Het Keuzeaxioma:

Een studie naar de geschiedenis van het keuzeaxioma,
de gevolgen, equivalente uitspraken
en de onbewijsbaarheid

English Title:

The Axiom of Choice:
A study in the history of the Axiom of Choice,
equivalent statements and unprovability

Het Keuzeaxioma:

Een studie naar de geschiedenis van het keuzeaxioma,
de gevolgen, equivalente uitspraken
en de onbewijsbaarheid

Een scriptie ten behoeve van het
Delft Institute for Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging
van de graad Bachelor of Science
in Technische Wiskunde

door

Adrianus Robert Petrus Johannes Vijn

Juli 2012

Delft University of Technology
Department of Electrical Engineering,
Mathematics and Computer Science

Het Keuzeaxioma:

Een studie in de geschiedenis van het keuzeaxioma,
de gevolgen en equivalente uitspraken
en de onbewijsbaarheid

Aad Vijn

Samenstelling commissie:

Dr. K.P. Hart	Begeleider
Dr. E. Coplakova	Begeleider

Overige commissieleden:

Dr. M. Haase	Contactpersoon
Dr. C. Kraaikamp	Universitair Hoofddocent
Dr. J.G. Spandaw	Begeleider Studentencolloquium

Voorwoord

Deze scriptie is geschreven als onderdeel van de bachelorstudie Technische Wiskunde aan te technische universiteit Delft. In dit voorwoord wil ik mijn dank betuigen aan een aantal personen die een rol hebben gespeeld in het bewerkstelligen van deze scriptie.

Allereerst wil ik Arnold Okhuizen en Roel Manders bedanken voor hun inspirerende wiskunde lessen op het HAVO respectievelijk VWO. Jullie hebben ervoor gezorgd dat ik wiskunde heb gekozen als vervolgstudie. Mijn dank!

Ook wil ik mijn dank betuigen aan Tim Smid, die mijn werk nog eens grondig op grammaticale fouten heeft nagekeken, en Joost de Groot, die enige wiskundige blunders in mijn scriptie nog heeft weten te voorkomen. Dank!

KP en Eva, jullie waren tijdens mijn studie de meest inspirerende docenten op de universiteit. Ik heb enorm veel geleerd van jullie colleges en begeleiding bij dit Bachelorproject. Jullie enthousiasme en humor hebben mij ertoe geleid om deze richting van de wiskunde op te gaan, en daar ben ik jullie tot op de dag van vandaag dankbaar voor!

Den Haag, Juli 2012 *Aad Vijn*

Samenvatting

In deze scriptie bestuderen we het Keuzeaxioma. Sinds het werk van Cantor rond 1900 zochten wiskundigen naar een fundament voor de (gehele) wiskunde. Verschillende axiomatische systemen werden hiervoor geconstrueerd. Zermelo en Fraenkel slaagden erin om een systeem te construeren waarin een deel van de wiskunde op te bouwen is vanuit hun acht axioma's. Dit systeem wordt vaak afgekort met **ZF**. Een toevoeging aan dit systeem is het zogenaamde Keuzeaxioma. Over dit axioma wordt tot op de dag van vandaag nog vaak gediscussieerd.

In hoofdstuk 1 behandelen we wat het Keuzeaxioma inhoudt en bekijken we de meest gebruikte equivalente formulering. We geven ook het bewijs van deze equivalentie. Vervolgens bekijken we of het Keuzeaxioma ook echt onmisbaar is. We beschouwen een tweetal situaties waarbij het Keuzeaxioma een onmisbare rol speelt. Ten slotte beschouwen we een zwakkere vorm van het Keuzeaxioma, namelijk het Aftelbare Keuzeaxioma. Deze zwakkere vorm illustreren we aan de hand van twee toepassingen.

In hoofdstuk 2 behandelen we toepassingen van het Keuzeaxioma. We laten zien dat met behulp van het Lemma van Zorn en het Lemma van Teichmüller-Tukey twee belangrijke stellingen uit de wiskunde bewezen kunnen worden: de stelling van Krul en het bestaan van Hamelbases voor iedere vectorruimte. Vervolgens bekijken we niet-meetbare verzamelingen. Deze verzamelingen zijn in schijnbare tegenstelling tot de fundamenten van de maattheorie. Daarna bekijken we het bestaan van $\mathbb{Q}$-lineaire discontinue afbeeldingen. Hierbij maken we gebruik van een Hamelbasis van $\mathbb{R}$ over $\mathbb{Q}$. Ter afsluiting van het hoofdstuk laten we twee stellingen uit andere takken van de wiskunde de revue passeren.

In hoofdstuk 3 bekijken we een aantal stellingen die equivalent zijn met het Keuzeaxioma: de equivalentie tussen het Keuzeaxioma, de Welordeningsstelling, het Lemma van Zorn en het Lemma van Teichmüller-Tukey.

Deze equivalentie zullen we ook bewijzen. Vervolgens wordt voor een tweetal stellingen uit de verzamelingenleer bewezen dat deze ook equivalent zijn met het Keuzeaxioma. Deze stellingen zijn de wet van dichotomie voor kardinaalgetallen en een stelling die de aritmetiek voor oneindige kardinaalgetallen karakteriseert.

In hoofdstuk 4 behandelen we de consistentie van het axiomatisch systeem van Zermelo en Fraenkel met het Keuzeaxioma. Allereerst zullen we een universum V construeren, waarvan we aannemen dat deze voldoet aan alle axioma's van **ZF**. Vervolgens behandelen we een belangrijke stelling van Gödel die laat zien hoe we modellen kunnen bouwen voor **ZF**. Vanuit het idee achter deze stelling zullen we het construeerbaar universum L bouwen, dat een model vormt voor de axioma's van **ZF** met het Keuzeaxioma. Dit zal de consistentie van het Keuzeaxioma laten zien.

In Hoofdstuk 5 zullen we de onafhankelijkheid van het Keuzeaxioma aantonen. Dit doen we door een permutatiemodel te bouwen dat aan de axioma's van **ZFA**, een axiomatisch systeem waarbij atomen een belangrijke rol spelen, voldoet. Vervolgens laten we zien dat de negatie van het Keuzeaxioma hierin logisch geldig is.

Inhoudsopgave

HOOFDSTUK 1

Wat is het Keuzeaxioma?

1. Introductie

We stellen ons de volgende situatie voor: we hebben 100 schoenendozen met hierin telkens een paar schoenen. Kunnen we een keuze beschrijven uit deze 100 dozen? Met andere woorden: is het mogelijk om een functie te construeren, waarbij we uit iedere doos één "ding" pakken? Merk op dat elke doos steeds een linker- en rechterschoen bevat. Verder kunnen we deze twee schoenen van elkaar onderscheiden: de vorm van een linkerschoen is anders dan de vorm van een rechterschoen. We kunnen dus de keuze maken om uit iedere doos de "linkerschoen" te kiezen. Dit is een legitieme keuze, want nadat we alle dozen langsgegaan zijn hebben we een functie geconstrueerd. In feite hebben we, in wiskundige zin, een *keuzefunctie* beschreven op de verzameling van alle dozen, en wel zodanig dat het beeld van een doos een element is van die doos zelf.

Definitie 1.1 (Keuzefunctie). *Zij $\mathcal{F}$ een familie niet-lege verzamelingen. De functie f heet een* keuzefunctie op $\mathcal{F}$ *als voor iedere $S \in \mathcal{F}$ geldt dat $f(S) \in S$.*

Veronderstel nu dat we *oneindig* veel van die dozen hebben, waarbij in elke doos een paar schoenen zit. De bovengenoemde keuze ("pak de linkerschoen") is nog steeds een legitieme manier om aan te geven wat we doen.

In de volgende situatie is het lastiger: we hebben 100 dozen waarin telkens een paar sokken zit die niet te onderscheiden zijn van elkaar. We kunnen langs elke doos gaan en een willekeurige sok eruit pakken. Dit is wiskundig mogelijk, omdat de dozen niet leeg zijn. Nadat we alle dozen zijn langsgegaan hebben we wederom een keuzefunctie geconstrueerd.

Maar hoe zit het nou in het *oneindige* geval? We kunnen dan niet zomaar alle dozen langslopen en een sok pakken. We zijn dan oneindig lang bezig en we kunnen op geen enkel tijdstip zeggen dat we een functie hebben geconstrueerd die een beschrijving geeft hoe we uit iedere doos een sok pakken. Vergelijk dit met het oneindige geval bij de schoenen. Voor deze situatie bestond wel een keuzefunctie, want we konden vooraf aangeven hoe we kozen uit elke doos!

We zien dus dat we in het oneindige geval niet altijd een keuzefunctie kunnen construeren. In het oneindige geval zullen we altijd vooraf moeten kunnen aangeven hoe we kiezen uit de dozen, maar dit is lang niet altijd mogelijk. Toch voelt het natuurlijk aan dat "een keuze", hoe die keuze dan ook gespecificeerd mag zijn, moet bestaan.

Met deze gedachte doet het Keuzeaxioma zijn intrede. We postuleren dat voor elke familie $\mathcal{F}$ van niet-lege verzamelingen een keuzefunctie f op $\mathcal{F}$ bestaat. In het voorbeeld van de oneindige hoeveelheid dozen met paren sokken betekent dit dat we zeggen dat we uit elke doos wel een sok kunnen pakken, maar dat we er niet bij vermelden *welke* sok dat dan is. Het Keuzeaxioma wordt als volgt geformuleerd:

Keuzeaxioma (AC). *Voor iedere familie $\mathcal{F}$ van niet-lege verzamelingen bestaat er een keuzefunctie.*

Het Keuzeaxioma is een uitbreiding van het axiomatisch systeem van Zermelo en Fraenkel. Dit systeem geeft een fundament voor de wiskunde: een (groot) deel van de wiskunde is hierin te beschrijven.

2. Equivalente definitie

Het Keuzeaxioma wordt in vele equivalente varianten toegepast binnen de wiskunde, waarvan het Lemma van Zorn waarschijnlijk de bekendste is. Ook wordt vaak een equivalentievariant beschreven in termen van het Cartesisch product.

DEFINITIE 1.2 (Cartesisch Product). *Laat $\{X_i : i \in \mathbb{I}\}$ een familie niet-lege verzamelingen zijn. Het* Cartesisch product $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ *is de verzameling van alle functies $f : \mathbb{I} \to \bigcup_{i\in\mathbb{I}} X_i$ zodanig dat voor alle $i \in \mathbb{I}$ geldt dat $f(i) \in X_i$.*

Het Keuzeaxioma kan dan ook geformuleerd worden als "Voor elke familie niet-lege verzamelingen geldt dat het Cartesisch product niet leeg is". We bewijzen nu dat deze uitspraak inderdaad equivalent is met het Keuzeaxioma.

STELLING 1.1. *Zij* $\mathcal{F} = \{X_i : i \in \mathbb{I}\}$ *een familie paarsgewijs niet-lege verzamelingen. Dan zijn de volgende twee beweringen equivalent:*

(1) Er bestaat een keuzefunctie op $\mathcal{F}$*;*
(2) Het Cartesisch product $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ *is niet leeg.*

BEWIJS. Zij $\mathcal{F} = \{X_i : i \in \mathbb{I}\}$ een familie niet-lege verzamelingen. Neem aan dat er een keuzefunctie f op $\mathcal{F} = \{X_i : i \in \mathbb{I}\}$ bestaat. Dus voor alle $X_i \in \mathcal{F}$ geldt $f(X_i) \in X_i$. Definieer $g : \mathbb{I} \to \bigcup_{i\in\mathbb{I}} X_i$ door $g(i) = f(X_i)$. Deze functie is welgedefinieerd en er geldt dat $g \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$. We concluderen dat $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ niet leeg is.

Neem nu aan dat $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ niet leeg is. Dan is er een $g \in \prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$ zodanig dat voor alle $i \in \mathbb{I}$ geldt dat $g(i) \in X_i$. Definieer $h : \mathcal{F} \to \mathbb{I}$ door $h(X_i) = i$. Merk op dat deze afbeelding bijectief is. Voor $f = g \circ h$ hebben we nu voor alle $X_i \in \mathcal{F}$ dat $f(X_i) = g(h(X_i)) = g(i) \in X_i$. We concluderen dat f een keuzefunctie is op $\prod_{i\in\mathbb{I}} X_i$. □

3. Is het Keuzeaxioma onmisbaar?

Vrijwel iedereen zal op het eerste gezicht direct zeggen dat het Keuzeaxioma waar is. Immers, waarom zouden we in het oneindige geval niet zo'n keuze kunnen maken? Toch zijn er genoeg wiskundigen die er niet zeker van zijn dat het Keuzeaxioma waar is en er zijn ook wiskundigen die het klinkklare onzin vinden.

Maar geeft het Keuzeaxioma eigenlijk wel een toegevoegde waarde aan de wiskunde? Om die vraag te beantwoorden kijken we naar een tweetal situaties.

3.1. Continuïteit. Het eerste voorbeeld is de equivalentie tussen de volgende twee definities van continuïteit : de ϵ, δ-continuïteit en de rijtjes-continuïteit . Hoewel deze equivalentie voor veel mensen intuïtief duidelijk is, verschuilt het Keuzeaxioma zich in het bewijs.

Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een functie is, dan heet f continu in p als:

(1) De ϵ, δ-definitie : voor elke $\epsilon > 0$ is er een $\delta > 0$ zodanig dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ uit $|x - p| < \delta$ volgt dat $|f(x) - f(p)| < \epsilon$;

(2) De rij-definitie: voor iedere rij $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ met $x_n \to p$ volgt dat $f(x_n) \to f(p)$.

Om de implicatie "uit de rij-continuïteit volgt de ϵ, δ-continuïteit" te bewijzen gebruiken we het Keuzeaxioma. Het bewijs gaat als volgt.

Bewijs. Neem aan dat (2) geldt en stel dat f niet continu is in p volgens de ϵ, δ-definitie. Dat wil zeggen: er is een $\epsilon > 0$ zodanig dat voor alle $\delta > 0$ geldt dat er een $x \in \mathbb{R}$ bestaat zodanig dat $|x - p| < \delta$ en $|f(x) - f(p)| \geq \epsilon$. We kunnen nu voor elke $n \in \mathbb{N}$ een $x_n \in \mathbb{R}$ kiezen zodanig dat $|x_n - p| < \frac{1}{n}$ en $|f(x_n) - f(p)| \geq \epsilon$. Uit deze constructie volgt dat de geconstrueerde rij $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ convergent is met limiet p, maar dat de afstand tussen de beelden $f(x_n)$ en $f(p)$ blijft altijd groter dan ϵ. Er geldt dus:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p, \quad \text{maar niet} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(p).$$

Dit is in tegenspraak met onze aanname dat f rij-continu is in p. We concluderen dat f continu is in p volgens de ϵ, δ-definitie. □

Onbewust wordt het Keuzeaxioma in dit bewijs gebruikt op het moment dat we voor elke $\delta = \frac{1}{n}$ een bijbehorende x_n simultaan kiezen. Zonder het Keuzeaxioma kunnen we zo'n keuze niet maken. Het Keuzeaxioma is dus voor dit bewijs niet weg te denken.

Natuurlijk zou het kunnen zijn dat er een ander bewijs bestaat voor deze equivalentie die niet het Keuzeaxioma gebruikt. Tot op heden is dit nog niet gevonden.

3.2. Neststelling van Cantor. Het volgende voorbeeld, waarbij het Keuzeaxioma vereist is, is het bewijs van de Neststelling van Cantor voor volledige metrische ruimte. De stelling luidt:

STELLING 1.2 (Neststelling van Cantor). *Zij (X, d) een volledige metrische ruimte. Laat $(F_n)_{n=0}^{\infty}$ een rij niet-lege gesloten deelverzamelingen zijn zodanig dat $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \cdots$ en*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0.$$

Dan geldt dat er precies één punt x_0 is, zó dat

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = \{x_0\}.$$

Het bewijs van deze stelling maakt direct gebruik van het Keuzeaxioma . Voor alle $n \in \mathbb{N}$ kiezen we simultaan uit F_n een element dat we x_n noemen (zo verkrijgen we een Cauchy-rij die, door de volledigheid van de metrische ruimte, convergeert naar x_0). Zo'n greep uit een aftelbaar oneindige verzameling van niet-lege verzamelingen vereist het Keuzeaxioma.

Merk op dat de "Reële versie" van de neststelling van Cantor *niet* het Keuzeaxioma vereist. Deze versie zegt dat, voor een dalende rij gesloten intervallen

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots$$

van $\mathbb{R}$ met $\lim_{i\to\infty} \operatorname{diam}[a_i, b_i] = 0$, geldt dat er een precies één punt x_0 is in de doorsnede $\bigcap_{i\in\mathbb{N}}[a_i, b_i] = \{x_0\}$. We kunnen dan uit ieder interval bijvoorbeeld het midden $c_i = \frac{a_i+b_i}{2}$ nemen. Via deze weg maken we expliciet een Cauchy-rij die het werkt doet; het Keuzeaxioma is dan dus niet nodig.

4. Het Aftelbare Keuzeaxioma

Een zwakkere vorm van het Keuzeaxioma is het *Aftelbare Keuzeaxioma.* Deze zegt dat voor aftelbare families van niet-lege verzamelingen een keuzefunctie bestaat.

Aftelbare Keuzeaxioma: Zij $\mathcal{F}$ een aftelbare familie van niet-lege verzamelingen. Dan bestaat er een functie $f : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ zodat voor alle $S \in \mathcal{F}$ geldt dat $f(S) \in S$.

Met behulp van het Aftelbare Keuzeaxioma bewijzen we dat de vereniging van aftelbaar veel aftelbare verzamelingen opnieuw aftelbaar is.

Stelling 1.3. *Zij* $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ *een aftelbare familie van aftelbare verzamelingen, dan is de vereniging* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ *een aftelbare verzameling.*

Bewijs. Zij $\{U_i : i \in \mathbb{N}\}$ een aftelbare verzameling van aftelbare verzamelingen. Dus we weten voor alle $i \in \mathbb{N}$ dat er één of meerdere injectieve functies $g : U_i \to \mathbb{N}$ bestaan. We vormen de familie $\mathcal{F} = \{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ met

$$F_i = \{g : U_i \to \mathbb{N} : \text{g is injectief}\}.$$

Merk op dat voor alle $i \in \mathbb{N}$ de verzameling F_i niet leeg is. Met het Aftelbare Keuzeaxioma kunnen we simultaan uit elke F_i een injectieve functie $f_i : U_i \to \mathbb{N}$ kiezen. Met deze functies vormen we de volgende functie:

$$f : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad x \mapsto (i, f_i(x)),$$

waarbij i de kleinste index is zodanig dat $x \in U_i$. Deze functie is welgedefinieerd en injectief. Voorts weten we dat er een bijectie (en dus een injectie) g tussen $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ bestaat. De functie

$$g \circ f : \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i \to \mathbb{N}$$

is dan een injectieve functie tussen $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ en $\mathbb{N}$. We concluderen dat $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$ aftelbaar is. $\square$

4.1. Toepassing van het Aftelbare Keuzeaxioma. We besluiten dit hoofdstuk met een volgende toepassing van het Aftelbare Keuzeaxioma . (Merk op dat in de voorgaande voorbeelden over de Continuïteit en de Neststelling van Cantor het Aftelbare Keuzeaxioma voldoende was voor in de bewijzen.) We bewijzen dat elke oneindige verzameling een aftelbaar oneindige deelverzameling bevat.

Stelling 1.4. *Zij* V *een oneindige verzameling. Dan bevat* V *een aftelbaar oneindige deelverzameling .*

Bewijs. Laat V een oneindige verzameling zijn. Voor een gegeven $k \in \mathbb{N}$ beschouwen we de verzameling van k-eindige rijtjes

$$A_k = \{\langle a_0, a_1, \ldots, a_k\rangle \mid a_i \neq a_j \text{ voor } 0 \leq i < j \leq k \text{ en } a_i \in V\}.$$

We merken op dat deze verzameling niet leeg is, want er bestaat bij elke k ten minste één zo'n eindig rijtje met verschillende a_j-tjes. We vormen nu de familie

$$\mathcal{F} = \{A_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Merk op dat deze familie aftelbaar is en uit niet-lege verzamelingen bestaat.

Met behulp van het Aftelbare Keuzeaxioma kunnen we simultaan uit elke A_k één enkel eindig rijtje pakken ter lengte k, zeg α_k. Zodoende hebben we een verzameling eindige rijtjes gevonden, zeg

$$\{\alpha_k : k \in \mathbb{N}\}.$$

Merk op dat deze verzameling aftelbaar is en bestaat uit aftelbare rijtjes, die opgevat kunnen worden als verzamelingen. Uit de vorige stelling volgt nu dat $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k$ een aftelbare deelverzameling is van V. In het bijzonder geldt dat deze vereniging ook oneindig groot is. Het is de vereniging van rijtjes ter lengte 1, en 2, en 3 enz. Dit betekent dat de vereniging meer dan 1 element heeft, meer dan 2 elementen heeft, meer dan 3 elementen heeft, enz. We zien dat inderdaad de vereniging $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k$ aftelbaar oneindig is. $\square$

HOOFDSTUK 2

Toepassingen van het Keuzeaxioma

In het vorige hoofdstuk zagen we dat het (Aftelbare) Keuzeaxioma in sommige bewijzen niet misbaar was. Nu zullen we een aantal toepassingen van het algemene Keuzeaxioma in de wiskunde beschouwen. Hierbij wordt vaak gebruik gemaakt van het Lemma van Zorn of het Lemma van Teichmüller-Tukey . Deze twee stellingen zijn equivalent aan het Keuzeaxioma. Het bewijs van die equivalentie zullen we uitstellen tot in hoofdstuk 3. Allereerst zullen we deze twee lemma's formuleren en vervolgens bekijken we een aantal toepassingen van deze lemma's.

1. Het Lemma van Zorn

Zij P een verzameling. We noemen een relatie $\leq$ en *partiële ordening* op P als deze voldoet aan de volgende eigenschappen:

(P1) Voor alle $p \in P$ geldt $p \leq p$;

(P2) Voor alle $p, q \in P$ geldt: als $p \leq q$ en $q \leq p$ dan $p = q$;

(P3) Voor alle $p, q, r \in P$ geldt: als $p \leq q$ en $q \leq r$ dan $p \leq r$.

Met een *maximaal* element $c \in P$ bedoelen we een element dat voldoet aan

$$(\forall x)(x \geq c \rightarrow x = c).$$

We noemen een deelverzameling $C \subset P$ een *keten* in P als $\leq$ de verzameling C lineair ordent, dat wil zeggen $p \leq q$ of $q \leq p$ voor $p, q \in C$. Ten slotte noemen we b een *bovengrens* van een keten C als $c \leq b$ voor alle $c \in C$. We zijn nu in staat om het Lemma van Zorn te formuleren.

LEMMA 2.1 (Lemma van Zorn). *Zij $(P, \leq)$ een niet-lege partieel geordende verzameling waarin elke keten naar boven begrensd is. Dan heeft P een maximaal element ten aanzien van $\leq$.*

2. Het Lemma van Teichmüller-Tukey

Nu we het Lemma van Zorn hebben geformuleerd definiëren we het Lemma van Teichmüller-Tukey. Net als het Lemma van Zorn definieert deze stelling een *maximaalprincipe* voor een bepaalde situatie.

Laat $\mathcal{F}$ een familie van verzamelingen zijn. We zeggen dat $\mathcal{F}$ *van eindig karakter* is als geldt dat $X \in \mathcal{F}$ dan en slechts dan als voor alle eindige deelverzamelingen $V \subset X$ geldt dat $V \in \mathcal{F}$.

LEMMA 2.2 (Lemma van Teichmüller-Tukey). *Zij $\mathcal{F}$ een niet-lege familie van verzamelingen. Als $\mathcal{F}$ van eindig karakter is, dan heeft $\mathcal{F}$ een maximaal element M ten aanzien van de inclusie $\subseteq$. Met andere woorden:*

$$(\forall X \in \mathcal{F})(M \subseteq X \rightarrow X = M)$$

We bekijken nu een aantal bekende toepassingen van het Keuzeaxioma . In het bijzonder zullen we de bewijzen geven dat iedere commutatieve ring, die niet de nulring is, een maximaal ideaal heeft en dat elke vectorruimte een basis heeft. Merk op dat in alle gevallen het bewijs slechts de *existentie* aantoont, maar geen constructie geeft.

3. De Stelling van Krul

Een belangrijke stelling uit de getaltheorie is de maximale ideaalstelling van Krul. Als R een commutatieve ring met eenheidselement 1 voor de multiplicatieve bewerking is en $R \neq \{0\}$, dan bezit deze ring een maximaal ideaal M. We geven het bewijs.

STELLING 2.1 (Stelling van Krul). *Als $R \neq \{0\}$ een commutatieve ring is met* 1*, dan bezit R een maximaal ideaal.*

BEWIJS. Laat $R \neq \{0\}$ een commutatieve ring zijn. We bewijzen met behulp van het lemma van Zorn dat R een maximaal ideaal bezit. Beschouw de volgende verzameling idealen:

$$P = \{I \subseteq R : I \text{ is een ideaal en } I \neq R\}.$$

Dan is de inclusierelatie $\subseteq$ een *partiële ordening* op P. We moeten laten zien dat iedere keten van idealen in P een bovengrens heeft ten aanzien van de inclusierelatie. Voor de keten $\emptyset$ geldt dat het ideaal $(0) \subset R$ een bovengrens is. Laat nu $C = \{I_k\}_k$ een keten idealen zijn van R. We moeten laten zien dat er een bovengrens voor C bestaat. Bekijk $I = \bigcup_k I_k$. Het is niet moeilijk in te zien dat dit weer een ideaal oplevert. Verder geldt omdat $1 \notin I_k$ voor alle k, dat ook $1 \notin I$. Dit betekent dat $I \neq R$. Omdat $I_k \subset I$ voor alle k concluderen we dat I een bovengrens is voor C. Uit het Lemma van Zorn volgt nu dat R een maximaal ideaal bezit. $\square$

4. Iedere vectorruimte heeft een basis

Ten slotte bekijken we de stelling dat iedere vectorruimte een basis heeft. In tegenstelling tot eindig-dimensionale vectorruimten is zo'n basis meestal niet expliciet op te schrijven. Met het Keuzeaxioma is *toch* te bewijzen dat iedere vectorruimte een basis heeft. We noemen zo'n basis een *Hamelbasis*. Voordat we het bewijs hiervan kunnen geven, hebben we de volgende definitie nodig.

Definitie 2.1. *Zij V een vectorruimte over een lichaam $\mathbb{F}$. We noemen $B \subset V$ een* Hamelbasis *als geldt dat B een lineaire onafhankelijke verzameling is zodat voor elke $v \in V$ geldt dat er $b_1, b_2, \ldots, b_k \in B$ en $f_1, f_2, ...f_k \in \mathbb{F}$ zijn met $v = f_1b_1 + f_2b_2 + \cdots + f_kb_k$.*

Stel dat voor een (oneindig-dimensionale) vectorruimte V (over een lichaam $\mathbb{F}$) geldt dat B een Hamelbasis is. Laat $S \subset B$ een eindige deelverzameling van B zijn. Dan is het lineaire omhulsel

$$L(S) = \left\{ x \in V : x = \sum_{i=1}^{n} s_i f_i \text{ voor alle } s_i \in S \text{ en voor alle } f_i \in \mathbb{F} \right\}$$

een deelruimte van V. Door de vereniging van alle lineaire omhulsels van eindige deelverzamelingen van B te nemen, vinden we dat

$$V = \bigcup \left\{ L(S) : S \subset B \text{ en } S \text{ eindig} \right\}.$$

Met behulp van het Lemma van Teichmüller-Tukey kunnen we hiermee bewijzen dat iedere vectorruimte een basis heeft. We zullen het bewijs geven.

Stelling 2.2. *Zij V een willekeurige vectorruimte. Dan bestaat er een Hamelbasis voor V.*

Bewijs. Zij V een vectorruimte en laat $\mathcal{F}$ de familie van alle lineaire onafhankelijke deelverzamelingen van vectoren van V zijn. Roep in herinnering dat we een *oneindige* verzameling vectoren L *onafhankelijk* noemen als elke eindige deelverzameling $S \subset L$ een onafhankelijk stelsel vormt. Zodoende geldt dat $\mathcal{F}$ van eindig karakter is. Uit het Lemma van Teichmüller-Tukey volgt nu dat ten aanzien van de inclusierelatie $\subseteq$ er een maximale verzameling M van vectoren bestaat, zodat deze vectoren onafhankelijk zijn.

Stel nu eens dat M niet een basis vormt voor V. Dan is er een $v \in V$ die niet te schrijven is als een eindige lineaire combinatie van vectoren uit M. Zodoende zou $M \cup \{v\}$ een verzameling van onafhankelijke vectoren zijn. Met andere woorden $M \cup \{v\} \in \mathcal{F}$ en $M \subsetneq M \cup \{v\}$. Dit is in tegenspraak met de maximaliteit van M ten aanzien van de inclusierelatie. We concluderen dat M een basis vormt voor V. □

5. Niet-meetbare verzamelingen

Een ander gevolg van het Keuzeaxioma is het bestaan van een reële deelverzameling van $\mathbb{R}$ die niet Lebesgue-meetbaar is. In 1905 was Giuseppe Vitali de vinder van deze verzameling.

5.1. De Lebesgue-Maat. Met μ noteren we de Lebesgue-maat op $\mathbb{R}$. We weten dat μ aan de volgende eigenschappen voldoet:

(M1) Voor alle meetbare $V \subseteq \mathbb{R}$ geldt: $\mu(V) \geq 0$ en $\mu([a, b]) = b - a$;

(M2) μ is aftelbaar additief: als $\{F_i : i \in \mathbb{N}\}$ een familie paarsgewijs disjuncte meetbare deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ is, dan $\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(F_i)$;

(M3) μ is translatie invariant: voor alle meetbare $M \subseteq \mathbb{R}$ en $x \in \mathbb{R}$ geldt $\mu(M + x) = \mu(M)$, waarbij $M + x = \{m + x : m \in M\}$.

Met deze eigenschappen kunnen we laten zien dat er een verzameling binnen $[0, 1]$ bestaat die niet Lebesgue-meetbaar is.

5.2. De niet-meetbare verzameling. De constructie van zo'n niet-meetbare verzameling gaat als volgt. We beschouwen de verzameling reële getallen $\mathbb{R}$. Op het interval $[0,1] \subset \mathbb{R}$ definiëren we de volgende relatie:

$$x \sim y \quad \text{dan en slechts dan als} \quad x - y \in \mathbb{Q}$$

We zien gemakkelijk in dat alle rationale getallen in $[0,1]$ in relatie zijn met elkaar en dat $\frac{1}{\pi}$ in relatie is met $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$. Merk op dat deze relatie $\sim$ op $[0,1]$ een equivalentierelatie is:

i) Voor alle $x \in [0,1]$ geldt dat $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$;
ii) Voor alle $x, y \in [0,1]$ geldt dat $x - y = q \in \mathbb{Q}$ voor een $q \in \mathbb{Q}$ en $y - x = -(x-y) = -q \in \mathbb{Q}$;
iii) Voor alle $x, y, z \in [0,1]$ geldt: als $x - y = q$ voor een $q \in \mathbb{Q}$ en $y - z = r$ voor een $r \in \mathbb{Q}$ dan $x - z = (x-y) + (y-z) = q + r \in \mathbb{Q}$.

Uit alle equivalentieklassen $[x] \in [0,1]/\sim$ kiezen we met behulp van het Keuzeaxioma simultaan een element. Zodoende verkrijgen we een verzameling $M \subset [0,1]$. Merk op dat voor elk element $x \in \mathbb{R}$ er een $y \in M$ en een $r \in \mathbb{Q}$ bestaan zodat $x = y + r$. We kunnen immers ieder reëel getal schrijven in de vorm $z + t$, met z geheeltallig en $t \in [0,1]$. Vervolgens kunnen we een $y \in M$ en een $q' \in \mathbb{Q}$ vinden zodanig dat $t \sim y$ en vormen we $r = z + q'$. Er volgt dat $x = y + r$.

Voor een vaste $r \in \mathbb{Q}$ definiëren we $M_r = \{y + r : y \in M\}$. Dit geeft een partitie van de reële getallen $\mathbb{R}$, beschreven door

$$\mathbb{R} = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} M_r.$$

We claimen nu dat M niet meetbaar is. Dit bewijzen we uit het ongerijmde. Stel dat M wel meetbaar is. We onderscheiden twee gevallen.

i) Stel eerst dat $\mu(M) = 0$. Dan volgt uit het invariant zijn van de Lebesgue-maat onder translatie dat $\mu(M_r) = 0$ voor alle $r \in \mathbb{Q}$. Omdat $\{M_r : r \in \mathbb{Q}\}$ een aftelbare familie verzamelingen is volgt uit het aftelbaar additief zijn van μ dat

$$\mu(\mathbb{R}) = \mu\left(\bigcup_{r \in \mathbb{Q}} M_r\right) = 0.$$

Dit geeft een tegenspraak, want $\mu(\mathbb{R}) > 0$.

ii) Stel nu dat $\mu(M) > 0$. Dan volgt dat $\mu(M_r) > 0$ voor alle $r \in \mathbb{Q}$. We vinden de volgende afschatting:

$$\begin{aligned}\mu([0,2]) &\geq \mu\left(\bigcup\{M_r : r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}\right) \\ &= \sum_{r \in [0,1]\cap\mathbb{Q}} \mu(M_r) = \infty,\end{aligned}$$

waarbij de eerste ongelijkheid als volgt verklaard kan worden: voor een $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$ geldt dat $M_r \subseteq [r, r+1]$. Omdat $M_0 \subset [0,1]$ en $M_1 \subseteq [1,2]$ volgt dat $M_r \subseteq [0,2]$ voor iedere $r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$. Hieruit volgt inderdaad dat $\mu([0,2]) \geq \mu\left(\bigcup\{M_r : r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\}\right)$. We vinden opnieuw een tegenspraak, want $\mu([0,2]) = 2$.

We concluderen dat M niet meetbaar is.

6. Nergens continue $\mathbb{Q}$-lineaire afbeeldingen

Uit de functionaalanalyse weten we het volgende voor een lineaire operator T: als T continu is in één punt dan is T overal continu. We kunnen ons afvragen of er een lineaire operator bestaat die overal discontinu is. Het antwoord vinden we in de hoek van de $\mathbb{Q}$-lineaire functies.

6.1. De vectorruimte $\mathbb{R}$ over $\mathbb{Q}$. Beschouw de vectorruimte $\mathbb{R}$ over $\mathbb{Q}$. Uit stelling 2.2 volgt dat deze vectorruimte een Hamelbasis heeft. Kunnen we een expliciete basis B geven voor deze ruimte? Het antwoord is *nee*. Was dit namelijk wel het geval, dan zouden we uit deze basis een niet-meetbare verzameling construeren. We hebben al gezien dat hiervoor het Keuzeaxioma gebruikt moet worden en dus betekent dit dat de basis B niet constructief is. Wel kunnen we aangeven wat de *kardinaliteit* is van deze basis.

Stel dat de kardinaliteit van B gelijk is aan κ, dus $|B| = \kappa$. Merk allereerst op dat zo'n basis een deelverzameling is van $\mathbb{R}$, dus dat $|B| \leq |\mathbb{R}|$ geldt. Voor een verzameling $T \subseteq \mathbb{R}$ bevat het lineaire omhulsel $L(T)$ alle *eindige* lineaire combinaties van elementen uit T met scalairen uit $\mathbb{Q}$. Dit betekent dus dat de kardinaliteit van $L(V)$ ten hoogste gelijk is aan $|\mathbb{Q}|^{|V|}$. Als V eindig is, dan leert de verzamelingenleer ons dat

$$|L(V)| = |\mathbb{Q}|^{|V|} = |\mathbb{Q}| = \aleph_0.$$

Dit laat zien dat de basis B oneindig groot moet zijn, omdat $\mathbb{R}$ overaftelbaar is. Stel nu dus dat $|B| = \kappa \geq \aleph_0$. Vanuit de definitie van een Hamelbasis geldt dat

$$\mathbb{R} = \bigcup \{L(S) : S \subset B \text{ en } S \text{ eindig}\},$$

zodat voor de kardinaliteiten geldt dat

$$|\mathbb{R}| = \left|\bigcup \{L(S) : S \subset B \text{ en } S \text{ eindig}\}\right|.$$

Om nu te kunnen weten hoeveel lineaire omhulsels de bovenstaande vereniging bevat, moeten we weten hoeveel *eindige* verzamelingen B heeft. Om deze vraag te beantwoorden merken we eerst de volgende stelling uit de verzamelingenleer op.

STELLING 2.3. *Voor elk oneindig kardinaalgetal κ geldt: $\kappa^2 = \kappa$.*

Nu rest ons nog de eindige verzamelingen te gaan tellen. Het aantal eindige verzamelingen met één element is gelijk aan κ. Het aantal eindige verzamelingen met twee elementen is ten hoogste $\kappa^2 = \kappa$. Het aantal eindige verzamelingen met drie elementen is ten hoogste $\kappa^3 = \kappa$. We zien dat

$$\left|\{F \subset B : F \text{ eindig}\}\right| \leq \kappa + \kappa^2 + \kappa^3 + \cdots = \kappa + \kappa + \kappa + \cdots = \kappa.$$

Tergelijkertijd geldt ook dat $\left|\{F \subset B : F \text{ eindig}\}\right| \geq \kappa$, want de kardinaliteit van de verzameling eindige verzamelingen van één element is κ en dit is een deelverzameling van de verzameling in kwestie. We concluderen dat

$$\left|\{F \subset B : F \text{ eindig}\}\right| = \kappa.$$

Met deze vindingen verkrijgen we de volgende afschatting voor de kardinaliteit van de basis B:

$$|\mathbb{R}| = \left|\bigcup \{L(S) : S \subset B \text{ en } S \text{ eindig}\}\right| \leq \kappa \cdot \aleph_0 \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa \leq |\mathbb{R}|.$$

We concluderen dat $\kappa = |\mathbb{R}|$.

6.2. Een nergens continue $\mathbb{Q}$-lineaire functie. We schrijven de basis B uit de vorige paragraaf als $B = \{e_r : r \in \mathbb{R}\}$. Er geldt dat een lineaire functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vastligt wanneer we weten wat de beelden zijn van de basiselementen onder φ. Zodoende kunnen we een lineaire functie φ schrijven als

$$\varphi(x) = \sum_{r \in \mathbb{R}} q_r \varphi(e_r), \quad \text{waarbij} \quad x = \sum_{r \in \mathbb{R}} q_r \cdot e_r.$$

We definiëren de functie f door $f(e_0) = -e_0$ en $f(e_r) = e_r$ voor alle $r \neq 0$. Hiermee ligt f vast:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = -q_0 \cdot e_0 + \sum_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r \neq 0}} q_r \cdot e_r$$

We gaan na dat f een $\mathbb{Q}$-lineaire functie is. Voor alle $s, t \in \mathbb{Q}$ en alle $x, y \in \mathbb{R}$ geldt

$$\begin{aligned} f(sx + ty) &= -\left(s \cdot q_0 + t \cdot q_0'\right) e_0 + \sum_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r \neq 0}} \left(s \cdot q_r + t \cdot q_r'\right) e_r \\ &= s \left(-q_0 \cdot e_0 + \sum_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r \neq 0}} q_r \cdot e_r \right) + t \left(-q_0' \cdot e_0 + \sum_{\substack{r \in \mathbb{R} \\ r \neq 0}} q_r' \cdot e_r \right) \\ &= s \cdot f(x) + t \cdot f(y). \end{aligned}$$

Ten slotte bewijzen we uit het ongerijmde dat f niet continu is in het punt 1. Stel dat f wel continu is in het punt 1. Merk allereerst op dat $\mathbb{Q}$ dicht ligt in $\mathbb{R}$ en dat hieruit volgt dat de verzameling

$$V = \{q \cdot e_0 : q \in \mathbb{Q}\}$$

ook dicht[1] ligt in $\mathbb{R}$. Zodoende kunnen we een rij $(v_n)_n$ binnen V vinden zodat $v_n \to 1$. Merk op dat voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $f(v_n) = -v_n$ zodat

$$f(1) = f\left(\lim_{n \to \infty} v_n\right) = \lim_{n \to \infty} f(v_n) = \lim_{n \to \infty} -v_n = -1.$$

De verzameling $W = \{q \cdot e_1 : q \in \mathbb{Q}\}$ ligt ook dicht in $\mathbb{R}$. Zodoende kunnen we een rij $(w_n)_n$ binnen W vinden zodat $w_n \to 1$. Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt $f(w_n) = w_n$, zodat

$$f(1) = f\left(\lim_{n \to \infty} w_n\right) = \lim_{n \to \infty} f(w_n) = \lim_{n \to \infty} w_n = 1.$$

We vinden een tegenspraak en concluderen dat f niet continu is in het punt 1. Uit de opmerking aan het begin van deze paragraaf volgt nu dat f in geen enkel punt continu is. Was f namelijk el in een punt continu, dan was hij overal continu geweest en dus ook in 1. Zodoende hebben we een $\mathbb{Q}$-lineaire functie gevonden die nergens continu is.

[1]Merk op voor een vaste $x \in \mathbb{R}$ dat er een rij $(x_n)_n$ binnen $\mathbb{Q}$ bestaat zodanig dat $x_n \to x/e_0$. De rij $(y_n)_n = (e_0 \cdot x_n)_n$ is dan een convergente rij binnen V met $y_n \to x$. Dit laat zien dat V dicht ligt in $\mathbb{R}$.

7. Andere toepassingen

Ter afsluiting van dit hoofdstuk noemen we een aantal bekende stellingen uit verschillende takken van de wiskunde, waarvan het bewijs gebruiktmaakt van het Keuzeaxioma.

7.1. Stelling van Tychonoff. Een toepassing van het Keuzeaxioma in de topologie is als volgt. Het realiseert een belangrijk resultaat voor compacte topologische ruimten.

STELLING 2.4 (Stelling van Tychonoff). *Zij* $\{(C_i, \mathcal{T}_i) : i \in \mathbb{I}\}$ *een familie compacte topologische ruimten. Dan is de productruimte* $\prod\{C_i : i \in \mathbb{I}\}$ *met de producttopologie compact.*

Het bewijs van deze stelling maakt gebruik van zogeheten *ultrafilters* op de productruimte $\prod\{C_i : i \in \mathbb{I}\}$. Uit het Keuzeaxioma volgt het bestaan van deze filters. Door compactheid van een topologische ruimte op een equivalente manier te formuleren in termen van convergentie van ultrafilters is op een eenvoudige wijze de Stelling van Tychonoff te bewijzen. We zullen dit bewijs hier niet geven. Een bewijs van deze stelling is te vinden in [**3**].

7.2. Stelling van Hahn-Banach. De stelling van Hahn-Banach is een belangrijk resultaat in de functionaalanalyse. Laat E een reëelwaardige vectorruimte zijn. We zeggen dat een functionaal p op E *sublineair* is als geldt dat

(SL1) $\quad (\forall x, y \in E)(p(x+y) \leq p(x) + p(y))$

(SL2) $\quad (\forall x \in E)(\forall r \in \mathbb{R}^+)(p(rx) = rp(x))$

De uitbreidingsstelling van Hahn-Banach is als volgt. Zij E een reële vectorruimte. Laat p een sublineaire functionaal op E zijn en φ een lineaire functionaal op een deelruimte $V \subset E$ zodanig dat voor alle $x \in V$ geldt: $\varphi(x) \leq p(x)$. Dan bestaat er een lineaire functionaal ψ op E die φ uitbreidt zodanig dat $\psi(x) \leq p(x)$ voor alle $x \in E$.

HOOFDSTUK 3

Equivalenties aan het Keuzeaxioma

In dit hoofdstuk zullen we gaan kijken naar stellingen die equivalent zijn met het Keuzeaxioma . We noemen twee stellingen $\mathcal{A}$ en $\mathcal{B}$ *equivalent* als uit $\mathcal{A}$ volgt dat $\mathcal{B}$ geldt en vica versa. In een meer wiskundige notatie:

$$\mathcal{A} \vdash_{\mathrm{ZF}} \mathcal{B} \quad \text{en} \quad \mathcal{B} \vdash_{\mathrm{ZF}} \mathcal{A}$$

Allereerst bekijken we de Welordeningsstelling. Hiervoor moeten we eerst definiëren wat we met een welordening bedoelen. Daarna zullen we de equivalenties tussen het Keuzeaxioma, de Welordeningsstelling , het Lemma van Zorn en het Lemma van Teichmüller-Tukey bewijzen.

Ten slotte laten we zien dat de Welordeningsstelling equivalent is aan de dichotomie van kardinaalgetallen en een stelling uit de kardinaalaritmetiek. Voordat we de genoemde equivalenties bewijzen, beschouwen we eerst een aantal begrippen die nodig zijn voor het bewijs.

1. De Welordeningsstelling

Voor het beschrijven van de Welordeningsstelling hebben we eerst het begrip *welgeordende* verzameling nodig.

1.1. Lineaire ordeningen en welordeningen. Zij X een verzameling. Een *lineaire of totale* ordening op een verzameling X is een relatie $<$ die voldoet aan de volgende eisen:

(L1) $(\forall x \in X)(\neg(x < x))$ [irreflexiviteit]

(L2) $(\forall x, y, z \in X)((x < y \wedge y < z) \to x < z)$ [transitiviteit]

(L3) $(\forall x, y \in X)(x = y \vee x < y \vee y < x)$ [trichotomie]

We noteren een ordening op een verzameling X gebruikelijk als een dupel gegeven door $\langle X, < \rangle$.

Definitie 3.1 (Welordening). *Laat X een verzameling zijn en $<$ een totale ordening op X. De totale ordening heet een* welordening *als voor alle niet-lege deelverzamelingen $V \subseteq X$ geldt dat er een kleinste element is ten aanzien van de ordening $<$.*

We kunnen ons afvragen of er voor elke verzameling X een totale ordening $<$ bestaat zodanig dat deze de verzameling X welordent[1]. Het blijkt dat deze vraag niet triviaal is. Zermelo heeft bewezen dat deze vraag equivalent is aan het Keuzeaxioma. We noemen deze stelling ook wel de *Welordeningsstelling*.

Stelling 3.1 (Welordeningsstelling). *Elke verzameling is te welordenen.*

Om de equivalentiebeweringen te kunnen bewijzen, hebben we de volgende notie nodig.

2. Hartog's Aleph

Laat X een verzameling zijn. De Hartogs' Aleph van X gegeven door $\aleph(X)$ is het kleinste ordinaalgetal α waarvoor geldt dat er *geen* injectie van α naar X bestaat. In het bijzonder is te bewijzen dat voor elke verzameling X de Hartogs' Aleph $\aleph(X)$ altijd bestaat.

3. Equivalenties I

Nu zijn we in staat om de volgende equivalenties te bewijzen.

Stelling 3.2. *De volgende beweringen zijn equivalent:*

(i) Het Keuzeaxioma;
(ii) De Welordeningsstelling;
(iii) Het Lemma van Zorn;
(iv) Het Lemma van Teichmüller-Tukey.

Het is goed om op te merken dat deze stelling slechts een fractie van de equivalenties geeft die in de loop der jaren zijn bewezen. In [**8**] zetten H. Rubin en J. Rubin een uitgebreid scala aan equivalenties uiteen. Ook wordt hierin

[1] Natuurlijk zijn er triviale verzamelingen, waarbij we een welordening gemakkelijk kunnen aanwijzen. Voorbeelden van zulke verzamelingen zijn de *eindige* verzamelingen en $\mathbb{N}$. De natuurlijke ordening op $\mathbb{N}$ $(0 < 1 < 2 < \dots)$ geeft direct een welordening op $\mathbb{N}$. Voor eindige verzamelingen is de vraag flauw.

beschreven welke stellingen zwakker zijn dan het keuzeaxioma (zwakker betekent dat uit het keuzeaxioma de stelling volgt, maar dat uit de stelling niet het keuzeaxioma volgt).

We geven nu het bewijs van de stelling. Het bewijs zal bestaan uit een viertal implicaties.

Bewijs. "$(i) \to (ii)$": Zij X een verzameling. We zoeken een welordening op X. Uit de verzamelingenleer weten we dat elke welgeordende verzameling isomorf is met precies één ordinaalgetal[2]. De vraag reduceert tot het vinden van een ordinaalgetal α en een bijectieve afbeelding $\varphi : \alpha \to X$. Zij $\mathcal{F}$ de verzameling van alle niet-lege deelverzamelingen van X en zij F een keuzefunctie op $\mathcal{F}$. We definiëren met behulp van transfiniete recursie de volgende α-rij bestaande uit distincte elementen van X:

$$\begin{aligned} a_0 &= F(X) \\ a_1 &= F(X - \{a_0\}) \\ &\vdots \\ a_\xi &= F(X - \{a_\eta : \eta < \xi\}). \end{aligned}$$

We claimen dat dit proces stopt voor $\aleph(X)$. Als dit niet het geval zou zijn, dan zou het bovenstaande proces een injectieve afbeelding van $\aleph(X)$ naar X aangeven. Dit is in tegenspraak met de definitie van $\aleph(X)$. We zien dus dat $\aleph(X)$ een bovengrens aangeeft voor ξ. Zodoende vinden we een ordinaalgetal α met een bijectieve φ gegeven door

$$\varphi : \alpha \to X, \quad \xi \mapsto a_\xi = F(X - \{a_i : \eta < \xi\}).$$

Deze φ geeft direct aanleiding tot een welordening $\prec$ op X: voor $x, y \in X$ zeggen we dat $x \prec y$ als geldt $\varphi^{-1}(x) \in \varphi^{-1}(y)$.

"$(ii) \to (iii)$": Zij $\langle P, < \rangle$ een niet-lege partieel geordende verzameling en veronderstel dat iedere keten van P een bovengrens heeft. We zoeken een maximaal element van P. Merk allereerst op dat we P kunnen welordenen, dat wil zeggen er is een ordinaalgetal α zodat

$$P = (p_0, p_1, \ldots, p_\xi, \ldots) \quad (\xi < \alpha).$$

---

[2]Een *ordinaalgetal* is een transitieve verzameling die welgeordend is ten aanzien van de $\in$-relatie. We noemen een verzameling X transitief als uit $A \in X$ volgt $A \subset X$.

Met transfiniete recursie definieren we

$$
\begin{aligned}
c_0 &= p_0 \\
c_1 &= p_1 \\
&\vdots \\
c_\xi &= p_\gamma,
\end{aligned}
$$

met γ het kleinste ordinaalgetal zodat p_γ een bovengrens is voor de keten $C = \{c_\eta : \eta < \xi\}$ met $p_\gamma \notin C$. (Dit wordt ook wel de voorgangersverzameling van c_ξ genoemd.) Merk op dat de verzameling $\{c_\eta : \eta < \xi\}$ altijd een keten is en dat p_γ bestaat zolang $c_{\xi-1}$ geen maximaal element is. Als ξ een limiet is dan geldt zeker dat er een bovengrens is voor de keten C met $p_\gamma \notin C$. Stel dat dit proces niet stopt. Op een gegeven moment vinden we met deze constructie de keten $C = \{c_\eta : \eta < \alpha\}$. Een bovengrens p voor deze verzameling zal dan al bevat zijn in C. Dit geeft een tegenspraak op het de constructie. Per constructie zal moeten gelden dat $p \notin C$. Derhalve geldt dat dit proces op den duur stopt en zodoende vinden we een maximaal element van P.

"$(iii) \to (iv)$": Zij $\mathcal{F}$ een niet-lege familie van verzamelingen en veronderstel dat $\mathcal{F}$ van eindig karakter is. Merk allereerst op dat $\mathcal{F}$ partieel geordend is door $\subseteq$. Laat C een keten zijn van $\mathcal{F}$ en zeg $b = \bigcup\{X : X \in C\}$. Laat $V \subseteq b$ een eindige verzameling zijn. Observeer dat er dan een grootste $X \in C$ bestaat met $V \subseteq X$. Dus $V \in \mathcal{F}$. Uit het eindig karakter van $\mathcal{F}$ volgt dan dat $b \in \mathcal{F}$.

Per constructie geldt dat $C \subseteq b$, dus b is een bovengrens voor C. Met behulp van het Lemma van Zorn concluderen we dat er een maximaal element in $\mathcal{F}$ bestaat ten aanzien van de inclusierelatie $\subseteq$.

"$(iv) \to (i)$": Zij $\mathcal{F}$ een familie van niet-lege verzamelingen. We zoeken een keuzefunctie f op $\mathcal{F}$. Beschouw de volgende familie van functies

$$\mathcal{G} = \{f : f \text{ is een keuzefunctie op een domein } \mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}\}.$$

Merk op dat een functie een verzameling geordende paren is, zodat de bovenstaande familie ook daadwerkelijk een familie van verzamelingen is. We claimen dat $\mathcal{G}$ van eindig karakter is. Dit volgt direct uit het feit dat beperkingen van functies opnieuw functies zijn[3]. Uit het Lemma van Teichmüller-Tukey volgt nu dat $\mathcal{G}$ een maximaal element M (een maximale functie dus!) heeft ten aanzien van de inclusierelatie.

We claimen dat het domein van M gelijk is aan $\mathcal{F}$. Stel dat $\operatorname{dom} M \neq \mathcal{F}$, dan is er een $X \in \mathcal{F}$ zodat $X \notin \operatorname{dom} M$. Uit deze verzameling kunnen we een element m kiezen. Hiermee kunnen we M uitbreiden tot een nieuwe functie $M' = M \cup (X, m)$ met $\operatorname{dom} M \supset \operatorname{dom} M'$. Dit is in tegenspraak met de maximaliteit van M. We concluderen dat $\operatorname{dom} M = \mathcal{F}$. $\square$

Nu we de eerste equivalenties hebben bewezen bekijken we nog twee equivalenties. Hiervoor zullen we eerst bekijken hoe we kardinaalgetallen kunnen vergelijken en bekijken we een stelling uit de kardinaalaritmetiek.

4. De dichotomie van kardinaalgetallen

Cantor gaf in één van zijn artikelen aan dat bij elke verzameling een zeker *kardinaalgetal* hoort. Als A een verzameling is, noteren we zijn kardinaliteit met $|A|$. Ook gaf Cantor een manier aan om verzamelingen ten aanzien van hun kardinaliteit te vergelijken. We zeggen dat twee verzamelingen A en B *equivalent* zijn, hetgeen we noteren met $|A| = |B|$, als er een bijectieve afbeelding $\varphi : A \to B$ bestaat. Verder vergelijken we verzamelingen op de volgende manier:

(C1) We zeggen dat $A \leq B$ als er een *injectieve* afbeelding van A naar B bestaat;
(C2) We zeggen dat $A \approx B$ als er een *bijectieve* afbeelding van A naar B bestaat;
(C3) We zeggen dat $A < B$ als geldt dat $A \leq B$ en $B \nleq A$.

We kunnen ons afvragen of iedere verzameling te vergelijken is op de bovenstaande manier. We formuleren deze stelling als volgt.

Stelling 3.3 (Dichotomie). *Voor ieder tweetal verzamelingen X en Y geldt: $X \leq Y$ óf $Y \leq X$.*

[3] Denk bijvoorbeeld aan de volgende situatie: $f : [0,1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$. Dan is de beperking van f op het interval $I = [0, 0.5]$ opnieuw een functie, namelijk $f \upharpoonright I : [0, 0.5] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$.

Daarnaast zijn *welgeordende verzamelingen* te vergelijken zonder gebruik te maken van het keuzeaxioma, maar slechts met het recursieprincipe.

STELLING 3.4. *Laat $\langle X, <\rangle$ en $\langle Y, \prec\rangle$ twee welgeordende verzamelingen zijn. Dan is X isomorf met een deelverzameling van Y of Y is isomorf met een deelverzameling van X.*

Met "X is isomorf met een deelverzameling van Y" bedoelen we dat er een orde-bewarende *bijectieve* afbeelding bestaat tussen X en een deelverzameling $V \subseteq Y$. We zien dus dat deze stelling de benodige injectie in (C1) meteen geeft. Ten slotte hebben we de volgende stelling nodig uit de kardinaalaritmetiek.

STELLING 3.5. *Als X een oneindige welgeordende verzameling is dan geldt: $|X \times X| = |X|$.*

Deze stelling is onder andere bewezen door Philip Jourdain en Hessenberg. Voor een bewijs van deze stelling zie [**6**].

5. Equivalenties II

STELLING 3.6. *De volgende twee beweringen zijn equivalent:*

(i) *Welordeningsstelling;*

(ii) *Voor iedere oneindige verzameling X geldt dat $|X \times X| = |X|$.*

BEWIJS. "$(i) \to (ii)$": Laat X een oneindige verzameling zijn. Met behulp van het keuzeaxioma kunnen we X welordenen. Uit stelling 1.4 volgt dan dat geldt $|X \times X| = |X|$.

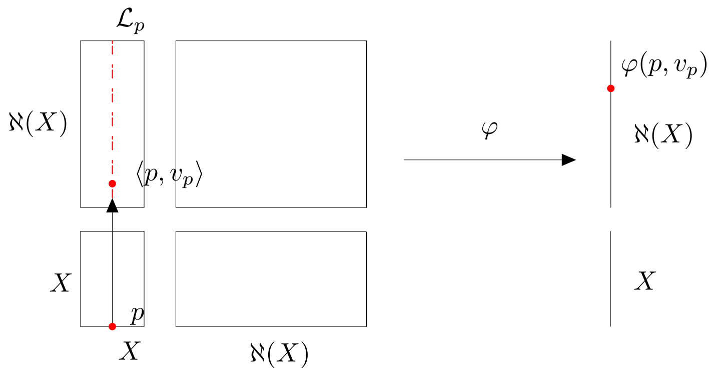
"$(ii) \to (i)$": Zij X een verzameling. Als X eindig is, is het eenvoudig in te zien dat deze te welordenen is. Veronderstel dus dat X oneindig is. Laat $\aleph(X)$ de bijbehorende Hartogs' Aleph zijn en beschouw $X \cup \aleph(X)$. Deze verzameling is oneindig groot, dus geldt dat $|(X \cup \aleph(X))^2| = |X \cup \aleph(X)|$. Met andere woorden: er is een bijectie φ tussen $(X \cup \aleph(X))^2$ en $X \cup \aleph(X)$.

We kiezen $p \in X$ vast. Beschouw de verzameling

$$\mathcal{L}_p = \{\langle p, y\rangle : y \in \aleph(X)\}.$$

In figuur 1 is voor een vaste p zo een verzameling $\mathcal{L}_p$ aangegeven. Merk allereerst op dat het beeld van deze verzameling niet in zijn geheel binnen

X valt. Als dit wel het geval zou zijn, dan zouden we een injectie van $\aleph(X)$ in X hebben en dit is in tegenspraak met de definitie van de verzameling $\aleph(X)$.



FIGUUR 1. De bijectie φ.

We zijn geïntereseerd in de elementen uit $\mathcal{L}_p$ die afgebeeld worden in $\aleph(X)$. Beschouw daartoe de verzameling

$$V_p = \{y \in \aleph(X) : \varphi(p, y) \in \aleph(X)\}.$$

Merk op dat $\mathcal{V}_p \subset \aleph(X)$ en dat $\aleph(X)$ een welgeordende verzameling is. Derhalve geldt dat $\mathcal{V}_p$ een $\in -$minimaal element bevat, zeg v_p. Voor een vaste $p \in X$ noemen we $v_p \in \mathcal{V}_p$ het corresponderende kleinste element.

Beschouw de functie $f : X \to X \times \aleph(X)$ gegeven door $f(x) = \langle x, v_p\rangle$. Deze afbeelding is injectief. Voor $x, y \in X$ definiëren we de relatie

$$x < y \quad \text{dan en slechts dan als} \quad \varphi(x, v_x) \in \varphi(y, v_y).$$

Omdat $\aleph(X)$ welgeordend is door de $\in$-relatie en φ en f injectieve afbeeldingen volgt dat $<$ een welordening op X is. Dit impliceert de Welordeningsstelling. $\square$

6. Equivalenties III

Als laatste bewijzen we de equivalentie tussen de Welordeningsstelling en de dichotomie van kardinaalgetallen.

STELLING 3.7. *De volgende twee beweringen zijn equivalent:*

(i) *Welordeningsstelling;*

(ii) *Voor ieder tweetal verzamelingen X en Y geldt: $|X| \leq |Y|$ of $|Y| \leq |X|$.*

BEWIJS. "*(i)* $\rightarrow$ *(ii)*": Laat X en Y twee verzamelingen zijn. Met behulp van de Welordeningsstelling kunnen we X en Y welordenen. Uit stelling 3.3 volgt dan dat of X isomorf is met een deelverzameling van Y of dat Y isomorf is met een deelverzameling van X. Stel dat X isomorf is met een deelverzameling van Y. Dit betekent dat er een *injectieve* afbeelding $f : X \to Y$ bestaat. Derhalve geldt $X \leq Y$. Op eenzelfde manier concluderen we dat, wanneer Y isomorf is met een deelverzameling van X, dat dan $Y \leq X$ geldt.

"*(ii)* $\rightarrow$ *(i)*": Zij X een verzameling. Omdat niet geldt dat $\aleph(X) \leq X$ volgt uit de aanname dat $X \leq \aleph(X)$. Met andere woorden: er is een injectieve functie $\psi : X \to \aleph(X)$. We definiëren de volgende relatie $<$ op X: voor $x, y \in X$ geldt

$$x < y \quad \text{dan en slechts dan als} \quad \psi(x) \in \psi(y).$$

Omdat $\aleph(X)$ een welgeordende verzameling is en ψ een injectieve afbeelding, volgt dat $<$ een welordening definieert op X. $\square$

HOOFDSTUK 4

Consistentie van het Keuzeaxioma

Nu we hebben laten zien waar het Keuzeaxioma allemaal goed voor is, gaan we dieper op het axioma in. De toepassingen die tot op heden aan bod zijn gekomen zijn prachtig, maar we moeten ons afvragen of dit niet allemaal pure onzin is.

Dit leidt ons tot het laten zien van de *consistentie* van het Keuzeaxioma ten aanzien van het axiomatisch systeem van Zermelo en Fraenkel.

Allereerst roepen we kort in herinnering hoe het axiomatisch systeem van Zermelo en Fraenkel eruit ziet en behandelen we de definitie van een transitief model voor een theorie.

Vervolgens behandelen we een belangrijke stelling van Gödel die laat zien hoe, onder bepaalde voorwaarden, modellen voor **ZF** gemaakt kunnen worden.

Een speciaal gevolg van deze stelling levert het *construeerbaar universum*. We zullen definiëren wat een construeerbare verzameling is en hiermee dit universum opbouwen. Het zal als *model* de "consistentie" van het Keuzeaxioma laten zien.

1. De axiomatische verzamelingenleer van Zermelo en Fraenkel

De axiomatische verzamelingenleer van Zermelo en Fraenkel is een eerste orde theorie [1] voor de verzamelingenleer opgesteld door Zermelo en Fraenkel in de begin van de 20$^{\text{ste}}$ eeuw. Deze theorie wordt aangeduid met **ZF**. We zullen kort bespreken hoe deze theorie is opgebouwd.

De *taal* van deze theorie bevat de predikaten $=$ en $\in$. In het vervolg zullen we altijd de symbolen $=$ en $\in$ op de gebruikelijke manier interpreteren ("gelijkheid" van verzamelingen en de "element van"-relatie). Verder gebruiken we de connectieven $\to$ en $\neg$, die een adequate verzameling van

[1] Zie voor een uitgebreid overzicht van de opbouw van een eerste orde theorie [**7**], hoofdstuk 2.

connectieven is. Daarnaast hebben we de beschikking over de universele kwantor $\forall$. De welgevormde formules zijn nu precies die formules die opgebouwd worden in termen van atomaire[2] formules.

Als laatste bevat de theorie een aantal proper axioma's , die de verzamelingenleer karakteriseren. Deze zijn als volgt:

Axioma 1. Extentionaliteit:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y)$$

Axioma 2. Paarvorming:

$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(u \in z \leftrightarrow u = x \vee u = y)$$

Axioma 3. Afscheiding[3]: als φ een welgevormde formule is en y niet vrij in φ, geldt

$$(\forall \mathbf{p})(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \leftrightarrow (z \in x \wedge \varphi(z, \mathbf{p})))$$

Axioma 4. Vereniging:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(\forall u)\left((z \in x \wedge u \in z) \to u \in y\right)$$

Axioma 5. Vervangingsschema[3]: als φ een welgevormde formule is en z niet vrij in φ, geldt

$$(\forall \mathbf{p})(\forall x)\big((\forall w \in x)(\exists! y)\varphi(w, y, \mathbf{p}) \to (\exists z)(\forall w \in x)(\exists y \in z)\varphi(w, y, \mathbf{p})\big)$$

Axioma 6. Oneindigheid:

$$(\exists x)\big(\emptyset \in x \wedge (\forall y \in x)(y \cup \{y\} \in x)\big)$$

Axioma 7. Machtsverzameling:

$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \subseteq x \to z \in y)$$

Axioma 8. Regulariteit:

$$(\forall x)\big(x \neq \emptyset \to (\exists y)\big(y \in x \wedge \neg(\exists z)(z \in x \wedge z \in y)\big)\big)$$

[2]Een atomaire formule is een logische formule die geen logische operatoren zoals $\neg$ en $\Rightarrow$ bevat.

[3]De vector $\mathbf{p}$ is een eindig rijtje variabelen $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ die vrij voorkomen in de formule φ.

2. Het universum V

In de verzamelingenleer zijn haast alle objecten als verzamelingen[4] op te vatten. Denk bijvoorbeeld aan *grafen*, *groepen*, *functies*, *het Cartesisch product* $\prod_{t\in T} X_t$, enz. Daarnaast hebben veel structuren in de wiskunde een onderliggende verzameling. Russel heeft laten zien dat men hierin niet kan doorslaan door op te merken dat de verzameling van alle verzamelingen niet kan bestaan.

Om het leven van een wiskundige makkelijker te maken, is het begrip *klasse* ingevoerd. Een klasse is een entiteit van de vorm

$$\{x : \varphi(x)\}.$$

In deze optiek is iedere verzameling op te vatten als een klasse. We spreken van een *echte* klasse als deze geen verzameling is. Zodoende kunnen we spreken over *de* klasse van alle verzamelingen, die we zullen noteren met $\mathbf{V}$. Verder noteren we met $\mathbf{ON}$ de klasse van alle ordinaalgetallen.

Vervolgens willen we enige structuur aanbrengen in de klasse $\mathbf{V}$. Het idee is om de klasse $\mathbf{V}$ in "lagen" op te bouwen. Dit idee komt van de wiskundige John von Neumann en wordt ook wel de "Von Neumann Hiërarchie" genoemd. In de aanwezigheid van het regulariteitsaxioma kunnen we de klasse V recursief opbouwen. We schrijven

$$\begin{aligned} &V_0 = \emptyset, \\ &V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha), \text{ en} \\ &V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \text{ als } \alpha \text{ een limiet is.} \end{aligned}$$

Aan iedere verzameling x is een *rang* toe te kennen. Dit is het kleinste ordinaalgetal α zodanig dat $x \in V_{\alpha+1}$. Hiermee is te bewijzen dat iedere verzameling als element in de bovenstaande hiërarchie te vinden is. Zie voor een schets van het bewijs [**4**], bladzijde 44. Zodoende geldt

$$\mathbf{V} = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} V_\alpha$$

en dit is precies de Von Neumann Hiërarchie. In het vervolg zullen we V het *universum* van alle verzamelingen noemen.

[4]Cantor's definitie van een verzameling was: "een collectie *dingen* die voldoen aan een bepaalde omschrijving/eigenschap".

2.1. Consistentie van een theorie. We noemen een theorie consistent als er geen formule φ bestaat zodanig dat zowel φ als $\neg\varphi$ bewijsbaar zijn. Met bewijsbaar bedoelen we dat er een *eindige* afleiding binnen de theorie bestaat waaruit de formule φ volgt. Het is lastig om met deze definitie te werken. Daarom leiden we de volgende equivalentie af. Dit is een gevolg van de Volledigheidsstelling van Gödel.

STELLING 4.1 (Volledigheidsstelling van Gödel). *In elke predikaatlogica geldt: voor iedere welgevormde formule $\mathcal{B}$ geldt dat*

$\mathcal{B}$ is een stelling dan en slechts dan als $\mathcal{B}$ logisch geldig is.

Als direct gevolg is hieruit af te leiden dat een theorie K consistent is dan en slechts dan als K een model heeft. Om de consistentie van **ZF** te laten zien is het dus voldoende om een model voor **ZF** te construeren. Met dit idee in het achterhoofd zullen we laten zien dat onder bepaalde condities inderdaad modellen voor **ZF** en in het bijzonder voor **ZF** + Keuzeaxioma te construeren zijn.

2.2. Transitieve modellen voor ZF. In deze paragraaf zullen we laten zien hoe Gödel modellen voor **ZF** kon "construeren". Hiervoor hebben we eerst de volgende definities nodig. Allereerst beschouwen we een klasse $\mathcal{M}$. We noemen deze klasse *transitief* als het volgende geldt: als $F \in \mathcal{M}$, waarbij F een verzameling is, dan geldt dat $F \subseteq \mathcal{M}$. Verder noemen we een transitieve klasse $\mathcal{M}$ *bijna universeel* als geldt

$$(\forall S \subset \mathcal{M})(\exists Y \in \mathcal{M})(S \subset Y),$$

waarbij *alleen* gekwantificeerd wordt over verzamelingen. Naast de begrippen transitief en bijna universeel had Gödel de onderstaande operaties nodig, die de *Gödeloperaties* zijn genoemd. Met behulp van deze operaties is het mogelijk om andere verzamelingtheoretische operaties te kunnen beschrijven. De Gödeloperaties zijn de volgende acht operaties:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_1(X,Y) = \{X,Y\},\\
&\mathcal{F}_2(X,Y) = X \setminus Y,\\
&\mathcal{F}_3(X,Y) = X \times Y,\\
&\mathcal{F}_4(X) = \mathrm{dom}(X),\\
&\mathcal{F}_5(X) = \in \cap\, X^2,\\
&\mathcal{F}_6(X) = \{(a,b,c) : (b,c,a) \in X\},\\
&\mathcal{F}_7(X) = \{(a,b,c) : (c,b,a) \in X\},\\
&\mathcal{F}_8(X) = \{(a,b,c) : (a,c,b) \in X\},
\end{aligned}$$

waarbij $\in \cap\, X^2 = \{(u,v) \in X^2 : u,v \in X \wedge u \in v\}$[5].

Met behulp van dit gereedschap was Gödel in staat om de volgende stelling te bewijzen.

STELLING 4.2 (Stelling van Gödel). *Als $\mathcal{M}$ een transitieve bijna universele klasse is en gesloten onder de Gödel operaties, dan is $\mathcal{M}$ een model van* **ZF**.

Een schets van het bewijs is te vinden in [**5**], bladzijde 35-38. Dit bewijs komt neer op het aantonen dat $\mathcal{M}$ voldoet aan alle acht axioma's van Zermelo en Fraenkel.

Met deze stelling is de *relatieve consistentie* van **ZF** bewezen. Met relatieve consistentie bedoelen we dat als we ervan uitgaan dat het universum V aan de axioma's van **ZF** voldoet, deze dan ook in het model $\mathcal{M}$ uit de bovenstaande stelling gelden. Deze veronderstelling is niet onzinnig, omdat als het universum V niet aan **ZF** voldoet, dan houdt het op. De volgende stap is het opbouwen van het *construeerbare* universum L om zo een model te kunnen construeren voor **ZF** + Keuzeaxioma.

[5] Bijvoorbeeld $\in \cap\, \omega^2 = \{(u,v) \in \omega^2 | u \in v\}$.

3. Het construeerbaar universum L

In deze paragraaf gaan we het kleinste transitieve model bouwen dat alle ordinaalgetallen bevat en aan de axioma's van **ZF** *en* het Keuzeaxioma voldoet. Hiervoor zullen we gebruik maken van de Gödeloperaties uit de vorige paragraaf. Als we zo'n model willen bouwen dat aan de axioma's van **ZF** + Keuzeaxioma voldoet, dan moet deze in ieder geval transitief, bijna universeel en gesloten onder de Gödeloperaties zijn. Dit leidt tot de volgende definitie.

Definitie 4.1 (De Afsluiting van een verzameling). *Zij S een verzameling. De afsluiting van de verzameling S, genoteerd met* $\mathrm{cl}(S)$*, is de kleinste verzameling $S' \supseteq S$ zodanig dat deze gesloten is onder de Gödeloperaties. In het bijzonder kunnen we de afsluiting schrijven als*

$$\mathrm{cl}(S) = S_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \ldots, \quad n \in \omega,$$

waarbij $S_0 = S$, $S_{n+1} = S_n \cup \{\mathcal{F}_i(x, y) : i = 1, \ldots, 8 \wedge x, y \in S_n\}$.

We kunnen de volgende hiërarchie bouwen:

$$\begin{aligned}
L_0 &= \emptyset,\\
L_{\alpha+1} &= \mathcal{P}(L_\alpha) \cap \mathrm{cl}(L_\alpha \cup \{L_\alpha\}),\\
L_\alpha &= \bigcup_{\beta<\alpha} L_\beta \text{ als } \alpha \text{ een limiet is.}
\end{aligned}$$

Dan is de klasse L gegeven door

$$L = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} L_\alpha.$$

Per constructie geldt dat L een transitieve, bijna universele klasse is die gesloten is onder de Gödeloperaties. Derhalve geldt dat deze klasse een model vormt voor **ZF**. We noemen L het *construeerbaar universum* en de elementen van L heten de *construeerbare verzamelingen*.

We claimen dat dit universum een model is dat aan het Keuzeaxioma voldoet. Uit de hiërarchie van L kunnen we een globale welordening construeren. We zullen deze constructie schetsen.

De globale welordening op L zal geconstrueerd worden door met behulp van transfiniete recursie iedere "laag" L_α te welordenen. Hiervoor is het volgende lemma nodig.

LEMMA 4.1. *Zij X een verzameling. Als X te welordenen is, dan is ook* $\mathrm{cl}(X \cup \{X\})$ *te welordenen.*

Het genoemde lemma zullen we niet bewijzen. Merk op dat uit dit lemma volgt dat $\mathcal{L}_{\alpha+1}$ ook te welordenen is als $\mathcal{L}_\alpha$ te welordenen is.Met transfinitie recursie is dan te bewijzen dat iedere laag L_α te welordenen is (voor zowel ordinaalgetallen als limietgetallen).

We claimen nu dat deze constructie een welordening $\prec$ op L definieert. Immers, pak maar twee verzamelingen $X, Y \in L$. Dan komen X en Y in de lagen L_α respectievelijk L_β voor. Als $\alpha < \beta$ dan zeggen we dat $X \prec Y$. Stel nu dat $\alpha = \beta$, dan leven de verzamelingen X en Y in dezelfde laag. Voor deze laag weten we dat hij welgeordend is. Dus geldt dat ofwel $X \prec Y$, ofwel $Y \prec X$. We zien dus dat deze observatie een lineaire ordening op L definieert.

De constructie van L $(= \bigcup_{\alpha \in \mathbf{ON}} L_\alpha)$ laat nu zien dat deze lineaire ordening ook een welordening op L definieert. Neem maar een deelverzameling van L, zeg V. De elementen van V leven in de lagen van L. Er zijn dus verzamelingen die in de laag L_α met kleinste index α leven. Laat $V_\alpha = \{x \in V : x \in L_\alpha\}$. Deze verzameling is een deelverzameling van L_α. Uit het lemma volgt dat deze laag welgeordend is. Voor de verzameling V_α is er dus een kleinste element, zeg $m \in V_\alpha$. Dit element is dan ook het kleinste element van de verzameling V. Derhalve geldt dat $\prec$ een welordening op L definieert.

Uit deze welordening op L volgt nu ook dat iedere construeerbare verzameling $V \in L$ te welordenen is. Nu is de vraag of ook het omgekeerde waar is. We willen graag kunnen zeggen als iedere verzameling van $\mathbf{V}$ construeerbaar is, dat dan ook het universum $\mathbf{V}$ welgeordend kan worden en dus een model voor $\mathbf{ZF}$ + Keuzeaxioma is! Hiervoor is het volgende axioma in het leven geroepen.

Het Axioma van Construeerbaarheid. $V = L$, oftewel iedere verzameling is construeerbaar.

Over de plausibiliteit van dit axioma wordt tot op de dag van vandaag gediscusseerd. Zie bijvoorbeeld het artikel [**1**] over de plausibiliteit van $V = L$. Desalniettemin kunnen we de volgende stelling formuleren en bewijzen.

STELLING 4.3. $L \models$ Het Axioma van Construeerbaarheid*, en er volgt dat L een model is voor* $\mathbf{ZF} +$ Keuzeaxioma*.*

De stelling zegt dat in het universum L het Axioma van Construeerbaarheid geldt en dat hieruit volgt dat inderdaad L een model vormt voor $\mathbf{ZF} +$ Keuzeaxioma. Dit laat de consistentie van het Keuzeaxioma met de andere axioma's van Zermelo en Fraenkel zien.

Het bewijzen van de consistentie van het Keuzeaxioma is de eerste stap van het bewijs dat het Keuzeaxioma onafhankelijk is. De rest van het bewijs van de onafhankelijkheid van het Keuzeaxioma zal via de theorie der permutatiemodellen gaan.

HOOFDSTUK 5

Onafhankelijkheid van het Keuzeaxioma

In dit hoofdstuk tonen we aan dat het Keuzeaxioma onafhankelijk is van axioma's van Zermelo en Fraenkel. We noemen een bewering φ binnen de logica *onafhankelijk* van **ZF** als $\mathbf{ZF} + \neg\varphi$ consistent is. Dit betekent dat we een model moeten bouwen voor $\mathbf{ZF} + \neg\mathrm{AC}$. Dit zullen we doen met behulp van de theorie der permutatiemodellen.

Allereerst zullen we definiëren wat we bedoelen met het axiomatisch systeem **ZFA**. Hierbij spelen *atomen* een belangrijke rol. Vervolgens zullen we de theorie achter een permuatiemodel beschrijven en met behulp van deze theorie een model bouwen die de consistentie van $\mathbf{ZFA} + \neg\mathrm{AC}$ laat zien.

1. De verzamelingenleer met atomen

De verzamelingenleer met atomen, genoteerd met **ZFA**, is een aanpassing van de verzamelingenleer in de theorie **ZF**. Naast verzamelingen bevat **ZFA** ook een verzameling objecten genaamd *atomen*.

Definitie 5.1. *Een* atoom *a is een object dat niet leeg is, maar geen elementen bevat.*

De taal van de theorie **ZF** bevat naast de symbolen $\in$ en $=$ ook de constante symbolen $\emptyset$ en A. Deze zullen we interpreteren als de lege verzameling respectievelijk de verzameling van atomen.

De axioma's van **ZFA** zijn ongeveer dezelfde als van **ZF**, met een paar aanpassingen. Allereerst bevat het systeem **ZFA** het axioma dat de betekenis van de lege verzameling $\emptyset$ vastlegt.

Axioma $\emptyset$. De lege verzameling:

$$\neg(\exists x)(x \in \emptyset).$$

Vervolgens voegen we een axioma toe dat een atoom beschrijft en betekenis geeft aan de verzameling atomen A.

Axioma A. De verzameling van atomen:

$$(\forall z)\big(z \in A \leftrightarrow \big(z \neq \emptyset \wedge \neg(\exists x)(x \in z)\big)\big).$$

Een verzameling is dus een object dat geen atoom is. Door het karakter van de atomen moeten de axioma's het extensionaliteit- en regulariteitaxioma aangepast worden. In deze twee axioma's speelt de $\in$-relatie een rol, maar voor atomen heeft deze relatie geen betekenis. We kwantificeren bij deze axioma's dus alleen over verzamelingen.

Axioma 1. Het Extensionaliteitsaxioma voor verzamelingen:

$$(\forall \text{ set } X)(\forall \text{ set } Y)\big((\forall z)(z \in X \leftrightarrow z \in Y) \leftrightarrow X = Y\big).$$

We merken op dat de uitspraken "X is niet-leeg" en "$X \neq \emptyset$" in het bijzijn van atomen niet dezelfde betekenis hebben. Met de uitspraak "X is niet-leeg" wordt een verzameling die niet leeg is bedoeld, terwijl in de uitspraak "$X \neq \emptyset$" zowel een verzameling als een atoom bedoeld kan worden. Dit is de reden dat de regulariteitsaxioma op een andere manier geformuleerd dient te worden.

Axioma 8. Het Regulariteitsaxioma voor verzamelingen:

$$(\forall \text{ niet-lege } X)(\exists x \in X)\big(x \cap X = \emptyset\big).$$

Merk op dat een atoom geen elementen bevat, maar dat een verzameling wel degelijk atomen als elementen kan hebben. Zodoende kunnen atomen als $\in$-minimale elementen voorkomen.

We kunnen op een soortgelijke wijze een universum van verzamelingen bouwen in deze theorie. Als S een verzameling is, dan wordt $\mathcal{P}^\alpha(S)$ gedefinieerd[1] door:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^0(S) &= S,\\
\mathcal{P}^\alpha(S) &= \mathcal{P}^\alpha(S) \cup \mathcal{P}(\mathcal{P}^\alpha(S)),\\
\mathcal{P}^\alpha(S) &= \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}^\beta(S) \quad (\alpha \text{ is een limietgetal}).
\end{aligned}$$

[1]Voor een verzameling X noteren we met $\mathcal{P}(X)$ de machtsverzameling van X.

Dan kunnen we schrijven

$$\mathcal{P}^\infty(S) = \bigcup_{\alpha\in\mathbf{ON}} \mathcal{P}^\alpha(S).$$

Het universum wat dan met de verzameling atomen op te bouwen is wordt gegeven door $W = \mathcal{P}^\infty(A)$. Dit universum bevat dan onder andere de verzameling van atomen A en bovendien verzamelingen van atomen die we kunnen *interpreteren* als verzamelingen met één element, twee elementen, enz. Het universum W is in dat opzicht dus "groter" dan het universum V uit hoofdstuk 4. Daarnaast heet $\mathcal{P}^\infty(\emptyset)$ de *kern*. Deze klasse zal een belangrijke rol gaan spelen bij het eerste Fraenkel model.

Tenslotte merken we op dat **ZFA** + A *aftelbaar oneindig groot* consistent bewezen is, onder de veronderstelling dat **ZF** consistent is.

2. Permutatiemodellen

In deze paragraaf zullen we definiëren wat een permutatiemodel is. Omdat volgens de axioma's van **ZFA** de atomen "ononderscheidbaar" zijn, zijn we in staat om de atomen onderling met elkaar te permuteren. Met behulp van deze "vrijheid" zullen we een model construeren van **ZFA** waarin een verzameling niet welgeordend kan worden.

Zij π een permutatie op A. Uit de hiërarchie van $W = \mathcal{P}^\infty(A)$ kunnen we $\pi x = \pi(x)$ met behulp van transfiniete recursie als volgt definiëren:

$$\pi(\emptyset) = \emptyset, \quad \pi(x) = \{\pi(y) : y \in x\}.$$

In het bijzonder volgt uit deze definitie dat zo een permutatie π zich zal gaan gedragen als een automorfisme ten aanzien van de $\in$-relatie op het universum W. In [**5**] staat op bladzijde 46 een overzicht van andere eigenschappen die af te leiden zijn voor zulke permutaties. Verderop in dit hoofdstuk zullen we de volgende twee eigenschappen van zo'n π nodig.

(a) $\pi(\langle x, y) = \langle \pi(x), \pi(y)\rangle$;
(b) $\pi(x) = x$ voor alle $x \in \mathcal{P}^\infty(\emptyset)$.

Voor de definitie van een permutatiemodel hebben we de notie van een *normaal filter* nodig. Merk op dat zo een normaal filter een speciaal geval is van een gewoon filter uit de verzamelingenleer.

DEFINITIE 5.2 (Normaal filter). *Zij* $\mathcal{G}$ *een permutatiegroep van* A. *Een verzameling* $\mathcal{F}$ *van ondergroepen van* $\mathcal{G}$ *heet een* normaal filter *op* $\mathcal{G}$ *als deze aan de volgende eisen voldoet:*

(N1) $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$;
(N2) voor alle $H \in \mathcal{F}$ *en* $H \subseteq K$ *geldt* $K \in \mathcal{F}$;
(N3) voor alle $H, K \in \mathcal{F}$ *geldt* $H \cap K \in \mathcal{F}$;
(N4) voor alle $\pi \in \mathcal{G}$ *en alle* $H \in \mathcal{F}$ *geldt* $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$;
(N5) voor alle $a \in A$ *geldt* $\{\pi \in \mathcal{G} : \pi a = a\} \in \mathcal{F}$.

Zij $\mathcal{G}$ een permutatiegroep op A en zij $\mathcal{F}$ een normaal filter. Naast normale filters hebben we ook de notie van de symmetriegroep van een verzameling nodig:

DEFINITIE 5.3 (Symmetriegroep). *Zij* X *een verzameling. Definieer*

$$\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X) = \{\pi \in \mathcal{G} : \pi X = X\}.$$

Dan heet $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X)$ *de symmetriegroep van* X.

Merk op dat de permutaties in de symmetriegroep van X de elementen van X onderling laat permuteren. We kunnen nu afspreken wanneer we verzamelingen symmetrisch noemen.

DEFINITIE 5.4. *Zij* $\mathcal{F}$ *een normaal filter op een permutatiegroep* $\mathcal{G}$ *van* A. *We noemen* X symmetrisch *als* $\mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(X) \in \mathcal{F}$.

We vormen nu de volgende klasse $\mathcal{V}$ van verzamelingen:

$$\mathcal{V} = \{X \mid \ X \text{ is symmetrisch en } X \subseteq \mathcal{V}\}.$$

We noemen $\mathcal{V}$ dan een *permutatiemodel* . Voor z'n permutatiemodel hebben we de volgende stelling.

STELLING 5.1. $\mathcal{V}$ *is een transitief model voor* **ZFA**. *In het bijzonder hebben we dat* $A \in \mathcal{V}$ *en de klasse* $\mathcal{V}$ *bevat alle elementen uit de kern* $\mathcal{P}^{\infty}(\emptyset)$.

Het bewijs van deze stelling staat geschetst in [**5**] op bladzijde 46 en 47. We kunnen op de volgende manier permutatiemodellen construeren. Hiervoor is de notie van een *normaal ideaal* nodig.

DEFINITIE 5.5 (Normaal ideaal). *Een familie I van deelverzamelingen van A noemen we een* normaal ideaal *als deze aan de volgende eisen voldoet:*
(I1) $\emptyset \in I$;
(I2) *als* $E \in I$ *en* $F \subseteq E$, *dan* $F \in I$;
(I3) *als* $E \in I$ *en* $F \in I$, *dan* $E \cup F \in I$;
(I4) *als* $\pi \in \mathcal{G}$ *en* $E \in I$, *dan* $\pi(E) \in I$;
(I5) *voor alle* $a \in A$ *geldt* $\{a\} \in I$.

We laten zien dat men met behulp van zo'n normaal ideaal in staat is een permutatiemodel te construeren. Dit komt erop neer dat we een normaal filter moeten construeren. Deze zal dan een permutatiemodel zoals hierboven gedefinieerd induceren. We hebben nog één laatste notie nodig. Voor een verzameling X schrijven we

$$\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(X) = \{\pi \in \mathcal{G} |\ \pi y = y \text{ voor alle } y \in X\}.$$

Deze groep heet ook wel de stabilisator van X. Deze verzameling is op te vatten als de verzameling van permutaties uit $\mathcal{G}$ die de verzameling X op zijn plek houdt. Merk op dat $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(X)$ een ondergroep vormt van $\mathcal{G}$.
Zij $\mathcal{G}$ een permutatiegroep van A, I een normaal ideaal van A en vorm $\mathcal{B} = \{\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E) : E \in I\}$. Dit is een filterbasis [2]. Laat $\mathcal{F}$ het filter zijn dat voortgebracht wordt door $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{F} = \{X : (\exists B \in \mathcal{B})\,(B \supseteq X)\}.$$

We claimen dat deze filter normaal is. Merk op dat de eerste drie eisen van een normaal filter precies de eigenschappen van een filter zijn. We gaan dus alleen nog (N4) en (N5) na.

[2]We kunnen gemakkelijk nagaan dat $\mathcal{B} = \{\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E) : E \in I\}$ een filterbasis is voor $\mathcal{F}$. Merk allereerst op dat $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(\emptyset) = \mathcal{G}$. We zien dus dat $\mathcal{B}$ niet leeg is. Vervolgens zien we in dat voor iedere $E \in I$ geldt dat $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E) \neq \emptyset$. De identiteit is namelijk een permutatie die elke $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E)$ bevat. Derhalve geldt $\emptyset \notin \mathcal{B}$. Uit de identiteit $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E \cup F) = \mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E) \cap \mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(F)$ volgt nu dat de doorsnede van twee elementen uit $\mathcal{B}$ weer een element van $\mathcal{B}$ is. We concluderen dat $\mathcal{B}$ een filterbasis is voor $\mathcal{F}$.

(N4) Zij $\pi \in \mathcal{G}$ en $H \in \mathcal{F}$ vast. Dan is er een $E \in I$ zodat $\text{fix}_{\mathcal{G}}(E) \subseteq H$. We moeten laten zien dat $\pi(\text{fix}_{\mathcal{G}}(E))\pi^{-1} \in \mathcal{F}$. Merk op:

$$\begin{aligned}
\varphi \in \pi(\text{fix}_{\mathcal{G}}(E))\pi^{-1} &\Leftrightarrow \pi^{-1}\varphi\pi \in \text{fix}_{\mathcal{G}}(E) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in E)(\pi^{-1}\pi x = x) \\
&\Leftrightarrow (\forall x \in E)(\varphi\pi x = \pi x) \\
&\Leftrightarrow \varphi \in \text{fix}_{\mathcal{G}}(\pi(E)).
\end{aligned}$$

Uit (I4) volgt nu dat $\pi(\text{fix}_{\mathcal{G}}(E))\pi^{-1} = \text{fix}_{\mathcal{G}}(\pi(E))) \in \mathcal{B}$. Omdat $\text{fix}_{\mathcal{G}}(E) \subseteq H$ volgt dat $\text{fix}_{\mathcal{G}}(\pi(E)) \subseteq \pi H \pi^{-1}$. We concluderen dat $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$.

(N5) Zij $a \in A$ vast. We gaan na dat $\{\pi \in \mathcal{G} : \pi a = a\} \in \mathcal{F}$. Merk op dat $\{a\} \in I$. Dan volgt dat $\{\pi \in \mathcal{G} : \pi a = a\} = \text{fix}_{\mathcal{G}}(\{a\}) \in \mathcal{F}$.

We concluderen dat $\mathcal{F}$ inderdaad een normaal filter is. Deze definieert nu een permutatiemodel $\mathcal{V}$. We kunnen voor deze normale filters de volgende opmerking maken: een verzameling X is symmetrisch dan en slechts dan als $\text{fix}_{\mathcal{G}}(X) \subseteq \text{sym}_{\mathcal{G}}(X)$.

In het vervolg werken we in de theorie **ZFA** + Keuzeaxioma. Er is te bewijzen dat deze theorie consistent is. Laat $\mathcal{V}$ een permutatiemodel zijn. Uit stelling 5.1 volgt dat $\mathcal{V}$ alle elementen van de kernel bevat. Voor deze elementen geldt het Keuzeaxioma. Dit betekent dus dat iedere $x \in \mathcal{P}^{\infty}(\emptyset)$ te welordenen is.

We zoeken nu binnen $\mathcal{V}$ een alternatieve conditie voor het welordenbaar zijn van een verzameling. We kunnen een element $X \in \mathcal{V}$ welordenen als er een injectieve afbeelding $f : X \to \mathcal{P}^{\infty}(\emptyset)$ bestaat. Merk op dat deze f een element is van $\mathcal{V}$, dus we weten dat $\text{sym}_{\mathcal{G}}(f) \in \mathcal{F}$. We willen graag een conditie vinden voor een verzameling X om na te gaan of deze te welordenen is. Het vinden van zo een injectieve afbeelding f kan moeilijk zijn. We zullen het volgende lemma gebruiken.

LEMMA 5.1. *Zij $\mathcal{V}$ een permutatiemodel,laat X een verzameling zijn en $f : X \to \mathcal{P}^{\infty}(\emptyset)$ een injectieve afbeelding met $\text{sym}_{\mathcal{G}}(f) \in \mathcal{V}$. Dan geldt*

$$\pi \in \text{sym}_{\mathcal{G}}(f) \leftrightarrow \pi \in \text{fix}_{\mathcal{G}}(X).$$

BEWIJS. Neem allereerst een $\pi \in \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(f)$. Er geldt dan $\pi f = f$. Met andere woorden voor alle $x \in X$ geldt dat er een $y \in X$ bestaat zodat

$$\pi(\langle x, f(x)\rangle) = \langle y, f(y)\rangle\,. \tag{1}$$

Kies nu een $x \in X$ vast en laat y zoals hierboven beschreven. Voor een permutatie π geldt ook $\pi(\langle x, f(x)\rangle) = \langle \pi(x), \pi(f(x))\rangle$. Omdat $f(x) \in \mathcal{P}^\infty(\emptyset)$ volgt dat $\pi(f(x)) = f(x)$. Er geldt dus ook

$$\pi(\langle x, f(x)\rangle) = \langle \pi(x), f(x)\rangle\,. \tag{2}$$

Het vergelijken van (1) en (2) geeft ons nu dat $f(x) = f(y)$. Omdat f injectief is betekent dit dat $x = y$. Vergelijken van de eerste coördinaten van het geordend paar geeft ons $\pi(x) = x$. Dit betekent dat $\pi \in \mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(X)$.

Neem nu aan dat $\pi \in \mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(X)$. Dit betekent voor alle $x \in X$ dat $\pi(x) = x$. We zoeken een $y \in X$ zodat

$$\pi(\langle x, f(x)\rangle) = \langle y, f(y)\rangle\,.$$

Kies $x = y$. Dan volgt, gebruikmakend dat $f(x) \in \mathcal{P}^\infty(\emptyset)$,

$$\pi(\langle x, f(x)\rangle) = \langle \pi(x), \pi(f(x))\rangle = \langle x, f(x)\rangle = \langle y, f(y)\rangle\,.$$

Dus $\pi f = f$. Er volgt dat $\pi \in \mathrm{sym}_{\mathcal{G}}(f)$. □

Met dit lemma kunnen we het volgende opmerken:

$$\mathcal{V} \models \text{X is te welordenen} \quad \text{dan en slechts dan als} \quad \mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(X) \in \mathcal{F}.$$

Om na te gaan of een verzameling X te welordenen is in $\mathcal{V}$ hoeven we "slechts" na te gaan of $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(X) \in \mathcal{F}$. Dit zullen we gaan toepassen in het eerste Fraenkel model.

3. Het eerste Fraenkel Model

We behandelen nu het eerste Fraenkel Model waarin er verzamelingen bestaan die niet te welordenen zijn. Zo'n model zal dus niet voldoen aan het Keuzeaxioma. Stel dat A aftelbaar oneindig is. Zij $\mathcal{G}$ de groep van *alle* permutaties van A (dus $\mathcal{G} = S_A$), en zij I de verzameling van alle eindige verzamelingen van A. Dan geldt dat I een normaal ideaal is.

Laat $\mathcal{F}$ het geïnduceerde normale filter zijn, met filterbasis

$$\mathcal{B} = \{\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E) : E \subseteq A \text{ eindig}\}$$

zoals eerder beschreven.

We claimen nu dat de verzameling $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(A)$ geen element is van het filter $\mathcal{F}$, en dus dat A niet welordenbaar is. Voor iedere eindige $E \subset A$ is er gemakkelijk een permutatie π aan te wijzen op de elementen $A \setminus E$, zodat E op zijn plek blijft. Dit impliceert dan dat $\pi \in \mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E)$ en $\pi \notin \mathrm{fix}(A)$. Hierdoor kunnen we geen enkele $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(E)$ aanwijzen die omvat wordt door $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(A)$. Uit de structuur van de normaal filter $\mathcal{F}$ volgt dat $\mathrm{fix}_{\mathcal{G}}(A) \notin \mathcal{F}$.

We zien nu dat A niet te welordenen is. We hebben nu een permutatiemodel gevonden waarin het Keuzeaxioma niet geldt. Dit laat zien dat het Keuzeaxioma onafhankelijk is van **ZFA**, de verzamelingenleer met atomen.

Met de inbeddingstheorieën in Hoofdstuk 6 van Jech [**5**] is te bewijzen dat er een model bestaat voor **ZF** waarin het Keuzeaxioma niet geldt. Zo is bewezen dat het Keuzeaxioma onafhankelijk is van de verzamelingentheorie **ZF**. We zeggen ook wel dat het Keuzeaxioma *onbewijsbaar* is in de verzamelingenleer: Zowel het Keuzeaxioma noch zijn negatie zijn niet afleidbaar binnen **ZF**.

Bibliografie

[1] T. Arrigoni. $V = L$ and intuitive plausibility in set theorie, a case study. *The Bulletin of Symbolic Logic*, pages 337–360, 2011.

[2] J.L. Bell. *The Axiom of Choice*. College Publications, 2009.

[3] K.P. Hart. *Functieruimten*. Technische Universiteit Delft, 2004.

[4] K.P. Hart. *Verzamelingenleer*. Technische Universiteit Delft, 2011.

[5] T.J. Jech. *The Axiom of Choice*. Dover Publications, 1973.

[6] P.E.B. Jourdain. On the multiplication of alephs. *Mathematische Annalen 65*, pages 506–512, 1908.

[7] E. Mendelson. *Introduction to Mathematical Logic*. CRC Press, fifth edition, 2010.

[8] H. Rubin and J. Rubin. *Equivalents of the Axiom of Choice*. North-Holland Publishing Company Amsterdam, 1963.

[9] P. Stevenhagen. *Algebra 2*. Universiteit Leiden, 2010.

[10] A.C. Zaanen. *Continuity, Integration and Fourier Theory*. Springer-Verlag, 1988.

[11] E. Zermelo. Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann. *Mathematische Annalen 59*, pages 107–128, 1904.

Index