toegepast op de graaf uit figuur 3.7 ook dit resultaat oplevert.

Opmerking

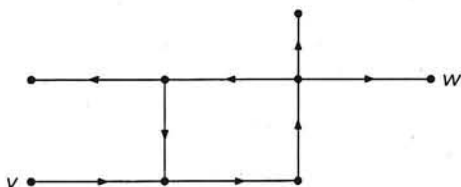
Vanzelfsprekend zal de kracht van de methode pas bij grotere grafen tot uiting komen. Zo kan men de kaart uit figuur 3.6 verfijnen in de zin dat men de wijk in een fijnmaziger net van cellen opdeelt. De algoritme geeft dan de optimale route in meer detail.

3.3. Kritieke-pad-methode

Soms gebeurt het dat men bij het oplossen van praktische problemen niet het kortste pad van een knoop naar een andere knoop in een graaf moet zoeken, maar juist het

langste pad. Ook hiervoor bestaat een eenvoudige methode, die bekend staat als de *kritieke-pad-methode*.

We onderstellen dat we weer een takgelabelde gerichte graaf hebben. Deze graaf zal *geen circuits* bevatten, daar anders paden net zo lang kunnen worden als men maar wil door een circuit maar vaak genoeg te doorlopen. Het voorbeeld in figuur 3.8 toont dit aan.



Figuur 3.8.

Van v naar w bestaan paden ter lengte 4, 8, 12, 16, 20,

Om de methode te beschrijven, gebruiken we de begrippen opvolger en voorganger. Is (v,w) een gerichte tak in een graaf, dan heet w de *opvolger* van v , terwijl v de *voorganger* van w is. De methode werkt ook weer met labels. Laat $k(v)$ het label van knoop v zijn, $v \in VG$.

Als men het langste pad van knoop s naar knoop f wil bepalen, begint men met $k(s) = 0$ te stellen. Dan bepaalt men de labelwaarde van die knopen a die alleen s als voorganger hebben volgens het voorschrift

$$k(a) = w(s,a). \quad (3.6)$$

Vervolgens neemt men steeds weer knopen b , waarvan *alle voorgangers* al een labelwaarde hebben en definiëren

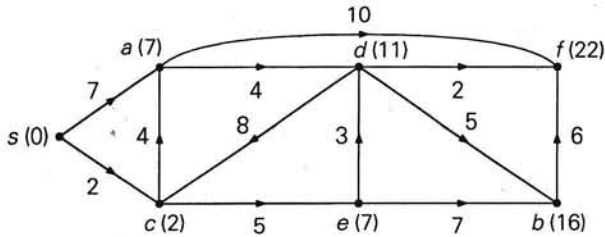
$$k(b) = \max_x \{k(x) + w(x,b)\}, \quad (3.7)$$

waarbij het maximum wordt genomen over alle knopen x die voorganger zijn van b . Het is duidelijk dat (3.6) een speciaal geval is van (3.7) en wel voor $b = a$ (bedenk $k(s) = 0$). Niet moeilijk is het om in te zien dat $k(b)$ de lengte voorstelt van het langste pad van s naar b . Er zijn eenvoudig geen langere paden mogelijk, omdat elk pad naar b loopt via een voorganger, en omdat alle voorgangers x van b al in aanmerking zijn genomen.

Men gaat door met het toepassen van (3.7) totdat $k(f)$ een waarde heeft gekregen. Hiermee is de lengte van het langste pad van s naar f dus bekend. Lukt het niet om $k(f)$ van een waarde te voorzien, dan bestaat er kennelijk geen enkel pad van s naar f .

Een formeel bewijs van de juistheid van de methode laten we achterwege.

We illustreren één en ander aan de hand van een voorbeeld. Hiervoor nemen we de graaf uit figuur 3.2 zonder tak (b,d) en met tak (c,d) in plaats van (d,c) , om alle circuits kwijt te raken.



Figuur 3.9.

Eerst stellen we $k(s) = 0$. Daarna worden achtereenvolgens $k(c) = 2$, $k(a) = 7$, $k(e) = 7$, $k(d) = 11$, $k(b) = 16$ en $k(f) = 22$. De labelwaarden zijn alle (tussen haakjes) achter de knopen geplaatst.

De lengte van het langste pad van s naar f is dus 22.

Het langste pad zelf (overigens kan er meer dan één 'langste pad' zijn) krijgen we als volgt.

We lopen terug vanuit f via een tak (x, f) met de eigenschap dat $w(x, f) = k(f) - k(x)$.

In figuur 3.8 is dat tak (b, f) , daar $w(b, f) = 6 = k(f) - k(b) = 22 - 16$. Vervolgens gaan we vanuit b verder terug naar d , omdat $w(d, b) = k(b) - k(d) = 16 - 11$. Vanuit d gaan we naar a , want $w(a, d) = k(d) - k(a) = 4$. Tenslotte bereiken we s vanuit a , daar $w(s, a) = k(a) - k(s) = 7$.

Het langste pad van s naar f (het kritieke pad) is dus

$$(s, a), (a, d), (d, b), (b, f).$$

De kritiek-pad-methode kan vooral toegepast worden bij *netwerkplanning*. Heel algemeen behelst dit het volgende. Gegeven is een doel dat bereikt moet worden. De realisatie ervan vereist een (vaak groot) aantal deeltaken, waarvoor beperkingen gelden in tijdsduur en in de volgorde waarin ze kunnen worden uitgevoerd. Voorbeelden zijn: het bouwen van een groot winkelcentrum, het lanceren van een raket naar de maan, het bouwen van een vliegtuig etc.

Een deeltaak wordt gewoonlijk een *activiteit* genoemd. We zullen een voorbeeld geven waarin de enige beperkingen zijn dat sommige activiteiten pas uitgevoerd kunnen worden nadat andere voltooid zijn.

Het betreft de bouw van een landhuis. In figuur 3.10 wordt een tabel gegeven met een overzicht van de verschillende activiteiten, de uitvoeringstijden van die activiteiten en hun onderlinge prioriteit.

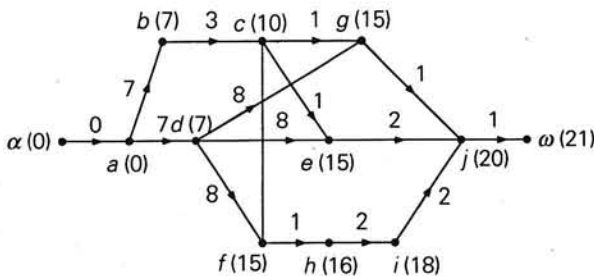
Bij dit project definiëren we nu een takgelabelde, gerichte graaf. De knopen zijn de activiteiten en er is een tak (v, w) van knoop v naar knoop w alleen dan als voorgeschreven is dat activiteit v *vooraf moet gaan* aan activiteit w . De aldus gedefinieerde graaf zal geen circuits bezitten, daar anders één of andere activiteit vooraf zou moeten gaan aan zichzelf.

	activiteit	tijdsduur in weken	voorafgaande activiteiten
a.	metselwerk	7	
b.	dakbetimmering	3	a
c.	dak	1	b
d.	sanitaire en elektrische installaties	8	a
e.	afwerking voorgevel	2	c,d
f.	ramen	1	c,d
g.	tegels en plavuizen	1	c,d
h.	plafonds	2	f
i.	schilderwerk buiten	2	h
j.	schilderwerk binnen	1	e,g,i

Figuur 3.10.

Aan de graaf voegen we nog twee extra knopen toe: een allereerste beginknoop α en een allerlaatste eindknoop ω . Deze knopen corresponderen met fictieve deeltaken: een begintak en een eindtak, beide met een tijdsduur 0. Dit is noodzakelijk, omdat er geen 'natuurlijke' begindeeltaak is en ook geen 'natuurlijke' eindeeltaak. Het huis moet gewoon af en daarom zal men ergens mee moeten beginnen. Knoop α zal daarom met een tak (α, x) verbonden worden aan alle knopen x die geen voorganger hebben. Knoop ω wordt verbonden via een tak (y, ω) met alle knopen y die geen opvolger hebben. Aan elke tak (v, w) wordt een gewicht toegevoegd gelijk aan de tijdsduur van activiteit v . Als deze tijdsduur verstreken is kan pas begonnen worden met activiteit w .

De bij figuur 3.10 horende graaf heeft de gedaante zoals afgebeeld in figuur 3.11.



Figuur 3.11.

Het werk begint op tijdstip 0. We willen graag een werkschema hebben dat de totale uitvoeringstijd minimaliseert. Nu kan een activiteit v niet beginnen voordat *alle* activiteiten die v als opvolger hebben zijn afgelopen. Het vroegste tijdstip t_v om activiteit v te starten is daarom gelijk aan de lengte $k(v)$ van het *langste* pad van α naar v . Dus is de minimale tijd t_ω waarin het hele project voltooid kan zijn gelijk aan de

lengte van het langste pad van α naar ω , dus gelijk aan $k(\omega)$.

In ons voorbeeld vinden we met de kritieke-pad-methode achtereenvolgens $k(\alpha) = 0$, $k(a) = 0$, $k(b) = 7$, $k(d) = 7$, $k(c) = 10$, $k(e) = 15$, $k(f) = 15$, $k(g) = 15$, $k(h) = 16$, $k(i) = 18$, $k(j) = 20$, $k(\omega) = 21$.

Het kritieke pad van d naar ω luidt:

$$(\alpha, a), (a, d), (d, f), (f, h), (h, i), (i, j), (j, \omega).$$

Gewoonlijk berekent men bij een *netwerkplanning* nog een aantal andere zaken.

Zo is het laatste tijdstip T_i waarop men met taak i kan beginnen om nog net het hele project op tijdstip t_ω af te hebben gelijk aan

$$T_i = t_\omega - k(i, \omega), \quad (3.8)$$

waarin $k(i, \omega)$ de lengte is van het langste pad van i naar ω .

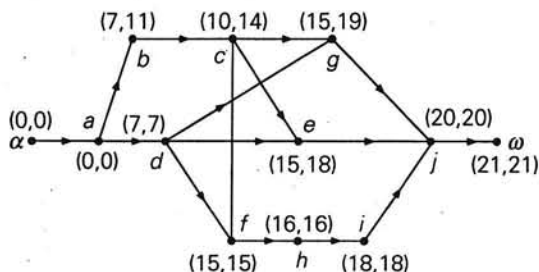
In figuur 3.11 vinden we $T_\omega = 21$, $T_j = 20$, $T_i = 18$, $T_h = 16$, $T_f = 15$, $T_e = 18$, $T_g = 19$, $T_c = 14$, $T_d = 7$, $T_b = 11$, $T_a = 0$, $T_\alpha = 0$.

De *speling* van taak i is het verschil tussen het vroegste tijdstip t_i en het laatste tijdstip T_i , waarop taak i moet worden begonnen om het hele project in minimale tijd te realiseren.

Voor de verschillende spelings vinden we $m_a = 0$, $m_b = 4$, $m_c = 4$, $m_d = 0$, $m_g = 4$, $m_e = 3$, $m_f = 0$, $m_h = 0$, $m_i = 0$, $m_j = 0$.

De activiteiten waarvan de speling 0 is zijn de *kritieke activiteiten* of *kritieke taken*. Als één ervan vertraagd wordt uitgevoerd zal de uitvoeringstijd van het hele project toenemen. De taken langs het kritieke pad zijn dus kritieke activiteiten.

Tenslotte geven we in figuur 3.12 de graaf nog eens, met bij elke taak het eerste en het laatste tijdstip voor het begin van het uitvoeren van die taak.



Figuur 3.12.

Opmerking

Men kan de hier besproken methode generaliseren voor netwerkplanningen met stringentere voorwaarden. Zo kan men bijvoorbeeld eisen dat activiteit x pas twee weken na activiteit y mag worden uitgevoerd, of dat z mag starten 1 week nadat w begonnen is, of dat s en t niet tegelijkertijd mogen worden uitgevoerd.

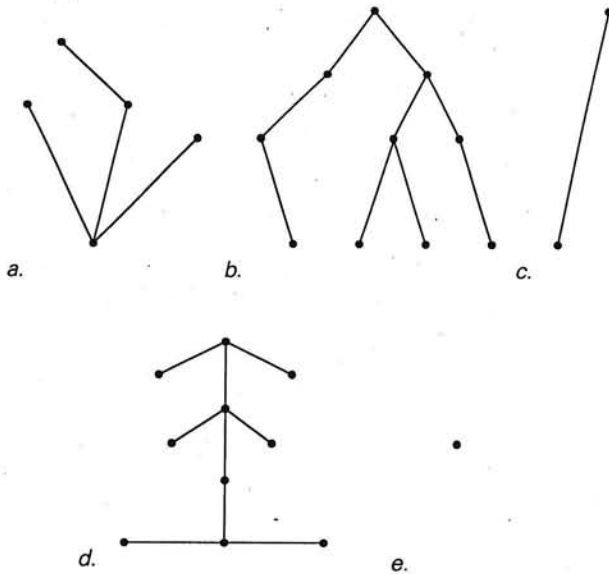
Hierop gaan we echter niet verder in. De aan te brengen variaties in de methode spreken echter vaak voor zichzelf; zie in dit verband ook vraagstuk 37.

Een zeer bijzondere variant van de methode is die waarbij niet de *knopen* maar de *takken* van een graaf de verschillende deelactiviteiten van een project voorstellen. Het is deze variant die op het practicum 'Netwerkplanning' wordt toegepast. Zie hiervoor verder vraagstuk 39.

4 Regelmatige en half-regelmatige veelvlakken

4.1. Formule van Euler

Een bijzonder type graaf is een samenhangende graaf waarin geen circuits voorkomen. Een dergelijke graaf wordt een *boom* genoemd. In figuur 4.1 zijn een aantal bomen afgebeeld.



Figuur 4.1.

Als we uitgaan van één vaste beginknoop en vervolgens de hele boom tekenen, dan zorgt elke tak voor één nieuwe knoop. Als we het aantal knopen van de boom n noemen en het aantal takken m , dan geldt dus

$$n = m + 1. \quad (4.1)$$

Bomen spelen in allerlei theorieën een grote rol. Ze treden ook op in het bewijs dat wij zullen geven van de formule van Euler, een formule die een verband legt tussen het aantal knopen, het aantal takken en het aantal gebieden van een kaart $M(V, E, F)$. De graaf G die ten grondslag ligt aan M moet natuurlijk planair zijn, daar anders M niet gedefinieerd is, maar behoeft verder aan géén enkele voorwaarde te voldoen. Zo mag G best *lussen* of *meervoudige takken* bezitten.

Stelling 4.1

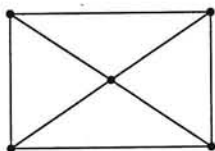
Als n het aantal knopen voorstelt van de kaart $M(V, E, F)$, m het aantal takken en r het aantal gebieden, dan geldt

$$n - m + r = 2.$$

Bewijs

Stel $G = (V, E)$ is een boom, dan geldt $n = m + 1$ volgens (4.1). Het aantal gebieden van M is gelijk aan 1 in dit geval. Dus is $n - m + r = 1 + 1 = 2$.

Stel $G = (V, E)$ is géén boom. Dan bevat G dus circuits. Als we een tak van een circuit weglaten wordt het aantal takken van M vanzelfsprekend met één verminderd, maar ook het aantal gebieden van M wordt één kleiner, omdat de twee gebieden die door de tak begrensd werden nu tot één gebied worden verenigd. We concluderen dat de waarde van de uitdrukking $n - m + r$ door het weglaten van een tak uit een circuit *niet* verandert. We gaan door met het weglaten van takken uit circuits totdat er geen circuits meer zijn. De oorspronkelijke graaf G is dan veranderd in een boom. Voor de bijbehorende kaart geldt zoals we gezien hebben $m - n + r = 2$. Dus geldt dit ook voor de gegeven kaart M . \square

Voorbeeld 4.1

Figuur 4.2.

Het aantal knopen in bovenstaande graaf is 5, het aantal takken is 8 en het aantal gebieden van de bijbehorende kaart is 5 (let op het buitengebied!)

Dus is $n - m + r = 5 - 8 + 5 = 2$.

Voorbeeld 4.2

Met behulp van Stelling 4.1 kunnen we een tweede bewijs geven voor het niet-planair zijn van de graaf K_5 (zie ook paragraaf 2.1).

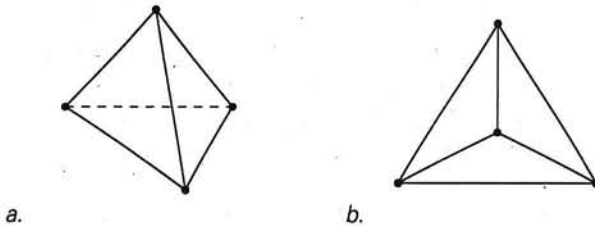
Stel dat K_5 wél planair is. Dan hoort er bij een planaire versie van K_5 een kaart M met 5 knopen en 10 takken. Uit Stelling 4.1 volgt dan dat $r = 7$. Nu heeft K_5 géén lussen en ook géén meervoudige takken. Dus wordt elk circuit begrensd door minstens 3 takken, ofwel $\rho^*(f) > 3$, voor alle $f \in F$. Maar dan is $\sum \rho^*(f) > 7 \times 3 = 21$. Echter moet volgens Stelling 2.5 gelden $\sum \rho^*(f) = 2 \times 10 = 20$. Dus hebben we een tegenspraak en K_5 kan niet planair zijn.

Een soortgelijke redenering kan men houden om aan te tonen dat $K_{3,3}$ niet planair is. Probeer dit zelf.

4.2. Regelmatige veelvlakken

We kunnen de formule van Euler gebruiken om alle mogelijke *regelmatige veelvlakken*, ook wel *Platonische lichamen* genoemd, te karakteriseren. Dit zijn drie-dimensionale lichamen begrensd door regelmatige veelhoeken; al deze veelhoeken zijn congruent en alle hoeken die aangrenzende veelhoeken met elkaar maken zijn ook gelijk.

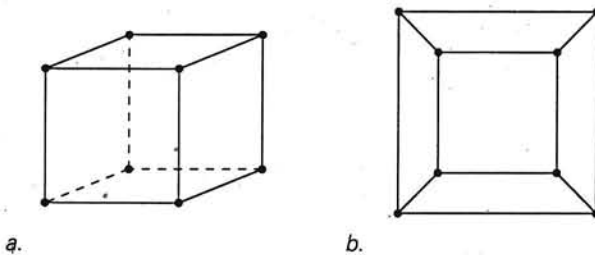
In figuur 4.3a is een regelmatig viervlak (*tetrahedron*) afgebeeld, alsmede een vlakke voorstelling van het 'framework' van dit viervlak de hoekpunten en de verbindende ribben (figuur 4.3b).



Figuur 4.3.

Figuur 4.3b is als het ware een verticale projectie van het viervlak vanuit de top op het grondvlak. We kunnen deze figuur opvatten als een reguliere planaire graaf van valentie 3. In § 2.2 is betoogd dat we een planaire graaf ook op een boloppervlak kunnen afbeelden. Voor de graaf van het tetrahedron is dat vrij eenvoudig te doen. Breng een bol aan door de vier hoekpunten van het viervlak, zo dat het middelpunt samenvalt met het zwaartepunt van het viervlak. De graaf uit figuur 4.3b volgt dan door in het deel van het boloppervlak corresponderend met het grondvlak een gat te knippen en het resterende boloppervlak vlak uit te strijken. Aldus komt met het grondvlak van het viervlak het buitengebied van figuur 4.3b overeen. Vanwege dit verband worden gebieden ook zijvlakken of zijden genoemd (zie § 2.2).

Op analoge wijze beeldt figuur 4.4 een regelmatig zesvlak (*hexahedron* of *kubus*) af.



Figuur 4.4.

De vraag is welke andere regelmatige veelvlakken er mogelijk zijn. We zullen een onderzoek instellen naar de grafen die ermee corresponderen.

Laat p het aantal takken zijn die de begrenzing vormen van een gebied, of anders gezegd, stel dat de grensvlakken van het veelvlak congruente p -hoeken zijn. Laat verder het aantal gebieden die elkaar ontmoeten in een hoekpunt gelijk zijn aan q . Er geldt dan dat $p \geq 3$ en $q \geq 3$, daar er anders niet een echt ruimtelijke veelvlak bij hoort.

Stelling 2.5 levert onmiddellijk $2m = pr$. Elke tak is incident met 2 knopen; m takken zijn incident met $2m$ knopen. In elke knoop echter komen q zijvlakken samen en dus ook q takken. Dus moet gelden $2m = nq$.

Uit de formule van Euler volgt nu

$$0 < 2 = n - m + r = \frac{2m}{q} - m + \frac{2m}{p} = m \frac{2p - pq + 2q}{pq} \quad (4.2)$$

Omdat m, p en $q > 0$ zijn, volgt uit (4.2)

$$2p - pq + 2q > 0,$$

ofwel

$$pq - 2p - 2q + 4 < 4$$

en dus

$$(p-2)(q-2) < 4. \quad (4.3)$$

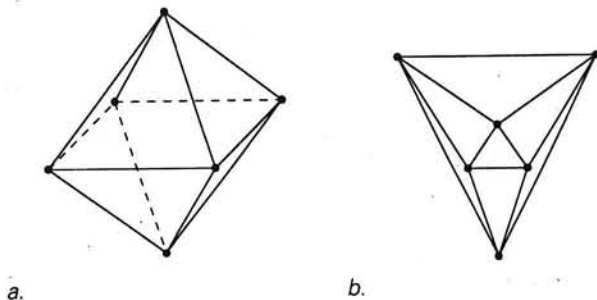
Met $p \geq 3, q \geq 3$ volgt ook nog

$$p-2 \geq 1, q-2 \geq 1. \quad (4.4)$$

Combineren van (4.3) en (4.4) levert de volgende vijf gevallen.

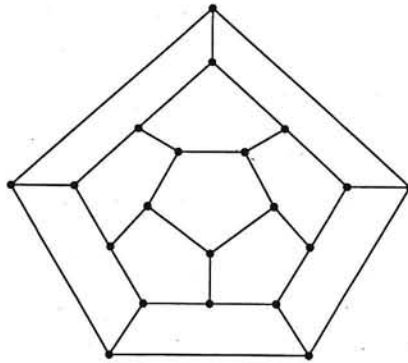
- | | | |
|-------|----------------|-----------------|
| (i) | $p = 3, q = 3$ | (tetrahedron); |
| (ii) | $p = 4, q = 3$ | (kubus); |
| (iii) | $p = 3, q = 4$ | (octahedron); |
| (iv) | $p = 5, q = 3$ | (dodecahedron); |
| (v) | $p = 3, q = 5$ | (icosahedron). |

In figuur 4.5 is het regelmatige achthvlak of octahedron getekend, tezamen met de bijbehorende graaf.

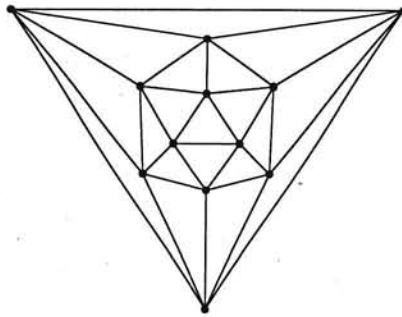


Figuur 4.5.

Van het regelmatig twaalfvlak en het regelmatig twintigvlak zijn alleen de grafen getekend (zie figuur 4.6 en figuur 4.7).



Figuur 4.6.



Figuur 4.7.

Het dodecahedron en icosahedron zelf kan men ontstaan denken door de knopen van de respectievelijke grafen op een boloppervlak aan te brengen en alle vijfhoeken, respectievelijk alle driehoeken even groot te maken.

Opmerking

Strikt genomen hebben we nog niet het bestaan van de veelvlakken zelf aangetoond, maar alleen van de bijbehorende grafen.

4.3. Reguliere kaarten

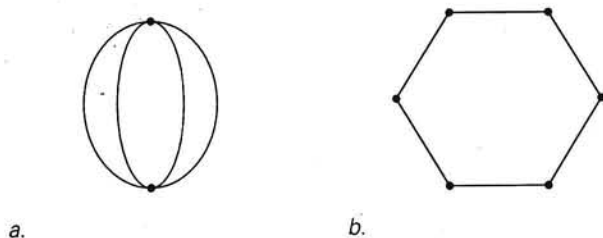
De bij de vijf regelmatige veelvlakken horende grafen (zie 4.2) leggen in het platte vlak kaarten vast. Deze kaarten zijn voorbeelden van *reguliere kaarten* waarvan we nu de definitie geven.

Definitie 4.2

Een reguliere kaart $M(V, E, F)$ is een kaart die zowel knoopregulier als gebiedsregulier is.

Deze definitie komt erop neer dat de valenties $\rho(v)$ en $\rho^*(f)$ constant zijn op V respectievelijk op F . Ga na dat dit inderdaad het geval is voor de vijf kaarten vastgelegd door de vijf grafen in § 4.2 (Let hierbij ook op de buitengebieden.)

We geven in figuur 4.8 nog een paar reguliere kaarten



Figuur 4.8.

In figuur 4.8a is $\rho(v) = 4$, $\forall v \in V$ en $\rho^*(f) = 2$, $\forall f \in F$, terwijl in figuur 4.8b deze valenties gelijk zijn aan 2 resp. 6. We merken nog op dat de rechter graaf een circuitgraaf (C_6) is en de linkergraaf de duale van een circuitgraaf (C_4).

Stelling 4.3

De enige niet-triviale reguliere kaarten zijn de Platonische kaarten, de kaarten behorende bij de circuits C_n en bij de duale circuits C_n^* ($n \geq 2$).

Bewijs

Voor de constante waarde $\rho(v)$, $v \in V$, schrijven we ρ en voor de constante waarde $\rho^*(f)$, $f \in F$ schrijven we analoog ρ^* . De getallen ρ en ρ^* zijn dezelfde als de getallen q en p in relatie (4.2) en in de daarna volgende formules. Wanneer we nu toelaten $\rho \geq 2$ en $\rho^* \geq 2$ (we hebben niet meer noodzakelijk met grafen te maken die verband houden met ruimtelijke veelvlakken), dan kunnen we de hele redenering overnemen die leidde tot een opsomming van de regelmatige veelvlakken. Behalve de aldaar genoemde waarden voor p en q vinden we nu ook nog $q = \rho = 2$, $p = \rho^* \geq 2$ en $p = \rho^* = 2$, $q = \rho \geq 2$. Met $\rho = 2$ correspondeert een circuitgraaf en met $\rho^* = 2$ correspondeert de duale graaf van een circuitgraaf. \square

Voorbeeld 4.3

Voor de circuitgraaf C_6 in figuur 4.8b geldt $\rho = 2$ en $\rho^* = 6$.

Voor de graaf C_4^* in figuur 4.8a is $\rho = 4$ en $\rho^* = 2$.

We geven in figuur 4.9 nog een overzicht van de verschillende mogelijke reguliere kaarten.

p	p^*	m	n	r
2	p	p	p	2
q	2	q	2	q
3	3	6	4	4
3	4	12	8	6
3	5	30	20	12
4	3	12	6	8
5	3	30	12	20

Figuur 4.9.

Opmerking

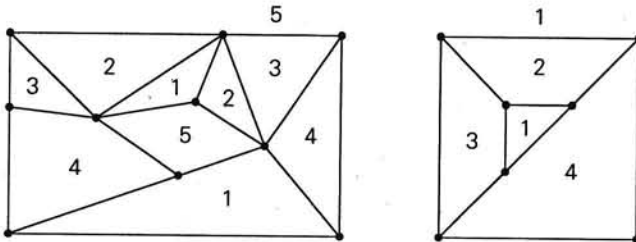
Op grond van zeer algemene overwegingen is onmiddellijk duidelijk dat de duale kaart van een reguliere kaart eveneens regulier moet zijn. Daar we in Stelling 4.3 alle reguliere kaarten hebben opgesomd moet de duale van een Platonische kaart zelf ook wel een Platonische kaart zijn.

Ga voor uzelf na welke Platonische kaarten dual aan elkaar zijn.

4.4. Vlakkleuringen

In deze paragraaf houden we ons bezig met het kleuren van een veelvlak ofwel, wat daarmee equivalent is, met het kleuren van een kaart.

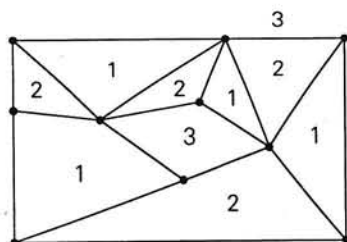
We stellen ons als doel om alle gebieden van een kaart te kleuren, elk gebied met één kleur en zodanig dat gebieden met een gemeenschappelijke grens verschillend gekleurd zijn (vergelijk het kleuren van een landkaart).

Voorbeeld 4.4

Figuur 4.10.

De linker graaf is met 5 kleuren gekleurd en de rechter graaf met 4. Het is duidelijk dat deze laatste graaf niet met minder dan 4 kleuren gekleurd kan worden daar de binnengebieden elkaar wederzijds begrenzen.

De linker graaf echter kan wel met minder kleuren gekleurd worden, zoals de volgende kleuring laat zien.



Figuur 4.11.

Men zou misschien verwachten dat men steeds meer kleuren nodig heeft, naarmate het aantal gebieden van een kaart groter wordt of naarmate de structuur gecompliceerder is. Dit is echter niet zo. We zullen in deze paragraaf aantonen dat 6 kleuren zeker voldoende zijn om *elke* kaart te kleuren.

Voor het bewijs voeren we eerst in de gemiddelde valentie van een knoop

$$\bar{\rho} = \frac{1}{n} \sum_v \rho(v). \quad (4.5)$$

en de gemiddelde valentie van een gebied

$$\bar{\rho}^* = \frac{1}{r} \sum_f \rho^*(f). \quad (4.6)$$

Uit Stelling 1.4 en 2.5 volgt

$$\bar{\rho} = \frac{2m}{n}, \quad \bar{\rho}^* = \frac{2m}{r}. \quad (4.7)$$

Substitutie van n en r uit (4.7) in de formule van Euler levert

$$\frac{2m}{\bar{\rho}} - m + \frac{2m}{\bar{\rho}^*} = 2,$$

ofwel

$$\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}^*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}. \quad (4.8)$$

Stelling 4.4

Elke kaart heeft tenminste één gebied dat door niet meer dan vijf andere gebieden wordt begrensd.

Bewijs

Laat $M = (V, E, F)$ een kaart zijn. Gemakshalve nemen we aan dat M geen knopen bevat van valentie 1 of 2, omdat die voor het kleuringsprobleem van geen enkel belang zijn. Dus is $\rho(v) \geq 3$ voor alle $v \in V$ en bijgevolg is ook $\bar{\rho} \geq 3$. Met (4.8) krijgen we nu

$$\frac{1}{3} \geq \frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{\rho^*},$$

en dus

$$\frac{1}{\rho^*} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{m} > \frac{1}{6}.$$

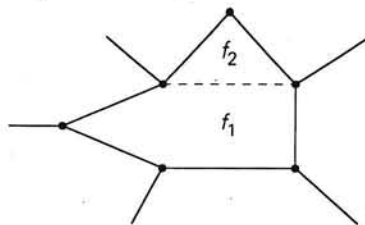
Dit betekent dat $\bar{\rho}^* < 6$. Maar dan moet er minstens één gebied f bestaan met $\rho^*(f) < 6$. \square

Stelling 4.5

Elke kaart kan met hoogstens zes kleuren gekleurd worden.

Bewijs

Als een kaart 6 of minder gebieden heeft is de stelling natuurlijk waar. Stel een kaart heeft 7 gebieden. Op grond van Stelling 4.4 is er minstens één gebied, zeg f_1 , dat aan minder dan 6 andere gebieden grenst. Laat f_2 één van die andere gebieden zijn. Verwijder de grens tussen f_1 en f_2 . De kaart die dan ontstaat heeft 6 gebieden, met $f' = f_1 \cup f_2$, en kan dus met hoogstens 6 kleuren gekleurd worden. We herstellen de grens tussen f_1 en f_2 nu weer en geven de kleur van f' aan f_2 .



Figuur. 4.12.

Omdat f_1 door hoogstens 5 andere gebieden wordt begrensd is er zeker 1 kleur te vinden waarmee f_1 gekleurd kan worden. Dus een kaart met 7 gebieden kan ook met hoogstens 6 kleuren gekleurd worden.

Vervolgens beschouwen we een kaart met 8 gebieden, waarvoor we dezelfde redenering kunnen houden, etc. Op deze wijze blijkt dat een kaart met een willekeurig aantal gebieden met hoogstens 6 kleuren gekleurd kan worden. \square

Opmerking

Bovenstaand bewijs is een verkaptte vorm van een *inductiebewijs*. Men neemt aan dat de stelling geldt voor een zekere waarde van r (= aantal gebieden) en bewijst dat de stelling dan ook juist is voor $r + 1$. Omdat de stelling zeker geldt voor $r = 6$ is de stelling dus juist voor alle $r \geq 6$. (Voor $r < 6$ is de stelling natuurlijk ook juist.)

Het blijkt dat men de bovengrens zes uit Stelling 4.5 nog kan verscherpen. In de praktijk bleek dat *elke* kaart met hoogstens vier kleuren gekleurd kon worden. Ongeveer honderd jaar lang is dit een vermoeden geweest, maar men slaagde er niet in een volledig bewijs te leveren. Het was (en is) één van de beroemdste wiskundige

problemen: The Four Color Conjecture. Pas in 1976 slaagde men erin dit vermoeden, met behulp van een computerprogramma en honderden uren rekentijd, definitief te bewijzen.

Behalve voor het kleuren van kaarten zouden de besproken resultaten ook van toepassing kunnen zijn bij het aanbrengen van bepaalde materialen op vlakke of ruimtelijke patronen, ter versiering of ter bescherming. In verband met kostenfactoren kan het van belang zijn het aantal verschillende materialen zo klein mogelijk te houden.

4.5. Half-regelmatige veelvlakken¹

Als generalisatie van de in § 4.2 besproken regelmatige veelvlakken definiëren we nu het begrip *half-regelmatig veelvlak*. Hieronder verstaan we een driedimensionaal lichaam begrensd door regelmatige veelhoeken. Echter hoeven deze regelmatige veelhoeken niet alle congruent te zijn zoals bij een regelmatig veelvlak. Wel moet het aantal k -hoeken, $k = 3, 4, \dots$, die samenkomen in een hoekpunt constant zijn voor alle hoekpunten. Anders gezegd, in elk hoekpunt komt een zelfde aantal driehoeken samen, een zelfde aantal vierhoeken, etc.

Evenals voor de regelmatige veelvlakken gaan we voor de classificatie van deze ruimtelijke lichamen over op de graaf (of beter de kaart die hierbij hoort) gevormd door de hoekpunten en de ribben.

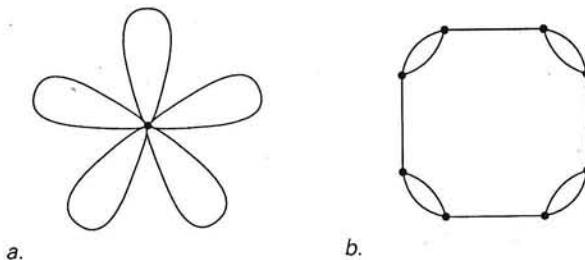
We definiëren daarom een generalisatie van een reguliere kaart (zie Definitie 4.2).

Definitie 4.6

Een half-reguliere kaart $M(V, E, F)$ is een kaart die knoopregulier is en zodanig dat het aantal gebieden f met valentie $\rho^*(f) = k$ die in een knoop $v \in V$ samenkomen, constant is op V , voor alle k .

Vanzelfsprekend zijn reguliere kaarten ook half-regulier. In het volgende voorbeeld laten we een aantal half-reguliere kaarten zien, die niet regulier zijn.

Voorbeeld 4.5



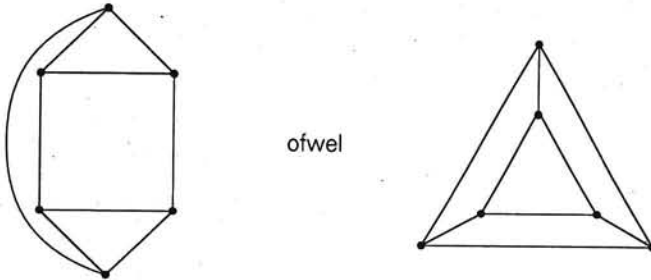
Figuur 4.13.

¹ Zie [1] voor een uitgebreider commentaar bij de afleidingen in deze paragraaf.

In de kaart bij graaf *a* komen in elke knoop (er is er maar één!) 5 gebieden samen met $\rho^*(f) = 1$ en 1 gebied met $\rho^*(f) = 5$.

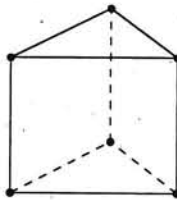
In *b* komen in elke knoop 2 gebieden samen met $\rho^*(f) = 8$ en 1 gebied met $\rho^*(f) = 2$.

Voorbeeld 4.6



Figuur 4.14.

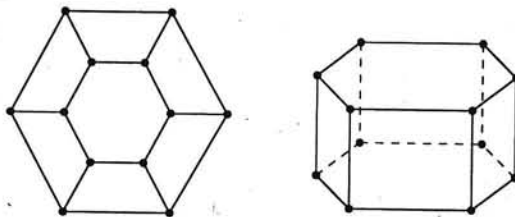
In elke knoop komen 2 gebieden samen met valentie $\rho^*(f) = 4$ en 1 gebied met $\rho^*(f) = 3$. De graaf bij deze half-reguliere kaart kan opgevat worden als het 'framework' van een regelmatig driezijdig prisma (zie figuur 4.15).



Figuur 4.15.

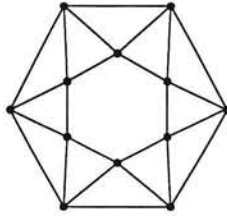
Volgens de gegeven definities is dit een half-regelmatig veelvlak.

Voorbeeld 4.7



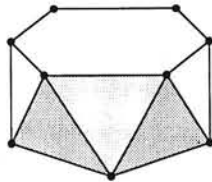
Figuur 4.16.

Bovenstaande graaf hoort bij een hexagonaal prisma (rechts afgebeeld). In elke knoop komen 2 gebieden samen van valentie 4 en 1 gebied van valentie 6. De corresponderende kaart is dus half-regulier.

Voorbeeld 4.8

Figuur 4.17.

Deze graaf bestaat uit 2 regelmatige zeshoeken die 30° t.o.v. elkaar gedraaid zijn. Uit elke knoop van de buitenste zeshoek gaan 2 takken naar de dichtsbijzijnde knopen van de binnenste zeshoek. De graaf kan gezien worden als het framework van een zogenaamde hexagonale trommel.



Figuur 4.18.

De *polygonale prisma's* (Voorbeelden 4.6 en 4.7) vormen een oneindige familie van half-regelmatige veelvlakken. De *polygonale trommels* (zie Voorbeeld 4.8) vormen ook een oneindige familie van half-regelmatige veelvlakken.

Behalve deze families zijn er nog 13 andere half-regelmatige veelvlakken, die bekend staan als de *Archimedische lichamen*.

Om het bestaan van deze lichamen aan te tonen gaan we na welke echt half-reguliere kaarten er mogelijk zijn. We volgen hierbij de redenering in 9.3 van [1]. Op de voorhand sluiten we kaarten uit waarvan de graaf niet enkelvoudig is (zie Voorbeeld 4.5), omdat daarmee niet een echt ruimtelijk veelvlak kan corresponderen. Dit houdt in dat $\rho^*(f) \geq 3$, $\forall f \in F$ en dus ook $\rho^* > 3$. Uit formule (4.8) volgt dan

$$\frac{1}{\rho} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{m} > \frac{1}{6},$$

dus $\rho < 6$ voor alle knopen.

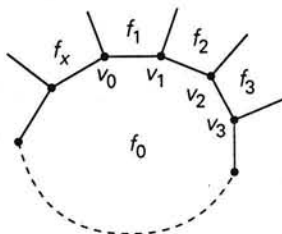
Bedenk hierbij dat de knoopvalentie ρ dezelfde is voor *alle* knopen (gevolg van de definitie van half-reguliere kaarten) in tegenstelling tot ρ^* die verschillende waarden heeft voor een *echt* half-reguliere kaart.

De gevallen $\rho = 0, 1$ en 2 leiden niet tot half-regelmatige veelvlakken. Dus blijven over de gevallen $\rho = 3$, $\rho = 4$ en $\rho = 5$.

A. $\rho = 3$

In één knoop komen nu 3 gebieden samen. We stellen de valenties van deze gebieden gelijk aan x , y en z .

Veronderstel dat x oneven is en laat f_0 een gebied zijn met $\rho^*(f_0) = x$.



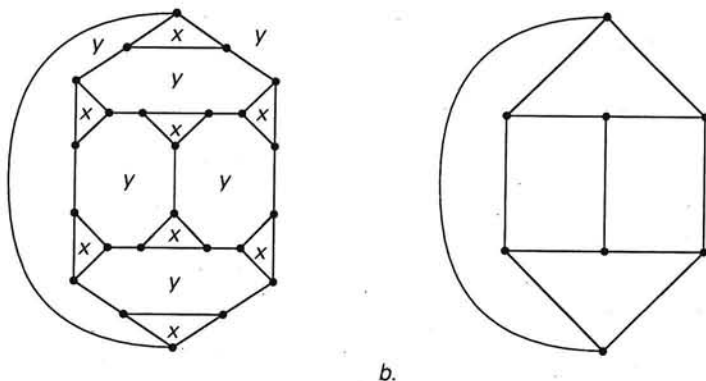
Figuur 4.19.

In figuur 4.19 zijn f_0 , f_1 en f_x de gebieden die in v_0 samenkomen. Zonder beperking van de algemeenheid nemen we aan dat $\rho^*(f_1) = y$ en $\rho^*(f_x) = z$. Hieruit volgt dat $\rho^*(f_2) = z$, $\rho^*(f_3) = y$, ..., $\rho^*(f_x) = y$.

Dit kan alleen maar als $y = z$. Een gevolg is dat als de valenties x , y en z alle drie verschillend zijn, ze ook alle drie even zijn.

A₁.

In het geval dat $y = z$, $x \neq y$, kunnen we bovenstaande redenering ook houden voor een gebied met $\rho^*(f_0) = y$. Dit leidt dan geheel analoog tot de conclusie dat y even is. Een gebied van valentie x grenst alleen maar aan gebieden van valentie y . In figuur 4.20a is hiervan een voorbeeld getekend.



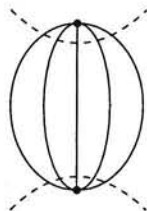
Figuur 4.20.

Wanneer we in zo'n kaart elk gebied met valentie x tot een knoop laten inkrimpen (zie figuur 4.20b) dan zal er dus een reguliere kaart ontstaan, met een knoopvalentie gelijk aan x en een gebiedvalentie gelijk aan $y/2$ (bedenk dat y in dit geval altijd even is).

We kunnen omgekeerd elke half-reguliere kaart met $\rho = 3$ en precies twee verschillende gebiedvalenties ontstaan denken uit een reguliere kaart, door de hoeken 'af te knotten'. In feite is de graaf in figuur 4.20b de kubusgraaf en die in figuur 4.20a de

graaf die hoort bij de afgeknotte kubus.

Gaan we uit van de reguliere kaart bestaande uit 2 knopen en m takken, dan ontstaat door afknotten het m -polygonale prisma (Voorbeelden 4.6 en 4.7). De enige andere reguliere kaart die niet met een Platonisch lichaam is verbonden is de kaart behorend bij de circuitgraaf C_m (zie Stelling 4.3). Knotten we C_m af, dan ontstaat een half-reguliere kaart waarvan Voorbeeld 4.5b een illustratie geeft.



Figuur 4.21.

Tenslotte kunnen we de vijf Platonische figuren afknotten; figuur 4.13 gaf hiervan een voorbeeld. De half-reguliere kaarten die zo ontstaan geven aanleiding tot de Archimedische lichamen a t/m e in figuur 4.26.

A_2 .

Nu beschouwen we het geval $x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$.

Laat X , Y en Z de deelverzamelingen van F zijn, waarop ρ^* resp. de waarde x , y en z aanneemt. Voor de aantallen gebieden in X , Y en Z geldt

$$|X| + |Y| + |Z| = r. \quad (4.9)$$

In elke knoop komt precies één gebied van valentie x samen, zodat $|X| = n/x$. Analoog hebben we $|Y| = n/y$ en $|Z| = n/z$.

Substitutie van één en ander in formule (4.9) levert

$$r = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) n. \quad (4.10)$$

Uit Stelling 1.4 volgt nog

$$m = \frac{1}{2} \rho n = \frac{3}{2} n. \quad (4.11)$$

Substitutie van (4.10) en (4.11) in Euler's formule (Stelling 4.1) geeft dan

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} + \frac{2}{n}. \quad (4.12)$$

Zonder de algemeenheid te beperken mogen we aannemen dat de even getallen x , y en z voldoen aan $3 < x < y < z$.

Als $x \neq 4$ is, dan zouden we hebben $x \geq 6$, $y \geq 8$ en $z \geq 10$, en dus

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{47}{120} < \frac{1}{2},$$

hetgeen in strijd is met (4.12). Dus is $x = 4$.

Als $y \neq 6$ is, dan zou

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} = \frac{19}{40} < \frac{1}{2},$$

hetgeen ook weer met (4.12) in tegenspraak is.

Dus is $y = 6$.

Als $z \geq 12$ is, dan zou gelden

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2},$$

wat alweer tegenspraak oplevert met (4.12).

Dus is $z = 8$ of $z = 10$.

Elk van deze twee mogelijkheden leidt tot een half-regelmatig veelvlak, waarvan we hieronder de specificaties geven

x	y	z	n	m	r	$ X $	$ Y $	$ Z $
4	6	8	48	72	26	12	8	6
4	6	10	120	180	62	30	20	12

Figuur 4.22.

De veelvlakken zelf zijn geschetst in figuur 4.26f en h.

B. $\rho = 4$

Laten x, y, z en w de valenties zijn van de gebieden die in één knoop samenkomen. Veronderstel $3 \leq x \leq y \leq z \leq w$.

Als x, y, z en w alle verschillend zijn kunnen we weer afleiden (zie ook A), dat $|X| = n/x$, $|Y| = n/y$, $|Z| = n/z$, $|W| = n/w$, en geheel analoog aan (4.10)

$$r = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \right) n. \quad (4.13)$$

Als $x = y$ en x, z en w alle drie verschillend zijn geldt $|X| = 2n/x$, $|Z| = n/z$, $|W| = n/w$ en

$$r = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \right) n. \quad (4.14)$$

Formule (4.14) laat zich lezen als een bijzonder geval van (4.13), en wel voor $x = y$. Zonder verder bewijs nemen we aan dat (4.13) in alle gevallen geldt.

Analoog aan (4.11) hebben we nu

$$m = \frac{1}{2} \rho n = 2n. \quad (4.15)$$

Substitutie van (4.13) en (4.15) in Euler's formule levert

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} = 1 + \frac{2}{n} \quad (4.16)$$

(vergelijk (4.12)).

Als $x \geq 4$ is, dan is ook $y \geq 4$ en $z \geq 4$, terwijl $w \geq 5$, daar er voor $x = y = z = w = 4$ een reguliere kaart zou ontstaan.

Echter is dan

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} < 1,$$

hetgeen in strijd is met (4.16). Dus is $x = 3$.

Als x, y, z en w alle vier verschillend zijn, dan is

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} < 1,$$

en alweer in tegenspraak met (4.16). Dus minstens twee van de vier valenties zijn gelijk.

Een mogelijkheid is bijvoorbeeld $x = 3, y = 4, z = 4, w = 4$, omdat

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} > 1.$$

Met (4.16) volgt dan $n = 24$ en met (4.15) $m = 48$, terwijl de formule van Euler geeft $r = 26$.

De waarden $x = 3, y = 4, z = 4, w = 5$ geven op soortgelijke wijze $n = 60, m = 120, r = 62$. De waarden $x = 3, y = 4, z = 4, w > 5$ geven weer tegenspraak met (4.16).

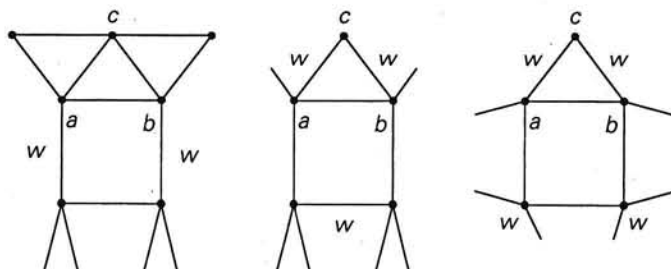
In figuur 4.16 zijn alle mogelijkheden getabuleerd.

	x	y	z	w	n	m	r	$ \bar{X} $	$ \bar{Y} $	$ \bar{Z} $
1.	3	4	4	4	24	48	26	8	18	—
2.	3	4	4	5	60	120	62	20	30	12
3.	3	3	4	4	12	24	14	8	6	—
4.	3	3	5	5	30	60	32	20	12	—
5.	3	3	3	k	$2k$	$4k$	$2k+2$	$2k$	2	—

Figuur 4.23.

In deze tabel betekent \bar{X} de verzameling gebieden met de kleinste valentie, dus $\bar{X} = X$ als $x < y$, $\bar{X} = X \cup Y$ als $x = y < z$ en $\bar{X} = X \cup Y \cup Z$ als $x = y = z$. Analoog zijn \bar{Y} en \bar{Z} gedefinieerd.

De in figuur 4.23 vermelde gevallen zijn alle niet in tegenspraak met de voorafgaande formules. Er zijn nog een aantal gevallen die niet in de tabel genoemd worden, namelijk $x = 3, y = 3, z = 4$ en $4 < w < 12$. Echter is er dan geen half-reguliere kaart bij te vinden, zoals we nu zullen aantonen. We zouden dan één van de volgende deelgrafon moeten hebben met betrekking tot twee naburige knopen a en b .



Figuur 4.24.

Beschouw de linker deelgraaf.

In knoop c zouden 3 gebieden met valentie 3 samenkomen, hetgeen niet mag. In de andere twee deelgrafen zouden 2 gebieden van valentie w in c samenkomen; dit mag ook niet.

De vijf gevallen van figuur 4.23 leveren alle een half-reguliere kaart, sommige zelfs meer dan één. In elk van de vijf gevallen bestaat er steeds echter maar één half-regelmatig veelvlak.

Geval 5 geeft aanleiding tot de k -polygonale trommels (zie Voorbeeld 4.8) De gevallen 1, 2, 3 en 4 corresponderen met de figuren in figuur 4.26g, j, k en m.

Voor een wat uitgebreidere discussie van deze gevallen verwijzen we naar [1, p.73, 74].

C. $\rho = 5$

De valenties van de vijf gebieden die in een knoop samenkomen noemen we x, y, z, w, t met $x < y < z < w < t$. Geheel analoog aan B en A vindt men hier

$$m = \frac{5}{2}n, \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{t} = \frac{3}{2} + \frac{2}{n} \quad (4.18)$$

Stel dat van de vijf valenties er g groter zijn dan 3, dan geldt

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w} + \frac{1}{t} \leq \frac{5-g}{3} + \frac{g}{4} = \frac{20-g}{12}.$$

Met (4.18) hebben we dan $\frac{3}{2} < \frac{20-g}{12}$ ofwel $g < 2$. Dus is $x = y = z = w = 3$ en $t > 3$.

Als nu X de verzameling van alle gebieden van valentie 3 voorstelt en Y de verzameling van gebieden van valentie t , dan geven (4.18) en (4.17)

$$n = \frac{12t}{6-t}, \quad m = \frac{30t}{6-t}.$$

Verder is

$$|X| = \frac{4}{3}n = \frac{16t}{6-t} \quad \text{en} \quad |Y| = \frac{1}{t}n = \frac{12}{6-t}.$$

Daar $n > 0$ is, is $t = 4$ of $t = 5$.

Figuur 4.25 geeft een overzicht van beide gevallen.

t	n	m	r	$ X $	$ Y $
4	24	60	38	32	6
5	60	150	92	80	12

Figuur 4.25.

Tenslotte geven we nog een volledig overzicht van de dertien Archimedische lichamen in figuur 4.26. De gevallen genoemd in figuur 4.25 komen overeen met figuur 4.26i en 4.26l..

Opmerking

De dertien figuren uit figuur 4.26 waren — zoals hun gemeenschappelijke naam al suggereert — reeds bekend aan Archimedes.

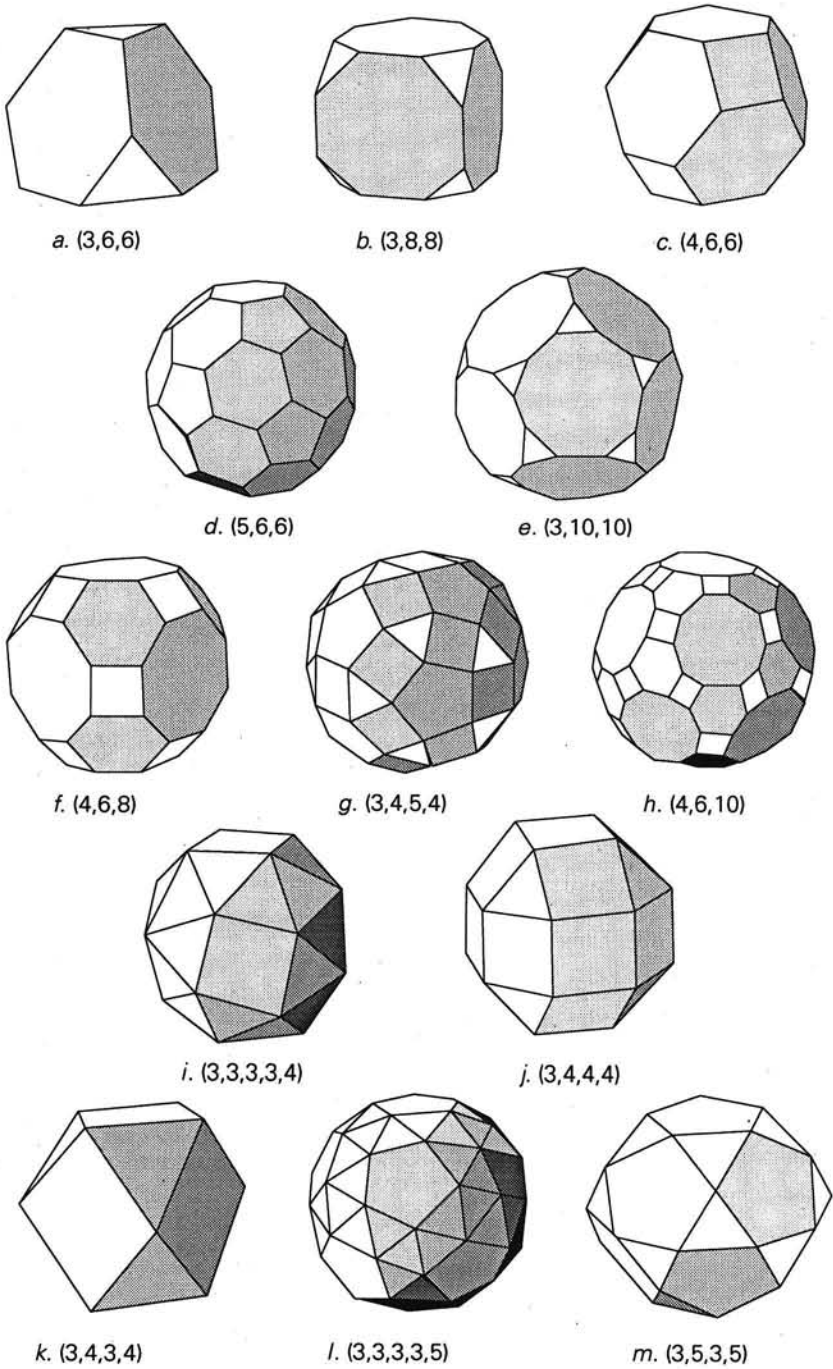
Strikt genomen zijn er nog meer veelvlakken die voldoen aan onze definitie van half-regulariteit. Dat komt omdat er soms bij de afgeleide aantallen regelmatige veelhoeken die in elk hoekpunt van het veelvlak samenkomen meer dan één figuur behoort.

Zo kan men bijvoorbeeld het 'kapje' in figuur 4.26j (bestaande uit 5 vierhoeken en 4 driehoeken) over 90° roteren. Er ontstaat dan een ander veelvlak, dat óók de eigenschap heeft dat in elk hoekpunt 3 vierhoeken en 1 driehoek samenkomen. Echter is deze nieuwe figuur minder 'symmetrisch' dan die waaruit hij ontstond. Voor een willekeurig tweetal hoekpunten is er nu niet altijd een dektransformatie (dit is een transformatie die de figuur in zichzelf overvoert) te vinden, zodanig dat het ene hoekpunt in het andere wordt overgevoerd.

De dertien figuren uit figuur 4.26 hebben wél allemaal die eigenschap.

Op deze kwestie gaan we niet verder in.

De aanduiding van een Archimedisch lichaam met een serie getallen is volgens de afspraak in 4.6 van het diktaat 'Meetkunde I voor Bouwkunde'. Zo betekent (3,6,6) bij figuur 4.26a dat in elk hoekpunt een driehoek, een zeshoek en nog een zeshoek samenkomen. De volgorde der getallen is met de wijzers van de klok mee of tegen de wijzers van de klok in.



Figuur 4.26.

5 Vraagstukken deel 1

1. Toon aan dat de beide grafen uit figuur 1.13 van het diktaat isomorf zijn. Doe dit door de acht knopen van zowel de linker als de rechter graaf te nummeren met de getallen 1, 2, ..., 8 en wel zodanig dat in beide grafen dezelfde paren knopen verbonden zijn door een tak.
2. Een analoge vraag als in 1 voor de grafen van figuur 5.1.

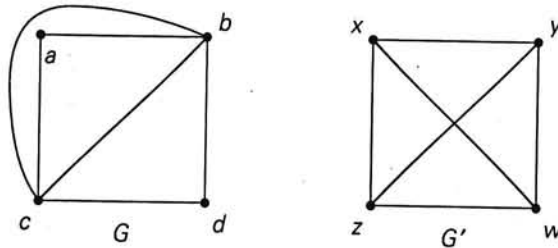


Figuur 5.1.

3. Bereken met behulp van Stelling 1.4 het aantal takken in de volledige graaf K_n . Bereken ook het aantal takken in een graaf met n knopen, die regulier is van graad k .
4. a. Probeer een enkelvoudige graaf te tekenen waarin geen twee knopen dezelfde valentie hebben.
b. Bewijs de algemeen geldende eigenschap dat een enkelvoudige graaf minstens twee knopen bevat met dezelfde valentie.
5. a. Wat kan men zeggen over het aantal knopen in een reguliere graaf van oneven graad?
b. Wat kan men zeggen over het aantal mensen op een receptie, waar elke gast precies 4 andere mensen kent (inclusief de gastheer)? (Opmerking: kennen is altijd wederzijds bedoeld.)
6. Een graaf G heeft 7 knopen en elke knoop heeft een valentie gelijk aan 3, 4 of 5. Wat is het kleinste aantal takken dat G zou kunnen hebben? Wat is het grootste aantal takken dat G zou kunnen hebben? Probeer bij beide antwoorden een voorbeeld te construeren.
N.B. Een graaf hoeft niet enkelvoudig te zijn en ook niet samenhangend.
7. Kan er een reguliere graaf bestaan van graad k met 12 takken, als $k = 4, 5$ of 6?

Construeer voorbeelden voor die k -waarden, waarvan u denkt dat er een graaf bij kan bestaan.

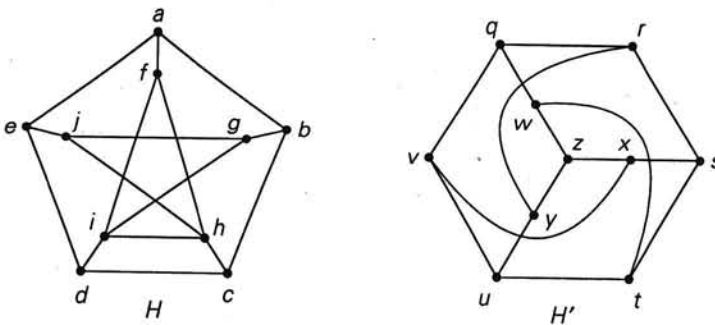
8. a. Evident is dat de grafen G en G' van figuur 5.2 isomorf zijn.



Figuur 5.2.

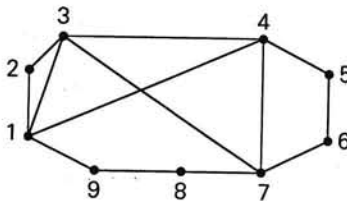
Bepaal een afbeelding tussen de knopenverzamelingen VG en VG' waaruit dit blijkt.

- b. Een soortgelijke vraag voor de grafen H en H' van figuur 5.3.



Figuur 5.3.

9. Gegeven is de graaf van figuur 5.4.



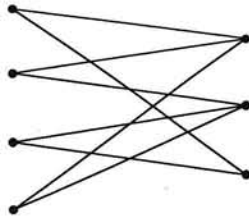
Figuur 5.4.

Bepaal de afstand van knoop 1 tot alle andere knopen van de graaf. Hoe groot is de diameter van deze graaf? Heeft deze graaf een Eulercircuit? Teken een graaf die verschilt van de gegeven graaf, maar die er wel homeomorf mee is.

10. Hoe groot is de diameter van de volledige graaf K_n ? Heeft K_n een Eulercircuit?

11. Een *bipartiete graaf* G is als volgt gedefinieerd. De knopenverzameling VG is de vereniging van twee disjuncte deelverzamelingen, V_1 en V_2 (dus $VG = V_1 \cup V_2$ en $V_1 \cap V_2 = \emptyset$), terwijl *elke* tak van G een knoop van V_1 verbindt met een knoop van V_2 . Er zijn dus géén takken tussen knopen van V_1 en ook niet tussen knopen van V_2 .

Een voorbeeld van een bipartiete graaf is gegeven in figuur 5.5.



Figuur 5.5.

Laat zien dat de kubusgraaf uit figuur 1.13 een bipartiete graaf is.

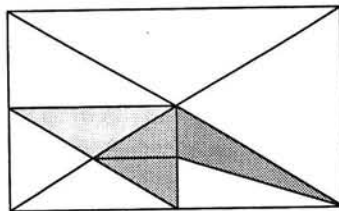
Wat kunt u in het algemeen zeggen van de lengte van circuits in een bipartiete graaf?

12. Een bipartiete graaf heet volledig bipartiet als *elke* knoop van V_1 verbonden is met *elke* knoop uit V_2 . Een dergelijke graaf wordt aangeduid met $K_{p,q}$, waarbij p het aantal knopen in V_1 voorstelt en q het aantal knopen in V_2 ($p = |V_1|$, $q = |V_2|$).

Hoe groot is de diameter van $K_{p,q}$? Wanneer heeft $K_{p,q}$ een Eulerpad en wanneer, meer in het bijzonder, een Eulercircuit?

13. Een rechthoek is verdeeld in driehoeken, zodanig dat elke driehoek hoogstens één zijde heeft op de omtrek van de rechthoek. Bovendien geldt dat als twee driehoeken een gemeenschappelijke grens hebben, deze grens een volledige zijde is van die twee driehoeken.

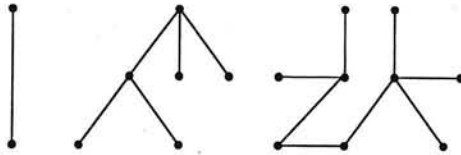
We noemen een driehoek die géén zijden heeft op de omtrek van de rechthoek een inwendige driehoek. In figuur 5.6 zijn de inwendige driehoeken gearceerd.



Figuur 5.6.

Toon aan dat het aantal inwendige driehoeken altijd even is.

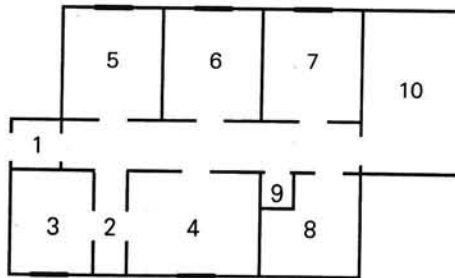
14. Een *boom* is een enkelvoudige samenhangende graaf die géén circuits bevat. Zie figuur 5.7 voor voorbeelden.



Figuur 5.7.

- (i) Als het aantal knopen van een boom gelijk is aan n , $n \geq 1$, dan is het aantal takken gelijk aan $n - 1$. Toon dat aan.
- (ii) Bewijs dat elke boom minstens één knoop van valentie 1 bevat als $n > 1$ is.
- (iii) Laat zien dat elke boom een bipartiete graaf is (bijv. met het resultaat van vraag 11).

15. In figuur 5.8 is de plattegrond van een huis gegeven.



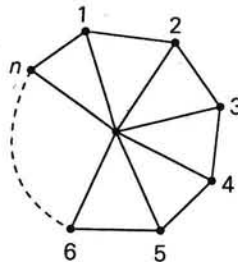
Figuur 5.8.

Teken een organisatiegraaf bij deze plattegrond.
Schets van deze graaf minstens één planaire versie.

16. Ga van de volgende paren grafen na of de tweede graaf een contractie is van de eerste (vervang steeds parallelle takken door één tak):

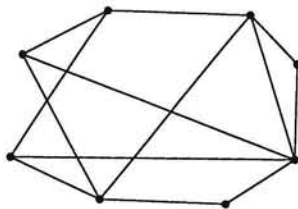
- (i) K_n, K_{n-1} ;
- (ii) $K_{3,3}, K_4$;
- (iii) de kubusgraaf, W_4 ;
- (iv) W_6, W_5 .

Hierbij heeft de wielgraaf W_n de gedaante van figuur 5.9.



Figuur 5.9.

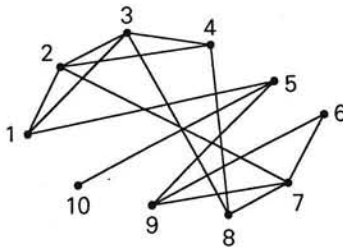
17. Teken, indien mogelijk, planaire versies van de grafen behorend bij een regelmatig viervlak, een regelmatig zesvlak en een regelmatig achthek.
18. Teken van de in vraag 17 genoemde grafen de duale grafen. Verifieer Stelling 4.1 in alle gevallen.
19. In Voorbeeld 2.2 is aangetoond met behulp van de contractiemethode dat de Petersengraaf *niet* planair is. Toon hetzelfde aan door gebruik te maken van de andere versie van het Theorema van Kuratowski (zie de opmerking bij Stelling 2.3), dat wil zeggen probeer een deelgraaf te vinden die ofwel homeomorf is met K_5 of met $K_{3,3}$.
20. Ga na of de graaf van figuur 5.10 planair is



Figuur 5.10.

Zo ja, geef een planaire versie.

21. Dezelfde vraag voor de graaf van vraag 2.
22. Kan een 2-samenhangende graaf ook 3-samenhangend zijn? Kan een 3-samenhangende graaf ook 2-samenhangend zijn? Geef een voorbeeld van een graaf die 1-samenhangend is, maar niet 2-samenhangend. Ga ook de samenhang na van de wielgraaf W_n , $n \geq 3$, en van de kubusgraaf.
23. Gegeven is de graaf van figuur 5.11.



Figuur 5.11.

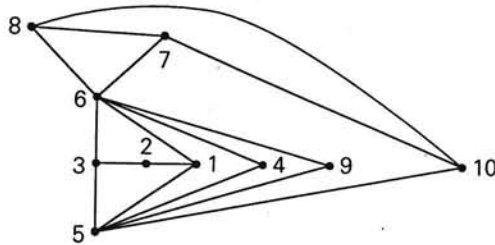
Welke van de volgende knopenverzamelingen zijn scheidende knopenverzamelingen?

- (i) $\{10\}$;
- (ii) $\{5\}$;
- (ii) $\{6,9\}$;

- (iv) $\{5,9\}$;
 (v) $\{7,8,9\}$.

Is de graaf 1-, 2-, 3- of n -samenhangend ($n > 3$)?

24. De graaf in figuur 5.12 is isomorf met de grafen uit Voorbeeld 2.9.



Figuur 5.12.

Ga na hoe deze graaf afgeleid kan worden uit graaf a van Voorbeeld 2.9. Construeer de duale graaf en een daarmee overeenkomende plattegrond, op soortgelijke wijze als in Voorbeeld 2.9.

25. a. Laat zien dat de graaf in figuur 5.11 planair is door een planaire versie te schetsen.
 b. Geef een andere inbedding van de graaf in het platte vlak door de deelgraaf H met $VH = \{5,10\}$ te roteren om de lijn door 5 en 9 en door de deelgraaf K met $VK = \{6,7,9\}$ te roteren om de lijn door 7 en 9.
26. Construeer voor beide planaire versies uit de vorige opgave de bijbehorende duale grafen.
27. Vat de graaf in figuur 5.11 op als de organisatiegraaf van een te ontwerpen kantoor, waarbij knoop 3 het buitengebied voorstelt. Probeer realistische plattegronden te schetsen (waarin de vertrekken slechts rechte hoeken hebben), die overeenkomen met de door u geconstrueerde duale grafen.
28. Aan de oever van een rivier bevinden zich een wolf, een kool en een geit. Dit drietal moet naar de overkant. Er is slechts één roeibootje, dat zo klein is dat het behalve de veerman slechts één passagier kan vervoeren. Wanneer de veerman er niet bij is zal de wolf de geit opeten of de geit de kool. Zijn er manieren om ze alle drie naar de andere oever te brengen? Wat is het minimale aantal oversteken die de veerman moet maken?

Aanwijzing: construeer een graaf waarvan de knopen de mogelijke toestanden voorstellen aan de oorspronkelijke oever. Verbind twee knopen door een tak als de bijbehorende toestanden in elkaar kunnen overgaan ten gevolge van één overstek.

29. De graaf G is steeds *enkelvoudig* (en ongericht), en bevat n knopen.

- (i) Bewijs dat als het aantal componenten van G gelijk is aan 2 het aantal takken van G zo groot mogelijk is wanneer de ene component een volledige graaf is met $n - 1$ knopen, terwijl de andere component slechts uit 1 (geïsoleerde) knoop bestaat.
- (ii) Toon met behulp van (i) aan, dat als het aantal componenten van G gelijk is aan k en het aantal takken gelijk is aan m , er geldt

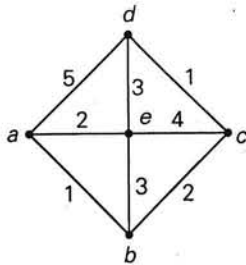
$$m \leq \frac{1}{2}(n - k)(n - k + 1).$$

Toon ook aan dat

$$n - k \leq m.$$

- (iii) Laat zien dat G samenhangend is (en er dus een pad bestaat tussen elk tweetal knopen) als het aantal takken van G groter is dan $\frac{1}{2}(n - 1)(n - 2)$.
- (iv) Neem aan dat G samenhangend is en *precies* t knopen bevat van oneven graad ($t > 0$). Bewijs dat er t paden in G bestaan, zodanig dat elke tak van G precies één keer voorkomt in één van die paden.
Van welke eigenschap is dit een generalisatie?

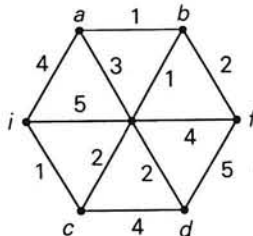
30. Gegeven is de takgelabelde graaf G (figuur 5.13). De graaf is niet gericht, zodat men mag aannemen dat $w(x, y) = w(y, x)$, $\forall x, y \in VG$.



Figuur 5.13.

De diameter van een gelabelde graaf is precies zo gedefinieerd als van een niet-gelabelde graaf. Hoe groot is de diameter van graaf G ?

31. Gegeven is de gelabelde graaf van figuur 5.14.

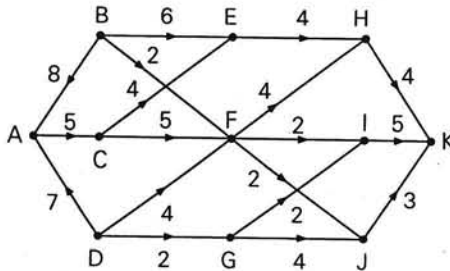


Figuur 5.14.

Bepaal met de kortste-pad-algoritme de afstand tussen i en f . Geef een duidelijk overzicht van de labelwaarden die de knopen tijdens de uitvoering van de algoritme krijgen.

Construeer ook de afstandsboom met wortel i .

32. Bepaal met de kortste-pad-algoritme het (een) kortste pad van knoop (1,4) naar knoop (4,2) in de graaf van figuur 3.6, alsmede de afstand tussen die knopen.
33. In een verstedelijkt gebied moet een nieuwe metrolijn worden aangelegd tussen de locaties A en K. De haltes tussen begin- en eindpunt liggen niet van te voren vast. Een aantal woonwijken en steden komen in aanmerking. Men besluit om de lijn zo te bouwen dat de totale aanlegkosten minimaal zijn. In de graaf van figuur 5.15 worden deze kosten aangegeven voor de verschillende mogelijke deeltrajecten. Welke lijn geeft minimale kosten en hoe groot zijn die?



Figuur 5.15.

34. In § 3.2 is een methode besproken voor de constructie van optimale routes. Een of ander gebied wordt opgedeeld in vierkante cellen c_0, c_1, \dots, c_n en elke cel c_i krijgt op grond van een zeker criterium een gewicht $w(c_i)$. Vervolgens wordt het zo ontstane rooster omgezet in een graaf, waarin dan tenslotte een kortste pad wordt bepaald.
- Men kan de tussenstap van het construeren van een graaf ook overslaan en rechtstreeks in het rooster zelf een optimale route bepalen. Hieronder volgt een algoritme waarmee men dat kan doen. In de algoritme krijgt elke cel c_i een 'label' dat uit twee sublabels bestaat: $(\bar{w}(c_i), c_j)$. Hierin is $\bar{w}(c_i)$ het totale gewicht van een optimale route van c_0 naar c_i (we veronderstellen dat de route in c_0 moet beginnen en in c_k moet eindigen), terwijl c_j de cel is die aan c_i voorafgaat op die route.
1. Cel c_0 krijgt label $(w(c_0), *)$ (het symbool * betekent dat c_0 geen voorganger heeft). Herhaal vervolgens de stappen 2 en 3 totdat c_k een label heeft gekregen.
 2. Kies voor elke ongelabelde cel c die naburig (zie § 3.2) is met reeds gelabelde cellen die gelabelde cel c' , waarvoor $\bar{w}(c')$ zo klein mogelijk is.

3. Kies uit de onder 2 genoemde cellen c die cel, waarvoor $w(c) + \bar{w}(c')$ zo klein mogelijk is. Deze cel krijgt nu het label $(w(c) + \bar{w}(c'), c')$.

Wanneer tenslotte c_k het label $(\bar{w}(c_k), c_j)$ heeft gekregen is het gewicht van de optimale route gelijk aan $\bar{w}(c_k)$, terwijl de route zelf verkregen wordt door teruglopend vanuit c_k steeds de voorganger te nemen:

$$c_k, c_j, \dots, c_0.$$

Verklaar de methode.

Pas deze methode toe op het volgende rooster,

1	1	2
1	3	3
1	2	2

waarbij een optimale route gevraagd wordt van de hoekcel links-onder naar de hoekcel rechts-boven.

Laat zien dat de functie \bar{w} de volgende waarden verkrijgt

3	3	5
2	4	6
1	3	5

35. Gegeven zijn de volgende 3×3 -roosters behorende bij een zeker gebied:

a	<table> <tbody> <tr><td>3</td><td>7</td><td>8</td></tr> <tr><td>2</td><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>6</td><td>1</td><td>6</td></tr> </tbody> </table>	3	7	8	2	6	3	6	1	6	f
3	7	8									
2	6	3									
6	1	6									
	A										

a	<table> <tbody> <tr><td>1</td><td>1</td><td>2</td></tr> <tr><td>1</td><td>3</td><td>3</td></tr> <tr><td>1</td><td>2</td><td>2</td></tr> </tbody> </table>	1	1	2	1	3	3	1	2	2	f
1	1	2									
1	3	3									
1	2	2									
	B										

Rooster A representeert de gebouwendichtheid in het gebied en rooster B de bomendichtheid. Er moet een weg aangelegd worden door het gebied. De weg moet bij a binnenkomen en bij f uitgaan. Men wil vanzelfsprekend de aantallen te slopen gebouwen resp. te kappen bomen zo klein mogelijk houden. Men mag aannemen dat het aantal te slopen gebouwen evenredig is met de gebouwendichtheid en het aantal te kappen bomen evenredig met de bomendichtheid. Bovendien is de oppervlakte die een boom bestrijkt grofweg dezelfde als die van een gebouw.

Construeer een optimaal tracé voor de weg, als men vindt dat

- a. gebouwen en bomen even belangrijk zijn;
- b. een boom twee keer zo belangrijk is als een gebouw;
- c. een gebouw twee keer zo belangrijk is als een boom.

- 36.** Een ontwikkelingsmaatschappij wil een groot ondergronds winkelcentrum bouwen ergens op een uitgestrekt terrein aan de rand van een woestijnstad. De volgende tabel geeft een overzicht van de verschillende deeltaken, de uitvoeringstijd van deze taken en hun onderlinge prioriteiten.

	duur in dagen	vorige taken
A. het verkrijgen van een bouwvergunning	120	
B. het aanleggen van een toegangsweg	180	A
C. Transport en installatie van boormachines	3	B
D. Bouw van directiekantoor en onderkomen voor bodemonderzoekers	30	B
E. Gereedmaken bouwterrein	60	B
F. Aanleg waterleiding	90	D
G. Boren	240	C,D
H. Bouw van het eigelijke winkelcomplex	180	G,E,F
I. Aanleg elektriciteit en riolering	30	J,H
J. Bouw van kantoren en woonruimte voor het management	240	G,E,F
K. Afwerking van het complex	360	J,H
L. Aanleg parkeerterreinen, lucht- verversingsinstallatie en aanbrenging beveiligingsapparatuur	240	J,H

Bepaal de kortste tijd waarin het gehele project kan worden verwezenlijkt.

Bepaal ook de vroegste en de laatste tijdstippen waarop met elke deeltaak moet worden begonnen, opdat het project in minimale tijd af is.

- 37.** In paragraaf 3.3 is een voorbeeld van een netwerkplanning besproken. Bij de bouw van een huis werd een aantal deelactiviteiten onderscheiden. Sommige van deze deelactiviteiten konden pas beginnen nadat andere *geheel* waren voltooid. Een variant op dit probleem krijgt men, wanneer men voor het starten van een deelactiviteit niet altijd hoeft te wachten tot een voorafgaande activiteit helemaal is afgelopen, maar wanneer men al *tijdens* de uitvoering daarvan mag beginnen.

We beschouwen het volgende probleem.

Bij de bouw van een één-étage-landhuis onderscheidt men de deelactiviteiten:

- A. opmetselen muren (3 weken);
- B. aanleg werkvloer (3 weken);
- C. elektrische en sanitaire voorzieningen (3 weken);
- D. aanleg verwarmingssysteem (4 weken);
- E. dak (4 weken);
- F. timmerwerk binnen (4 weken);
- G. tegels, plavuizen, schilderwerk (1 week).

Voorafgaande aan E moeten A en C voltooid zijn, voorafgaande aan F moet B voltooid zijn en voorafgaande aan G moet F voltooid zijn.

Verder is nog gegeven:

- B kan pas beginnen 1 week na begin D;
- D kan pas beginnen 1 week na begin A;
- E kan pas beginnen 1 week na begin B en F;
- F kan pas beginnen 1 week na begin A en C;
- G kan pas beginnen 2 weken na begin A, B en E.

Bepaal de kortste tijd waarin het huis kan worden gebouwd. Geef een bijbehorend werkschema.

38. Een project bestaat uit de volgende activiteiten:

- A(2); B(4); C(2); D(3); E(5,D);
- F(1,C); G(5,B); H(1,A); I(3,E,F,G,H);
- J(3,E,F,G,H); K(1,E,F,G,H);
- L(2,E,F,G,H); M(2,I,Q); N(1,J);
- O(1,K); P(4,L); Q(2,A).

Het getal tussen haakjes achter een letter geeft de duur van die activiteit aan, uitgedrukt in een of andere tijdseenheid. De letters tussen haakjes slaan op die activiteiten, die afgerond moeten zijn voordat de betrokken activiteit gestart mag worden.

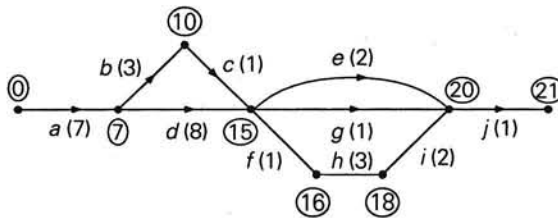
- (i) Ontwerp een activiteitengraaf.
- (ii) Bepaal de minimale tijdsduur van het gehele project.
- (iii) Wat is het laatst mogelijke tijdstip waarop men nog met E kan beginnen, wanneer men het project in minimale tijd af wil hebben?
- (iv) Bepaal de speling in G en I.

39. Een variant van de kritieke-pad-methode zoals in § 3.3 besproken, gaat als volgt.

De verschillende activiteiten van een project worden nu gerepresenteerd door *takken* in een graaf. De takken hebben een richting. De begin- en eindknoten van zo'n tak stellen *toestanden* van het project voor. Tussen begin- en eindtoestand van een tak moet de bijbehorende activiteit worden uitgevoerd. Aan elke tak wordt een gewicht toegevoegd gelijk aan de tijdsduur van de activiteit. Er is één knoop voor de *begintoestand* van het gehele project en één knoop voor de *eindtoestand*. Alle andere knopen van de graaf corresponderen met *tussentoestanden*.

Als deeltaak y pas na deeltaak x kan worden uitgevoerd, dan moet de beginknoop van tak y de eindknoop zijn van tak x . De aldus gevormde graaf zal geen circuits bezitten als het project echt uitvoerbaar is. Echter is het wel mogelijk dat er meervoudige takken zullen optreden. De constructie van een dergelijke graaf is in het algemeen lastiger dan van grafen zoals in 3.3 besproken.

Als voorbeeld geven we de graaf die hoort bij het project van figuur 3.9.



Figuur 5.16.

In deze graaf kan men nu weer op de bekende manier het langste pad construeren van de beginknoop naar de eindknoop. Verifieer voor uzelf dat men zo dezelfde resultaten verkrijgt als met de methode in § 3.3.

Maak nu vraag 38 met de hierboven besproken aanpak.

40. Toon op soortgelijke wijze als in Voorbeeld 4.2 aan dat $K_{3,3}$ niet planair is. Doe hetzelfde voor de volledig bipartiete graaf $K_{p,3}$, $p \geq 3$.
41. Verifieer dat de functies ρ en ρ^* constant zijn op V resp. F voor de kaarten horend bij de vijf regelmatige veelvlakken, zodat dus die kaarten inderdaad regulier zijn.
42. In het algemeen geldt voor een samenhangende, enkelvoudige graaf met n knopen en m takken dat $m \leq \frac{1}{2}n(n-1)$. Bewijs met behulp van de formule van Euler dat voor een samenhangende, enkelvoudige, *planaire* graaf geldt

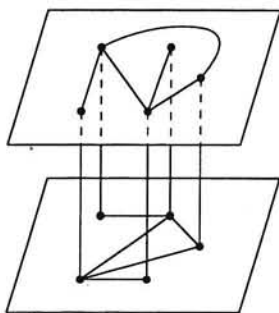
$$m \leq 3n - 6.$$

Deze relatie is op te vatten als een *noodzakelijke voorwaarde* voor het planair zijn van een enkelvoudige graaf.

43. Bewijs met behulp van de ongelijkheid van vraag 42 dat elke enkelvoudige planaire graaf wel een knoop heeft van valentie hoogstens 5.
44. Laat G een enkelvoudige graaf zijn met $|VG| = n$. De complementaire graaf \bar{G} is de graaf waarvan de knopenverzameling gelijk is aan VG , terwijl twee knopen in \bar{G} dan en slechts dan door een tak verbonden zijn als ze *niet* in G zijn verbonden.

Toon aan dat G en \bar{G} niet tegelijk planair kunnen zijn als $n \geq 11$.

45. Elektrische netwerken worden soms afgedrukt op een niet-geleidende plaat. Stellen we zo'n netwerk voor door een graaf (zie figuur 1.6) dan mogen de (niet-geïsoleerde) draden elkaar slechts raken in de knopen (vertakkingspunten van het netwerk). Dit is alleen maar mogelijk als de graaf planair is. Is de graaf niet planair dan is het bijbehorende netwerk niet op één plaat af te drukken; men zal dan meer platen nodig hebben. Deze platen worden gewoonlijk parallel aan elkaar gezet. Op elke plaat wordt een kopie van de knopenverzameling 'afgedrukt', terwijl corresponderende knopen op verschillende platen door geleidende draden met elkaar worden verbonden. Deze draden stellen dus géén takken van de graaf voor. De 'echte' takken van de graaf worden nu over de verschillende platen verdeeld, zodanig dat op één en dezelfde plaat de takken elkaar slechts in de knopen raken. Elke plaat bevat aldus een planaire 'component' van de graaf. Als voorbeeld geven we in figuur 5.17 een afdruck van K_5 op 2 platen.



Figuur 5.17.

Ook is het mogelijk om K_5 op 3, 4 of 5 platen af te drukken. Maak nu zelf tekeningen waaruit blijkt dat zowel $K_{3,3}$ als de Petersengraaf op 2 platen kan worden afgedrukt.

- 46.** In vraag 45 wordt aannemelijk gemaakt dat elke graaf G opgevat kan worden als een 'superpositie' van een aantal planaire grafen. Meestal is dit nog op verschillende manieren mogelijk. In verband hiermee definieert men de *dikte* $d(G)$ van G als het kleinste aantal planaire grafen (planaire componenten) waarvan G een superpositie is. Als de componenten alle op verschillende platen moeten worden afgedrukt geeft $d(G)$ dus het kleinste aantal platen aan waarop G kan worden afgedrukt. Zo is $d(G) = 1$ als G planair is, terwijl $d(K_5) = 2$. In het algemeen is het moeilijk om $d(G)$ exact te bepalen. Voor een enkelvoudige graaf met n knopen en m takken gelden echter de volgende ondergrenzen

$$d(G) \geq \lceil \frac{m}{3n-6} \rceil \qquad d(G) \geq \lfloor \frac{m+3n+7}{3n-6} \rfloor,$$

Hierin is $\lfloor x \rfloor$ het grootste gehele getal niet groter dan x , en $\lceil x \rceil$ het kleinste gehele getal niet kleiner dan x .

Voorbeelden: $\lceil 4 \rceil = \lfloor 4 \rfloor = 4$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lceil \pi \rceil = 4$.

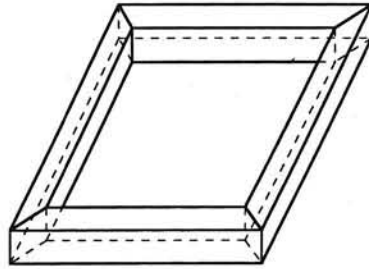
Bewijs bovenstaande ongelijkheden met behulp van het resultaat van vraag 42.

Wat zou de betekenis kunnen zijn van $d(G)$ als G de organisatiegraaf is van een te ontwerpen gebouw?

- 47.** Toon aan dat $d(K_n) \geq \lfloor \frac{1}{6}(n+7) \rfloor$.
Maak met schetsjes aannemelijk dat het gelijkteken geldt voor $n \leq 8$, maar niet voor $n = 9$ en $n = 10$.
(Opmerking: men vermoedt dat het gelijkteken voor alle $n > 10$ zeer algemeen geldig is.)
- 48.** Verifieer de stelling van Euler voor
- de Platonische grafen;
 - de wielgraaf W_n ;
 - de graaf gevormd door de lijnen en de snijpunten van die lijnen op een $n \times n$ -schaakbord.
- 49.** Laat G een veelvlak zijn (niet noodzakelijk regelmatig) met n hoekpunten, r zijvlakken en m ribben.
- Toon aan dat in het algemeen geldt

$$n \leq \frac{2m}{3}.$$
 - Als alle zijvlakken van G begrensd worden door vijfhoeken en zeshoeken, wat kan men dan zeggen omtrent het aantal vijfhoeken?
 - Als in elk hoekpunt precies 3 zijvlakken (vijf- en zeshoeken) samenkomen, hoe groot is dan het totale aantal vijfhoeken? Welke voorbeelden kent u met deze eigenschap?

50. Figuur 5.18 stelt (per definitie) een raamkozijn voor.



Figuur 5.18.

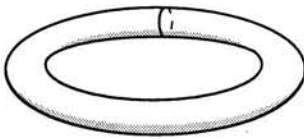
Beschouw de graaf die wordt gevormd door de hoekpunten en de in de figuur getekende ribben. Deze graaf is niet planair en kan dus niet worden ingebed in het platte vlak of in het oppervlak van een bol.

Ga na dat de graaf wél kan worden ingebed (dat wil zeggen getekend zodanig dat de takken elkaar alleen maar snijden in de knopen waarmee ze incident zijn) in het oppervlak van een *torus* (Zie vraagstuk 51). Vervorm daartoe het kozijn tot een band (torus).

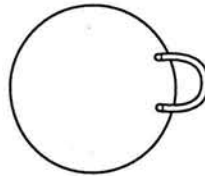
Op het oppervlak van de torus ontstaat zo een kaart. De gebieden van deze kaart komen overeen met de op het kozijnoppervlak gelegen vierhoeken. Ga na dat de Stelling van Euler nu niet geldt. Welk verband geldt er wel in dit geval?

51. De graaf uit het vorige vraagstuk is een voorbeeld van een toroïdale graaf, omdat hij kan worden ingebed in het oppervlak van een torus.

Een torus (figuur 5.19) kan men ontstaan denken door een bol met een handvat (figuur 5.20) te vervormen. (Een ander beeld is een bol met een gat er dwars doorheen.) Men zou de graaf dus even goed op het oppervlak van een bol met handvat, of van een bol met een gat kunnen tekenen.



Figuur 5.19.



Figuur 5.20.

Andere grafen kunnen pas getekend worden op een bol met twee, drie of nog meer handvatten (gaten). Stelt g het minimaal aantal handvatten in dit verband voor dan zegt men dat de graaf van *geslacht* (genus) g is. Voor de bijbehorende kaarten geldt een generalisatie van de Stelling van Euler:

$$n + r = m + (2 - 2g).$$

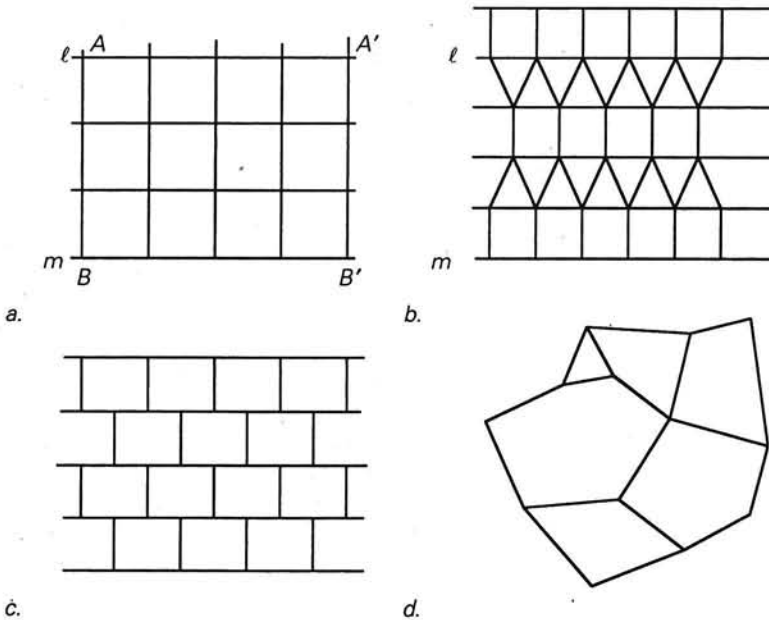
Verifieer deze relatie voor planaire grafen en voor de kozijngraaf uit het vorige vraagstuk.

52. De niet-planaire grafen K_5 en $K_{3,3}$ zijn van geslacht 1 en zijn dus in te bedden in het oppervlak van een torus. Probeer dit te doen voor K_5 , zodanig dat de juistheid van de relatie uit vraagstuk 51 blijkt voor $g = 1$.
53. Laat $M = (V, E, F)$ een toroidale kaart zijn. Hiermee wordt bedoeld een kaart op een torus, behorend bij een graaf van geslacht 1 (zie vraagstuk 51). Als $\bar{\rho}$ de gemiddelde valentie is van de knopen en $\bar{\rho}^*$ de gemiddelde valentie van de gebieden, bewijs dan dat geldt

$$\frac{1}{\bar{\rho}} + \frac{1}{\bar{\rho}^*} = \frac{1}{2}.$$

Hoe luidt de corresponderende formule voor een kaart op een bol of in het platte vlak?

54. Onder een *betegeling* van het platte vlak zullen we verstaan een volledige overdekking van het platte vlak door veelhoeken. Deze veelhoeken mogen hoogstens zijden of delen van zijden met elkaar gemeen hebben. De figuren 5.21a, b, c en d zijn alle betegelingen van het platte vlak. (Deze figuren moeten naar alle kanten tot in het oneindige voortgezet gedacht worden.)



Figuur 5.21.

Een *mozaïek* (*tessellation*) is een betegeling waarbij veelhoeken die punten gemeen hebben ofwel één enkel hoekpunt gemeen hebben of één enkele zijde. De figuren a, b, en d zijn mozaïeken, maar c niet.

In een *regelmatig mozaïek* worden slechts congruente, regelmatige veelhoeken gebruikt. In een *half-regelmatig mozaïek* mag meer dan één type regelmatige veelhoek meedoen. Echter moeten alle veelhoeken van eenzelfde type congruent aan elkaar zijn, terwijl verder in elk hoekpunt een zelfde aantal veelhoeken van een bepaald type samenkomt (zie ook de definitie van regelmatig en half-regelmatig veelvlak in Hoofdstuk 4). De mozaïeken van figuur a en van figuur b zijn beide half-regelmatig. Alleen de mozaïek van figuur a is regelmatig.

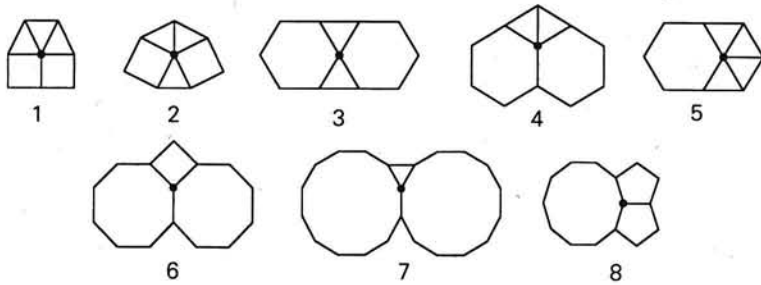
Betegelingen waarvan het patroon zich steeds herhaalt zoals in figuur a, b en c kunnen in verband gebracht worden met een kaart op een torus (zie vraagstuk 50). Buig daartoe de figuur om totdat lijn i met lijn m samenvalt. Verdraai vervolgens de rechte buis die zo is ontstaan zodanig, dat A met A' samenvalt en B met B' . Het gedeelte van het mozaïek aangegeven door de hoekpunten A, A', B en B' is nu ingebed als een kaart op een torus. De 'oneindigheid' van het gehele mozaïek is te verkrijgen door vaak genoeg de torus in verschillende richtingen om te lopen.

Ga voor uzelf na hoe de figuren 5.21b en c met een toroidale kaart in verband gebracht kunnen worden.

55. (i) Laat zien dat in een regelmatige n -hoek elke hoek gelijk is aan $(n - 2)\pi/n$.
- (ii) Toon vervolgens aan dat wanneer er m regelmatige n -hoeken aansluitend aan elkaar rondom een knoop (hoekpunt) liggen, m en n slechts de volgende waarden kunnen hebben: $m = n = 4$; $m = 3, n = 6$; $m = 6, n = 3$.
- (iii) Laat met een tekening zien dat de configuraties uit (ii) voortgezet kunnen worden over het hele platte vlak, zodat een regelmatige mozaïek ontstaat (Zie ook de Appendix A: regelmatige mozaïeken).
56. Ga opnieuw na welke regelmatige mozaïeken mogelijk zijn. Maak er nu gebruik van dat zo'n mozaïek correspondeert met een reguliere kaart op een torus (vraagstuk 54). Volg de methode uit 4.3 betreffende reguliere kaarten en pas deze methode toe op de formules uit vraagstuk 53.
57. Ga op dezelfde manier als in vraagstuk 55 na welke half-regelmatige mozaïeken mogelijk zijn, waarbij in elk hoekpunt slechts 2 soorten tegels samenkomen: a regelmatige x -hoeken en b regelmatige y -hoeken ($x \neq y$).
- (i) Toon aan dat geldt:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{1}{2}(a + b) - 1.$$

Ga vervolgens na dat de configuraties in figuur 5.22 hieraan voldoen.



Figuur 5.22.

- (ii) Ga na welke configuraties voortgezet kunnen worden tot half-regelmatige mozaïeken. (Zie de mozaïeken 1 tot en met 7 van Appendix B: half-regelmatige mozaïeken).

Opmerking

Strikt genomen kan configuratie 4 ook voortgezet worden tot een mozaïek die volgens onze definitie half-regelmatig is. Echter zijn niet alle knopen gelijkwaardig in dit mozaïek (ga dat na). Daarom wordt dit mozaïek in de literatuur toch niet als half-regelmatig erkend.

- 58.** Op dezelfde wijze als in vraagstuk 57 kan men zoeken naar half-regelmatige mozaïeken waar in elk hoekpunt 3 soorten tegels samenkomen: a regelmatige x -hoeken, b regelmatige y -hoeken en c regelmatige z -hoeken ($x \neq y$, $x \neq z$, $y \neq z$). Leid een soortgelijke formule af als in 57(i). De enig mogelijke mozaïeken van dit type blijken 8 en 9 uit Appendix B te zijn.

Het blijkt dat er geen half-regelmatige mozaïeken kunnen bestaan, zodanig dat in elk hoekpunt veelhoeken samenkomen van minstens 4 verschillende soorten.

Opmerking

De 11 regelmatige en half-regelmatige mozaïeken van Appendix A en B staan bekend als de 11 Archimedische betegelingen (ook uniforme betegelingen) naar analogie met de Archimedische lichamen.

- 59.** Beschouw opnieuw de half-regelmatige mozaïeken van vraagstuk 57. Stel dat er in elk hoekpunt a x -hoeken en b y -hoeken samenkomen.

De toroïdale kaart $M = (V, E, F)$ die hiermee correspondeert (zie vraagstuk 50 en 53) heeft dus twee soorten gebieden, namelijk met valentie x en met valentie y . Overeenkomstig de in 4.5 gebruikte notatie zal X de verzameling gebieden zijn waarvoor ρ^* gelijk is aan x en Y de verzameling gebieden waarvoor ρ^* gelijk is aan y .

- (i) Als n het totale aantal knopen van de kaart is, druk dan eerst $|X|$ en $|Y|$ uit in n . Leid vervolgens met behulp van de gelijkheid van Euler voor een torus af dat

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{1}{2}(a+b) - 1.$$

- (ii) Zonder beperking der algemeenheid mag men aannemen dat $3 \leq x < y$ en dat $a + b \geq 3$. Toon nu aan met soortgelijke argumenten als gebruikt werden bin 4.5, geval A_2 , dat bovenstaande vergelijking géén oplossingen heeft als $x > 5$ is.
- (iii) Neem $x = 3$. Bewijs dat a en b dan moeten voldoen aan

$$\frac{6b}{a + 3b - 6} \in \mathbb{Z}^+ \text{ en } 2a + 3b \leq 12.$$

Laat dan zien dat er precies 4 gevallen zijn waarin voldaan is aan deze voorwaarden en ga na met welke half-regelmatige mozaïeken die 4 gevallen corresponderen.

- (iv) Doe iets soortgelijks voor $x = 4$ en voor $x = 5$. (Beide leveren één half-regelmatig mozaïek.)

60. Het vorige vraagstuk liet zien dat de methode uit 4.5, om te onderzoeken welke half-regelmatige veelvlakken er mogelijk zijn, ook toepasbaar is op half-regelmatige mozaïeken. In het eerste geval werd de gelijkheid van Euler voor een bol gebruikt en in het tweede voor een torus. Het onderzoek naar half-regelmatige mozaïeken kan echter ook op een eenvoudigere manier gedaan worden met hoeken, zoals de vraagstukken 57 en 58 leerden. Voor de half-regelmatige veelvlakken is er niet een zo voor de hand liggende aanpak.

- (i) Beschouw nu de half-regelmatige mozaïeken uit vraagstuk 58. Stel dat in elk hoekpunt a x -hoeken, b y -hoeken en c z -hoeken samenkomen. Leid op soortgelijke wijze als in het vorige vraagstuk af dat

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = \frac{1}{2}(a+b+c) - 1.$$

Laat zien dat de mozaïeken 8 en 9 van Appendix B hieraan voldoen.

(De vergelijking heeft nog 8 andere oplossingen. Bij géén van die oplossingen is echter een half-regelmatig mozaïek te construeren.)

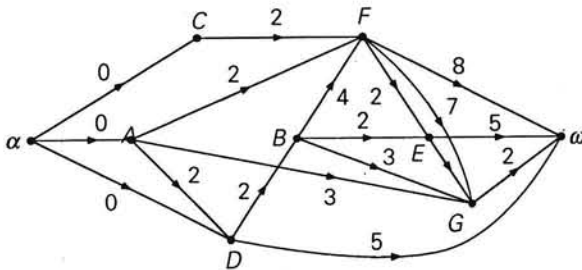
- (ii) Bewijs met een soortgelijke formule als in (i) dat er geen half-regelmatig mozaïek kan bestaan, zodanig dat in elk hoekpunt precies 4 veelhoeken samenkomen, die allemaal verschillende zijn.

Antwoorden

3. $\frac{1}{2}(n-1); \frac{1}{2}nk$
5. a. aantal knopen is even
b. aantal mensen is oneven
6. 11 ; 17
7. ja ; nee ; ja
9. $\text{diam}(G) = 3$
10. $\text{diam}(K_n) = 1$; er is een Eulercircuit als n oneven is
11. een graaf is bipartiet dan en slechts dan als alle circuits een even lengte hebben
12. $K_{p,q}$ heeft een Eulercircuit als p en q beide even zijn;
 $K_{p,2}$ en $K_{q,2}$ hebben een Eulerpad en niet een Eulercircuit als p resp. q oneven is.
23. (ii), (iv) en (v) zijn scheidende knopenverzamelingen; de graaf is 1-samenhangend
28. 7
30. $\text{diam}(G) = 4$
31. $d(i,f) = 6$
32. 11
33. A, C, F, J, K (of A, B, F, J, K);
15
35. a. 25 b. 37 c. 35
36. 1170
37. 10
- 38.(ii) 15;
(iii) 4;
(iv) $T_G = 0, T_I = 1$
- 49.(ii) het aantal vijfhoeken is minstens 12
(iii) 12
50. $n - m + r = 0$
53. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{2} + \frac{1}{m}$

Oefententamen

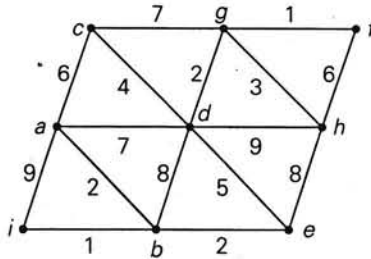
1. Een graaf heeft 10 knopen en 17 takken. Van elke knoop is de valentie gelijk aan 3 of 4. Bepaal het aantal knopen met valentie 4.
2. Een bos bezit 50 knopen en 40 takken. Hoeveel bomen bevat dit bos ?
3. Een samenhangende, enkelvoudige graaf heeft 20 knopen en 55 takken. Kan deze graaf planair zijn ?
4. Een enkelvoudige, planaire graaf heeft 48 knopen en 72 takken. Hoeveel knopen heeft de duale graaf?
5. Een zeker regelmatig veelvlak met 12 hoekpunten bestaat alleen uit driehoeken. Hoe groot is het aantal ribben van dit veelvlak?
6. Iemand geeft opdracht om een bungalow te laten bouwen met 7 vertrekken. De vertrekken 1, 2 en 3 moeten allemaal een deur hebben naar de vertrekken 4, 5, 6 en 7. Is deze opdracht te realiseren?
7. Bepaal de lengte van het kritieke pad van α naar ω in de activiteitengraaf van figuur 5.23.



Figuur 5.23.

8. Geef de activiteiten langs het kritieke pad in de volgorde waarin ze worden uitgevoerd in de graaf van opgave 7.
9. Wat is de speling in de uitvoering van activiteit C in de graaf van opgave 7?

10. Gegeven is de takgelabelde, ongerichte graaf van figuur 5.24.



Figuur 5.24.

- Bepaal met de kortste-pad-algoritme het kortste pad van i naar f (dit pad hoeft niet vermeld te worden).
 Noem de knopen waarvan de labels tijdens de uitvoering van de algoritme definitief zijn geworden in de volgorde waarin dat is gebeurd.
11. Noem in de juiste volgorde de knopen die men tegenkomt langs het kortste pad van i naar f in opgave 10.
12. Een zeker half-regelmatig veelvlak bestaat uit driehoeken en vijfhoeken. Het totale aantal drie- en vijfhoeken samen bedraagt 92. Het totale aantal ribben van het veelvlak bedraagt 150. Hoe groot is het aantal vijfhoeken?

Antwoorden oefentamen

1. 4
2. 10
3. nee
4. 26
5. 30
6. nee
7. 17
8. $ADBF$
9. 6
10. $ibibaedcg(h)f$ of $ibeadcg(h)f$
11. $ibedgf$
12. 12

Deel 2

Netwerkteorie

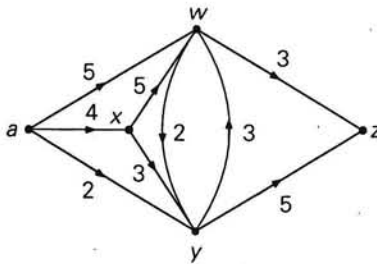
6 Netwerken en stromen

6.1. Inleiding en definities

Veel activiteiten in onze samenleving worden geregeld via 'netwerken', zoals het vervoer van goederen, telefoonverkeer en andere vormen van communicatie, transport van personen, etc.

Het volgende voorbeeld verschaft de voornaamste karakteristieken van een netwerk. Een fabrikant van bouwmaterialen, die we met a zullen aanduiden, moet zijn produkten laten vervoeren naar één of andere bouwlocatie z . Er is géén directe verbinding tussen de fabriek en die bouwlocatie. Het transport kan gebeuren via distributiecentra w , x en y . Deze centra zijn met elkaar en met de plaatsen a en z verbonden op de wijze zoals figuur 6.1 aangeeft. Per dag vindt er langs elke verbindingsweg één transport plaats in de richting die door de betreffende pijl in figuur 6.1 wordt aangeduid. Per transport kan de fabrikant slechts een beperkte hoeveelheid materialen meesturen. De maximale hoeveelheden — *capaciteiten* genoemd — zijn afhankelijk van de gekozen weg, in verband met terreingesteldheid en conditie van de voertuigen. Deze capaciteiten zijn uitgedrukt in tonnen en worden aangegeven door de verschillende getallen in figuur 6.1. Aldus hebben we een *gelabelde, gerichte graaf* (zie Deel 1) gekregen. De takken van deze graaf worden soms ook wel 'kanalen' genoemd. Knoep a heet wel de *bron* (*source*), omdat de goederen daar vandaan komen en knoop z heet wel de *put* (*sink*).

Vanzelfsprekend is de fabrikant er in geïnteresseerd hoe hij per dag een maximale hoeveelheid materialen kan versturen, zodanig dat nergens de capaciteit van een kanaal wordt overschreden.



Figuur 6.1.

Figuren als figuur 6.1 kunnen natuurlijk in talloze andere situaties gebruikt worden. Bijvoorbeeld bij het transport van olie of gas door pijpleidingen en bij het bestuderen van verkeer door één- en/of tweerichtingsstraten. Ook kunnen dit soort diagrammen elektrische netwerken voorstellen waarbij het probleem dan is om de maximale stroom te vinden, zodanig dat de afzonderlijke draden niet verbranden; de getallen bij de takken geven in dat geval dan de bovengrenzen aan voor de stroomsterkte in die takken.

Bovenstaande ideeën over netwerken worden nu formeel uitgedrukt door Definitie 6.1.

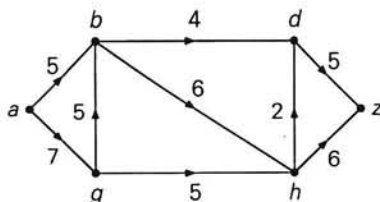
Definitie 6.1

Laat $N = (V, E)$ een lusvrije samenhangende, gerichte graaf zijn. Dan wordt N een netwerk of een transportnetwerk genoemd als er voldaan is aan de volgende voorwaarden:

- (i) er is precies één knoop zonder inkomende takken; deze knoop wordt de bron genoemd en aangeduid met a ;
- (ii) er is precies één knoop zonder uitgaande takken; deze knoop heet de put en wordt aangegeven met z ;
- (iii) aan elke tak is een niet-negatief reëel getal (label) toegevoegd, dat de capaciteit van die tak genoemd wordt; de capaciteit van tak $e := (i, j)$ wordt geschreven als $c(i, j)$ of als $c(e)$.

Voorbeeld 6.1

De graaf van figuur 6.2 stelt een transportnetwerk voor met a als bron en z als put. Omdat $c(a, b) + c(a, g) = 5 + 7 = 12$, zal de hoeveelheid goederen die van a naar z getransporteerd worden nooit groter kunnen zijn dan 12. Daar $c(d, z) + c(h, z) = 5 + 6 = 11$, zal die hoeveelheid zelfs niet boven 11 uit kunnen komen. Om de maximale hoeveelheid goederen die van a naar z getransporteerd kunnen worden aan de weet te komen, zullen we de capaciteiten van *alle* takken in het netwerk in aanmerking moeten nemen.



Figuur 6.2.

Om dit optimaliseringsprobleem op te lossen voeren we verder de volgende definitie in.

Definitie 6.2

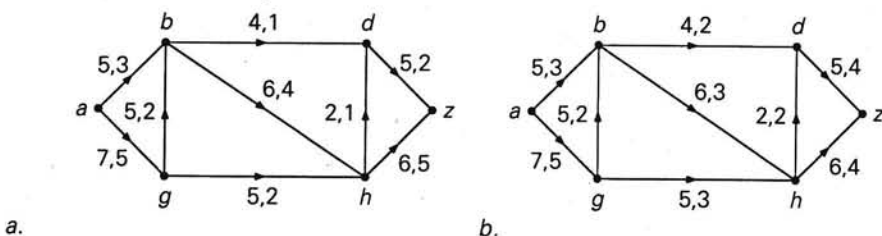
Als $N = (V, E)$ een transportnetwerk is, dan heet een functie f gedefinieerd op E en afbeeldend naar de niet-negatieve reële getallen een stroom in N , als er voldaan is aan

- (i) $f(e) \leq c(e)$, voor alle $e \in E$;
 (ii) $\sum_{w \in V} f(w, v) = \sum_{w \in V} f(v, w)$ voor alle $v \in V$, met $v \neq a$ en $v \neq z$; hierbij is $f(v, w) = 0$ als er geen tak (v, w) is.

De eerste voorwaarde drukt uit dat de hoeveelheid materiaal die door een zeker kanaal getransporteerd kan worden begrensd wordt door de capaciteit van dat kanaal. De tweede voorwaarde zegt dat de hoeveelheid materiaal die bij een knoop 'naar binnen stroomt' (de instroom) even groot moet zijn als de hoeveelheid die uit die knoop 'naar buiten stroomt' (de uitstroom). Dit moet zo zijn voor alle knopen, behalve voor de bron en voor de put van het netwerk.

Voorbeeld 6.2

We beschouwen het netwerk uit Voorbeeld 6.1. Aan elke tak voegen we, behalve de capaciteit, nog een tweede getal toe, zodat elke tak gelabeld is door een tweetal labels. Als tak e gelabeld is door het paar labels x, y , dan geldt $x = c(e)$, terwijl y de waarde is van een *mogelijke* stroom f in e . In beide diagrammen geldt $f(e) \leq c(e)$ voor alle takken e van N . Echter is in het diagram van figuur 6.3a de instroom van knoop g gelijk aan 5, terwijl de uitstroom $2 + 2 = 4$ bedraagt. Dus is de functie f geen stroom in dit geval. De functie f in diagram van figuur 6.3b voldoet aan beide voorwaarden van Definitie 6.2 en is dus wel een stroom voor het gegeven netwerk.



Figuur 6.3.

Opmerking

De tweede voorwaarde van Definitie 6.2 wordt wel de wet van Kirchhoff genoemd, naar analogie met de tweede wet van Kirchhoff uit de elektriciteitsleer.

Tenslotte geven we nog een derde definitie.

Definitie 6.3

Laat f een stroom zijn in een transportnetwerk $N = (V, E)$.

- (i) Een tak e van N heet verzadigd als $f(e) = c(e)$ en onverzadigd als $f(e) < c(e)$.

(ii) Als a de bron is van N , dan heet $\text{val}(f) := \sum_v f(a,v)$ de waarde of de sterkte van f .

Voorbeeld 6.3

In het netwerk van figuur 6.3b (Voorbeeld 6.2) is alleen de tak (h,d) verzadigd. Alle andere takken zijn onverzadigd. De sterkte van de stroom f in dit netwerk is gelijk aan $\text{val}(f) = f(a,b) + f(a,g) = 3 + 5 = 8$.

Intuïtief is duidelijk dat

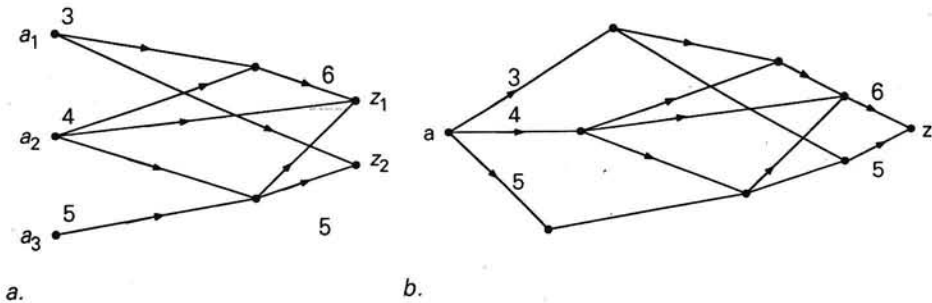
$$\text{val}(f) = \sum_v f(a,v) = \sum_v (v,z), \quad (6.1)$$

dat wil zeggen dat de uitstroom van de bron gelijk is aan de instroom van de put (in het vervolg zal \sum_v betekenen dat er gesommeerd wordt over alle $v \in V$).

In de volgende paragraaf zal dit ook bewezen worden. In de rest van dit hoofdstuk zullen we ons bezighouden met de vraag wat de stroom is met de grootste waarde en hoe die te construeren. Het is in principe voorstelbaar — en het zal ook blijken zo te zijn in sommige gevallen — dat er meer dan één maximale stroom in een netwerk is. Er zijn dan verschillende stromen, dat wil zeggen verschillende functies f , die alle dezelfde maximale waarde bezitten.

Aan het einde van deze paragraaf vermelden we nog een lichte uitbreiding van het in Definitie 6.1 ingevoerde begrip netwerk.

In figuur 6.4a is een 'netwerk' afgebeeld met meer dan één bron. Elke bron kan hoogstens een bepaalde hoeveelheid materiaal leveren, aangegeven door het bijbehorende getal. Ook is er meer dan één put, waarvan elk hoogstens een bepaalde hoeveelheid materiaal kan ontvangen. Een dergelijk 'netwerk' kan ogenblikkelijk in een gewoon netwerk worden getransformeerd met maar één bron en één put. Het resultaat is te zien in figuur 6.4b.



Figuur 6.4.

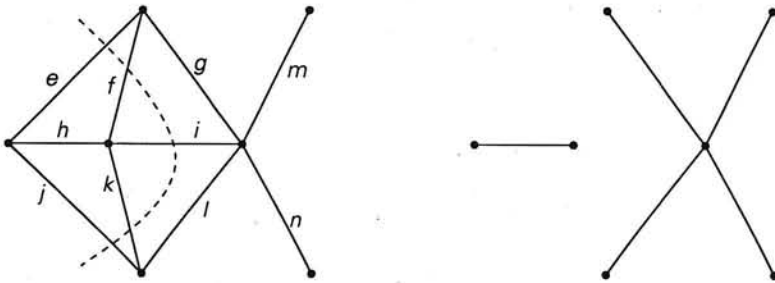
6.2. Het begrip snede

We beginnen met het begrip *snede* te introduceren voor een *ongerichte graaf*.

Definitie 1.4

Een snede c is een verzameling takken in een graaf zodanig dat verwijdering van deze takken het aantal componenten van die graaf doet toenemen, terwijl elke echte deelverzameling van c die eigenschap niet heeft.

Voorbeeld 6.4

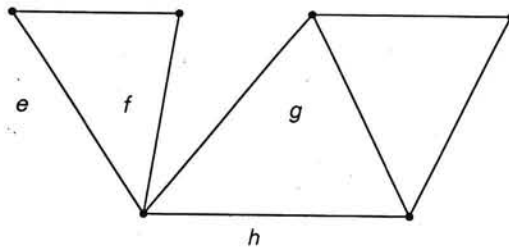


Figuur 6.5.

In de gegeven samenhangende graaf vormt de takkenverzameling $c = \{e, f, i, k, j\}$ een snede. Immers, laat men de takken van c weg dan ontstaat een graaf met twee componenten. Men ga voor zichzelf na dat er geen deelverzameling van c is met dezelfde eigenschap.

Ga ook na dat de verzamelingen $\{e, h, j\}$ en $\{e, h, k, l\}$ sneden vormen.

Voorbeeld 6.5



Figuur 6.6.

De verzameling takken $\{e, f, g, h\}$ is géén snede van de gegeven graaf. Verwijdert men de takken e, f, g en h , dan ontstaat weliswaar een graaf met meer componenten, maar de verzameling is niet minimaal zoals de definitie eist. Neemt men namelijk de deelverzameling $\{e, f\}$ dan heeft deze ook de verlangde eigenschap. De verzamelingen $\{e, f\}$ en $\{g, h\}$ zijn wél sneden van de gegeven graaf.

Opmerking

In het laatste voorbeeld doet verwijdering van $\{e,f,g,h\}$ de graaf wèl uiteenvallen in meer componenten. Daarom noemt men zo'n verzameling wel een *scheidende verzameling*. Men zou dus kunnen zeggen dat sneden *minimale* scheidende verzamelingen zijn.

Een gevolg van de definitie is dat verwijdering van de takken van een snede uit een *samenhangende* graaf die graaf uitéén doet vallen in precies *twee* componenten (zie ook de gegeven voorbeelden). Men zou daarom een snede voor een samenhangende graaf ook als volgt kunnen definiëren. Verdeel de knopen van de graaf in twee deelverzamelingen zodanig dat elk tweetal knopen uit dezelfde deelverzameling met elkaar verbonden is via een pad, dat alleen maar incident is met knopen uit die ene deelverzameling. Dan zullen de takken die knopen uit de ene met knopen uit de andere deelverzameling verbinden een snede vormen. Noemen we de twee deelverzamelingen P en \bar{P} (\bar{P} betekent het complement van P ten opzichte van V), dan schrijven we de bijbehorende snede als (P, \bar{P}) .

We komen nu tot het begrip van snede in een netwerk. Daartoe laten we de takrichtingen weg uit een gegeven netwerk $N(V,E)$, waardoor een ongerichte graaf ontstaat. Een snede in N is nu een snede in de ongerichte graaf *die de bron van de put scheidt*. Ofwel, als in de ongerichte graaf een snede (P, \bar{P}) de eigenschap heeft dat $a \in P$ en $z \in \bar{P}$, dan is (P, \bar{P}) een snede in N .

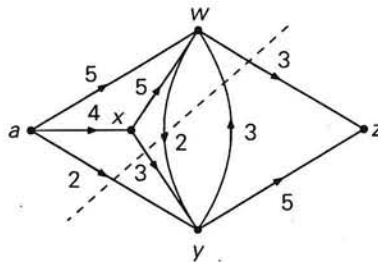
Definitie 6.5

De capaciteit van een snede (P, \bar{P}) van een netwerk, aangeduid met $c(P, \bar{P})$, is de som van de capaciteiten van de takken die uitgaan van knopen in P naar knopen in \bar{P} , ofwel

$$c(P, \bar{P}) = \sum_{i \in P, j \in \bar{P}} c(i, j)$$

Voorbeeld 6.6

We beschouwen hier opnieuw de graaf uit figuur 6.1



Figuur 6.7.

De takken die worden gesneden door de stippeltjeslijn vormen een snede van het netwerk. De bijbehorende knopenverzamelingen zijn $P = \{a, w, x\}$ en $\bar{P} = \{y, z\}$.

De capaciteit van deze snede is gelijk aan $2 + 3 + 2 + 3 = 10$. Denk er hierbij om dat de tak (y, w) geen rol speelt, daar deze tak: niet vanuit P naar \bar{P} loopt. De capaciteit is zodanig gedefinieerd dat de stroomsterkte van P naar \bar{P} maximaal gelijk kan zijn aan deze capaciteit. Als (y, w) ook in aanmerking genomen zou worden zou de 'capaciteit' kleiner zijn dan de maximaal mogelijke stroom.

Uit bovenstaand voorbeeld zal duidelijk zijn dat de capaciteit van een snede een begrenzing vormt voor de waarde van een maximale stroom. Gevoelsmatig zal de snede met de kleinste capaciteit als een soort 'bottle neck' fungeren voor de stroom van a naar z . In het bewijs van de volgende stelling wordt dit precies aangetoond.

Stelling 6.6

De waarde van een stroom in een gegeven netwerk is kleiner dan of gelijk aan de capaciteit van een willekeurige snede van dat netwerk.

Bewijs

Laat f een stroom zijn en (P, \bar{P}) een snede van een netwerk N , als a de bron is en z de put van N . Omdat a geen inkomende takken heeft geldt $f(w, a) = 0, \forall w \in V$. Dus kunnen we schrijven

$$\text{val}(f) := \sum_v f(a, v) = \sum_v f(a, v) - \sum_v f(w, a).$$

Volgens Definitie 6.2 (ii) is $\forall x \in P, x \neq a$,

$$\sum_v f(x, v) - \sum_w f(w, x) = 0.$$

Sommeren we de laatste vergelijkingen over alle $x \in P, x \neq a$, en tellen we het resultaat op bij de voorafgaande vergelijking, dan krijgen we

$$\begin{aligned} \text{val}(f) &= \left[\sum_v f(a, v) - \sum_w f(w, a) \right] + \sum_{\substack{x \in P \\ x \neq a}} \left[\sum_v f(x, v) - \sum_w f(w, x) \right] \\ &= \sum_{\substack{v \\ x \in P}} f(x, v) - \sum_{\substack{w \\ x \in P}} f(w, x) \\ &= \left[\sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x, v) + \sum_{\substack{x \in P \\ v \in \bar{P}}} f(x, v) \right] - \left[\sum_{\substack{x \in P \\ w \in P}} f(w, x) + \sum_{\substack{x \in P \\ w \in \bar{P}}} f(w, x) \right]. \end{aligned}$$

(Bedenk steeds dat als de verzameling er niet expliciet is bijgeschreven, de sommatie over heel V is.)

Nu is vanzelfsprekend $\sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x,v) = \sum_{\substack{x \in P \\ w \in P}} f(w,x)$, omdat de sommaties over dezelfde verzamelingen zijn.

Dus volgt er

$$\text{val}(f) = \sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x,v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in P}} f(w,x). \quad (6.2)$$

Uit de definitie van een stroom in een netwerk blijkt dat $f(w,x) \geq 0, \forall x, w \in V$ en dus ook $\sum_{\substack{x \in P \\ w \in P}} f(w,x) \geq 0$, zodat

$$\sum_{\substack{x \in P \\ w \in P}} f(w,x) \leq \sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} f(x,v) \leq \sum_{\substack{x \in P \\ v \in P}} c(x,v) = c(P, \bar{P}). \quad \square$$

Uit Stelling 6.6 volgt dat de waarde van een willekeurige stroom kleiner is dan of gelijk is aan de capaciteit van een willekeurige snede. Dit geldt dus ook voor de waarde van de maximale stroom in een netwerk. In het bijzonder zal deze maximale waarde dus kleiner dan of gelijk zijn aan het minimum van deze capaciteiten. Verrassend genoeg blijkt de maximale waarde van de stroom precies *gelijk* te zijn aan dit minimum! Deze eigenschap staat bekend als het '*Max-Flow Min-Cut Theorem*' en is het onderwerp van de volgende paragraaf. Tevens zal daar worden aangetoond hoe we een maximale stroom kunnen construeren.

Eerst echter vermelden we nog twee volgeigenschappen van Stelling 6.6. In de loop van het bewijs van die stelling vonden we een praktische uitdrukking voor de waarde van een stroom in een netwerk, namelijk formule (6.2). We geven deze formule nog eens in woorden.

Stelling 6.7

De waarde van een stroom in een netwerk is gelijk aan de som van de stromen in de takken vanuit de knopen van P naar de knopen van \bar{P} minus de som van de stromen in de takken vanuit de knopen van \bar{P} naar de knopen van P voor een willekeurige snede (P, \bar{P}) .

Een ander gevolg luidt als volgt.

Stelling 1.8

Als f een stroom is in een netwerk $N = (V, E)$, dan is de waarde van de stroom uit de bron a gelijk aan de waarde van de stroom naar de put z .

Bewijs

Laat $P = \{a\}$ en $\bar{P} = V - \{a\}$ zijn.

Dan is (P, \bar{P}) duidelijk een snede. Soortgelijk is (Q, \bar{Q}) een snede met $Q = V - \{z\}$ en $\bar{Q} = \{z\}$. Uit Stelling 6.7 volgt

$$\text{val}(f) = \sum_{\substack{x \in P \\ v \in \bar{P}}} f(x,v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in \bar{P}}} f(w,x) = \sum_{\substack{j \in Q \\ v \in Q}} f(y,v) - \sum_{\substack{y \in Q \\ w \in Q}} f(w,y)$$

Omdat a geen inkomende takken heeft is $\sum_{\substack{x \in P \\ w \in \bar{P}}} f(w,x) = \sum_{w \in \bar{P}} f(w,a) = 0$. Analoog is $\sum_{\substack{y \in Q \\ w \in Q}} f(w,y) = 0$. Dus volgt

$$\text{val}(f) = \sum_{v \in \bar{P}} f(a,v) = \sum_{y \in Q} f(y,z). \quad \square$$

6.3. Het max-flow min-cut theorema

We gaan nu over tot het bewijs van het reeds in 6.2 genoemde Max-flow Min-cut Theorema, ook wel bekend als het Theorema van Ford-Fulkerson.

Stelling 6.9

In een transportnetwerk $N = (V,E)$ is de waarde van een maximale stroom gelijk aan het minimum van de capaciteiten van de sneden van N .

Bewijs

Stel (P, \bar{P}) is een snede van N met minimale capaciteit $c(P, \bar{P})$. Uit Stelling 6.6 volgt dan $\text{val}(f) \leq c(P, \bar{P})$. Om het bestaan aan te tonen van een stroom f waarvoor het gelijkteken in deze relatie geldt, passen we de volgende algoritme, bekend als de labelingsprocedure, toe.

1. Definieer een beginstroom f met $f(e) = 0, \forall e \in E$.
2. Label de bron a met $(-, \infty)$. (De betekenis hiervan is dat er uit a elke gewenste hoeveelheid goederen gehaald kan worden).
3. Label elke knoop x waarvoor een tak: (a,x) bestaat als volgt:
 - (i) Als $c(a,x) - f(a,x) > 0$, definieer dan $\Delta(x) := c(a,x) - f(a,x)$ en geef x het label $(a^+, \Delta(x))$.
 - (ii) Als $c(a,x) - f(a,x) = 0$, laat dan x ongelabeld.
(Het label $(a^+, \Delta(x))$ geeft aan dat de stroom van a naar x nog kan toenemen met een bedrag van Δx eenheden, waarbij die Δx eenheden geleverd kunnen worden door a .)
4. Laat $x (\neq a)$ een gelabelde knoop zijn. Als (x,y) een tak is en y is niet gelabeld, label y dan als volgt:
 - (i) Als $c(x,y) - f(x,y) > 0$, definieer dan $\Delta y := \min \{ \Delta x, c(x,y) - f(x,y) \}$ en geef y het label $(x^+, \Delta(y))$.
 - (ii) Als $c(x,y) - f(x,y) = 0$, laat y dan ongelabeld.

(Het label $(x^+, \Delta(y))$ geeft aan dat de stroom van x naar y nog kan toenemen met een bedrag Δy , waarbij Δy uit x genomen kan worden.)

5. Laat x een gelabelde knoop zijn. Als (y, x) een tak is en y is niet gelabeld, label y dan als volgt:
- (i) Als $f(y, x) > 0$, definieer dan $\Delta y = \min \{\Delta x, f(y, x)\}$ en geef y het label $(x^-, \Delta(y))$.
 - (ii) Als $f(y, x) = 0$, laat y dan ongelabeld.
(Het label $(x^-, \Delta(y))$ zegt dat de totale stroom uit y naar de gelabelde knopen kan afnemen met een bedrag Δy . Deze Δy kan dan gebruikt worden om de totale stroom van y naar de niet gelabelde knopen te doen toenemen.)
6. Pas stap 4 en 5 net zo lang toe, totdat alle knopen voorzien zijn van een label. De waarden van de labels hoeven aldus niet eenduidig bepaald te zijn. Immers een knoop y kan met meer dan één gelabelde knoop via een tak verbonden zijn. Bovendien kan een gelabelde knoop x incident zijn met takken (x, y) en (y, x) , zodat er twee labels mogelijk zijn voor y . In zulke gevallen moet men een keuze maken.

Als alle knopen gelabeld zijn kunnen zich twee situaties voordoen.

Geval I.

Als de put z gelabeld is als $(x^+, \Delta(z))$, kan de stroom in tak (x, z) toenemen van $f(x, z)$ tot $f(x, z) + \Delta z$.

Wat betreft de knoop x , deze is ofwel gelabeld als $(y^+, \Delta(x))$ of als $(y^-, \Delta(x))$ met $\Delta x \geq \Delta z$. Als het label $(y^+, \Delta(x))$ is, kunnen we y als de bron beschouwen om de stroom in (x, z) te doen toenemen met Δz . In dat geval laten we ook de stroom in tak (y, x) toenemen van $f(y, x)$ naar $f(y, x) + \Delta z$. Aldus blijft er voldaan aan voorwaarde (ii) van Definitie 6.2 voor een stroom.

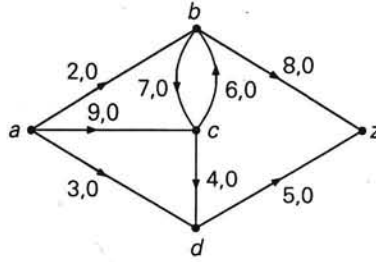
Als het label van x gelijk is aan $(y, \Delta(x))$, dan veranderen we de stroom in tak (x, y) van $f(x, y)$ naar $f(x, y) - \Delta z$.

Zetten we dit proces voort tot aan de bron a , dan is er een gericht pad van a naar z , waarlangs de stroom, in alle takken, is toegenomen met Δz .

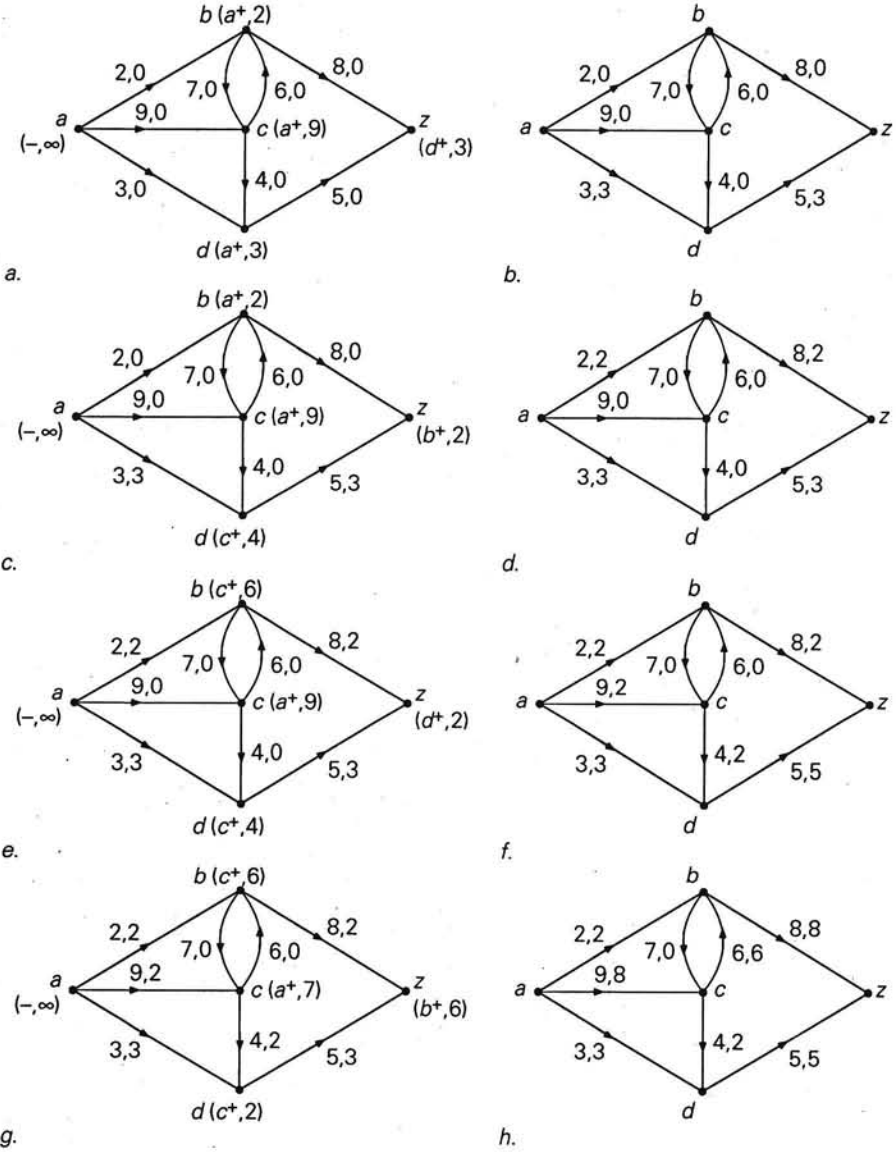
Vervolgens verwijderen we alle labels van de knopen, behalve van a en herhalen eventueel (zie Geval II) het proces om de stroom nog meer te laten toenemen.

Geval II.

Als de labelingsprocedure zo ver mogelijk is voortgezet en z is *niet* gelabeld, dan is kennelijk de maximale stroomsterkte bereikt. Laat P de verzameling van de gelabelde knopen zijn en $\bar{P} = V - P$ de verzameling van niet gelabelde knopen. Als $x \in P$, $y \in \bar{P}$ en $(x, y) \in E$, geldt $f(x, y) = c(x, y)$, daar y niet gelabeld is. Eveneens, als $v \in P$, $w \in \bar{P}$ en $(w, v) \in E$ geldt $f(w, v) = 0$. (Zie stappen 4 en 5). Dus is er een stroom f in het netwerk waarvan de waarde gelijk is aan de capaciteit van de snede (P, \bar{P}) .



Figuur 6.8.



Figuur 6.9.

We geven nu eerst een tweetal voorbeelden om de labelingsprocedure te illustreren.

Voorbeeld 6.7

Gegeven is het netwerk van figuur 6.8.

Bij de takken zijn, behalve de capaciteiten $c(e)$, ook de waarden van de beginstroom $f(e) = 0, \forall e \in E$, aangegeven.

De serie diagrammen in figuur 6.9 laat zien dat de labelingsprocedure vier keer is toegepast (linker diagrammen), waarna de stroom in het netwerk ook elke keer is aangepast (rechter diagrammen).

Omdat beide inkomende takken van z verzadigd zijn, is het duidelijk dat z bij een volgende labelingsprocedure géén label zal krijgen. Dus is er een maximale stroom geconstrueerd met sterkte 13.

Voorbeeld 6.8

Gegeven zijn de netwerken van figuur 6.10.

Let erop dat in dit voorbeeld twee keer een knoop wordt gelabeld met v^- . In het laatste diagram zijn niet alle inkomende takken van z verzadigd. In principe zou het dus nog mogelijk zijn dat er een stroom van a naar z met een grotere waarde is te construeren.

Passen we de labelingsprocedure nog een keer toe, dan vinden we het diagram van figuur 6.11.

Alleen de knopen a en b krijgen nog een label, de overige blijven ongelabeld. Let erop dat knoop e niet het label $(s^+, 1)$ krijgt, daar s zelf niet gelabeld is. Zo kan ook d niet het label $(e, 1)$ krijgen, omdat e niet gelabeld is. In het bijzonder blijft knoop z ongelabeld. De snede (P, \bar{P}) uit het laatste deel van het bewijs van Stelling 6.9 is de snede die wordt aangegeven door de stippeltjeslijn. De maximale stroomsterkte is dus 8.

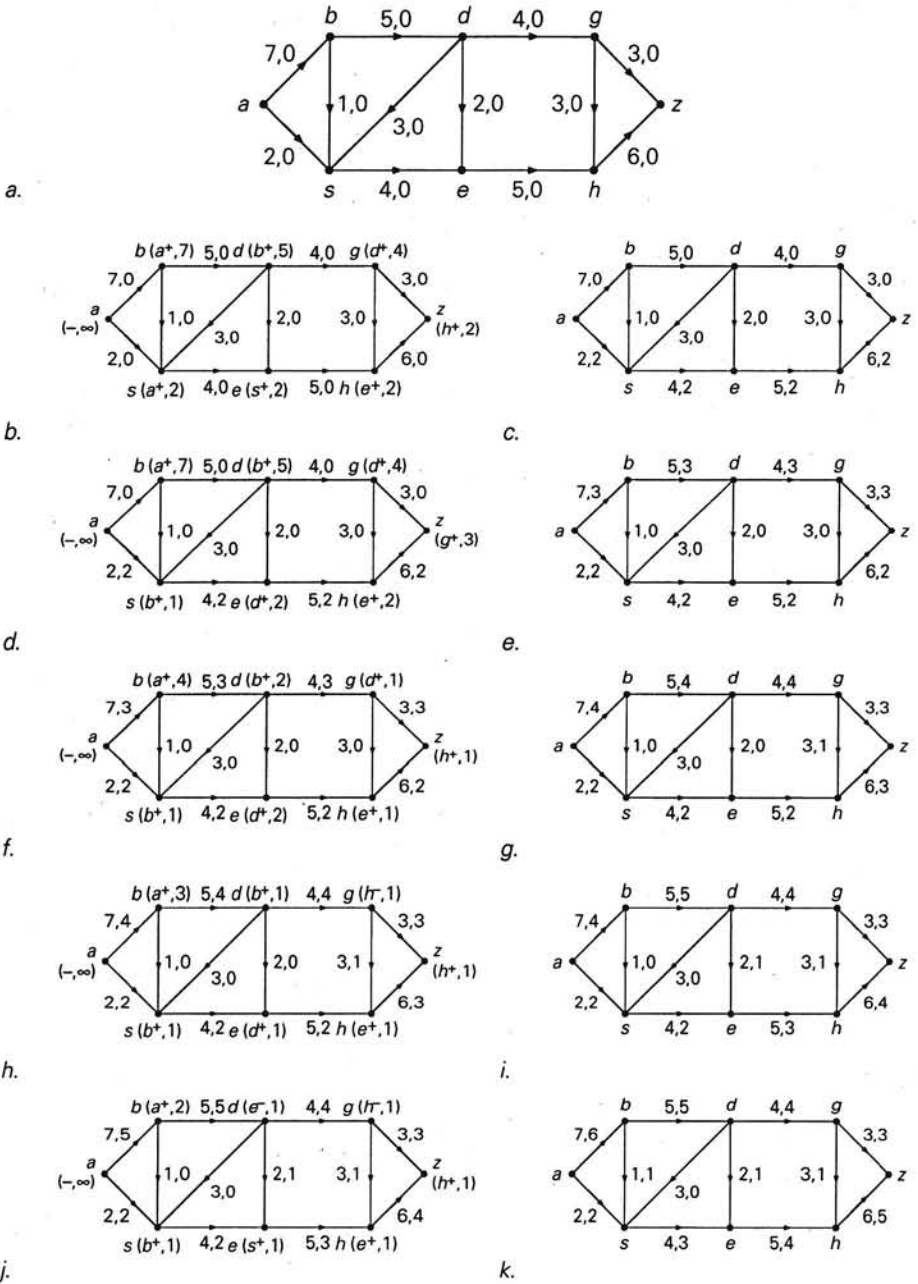
We sluiten deze paragraaf en dit hoofdstuk af met een eigenschap die het onmiddellijke gevolg is van Stelling 6.9.

Stelling 6.10

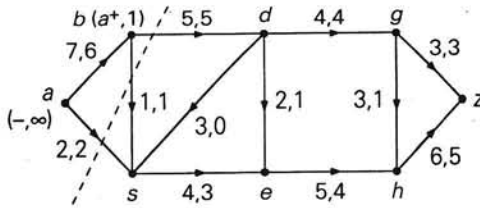
Als de capaciteiten van de takken in een transportnetwerk gehele waarden hebben, dan is er een maximale stroom, zodanig dat de stromen in de takken ook allemaal gehele waarden hebben.

Bewijs

Wanneer we starten met de stroom $f, f(e) = 0, \forall e \in E$, dan is er dus in elke tak een heeltallige stroomsterkte. Deze eigenschap blijft behouden gedurende het toepassen van de labelingsprocedure daar, bij elke stap, alle toenames Δx heeltallig zijn. \square



Figuur 6.10.

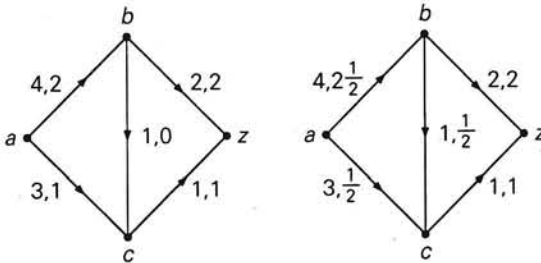


Figuur 6.11.

De stelling spreekt over *een* maximale stroom die heeltallige waarde aanneemt in de takken. Het is best mogelijk dat er naast deze 'heeltallige stroom' ook andere maximale stromen bestaan, waarbij de stroomsterkten in de afzonderlijke takken *niet* heeltallig zijn. Hierbij neemt dan de totale stroomsterkte wel zijn maximale (heeltallige) waarde aan, maar deze waarde is anders over de takken verdeeld dan bij de 'heeltallige stroom'. Het volgende eenvoudige voorbeeld toont dat aan.

Voorbeeld 6.9

Gegeven zijn de netwerken van figuur 6.12.



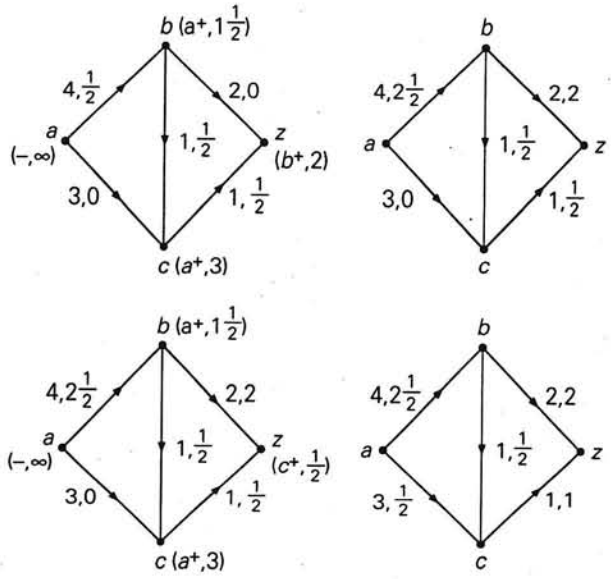
Figuur 6.12.

In beide diagrammen is de maximale stroomsterkte gelijk aan 3. Echter zijn in het rechter diagram niet alle stromen heeltallig. Men kan dit diagram met behulp van de labelingsprocedure verkrijgen door niet uit te gaan van de beginstroom $f(e) = 0, \forall e \in E$, maar van een andere beginstroom. De constructie in figuur 6.13 toont dit aan.

Opmerking

Het optreden van niet-gehele stroomsterkten in de takken van een transportnetwerk is alleen maar zinvol in de praktijk, als de fysieke condities van het transportprobleem dit toelaten. Zo zal bij het transport van olie of andere massagoederen, waarbij de capaciteiten zijn uitgedrukt in tonnen, het zeer wel mogelijk zijn om met niet-gehele stroomsterkten te werken. Betreft het transport echter renpaarden, mensen of zelfs heipalen dan zal duidelijk zijn dat niet-heeltallige oplossingen minder gewenst zijn.

Stelling 6.10 doet dus een belangrijke uitspraak, wanneer deze zegt dat er bij gehele capaciteiten altijd een heeltallige maximale oplossing is.



Figuur 6.13.

7

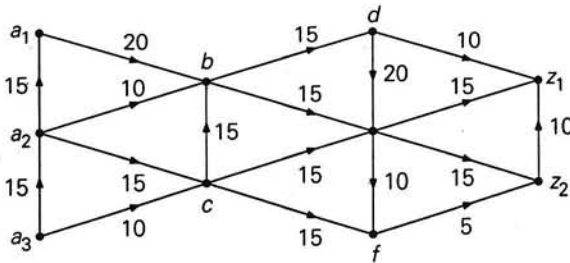
Varianten en uitbreidingen van het max-flow min-cut theorema

7.1. Enkele toepassingen

In deze paragraaf bespreken we een paar problemen die, na geringe aanpassingen, geschikt zijn om met Stelling 5.9 en de daarbij behorende constructiemethode op te lossen.

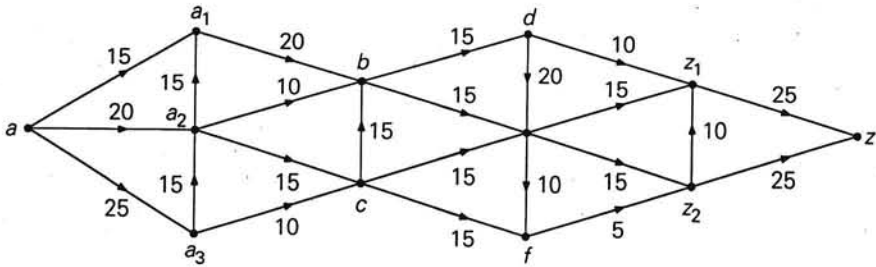
Voorbeeld 7.1

Er zijn drie bedrijven a_1 , a_2 en a_3 die geprefabriceerde woningelementen produceren, Bedrijf a_1 kan per week hoogstens 15 elementen produceren, bedrijf a_2 hoogstens 20 en bedrijf a_3 hoogstens 25. De elementen moeten vervoerd worden naar twee bouwlocaties z_1 en z_2 , waar ze verwerkt worden in aldaar te bouwen woningen. Het transport vindt plaats via het in figuur 7.1 gegeven 'transportnetwerk'. De getallen bij de takken geven zoals gewoonlijk de capaciteiten aan van de betreffende transportkanalen. Als op elk van de beide bouwlocaties per week 25 elementen verwerkt kunnen worden, hoeveel elementen moet dan elk bedrijf produceren om aan deze vraag te voldoen, of in elk geval zo veel elementen leveren als het netwerk maximaal toestaat?



Figuur 7.1.

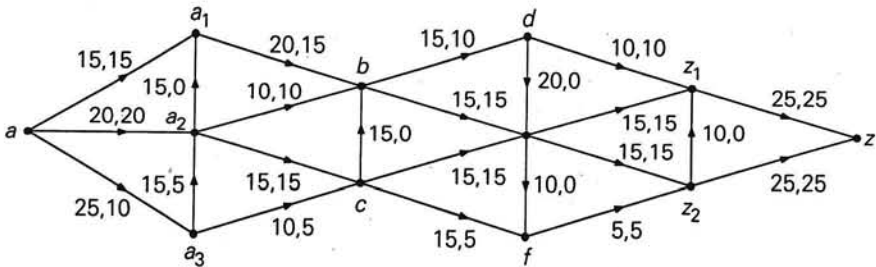
Allereerst maken we van het gegeven netwerk een echt transportnetwerk dat voldoet aan Definitie 6.1. Daartoe introduceren we een bron a en een put z , zoals in figuur 7.2 is aangegeven. De fabricagecapaciteiten van de drie bedrijven dienen nu om de takken (a, a_1) , (a, a_2) en (a, a_3) te labelen (zie ook figuur 6.2). Analoog worden de verwerkingscapaciteiten op de locaties z_1 en z_2 gebruikt om de takken (z_1, z) en (z_2, z) te labelen.



Figuur 7.2.

Het vraagstuk is nu in een vorm om met de labelingsprocedure te worden opgelost.

In dit (betrekkelijk) kleine voorbeeld valt ogenblikkelijk op dat er niet voldaan zal kunnen worden aan de vraag. De snede met de takken (d,z_1) , (e,z_1) , (e,z_2) en (f,z_2) heeft namelijk een capaciteit van $10 + 15 + 15 + 5 = 45 < 50$. Bij toepassing van de algoritme blijkt dat er inderdaad een stroom is met deze waarde. Het diagram in figuur 7.3 toont dit aan.



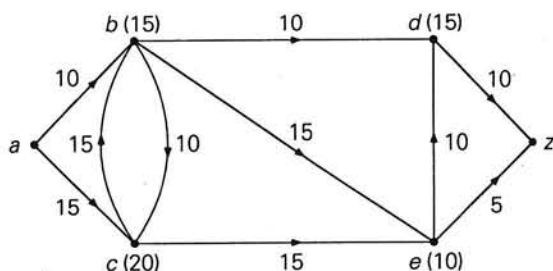
Figuur 7.3.

Het wordt aan de lezer overgelaten om deze stroom of een andere maximale stroom te construeren met de methode uit het Hoofdstuk 6.

Voorbeeld 7.2

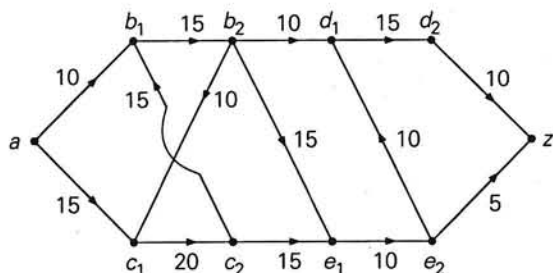
Het volgende voorbeeld is er een, waarbij er, behalve de capaciteiten voor de takken, ook capaciteiten voor de knopen ($\neq a, z$) bestaan. Als een realistische situatie zou men kunnen denken aan een wegennet met knooppunten, waarbij in de knooppunten overslag van goederen moet plaatsvinden. Schaarste aan overslagmateriaal (hijskranen, vorkheftrucks, etc.) betekent dan een extra belemmering voor het transport. Het diagram in figuur 7.4 geeft hiervan een getallenvoorbeeld.

We kunnen ook dit type probleem herleiden tot het soort waarop we de labelingsprocedure kunnen toepassen. Daartoe splitsen we elke knoop $v(c)$ in twee knopen v_1 en v_2 met daartussen een tak (v_1, v_2) waaraan we de capaciteit c toevoegen. Takken (v, w) (met $v, w \notin \{a, z\}$) worden dan takken (v_2, w_1) , waaraan de oorspronkelijke capaciteit van (v, w) is toegevoegd. Takken (a, v) worden nu takken (a, v_1) met de capaciteit van (a, v) en takken (w, z) worden takken (w_2, z) met de capaciteit van (w, z) .



Figuur 7.4.

Als resultaat krijgen we een 'gewoon' netwerk. Het diagram vna figuur 7.4 gaat zo over in het netwerk van figuur 7.5.



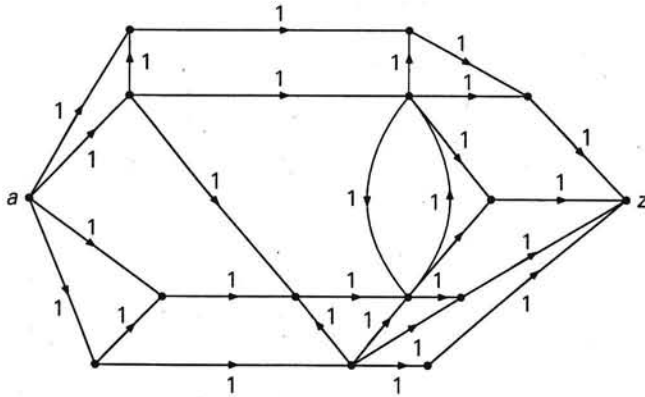
Figuur 7.5.

Voorbeeld 7.3

Een veel voorkomend probleem is om tussen twee knopen a en z in een graaf (zie figuur 7.6) het aantal verschillende paden te bepalen die geen takken onderling gemeen hebben. Een voorbeeld hiervan is de situatie dat men in oorlogstijd (of in gesimuleerde conflicten van allerlei aard) informatie via boodschappers wil sturen van het ene punt naar het andere. Omdat men niet weet of sommige wegen nog intact zijn, of versperd, wil men alle mogelijke routes (= paden) weten en voor elke route een verschillende boodschapper inzetten. Een weg (= tak) wordt dus niet of wel in een route opgenomen, maar niet in twee of meer routes tegelijk. Daarom krijgt elke tak van het corresponderende netwerk een capaciteit 1 toebedeeld. Het aantal verschillende paden van a naar z is nu gelijk aan de waarde van de maximale stroom in het netwerk met a als bron en z als put.

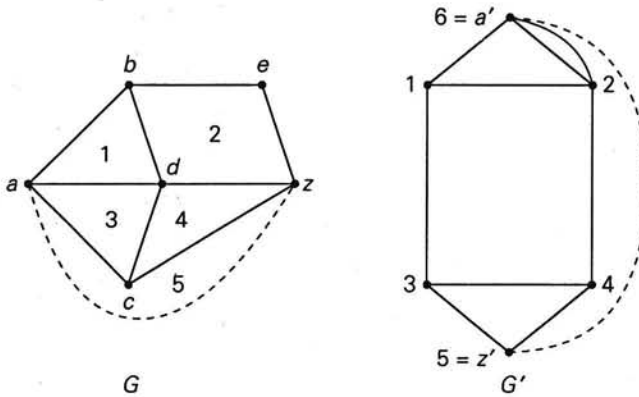
Op grond van Stelling 6.10 weten we ook zeker dat de waarde van de maximale stroom precies gelijk zal zijn aan het aantal verschillende takdisjuncte paden van a naar z .

Een zeer speciale toepassing van het max-flow min-cut theorema is het berekenen van het kortste pad tussen twee knopen van een graaf. Eerder is dit probleem opgelost met de zogenaamde kortste-pad-algoritme (zie Hoofdstuk 3). De hier te volgen aanpak berust op het volgende idee.



Figuur 7.6.

Gegeven is een *planaire* graaf G , zoals bijvoorbeeld in figuur 7.7, met twee vaste knopen a en z . We verbinden deze knopen met elkaar door middel van een extra tak (stippeltjeslijn) en construeren vervolgens de duale van de zo ontstane graaf (zie Hoofdstuk 2). Met de extra tak in G correspondeert in de duale graaf een tak die eveneens gestippeld is getekend. Deze verbindt twee knopen die we a' en z' noemen. We laten nu de tak tussen a' en z' weg (deze was dus alleen maar ingevoerd om de knopen a' en z' te definiëren). We hebben nu de duale graaf G' verkregen, waarover we de volgende uitspraak kunnen doen: een pad tussen a en z in G correspondeert met een snede (P, \bar{P}) in G' , zodanig dat $a' \in P$ en $z' \in \bar{P}$.



Figuur 7.7.

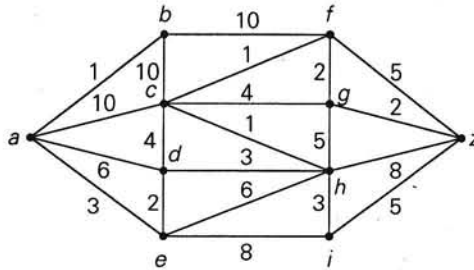
Zo correspondeert het pad $(ad), (dz)$ met de snede $\{\{1,3\}, \{2,4\}\}$, en het pad $(a,c), (c,z)$ met de snede $\{\{3,5\}, \{4,5\}\}$. Het pad $(a,c), (c,d), (d,b), (b,e), (e,z)$ correspondeert met de snede $\{\{3,5\}, \{3,4\}, \{1,2\}, \{2,6\}, \{2,6\}\}$.

Kennen we nu gewichten (labels) toe aan de takken van G dan kunnen we vragen naar het kortste pad van a naar z . Als we de takken van G' ook elke een gewicht geven, gelijk aan het gewicht van de corresponderende tak in G , dan is het duidelijk dat een

kortste pad in G overeenkomt met een minimale snede in G' . Met andere woorden, het probleem van het kortste pad tussen a en z in G is equivalent met het probleem van de minimale snede ofwel van de maximale stroom vanuit a' naar z' in G' .

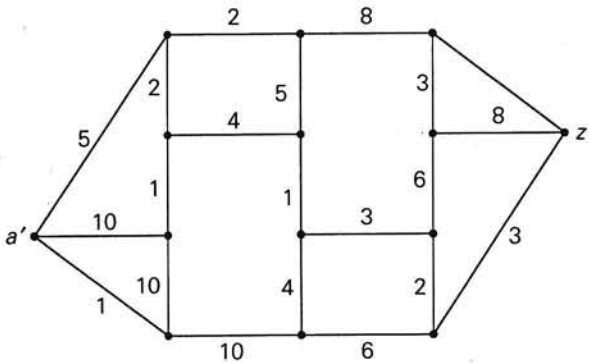
Voorbeeld 7.4

In de in figuur 7.8 gegeven ongerichte planaire graaf G hebben de labels de betekenis van afstanden tussen de knopen. Gevraagd wordt om een kortste pad te vinden tussen a en z .



Figuur 7.8.

Allereerst construeren we in figuur 7.9 de duale graaf G' .

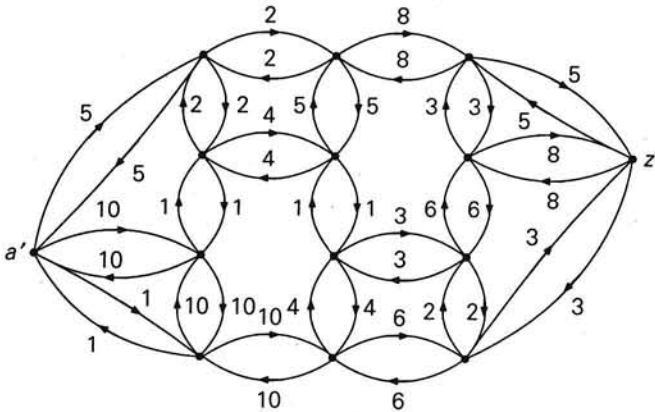


Figuur 7.9.

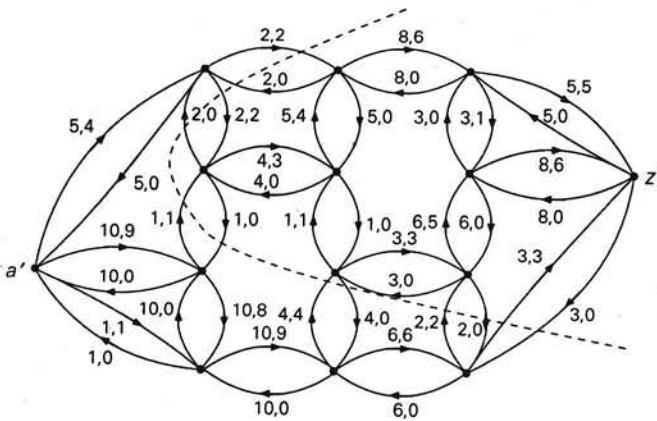
Omdat de labelingsprocedure gedefinieerd is voor gerichte grafen, presenteren we in figuur 7.10 een gerichte versie van G' .

Na toepassen van de labelingsprocedure, waarvan de gedetailleerde uitvoering aan de lezer wordt overgelaten, vinden we uiteindelijk een maximale stroom gelijk aan 14.

De minimale snede die de maximale stroom bepaalt wordt aangegeven door de stippel-tjeslijn in figuur 7.11. De takken van deze snede zijn de takken die in het kortste pad van a naar z zitten; ze hebben gewichten 3, 2, 4, 1, 2 en 2. In de oorspronkelijke graaf vormen ze het pad (a,e) , (e,d) , (d,c) , (c,f) , (f,g) , (g,z) .



Figuur 7.10.



Figuur 7.11.

Opmerking

We wijzen er nogmaals op dat de voorafgaande methode alleen geschikt is voor planaire grafen. De kortste-pad-algoritme uit Hoofdstuk 3 is ook geschikt voor niet-planaire grafen en is bovendien sneller en in het algemeen eenvoudiger toepasbaar.

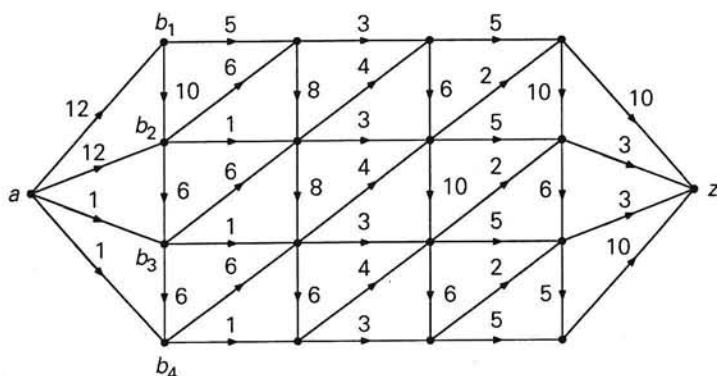
7.2. Een afvalwaterprobleem

Voor een wat groter voorbeeld beschouwen we de situatie van twee grote bedrijven b_1 en b_2 en twee kleinere b_3 en b_4 , alle gelegen in een oude stadswijk. Deze bedrijven zijn wat betreft de lozing van hun afvalwater aangewezen op het enigszins verouderde rioleringssysteem van de wijk. Per tijdseenheid produceren de bedrijven b_1 , b_2 , b_3 en b_4 een hoeveelheid afvalwater van respectievelijk 12, 12, 1 en 1, uitgedrukt in een zekere volume-eenheid. De afzonderlijke rioleringsbuizen in de wijk hebben, in verband met hun doorsnee en ook in verband met andere gebruikers, allemaal een

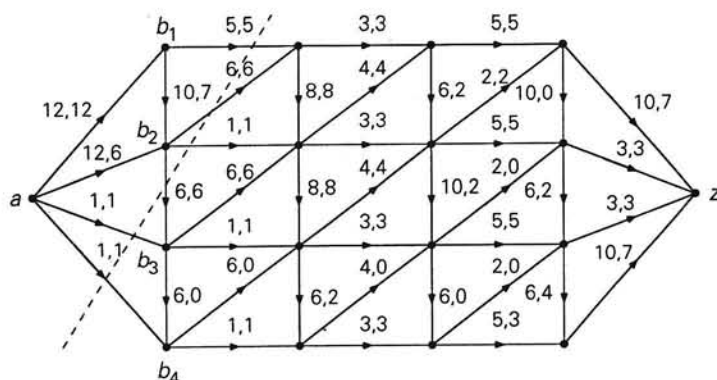
beperkte capaciteit om dit afvalwater af te voeren. Voor elke buis is deze capaciteit, uitgedrukt in de hoeveel te verwerken afvalwater per tijdseenheid, bekend (zie figuur 7.12). Op vier plaatsen in de wijk is het systeem aangesloten op een hoofdriool, waarvan we aannemen dat de opnamecapaciteit 'onbeperkt' is.

De vraag is nu of het rioleringsysteem in staat is om al het afvalwater van de bedrijven op het hoofdriool te lozen en als dat niet het geval is wat dan de maximale hoeveelheid afvalwater is die nog afgevoerd kan worden.

Analoog aan Voorbeeld 7.1 maken we van het systeem een gewoon transportnetwerk door in plaats van de vier bronnen van afvalwater slechts één bron te introduceren met denkbeeldige transportkanalen naar b_1 , b_2 , b_3 en b_4 met capaciteiten 12, 12, 1 en 1. Het hoofdriool is vanzelfsprekend de put van het systeem. Aldus krijgen we het netwerk van figuur 7.12. Toepassen van de methode van het max-flow min-cut theorema leert dat de maximale stroomsterkte gelijk is aan 20 en dat één van de grotere bedrijven zijn hoeveelheid afvalwater zal moeten halveren (zie figuur 7.13). De stippeltjeslijn in de figuur geeft de snede die bepalend is voor de maximale afvoer. Ga zelf na of er een oplossing mogelijk is zodanig dat zowel b_1 als b_2 zich moeten beperken in hun afvalwaterproductie.



Figuur 7.12.



Figuur 7.13.

7.3. Het uitgebreide max-flow min-cut theorema

Het max-flow min-cut theorema geldt voor netwerken waarbij voor elke tak een bovengrens (capaciteit) is voorgeschreven voor de waarde van de stroom door die tak. We veronderstellen nu dat er ook voor elke tak een ondergrens of drempelwaarde wordt voorgeschreven voor de stroomsterkte. Voor elke tak $e \in E$ van het netwerk $N(V,E)$ bestaan er dus getallen $b(e)$ en $c(e)$ met $0 < b(e) < c(e)$. Men zegt dat een stroom f mogelijk (*feasible* of *compatible*) is als er voldaan is aan

$$b(e) \leq f(e) \leq c(e), \forall e \in E. \quad (7.1)$$

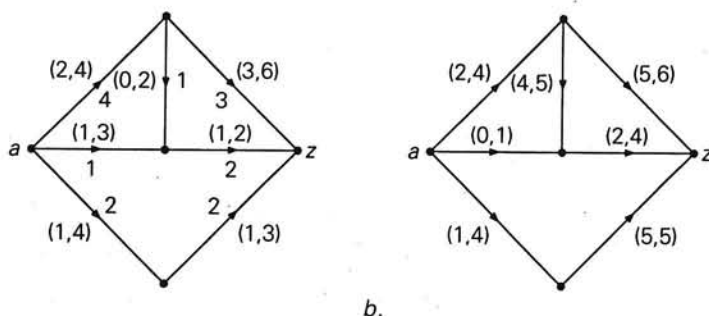
Analoog aan het begrip capaciteit van een snede kunnen we nu ook spreken over de drempelwaarde van een snede.

Definitie 7.1

De drempelwaarde van een snede (P, \bar{P}) van een netwerk, aangeduid met $b(P, \bar{P})$ is de som van de drempelwaarden van de takken die uitgaan van knopen in P naar knopen van \bar{P} ofwel

$$b(P, \bar{P}) = \sum_{i \in P, j \in \bar{P}} b(i,j).$$

Het kan gebeuren dat de onder- en bovengrenzen in een netwerk zodanig zijn dat er geen enkele mogelijke stroom kan bestaan.



Figuur 7.14.

In figuur 7.14 duiden de getallen tussen haakjes de ondergrenzen en bovengrenzen aan in de respectievelijke takken van het netwerk. In figuur 7.14a bestaan mogelijke stromen, bijvoorbeeld de stroom zoals in de figuur is aangegeven. In figuur 7.14b is er géén stroom mogelijk.

Naast de vraag of er in een gegeven netwerk mogelijke stromen zijn is er vanzelfsprekend ook weer het probleem om de maximale mogelijke stroom te vinden. Om deze vragen te beantwoorden leiden we weer een aantal stellingen af.

Stelling 7.2

In een gegeven transportnetwerk $N(V,E)$ geldt voor elke stroom f en voor elke snede (P, \bar{P}) dat

$$b(P, \bar{P}) - c(\bar{P}, P) \leq \text{val}(f) \leq c(P, \bar{P}) - b(\bar{P}, P).$$

Bewijs

In het bewijs van Stelling 6.6 (vergelijking (6.2)) vonden we

$$\text{val}(f) = \sum_{\substack{x \in P \\ v \in \bar{P}}} f(x, v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in \bar{P}}} f(w, x).$$

Dus is

$$\text{val}(f) \leq \sum_{\substack{x \in P \\ v \in \bar{P}}} c(x, v) - \sum_{\substack{x \in P \\ w \in \bar{P}}} b(w, x) = c(P, \bar{P}) - b(\bar{P}, P),$$

en ook

$$\text{val}(f) \geq \sum_{\substack{x \in P \\ w \in \bar{P}}} b(w, x) - \sum_{\substack{x \in P \\ v \in \bar{P}}} c(x, v) = b(\bar{P}, P) - c(P, \bar{P}). \quad \square$$

Stelling 7.3

Laat (P, \bar{P}) en (Q, \bar{Q}) twee sneden zijn in een gegeven transportnetwerk N . Er bestaat geen mogelijke stroom in N als één van de volgende twee ongelijkheden geldt

$$b(P, \bar{P}) - c(\bar{P}, P) > c(Q, \bar{Q}) - b(\bar{Q}, Q)$$

of

$$b(Q, \bar{Q}) - c(\bar{Q}, Q) > c(P, \bar{P}) - b(\bar{P}, P)$$

Bewijs

Uit Stelling 7.2 volgt dat voor een mogelijke stroom f moet gelden

$$b(P, \bar{P}) - c(\bar{P}, P) \leq \text{val}(f) \leq c(P, \bar{P}) - b(\bar{P}, P)$$

en

$$b(Q, \bar{Q}) - c(\bar{Q}, Q) \leq \text{val}(f) \leq c(Q, \bar{Q}) - b(\bar{Q}, Q).$$

Hieruit volgt

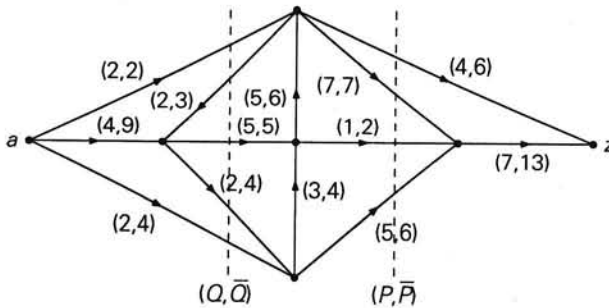
$$b(P, \bar{P}) - c(\bar{P}, P) \leq \text{val}(f) \leq c(Q, \bar{Q}) - b(\bar{Q}, Q).$$

Hieraan kan niet voldaan worden als de eerste ongelijkheid uit de stelling geldt. Dus kan er in dat geval geen mogelijke stroom zijn. Soortgelijk voert de tweede ongelijkheid tot een tegenspraak. \square

Stelling 7.3 verschaft een noodzakelijke voorwaarde voor het bestaan van een mogelijke stroom in een netwerk. Voor *elk* paar sneden P en Q moet gelden

$$b(P, \bar{P}) - c(\bar{P}, P) \leq c(Q, \bar{Q}) - b(\bar{Q}, Q). \quad (7.2)$$

Voorbeeld 7.5



Figuur 7.15.

Voor het in figuur 7.15 gegeven netwerk en de beide gegeven sneden gelden de volgende gelijkheden:

$$b(P, \bar{P}) = 4 + 7 + 5 = 16, \quad c(\bar{P}, P) = 2,$$

$$b(\bar{Q}, Q) = 2, \quad c(Q, \bar{Q}) = 2 + 5 + 4 + 4 = 15.$$

Dus is $b(P, \bar{P}) - c(\bar{P}, P) > c(Q, \bar{Q}) - b(\bar{Q}, Q)$, zodat er geen mogelijke stroom in het netwerk is.

Stelling 7.4

In een transportnetwerk N , waarin voor elke tak een bovengrens en een ondergrens is gegeven voor de stroom door die tak, is de maximale mogelijke stroom gelijk aan de minimale waarde van $c(P, \bar{P}) - b(\bar{P}, P)$ voor alle sneden (P, \bar{P}) van N .

Bewijs

Het bewijs is analoog aan dat van Stelling 6.9. In verband met Stelling 7.2 hoeven we alleen maar aan te tonen dat er een mogelijke stroom f bestaat met $\text{val}(f) = c(P, \bar{P}) - b(\bar{P}, P)$ voor één of andere snede (P, \bar{P}) .

Daartoe variëren we de labelingsprocedure uit het bewijs van Stelling 6.9 als volgt.

1. We nemen aan dat er één of andere beginstroom f is.
2. Een knoop x waarvoor een tak (a, x) bestaat krijgt het label $(a^+, \Delta(x))$, met $\Delta(x) = c(a, x) - f(a, x)$ als $c(a, x) - f(a, x) > 0$ is. Als $c(a, x) - f(a, x) = 0$, dan krijgt x geen label.

3. Laat $x(\neq a)$ een gelabelde knoop zijn. Als (x,y) een tak is en y is niet gelabeld, label y dan met $(x^+, \Delta y)$ en $\Delta y := \min\{\Delta x, c(x,y) - f(x,y)\}$, als $c(x,y) - f(x,y) > 0$ is. Wanneer $c(x,y) - f(x,y) = 0$ krijgt y geen label.
4. Laat x een gelabelde knoop zijn. Als (y,x) een tak is en y is niet gelabeld, label y dan met $(x, \Delta y)$, en $\Delta y := \min\{\Delta x, f(y,x) - b(y,x)\}$, als $f(y,x) - b(y,x) > 0$ is. Wanneer $f(y,x) - b(y,x) = 0$ krijgt y geen label.

Analoog als in het bewijs van Stelling 6.9 zal na het herhaaldelijk toepassen van de labelingsprocedure en het steeds weer aanpassen van de stromen in de takken de uiteindelijke waarde van de stroom in het hele netwerk gelijk zijn aan $c(P, \bar{P}) - b(\bar{P}, P)$, waarin P de verzameling van de gelabelde knopen voorstelt en \bar{P} de verzameling van de ongelabelde knopen. \square

Zoals in het bewijs bij punt 1 reeds is aangegeven berust de constructie van een maximale mogelijke stroom op het bestaan van één of andere beginstroom. In tegenstelling tot de situatie bij Stelling 6.9 is het nu geenszins vanzelfsprekend dat er zo'n beginstroom bestaat (zie Voorbeeld 7.5). Een stroom met waarde 0 in elke tak is bijvoorbeeld alleen maar mogelijk als $b(e) = 0, \forall e \in E$; in feite is dat het geval waarop Stelling 6.9 van toepassing is.

Om uit te maken of er bij een gegeven netwerk $N(V, E)$ een mogelijke beginstroom bestaat, construeren we bij N een netwerk $\bar{N}(\bar{V}, \bar{E})$, dat voldoet aan de volgende afspraken:

- (i) \bar{N} bevat alle knopen van V en nog twee extra knopen \bar{a} en \bar{z} , die de bron resp. put van \bar{N} vormen. We kunnen ook zeggen $\bar{V} = V \cup \{\bar{a}, \bar{z}\}$.
- (ii) \bar{N} bevat alle takken van E . De capaciteit $\bar{c}(v, w)$ van een tak (v, w) is gelijk aan $\bar{c}(v, w) = c(v, w) - b(v, w)$.
- (iii) Bij elke tak (v, w) van N hoort een tak (\bar{a}, w) in \bar{N} , met capaciteit $\bar{c}(\bar{a}, w) = b(v, w)$ en een tak (v, \bar{z}) met capaciteit $\bar{c}(v, \bar{z}) = b(v, w)$.
- (iv) De knopen a en z van N (die volgens (i) ook knopen van \bar{N} zijn, maar *niet* de bron en de put van \bar{N} vormen) zijn verbonden door een tak (z, a) met capaciteit $\bar{c}(z, a) = \infty$.

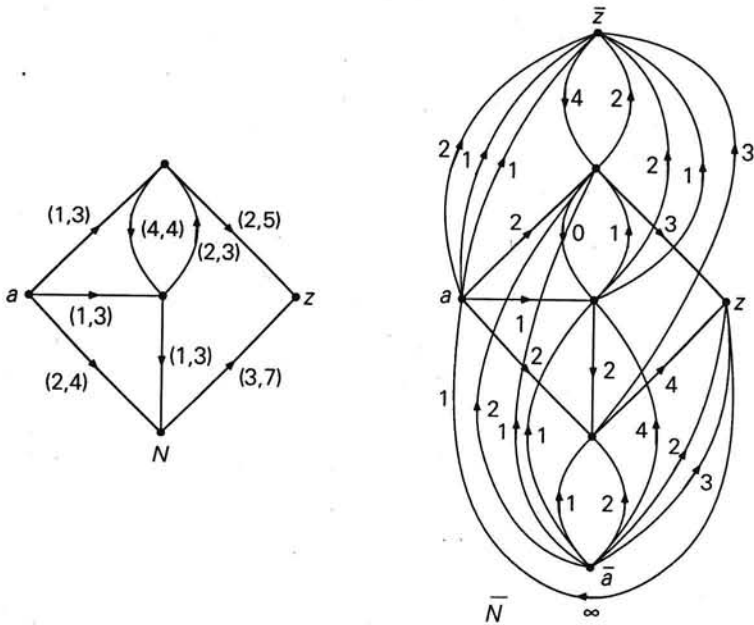
Aldus correspondeert het netwerk N met een netwerk \bar{N} dat géén ondergrenzen bevat voor de stromen in de takken.

Voorbeeld 7.6

Onderstaande stelling geeft nu aan hoe we in het algemeen een beginstroom in een netwerk N (zie figuur 7.16) kunnen construeren met behulp van het met N corresponderende netwerk \bar{N} .

Stelling 2.5

In een netwerk N bestaat een mogelijke stroom dan en slechts dan als er in N een maximale stroom bestaat, zodanig dat alle takken incident met \bar{z} verzadigd zijn.



Figuur 7.16.

Bewijs

- (i) Stel dat er een mogelijke stroom f in N bestaat. Definieer nu de stroom \bar{f} in \bar{N} als volgt:

$$\bar{f}(v,w) = f(v,w) - b(v,w),$$

$$\bar{f}(v,\bar{z}) = \bar{c}(v,\bar{z}),$$

$$\bar{f}(\bar{a},w) = \bar{c}(\bar{a},w),$$

$$\bar{f}(z,a) = \text{val}(f),$$

waarbij v en w steeds knopen uit V zijn, inclusief a en z .

Dat \bar{f} inderdaad een stroom is in \bar{N} en voldoet aan Definitie 6.2 zullen we nu aantonen.

Evident is dat

$$0 \leq \bar{f}(v,w) \leq c(v,w) - b(v,w) = \bar{c}(v,w), \quad (v,w) \in E.$$

Soortgelijke ongelijkheden gelden voor takken (v,\bar{z}) , (\bar{a},w) en (z,a) .

Vervolgens laten we zien dat eis (ii) van Definitie 6.2 vervuld is. Neem $w \neq \bar{x}$ en $\neq \bar{z}$. We kunnen, gebruik makend van de afspraken voor f , schrijven

$$\sum_{v \in \bar{V}} \bar{f}(v,w) = \sum_{v \in V} \bar{f}(v,w) + \sum' \bar{f}(\bar{a},w)$$

waarbij \sum' de sommatie voorstelt over *alle* takken van \bar{a} naar w . Echter geldt

$$\sum' \bar{f}(\bar{a},w) = \sum_{v \in V} b(v,w)$$

en dus is

$$\begin{aligned} \sum_{v \in \bar{V}} \bar{f}(v,w) &= \sum_{v \in V} \bar{f}(v,w) + \sum_{v \in V} b(v,w) \\ &= \sum_{v \in V} f(v,w) - \sum_{v \in V} b(v,w) + \sum_{v \in V} b(v,w) \\ &= \sum_{v \in V} f(v,w) \end{aligned}$$

Analoog blijkt

$$\sum_{y \in \bar{V}} \bar{f}(w,y) = \sum_{y \in V} f(w,y)$$

Dus geldt

$$\sum_{v \in \bar{V}} \bar{f}(v,w) = \sum_{y \in \bar{V}} \bar{f}(w,y),$$

omdat f een stroom in N is. We concluderen dat \bar{f} een stroom is in \bar{N} . De takken naar \bar{z} zijn verzadigd, zoals de definitie van \bar{f} duidelijk laat zien.

- (ii) Stel dat \bar{f} een stroom in \bar{N} is, zodanig dat de takken naar \bar{z} verzadigd zijn. We definiëren een stroom f in N volgens

$$f(v,w) = \bar{f}(v,w) + b(v,w).$$

Ook van f moeten we nu aantonen dat er inderdaad voldaan is aan de eisen van Definitie 6.2 en aan de ongelijkheden (7.1).

Onmiddellijk is duidelijk, daar $\bar{f}(v,w) \geq 0$, dat

$$f(v,w) \geq b(v,w).$$

Eveneens geldt

$$f(v,w) = \bar{f}(v,w) + b(v,w) \leq \bar{c}(v,w) + b(v,w) = c(v,w).$$

Neem w ($\neq a$ en $\neq z$). Uit het verzadigd zijn van alle takken naar \bar{z} volgt het verzadigd zijn van alle takken uit \bar{a} . Immers, met elke tak naar \bar{a} correspondeert

een tak uit \bar{a} met dezelfde capaciteit. Dus is

$$\sum_{v \in V} b(v, w) = \sum' (\bar{a}, w)$$

en

$$\sum_{y \in V} b(w, y) = \sum'' (w, \bar{z})$$

waarin \sum'' de sommatie voorstelt over *alle* takken van w naar \bar{z} .

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} & \sum_{v \in V} f(v, w) + \sum_{y \in V} f(w, y) \\ &= \left[\sum_{v \in V} \bar{f}(v, w) + \sum_{v \in V} b(v, w) \right] - \left[\sum_{y \in V} \bar{f}(w, y) + \sum_{y \in V} b(w, y) \right] = \\ &= \left[\sum_{v \in V} \bar{f}(v, w) + \sum' \bar{f}(\bar{a}, w) \right] - \left[\sum_{y \in V} \bar{f}(w, y) + \sum'' \bar{f}(w, \bar{z}) \right] = \\ &= \sum_{v \in \bar{V}} \bar{f}(v, w) - \sum_{y \in \bar{V}} \bar{f}(w, y) \end{aligned}$$

Dus f voldoet aan eis (ii) van Definitie 6.2. □

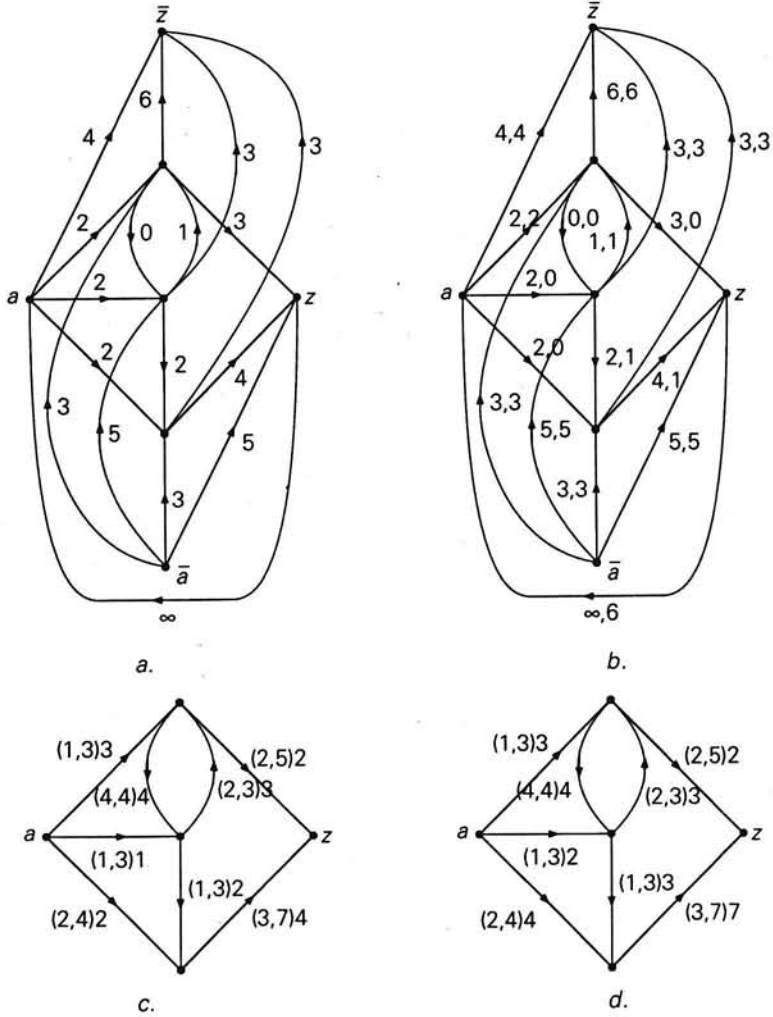
Stelling 7.5 leert ons dat we een mogelijke beginstroom in een netwerk N kunnen construeren door een maximale stroom \bar{f} in \bar{N} te construeren. Als hierbij niet alle takken naar \bar{z} verzadigd zijn, is er géén mogelijke stroom in N . Als wel alle takken naar \bar{z} verzadigd zijn dan construeren we een mogelijke beginstroom f in N op de manier zoals is aangegeven in het laatste bewijs. Vervolgens passen we daarop de labelingsprocedure toe uit het bewijs van Stelling 7.4

Voorbeeld 7.6 (vervolg)

We passen de methode toe op het netwerk N uit Voorbeeld 7.6. Allereerst vereenvoudigen we \bar{N} door meervoudige takken te vervangen door één tak. We krijgen dan het netwerk uit figuur 7.17a. Hierin construeren we een maximale stroom met behulp van de labelingsprocedure uit het bewijs van Stelling 6.9

De takken naar \bar{z} blijken verzadigd te zijn.

Met behulp van de relatie $f(v, w) = \bar{f}(v, w) + b(v, w)$ verkrijgen we nu een beginstroom f in het oorspronkelijke netwerk N (zie figuur 7.17c). Tenslotte is in figuur 7.17d het eindresultaat vermeld van de labelingsprocedure uit Stelling 7.5.



Figuur 7.17.

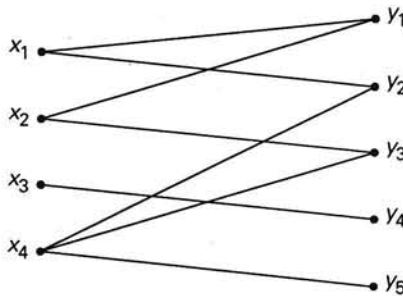
8

Matchingtheorie

8.1. Probleemstelling

In het kader van een bouwproject zijn er vijf karweien y_1, y_2, y_3, y_4 en y_5 te verrichten, waarvoor in principe vier werkkrachten x_1, x_2, x_3 en x_4 beschikbaar zijn. Echter is niet elke werkkracht gekwalificeerd voor elk karwei. Om precies te zijn, x_1 is gekwalificeerd voor karwei y_1 en y_2 , x_2 voor y_1 en y_3 , x_3 alleen voor y_4 en x_4 voor y_2, y_3 en y_5 . De vraag doet zich nu voor of het mogelijk is om elke werkkracht een karwei toe te wijzen waarvoor hij gekwalificeerd is, en zo ja, hoe deze toewijzing dan moet gebeuren. Algemeener zou men kunnen vragen naar het maximale aantal werkkrachten dat men (tegelijk) aan een karwei kan zetten waarvoor ze gekwalificeerd zijn.

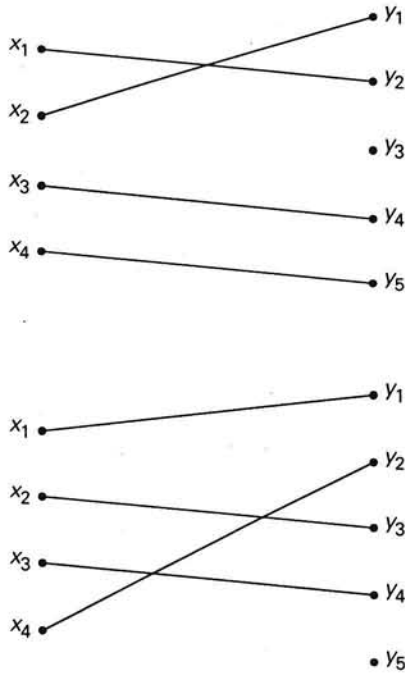
Om het probleem beter te kunnen overzien construeren we een bijbehorende graaf. De knopen van de graaf zijn $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ en y_5 . Een knoop x_i is verbonden door een tak met een knoop y_j als werkkracht x_i gekwalificeerd is om karwei y_j te doen en anders niet. Tussen twee knopen van type x loopt géén tak en ook niet tussen twee knopen van type y . Er ontstaat zo de graaf van figuur 8.1.



Figuur 8.1.

Het probleem komt er nu op neer dat men een deelverzameling van de takken kiest, zodanig dat elke x met precies één y verbonden is en dat elke y met hoogstens één x verbonden is. Bij dit zeer eenvoudige voorbeeld presenteren zich ogenblikkelijk oplossingen, zoals die uit figuur 8.2.

Vanzelfsprekend zijn de gestelde vragen moeilijker te beantwoorden als het aantal werkkrachten en het aantal karweien groter is. Teneinde ook dan tot resultaten te komen zullen we een paar stellingen ontwikkelen die nauw samenhangen met de theorie uit Hoofdstuk 6 en 7.



Figuur 8.2.

Allereerst classificeren we het type graaf uit figuur 8.1.

Definitie 8.1

Een bipartiete graaf G is een graaf waarvan de knopenverzameling V_G de vereniging is van twee disjuncte deelverzamelingen V_1 en V_2 ($V_G = V_1 \cup V_2$ en $V_1 \cap V_2 = \emptyset$) en waarvan elke tak een knoop van V_1 verbindt met een knoop van V_2 .

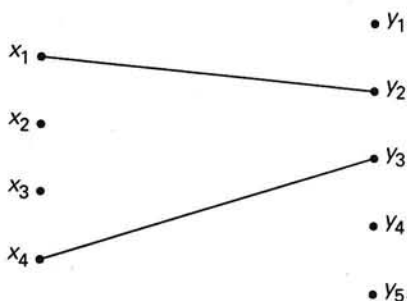
In figuur 8.1 is $V_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ en $V_2 = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$. De grafen uit figuur 8.2 zijn ook bipartiet met dezelfde V_1 en V_2 . (Zie voor bipartiete grafen ook vraagstukken 5.11 en 5.12.)

Definitie 8.2

Een matching in een bipartiete graaf is een deelverzameling van de takken van die graaf zodanig dat er geen twee takken incident zijn met dezelfde knoop.

In figuur 8.2 waren twee matchings weergegeven van de bipartiete graaf uit figuur 8.1. In figuur 8.3 treft men ook een matching aan van dezelfde graaf. Let erop dat hier niet *alle* knopen x incident zijn met takken van de matching

Men kan ook zeggen dat een matching een één-éénduidige afbeelding is tussen een deelverzameling van V_1 en een deelverzameling van V_2 .



Figuur 8.3.

8.2. Volledige matching

We beginnen met de definitie van volledigheid van een matching.

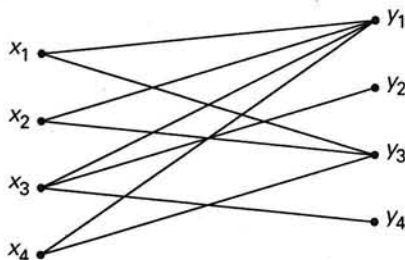
Definitie 8.3

Een volledige matching in een bipartiete graaf is een matching, zodanig dat elke knoop van V_1 incident is met een tak van de matching.

De matchings uit figuur 8.2 zijn volledig, die uit figuur 8.3 niet. Een volledige matching is een één-éénduidige afbeelding tussen V_1 en een deelverzameling van V_2 . Voor het bestaan van een volledige matching in een bipartiete graaf, waarvan VG ge-partitioneerd is als $VG = V_1 \cup V_2$, is het in elk geval noodzakelijk dat $|V_1| \leq |V_2|$. Voldoende is dit echter niet, zoals Voorbeeld 8.1 aantoont.

Voorbeeld 8.1

In figuur 8.4 is de bipartiete graaf gegeven met $|V_1| = |V_2| = 4$.



Figuur 8.4.

In een volledige matching is x_1 of incident met de tak $\{x_1, y_1\}$ of met $\{x_1, y_3\}$. Stel dat x_1 incident is met $\{x_1, y_1\}$, dan moet x_2 wel incident zijn met $\{x_2, y_3\}$. Echter is er dan geen tak meer mogelijk waarmee x_4 incident is. Een soortgelijke redenering toont aan dat x_1 ook niet met $\{x_1, y_3\}$ incident kan zijn.

Er bestaat voor deze graaf dus geen volledige matching. We kunnen het niet-bestaan

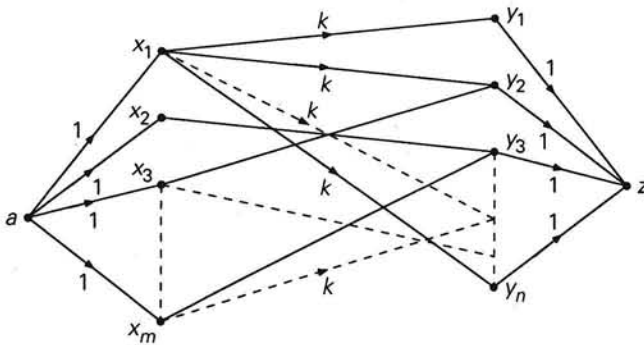
van een volledige matching in Voorbeeld 8.1 ook wel op een andere (zij het equivalente) manier begrijpen. Beschouw de knopen x_1, x_2 en x_4 en de daarmee incidenten takken. Deze takken zijn of met y_1 of met y_3 incident. We vatten deze knopen en takken samen op als een bipartiete graaf H met $W_1 = \{x_1, x_2, x_4\}$ en $W_2 = \{y_1, y_3\}$ als de knopendeelverzamelingen. Omdat $|W_1| > |W_2|$ is bestaat er voor deze graaf H zeker geen volledige matching en dus ook niet voor de gehele graaf G . De volgende stelling generaliseert dit idee en geeft een nodige en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een volledige matching.

Stelling 8.4. (P. Hall)

Laat $G = (V, E)$ een bipartiete graaf zijn, met V gepartitioneerd als $V = V_1 \cup V_2$. Er bestaat een volledige matching van V_1 in V_2 dan en slechts dan als voor elke deelverzameling $A \subseteq V_1$ geldt $|A| \leq |R(A)|$, waarbij $R(A)$ de deelverzameling van V_2 is bestaande uit die knopen die naburig zijn met de knopen van A .

Bewijs

Stel $V_1 = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ en $V_2 = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. We construeren nu een transportnetwerk N dat bestaat uit de gegeven graaf G en twee extra knopen, de bron a en de put z , en met extra takken (a, x_i) , $1 \leq i \leq m$, en (y_j, z) , $1 \leq j \leq n$. Bovendien zijn alle takken van G voorzien van een richting; in plaats van $\{x_i, y_j\}$ hebben we nu (x_i, y_j) . Elke tak van de oorspronkelijke graaf G krijgt capaciteit $k > |V_1|$ en elke nieuwe tak krijgt capaciteit 1. Aldus krijgen we een netwerk van het type als in figuur 8.5.



Figuur 8.5.

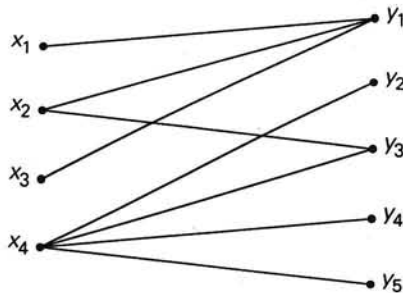
Wanneer er een volledige matching in G bestaat is er een mogelijke stroom van a naar z in N , met in elke tak (a, x_i) een stroomsterkte 1. Duidelijk is dat deze stroom maximaal is met waarde $|V_1|$. Is er omgekeerd in N een maximale stroom met waarde $|V_1|$, dan bestaat er in G een volledige matching.

We zullen nu aantonen dat, als $|A| \leq |R(A)|$ voor alle $A \subseteq V_1$, voor elke snede (P, \bar{P}) van N geldt dat de capaciteit $c(P, \bar{P}) \geq |V_1|$. Aangezien er zeker een snede is met capaciteit gelijk aan $|V_1|$ (alle takken die incident zijn met a) volgt uit Stelling 6.9 dat de maximale stroom een waarde $|V_1|$ heeft.

Neem $A := \{x_1, x_2, \dots, x_i\}$, $0 \leq i \leq m$, eventueel na henummering van de knopen x . Neem eveneens $B := \{y_1, y_2, \dots, y_j\}$, $0 \leq j \leq n$, ook eventueel na henummering van de knopen y . Definieer nu $P := \{a\} \cup A \cup B$, dan is dus $\bar{P} = (V_1 - A) \cup (V_2 - B) \cup \{z\}$. Als er een tak (x, y) is met $x \in A$ en $y \in V_2 - B$, dan behoort deze tak tot de snede (P, \bar{P}) en dus is dan $c(P, \bar{P}) \geq k > |V_1|$, wegens de keuze van het getal k . Is er niet zo'n tak dan is kennelijk $R(A) \subseteq B$, terwijl de snede (P, \bar{P}) bestaat uit de takken van a naar $V_1 - A$ en uit de takken van B naar z . Omdat elk van deze takken een capaciteit van 1 heeft, is $c(P, \bar{P}) = |V_1 - A| + |B| = |V_1 - A| + |B| \geq |V_1| - |A| + |R(A)| \geq |V_1|$. We mogen dus concluderen dat er in N een maximale stroom bestaat met waarde V_1 ofwel dat er in G een volledige matching bestaat.

Stel omgekeerd dat $A \subseteq X$ met $|A| > |R(A)|$. Laat (P, \bar{P}) de snede in N zijn met $P = \{a\} \cup A \cup R(A)$ en $\bar{P} = (V_1 - A) \cup (V_2 - R(A)) \cup \{z\}$. Net als boven volgt dan $c(P, \bar{P}) = |V_1 - A| + |R(A)| = |V_1 - A| + |R(A)| < |V_1|$. Dus volgt uit Stelling 6.9 dat de maximale stroom in N een waarde $< |V_1|$ heeft, ofwel in G bestaat geen volledige matching. \square

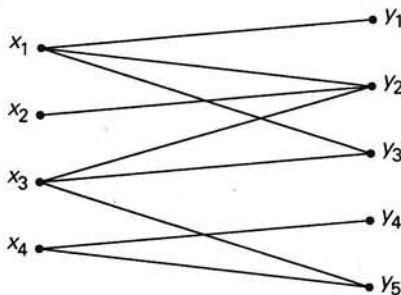
Voorbeeld 8.2



Figuur 8.6.

Neemt men in bipartiete graaf van figuur 8.6 $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ dan is $R(A) = \{y_1, y_3\}$ en dus is $|A| > |R(A)|$. Er zal dus géén volledige matching bestaan.

Voorbeeld 8.3



Figuur 8.7.

Voor $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ is $|A| = 4$ en $|R(A)| = 5 \geq 4$.

Voor $A = \{x_1, x_2, x_3\}$ is $|A| = 3$ en $|R(A)| = 4 \geq 3$.

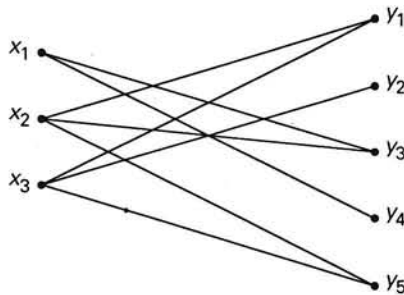
Voor $A = \{x_1, x_2, x\}$ is $|A| = 3$ en $|R(A)| = 5 \geq 3$.

Gaan we zo alle 2^n deelverzamelingen A van V_1 na, dan blijkt steeds $|R(A)| \geq |A|$.

Dus bestaat er een volledige matching.

Voorbeeld 8.4

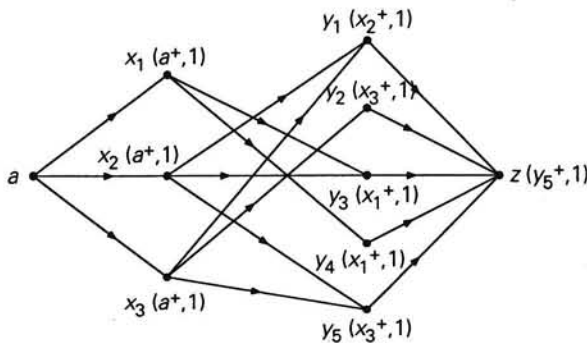
Vijf politici y_1, y_2, y_3, y_4 en y_5 zijn lid van een drietal commissies x_1, x_2 en x_3 . In de graaf van figuur 8.8 is te zien wie er precies van welke commissie lid is.



Figuur 8.8.

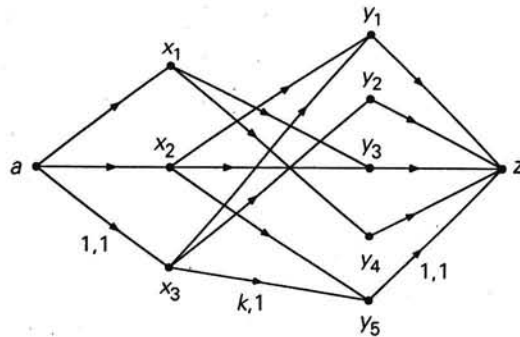
Voor een hoorzitting is het nodig dat elke commissie door een verschillend persoon wordt vertegenwoordigd. Is dit mogelijk en zo ja, hoe moeten de vertegenwoordigers dan gekozen worden?

Dat een vertegenwoordiging zoals gevraagd mogelijk is valt met Stelling 8.4 uit te maken. Om te bepalen wie er gekozen moeten worden passen we de labelingsprocedure toe.



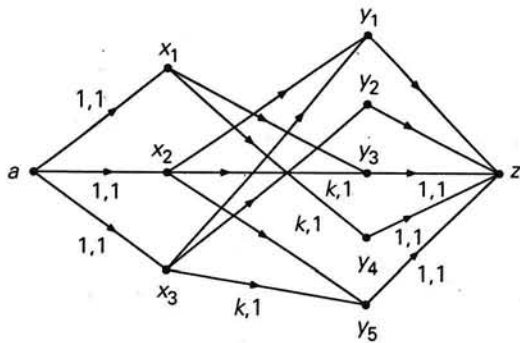
Figuur 8.9.

De takken uit a en naar z hebben capaciteit 1, alle andere hebben capaciteit $k > |V_1|$. Als beginstroom nemen we de stroom zoals aangegeven in figuur 8.10.



Figuur 8.10.

Alle takken waar geen labels bij staan hebben label 1,0 of $k,0$. Na nog twee keer de procedure toegepast te hebben vindt men een maximale stroom.



Figuur 8.11.

De volledige matching in de oorspronkelijke graaf bestaat dus uit de takken $\{x_1, y_4\}$, $\{x_2, y_3\}$ en $\{x_3, y_5\}$. Vanzelfsprekend had men deze matching in dit eenvoudige voorbeeld ook wel door 'proberen' kunnen vinden.

In Voorbeeld 8.3 bleek dat het toepassen van Stelling 8.4 zeer bewerkelijk kan zijn, omdat men in principe 2^m deelverzamelingen $A \subseteq V_1$ moet controleren als $|A| = m$. Soms kan men sneller te werk gaan. Zo geeft Stelling 8.5 een voldoende voorwaarde voor het bestaan van een volledige matching.

Stelling 8.5

Laat $G = (V, E)$ een bipartiete graaf zijn, met V gepartitioneerd als $V = V_1 \cup V_2$. Er bestaat een volledige matching van V_1 in V_2 als voor één of ander positief geheel getal M geldt $\rho(x) \geq M > \rho(y)$, $\forall x \in V_1$ en $\forall y \in V_2$.

Bewijs

Uit een deelverzameling $A \subseteq V_1$ gaan minstens $M|A|$ takken naar V_2 . Deze takken kunnen niet incident zijn met minder dan $|A|$ knopen in V_2 , want $|A|$ knopen in V_2

zijn hoogstens incident met M $|A|$ takken en dus een kleiner aantal dan $|A|$ knopen met een nog kleiner aantal takken. Dus geldt $|R(A)| \geq |A|$ en we kunnen Stelling 8.4 toepassen. \square

Opmerking

De voorwaarde uit Stelling 8.5 is voldoende maar niet noodzakelijk voor het bestaan van een volledige matching. Met andere woorden, als er niet voldaan is aan de voorwaarde zou er toch nog wel een volledige matching kunnen bestaan.

Voorbeeld 8.5

Op een school zijn 500 leerlingen en wel 250 jongens en 250 meisjes. Elke jongen kent minstens 4 meisjes en elk meisje kent hoogstens 4 jongens. Is het mogelijk dat elke jongen naar het schoolbal gaat met een meisje dat hij kent en dat ook tegelijk elk meisje daar naar toe gaat met een jongen die zij kent?

We maken een bipartiete graaf met $|V_1| = |V_2| = 250$. Twee knopen worden verbonden door een tak als de betreffende jongen en het betreffende meisje elkaar kennen. Hierbij wordt er stilzwijgend (en niet onrealistisch) vanuit gegaan dat 'kennen' wederzijds kennen betekent. Stelling 8.5 geeft nu, met $M = 4$, onmiddellijk een bevestigend antwoord op de gestelde vraag.

Opmerking

Om deze reden wordt de voorwaarde uit Stelling 8.5 Hall's Marriage Condition genoemd. Hall's oorspronkelijke formulering was algemener (hoewel maatschappelijk gezien éénzijdiger): als in een willekeurige groep van jongens en meisjes elke jongen minstens M meisjes kent en elk meisje hoogstens M jongens is het dan mogelijk dat elke jongen trouwt met een meisje dat hij kent? Uit Stelling 8.5 volgt dat ook hier het antwoord bevestigend is. Alleen als het aantal meisjes even groot is als het aantal jongens, zoals in het laatste voorbeeld krijgt de uitspraak een evenwichtiger aanzien. In dit geval kunnen de woorden minstens en hoogstens allebei vervangen worden door precies.

8.3. Maximale matching

Wanneer in een bipartiete graaf G geen volledige matching van V_1 in V_2 mogelijk is, kunnen we proberen een matching te vinden waarbij er *zoveel mogelijk* knopen uit V_1 verbonden zijn met knopen uit V_2 .

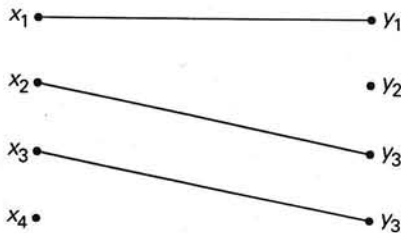
Definitie 8.6

Een maximale matching in een bipartiete graaf is een matching, zodanig dat het aantal knopen van V_1 die incident zijn met een tak van de matching zo groot mogelijk is.

Evenmin als een volledige matching hoeft een maximale matching éénduidig te zijn.

Voorbeeld 8.6

De graaf uit Voorbeeld 8.1 bezit geen volledige matching zoals we zagen. In de matching van figuur 8.12 zijn drie van de vier knopen uit V_1 incident met takken. Dus is deze matching maximaal.



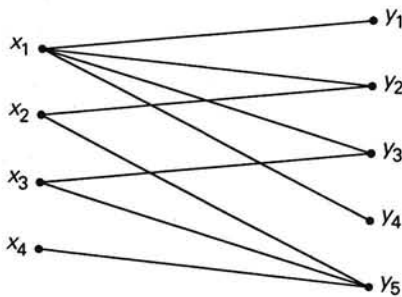
Figuur 8.12.

Om de grootte en de constructie van maximale matchings te onderzoeken voeren we het volgende begrip in.

Definitie 8.7

Laat $G = (V, E)$ een bipartiete graaf zien met V gepartitioneerd als $V = V_1 \cup V_2$. Als $A \subseteq V_1$, dan is $\delta(A) = |A| - |R(A)|$ de deficiëntie van A . De deficiëntie van G is gelijk aan $\delta(G) = \max \{ \delta(A) \mid A \subseteq V_1 \}$.

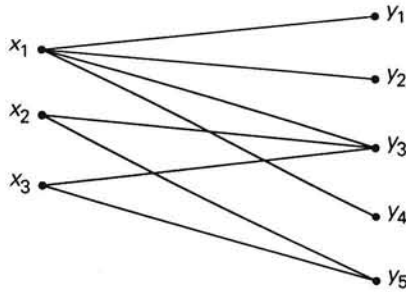
Er geldt voor elke bipartiete graaf G dat $\delta(G) \geq 0$ is, want $\delta(\emptyset) = 0$. Als $\delta(G) > 0$ is, is er een $A \subseteq V_1$ met $|A| > |R(A)|$. Volgens Stelling 8.4 bezit G dan geen volledige matching.

Voorbeeld 8.7

Figuur 8.13.

Bovenstaande graaf heeft geen volledige matching. Voor $A = \{x_2, x_3, x_4\}$ geldt $R(A) = \{y_3, y_5\}$ en dus is $\delta(A) = 3 - 2 = 1$ en $\delta(G) \geq 1$.

Verwijderen we nu knoop x_4 en de takken incident met x_4 dan ontstaat de graaf van figuur 8.14 die wèl een volledige matching bezit, zoals men ogenblikkelijk inziet.



Figuur 8.14.

Stelling 8.8

Laat $G(V, E)$ een bipartiete graaf zijn, met V gepartitioneerd als $V = V_1 \cup V_2$. Een maximale matching van G is incident met $|V_1| - \delta(G)$ knopen van V_1 .

Bewijs

We gebruiken een transportnetwerk N zoals in het bewijs van Stelling 8.4. Analoog als in dat bewijs zullen we nu aantonen dat voor elke snede (P, \bar{P}) geldt dat $c(P, \bar{P}) \geq |V_1| - \delta(G)$, en voorts dat er een snede bestaat waarvoor het gelijkteken in deze betrekking geldig is.

We definiëren weer $P = \{a\} \cup A \cup B$, met $A \subseteq V_1$ en $B \subseteq V_2$.

Als er een tak (x, y) is met $x \in A$ en $y \in V_2 - B$, dan behoort deze tak tot de snede (P, \bar{P}) en dus is dan $c(P, \bar{P}) \geq k > |V_1| - \delta(G)$.

Is er niet zo'n tak, dan is $R(A) \subseteq B$, terwijl de snede (P, \bar{P}) bestaat uit de takken van a naar $V_1 - A$ en uit de takken van B naar z . Al deze takken hebben een capaciteit gelijk aan 1 en dus is $c(P, \bar{P}) = |V_1 - A| + |B| = |V_1| - |A| + |B| \geq |V_1| - |A| + |R(A)| = |V_1| - \delta(A) \geq |V_1| - \delta(G)$.

In alle gevallen geldt dus $c(P, \bar{P}) \geq |V_1| - \delta(G)$.

We zullen tenslotte laten zien dat er inderdaad een snede bestaat in N , waarvan de capaciteit gelijk is aan $|V_1| - \delta(G)$. We kiezen daartoe een $A \subseteq V_1$ met $\delta(A) = \delta(G)$.

Als nu $B := R(A)$ gekozen wordt in het eerste deel van dit bewijs, dan zijn er geen takken tussen A en $V_2 - B$. Dus is $c(P, \bar{P}) = |V_1 - A| + |R(A)| = |V_1| - |A| + |R(A)| = |V_1| - \delta(A) = |V_1| - \delta(G)$. \square

Voorbeeld 8.8

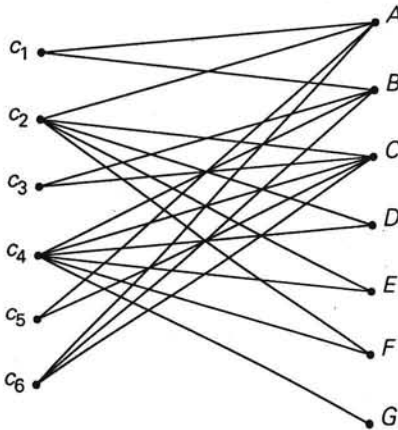
Een parlement heeft zes commissies geïnstalleerd met de volgende samenstellingen:

$c_1 = \{A, B\}$, $c_2 = \{A, C, D, E, F\}$, $c_3 = \{B, C\}$, $c_4 = \{B, C, D, E, F, G\}$, $c_5 = \{A, C\}$, $c_6 = \{A, B, C\}$.

In een of andere vergadering mag elke commissie door hoogstens één lid vertegenwoordigd zijn. Bovendien mag één persoon hoogstens één commissie vertegenwoordigen. De vraag is nu wat het grootst mogelijke aantal commissieleden is die aan de

vergadering deel kunnen nemen. Dit aantal is dus tevens het grootst mogelijke aantal commissies die in de bewuste vergadering vertegenwoordigd zijn.

We construeren een bipartiete graaf G , waarbij V_1 de verzameling commissies is en V_2 de verzameling personen die lid zijn van die commissies. Er is een tak $\{x, y\}$ als persoon y lid is van commissie x .



Figuur 8.15.

Het doel is nu een maximale matching te bepalen van V_1 in V_2 .

Nemen we $A = \{c_1, c_3, c_5, c_6\}$, dan is $R(A) = \{A, B, C\}$ en dus is $\delta(A) = 4 - 3 = 1$. Inspectie van alle andere deelverzamelingen van V_1 leert dat er geen deelverzameling is met een grotere waarde van δ . Dus is $\delta(G) = 1$. Uit Stelling 8.8 volgt dat het maximale aantal takken in een matching gelijk is aan $6 - 1 = 5$. Dus is het gevraagde aantal ook gelijk aan 5.

In de volgende twee voorbeelden is de precieze structuur van de bipartiete graaf niet bekend. Uit de onvolledige kennis die we van de graaf hebben kunnen we, zo blijkt, toch nog wel conclusies trekken omtrent het aantal takken in een maximale matching.

Voorbeeld 8.9

Van een bipartiete graaf $G = (V, E)$, met partitionering $V = V_1 \cup V_2$, is bekend dat $\rho(x) \geq 4, \forall x \in V_1$ en dat $\rho(y) \leq 5, \forall y \in V_2$. Voorts is nog gegeven dat $|V_1| \leq 15$. Men wil graag weten hoeveel takken er minstens in een maximale matching van V zullen zitten, hoe de graaf er verder ook uitziet.

We nemen een $A \subseteq V_1$ ($A \neq \emptyset$) en beschouwen alle takken uitgaande van A . Noem deze verzameling F , dus $F = \{\{a, b\} \mid a \in A, b \in R(A)\}$. Uit de gegevens volgt dat $|F| \geq 4|A|$ en $|F| \leq 5|R(A)|$. Dus volgt dat $4|A| \leq 5|R(A)|$ en $\delta(A) = |A| - |R(A)| \leq |A| - \frac{4}{5}|A| = \frac{1}{5}|A|$. Omdat $A \subseteq V_1$ is ook $|A| \leq 15$ en dus $\delta(A) < \frac{1}{5} \cdot 15 = 3$. Dit geldt voor alle $A \subseteq V_1$. Daarom is ook $\delta(G) \leq 3$ en het aantal takken in een maximale matching is minstens $|V_1| - 3$.

Voorbeeld 8.10

Een groot constructiebedrijf moet een zeer omvangrijk project uitvoeren. Het project heeft 30 deelprojecten die aan onderaannemers zullen worden uitbesteed. Voor elke deelproject kunnen hoogstens 7 aannemers inschrijven. In totaal schrijven 50 aannemers in. Van hen zijn er 5 die op 10 deelprojecten inschrijven, 5 die op 8 projecten inschrijven en 20 op 3 projecten. De overige 20 schrijven op 2 projecten in. Om redenen die er hier niet toe doen worden er niet twee of meer projecten aan eenzelfde aannemer gegund. Wat is, onder bovengenoemde condities, het maximale aantal deelprojecten die tegelijk kunnen worden uitgevoerd?

Ook hier construeren we (denkbeeldig) een bipartiete graaf, met als V_1 de verzameling onderaannemers en als V_2 de deelprojecten. Er is een tak $\{x,y\}$ als aannemer x heeft ingeschreven op project y . De vraag is dan hoeveel takken een maximale matching bezit. Evenmin als in het vorige voorbeeld zullen we deze vraag precies kunnen beantwoorden. Echter kunnen we wel weer een ondergrens bepalen voor het gevraagde aantal.

We nemen een verzameling $A \subseteq V_1$ met n_1 aannemers die op 10 projecten hebben ingeschreven, n_2 op 8, n_3 op 3 en n_4 op 2 projecten. Dan is $\delta(A) = |A| - |R(A)| = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 - |R(A)|$. Wegens de beperkte inschrijving per project geldt $7|R(A)| \geq 10n_1 + 8n_2 + 3n_3 + 2n_4$. Daarom is $\delta(A) < (n_1 + n_2 + n_3 + n_4) - \frac{1}{7}(10n_1 + 8n_2 + 3n_3 + 2n_4) = -\frac{3}{7}n_1 - \frac{1}{7}n_2 + \frac{4}{7}n_3 + \frac{5}{7}n_4$.

De deelverzameling A was willekeurig gekozen. De bovengrens voor $\delta(A)$ is daarom maximaal als $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 = 20$ en $n_4 = 20$. Dus is $\delta(G) \leq (\frac{4}{7} + \frac{5}{7}) 20$ ofwel $\delta(G) \leq 25$. Het grootst mogelijke aantal deelprojecten die tegelijk kunnen worden uitgevoerd is daarom altijd minstens $|V_1| - 25 = 50 - 25 = 25$, hoe ook de inschrijvingen verdeeld zijn over de deelprojecten.

Met Stelling 3.8 zijn we in principe in staat om het aantal takken in een maximale matching in een bipartiete graaf te berekenen. Een volgende vraag, die erg voor de hand ligt, is welke takken er in een maximale matching zitten. Hiervoor bestaat een constructie die bekend staat als de *Hongaarse methode*. Om deze methode te beschrijven definiëren we eerst nog een paar begrippen voor een bipartiete graaf.

Definitie 8.9

Laat $G = (V,E)$ een bipartiete graaf zijn, gepartitioneerd volgens $V = V_1 \cup V_2$. Laat verder $M \subset E$ een matching van V_1 in V_2 zin. Een knoop $v \in V$ heet niet-verzadigd als M geen tak bevat incident met v . Een pad in G heet alternerend met betrekking tot M als het afwisselend takken van M en van $E - M$ bevat.

De Hongaarse methode berust op de volgende eigenschap.

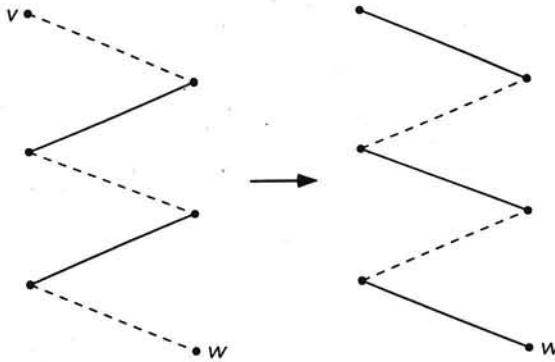
Stelling 8.10

Een matching in een bipartiete graaf G is niet maximaal dan en slechts dan als er een tweetal niet-verzadigde knopen is die via een alternerend pad met elkaar verbonden zijn.

Bewijs

Laat M een of andere matching zijn van V_1 in V_2 . Takken van M tekenen we in figuur 8.16 op de gewone wijze, takken van $E - M$ geven we aan met stippellijnen.

(i) Veronderstel dat er een alternerend pad P is tussen de niet-verzadigde knopen $v \in V_1$ en $w \in V_2$. Omdat v en w niet incident zijn met takken van M is de eerste en de laatste tak van P gestippeld. Het pad P is dus van oneven lengte en v en w liggen niet allebei in V_1 of in V_2 . Het aantal gestippelde takken in P is één groter dan het aantal niet-gestippelde takken. Laat de niet-gestippelde takken van P weg uit M en voeg aan M toe de gestippelde takken van P .



Figuur 8.16.

Omdat v en w niet-verzadigd waren, waren ze niet incident met takken van M . We krijgen daarom een nieuwe matching M' van V_1 in V_2 met $|M'| = |M| + 1$. De oorspronkelijke matching M was dus niet maximaal. De noodzakelijkheid van de conditie uit de stelling is hiermee aangetoond.

(ii) Stel nu dat er géén pad te vinden is, zoals omschreven in de stelling. Label alle niet-verzadigde knopen van V_1 . Label vervolgens ook alle knopen in V_1 en in V_2 die via een alternerend pad verbonden zijn met een niet-verzadigde knoop van V_1 .

We definiëren nu A als de verzameling van alle gelabelde knopen in V_1 . De verzameling van alle gelabelde knopen in V_2 is dan $R(A)$. Immers elke gelabelde knoop in V_2 zit ook in $R(A)$, daar hij anders niet gelabeld zou zijn. Bovendien is *elke* knoop in $R(A)$ gelabeld. Als (v, w) namelijk gestippeld is kan het alternerende pad van een niet-verzadigde knoop naar v uitgebreid worden met (v, w) , en als (v, w) niet gestippeld is, is (w, v) de laatste tak van een dergelijk pad.

We kunnen zelfs zeggen dat elke knoop in $R(A)$ verzadigd is, anders zou er namelijk

een alternerend pad bestaan tussen twee niet-verzadigde knopen. Evenzo zijn de knopen van A die met een gestippelde tak zijn verbonden met een knoop van $R(A)$ verzadigd.

We vinden dus dat $\delta(A) := |A| - |R(A)|$ gelijk is aan het aantal niet-verzadigde knopen in A en dus in V . De niet gestippelde takken (dat zijn de takken van de gegeven matching M) 'matchen' dus $|V_1| - \delta(A)$ knopen van V_1 met knopen van V_2 . Omdat $\delta(A) \leq \delta(G)$ is $|V_1| - \delta(A) \geq |V_1| - \delta(G)$. Uit Stelling 8.9 volgt dan $|V_1| - \delta(A) = |V_1| - \delta(G)$ en M is dus een maximale matching.

De voorwaarde van de stelling is dus ook voldoende. \square

Op grond van Stelling 8.10 kunnen we de volgende algoritme opstellen voor de constructie van een maximale matching.

1. Start met één of andere matching, bij voorkeur één met zoveel mogelijk takken.
2. Zoek een alternerend pad dat twee verschillende niet-verzadigde knopen v en w verbindt, met $v \in V_1$ en $w \in V_2$.
3. Als zo'n pad gevonden is construeren we volgens de methode uit het bewijs een nieuwe matching die één tak meer bevat dan de vorige en gaan vervolgens door met regel 2.

Als zo'n pad niet bestaat, is de matching maximaal.

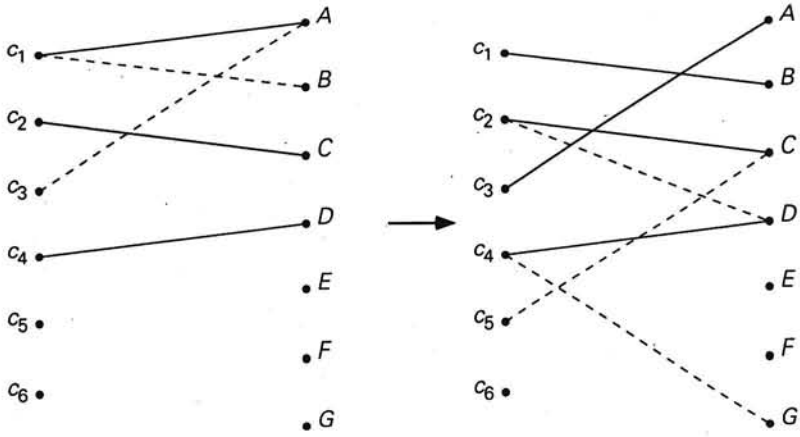
Regel 2 van deze algoritme geeft aanleiding tot een eindig zoekproces, omdat het aantal paren niet-verzadigde knopen eindig is en ook het aantal paden tussen de knopen van zo'n paar. Echter kan het systematisch zoeken in een 'grote' graaf nog wel lastig zijn. In dat geval moeten we voor dit zoekproces ook weer een aparte algoritme ontwerpen. Hierop gaan we niet verder in.

Voorbeeld 8.11

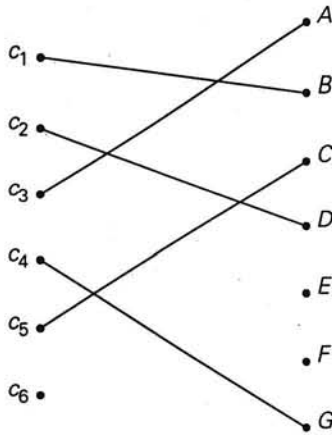
We passen de Hongaarse methode toe op de graaf uit Voorbeeld 8.8. Stel dat de beginmatching M_0 bestaat uit de takken $\{c_1, A\}$, $\{c_2, C\}$ en $\{c_4, D\}$. Ten opzichte van deze matching zijn $c_3 \in V_1$ en $B \in V_2$ twee niet-verzadigde knopen. In de figuur is een alternerend pad P aangegeven tussen c_3 en B . De enige tak van P die in de matching zit wordt weggelaten uit de matching en de beide andere takken worden toegevoegd. Zo ontstaat een nieuwe matching M_1 met 4 takken (zie figuur 8.17).

Ten opzichte van de nieuwe matching zijn c_5 en G twee niet-verzadigde knopen. Een alternerend pad tussen c_5 en G is weer in de figuur aangegeven (we hadden ook het pad via D en c_4 kunnen nemen). Door uit M_1 de takken $\{c_2, C\}$ en $\{c_4, D\}$ te verwijderen en $\{c_5, C\}$, $\{c_2, D\}$ en $\{c_4, G\}$ toe te voegen, ontstaan de matching M_2 .

Hierin is het paar niet-verzadigde knopen c_6 en E niet via een alternerend pad met elkaar te verbinden. Hetzelfde geldt voor het paar knopen c_6 en F . Dus hebben we een maximale matching verkregen.



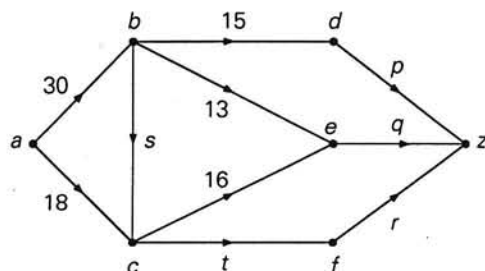
Figuur 8.17.



Figuur 8.18.

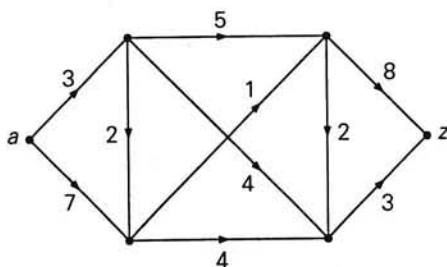
9 Vraagstukken deel 2

1. Gegeven is het volgende netwerk, waarvan alle takken een capaciteit van 30 hebben.



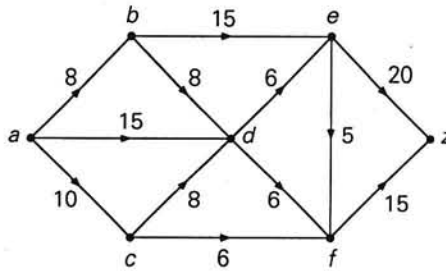
Elke tak e in het netwerk is gelabeld door een functiewaarde $f(e)$.

- Bepaal p , q , r , s en t , zodanig dat f een stroom is in het netwerk.
 - Wat is de stroomsterkte van f in (a.)?
 - Bepaal drie sneden (P, \bar{P}) die een capaciteit van 90 hebben.
 - Bepaal een snede met een kleinere capaciteit.
2. a. Bepaal alle netwerksneden (P, \bar{P}) van onderstaand netwerk.



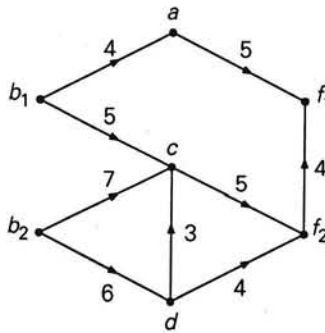
- Geef een snede aan met minimale capaciteit en probeer een stroom te vinden waarvan de stroomsterkte gelijk is aan genoemde minimale capaciteit.
- Gebruik de labelingsprocedure om een maximale stroom te construeren.

3. Gegeven is het netwerk



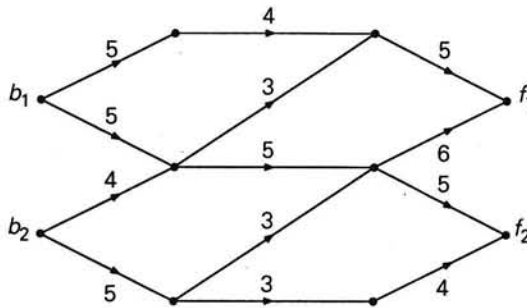
Pas de labelingsprocedure toe om een maximale stroom te construeren.

4. In het onderstaande transportnetwerk zijn b_1 en b_2 twee toeleveringsbedrijven van de fabrikanten f_1 en f_2 . Bedrijf b_1 produceert 8 ton en bedrijf b_2 7 ton. Fabrikant f_1 heeft 7 ton nodig en fabrikant f_2 6 ton. De capaciteiten zijn allemaal uitgedrukt in tonnen.

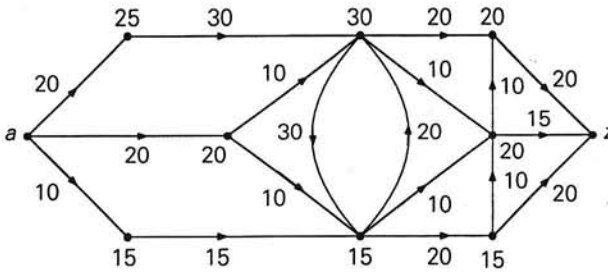


Kan het transport zo geregeld worden dat beide fabrikanten van het benodigde materiaal voorzien worden?

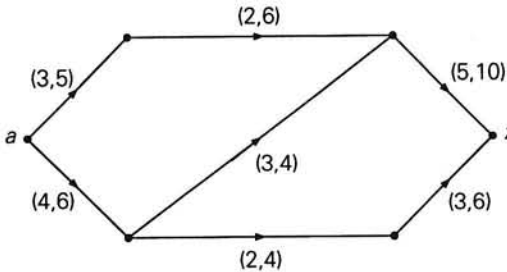
5. Dezelfde vraag als in 4, maar dan voor het onderstaande transportnetwerk.



6. In onderstaand transportnetwerk zijn er, behalve de capaciteiten van de takken, ook bovengrenzen voor de stromen door de knopen. Bepaal een maximale stroom in dit netwerk.



7. Bepaal een maximale stroom in het hieronder gegeven netwerk, waarin voor elke tak een boven- en een ondergrens bestaat voor de stroom door die tak.



8. Probeer een *minimale* stroom te construeren in het netwerk van vraag 7.
9. Een groot bouwbedrijf wil bouwkundigen, civiel ingenieurs, elektrotechnici en geodeten in dienst nemen voor drie uit te voeren projecten. De personele eisen voor deze projecten worden door de volgende tabel weergegeven.

	minimum aantal mensen	minimaal aantal van elke categorie			
		b	c	e	g
project I	40	5	10	10	5
project II	40	10	5	15	5
project III	20	5	0	10	5

In verband met toekomstige werkzaamheden moet het totaal aantal bouwkundigen tenminste 30 bedragen, het totaal aantal civiel ingenieurs tenminste 20, het totaal aantal elektrotechnici tenminste 20 en het totaal aantal geodeten tenminste 20.

Hoe groot is het minimaal aantal mensen van elke categorie dat het bedrijf in dienst moet nemen en hoe moeten deze toegewezen worden aan de verschillende projecten?

10. In een vereniging zijn zes commissies. Deze commissies zijn als volgt samengesteld: $\{A,B,C,D\}$, $\{B,C,E,F\}$, $\{A,D,G,H\}$, $\{A,B,D,G,H\}$, $\{A,B,E,F,H\}$ en $\{B,E,F,H\}$.

In een vergadering moet elke commissie vertegenwoordigd zijn door een commissielid. Probeer een zodanige selectie te vinden, dat het aantal commissieleden maximaal is.

11. Stel A_1, A_2, \dots, A_n zijn allemaal deelverzamelingen van V . Een n -tal elementen a_1, a_2, \dots, a_n van V heet een systeem van verschillende vertegenwoordigers als
- (i) $a_i \in A_i, 1 \leq i \leq n$;
 - (ii) $a_i \neq a_j$ als $i \neq j$.

Probeer voor de volgende collecties deelverzamelingen een dergelijk systeem te bepalen.

- a. $A_1 = \{2,3,4\}, A_2 = \{3,4\}, A_3 = \{1\}, A_4 = \{2,3\}$;
- b. $A_1 = A_2 = A_3 = \{2,4,5\}, A_4 = A_5 = \{1,2,3,4,5\}$;
- c. $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{2,3,4\}, A_3 = \{2,3\}, A_4 = \{1,3\}, A_5 = \{2,4\}$.

12. Gegeven zijn de zeven woorden: ster, kers, parket, trek, pret, spar, kras. Probeer een systeem van verschillende vertegenwoordigers (letters) van deze woorden te bepalen.

13. Een verzameling woorden $\{ace, bc, dab, df, fe\}$ moet als boodschappen worden overgeseind. Ga na of het mogelijk is om elk woord door één van zijn letters éénduidig voor te stellen. (Zie ook vraag 12). Als zo'n éénduidige voorstelling bestaat, is het mogelijk om boodschappen met behulp van slechts één letter over te seinen, in plaats van het hele woord.

14. Een aannemersbedrijf heeft de volgende werknemers nodig: één timmerman, één loodgieter, één instrumentmaker, twee metselaars. Er zijn 6 sollicitanten, nl. s_1, s_2, \dots, s_6 .

s_1 solliciteert naar een baan als timmerman of als loodgieter;

s_2 solliciteert naar een baan als metselaar of als loodgieter;

s_3 solliciteert naar een baan als instrumentmaker of als loodgieter of als timmerman;

s_4 solliciteert naar een baan als loodgieter;

s_5 solliciteert naar een baan als loodgieter of als timmerman;

s_6 solliciteert naar een baan als metselaar of als instrumentmaker.

Kan de personeelschef uit de sollicitanten een zodanige keuze maken dat alle vacatures vervuld worden?

15. Een autohandelaar verkoopt auto's in 3 verschillende prijsklassen, t.w.:
- Klasse I: prijs tussen f 20.000,- en f 25.000,-
- Klasse II: prijs tussen f 25.000,- en f 30.000,-

Klasse III: prijs tussen *f* 30.000,- en *f* 40.000,-.

Hij heeft in voorraad van:

Klasse I: één rode auto, één groene en één blauwe;

Klasse II: één rode auto, één groene en één oranje;

Klasse III: één rode auto, één blauwe en één oranje.

Op zekere dag staan er 7 klanten in de showroom die elk één auto wil kopen, zij stellen elk de volgende eisen:

klant 1 wil niet meer uitgeven dan *f* 25.000,-;

klant 2 wil niet meer uitgeven dan *f* 30.000,- en hij wil persé een rode auto hebben

klant 3 wil niet meer uitgeven dan *f* 30.000,- en hij wil een rode auto of een blauwe auto hebben;

klant 4 wil niet meer uitgeven dan *f* 25.000,- en hij wil beslist géén rode auto en beslist géén oranje auto;

klant 5 wil een blauwe auto die niet duurder is dan *f* 30.000,

klant 6 vindt de prijs onbelangrijk als de auto maar rood of oranje is van kleur;

klant 7 vindt de kleur onbelangrijk als de prijs maar ligt tussen de *f* 25.000,- en *f* 30.000,-.

Hoeveel auto's kan deze autohandelaar maximaal verkopen aan deze 7 klanten? Licht uw antwoord toe met behulp van de stelling van Hall of een generalisatie daarvan.

16. In een stadsvernieuwingswijk zullen binnen enkele jaren alle woningen gerenoveerd worden. Vanuit milieu-oogpunt wil men tevens iets doen aan het 'overstortprobleem' van het rioleringssysteem. Omdat de capaciteit van het rioolzuiveringssysteem te klein is (650 m³ water per uur), vindt er bij een flinke regenbui 'overstort' plaats in de grachten van de stad. Dit veroorzaakt verontreiniging van het oppervlaktewater. Het vergroten van de capaciteit brengt te grote kosten met zich mee. Er wordt besloten naar bouwkundige oplossingen te zoeken. Men mag uitgaan van de volgende gegevens.

De wijk heeft een oppervlakte van 10 ha, waarvan 4 ha daken, 4 ha verhard oppervlak en 2 ha onverhard oppervlak. Regenwater dat op de daken terecht komt wordt voor 80% afgevoerd via de riolering, terwijl 10% op verhard oppervlak terecht komt en de rest op onverhard oppervlak. Het water dat op verhard oppervlak komt wordt voor 75% afgevoerd via het rioleringssysteem, terwijl de rest op onverhard oppervlak komt. Van het water dat uiteindelijk op onverhard oppervlak terecht komt wordt toch nog, via draineringsbuizen, 30% afgevoerd naar het rioleringssysteem. De rest komt direkt in het grondwater en wordt buiten beschouwing gelaten.

De bouwkundige maatregelen die worden voorgesteld zijn in volgorde van voorkeur:

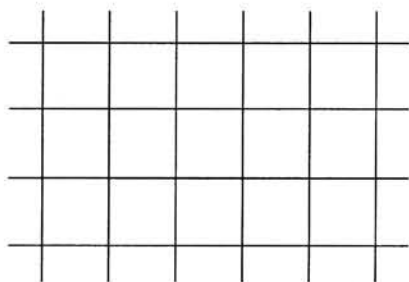
1. klinkers op de straten in plaats van asfalt; dit geeft een afstroming naar het riool van 60% in plaats van 75%;
2. grasdaken in plaats van dakpannen; vermindering van afstroming naar het riool van 80% naar 50%;
3. verhard oppervlak veranderen in onverhard oppervlak.
 - a. Ontwerp een netwerk voor het transport van regenwater van wolk naar zuiveringsinstallatie. Van alle takken in de graaf wordt aangenomen dat ze oneindige capaciteit hebben, behalve de tak van het riool naar de zuiveringsinstallatie. Wat is de minimale snede in dit netwerk?
 - b. Als de hoeveelheid regen per uur gelijk is aan M , geef dan de stroomsterkten in de verschillende takken.
 - c. Ga na of een regenbui met een neerslag van 10 mm per uur zonder overstort verwerkt kan worden.

Zo niet, ga dan na welke bouwkundige maatregelen men moet treffen.

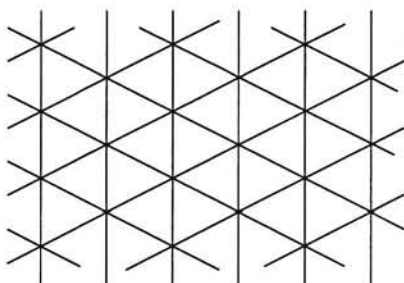
17. Van een bipartiete graaf $G = (V, E)$ met partitionering $V = V_1 \cup V_2$ is bekend dat er vanuit elke knoop van V_1 minstens 8 takken naar V_2 gaan en dat vanuit elke knoop van V_2 hoogstens 12 takken naar V_1 gaan. Het aantal knopen in V_1 is gelijk aan 20. Hoeveel takken zitten er minstens in een maximale matching?
18. Construeer met behulp van de Hongaarse methode een maximale matching in de bipartiete graaf die bij vraag 15 hoort.

Appendix A

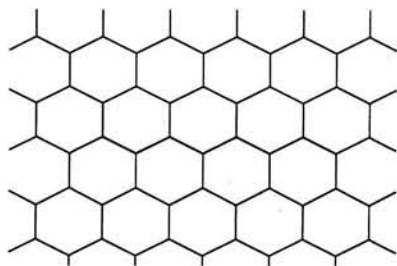
Regelmatige mozaïeken



$(4,4,4,4)$



$(3,3,3,3,3,3)$

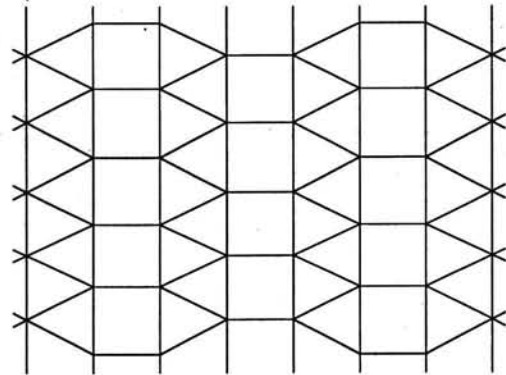


$(6,6,6)$

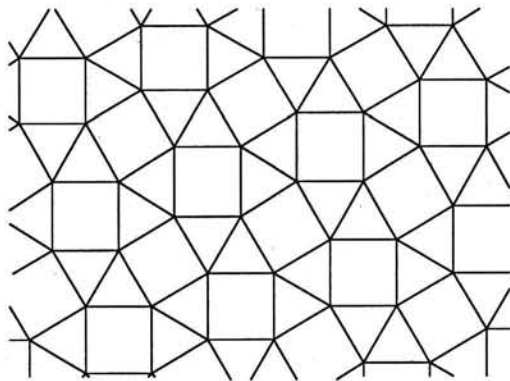
Appendix B

Half-regelmatige mozaïeken

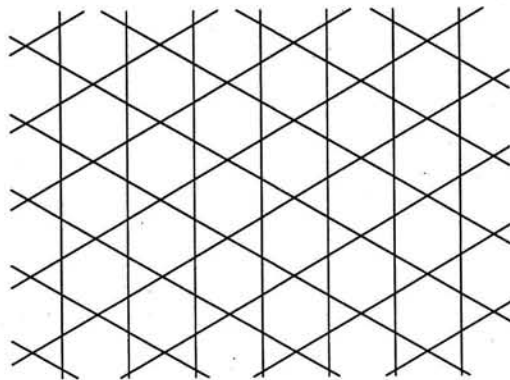
(3,3,3,4,4)

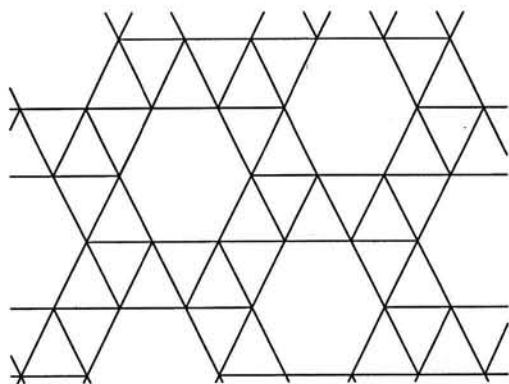
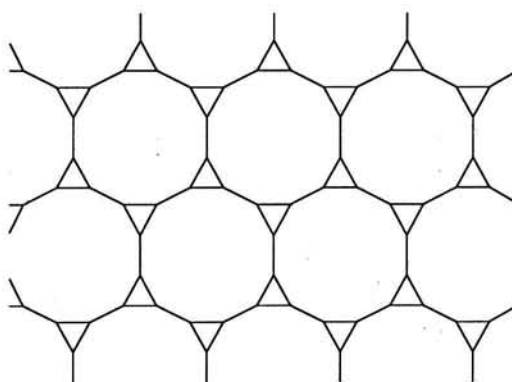
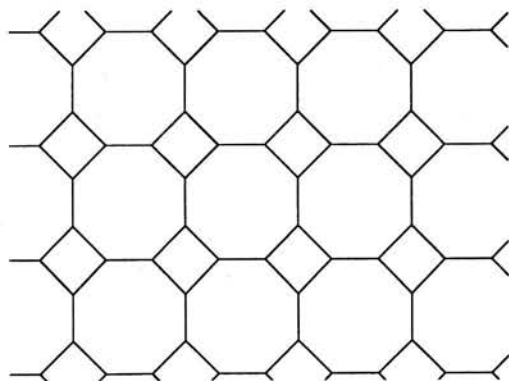


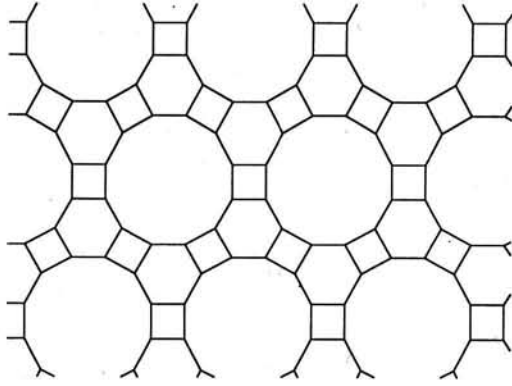
(3,3,4,3,4)



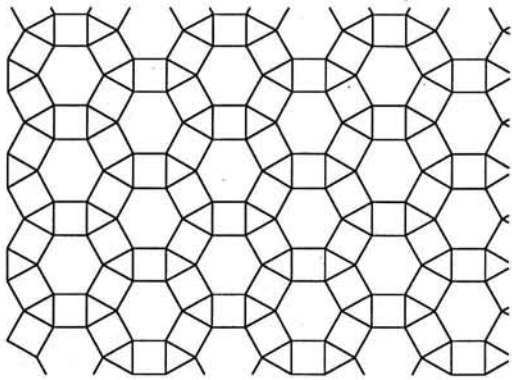
(3,6,3,6)



$(3,3,3,3,6)$  $(3,12,12)$  $(4,8,8)$ 



(4,6,12)



(3,4,6,4)

Trefwoordenlijst

a

activiteit 50
 activiteit, kritiek 52
 afbeelding, één-éénduidig 127
 afstand, Euclidisch 42
 afstandsboom 46
 Archimedische lichamen 65

b

beginknoop 16
 betegeling 88
 bipartiete graaf 75, 127
 boom 54
 bron 96
 buitengebied 29

c

capaciteiten 96
 cellen 47
 circuit 18
 circuitgraaf 15
 compatibel 118
 component 17
 contractie 25

d

deeltaak 50
 definitief label 44
 diameter graaf 17
 dodecahedron 57
 duale graaf 29, 31
 duale kaart 30, 31

e

één-éénduidige afbeelding 127
 eindknoop 16
 eindwaarde 44
 elektrisch netwerk 10
 enkelvoudige graaf 15
 equivalente graaf 13
 Euclidische afstand 42
 Euler, formul 54
 Eulercircuit 18
 Eulerpad 18

f

feasible 118
 Ford-Fulkerson, theorema 104
 Formule van Euler 54

g

gebieden 29
 geïsoleerde knoop 15
 gelabelde, gerichte graaf 96
 gerichte graaf 11
 gerichte tak 16
 gewicht van cel 47
 graad 16
 graaf 10, 14
 graaf planair 22
 graaf, bipartiet 75, 127
 graaf, circuit 15
 graaf, diameter 17
 graaf, duaal 29, 31
 graaf, enkelvoudig 15
 graaf, equivalent 13
 graaf, gelabelde, gerichte 96
 graaf, gericht 11
 graaf, isomorf 13
 graaf, ongericht 100
 graaf, organisatie 19, 20, 32
 graaf, Petersen- 26
 graaf, planair 22, 24
 graaf, samenhangend 18, 37, 101

h

half-regelmatig veelvlak 63
 half-regelmatige mozaïek 148
 Hall's Marriage Condition 133
 Hall, stelling 129
 hexahedron 56
 homeomorf 26
 Hongaarse methode 137

i

icosahedron 57
 incident 15
 inductiebewijs 62
 isomorf 24
 isomorfe graaf 13

k

kaart, duaal 30, 31
 kaart, regulier 58
 Kirchhoff, wet 98
 kleuren van veelvlak 60
 knoop, geïsoleerd 15
 knoop, naburig 15

- knoop, scheiding 37
knopen 10
kortste-pad-algoritme 44, 113
kritieke activiteit 52
kritieke taak 52
kritieke-pad-methode 48
kubus 56, 57
Kuratowski, theorema 27
- l*
- label, definitief 44
label, tijdelijk 44
labelingsprocedure 104, 107
langste pad 49
lengte van het pad 17
lichaam, Platonisch 56
lichaam, Archimedisch 65
- m*
- matching 127
matching, maximaal 133
matching, volledig 128
matchingtheorie 126
max-flow min-cut theorem 103, 111, 118
maximale matching 133
maximale mogelijke stroom 118
meervoudige verbinding 14
minimale scheidende verzamelingen 101
mogelijke stroom 118
mozaïek 88
mozaïek, half-regelmatig 148
mozaïek, regelmatig 147
multigraaf 15
- n*
- naburig knopen 15
netwerk, elektrisch 10
netwerkplanning 50
niet-planaire inbedding 24
- o*
- octahedron 57
ongerichte graaf 100
optimaal pad 42
optimale route 47
organisatiegraaf 19, 20, 32
- p*
- pad, lengte 17
pad, optimaal 42
parallele takken 14
Petersengraaf 26
planaire graaf 22, 24
Platonische lichaam 56
- plattegrond 32
polygonale prisma's 65
polygonale trommels 65
prisma 64
put 96
- r*
- regelmatig mozaïek 147
regelmatige veelvlak 56
reguliere kaart 58
representaties 13
rooster 47
route, optimaal 47
- s*
- samenhangende graaf 18, 37, 101
scheidende verzameling 101
scheidingsknoop 37
sink 96
snede 100
snijpunt 10
source 96
stelling van Hall 129
- t*
- taak, kritiek 52
tak, gerichte 16
takken, parallele 14
tessellation 88
tetrahedron 56, 57
theorema van Ford-Fulkerson 104
theorema van Kuratowski 27
theorema van Whitney 38
tijdelijk label 44
- u*
- utility graph 14
- v*
- valentie 16, 29
veelvlak, regelmatig 56
veelvlak, half-regelmatig 63
veelvlak, kleuren 60
verzameling, scheidende 101
vlakkleuringen 60
volledige matching 128
voorstelling 13
- w*
- wegenkaart 10
wet van Kirchhoff 98
Whitney, theorema 38
- z*
- zijvlakken 29



Grafentheorie voor bouwkundigen

Het eerste deel van dit boek over grafentheorie bestaat uit hoofdstukken over:

- Begrippen en definities uit de grafentheorie
- Planairiteit en dualiteit
- Optimale paden in grafen
- Regelmatige en half-regelmatige veelvlakken

Het tweede deel gaat over netwerktheorie.

- Netwerken en stromen
- Varianten en uitbreidingen van het max-flow min-cut theorema
- Matchingtheorie

Beide delen worden afgesloten met vraagstukken. Het boek sluit af met twee appendices:

- Regelmatige mozaïeken
- Half-regelmatige mozaïeken

Uitgegeven in opdracht van de Vereniging voor Studie- en
Studentenbelangen te Delft door de Delftse Universitaire Pers
ISBN 90-407-1173-9

ISBN 90-407-1173-9



9 78