

TECHNISCHE UNIVERSITEIT DELFT

BACHELORPROJECT TWN

TWN3002

Legionellabesmetting in warmwaterleiding in 2D

Mark VAN EMBDEN
4223985

Begeleiders:
Prof. dr. ir. Kees VUIK
Prof. dr. ir. Chris R. KLEIJN

18 april 2017

Inhoudsopgave

1	Lijst van symbolen	2
2	Samenvatting	3
3	Inleiding	4
4	Probleemstelling	5
4.1	Warmtetransport	7
4.2	Legionella	7
4.3	Onderzoeksvragen	8
4.4	Warmtevergelijking	8
4.5	Het bepalen van de warmteoverdrachtscoëfficiënt	10
5	Soortgelijke problemen uit de literatuur	15
6	Resultaten en Discussie	19
6.1	Analytische oplossing warmteprobleem	20
6.2	Resultaten Analytische oplossing	26
6.3	Numerieke oplossing warmteprobleem met Comsol door middel van eindige elementen	33
6.4	Soortgelijke resultaten uit de literatuur	36
6.5	Resultaten Numerieke oplossing	40
6.6	De groei van Legionella	43
6.7	Resultaten Legionella	46
7	Conclusies	49
8	Bijlagen	51

1 Lijst van symbolen

Symbol	Betekenis	Eenheid
$T(x, r, t)$	Temperatuur op plaats (x, r) op tijdstip t	$^{\circ}\text{C}$
T_{∞}	Temperatuur van de omgeving	$^{\circ}\text{C}$
R_1	Straal van de waterkolom	m
R_2	Straal van de buitenwand van de leiding	m
R_3	Straal van de buitenwand van de isolatie	m
L	Lengte van de waterkolom	m
λ_i	warmtegeleidingscoëfficiënt van materiaal i	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
a_i	temperatuurvereffeningscoëfficiënt van materiaal i	m^2s^{-1}
ν_i	kinematische viscositeit van materiaal i	m^2s^{-1}
h_1	warmteoverdrachtscoëfficiënt van het water naar de omgeving via de wand van de kraan	$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
h_2	warmteoverdrachtscoëfficiënt van het water naar de omgeving via het uiteinde van de kraan	$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
h_o	warmteoverdrachtscoëfficiënt van de buitekant van de buis naar de omgeving door straling en natuurlijke convectie	$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
σ	constante van Stefan-Boltzmann	$\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
ε	emissiecoëfficiënt	—
θ	dimensieloze temperatuur	—
τ	dimensieloze tijd	—
(ρ, ν)	dimensieloze plaats	—
ϵ	dimensieloze lengte	—
Bi_i	Het Biot-getal ($\frac{Rh_i}{\lambda}$)	—

2 Samenvatting

In dit verslag is de groei van legionella in een warmwaterleiding onderzocht. Er zijn twee modellen ontworpen voor het berekenen van de temperatuur en een model voor de groei van legionella. Het eerste model voor de temperatuur wordt analytisch opgelost en het tweede model door middel van de eindige elementen methode. Het analytische model is uiteindelijk niet gebruikt voor de groei van legionella, omdat het te veel afwijkt van het numerieke model. Het numerieke model is getest aan de hand van de literatuur die soortgelijke problemen omschrijft. Het model voor de concentratie van legionella is afhankelijk van de temperatuur en is in het numerieke model gelijktijdig met de temperatuur opgelost. Voor typische parameters van een warmwaterleiding duurt het tussen de 16 en 18 uur vanaf het moment dat de warmwaterleiding wordt afgesloten totdat er zich een, wettelijk vastgestelde, te grote concentratie legionella in het water bevindt. De concentratie legionella is afhankelijk van 3 dimensieloze parameters behorende bij de lengte en de 2 richtingen van warmtetransport. Er is gebleken dat de warmtetransport in de richting van de lengte van de buis bijna geen invloed heeft op de legionella.

Er is ook gekeken naar de vergelijking tussen het tweedimensionale transiënte probleem en een ééndimensionaal stationair probleem uit de literatuur, echter was in deze literatuur de diffusiecoëfficiënt niet correct. Hieruit is gebleken dat voor gebruikelijke waarden voor de parameters de ééndimensionale benadering een goede benadering geeft, maar de stationaire benadering van de temperatuur kan leiden tot een relatief verschil in de tijd die nodig is tot een kritieke concentratie wordt bereikt van ongeveer 25% langzamer ten opzichte van de literatuur. Er is gekeken of het isoleren van de kraan bevorderend is voor het belemmeren van de groei van legionella, maar er is gebleken dat het er juist voor zorgt dat de legionella sneller op een te grote concentratie uitkomt.

3 Inleiding

De legionellabacterie is een bacterie die leidt tot de veteranenziekte. De legionellabacterie groeit in warm stilstaand water en vormt dus een bedreiging in gebouwen waar warm water nodig is. Besmetting vindt plaats door inademing, wanneer iemand in de buurt van besmet water is dat vrij in contact staat met de lucht (Legionella.nl, 2015). Legionellabesmetting komt nog dikwijls voor en vormt daarom een probleem voor de maatschappij (Stichtingveteranenziekte.nl, 2015).

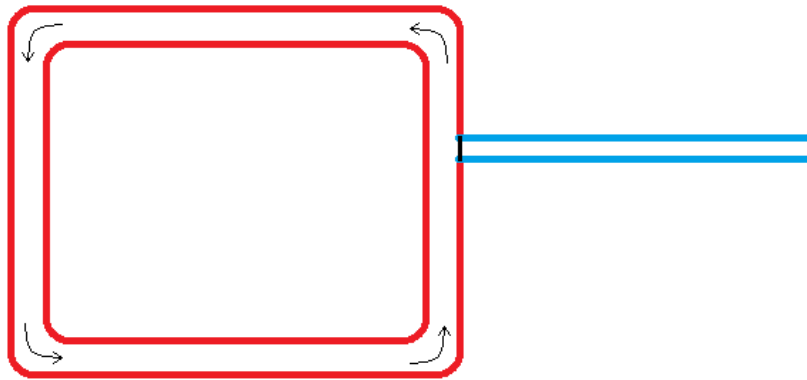
Om legionellabesmetting te voorkomen is het belangrijk om te weten hoe snel legionella groeit in het warme water. Hierbij is het van belang om de leidingen, waarin het warme water stilstaat, te beschouwen. In een eerder onderzoek is er al gekeken naar de groei van legionella in een warmwaterleiding die als 1-dimensionaal stationair wordt beschouwd (Vonk, 2014). In dit onderzoek wordt er gekeken naar een 2-dimensionale transiënte axisymmetrische oplossing van hetzelfde probleem en gekeken in hoeverre deze oplossing afwijkt van de 1-dimensionale oplossing.

Hiertoe wordt er eerst gekeken naar een analytische oplossing van de warmtevergelijking in de warmwaterleiding (onder simpele voorwaarden). Vervolgens wordt met behulp van Comsol Multiphysics een numerieke oplossing gevonden met behulp van de eindige elementen methode. Hier kan dan een bestaand groeimodel van legionella mee gecombineerd worden om te kijken naar de groei van legionella.

In dit verslag wordt eerst het probleem opgesteld, waarna een literatuurstudie plaatsvindt om tot een model te komen voor het probleem. Het probleem wordt opgedeeld in 2 delen: het warmteprobleem en het groeimodel van legionella. Eerst wordt het warmteprobleem met een analytische oplossing benaderd en vervolgens numeriek opgelost, waarna deze resultaten met resultaten uit de literatuur worden vergeleken. Tenslotte wordt het groeimodel met deze oplossing gecombineerd om de groei van legionella in een warmwaterleiding te analyseren.

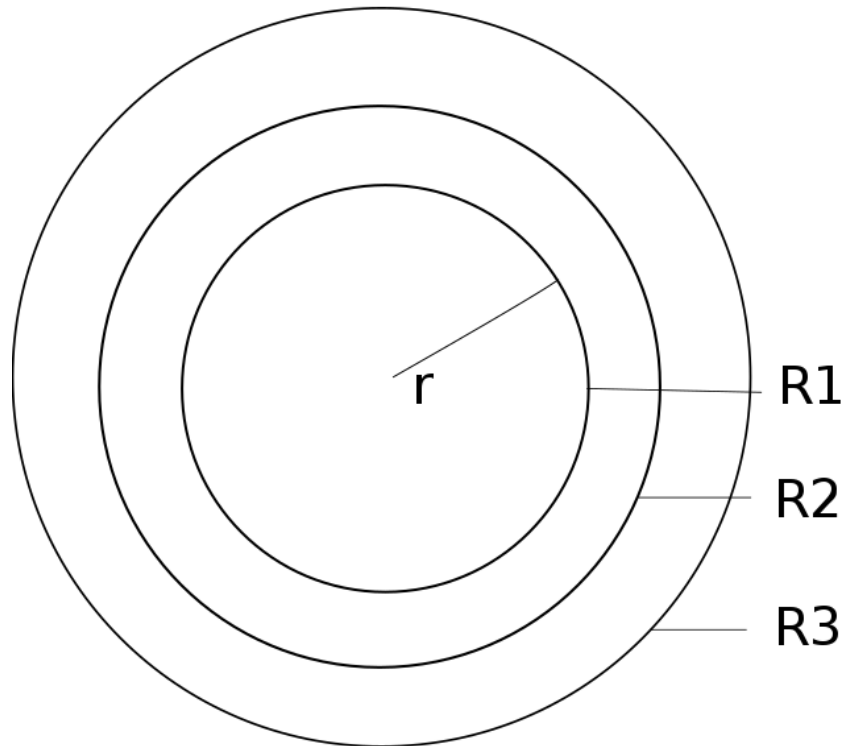
4 Probleemstelling

De situatie is als volgt: Een gebouw met een warmwaterleiding loopt het risico dat het water afkoelt in de aftappunten. Het water komt hierdoor in een temperatuurinterval waarin legionella kan groeien. Het is zaak dat voorkomen wordt dat mensen besmet kunnen raken met legionella door het inademen van de bacterie. De leidingen zijn hieronder in figuur 1 schematisch weergegeven.



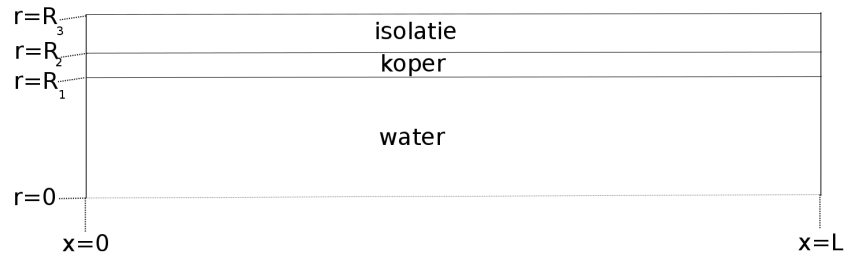
Figuur 1: Schematische weergave van de waterleidingen. Links in het rood wordt warm water rondgepompt door de hoofdleiding op een constante temperatuur. Rechts in het blauw bevindt zich een aftappunt, waarin het water afkoelt als het aftappunt gesloten is.

Een dwarsdoorsnede van het aftappunt wordt nader bekeken:



Figuur 2: Schematische doorsnede van een aftappunt door de lengterichting. R1 geeft de buitenstraal van het water aan en de binnenstraal van de koperen leiding, R2 de buitenstraal van de koperen leiding en de binnenstraal van de isolatie, en R3 de buitenstraal van de isolatie waar contact wordt gemaakt met de omgeving (lucht). r geeft de straal van de waterkolom aan.

Aangezien er door middel van figuur (2) in de geometrie duidelijk sprake is van een symmetrie om de lengte-as van het aftappunt, ontstaat het vermoeden dat de relevante fysica ook axisymmetrisch zal zijn. Zwaartekracht is een factor die deze symmetrie kan verstoren door relatieve dichtheidsverschillen, maar aangenomen wordt dat dit geen grote invloed zal hebben op de situatie. Dit betekent dat de situatie als 2-dimensionaal kan worden beschouwd. Dit heeft als voordeel dat er met minder vrijheidsgraden hoeft worden gerekend. De situatie in 2D wordt vervolgens geschetst in figuur (3).



Figuur 3: 2D voorstelling van de waterleiding die op $x = 0$ vastzit aan de hoofdleiding en op $x = L$ op de omgeving uitkomt. Van binnen naar buiten zijn water, koper en isolatie aangegeven. De waterleiding is omgeven door lucht.

4.1 Warmtetransport

Het water in de leiding koelt af door warmteverliezen naar de koudere omgeving, waardoor de temperatuur optimaal wordt voor de groei van legionella (zie 4.2). Het is daarom van belang de temperatuur in het water te weten. In het stilstaande water, koper en isolatiemateriaal vindt warmtetransport plaats door geleiding. Van de buitenkant van het isolatiemateriaal naar de omgeving vindt warmtetransport plaats door middel van straling en vrije convectie.

4.2 Legionella

Legionella is een bacterie die voorkomt in grondwater en waterleidingen. Deze bacterie groeit exponentieel als de temperatuur van het water tussen de $25\text{ }^{\circ}\text{C}$ en $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ is. Het water dat in de warmwaterleidingen gepompt wordt bevindt zich op een hogere temperatuur (ca. $65\text{ }^{\circ}\text{C}$) en zal bij afkoelen naar kamertemperatuur in de groeiregio van legionella komen. Legionella groeit nog sneller als het water stil staat (Stichtingveteranenziekte.nl, 2015). De kans op besmetting is dus het grootst wanneer het water een lange tijd stilstaat en afkoelt, bijvoorbeeld een stuk niet geïsoleerde leiding die 's nachts niet wordt gebruikt.

Een oplossing tegen de gevormde legionella is het openzetten van de kraan, nadat de leiding een tijd niet is gebruikt. Hierdoor spoelt de gevormde legionella weg en wordt het vervangen door onbesmet water. Het is dan van belang om te weten hoe lang het duurt totdat de hoeveelheid legionella boven een bepaalde kritieke waarde komt. Natuurlijk zou het ook mogelijk kunnen zijn dat het water zo snel afkoelt dat de legionella maar kort exponentieel

kan groeien, waardoor de hoeveelheid legionella geen gevaar vormt.

4.3 Onderzoeksvragen

In een vorig werk (Vonk, 2014) is een 1D stationair model voor legionella in een aftappunt opgesteld. Nu wordt er gekeken naar een 2D transiënt model.

Dit leidt tot de volgende onderzoeksvragen:

- Hoe verhoudt het 2D transiënte model zich tot het 1D stationaire model?
- Hoe lang duurt het totdat de hoeveelheid legionella boven een kritieke waarde komt (afhankelijk van parameters)?
- Kan het aftappunt veilig zijn omdat het water snel genoeg afkoelt?

4.4 Warmtevergelijking

Het warmtetransport in het stilstaande water wordt beschreven door de wet van Fourier:

$$\varphi_q'' = -\lambda \nabla T \quad (1)$$

In deze vergelijking staat φ_q'' voor de warmteflux (Wm^{-2}), λ voor de warmtegeleidingscoëfficiënt ($Wm^{-1}K^{-1}$) en T voor de temperatuur (K).

Er wordt een controlevolume beschouwd, ofwel een willekeurig blokje in een fluïdum tussen x en $x + dx$, y en $y + dy$ en z en $z + dz$. Dit controlevolume heeft dus volume $dx dy dz$. Nu wordt over dit controlevolume een warmtebalans opgesteld. Een warmtebalans heeft de volgende algemene vorm:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \text{warmte in} - \text{warmte uit} + \text{warmteproductie} \quad (2)$$

Waarbij Q de thermische energie is in Joule en t de tijd in seconden. Dan geldt voor de instationaire term:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial(V\rho c_p T)}{\partial t} = \frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} dx dy dz \quad (3)$$

Hier wordt gebruik gemaakt van de bekende vergelijking $Q = V\rho c_p T$ en het feit dat $dx dy dz$ constant is. Hierin staat V voor het volume, ρ voor de dichtheid van het fluïdum en c_p voor de soortelijke warmte van het fluïdum. Door het zijvlak in de x -richting komt door geleiding de volgende term binnen:

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x,y,z} dy dz$$

en gaat door het overstaande vlak de volgende term uit:

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx,y,z} dydz$$

Het samenvoegen geeft dan:

$$\left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x,y,z} dydz - \left(-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x+dx,y,z} dydz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx dy dz \quad (4)$$

Dit proces kan geheel analoog herhaald worden voor de y - en z -richting. De laatste term is nu de warmteproductie die wordt genoteerd als $q dx dy dz$.

Als al deze termen nu worden samengevoegd volgt een warmtebalans:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} dx dy dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) dx dy dz + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) dx dy dz + q dx dy dz \quad (5)$$

Nu kan door $dx dy dz$ gedeeld worden:

$$\frac{\partial(\rho c_p T)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right) + q \quad (6)$$

en zo is de algemene warmtebalans voor een stilstaand fluidum afgeleid.

In de situatie met de waterleiding staat het water stil en vallen alle convectieve termen dus weg. Bovendien wordt aangenomen dat λ als constant kan worden benaderd en er geen warmtebron aanwezig is. De warmtebalans van het probleem van dit onderzoek wordt dan vereenvoudigd tot de volgende warmtevergelijking

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (7)$$

Hierin is $a (= \frac{\lambda}{\rho c_p})$ de warmtevereffeningscoëfficiënt ($\frac{m^2}{s}$)

Aangezien er sprake is van een axisymmetrische situatie is het nuttig deze vergelijking om te schrijven naar cylindercoördinaten, zodat de vergelijking 2-dimensionaal wordt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \nabla^2 T = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (8)$$

Omdat er sprake is van symmetrie in de draaias wordt de afgeleide naar ϕ op nul gezet; dit leidt tot:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (9)$$

Er missen nog enkel randvoorwaarden op $x = 0$, $x = L$, $r = 0$ en $r = R$, en een beginvoorwaarde. Voor de randvoorwaarden op $x = L$ en $r = R$ geldt dat er sprake is van warmteoverdracht van het water naar de omgeving. Het transport van warmte van het water naar de omgeving kan beschreven worden met behulp van het volgende experimentele verband:

$$\phi_q'' = U\Delta T \quad (10)$$

Hierin staat ϕ_q'' voor de warmteflux van het water naar de omgeving, ΔT voor het temperatuurverschil tussen het water en de omgeving en U voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt van het water naar de omgeving.

Als dit verband gekoppeld wordt aan de wet van Fourier, volgt de volgende vergelijking:

$$\phi_q'' = -\lambda\nabla T = U\Delta T \quad (11)$$

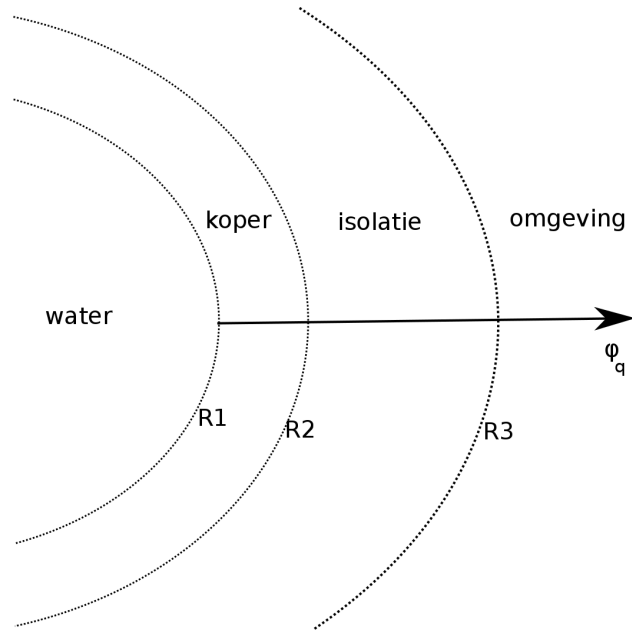
4.5 Het bepalen van de warmteoverdrachtscoëfficiënt

Voor het uitrekenen van de oplossing van het probleem moet de warmteoverdrachtscoëfficiënt U van het systeem bepaald. Dit wordt gedaan aan de hand van de literatuur van Van den Akker en Mudde (2013). Allereerst moet opgemerkt worden dat er sprake is van warmtetransport van het water naar de omgeving in 2 orthogonale richtingen: in de radiële richting door de wanden (h_1) en in de axiale richting door het uiteinde van de kraan h_2 . Merk op dat h_2 onafhankelijk is van het gebruik van isolatie en de koperen buis, omdat deze rand in direct thermisch contact met de lucht staat. Voor het bepalen van h_1 wordt de situatie nog eens aangegeven in figuur (4).

Om de warmteoverdracht vanaf R_1 (de rand van het water) naar de omgeving te bepalen, wordt formule (11) gebruikt. Er geldt dus:

$$\phi_q''(R_1) = -\lambda \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r \uparrow R_1} = U(T_{R_1} - T_\infty) \quad (12)$$

Omdat U een samengestelde warmteoverdrachtscoëfficiënt is wordt er gekeken naar een stelsel differentiaalvergelijkingen. Merk op dat $\phi_q = \frac{\phi_q''}{2\pi r L}$ is constant, met behulp van vergelijking (1) volgt:



Figuur 4: Gedeelte van de dwarsdoorsnede van de waterleiding met de verschillende stralen en ϕ_q de warmtestroom in de radiële richting.

$$\phi_q = -\lambda_c \frac{dT}{dr} 2\pi r L, \quad R_1 < r < R_2 \quad (13)$$

$$\phi_q = -\lambda_i \frac{dT}{dr} 2\pi r L, \quad R_2 < r < R_3 \quad (14)$$

$$\phi_q = h_o (T_{R_3} - T_\infty) 2\pi R_3 L \quad (15)$$

Hier staat h_o voor de warmteoverdacht van de buitenkant van de buis naar de omgeving.

Nu wordt vergelijking (13) opgelost met randvoorwaarden $T(R_1) = T_{R_1}$ en $T(R_2) = T_{R_2}$:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dr} &= -\frac{\phi_q}{\lambda_c 2\pi L} \frac{1}{r} \\ T &= -\frac{\phi_q}{\lambda_c 2\pi L} \ln(r) + C_1 \\ T_{R_1} &= -\frac{\phi_q}{\lambda_c 2\pi L} \ln(R_1) + C_1 \Rightarrow C_1 = T_1 + \frac{\phi_q}{\lambda_c 2\pi L} \ln(R_1) \Rightarrow \\ T &= T_{R_1} + \frac{\phi_q}{\lambda_c 2\pi L} \ln\left(\frac{R_1}{r}\right), \quad R_1 < r < R_2 \\ \\ T_{R_2} &= T_{R_1} + \frac{\phi_q}{\lambda_c 2\pi L} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\end{aligned}\tag{16}$$

Vergelijking (14) wordt analoog opgelost en geeft:

$$T_{R_3} = T_{R_2} + \frac{\phi_q}{\lambda_i 2\pi L} \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right)\tag{17}$$

De combinatie van (15), (16) en (17) geeft dan de volgende uitdrukking:

$$\begin{aligned}\phi_q &= h_o(T_{R_1} + \frac{\phi_q}{\lambda_c 2\pi L} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{\phi_q}{\lambda_i 2\pi L} \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) - T_\infty) 2\pi L R_3 \\ \frac{\phi_q}{h_o 2\pi L R_3} &= \phi_q \left(\frac{1}{\lambda_c 2\pi L} \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \frac{1}{\lambda_i 2\pi L} \ln\left(\frac{R_2}{R_3}\right) \right) + (T_{R_1} - T_\infty) \\ \phi_q \left(\frac{1}{h_o 2\pi L R_3} + \frac{1}{\lambda_c 2\pi L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{\lambda_i 2\pi L} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) \right) &= (T_{R_1} - T_\infty) \\ \phi_q &= \left(\frac{1}{h_o 2\pi L R_3} + \frac{1}{\lambda_c 2\pi L} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{1}{\lambda_i 2\pi L} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) \right)^{-1} (T_{R_1} - T_\infty)\end{aligned}$$

Dit wordt nu gedeeld door de oppervlakte ($2\pi Lr$) om op de flux te komen en geëvalueerd op R_1 :

$$\phi_q''(R_1) = \left(\frac{R_1}{h_o R_3} + \frac{R_1}{\lambda_c} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) \right)^{-1} (T_{R_1} - T_\infty)\tag{18}$$

Volgens formule (12) geldt dan voor de totale warmteoverdrachtscoëfficiënt:

$$h_1 = U = \left(\frac{1}{h_o} \frac{R_1}{R_3} + \frac{R_1}{\lambda_c} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{R_1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{R_3}{R_2}\right) \right)^{-1}\tag{19}$$

De warmteoverdracht van de buitenwand van de buis naar de omgeving, $h_o=h_2$, wordt bepaald door 2 verschillende vormen van warmteoverdracht: straling van de buitenwand naar de omgeving (h_{str}) en vrije convectie van de lucht langs de wand h_{conv} . Er geldt dus:

$$h_o = h_{conv} + h_{str} \quad (20)$$

Voor h_{str} geldt de volgende formule:

$$\phi_{str}'' = \varepsilon\sigma(T^4 - T_0^4) \approx 4\varepsilon\sigma\langle T \rangle^3 \Delta T = h_{str}\Delta T \quad (21)$$

Waarbij een lineaire benadering is gedaan, ε is de emissiecoëfficiënt en σ de constante van Stefan-Boltzmann.

Nu hoeft alleen nog h_{conv} bepaald te worden. Hiervoor kan de volgende formule uit Van den Akker en Mudde worden gebruikt:

$$h = \text{Nu} \frac{\lambda}{D}, \quad (22)$$

met Nu het nusselt-getal en D de karakteristieke lengte van de cylinder, in dit geval L . Als de cilinder benaderd wordt als een verticale plaat en de lucht als ideaal gas, dan bestaat de volgende Nusselt relatie (Janssen en Warmoeskerken, 2006):

$$\text{Nu} = 0.55(\text{GrPr})^{\frac{1}{4}} = 0.55 \left(\frac{D^3 g \Delta T}{\nu a T} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (23)$$

met Gr het getal van Grashof, Pr het getal van Prandtl, g de zwaartekrachtversnelling, ΔT het temperatuurverschil tussen de lucht en de buitenwand van de buis (T_{R_3}), ν de kinematische viscositeit van lucht, a de warmtevereffeningscoëfficiënt van lucht en T de absolute temperatuur van de lucht.

Dit geeft dan de formule voor $h_2 = h_o$:

$$h_2 = \left(\frac{0.55\lambda_l(L^3 g \Delta T)^{\frac{1}{4}}}{L(\nu a T)^{\frac{1}{4}}} + 4\varepsilon\sigma\langle T \rangle^3 \right) \quad (24)$$

Tot slot wordt er nog gekeken naar een specifiek geval waar de koperen wand relatief erg dun is en er geen isolatie is, ofwel $R_2 - R_1 = \varepsilon R_1$, $R_2 = R_3$ en

$\varepsilon \ll 1$. Dan geldt er voor de warmteoverdrachtscoëfficiënt in de radiële richting:

$$\begin{aligned} h_1 &= \left(\frac{1}{h_o} \frac{R_1}{(1+\varepsilon)R_1} + \frac{R_1}{\lambda_c} \ln\left(\frac{(1+\varepsilon)R_1}{R_1}\right) + \frac{R_1}{\lambda_i} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \right)^{-1} \\ &= \left(\frac{1}{h_o} \frac{1}{(1+\varepsilon)} + \frac{R_1}{\lambda_c} \ln(1+\varepsilon) \right)^{-1} \\ &\approx \left(\frac{1}{h_o} + \frac{R_2 - R_1}{\lambda_c} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Nu geldt bovendien dat $R_1 - R_2$ klein is en λ_c zeer groot, waardoor

$$\frac{R_1 - R_2}{\lambda_c} \ll \frac{1}{h_o}.$$

Dus geldt in dit geval

$$h_1 \approx h_o = h_2$$

5 Soortgelijke problemen uit de literatuur

Er wordt gezocht naar een vergelijking voor de tijdsafhankelijke temperatuur van een axisymmetrische buis gevuld met water. In de literatuur kan geen transiënte oplossing gevonden worden die hieraan voldoet, maar er zijn wel gevallen die op het probleem in dit verslag lijken en dus gebruikt kunnen worden om te vergelijken en de numeriek oplossing tegen te toetsen.

Carslaw en Jaeger (1959) hebben allerlei steady-state problemen opgelost voor warmtegeleiding in een cilinder. Zo lossen zij bijvoorbeeld het volgende probleem op: Een eindige cilinder $0 \leq r < R$, $0 < x < L$, met op $x = 0$ een voorgeschreven temperatuur $f(r)$ en op de overige randen overdracht van warmte naar de omgeving. Dit leidt tot de volgende wiskundige formulering van het probleem:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (25)$$

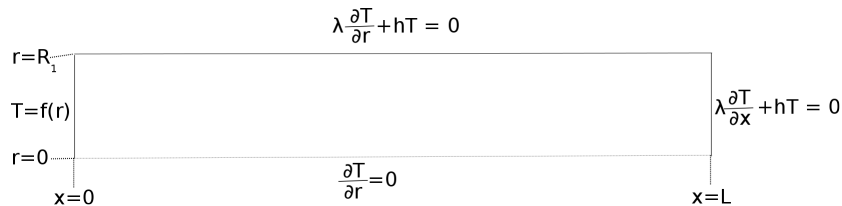
Met randvoorwaarden:

$$T = f(r), \quad x = 0, \quad 0 \leq r < R \quad (26)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial r} + hT = 0, \quad 0 < x < L, \quad r = R \quad (27)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + hT = 0, \quad 0 \leq r < R, \quad x = L \quad (28)$$

Dit is ook schematisch weergegeven in figuur (5).



Figuur 5: 2D voorstelling van de cilinder zoals bij Carslaw en Jaeger, de randvoorwaarden zijn bij de bijbehorende randen geplaatst. Hierbij is de omgeving op een temperatuur van 0 gezet.

Dit probleem verschilt in één randvoorwaarde van het probleem dat in dit verslag wordt onderzocht. Er wordt immers vanuit gegaan dat er maar 1

overdrachtscoëfficiënt h naar de omgeving is. In het huidige verslag zijn deze overdrachtscoëfficiënten verschillend, omdat er in de radiële richting koper en eventueel isolatie om het water heen zit, waar dit op $x = L$ niet het geval is. Nu is het echter zo dat in het geval van een niet geïsoleerde buis, de warmteoverdracht in de radiële richting gedomineerd wordt door de vrije convectie en straling. Dit betekent dat de warmteoverdrachtscoëfficiënten in deze situatie nagenoeg hetzelfde zijn en het probleem dat hier door Carslaw en Jaeger wordt besproken de situatie zonder isolatie voor steady state goed zou moeten beschrijven. De oplossing voor het probleem is als volgt:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(r\alpha_n) \frac{\alpha_n \cosh \alpha_n(L-x) + h \sinh \alpha_n(L-x)}{\alpha_n \cosh \alpha_n L + h \sinh \alpha_n L}, \quad (29)$$

met J_0 de Besselfunctie en a_n die gevonden worden uit

$$\alpha J'_0(\alpha R) + h J_0(\alpha R) = 0 \quad (30)$$

en

$$A_n = \frac{2\alpha_n^2}{R^2(h^2 + \alpha_n^2)J_0^2(\alpha_n R)} \int_0^R r f(r) J_0(r\alpha_n) dr \quad (31)$$

Om deze oplossing te vergelijken met het probleem moet $f(r) = T_0$ gekozen worden en moet de oplossing nog geschaald worden naar de omgevingstemperatuur die Carslaw en Jaeger op 0 hebben gezet.

Carslaw and Jaeger zijn niet de enigen die soortgelijke problemen hebben opgelost. In de literatuur bestaat het probleem van een 'heat fin'. Dit is een langwerpig voorwerp dat aan een enkele uiteinde warmte binnenkrijgt en via de andere uiteindes moet afkoelen. In de gezochte situatie is er specifiek gezien sprake van een cirkelvormige fin. Mackowski bespreekt 2D warmteoverdracht in een cirkelvormige fin, zijn probleem heeft de volgende vorm:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = 0. \quad (32)$$

Met randvoorwaarden:

$$\theta(\rho, 0) = 1 \quad (33)$$

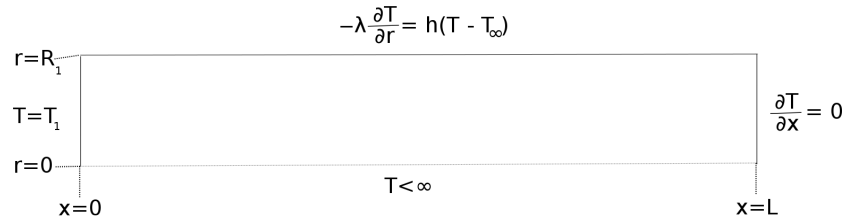
$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 1 \quad (34)$$

$$\theta(0, \xi) < \infty \quad (35)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \text{Bi} \theta(a, \xi), \quad \rho = a \quad (36)$$

Hierin zijn de variabelen op de volgende manier dimensieloos gemaakt: $\rho = x/L$, $\xi = r/L$ met L de karakteristieke lengte van het systeem. Voor de temperatuur geldt $\theta = \frac{T-T_\infty}{T_B-T_\infty}$ met T_∞ de omgevingstemperatuur ver weg en T_B de temperatuur waarop het uiteinde op $x = 0$ wordt gehouden. Bi staat voor het Biot-getal en draagt de warmteoverdrachtscoëfficiënt in zich door $\text{Bi} = \frac{hD}{\lambda}$, met h de warmteoverdrachtscoëfficiënt, D de karakteristiek lengte en λ de warmtegeleidingscoëfficiënt.

Dit is in dimensies weergegeven in figuur (6).



Figuur 6: 2D voorstelling van de cilinder zoals bij Mackowski, de randvoorwaarden zijn bij de bijbehorende randen geplaatst. Hier worden de standaardvariabelen gebruikt in plaats van dimensieloze variabelen.

Dit probleem wijkt wederom maar op één randvoorwaarde af van het warmwaterprobleem. Het gaat hier om de randvoorwaarde (34). Deze randvoorwaarde is alleen hetzelfde als de warmteoverdrachtscoëfficiënt aan het uiteinde van de kraan naar 0 gaat. Dit zou betekenen dat het uiteinde geïsoleerd is. De oplossing van dit probleem zou de situatie goed kunnen beschrijven als er een situatie is waarin de warmteoverdrachtscoëfficiënt aan het uiteinde verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de warmteoverdracht in de radiële richting. De oplossing is als volgt:

$$\theta = \frac{2\text{Bi}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh[\lambda_n(1-\xi)] J_0(\lambda_n \rho)}{\cosh(\lambda_n) J_0(\lambda_n a) (\lambda_n^2 + \text{Bi}^2)}. \quad (37)$$

Waar λ_n gevonden wordt uit:

$$\lambda_n J_1(\lambda_n a) = \text{Bi} J_0(\lambda_n a) \quad (38)$$

Mackowski kijkt zelfs een transiënt probleem dat aan dezelfde randvoorwaarden voldoet en dus nog steeds hetzelfde mankement heeft. Hij neemt

hierbij wel een warmtebron mee, die niet relevant is in ons probleem en dus op 0 gezet kan worden. Zijn oplossing beschrijft echter een situatie waarin het water wordt opgewarmd, nadat het een stationaire toestand heeft bereikt. Dit wijkt af van het warmwaterprobleem, maar kan desalniettemin gebruikt worden om het numeriek oplossingsmodel te testen. Het probleem is dan als volgt:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta}{\partial \rho} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} = \frac{\partial \theta}{\partial \tau}. \quad (39)$$

Met beginvoorwaarde:

$$\theta(\rho, \xi, 0) = \theta_s \quad (40)$$

en randvoorwaarden:

$$\theta(\rho, 0) = 1 \quad (41)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad \xi = 1 \quad (42)$$

$$\theta(0, \xi) < \infty \quad (43)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \text{Bi}\theta(a, \xi), \quad \rho = a \quad (44)$$

Hij geeft als oplossing:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh[\lambda_n(1 - \xi)] \phi_n(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \phi_n(\rho) \psi_m(\xi) e^{-\lambda_n^2 + \beta_m^2 \tau} \quad (45)$$

Met $\tau = t\alpha/L^2$ en

$$A_n = \frac{\int_0^a \phi_n \rho d\rho}{\cosh(\lambda_n) \int_0^a \phi_n^2 \rho d\rho}, \quad (46)$$

$$B_{nm} = \frac{\int_0^1 \int_0^a [T_s - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cosh[\lambda_n(1 - \xi)] \phi_n(\rho)] \phi_n \rho \psi_m d\rho d\xi}{\int_0^a \phi_n^2 \rho d\rho \int_0^1 \psi_m^2 d\xi} \quad (47)$$

Hier komt λ_n uit (38) en geldt:

$$\phi_n = J_0(\lambda_n \rho) \quad (48)$$

Tenslotte geldt voor β_m :

$$\beta_m = \frac{2m - 1}{2} \pi \quad (49)$$

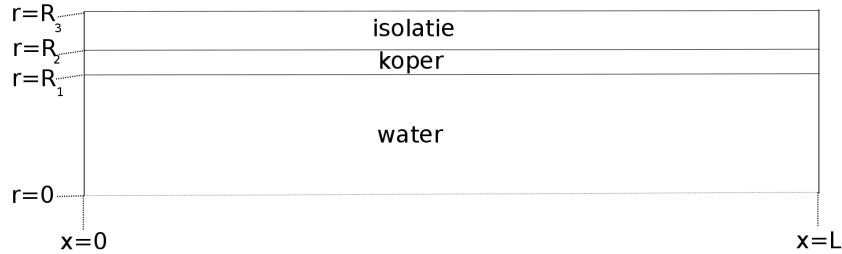
en

$$\psi_m = \cos[\beta_m(1 - \xi)] \quad (50)$$

Deze transiënte oplossing gebruikt worden om het numerieke oplossingsmodel van de warmwaterleiding te valideren.

6 Resultaten en Discussie

Er is een differentiaalvergelijking afgeleid voor het probleem (zie vergelijking (9)). Nu is er de noodzaak om plausibele randvoorwaarden te definiëren. Zoals al eerder is genoemd beschouwt men een cilindrische buis water met 2 uiteindes. Dit is nogmaals weergegeven in de figuur hieronder. Het water



Figuur 7: 2D voorstelling van de waterleiding met, die op $x = 0$ vastzit en de hoofdleiding en op $x = L$ op de omgeving uitkomt. Van binnen naar buiten zijn water, koper en isolatie aangegeven. De waterleiding is omgeven door lucht.

heeft een uniforme starttemperatuur T_0 (beginvoorwaarde), afkomstig van de hoofdleiding. Het is daarom aannemelijk voor $x = 0$ de temperatuur constant T_0 te nemen. Gesteld wordt dat de buis een lengte L heeft en straal R . Als oorsprong wordt het midden van de zijkant aan de hoofdleiding gekozen (zie bovenstaande figuur).

Voor het opstellen van het randvoorwaardenprobleem wordt de eerder afgeleide formule (9) gebruikt. De randvoorwaarde op $r = 0$ is vanzelfsprekend een axisymmetrische randvoorwaarde. Op $x = 0$ wordt een isotherme randvoorwaarde geëist. De overige 2 randvoorwaarden worden afgeleid door middel van formule (11). Het warmteprobleem is dan als volgt gedefiniëerd:

$$\frac{\partial T(r, x, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T(r, x, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T(r, x, t)}{\partial r} + \frac{\partial^2 T(r, x, t)}{\partial x^2} \right) \quad (51)$$

Met ($t > 0$; $0 < r < R$; $0 < z < L$) en beginvoorwaarde:

$$T(r, x, 0) = T_0 \quad (52)$$

En randvoorwaarden

$$\frac{\partial T(0, x, t)}{\partial r} = 0 \quad (53)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(R, x, t)}{\partial r} = h_1 [T(R, x, t) - T_\infty] \quad (54)$$

$$T(r, 0, t) = T_0 \quad (55)$$

$$-\lambda \frac{\partial T(r, L, t)}{\partial x} = h_2 [T(r, L, t) - T_\infty] \quad (56)$$

6.1 Analytische oplossing warmteprobleem

Voor het analytisch oplossen is de randvoorwaarde (55) een probleem, daarom wordt deze benaderd door een randvoorwaarde met warmteoverdracht. Om een begrenzing op het interval (0,1) te hebben en om later parametervariatie te doen, worden nu de variabelen dimensieloos gemaakt.

Gekozen wordt $\theta = \frac{T-T_\infty}{T_0-T_\infty}$, $\tau = \frac{at}{R^2}$, $\rho = \frac{r}{R}$, $\nu = \frac{x}{L}$

Dit betekent dat

$$T(r, x, t) = \theta(\rho, \nu, \tau)(T_0 - T_\infty) + T_\infty \quad (57)$$

Substitueer dit nu in het probleem:

$$\frac{\partial T(r, x, t)}{\partial t} = (T_0 - T_\infty) \frac{\partial \theta(\rho, \nu, \tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{a}{R^2} (T_0 - T_\infty) \frac{\partial \theta(\rho, \nu, \tau)}{\partial \tau} \quad (58)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T(r, x, t)}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{(T_0 - T_\infty)}{R^2} \frac{\partial \theta(\rho, \nu, \tau)}{\partial \rho} \quad (59)$$

$$\frac{\partial^2 T(r, x, t)}{\partial r^2} = \frac{(T_0 - T_\infty)}{R^2} \frac{\partial^2 \theta(\rho, \nu, \tau)}{\partial \rho^2} \quad (60)$$

$$\frac{\partial^2 T(r, x, t)}{\partial x^2} = \frac{(T_0 - T_\infty)}{L^2} \frac{\partial^2 \theta(\rho, \nu, \tau)}{\partial \nu^2} \quad (61)$$

De nieuwe vergelijking wordt dan

$$\frac{\partial \theta(\rho, \nu, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta(\rho, \nu, \tau)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \theta(\rho, \nu, \tau)}{\partial \rho} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 \theta(\rho, \nu, \tau)}{\partial \nu^2} \quad (62)$$

Waarbij ϵ de dimensieloze parameter $\frac{R}{L}$ is en $0 \leq \nu \leq 1$, $0 \leq \rho \leq 1$ en $\tau \geq 0$.
Met beginvoorwaarde:

$$\theta(\rho, \nu, 0) = 1 \quad (63)$$

En randvoorwaarden:

$$\frac{\partial \theta(0, \nu, \tau)}{\partial \rho} = 0 \quad (64)$$

$$\frac{\partial \theta(1, \nu, \tau)}{\partial \rho} + \text{Bi}_1 \theta(1, \nu, \tau) = 0 \quad (65)$$

$$\frac{\partial\theta(\rho, 0, \tau)}{\partial\nu} - \text{Bi}_3\epsilon^{-1}\theta(\rho, 0, \tau) = 0 \quad (66)$$

$$\frac{\partial\theta(\rho, 1, \tau)}{\partial\nu} + \text{Bi}_2\epsilon^{-1}\theta(\rho, 1, \tau) = 0 \quad (67)$$

Met $\text{Bi} = \frac{Rh}{\lambda}$ het Biot-getal.

$$\theta(\rho, \nu, \tau) = \Psi(\rho, \nu)\Phi(\tau) \quad (68)$$

Dit wordt gesubstitueerd in vergelijking (62):

$$\frac{1}{\Phi(\tau)} \frac{d\Phi}{d\tau} = \frac{1}{\Psi(\rho, \nu)} \left(\frac{\partial^2\Psi(\rho, \nu)}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Psi(\rho, \nu)}{\partial\rho} + \epsilon^2 \frac{\partial^2\Psi(\rho, \nu)}{\partial\nu^2} \right) = -\alpha^2 \quad (69)$$

Met $-\alpha^2$ een separatieconstante. Vervolgens wordt opnieuw scheiding van variabelen toegepast door middel van

$$\Psi(\rho, \nu) = f(\rho)g(\nu) \quad (70)$$

Dit leidt tot

$$\frac{1}{f(\rho)} \left(\frac{d^2 f(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df(\rho)}{d\rho} \right) = -\epsilon^2 \frac{1}{g(\nu)} \frac{d^2 g(\nu)}{d\nu^2} - \alpha^2 = -\beta^2 \quad (71)$$

Met $-\beta^2$ een nieuwe separatieconstante. Het eerste eigenwaardeprobleem wordt dan

$$\frac{d^2 f}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{df}{d\rho} + f\beta^2 = 0 \quad (72)$$

Met $0 \leq \rho \leq 1$ en randvoorwaarden

$$\frac{df}{d\rho}(1) + \text{Bi}_1 f(1) = 0 \quad (73)$$

$$\frac{df}{d\rho}(0) = 0 \quad (74)$$

Dit is een Besselvergelijking met algemene oplossing (Haberman, 2013):

$$f_n(\rho) = AJ_0(\beta_n\rho) + BY_0(\beta_n\rho) \quad (75)$$

Waarbij J_0 een Besselfunctie van de eerste soort en Y_0 een Besselfunctie van de tweede soort. Gebruiken nu formule (74), dan volgt $B = 0$, want $J'_0(0) = 0$ en $Y'_0(\beta\rho) \rightarrow -\infty$ voor $\rho \rightarrow 0$. Dan volgt:

$$f(\rho) = AJ_0(\beta_n\rho) \Rightarrow \frac{df}{d\rho} = A\beta J'_0(\beta_n\rho) \quad (76)$$

Gebruik nu vergelijking (73) dan:

$$A[\beta_n J'_0(\beta) + \text{Bi}_1 J_0(\beta_n)] = 0 \quad (77)$$

De oplossingen voor de eigenwaarden β_n worden dan verkregen uit

$$\beta_n J'_0(\beta_n) + \text{Bi}_1 J_0(\beta_n) = 0 \quad (78)$$

Met als eigenfuncties

$$f_n(\rho) = A J_0(\beta_n \rho) \quad (79)$$

Het tweede eigenwaardeprobleem wordt

$$\frac{d^2 g}{d\nu^2} + \gamma^2 g = 0 \quad (80)$$

Met randvoorwaarden (aangenomen dat $T_0 = T_{in}$)

$$\frac{dg}{d\nu}(1) + \text{Bi}_2 \epsilon^{-1} g(1) = 0 \quad (81)$$

$$\frac{dg}{d\nu}(0) - \text{Bi}_3 \epsilon^{-1} g(0) = 0 \quad (82)$$

Met $\gamma^2 = (\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\epsilon^2})$ De algemene oplossing voor deze differentiaalvergelijking wordt gegeven (voor $\gamma > 0$) door (Haberman, 2013):

$$g(\nu) = C \cos(\gamma\nu) + D \sin(\gamma\nu) \quad (83)$$

Uit (82) volgt $D = \frac{\text{Bi}_3 C}{\epsilon\gamma}$. Dit geeft

$$g(\nu) = C \cos(\gamma\nu) + \frac{\text{Bi}_3 C}{\epsilon\gamma} \sin(\gamma\nu) \quad (84)$$

Vervolgens leidt (81) tot

$$-C\gamma \sin(\gamma) + \frac{\text{Bi}_3 C}{\epsilon} \cos(\gamma) + \frac{\text{Bi}_2}{\epsilon} [C \cos(\gamma) + \frac{\text{Bi}_3 C}{\epsilon\gamma} \sin(\gamma)] = 0 \quad (85)$$

De oplossingen voor de eigenwaarden γ_m worden dan verkregen uit

$$\gamma_m \sin(\gamma_m)(1 - \text{Bi}_2 \text{Bi}_3 \epsilon^{-2}) = \cos(\gamma_m)(\epsilon^{-1} [\text{Bi}_2 + \text{Bi}_3]) \quad (86)$$

$$\Rightarrow \tan(\gamma_m) = \frac{\epsilon^{-1}[\text{Bi}_2 + \text{Bi}_3]}{\gamma_m^2 - \text{Bi}_2\text{Bi}_3\epsilon^{-2}} \quad (87)$$

Met als eigenfuncties

$$g_m(\nu) = C(\cos(\gamma_m\nu) + \frac{\text{Bi}_3}{\epsilon\gamma_m} \sin(\gamma_m\nu)) \quad (88)$$

Bekijk nu voor $\gamma_m = 0$, dan is de algemene oplossing voor (80) gegeven door

$$g(\nu) = C_1x + C_2 \quad (89)$$

Gebruik (82) dan volgt dat $C_1 = C_2\text{Bi}_3\epsilon^{-1}$, gebruik vervolgens (81) en dan volgt

$$C_1 = -\text{Bi}_2\epsilon^{-1}(C_1 + C_2) \Rightarrow C_2\text{Bi}_3\epsilon^{-1} = (C_2\text{Bi}_3\epsilon^{-1} + C_2) - \text{Bi}_2\epsilon^{-1} \quad (90)$$

Maar dit is alleen waar als $C_2 = C_1 = 0$ Hieruit volgt dat $\gamma \neq 0$.

Nu wordt er nog gekeken naar $\gamma < 0$, de oplossing van (80) wordt dan gegeven door (Haberman, 2013):

$$g(\nu) = C_3 \sinh(-\gamma\nu) + C_4 \cosh(-\gamma\nu) \quad (91)$$

Gebruik (82) dan volgt dat $C_3 = -\text{Bi}_3C_4\epsilon^{-1}\gamma^{-1}$, vervolgens (81) en dan

$$\cosh(-\gamma)(-\text{Bi}_3\epsilon^{-1} - \text{Bi}_2\epsilon^{-1}) = \sinh(-\gamma)(-\gamma^2 - \text{Bi}_2\text{Bi}_3\epsilon^{-2}) \quad (92)$$

Dit is alleen oplosbaar voor $C_3 = C_4 = 0$. Hieruit volgt $\gamma \neq 0$.

De oplossing van het tijdsafhankelijke deel is triviaal

$$\frac{d\Phi}{dt} = -\alpha^2\Phi \Rightarrow \Phi(\tau) = Ee^{-\alpha^2\tau} \quad (93)$$

Dan kan door (68) en (70) de oplossing uitgedrukt worden als

$$\theta(\rho, \nu, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{-\alpha_{nm}^2\tau} J_0(\beta_n\rho) (\cos(\gamma_m\nu) + \frac{\text{Bi}_3}{\epsilon\gamma_m} \sin(\gamma_m\nu)), \quad (94)$$

met $\alpha_{nm}^2 = \epsilon^2\gamma_m^2 + \beta_n^2$.

Merk nu op dat de eigenfuncties g_m orthogonaal zijn:

$$\int_0^1 g_q(\nu)g_p(\nu) d\nu = 0, \text{ als } p \neq q \quad (95)$$

Bovendien geldt voor de Besselfuncties:

$$\int_0^1 J_0(\beta_p \rho) J_0(\beta_q \rho) \rho \, d\rho = 0, \text{ als } p \neq q \quad (96)$$

Vul nu de beginvoorwaarde in (94) in:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} J_0(\beta_n \rho) \left(\cos(\gamma_m \nu) + \frac{\text{Bi}_3}{\epsilon \gamma_m} \sin(\gamma_m \nu) \right) \quad (97)$$

Definieer nu

$$a_n(\nu) \equiv \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \left(\cos(\gamma_m \nu) + \frac{\text{Bi}_3}{\epsilon \gamma_m} \sin(\gamma_m \nu) \right) \quad (98)$$

Substitueer dit in (97)

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\nu) J_0(\beta_n \rho) \quad (99)$$

Zeg nu

$$J_0(\beta_p \rho) = J_0(\beta_p \rho) \quad (100)$$

en vermenigvuldig het rechterlid met (99) (deze term is 1, dus dat mag) en neem vervolgens de integraal over ρ links en rechts, dan volgt

$$\int_0^1 J_0(\beta_p \rho) \rho \, d\rho = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\nu) \int_0^1 J_0(\beta_p \rho) J_0(\beta_n \rho) \rho \, d\rho \quad (101)$$

Pas nu (96) toe, dan blijft over:

$$a_p(\nu) = \frac{1}{\int_0^1 J_0^2(\beta_p \rho) \rho \, d\rho} \int_0^1 J_0(\beta_p \rho) \rho \, d\rho \quad (102)$$

Maar de eigenfuncties $g(\nu)$ zijn orthogonaal (zie (95)), dus herhaal dit trucje om te komen tot

$$\int_0^1 a_p(\nu) g_q(\nu) \, d\nu = \sum_{m=1}^{\infty} A_{pm}(\nu) \int_0^1 g_q(\nu) g_m(\nu) \, d\nu \quad (103)$$

Los dit op voor A_{pq}

$$A_{pq} = \frac{1}{\int_0^1 g_q^2(\nu) \, d\nu} \int_0^1 a_p(\nu) g_q(\nu) \, d\nu \quad (104)$$

Substitueer nu (102) in (104) om de oplossing te krijgen, dan volgt

$$A_{pq} = \frac{1}{\int_0^1 g_q^2(\nu) d\nu} \frac{1}{\int_0^1 J_0^2(\beta_p \rho) \rho d\rho} \int_0^1 \left[\int_0^1 J_0(\beta_p \rho) \rho d\rho \right] g_q(\nu) d\nu. \quad (105)$$

De oplossing is gevonden. Deze oplossing is immers:

$$\theta(\rho, \nu, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{-\alpha_{nm}^2 \tau} J_0(\beta_n \rho) (\cos(\gamma_m \nu) + \frac{\text{Bi}_3}{\epsilon \gamma_m} \sin(\gamma_m \nu)) \quad (94)$$

Waarbij de coëfficiënten A_{nm} worden gevonden met formule (105). De eigenwaarden β en γ worden gevonden met de formules (78) en (86) respectievelijk.

6.2 Resultaten Analytische oplossing

Door het invullen van geschikte parameters kan nu een oplossing worden berekend. Hiertoe worden MATLAB scripts gebruikt die terug te vinden zijn in de Bijlagen. Het systeem heeft een aantal vaste materiaaleigenschappen (Janssen en Warmoeskoerken, (2006)): Bovendien geldt: $g = 9.8 \text{ ms}^{-2}$, $\sigma = 5.67 \cdot$

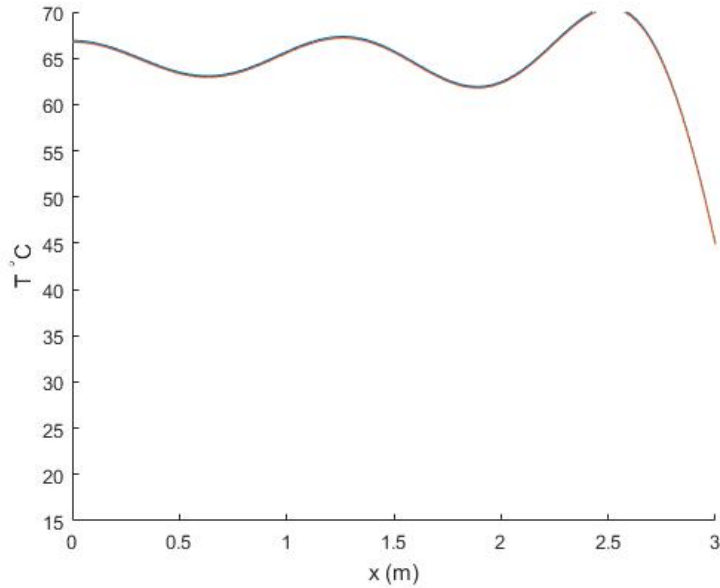
Tabel 1: Materiaaleigenschappen van het systeem

Grootheid	Waarde	Eenheid
λ_l	0.026	$\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$
λ_c	390	$\frac{\text{W}}{\text{m}\cdot\text{K}}$
a_w	$0.143 \cdot 10^{-6}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
a_l	$2.119 \cdot 10^{-5}$	$\frac{\text{m}^2}{\text{s}}$
ν_l	$1.82 \cdot 10^{-5}$	Pa s

$10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}^4}$ en $\langle T \rangle \approx 315\text{K}$.

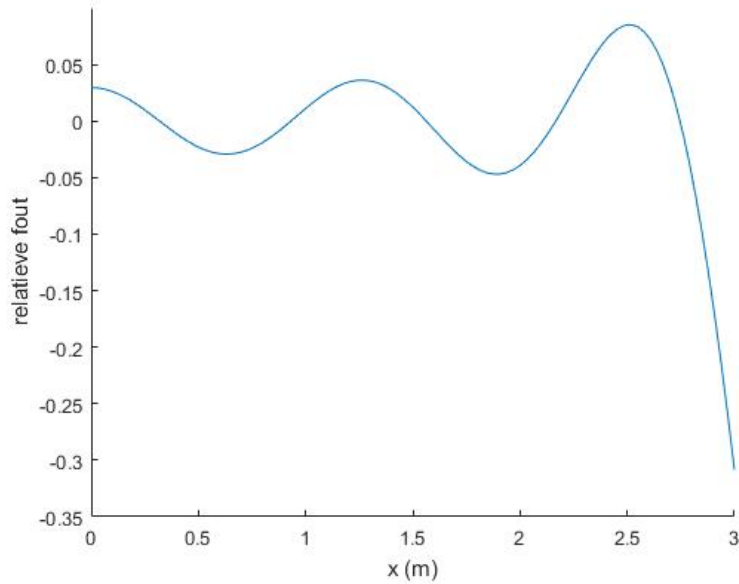
Er blijft nog een aantal parameters over: L, R_1, R_2, R_3 en λ_i . Voor het bekijken van de eerste oplossingen worden typische afmetingen gekozen: $R = 1.4 \text{ cm}$, $L = 3 \text{ m}$, $R_2 = 0.2 \text{ cm}$, $\text{Nu} = 2.58$. Er is de keuze hoeveel eigenwaarden β en γ worden gekozen voor het uitrekenen van de oplossing uit formule (94), om hier een goed inzicht van te krijgen is de oplossing op $t = 0$ berekend en geplot voor een verschillend aantal eigenwaarden, waarbij 4 doorsnedes worden bekeken. Deze doorsnedes zijn: $x = 0\text{m}$, $x = 2.9\text{m}$ en $r = 0\text{m}$, $r = 0.01\text{m}$.

Voor 5 eigenwaarden geeft dit de grafieken in figuur (8).



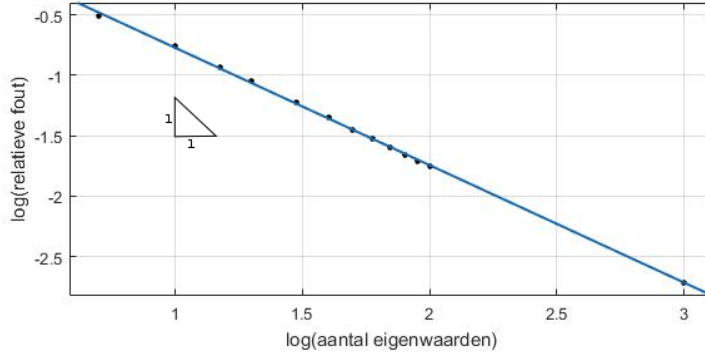
Figuur 8: De analytische oplossing op $t = 0$ met 5 eigenwaarden, voor een doorsnede op $r = 0$ m en $r = 0.01$ m, de oplossingen liggen over elkaar heen

Het blijkt dat deze oplossing niet overeenkomt met de gestelde beginsituatie $T_0 = 65^\circ\text{C}$. Merk op dat de oplossing sterk oscilleert hetgeen doet vermoeden dat er te weinig eigenwaarden zijn gebruikt. Het is daarom interessant om voor meer eigenwaarden de doorsnedes langs de x -as verder te bestuderen. In figuur (9) is daarom te zien wat de relatieve fout is voor de doorsnede op $r = 0$ m.



Figuur 9: De relatieve fout in de temperatuur op $t = 0$ s en $r = 0$ s ten opzichte van T_0 voor 5 eigenwaarden.

Het is duidelijk dat de fout erg groot wordt en voor een nauwkeurige benadering zal deze met meer eigenwaarden mogelijk worden verkleind. Daarom wordt het hierboven genoemde proces herhaald voor meerdere eigenwaarden. Om hier overzichtelijk naar te kunnen kijken wordt er gekeken naar de maximale relatieve fout bij de eigenwaarden op $t = 0$ s. Dit resultaat is gegeven in figuur (10).



Figuur 10: De logaritme van de maximale relatieve fout in de temperatuur op $t = 0$ s en $r = 0$ m ten opzichte van T_0 uitgezet tegen de $10\log$ van het aantal eigenwaarden. De doorgetrokken lijn is een lineaire fit, die aantoont dat de fout een machtsverband heeft met het aantal eigenwaarden. De helling is ongeveer -1; dus omgekeerd evenredig

De fit toont aan dat de relatieve fout omgekeerd evenredig afneemt met het aantal eigenwaarden. Met de relatieve fout wordt in dit verslag telkens de volgende fout bedoeld:

$$\frac{f - \hat{f}}{f},$$

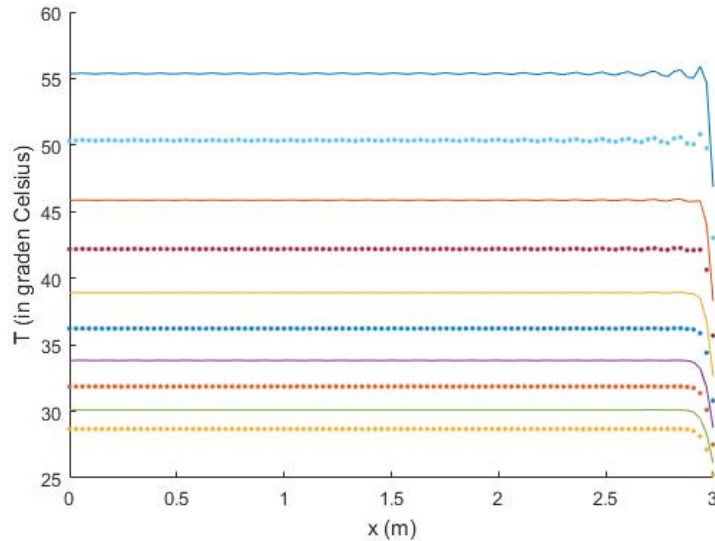
waarbij f de referentiewaarde is en \hat{f} de benadering van f . De fit aan de meetwaarden geeft een helling van ongeveer -1 (-0.989), wat betekent dat het volgende verband geldt:

$$e \sim \frac{1}{N_{eig}} \quad (106)$$

Waarbij e voor de fout staat en N_{eig} voor het aantal gebruikte eigenwaarden. Dit zou betekenen dat als het limiet van het aantal eigenwaarden naar oneindig gaat de fout naar 0 gaat. Dit valt ook te herleiden uit de analytische oplossing. Als men terugkijkt naar formule (94), dan is duidelijk dat de oplossing bestaat uit een oneindige sommatie van de eigenwaarden. Merk echter op dat er nog een factor is die meespeelt in de fout: het berekenen van de eigenwaarden. Dit kan immers ook niet exact worden gedaan. Dit wordt echter gedaan met behulp van de Newton-Rhapson methode (zie de matlabscripts in de bijlage). Deze methode convergeert kwadratisch en is een methode waar snel mee gerekend kan worden. Deze fout zit dus gemakkelijk vele ordes van grootte onder de fout die ontstaat door het aantal gebruikte

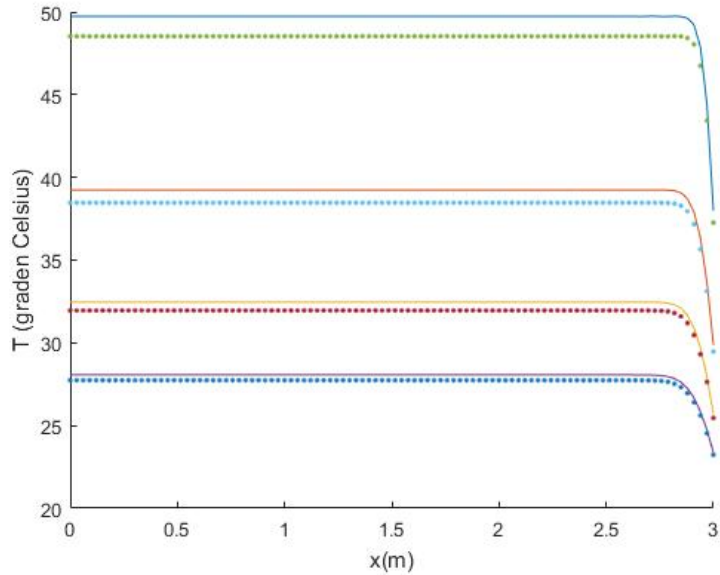
eigenwaarden, er wordt als stopcriterium voor Newton-Rhapson gekozen voor $\frac{|x_{i+1}-x_i|}{x_i} < 10^{-3}$, met x_i de i -de benadering van de eigenwaarde.

Nu wordt gekeken naar het gedrag van de temperatuur in de loop van de tijd. Hiertoe zijn grafieken gemaakt op verschillende tijdstippen met 50 eigenwaarden langs 2 verschillende doorsnedes langs de lengte van de buis, zie figuur (11).



Figuur 11: De analytische oplossing voor meerdere tijden zonder isolatie. De volle lijnen zijn de temperaturen op $r=0$ en de gestippelde lijnen net bij de rand. Van boven naar beneden voor zowel gestippeld als vol: 30 minuten, 1 uur, 1.5 uur, 2 uur en 2.5 uur.

Hierin is duidelijk dat de temperatuur in de lengterichting bij benadering tot aan het uiteinde constant is. Dit heeft allereerst met de isolatie randvoorwaarde te maken die ervoor zorgt dat op $x = 0$ de temperatuur kan dalen, in plaats van dat deze isotherm wordt gehouden. Bovendien koelt het water maar weinig af via het uiteinde op $x = 3$ m. Dit is te zien doordat het punt waar de helling begint nauwelijks verschuift, wat het warmteverloop in de paraxiale richting aanduidt. Door het verschil tussen de temperatuur bij de rand en het midden is duidelijk dat veel van het warmtetransport in de radiële richting plaatsvindt. Bij isolatie wordt verwacht dat dit minder tot niet het geval is. Daarom wordt nu eenzelfde resultaat beschouwd, maar dan met isolatief materiaal om de buis heen. Er wordt als isolatie naar PTFE gekeken wat een warmtegeleidingscoëfficiënt heeft van ongeveer 0.25 W/mK . Uit figuur (12) blijkt dat door isolatie het water langzamer afkoelt (zoals ver-



Figuur 12: De analytische oplossing voor meerdere tijden met isolatie. De volle lijnen zijn de temperaturen op $r=0$ en de gestippelde lijnen net bij de rand $r \approx R$. Van boven naar beneden voor zowel gestippeld als vol: 2.5 uur, 5 uur, 7.5 uur en 10 uur.

wacht). Ook ontstaat er iets meer een helling aan het uiteinde van de buis. Wat men zeker moet opmerken is dat de gestippelde lijnen nu veel dichterbij de volle lijnen liggen, wat er op duidt dat er minder warmteflux in de radiële richting is. Dit betekent namelijk dat er een minder steil temperatuurverloop is in de radiële richting.

6.3 Numerieke oplossing warmteprobleem met Comsol door middel van eindige elementen

In dit onderzoek wordt voor het numerieke model gebruik gemaakt van het programma COMSOL® Multiphysics. Dit is een programma dat fysische problemen die beschreven kunnen worden door differentiaalvergelijkingen, oplost door middel van de methode van eindige elementen.

De eindige elementen methode gaat uit van het idee dat elke partiële differentiaalvergelijking te schrijven is in een alternatieve, equivalente vorm. Deze vorm wordt de zwakke vorm (Eng: 'weak form') genoemd. In plaats van het oplossen van de partiële differentiaalvergelijking, wordt deze zwakke formulering bepaald en opgelost.

Er wordt gekeken naar een partiële differentiaalvergelijking op een domein Ω , deze heeft de algemene vorm:

$$Lu(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (107)$$

met L een differentiaaloperator en u een oplossing voor de vergelijking, waarvoor geldt $u \in \Sigma$ met:

$$\Sigma = \{u : u \text{ is glad} \mid (\text{en eventuele randvoorwaarden})\}.$$

Als voorbeeld wordt er gekeken naar een 2D, steady state warmtevergelijking:

$$-\nabla \cdot \left(k(x, y) \nabla u(x, y) \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (108)$$

met $k(x, y) > 0$. De rand Γ bestaat uit 2 delen, zo dat $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$. En de randvoorwaarden worden gekozen als $u = 0$ op Γ_1 en $\frac{\partial u}{\partial n} + u = g(x, y)$ op Γ_2 , n is de normaal op de rand die naar buiten wijst.

De zwakke vorm van een vergelijking als (107) wordt nu gevonden door testfuncties $v \in \Sigma_0$ te definiëren:

$$\Sigma_0 = \{v : v \text{ is glad}, v = 0 \text{ op } \Gamma_1\}.$$

De voorwaarde dat $v = 0$ op Γ_1 volgt omdat $\Sigma_0 \subset \Sigma$ en we voor $u \in \Sigma$ kunnen schrijven $u = u_1 + \epsilon v$ met $0 < \epsilon \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \Sigma, v \in \Sigma_0$. Als we willen dat er wordt voldaan aan de randvoorwaarde op γ_1 moet dus gelden

dat $v = 0$ op Γ_1 . De partiële differentiaalvergelijking wordt vermenigvuldigd met deze arbitraire testfunctie en er wordt geïntegreerd over het domein:

$$\int_{\Omega} (vLu - vf) \, d\Omega = 0. \quad (109)$$

Deze vergelijking, met L gereduceerd tot de laagst mogelijke orde (door middel van Gauss), heet de zwakke vorm van de vergelijking. Het blijkt dat dit altijd herschreven kan worden tot de eerste orde.

Voor het voorbeeld van (108) gaat dat als volgt:

$$\int_{\Omega} -v\nabla \cdot (k\nabla u) - vf \, d\Omega = 0. \quad (110)$$

De productregel met betrekking tot divergentie geeft:

$$\int_{\Omega} -\nabla (vk\nabla u) + k\nabla u\nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} vf \, d\Omega. \quad (111)$$

Vervolgens geeft Gauss:

$$-\int_{\Gamma} vk \frac{\partial u}{\partial n} \, d\Gamma + \int_{\Omega} k\nabla u\nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} vf \, d\Omega. \quad (112)$$

Als nu de randvoorwaarden voor v en u gebruikt worden blijft de zwakke vorm over:

$$\int_{\Gamma_2} v(u - g) \, d\Gamma + \int_{\Omega} k\nabla u\nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} vf \, d\Omega. \quad (113)$$

met $u = 0$ op Γ_1 .

Voor het oplossen van de zwakke vorm bestaan meerdere methoden. Een veel gebruikte methode is de Galerkin methode. Deze methode laat u benaderd worden door een eindige combinatie van basisfuncties ϕ_j :

$$u(x) \approx u^n(x) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x). \quad (114)$$

Door deze te substitueren in vergelijking (113) en te $v = \phi_i$ te kiezen (voor $0 < i \leq N$) volgt:

$$\sum_{j=1}^n c_j \left(\int_{\Omega} \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} \, d\Omega + \int_{\Omega} k \frac{d\phi_j}{dx} \frac{d\phi_i}{dx} \, d\Omega \right) = \int_{\Omega} \phi_i f \, d\Omega \quad (115)$$

Dit leidt tot een stelsel vergelijkingen met n onbekenden. Vergelijking (115) kan immers geschreven worden als $Ac = f$ met A een $n \times n$ matrix die bekend is, en een n -dimensionale vector f die bekend is. Deze vergelijkingen worden de Galerkin-vergelijkingen genoemd.

Voor het oplossen met de Galerkin methode wordt uitgenodigd tot een discretisatie van het domein. De discretisatie van het domein kan vrij worden gekozen en deze gekozen 'elementen' bepalen de nauwkeurigheid van de benadering. Meestal wordt in 2D voor driehoeken gekozen, omdat hier eenvoudig mee te rekenen is. In het 1D geval is het discretiseren van het domein niets anders dan een lijn in intervallen te verdelen, waarbij het voor de hand ligt om n even grote stukken te kiezen (dit hoeft natuurlijk niet). Door het oplossen van dit stelsel vergelijkingen volgt de vector met waarden c_j , door deze in te vullen in vergelijking (114) wordt de echte oplossing van de partiële differentiaalvergelijking benaderd. Deze methode kan makkelijk uitgebreid worden naar 3 dimensies. Transiënte problemen hebben nog een extra stap nodig voor tijdsdiscretisatie, maar de essentie blijft hetzelfde.

6.4 Soortgelijke resultaten uit de literatuur

Er wordt allereerst gekeken naar de oplossing van Carslaw en Jaeger zoals beschreven aan het begin van hoofdstuk 5. Zij beschrijven de stationaire oplossing van een axisymmetrische buis, waarbij het uiteinde op $x = 0$ op een vaste temperatuur wordt gehouden en er sprake is van warmteoverdracht naar de omgeving op de andere randen. De oplossing hiervoor is:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(r\alpha_n) \frac{\alpha_n \cosh \alpha_n(L-x) + h \sinh \alpha_n(L-x)}{\alpha_n \cosh \alpha_n L + h \sinh \alpha_n L}, \quad (29)$$

met J_0 de Besselfunctie en α_n die gevonden worden uit de oplossingen van

$$\alpha_n J_0'(\alpha R) + h J_0(\alpha R) = 0 \quad (30)$$

en

$$A_n = \frac{2\alpha_n^2}{R^2(h^2 + \alpha_n^2)J_0^2(\alpha_n R)} \int_0^R r f(r) J_0(r\alpha_n) dr. \quad (31)$$

Voor het bekijken van deze oplossing wordt er gewerkt met de waarden weergegeven in tabel (2).

Tabel 2: Gebruikte parameters voor oplossingen uit de literatuur.

Grootheid	Waarde	Eenheid
L	3	m
R	0.022	m
h	8.6912	$\frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}}$

Om deze oplossing te vergelijken met het warmwaterprobleem moet $f(r) = T_0$ gekozen worden en moet de oplossing nog geschaald worden naar de omgevingstemperatuur die Carslaw en Jaeger gelijk aan 0 hebben. Bovendien blijkt het dat de eigenwaarden α_n grote getallen worden die steeds meer ordes uit elkaar komen te liggen. Hierdoor worden $\cosh(\alpha_n L)$ en $\sinh(\alpha_n L)$ te groot om mee te rekenen. Om dit op te lossen worden deze termen voor $\alpha_n > \frac{10}{L}$ als volgt benaderd:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \approx \frac{e^x}{2},$$

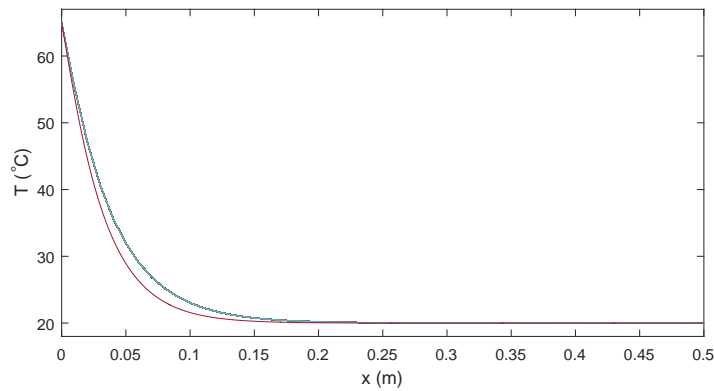
$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \approx \frac{e^x}{2},$$

of in dit geval $\frac{1}{2}e^{\alpha_n L}$. Dit zorgt voor een maximale relatieve fout:

$$\left| \cosh(10) - \frac{e^{10}}{2} \right| / \cosh(10) \approx 2 \cdot 10^{-9}.$$

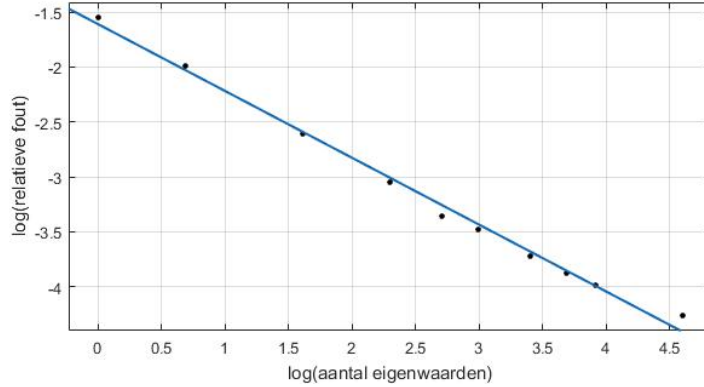
De cosinus en sinus hyperbolicus delen dan tegen elkaar weg. Om een foutanalyse van het gebruik van het aantal eigenwaarde in de oplossing te maken, wordt als referentie de oplossing gebruikt met de meeste eigenwaarden. Deze oplossing staat gegeven in figuur (13) en is vergeleken met de numerieke oplossing onder dezelfde voorwaarden.

Het blijkt dat er een fout zit tussen de oplossing van Comsol t.o.v. die van



Figuur 13: Steady state oplossing van Carslaw en Jaeger over de lengte van de cilinder op $r=0$, voor 1000 eigenwaarden (blauw) en de numerieke oplossing van Comsol onder dezelfde voorwaarden (rood)

Carslaw en Jaeger. De maximale relatieve fout bedraagt 9.61%. Er wordt gekeken naar de maximale relatieve fout voor het volgende aantal eigenwaarden: 1,2,5,10,15,20,30,40,50,100. Om een goed beeld te vormen is er een logaritmische grafiek gemaakt van deze waarden. Hier is een lineaire fit door gegaan, deze is te zien in figuur (14). Het blijkt dat de fout afneemt met het aantal eigenwaarden in een volgend verband: $\delta \sim N_{eig}^{-0.61}$, met δ de relatieve fout. Merk bovendien op dat zelfs voor een klein aantal eigenwaarde een redelijke goede benadering volgt. Merk echter op dat de fout op een gegeven moment gedomineerd zal worden door de benaderingen van de sinus hyperbolicus en cosinus hyperbolicus.



Figuur 14: Logaritmische grafiek van de relatieve fout van de oplossing bij een aantal eigenwaarden. De bijbehorende helling is ongeveer -0.61.

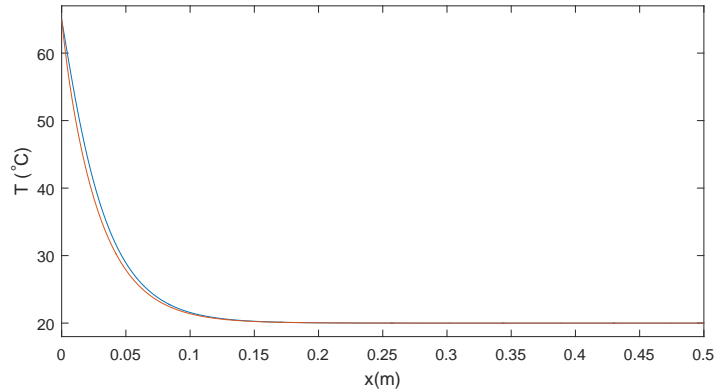
Nu wordt de oplossing van Mackowski beschouwd (zie figuur (6) in hoofdstuk 5). Hij beschrijft een 'heat fin', waarbij het uiteinde op $x = L$ geïsoleerd is. Hij geeft de volgende oplossing:

$$\theta = \frac{2\text{Bi}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh[\lambda_n(1 - \xi)] J_0(\lambda_n \rho)}{\cosh(\lambda_n) J_0(\lambda_n a) (\lambda_n^2 + \text{Bi}^2)}. \quad (37)$$

Waar λ_n gevonden wordt uit:

$$\lambda_n J_1(\lambda_n a) = \text{Bi} J_0(\lambda_n a) \quad (38)$$

Hier treedt wederom het probleem op van de grote waarden voor de eigenwaarden λ_n en wordt dezelfde benadering gebruikt als bij de oplossing van Carslaw en Jaeger. De foutenanalyse wordt op dezelfde manier gedaan, waarbij de vergelijkingsoplossing is weergegeven in figuur (15).



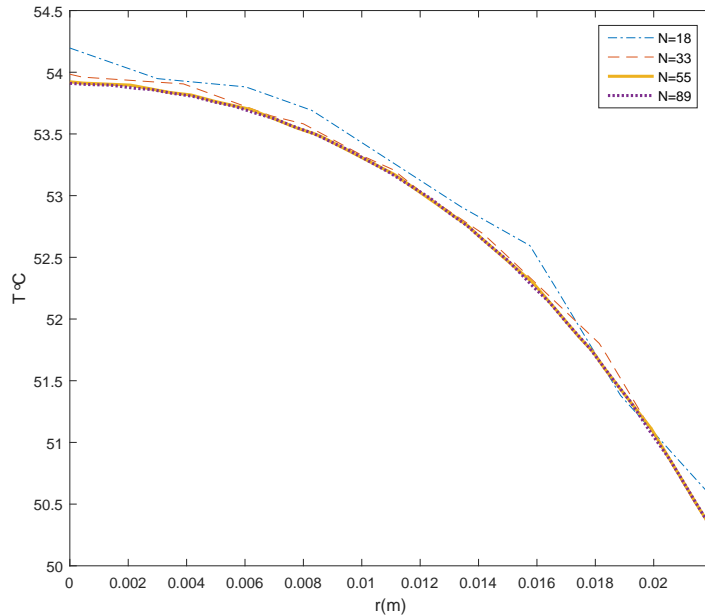
Figuur 15: Steady state oplossing van Mackowski over de lengte van de cilinder op $r=0$, voor 1000 eigenwaarden (geel) en de numerieke oplossing van Comsol onder dezelfde voorwaarden (rood), de grafieken overlappen nagenoeg volledig.

De maximale relatieve fout bedraagt 0.92%. Het is bovendien interessant om te zien dat het verschil op de randvoorwaarde op $x = L$ tussen Mackowski en Carslaw en Jaeger leidt tot een stationaire oplossing van dezelfde vorm.

Voor de vergelijking van Comsol met het transiënte probleem wordt geen grafiek gegeven, omdat deze geen relatie heeft met het warmwaterprobleem. Om de oplossingen te vergelijken is er in beide gevallen 100 oplossingen berekend tussen 0 en 1 uur. Deze 100 oplossingen zijn met elkaar vergeleken voor 1000 eigenwaarden en 20000 gridpunten en de maximale relatieve fout in de temperatuur bedraagt dan 1.31%. De fouten in de vergelijking met Comsol duiden erop dat het model in Comsol een goede benadering geeft van de gezochte oplossingen.

6.5 Resultaten Numerieke oplossing

Onder dezelfde parameterwaarden als bij de analytische oplossing wordt de stationaire oplossing van het numerieke probleem met de beginvoorwaarde en randvoorwaarden (52)-(56) en zonder isolatie gegeven in figuur (16). Er wordt hierbij gekeken naar verschillende meshgroottes van COMSOL. Door

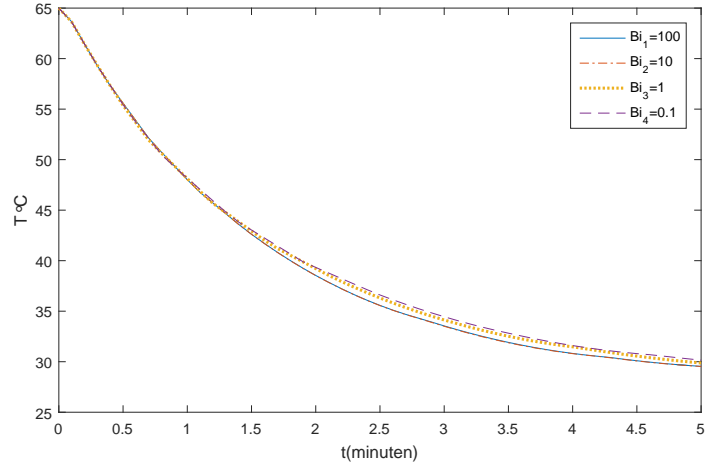


Figuur 16: Stationaire oplossing voor verschillende meshgroottes. De hoeveelheid gridpunten in de r -richting bedragen: 18, 33, 55, 89 voor de stip-streep alternerend, gestreepte, volle, gestippelde grafiek respectievelijk. De volle en gestippelde grafiek overlappen nagenoeg.

interpolatie kan er een uitspraak worden gedaan over de maximale relatieve fout. De maximale absolute fout van het verschil tussen de oplossing voor 55 en 89 gridpunten bedraagt 0.0013. Dit wordt aanvaard als een oplossing die onafhankelijk is van het grid, er wordt voor de oplossingen daarom gebruik gemaakt van dit grid.

In dit verslag zijn er 3 dimensieloze grootheden die bepalend zijn voor de oplossing van de warmtevergelijking. Deze dimensieloze grootheden zijn: Bi_1 ,

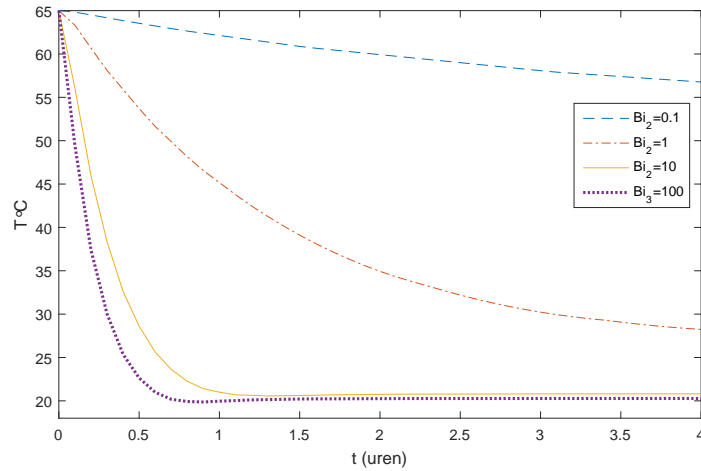
Bi_2 en ϵ zoals gedefinieerd na vergelijking (62) en (67) in 6.1. Om te kijken hoe de temperatuuroplossing zich gedraagt bij variatie van deze parameters wordt er gekeken naar de temperatuur op een punt over een bepaalde tijd. De variatie van Bi_1 is gegeven in figuur (17) De maximale relatieve fout tus-



Figuur 17: De temperatuur over de tijd voor $Bi_1 = 0.1, 1, 10$ en 100 in de eerste 5 minuten op $(r, x = 0, 2.9)$. $Bi_2 = 1$, $\epsilon = 0.00733$.

sen de oplossingen voor $Bi_1 = 0.1$ en $Bi_1 = 100$ bedraagt 5.3%.

De variatie van Bi_2 wordt gegeven in figuur (18). In tegenstelling tot Bi_1 is er nu een grote invloed op de oplossing in hetzelfde punt. Er kan geconcludeerd worden dat voor het gekozen punt de parameter Bi_2 van groter belang op de oplossing is dan de parameter Bi_1 . Het verschil in de oplossing is precies wat de theorie voorspelt: doordat het Biot-getal toeneemt neemt de convectie aan de buiswand toe, waardoor de buis sneller afkoelt.



Figuur 18: De temperatuur over de tijd voor $Bi_2 = 1, 10, 100$ en 1000 op het punt $(r, x) = (0.01, 0.05)$. $Bi_1 = 1$, $\epsilon = 0.00733$

Het is niet nuttig om figuren te maken voor de variatie van de parameter ϵ , omdat een wijziging in deze parameter een wijziging in het domein oplevert en er dus telkens sprake is van andere posities. De variatie van de parameter ϵ wordt daarom alleen bekeken bij de groei van legionella.

6.6 De groei van Legionella

De Legionella die zich in bijna verwaarsloosbare hoeveelheden in het stilstaande water bevindt, gaat zich verspreiden op het moment dat het water niet meer stroomt. Dit gebeurt op twee manier: de groei van de bacterie en diffusie door het water heen. De groei van een bacterie gaat door middel van verdubbeling, dit geeft aanleiding tot een standaard exponentieel groeiemodel voor bacteriën:

$$\frac{\partial c(r, x, t)}{\partial t} = k(T) \cdot c(r, x, t), \quad (116)$$

met beginvoorwaarde $c(r, x, 0) = c_0(r, x)$. Hierin staat c voor de concentratie van de legionella in het water (in kve/l, kolonievormende eenheden per liter), en is k een nader te bepalen constante die afhangt van de verdubbelingstijd van legionella. Er wordt nu aangenomen dat de $c_0(r, x) = c_0$ en dus de bacterie in eerste instantie uniform verdeeld is over het water. De verdubbelingstijd van legionella ligt tussen de 2 en 8 uur (van Olfen, 1999). Er wordt bijvoorbeeld uitgegaan van het ergste geval; dus een verdubbelingstijd van 2 uur. Nu wordt (116) opgelost:

$$\frac{dc}{dt} = kc \Rightarrow c = c_0 e^{kt}.$$

Aangezien de verdubbelingstijd op 2 uur is gezet, geldt nu:

$$c_0 e^{2k} = 2c_0 \Rightarrow 2k = \ln(2) \Rightarrow k = \frac{\ln(2)}{2} \approx 0.35 \text{ h}^{-1}$$

Er moet rekening gehouden worden met de eenheid. Merk op dat dit groei-model alleen gebruikt wordt in de tijdstippen dat de temperatuur van het water zich tussen de 25 en 55 graden Celsius bevindt. Wanneer de legionella in een gebied zit waar de temperatuur hieronder komt, wordt aangenomen dat de groei plaatselijk staakt, wanneer de temperatuur hierboven komt sterft de legionella zeer snel af.

Zoals het groei-model nu is kan de legionella onbeperkt groeien, dit is natuurlijk niet het geval en afhankelijk van onder andere de voedingsstoffen die aanwezig zijn in het water. Daarom wordt er een extra term geïntroduceerd die de groei begrenst:

$$\frac{\partial c(r, x, t)}{\partial t} = k(T) \cdot c(r, x, t) \left(1 - \frac{c(r, x, t)}{c_{max}} \right), \quad (117)$$

hierin is c_{max} de maximale concentratie die de bacterie kan behalen, ofwel het draagkracht. Als c_{max} lager is dan de wettelijke toegestane hoeveelheid, dan zal de bacterie nooit een gevaar kunnen vormen. Een alternatieve preventiemethode zou dus kunnen zijn om deze c_{max} te verkleinen, dit ligt echter buiten de scope van dit onderzoek. Er wordt aangenomen dat c_{max} ruim boven de wettelijke toegestane waarde van 100 kve/l ligt, dus wordt c_{max} op 10 maal deze waarde gezet.

Vervolgens wordt de diffusie meegenomen en wordt het totale model voor de concentratie van de legionella:

$$\frac{\partial c(r, x, t)}{\partial t} = \mathbb{D}\nabla^2 c(r, x, t) + k(T) \cdot c(r, x, t) \left(1 - \frac{c(r, x, t)}{c_{max}} \right), \quad (118)$$

met beginvoorwaarde:

$$c(x, 0) = c_0(r, x),$$

en randvoorwaarden:

$$\frac{\partial c}{\partial x}(r, 0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(r, L, t) = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}(0, x, t) = 0,$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}(R, x, t) = 0.$$

De diffusiecoëfficiënt van legionella bedraagt volgens het model van Vonk $2.1 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, dit is echter een onrealistisch grote diffusiecoëfficiënt. De theorie geeft een waarde van $1 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2\text{s}^{-1}$. Voor vergelijking met de het model van Vonk wordt er dus met 2 diffusiecoëfficiënt gerekend. In de theorie van Van Amerongen et al. (2013) wordt een model gemaakt voor de verdubbelingstijd van legionella tussen 25 en 47 graden Celsius (Let op: T is hier in graden Celsius):

$$t_v = 0.5702T^2 - 43.3T + 829 \quad (119)$$

met t_v de verdubbelingstijd in uren. Dit resulteert in een waarde $k(T)$ op dezelfde manier als tevoren, waarbij er een omrekeningsfactor naar seconden is meegenomen:

$$k(T) = \frac{\ln(2)}{3600(0.5702T^2 - 43.3T + 829)} \quad (120)$$

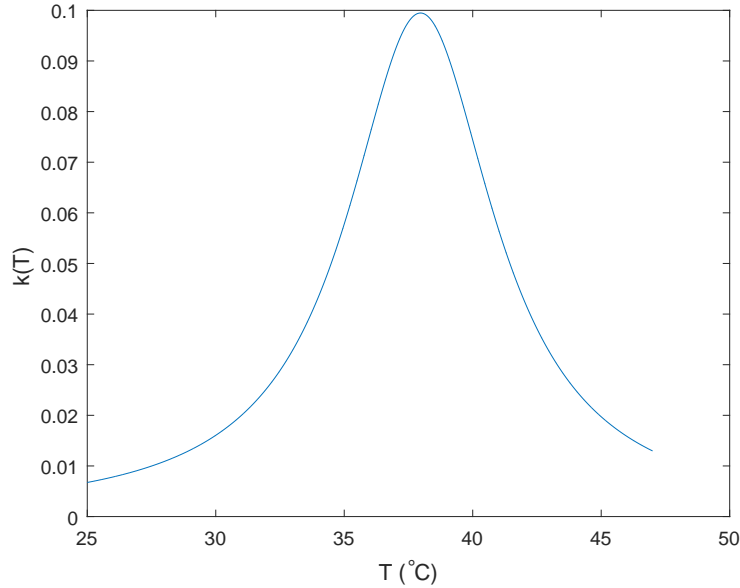
Voor temperaturen lager dan 25 °C en tussen 47 °C en 55 °C groeit de legionella niet. Boven 55 °C sterft de legionella af. Om dit te simuleren wordt er nog een stapfunctie s toegevoegd:

$$s(T) = \begin{cases} 1 & T < 55^\circ\text{C} \\ \frac{c_0}{c_{max}} & T \geq 55^\circ\text{C} \end{cases}$$

Deze stapfunctie zorgt ervoor dat de legionella bij temperaturen boven de 55 graden Celsius afsterft tot de beginconcentratie, dan is immers de term na $k(T)$ negatief voor $c > c_0$. Deze stapfunctie wordt in vergelijking (118) meegenomen door c_{max} te vervangen met $s \cdot c_{max}$:

$$\frac{\partial c(r, x, t)}{\partial t} = \mathbb{D}\nabla^2 c(r, x, t) + k(T) \cdot c(r, x, t) \left(1 - \frac{c(r, x, t)}{sc_{max}}\right). \quad (121)$$

Om de concentratie legionella in het water te bepalen, is de temperatuur van het water nodig; andersom is de temperatuur van het water niet afhankelijk van de hoeveelheid legionella. Er is sprake van een eenzijdig gekoppeld systeem. Deze diffusievergelijking wordt in Comsol aan het warmteprobleem gekoppeld om tot een concentratie van legionella te komen als functie van plaats en tijd.



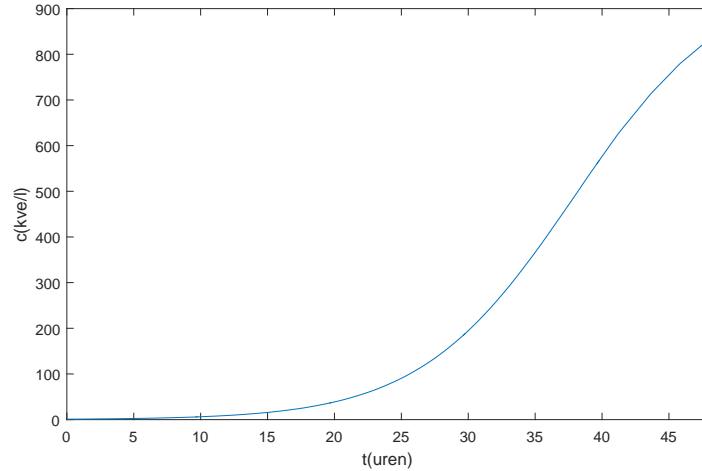
Figuur 19: k tegen de temperatuur voor het temperatuurinterval waarin legionella exponentieel groeit (met behulp van vergelijking (120)).

6.7 Resultaten Legionella

De resultaten van de concentratie legionella wordt op de volgende manier gemeten: het tijdstip waarom de maximale concentratie in de buis zich boven de wettelijke norm van 100 kve/l bevindt. Dit is natuurlijk afhankelijk van de beginconcentratie c_0 van de legionella. Ter illustratie wordt uitgegaan van een beginvoorwaarde van $c_0 = 1$ kve/l. De groei van legionella in een warmwaterleiding onder dezelfde parameters als in 6.2 geeft de groei van de maximale concentratie legionella zoals weergegeven in figuur (20). Er wordt een parametervariatie gedaan voor Bi_1 , Bi_2 en ϵ . De bijbehorende tijden staan aangegeven in tabellen (3), (4) en (5). Merk op dat er gegevens zijn met een juiste en een onjuiste diffusiecoëfficiënt voor vergelijking met de literatuur.

Uit de parametervariëaties blijkt dat de variatie van Bi_1 in vergelijking met de variatie van Bi_2 bijna geen invloed heeft op de temperatuur. Dit effect kan verklaard worden door te kijken naar vergelijking (67). Hier is te zien dat het effectieve Biot-getal voor Bi_2 , wordt beïnvloed door ϵ . Aangezien deze

voor een warmwaterleiding typisch klein is, betekent dit dat de oplossing gedomineerd wordt door warmtetransport in de radiële richting. Aangezien Bi_1 de bijdrage in de toegevoegde dimensie beschrijft, zou dit betekenen dat de één-dimensionale benadering plausibel is. Voor variatie in ϵ is er echter wel een duidelijk verschil van een aantal uren in het vinden van t_c (het tijdstip waarop de concentratie legionella boven de wettelijke norm komt). Er volgt dat de één-dimensionale benadering een goede benadering is als $\epsilon \ll 1$.



Figuur 20: De maximale concentratie van legionella in de warmwaterkolom, tegen de tijd. De kritieke waarde van 100 kve/l is na ongeveer 25.8 uur bereikt.

Tabel 3: De verstreken tijdsduur in uren waarna de concentratie legionella boven de wettelijke toegestane waarde van 100 kve/l komt (t_c) voor verschillende waarden van Bi_1 . $Bi_2 = 1$, $\epsilon = 0.00733$

Bi_1	$t_c(uren)$ (diffusie fout)	$t_c(uren)$ (diffusie goed)
0.1	25.9	18.6
1	25.8	18.4
10	25.7	18.4
100	25.5	18.3

Het wel of niet isoleren zit in Bi_2 . Isolatie zorgt voor een lage waarde van Bi_2 . Voor lage waarden van Bi_2 blijkt echter dat t_c veel kleiner wordt, dit wordt veroorzaakt doordat de buis zo langzaam afkoelt dat er een groot volume is dat lang in het juiste temperatuurinterval voor legionella blijft. Hierdoor wordt de grens voor legionella sneller bereikt.

Tabel 4: De verstreken tijdsduur in uren waarna de concentratie legionella boven de wettelijke toegestane waarde van 100 kve/l komt (t_c) voor verschillende waarden van Bi_2 . $Bi_1 = 1$, $\epsilon = 0.00733$

Bi_2	$t_c(uren)$ (diffusie fout)	$t_c(uren)$ (diffusie goed)
0.1	18.7	14.6
1	25.8	18.4
10	22.7	17.9
100	21.1	16.4

Tabel 5: De verstreken tijdsduur in uren waarna de concentratie legionella boven de wettelijke toegestane waarde van 100 kve/l komt (t_c) voor verschillende waarden van ϵ . $Bi_1 = 1$, $Bi_2 = 1$

ϵ	$t_c(uren)$ (diffusie fout)	$t_c(uren)$ (diffusie goed)
0.00733	25.8	18.4
0.07331	23.5	17.7
0.733	22.1	17.3

7 Conclusies

In dit verslag is de groei van legionella in een warmwaterleiding onderzocht. Er is een model gemaakt voor de temperatuur als functie van de tweedimensionale plaats en de tijd en een model voor de concentratie van legionella als functie van de tweedimensionale plaats en de tijd. Allereerst is ergetracht een analytische oplossing te bepalen voor de temperatuur. Hiertoe is de randvoorwaarde aan het begin van de buis van een isotherme randvoorwaarde naar een geïsoleerde randvoorwaarde gebracht. Deze isotherme randvoorwaarde zorgt ervoor dat de temperatuur na verloop van tijd uniform naar de omgevingstemperatuur gaat. Dit zou betekenen dat, indien dit snel genoeg gaat, er in het stationaire geval geen legionella meer zou groeien. Het blijkt echter dat de stationaire oplossing voor de numerieke oplossing (die wel een isotherme randvoorwaarde heeft) een heel andere vorm heeft. Deze draagt wel een temperatuurgradiënt, dit betekent dat er in de stationaire toestand legionella zal blijven groeien totdat de hele buis de maximale concentratie heeft bereikt (wegens diffusie). Aan de hand van deze vergelijking kunnen de analytische en numerieke oplossing strijdig verklaard worden. De voorkeur

gaat naar het berekenen van de concentratie legionella door middel van het numerieke model, omdat deze de gewenste isotherme randvoorwaarde draagt. Er wordt geconcludeerd dat, in dit geval, het snel genoeg laten afkoelen van legionella niet leidt tot legionellapreventie.

Uit de resultaten is geconcludeerd dat de ééndimensionale benadering juist is als $\epsilon \ll 1$ en de stationaire oplossing geeft onder typische afmetingen alleen een goed beeld als $Bi_2 \gg 1$.

Voor legionellepreventie is bovendien geconcludeerd dat er beter niet geïsoleerd kan worden. Voor een typische benadering zal de kraan ongeveer elke 18 uur moeten worden doorgespoeld om legionella te voorkomen.

8 Bijlagen

Hier staan de gebruikte matlabscripts.

Het berekenen van de warmteoverdrachtscoëfficiënt.

```
Ri1=0.022;
Ri2=0.024;
Ri3=0.07;
lambdai=0.25;
lambdac=390;
hi=log(Ri3/Ri2)*Ri1/lambdai;

%hconv
g=9.8;
DT=40;
L=3;
nul=1.82*10^(-5);
al=2.119*10^(-5);
Tl=293;
lambdal=0.026;
Nussl=0.55*(L^3*g*DT/(nul*al*Tl))^(1/4);
hconv=Nussl*lambdal/L;
%hstr
epsil=0.85;
sigm=5.67*10^-8;
Tgem=((273+65)+293)/2;
hstr=4*epsil*sigm*Tgem^3;
%hwandisolatie
hwandi=((hstr+hconv)^(-1)*Ri1/Ri3+log(Ri2/Ri1)*Ri1/lambdac+hi...
)^(-1);
%hwand
hwand=((hstr+hconv)^(-1)*Ri1/Ri2+log(Ri2/Ri1)*Ri1/lambdac)...
^(-1);
%hopening
hopening=hstr+hconv;
```

Het script voor het oplossen van het eigenwaardeprobleem in ρ .

```
lambdaw=0.60;
R=0.022;
h1=hwandi;
Bi1=R*h1/lambdaw;
```

```

f=@(x,Bi1) -x.*besselj(1,x)+Bi1.*besselj(0,x); %Het ...
    eigenwaardeprobleem
g=@(x,Bi1) (1/2)*(-2*(Bi1+1)*besselj(1,x)-x*besselj(0,x)+x*...
    besselj(2,x)); %afgeleide
for j = 1:10000
    k(1)=j/2;
for i=2:11
    k(i)=k(i-1)-f(k(i-1),Bi1)/g(k(i-1),Bi1); %Newton Rhapson
end
Beta(j)=k(11);
end
Beta=sort(unique(real(Beta))); %Alleen positieve unieke ...
    waarden
Beta=Beta(Beta>0);
T(1)=1;
for k=2:length(Beta)
    if (Beta(k)-Beta(k-1))>0.005 %De waarden die niet door ...
        unique zijn weggehaald verwijderen
        T(k)=1;
    else
        T(k)=0;
    end
end
Beta=Beta.*T;
Beta=Beta(Beta>0);

```

Het script voor het oplossen van het eigenwaardeprobleem in ν

```

Bi3=0;
R=0.022;
Bi2=R*hopening/lambdaw;
L=3;
eps=R/L;
f=@(x,eps,Bi2,Bi3) sin(x).*(eps*(x.^2-(Bi2*Bi3*eps^(-2))))-x....
*cos(x)*(Bi2+Bi3); %Het eigenwaardeprobleem met de limiet ...
van Bi3 naar oneindig genomen.
g=@(x,eps,Bi2,Bi3) cos(x).*(eps*(x.^2-(Bi2*Bi3*eps^(-2))))+...
sin(x).*(2*eps*x)-cos(x)*(Bi2+Bi3)+x.*sin(x)*(Bi2+Bi3); %...
afgeleide
for j = 1:10000
    k(1)=j/2;
for i=2:130
    k(i)=k(i-1)-f(k(i-1),eps,Bi2,Bi3)/g(k(i-1),eps,Bi2,Bi3); ...
    %Newton Rhapson
end
Gamma(j)=k(130);
end
Gamma=sort(unique(real(Gamma))); %Alleen positieve unieke ...
waarden
Gamma=Gamma(Gamma>0);
clear T
T(1)=1;
for k=2:length(Gamma)
    if (Gamma(k)-Gamma(k-1))>0.005 %De waarden die niet ...
door unique zijn weggehaald verwijderen
        T(k)=1;
    else
        T(k)=0;
    end
end
Gamma=Gamma.*T;
Gamma=Gamma(Gamma>0);

```

Het berekenen en plotten van θ

```

clear A
% eerste integraal g^2
A1=(2*Gamma.*(Gamma.^2*eps^2+Bi3^2+Bi3*eps)+sin(2*Gamma).*(...
Gamma.^2*eps^2-Bi3^2)-2*Gamma*Bi3*eps.*cos(2*Gamma))./(4*...
Gamma);

```

```

% tweede integraal J^2
A2=(1/2)*((besselj(0,Beta)).^2+(besselj(1,Beta)).^2);
% derde integraal g
A3=(Bi3*(-cos(Gamma))+Gamma*eps.*sin(Gamma)+Bi3)./(Gamma);
% vierde intergraal J
A4=besselj(1,Beta)./Beta;
% Coefficienten
Beta=Beta(1:18);
for i = 1:18
A(i,:)=1./A1.*1./A2(i).*A3.*A4(i);
end
%% Berekening lambda
N=18;
lambda=zeros(N,N);
for i = 1:N
    for j = 1:N
lambda(i,j)=sqrt(eps^2*Gamma(i)^2+Beta(j)^2);
    end
end
%% Berekening theta
a=0.143*10^(-6);
t=1000000;
tau=a*t;
K=15; %%aantal gebruikte eigenwaarden
nu=linspace(0,1,100);
th=zeros(K,K);
theta=zeros(length(nu),length(nu));
for k = 1:length(nu)
    for j = 1:length(nu)
        for i = 1:K
            for h=1:K
                th(i,h)=A(i,h)*exp(-lambda(h,i)^2*tau)*...
                    besselj(0,Beta(i)*nu(k))*(eps*Gamma(h)*cos...
                    (Gamma(h)*nu(j))+Bi3*sin(Gamma(h)*nu(j)));
            end
        end
        theta(k,j)=sum(sum(th));
    end
end
T=theta*40+20;
figure
contour(nu*R,nu*L,T,'ShowText','on')
xlabel('r (m)')
ylabel('x (m)')
figure

```

```

hold on
plot (nu*R,T(1,:))
plot (nu*R,T(100,:))
xlabel('r (m)')
ylabel('T ^{\circ}C')
ylim([15,65])
hold off
figure
hold on
plot (nu*L,T(:,1))
plot (nu*L,T(:,100))
xlabel('x (m)')
ylabel('T ^{\circ}C')
ylim([15,65])
hold off

```

Het berekenen van de eigenwaarde voor Carslaw en Jaeger

```

clear T
clear alpha
alpha=zeros(1,10000);
R=0.022;
h=8.6912;
f=@(x,R,h) -x.*besselj(1,R*x)+h.*besselj(0,R*x); %Het ...
    eigenwaardeprobleem
g=@(x,R,h) 1/2*(-2*(R*h+1)*besselj(1,R*x)-R*x.*besselj(0,R*x)...
    +R*x.*besselj(2,R*x));
j=1;
for k = 1:1500000
    j = k/1000;
    j_old = j+100;
    iter = 0;
    while abs(j_old-j) > 10^-3 && j ~= 0
        j_old = j;
        j = j - f(j,R,h)/g(j,R,h);
        iter = iter + 1;
    end
    alpha(k)=j;
end
alpha=sort(unique(real(alpha))); %Alleen positieve unieke ...
    waarden
alpha=alpha(alpha>0);
T(1)=1;
for k=2:length(alpha)

```



```

    if (alpha(k)-alpha(k-1))>0.005 %De waarden die niet ...
        door unique zijn weggehaald verwijderen
        T(k)=1;
    else
        T(k)=0;
    end
end
alpha=alpha.*T;
alpha=alpha(alpha>0);

```

Het berekenen van de oplossing van Carslaw en Jaeger

```

clear t
clear Igr
clear T
clear A
T_0=45;
L=3;
%% eerste integraal
Igr=T_0*R*besselj(1,alpha*R)/alpha;
%% coëfficiënten
A=2*alpha.^2./(R^2*(h^2+alpha.^2).*(besselj(0,alpha*R)).^2).*...
    Igr;
%%
N=300;
r=linspace(0,R,N);
x=linspace(0,L,N);
t=zeros(100,1);
T=zeros(100,100);
for i=1:N
    for j=1:N
        for k=1:800
            if alpha(k)>10
                t(k)=A(k)*besselj(0,r(j))*exp(-alpha(k)*x(i))...
                    ;
            else
                t(k)=A(k)*besselj(0,r(j)*alpha(k)).*(alpha(k).*cosh(alpha(k)...
                    *(L-x(i)))+h*sinh(alpha(k)*(L-x(i))))./ (alpha(k).*cosh(...
                    alpha(k)*L)+h*sinh(alpha(k)*L));
            end
        end
        T(i,j)=sum(t);
    end
end
T=T+20;

```

Het berekenen van de eigenwaarden van Mackowski

```
clear all
lambdaw=0.60;
L=3;
R=0.022;
h1=8.6912;
Bi1=L*h1/lambdaw;
a=R/L;
f=@(x,R,Bi1) -x.*besselj(1,R*x)+Bi1.*besselj(0,R*x); %Het ...
eigenwaardeprobleem
g=@(x,R,Bi1) 1/2*(-2*(R*Bi1+1)*besselj(1,R*x)-R*x.*besselj(0,...
R*x)+R*x.*besselj(2,R*x));
j=1;
alpha=zeros(1,10000);
for k = 1:1000000
j = k/10;
j_old = j+100;
iter = 0;
while abs(j_old-j) > 10^-3 && j ~= 0
j_old = j;
j = j - f(j,R,Bi1)/g(j,R,Bi1);
iter = iter + 1;
end
alpha(k)=j;
end
alpha=sort(unique(real(alpha))); %Alleen positieve unieke ...
waarden
alpha=alpha(alpha>0);
C(1)=1;
for k=2:length(alpha)
if (alpha(k)-alpha(k-1))>0.005 %De waarden die niet ...
door unique zijn weggehaald verwijderen
C(k)=1;
else
C(k)=0;
end
end
alpha=alpha.*C;
alpha=alpha(alpha>0);
```

Het berekenen van de oplossing van Mackowski

```
clear t
```

```

clear T
clear A
L=3;
R=0.022;
h1=8.6912;
Bi1=L*h1/lambdaw;
T_0=65;
N=100;
a=0.0073;
x=linspace(0,1,N);
r=linspace(0,a,N);
t=zeros(100,1);
lnt=zeros(100,1);
T=zeros(100,100);
voor=2*Bi1/a;
for i=1:N
    for j=1:N
        for k=1:5
            if alpha(k)>10
t(k)=exp(-x(i)*alpha(k))*besselj(0,alpha(k)*r(j))/(besselj(0,...
alpha(k)*a)*(alpha(k)^2+Bi1^2));
            else
t(k)=cosh(alpha(k)*(1-x(i)))*besselj(0,alpha(k)*r(j))/(cosh(...
alpha(k))*besselj(0,alpha(k)*a)*(alpha(k)^2+Bi1^2));
            end
        end
    end
    T(i,j)=voor*(sum(t));
end
end

```

Functie die de afgeleide van een besselfunctie berekent:

```

function [j] = dbesselj(nu,z)
%afgeleide van Bessel

j = 0.5*(besselj(nu-1,z) - besselj(nu+1,z));

end

```

Referenties

- [1] Legionella.nl - Alles over legionella
<http://www.legionella.nl>
- [2] Stichting veteranenziekte-
<http://www.Stichtingveteranenziekte.nl>
- [3] S. M. Vonk. *Legionellabacterie in warmwaterleidingen*. Technische Universiteit Delft, Delft, 2014.
- [4] H.E.A. Van den Akker en R.F. Mudde. *Fysische transportverschijnselen* VSSD, Delft, 2013.
- [5] L.P.B.M. Janssen, M.M.C.G. Warmoeskerken. *Transport Phenomena Data Companion* VSSD, Delft, 2006.
- [6] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger. *Conduction of heat in solids* Clarendon Press, Oxford, 1959.
- [7] D. W. Mackowski. *Conduction Heat Transfer* Auburn University, Auburn.
- [8] G. van Amerongen, J V. Lee, J. Suter. *Legionella and solar water heaters* Solar Certification Fund, 2013.