Technische Hogeschool Delft
Afd. der Weg- en Waterbouwkunde

DOMP- EN STAMPBEWEGING VAN EEN SCHIP IN EEN NAUW KANAAL ONDER INVLOED VAN EEN TRANSLATIEGOLF

16 oktober 1967,

C. Kranenburg
Mariniersweg 245
Rotterdam

Inhouds-opgave.

1. Symbolen

D = waterdiepte

b_k = kanaalbreedte (het kanaal heeft een rechthoekig profiel)

h = diepgang schip

d = $D - h$

b = halve breedte schip

a = $\frac{1}{2} b_k - b$

l = halve lengte van het (symmetrische) schip

c = voortplantingssnelheid golf naast schip

c_0 = " " in kanaal

ρ = dichtheid water

ω = $\frac{2\pi}{T}$ = hoekfrequentie

k = $\frac{2\pi}{L} = \frac{\omega}{c}$ = golfgetal

$\hat{z}$ = dompamplitude

$\hat{\theta}$ = stamp "

$\hat{w}$ = golf " (kanaal)

$\eta(x,t)$ = golfhoogte naast het schip

F = $4bl$ = oppervlak schip t.p.v. de waterlijn

J_0 = $\frac{4}{3} b l^3$ = traagheidsmoment " " "

m = massa van het schip

J_m = massatraagheidsmoment van het schip

a_d, b_d, c_d : coefficienten in de dompvergelijking

a_s, b_s, c_s : " " " stamp "

x, y, z : coördinatenstelsel

θ : stamphoek

De overige symbolen worden ter plaatse verklaard

2. Inleiding.

Dit verslag is een schakel in een serie onderzoekingen die tot doel hebben: het berekenen van de troskrachten van een in een schutsluis gemeerd schip onder invloed van een lange golf.

Bij het vullen of ledigen van een sluiskolk wordt een translatiegolf opgewekt. Op zijn weg door de kolk ontmoet deze het daarin gemeerde schip; de vorm van de golf wordt beïnvloed door de aanwezigheid van het schip. Het schip, dat in feite een lichaam met 6 vrijheidsgraden is, gaat onder invloed van de golf bewegen; de scheepsbewegingen beïnvloeden eveneens de vorm van de golf.
De bewegingen van het schip veroorzaken krachten in de trossen. Hangt een tros in een ruime kettinglijn, dan overheerst het gewicht van de tros bij de bepaling van de troskracht. Is daarentegen de tros strak gespannen dan overheersen de elastische eigenschappen ervan.

Het is duidelijk dat de drie elementen: waterbeweging, scheepsbeweging en troskrachten elkaar voortdurend beïnvloeden. Om tot een oplossing te komen moeten gekoppelde differentiaalvergelijkingen voor waterbeweging en scheepsbewegingen opgesteld worden, waarbij in die voor de scheepsbewegingen de invloed van troskrachten opgenomen moet worden.

In dit verslag wordt aangesloten op [1], waarin een schip van vereenvoudigde vorm beschouwd wordt, gemeerd in het midden van een naar beide zijden oneindig lang kanaal. Voor een star bevestigd schip wordt aangetoond dat de waterbeweging numeriek berekend kan worden onder de volgende veronderstellingen:

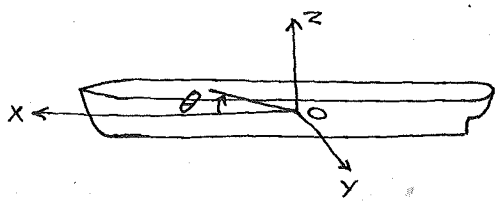
1. stroomsnelheid en waterhoogte konstant in breedte richting.
2. hydrostatische drukverdeling
3. rechthoekig snelheidsprofiel
4. de viskeuze wrijving is te verwaarlozen
5. stroomsnelheid veel kleiner dan voortplantings-

snelheid.
6. de bodem heeft geen verhang.
De berekening van een geval, waarbij het schip één vrijheidsgraad had gaf al moeilijkheden omdat de coëfficiënten in de bewegingsvergelijking voor het schip lastig te bepalen zijn.

Om meer over deze coëfficiënten te weten te komen is het nu volgende onderzoek verricht. Het schip krijgt twee vrijheidsgraden, de overige omstandigheden zijn de zelfde als die in [1].
Dezelfde veronderstellingen worden aangehouden, behalve 2. omdat een niet-hydrostatische drukverdeling essentieel is bij de bepaling van de coëfficiënten in de bewegingsvergelijkingen.
De kanaalwanden zijn vertikaal.

Coordinatenstelsel, scheepsbewegingen.

Het onderstaande (vaste) coordinatenstelsel wordt aangehouden. De oorsprong bevindt zich in het zwaartepunt van het schip.



Zoals reeds gezegd heeft het vrij bewegende schip 6 vrijheidsgraden. Deze worden als volgt onderscheiden:

translatie	in	x- richting	:	schrikken
"	"	y- "	:	verzetten
"	"	z- "	:	dompen
rotatie	om de	x- as	:	rollen
"	" "	y- as	:	stampen
"	" "	z- "	:	gieren.

Van deze bewegingen zijn in dit geval de schrik-, domp-, en stampbeweging de belangrijkste. In ~~het~~ hierna volgende worden beschouwd: <u>dompen</u> en <u>stampen</u>.

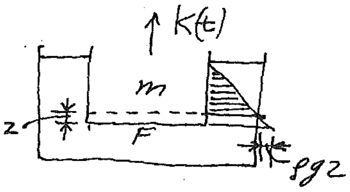
Het blijkt dat voor deze twee bewegingen het systeem: schip in nauw kanaal bij grote benadering lineair is, wanneer tenminste de uitwijkingen niet te groot zijn in verhouding tot o.a. de afstand scheepsbodem-kanaalbodem. Hierop wordt nader teruggekomen.

Een geheel vrij bewegend schip gedraagt zich in het algemeen niet lineair, b.v. bij het rollen kan de viskeuse wrijving (niet lineair) een relatief belangrijke rol spelen. Zie [6].

3. Het bepalen van de coefficienten in de bewegingsvergelijkingen uit de op het schip werkende krachten, voor domp- en stampbeweging.

Een overzichtelijke methode om de coefficienten te bepalen wordt verkregen door uit te gaan van harmonische (in de tijd sinusvormig verlopende) bewegingen en de coefficienten te bepalen, afhankelijk van de hoekfrequentie ω. Eventueel kan met het theorema van Fourier later een willekeurige beweging onderzocht worden.

In de theorie en bij de metingen wordt daarom uitgegaan van harmonische scheepsbewegingen.
Beschouwt men een bakvormig schip dat een dompbeweging uitvoert dan vindt men bij verwaarlozing van alle hydrodynamische effecten als bewegingsvergelijking:



$$m\ddot{z} = -\rho g F z + K(t)$$

$$m\ddot{z} + \rho g F z = K(t)$$

Is de beweging harmonisch, $z = \hat{z}\sin\omega t$, $\ddot{z} = -\omega^2\hat{z}\sin\omega t$, dan vindt men hiermee als benodigde kracht om deze beweging uit te voeren:

$$K(t) = (\rho g F - m\omega^2)\hat{z}\sin\omega t$$

Als men deze kracht echter meet dan vindt men:

$$K(t) = a_1\sin\omega t + b_1\cos\omega t + a_2\sin 2\omega t + b_2\cos 2\omega t + \dots,$$

waarbij blijkt dat de coefficienten van de hogere orde termen veel kleiner zijn dan die van de eerste orde (a_1 en b_1). Bij grote benadering is dus de differentiaalvergelijking voor de dompbeweging lineair, en kan de gemeten kracht voorgesteld worden door:

$$K(t) = a_1\sin\omega t + b_1\cos\omega t \quad , \quad \text{waarin}$$

blijkt dat $\quad a_1 \neq (\rho g F - m\omega^2)\hat{z}$

$$b_1 \neq 0$$

Men noemt de eerste term van $K(t)$ de in-fase component en de tweede de 90° uit-fase component van de kracht.
Een belangrijk gevolg van de gevonden lineariteit is dat bewegingen van het schip in stil water en bewegingen t.g.v. een willekeurige oppervlaktegolf mogen worden gesuperponeerd.

Beschouw de energie die in een periode door het schip wordt afgegeven:

$$dE = K\,dz = K\dot{z}\,dt = (a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t)\,\hat{z}\omega \cos\omega t\,dt$$

in een periode:

$$E = \hat{z}\omega \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (a_1 \sin\omega t \cos\omega t + b_1 \cos^2\omega t)\,dt$$

$$= \hat{z}\,(0 + \pi b_1)$$

$E = \pi \hat{z} b_1$, alleen de uit-fase component van de kracht geeft een bijdrage; deze wijst dus op een demping in het systeem. De differentiaalvergelijking voor de dompbeweging bleek lineair te zijn, dus ook deze term is lineair en voor te stellen door: $b_d \dot{z}$.
Later zal worden aangetoond dat deze demping geheel verklaard kan worden als energieverlies door uitstraling van golven.

De differentiaalvergelijking voor het dompen wordt nu:

$$a_d \ddot{z} + b_d \dot{z} + c_d z = K(t) \qquad (1)$$

waarin:

a_d = virtuele massa = massa schip + toegevoegde massa
b_d = dempings coefficient
c_d = hydrostatische coefficient $\neq \rho g F$

Op het dompende schip werken de volgende krachten:

K_u = uitwendige kracht veroorzaakt door de opgelegde beweging.

K_s = hydrostatische kracht. De in-fase componenten van de waterstandverandering zijn in het lineaire geval evenredig met de scheepsverplaatsing, dus $(K_s)_{\text{in-fase comp.}} :: z$.
De uit-fase component van de kracht levert, zoals we zagen de demping en is dus evenredig met $\dot{z}$.

K_v = versnellingskracht. De in-fase component van de versnellingen van de waterdeeltjes zijn :: versnelling schip, dus ook $(K_v)_{\text{in-fase comp.}} :: \ddot{z}$. Evenals bij K_s geldt: $(K_v)_{\text{uit-fase comp.}} :: \dot{z}$.

Met behulp van deze krachten kunnen we eveneens de bewegingsvergelijking voor het dompen opschrijven (harmonische beweging):

$$m\ddot{z} = K_u + K_s \begin{Bmatrix} \text{in-fase comp.} \\ \text{uit-fase comp.} \end{Bmatrix} + K_v \begin{Bmatrix} \text{in-fase comp.} \\ \text{uit-fase comp.} \end{Bmatrix} \qquad (2)$$

Voor berekeningen bij een bepaalde ω komen K_s en K_v steeds voor in de berekening. Het is nu de gewoonte deze krachten in het linker lid van de d.v. onder te brengen, zodanig dat de coëfficiënten van $\ddot{z}$, $\dot{z}$ en z konstant in de tijd zijn; zie bovenstaande evenredigheden:

$$\left[m\ddot{z} - (K_v)_{\text{in-fase comp.}}\right] + \left[-(K_v + K_s)_{\text{uit-fase comp.}}\right] + \left[-(K_s)_{\text{in-fase comp.}}\right] = K_u \qquad (3)$$

Vergelijken we (1) met (3) dan geldt dus:

$$\boxed{\begin{array}{lll} a_d = m - \dfrac{(K_v)_{\text{in-fase comp.}}}{\ddot{z}} & & \text{virtuele massa} \\[2ex] b_d = - \dfrac{(K_v + K_s)_{\text{uit-fase comp.}}}{\dot{z}} & & \text{dempingscoëfficiënt} \\[2ex] c_d = - \dfrac{(K_s)_{\text{in-fase comp.}}}{z} & & \text{hydrostatische coëff.} \end{array}} \qquad (4)$$

De krachten K_v en K_s zijn zowel gemeten als berekend, zodat de coefficienten a_d, b_d en c_d empirisch en theoretisch bepaald kunnen worden.

Bij de metingen aan een scheepsmodel zijn bepaald:

K_u m.b.v. de rekstrooktechniek

K_s uit gemeten golfhoogten en -fasen.

Omdat de waarde voor $m\ddot{z}$ volgt uit de ingestelde frequentie kan met (2) K_v bepaald worden en daarmee met (4) de gezochte coëfficienten. In het algemeen zullen de coëfficienten afhankelijk zijn van de ingestelde hoekfrequentie.

Tot nu toe is steeds gesproken over de domp-beweging; een analoge redenering geldt voor de stampbeweging waarbij echter in plaats van krachten en dompuitwijking z nu momenten en stamphoek θ gelezen moeten worden.

Formules:

bewegingsverg.: $a_s\ddot{\theta} + b_s\dot{\theta} + c_s\theta = M(t)$, (1')

$$I_m\ddot{\theta} = M_u + M_s\begin{Bmatrix}\text{in-fase comp.}\\ \text{uit-fase comp.}\end{Bmatrix} + M_v\begin{Bmatrix}\text{in-fase comp.}\\ \text{uit-fase comp.}\end{Bmatrix}, \quad (2')$$

$$a_5 = I_m - \frac{(M_v)_{\text{in-fase comp.}}}{\ddot{\theta}}$$ virtueel massatraagheidsmoment

$$b_5 = -\frac{(M_v + M_s)_{\text{uit-fase comp.}}}{\dot{\theta}}$$ dempings coefficient

$$c_5 = -\frac{(M_s)_{\text{in-fase comp.}}}{\theta}$$ hydrostatische coefficient

(4')

4. Meetmethode

Er zijn twee in wezen verschillende methoden om de coëfficienten in de bewegings vergelijkingen, afhankelijk van de hoekfrequentie, te bepalen:

1. Impulsmethode. Op het model wordt een in de tijd willekeurig variërende kracht uitgeoefend. Deze kracht en de erdoor veroorzaakte bewegingen van het schip worden geregistreerd. Met een Fourier-analyse worden de coefficienten, afhankelijk van de hoekfrequentie, in één proef bepaald. Deze methode is alleen te gebruiken als het systeem lineair is. Zie [5].

2. Excitatiemethode. Aan het schip wordt een harmonische beweging met een bepaalde hoekfrequentie opgelegd. Het schip bevindt

zich in stil water. Eventuele golfkrachten kunnen later gesuperponeerd worden.
De meetapparatuur is zodanig ingericht dat een aantal (n) termen van de Fourierreeksen voor de uitwendige kracht K_u (dompen) of moment M_u (stampen) gemeten kunnen worden:

$$K_u = \sum_{k=1}^{n} (a_k \sin k\omega t + b_k \cos k\omega t)$$

Zie [2] en [3].

Van deze tweede methode is hier gebruik gemaakt. Omdat voor de twee beschouwde bewegingen het systeem lineair bleek te zijn is in dit geval alleen de eerste harmonische van belang:

$$K_u = a_1 \sin\omega t + b_1 \cos\omega t.$$

De metingen werden verricht aan een TODD-60 model, schaal 1:54, dat niet symmetrisch is ten opzichte van het YOZ-vlak.
Zij vonden plaats in het Scheepsbouwkundig Laboratorium te Delft.
Voor stamp- en dompbeweging werden bij verschillende amplituden, hoeksnelheden en kanaalbreedten de optredende momenten resp. krachten bepaald. Ook werden naast het schip en in het kanaal de golfhoogten en -fasen gemeten.
Zie hoofdstuk Meetresultaten (blz 67).

5. Lineaire theorie voor het bepalen van de coëfficienten in domp- en stampvergelijking voor harmonische bewegingen.

5.1. Inleiding.

Evenals dat voor de berekening van scheepsbewegingen in open zee het geval is, zou men kunnen trachten met de potentiaaltheorie het probleem van de water- en scheepsbewegingen op te lossen. Zie [6], [8], [9]

De differentiaalvergelijking voor de snelheidspotentiaal $\phi(x,y,z,t)$ is:

$$\Delta^2\phi = 0$$, met als gelineariseerde randvoorwaarden:

$$\phi_{tt}(x,0,z,t) + g\,\phi_y = 0$$

$$(\phi_n)_{\text{natte scheepsopp.}} = v_n(x,y,z,t) = \text{normaalsnelheid scheepshuid}$$

$$(\phi_n)_{\text{wanden}} = 0$$

Voor berekeningen in open zee levert deze theorie echter al moeilijkheden op. Deze zullen voor het geval van een kanaal met vertikale wanden nog groter zijn, zo een oplossing al mogelijk is.

Daarom is hier een eenvoudiger weg bewandeld, waarvoor de aannamen van blz. 5

gedaan zijn. (punt 2 uitgezonderd).
De berekening verloopt nu als volgt:
Schrijf de lange golfvergelijking in X-richting op (naast en onder het schip) met als randvoorwaarden:

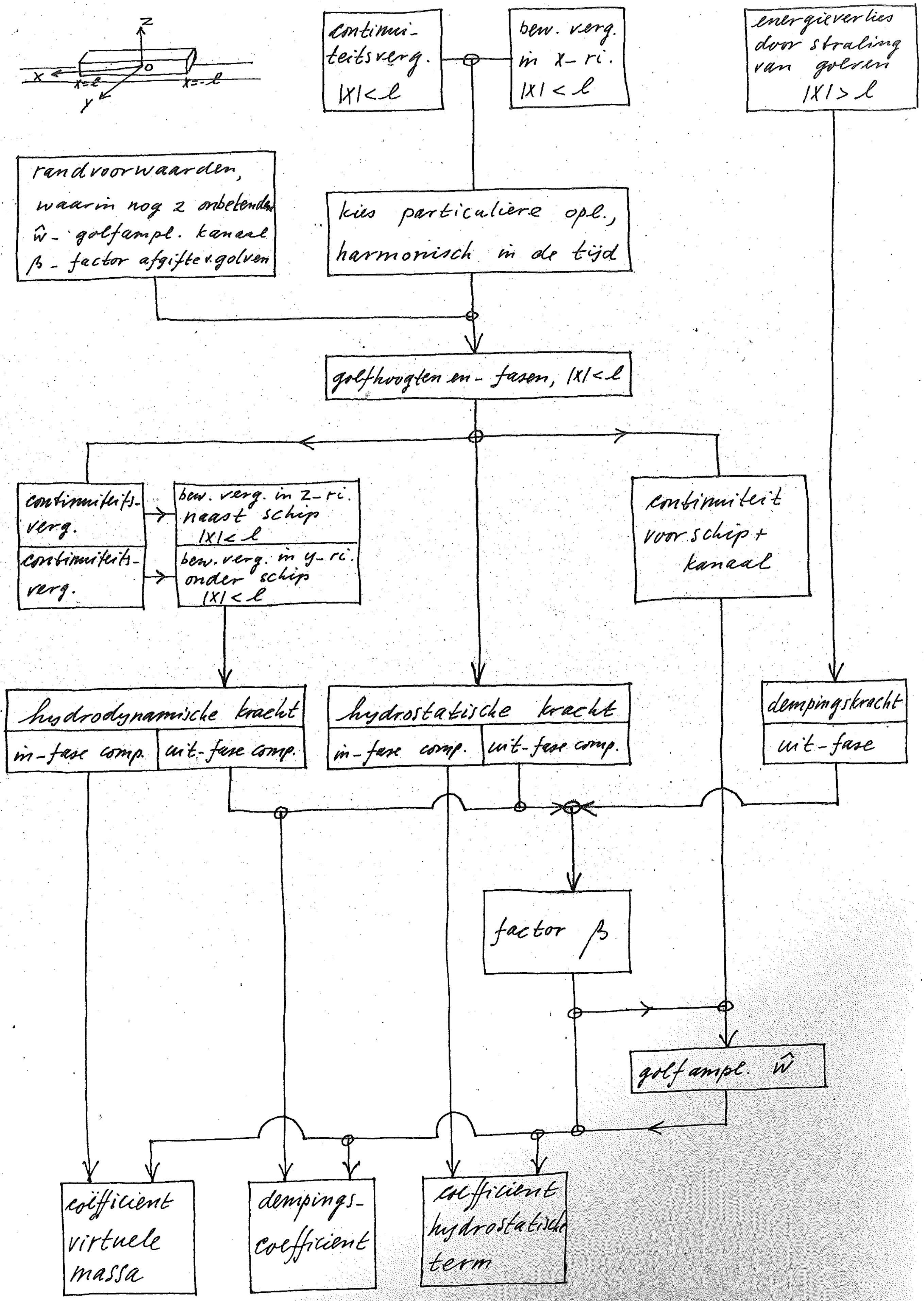
a. bij steven aansluiten aan golf in kanaal
b. bij dompen symmetrie-, bij stampen antimetrie voorwaarden.

Zoek een oplossing, die harmonisch in de tijd is.
Beschouw bij de berekening het energieverlies dat ontstaat door het uitstralen van golven.
De viskeuze wrijving wordt verwaarloosd.

Hiermee kunnen berekend worden: de golfhoogten en -fasen langs het schip en in het kanaal. De hydrostatische kracht K_s (of moment M_s) is nu te berekenen.
Bereken met continuiteits- en bewegingsvergelijking de dynamische drukken uit de versnellingen van de waterdeeltjes naast en onder het schip.
Integratie over de scheepsbodem levert K_v (M_v).
Met (4) zijn de coefficienten te berekenen.

De berekening is uitgevoerd voor een bakvormig schip, symmetrisch om het YOZ-vlak.
Eerst wordt nu het energieverlies beschouwd, daarna worden domp- en stampbeweging behandeld.

Schema theorie dompen - harmonische beweging



stampen analoog aan dompen

5.2. Energieverlies door uitstraling van golven

In de inleiding (blz 10) werd aangetoond dat het energieverlies van het bewegende systeem veroorzaakt wordt door een 90°-uit fase kracht.
Wanneer we, omgekeerd, het energieverlies door de uitstraling van golven kunnen berekenen, dan kan daaruit een dempingskracht voor het dompende schip of een dempend moment voor het stampend schip worden afgeleid.
Uit de veronderstelde lineariteit volgt weer dat voor wat de golven betreft gerekend kan worden met de 1° orde theorie, dus met sinusvormige golven.

a. verband tussen het energieverlies per tijdseenheid (de energieflux) $\frac{dE}{dt}$ en de dempingskracht K. (dompen)

afgelegde weg van het voorwerp = $s = s(t)$
snelheid " " " = $v = v(t)$

energieverlies in een tijdje Δt:

$$\Delta E = \int_{s}^{s+\Delta s} K \cdot ds = k(t+\theta_1 \Delta t) \cdot \Delta s. \qquad 0 \leq \theta_1 \leq 1$$

volgens definitie is: $\Delta s = v(t+\theta_2 \Delta t) \cdot \Delta t$

dus $\Delta E = k(t+\theta_1 \Delta t)\, v(t+\theta_2 \Delta t)\, \Delta t$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = k(t+\theta_1 \Delta t)\, v(t+\theta_2 \Delta t)$$

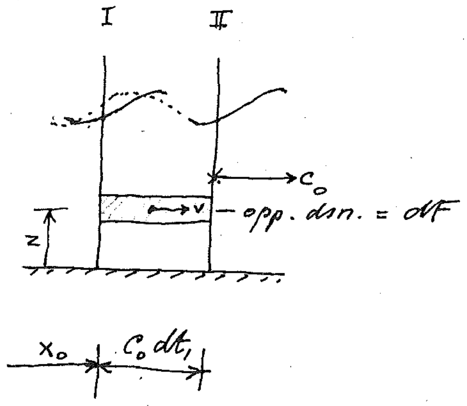
in limiet: $\frac{dE}{dt} = k v$

$$\boxed{k = \frac{1}{v} \frac{dE}{dt}} \qquad (5)$$

Voor het stampende schip wordt op analoge wijze voor het dempend moment M gevonden:

$$\boxed{M = \frac{1}{\frac{d\theta}{dt}} \cdot \frac{dE}{dt}} \qquad (5')$$

6. verband tussen energieflux $\frac{dE}{dt}$ en de golfhoogte $\hat{w}$ in het kanaal



C_0 = voortplantingssnelh. golf
$V = V(X_0, z, t)$ = snelheid in X-richting waterdeeltjes

Beschouw 2 doorsneden I en II, dsn. I is vast, dsn. II beweegt met snelheid c_0 met de golven mee. Ten tijde $t=0$ vallen I en II samen.

In dsn. II zijn de snelheden en golfhoogte konstant in de tijd, dus $\left[\frac{dE}{dt}\right]_{dsn. II} = 0$

De verandering van de energie van het gearceerde elementje moet dus door doorsnede I getransporteerd zijn.

Pas formule (5) toe op dit elementje

$$\frac{dE}{dt} = Kv = \frac{d(mv)}{dt} v = \left(\frac{\partial(mv)}{\partial t} + \frac{\partial(mv)}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right)V$$

$$m = \rho c_0\, dt_1\, dF$$

$$\frac{\partial(mv)}{\partial t} = \rho c_0\, dF\, v + \rho c_0\, dt_1\, dF \frac{\partial v}{\partial t}$$

$$\frac{\partial(mv)}{\partial x} = \rho c_0\, dt_1\, dF \frac{\partial v}{\partial x}$$

dus $\frac{dE}{dt} = \rho c_0 \, dF \cdot v^2 + \rho c_0 dt_1 dF v \frac{\partial v}{\partial t} + \rho c_0 dt_1 dF \frac{\partial v}{\partial x} v^2$.

de 2° en 3° term zijn een orde kleiner dan de eerste, dus

$$\frac{dE}{dt} = \rho c_0 v^2 dF$$

geïntegreerd over het gehele oppervlak:

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -\iint_F \rho c_0 V^2 dF} \qquad (6)$$

Het - teken dient om aan te geven dat het een verlies voor het schip betreft.

In het gebruik van formule (5) zit de aanname dat de stroming rotatievrij is.

Een algemenere afleiding op basis van de potentiaaltheorie van (6) is te vinden in: Stoker - Waterwaves. [8]

Uitwerking van (6) voor sinusvormige golven:

$$\eta = \hat{w} \sin(kx - \omega t)$$

$$\phi = \frac{\hat{w} g}{\omega} \frac{\cosh kz}{\cosh kD} \cos(kx - \omega t)$$

$$-\phi_x = v = -\frac{\hat{w} g k}{\omega}\,\frac{\cosh kz}{\cosh kD}\,\sin(kx-\omega t)$$

dit in (6):

$$\frac{dE}{dt} = -\rho c_0 \frac{\hat{w}^2 g^2 k^2}{\cosh^2 kD.\,\omega^2}\,\sin^2(kx-\omega t).\ b_k \int_0^D \cosh^2 kz\,dz$$

$$\int_0^D \cosh^2 kz\,dz = \frac{D}{2} + \frac{1}{4k}\sinh 2kD$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\rho g^2 \hat{w}^2 b_k}{c_0}\left(\frac{\frac{D}{2}}{\cosh^2 kD} + \frac{c_0^2}{2g}\right)\sin^2(kx-\omega t)$$

$$c_0^2 = \frac{g}{k}\,\mathrm{tgh}\,kD, \qquad k = \frac{2\pi}{L} = \frac{\omega}{c_0}$$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2}\,\frac{\rho g^2 \hat{w}^2}{c_0}\,b_k D\left[1 + \left(1 - \frac{D\omega^2}{g}\right)\frac{c_0^2}{gD}\right]\sin^2(kx-\omega t)}$$

In het gemeten gebied is bij voldoende benadering: $c_0^2 = gD$

$$\boxed{\frac{dE}{dt} = -\rho g c_0\, b_k\, \hat{w}^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2\right)\sin^2(kx-\omega t)} \qquad (7)$$

c. dempende kracht K voor het dompende schip.

De trillingstijden van schip en afgegeven golf zijn gelijk: $\omega_{schip} = \omega_{golf} = \omega$.

De afgegeven golf heeft een nog onbekende fasehoek φ met de scheepsbeweging:

schip: $z = \hat{z} \sin \omega t$, $\dot{z} = \hat{z}\omega \cos \omega t$

(7): $\frac{dE}{dt} = -2 \rho g c_0 b_k \hat{w}^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2\right) \sin^2(\omega t - \varphi)$

Nu formule (5):

$$K = -\frac{2 \rho g c_0 b_k \hat{w}^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2\right)}{\hat{z}\omega} \frac{\sin^2(\omega t - \varphi)}{\cos \omega t}$$

Er treedt straling op naar 2 zijden, vandaar de 2 in de formule voor $\frac{dE}{dt}$.

In de inleiding werd aangetoond dat de dempingskracht een uit-fase kracht moet zijn, dus $\varphi = \frac{\pi}{2}$; bovendien is slechts dan de gevonden K harmonisch.

$$\boxed{K = -\frac{2 \rho g c_0 b_k}{\hat{z}\omega} \hat{w}^2 \left(1 - \frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2\right) \cos \omega t} \quad (8)$$

$\hat{w}$ is hierin nog onbekend.

d. dempend moment voor het stampende schip.

De berekening verloopt op dezelfde wijze als in c.

$\theta = \hat{\theta} \sin \omega t$, $\dot{\theta} = \hat{\theta} \omega \cos \omega t$

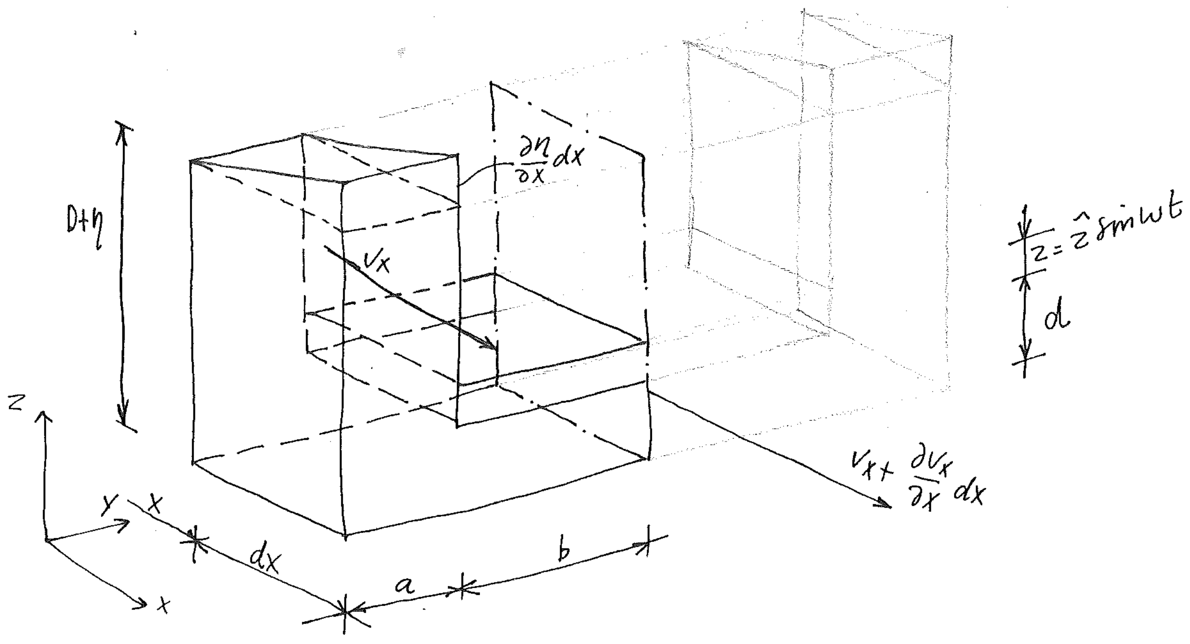
$$\boxed{M = - \frac{2 \rho g c_0 b_k}{\hat{\theta} \omega} \hat{w}^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{D}{g} \omega^2\right) \cos \omega t} \quad (8')$$

5.3. Coëfficienten van de dompvergelijking.

Harmonische beweging: $z = \hat{z} \sin \omega t$.

1. Continuiteitsvergelijking.

Beschouw een moot van het kanaal, in de as waarvan het schip ligt.



$$\left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx\right)\left[\left(D+\eta+\frac{\partial \eta}{\partial x} dx\right)a + (d+z)b\right]dt - v_x\left[(D+\eta)a + (d+z)b\right]dt +$$
$$+ \frac{\partial \eta}{\partial t} dt\, a\, dx + \dot{z} \cdot b\, dx\, dt = 0$$

Voor kleine uitwijkingen mogen de volgende lineariseringen uitgevoerd worden:

$$d+z \simeq d \qquad z \ll d$$
$$D+\eta \simeq D \qquad \eta \ll D$$

De continuiteitsvergelijking wordt hiermee:

$$\boxed{v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(D + d\frac{b}{a}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{b}{a}\dot{z} = 0} \qquad (9)$$

2. Bewegingsvergelijking.

Omdat het hier de dompbeweging betreft worden niet-hydrostatische drukken konstant verondersteld in x-richting. Zij kunnen dus in de bewegingsvergelijking buiten beschouwing blijven.

?

$$K\,dt = \frac{\partial(mv_x)}{\partial t}dt + \frac{\partial(mv_x)}{\partial x} v_x\, dt \quad , \text{ in x-richting.}$$

$$K = -\rho g\left[(D+\eta)a + (d+z)b\right]\frac{\partial \eta}{\partial x}dx$$

$$mv_x = \rho\left[(D+\eta)a + (d+z)b\right]dx \cdot v_x$$

$$\frac{\partial(mv_x)}{\partial t} = \rho\left[\left(a\frac{\partial \eta}{\partial t} + b\dot{z}\right)dx\, v_x + \left\{(D+\eta)a + (d+z)b\right\}dx\,\frac{\partial v_x}{\partial t}\right]$$

$$\frac{\partial(mv_x)}{\partial x} = \rho\left[a\frac{\partial \eta}{\partial x}dx\, v_x + \left\{(D+\eta)a + (d+z)b\right\}dx\,\frac{\partial v_x}{\partial x}\right]$$

Weer linearizeren: $\quad D+\eta \approx D\,, \quad d+z \approx d$

$$g\left(D + d\frac{b}{a}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(D + d\frac{b}{a}\right)\frac{\partial v_x}{\partial t} + \left[v_x\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(D + d\frac{b}{a}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{b}{a}\dot{z}\right]v_x = 0$$

uit (9) volgt dat de vorm tussen [ ] gelijk nul is.

bewegingsvergelijking:

$$\boxed{g\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial t} = 0} \qquad (10)$$

(9): $v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + (D + d\frac{b}{a})\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{b}{a}\dot{z} = 0$

(10): $c\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{D + d\frac{b}{a}}{c}\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \quad , \quad c^2 = g(D + d\frac{b}{a})$

Voor die gevallen, waarin $v_x \ll c$ is de term $v_x\frac{\partial \eta}{\partial x}$ in (9) te verwaarlozen t.o.v. term $c\frac{\partial \eta}{\partial x}$ in (10). c is de voortplantingssnelheid van een golf naast het schip.
De twee vergelijkingen worden dus:

$$\boxed{\begin{array}{ll} D_1\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{b}{a}\dot{z} = 0 & (9) \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{g}\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 & (10) \end{array}} \qquad \begin{array}{l} D_1 = D + d\frac{b}{a} \\ c^2 = gD_1 \end{array}$$

In het lineaire systeem zijn de krachten harmonisch dus ook de waterbewegingen zullen harmonisch zijn. Zoek daarom een oplossing van de vorm:

$$v_x = -v(x)\cos(\omega t - \varphi(x))$$

$$\eta = -\eta_1(x)\sin(\omega t - \kappa(x))$$

Hierin zijn $v(x), \eta_1(x), \varphi(x)$ en $\kappa(x)$ nog onbekend.

De beweging is voorgeschreven:

$$z = \hat{z}\sin\omega t\,, \quad \dot{z} = \hat{z}\omega\cos\omega t\,.$$

Deze oplossingen invullen in (9) en (10) levert:

$$-D_1\frac{d}{dx}(v\cos\varphi)\cos\omega t - D_1\frac{d}{dx}(v\sin\varphi)\sin\omega t -$$
$$-\eta_1\cos\kappa\,\omega\cos\omega t - \eta_1\sin\kappa\,\omega\sin\omega t + \frac{b}{a}\hat{z}\omega\cos\omega t = 0$$

$$-\frac{d}{dx}(\eta_1\cos\kappa)\sin\omega t + \frac{d}{dx}(\eta_1\sin\kappa)\cos\omega t +$$
$$+\frac{1}{g}v\cos\varphi\,\omega\sin\omega t - \frac{1}{g}v\sin\varphi\,\omega\cos\omega t = 0$$

Deze gelijkheden moeten op elk tijdstip gelden dus de coefficienten van $\sin\omega t$ en $\cos\omega t$ moeten gelijk nul zijn:

$$\left\{\begin{array}{ll} -D_1\frac{d}{dx}(v\cos\varphi) - \omega\,\eta_1\cos\kappa + \frac{b}{a}\hat{z}\omega = 0 & \\ -D_1\frac{d}{dx}(v\sin\varphi) - \omega\,\eta_1\sin\kappa = 0 & \\ \frac{d}{dx}(\eta_1\sin\kappa) - \frac{\omega}{g}v\sin\varphi = 0 & \\ -\frac{d}{dx}(\eta_1\cos\kappa) + \frac{\omega}{g}v\cos\varphi = 0 & \end{array}\right. \qquad (11)$$

Dit zijn vier gekoppelde vergelijkingen met 4 veranderlijken, n.l.: $v\cos\varphi$, $v\sin\varphi$, $\eta_1\sin\kappa$ en $\eta_1\cos\kappa$.

Er zijn dus ook vier randvoorwaarden nodig.

3. Randvoorwaarden

Er volgen 2 randvoorwaarden uit symmetrie:

1° en 2°. $v(0) = 0$

$\eta_1'(0) = 0$

$\ddot{K}'(0) = 0$

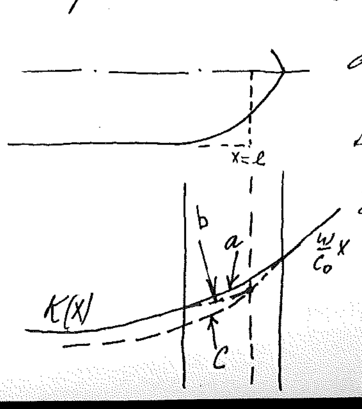
$\varphi'(0) = 0$

Uit de differentiaalvergelijkingen blijkt dat twee van deze voorwaarden de andere twee insluiten

3°. Omdat we het systeem lineair verondersteld hebben kunnen we de amplitude van de afgegeven golf in het kanaal ($\hat{w}$) evenredig stellen met de golfhoogte naast het schip t.p.v. de steven:

$\eta_1(\ell) = \beta \hat{w}$.

4°. Bij het schip met scherpe stevens zal de golffase $K(x)$ zonder knikken overgaan in de golffase $\frac{\omega}{c_0}x$ van de lopende golf in het kanaal (lijn a). Bij het bakprofiel, dat een schematisatie hiervan is zal deze overgang in het algemeen met een knik verlopen (lijn b). Als nu de kromming van $K(x)$ t.p.v. de steven niet te sterk is kunnen we deze knik verwaarlozen (lijn c)



De kromming is klein voor kleine ω, zoals uit de formules blijkt. Het hiernavolgende geldt dus voor kleine ω's.

We krijgen dus als vierde randvoorwaarde:

$\zeta'(\ell) = \frac{\omega}{c_0}$

Energieverliezen door zogstroming zijn buiten beschouwing gelaten, zodat hoewel gerekend wordt aan een bakprofiel, toch aan een schip met scherpe stevens wordt gedacht.

4. Oplossing van de vergelijkingen en aanpassing aan de randvoorwaarden.

de tweede en derde vergelijking van (11) leveren:

$$\frac{d^2}{dx^2}(v\sin\varphi) + \frac{\omega^2}{gD_1}(v\sin\varphi) = 0 \qquad gD_1 = c^2$$

$$v\sin\varphi = A_1 \sin\frac{\omega}{c}x + A_2\cos\frac{\omega}{c}x$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow A_2 = 0$$

$$v\sin\varphi = A_1\sin\frac{\omega}{c}x \qquad (12)$$

de eerste en vierde vergelijking leveren:

$$\frac{d^2}{dx^2}(v\cos\varphi) + \frac{\omega^2}{gD_1}(v\cos\varphi) = 0$$

$$v\cos\varphi = B_1\sin\frac{\omega}{c}x + B_2\cos\frac{\omega}{c}x$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow B_2 = 0$$

$$v\cos\varphi = B_1\sin\frac{\omega}{c}x \qquad (13)$$

uit (12) en (13) blijkt:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1}{B_1} = \text{konstant}$$

$$V(x) = A' \sin \frac{\omega}{c} x$$

(12) en (13) in eerste twee vergelijkingen van (11):

$$- D_1 A_1 \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} x = \omega \eta_1 \sin K$$

$$- D_1 B_1 \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} x = \omega \eta_1 \cos K - \frac{b}{a} \omega \hat{z}$$

$$\eta_1 \sin K = - \frac{D_1 A_1}{c} \cos \frac{\omega}{c} x$$

$$\eta_1 \cos K = \frac{b}{a} \hat{z} - \frac{D_1 B_1}{c} \cos \frac{\omega}{c} x$$

Uit deze twee formules:

$$\eta_1^2 = \left(\frac{b}{a}\hat{z}\right)^2 \left(1 + 2B \cos \frac{\omega}{c} x + (A^2 + B^2) \cos^2 \frac{\omega}{c} x\right) \qquad (14)$$

$$\operatorname{tg} K = \frac{A \cos \frac{\omega}{c} x}{1 + B \cos \frac{\omega}{c} x} \qquad (15) \qquad A = - \frac{D_1 A_1}{c \frac{b}{a} \hat{z}}$$

$$B = - \frac{D_1 B_1}{c \frac{b}{a} \hat{z}}$$

randvoorwaarde 4:

(15): $$K(x) = \operatorname{arctg} \frac{A \cos \frac{\omega}{c} x}{1 + B \cos \frac{\omega}{c} x}$$

$$\frac{dK}{dx} = \frac{\dfrac{- A \frac{\omega}{c} \sin \frac{\omega}{c} x \left(1 + B \cos \frac{\omega}{c} x\right) + AB \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} x \sin \frac{\omega}{c} x}{\left(1 + B \cos \frac{\omega}{c} x\right)^2}}{1 + \dfrac{A^2 \cos^2 \frac{\omega}{c} x}{\left(1 + B \cos \frac{\omega}{c} x\right)^2}}$$

$$\frac{dK}{dx} = \frac{-A\frac{\omega}{c}\sin\frac{\omega}{c}x}{1+2B\cos\frac{\omega}{c}x+(A^2+B^2)\cos^2\frac{\omega}{c}x}$$

$$\left[\frac{dK}{dx}\right]_{x=l} = \frac{\omega}{c_0} = \frac{-A\frac{\omega}{c}\sin\frac{\omega}{c}l}{1+2B\cos\frac{\omega}{c}l+(A^2+B^2)\cos^2\frac{\omega}{c}l}$$

of:

$$1+2B\cos\frac{\omega}{c}l+(A^2+B^2)\cos^2\frac{\omega}{c}l+A\frac{c_0}{c}\sin\frac{\omega}{c}l=0 \qquad (16)$$

randvoorwaarde 3:

$$(14):\quad 1+2B\cos\frac{\omega}{c}l+(A^2+B^2)\cos^2\frac{\omega}{c}l=\left(\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2$$

Uit deze vergelijking en (16) zijn A en B op te lossen

beide vergelijkingen aftrekken:

$$A=-\frac{c}{c_0}\,\frac{1}{\sin\frac{\omega}{c}l}\,\beta\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2$$

$$(16):\quad B=-\frac{1}{\cos\frac{\omega}{c}l}\pm\sqrt{-A^2-A\frac{c_0}{c}\frac{\sin\frac{\omega}{c}l}{\cos^2\frac{\omega}{c}l}}$$

A invullen:

$$B=\frac{1}{\cos\frac{\omega}{c}l}\left[-1\pm\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_0}\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\frac{\beta}{\mathrm{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2}\,\right]$$

Voor + of - teken zie formule (13):

$$v(l)\cos\varphi(l.)=-\frac{c\frac{b}{a}\hat{z}}{D_1}\,\mathrm{tg}\frac{\omega}{c}l\left[-1\pm\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_0}\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\frac{\beta}{\mathrm{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2}\,\right]$$

Voor $\frac{\omega}{c}l = \frac{\pi}{2}$ is $tg\,\frac{\omega}{c}l = \pm\infty$. Het linker lid van voorgaande vergelijking is eindig dus ook het rechter lid is dit, de wortelvorm is gelijk aan 1, dus het + teken geldt en bovendien:

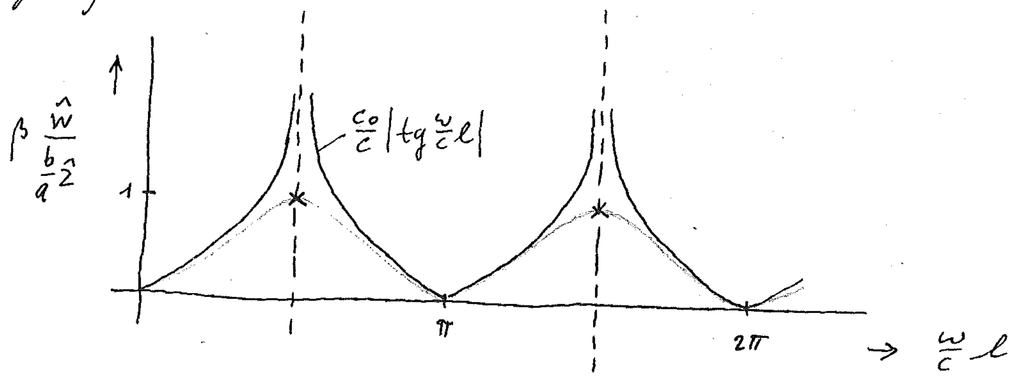
$$\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}} = 1 \quad \text{voor} \quad \frac{\omega}{c}l = \frac{\pi}{2}$$

Dit zal later blijken te kloppen.

Uit de wortelvorm blijkt dat moet gelden:

$$\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}} \leq \frac{c_0}{c}\left|tg\,\frac{\omega}{c}l\right|.$$

grafisch:



Ook dit verloop van $\hat{w}$ met ω zal bevestigd worden.

A en B invullen in (15):

$$\boxed{tg\,K(x) = -\frac{\frac{c}{c_0}\left(\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2\cos\frac{\omega}{c}x}{\sin\frac{\omega}{c}l - tg\,\frac{\omega}{c}l\left[1-\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_0}\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\frac{\beta}{tg\frac{\omega}{c}l}\right)^2}\right]\cos\frac{\omega}{c}x}}$$

(17)

A en B invullen in (14):

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\frac{\eta_1(x)}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2 = 1 - 2\,\frac{\cos\frac{\omega}{c}x}{\cos\frac{\omega}{c}l}\left[1 - \beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_0}\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\frac{\beta}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2}\,\right] + \\ + \left[1+\left(\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2 - 2\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_0}\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\frac{\beta}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2}\,\right]\left(\frac{\cos\frac{\omega}{c}x}{\cos\frac{\omega}{c}l}\right)^2\end{aligned}} \qquad (18).$$

In (17) en (18) zijn β en $\hat{w}$ nog onbekend. Zij worden later bepaald.

5. Golfamplitude $\hat{w}$ in het kanaal.

(12) en (13):
$$v(l) = \sqrt{A_1^2+B_1^2}\,\sin\frac{\omega}{c}l$$
$$= \frac{c}{D_1}\frac{b}{a}\hat{z}\sin\frac{\omega}{c}l\,\sqrt{A^2+B^2}$$

de snelheidsamplitude in het kanaal is dus:

$$\hat{v} = \frac{aD+bd}{(a+b)d}\,\frac{c}{D_1}\,\frac{b}{a}\hat{z}\,\sin\frac{\omega}{c}l\,\sqrt{A^2+B^2}$$

dit zegt iets over de fase

(Het opschrijven van de massabalans voor schip en kanaal geeft dezelfde uitkomst)

$$\hat{v} = \frac{c}{1+\frac{b}{a}}\,\frac{\frac{b}{a}\hat{z}}{D}\,\sin\frac{\omega}{c}l\,\sqrt{A^2+B^2}$$

bij benadering geldt in korte golventheorie voor ondiepwater golven:

$$\hat{v} = \frac{g}{c_0}\hat{w}$$

dus:

$$\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}} = \frac{c}{c_0}\,\frac{\sin\frac{\omega}{c}l}{1+\frac{b}{a}}\sqrt{A^2+B^2}$$

A en B invullen:

$$\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2 = \left(\frac{c}{c_0}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{\omega}{c}l}{1+\frac{b}{a}}\right)^2\frac{1+\left(\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2-2\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_0}\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2}}{\cos^2\frac{\omega}{c}l}$$

$$\left[\left\{\left(\frac{\frac{c_0}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2-\beta^2\right\}\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2-1\right]^2 = 4\beta^2\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2-4\beta^4\left(\frac{c}{c_0}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^4$$

$$\left[\left\{\left(\frac{\frac{c_0}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2-\beta^2\right\}^2+4\beta^4\left(\frac{c}{c_0}\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2\right]\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^4-$$

$$-\left[2\left\{\left(\frac{\frac{c_0}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2-\beta^2\right\}+4\beta^2\right]\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2+1=0$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\frac{c_0}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^4+\beta^4+2\beta^2\left(\frac{\frac{c_0}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2\left\{\frac{2\beta^2}{\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}\left(\frac{c}{c_0}\right)^4-1\right\}\right]\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^4-\\&-2\left[\left(\frac{\frac{c_0}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2+\beta^2\right]\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2+1=0 \qquad (19)\end{aligned}}$$

waaruit $\hat{w}$ te bepalen.

6. Hydrostatische kracht op het schip. K_s.
Deze kracht kan berekend worden uit de golfhoogten.

blz 28 : $\eta(x,t) = -\eta_1(x)\sin(\omega t - \kappa(x))$

$= -\eta_1 \cos\kappa \sin\omega t + \eta_1 \sin\kappa \cos\omega t$

$\eta_1\cos\kappa$ en $\eta_1\sin\kappa$ invullen:

$$\eta(x,t) = \frac{b}{a}\hat{z}\left[-\left(1 + B\cos\frac{\omega}{c}x\right)\sin\omega t + A\cos\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right].$$

$$K_s = \int_{-l}^{l} 2\rho g b\left[\eta(x,t) - \hat{z}\sin\omega t\right]dx$$

$$= \rho g F\hat{z}\left[\left(-1 - \frac{b}{a} - \frac{b}{a}B\frac{\sin\frac{\omega}{c}l}{\frac{\omega}{c}l}\right)\sin\omega t + \frac{b}{a}A\frac{\sin\frac{\omega}{c}l}{\frac{\omega}{c}l}\cos\omega t\right]$$

noem $1 + B\dfrac{\sin\frac{\omega}{c}l}{\frac{\omega}{c}l} = \alpha_d$, $4bl = F$

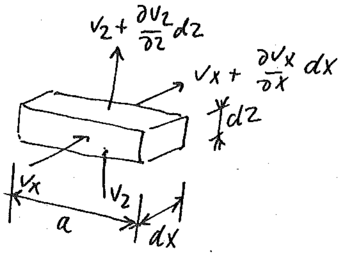
$$\alpha_d = 1 - \frac{tg\frac{\omega}{c}l}{\frac{\omega}{c}l}\left[1 - \beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_0}\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\frac{\beta}{tg\frac{\omega}{c}l}\right)^2}\right] \qquad (20)$$

$$\boxed{K_s = -\rho g F\hat{z}\left[\left(1 + \alpha_d\frac{b}{a}\right)\sin\omega t + \frac{b}{a}\frac{c}{c_0}\frac{\left(\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2}{\frac{\omega}{c}l}\cos\omega t\right]} \qquad (21)$$

7. Vermellingskracht K_v.

Met kontinuiteits- en bewegingsvergelijking worden de dynamische drukken naast het schip bepaald. Terplaatse van de onderzijde van het schip dienen deze als randvoorwaarde voor het berekenen van de dynamische drukken onder het schip. Integratie van deze laatste drukken over de scheepsbodem levert K_v

Drukverloop $p(x,z,t)$ naast het schip.



kontinuiteit: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

bewegingsverg.: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial t}$,

de overige termen zijn kwadratisch en worden verwaarloosd. Hydrostatische krachten zijn buiten beschouwing gebleven.

$$v_x = +\frac{c}{D_1}\,\frac{b}{a}\,\hat{z}\,\sqrt{A^2+B^2}\,\sin\frac{\omega}{c}x\,\cos(\omega t-\varphi)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = +\frac{c}{D_1}\,\frac{b}{a}\,\hat{z}\,\sqrt{A^2+B^2}\,\frac{\omega}{c}\cos\frac{\omega}{c}x\,(\cos\omega t\cos\varphi+\sin\omega t\sin\varphi)$$

$$= +\frac{\omega}{D_1}\,\frac{b}{a}\,\hat{z}\,\cos\frac{\omega}{c}x\,(B\cos\omega t + A\sin\omega t)$$

$$v_z = -\frac{\omega}{D_1}\,\frac{b}{a}\,\hat{z}\,\cos\frac{\omega}{c}x\,(B\cos\omega t + A\sin\omega t)\,z + C(x,t)$$

Aan de oppervlakte geldt: $v_z = \dot{\eta}$.
Nemen we in dit geval de oorsprong van het coordinaten stelsel in de bodem van het schip dan geldt voor de oppervlakte:

$$z = h + \eta \approx h \quad (\text{kleine uitwijkingen})$$

$$-\frac{\omega}{D_1}\frac{b}{a}\hat{z}\cos\frac{\omega}{c}x\,(B\cos\omega t + A\sin\omega t)\,h + C(x,t) =$$

$$-\omega\frac{b}{a}\hat{z}\left(1 + B\cos\frac{\omega}{c}x\right)\cos\omega t - \omega\frac{b}{a}\hat{z}A\cos\frac{\omega}{c}x\sin\omega t,$$

waaruit $C(x,t)$.

$$v_z = -\frac{\omega}{D_1}\frac{b}{a}\hat{z}\cos\frac{\omega}{c}x\,(A\sin\omega t + B\cos\omega t)(-h+z) -$$
$$-\omega\frac{b}{a}\hat{z}\left(1 + B\cos\frac{\omega}{c}x\right)\cos\omega t - \omega\frac{b}{a}\hat{z}A\cos\frac{\omega}{c}x\sin\omega t$$

$$-\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \omega^2\frac{b}{a}\hat{z}\left[-\left\{1 + \left(1 - \frac{h-z}{D_1}\right)B\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\sin\omega t +\right.$$
$$\left. + \left\{\left(1 - \frac{h-z}{D_1}\right)A\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\cos\omega t\right]$$

$$p = \rho\omega^2\frac{b}{a}\hat{z}\left[-\left\{z + \left(z + \frac{(h-z)^2}{2D_1}\right)B\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\sin\omega t +\right.$$
$$\left. + \left\{\left(z + \frac{(h-z)^2}{2D_1}\right)A\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\cos\omega t + C_1(x,t)\right]$$

Aan de oppervlakte $(z \approx h)$ geldt: $p = 0$

$$0 = \rho\omega^2\frac{b}{a}\hat{z}\left[-h\left(1 + B\cos\frac{\omega}{c}x\right)\sin\omega t + hA\cos\frac{\omega}{c}x\cos\omega t + C_1(x,t)\right]$$

waaruit $C_1(x,t)$.

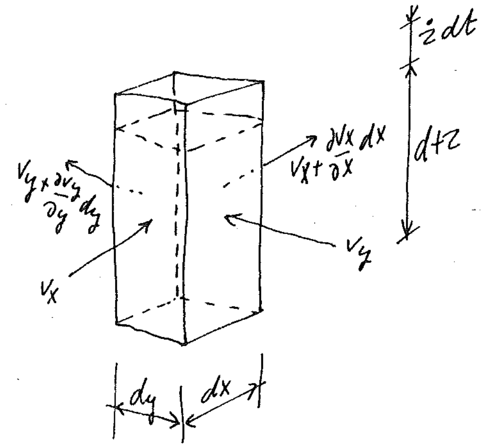
$$p = -\rho\omega^2 \frac{b}{a}\hat{z}\left[-\left\{h-z + \left(h-z-\frac{(h-z)^2}{2D_1}\right)B\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\sin\omega t + \right.$$

$$\left. + \left(h-z-\frac{(h-z)^2}{2D_1}\right)A\cos\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right]$$

$$\left[p\right]_{z=0} = \rho\omega^2\frac{b}{a}\hat{z}\left[\left\{h + \left(h-\frac{h^2}{2D_1}\right)B\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\sin\omega t - \right.$$

$$\left. - \left(h-\frac{h^2}{2D_1}\right)A\cos\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right] \qquad (22)$$

Drukverloop onder het schip $p(x,y,t)$.



kontinuiteit:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}dx(d+z)\,dy\,dt + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy(d+z)\,dx\,dt +$$

$$+ \dot{z}\,dt\,dx\,dy = 0$$

lineariseren: $d+z \approx d$

$(z \ll d)$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\omega\hat{z}}{d}\cos\omega t = 0$$

de bewegingsvergelijking is weer:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial t}$$

Zie blz. 38 : $\frac{\partial v_x}{\partial x} = +\frac{\omega}{D_1}\frac{b}{a}\hat{z}\cos\frac{\omega}{c}x\,(B\cos\omega t + A\sin\omega t)$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\left[\left(\frac{\omega\hat{z}}{d} + \frac{\omega}{D_1}\frac{b}{a}\hat{z}B\cos\frac{\omega}{c}x\right)\cos\omega t + \frac{\omega}{D_1}\frac{b}{a}\hat{z}\cos\frac{\omega}{c}x\,A\sin\omega t\right]$$

Wegens symmetrie is in de as van het kanaal ($y=0$) de snelheid in y-richting gelijk nul:

$[v_y]_{y=0} = 0$, waaruit volgt:

$$v_y = -\left[\left(\frac{\omega\hat z}{d} + \frac{\omega}{D_1}\frac{b}{a}\hat z\, B\cos\frac{\omega}{c}x\right)\cos\omega t + \frac{\omega}{D_1}\frac{b}{a}\hat z\cos\frac{\omega}{c}x\, A\sin\omega t\right] y$$

$$-\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \omega^2\hat z\left[-\left(\frac{1}{d}+\frac{b}{a}\frac{1}{D_1}B\cos\frac{\omega}{c}x\right)\sin\omega t + \right.$$
$$\left. + \frac{b}{a}\frac{1}{D_1}A\cos\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right]y$$

$$p = \rho\omega^2\hat z\left[\quad\right]\frac{y^2}{2} + C_2(x,t)$$

Voor $y=b$ wordt de druk gegeven door (22).
In- en uit-fasedeel zijn gesplitst om $C_2(x,t)$ te bepalen: $C_2(x,t) = C_3(x)\sin\omega t + C_4(x)\cos\omega t$.

in fase deel:

$$\rho\omega^2\frac{b}{a}\hat z h\left\{1+\left(1-\frac{h}{2D_1}\right)B\cos\frac{\omega}{c}x\right\} = -\rho\omega^2\hat z\frac{b}{a}\frac{b^2}{2}\left[\left(\frac{a}{b}\frac{1}{d}+\frac{B}{D_1}\cos\frac{\omega}{c}x\right)\right] + C_3(x)$$

$$C_3(x) = \rho\omega^2\frac{b}{a}\hat z\left[h + \frac{a}{b}\frac{b^2}{2d} + \left\{h\left(1-\frac{h}{2D_1}\right) + \frac{b^2}{2D_1}\right\}B\cos\frac{\omega}{c}x\right]$$

uit fase deel:

$$-\rho\omega^2\frac{b}{a}\hat z\left(h-\frac{h^2}{2D_1}\right)A\cos\frac{\omega}{c}x = +\rho\omega^2\hat z\frac{b^2}{2}\frac{b}{a}\frac{A}{D_1}\cos\frac{\omega}{c}x + C_4(x)$$

$$C_4(x) = \rho\omega^2\frac{b}{a}\hat z\left[-\frac{b^2}{2D_1} - h + \frac{h^2}{2D_1}\right]A\cos\frac{\omega}{c}x.$$

$$p = \rho\omega^2\frac{b}{a}\hat z\left[\left\{\left(\frac{b^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\left(\frac{a}{b}\frac{1}{d}+\frac{B}{D_1}\cos\frac{\omega}{c}x\right) + h + h\left(1-\frac{h}{2D_1}\right)B\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\sin\omega t\right.$$
$$\left. + \left\{\left(\frac{b^2}{2}-\frac{y^2}{2}\right)\frac{A}{D_1}\cos\frac{\omega}{c}x - h\left(1-\frac{h}{2D_1}\right)A\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\cos\omega t\right].$$

De kracht K per lengte eenheid op de scheepsbodem bedraagt:

$$K = 2b\rho\omega^2 \frac{b}{a}\hat{z}\left[\left\{\frac{b^2}{3}\left(\frac{a}{b}\frac{1}{d} + \frac{1}{D_1}B\cos\frac{\omega}{c}x\right) + h + h\left(1-\frac{h}{2D_1}\right)B\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\sin\omega t + \right.$$

$$\left. + \left\{-\frac{b^2}{3}\frac{1}{D_1}A\cos\frac{\omega}{c}x - h\left(1-\frac{h}{2D_1}\right)A\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\cos\omega t\right]$$

$$K = 2b\rho\omega^2 \frac{b}{a}\hat{z}\left[\left\{\frac{ab}{3d} + h + \left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1}\right)B\cos\frac{\omega}{c}x\right\}\sin\omega t - \right.$$

$$\left. - \left(+\frac{b^2}{3D_1} + h - \frac{h^2}{2D_1}\right)A\cos\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right]$$

Zoals ook uit de symmetrie voorwaarden moet volgen zijn hydrostatische en hydrodynamische druk symmetrisch verdeeld t.o.v. YOZ-vlak (symmetrisch schip). Er is dus bij het dompen geen resulterend moment om de y-as; zodat er geen hydrodynamische koppeling bestaat tussen dompen en stampen.

Uit de berekening van de kracht per lengteeenheid K blijkt dat de oorspronkelijke aanname dat de hydrodynamische drukken konstant zijn in x-richting niet opgaat. De fout daardoor in de bewegingsvergelijking is echter klein omdat voor hoekfrequenties kleiner dan de eigenfrequentie de dynamische drukken veel kleiner zijn dan de hydrostatische.

Totale versnellingskracht K_v op de scheepsbodem:

$$K_v = \rho F \omega^2 \frac{b}{a} \hat{z} \left[\left\{ h + \frac{ab}{3d} + \left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1} \right) B \frac{\sin \frac{\omega}{c} l}{\frac{\omega}{c} l} \right\} \sin \omega t - \right.$$

$$\left. - \left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1} \right) A \frac{\sin \frac{\omega}{c} l}{\frac{\omega}{c} l} \cos \omega t \right].$$

Deze kracht is verkregen uit: $K_v = \int_{-l}^{l} k\,dx$

$F = 4bl$

A en B invullen, met (20):

$$\boxed{K_v = \rho F \omega^2 \frac{b}{a} \hat{z} \left[\left\{ \left(h + \frac{ab}{3d} \right) - \left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1} \right) (1 - \alpha_d) \right\} \sin \omega t + + \left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1} \right) \frac{c}{c_0} \frac{\left(\beta \frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}} \right)^2}{\frac{\omega}{c} l} \cos \omega t \right]. \quad (23)}$$

8. Formule voor de coëfficiënt β.

Deze coëfficiënt wordt bepaald door op twee manieren de uit-fase componenten van de krachten te beschouwen en deze met elkaar te vergelijken.

Uit-fase kracht volgens berekening van K_s en K_v:
(21) en (23)

$$K_{u.f.} = \rho F \frac{b}{a} \hat{z} \left[-g \frac{c}{g c_0} \frac{\left(\beta \frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}} \right)^2}{\frac{\omega}{c} l} + \omega^2 \left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1} \right) \frac{c}{c_0} \frac{\left(\beta \frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}} \right)^2}{\frac{\omega}{c} l} \right] \cos \omega t.$$

$$K_{u.f.} = -\rho F \frac{b}{a} \hat{z} \frac{c}{c_0} \frac{\left(\beta \frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2}{\frac{\omega}{c} l} g \left[1 - \frac{\omega^2}{g}\left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1}\right)\right] \cos \omega t$$

Uit het energieverlies t.g.v. straling van golven werd gevonden (8):

$$K_{u.f.} = -\frac{2\rho g c_0 b_k \hat{w}^2}{\hat{z}\omega}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2\right) \cos \omega t .$$

Gelijkstelling van deze twee krachten geeft:

$$4bl \frac{a}{b} \frac{c^2}{c_0} \frac{1}{l} \beta^2 \left[1 - \frac{\omega^2}{g}\left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1}\right)\right] = 4c_0 (a+b)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2\right)$$

$$\beta^2 = \left(\frac{c_0}{c}\right)^2 \left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{1 - \frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2}{1 - \frac{h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1}}{g}\omega^2}$$

$$\boxed{\beta = \frac{c_0}{c} \sqrt{\left(1 + \frac{b}{a}\right) \frac{1 - \frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2}{1 - \frac{h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1}}{g}\omega^2}}} \tag{24}$$

9. De coëfficienten a_d, b_d, c_d van de dompvergelijking.

De coefficienten worden met de drie formules (4) bepaald.

Virtuele massa a_d.

Voor a_d geldt:

$$a_d = m - \frac{(K_v)_{\text{in-fase comp.}}}{\ddot{z}}$$

$\ddot{z} = -\omega^2 \hat{z} \sin \omega t$, met (23):

$$a_d = m + \rho F \frac{b}{a}\left[\left(h + \frac{ab}{3d}\right) - \left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1}\right)(1-\alpha_d)\right]$$

definieer massa coefficient μ_d : $\mu_d = \dfrac{a_d}{m}$

$m = \rho F h$

$$\boxed{\mu_d = 1 + \frac{b}{h}\left[\left(\frac{h}{a} + \frac{b}{3d}\right) - \left(\frac{h}{a} - \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3}}{a D_1}\right)(1-\alpha_d)\right]} \qquad (25)$$

Dempingscoëfficient b_d

Voor b_d geldt:

$$b_d = - \frac{(k_v + k_s)_{\text{uit-fase comp.}}}{\dot{z}}$$

$$b_d = \frac{\rho g F}{\omega}\left[\frac{b}{a}\frac{c}{c_0}\frac{\left(\beta \frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2}{\frac{\omega}{c} l} - \frac{\omega^2}{g}\frac{b}{a}\left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1}\right)\frac{c}{c_0}\frac{\left(\beta \frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2}{\frac{\omega}{c} l}\right]$$

$$\boxed{b_d = \frac{\rho g F}{l}\,\frac{b}{a}\,\frac{c^2}{c_0}\left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{3D_1}}{g}\right]\left(\beta \frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2} \qquad (26)$$

Hydrostatische coëfficient c_d.

Voor c_d geldt:

$$c_d = - \frac{(k_s)\text{ in-fase comp.}}{z}$$

$$\boxed{c_d = \rho g F \left(1 + \frac{b}{a} \ddot{\alpha}_d\right)} \qquad (27)$$

Om de coefficienten te kunnen berekenen moet eerst de golfamplitude in het kanaal $\hat{w}$ berekend worden, afhankelijk van de hoekfrequentie ω. Formule (19) voor $\hat{w}$ geeft echter veel rekenwerk; de berekeningen zijn daarom uitgevoerd met een vereenvoudigde formule:

Vervang in (19) de vorm tussen accolades door 1. Dit gaat in het algemeen niet op, maar de gemaakte fout in $\hat{w}$ blijft voor de hier gegeven afmetingen van kanaal en schip beneden 1 mm en is van de zelfde orde van grootte als die van de golfhoogtemeters.

Door de vereenvoudiging wordt (19) een volledig kwadraat:

$$\left[\left(\frac{\frac{c_0}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)}{tg\,\frac{\omega}{c}l}\right)^4+\beta^4+2\beta^2\left(\frac{\frac{c_0}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}{tg\,\frac{\omega}{c}l}\right)^2\right]\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^4-$$

$$-2\left[\left(\frac{\frac{c_0}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)}{tg\,\frac{\omega}{c}l}\right)^2+\beta^2\right]\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2+1\approx 0$$

met als resultaat:

$$\hat{w}\approx\frac{\frac{b}{a}\hat{z}}{\sqrt{\beta^2+\left[\frac{\frac{c_0}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)}{tg\,\frac{\omega}{c}l}\right]^2}} \qquad (28)$$

De formule is exact voor: $\frac{\omega}{c}l=0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \ldots$

De gemeten golfhoogten en -fasen ter plaatse van het schepsmidden, $\eta(0)$ resp. $\kappa(0)$, zijn m.b.v. de berekening gecontroleerd. Hiertoe zijn ook de formules (17) en (18) vereenvoudigd.

Beschouw de wortelvorm: $\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_0}\,\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\,\frac{\beta}{tg\,\frac{\omega}{c}l}\right)^2}$

Met (28):

$$\sqrt{1-\frac{\left(\frac{c}{c_0}\right)^2}{tg^2\frac{\omega}{c}l+\beta^2\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\left(1+\frac{b}{a}\right)^2}}\geqslant\sqrt{1-\left(\frac{\left(\frac{c}{c_0}\right)^2}{\beta\left(1+\frac{b}{a}\right)}\right)^2}$$

Deze vorm is in dit geval gelijk aan:

$$\sqrt{1-\left(\frac{\left(\frac{c}{c_0}\right)^2}{\beta\left(1+\frac{b}{a}\right)}\right)^2} \approx \sqrt{1-\left(\frac{0{,}754}{1{,}43 \cdot 2{,}82}\right)^2} = 0{,}982 \approx 1.$$

Dus $\sqrt{1-\left(\frac{c}{c_0}\,\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\,\frac{\beta}{\operatorname{tg}\frac{\omega}{c}l}\right)^2} \approx 1$

Uit (17) en (18) volgt hiermee:

$$\eta(0) \approx \frac{b}{a}\hat{z}\left(1-\frac{1-\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}}{\cos\frac{\omega}{c}l}\right) \qquad (29)$$

$$\operatorname{tg}\kappa(0) \approx -\frac{\frac{c}{c_0}}{\sin\frac{\omega}{c}l}\;\frac{\left(\beta\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{z}}\right)^2}{\frac{\eta(0)}{\frac{b}{a}\hat{z}}} \qquad (30)$$

5.4. Coëfficienten van de stampvergelijking.

Harmonische beweging: $\theta = \hat{\theta} \sin \omega t$, $z(x,t) = \hat{\theta}\, x \sin \omega t$

De berekening verloopt analoog aan die voor de dompbeweging, zodat waar nodig daarnaar verwezen wordt.

1. Continuïteitsvergelijking.

Als bij dompen, er treedt echter een extra term omdat de scheepsbodem een helling $\frac{\partial z}{\partial x}$ heeft in x-richting. $\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial t}$

$$\boxed{v_x \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{b}{a} v_x \frac{\partial z}{\partial x} + \left(D + d\frac{b}{a}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{b}{a}\frac{\partial z}{\partial t} = 0}$$

(gedeeltelijk gelineariseerd). (9')

2. Bewegingsvergelijking

We kunnen in dit geval niet de niet-hydrostatische drukken weglaten uit de bewegingsvergelijking. Als 1° benadering zijn deze drukken bepaald door uit te gaan van een waterbeweging in z- en y-richting. De fout die hierdoor gemaakt wordt is weer klein, omdat voor de beschouwde hoekfrequenties de niet-hydrostatische drukken veel kleiner zijn dan de hydrostatische.

Men vindt voor de drukken naast het schip:

$$p_1 = \rho \frac{b}{a}(h-z)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$ (oorsprong assenkruis in scheepsbodem)

en voor de drukken onder het schip:

$$p_2 = \rho\left(\frac{b}{a}h + \frac{b^2-y^2}{2d}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

Als totale vermellings kracht K vindt men:

$$K(x,t) = \rho b^2 h\left(\frac{h}{2b} + \frac{d}{a} + \frac{b}{3h}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

De bijbehorende term in de bewegingsvergelijking is dus:

$$\frac{\partial K}{\partial x}dx = \rho b^2 h\left(\frac{h}{2b} + \frac{d}{a} + \frac{b}{3h}\right)\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial t^2}dx$$

Door de helling van de scheepsbodem wordt de term $\frac{\partial(m v_x)}{\partial x}$:

$$\frac{\partial(m v_x)}{\partial x} = \rho\left[\left(a\frac{\partial \eta}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial x}\right)v_x + \left\{(D+\eta)a + (d+z)b\right\}dx\frac{\partial v_x}{\partial x}\right]$$

De overige termen zijn als die in de dompvergelijking.
De vergelijking wordt $(D+\eta \approx D,\ d+z \approx d)$:

$$\frac{b^2 h}{a}\omega^2\hat{\theta}\left(\frac{h}{2b} + \frac{d}{a} + \frac{b}{3h}\right)\sin\omega t + g\left(D + d\frac{b}{a}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} +$$

$$+\left(D + d\frac{b}{a}\right)\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x\left[v_x\frac{\partial \eta}{\partial x} + \left(D + d\frac{b}{a}\right)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{b}{a}\frac{\partial z}{\partial t} + v_x\frac{b}{a}\frac{\partial z}{\partial x}\right] = 0$$

Blijkens de continuïteitsvergelijking is de vorm tussen [ ] gelijk aan nul.

De twee niet-lineaire termen in (9') mogen verwaarloosd worden, mits $v_x \ll c$.

$$\boxed{\begin{aligned} & D_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{b}{a}\omega\hat{\theta} x \cos\omega t = 0 \\ & c^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + D_1 \frac{\partial v_x}{\partial t} + b_1^2\omega^2\hat{\theta}\sin\omega t = 0 \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (9') \\ (10') \end{aligned}$$

$$D + \frac{b}{a} d = D_1 \quad , \quad g D_1 = c^2$$

$$\frac{b^2 h}{a}\left(\frac{b}{3h} + \frac{h}{2b} + \frac{d}{a}\right) = b_1^2$$

Zoek van (9') en (10') een oplossing die harmonisch in de tijd is:

$$v_x = -v(x)\cos(\omega t - \varphi(x))$$

$$\eta = -\eta_1(x)\sin(\omega t - \kappa(x))$$

Ingevuld geeft dit:

$$-D_1 \frac{d}{dx}(v\cos\varphi)\cos\omega t - D_1 \frac{d}{dx}(v\sin\varphi)\sin\omega t - \omega(\eta_1\cos\kappa)\cos\omega t -$$
$$-\omega(\eta_1\sin\kappa)\sin\omega t + \frac{b}{a}\omega\hat{\theta} x\cos\omega t = 0$$

$$-c^2\frac{d}{dx}(\eta_1\cos\kappa)\sin\omega t + c^2\frac{d}{dx}(\eta_1\sin\kappa)\cos\omega t + D_1\omega(v\cos\varphi)\sin\omega t -$$
$$-D_1\omega(v\sin\varphi)\cos\omega t + b_1^2\omega^2\hat{\theta}\sin\omega t = 0$$

Deze twee betrekkingen gelden op elk tijdstip, de coëfficienten van sin ωt en cos ωt zijn dus gelijk nul :

$$\begin{cases} -D_1 \frac{d}{dx}(v \sin\varphi) - \omega(\eta_1 \sin\kappa) = 0 \\ D_1 \frac{d}{dx}(v\cos\varphi) + \omega(\eta_1 \cos\kappa) - \frac{b}{a}\omega\hat{\theta}x = 0 \\ -c^2 \frac{d}{dx}(\eta_1 \cos\kappa) + D_1\omega(v\cos\varphi) + b_1^2\omega^2\hat{\theta} = 0 \\ c^2 \frac{d}{dx}(\eta_1 \sin\kappa) - D_1\omega(v\sin\varphi) = 0 \end{cases} \qquad (11')$$

3. Randvoorwaarden.

1°. $[\eta_1]_{x=0} = 0$ antimetrie

2°. $\left[\frac{dv}{dx}\right]_{x=0} = 0$ antimetrie

3° $[\eta_1]_{x=l} = \beta\hat{w}$ als bij dompen

4°. $\left[\frac{d\kappa}{dx}\right]_{x=l} = \frac{\omega}{c_0}$ als bij dompen

4. Oplossing van de vergelijkingen en aanpassing aan de randvoorwaarden.

tweede en derde verg. van (11'):

$$-\omega^2(\eta_1 \cos\kappa) + \frac{b}{a}\omega^2\hat{\theta}x - c^2\frac{d^2}{dx^2}(\eta_1\cos\kappa) = 0$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(\eta_1\cos\kappa) + \frac{\omega^2}{c^2}(\eta_1\cos\kappa) = \frac{b}{a}\frac{\omega^2}{c^2}\hat{\theta}x$$

Wegens antimetrie:

$$\eta_1 \cos\kappa = A_1 \sin\frac{\omega}{c}x + \frac{b}{a}\hat{\theta}x \qquad (12')$$

eerste en vierde verg. van (11')

$$\frac{d^2}{dx^2}(\eta_1 \sin\kappa) + \frac{\omega^2}{c^2}(\eta_1 \sin\kappa) = 0$$

$$\eta_1 \sin\kappa = B_1 \sin\frac{\omega}{c}x \qquad ; \qquad (13')$$

(12') en (13') in de derde en vierde verg. van (11'):

$$v\sin\varphi = \frac{g}{c}B_1 \cos\frac{\omega}{c}x$$

$$v\cos\varphi = \frac{g}{c}A_1 \cos\frac{\omega}{c}x + \left(\frac{g}{\omega}\frac{b}{a} - \frac{b_1^2}{D_1}\omega\right)\hat{\theta}$$

Uit deze twee formules:

$$v(x)^2 = \left(\frac{g}{c}\right)^2(A_1^2 + B_1^2)\cos^2\frac{\omega}{c}x + 2\frac{g}{c}A_1\cos\frac{\omega}{c}x\left(\frac{g}{\omega}\frac{b}{a} - \frac{b_1^2}{D_1}\omega\right)\hat{\theta} +$$

$$+\left(\frac{g}{\omega}\frac{b}{a} - \frac{b_1^2}{D_1}\omega\right)^2\hat{\theta}^2 \qquad (14')$$

$v(x)$ is symmetrisch t.o.v. $x=0$, dus $\left(\frac{dv}{dx}\right)_{x=0} = 0$

(randvoorwaarde 2°)

Uit (12') en (13'):

$$\operatorname{tg} \kappa = \frac{B_1 \sin \frac{\omega}{c} x}{A_1 \sin \frac{\omega}{c} x + \frac{b}{a} \hat{\theta} x} = \frac{B \sin \frac{\omega}{c} x}{A \sin \frac{\omega}{c} x + x} \qquad \frac{B_1}{\frac{b}{a}\hat{\theta}} = B \qquad \frac{A_1}{\frac{b}{a}\hat{\theta}} = A$$

$$\kappa(x) = \operatorname{arctg} \frac{B \sin \frac{\omega}{c} x}{A \sin \frac{\omega}{c} x + x}$$

$$\frac{d\kappa}{dx} = \frac{\dfrac{B \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} x \left(A \sin \frac{\omega}{c} x + x\right) - B \sin \frac{\omega}{c} x \left(1 + A \frac{\omega}{c} \cos \frac{\omega}{c} x\right)}{\left(A \sin \frac{\omega}{c} x + x\right)^2}}{1 + \left(\dfrac{B \sin \frac{\omega}{c} x}{A \sin \frac{\omega}{c} x + x}\right)^2}$$

$$= \frac{B \frac{\omega}{c} x \cos \frac{\omega}{c} x - B \sin \frac{\omega}{c} x}{\left(A \sin \frac{\omega}{c} x + x\right)^2 + \left(B \sin \frac{\omega}{c} x\right)^2}$$

$$\left[\frac{d\kappa}{dx}\right]_{x=l} = \frac{\omega}{c_0} = \frac{B\left(\frac{\omega}{c} l \cos \frac{\omega}{c} l - \sin \frac{\omega}{c} l\right)}{(A^2+B^2) \sin^2 \frac{\omega}{c} l + 2Al \sin \frac{\omega}{c} l + l^2}$$

$$(A^2+B^2) \sin^2 \frac{\omega}{c} l + 2Al \sin \frac{\omega}{c} l + B \frac{c_0}{\omega}\left(\sin \frac{\omega}{c} l - \frac{\omega}{c} l \cos \frac{\omega}{c} l\right) + l^2 = 0 \qquad (15')$$

uit 3° randvoorwaarde, $[\Omega_1]_{x=l} = \beta \hat{w}$:

$$(A^2+B^2) \sin^2 \frac{\omega}{c} l + 2Al \sin \frac{\omega}{c} l + l^2 = \left(\frac{\beta \hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{\theta}}\right)^2 \qquad (16')$$

(15') – (16') geeft:

$$B = - \frac{\frac{\omega}{c_0}\left(\dfrac{\beta \hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{\theta}}\right)^2}{\sin \frac{\omega}{c} l - \frac{\omega}{c} l \cos \frac{\omega}{c} l}$$

B in (10'):

$$A = -\frac{l}{\sin\frac{\omega}{c}l}\left[1 \pm \frac{\beta}{\frac{b}{a}\hat{\theta}}\,\frac{\hat{w}}{l}\sqrt{1-\left(\frac{\frac{\omega}{c_0}}{1-\frac{\frac{\omega}{c}l}{\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{c}l}}\;\frac{\beta\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{\theta}}\right)^2}\;\right]$$

formule (12'): $\eta_1 \cos\pi = \frac{b}{a}\hat{\theta} A \sin\frac{\omega}{c}x + \frac{b}{a}\hat{\theta}x$

Voor $\frac{\omega}{c}l = \pi$ is $\sin\frac{\omega}{c}l = 0$, als in de formule voor A het + teken zou gelden dan zou $A = \pm\infty$ en met (12') $\eta' = \pm\infty$.

Dit treedt niet op, dus het min-teken geldt.

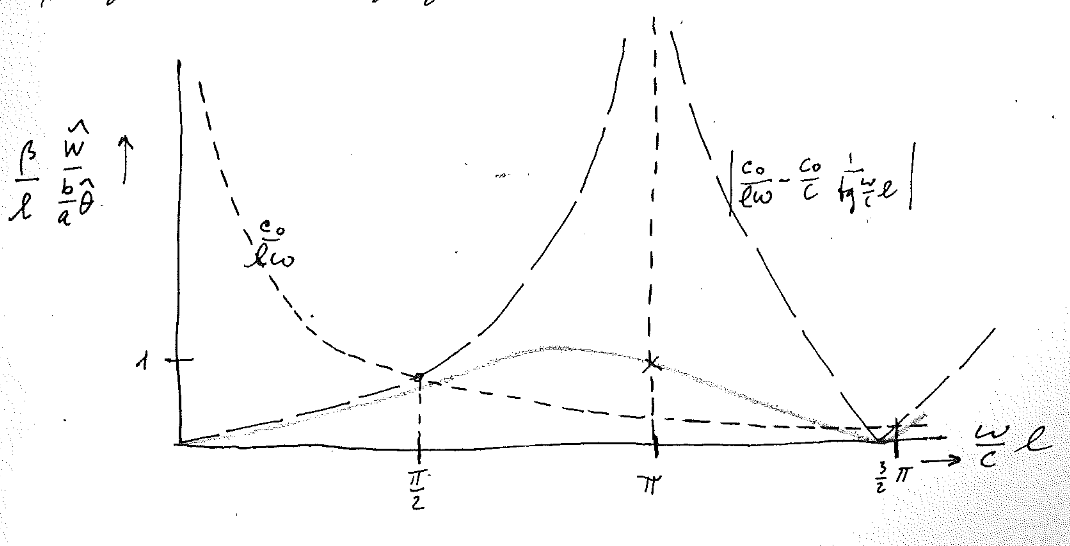
Bovendien moet dus gelden:

$$\hat{w} = \frac{1}{\beta}\,\frac{b}{a}\hat{\theta}l \quad \text{voor} \quad \frac{\omega}{c}l = \pi$$

Uit de wortelvorm blijkt dat moet gelden:

$$\hat{w} \leq \frac{\frac{b}{a}\hat{\theta}}{\beta}\;\frac{\left|1-\frac{\frac{\omega}{c}l}{\mathrm{tg}\,\frac{\omega}{c}l}\right|}{\frac{\omega}{c_0}}$$

grafisch weergegeven:



5. Golfamplitude $\hat{w}$ in het kanaal.

$$(14'):\; v(l)^2 = \left(\frac{b}{a}\hat{\theta}\right)^2\left[\left(\frac{g}{c}\right)^2(A^2+B^2)\cos^2\frac{\omega}{c}l + 2\,\frac{g}{c}A\cos\frac{\omega}{c}l\left(\frac{g}{\omega}-\frac{a}{b}\frac{b_1^2}{D_1}\omega\right)+\right.$$
$$\left. + \left(\frac{g}{\omega}-\frac{a}{b}\frac{b_1^2}{D_1}\omega\right)^2\right]$$

De snelheids amplitude in het kanaal $\hat{v}$ is:

$$\hat{v}^2 = \left(\frac{aD_1}{(a+b)D}\right)^2 v(l)^2 = \left(\frac{D_1}{(1+\frac{b}{a})D}\right)^2 v(l)^2 \quad ;$$

Ook geldt bij benadering:

$$\hat{v}^2 = \left(\frac{g}{c_0}\right)^2 \hat{w}^2$$

Dit geeft:

$$\left[\frac{(1+\frac{b}{a})D}{D_1}\;\frac{g}{c_0}\;\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{\theta}}\right]^2 = \left(\frac{g}{c}\right)^2\frac{\left(\frac{\beta\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{\theta}}\right)^2 - l^2 - 2Al\sin\frac{\omega}{c}l}{\sin^2\frac{\omega}{c}l}\cos^2\frac{\omega}{c}l +$$

$$+\, 2\,\frac{g}{c}\cos\frac{\omega}{c}l\left(\frac{g}{\omega}-\frac{a}{b}\frac{b_1^2}{D_1}\omega\right)A + \left(\frac{g}{\omega}-\frac{a}{b}\frac{b_1^2}{D_1}\omega\right)^2$$

$$\left[\left(\frac{1+\frac{b}{a}}{D_1}D\,\frac{g}{c_0}\right)^2 - \left(\frac{\frac{g}{c}\beta}{tg\frac{\omega}{c}l}\right)^2\right]\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{\theta}}\right)^2 = q^2 - \frac{\left(\frac{g}{c}l\right)^2}{tg^2\frac{\omega}{c}l} +$$

$$+\left[-\frac{2\left(\frac{g}{c}\right)^2 l\cos^2\frac{\omega}{c}l}{\sin\frac{\omega}{c}l} + 2\,\frac{g}{c}\cos\frac{\omega}{c}l\cdot q\right]$$

$$\left(q = \frac{g}{\omega} - \frac{a}{b}\frac{b_1^2}{D_1}\omega\right)$$

Invullen van de formule voor A geeft:

$$t_1\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{\theta}l}\right)^4 - 2t_2\left(\frac{\hat{w}}{\frac{b}{a}\hat{\theta}l}\right)^2 + t_3 = 0$$

waarin:

$$t_1 = \left[\frac{\left(\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{c_0}}\,tg\,\frac{\omega}{c}l\right)^2 - \beta^2}{\frac{q\,tg\,\frac{\omega}{c}l}{\frac{c}{D_1}l} - 1}\right]^2 + 4\beta^4\left(\frac{\frac{\omega}{c_0}l}{1 - \frac{\frac{\omega}{c}l}{tg\,\frac{\omega}{c}l}}\right)^2$$

$$t_2 = \left(\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{c_0}}\,tg\,\frac{\omega}{c}l\right)^2 + \beta^2$$

$$t_3 = \left(\frac{q\,tg\,\frac{\omega}{c}l}{\frac{c}{D_1}l} - 1\right)^2 \qquad (19')$$

6. Hydrostatisch moment M_S op het schip.

Dit moment wordt berekend uit de golfhoogten η_b t.o.v. de scheepsbodem

Zie blz 51:

$$\eta_b(x,t) = -\eta_1 \cos\kappa \sin\omega t + \eta_1 \sin\kappa \cos\omega t - \hat{\theta} x \sin\omega t.$$

$$= -\left[\left(1+\frac{b}{a}\right)x + \frac{b}{a} A \sin\frac{\omega}{c}x\right]\hat{\theta}\sin\omega t + \frac{b}{a} B \hat{\theta} \sin\frac{\omega}{c}x \cos\omega t$$

$$M_s = \int_{-\ell}^{\ell} \rho g \eta_b \cdot 2b\, x\, dx.$$

$$= -\rho g \left(1+\frac{b}{a}\right)\hat{\theta} J_o \sin\omega t + \rho g\left[-\frac{c^2}{\omega^2} 4b \frac{b}{a} A \hat{\theta}\left(\sin\frac{\omega}{c}\ell - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\omega}{c}\ell \cos\frac{\omega}{c}\ell\right)\sin\omega t + 4b\frac{b}{a} B\hat{\theta}\frac{c^2}{\omega^2}\left(\sin\frac{\omega}{c}\ell - \frac{\omega}{c}\ell\cos\frac{\omega}{c}\ell\right)\cos\omega t\right]$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_s = \rho g \Bigg[& -\left\{\left(1+\frac{b}{a}\right)J_o + \frac{c}{\omega}\frac{b}{a}A\left(\frac{\sin\frac{\omega}{c}\ell}{\frac{\omega}{c}\ell} - \cos\frac{\omega}{c}\ell\right)F\right\}\hat{\theta}\sin\omega t + \\ & + \frac{c}{\omega}\frac{b}{a}B\left(\frac{\sin\frac{\omega}{c}\ell}{\frac{\omega}{c}\ell} - \cos\frac{\omega}{c}\ell\right)F\hat{\theta}\cos\omega t. \qquad (21') \end{aligned}}$$

In-fase deel $= -\rho g J_o \left(1+\alpha_s \frac{b}{a}\right)\hat{\theta}\sin\omega t$

(definitie van α_s)

$$\alpha_s = 1 + 3\frac{c}{\omega\ell}\frac{A}{\ell}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{c}\ell}{\frac{\omega}{c}\ell} - \cos\frac{\omega}{c}\ell\right) \qquad (20')$$

$$\left(\frac{J_o}{F} = 3\ell^2\right)$$

7. Moment M_v t.g.v. de versnellingen van de waterdeeltjes.

De berekening verloopt op dezelfde wijze als bij dompen, zie aldaar.

Drukverloop naast het schip.

continuiteits vergelijking: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

bewegingsvergelijking : $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial t}$

(geen hydrostatische drukken, kwadratische termen verwaarloosd)

$$v_x = -\frac{b}{a}\hat{\theta}\left[\left(\frac{q}{c}A\cos\frac{\omega}{c}x + q\right)\cos\omega t + \frac{q}{c}B\cos\frac{\omega}{c}x\,\sin\omega t\right]$$

$$q = \frac{g}{\omega} - \frac{a}{b}\frac{b_1^2}{D_1}\omega$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{b}{a}\hat{\theta}\,\frac{q\omega}{c^2}\sin\frac{\omega}{c}x\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) = -\frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$v_z = -\frac{\omega}{D_1}\frac{b}{a}\hat{\theta}\sin\frac{\omega}{c}x\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) + C(x,t)$$

Aan de vloeistofoppervlakte $(z \approx h)$ geldt: $v_z = \dot{\eta}$

$$\eta = -\frac{b}{a}\hat{\theta}\left[\left(x + A\sin\frac{\omega}{c}x\right)\sin\omega t - B\sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right]$$

$$\dot{\eta} = -\frac{b}{a}\hat{\theta}\omega\left[\left(x + A\sin\frac{\omega}{c}x\right)\cos\omega t + B\sin\frac{\omega}{c}x\,\sin\omega t\right]$$

$$= C(x,t) - \frac{\omega}{D_1}\frac{b}{a}\hat{\theta}\sin\frac{\omega}{c}x\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)h,$$

waaruit $C(x,t)$ op te lossen.

$$v_z = -\omega\frac{b}{a}\hat{\theta}\left[\left\{\left(1 - \frac{h-z}{D_1}\right)A\sin\frac{\omega}{c}x + x\right\}\cos\omega t + \left(1 - \frac{h-z}{D_1}\right)B\sin\frac{\omega}{c}x\,\sin\omega t\right].$$

$$-\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = \omega^2 \frac{b}{a}\hat{\theta}\left[-\left\{\left(1-\frac{h-z}{D_1}\right)A\sin\frac{\omega}{c}x + x\right\}\sin\omega t + \right.$$
$$\left. + \left(1-\frac{h-z}{D_1}\right)B\sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right]$$

$$p = \rho\omega^2\frac{b}{a}\hat{\theta}\left[-\left\{\left(z+\frac{(h-z)^2}{2D_1}\right)A\sin\frac{\omega}{c}x + xz\right\}\sin\omega t + \right.$$
$$\left. + \left(z+\frac{(h-z)^2}{2D_1}\right)B\sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t + C_1(x,t)\right]$$

Aan het oppervlak geldt: $p = 0$ $(z \approx h)$

$$0 = -\left\{hA\sin\frac{\omega}{c}x + xh\right\}\sin\omega t + hB\sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t + C_1(x,t),$$

waaruit $C_1(x,t)$ op te lossen.

$$p = \rho\omega^2\frac{b}{a}\hat{\theta}\left[\left\{\left(h-z-\frac{(h-z)^2}{2D_1}\right)A\sin\frac{\omega}{c}x + (h-z)x\right\}\sin\omega t - \right.$$
$$\left. - \left(h-z-\frac{(h-z)^2}{2D_1}\right)B\sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right]$$

Druk t.g.v. de versnellingen bij de bodem $(z=0)$:

$$[p]_{z=0} = \rho\omega^2\frac{b}{a}\hat{\theta}\left[\left\{\left(h-\frac{h^2}{2D_1}\right)A\sin\frac{\omega}{c}x + hx\right\}\sin\omega t - \right.$$
$$\left. - \left(h-\frac{h^2}{2D_1}\right)B\sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t \quad (22')\right.$$

Drukverloop onder het schip.

continuiteitsvergelijking, gelineariseerd: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\omega}{d}x\hat{\theta}\cos\omega t = 0$

bewegingsvergelijking, " : $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial t}$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{b}{a}\hat{\theta}\left[\left(\frac{\omega}{D_1} A \sin\frac{\omega}{c}x + \frac{a}{b}\,\frac{\omega}{d}x\right)\cos\omega t + \frac{\omega}{D_1} B \sin\frac{\omega}{c}x \sin\omega t\right].$$

$\left[v_y\right]_{y=0} = 0$, dus:

$$v_y = -\frac{b}{a}\hat{\theta}\left[\left(\frac{\omega}{D_1} A \sin\frac{\omega}{c}x + \frac{a}{b}\,\frac{\omega}{d}x\right)\cos\omega t + \frac{\omega}{D_1} B \sin\frac{\omega}{c}x \sin\omega t\right] y$$

$$-\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{b}{a}\hat{\theta}\omega^2\left[-\left(\frac{A}{D_1}\sin\frac{\omega}{c}x + \frac{a}{b}\,\frac{x}{d}\right)\sin\omega t + \right.$$

$$\left. + \frac{B}{D_1}\sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right] y$$

$$p = \rho\frac{b}{a}\hat{\theta}\omega^2\left\{\left[-\left(\frac{A}{D_1}\sin\frac{\omega}{c}x + \frac{a}{b}\,\frac{x}{d}\right)\sin\omega t + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{B}{D_1}\sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right]\frac{y^2}{2} + C_2(x,t)\right\}$$

Voor $y = b$ wordt de druk gegeven door (22'):

$$\left[\left(h - \frac{h^2}{2D_1}\right) A \sin\frac{\omega}{c}x + hx\right]\sin\omega t - \left(h - \frac{h^2}{2D_1}\right) B \sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t =$$

$$-\frac{b^2}{2}\left(\frac{A}{D_1}\sin\frac{\omega}{c}x + \frac{a}{b}\,\frac{x}{d}\right)\sin\omega t + \frac{b^2}{2}\,\frac{B}{D_1}\sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t + C_2(x,t),$$

waaruit $C_2(x,t)$ op te lossen.

$$p = \rho\frac{b}{a}\hat{\theta}\omega^2\left\{\left[\left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{2D_1}\right) A \sin\frac{\omega}{c}x + \left(h + \frac{ab}{2d}\right)x - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{y^2}{2}\left(\frac{A}{D_1}\sin\frac{\omega}{c}x + \frac{a}{b}\,\frac{x}{d}\right)\right]\sin\omega t - \left(h - \frac{h^2}{2D_1} + \frac{b^2}{2D_1} - \frac{y^2}{2D_1}\right) B \sin\frac{\omega}{c}x\cos\omega t\right\}$$

$$p = \rho \frac{b}{a} \hat{\theta} \omega^2 \left[\left\{ \frac{b^2 - y^2}{2} \left(\frac{A}{D_1} \sin \frac{\omega}{c} x + \frac{a}{bd} x \right) + \left(h - \frac{h^2}{2D_1} \right) A \sin \frac{\omega}{c} x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + h x \right\} \sin \omega t - \left\{ \frac{b^2 - y^2}{2} \frac{B}{D_1} \sin \frac{\omega}{c} x + \left(h - \frac{h^2}{2D_1} \right) B \sin \frac{\omega}{c} x \right\} \cos \omega t \right]$$

De kracht K per lengte-eenheid t.g.v. de versnellingen bedraagt:

$$K = \int_{-b}^{b} p \, dx$$

$$K = 2b\rho \frac{b}{a} \hat{\theta} \omega^2 \left[\left\{ \left(\frac{b^2}{3D_1} - \frac{h^2}{2D_1} + h \right) A \sin \frac{\omega}{c} x + \left(\frac{ab}{3d} + h \right) x \right\} \sin \omega t - \right.$$

$$\left. - \left(\frac{b^2}{3D_1} - \frac{h^2}{2D_1} + h \right) B \sin \frac{\omega}{c} x \cos \omega t \right]$$

Uit de antimetrie volgt dat er bij het stampen geen resulterende dompkracht is. Dit geldt ook voor de hydrostatische drukken. Uit de theorie volgt dus dat er geen koppeling is tussen stampen en dompen. Ook geldt de tweede opmerking op blz. 42

Het moment t.g.v. de hydrodynamische drukken M_v wordt gegeven door:

$$M_v = \int_{-l}^{l} K x \, dx = 2 \int_{0}^{l} K x \, dx$$

$$M_V = 4b\rho\,\frac{b}{a}\hat{\theta}\omega^2\Big[\Big\{\Big(\frac{b^2}{3D_1}-\frac{h^2}{2D_1}+h\Big)A\frac{c^2}{\omega^2}\Big(-\frac{\omega}{c}l\cos\frac{\omega}{c}l+\sin\frac{\omega}{c}l\Big)+$$

$$+\Big(\frac{ab}{3d}+h\Big)\frac{l^3}{3}\Big\}\sin\omega t-\Big(\frac{b^2}{3D_1}-\frac{h^2}{2D_1}+h\Big)B\frac{c^2}{\omega^2}\Big(-\frac{\omega}{c}l\cos\frac{\omega}{c}l+\sin\frac{\omega}{c}l\Big)\cos\omega t\Big]$$

met $\frac{\mathcal{J}_0}{F} = i^2 = \frac{l^2}{3}$ en (20'):

$$\boxed{M_V = \rho\frac{b}{a}\hat{\theta}\omega^2\mathcal{J}_0\Big[\Big\{\Big(h+\frac{ab}{3d}\Big)-\Big(\frac{b^2}{3D_1}-\frac{h^2}{2D_1}+h\Big)\Big(1-\alpha_s\Big)\Big\}\sin\omega t + 3\Big(\frac{b^2}{3D_1}-\frac{h^2}{2D_1}+h\Big)\frac{c}{c_0}\frac{\Big(\frac{\beta\hat{w}}{l\frac{b}{a}\hat{\theta}}\Big)^2}{\frac{\omega l}{c}}\cos\omega t\Big]}$$

(23')

8. Formule voor de coëfficient β.
Bepaling als bij dompen.

Uit-fase component van het totale moment $M_s + M_V$, volgens (21') en (23'):

$$M_{u.f.} = \rho\frac{b}{a}F\hat{\theta}\frac{c}{\omega}\Big[gB\Big(\frac{\sin\frac{\omega}{c}l}{\frac{\omega}{c}l}-\cos\frac{\omega}{c}l\Big)+\omega^2 l\frac{c}{c_0}\Big(\frac{b^2}{3D_1}-\frac{h^2}{2D_1}+h\Big)\Big(\beta\frac{\hat{w}}{l\frac{b}{a}\hat{\theta}}\Big)^2\Big]\cos\omega t$$

$$M_{u.f.} = \rho\frac{b}{a}F\hat{\theta}\frac{c}{\omega}l\frac{c}{c_0}\Big[-g+\omega^2\Big(\frac{b^2}{3D_1}-\frac{h^2}{2D_1}+h\Big)\Big]\Big(\frac{\beta\hat{w}}{l\frac{b}{a}\hat{\theta}}\Big)^2\cos\omega t$$

Uit het energieverlies t.g.v. straling van golven werd gevonden:

$$(8'):\quad M_{u.f.} = -\frac{2\rho g c_0 b_k}{\hat{\theta}\omega}\,\hat{w}^2\left(1-\frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2\right)\cos\omega t.$$

Stelt men deze twee momenten gelijk dan vindt men:

$$\left(\frac{c_0}{c}\right)^2\frac{a+b}{a}\left(1-\frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2\right) = \left(1-\frac{\omega^2}{g}\left(h+\frac{b^2}{3D_1}-\frac{h^2}{2D_1}\right)\right)\beta^2$$

$$\boxed{\beta = \frac{c_0}{c}\sqrt{\left(1+\frac{b}{a}\right)\frac{1-\frac{1}{2}\frac{D}{g}\omega^2}{1-\frac{h+\frac{b^2}{3D_1}-\frac{h^2}{2D_1}}{g}\omega^2}}}\qquad (24')$$

Zoals te verwachten was is dit dezelfde formule als bij dompen (24).

9. De coëfficienten a_s, b_s en c_s van de stampvergelijking.

Deze coëfficienten worden bepaald met de drie formules (4').

Virtueel massatraagheidsmoment a_s

Voor a_s geldt:

$$a_s \ddot{\theta} = -(M_v)_{\text{in-fase comp.}}$$

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \hat{\theta} \sin \omega t .$$

met (23'):

$$a_s = J_m + \rho J_o b \left[\left(\frac{h}{a} + \frac{b}{3d} \right) - \left(\frac{h}{a} + \frac{\frac{b^2}{3} - \frac{h^2}{2}}{a D_1} \right) (1 - \alpha_s) \right]$$

Definieer de dimensieloze coefficient μ_s : $\mu_s = \frac{a_s}{J_m}$

$$\boxed{\mu_s = 1 + \rho \frac{J_o}{J_m} b \left[\left(\frac{h}{a} + \frac{b}{3d} \right) - \left(\frac{h}{a} + \frac{\frac{b^2}{3} - \frac{h^2}{2}}{a D_1} \right) (1 - \alpha_s) \right]} \quad (25')$$

Dempingscoefficient b_s

$$b_s \dot{\theta} = -(M_v + M_s)_{\text{uit-fase comp.}}$$

$$\dot{\theta} = \hat{\theta} \omega \cos \omega t .$$

met (21') en (23'):

$$\boxed{b_s = \frac{c}{c_o} \frac{\rho g F}{\omega^2} \frac{b}{a} c l \left(1 - \frac{h + \frac{b^2}{3D_1} - \frac{h^2}{2D_1}}{g} \omega^2 \right) \left(\frac{\beta \hat{W}}{\frac{b}{a} \hat{\theta} l} \right)^2} \quad (26')$$

Hydrostatische coefficient c_s

$$c_s \theta = -(M_s)_{\text{in-fase comp.}} , \quad \theta = \hat{\theta} \sin \omega t$$

$$\boxed{c_s = \rho g J_o \left(1 + \alpha_s \frac{b}{a} \right)} \quad (27')$$

Ook bij het berekenen van de coefficienten van de stampvergelijking is gebruik gemaakt van een benaderingsformule voor de golf-amplitude $\hat{w}$ in het kanaal:

In (19') is t_1 te schrijven als:

$$t_1 = \left(\frac{\left(\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{c_0}} \, tg \frac{\omega}{c} l \right)^2}{\frac{p \, tg \frac{\omega}{c} l}{\frac{c}{D_1} l} - 1} \right)^2 + \frac{\beta^4}{\left(\frac{p \, tg \frac{\omega}{c} l}{\frac{c}{D_1} l} - 1 \right)^2} - \frac{2\beta^2 \left(\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{c_0}} \, tg \frac{\omega}{c} l \right)^2}{\left(\frac{p \, tg \frac{\omega}{c} l}{\frac{c}{D_1} l} - 1 \right)^2} +$$

$$+ \frac{4\beta^2 \left(\beta \frac{c}{c_0} \, tg \frac{\omega}{c} l \right)^2}{\frac{tg \frac{\omega}{c} l}{\frac{\omega}{c} l} - 1} .$$

Stel hierin: $\beta \frac{c}{c_0} \approx \frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{c_0}}$, $\frac{p}{\frac{c}{D_1} l} \approx \frac{1}{\frac{\omega}{c} l}$

dan is $t_1 = \left[\frac{\left(\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{c_0}} \, tg \frac{\omega}{c} l \right)^2 + \beta^2}{\frac{p \, tg \frac{\omega}{c} l}{\frac{c}{D_1} l} - 1} \right]^2$, (19') wordt hiermee

een volledig kwadraat waaruit volgt:

$$\hat{w} \approx \frac{\left| \left[1 - bh \left(\frac{b}{3h} + \frac{h}{2b} + \frac{d}{a} \right) \frac{\omega^2}{c^2} \right] \frac{tg \frac{\omega}{c} l}{\frac{\omega}{c} l} - 1 \right|}{\sqrt{\beta^2 + \left(\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{c}{c_0}} \, tg \frac{\omega}{c} l \right)^2}} \frac{b}{a} \hat{\theta} l \qquad (28')$$

Voor de afwijkingen geldt hetzelfde als voor (28).

6. Meetresultaten van de excitatieproeven.

Afmetingen van kanaal en schip.

kanaalbreedte	$b_k = 50$ cm
water diepte	$D = 15,9$ cm
diepgang schip	$h = 12,9$ cm
breedte schip	$2b = 32,25$ cm
aequivalente $\frac{1}{2}$ scheepslengte	$l = \frac{F}{4b} = \frac{5716}{2.32,25} = 89$ cm
eigen frequentie schip (zowel dompen als stampen)	$\omega_e \approx 6$ sec^{-1}.

Dompen, dompamplitude $\hat{z} = 0,5$ cm

ω	K_u (N)		golf t.p.v. midden schip		golf t.p.v. 0.58 m uit midden		golf t.p.v. steven	
(sec^{-1})	in-fase amplitude	uit-fase amplitude	$\hat{\eta}$ (cm)	κ (rad)	$\hat{\eta}$	κ	$\hat{\eta} = \hat{w}$	κ
1,05	26,5	8,7	0,25	$-0,55\pi$	0,25	$-0,50\pi$	0,20	$-0,30\pi$
1,26	23,7	24,0	0,45	$-0,55\pi$	0,35	$-0,45\pi$	0,30	$-0,30\pi$
1,58	28,6	26,0	0,65	$-0,55\pi$	0,55	$-0,50\pi$	0,45	$-0,25\pi$
2,09	32,6	39,9	1,10	$-0,50\pi$	0,85	$-0,40\pi$	0,60	$-0,10\pi$
2,51	52,5	50,0	1,60	$-0,40\pi$	1,05	$-0,30\pi$	0,75	$+0,10\pi$
3,14	72,7	27,1	1,90	$-0,25\pi$	1,15	$-0,15\pi$	0,60	$+0,25\pi$
3,72	65,2	9,2	1,80	$-0,10\pi$	0,95	$-0,05\pi$	0,35	$+0,50\pi$
4,52	–	–	1,65	0	0,70	0	0,10	$+0,65\pi$
5,71	–	–	1,45	$+0,15\pi$	0,60	$-0,20\pi$	0,25	$+0,10\pi$
6,61	–	–	0,95	$+0,30\pi$	0,95	$-0,05\pi$	0,30	$+0,40\pi$
7,66	–	–	0,50	$+0,10\pi$	1,10	0	0,15	$+0,50\pi$

Stampen, stampamplitude $\hat{\theta} = 0{,}01$

ω	M_u (Nm)		golf t.p.v. midden schip		golf 0,58 m uit midden		golf t.p.v. steven	
(sec^{-1})	in-fase amplitude	uit-fase amplitude	$\hat{\eta}$ (cm)	κ	$\hat{\eta}$	κ	$\hat{\eta} = \hat{w}$	κ
1,05	14,6	2,5	0	–	0,15	$-0{,}70\pi$	0,15	$-0{,}55\pi$
1,25	12,6	2,3	0	–	0,20	$-0{,}65\pi$	0,20	$-0{,}50\pi$
1,57	12,4	4,8	0	–	0,25	$-0{,}70\pi$	0,35	$-0{,}50\pi$
2,09	11,9	6,6	0,10	$-0{,}6\pi$	0,35	$-0{,}60\pi$	0,35	$-0{,}35\pi$
2,52	11,2	8,8	0,15	$-0{,}3\pi$	0,45	$-0{,}55\pi$	0,50	$-0{,}30\pi$
3,14	11,1	13,5	0,15	$-0{,}2\pi$	0,70	$-0{,}60\pi$	0,65	$-0{,}20\pi$
3,71	13,8	18,1	0,20	0	1,00	$-0{,}55\pi$	0,85	$-0{,}05\pi$
4,51	–	–	0,20	$+0{,}2\pi$	1,60	$-0{,}35\pi$	1,00	$+0{,}20\pi$
5,76	–	–	0,20	$+0{,}6\pi$	1,50	$-0{,}85\pi$	0,40	$+0{,}50\pi$
7,56	–	–	0,25	$+1{,}2\pi$	1,00	$-0{,}10\pi$	0,50	$+0{,}30\pi$

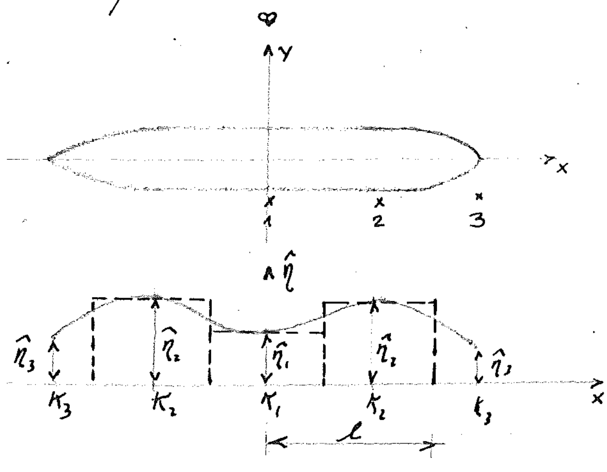
De golf ter plaatse van het midden van het schip bleek meestal niet sinusvormig te zijn, zodat de aangegeven fasehoeken niet veel zin hebben.

Voor grafieken zie blz. 75 e.v.

7. Berekening van de coefficiënten in domp- en stampvergelijking uit metingen.

De berekening vindt plaats met de formules (4) en (4'). De in-fase component van de (het) hydrostatische kracht (moment) wordt, ter bepaling van de coefficiënten $a_{d(s)}$ en $c_{d(s)}$, berekend uit de golfamplituden en -fasen. De nauwkeurigheid van deze berekening is niet groot, er is op te weinig plaatsen de golf opgemeten. Bovendien zal blijken dat K_u en K_s van dezelfde orde van grootte zijn, zodat de, uit het verschil van beide, berekende K_v een nog grotere (relatieve) onnauwkeurigheid bezit. Hetzelfde geldt voor M_u, M_s en M_v.
Omdat in de theorie uitgegaan is van een symmetrisch schip, is de asymmetrie t.o.v. het yoz-vlak verwaarloosd.

Dompen.



In de figuur zijn de plaatsen aangegeven waar de golf gemeten is: $\hat{\eta}_1$, $\hat{\eta}_2$, $\hat{\eta}_3$
K_1, K_2, K_3

Omdat de scheepsbreedte ter plaatse van meetpunt 3 gelijk aan nul is, wordt dit punt niet in de berekening opgenomen. Als gemiddelde in-fase component van de golfhoogten wordt aangehouden:

$$(\hat{\eta}\cos\kappa)_{gem.} = \frac{\hat{\eta}_1\cos\kappa_1 + 2\,\hat{\eta}_2\cos\kappa_2}{3}$$

$$(K_s)_{in\text{-}fase\ comp.} = \rho g F\left[(\hat{\eta}\cos\kappa)_{gem.} + \hat{z}\right]\sin\omega t$$
$$= \rho g F\,\hat{z}\left(1+\frac{b}{a}\alpha_d\right)\sin\omega t = c_d\,\hat{z}\sin\omega t$$

dus: $\dfrac{c_d}{\rho g F} = 1 + \dfrac{b}{a}\alpha_d = 1 + \dfrac{(\hat{\eta}\cos\kappa)_{gem}}{\hat{z}}$

(4): $a_d\,\ddot{z} = m\ddot{z} - (K_v)_{in\text{-}fase.comp.} = (K_u + K_s)_{in\text{-}fase\ comp.}$

$$\mu_d = \frac{a_d}{m} = \frac{(K_u + K_s)_{in\text{-}fase\ comp.}}{m\ddot{z}}$$

$$b_d = -\frac{(K_u)_{uit\text{-}fase\ comp.}}{\dot{z}}$$

dimensieloos: $\nu_d = \dfrac{b_d}{\frac{\rho g F l}{c_0}} = -\dfrac{c_0}{\rho g F l}\dfrac{(K_u)_{uit\text{-}fase\ comp.}}{\dot{z}}$

ω (sec^{-1})	$\hat{\eta}_1$ (cm)	$\cos K_1$	$2\hat{\eta}_2$ (cm)	$\cos K_2$	$(\hat{\eta}\cos K)_{gem}$ (cm)	$\rho g F((\hat{\eta}\cos K)_{gem}+\bar{z})$ (N)	μ_d	ν_d	$1+\frac{b}{a}\alpha_d$
1,05	0,25	-0,22	0,50	0	-0,02	27,5	2,77	0,42	0,96
1,26	0,45	-0,22	0,70	0	-0,03	26,6	5,57	0,96	0,93
1,58	0,65	-0,22	1,10	0,06	-0,03	27,2	-1,71	0,83	0,95
2,09	1,10	-0,06	1,70	0,31	+0,15	37,2	3,21	0,96	1,30
2,51	1,60	0,37	2,10	0,59	+0,61	63,5	5,23	0,99	2,22
3,14	1,90	0,75	2,30	0,91	+1,17	96	7,20	0,43	3,36
3,72	1,80	0,94	1,90	0,98	+1,20	97	7,35	0,13	3,39

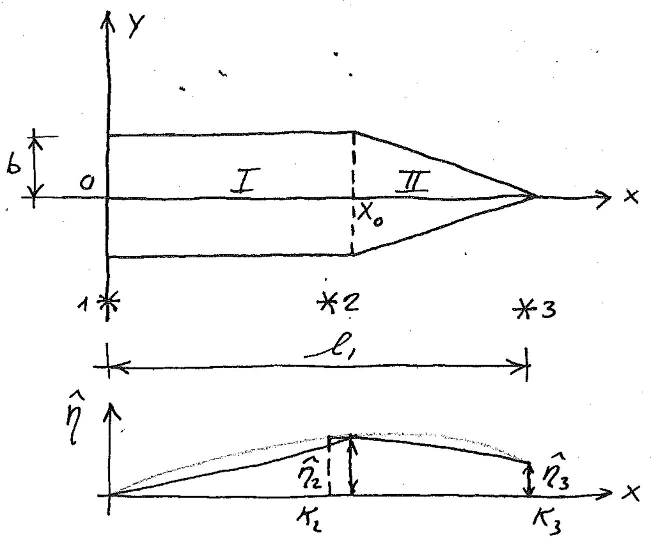
De spreiding in de waarden voor de virtuele massa-coefficient μ_d blijkt groot te zijn. Omdat in dit geval de verandering van μ_d met de hoeksnelheid ω niet sterk is, volgens de theorie, heeft het zin om een gemiddelde waarde van bovenstaande massacoefficienten te berekenen en te vergelijken met de theoretisch berekende. De nauwkeurigheid van deze gemiddelde waarde is groter dan van de afzonderlijke waarden.

$$(\mu_d)_{gem.} = \frac{2{,}77+5{,}57-1{,}71+3{,}21+5{,}23+7{,}20+7{,}35}{7}$$

$$= 4{,}22$$

Stampen.

Bij het stampen is het nog lastiger om met de enkele meetpunten het hydrostatisch moment te bepalen. De scheepsdoorsnede t.p.v. de waterlijn is vervangen gedacht door een rechthoek en twee driehoeken met hetzelfde oppervlak als de oorspronkelijke doorsnede, zie figuur.



$$X_0 + \tfrac{1}{2}(\ell_1 - X_0) = \ell$$

$$X_0 + \tfrac{1}{2}(113 - X_0) = 89$$

$$X_0 = 64 \text{ cm.}$$

De verschillen tussen meetpunt 2 en 3 zijn niet groot, daarom zijn voor de golfamplitude en -fase t.p.v. $x_0 = 64$ cm die van meetpunt 2 ($x = 58$ cm) aangehouden.

$$M_s = 2\int_0^{\ell} \rho g \cdot 2b\, x\, \eta(x,t)\, dx$$ De in-fase amplitude

$\hat{M}$ is: $$\hat{M} = 2\rho g \int_0^{\ell} 2b\, x\, \hat{\eta} \cos K\, dx$$

$$\hat{M} = \rho g J_0 \hat{\theta} + \hat{M}_I + \hat{M}_{II}$$

$$\hat{M}_I = 4 b \rho g \int_0^{x_0} x \cdot \frac{x}{x_0} \, \hat{\eta}_2 \cos \kappa_2 \, dx = \frac{4}{3} b \rho g \, x_0^2 \, \hat{\eta}_2 \cos \kappa_2$$

$$\hat{M}_{II} = 4 \rho g \int_0^{l_1 - x_0} \frac{\hat{\eta}_2 \cos \kappa_2 + \hat{\eta}_3 \cos \kappa_3}{2} (x' + x_0) \, b \left(1 - \frac{x'}{l_1 - x_0}\right) dx$$

uitgewerkt:

$$\hat{M}_{II} = \frac{2}{3} \rho g b \left(\hat{\eta}_2 \cos \kappa_2 + \hat{\eta}_1 \cos \kappa_1\right)\left(l_1 - x_0\right)\left(\tfrac{1}{2} l_1 + x_0\right)$$

Invullen van de numerieke waarden levert:

$$\hat{M} = 17{,}8 + 29{,}7 \, \hat{\eta}_2 \cos \kappa_2 + 12{,}4 \, \hat{\eta}_3 \cos \kappa_3$$

($\hat{\eta}_{2,3}$ in cm geeft $\hat{M}$ in Nm)

De berekening van de coefficienten a_s, b_s, c_s verloopt als bij dompen, er wordt gebruik gemaakt van de formules (4').

$$\mu_s = \frac{a_s}{m} = \frac{(M_u)\text{ in-fase comp.} - \hat{M} \sin \omega t}{J_m \ddot{\theta}}$$

$$\nu_s = \frac{b_s}{\frac{\rho g J_0 l}{c_0}} = - \frac{c_0}{\rho g J_0 l} \; \frac{(M_u)\text{ uit-fase component}}{\dot{\theta}}$$

$$1 + \frac{b}{a} \alpha_s = \frac{c_s}{\rho g J_0} = \frac{\hat{M}}{\rho g J_0 \hat{\theta}}$$

ω (sec^{-1})	$\hat{\eta}_2 \cos \kappa_2$ (cm)	$\hat{\eta}_3 \cos \kappa_3$ (cm)	$\hat{M}$ (Nm)	μ_s	V_s	$1+\frac{b}{a}\alpha_s$
1,05	-0,09	-0,03	14,7	0	0,19	0,83
1,25	-0,08	-0,02	15,1	8	0,15	0,85
1,57	-0,15	0	13,3	2	0,24	0,75
2.09	-0,10	+0,15	16,7	5,5	0,25	0,94
2,52	-0,05	+0,30	20,0	7	0,28	1,13
3,14	-0,19	+0,52	18,6	4.5	0,34	1,05
3,71	-0,12	+0,84	24.6	4	0,37	1,38

Ook hier blijkt met name de bepaling van μ_s onnauwkeurig te zijn. De gemiddelde waarde is hier:

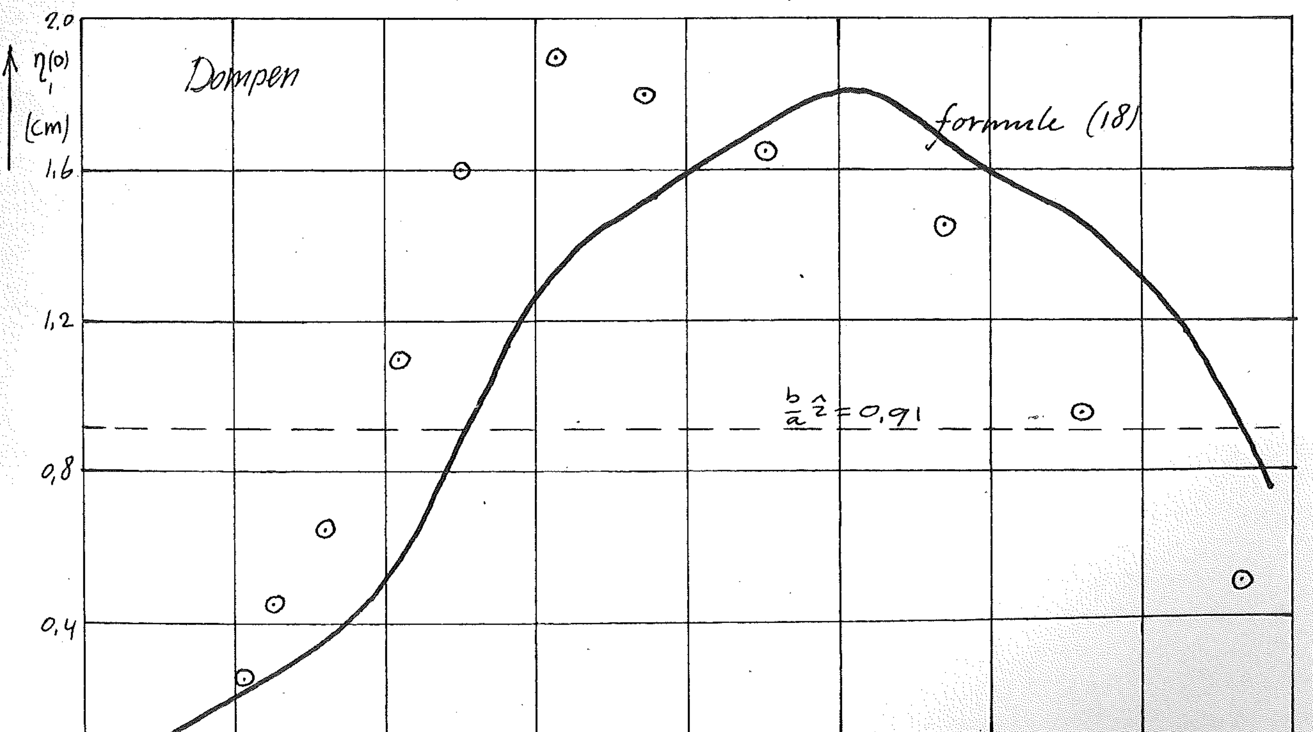
$$(\mu_s)_{gem.} = \frac{8+2+5,5+7+4,5+4}{7} = 4.5$$

8. Grafieken.

Voor het dompen werden de gemeten, of uit metingen bepaalde, waarden voor $\eta_1(0)$, $K(0)$, $\hat{w}$, μ_d, ν_d en $1+\frac{b}{a}\alpha_d$ met formules gecontroleerd. Deze berekening is uitgevoerd voor hoekfrequenties liggend tussen 0 en de eigenfrequentie van het schip. Bij niet-harmonische scheepsbewegingen blijkt n.l. dit gebied van belang te zijn.

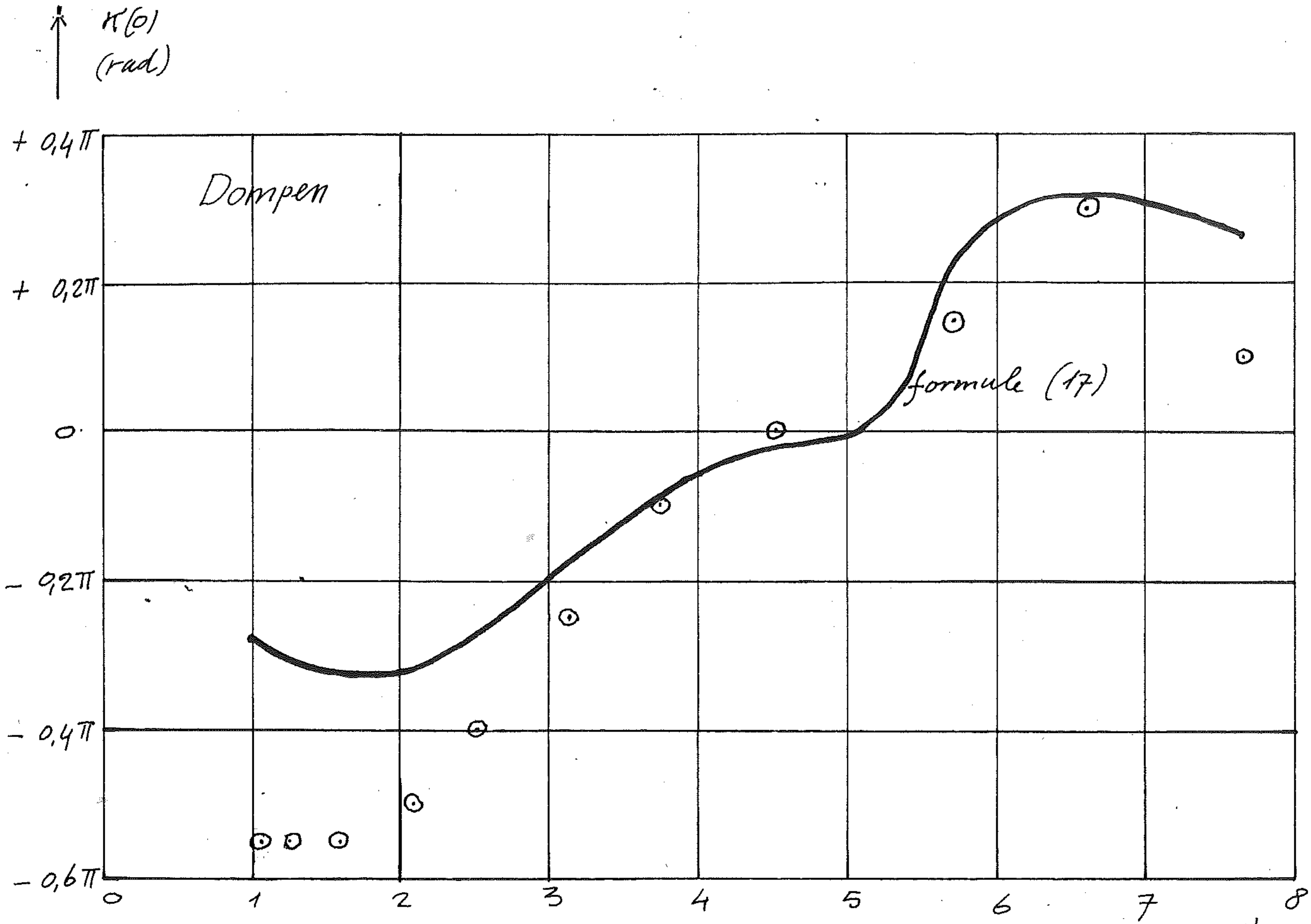
Voor het stampen zijn de waarden voor $\hat{w}$, μ_s, ν_s en $1+\frac{b}{a}\alpha_s$ met formules gecontroleerd.

De resultaten zijn weergegeven in grafieken.

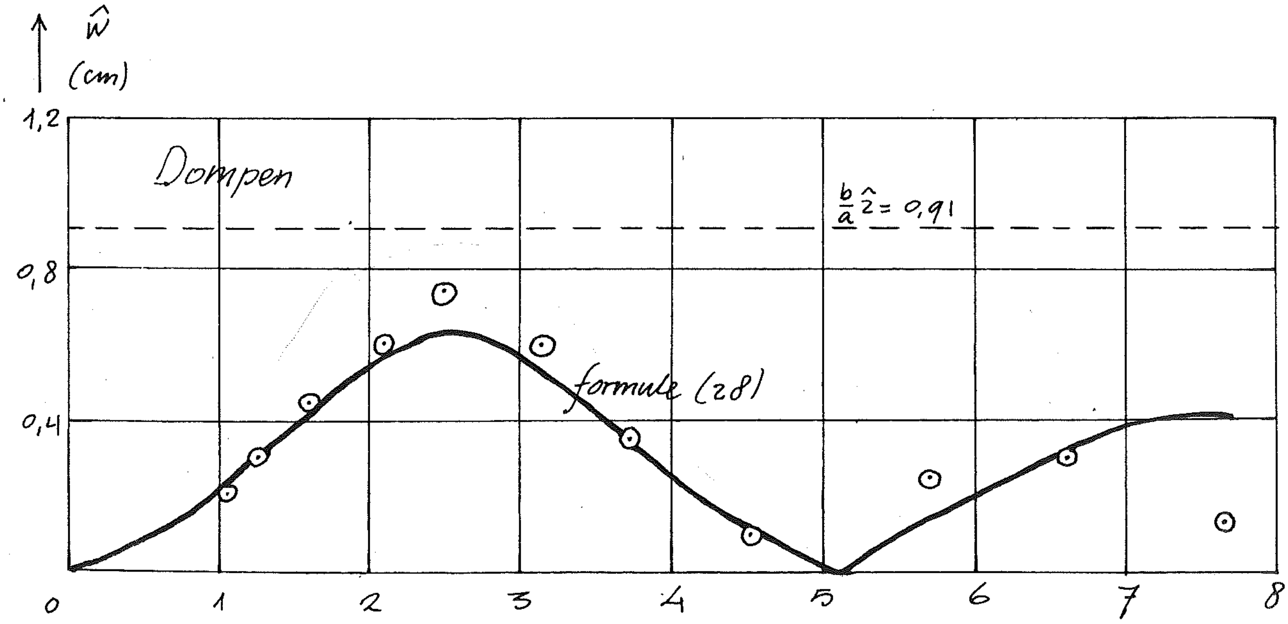


I. Golfamplitude t.p.v. scheepsmidden

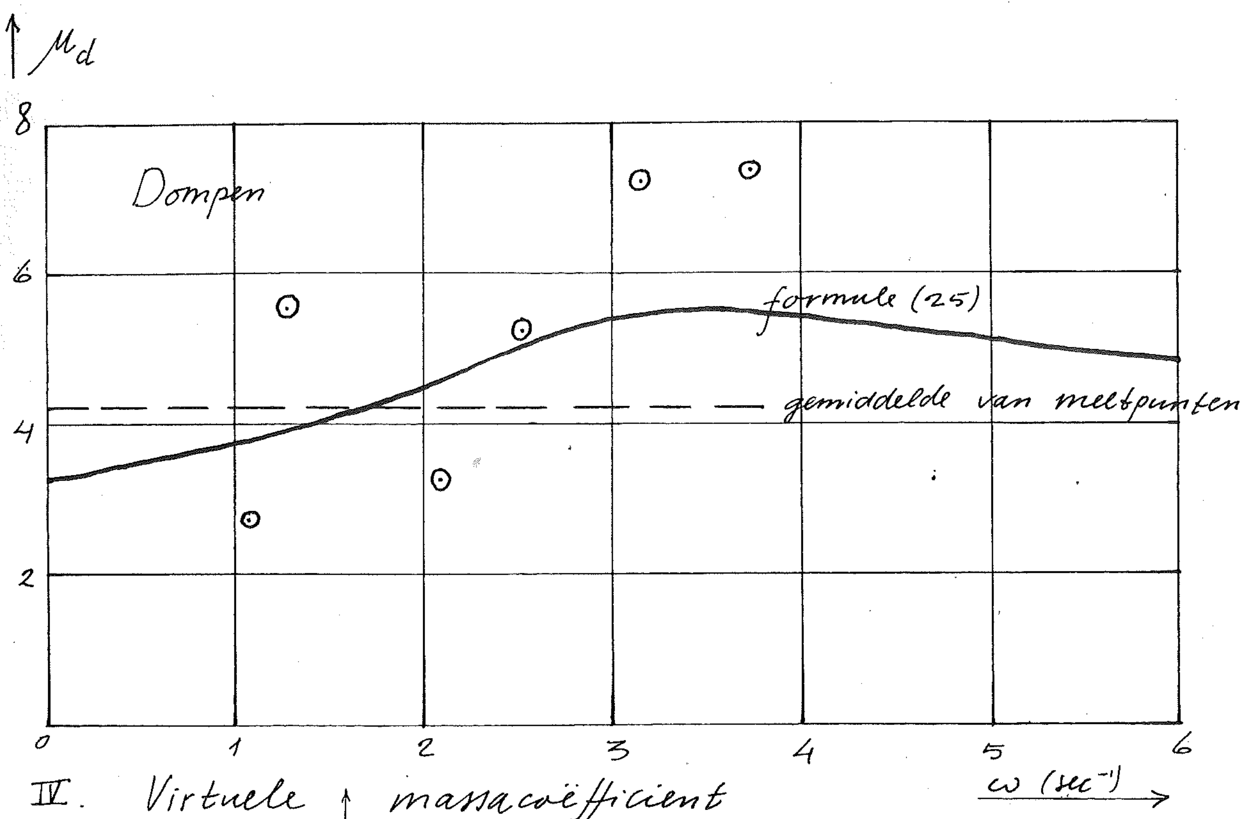
⊙ meetpunt.



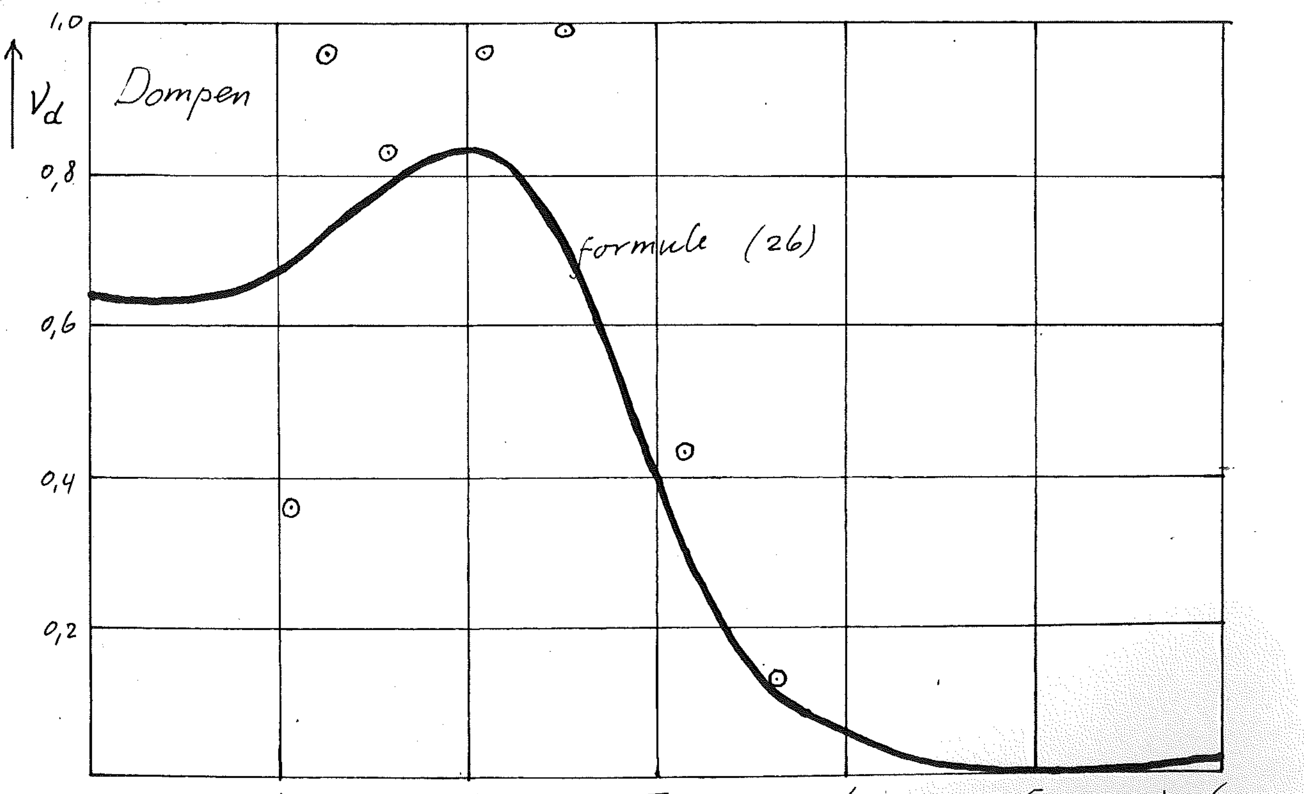
II. Fasehoek t.p.v. scheepsmidden.



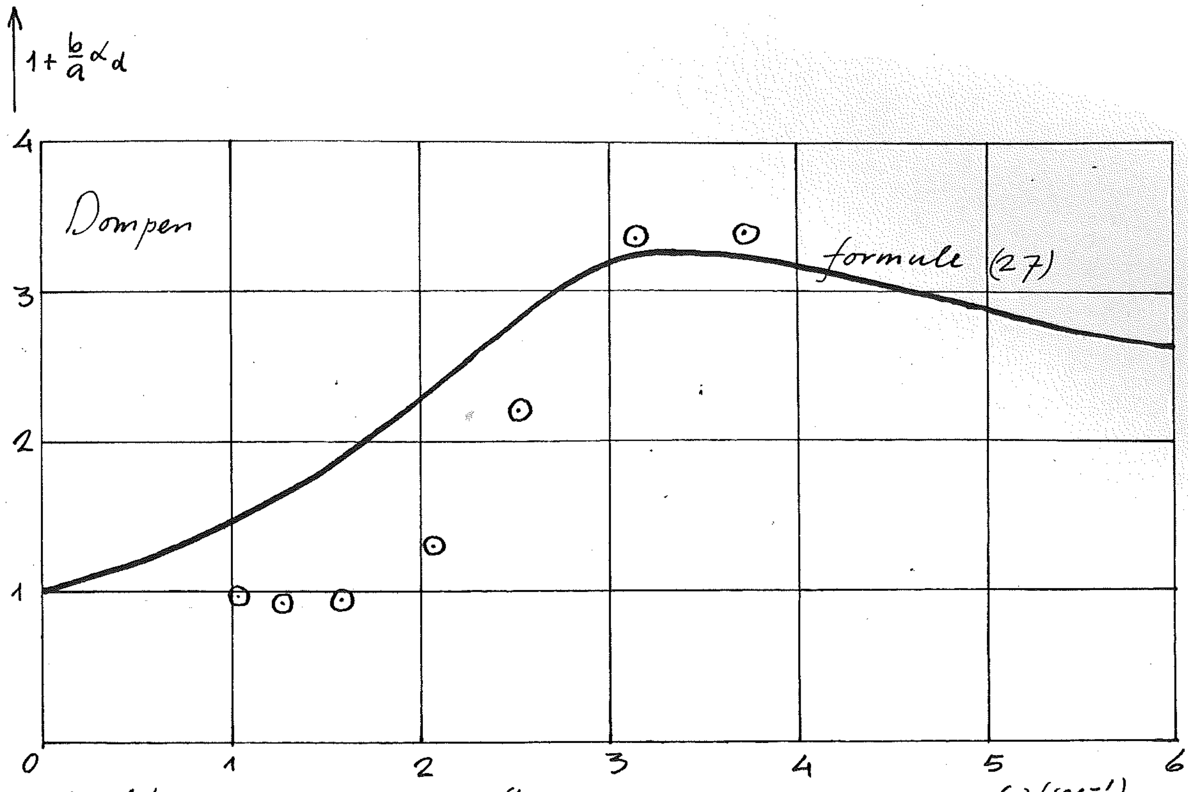
III. Golfamplitude in het kanaal.



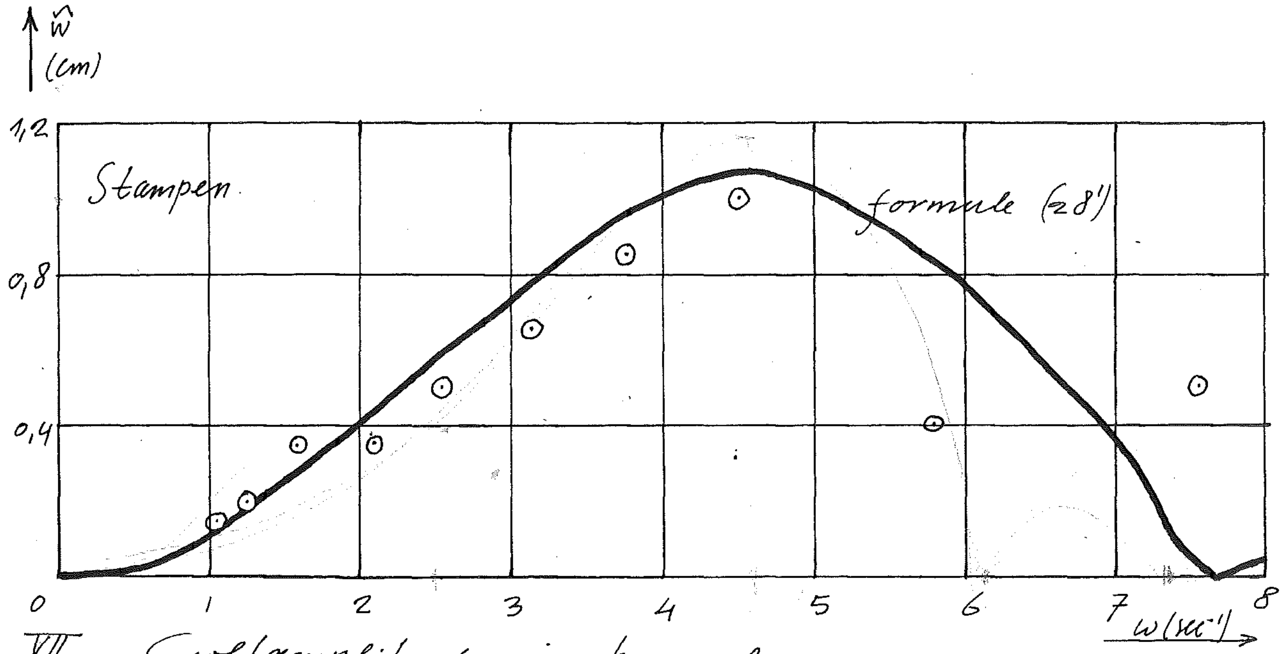
IV. Virtuele massacoëfficient



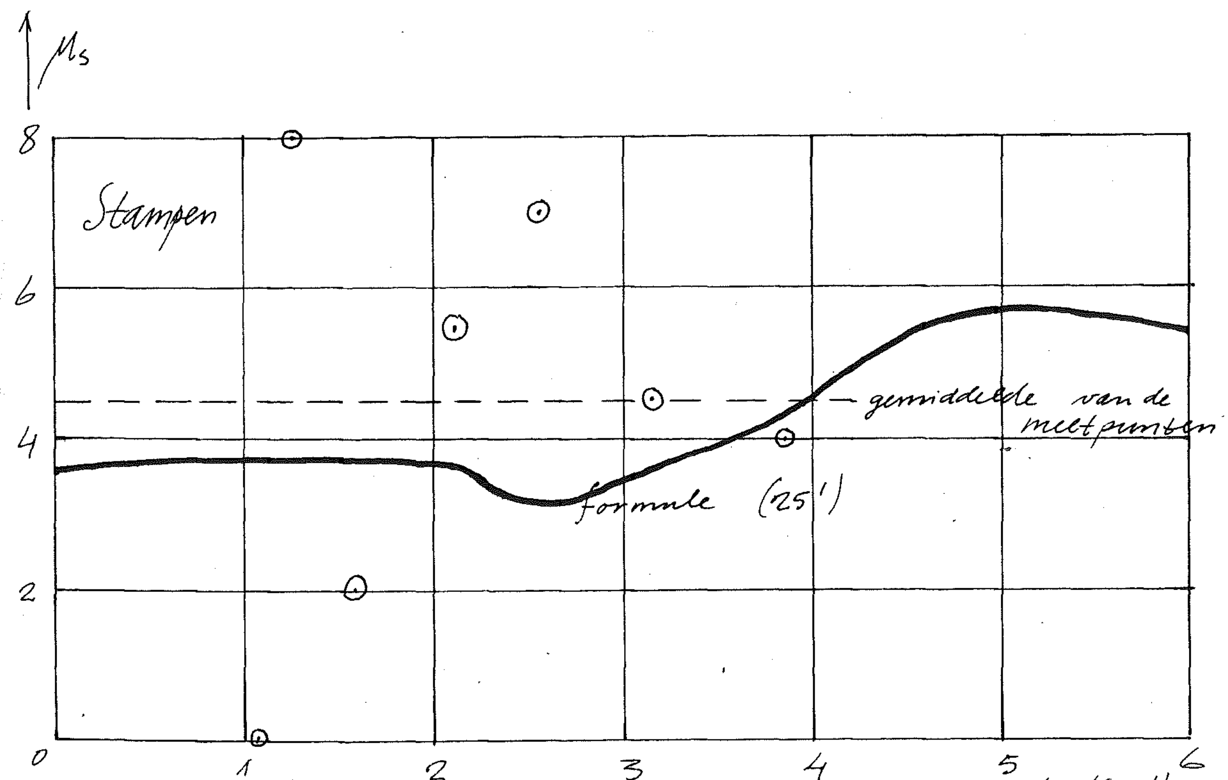
V. Dempingscoëfficient dompen.



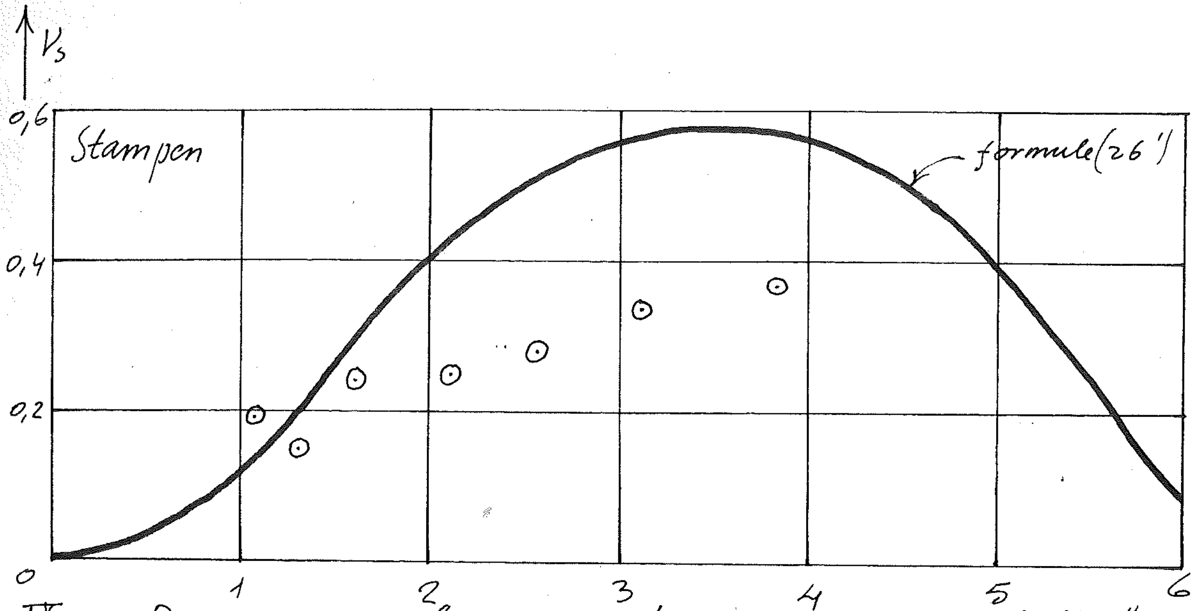
VI. Hydrostatische coëfficiënt dompen.



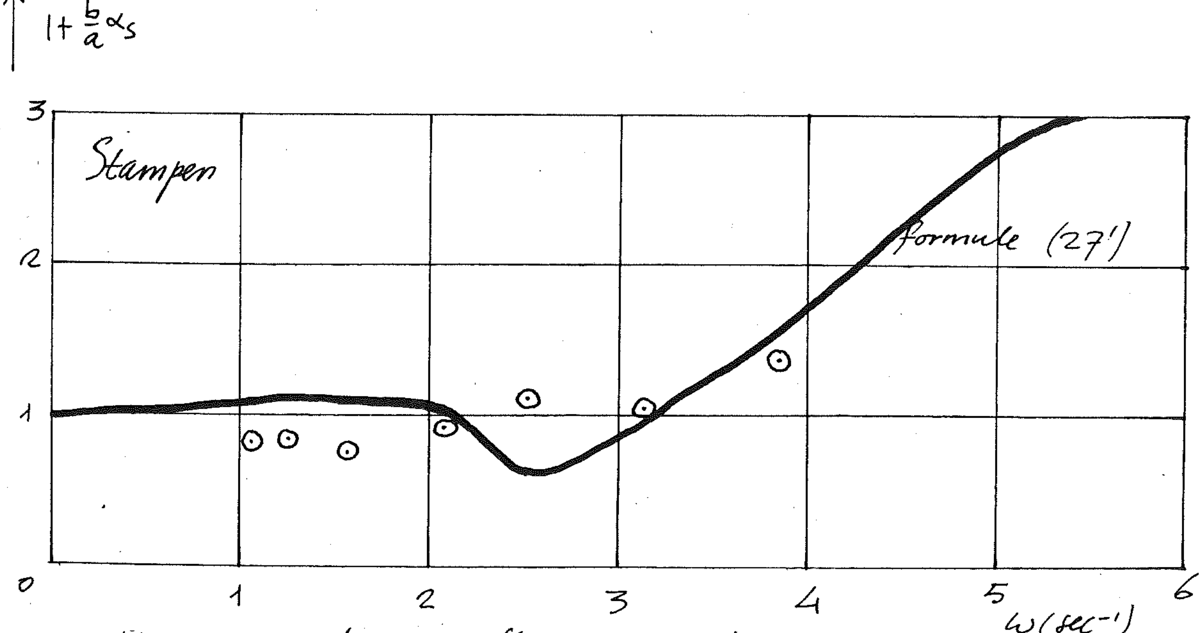
VII. Golfamplitude in kanaal



VIII. Coëfficient virtueel massa traagheidsmoment.



IX. Dempingscoëfficient stampen.



X. Hydrostatische coëfficient stampen.

9. Vergelijking tussen meting en theorie
In de theorie maar ook in de metingen kunnen afwijkingen ontstaan t.o.v. het geschematiseerde geval dompend of stampend schip in een oneindig lang kanaal.

In de theorie kunnen fouten oorzaken zijn:
1. Het niet geheel voldoen aan de veronderstellingen 1,3,4 op blz. 5
Vooral voor de stroomsnelheid zullen afwijkingen in dwarsrichting ontstaan.
2. Het rekenen aan een sterk geschematiseerde scheepsvorm
3. Voor grotere hoekfrequenties kunnen niet-lineaire effecten, zoals kwadratische versnellingstermen en viscositeit een rol spelen
4. Zowel bij dompen als stampen is als vierde randvoorwaarde genomen dat de golffasen bij de stevens zonder knik over gaan in die van de lopende golf in het kanaal.

Dit gaat bij benadering op voor kleine holkfrequenties; zodat bij toenemende ω steeds grotere afwijkingen zullen optreden.
5. Voor de traagheidskracht K_v werd in de bewegingsvergelijking een benaderende veronderstelling gedaan die na berekening van K_v niet bleek op te gaan. Hetzelfde geldt voor het moment M_v bij het stampen.

In de metingen kunnen fouten ontstaan zijn doordat gemeten is in een goot van eindige lengte. Hoewel gebruik gemaakt is van zgn. „strandjes" om de reflecties tegen de eindwanden van de goot tegen te gaan kan hierdoor toch het golfbeeld verstoord zijn. Het was niet steeds mogelijk de meting te verrichten voordat de teruggekaatste golf het schip bereikte. Door inspeelverschijnselen kon pas na ± 1 periode begonnen worden met meten, bovendien is voor het meten van de krachten ook een gehele periode nodig. Gevolg hiervan is dat de metingen met holksnelheden < ca. 2 sec^{-1} beïnvloed kunnen zijn door terugkaatsing.

De overeenkomst tussen gemeten en berekende waarden blijkt in sommige gevallen goed, in andere gevallen minder goed te zijn.
De verschillen in grafieken I en II zijn vrij groot; hiermee hangen de afwijkingen in grafiek VI samen.
Omdat zowel bij dompen als stampen de dempingscoefficient evenredig is met het kwadraat van de golfamplitude in het kanaal zijn de afwijkingen in de dempingscoefficienten groter dan die in de golfamplituden $\bar{w}$.
Het grote verschil tussen gemeten en berekende waarden voor V_s (grafiek IX) is hiermee geheel te verklaren: gaat men uit van de gemeten waarden voor $\bar{w}$ dan blijken gemeten en berekende waarden dicht bij elkaar te liggen.

10. Niet-harmonische scheepsbewegingen

Het gedrag van het lineaire systeem, waarvan nu de coëfficiënten in de bewegingsvergelijkingen bekend zijn afhankelijk van de hoekfrequentie ω, onder invloed van een niet-harmonische kracht kan in principe worden berekend met een Fourier-transformatie.

Een meer direkte methode wordt echter verkregen door, evenals bij de harmonische bewegingen, de hydrostatische en hydrodynamische krachten en momenten uit de waterbeweging te berekenen en deze in de bewegingsvergelijkingen op te nemen.

Deze methode kan op eenvoudige wijze worden ingepast in een berekening met differenties van de waterbeweging, zoals die in [1] gegeven wordt.

Met deze berekening kunnen de golfhoogten $\eta(\bar{x},t)$ en snelheden in x-richting $v_x(\bar{x},t)$ worden bepaald.

Op dezelfde wijze als in 5.3 en 5.4 bepalen we nu de hydrodynamische kracht en het hydrodynamische moment. Door controlemetingen is daar aangetoond dat deze berekeningswijze bruikbaar is. Alle vergelijkingen zijn weer gelineariseerd.

Waterbeweging naast schip:

continuiteitsverg.: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} \quad , \quad v_z = -\frac{\partial v_x}{\partial x} z + C_1(x,t)$$

voor $z = h + \eta \approx h$ is $v_z = \frac{\partial \eta}{\partial t}$, waaruit:

$$C_1(x,t) = \frac{\partial v_x}{\partial x} h + \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$$v_z(x,z,t) = (h-z)\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

bewegingsverg.: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial v_z}{\partial t}$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = -(h-z)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad , \quad \frac{1}{\rho} p = \frac{(h-z)^2}{2}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} z + C_2(x,t)$$

voor $z = h + \eta \approx h$ is $p = 0$, dus

$$C_2(x,t) = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} h$$

de druk t.p.v. de bodem is:

$$p(x,0,t) = \rho\left[\frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} + h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right] \qquad (a)$$

Waterbeweging onder schip:

continuiteitsverg.: $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\dot{\theta} x}{d} + \frac{\dot{z}}{d} = 0$

(stampen en dompen)

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\dot{\theta} x + \dot{z}}{d}$$

$$v_y = -\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\dot\theta x + \dot z}{d}\right) y \qquad \left(\left[v_y\right]_{y=0} = 0\right)$$

bewegings vergelijking: $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial t}$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} + \frac{\ddot\theta x + \ddot z}{d}\right) y \,,\quad \frac{1}{\rho} p = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} + \frac{\ddot\theta x + \ddot z}{d}\right)\frac{y^2}{2} + C_3(x,t)$$

voor $y = b$ wordt de druk gegeven door verg.(a):

$$\rho\left[\frac{1}{2}h^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} + h\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right] = \rho\left[\left(\frac{\ddot\theta x + \ddot z}{d} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t}\right)\frac{b^2}{2} + C_3(x,t)\right]$$

$$p = \rho\left[-\left(\frac{b^2 - y^2}{2}\right)\left(\frac{\ddot\theta x + \ddot z}{d} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t}\right) + \frac{1}{2}h^2\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} + h\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right]$$

De kracht K op een moot met lengte 1 van de scheepsbodem bedraagt:

$$K = \int_{-b}^{b} p\, dy$$

$$K = \rho\left[\left(bh^2 - \frac{2}{3}b^3\right)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} - \frac{2}{3}b^3\,\frac{\ddot\theta x + \ddot z}{d} + 2bh\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right].$$

De totale hydrodynamische kracht bedraagt:

$$K_v = \int_{-l}^{l} K\, dx$$

$$K_v = \rho\int_{-l}^{l}\left[\left(bh^2 - \frac{2}{3}b^3\right)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} - \frac{2}{3}b^3\,\frac{\ddot\theta x + \ddot z}{d} + 2bh\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right]dx$$

Omdat in dit geval het schip symmetrisch is t.o.v. het vlak $x=0$ levert de term met $\ddot\theta$ geen bijdrage, zodat:

$$K_v(t) = \rho\int_{-l}^{l} 2b\left[\left(\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3}\right)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} - \frac{b^2}{3}\frac{\ddot z}{d} + h\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right]dx \qquad (b)$$

Het hydrodynamische moment M_V bedraagt.

$$M_V = \int_{-l}^{l} K x\, dx$$

Om dezelfde reden als bij K_V levert hier de term met $\ddot{z}$ geen bijdrage.

$$M_V(t) = \rho \int_{-l}^{l} 2bx \left[\left(\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3} \right) \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial t} - \frac{b^2}{3} \frac{\ddot{\theta} x}{d} + h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right] dx \qquad (c)$$

De hydrostatische kracht K_s is:

$$K_s = \int_{-l}^{l} \rho g \cdot 2b(\eta - z)\, dx \qquad (d)$$

Het hydrostatisch moment M_s is:

$$M_s = \int_{-l}^{l} \rho g \, 2b(\eta - \theta x) x \, dx \qquad (e)$$

(Evenals bij K_V en M_V vallen termen met θ resp. z weg)

Met (b) t/m (e) worden de bewegings verg.:

$$\boxed{\begin{aligned} &\left(m + \frac{2}{3}\rho \int_{-l}^{l} \frac{b^3}{d} dx \right) \ddot{z} + \rho g F z = \rho \int_{-l}^{l} 2b \left[g\eta + h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \left(\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3} \right) \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial t} \right] dx \\ &\left(J_m + \frac{2}{3}\rho \int_{-l}^{l} x^2 \frac{b^3}{d} dx \right) \ddot{\theta} + \rho g J_0 \theta = \rho \int_{-l}^{l} 2bx \left[g\eta + h \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \left(\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3} \right) \frac{\partial^2 V_x}{\partial x \partial t} \right] dx \end{aligned}} \qquad (f)$$

$$F = \int_{-l}^{l} 2b\, dx$$

$$J_0 = \int_{-l}^{l} 2b\, x^2 dx$$

De stampverg. van (f). geldt als het draaipunt samenvalt met het zwaartepunt. Voor een niet-symmetrisch schip waarvan het draaipunt een afstand e boven het zwaartepunt ligt worden de vergelijkingen:

$$\left\{\begin{aligned}
&\left(m+\tfrac{2}{3}\rho\int_{-l}^{l}\frac{b^3}{d}\,dx\right)\ddot{z}+\rho g F z+\left(\tfrac{2}{3}\rho\int_{-l}^{l}x\frac{b^3}{d}\,dx\right)\ddot{\theta}+\left(\rho g\int_{-l}^{l}2bx\,dx\right)\theta=\\
&\qquad=\rho\int_{-l}^{l}2b\left[g\eta+h\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\left(\frac{h^2}{2}-\frac{b^2}{3}\right)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial t}\right]dx\\
&\left(J_m+me^2+\tfrac{2}{3}\rho\int_{-l}^{l}x^2\frac{b^3}{d}\,dx\right)\ddot{\theta}+\left[\rho g J_0+m(g+\ddot{z})e\right]\theta+\\
&\qquad+\left(\tfrac{2}{3}\rho\int_{-l}^{l}x\frac{b^3}{d}\,dx\right)\ddot{z}+\left(\rho g\int_{-l}^{l}2bx\,dx\right)z=\\
&\qquad=\rho\int_{-l}^{l}2bx\left[g\eta+h\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}+\left(\frac{h^2}{2}-\frac{b^2}{3}\right)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\partial t}\right]dx.
\end{aligned}\right. \qquad (f')$$

Hierin is $g+\ddot{z}\approx g$ omdat $\ddot{z}\ll g$.

Met de vergelijkingen (f') in differenties geschreven, opgenomen in het ALGOL-programma voor de berekening van de waterbeweging (zie [1] en blz. 100) is het stampen en dompen te berekenen.

Omdat er weinig tijd beschikbaar was voor het programmeren van deze berekening is gezocht naar een eenvoudigere, benaderende berekeningsmethode. Hiertoe wordt het schip, voor wat betreft de hydrodynamische krachten en momenten, weer vervangen gedacht door een schip met rechthoekige horizontale doorsnede. De hydrodynamische drukken zijn bij de optredende bewegingen belangrijk kleiner dan de hydrostatische.

Met de gecombineerde continuïteitsverg. (9) en (9') wordt $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t}$ uit (f) geëlimineerd:

$$D_1 \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{b}{a}(\dot{z} + \dot{\theta} x) = 0.$$

differentiëren naar t:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{D_1}\left[\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} + \frac{b}{a}(\ddot{z} + \ddot{\theta} x)\right]$$

De vergelijkingen (f) worden hiermee:

$$\begin{cases} m\left[1 + \frac{b}{h}\left(\frac{b}{3d} + \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3}}{a D_1}\right)\right]\ddot{z} + \rho g F z = 2\rho \cdot \int_{-l}^{l} b\left(g\eta + \left(h - \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3}}{D_1}\right)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right) dx \\ \left[J_m + \rho J_0 b\left(\frac{b}{3d} + \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3}}{a D_1}\right)\right]\ddot{\theta} + \rho g J_0 \theta = 2\rho \cdot \int_{-l}^{l} b x\left(g\eta + \left(h - \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3}}{D_1}\right)\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}\right) dx. \end{cases}$$

Als virtuele massa coëfficiënten verschijnen dezelfde waarden als uit (25) en (25') volgt voor $\omega = 0$.

Als een translatiegolf het schip passeert groeien dompkracht en stampmoment geleidelijk aan en nemen weer langzaam af. De scheepsbewegingen zijn daarom relatief langzaam t.o.v. de eigenfrequentie. We veronderstellen daarom dat de vermellingsterm met $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ te verwaarlozen is t.o.v. de hydrostatische term met $g\eta$. (Dit gaat niet op als $\eta \approx 0$, terwijl $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \neq 0$).

Voor het hier gemeten en berekende geval (zie blz. 92) werd een eigenfrequentie voor dompen en stampen berekend: $\omega_e \approx 6{,}5\ sec^{-1}$. De geschatte frequentie van de eerste harmonische van de dompkracht bedraagt: $\omega \approx 0{,}5\ sec^{-1}$ en van het stampmoment: $\omega \approx 1{,}0\ sec^{-1}$.

De vereenvoudigde bewegingsvergelijkingen worden dus:

$$\left\{\begin{aligned} &\left[m + \rho F b\left(\frac{b}{3d} + \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3}}{a D_1}\right)\right]\ddot{z} + \rho g F z = \rho g \int_{-\ell}^{\ell} 2b\,\eta\, dx. \\ &\left[J_m + \rho J_0 b\left(\frac{b}{3d} + \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3}}{a D_1}\right)\right]\ddot{\theta} + \rho g J_0 \theta = \rho g \int_{-\ell}^{\ell} 2b\,x\,\eta\, dx. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

11. Meting en berekening van de domp- en stampbeweging van een schip onder invloed van een translatiegolf.

Proef.

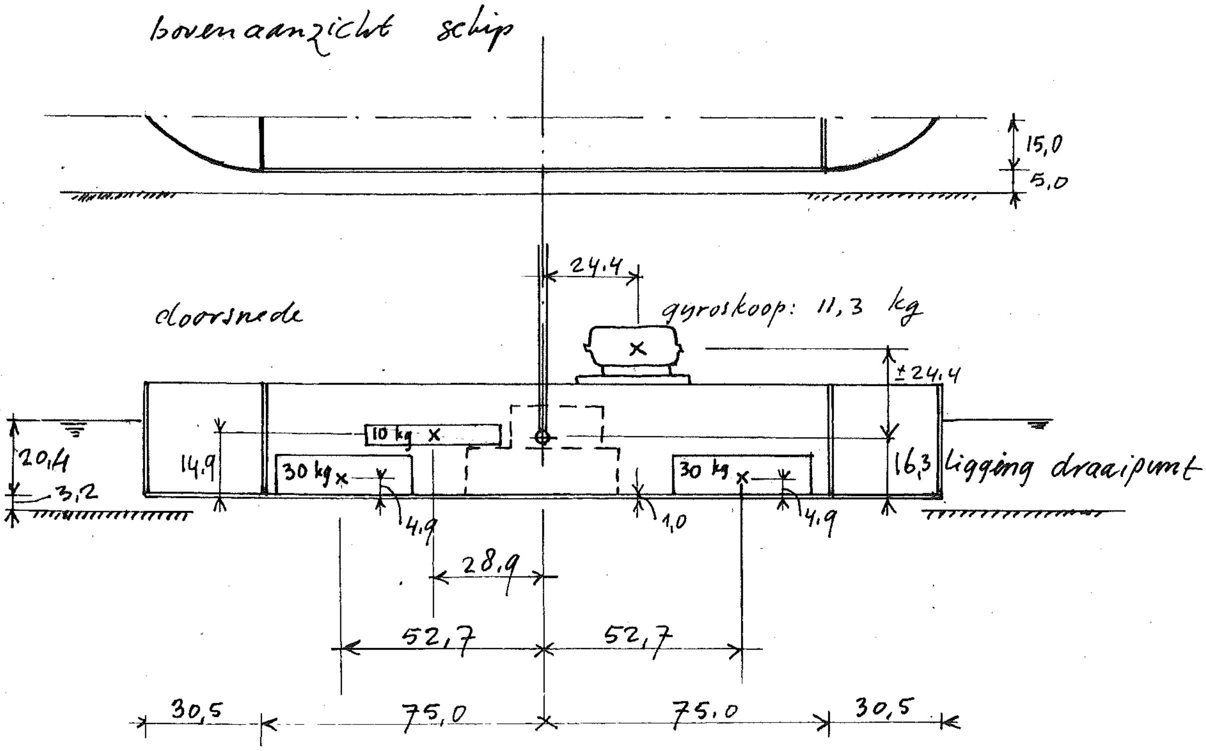
In een goot wordt met een schuif een translatiegolf opgewekt, deze wordt geregistreerd evenals de vertikale uitwijking en de helling van het schip als functie van de tijd. Het schip wordt op zijn plaats gehouden door een stang, vertikaal bevestigd in een wrijvingsarm lager, een zgn. ballbushing, die scharnierend in het midden van het schip aangebracht is. De as van het scharnier loopt in y-richting.
De hellingen van het schip worden gemeten met een gyroskoop, de vertikale uitwijkingen door een golfhoogtemeter, vastgemaakt aan bovengenoemde stang, in een potje met stilstaand water te hangen.
Door terugkaatsing tegen de eindschotten van de goot zijn de metingen slechts bruikbaar totdat terugkomende golven hen beïnvloeden, in dit geval tot 4,6 sec na het begin van de meting. Dit geldt voor de opgewekte golf.
Het schip ligt in de as van het kanaal

Gegevens van de opstelling.

gootlengte = ± 1000 cm
〃 breedte = 40 cm

$b = 15$ cm	$c = 180$ cm/s
$h = 20{,}4$ cm	$c_0 = 152$ cm/s
$D = 23{,}6$ cm	$F = 5860$ cm^2
$a = 5$ cm	$I_0 = 18{,}68 \cdot 10^6$ cm^4

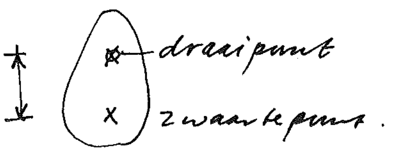
afstand golfregistratie - hart schip = 460 cm
〃 〃 - schuif = 100 〃
diepgang schip zonder stang 18,4 cm



Bij deze ligging van de ballast bleek het schip in evenwicht te zijn.

Om de ligging van het zwaartepunt te bepalen werden twee slingerproeven uitgevoerd waarbij het schip in vrije lucht was opgehangen. Bij de tweede slingerproef werden twee gewichten waarvan grootte, eigen massatraagheidsmoment en ligging bekend waren, bijgeplaatst. Uit de twee verkregen slingertijden kunnen oorspronkelijk massatraagheidsmoment en zwaartepuntligging worden berekend:

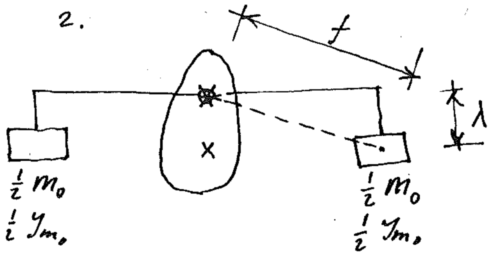
1.



massa m (bekend)
polair massatraagh. mom J_m (onbekend)
zwpt. afstand e (onbekend)

$J_m \ddot{\theta} + mge\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = \dfrac{mge}{J_m}$, ω_1 gemeten

2.



λ, f, m_0 en J_{m_0} bekend

$$(J_m + m_0 f^2 + J_{m_0})\ddot{\theta} + (me + m_0\lambda) g\,\theta = 0$$

$$\omega_2^2 = \frac{me + m_0\lambda}{J_{m_0} + J_m + m_0 f^2}\, g$$, ω_2 gemeten.

uit de formules voor ω_1 en ω_2 volgt:

$$\begin{cases} J_m = \dfrac{\omega_2^2 J_{m_0} + (\omega_2^2 f^2 - g\lambda) m_0}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \\[2ex] e = \dfrac{\omega_1^2 J_m}{mg} \end{cases}$$

1° slingerproef:

T_1 gem. = 5,10 sec ⇒ ω_1 = 1,230 sec^{-1}

massa zonder stang: $10^{-3} \cdot 18,4 \cdot 5860 = 107,7$ kg

i.p.v. 2x30 kg nu 2x10 kg op bodem:

$$\frac{40}{m = 67,7 \text{ kg}}$$

m_0 = 20 kg

λ = 8,1 cm, f = 53,4 cm

J_{m_0} = 2350 kgcm²

2° slingerproef:

T_2 gem = 4,64 sec ⇒ ω_2 = 1,353 sec^{-1}

$$J_m = \frac{2350 + (2843 - 4341)\,20}{0,8264 - 1} = 159.000 \text{ kgcm}^2$$

$$l = \frac{1,230^2 \cdot 159000}{67,7 \cdot 981} = 3,6 \text{ cm}$$

Zwaartepuntsligging l_1 bij proefopstelling:

$$107,7\ l_1 = 3,6 \cdot 67,7 + 10,6 \cdot 40$$

$$\underline{l_1 = 6,2 \text{ cm.}}$$

totaal polair massatraagheidsmoment bij proefopstelling:

i. uit bovenstaande berekening: 159.000 kgcm²

gewichten 2x20 kg op 53,0 cm

vanaf draaipunt: $40 \cdot 53^2$ = 112.300

eigen traagheidsmom. van

deze gewichten: $2 \cdot 2350$ = 4.700

$$\underline{J_m = 276.000 \text{ kgcm}^2}$$

totale massa:

$$\underline{m_t = 10^{-3} . 5860 . 20{,}4 = 120 \text{ kg.}}$$

De gemeten aankomende golf, de domp- en stampbeweging zijn weergegeven in de grafieken XI en XII.

Berekening.

Coëfficienten in de bewegingsvergelijkingen:

$$a_d = m + \rho F b \left(\frac{b}{3d} + \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3}}{a D_1} \right) = 120 + 10^{-3} . 5860 . 15 \left(\frac{15}{9{,}6} + \frac{\frac{20{,}4^2}{2} - \frac{15^2}{3}}{5 . 33{,}2} \right)$$

$$a_d = 329 \text{ kg}$$

$$c_d = \rho g F = 10^{-3} . 981 . 5860 = 5740 \text{ kg/sec}^2$$

$me^2 << I_m$?

$$a_s = I_m + \rho I_0 b \left(\frac{b}{3d} + \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{b^2}{3}}{a D_1} \right) = 276000 + 10^{-3} . 18{,}68 . 10^6 . 15 \left(\frac{15}{9{,}6} + \frac{\frac{20{,}4^2}{2} - \frac{15^2}{3}}{5 . 33{,}2} \right)$$

$$a_s = 940.000 \text{ kgcm}^2$$

blz 88

$$c_s = \rho g I_0 + \underline{mge} = \left(10^{-3} . 18{,}68 . 10^6 + 107{,}7 . 6{,}2 \right) 981$$

$$c_s = 19{,}0 . 10^6 \text{ kgcm}^2/\text{sec}^2$$

Dit zijn de coëfficienten van de verg. (9)
blz 90

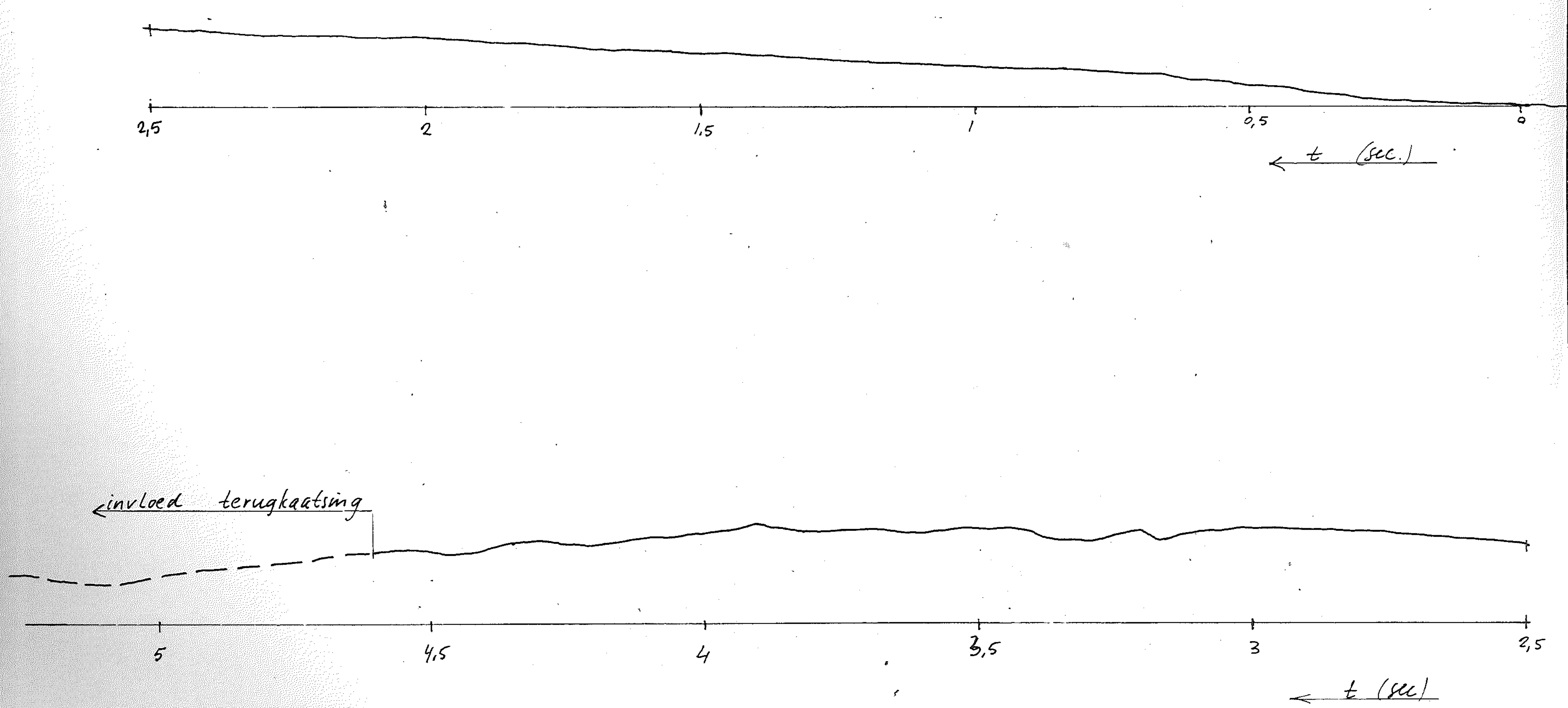
Met de vergelijkingen (9) is op genoemde wijze het stampen en dompen onder invloed van de opgemeten translatiegolf berekend. Zie grafiek XII. Eventueel achter het schip optredende zogstroming is buiten beschouwing gelaten.
Ter illustratie is ook een berekening uitgevoerd, waarbij in formule (25') (voor a_s in het harmonische geval) de berekende waarde voor de eigen stampfrequentie ($= 6{,}64\ sec^{-1}$) is ingevuld.

De stabiliteit van de numerieke berekening is gewaarborgd door ervoor te zorgen dat

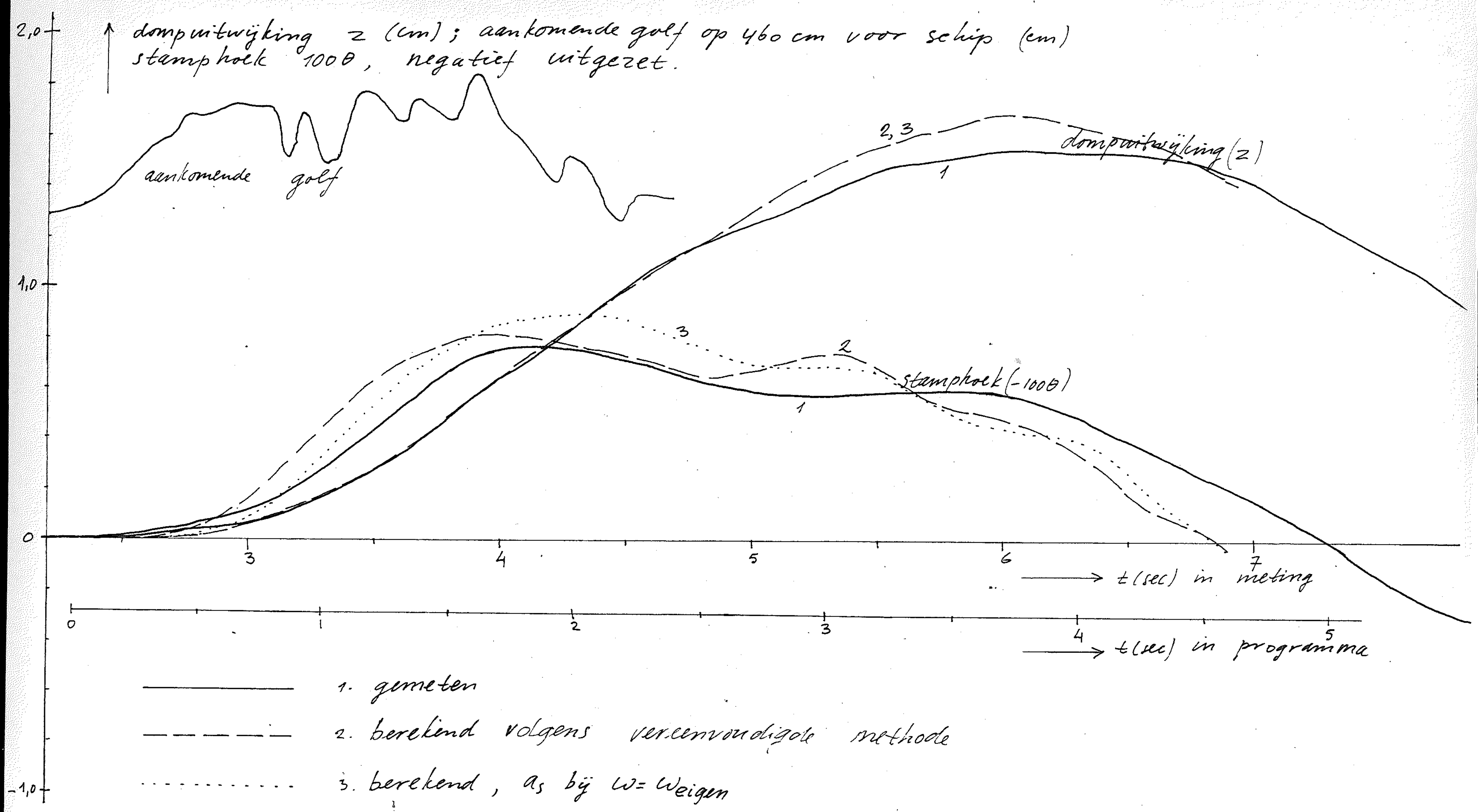
$$\frac{\text{afstandstap}}{\text{tijdstap}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} > c_{max}$$

$$c_{max} = 180 \ cm/sec \quad \text{(blz 92)}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5}{0{,}025} = 200 \ cm/sec.$$



grafiek XI. Opgemeten translatiegolf (ware grootte) op 460 cm voor scheepsmidden.



Grafiek XII. Berekende en gemeten stamp- en dompbeweging t.g.v. translatiegolf

12 Conclusie.

Het dompen blijkt met bovengenoemde methode goed te berekenen te zijn. Het wordt nauwelijks beïnvloed door veranderingen van de coefficienten in de stampvergelijking. De overeenkomst tussen meting en berekening bij het stampen is minder overtuigend. Voor beide berekeningen geldt dat de berekende waarden voorlopen op de gemeten. In het geval 3. (grafiek XII) is ook de amplitude te groot. Misschien speelt de optredende wrijving in de scheeps bevestiging hierin een rol.
Omdat de overeenkomst nog niet helemaal bevredigt lijkt het zin te hebben om een berekening uit te voeren, waarbij niet de term met $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$ wordt verwaarloosd.

Een oorzaak van de afwijkingen kan ook zijn dat in de bewegingsverg. in X-richting in [1] (die in het programma is opgenomen) de hydrodynamische drukken weggelaten zijn. De fout hierdoor zal echter klein zijn omdat de dynamische drukken voor langzame bewegingen veel kleiner zijn dan de hydrostatische.

```
==a1,

'begin'  'real' 'array' m,n[0:392,0:2],bs[174:218],pr,kr,x,df[1:22],
         d1,d2,d3[174:218],
         rr[1:4,1:100,1:2];
         'comment' er wordt geen onderscheid gemaakt tussen h en q
         omdat dit onderscheid via de indices tot uiting komt
         de oneven waarden van de tweede index leveren q, de
         even waarden h;
         'real' g,h,j,k,l,p,q,y,a,b,bk,d,h0,ds,bsm,c1,c2,
         dt,xx,ss1,zz0,zz1,zz2,ss2,c5,c6,c7,c8,
         tt0,tt1,tt2,c3,c4,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,a10,
         a11,a12,a13,a14,a15,a16,a17,a18,a19,a20;
         'integer' i,u,v,r,m1,m3,z,m2,m4,
         aa,bb,
         cc,dd,ii;
         'procedure' se3; 'code';
         'comment' de procedurese3 kent de waarden van rooster n
         toe aan rooster m;
         'procedure' se13; 'code';
         'comment' de procedure se13 brengt een aantal getallen
         paren op een ponsband voor de x-y-schrijver zodat de
         uitkomsten van de berekening in grafiekvorm kunnen
         worden geleverd;
         rr[1,100,2]:=3.5; rr[2,100,2]:=0;
         rr[3,100,2]:=0;
         rr[1,100,1]:=100; rr[2,100,1]:=100;
         rr[4,100,2]:=0; rr[3,100,1]:=100; rr[4,100,1]:=100;

         read(dt,ds,bk,d,h0,g,c1,c2,z,c5,c6);
         c3:=4*dt*dt/c1; c4:=2-dt*dt*4*c2/c1;
         c7:=4*dt*dt/c5; c8:=2-dt*dt*4*c6/c5;
         'for' i:=1 'step' 1 'until' 22 'do'
         read(x[i]);
         'for' i:=1 'step' 1 'until' 22 'do'
         read(df[i]);
         nlcr(5);
eerst:   read(h,j,k,l,p,m1,m3,y,m2,m4,a,b,bsm,aa,bb,cc,dd);
         nlcr(1);
         z:=z+1; print(''meting'');
         vasko(1,0,z);
         nlcr(2);
             'if' aa 'equal' 1 'then'
             print(''    t     meter 2     meter 1      meter 3'')
             'else' print(''      t      meter 1      meter 2      meter 3
meter 4''); nlcr(1);
             'for' i:=a 'step' 1 'until' b 'do'
    'begin'  'if' i 'less' k 'or' i 'greater' l 'then' read(bs[i])
             'else' bs[i]:=bsm;
    'end';
             'if' aa 'equal' 1 'then'
    'begin'  'for' i:=h-1 'step' 2 'until' j+1 'do'
      'begin'  d1[i]:=d;
               d2[i]:=d;
               d3[i]:=d;
      'end';
    'end';
```

```
        'commerrt' waterhoogten op het tijdstip to;
        'for' i:=p 'step' - 2 'until'0 'do'
        read(m[i,0]);
        'for' i:=p+2 'step' 2 'until' 392 'do'
        m[i,0]:=h0;
        'comment' waterhoogten op het tijdstip to+2dt;
        'for' i:=2 'step' 2 'until' p+2 'do'
        m[i,2]:=m[i,0]+
        2*dt*sqrt(g*m[i,0])*(m[i-2,0]-m[i+2,0])
        /(4*ds);
        'for' i:=p+4 'step' 2 'until' 392 'do'
        m[i,2]:=h0;
        q:=0.5*(m[2,2]+m[0,0]);
        'comment' hier wordt q[1,1] bepaald m.b.v. de formule
         q=c.n.bk;
        m[1,1]:=sqrt(g*q)*(q-h0)*bk;
        'comment' m.b.v. de continuiteitsvoorwaarde, in differenties

        geschreven, worden de q's op het tijdstip to+dt berekend;
       'for' i:=2 'step' 2 'until' p+2 'do'
        m[i+1,1]:=m[i-1,1]-(m[i,2]-m[i,0])*bk*ds/dt;
        'for' i:=p+4 'step' 2 'until' 390 'do'
        m[i+1,1]:=0;
        u:=1; v:=393; r:=0; ii:=0;
        tt0:=0; tt1:=0; zz0:=0; zz1:=0;
weer:    u:=u+2; v:=v-2; r:=r+2; nlcr(1); ii:=ii+1;
        vasko(1,3,dt*(r-2));
        'comment' m.b.v. de bewegingsvergelijking, in differenties
        geschreven, worden de q's op het tijdstip to+3dt berekend;
        'for' i:=u 'step' 2 'until' v 'do'
  'begin' a1:=m[i+1,2]-m[i-1,2];
        a2:=m[i,1];
        a3:=m[i+1,2]-m[i+1,0]+m[i-1,2]-m[i-1,0];
        a7:=m[i+1,2]+m[i-1,2];
        'if' i 'less' h 'or' i 'greater' j 'then'
    'begin' a12:=-a3/a7;
            a11:=0.5*a7*bk*a1*g;
              a18:=0;
              'end'
                     'else' 'if' aa 'equal' 0 'then'
    'begin' a8:=(bs[i+1]+4*bs[i]+bs[i-1])/3;
            a10:=(bk-0.5*a8)*0.5*a7+0.5*a8*d;
            a5:=bs[i+1]-bs[i-1];
            a11:=g*a10*a1;
            a18:=a2*a5*0.5*(a7-2*d)/(a10*a10);
            a12:=-a3*(bk-0.5*a8)/(2*a10)+a18*dt/ds;
   'end'
           'else'
    'begin' 'if' i 'equal' h 'then'
      'begin' a4:=(d2[i+1]-d1[i+1]+d2[i-1]-d1[i-1]);
                a6:=d2[i+1]-d2[i-1];
      'end';
                a5:=bs[i+1]-bs[i-1];
                a8:=(bs[i+1]+4*bs[i]+bs[i-1])/3;
                a9:=d2[i+1]+d2[i-1];
                a10:=(bk-0.5*a8)*0.5*a7+0.25*a8*a9;
                a19:=0.5*(a7-a9); a20:=bk-0.5*a8;
                a11:=g*a10*a1;
               a18:=(2*a2*a19*a5-a2*a8*a6)/(2*a10*a10);
                a12:=-(a20*a3)/(2*a10)-a8*a4/(4*a10)+a18*dt/ds;
    'end';
            n[i,1]:=(a2*(1-a12)-(a11-a2*a18)*dt/ds)/(1+a12);
   'end';
```

```
            'comment' m.b.v. de continuiteitsvoorwaarde worden de
            waterhoogten op het tijdstip to+4dt berekend;
            'for' i:=u 'step' 2 'until' v-2 'do'
'begin'     a13:=n[i+2,1]-n[i,1];
            a14:=m[i+1,2];
            'if' i 'less' h 'or' i 'greater' j 'then'
   'begin'    a15:=1;
              a16:=0;
              a17:=bk;
   'end'
              'else' 'if' aa 'equal' 0 'then'
   'begin'    a15:=0;
              a16:=(bs[i+2]+4*bs[i+1]+bs[i])/3;
              a17:=(bk-0.5*a16);
   'end'
              'else'
   'begin'    a15:=d3[i+1]-d2[i+1];
              a16:=(bs[i+2]+4*bs[i+1]+bs[i])/3;
              a17:=(bk-0.5*a16);
   'end';
              n[i+1,2]:=(-a13*dt/ds+a14*a17-0.5*a16*a15)/a17;
'end';
            'if' aa 'equal' 1 'then'
'begin'     ss1:=0; ss2:=0;
            'for' i:=1 'step' 1 'until' 22 'do'
   'begin'    kr[i]:=((n[2*i+h-1,2]+n[2*i+h-3,2])*0.5-h0)*
              df[i]*0.981;
              pr[i]:=kr[i]*x[i];
             ss1:=ss1+pr[i]; ss2:=ss2+kr[i];
   'end';
              tt2:=c3*ss1+tt1*c4-tt0;
              zz2:=c7*ss2+zz1*c8-zz0;
              'for' i:=h-1 'step' 2 'until' j+1 'do'
   'begin'    d1[i]:=d2[i]; d2[i]:=d3[i];
              d3[i]:=d+zz2-((h+j)/2-i)*ds*0.001*tt2;
   'end';
              rr[4,ii,2]:=1.5; space(4); vasko(2,2,-0.1*tt0);
              rr[2,ii,2]:=-0.1*tt0+1.5; space(5);
              vasko(2,2,zz0); rr[3,ii,2]:=zz0+1.5;
              tt0:=tt1; tt1:=tt2; zz0:=zz1; zz1:=zz2;
              xx:=m[m1,0]-h0; space(5);
              vasko(2,2,xx); rr[1,ii,2]:=xx+1.5;
            'if' r-20*entier(r/20) 'equal' 0 'then'
'begin'     'if' r 'less' 126 'then'
            'for' i:=126 'step' 2 'until' 266 'do'
   'begin'    vasko(1,2,(n[i,2]-h0));
   'end'
              'else' 'for' i:=r 'step' 2 'until' 392-r 'do'
   'begin'    vasko(1,2,(n[i,2]-h0));
   'end';
'end';
'end'
            'else'
            i:=
```

```
            'for' [illegible]m1,m2,m3,m4 'do'
    'begin' space(5);
            'if' i-2*entier(i/2) 'equal' 0 'then'
            xx:=m[i,0]-h0
            'else' xx:=(m[i+1,0]+m[i-1,0])*0.5-h0;
            vasko(2,2,xx);
            'if' i 'equal' m1 'then'
            rr[1,ii,2]:=xx+1 'else'
            'if' i 'equal' m2 'then'
            rr[2,ii,2]:=xx+1 'else'
            'if' i 'equal' m3 'then'
            rr[3,ii,2]:=xx+1 'else'
            rr[4,ii,2]:=xx+1;
    'end';
            'for' i:=u 'step' 2'until' v+2 'do'
            n[i-1,0]:=m[i-1,2];
            rr[1,ii,1]:=ii;
            rr[2,ii,1]:=ii;
            rr[3,ii,1]:=ii;
            rr[4,ii,1]:=ii;
            'if' r 'less' y 'then'
    'begin' 'comment' er zijn vijf kolommen berekend, op de eerste,
            de derde en de vijfde kolom de h's, op de tweede en vierde
            kolom de q's. de procedure se3 zet de laatste drie
            kolommen op de plaats van de eerste drie,
            en nu is een volgend
            tweetal kolommen te berekenen door terug te springen naar
            ''weer'';
            se3(n,m);
            'go to' weer;
    'end'
            'else'
    'begin' npag;
            se13(4,100,rr,1);
            npag;
            'if' z 'less' 5 'then'
       'begin' nlcr(5);
               'go to' eerst;
       'end'
               'else' 'go to' einde;
    'end';
einde:
'end';
e
```

==a6,
u=36,
r=3,
compen en stampen, a_s = 940

0.025,5,40,3.2,23.6,981,940,19000,0,
329,5740,
-102,-94,-84.8,-75,-65,-55,-45,-35,
-25,-15,-5,5,15,25,35,45,55,65,75,
84.8,94,102,
38.3,208.5,284.7,300,300,300,300,300,
300,300,300,300,300,300,300,300,300,300,300,
284.7,208.5,38.3,
175,217,181,211,172,104,240,
229,176,32,174,219,30,1,1,1,1,
0,2.0,13.9,21.5,26.3,28.9,29.8,29.8,28.9,
26.3,21.5,13.9,2.0,0,0,

23.63,23.67,23.73,23.72,23.83,23.88,
23.94,24.05,24.09,24.18,24.19,24.26,
24.27,24.28,24.33,24.31,24.37,24.41,
24.42,24.50,24.51,24.54,24.56,24.59,
24.63,24.64,24.70,24.73,24.80,24.82,
24.81,24.86,24.87,24.88,24.90,24.92,
24.96,25.04,25.10,25.17,25.19,25.28,
25.27,25.30,25.32,25.30,25.30,25.27,
25.20,25.16,25.19,25.26,25.32,25.30,
25.25,25.34,25.29,25.30,25.36,25.32,
25.23,25.18,25.11,25.10,25.04,25.02,
24.96,24.93,24.90,24.87,24.84,24.82,
24.73,24.68,24.60,24.52,24.43,24.31,
24.21,24.14,24.08,24.04,23.96,23.88,
23.82,23.80,23.70,

==a6 ,
u=36 ,
r=3 ,
compen en stampen, $a_s = 2290$

0.025,5,40,3.2,23.6,981,2290,19000,0,
329,5740,
-102,-94,-84.8,-75,-65,-55,-45,-35,
-25,-15,-5,5,15,25,35,45,55,65,75,
84.8,94,102,
38.3,208.5,284.7,300,300,300,300,300,
300,300,300,300,300,300,300,300,300,300,300,
284.7,208.5,38.3,
175,217,181,211,172,104,240,
229,176,32,174,219,30,1,1,1,1,
0,2.0,13.9,21.5,26.3,28.9,29.8,29.8,28.9,
26.3,21.5,13.9,2.0,0,0,

23.63,23.67,23.73,23.72,23.83,23.88,
23.94,24.05,24.09,24.18,24.19,24.26,
24.27,24.28,24.33,24.31,24.37,24.41,
24.42,24.50,24.51,24.54,24.56,24.59,
24.63,24.64,24.70,24.73,24.80,24.82,
24.81,24.86,24.87,24.88,24.90,24.92,
24.96,25.04,25.10,25.17,25.19,25.28,
25.27,25.30,25.32,25.30,25.30,25.27,
25.20,25.16,25.19,25.26,25.32,25.30,
25.25,25.34,25.29,25.30,25.36,25.32,
25.23,25.18,25.11,25.10,25.04,25.02,
24.96,24.93,24.90,24.87,24.84,24.82,
24.73,24.68,24.60,24.52,24.43,24.31,
24.21,24.14,24.08,24.04,23.96,23.88,
23.82,23.80,23.70,

14. Literatuuroverzicht

[1] Afstudeerontwerp 1966 . A.H. De Hartog

[2] Rapport 113 - Lab. voor Scheepsbouwkunde
Een fasecomponent meetsysteem.

[3] Report 111 - Lab. voor Scheepsbouwkunde
Oscillator techniques.

[4] prof. ir. J. Gerritsma - Gedrag van een schip in zeegang - Ingenieur , 25 maart 1966.

[5] W.E. Smith - W.E. Cummins - Force pulse testing on ships models, Fifth Symposium on Naval hydrodynamics.

[6] ir. G. Vossers - Grondslagen van het gedrag van schepen in (zee) golven , rapport no. 151 N.S.P.

[7] Collegediktaten korte en lange golven.

[8] Stoker - Water waves.

[9] J.V. Wehausen - Motion in undulating sea of a body with fixed equilibrium position - Journal of engineering mathematics - Nr 1, (1967).