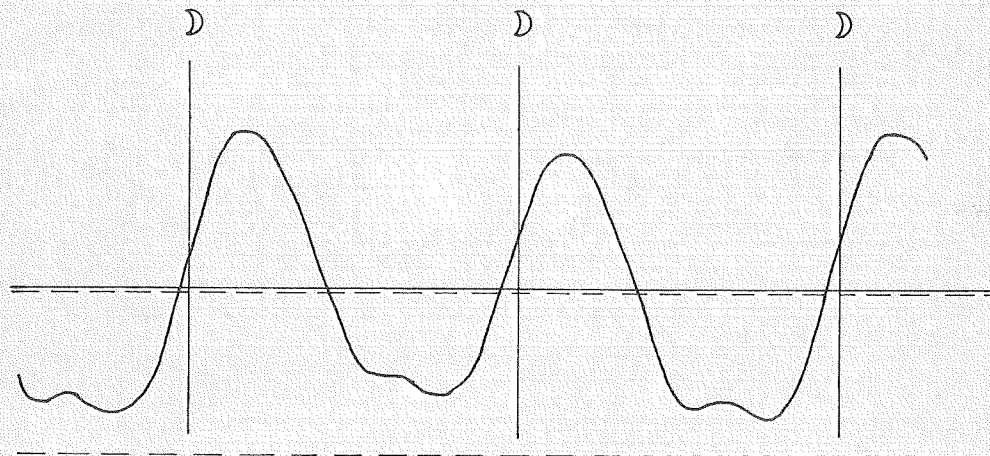


# Technische Hogeschool Delft

Afdeling der Civiele Techniek

## De analyse van getijden



Naar het college "Getijden" (B75)

Dr.ir. J.P.Th. Kalkwijk

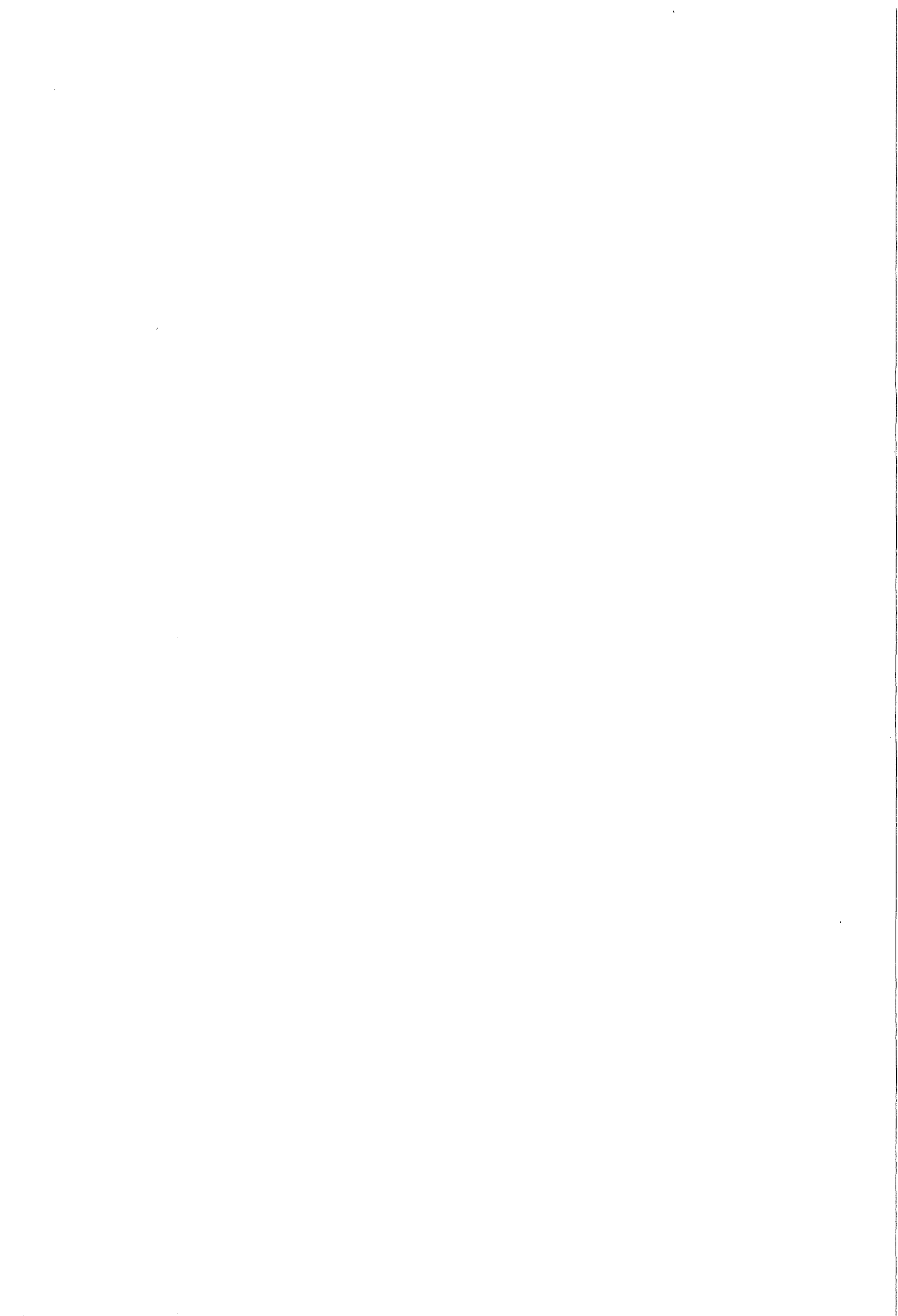
Delft, januari 1975

DE ANALYSE VAN GETIJDEN

---

Dr.Ir. J.P.Th. Kalkwijk

Delft, januari 1975.



<u>I N H O U D</u>	<u>blz.</u>
1. Inleiding.	2
2. Oorsprong en astronomische analyse van het getij; getijvoorspelling.	4
2.1. Oorsprong van het getij.	4
2.2. Astronomische analyse van het getij.	15
2.3. Voorspelling van het getij.	24
Literatuur.	28
3. Fourierreeksen en Fouriertransformaties; de toepassing op getijsignalen.	30
3.1. Inleiding.	30
3.2. De methode der kleinste kwadraten.	33
3.3. Reeksen van Fourier.	36
3.4. Fouriertransformatie.	43
3.4.1. De Fouriertransformatie van een harmonische functie.	48
3.4.2. Het bemonsteren van $z(t)$ .	51
3.4.3. De lengte van de waarnemingsreeks.	58
3.5. Slotbeschouwing.	63
Literatuur.	66
4. Getijbeweging in zeeën en oceanen.	68
Literatuur.	75
5. Appendix.	76
Vragen die betrekking hebben op de hoofdstukken 2 en 3.	

## 1. Inleiding

Reeds van oudsher is men geïnteresseerd in het rijzen en dalen van de waterspiegel in oceanen, zeeën, estuaria en rivieren, zoals dit veroorzaakt wordt door de beweging van hemellichamen als de zon, de maan en de aarde.

De kwalitatieve verklaring van het verschijnsel, dat aangeduid wordt met getij, heeft plaatsgevonden in de loop van de 17e eeuw. Naarmate de scheepvaart toenam raakte men in de 19e eeuw ten behoeve van de navigatie ook steeds meer geïnteresseerd in de kwalitatieve aspecten van wat betreft analyse en voorspelling van het getij. In de 20e eeuw heeft de mens vele ingrepen verricht in zijn natuurlijk milieu, ook in gebieden waar het getij een belangrijke rol speelde. Het spreekt voor zich dat voor het voorspellen van de gevolgen van bepaalde werken getijstudies onontbeerlijk zijn. Een belangrijk aspect hierbij is het uitvoeren van getijberekeningen, gebaseerd op bepaalde randvoorwaarden, die niet gestoord worden door de menselijke ingreep. Aangezien de berekeningen ertoe dienen bepaalde effecten in de toekomst te voorspellen zal het duidelijk zijn, dat hieromtrent informatie wat betreft de randvoorwaarden ook aanwezig dient te zijn. Met andere woorden: het getij ter plekke van de rand zal gemeten, geanalyseerd en voor de toekomst voorspeld moeten worden. Dit college is er in hoofdzaak op gericht informatie te geven over analyse en voorspelling van het getij. Het zal zich niet bezighouden met getijberekeningen, daar deze behandeld worden in andere colleges.

Om genoemd doel te bereiken wordt in hoofdstuk 2 een beschrijving gegeven van de beweging van de op het getij van invloed zijnde hemellichamen (zon, maan en aarde). Op grond hiervan wordt de verklaring van enkele fundamentele begrippen als enkeldaags, dubbeldaags getij e.d. gegeven. Daarna wordt enige aandacht besteed aan de astronomische analyse van de getijverwekkende kracht. De behandeling daarvan is zeer summier en dient er slechts toe aannemelijk te maken, dat er vele frequenties in de getijverwekkende kracht voorkomen, die kunnen terugkeren in het werkelijk getij op aarde. Uiteindelijk mondt dit hoofdstuk uit in de methode om het getij te voorspellen, indien de getijconstanten bekend zijn.

Het derde hoofdstuk behandelt enige methoden om een getijwaarneming te analyseren. Aan de orde komen de methode der kleinste kwadraten, Fourieranalyse en Fouriertransformaties. Met name de laatste methode tot analyse verschaft informatie betreffende bemonsteringsinterval en lengte van de waarnemingsreeks. De verschillende methoden zijn in algemene zin behandeld; de toepassing is toegespitst op de analyse van het getij. Toepassing op andere deterministische meetsignalen is echter evenzeer mogelijk. In het kader van dit college is het niet

mogelijk aandacht te besteden aan filtermethoden e.d. Ook een beschouwing over de nauwkeurigheid van een analyse moest achterwege blijven.

Wat betreft dit hoofdstuk wordt de lezer erop gewezen, dat alle tekst voorkomend tussen horizontale streepjeslijnen betrekking heeft op voorbeelden. Voor de eigenlijke stof zijn zij niet essentiël.

Het vierde hoofdstuk heeft betrekking op de beschrijving van het getij, zoals zich dit manifesteert in zeeën en oceanen. De behandeling is summier en heeft in hoofdzaak in beschrijvende vorm plaats.

Aan het eind van ieder hoofdstuk bevindt zich een korte literatuurlijst, die toegang geeft tot uitgebreidere informatie over de verschillende onderwerpen.

Het dictaat wordt besloten met een appendix, waarin verschillende vragen, die betrekking hebben op de stof, gesteld zijn.

De antwoorden zijn alleen vermeld, indien deze niet in de tekst zijn terug te vinden.

---

2. Oorsprong en astronomische analyse van het getij; getijvoorspelling.

2.1. Oorsprong van het getij.

Dit deel van het college is er op gericht te laten zien, dat de maan en de zon de oorzaken zijn van het ontstaan van getijden op aarde. Het begrip getijverwekkende kracht zal gedefinieerd en afgeleid worden en er zal aannemelijk gemaakt worden, dat de getijverwekkende kracht samengesteld gedacht kan worden uit vele componenten, ieder met zijn eigen frequentie. Deze frequenties zijn gerelateerd aan de periodiciteit in de verschillende soorten bewegingen die aarde, maan en zon t.o.v. elkaar uitvoeren. Nadat uiteengezet is, dat naast deze frequenties nog andere frequenties in een getijsignaal kunnen voorkomen, zal dit hoofdstuk besloten worden met een uiteenzetting hoe een getij voorspeld kan worden, als de getijconstanten eenmaal bekend zijn.

De krachten, die het getij op aarde genereren, zijn de aantrekkingskrachten door maan en zon uitgeoefend op de aarde. De invloed van andere hemellichamen is te verwaarlozen.

De navolgende (eenvoudige) beschouwingen hebben steeds betrekking op het systeem aarde-maan. Die voor het systeem aarde-zon zijn namelijk identiek.

De aantrekkingskracht tussen 2 lichamen wordt bepaald door de gravitatiewet van Newton:

$$F = a \frac{m_1 m_2}{x^2}$$

- waarin  $a$  = universele gravitatie constante,
- $x$  = afstand tussen de zwaartepunten van de respectieve lichamen,
- $m_1, m_2$  = massa's van de respectieve lichamen.

Er bestaat een relatie tussen de universele gravitatie constante  $a$  en de zwaartekracht  $g$ . Beschouw namelijk de aantrekkingskracht van een lichaam, massa  $m_1$ , door de aarde:

$$F = m_1 g = a \frac{m_1 m_e}{r^2} \rightarrow a = \frac{g r^2}{m_e} = 67 * 10^{-12} \left[ m^3 kg^{-1} s^{-2} \right] \quad (2.1)$$

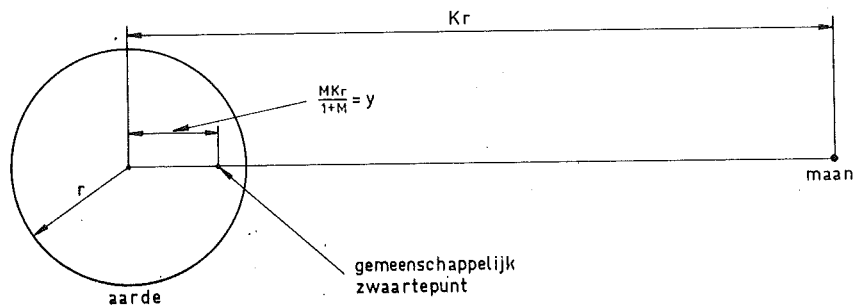
waarin  $m_e = \text{massa aarde} = 5,98 * 10^{24}$  [kg] ,  $K \approx 60$   
 $r = \text{straal aarde} = 6,38 * 10^6$  [m] ,  $M \approx 1/100$   
 $g = 9,81$  [ms<sup>-2</sup>]

Indien massa maan =  $Mm_e$  ( $M = 0,0123$ ) ,  
afstand tussen de zwaartepunten van resp. maan en aarde  
=  $Kr$  ( $K = 60,3$ ) ,

dan wordt de aantrekkingskracht tussen maan en aarde (bovenstaande uitdrukking voor  $a$  gebruikt):

$$F = g \frac{Mm_e}{K^2} \tag{2.2}$$

Deze kracht is "verantwoordelijk" voor de draaiing van het systeem aarde-maan om een gemeenschappelijk zwaartepunt, dat binnen de aarde zelf ligt, op een afstand  $\frac{MKr}{1+M} < r$  van het centrum van de aarde.



Indien de hoeksnelheid van het systeem  $\omega$  [rad/s] is, dan is de versnelling van de aarde  $\frac{\omega^2 MKr}{1+M}$  , welke geleverd wordt door de onderlinge aantrekkingskracht van aarde en maan. Dus:

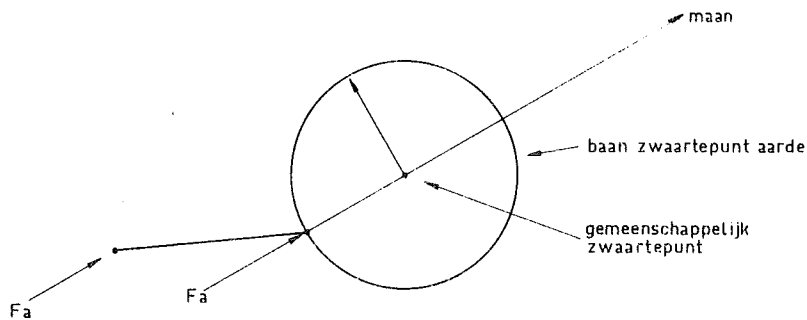
$$\frac{gMm_e}{K^2} = \frac{\omega^2 MKr}{1+M} m_e$$

$$\omega^2 = \frac{g(1+M)}{K^3 r}$$

Met de bekende getallen voor  $g$ ,  $M$ ,  $K$  en  $r$  wordt  $\omega \sim 2,66 * 10^{-6}$  [rad/s] hetgeen inhoudt, dat het hele systeem 1 omwenteling maakt in 27,32 dagen.



Door de rotatie van het gehele systeem beschrijft de aarde een baan, die opgebouwd gedacht kan worden uit een translatie en een rotatie. De aarde roteert zelf ook nog eens om zijn as. Beide rotaties hebben een identieke invloed op het getij, zodat het voor de hand ligt deze rotaties bij elkaar te voegen. De andere beweging, de translatie, zal nu nader beschouwd worden; de rotatie komt in het vervolg.



In figuur 1 wordt getoond, dat als gevolg van de translatie ieder deeltje van de aarde dezelfde versnelling in richting en grootte heeft. In bovenstaande figuur is dit nogmaals getekend. Aangezien de lijn OP uitsluitend translaties beschrijft heeft het punt P dezelfde versnelling als het punt O. De versnelling is gericht evenwijdig aan de verbindinglijn van de zwaartepunten van resp. aarde en maan. De grootte van deze versnelling (kracht per eenheid van massa) is (zie vgl. (2.2)):

$$F_a = \frac{gM}{K^2} \quad (2.3)$$

De versnelling  $F_a$  zal "geleverd" moeten worden door de aantrekkingskracht op een deeltje op aarde, zoals deze door de maan wordt uitgeoefend. Deze kracht is afhankelijk van de afstand tussen de maan en de beschouwde plaats op aarde  $R_r$  (zie fig. 2) en bedraagt (per eenheid van massa):

$$F_m = \frac{gM}{R^2} \quad (2.4)$$

Zoals de figuur duidelijk laat zien kan  $F_m$  samengesteld worden uit  $F_a$  en een residukrachtje  $\bar{F}_m - \bar{F}_a$ , welke de getijverwekkende kracht wordt genoemd, omdat dit verschilkrachtje de directe oorzaak voor het ontstaan van getijden op

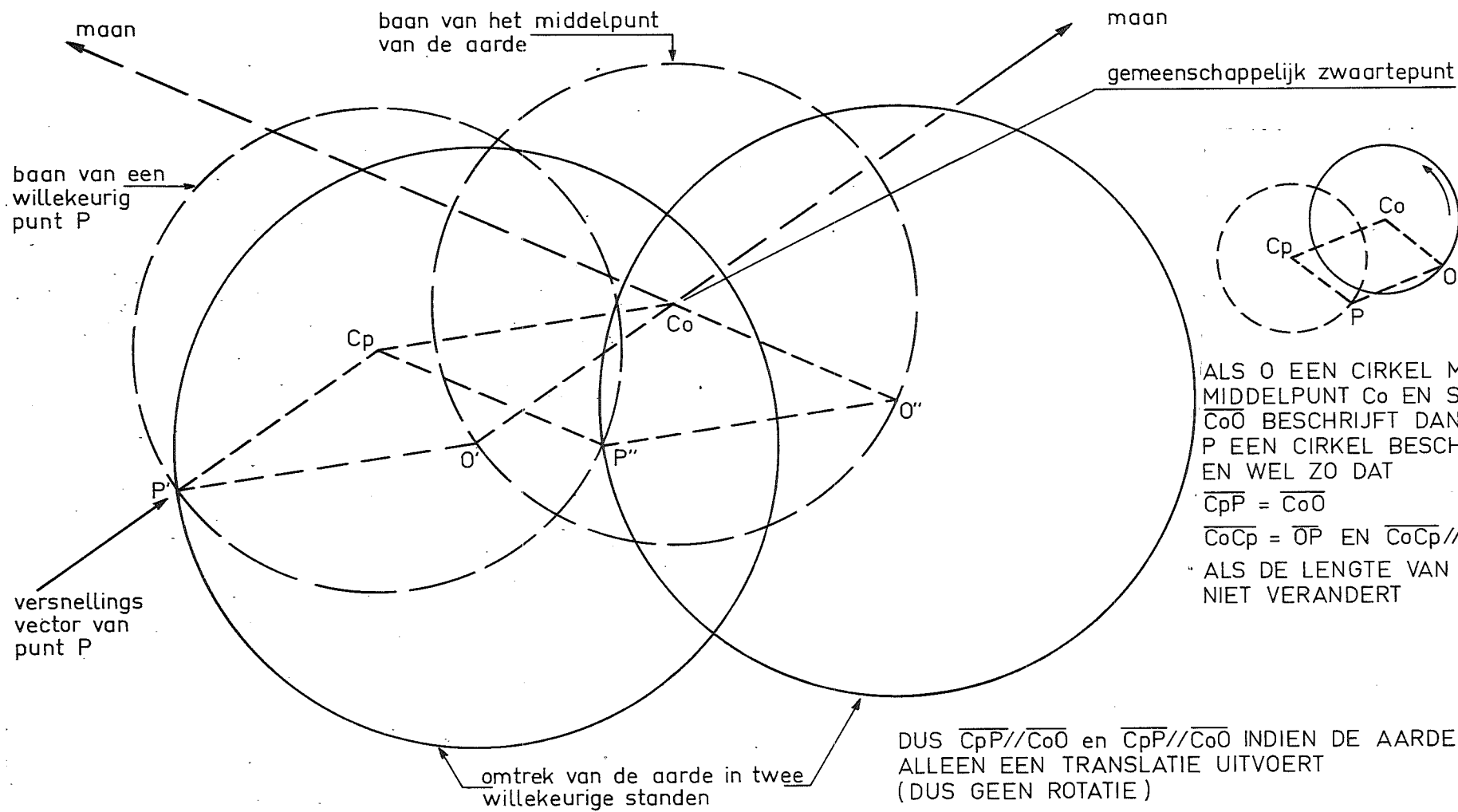


Fig.1. Beweging van de aarde om het gemeenschappelijk zwaartepunt van aarde en maan.

aarde is. Van de getijverwekkende kracht is echter alleen de component van  $\bar{F}_m - \bar{F}_a$ , gericht langs het aardoppervlak, van belang. Deze component zullen we de sleepkracht,  $F_s$ , noemen en deze wordt:

$$F_s = \frac{gM}{R^2} \sin(\phi + \alpha) - \frac{gM}{K^2} \sin \phi - F_{\text{vo}} \sin(\varphi + \alpha) - F_{\text{q}} \sin \varphi$$

Voor het vereenvoudigen van deze uitdrukking worden de volgende benaderingen ingevoerd:

$$R \sim K - \cos \phi,$$

$$\cos \alpha \sim 1,$$

$$\sin \alpha \sim \frac{\sin \phi}{K},$$

zodat  $F_s$  vereenvoudigd kan worden tot:

$$F_s = \frac{gM}{(K - \cos \phi)^2} (\sin \phi \cos \alpha + \cos \phi \sin \alpha) - \frac{gM}{K^2} \sin \phi$$

$$\sim \frac{gM}{K^2} \left[ \left(1 + \frac{2 \cos \phi}{K}\right) \left(\sin \phi + \frac{\sin \phi \cos \phi}{K}\right) - \sin \phi \right]$$

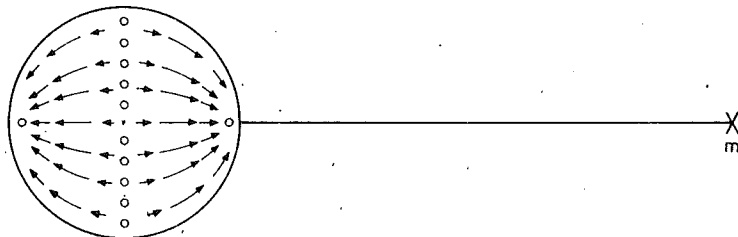
$$F_s \sim \frac{gM}{K^3} \left(3 \sin \phi \cos \phi + 2 \sin \phi \frac{\cos^2 \phi}{K}\right)$$

Verwaarloos de term  $2 \sin \phi \frac{\cos^2 \phi}{K}$  t.o.v.  $3 \sin \phi \cos \phi$ :

$$F_s = \frac{3gM}{2K^3} \sin 2\phi$$

(2.5)

Onderstaand schetsje geeft aan hoe de sleepkracht over de aarde verdeeld is.



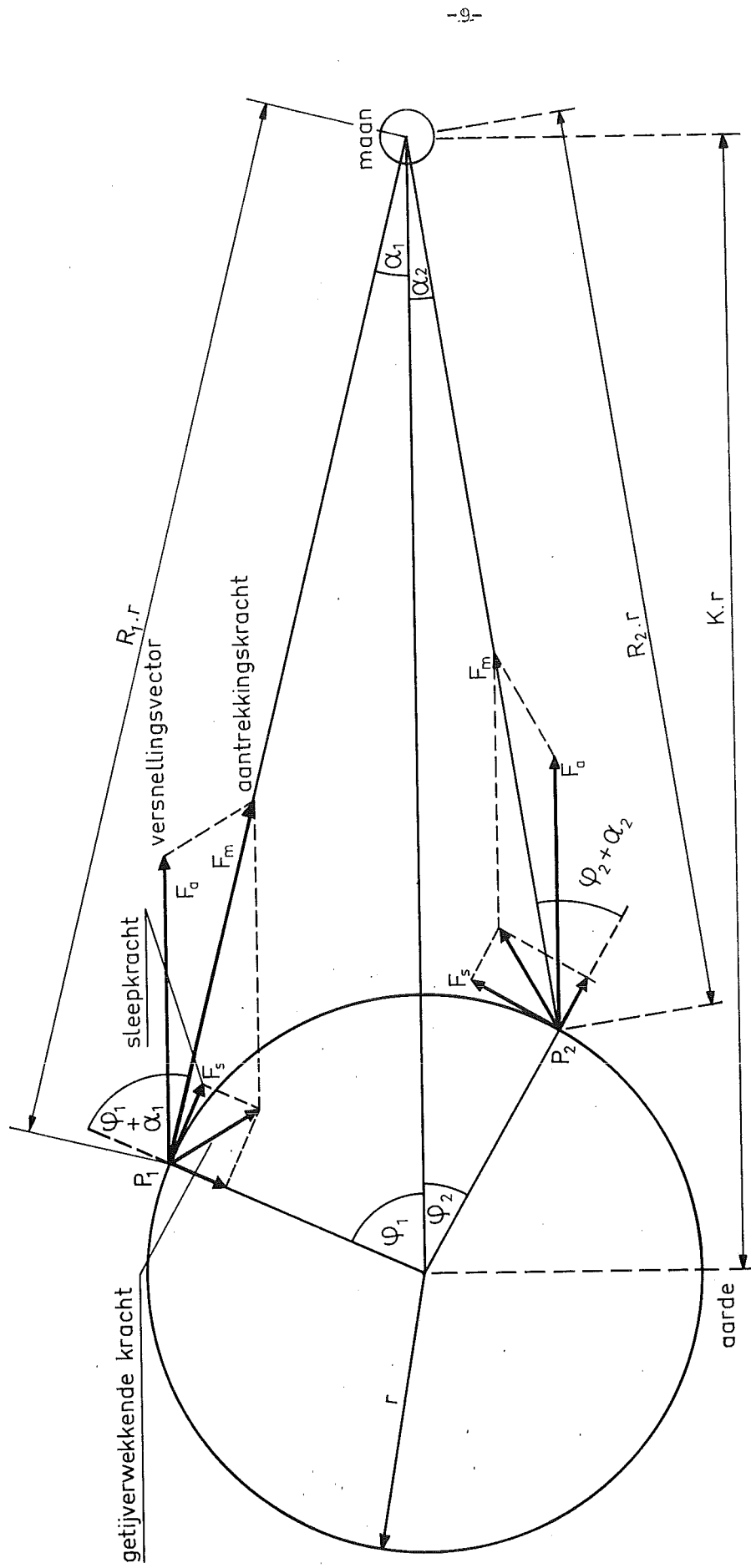


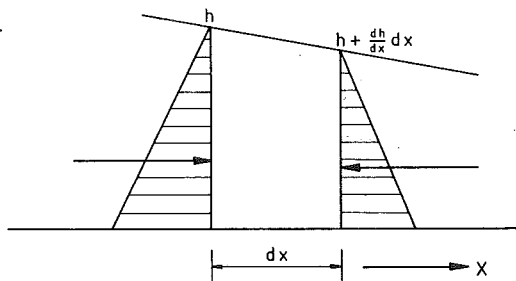
Fig.2. Getijverwekkende kracht voor twee willekeurige plaatsen op aarde.

De grootte van de sleepkracht is erg klein. De maximale waarde treedt op voor  $\phi = \pm \frac{\pi}{4}$ ; het onderstaande tabelletje geeft de numerieke waarden voor maan en zon voor deze waarden van  $\phi$ .

	maan	zon
M	0,0123	333.000
K	60,3	23.500
$\frac{3gM}{2K^3}$	$0,82 \cdot 10^{-6} \text{ [ms}^{-2}\text{]}$	$0,38 \cdot 10^{-6} \text{ [ms}^{-2}\text{]}$

De verhouding van de sleepkrachten van maan en zon is ongeveer 2 : 1, zodat de invloed van de zon op het getij op aarde bepaald niet verwaarloosbaar is. De respectieve sleepkrachten zijn zo klein, dat zij weinig invloed hebben op vaste deeltjes van de aarde, al is de golfbeweging, die zij veroorzaken in de aarde (aardgetijden) goed meetbaar. De invloed op de waterdeeltjes, die wel kunnen bewegen is veel groter. Om deze invloed te berekenen, zou de sleepkracht geïntroduceerd kunnen worden in de bewegingsvergelijkingen voor de stroming van het water. Tot nu toe is men er echter nog niet in geslaagd deze vergelijkingen op te lossen voor gevallen, waarin bodemligging en begrenzingen van de oceanen op realistische wijze waren meegenomen. Wel zijn er berekeningen voor oceanen met uniforme diepte en begrensd door 2 meridianen. De amplitude van het getij daarin blijft beperkt tot enkele centimeters en dat is merkwaardig, als men bedenkt dat de orde van grootte van het werkelijke getij op aarde ongeveer één meter bedraagt. De verklaring is dat de responsie van waterbekkens als oceanen voornamelijk afhangt van de eigen slingerfrequenties van deze waterbekkens. Als één van de eigen frequenties in de buurt komt van een frequentie in de exciterende kracht (sleepkracht  $F_s$ ) is een grote responsie mogelijk (resonantie). Dit treedt in verschillende gevallen op. In de randzeeën wordt het getij in hoofdzaak bepaald door het getij in de aangrenzende oceaan. Door diepteinvloeden en begrenzingen kan de amplitude van het getij nog weer aanzienlijk toenemen. De vorm van slingering van de watermassa's in zeeën en oceanen heeft een bijzonder karakter als gevolg van de rotatie van de aarde. In het laatste deel van het college zal hier nog enige aandacht aan worden besteed. Al deze beschouwingen zijn echter tamelijk gecompliceerd. Daarom zullen wij ons beperken tot de volgende eenvoudige beschouwingen, welke enkele fundamentele eigenschappen van het getij illustreren. Beschouw een aardbol, geheel bedekt met water, en ga na welke vorm het wateroppervlak aanneemt, als alle traagheidseffecten verwaarloosd worden. Dit houdt

in, dat de verhangkracht, die optreedt als de waterspiegel een helling heeft, evenwicht moet maken met de sleepkracht. De verhangkracht zal afgeleid worden voor een mootje  $dx$ , door na te gaan welke



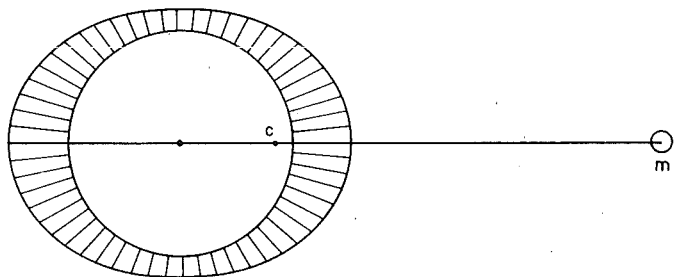
krachten daarop werken. Dus:

$$\text{verhangkracht} = \text{kracht links} - \text{kracht rechts}$$

$$= \frac{1}{2} \rho g h^2 - \frac{1}{2} \rho g \left( h + \frac{dh}{dx} dx \right)^2$$

$$\approx - \rho g h \frac{dh}{dx} dx$$

Per eenheid van massa:  $- g \frac{dh}{dx}$ , welke kracht evenwicht moet maken met  $F_g$ . Een en ander heeft tot resultaat, dat het wateroppervlak een vorm aanneemt zoals weergegeven in onderstaand schetsje. M.a.w. er ontstaat een verhoging van de waterspiegel, die gericht is naar de maan, maar ook een verhoging



diametraal daar tegenover. Voorts is daartussen een verlaging te constateren. Het getij, dat op deze wijze ontstaat, wordt het evenwichtsgetij genoemd. De redenering werd reeds ontwikkeld door Newton.

Tot nu toe is niet gesproken over de rotatie van de aarde zelf. Hierbij is de as van rotatie van groot belang. Deze maakt namelijk een hoek (gemiddeld  $23\frac{1}{2}^\circ$ ) met de verbindingslijn van de centra van aarde en maan (zou). Om duidelijk te maken, waar dit toe leidt zullen we de volgende gevallen beschouwen.

a) As van rotatie staat loodrecht op de verbindingslijn van de zwaartepunten van aarde en maan. Iemand, die zich op een vaste plaats op aarde bevindt, zal nu bij rotatie (één omwenteling per dag) 2 maal per dag een hoogwater en 2 maal per dag een laagwater waarnemen:

dubbeldaags getij ;

b) As van rotatie maakt een hoek met de verbindingslijn van de zwaartepunten van aarde en maan. Nu zijn er plaatsen op aarde, met name op de hogere breedten, waar 1 maal per dag een hoogwater en een laagwater waargenomen kunnen worden:

enkeldaags getij.

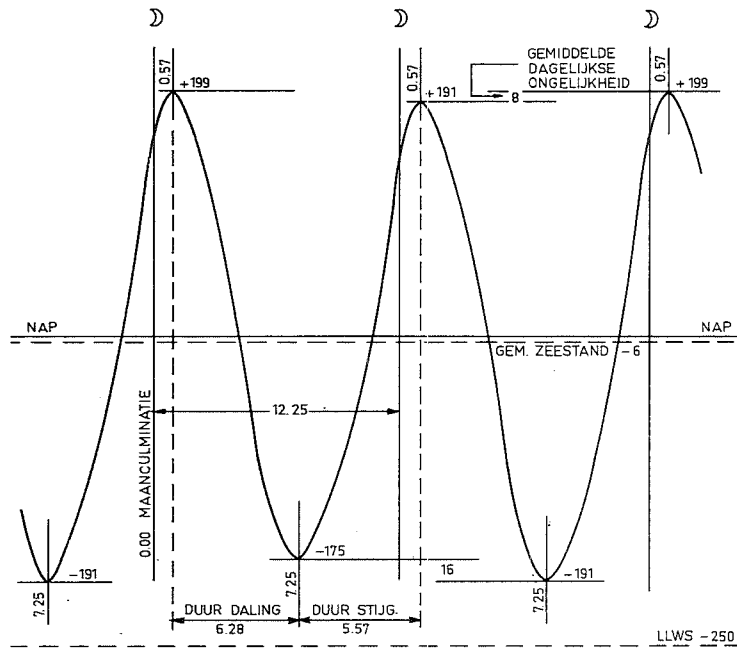
Aangezien getijden zich voortplanten, kan reeds nu geconstateerd worden, dat het werkelijke getij op aarde zowel dubbeldaags als enkeldaagse componenten zal bevatten. De enkeldaagse componenten hebben tot gevolg, dat gedurende een dag beide hoogwaters een verschillende hoogte hebben; ditzelfde geldt voor de laagwaters: dagelijkse ongelijkheid. Zie fig. 3, welke enige voorbeelden van getijkrommen langs de Nederlandse kust bevat.

Aan de Nederlandse kust is het dubbeldaags getij overheersend. Er bestaan echter ook gevallen op aarde, waar het enkeldaags getij overheersend is (b.v. Tanjong Priok).

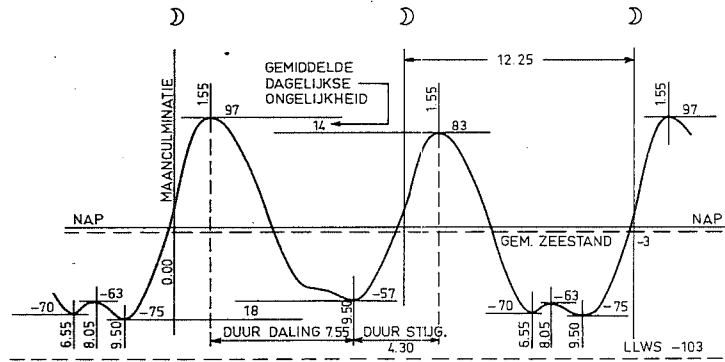
In werkelijkheid zal het hoogwater niet optreden, als de maan de beschouwde meridiaan passeert. Het echte HW zal later optreden. Het tijdsverschil tussen het moment, dat de maan de meridiaan passeert en het moment, dat het HW werkelijk optreedt, wordt havengetal genoemd. Dit is een constante behorend bij een vaste plaats op aarde.

Hoewel de invloed van de zon in het voorgaande nagenoeg onbesproken bleef, is het duidelijk, dat de invloeden van zon en maan elkaar kunnen versterken en verzwakken. Fig. 4 geeft aan bij welke standen van maan en zon t.o.v. de aarde springtij, dan wel doodtij optreedt. Aangezien de maan in ongeveer 29 dagen om de aarde draait, zal ongeveer een week na springtij doodtij optreden en omgekeerd; springtij en doodtij treden dus ongeveer eens in de 2 weken op. Tevens is in fig. 4 voor 2 havens aan de Nederlandse kust het verloop van het getij gedurende een maand aangegeven. Duidelijk is te zien, dat het echte springtij (doodtij) later optreedt, dan uit de stand van de maan valt af te leiden. Deze tijdsverschuiving wordt de leeftijd van het getij genoemd en bedraagt normaliter 2 à 3 dagen.

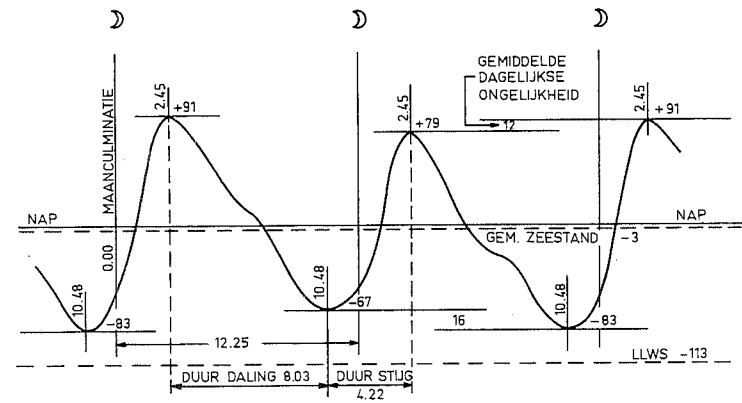
Fig. 3. Gemiddelde getijkrommen voor enkele plaatsen langs de nederlandse kust.



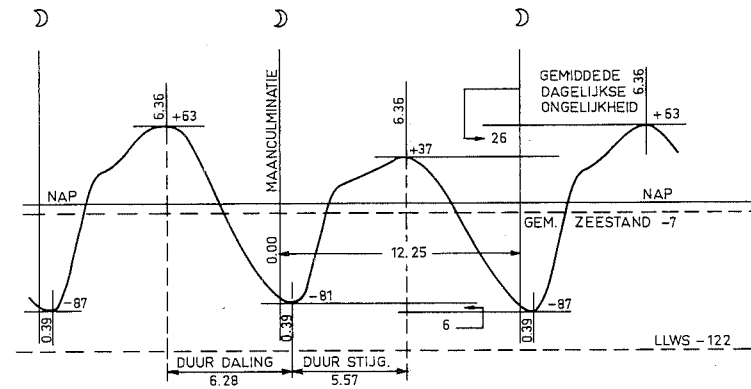
Vlissingen



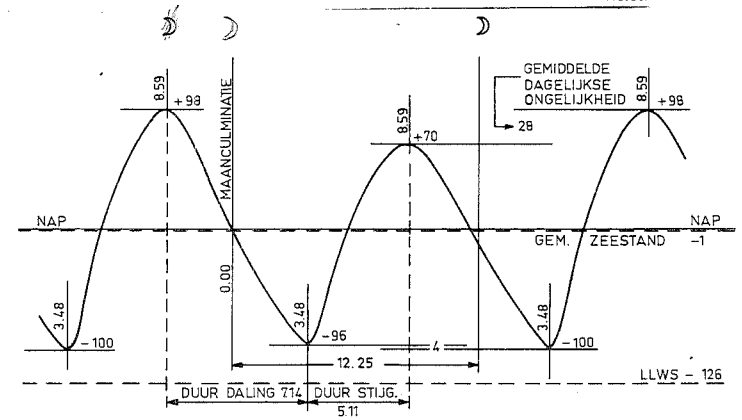
Hoek van Holland



IJmuiden

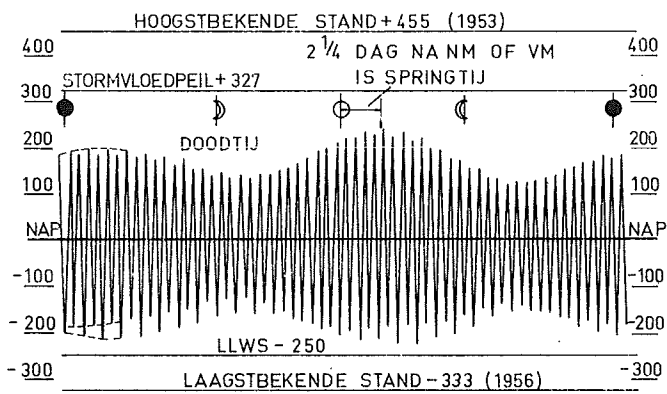
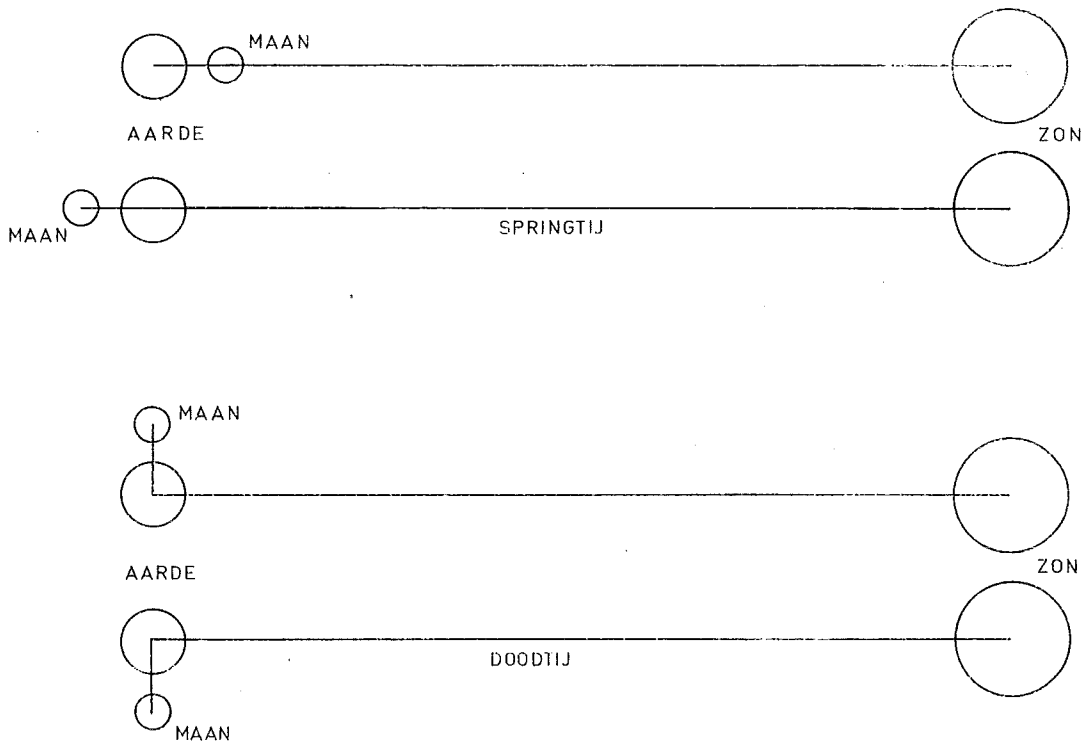


Den Helder

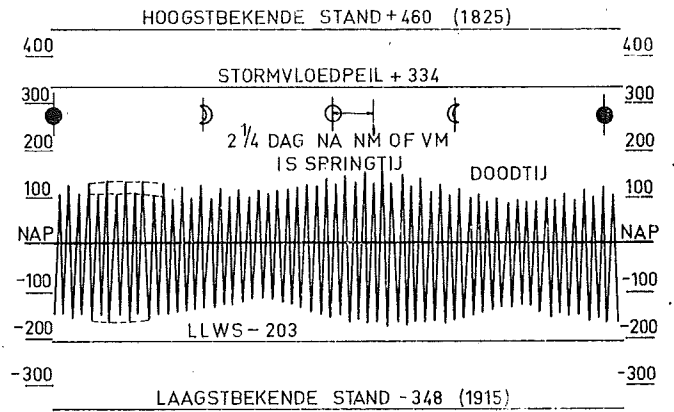


Harlingen





VOORBEELD VAN HET VERLOOP DER GETIJBEWEGING TE VLISSINGEN VAN NIEUWE MAAN TOT NIEUWE MAAN



VOORBEELD VAN HET VERLOOP DER GETIJBEWEGING TE DELFZIJL VAN NIEUWE MAAN TOT NIEUWE MAAN

Fig.4. Springtij en doodtij en de daarbij behorende maanstanden.

## 2.2. Astronomische analyse van het getij.

Het resultaat voor de component van de getijverwekkende kracht, de sleepkracht  $F_s$ , is:

$$F_s = \frac{3gM}{2K^3} \sin 2\phi$$

In deze formule zijn de  $\phi$  en  $K$  geen constanten; zij hangen af van de bewegingen die de verschillende hemellichamen t.o.v. elkaar uitvoeren. Al deze bewegingen zijn periodiek, waarbij ieder van deze bewegingen een karakteristieke hoeksnelheid heeft. Tot nu toe is men nog niet goed in staat de complexe waterbeweging in oceanen en zeeën als gevolg van deze sleepkracht te berekenen. Echter men mag wel verwachten, dat de frequenties die de sleepkracht bevat, ook in door deze kracht gegenereerde verschijnselen, zoals het getij, teruggevonden kunnen worden. Daarom zou het bij de analyse van een gemeten getijsignaal een groot voordeel zijn als min of meer te voorspellen is welke frequenties in dat signaal belangrijk zijn. Daarvan zou dan namelijk direct gebruik kunnen worden gemaakt bij de analyse.

Verschillende onderzoekers, zoals Darwin en Doodson, zijn er in geslaagd de sleepkracht te ontbinden in zijn samenstellende componenten. De resultaten van deze z.g. astronomische analyse geven een indruk van het relatieve belang van iedere component. Hiervan kan bij een analyse van een getijsignaal gebruik worden gemaakt door in de berekeningen onbelangrijke componenten niet mee te nemen. In dit college zullen deze methoden, welke gebruik maken van een ontwikkeling met bolfuncties van de krachtpotentiaal, die zon en maan op aarde geven, niet behandeld worden. Er zal alleen een kleine aanzet gemaakt worden in die richting door de sleepkracht iets nader te beschouwen.

Om aan te geven, welke functies een rol spelen bij de astronomische analyse van  $F_s$  zal eerst een beknopte beschrijving worden gegeven van de verschillende belangrijke bewegingen, die aarde, maan en zon t.o.v. elkaar uitvoeren. Daarvoor wordt het begrip hemelbol ingevoerd, die beschouwd zal worden als een niet-roterende bol, welke meebeweegt met de aarde, en dezelfde equator heeft als de aarde. Op de hemelbol worden de relatieve bewegingen van de beschouwde hemellichamen geprojecteerd. Als eerste beschouwen we de projectie van de baan van de zon op de hemelbol. Deze verschijnt hierop als een cirkel, welke de ecliptica wordt genoemd (zie fig. 5). De hoek tussen ecliptica en equator is constant en bedraagt  $23\frac{1}{2}^\circ$ . De ecliptica snijdt de equator op twee plaatsen; één der snijpunten wordt gebruikt als referentie voor de beschrijving van de positie van een hemellichaam. Dit punt heet het lentepunt, omdat op het moment dat de zon dit punt

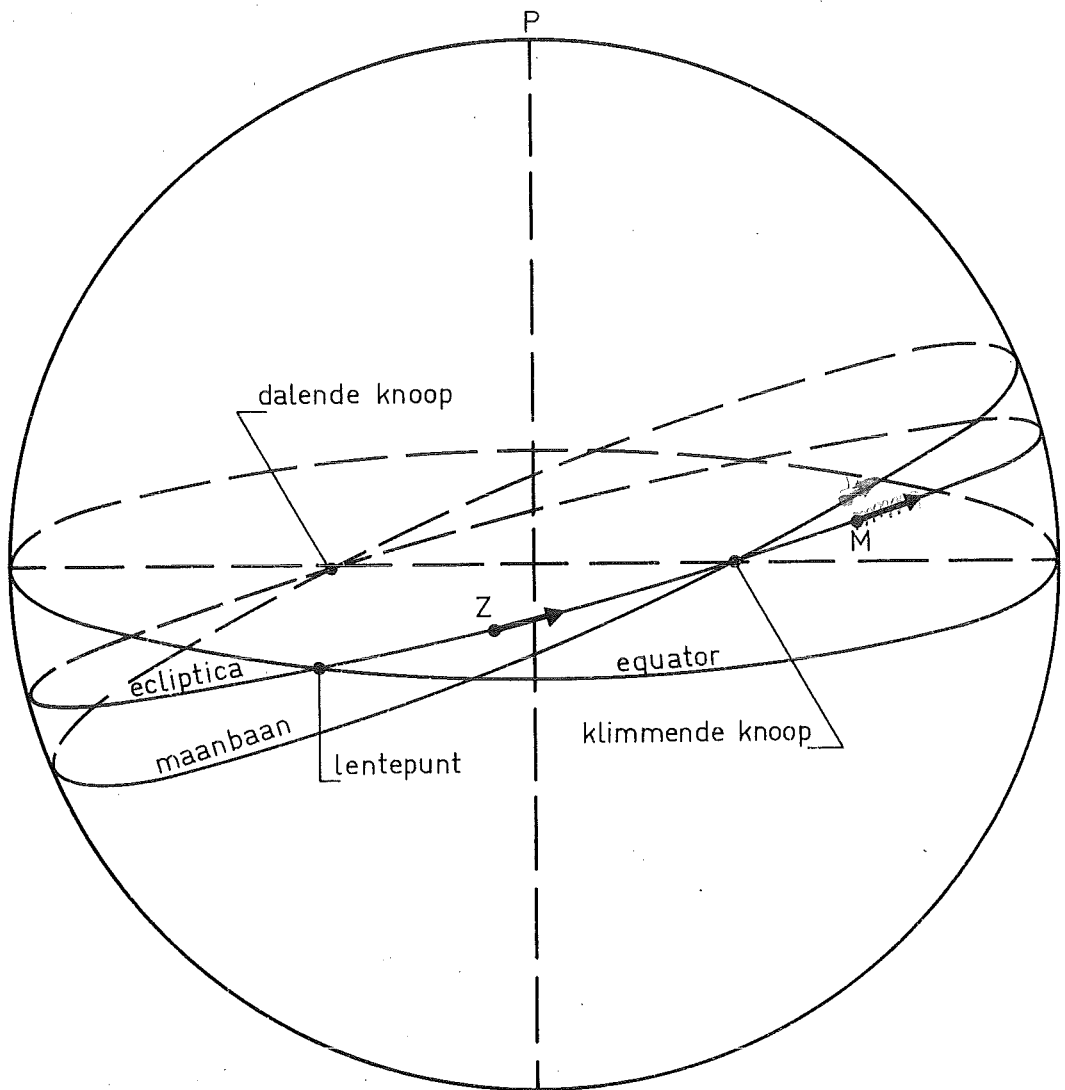


Fig.5. De banen van de maan en de zon geprojecteerd op de hemelbol.

passeert, de lente op het Noordelijk halfrond begint. In feite is dit geen vast punt, omdat de positie van de ecliptica t.o.v. de vaste sterren verandert. Voor een omwenteling van het lentepunt langs de equator is 26.000 jaar benodigd; een zo lange periode, dat de invloed daarvan op het getij verwaarloosbaar is.

Voor één omwenteling van de aarde om de zon is 365,26 dag benodigd, hetgeen hetzelfde is als de periode tussen 2 achtereenvolgende malen, dat de zon het lentepunt passeert. Dit houdt een gemiddelde hoeksnelheid in van  $\omega_z = 0,04104$  [graden/uur]. De echte hoeksnelheid schommelt daar wat om heen, omdat de baan van de aarde om de zon elliptisch is. Niet alleen varieert daardoor  $K$ , doch ook de hoeksnelheid van de beweging. Deze zal namelijk het grootst zijn in het perihelium (aarde het dichtst bij de zon) en het kleinst in het apohelium (aarde het verst van de zon).

De beweging van de maan is nog wat ingewikkelder. De maanbaan op de hemelbol snijdt de ecliptica in 2 punten, de z.g. knopen (klimmende en dalende knoop). Als gevolg van een variërende positie van de maanbaan t.o.v. de ecliptica (variatie ongeveer  $5^\circ$ ) lopen de knopen langs de ecliptica. Voor één complete omwenteling is 18,60 jaar benodigd ( $\omega_k = 0,00221$  [graden/uur]). Ook de maan beweegt in een ellips om de aarde, doch de positie daarvan is niet constant. Het perigeum, en dus ook apogeum, maken een volledige omwenteling om de aarde in 8,85 jaar ( $\omega_p = 0,00404$  [graden/uur]). Verder maakt de maan in ongeveer één maand één omwenteling rond de aarde; t.o.v. het lentepunt is deze periode echter 27,32 dag ( $\omega_m = 0,54900$  [graden/uur]).

Tenslotte draait de aarde één maal per dag rond zijn eigen as. T.o.v. het lentepunt bedraagt de periode echter 0,997 dag ( $\omega_a = 15,04116$  [graden/uur]). Het verschil met betrekking tot de periode van één dag is juist één omwenteling per jaar.

Resumerend kunnen dus de volgende frequenties onderscheiden worden:

oorzaak	hoeksnelheid in graden/uur	periode
rotatie aarde	$\omega_a = 15,04116$	0,997 [dag]
maan om aarde	$\omega_m = 0,54900$	27,32 [dag]
aarde om zon	$\omega_z = 0,04104$	365,26 [dag]
perigeum maan	$\omega_p = 0,00464$	8,85 [jaar]
knopen maanbaan	$\omega_k = 0,00221$	18,60 [jaar]

Bij een systematische ontwikkeling van de uitdrukking voor  $F_s$  mogen we verwachten, dat al deze frequenties in de samenstellende componenten zullen voorkomen. In het algemeen kan gesteld worden, dat  $F_s$  als volgt ontwikkeld kan worden:

$$F_s = \frac{3gM}{2K^3} \sin 2\phi = \frac{3gM}{2K^3} \left[ A_0 + \sum^n A_n \cos (\omega_n t + \phi_n) \right] \quad (2.6)$$

waarin  $\omega_n = i\omega_a + j\omega_m + k\omega_z + l\omega_p + m\omega_k$

(i, j, k, l, m = ..., -2, -1, 0, 1, 2, ...)

$A_n$  = astronomische amplitude

$\bar{K}$  = K - gemiddeld

$\phi_n$  = fase op  $t = 0$

Om enige indruk te geven hoe een dergelijk resultaat bereikt kan worden zal wederom de hemelbol beschouwd worden met daarop geprojecteerd de positie van een waarnemer op aarde en een hemellichaam (zon of maan) op een zeker moment (zie fig. 6).

Het hemellichaam wordt in het punt S geprojecteerd op de hemelbol en heeft een declinatie d. De corresponderende hoek bij het middelpunt is eveneens in de figuur aangegeven. De beschouwde plaats op aarde wordt geprojecteerd in het punt T. De breedte daarvan wordt aangeduid met b. De punten S en T liggen op meridianen, die elkaar aan de pool P snijden onder de hoek p. In de uitdrukking voor de sleepkracht  $F_s$  komt de hoek  $\phi$  voor. Deze was de hoek tussen de verbindingslijn van de middelpunten der beschouwde hemellichamen en de verbindingslijn van de beschouwde plaats op aarde en zijn middelpunt, dus de hoek tussen de lijnen SM en TM. De sleepkracht raakt aan de aarde en ligt in het vlak STM. Dit laatste snijdt de hemelbol volgens een cirkel en  $F_s$  raakt dus aan deze cirkel (zie figuren). De hoek, die  $F_s$  maakt met de meridiaan wordt aangeduid met t.

In de figuur is duidelijk te zien, dat als de hoeken d, b, en p gegeven zijn, de hoeken  $\phi$  en t tevens vastliggen. De relaties tussen deze hoeken moeten worden ontleend aan de boldriehoeksmmeetkunde. Zij zullen zonder afleiding hier worden gegeven:

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \sin b \sin d + \cos b \cos d \cos p \\ \sin \phi \sin t &= \cos d \sin p \\ \sin \phi \cos t &= \sin d \cos b - \sin b \cos d \cos p \end{aligned} \quad (2.7)$$



In eerste instantie zal  $F_s$  ontbonden worden in componenten, die raken aan de parallel en de meridiaan van het punt T, respectievelijk  $F_{sh}$  en

$F_{sv}$ :

$$F_{sh} = \frac{3gM}{2K^3} \sin 2\phi \sin t = \frac{3gM}{K^3} \sin \phi \cos \phi \sin t$$

$$F_{sv} = \frac{3gM}{2K^3} \sin 2\phi \cos t = \frac{3gM}{K^3} \sin \phi \cos \phi \cos t$$
(2.8)

Substitutie van de formules volgens (2.7) in (2.8) levert op:

$$F_{sh} = \frac{3gM}{K^3} \cos d \sin p (\sin b \sin d + \cos b \cos d \cos p)$$

$$F_{sv} = \frac{3gM}{K^3} (\sin d \cos b - \sin b \cos d \cos p)(\sin b \sin d + \cos b \cos d \cos p)$$

Bovenstaande uitdrukkingen leveren na uitwerking op:

$$\frac{F_{sh}}{3gM/2K^3} = \sin b \sin 2d \sin p + \cos b \cos^2 d \sin 2p$$
(2)
(4)

$$\frac{F_{sv}}{3gM/2K^3} = \frac{1}{2}(3 \sin^2 d - 1) \sin 2b + \cos 2b \sin 2d \cos p - \frac{1}{2} \sin 2b \cos^2 d \cos 2p$$
(1)
(3)
(5)

Reeds na deze relatief eenvoudige decompositie blijkt dat enkele belangrijke verschijnselen onderscheiden kunnen worden. Als de breedte  $b$  vast is en, in eerste instantie, de declinatie  $d$  ook, dan kunnen de volgende gevallen worden onderscheiden:

- a) de termen (4) en (5) bevatten een  $\sin 2p$  en  $\cos 2p$ . De hoeksnelheid van  $2p$  is  $2(\omega_a - \omega_m)$  (of  $2(\omega_a - \omega_z)$ ), zodat hier blijkbaar sprake is van dubbeldaagse componenten. In dit geval horen de hoeksnelheden bij de hoofdgetijden  $M_2$  (periode 12 uur 25 min.) en  $S_2$  (periode 12 uur).
- b) de termen (2) en (3) bevatten een  $\sin p$  en  $\cos p$ . De hoeksnelheid van  $p$  is  $\omega_a - \omega_m$  (of  $\omega_a - \omega_z$ ), zodat het hier gaat om enkeldaagse componenten. Deze zouden niet aanwezig zijn als de respectieve hemellichamen zich in het vlak van de equator bewegen, want dan  $\sin 2d = 0$ . Derhalve gaat het hier om declinatie-getijden. (Voor alle duidelijkheid: declinatiegetijden kunnen ook een dubbeldaags karakter hebben).

c) indien de declinatie  $d$  vast is houdt de term (1) niets anders in dan een permanente kracht, gericht naar de equator. In werkelijkheid varieert  $d$  wel, waardoor deze kracht ook varieert. Karakteristieke hoeksnelheden voor  $d$  zijn  $\omega_m$  en  $\omega_z$ , waarvan de bijbehorende perioden lang zijn t.o.v. een dag, n.l. ongeveer één maand en één jaar resp. M.a.w. er zijn naast de één- of meer-daagse getijden ook lang-periodieke getijden aan te wijzen.

De decompositie van de sleepkracht kan nog aanzienlijk verder worden uitgebreid. Zo kan bijvoorbeeld de declinatie geëlimineerd worden door deze uit te drukken in de helling van de ecliptica of de maanbaan en de daarlangs afgelegde weg. Dit zal hier niet worden uitgevoerd. Het uiteindelijke resultaat is weergegeven in tabel 1, dat de belangrijkste componenten bevat. De meest rechtse kolom geeft de amplitude  $A$ , de z.g. astronomische amplitude. Deze geeft de relatieve belangrijkheid van ieder component afzonderlijk. De allerbelangrijkste zijn onderstreept. Er zij nogmaals op gewezen, dat het nog steeds om de componenten van de sleepkracht gaat. De uitwerking op het echte getij is voor ieder component verschillend, zodat we niet mogen verwachten, dat de amplitudes, zoals deze gemeten worden zich verhouden als de astronomische amplitudes. Dit is vooral sprekend voor enkeldaagse en dubbeldaagse getijden. Vergelijking tussen de respectieve amplitudes van het echte getij en de astronomische amplitudes kan zeer grote verschillen te zien geven. Voorts bevat de kolom onder  $m$  slechts nullen. Dit houdt niet in dat de positie van de knopen geen invloed op de componenten van de sleepkracht heeft; deze wordt echter iets anders verwerkt. Aangezien de invloed daarvan, de z.g. 19-jarige variatie, klein is, wordt deze d.m.v. correctiefactoren in rekening gebracht. Zo wordt bijvoorbeeld de amplitude van het hoofdmassagetij,  $M_2$ , vermenigvuldigd met  $f$ , de z.g. knoofactor:

$$f_{M_2} = 1,001 - 0,039 \cos \omega_k t.$$

De knoofactoren worden gedurende het jaar als een constante beschouwd. Een dergelijke correctie bestaat ook voor de fase van iedere component. Nu is er een correctie  $u$ , welke met de astronomische fase vermeerderd moet worden om de juiste fase te bepalen.

De algemene uitdrukking voor een component van de sleepkracht is:

$$A \cos [(i\omega'_a + j\omega_m + k\omega_z + l\omega_p + m\omega_k + n\omega_1)t + \psi]$$

$$\text{waarbij } \omega'_a = \omega_a - \omega_m$$



Naam	i	j	k	l	m	n	A * 10 <sup>+6</sup>
S <sub>a</sub>	0	0	1	0	0	-1	1.160
Ss <sub>a</sub>	0	0	2	0	0	0	7.299
Mm	0	-2	0	-1	0	0	8.254
Mf	0	2	0	0	0	0	15.642
2Q <sub>1</sub>	1	-3	0	2	0	0	955
σ <sub>1</sub>	1	-3	2	0	0	0	1.153
Q <sub>1</sub>	1	-2	0	1	0	0	7.216
$\overline{P}_1$	1	-2	2	-1	0	0	1.371
$\overline{O}_1$	1	-1	0	0	0	0	37.689
$\overline{\tau}_1$	1	-1	2	0	0	0	491
M <sub>1</sub>	1	0	0	-1	0	0	1.065
NO <sub>1</sub>	1	0	0	1	0	0	2.004
X <sub>1</sub>	1	0	2	-1	0	0	566
π <sub>1</sub>	1	1	-3	0	0	1	1.029
$\overline{P}_1$	1	1	-2	0	0	0	17.584
$\overline{S}_1$	1	1	-1	0	0	1	423
$\overline{K}_1$	1	1	0	0	0	0	53.050
$\overline{\Psi}_1$	1	1	1	0	0	-1	423
φ <sub>1</sub>	1	1	2	0	0	0	756
θ <sub>1</sub>	1	2	-2	1	0	0	566
J <sub>1</sub>	1	2	0	-1	0	0	2.964
$\overline{OO}_1$	1	3	0	0	0	0	1.623
ε <sub>2</sub>	2	-3	2	1	0	0	671
2N <sub>2</sub>	2	-2	0	2	0	0	2.301
μ <sub>2</sub>	2	-2	2	0	0	0	2.777
$\overline{N}_2$	2	-1	0	1	0	0	17.387
$\overline{v}_2$	2	-1	2	-1	0	0	3.303
$\overline{M}_2$	2	0	0	0	0	0	90.812
$\overline{\lambda}_2$	2	1	-2	1	0	0	670
L <sub>2</sub>	2	1	0	-1	0	0	2.567
$\overline{T}_2$	2	2	-3	0	0	1	2.479
S <sub>2</sub>	2	2	-2	0	0	0	42.358
$\overline{R}_2$	2	2	-1	0	0	-1	354
$\overline{K}_2$	2	2	0	0	0	0	11.506
$\overline{\zeta}_2$	2	3	-2	1	0	0	123
η <sub>2</sub>	2	3	0	-1	0	0	643
M <sub>3</sub>	3	0	0	0	0	0	1.188

tabel 1. De harmonische componenten van de sleepkracht

typen getijden:            hoofdgetijden (  $M_2, S_2$  )  
                               declinatiegetijden ( b.v.  $S_{sa}, Mf, O_1, P_1, K_1, K_2$  )  
                               elliptische getijden (b.v.  $Q_1, N_2, L_2$  )

Numerieke waarden	graden/uur	omw./uur	periode
$\omega_a$	15,04116	0,041781	0,997 dag
$\omega'_a$	14,49216	0,040256	1,035 "
$\omega_m$	0,54900	0,001525	27,32 "
$\omega_z$	0,04104	0,000114	365,26 "
$\omega_p$	0,00464	0,000013	8,85 jaar
$\omega_k$	0,00221	0,000006	18,60 "
$\omega_l$	0,000002	0,000000	25.765 "

Aan steile kusten van diepe oceanen of bij oceanische eilanden zou men het getij op redelijke wijze kunnen beschrijven met componenten, die frequenties volgens tabel 1 hebben. Helaas is dit echter min of meer een uitzondering, daar blijkt dat veelal hogere frequenties in het echte getij voorkomen dan uit de tabel 1 volgt. Dit wordt veroorzaakt door niet-lineaire verschijnselen, die bij de voortplanting van getijgolven in ondiepe zeeën en estuaria een rol spelen, zoals bv.:

- a) variabele waterspiegelbreedte als gevolg van droogvallende platen e.d.
- b) invloed van bodemweerstand op de waterstroming; deze is evenredig met het kwadraat van de snelheid,
- c) niet-lineaire invloeden bij stroming met relatief hoge snelheden (hoge kinetische energie),
- d) niet constante voortplantingssnelheid van de getijgolf; deze is afhankelijk van de diepte.

Aan de punten b) en d) zal nog enige aandacht besteed worden.

In geval b) is de wrijving  $W$  evenredig met het kwadraat van de snelheid  $v$ .

Dus:

$W \propto v^2$ , echter, omdat  $v$  van teken kan wisselen en  $W$  ook:

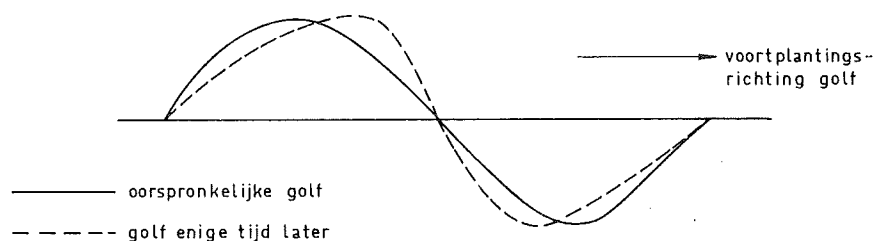
$W \propto v|v|$

Veronderstel dat  $v \propto \sin \omega t$ , dan kan  $W$  als volgt met behulp van een Fourierreeks ontwikkeld worden:

$$W \cdot \sin \omega t |\sin \omega t| = \frac{8}{3\pi} \sin \omega t + \frac{8}{15\pi} \sin 3\omega t + \dots$$

Bovenstaande uitdrukking impliceert, dat de niet-lineaire wrijving a.h.w. termen met hogere frequentie genereert. In geval de basisoscillatie bij  $M_2$  zou behoren, zou een  $M_6$ , e.d. opgewekt worden. Het is duidelijk, dat deze  $M_6$  e.d. niet van astronomische oorsprong is.

In geval d) beschouwen we een rechthoekig horizontaal kanaal, waarin een sinusoidale golf zich voortplant. In principe is de voortplantingssnelheid van een vaste waterhoogte  $\sqrt{gh}$ , waardoor na enige tijd de golf vervormd zal zijn (zie schetsje). Als uitgegaan zou zijn van  $M_2$ , dan wordt a.h.w. een 4\*-daagsgetij,  $M_4$ , gesuperponeerd. Ook dit niet-lineaire verschijnsel genereert dus bovenharmonischen.



Het moge duidelijk zijn, dat nu ook allerlei niet-lineaire interacties tussen de verschillende getijcomponenten aanleiding kunnen zijn tot het ontstaan van frequenties. Zo geeft bijvoorbeeld de interactie tussen  $M_2$  en  $S_2$  (denk aan dootij en springtij) aanleiding tot  $MS_4$ , die tussen  $M_2$  en  $N_2$  tot  $MN_4$ , etc. Gezien het grote aantal basisgetijcomponenten ligt het voor de hand een groot aantal ondiep water getijden te verwachten. Tabel 2 geeft daarvan een overzicht. Natuurlijk bevat deze tabel geen kolom, die de waarden van de astronomische amplitude geeft; immers hun origine is volslagen anders. Er kan dus ook moeilijk op voorhand voorspeld worden, welke ondiep water getijden belangrijk zijn. De ervaring heeft evenwel geleerd, dat  $M_4$ ,  $M_6$ ,  $M_8$ ,  $MS_4$ ,  $MN_4$  wel de belangrijkste zijn, zodat deze ook in een analyse van beperkte omvang beschouwd moeten worden.

### 2.3. Voorspelling van het getij

Voor de voorspelling van het getij wordt uitgegaan van het evenwichtsgetij, zoals dat op de meridiaan van Greenwich wordt waargenomen:

$$h = h_0 + \sum_n f_n H_n \cos(\omega_n t + V_n + u_n)$$

waarin  $h$  = getij (horizontaal of vertikaal),

$h_0$  = gemiddelde waarde,

$H_n$  = astronomische amplitude = constant per getij,

$\omega_n$  = hoeksnelheid,

$t$  = GMT (Greenwich Mean Time),

$V_n + u_n$  = astronomische argument, waarvan,

$V_n$  = uniform veranderende deel van het astronomische argument als  $\omega_{\text{mz}} = 29^\circ$

gevolg van het feit, dat iedere dag weer met  $t = 0$  begint;  $(V_n + u_n)_{\text{vrijm}} = (V_n + u_n)_{\text{vrijm}} +$

iedere getij component heeft dus voor iedere dag een ander  $(29 \times 24)^\circ =$

astronomisch argument,  $(V_n + u_n)_{\text{vrijm}} - 29^\circ$

$f_n, u_n$  = correcties voor positie van de knopen.

Voor een plaats  $L$  graden westelijk van Greenwich wordt het evenwichtsgetij, met  $t$  in GMT:

$$h = h_0 + \sum_n f_n H_n \cos(\omega_n t + V_n + u_n - pL)$$

$t$  in GMT

waarin  $p = 0, 1, 2, \dots$ , afhankelijk van het feit of het gaat om een getij met lange periode ( $p = 0$ ), een enkeldaags-getij ( $p = 1$ ), enz.

Deze plaats heeft i.h.a. een andere tijd dan Greenwich. Veronderstel, dat deze plaats ligt in een tijdzone, waar het  $S$  uren vroeger is dan in Greenwich. Dan wordt het evenwichtsgetij:

$$h = h_0 + \sum_n f_n H_n \cos(\omega_n t + V_n + u_n - pL + \omega_n S)$$

$t$  in plaatselijke tijd

We maken nu de stap naar het echte getij en veronderstellen, dat  $h_0$  en  $H_n$  respectievelijk de gemiddelde waarde en de amplitude van de echte getij-componenten zijn. De willekeurige getijcomponent zal echter wel in fase verschillen van het evenwichtsgetij, dus het werkelijke getij wordt weergegeven door:

$$h = h_0 + \sum_n f_n H_n \cos(\omega_n t + V_n + u_n - pL + \omega_n S - \kappa_n)$$

waarin  $\kappa_n$  = kappa-getal.

Naam	i	j	k	l	m	n	zelfde fre- quentie als
NO <sub>1</sub>	1	0	0	1	0	0	
SO <sub>1</sub>	1	3	-2	0	0	0	
OQ <sub>2</sub>	2	-3	0	3	0	0	
2MS <sub>2</sub>	2	-2	2	0	0	0	μ <sub>2</sub>
OP <sub>2</sub>	2	0	-1	0	0	1	
MKS <sub>2</sub>	2	0	2	0	0	0	
2MN <sub>2</sub>	2	1	0	-1	0	0	L <sub>2</sub>
MSN <sub>2</sub>	2	3	-2	-1	0	0	ζ <sub>2</sub>
2SM <sub>2</sub>	2	4	-4	0	0	0	
MO <sub>3</sub>	3	-1	0	0	0	0	
SO <sub>3</sub>	3	1	-2	0	0	0	
MK <sub>3</sub>	3	1	0	0	0	0	
SK <sub>3</sub>	3	3	-2	0	0	0	
MN <sub>4</sub>	4	-1	0	1	0	0	
M <sub>4</sub>	4	0	0	0	0	0	
SN <sub>4</sub>	4	1	-2	1	0	0	
MS <sub>4</sub>	4	2	-2	0	0	0	
MK <sub>4</sub>	4	2	0	0	0	0	
S <sub>4</sub>	4	4	-4	0	0	0	
SK <sub>4</sub>	4	4	-2	0	0	0	
2MN <sub>6</sub>	6	-1	0	1	0	0	
M <sub>6</sub>	6	0	0	0	0	0	
MSN <sub>6</sub>	6	1	-2	1	0	0	
2MS <sub>6</sub>	6	2	-2	0	0	0	
2MK <sub>6</sub>	6	2	0	0	0	0	
2SM <sub>6</sub>	6	4	-4	0	0	0	
MSK <sub>6</sub>	6	4	-2	0	0	0	
3MN <sub>8</sub>	8	-1	0	1	0	0	
M <sub>8</sub>	8	0	0	0	0	0	
2MSN <sub>8</sub>	8	1	-2	1	0	0	
3MS <sub>8</sub>	8	2	-2	0	0	0	
2(MS) <sub>8</sub>	8	4	-4	0	0	0	
2MSK <sub>8</sub>	8	-4	-2	0	0	0	

tabel 2. Ondiep water getijden.

Meestal wordt dit echter geschreven als:

$$h = h_0 + \sum_n f_n H_n \cos (\omega_n t + V_n + u_n - g_n)$$

waarin  $g_n =$  verbeterend kappa - getal  $= pL - \omega_n S + \kappa_n$ .

Noot: In de getijvoorspelling wordt  $f_n$  ontleend aan de astronomische analyse en gedurende een jaar als constant beschouwd.

Literatuur

1. Danby, J.  
Fundamentals of celestial mechanics.  
New York, 1962, pp 107-118.
2. Darwin, G.  
On an apparatus for 'facilitating the reduction of tidal observations.  
Proc. Roy. Soc., London, 1962, Ser A52, 345 - 376.
3. Deutsches Hydrografisches Institut.  
Tafeln der Astronomischen Argumente  $V_0 + v$  und der Korrectionen  $j, v$ .  
Hamburg 1967.
4. Doodson, A.T.  
The harmonic development of the tide generating potential.  
Proc. Roy. Soc., London, 1921, Ser. A100, pp 306 - 328.
5. Doodson, A.T.  
The analysis of tidal observations.  
Phil. Trans. Roy. Soc., London, Ser. A227, pp 223 - 279.
6. Doodson, A.T.  
The analysis and predictions of tides in shallow water.  
IHR 33, 1957, pp 85 - 126.
7. Dronkers, J.J.  
Tidal computations in rivers and coastal waters.  
Amsterdam, 1964.
8. Godin, G.  
The analysis of tides.  
Liverpool, 1972.
9. Horn, W.  
Über die Darstellung der Gezeiten als Funktion der Zeit.  
Deutsche Hydrographische Zeitschrift, 1948, 4, 124 - 140.

10. Kelvin, Lord  
Report on the Committee for the purpose of promoting the extension,  
improvement and harmonic analysis of tidal observations.  
British Ass. for the Advancement of Science Report, 1868, 489 - 505  
1870, 120 - 125, 148 - 151.
  
11. Laplace, P.S.  
Recherches des plusieurs points du système du monde.  
Mémoires de l'Académie royale des Sciences, 1775, 88, pp 75 - 182,  
1776, 89, pp 177 - 267.
  
12. Melchior, P.  
The earth tides,  
Oxford.
  
13. Schureman, P.  
Manual of harmonic analysis and prediction of tides:  
V.S. Coast and Geodetic Survey, 1941.
  
14. Smart, W.  
Text book on spherical astronomy.  
Cambridge, 1956.



### 3. Fourierreeksen en Fouriertransformaties; de toepassing op getijsignalen

#### 3.1. Inleiding

De algemene uitdrukking voor het horizontale of verticale getij als functie van de tijd is

$$h(t) = h_0 + \sum_n f_n H_n \cos(\omega_n t + V_n + u_n - g_n) \quad (3.1.)$$

Deze formule geeft aan, dat het getijsignaal opgebouwd is uit vele sinusoiden, elk met zijn eigen amplitude, hoeksnelheid en fase (op  $t = 0$ ). Een meting  $h(t)$  zal al deze sinusoiden bevatten en als er voldoende gegevens over  $h(t)$  bekend zijn, zullen in principe al deze sinusoiden uit het gemeten signaal berekend kunnen worden. De echte onbekenden in vergelijking (3.1) zijn de getijconstanten  $H_n$  en  $g_n$ . De andere grootheden zijn bekend; immers, voor  $f_n$  wordt de over een jaar gemiddelde astronomische waarde genomen, terwijl het astronomisch argument ontleend wordt aan het evenwichtsgetij.

Een meetsignaal heeft een begin en een einde. Voor de analyse van een signaal moet gedefinieerd worden waar het tijdstip  $t = 0$  ligt. In de berekeningen moet elk tijdstip gerelateerd worden aan deze tijdbasis. Het verspringen van de oorsprong van de tijd, zoals dit in vergelijking (3.1) gebeurt, treedt dus niet op. Indien nu voor het getijsignaal een vaste oorsprong van de tijd gedefinieerd wordt, b.v. op middernacht aan het begin van een zekere dag, dan kan het getijsignaal geschreven worden als:

$$h(t) = h_0 + \sum_n h_n \cos(\omega_n t - \alpha_n). \quad (3.2)$$

Hierin zijn  $h_n$  en  $\alpha_n$  als de nieuwe onbekenden te beschouwen. Als ze bekend zijn volgen de getijconstanten er direct uit:

$$H_n = \frac{h_n}{f_n}, \quad (3.3)$$

$$g_n = \alpha_n + V_n + u_n.$$

Als het gemeten getijsignaal louter en alleen uit echte getijcomponenten zou bestaan, kan het resultaat van de analyse, voor zover het de amplitude betreft, weergegeven worden zoals in fig. 7.

Afgezien van lang-periodieke getijcomponenten zijn in deze figuur een grove en een fijne structuur te onderscheiden. De grove structuur heeft betrekking op de groepering van de componenten rond de frequenties van 1 x per dag, 2 x per dag enz. In iedere groep is een aantal componenten te onderscheiden. De ver-

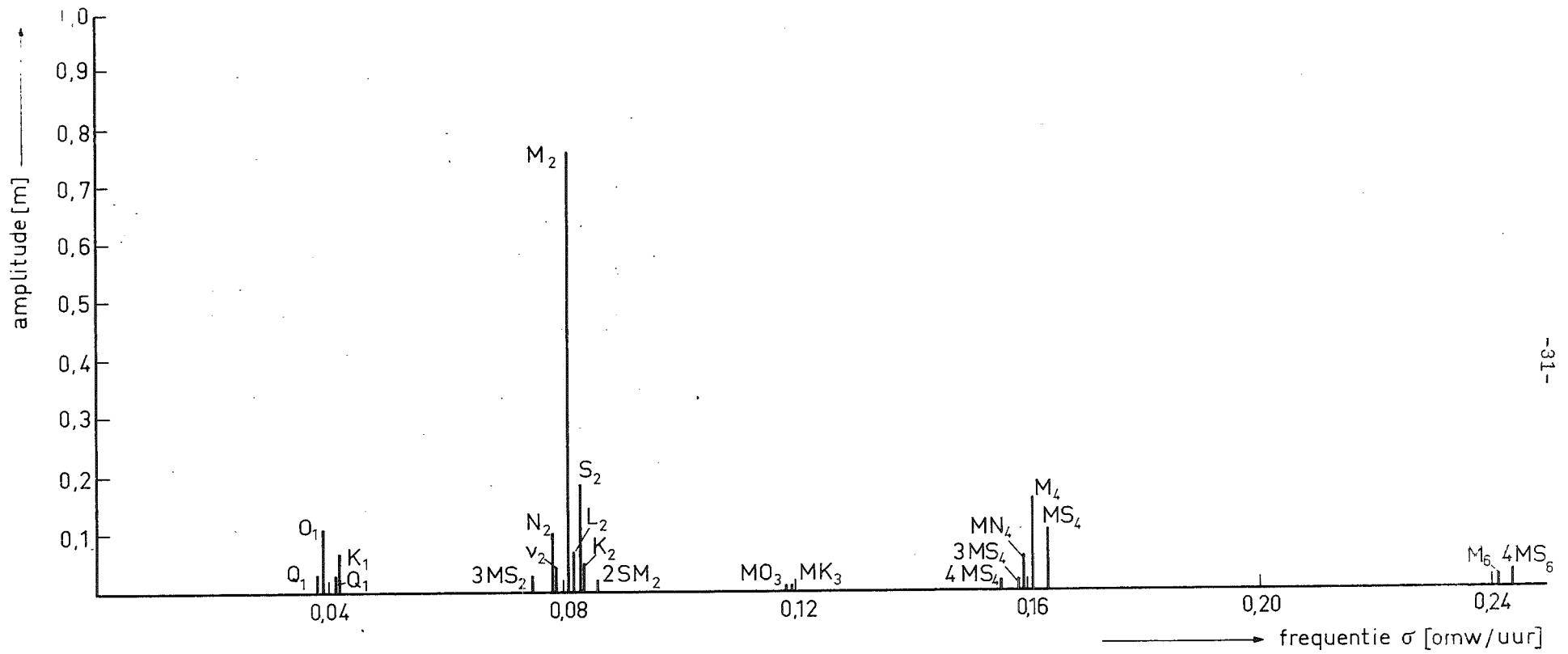


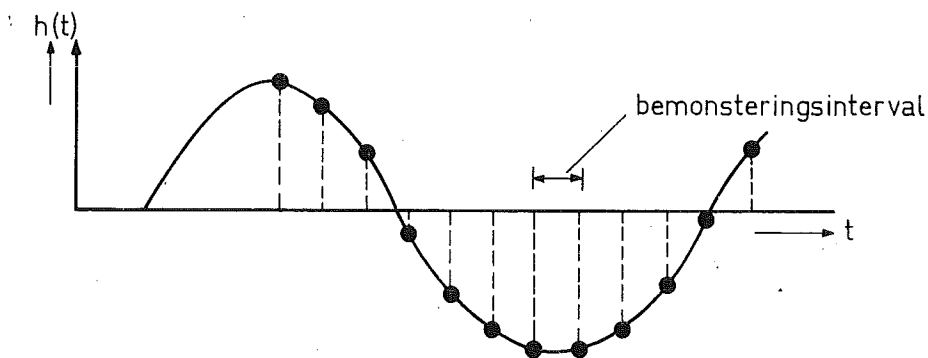
Fig. 7. De belangrijkste getijcomponenten te Hoek van Holland.

schillen in frequentie binnen een groep zijn klein tot zeer klein in vergelijking met de verschillen in frequentie tussen de groepen.

Indien het signaal ongestoord is kan theoretisch met een gering aantal waarnemingen worden volstaan om de amplitudes en fases van de getijcomponenten te bepalen. Bij een aantal van  $n$  getijcomponenten zijn  $2n$  waarnemingen dan voldoende. De natuur levert echter zeer zelden ongestoorde metingen. Zo worden bij het getij de waarnemingen verstoord door meteorologische effecten, slingeren van waterbasins (zowel van grote als van relatief kleine), e.d. Om de storende invloeden te elimineren zal een veel groter aantal waarnemingen verricht moeten worden dan volgt uit het aantal onbekenden. In de volgende paragrafen zal uiteengezet worden hoe uit de waarnemingen de getijcomponenten bepaald kunnen worden. Met name zal aandacht worden besteed aan de benodigde lengte van de waarnemingsreeks om getijcomponenten van elkaar te scheiden, en aan het maximale bemonsteringsinterval<sup>\*)</sup> bij gegeven hoogste frequentie in het signaal. Ten einde hierin inzicht te verwerven, zal in de volgende paragrafen enige aandacht aan Fourieranalyse en Fouriertransformaties worden besteed. De behandeling is zodanig, dat de theorie algemeen toepasbaar is, dus niet alleen geldt voor getijmetingen. Voorafgaand daaraan zal nog enige aandacht aan de methode der kleinste kwadraten worden geschonken.

---

\*) Reeds hier kan worden opgemerkt, dat bij berekeningen nooit de gehele getijkromme wordt gebruikt. Er wordt slechts gerekend met waarden van de kromme op zekere tijdsafstand van elkaar. Het nemen van deze waarden wordt bemonsteren, de tijdsafstand bemonsteringsinterval genoemd.



● = waarden van de getijkromme, waarmee de berekeningen worden uitgevoerd.

### 3.2. De methode der kleinste kwadraten

Bij getijanalyse gaat het erom uit de waarnemingen zodanige schattingen voor de parameters (amplitudes, fases) te maken, dat deze zo aannemelijk mogelijk zijn. Hierbij is het functionele verband in principe gegeven (zie vergelijkingen (3.2.) en (3.3.)).

In algemene zin wordt dit probleem gerangschikt onder de "theorie der meest aannemelijke schattingen" en in het bijzonder onder de regressieanalyse.

De methode, die gebruikt wordt om de parameters van de functie te bepalen, is de methode der kleinste kwadraten.

In woorden komt deze methode op het volgende neer.

Veronderstel dat  $g(t)$  de op het tijdsinterval  $(t_1, t_2)$  gemeten functie (waarnemingen) is en  $h(t, a, b, c, \dots)$  de in principe bekende functie met de onbekende parameters  $a, b, c, \dots$ , die uit de waarnemingen bepaald moeten worden. Het meetsignaal  $g(t)$  zal niet overeenstemmen met de functie  $h(t)$ ; het verschil (de fout) is:

$$e(t) = h(t) - g(t) .$$

De methode der kleinste kwadraten eist dat de geïntegreerde kwadratische fout

$$F(a,b,c,\dots) = \int_{t_1}^{t_2} e^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [h(t) - g(t)]^2 dt \quad (3.4)$$

minimaal is.  $F$  hangt niet meer van  $t$  af, maar wel van de parameters  $a, b, c, \dots$

Een noodzakelijke voorwaarde voor het bereiken van een minimum door  $F$  is, dat de partiële afgeleiden van  $F$  naar de onbekende parameters  $a, b, c, \dots$  gelijk aan nul worden:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \frac{\partial F}{\partial b} = 0, \frac{\partial F}{\partial c} = 0, \dots \quad (3.5)$$

Deze procedure zal leiden tot even zo vele vergelijkingen als er onbekenden zijn, zodat deze daaruit opgelost kunnen worden.

---

#### Voorbeeld

De hiervoor beschreven methode kan heel goed gebruikt worden om getijcomponenten te berekenen uit een meetsignaal. Om het principe te laten zien zullen slechts 2 componenten (harmonischen) beschouwd worden. Voor meerdere componenten is de gang van zaken analoog.

$$\begin{aligned} \text{Dus: } h(t) &= h_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1) + h_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2) = \\ &= h_1 \cos \omega_1 t \cos \alpha_1 + h_1 \sin \omega_1 t \sin \alpha_1 + \\ &+ h_2 \cos \omega_2 t \cos \alpha_2 + h_2 \sin \omega_2 t \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Om de procedure iets eleganter te laten verlopen worden de volgende nieuwe onbekenden ingevoerd:

$$\begin{aligned} h_1 \cos \alpha_1 &= A_1, & h_2 \cos \alpha_2 &= A_2, & \alpha_1 &= \arctan \frac{B_1}{A_1} \\ h_1 \sin \alpha_1 &= B_1, & h_2 \sin \alpha_2 &= B_2, & h_1 &= \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \end{aligned}$$

$$\text{zodat: } h(t) = A_1 \cos \omega_1 t + B_1 \sin \omega_1 t + A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t.$$

De parameters in deze functie zijn dus  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $B_1$  en  $B_2$ ; om ze te bepalen zijn er metingen verricht op de tijdstippen:

$$t_0, t_0 + \Delta t, t_0 + 2\Delta t, \dots, t_0 + i\Delta t, \dots, t_0 + k\Delta t.$$

Het willekeurige tijdstip  $t_0 + i\Delta t$  zal weergegeven worden door  $t_i$ ; de gemeten waarde op dat tijdstip door  $g(t_i)$ . Er zijn  $k+1$  waarnemingen, waarbij  $k+1 \gg 4$  (= aantal onbekende parameters).

De geïntegreerde fout  $F$  wordt nu volgens vergelijking (3.4), waarbij de integratie door een sommatie is vervangen:

$$F(A_1, A_2, B_1, B_2) = \sum_{i=0}^k [h(t_i) - g(t_i)]^2 \Delta t.$$

of

$$F = \sum_{i=0}^k [A_1 \cos \omega_1 t_i + B_1 \sin \omega_1 t_i + A_2 \cos \omega_2 t_i + B_2 \sin \omega_2 t_i - g(t_i)]^2 \Delta t.$$

Differentieer  $F$  nu naar respectievelijk  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$  en stel de afgeleiden gelijk aan nul. Het resultaat is:

$$\frac{\partial F}{\partial A_1} = 2 \sum_{i=0}^k [A_1 \cos \omega_1 t_i + B_1 \sin \omega_1 t_i + A_2 \cos \omega_2 t_i + B_2 \sin \omega_2 t_i - g(t_i)] \cos \omega_1 t_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial B_1} = 2 \sum_{i=0}^k [ \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } - \text{ " } ] \sin \omega_1 t_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial A_2} = 2 \sum_{i=0}^k [ \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } - \text{ " } ] \cos \omega_2 t_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial B_2} = 2 \sum_{i=0}^k [ \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } \quad \text{ " } - \text{ " } ] \sin \omega_2 t_i = 0$$

Dit levert na enig uitwerken op:

$$A_1 \sum_{i=0}^k \cos \omega_1 t_i \cos \omega_1 t_i + B_1 \sum_{i=0}^k \sin \omega_1 t_i \cos \omega_1 t_i + A_2 \sum_{i=0}^k \cos \omega_2 t_i \cos \omega_1 t_i +$$

$$+ B_2 \sum_{i=0}^k \sin \omega_2 t_i \cos \omega_1 t_i = \sum_{i=0}^k g(t_i) \cos \omega_1 t_i,$$

$$A_1 \sum_{i=0}^k \cos \omega_1 t_i \sin \omega_1 t_i + B_1 \sum_{i=0}^k \sin \omega_1 t_i \sin \omega_1 t_i + A_2 \sum_{i=0}^k \cos \omega_2 t_i \sin \omega_1 t_i +$$

$$+ B_2 \sum_{i=0}^k \sin \omega_2 t_i \sin \omega_1 t_i = \sum_{i=0}^k g(t_i) \sin \omega_1 t_i,$$

$$A_1 \sum_{i=0}^k \cos \omega_1 t_i \cos \omega_2 t_i + B_1 \sum_{i=0}^k \sin \omega_1 t_i \cos \omega_2 t_i + A_2 \sum_{i=0}^k \cos \omega_2 t_i \cos \omega_2 t_i +$$

$$B_2 \sum_{i=0}^k \sin \omega_2 t_i \cos \omega_2 t_i = \sum_{i=0}^k g(t_i) \cos \omega_2 t_i,$$

$$A_1 \sum_{i=0}^k \cos \omega_1 t_i \sin \omega_2 t_i + B_1 \sum_{i=0}^k \sin \omega_1 t_i \sin \omega_2 t_i + A_2 \sum_{i=0}^k \cos \omega_2 t_i \sin \omega_2 t_i +$$

$$B_2 \sum_{i=0}^k \sin \omega_2 t_i \sin \omega_2 t_i = \sum_{i=0}^k g(t_i) \sin \omega_2 t_i.$$

Merk nu op, dat alle sommaties in deze laatste vergelijkingen kunnen worden berekend.\*<sup>)</sup> Dit geldt zowel voor de rechter- als voor de linkerleden. Met andere woorden: er ontstaat nu een systeem van 4 lineaire vergelijkingen met 4 onbekenden, dat in matrixvorm weergegeven kan worden als:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

\*<sup>)</sup> Ter besparing van rekenwerk kunnen de sommaties in de linkerleden worden vervangen door eenvoudige producten. Aangezien dit in het kader van dit onderwerp weinig essentieel is, zal hieraan verder geen aandacht besteed worden.

De onbekenden  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  en  $B_2$  kunnen opgelost worden door b.v. de matrix te inverteren. Als  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $A_2$  en  $B_2$  gevonden zijn, kunnen ook  $h_1$ ,  $\alpha_1$  en  $h_2$ ,  $\alpha_2$  bepaald worden. Met betrekking tot het oplossen van vooral grote stelsels lineaire vergelijkingen kan worden opgemerkt, dat in dergelijke gevallen met groot voordeel van de computer gebruik kan worden gemaakt.

-----

Het toepassen van de methode der kleinste kwadraten voor een getijanalyse is in eerste instantie goed mogelijk (zie ook het voorbeeld), doch er zijn wel enkele nadelen te noemen.

Ten eerste dient op voorhand beslist te worden welke getijcomponenten in de berekening meegenomen moeten worden. Achteraf zal dus steeds naar het residu (= verschil tussen benadering en meetsignaal) gekeken moeten worden om na te gaan of er wellicht belangrijke frequenties over het hoofd zijn gezien. Er zijn evenwel methoden die informatie over het gehele frequentiedomein verschaffen; met de huidige rekentechnieken zijn deze economisch goed uitvoerbaar met behulp van een computer. Ten tweede kunnen aan de toepassing van de methode der kleinste kwadraten geen criteria ontleend worden over de grootte van het bemonsteringsinterval en de lengte van de waarnemingsreeks. Dit is wel mogelijk met de hierna te behandelen methode.

Een voordeel van de methode der kleinste kwadraten is evenwel, dat "gaten" in de registratie berekeningen niet in de weg staan. Bij de Fourieranalyse is dit wel uitermate hinderlijk. Aangezien praktijkgegevens nogal eens onvolledig zijn, zal dan vaak gebruik gemaakt worden van de methode der kleinste kwadraten.

### 3.3. Reeksen van Fourier

Het getij vertoont gelijkenis met een verschijnsel dat na een bepaalde tijd weer hetzelfde verloop te zien geeft, dus periodiek is. Formeel bezien is het getij zelfs zuiver periodiek, zij het dan met zeer grote periode. Dit laatste wordt veroorzaakt door de langste te onderkennen periode van bijna 19 jaar in het getijsignaal. Dit betekent nog niet dat dit ook de periode van het getij zou zijn. Immers, er moet geëist worden dat in die periode elke harmonische component een geheel aantal oscillaties kan voltooien. In praktische zin kan men voor kortere perioden periodiciteit veronderstellen, vooral als het aantal in de berekening betrokken componenten beperkt is.

Het ligt dus voor de hand om te trachten het getij gedurende een dergelijke periode te beschrijven met een reeks van Fourier, en wel als volgt.

Ga uit van een normale functie  $z(t)$  die periodiek is op een interval van

$2T$  \*);  $z(t)$  kan dan beschreven worden door een goniometrische reeks van de gedaante:

$$z(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos \pi j \frac{t}{T} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin \pi j \frac{t}{T} \quad (3.6)$$

Onder normaal wordt verstaan dat  $z(t)$  en  $z'(t)$  continu zijn op (misschien) een eindig aantal punten na. De coëfficiënten  $a_j$  en  $b_j$  worden de coëfficiënten van Fourier genoemd. Als de goniometrische reeks uniform convergeert, wat het geval is voor normale  $z(t)$ , dan is deze de reeks van Fourier.

Om de coëfficiënten  $a_j$  en  $b_j$  te berekenen kunnen we het linker- en rechterlid van vgl. (3.6) vermenigvuldigen met resp.  $\cos \pi j' \frac{t}{T}$  en  $\sin \pi j' \frac{t}{T}$  en integreren over het interval  $(-T, +T)$ . De reeksen in het rechterlid worden verondersteld uniform te convergeren, waardoor term voor term geïntegreerd mag worden. Nu is:

$$\int_{-T}^{+T} z(t) \cos \frac{\pi j' t}{T} dt = \int_{-T}^{+T} \frac{1}{2} a_0 \cos \frac{\pi j' t}{T} dt + \int_{-T}^{+T} \cos \frac{\pi j' t}{T} \sum a_j \cos \frac{\pi j t}{T} dt + \int_{-T}^{+T} \cos \frac{\pi j' t}{T} \sum b_j \sin \frac{\pi j t}{T} dt$$

$$\left. \begin{aligned} \int_{-T}^{+T} a_j \cos \pi j' \frac{t}{T} \cos \pi j \frac{t}{T} dt &= 0 \text{ voor } j \neq j' \\ &= T \text{ " } j = j' \neq 0 \\ &= 2T \text{ " } j = j' = 0 \end{aligned} \right\} \text{(orthogonaliteit)}$$

Dit is één van de  $j$  termen van deel III

$$\int_{-T}^{+T} b_j \cos \pi j' \frac{t}{T} \sin \pi j \frac{t}{T} dt = 0.$$

dit is een van de  $j$  termen van IV

$$\left. \begin{aligned} \int_{-T}^{+T} \sin \pi j' \frac{t}{T} \sin \pi j \frac{t}{T} dt &= 0 \text{ voor } j \neq j' \\ &= T \text{ " } j = j' \neq 0 \end{aligned} \right\} \text{(orthogonaliteit)}$$

term II is voor iedere  $j'$  nul omdat er altijd een heel aantal oscillaties op een interval zitten

zodat het resultaat wordt:

$$a_j = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} z(t) \cos \pi j \frac{t}{T} dt$$

de grote vgl wordt dus

$$\int_{-T}^{+T} z(t) \cos \frac{\pi j t}{T} dt = a_j T, \text{ dus (3.7)}$$

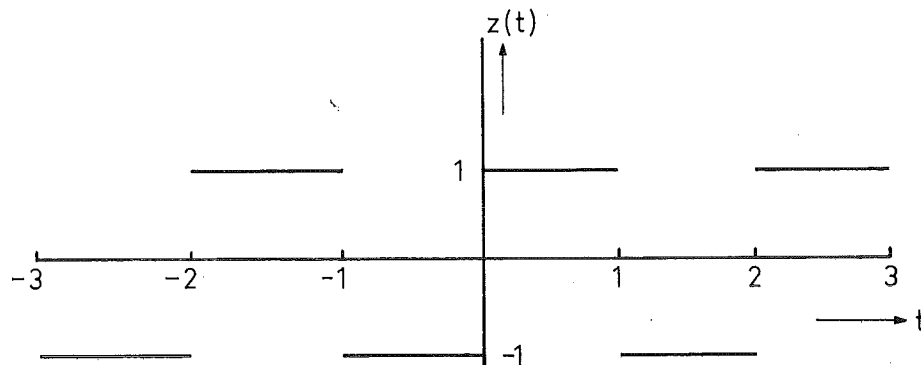
$$b_j = \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} z(t) \sin \pi j \frac{t}{T} dt$$

\*) Merk op dat de golf, die juist één oscillatie gedurende deze periode kan voltooien, een periode heeft van  $2T$ .



Voorbeeld I

Zij  $z(t) = 1$  voor  $0 < t \leq 1$ ,  
 $= -1$  "  $1 < t < 2$ ,  
 $= 0$  "  $t = 0, 2, 4, \dots$   
 $z(t) =$  periodiek met periode  $2T = 2$  ( $T=1$ )



Het gaat hier om een oneven functie (antimetrisch ten opzichte van de oorsprong), dus de coëfficiënten van de cosinustermen zijn nul:

$$a_j = 0$$

Voorts is:

$$b_j = \int_{-1}^{+1} z(t) \sin j\pi t \, dt = \frac{2}{j\pi} [1 - (-1)^j]$$

Dus: 
$$z(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sin \pi t + \frac{\sin 3\pi t}{3} + \frac{\sin 5\pi t}{5} + \dots \right)$$

Voorbeeld II

De wrijving in een getijstroom is evenredig met het kwadraat van de snelheid, doch tegengesteld aan de richting daarvan. Dus  $W \cdot v|v|$ . Veronderstel dat  $v = \sin t$ :  $W \cdot \sin t |\sin t|$ , wat met een Fourierreeks geschreven kan worden als ( $a_j = 0$ ):

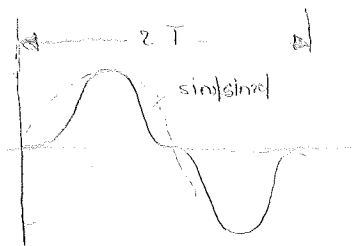
$$\sin t |\sin t| = \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin jt, \quad (T=\pi)$$

met:

$$b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin t |\sin t| \sin jt \, dt$$

b.v.

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin^2 t |\sin t| \, dt = \frac{8}{3\pi}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t \sin t \, dt \\ &= -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 t \, d \cos t = -\frac{4}{\pi} \int_1^{-1} (1 - \cos^2 t) \, d \cos t \\ &= -\frac{4}{\pi} \left[ \int_1^{-1} d \cos t + \int_1^{-1} \cos^2 t \, d \cos t \right] \\ &= -\frac{4}{\pi} \left[ \sin t \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\pi} \right] = \frac{8}{3\pi} \end{aligned}$$

$$b_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \sin |t \sin t| \sin 2t dt = 0 ,$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin t | \sin t | \sin 3t dt = \frac{8}{15\pi} .$$

-----

Voor de Fourierreeks volgens vgl. (3.6) en de uitdrukkingen voor de coëfficiënten vgl. (3.7) bestaan ook complexe schrijfwijzen, die later in het college benodigd zijn. Voor de omzetting wordt gebruik gemaakt van de formules:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{en} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \text{want} \quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

waarin  $i = \sqrt{-1}$ .

Indien de cosinus en de sinus in vgl. (3.6) op deze wijze vervangen worden, is het resultaat:

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \frac{e^{i\pi j \frac{t}{T}} + e^{-i\pi j \frac{t}{T}}}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \frac{e^{i\pi j \frac{t}{T}} - e^{-i\pi j \frac{t}{T}}}{2i} = \\ &= \frac{1}{2}a_0 e^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_j - ib_j)e^{i\pi j \frac{t}{T}} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_j + ib_j)e^{-i\pi j \frac{t}{T}} . \end{aligned}$$

Vervang in de laatste sommatie  $j$  door  $-j$ :

$$z(t) = \frac{1}{2}a_0 e^0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_j - ib_j)e^{i\pi j \frac{t}{T}} + \sum_{j=-1}^{-\infty} \frac{1}{2}(a_{-j} + ib_{-j})e^{i\pi j \frac{t}{T}} .$$

Als resultaat is een reeks van complexe e-machten ontstaan, waarbij  $j$  loopt van  $-\infty$  tot  $+\infty$ . Deze reeks kan geschreven worden als:

$$z(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Z_j e^{i\pi j \frac{t}{T}} \quad *) (3.8)$$

---

\*) Deze schrijfwijze is ook mogelijk indien  $z(t)$  complex is. Aangezien dit in ons geval van minder belang is, wordt hier verder geen aandacht aan besteed.

waarin voor  $j = 0$ :  $Z_0 = \frac{1}{2}a_0$ ,

voor  $j \geq 1$ :  $Z_j = \frac{1}{2}(a_j - ib_j)$ ,

voor  $j \leq -1$ :  $Z_j = \frac{1}{2}(a_j + ib_j) = \text{complex toegevoegde van } Z_{-j} = Z_{-j}^{cc}$   
 $= \frac{1}{2}(a_{-j} - ib_{-j})$

De complexe Fouriercoëfficiënten  $Z_j$  kunnen niet alleen uit de reële Fouriercoëfficiënten  $a_j$  en  $b_j$  afgeleid worden, doch ook rechtstreeks uit  $z(t)$ . Zij kunnen met behulp van vgl. (3.8) gevonden worden door deze te vermenigvuldigen met  $\exp(-i\pi j t/T)$  en te integreren over het beschouwde interval:

$$\int_{-T}^{+T} z(t) e^{-i\pi j t/T} dt = \int_{-T}^{+T} e^{-i\pi j t/T} * \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Z_j e^{i\pi j t/T} dt .$$

Verwissel in het rechterlid van de laatste vergelijking de volgorde van integratie en sommatie:

$$\int_{-T}^{+T} z(t) e^{-i\pi j t/T} dt = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Z_j \int_{-T}^{+T} e^{i\pi t/T(j-j')} dt .$$

De integraal in het rechterlid geeft (schrijf eventueel in sinussen en cosinussen uit):

$$\int_{-T}^{+T} e^{+i\pi t/T(j-j')} dt = 0 \quad \text{voor } j \neq j' ,$$

$$= 2T \quad \text{voor } j = j' ,$$

zodat het uiteindelijk resultaat wordt:

$$Z_j = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} z(t) e^{-i\pi j t/T} dt . \tag{3.9}$$

Merk op, dat de complexe coëfficiënt  $Z_j$  reeds alle informatie bevat voor de bepaling van de amplitude en de fase van een willekeurige component. Dit is als volgt in te zien. Beschouw een willekeurige component uit de Fourierreeks volgens vergelijking (3.6):

$$a_j \cos \pi j \frac{t}{T} + b_j \sin \pi j \frac{t}{T} = c_j \cos(\pi j \frac{t}{T} - \alpha_j),$$

waarin 
$$c_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2},$$

$$\operatorname{tg} \alpha_j = \frac{b_j}{a_j}.$$

Indien de uitdrukkingen voor  $c_j$  en  $\alpha_j$  uit de complexe Fouriercoëfficiënten  $Z_j$  afgeleid worden, dan luiden de formules:

$$c_j = 2 \sqrt{\operatorname{Re}^2(Z_j) + \operatorname{Im}^2(Z_j)} = 2|Z_j|$$
$$\operatorname{tg} \alpha_j = \frac{-\operatorname{Im}(Z_j)}{\operatorname{Re}(Z_j)}, \quad j \geq 1 = \frac{\operatorname{Im}(Z_j)}{\operatorname{Re}(Z_j)}, \quad j \leq -1.$$

Er kan bewezen worden dat een benadering van een functie met een Fourierreeks, die afgebroken wordt na  $2N+1$  termen, identiek is met een benadering volgens de methode van de kleinste kwadraten, waarbij dezelfde  $2N+1$  termen meegenomen worden. Het bewijs verloopt als volgt.

Veronderstel dat de reeks  $\sum_{j=-N}^{+N} k_j \exp(i\pi j t/T)$  een benadering is voor  $z(t)$ . De coëfficiënten  $k_j$  moeten nu zo bepaald worden, dat de fout  $F_N$  volgens de methode der kleinste kwadraten minimaal is. De fout  $F_N$  is (zie vgl.(3.4)):

$$F_N = \int_{-T}^{+T} \left[ z(t) - \sum_{j=-N}^{+N} k_j e^{i\pi j \frac{t}{T}} \right]^2 dt,$$

welke minimaal wordt voor:

$$\frac{\partial F_N}{\partial k_j} = 0, \quad j = -N, \dots, +N.$$

Dit levert  $2N+1$  vergelijkingen op, waaruit de coëfficiënten  $k_j$  opgelost kunnen worden. Beschouw de volgende vgl. voor  $j = j'$ :

$$\int_{-T}^{+T} \left[ z(t) - \sum_{j=-N}^{+N} k_j e^{i\pi j \frac{t}{T}} \right] e^{i\pi j' \frac{t}{T}} dt = 0,$$

of:

$$\int_{-T}^{+T} z(t) e^{i\pi j \frac{t}{T}} dt - \sum_{j=-N}^{+N} \int_{-T}^{+T} k_j e^{i\pi \frac{t}{T}(j+j')} dt = 0.$$

De integraal onder het  $\Sigma$ -teken geeft:

$$\int_{-T}^{+T} k_j e^{i\pi \frac{t}{T}(j+j')} dt = 2Tk_j \quad \text{voor } j = -j'$$

$$= 0 \quad \text{voor } j \neq -j'.$$

Dus:

$$k_{-j'} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} z(t) e^{i\pi j' \frac{t}{T}} dt,$$

of:

$$k_j = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} z(t) e^{-i\pi j \frac{t}{T}} dt.$$

De coëfficiënten  $k_j$  zijn dus identiek met de Fouriercoëfficiënten  $Z_j$ .

Er zij opgemerkt, dat er toch een duidelijk verschil bestaat met een benadering volgens de methode der kleinste kwadraten (zie par. 3.2). Het verschil is, dat bij de methode der kleinste kwadraten aan de frequenties van de componenten precies de juiste waarde gegeven kan worden, terwijl bij de Fourieranalyse de frequenties bepaald zijn door:

$$\sigma = \frac{j}{2T} \quad (j = 1, 2, 3, \dots).$$

Door een juiste keuze van de waarnemingsperiode kunnen de verschillende waarden van  $\sigma$  zo goed mogelijk die van de getijcomponenten benaderen.

Een waarnemingsperiode van 29 dagen bevat bijvoorbeeld:

56,03	oscillaties	van	$M_2$ ,
58,00	"	"	$S_2$ ,
26,92	"	"	$O_1$ .

De componenten met respectievelijk  $j = 56$ ,  $j = 58$  en  $j = 27$ , zullen dus goede benaderingen voor de genoemde componenten geven. De benadering wordt slechter voor componenten waarvan het aantal oscillaties gedurende de beschouwde periode minder goed een geheel aantal benadert.

Als voorbeeld is hier juist deze periode van 29 dagen gekozen, omdat handmethoden uit het pre-computer tijdperk erop gebaseerd waren, dat deze periode een aantal van de belangrijkste componenten een geheel aantal malen bevat.

Overigens mag niet uit het oog worden verloren dat, vooral bij een korte waarnemingsperiode van 29 dagen, componenten van bijna dezelfde periode door dezelfde Fouriercomponent gerepresenteerd worden. Bijvoorbeeld:

$S_2$  met 58,00 oscillaties,  $K_2$  met 58,16 oscillaties,  $T_2$  met 57,92 oscillaties en  $R_2$  met 58,08 oscillaties; gedurende deze periode worden alle vertegenwoordigd door de Fouriercomponenten met  $j = 58$ . Voor scheiding van deze componenten met behulp van de Fourieranalyse is blijkbaar een langere waarnemingsperiode nodig en wel zo lang, dat in deze periode het verschil van de aantallen oscillaties van de resp. beschouwde componenten tenminste één bedraagt. Indien we twee componenten met resp. een frequentie van  $\sigma_1$  en  $\sigma_2$  beschouwen, dan betekent dit in formulevorm:

$$2T = \text{waarnemingsperiode} = \frac{1}{\sigma_1 - \sigma_2} \quad (3.10)$$

Later zullen we deze eis nog tegenkomen als het criterium van Rayleigh. Resumerend: het grote voordeel van de Fourieranalyse is dat er informatie verkregen wordt over het gehele frequentiegebied. Voorwaarde is evenwel, dat er heel specifieke waarnemingsperiodes gekozen worden (b.v. 29 of 384 dagen o.i.d.). Voorts wordt de informatie verkegen voor heel specifieke frequenties. Er is tevens al een criterium afgeleid voor de waarnemingsperiode, die vereist is om bepaalde componenten van elkaar te scheiden. Vraagpunten zijn nog: wat gebeurt er met componenten, waarvan de frequentie niet samenvalt met een Fourierfrequentie en wat is de invloed van de keuze van het bemonsteringsinterval. Om hierover uitspraken te kunnen doen, wordt een stukje theorie van de Fouriertransformaties toegepast, waarbij gebruik gemaakt zal worden van de theorie van de Fourierreeks.

### 3.4. Fouriertransformatie

Hoewel het getij op zich zelf als periodiek op een heel groot interval beschouwd kan worden, (zodat benadering met een Fourierreeks in principe mogelijk is), kan men zich afvragen wat er gebeurt met allerlei a-periodieke storingen, die ook op het Fouriersignaal aanwezig zijn. Dit zijn voornamelijk meteorelogische effecten, die in principe een meer stochastisch karakter hebben. Het heeft nu zin een signaal  $z(t)$  te beschouwen, dat gegeven is op het gehele  $t$ -interval, doch  $a$ -periodiek is. Beschrijving met een reeks van Fourier is niet mogelijk, echter met een generalisatie daarvan wel.

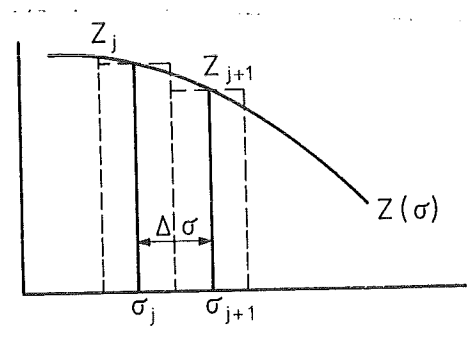
Ga uit van de complexe representatie van de Fourierreeks, vgl. (3.8):

$$z(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Z_j e^{i\pi j \frac{t}{T}} \quad (3.8)$$

waarin 
$$Z_j = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} z(t) e^{-i\pi j \frac{t}{T}} dt \quad (3.9)$$

Men kan in een a-periodiek signaal componenten met allerlei frequenties verwachten en niet uitsluitend een aantal componenten met discrete frequenties. We zouden daarom de sommatie met discrete frequenties volgens vgl. (3.8) door een integratie willen vervangen, waarin de frequentie de integratievariable is, die continu variëert. Dit kan bereikt worden door in te voeren:

$$Z_j = Z(\sigma_j) \Delta\sigma \quad , \quad \sigma_j = j\Delta\sigma \quad \text{met} \quad \Delta\sigma = 1/2T \quad .$$



De procedure komt er in feite op neer, dat de Fourierconstante  $Z_j$  over een frequentiebandje  $\Delta\sigma$  verdeeld wordt. Of met andere woorden: beschouw  $Z_j$  als het resultaat van de integratie van een bepaalde functie van  $\sigma$ ,  $Z(\sigma)$ , over een interval ter grootte van  $\Delta\sigma$ .

Door substitutie van bovengenoemde uitdrukking voor  $Z_j$  in vgl. (3.8) gaat deze over in

$$z(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} Z(\sigma_j) \Delta\sigma e^{2\pi i \sigma_j t} \quad .$$

Deze vergelijking stelt een zg. Riemannse som voor; dit is een representatie van een integraal, geschreven met eindige differenties. Als deze laatste naar nul gaan, gaat de sommatie over in een integratie. Dus voor  $T \rightarrow \infty$  gaat  $\Delta\sigma \rightarrow 0$ , zodat het resultaat wordt:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\sigma) e^{2\pi i \sigma t} d\sigma \quad \sigma = \frac{j}{2T} \quad (3.11)$$

Verder volgt uit vgl. (3.9) direct dat:

$$Z(\sigma_j) = \int_{-T}^{+T} z(t) e^{-2\pi i \sigma_j t} dt \quad .$$

In bovenstaande vgl. is  $\sigma_j$  een parameter, die door limietovergang continu verandert. Bij de limietovergang voor  $T \rightarrow \infty$  kan daarom de index  $j$  verdwijnen:

$$Z(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)e^{-2\pi i \sigma t} dt \quad (3.12)$$

De complexe functie  $Z(\sigma)$  wordt de Fouriertransform van  $z(t)$  genoemd;  $z(t)$  de inverse Fouriertransform van  $Z(\sigma)$ . Merk de grote symmetrie op tussen vgl. (3.11) en vgl.(3.12). Men zou als het ware  $z(t)$  en  $Z(\sigma)$  als equivalente representaties van dezelfde functie kunnen beschouwen. In de ene uitdrukking, namelijk vgl. (3.12) moet  $t$  als integratievariabele beschouwd worden, terwijl de integraal voor allerlei waarden van  $\sigma$  berekend kan worden. Het resultaat hangt dus af van  $\sigma$ .

In het andere geval, vgl.(3.11), is het juist andersom. In de praktijk is de ene representatie vaak eenvoudiger dan de andere.  $Z(\sigma)$  geeft aan welke frequenties met welke amplitudes en fasen in  $z(t)$  aanwezig zijn (en omgekeerd). Als de frequentieband beperkt is, zoals bij vele fysische processen het geval is, heeft  $Z(\sigma)$  slechts op een beperkt interval van  $\sigma$  waarden; daarbuiten  $Z(\sigma) = 0$ .  $Z(\sigma)$  wordt ook wel het spectrum<sup>\*)</sup> van  $z(t)$  genoemd. Het spectrum kan slechts bepaald worden als de integraal van  $-\infty$  tot  $+\infty$  van de absolute waarde van  $z(t)$  begrensd is. Bijvoorbeeld  $z(t) = t, \log t, \exp t$ , etc. hebben geen Fouriertransform. De algemene berekening hoeft weinig op te leveren. Normaliter worden voor willekeurige  $z(t)$  de berekeningen uitgevoerd op een computer. Hierbij wordt de  $e$ -macht met sinussen en cosinussen geschreven, zodat de berekening neerkomt op het numeriek bepalen van de integraal van  $z(t)$  vermenigvuldigd met hetzij een cosinus, hetzij een sinus. Of in formulevorm:

$$Z(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\cos 2\pi\sigma t dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} z(t)\sin 2\pi\sigma t dt .$$

---

\*) In de literatuur over de behandeling van stochastische meetsignalen wordt veel gewerkt met het z.g. energiedichtheidsspectrum. Kortheidshalve wordt dit ook vaak aangeduid met spectrum. Het begrip spectrum in dit college moet niet verward worden met het energiedichtheidsspectrum. Overigens houden beide spectra wel verband met elkaar.

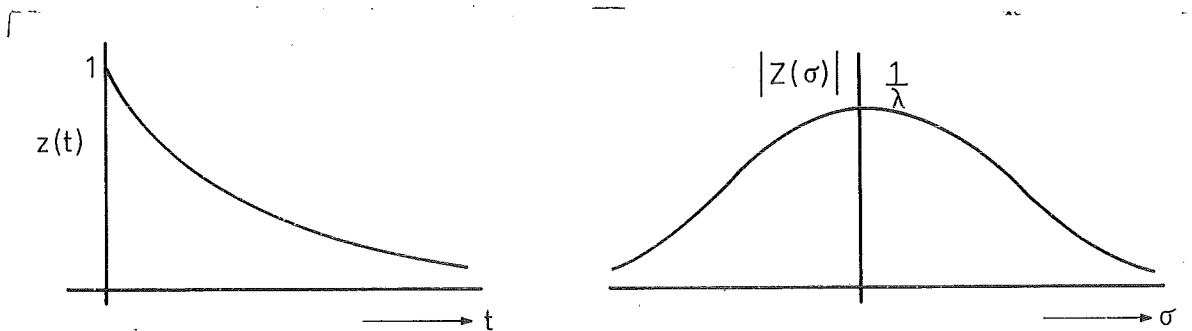


Voorbeeld I

Veronderstel dat op het getijsignaal een storing gesuperponeerd is, die beschouwd kan worden als een verhoging van de gemiddelde waterstand ten gevolge van een storm. De gemiddelde waterstand is zeer snel gestegen en daalt daarna weer langzaam. Als benadering kan het verschijnsel gerepresenteerd worden door een plotselinge verhoging gevolgd door een exponentiële afname:

$$z(t) = 0 \quad \text{voor } t < 0$$

$$z(t) = e^{-\lambda t} \quad \text{" } t > 0$$



Toepassing van vgl.(3.12) geeft (het interval  $(-\infty, 0)$  geeft geen bijdrage):

$$Z(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+2\pi i\sigma)t} dt = \left[ \frac{e^{-(\lambda+2\pi i\sigma)t}}{\lambda+2\pi i\sigma} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda+2\pi i\sigma}$$

Om een idee van het gedrag van de complexe functie  $Z(\sigma)$  te geven is in bovenstaand schetsje het verloop van  $|Z(\sigma)|$  gegeven. Deze is:

$$|Z(\sigma)| = \left| \frac{1}{\lambda+2\pi i\sigma} \right| = \left| \frac{\lambda-2\pi i\sigma}{\lambda^2+4\pi^2\sigma^2} \right| = \frac{\sqrt{\lambda^2+4\pi^2\sigma^2}}{\lambda^2+4\pi^2\sigma^2}$$

$$|Z(\sigma)| = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2+4\pi^2\sigma^2}}$$

Voorbeeld II

Veronderstel, dat op het getijsignaal een storing gesuperponeerd is als gevolg van de slingering van een groot bassin (i.e. een seiche). Het gedrag is zodanig, dat de slingering plotseling opgewekt wordt, waarna deze exponentiël afneemt. Zij kan dus weergegeven worden door:

$$z(t) = 0 \quad \text{voor } t < 0,$$

$$z(t) = e^{-\lambda t} \sin 2\pi\sigma t \quad \text{voor } t > 0.$$

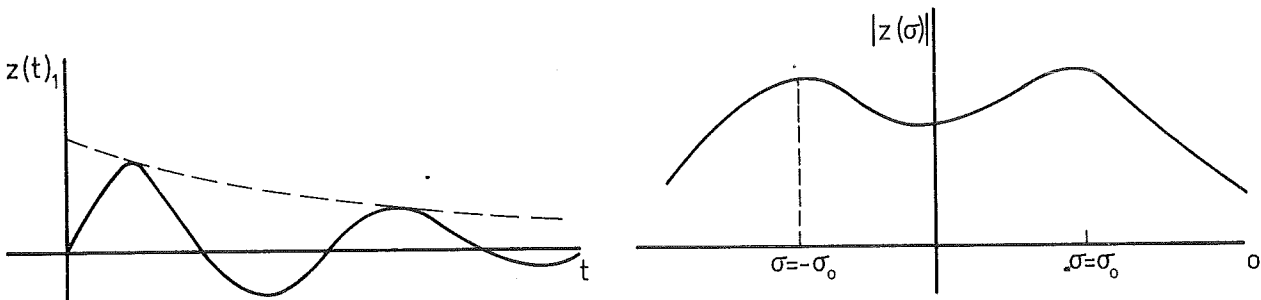
Het spectrum wordt (opnieuw geeft het interval  $[-\infty, 0]$  geen bijdrage):

$$Z(\sigma) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+2\pi i\sigma)t} \frac{e^{2\pi i\sigma_0 t} - e^{-2\pi i\sigma_0 t}}{2i} dt =$$

$$= \frac{1}{2i} \left( \frac{1}{\lambda+2\pi i(\sigma-\sigma_0)} - \frac{1}{\lambda+2\pi i(\sigma+\sigma_0)} \right),$$

$$|Z(\sigma)| = \frac{2\pi\sigma_0}{\sqrt{[\lambda^2+4\pi^2(\sigma-\sigma_0)^2][\lambda^2+4\pi^2(\sigma+\sigma_0)^2]}}$$

$z(t)$  en  $Z(\sigma)$  zijn weergegeven in onderstaande schetsjes:



Uit de voorbeelden blijkt, dat op deze wijze een indruk verkregen kan worden van de invloed van storingen op het spectrum van het getijsignaal, hoe dat er verder ook mag uitzien.

Overigens kan men zich nu wél afvragen of de Fouriertransformatie toepasbaar is op een getijsignaal. Ten eerste is het getijsignaal  $z(t)$ , steeds slechts bekend over een beperkt tijdsinterval; ten tweede kan er bij berekeningen niet met de continue getijkromme  $z(t)$  gewerkt worden; en ten derde bestaat in feite de Fouriertransform van een getijcomponent (=sinusoïde) niet, omdat deze niet absoluut integreerbaar is over het tijdsinterval  $(-\infty, +\infty)$ .

In de volgende paragrafen zal eerst aandacht worden besteed aan het laatste probleem. Het begrip Fouriertransform zal zodanig uitgebreid worden, dat ook van de harmonische functies een Fouriertransform gedefiniëerd kan worden.

3.4.1. De Fouriertransform van een harmonische functie

Indien in het signaal  $z(t)$  harmonische functies voorkomen zal onderzocht worden hoe deze harmonische functies in het spectrum afgebeeld worden.

Daartoe wordt de functie:

$$z(t) = e^{2\pi i \sigma_0 t}$$

beschouwd, omdat de sinus en de cosinus ook met dergelijke e-machten geschreven kunnen worden. De directe bepaling van de Fouriertransform volgens vgl.(3.12) geeft:

$$Z(\sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(\sigma_0 - \sigma)t} dt = \left[ \frac{e^{2\pi i(\sigma_0 - \sigma)t}}{2\pi i(\sigma_0 - \sigma)} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Dit levert echter geen eenduidig resultaat op. Daarom worden eerst de integratiegrenzen  $-T$  en  $+T$  aangehouden, waarna  $T \rightarrow \infty$ .

Nu wordt het resultaat een "afgebroken" spectrum  $Z_T(\sigma)$ :

$$Z_T(\sigma) = \left[ \frac{e^{2\pi i(\sigma_0 - \sigma)t}}{2\pi i(\sigma_0 - \sigma)} \right]_{-T}^{+T} = \frac{e^{2\pi i(\sigma_0 - \sigma)T} - e^{-2\pi i(\sigma_0 - \sigma)T}}{2\pi i(\sigma_0 - \sigma)}$$

$$Z_T(\sigma) = \frac{\sin 2\pi(\sigma_0 - \sigma)T}{\pi(\sigma_0 - \sigma)}$$

Om van deze functie iets meer te kunnen zeggen wordt  $Z_T(\sigma)$  opgebouwd gedacht uit het product van  $2T$  en de zogenaamde diffractiefunctie:

$$\text{Dif}_T(\sigma - \sigma_0) = \frac{\sin 2\pi T(\sigma - \sigma_0)}{2\pi T(\sigma - \sigma_0)} :$$

$$Z_T(\sigma) = 2T \frac{\sin 2\pi T(\sigma - \sigma_0)}{2\pi T(\sigma - \sigma_0)} = 2T \text{Dif}_T(\sigma - \sigma_0). \tag{3.13}$$

Het verloop van de reële diffractiefunctie als functie van  $\sigma$  is gegeven in fig. 8. Kenmerkend is dat  $\text{Dif}_T(\sigma - \sigma_0) = 1$  en dat het aantal oscillaties voor groter wordende  $T$  steeds meer toeneemt. Hierbij neemt de amplitude van de oscillaties steeds sterker af. In het limietgeval, dat  $T \rightarrow \infty$ , blijft als het ware niet meer over dan een "spijker" met hoogte 1:

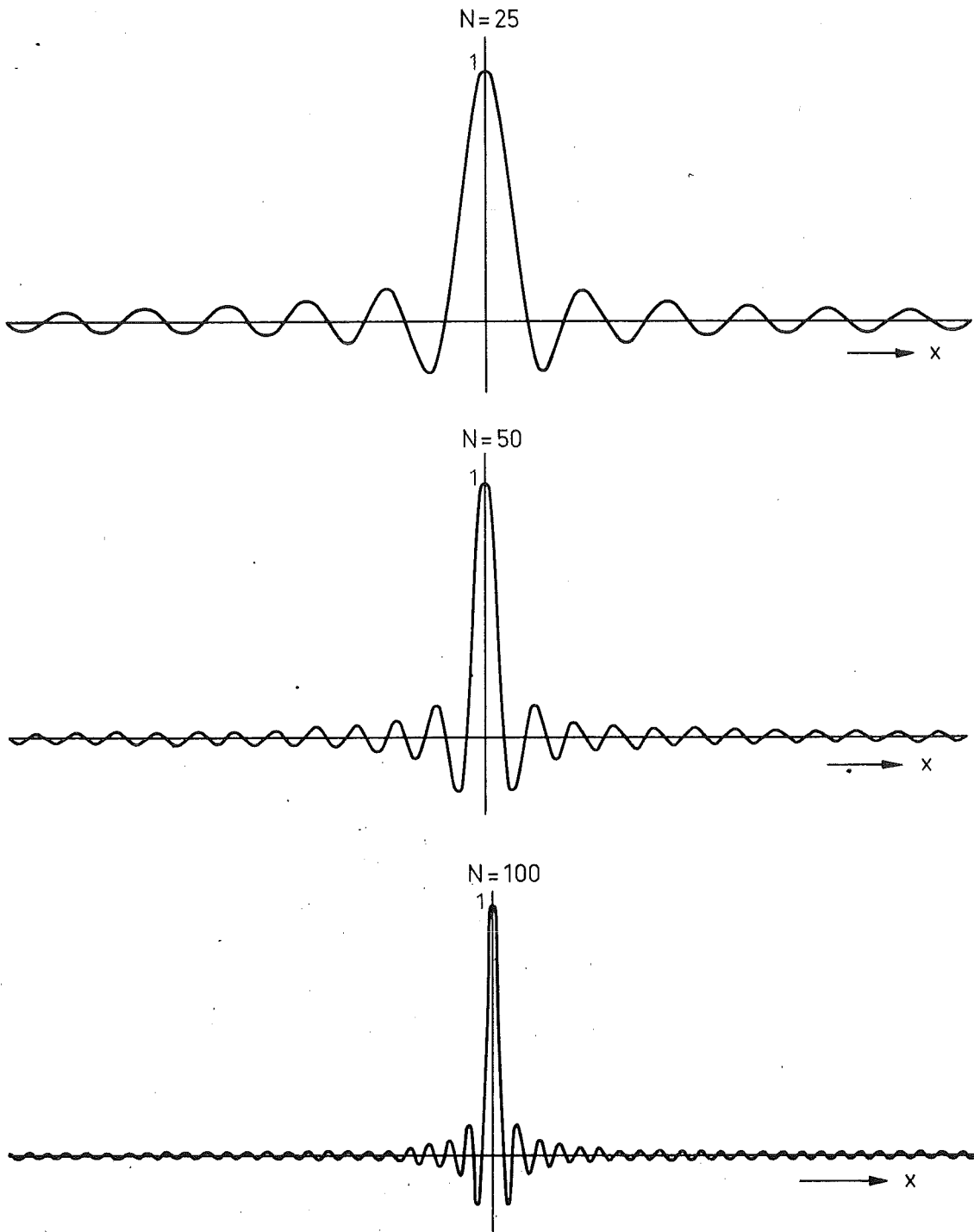


Fig.8. Grafiek van  $\frac{\sin Nx}{Nx}$  voor enkele waarden van  $N = 2\pi T$ ;  $x = \sigma - \sigma_0$ .

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \text{Dif}_T(\sigma - \sigma_0) &= 1 && \text{voor } \sigma = \sigma_0, \\ &= 0 && \text{voor } \sigma \neq \sigma_0. \end{aligned}$$

Voeren we hierna de totale limietovergang uit op  $Z_T(\sigma)$ , vgl.(3.13), dan wordt de functiewaarde voor  $\sigma = \sigma_0$  oneindig en voor  $\sigma \neq \sigma_0$  gelijk aan nul. Een functie die een dergelijk gedrag vertoont wordt de deltafunctie (naar het symbool waarmee zij aangeduid wordt) of Diracfunctie genoemd. \*)

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} 2T \text{Dif}_T(\sigma - \sigma_0) &= (\sigma - \sigma_0) \delta(\sigma - \sigma_0) && \text{voor } \sigma = \sigma_0, \\ &= 0 && \text{voor } \sigma \neq \sigma_0. \end{aligned}$$

Een zeer belangrijke eigenschap van de deltafunctie is, dat haar integraal over het volledige  $\sigma$ -interval gelijk is aan 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\sigma - \sigma_0) d\sigma = 1.$$

Dit volgt uit integratie van vgl.(3.13), waarin de transformatie  $\sigma' = 2\pi T(\sigma - \sigma_0)$  uitgevoerd wordt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Z_T(\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi T(\sigma - \sigma_0)}{(\sigma - \sigma_0)} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \sigma'}{\sigma'} d\sigma' = 1.$$

Het bewijs van het laatste resultaat, dat invariant is voor  $T$ , wordt hier achterwege gelaten. Voor de deltafunctie betekent het dat de enige bijdrage tot de integraal afkomstig is van  $\sigma = \sigma_0$ . Een direct gevolg van deze eigenschap is, dat de integraal van het product van een functie  $g(\sigma)$  met een deltafunctie op  $\sigma = \sigma_0$ , uitsluitend de functiewaarde voor  $\sigma = \sigma_0$  geeft,  $g(\sigma_0)$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(\sigma) \delta(\sigma - \sigma_0) d\sigma = g(\sigma_0).$$

\*) Nauwkeuriger bestudering van vgl.(3.13) laat zien, dat bij limietovergang  $Z(\sigma)$  oneindig wordt op  $\sigma = \sigma_0$  en daar buiten op een interval  $\Delta\sigma$  oneindig veel oscillaties met amplitude  $\frac{1}{\sigma - \sigma_0}$  vertoont. Praktisch gezien vallen deze oscillaties in het niet bij de oneindige functiewaarde op  $\sigma = \sigma_0$ . Beter is het daarom te zeggen dat de eigenschappen van  $Z(\sigma)$  overeenkomen met die van de deltafunctie.

Voorbeeld

$$z(t) = \sin 2\pi\sigma_0 t = \frac{e^{2\pi i\sigma_0 t} - e^{-2\pi i\sigma_0 t}}{2i}, \quad Z(\sigma) = \frac{1}{2i} \left[ \delta(\sigma - \sigma_0) - \delta(\sigma + \sigma_0) \right];$$

$$z(t) = \cos 2\pi\sigma_0 t = \frac{e^{2\pi i\sigma_0 t} + e^{-2\pi i\sigma_0 t}}{2}; \quad Z(\sigma) = \frac{1}{2} \left[ \delta(\sigma - \sigma_0) + \delta(\sigma + \sigma_0) \right];$$

$$z(t) = \sum_{j=-N}^{+N} a_j e^{2\pi i\sigma_j t}, \quad Z(\sigma) = \sum_{j=-N}^{+N} a_j \delta(\sigma - \sigma_j).$$

Resumerend kan geconcludeerd worden, dat een oneindig lang signaal, opgebouwd uit zuivere harmonischen met discrete frequenties, een Fouriertransform heeft, die bestaat uit een som van  $\delta$ -functies op de respectieve frequenties van de harmonischen. Een dergelijk spectrum wordt een lijnspectrum genoemd.

3.4.2. Het bemonsteren van  $z(t)$

Voor een praktische analyse van  $z(t)$  zal  $z(t)$  op discrete tijdstippen bemonsterd moeten worden. Het is zonder meer duidelijk, dat het bemonsteringsinterval niet willekeurig gekozen kan worden. Intuïtief kan dit reeds begrepen worden door b.v. te veronderstellen, dat op een interval  $\Delta t$  de functie  $z(t)$  vele oscillaties vertoont. Bij verdere analyse lijkt het onwaarschijnlijk, dat deze hoge frequentie ook in  $Z(\sigma)$  teruggevonden wordt.

Stel dat  $z(t)$  bemonsterd wordt op de tijdstippen  $j\Delta t$ ; dit geeft  $z(j\Delta t)$ .

De vraag is nu, of de Riemannse som, die het equivalent is van vgl. (3.12), in eindige differentievorm nu inderdaad  $Z(\sigma)$  oplevert:

$$\Delta t \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z(j\Delta t) e^{-2\pi i\sigma j\Delta t} \stackrel{?}{=} Z(\sigma). \quad (3.14)$$

Er zij aan herinnerd, dat in bovenstaande uitdrukking  $\sigma$  een parameter is, die bij het uitvoeren van de sommatie constant gehouden moet worden. Om bovengestelde vraag nu te beantwoorden wordt een kunstgreep toegepast. Er wordt namelijk aangenomen dat  $Z(\sigma)$  wel bestaat, zodat vgl.(3.11) geldt:

$$z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\sigma) e^{2\pi i\sigma t} d\sigma,$$

Indien  $t = j\Delta t$ , gaat bovenstaande vergelijking over in:

$$z(j\Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\sigma') e^{2\pi i \sigma' j \Delta t} d\sigma'.$$

Aan  $\sigma$  is een accent-teken toegevoegd omdat de uitdrukking voor  $z(j\Delta t)$  gesubstitueerd zal worden in het linkerlid van vgl. (3.14), zodat de integratievariabele  $\sigma'$  dan onderscheiden kan worden van de "vaste" parameter  $\sigma$ .

Dus:

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z(j\Delta t) e^{-2\pi i \sigma j \Delta t} &= \Delta t \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\sigma') e^{2\pi i j \Delta t (\sigma' - \sigma)} d\sigma' = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\sigma') \left[ \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta t e^{2\pi i j \Delta t (\sigma' - \sigma)} \right] d\sigma'. \end{aligned} \quad (3.15)$$

De sommatie tussen grote haken is niets anders dan de sommatie van een meetkundige reeks, die bepaald moet worden voor  $j = N$  met  $N \rightarrow \infty$ .

De som  $S$  van een meetkundige reeks is:

$$S = p \frac{1-r^n}{1-r},$$

$$\begin{aligned} \text{waarin: } p &= \text{eerste term} = \Delta t e^{-2\pi i N \Delta t (\sigma' - \sigma)} \\ r &= \text{reden} = e^{2\pi i \Delta t (\sigma' - \sigma)} \\ n &= \text{aantal termen} = 2N+1. \end{aligned}$$

Indien de limietovergang voor  $N \rightarrow \infty$  nog niet wordt uitgevoerd, is het resultaat van de sommatie tussen grote haken dus:

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{j=-N}^{+N} e^{2\pi i j \Delta t (\sigma' - \sigma)} &= \Delta t e^{-2\pi i N \Delta t (\sigma' - \sigma)} \frac{1-e^{2\pi i (2N+1) \Delta t (\sigma' - \sigma)}}{1-e^{2\pi i \Delta t (\sigma' - \sigma)}} = \\ &= \Delta t e^{-2\pi i N \Delta t (\sigma' - \sigma)} \frac{e^{\pi i (2N+1) \Delta t (\sigma' - \sigma)}}{e^{\pi i \Delta t (\sigma' - \sigma)}} \frac{\left[ \frac{e^{-\pi i (2N+1) \Delta t (\sigma' - \sigma)}}{e^{-\pi i \Delta t (\sigma' - \sigma)}} \frac{e^{\pi i (2N+1) \Delta t (\sigma' - \sigma)}}{e^{\pi i \Delta t (\sigma' - \sigma)}} \right]}{\left[ \frac{e^{-\pi i \Delta t (\sigma' - \sigma)}}{e^{-\pi i \Delta t (\sigma' - \sigma)}} \frac{e^{\pi i \Delta t (\sigma' - \sigma)}}{e^{\pi i \Delta t (\sigma' - \sigma)}} \right]} = \\ &= \frac{\sin \pi (2N+1) \Delta t (\sigma' - \sigma)}{1/\Delta t \sin \pi \Delta t (\sigma' - \sigma)}. \end{aligned}$$

Deze functie van  $\sigma'$  ( $\sigma$  is nog steeds vast!) is periodiek. Immers, na één halve oscillatie van de noemer herhaalt het functieverloop zich. Voorts gedraagt de functie zich in de buurt van  $\sigma' - \sigma = 0$  als:

$$\frac{\sin Mx}{x} = M \frac{\sin Mx}{Mx}, \text{ met } M = (2N+1)\Delta t \text{ en } x = (\sigma' - \sigma). \text{ (zie ook vgl. (3.13))}$$

Bij limietovergang voor  $N \rightarrow \infty$  zal ter plaatse van  $\sigma' = \sigma$  de functie overgaan in een deltafunctie. Voorts zal door de periodiciteit dit functieverloop zich herhalen, zodat er deltafuncties zullen ontstaan op iedere plaats waar de noemer nul wordt. Dit is het geval voor:

$$\pi \Delta t (\sigma' - \sigma) = n\pi, \quad n = \dots -2, -1, -0, 1, 2, \dots;$$

$$\sigma' - \sigma = \frac{n}{\Delta t}.$$

Het uiteindelijke resultaat van de uitdrukking tussen grote haken in vgl.(3.15) wordt dus:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sin \pi(2N+1)\Delta t(\sigma' - \sigma)}{1/\Delta t \sin \pi \Delta t(\sigma' - \sigma)} = \delta(\sigma' - \sigma) + \delta(\sigma' - \sigma \pm \frac{1}{\Delta t}) + \delta(\sigma' - \sigma \pm \frac{2}{\Delta t}) + \dots$$

Dit resultaat moet gesubstitueerd worden in vgl.(3.15), waarna de integratie naar de variabele  $\sigma'$  kan worden uitgevoerd. De integraal bestaat uit het product van  $Z(\sigma')$  en een aantal deltafuncties op de waarden  $\sigma' = \sigma \pm \frac{n}{\Delta t}$ . Zoals hiervoor aangetoond is, ontstaan er alleen bijdragen tot de integraal voor deze waarden van  $\sigma'$ . Per deltafunctie is de bijdrage gelijk aan de functie-waarde van  $Z(\sigma')$  voor de desbetreffende waarde van  $\sigma'$ . Aldus:

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z(j\Delta t) e^{-2\pi i \sigma j \Delta t} &= \int_{-\infty}^{+\infty} Z(\sigma') \left[ \delta(\sigma' - \sigma) + \delta(\sigma' - \sigma \pm \frac{1}{\Delta t}) + \dots \right] d\sigma' = \\ &= Z(\sigma) + Z(\sigma - \frac{1}{\Delta t}) + Z(\sigma + \frac{1}{\Delta t}) + \dots = Z_a(\sigma) \quad (3.16) \end{aligned}$$

Het resultaat van deze berekening is, dat niet alleen  $Z(\sigma)$  ontstaat, maar ook nog een groot aantal andere bijdragen, die dezelfde vorm hebben als  $Z(\sigma)$  maar klaarblijkelijk verschoven zijn op de  $\sigma$ -as over een afstand van  $\frac{n}{\Delta t}$  ( $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ ).



Onderstaande figuur geeft hiervan een idee. De superpositie van alle spectra geeft  $Z_a(\sigma)$ , het z.g. aliased spectrum. Met de bedoeling het karakteristieke

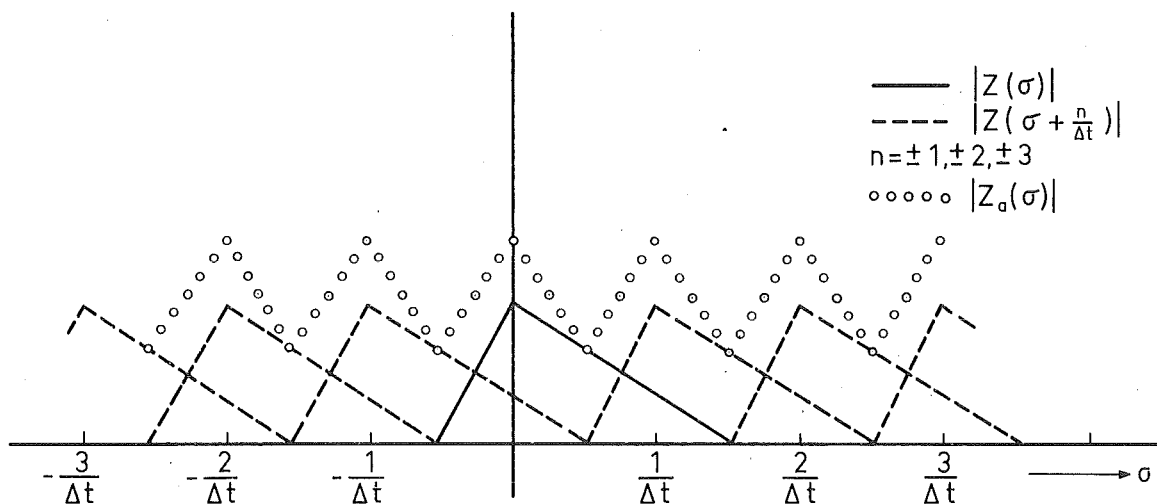


fig. 9

in het verschuiven van de spectra te laten zien, is als voorbeeld een asymmetrisch spectrum getekend. De figuur 9 laat duidelijk zien, dat het oorspronkelijke spectrum niet meer te onderscheiden is in het aliased spectrum. In figuur 10 wordt het verschijnsel nogmaals getoond, maar nu met een symmetrisch spectrum. Naast het originele spectrum  $Z(\sigma)$  zijn alleen de verschoven spectra  $Z(\sigma \pm \frac{1}{\Delta t})$  getekend. Dit is gedaan voor 2 waarden van het bemonsteringsinterval  $\Delta t$ .

Men zou ook kunnen zeggen dat de verschoven spectra in de figuren 9 en 10 ontstaan zijn uit het originele spectrum door omvouwen om de frequenties  $\sigma = \pm \frac{1}{2\Delta t}$ . Om deze reden wordt de speciale frequentie  $\frac{1}{2\Delta t}$  aangeduid als de vouwfrequentie  $\sigma_f$ :

$$\sigma_f = \frac{1}{2\Delta t}$$

het ook veel  
Nyquist-frequentie

Voorts kan uit de figuren de conclusie getrokken worden, dat alleen het juiste spectrum gevonden kan worden, indien  $\sigma_f$  ligt in het gebied waar  $Z(\sigma) = 0$ :

$$Z(\sigma) = 0 \quad \text{voor} \quad \sigma \geq \sigma_f = \frac{1}{2\Delta t} \quad (3.17)$$

Alleen in dat geval komt op het interval  $(-\sigma_f, \sigma_f)$  het aliased spectrum overeen met het echte spectrum.

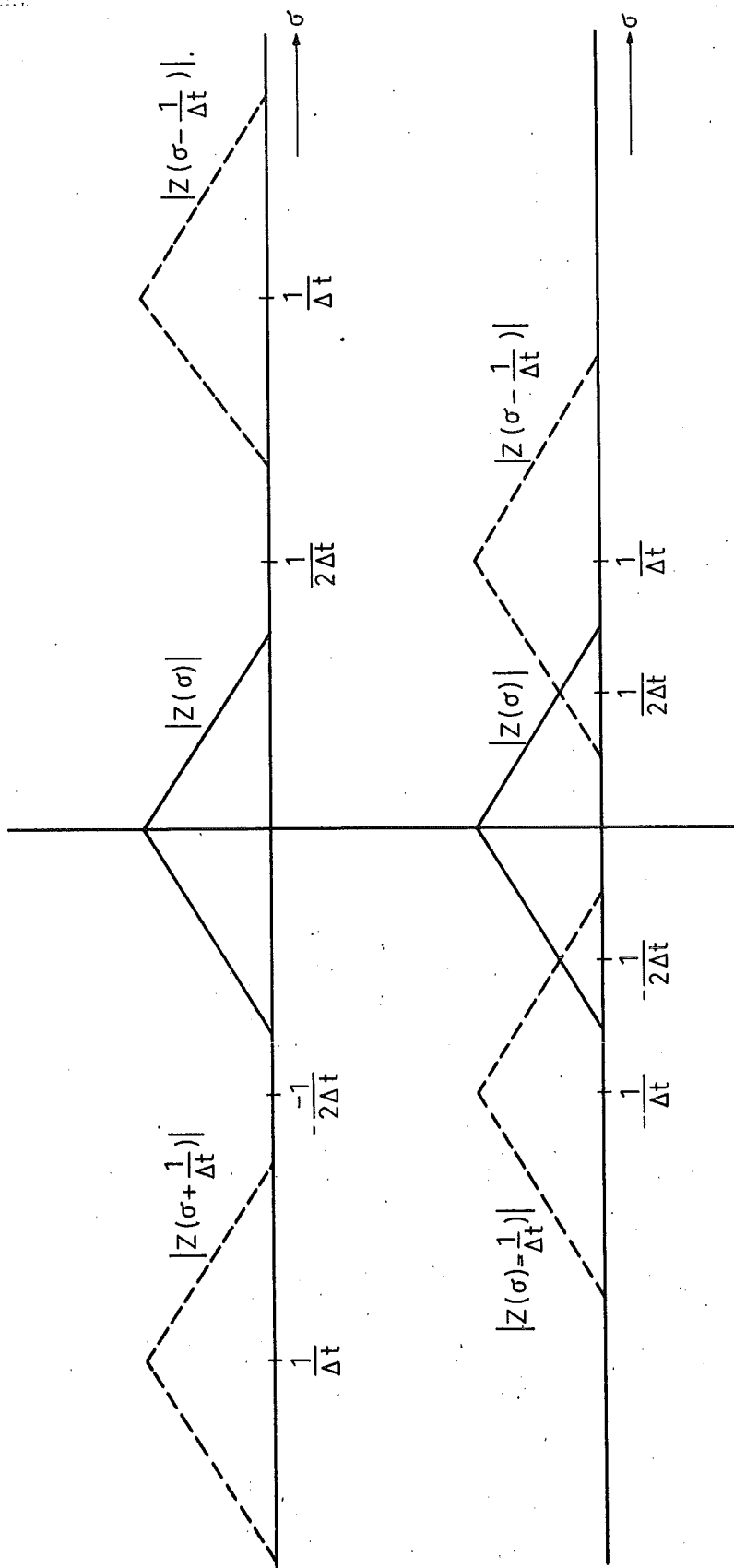


Fig. 10.

Met andere woorden, de frequentieband moet begrensd zijn, opdat een  $\Delta t$  gekozen kan worden zodanig dat de bemonsteringen  $z(j\Delta t)$  van  $z(t)$  exact het goede spectrum opleveren. Dit begrensd zijn van het frequentiegebied is essentiëel. Uit vgl. (3.17) volgt direct, dat de component met de hoogst te verwachten frequentie minstens twee maal per periode bemonsterd moet worden. In berekeningen hoeft het spectrum ook niet voor  $\sigma > \sigma_f$  bepaald te worden, omdat boven deze waarde niet meer het echte spectrum berekend wordt.

In het voorgaande zijn voorbeelden gegeven met continue spectra van willekeurige vorm. Bij getijsignalen gaat het in principe om lijnspectra. Echter, ook dan blijven de conclusies onverkort geldig.

#### Voorbeeld I

In de iets uitgebreidere getijanalyse worden de componenten M8, 2MSN8, 3MS8, e.d. nog berekend. Deze getijcomponenten hebben een periode van ongeveer 3 uur, zodat het bemonsteringsinterval ongeveer  $1\frac{1}{2}$  uur moet bedragen. Op grond daarvan wordt algemeen in de getijanalyse een bemonsteringsinterval gebruikt van 1 uur.

#### Voorbeeld II

Om een ruwe indruk van het getij te krijgen worden uit een bepaald getijsignaal alleen de enkel- en de dubbeldaagse componenten berekend. Op grond van cijfers uit de omgeving weet men dat 6x daagse componenten nog wel voorkomen, maar hogere frequenties niet meer. De kortste periode waarin men belang stelt, bedraagt ongeveer 12 uren, wat een bemonsteringsinterval van 6 uren zou inhouden. Deze keuze is onjuist, omdat niet aan de eis voldaan is, dat  $Z(\sigma) = 0$  voor  $\sigma \geq \sigma_f = 1/6$ ; immers er komen ook nog componenten met een periode van ongeveer 4 uren in het getijsignaal voor. Dus de eis is dat het bemonsteringsinterval  $\Delta t < 2$  uren.

#### Voorbeeld III

Een sinusoidaal verschijnsel  $z(t) = \sin 2\pi\sigma_0 t$  met nog onbekende  $\sigma_0$ , wordt bemonsterd met een bemonsteringsinterval zodanig, dat  $\sigma_f < \sigma_0$ . Gevraagd wordt hoe het spectrum eruit ziet op het interval  $(-\sigma_f, \sigma_f)$ .

Antwoord: het echte spectrum vertoont spectrale lijnen voor  $\sigma = \pm \sigma_0$  (zie

onderstaande figuur 11). Deze lijnen worden als het ware omgevouwen om  $\sigma = \pm \sigma_f$ , zodat er spectrale lijnen ontstaan voor  $\sigma = \bar{\sigma} \pm 2\sigma_f$ . In het beschouwde interval  $(-\sigma_f, \sigma_f)$  is de originele sinusoiden dus zichtbaar met een lagere, totaal andere frequentie dan  $\sigma_0$ . Dit verschijnsel is heel vaak zichtbaar bij filmopnamen van draaiende voorwerpen. Indien het aantal beelden per seconde te laag is, zal het lijken alsof het draaiende voorwerp met een andere frequentie draait. In het uiterste geval, indien  $\sigma_f = \frac{1}{2}\sigma_0$ , dus éénmaal per periode bemonsteren, verschuiven de spectrale lijnen naar de oorsprong. Dan wordt de beweging als het ware stil gezet, want dan  $\sigma = 0$  (stroboscopisch effect).

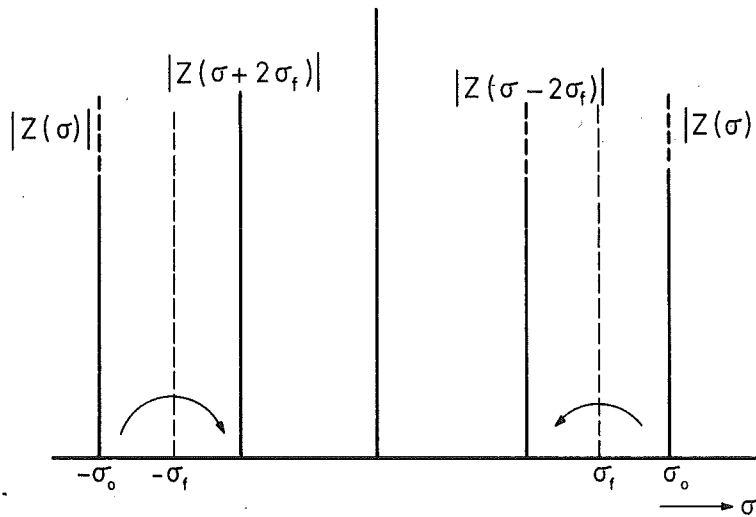


fig. 11

Voorbeeld IV

Het verschijnsel "aliasing" kan ook wel eens ten nutte gemaakt worden. Uit voorbeeld III blijkt dat, indien de plaats van de spectrale lijnen bekend is, de vorm van het aliased spectrum bij gegeven  $\sigma_f$ , voorspeld kan worden. Ter vermindering van het rekenwerk zou dan een heel groot bemonsteringsinterval genomen kunnen worden. De Japanner Mijazaki heeft van deze eigenschap gebruik gemaakt door analyses te maken met het "belachelijke" bemonsteringsinterval van  $35\frac{1}{2}$  uren. Hierdoor worden alle spectrale lijnen samengeperst op het interval  $(-\sigma_f, \sigma_f)$  echter zodanig dat ze niet over elkaar heen vallen. Zijn resultaten waren redelijk. Het nadeel van deze methode is dat alle storingen ook accumuleren op het interval  $(-\sigma_f, \sigma_f)$ . Hierdoor neemt de nauwkeurigheid af.

---

In het algemeen dient men voortdurend op het verschijnsel "aliasing" verdacht te zijn, vooral indien in het gemeten signaal frequenties voorkomen die als zodanig weinig significant zijn voor het verschijnsel. Als voorbeeld kan dienen het getijsignaal, dat gestoord is door golven met hoge frequenties, die weinig met het getijverschijnsel als zodanig van doen hebben (seiches met een periode van enkele minuten tot een half uur).

In het algemeen is het niet verstandig om een zodanig klein bemonsteringsinterval te nemen, dat deze verschijnselen met hogere frequenties meegeanalyseerd worden. Dit leidt namelijk tot zeer uitgebreide dus kostbare rekenpartijen. Het in de getijanalyse gebruikte bemonsteringsinterval van 1 uur kan dan ook pas toegepast worden, als het gemeten signaal van deze hoge frequenties ontdaan is. Met andere woorden: er moet gefilterd worden. Een gebruikelijke methode is bijvoorbeeld het bepalen van glijdend gemiddelde. In het kader van dit college zal hierop verder niet worden ingegaan.

3.4.3. De lengte van de waarnemingsreeks

Tot nu toe is aangenomen dat de waarnemingen aan de functie  $z(t)$  over het gehele tijdsinterval  $(-\infty, +\infty)$  gegeven zijn. In het algemeen is dit niet het geval, men heeft altijd te maken met een waarnemingsreeks op een eindig tijdsinterval. Er was reeds gevonden, dat het spectrum  $Z(\sigma)$  in het interval  $-\sigma_f < \sigma < \sigma_f$  exact bepaald kon worden, als  $Z(\sigma) = 0$  voor  $\sigma \geq \sigma_f$ , en dat dan geldt:

$$Z(\sigma) = \Delta t \sum_{j=-\infty}^{+\infty} z(j\Delta t) e^{-2\pi i j \Delta t \sigma} \tag{3.14}$$

Nu wordt de waarnemingsreeks beperkt tot  $2N+1$  waarnemingen, zodat  $Z(\sigma)$  benaderd moet worden door:

$$Z_{2N+1}(\sigma) = \Delta t \sum_{j=-N}^{+N} z(j\Delta t) e^{-2\pi i j \Delta t \sigma}$$

$Z_{2N+1}(\sigma)$  is ongelijk aan  $Z(\sigma)$  en we zullen nagaan tot welke fout het afbreken van de waarnemingsreeks leidt. Substitueer daartoe in de laatste vergelijking de inverse Fouriertransform voor  $z(j\Delta t)$  en verwissel integratie en sommatie:

$$Z_{2N+1}(\sigma) = \Delta t \int_{-\sigma_f}^{+\sigma_f} Z(\sigma') d\sigma' \sum_{j=-N}^{+N} e^{2\pi i j \Delta t (\sigma' - \sigma)}$$

Opnieuw is  $\sigma'$  de integratievariabele, terwijl  $\sigma$  als vast beschouwd kan worden. Het bemonsteringsinterval is juist gekozen, zodat  $Z(\sigma) = 0$  voor  $|\sigma| \geq \sigma_f$ . De integratiegrenzen kunnen dus worden  $-\sigma_f$  en  $\sigma_f$ . Weer staat in het rechterlid van

bovenstaande vgl. een meetkundige reeks, waarvan de som reeds gegeven is in de voorgaande paragraaf. Dus:

$$Z_{2N+1}(\sigma) = \int_{-\sigma_f}^{+\sigma_f} Z(\sigma') \frac{\sin(2N+1)\pi(\sigma-\sigma')\Delta t}{\sin\pi(\sigma-\sigma')\Delta t} \Delta t d\sigma'. \quad (3.18)$$

Uit vgl. (3.18) volgt dat  $Z_{2N+1}(\sigma)$  de integraal is van  $Z(\sigma')$  vermenigvuldigd met een gewichtsfunctie. Als  $N \rightarrow \infty$  gaat de gewichtsfunctie over in  $\delta(\sigma-\sigma')$ , zodat:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Z_{2N+1}(\sigma) = Z(\sigma).$$

Om te onderzoeken hoe lang de waarnemingsreeks moet worden, zal nu een geval beschouwd worden waarbij  $z(t)$  bestaat uit een som van uitsluitend harmonischen:

$$z(t) = \sum_{j=-M}^{+M} a_j e^{2\pi i \sigma_j t},$$

waarvan het echte spectrum is:

$$z(t) = \sum_{j=-M}^{+M} a_j \delta(\sigma - \sigma_j),$$

terwijl het spectrum berekend uit  $2N+1$  waarnemingen volgens vgl. (3.18) wordt:

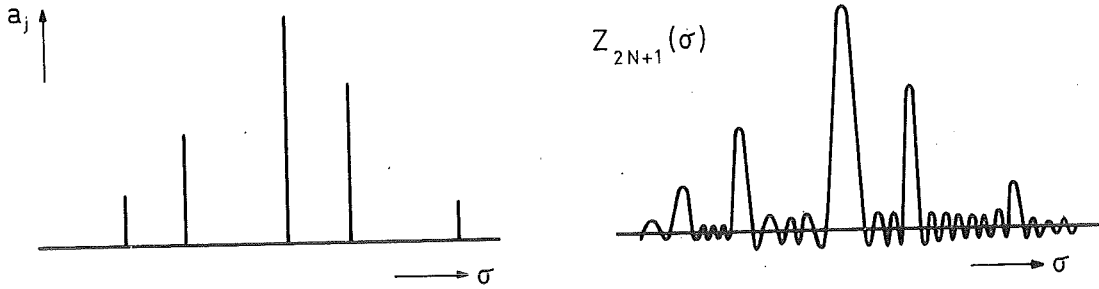
$$Z_{2N+1}(\sigma) = \int_{-\sigma_f}^{+\sigma_f} \sum_{j=-M}^{j=+M} a_j \delta(\sigma' - \sigma_j) \frac{\sin(2N+1)\pi(\sigma - \sigma')\Delta t}{\sin\pi(\sigma - \sigma')\Delta t} \Delta t d\sigma'.$$

Omdat het echte spectrum  $Z(\sigma)$  nu gegeven is met behulp van de deltafuncties, kan de integratie naar  $\sigma'$  uitgevoerd worden:

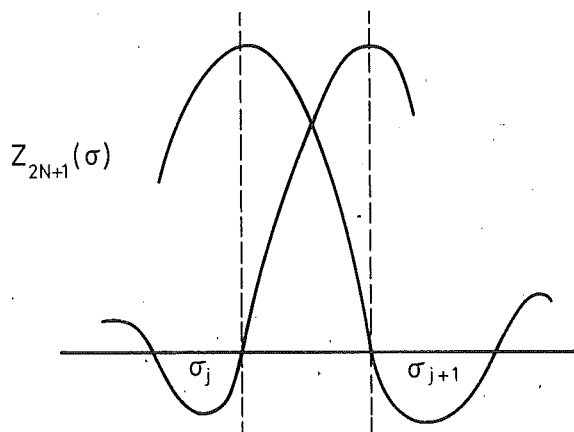
$$Z_{2N+1}(\sigma) = \sum_{j=-M}^{+M} a_j \frac{\sin \pi(2N+1)(\sigma - \sigma_j)\Delta t}{\sin \pi(\sigma - \sigma_j)\Delta t} \Delta t \quad (3.19)$$

Dit resultaat houdt in dat het oorspronkelijke lijnenspectrum overgaat in een continu spectrum. Pas voor  $N \rightarrow \infty$  wordt het lijnenspectrum weer verkregen. Met andere woorden, in de praktijk kan uit een registratie nooit een lijnenspectrum berekend worden. Een en ander is in de volgende figuur (blz.60) nog eens geïllustreerd. In de linker figuur zijn alleen de amplitudes getekend. Voor het spectrum moet nog met de deltafuncties  $\delta(\sigma - \sigma_j)$  vermenigvuldigd worden. De rechter figuur toont hoe het spectrum wordt bij een eindige meettijd. De deltafuncties gaan nu over in afzonderlijke, maar qua verloop identieke, diffractiefuncties, die met  $a_j$  vermenigvuldigd worden. Het beeld van de  $a_j$ 's, zoals gerepresenteerd in de linker

figuur, keert dus terug in het benaderde spectrum. Merk voorts op dat de hoogte van de toppen evenredig is met  $2N+1$  (het aantal waarnemingen). Door de hoogten van de toppen te delen door dit aantal kunnen de  $a_j$ 's verkregen worden.



Met opzet is de rechter figuur zo getekend, dat de diffractiefuncties elkaar nauwelijks beïnvloeden. Er rijzen moeilijkheden als de theoretische spectrale lijnen heel dicht bij elkaar liggen, zodat in het berekende spectrum de diffractiefuncties elkaar gaan beïnvloeden. De vraag rijst nu hoe lang een registratie moet zijn willen 2 afzonderlijke spectrale lijnen nog als zodanig in het berekende spectrum onderkend worden. Rayleigh heeft hiervoor, min of meer willekeurig, gesteld dat dit nog mogelijk is, als 2 opeenvolgende toppen van harmonischen elkaar niet beïnvloeden.



Dit is het geval indien:

$\text{Dif}(\sigma - \sigma_j) = 0$  voor  $\sigma = \sigma_{j+1}$ , waaruit volgt:  $\sin \pi(2N+1)(\sigma_{j+1} - \sigma_j)\Delta t = 0$   
 en:

$\text{Dif}(\sigma - \sigma_{j+1}) = 0$  voor  $\sigma = \sigma_j$ , waaruit volgt:  $\sin \pi(2N+1)(\sigma_j - \sigma_{j+1})\Delta t = 0$

Dit levert op:

$$\pi(2N+1)(\sigma_{j+1} - \sigma_j)\Delta t = \pm \pi$$

of:

$$\left| \sigma_{j+1} - \sigma_j \right| = \frac{1}{(2N+1)\Delta t} \sim \frac{1}{2T} = \frac{1}{\text{waarnemingsperiode}} \quad (3.20)$$

In woorden: het frequentieverschil van 2 dicht bij elkaar gelegen spectrale lijnen moet gelijk aan of groter zijn dan de inversie van de lengte van de waarnemingsperiode. Omgekeerd, indien de frequenties die men in het spectrum nog onderscheiden wil gegeven zijn, kan de vereiste lengte van de waarnemingsperiode berekend worden. De conditie voor de tijdsduur van de registratie ( $2T$ ) kan geïnterpreteerd worden als de eis, dat de relatieve verandering van fase tussen 2 harmonische golven minstens gelijk moet zijn aan  $2\pi$  radialen, om de harmonischen als zodanig te onderkennen. Dit wordt het criterium van Rayleigh genoemd. \*)

---

#### Voorbeeld

Onderstaande tabellen geven voor enkele belangrijke enkel- en dubbeldaagse getijden aan, hoe lang de waarnemingsperioden minstens moeten zijn om ze in een analyse van elkaar te kunnen onderscheiden. Voor de berekening is gebruik gemaakt van formule (3.20) en de frequenties zoals deze gegeven zijn in hoofdstuk 2.

#### enkeldaagse getijden

	P1	K1	O1	Q1	
P1	x	182,6	14,8	9,6	perioden in dagen
K1		x	13,7	9,1	
O1			x	27,6	

---

\*) Dit criterium geldt alleen voor deterministische signalen. Bij stochastische signalen, waarbij men als regel werkt met het energiedichtheidsspectrum, zal veel langer gemeten moeten worden om een betrouwbare schatting te verkrijgen.



dubbeldaagse getijden

	S2	K2	M2	N2	L2	2MS	
S2	x	182,6	14,8	9,6	31,7	7,4	perioden in dagen
K2		x	13,7	9,1	27,1	7,1	
M2			x	27,6	27,6	14,8	
N2				x	13,8	9,6	
L2					x	9,6	
2MS							

Bij getijden worden deze perioden wel de synodische perioden genoemd. Merk uit de tabellen op dat voor de scheiding van zeer belangrijke componenten als M2 en S2 minimaal een periode van 15 dagen vereist is. Vele componenten hebben een periode van ongeveer  $29/n$  ( $n=1,2,3,4$ ), reden waarom een periode van 29 dagen vaak gebruikt wordt voor een minimumanalyse.

Vooraf in het verleden, toen analyses met de hand uitgevoerd moesten worden, werd op elegante wijze gebruik gemaakt van het feit, dat juist in een periode van 29 dagen vele synodische perioden een geheel aantal malen begrepen zijn (b.v. Admiraliteitsmethode van Doodson).

Zoals de tabellen echter aangeven is het met de gewone analyse niet mogelijk S2 van K2 en K1 van P1 te onderscheiden. Om dit te bereiken gebruikte men wel resultaten uit de astronomische analyse van deze componenten; hierop zal echter niet verder worden ingegaan. Overigens zijn veel gebruikte perioden voor een analyse: 355 en 369 dagen. Strikt aanhouden van deze perioden is echter niet noodzakelijk.

Uit het criterium van Rayleigh volgt tevens nog een indicatie voor de laagste frequentie die nog in een signaal onderscheiden kan worden. Zoals reeds eerder aangetoond is bestaat het spectrum van  $\sin 2\pi\sigma_0 t$  of  $\cos 2\pi\sigma_0 t$  uit 2 spectrale lijnen op  $\sigma = \pm \sigma_0$ .

Voor lage frequentie liggen deze lijnen dicht bij  $\sigma = 0$ .

Willen de toppen van de diffractiefuncties, behorend bij  $\sigma = \pm \sigma_0$ , elkaar niet beïnvloeden, dan moeten de spectrale lijnen (nu van een en dezelfde harmonische) minstens  $\frac{1}{2T}$  uit elkaar liggen. Gerekend vanaf de oorsprong:

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{4T} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta\sigma.$$

Dit resultaat impliceert een harmonische die in de waarnemingsperiode juist een halve oscillatie kan voltooien.

$\Delta\sigma$  wordt de elementaire frequentieband genoemd. Het is gebruikelijk om de punten van het spectrum te berekenen met een interval van  $\Delta\sigma$ . Het heeft weinig zin nog meer punten te berekenen, daar het oplossend vermogen toch niet groter is dan  $2\Delta\sigma$ .

Uitgaande van vgl. (3.18) worden de punten van het spectrum berekend voor  $\sigma = j\Delta\sigma$ , zodat de benadering voor het spectrum wordt:

$$Z_{2N+1}(j\Delta\sigma) = \int_{(j-1)\Delta\sigma}^{(j+1)\Delta\sigma} Z(\sigma) \frac{\sin(2N+1)\pi\Delta t(j\Delta\sigma-\sigma')}{\sin \pi\Delta t(j\Delta\sigma-\sigma')} \Delta t d\sigma'. \quad (3.11)$$

Hierbij zijn de oorspronkelijke integratiegrenzen  $-\sigma_f$  en  $+\sigma_f$  vervangen door  $(j-1)\Delta\sigma$  en  $(j+1)\Delta\sigma$ , omdat de diffractiefunctie  $\text{Dif}(j\Delta\sigma-\sigma')$  praktisch alleen maar bijdragen geeft rond  $\sigma'=j\Delta\sigma$ . Dit resultaat betekent dat het berekende spectrum dan gelijk wordt aan het echte spectrum, vermenigvuldigd met de diffractiefunctie over 2 elementaire frequentiebandjes.

### 3.5. Slotbeschouwing

Na de opmerkingen die in de voorgaande paragrafen over bemonsteringsinterval en tijdsduur van de metingen gemaakt zijn, is een logische voortzetting van het college een verhandeling over het digitaal filteren van meetsignalen als middel om ongewenste storingen te elimineren. Zoals hiervoor uiteengezet is dient steeds nagegaan te worden of in verband met "aliasing" het te analyseren signaal van hoge, niet relevante frequenties ontdaan moet worden. Hiervoor zijn verschillende technieken beschikbaar, doch in het kader van dit college zal daaraan verder geen aandacht besteed worden.

Na deze eventuele operatie op met name het getijsignaal staan ons in feite nu 2 methoden om de getijconstanten te berekenen ter beschikking:

Deze zijn:

- a) berekening met de methode der kleinste kwadraten, waarbij direct van een aantal getijcomponenten met gegeven frequentie de amplitude en fase's worden berekend. De methode houdt in, dat de geïntegreerde fout (= afwijking tussen echte signaal en benadering) geminimaliseerd wordt. De afwijking, het residu, moet nog op zijn grootte beschouwd worden. Indien een nauwkeuriger resultaat gewenst wordt, moet de berekening met een groter aantal componenten herhaald worden. Met de nu beschikbare rekenhulpmiddelen is er weinig extra moeite voor nodig om het gehele spectrum van een gegeven signaal te berekenen; voor een routineanalyse van getijgegevens is deze (traditionele) methode echter wel voldoende. De methode wordt harmonische analyse genoemd.

b) met behulp van het spectrum.

Dit is vooral van belang als men het getijsignaal wat gedetailleerder wil beschouwen. Heden ten dage is een dergelijke berekening, b.v. met de techniek van de "fast Fourier transform", betrekkelijk eenvoudig, d.w.z. weinig tijdrovend geworden. De bewerking is in principe zeer eenvoudig, want er wordt niets anders gedaan dan het signaal vermenigvuldigen met een sinus of cosinus en integreren:

$$Z_{(2N+1)}(\sigma) = \Delta t \sum_{j=-N}^{+N} z(j\Delta\sigma) e^{-2\pi i j \Delta t \sigma}$$

waarbij de berekening wordt uitgevoerd voor verschillende frequenties. Het grote voordeel is dat men over het gehele frequentiegebied geïnformeerd wordt. In het algemeen zullen de frequenties van getijcomponenten niet samenvallen met de waarden waarvoor het spectrum is berekend. De complexe amplitudes kunnen worden verkregen uit dit spectrum met behulp van de methode der kleinste kwadraten. Het gedrag van het spectrum is namelijk bekend als de frequenties bekend zijn (zie bijv. vgl. 3.19)). Een tussenvorm van deze methode en van die genoemd onder a) is de methode waarbij de elementaire frequentieband ( $\Delta\sigma$ ), dus de waarnemingsperiode, zo gekozen wordt, dat frequenties van sommige belangrijke getijcomponenten overeenkomen met Fourierfrequenties. In dit bijzondere geval is een harmonische analyse identiek met een Fourieranalyse, waarbij slechts een paar Fouriercoëfficiënten worden berekend. Verder is dit weinig essentiëel. Een getijanalyse zonder een foutenbeschouwing is in feite niet compleet. De fouten in de uiteindelijke resultaten zijn het gevolg van afwijkingen in het echte getijsignaal, welke in het algemeen ruis genoemd worden. Hierbij zijn nog 2 soorten te onderscheiden:

- a) afwijkingen van het echte getijsignaal als gevolg van een fysische oorzaak, die (in theorie) kan worden opgespoord en berekend (b.v. windopzet, getijcomponent met lange periode);
- b) afwijkingen van het echte getijsignaal als gevolg van een groot aantal onafhankelijke factoren. Deze ruis heeft als karakteristiek dat de amplitude per frequentie eenzelfde waarde heeft; de fase van elke frequentie is echter uniform verdeeld. Ruis, die deze eigenschappen heeft wordt witte ruis genoemd.

Voor de berekening van de mogelijke fout in de amplitude en de fase van een bepaalde getijcomponent wordt verwezen naar de literatuur. Er wordt echter op gewezen, dat het spectrum reeds een goede indruk van de ruis geeft. Onafhankelijk van de amplitude van de beschouwde getijcomponent kan de fout een waarde tussen 0 en 3 cm hebben, wat in het algemeen betekent dat de componenten met lage amplitude een hoge relatieve fout hebben.

=====

Literatuur

1. Blackman, R. and Tukey, J.  
The measurement of power spectra from the point of view of communications engineers.  
New York, 1951.
2. Cartwright, D. and Catton, D.  
On the Fourier analysis of tidal observations.  
IHR, 1963, 40, no. 1, pp. 113-126.
3. Connes, J. and Nozal, V.  
Le filtrage mathématique dans la spectroscopie par la transformation du Fourier.  
Le Journal de physique et le radium, 1961, 22, pp. 359-366.
4. Godin, G.  
The analysis of tides.  
Liverpool, 1972.
5. Lennon, G.  
The treatment of hourly elevations of the tide using an IBM 1620. IHR, 1965, 42, no. 2, pp. 125-148.
6. Miyazaki  
A method for the harmonic analysis of tides.  
The Oceanographic Magazine (Japan), 1958, 10, no. 1.
7. Munk, W. and Cartwright, D.  
Tidal spectroscopy and prediction.  
Phil. Trans. Roy. Soc., London, 1966, Ser. A259, pp. 533-581.
8. Sneddon, I.  
Fourier transforms.  
New York, 1951.
9. van Ette, A.C.M. and Schoemaker, H.J.  
Harmonic analysis of tides. Essential features and disturbing influences.  
Special Publication no. 2 to vol. 1 of the Hydrographic Letter (Netherland Hydrographer).

10. Zetler, B.D. and Cummings, R.A.  
A harmonic method for predicting shallow-water tides.  
J. of Mar. Res., 1967, 28, pp. 103-114.

4. De getijbeweging in zeeën en oceanen

In hoofdstuk 3 komt uitsluitend aan de orde hoe uit een registratie op een bepaalde plaats de z.g. getijconstanten berekend kunnen worden. Deze getijconstanten karakteriseren het getij, zoals dat op de betreffende plaats aanwezig is. Men zou zich kunnen afvragen of er verband bestaat tussen de getijconstanten van de beschouwde plaats en die van een nabij gelegen waarnemingsstation. Om hierover uitspraken te kunnen doen zullen getijberekeningen moeten worden gemaakt. Voor zover het gaat om één-dimensionale gevallen kan hiervoor de één-dimensionale lange-golftheorie, zoals behandeld in de colleges b73 (A en B), goede diensten bewijzen. Op zee is deze één-dimensionale benadering echter niet langer geoorloofd; bovendien worden daar de effecten van de draaiing van de aarde zeer belangrijk.

Met betrekking tot het laatste verschijnsel is tot nu toe stilzwijgend verondersteld, dat in de gebruikte vergelijkingen van de colleges b73(A en B) geen correctietermen behoeften te worden ingevoerd om de gevolgen van het gebruik van een roterende assenkruis in rekening te brengen.

De meest eenvoudige gelineariseerde vergelijkingen om de stroming in een bassin op aarde te beschrijven zijn nu (geen wrijving, convectieve versnelingstermen verwaarloosd, uitwijkingen horizontale bodem klein t.o.v. gemiddelde waterdiepte):

$$\text{continuïteitsvergelijking: } \frac{\partial \eta}{\partial t} + h_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0, \quad (4.1.)$$

$$\text{bewegingsvergelijkingen: } \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - fv = F_{sh}, \quad (4.2.)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} + fu = F_{sv}, \quad (4.3.)$$

waarin: x - as valt langs een parallel (naar oosten positief),

y - as valt langs een meridiaan (naar noorden positief),

u = snelheid in x-richting,

v = snelheid in y-richting,

t = tijd,

$\eta$  = golfhoogte,

$h_0$  = gemiddelde waterdiepte ( $\eta \ll h_0$ ),

g = versnelling waterkracht,

f =  $2\omega \sin \phi$  = Coriolis-parameter,

$\omega$  = hoeksnelheid van de rotatie van de aarde  $\approx 0,73 \cdot 10^{-4}$  [rad/s]

$\phi$  = breedte in graden,  
 $F_{sh}, F_{sv}$  = horizontale, resp. vertikale component van de sleepkracht  
 $F_s$ , zoals afgeleid in hoofdstuk 2.

Vergelijking met de formules voor het ééndimensionale geval laat een grote overeenkomst in structuur zien. Extra termen zijn nu echter de Coriolis- en de sleepkrachttermen in de vergelijkingen (4.2) en (4.3).

Deze termen hebben relatief kleine waarden:

$$f_{\max} = 1,46 * 10^{-4} \text{ [rad/s]} \text{ (op de polen) en } F_{s\max} = 0,82 * 10^{-6} \text{ [ms}^{-2}\text{]}$$

(zie hoofdstuk 2). Als voor de orde van grootte van de optredende snelheden  $u$  en  $v$   $1 \text{ [m/s]}$  genomen wordt, betekent dit voor de orde van grootte van de Coriolistermen  $10^{-4} \text{ [ms}^{-2}\text{]}$ , zodat in het algemeen deze termen eerder in de beschouwingen moeten worden betrokken dan de sleepkracht. In feite houdt dit in, dat de sleepkracht  $F_s$  uitsluitend in de oceanen - waar het getij dus opgewekt wordt - meegenomen moet worden, terwijl de Coriolistermen al een rol gaan spelen in b.v. brede estuaria.

In de nu volgende (summiere) uiteenzettingen zal eerst enige aandacht gegeven worden aan de invloed van de Coriolistermen en vervolgens aan die van de sleepkracht.

Voor een nadere uiteenzetting betreffende de invloed van de Coriolistermen wordt een rivier beschouwd, stromend van west naar oost met een snelheid  $u = 1 \text{ [m/s]}$ , met een breedte van  $200 \text{ [m]}$  en gelegen op  $50^\circ$  Noorderbreedte. De dwarssnelheid in de rivier zal nul zijn en vgl. (4.3) geeft dus aan dat er een dwarsspiegelverhang is, groot:

$$\frac{\delta\eta}{\delta y} = - \frac{f}{g} u \sim 1 * 10^{-5}$$

Hieruit volgt, dat er een verschil in waterstand  $\Delta\eta$  is tussen de beide oevers van:

$$\Delta\eta = 2 * 10^{-3} \text{ [m] ,}$$

dat de hoofdstroming nauwelijks zal beïnvloeden. Indien de breedte echter toeneemt tot vele kilometers, zoals b.v. bij de Westerschelde, wordt de invloed duidelijk merkbaar. Daar zijn dan ook typische vloed- en ebgeulen aan te wijzen, wat zich uit in de bodemligging in de vorm van vloed- en ebscha-



ren. Wordt de breedte nog groter, dan kunnen als gevolg van de Coriolis termen in de vergelijkingen (4.2) en (4.3) ook stromingen ontstaan. In het algemeen kan dus gesteld worden, dat de Coriolis termen aanleiding geven tot dwarsstromen of dwarsgradiënten, of combinaties daarvan. Op het noordelijk halfrond zullen de waterdeeltjes de neiging hebben af te buigen naar rechts, op het zuidelijk halfrond naar links (in de richting van de stroming gezien). Golfverschijnselen, waarbij de zwaartekrachtstermen van dezelfde orde van grootte zijn als de Coriolis termen in de vergelijkingen (4.2) en (4.3), worden Kelvingolven genoemd. Deze vergelijkingen laten ook harmonische oplossingen toe, die voor eenvoudige configuraties wel te bepalen, maar toch nog tamelijk ingewikkeld zijn. Er zal daarom van worden afgezien deze hier te geven. Een enkel essentieel punt zal aan de hand van fig. 12 nader worden toegelicht.

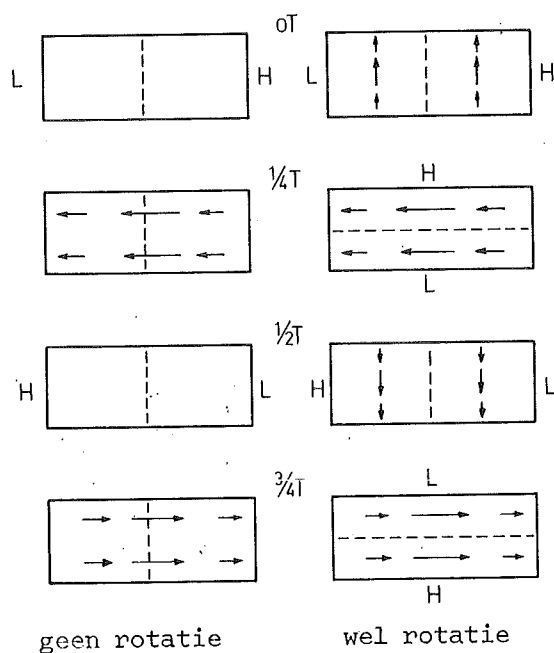


Fig.12. Staande golf in een al dan niet roterende bak.

Beschouw de staande golfbeweging in een rechthoekig niet-roterend bassin met eigen periode  $T$ . Op  $t = 0T$  zijn er HW aan de westzijde en LW aan de oostzijde; er zijn geen stromingen. Op  $t = \frac{1}{4}T$  is er een horizontaal oppervlak; de stroming is gericht naar het westen. Op  $t = \frac{1}{2}T$  is de situatie tegengesteld aan die op  $t = 0$ , en op  $t = \frac{3}{4}T$  aan die op  $t = \frac{1}{4}T$ . De rotatie van de aarde voegt daar aan toe een tweede oscillatie in dwarsrichting. Als de snelheden op  $t = \frac{1}{4}T$  gericht zijn naar het westen zal er als gevolg van de dwarskracht (Coriolis term) HW zijn aan de noordzijde en LW aan de zuidzijde. Op  $t = \frac{3}{4}T$

gebeurt het tegengestelde. Op  $t = 0$  en  $T = \frac{1}{2}T$  zijn er dwarsstromen in respectievelijk noord- en zuidrichting. De twee oscillaties geven samen een zogenaamd amphidromisch systeem, omdat de golf (het getij) nu rond een knoop, een amphidromie, beweegt. HW loopt als het ware rond in het bassin. De stromen gedragen zich overeenkomstig en hebben op HW dezelfde richting als de golftop. In feite is dit karakteristiek voor een lopende golf, hoewel hier toch sprake is van een staande golf verschijnsel. Het type van de getijbeweging is nu dat van een lopende golf, bewegend om een punt, tegen de beweging van de wijzers van de klok in op het noordelijk halfrond, met de wijzers van de klok mee op het zuidelijk halfrond. De amplitude van het getij zal het grootst zijn aan de kust, en nul in het amphidromisch punt. Het principe van resonantie bestaat ook voor een twee-dimensionaal systeem als de Noordzee. Deze heeft zodanige dimensies, dat de getijbeweging (dubbel-daags) daarin aanspreekt op die van de Atlantische Oceaan door de vorming van drie amphidromische cellen. Schematisch is dit getoond in figuur 13. In werkelijkheid is de positie van de amphidromische cellen wat verschoven. Dit wordt veroorzaakt door bodemwrijving, vorm van de kusten en bodemconfiguratie (zie figuur 14).

Zoals gezegd, het getij in een zee als de Noordzee wordt veroorzaakt door het getij in de Atlantische Oceaan. In de Noordzee zelf speelt de sleepkracht een rol van ondergeschikte betekenis; het bassin is er te klein voor.

Zelfs de dimensies van een zee als de Middellandse Zee zijn te klein om daarin een getij met behoorlijke amplitude te laten ontstaan. Slechts de oceanen zijn zo groot, dat daarin een getij van enige amplitude gegenereerd wordt. Fig. 15 geeft een beeld van het amphidromisch systeem van M2 voor de Atlantische Oceaan. Zoals de figuur laat zien wijkt dit systeem nogal af van het evenwichtsgetij, waarvan in hoofdstuk 2 sprake is. Dit laatste getij heeft een golflengte aan de halve aardomtrek, een periode van ongeveer een halve dag en plant zich voort in oost-west-richting. Dit zou op de equator een voortplantingssnelheid inhouden van 450 [m/s] en op  $60^\circ$  breedte van 225 [m/s]. Bij een gemiddelde diepte van de oceaan van 4.000 [m] kan de golfvoortplantingssnelheid echter maar  $\sqrt{gd} = 200$  [m/s] zijn. Dit zal betekenen, dat het werkelijke getij in fase gaat achterlopen bij (de fase van) de sleepkracht  $F_s$ . Bovendien hebben de grote oceanen hun eigen slingerfrequenties, die - gelukkigerwijs - niet hetzelfde zijn als de frequenties in de sleepkracht  $F_s$ . Bijvoorbeeld, de eigen slingerperiode van de Atlantische Oceaan is 19 uur en van de Grote Oceaan 42 uur, voor dimensies van toepassing op de equator.

Tezamen met het Corioliseffect verklaart dit, waarom de echte getijden in de oceanen zo afwijken van het denkbeeldige evenwichtsgetij.

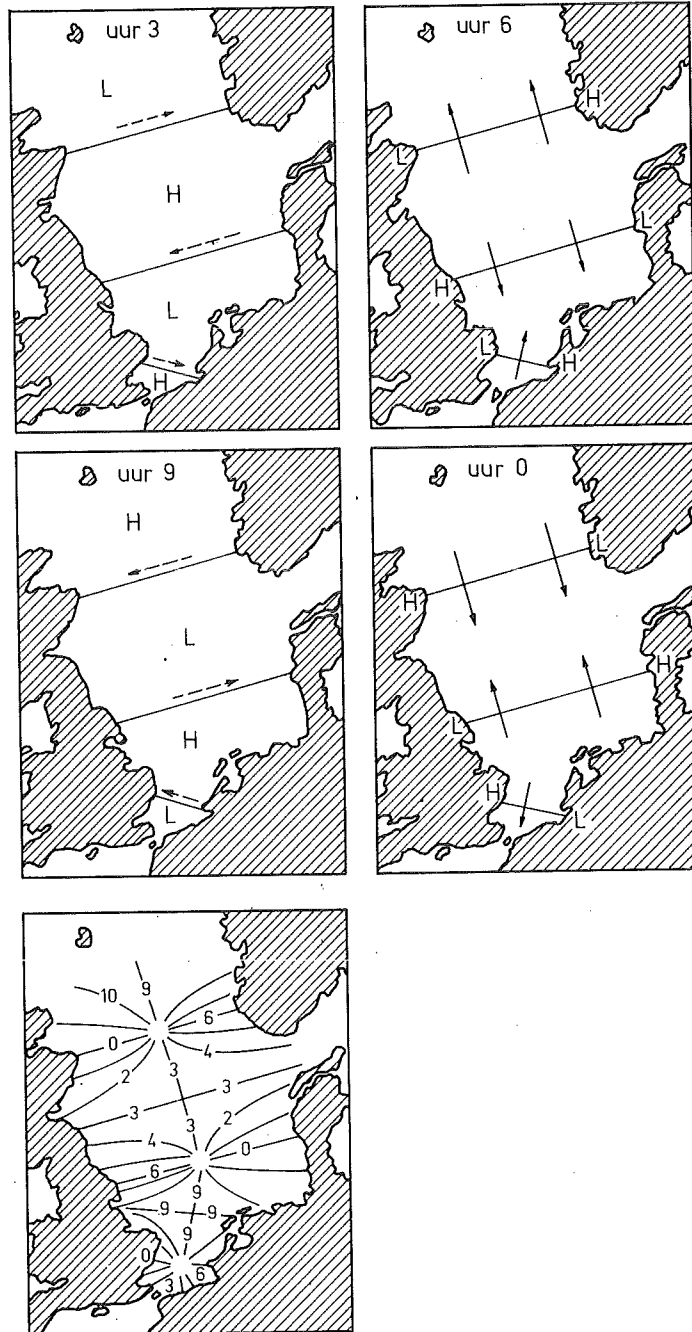


Fig.13. Principe van de verschillende amphidromische cellen in de Noordzee, gebaseerd op een dubbeldaags getij.

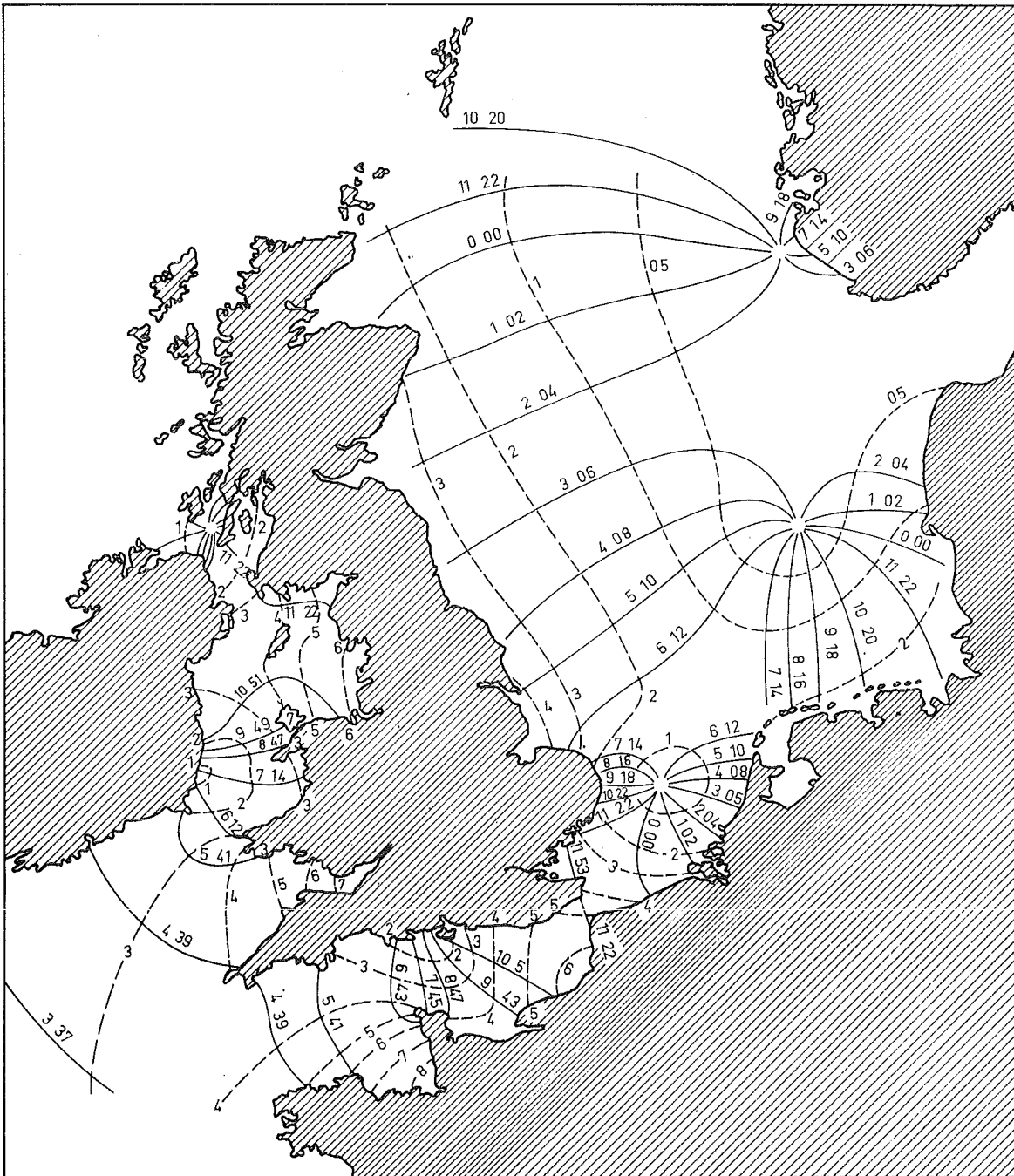


Fig.14. Lijnen van gelijke fase en gelijke (dubbele) amplitude van M2 voor de Noordzee.

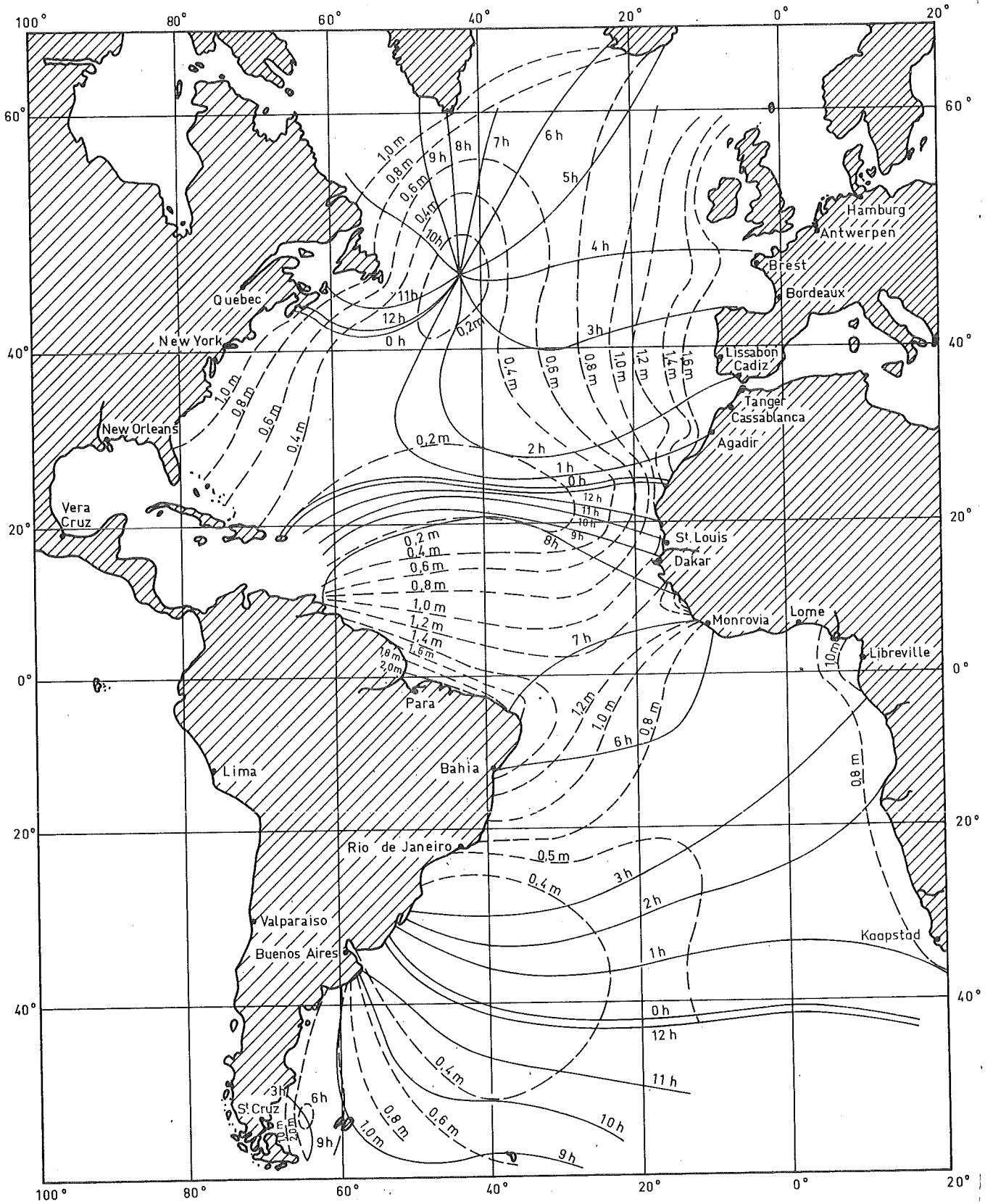


Fig. 15. Het amphidromisch systeem van M2 in de Atlantische Oceaan.

Literatuur

1. Dronkers, J.J.  
Tidal computations.  
Amsterdam, 1964
2. Ippen, A.T. (editor).  
Estuary and coastline hydrodynamics.  
New York, 1966.
3. King, C.A.M.  
Beaches and coasts.  
London, 1972.
4. Wiegel, R.L.  
Oceanographical engineering.  
New York, 1965.
5. Rapport Deltacommissie.  
Deel 5, Onderzoekingen betreffende de opzet van het Deltaplan  
en de gevolgen van de werken.  
's Gravenhage, 1961.

5. Appendix

Vragen die betrekking hebben op de hoofdstukken 2 en 3

Hieronder volgen enkele vragen waarvan de meeste letterlijk gesteld zijn op tentamens in het cursusjaar 1973-1974. Tezamen geven deze vragen een goede indruk van de stof die getentamineerd wordt. Op de tentamens kunnen evenwel ook andere vragen gesteld worden. De onderstaande vragen zijn dan ook meer bedoeld om de lezer in staat te stellen zichzelf te testen, dan om hem te trainen in het maken van vraagstukjes.

De antwoorden op de vragen zijn alleen vermeld, indien ze niet in de tekst terug te vinden zijn.

vraag 1

De algemene uitdrukking voor het evenwichtsgetij te Greenwich is:

$$h(t) = h_0 + \sum_n^n f_n H_n \cos(\omega_n t + V_n + u_n).$$

- a) Licht de betekenis van de verschillende gebruikte symbolen toe.
- b) Geef aan hoe de hoeksnelheid van een willekeurige getijcomponent is samengesteld en vermeld welke bewegingsvormen van de verschillende hemellichamen hierop van invloed zijn.
- c) Leid uit de formule voor het evenwichtsgetij de formule af voor het werkelijke getij voor een willekeurige plaats op aarde.
- d) Voor Hoek van Holland zijn de getijconstanten voor het hoofdmaansgetij 0,76 m en  $90^\circ$  (verbeterd kappa-getal). Bereken met behulp van de gegevens uit bijgevoegde tabel de bijdrage van deze getijcomponent tot de waterstand in Hoek van Holland, voor het aanvangstijdstip van dit tentamen (28-1-1974, 14.00 uur).

antwoord vraag 1

- d) Noem de bijdrage tot het verticale getij om 14.00 uur op 28-1-1974  $\Delta h$ . Deze bijdrage moet berekend worden volgens:

$$\Delta h = f_{M2} H_{M2} \cos(\omega_{M2} t + V_{M2} + u_{M2} - g_{M2}).$$

Gegeven zijn  $H_{M2} = 0,76$  m en  $g_{M2} = 90^\circ$ , terwijl uit de tabel volgt  $f_{M2} = 1,008$  en  $\omega_{M2} = 28,9841$  (graden/uur). Voorts volgt uit de tabel, dat het astronomisch argument van M2 op 1-1-1974 gelijk is aan  $185,3^\circ$ , zodat het astronomisch argument op 28-1-1974 gelijk is aan:

$$\left[ V_{M2} + u_{M2} \right]_{28-1-1974} = \left[ V_{M2} + u_{M2} \right]_{1-1-1974} + (28-1) \xi_{M2},$$

waarin  $\xi_{M2}$  de dagelijkse faseverschuiving is:

$$\begin{aligned} \xi_{M2} &= 24 \times \omega_{M2} - n * 360 = \\ &= 24 \times 28,98 - 2 * 360 = - 24,4^{\circ}. \end{aligned}$$

Dus:

$$\left[ V_{M2} + u_{M2} \right]_{28-1-1974} = 185,3 - 27 * 24,4 = 247,1 \text{ (vermeerderd met } 2 * 360^{\circ}\text{)}.$$

Nu zijn alle getallen bekend, zodat  $\Delta h$ :

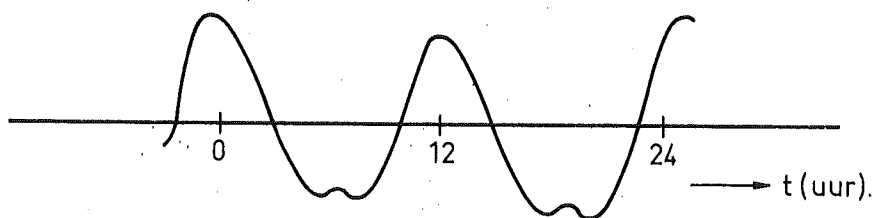
$$\Delta h = 1,008 * 0,76 \cos (14 * 28,98 + 247,1 - 90) = - 0,68 \text{ m.}$$

### vraag 2

a) Geef een definitie van de volgende begrippen:

1. havengetal;
2. leeftijd van het getij;
3. dagelijkse ongelijkheid;
4. springtij en doodtij;
5. ondiepwater getijden;
6. declinatiegetijden;
7. astronomisch argument;
8. kappagetal.

b) Op verschillende plaatsen in de wereld heeft het getij 2 hoogwaters of 2 laagwaters, die zeer kort na elkaar optreden (interval b.v. een half uur). De schets hieronder geeft een voorbeeld hiervan voor een geval met dubbel laagwater:





Bij analyse blijkt, dat het getij enkeldaagse, dubbeldaagse en 4 \* daagse componenten bevat.

Verklaar hoe bovenbeschreven verschijnsel kan ontstaan en geef als toelichting daarbij een schetsje.

- c) Men besluit een bepaald estuarium met caissons af te sluiten tijdens het eerste doortij dat in januari 1975 optreedt.

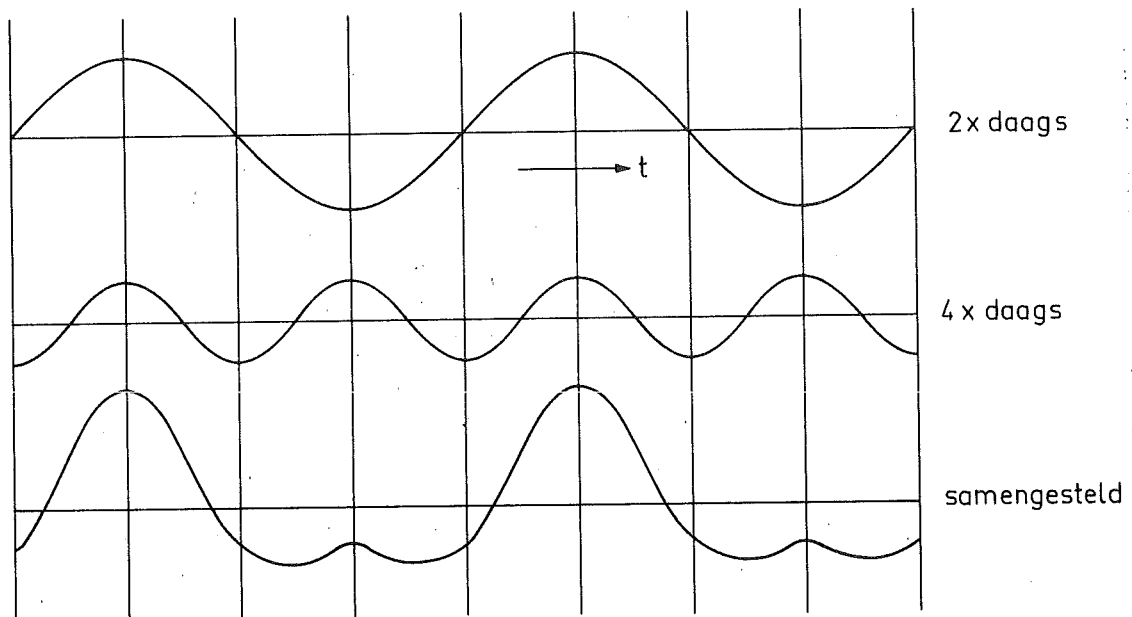
Bereken op welke dag in januari 1975 de afsluiting zal moeten plaatsvinden.

Gegevens:  $H_{M2} = 1,00$  m,  $H_{S2} = 0,50$  m,  $g_{M2} = 200^\circ$ ,  $g_{S2} = 50^\circ$ ; verdere gegevens zijn in bijgaande tabel te vinden (zie volgende bladzijde).

antwoord vraag 2

- b) Het verschijnsel wordt veroorzaakt door een 4 \* daagse component met aanzienlijke amplitude en een zekere fase t.o.v. de 2 \* daagse component.

Het onderstaande schetsje geeft hiervan een beeld.



- c) De getijcomponenten M2 en S2 worden respectievelijk gegeven door:

$$h_{M2} = f_{M2} H_{M2} \cos (\omega_{M2} t + V_{M2} + u_{M2} - g_{M2}),$$

$$h_{S2} = f_{S2} H_{S2} \cos (\omega_{S2} t + V_{S2} + u_{S2} - g_{S2}).$$

M2 en S2 zullen elkaar maximaal verzwakken, indien de cosinussen  $180^\circ$  in fase verschillen.

M2 en S2 zijn allebei 2 \* daagse componenten, die zich gedurende een dag bijna hetzelfde gedragen. Immers, het faseverschil gedurende een dag verandert niet meer dan:

$$24 * (\omega_{M2} - \omega_{S2}) = 24 * (30 - 28,98) \approx 24^\circ \text{ (is klein).}$$

Het faseverschil zal dus veroorzaakt moeten worden door een verschil tussen de andere delen van de respectieve argumenten. Dus op m-1-1975 moet gelden:

$$[V_{M2} + u_{M2} - g_{M2}] - [V_{S2} + u_{S2} - g_{S2}] = \pm n * 180^\circ \text{ (n=1,3,5,\dots)}.$$

Uit de tabel volgt voor 1-1-1975:

$$[V_{M2} + u_{M2}]_{1-1-1975} = 285,8^\circ,$$

$$[V_{S2} + u_{S2}]_{1-1-1975} = 0^\circ.$$

Het astronomisch argument van S2 blijft gelijk aan nul, terwijl het astronomisch argument van M2 voor m-1-1975 wordt:

$$[V_{M2} + u_{M2}]_{m-1-1975} = 285,8 - (m-1) * 24,4.$$

Het resultaat wordt:

$$[285,8 - (m-1) * 24,4 - 200] - [0 - 50] = \pm n * 180,$$

waaruit volgt:

$$(m-1) * 24,4 = \mp n * 180 + 135,8.$$

Alleen het + teken voldoet, terwijl het eerste doortij in januari gezocht wordt; dus n = 1. Dit geeft:

$$m = 13,95.$$

Aangezien m een geheel getal moet zijn, zal het doortij vallen op 14 januari 1975.

Knoopfactor voor het midden van het jaar. \*)

Component	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
K1	1,110	1,113	1,105	1,088	1,063	1,029	0,991	0,951	0,916	0,891	0,882	0,890	0,913
O1	1,178	1,182	1,170	1,143	1,101	1,047	0,984	0,920	0,863	0,822	0,806	0,819	0,853
M2	0,964	0,963	0,966	0,973	0,983	0,995	1,008	1,020	1,029	1,035	1,038	1,036	1,030
K2	1,307	1,316	1,289	1,232	1,150	1,055	0,957	0,871	0,804	0,763	0,748	0,760	0,799
P1, S2	Factor f is gelijk aan 1,000												
N2	Factor f is gelijk aan f van M2												
M4, MS4	Factor f is gelijk aan fxf van M2												

Astronomisch argument (V + u) in graden voor de meridiaan van Greenwich aan het begin van het jaar.

Component	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
K1	7,8	11,2	13,4	15,5	17,1	19,0	19,2	18,2	16,2	14,1	10,5	6,8	3,7
O1	339,8	52,6	150,7	249,0	347,8	61,7	162,0	263,5	6,5	85,7	191,3	296,9	41,6
P1	350,3	349,5	349,8	350,0	350,2	349,5	349,7	350,0	350,2	349,5	349,7	349,9	350,2
M2	346,9	64,0	165,4	266,8	8,0	84,5	185,3	285,8	26,0	101,8	201,8	301,9	42,0
S2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
N2	282,1	257,4	270,1	282,7	295,2	270,0	282,0	293,8	305,3	279,3	290,6	301,9	313,3
K2	195,4	202,4	207,2	211,5	214,8	218,4	218,2	215,8	211,5	207,6	200,9	194,2	188,2
M4	338,8	128,0	330,9	173,6	15,9	169,1	10,5	211,5	52,1	203,6	43,7	243,8	84,0
MS4	(V <sub>o</sub> + u) is gelijk aan (V <sub>o</sub> + u) van M2												

Hoeksnelheid in graden per uur

Component	K1	O1	P1	M2	S2	N2	K2	M4	MS4
Hoeksnelheid	15,04107	13,94303	14,95893	28,98410	30,00000	28,43972	30,08214	57,96820	58,98410

\*) Uit P.Schureman, Harmonic analysis and prediction of tides (U.S. Coast and Geodetic Survey, Washington).

vraag 3

De aantrekkingskracht van 2 massa's ( $m_1$  en  $m_2$ ) wordt bepaald door de gravitatie-wet van Newton:

$$F = a \frac{m_1 m_2}{x^2}$$

waarin  $a$  = gravitatieconstante,

$x$  = afstand tussen de zwaartepunten van de beschouwde massa's.

a) Indien  $r$  en  $m_e$  respectievelijk de straal en de massa van de aarde zijn, leid dan het verband af tussen de zwaartekrachtsversnelling,  $g$ , en de gravitatieconstante,  $a$ .

b) Leid af, dat de aarde in het systeem aarde-maan een versnelling ondervindt gelijk aan:  $\frac{gM}{2K}$ . Hierin is:  $M = \frac{\text{massa maan}}{\text{massa aarde}}$  en:

$$K = \frac{\text{afstand maan-aarde}}{\text{straal aarde}}.$$

c) Leid met behulp van het resultaat genoemd in b) de formule voor de horizon-tale getijverwekkende kracht (sleepkracht) af:

$$F_s = \frac{3gM}{2K} \sin 2\phi.$$

d) Geef de definitie van het evenwichtsgetij en beredeneer, uitgaande van dit getij, het ontstaan van enkel- en dubbeldaagse getijden.

vraag 4

Voor de analyse van getijregistraties kan men gebruik maken van Fourierreeksen. De algemene getijcomponent wordt weergegeven door:

$$h_i = a_i \cos(\omega_i t + \omega_i)$$
 en de getijregistratie door  $g(t)$ .

a) Geef aan hoe en met welke formules de getijconstanten berekend moeten worden.

b) Welke aanname ligt aan de methode ten grondslag en welke relatie bestaat er dan tussen de lengte van de waarnemingsperiode en de frequenties?

vraag 5

Een getijregistratie  $z(t)$  van 24 uur wordt gebruikt om de enkeldaagse getijcom-ponenten te scheiden van de dubbeldaagse. Voor de beschouwde dag worden de ge-zamenlijke enkeldaagse componenten weergegeven door:

$$a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1);$$

de gezamenlijke dubbeldaagse door:

$$a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2).$$

- a) Is de hiervoor genoemde waarnemingsperiode van een dag voldoende om het gestelde doel te bereiken? Licht het antwoord toe.
- b) Voor het bepalen van de componenten wordt de methode der kleinste kwadraten gebruikt.  
Schrijf in formele zin op hoe de methode toegepast moet worden. Werk dit zover mogelijk uit.  
Aanwijzing: schrijf  $a \sin(\omega t + \phi)$  als  $A \sin \omega t + B \cos \omega t$  en voer A en B als onbekenden in.
- c) Indien voor de perioden behorend bij de frequenties  $\omega_1$  en  $\omega_2$  24 uur resp. 12 uur genomen wordt, wat wordt dan het resultaat van b)?
- d) Had het resultaat bereikt onder c) ook op andere wijze bereikt kunnen worden? Motiveer het antwoord.

antwoord vraag 5

- a) Deze vraag is in feite tweeledig, te weten: is de registratie lang genoeg om 1<sup>e</sup>) de component met grootste periode nog te onderscheiden, en 2<sup>e</sup>) om deze component te scheiden van de component met kortere periode. Voor het eerste deel van de vraag moet de elementaire frequentieband beschouwd worden:

$$\Delta\sigma = \frac{1}{4T} = \frac{1}{48} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right].$$

Uit de registratie zou nog een component met een periode van 48 uur gehaald kunnen worden. De registratie is dus lang genoeg om een component met periode van ongeveer 24 uur te berekenen.

Voor het tweede deel van de vraag moet het criterium van Rayleigh gebruikt worden:

$$2T = \frac{1}{|\sigma_1 - \sigma_2|}$$

Hierin is  $\sigma_1 \sim \frac{1}{12} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right]$  en  $\sigma_2 \sim \frac{1}{24} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right]$ , zodat de vereiste waarnemingsperiode bedraagt  $2T \sim 24$  uur.

Resumerend: de waarnemingsperiode van een dag is voldoende om het gestelde doel te bereiken.

b) Het theoretische signaal is:

$$\begin{aligned}
 h(t) &= a_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) = \\
 &= A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t,
 \end{aligned}$$

met:  $A_n = a_n \cos \phi_n, B_n = a_n \sin \phi_n.$

Het gemeten signaal is  $z(t)$ . De geïntegreerde kwadratische fout is:

$$F(A_1, B_1, A_2, B_2) = \int_0^{24} \left[ A_1 \sin \omega_1 t + B_1 \cos \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t + B_2 \cos \omega_2 t - z(t) \right]^2 dt$$

Het minimaliseren van  $F$  levert 4 vergelijkingen op met 4 onbekenden (zie hoofdstuk 2). Hieruit kunnen  $A_1, B_1, A_2$  en  $B_2$  opgelost worden.

c) Indien de perioden exact gelijk zijn aan 12 uur en 24 uur, kunnen alle integralen waar  $z(t)$  niet in voorkomt direct berekend worden; de meeste zijn nul. De uiteindelijke resultaten zijn:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{1}{12} \int_0^{24} z(t) \sin \omega_1 t dt, & (\omega_1 &= \frac{2\pi}{24}) \\
 B_1 &= \frac{1}{12} \int_0^{24} z(t) \cos \omega_1 t dt, \\
 A_2 &= \frac{1}{12} \int_0^{24} z(t) \sin \omega_2 t dt, & (\omega_2 &= \frac{2\pi}{12}) \\
 B_2 &= \frac{1}{12} \int_0^{24} z(t) \cos \omega_2 t dt.
 \end{aligned}$$

d) Ja, de coëfficiënten  $A_1, B_1, A_2$  en  $B_2$  komen nu overeen met de coëfficiënten in een reeks van Fourier.

vraag 6

Een normale reële functie  $z(t)$  die periodiek is op het interval  $(-T, +T)$ , wordt benaderd door:

$$z(t) = \sum_{j=-N}^{j=+N} Z_j e^{i\pi j t / T}, \quad \dots\dots (1)$$

waarin:

$$Z_j = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} z(t) e^{-i\pi j t/T} dt.$$

- Leid uit (1) het reële equivalent voor de reeks van Fourier af en geef het verband tussen de complexe en reële Fouriercoëfficiënten.
- Bewijs, dat een benadering van  $z(t)$  volgens (1) equivalent is met een benadering van  $z(t)$  door dezelfde harmonischen, waarvan de complexe amplitudes m.b.v. de methode der kleinste kwadraten bepaald zijn.

vraag 7

Voor de berekening van een willekeurige getijcomponent:

$h_i(t) = a_i \cos(2\pi\sigma_i t + \phi_i)$  heeft men de beschikking over een oneindig lange getijregistratie,  $g(t)$ , waarin naast enkel- en dubbeldaagse ook nog 4-daagse componenten voorkomen. Het amplitude-spectrum van de getijcomponenten is hierna geschetst (blz.85).

- Leid de uitdrukking af voor het spectrum zoals dat op grond van de getijcomponenten alleen eruit moet zien.
- Voor de berekening van het spectrum wordt een bemonsteringsinterval  $\Delta t = 2$  uur gebruikt. De berekening van het spectrum wordt uitgevoerd voor het interval

$$|\sigma| < \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right].$$

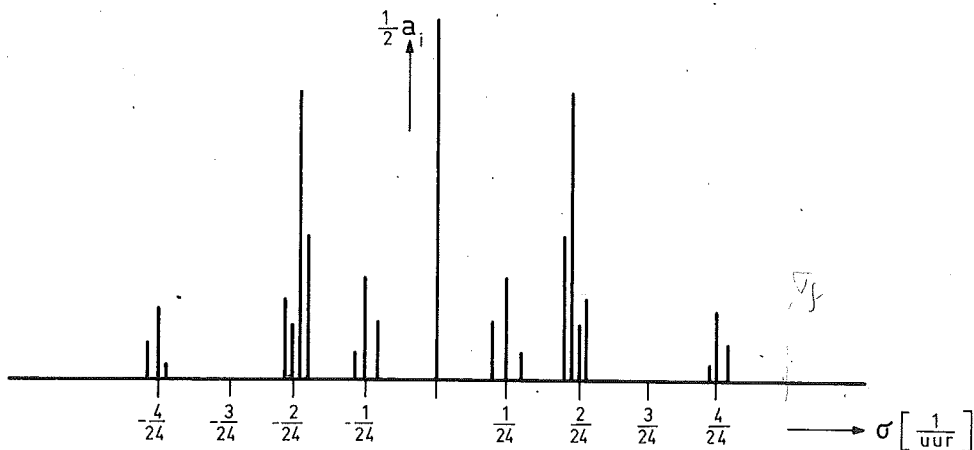
Teken het amplitudespectrum voor  $|\sigma| < \frac{1}{\Delta t}$ . Is alle informatie op dit  $\sigma$ -interval relevant?

- Ter besparing van rekenwerk wordt nu een bemonsteringsinterval van  $\Delta t = 4$  uren gebruikt. Geef aan hoe het spectrum nu opgebouwd is. Is de keuze van het bemonsteringsinterval juist?

antwoord vraag 7

- De willekeurige getijcomponent is:

$$\begin{aligned} h_i(t) &= a_i \cos(2\pi\sigma_i t + \phi_i) = \\ &= \frac{a_i}{2} \left[ e^{2\pi i \sigma_i t + i\phi_i} + e^{-2\pi i \sigma_i t - i\phi_i} \right] = \\ &= \frac{a_i e^{i\phi_i}}{2} e^{2\pi i \sigma_i t} + \frac{a_i e^{-i\phi_i}}{2} e^{-2\pi i \sigma_i t}. \end{aligned}$$



De Fouriertransform van  $e^{2\pi i \sigma_0 t}$  is de deltafunctie  $\delta(\sigma - \sigma_0)$ , zodat het spectrum  $H_i(\sigma)$  van de willekeurige getijcomponent  $h_i(t)$  wordt:

$$H_i(\sigma) = \frac{a_i e^{i\phi_i}}{2} \delta(\sigma - \sigma_i) + \frac{a_i e^{-i\phi_i}}{2} \delta(\sigma + \sigma_i).$$

b) De vouwfrequentie  $\sigma_f$  wordt:

$$\sigma_f = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{4} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right]$$

De hoogste frequentie die voorkomt behoort tot de 4 \* daagse getijden en heeft de waarde  $\sigma = \frac{1}{6}$ .

Het bemonsteringsinterval is dus juist gekozen, want er wordt voldaan aan de eis, dat  $Z(\sigma) = 0$  voor  $|\sigma| > \sigma_f$ .

De berekening wordt echter uitgevoerd voor  $|\sigma| < \frac{1}{2}$ , zodat voor een deel van deze intervallen geldt  $|\sigma| > \sigma_f$ .

Voor de resultaten op deze laatste intervallen moet rekening gehouden worden met het aliased spectrum, dat bestaat uit het originele spectrum plus spectra verschoven over  $2n\sigma_f$ :

$$Z_a(\sigma) = Z(\sigma) + Z(\sigma + 2\sigma_f) + Z(\sigma - 2\sigma_f) + \dots$$



- a) Indien een jaar lang gemeten wordt is het dan zeker dat een goede schatting van de gemiddelde waterstand berekend wordt, of is er mogelijkwijs een storende invloed van getijcomponenten? Motiveer uw antwoord.
- b) Zou de waarnemingsperiode van een jaar voldoende zijn om de enkeldaagse getijden P1 en K1 van elkaar te scheiden? Licht het antwoord toe.

antwoord vraag 9

- a) De vouwfrequentie wordt:

$$\sigma_f = \frac{1}{2\Delta t} = \frac{1}{48} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right].$$

Het spectrum heeft waarden in de buurt van  $\sigma = \frac{1}{24} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right]$  (enkeldaagse getijden),  $\sigma = \frac{2}{24} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right]$  (2 \* daagse getijden),  $\sigma = \frac{4}{24} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right]$  (4 \* daagse getijden), enz. Ook al wordt alleen een waarde van het spectrum in de oorsprong berekend, er wordt niet voldaan aan de eis, dat  $Z(\sigma) = 0$  voor  $|\sigma| > \sigma_f = \frac{1}{48} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right]$ . Het gevolg is, dat de verschoven spectra  $Z(\sigma \pm 2n\sigma_f)$  het originele spectrum gaan beïnvloeden. In dit geval zullen de waarden voor  $\sigma = \pm \frac{n}{24}$  als het ware allemaal naar de oorsprong toeschuiven. Men kan dus verwachten, dat het resultaat voor de gemiddelde waarde ( $\sigma = 0$ ) in beginsel door de getijcomponenten wordt verstoord. Met name wordt het resultaat verstoord door een getijcomponent als S2 met  $\sigma = \frac{1}{12} \left[ \frac{1}{\text{uur}} \right]$ . Het bemonsteren om de 24 uur zal voor S2 steeds exact dezelfde bijdrage opleveren en als zodanig bijdragen aan de gemiddelde waarde. Met andere woorden, in de verschoven spectra zullen de spectrale lijnen van S2 precies in de oorsprong terecht komen. Voorts is van andere componenten ook nog wel een bijdrage te verwachten, omdat als gevolg van de beperkte waarnemingstijd het spectrum bestaat uit diffractiefuncties met een breedte van  $2\Delta\sigma$  (2 elementaire frequentiebandjes). Aldus zullen getijcomponenten wier frequentie ligt tussen  $(\frac{n}{24} - \sigma) < \sigma < (\frac{n}{24} + \Delta\sigma)$  ook nog kunnen bijdragen aan het gemiddelde d.m.v. de verschoven spectra.

- b) Pas het criterium van Rayleigh toe;  $\omega_{P1} = 14,95893$  (graden/uur) en  $\omega_{K1} = 15,04107$  (graden/uur). Voor scheiding van P1 en K1 is een periode nodig van:

$$2T = \frac{360}{\omega_{K1} - \omega_{P1}} = \frac{360}{15,04107 - 14,95893} = 4380 \text{ [uur]} = 182,6 \text{ [dag]}.$$

vraag 10

Een getijregistratie  $z(t)$  wordt geanalyseerd met behulp van een Fouriertransformatie. De berekeningen worden uitsluitend uitgevoerd voor frequenties  $\sigma > 0$ . De waar-

nemingsperiode bedraagt  $2T$ , terwijl de willekeurige getijcomponent

$$h_i(t) = a_i \cos(\omega_i t + \phi_i).$$

- a) Geef de formules voor de Fouriertransformatie en haar inverse vorm.
- b) Leid af hoe het spectrum van de willekeurige getijcomponent er uitziet.
- c) Geef aan hoe uit een berekening van het spectrum voor alleen  $\sigma > 0$ ,  $a_i$  en  $\phi_i$  berekend kunnen worden.

=====

