AFZETTINGEN IN LEIDINGEN

door G A Provoost

R 1974 - 5H

Vloeistofmechanica
Afd. Weg- en Waterbouwkunde
Technische Hogeschool Delft

Gelezen op
2-10-'07

AFZETTINGEN IN LEIDINGEN

door

G.A. Provoost

Technische Hogeschool Delft
Afdeling der Weg- en Waterbouwkunde
Vloeistofmechanica

juni 1974

Inhoudsopgave.

1. Inleiding.

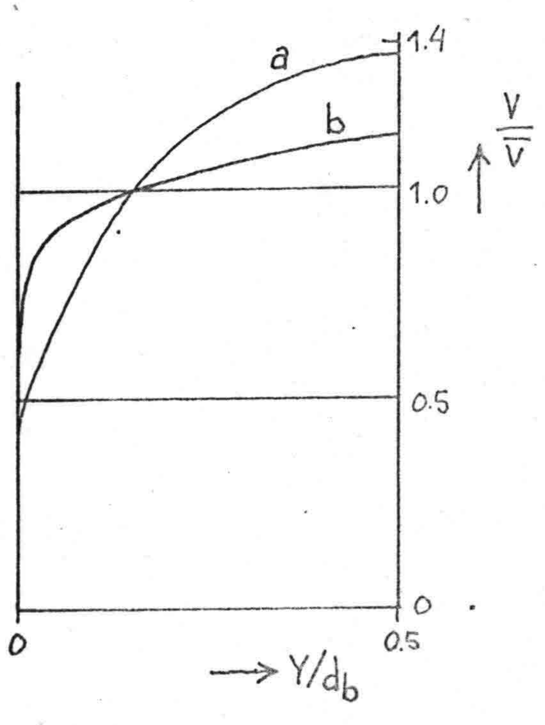
Het doel van dit onderzoek is het vinden van een verklaring voor de invloed van relatief dunne lagen afzettingen op de transportkapaciteit van leidingen. Grote energieverliezen in watertransportleidingen, waarschijnlijk veroorzaakt door plastische afzettingen aan de binnenzijde van de buis worden in een groot aantal publikaties beschreven. Slechts van twee gevallen staat vast dat de plastische laag een ribbelvormig oppervlak had, en wel de Ecker Fernwasserleitung en de Bévercé-transportleiding. Aan beide leidingen is reeds tamelijk wat onderzoek gedaan om het verschijnsel te verklaren.

1.1 Voorbeelden.

Ecker Fernwasserleitung (West Duitsland)
zie ook Wiederholt, Seigerth en Krüger.

Een buis met een binnendiameter van 0.5 m vertoonde na drie jaar gebruik een afname van 43 % van de transportkapaciteit. De buis, voorzien aan de binnenzijde van een laag bitumenisolering van 2 mm, vertoonde een afzetting van gemiddeld 0.7 mm dikte. Deze plastische afzetting vertoonde een ribbelstructuur. De ribbellengte varieerde van 3 tot 8 mm, terwijl de gemiddelde hoogte van de ribbels circa 0.7 mm bedroeg. Schijnbaar had dit laagje de weerstandsfaktor uit de formule van Darcy-Weisbach vergroot van 0.012 tot 0.048 bij de aanwezige gemiddelde snelheid van 1.75 m/s en het verval van 12.5×10^{-3}. Deze wordt bepaald met behulp van de onderstaande formule:

$$f = \frac{2 \cdot g \cdot Db}{\bar{v}^2}$$



figuur 1.1 Snelheidsverdeling van de dimensieloze afstand tot de wand van de buis.

a = meting aan de buis met afzetting.

b = meting aan gereinigde buis.

<u>Bévercé transportleiding</u> (België)

zie ook <u>Schlag & Simons</u> en <u>Thibessard</u>.

De buis met een binnendiameter van 1.96 m vertoonde na een gebruik van 17 jaar een afzetting met een dikte van 12 - 17 mm. Ook hier vertoonde de afzetting ribbels. De ribbellengte varieerde van 20 tot 500 mm, met een gemiddelde van 110 mm. De hoogte van de ribbels bedroeg 2 tot 6 mm, gemiddeld 3.5 mm. De weerstandsfaktor verminderde na schoonmaken van 0.030 tot 0.016 bij een gemiddelde snelheid van 1 m/s. Een bijzonderheid was dat de afzetting niet homogeen was, maar een duidelijke gelaagdheid aanwezig was.

Bij beide leidingen bleek het niet mogelijk de mechanische eigenschappen van de afzettingen te bepalen. Bij droog zetten van de leidingen droogde het materiaal snel uit waardoor de eigenschappen veranderden. Bij verdere droging verviel het materiaal zelfs tot stof.

1.2 Reeds uitgevoerd onderzoek.

Dit onderzoek is een voortzetting van dat van Klaassen. In zijn verslag is allereerst een overzicht gegeven van alle publikaties die het verschijnsel beschrijven. Hij geeft een korte samenvatting van de resultaten van het onderzoek naar de chemische samenstelling van de plastische laag. Verder wordt de waarschijnlijke oorzaak van het neerslaan van deze afzetting gegeven. De nodige aandacht is ook besteed aan het onderzoek dat tot nu toe is uitgevoerd met betrekking tot plastische afzettingen in buizen en aan hun invloed op de afvoerkapaciteit van buisleidingen.

Allereerst is het experimentele werk van Schlichting en Gessner bekeken, waarbij een poging het grote verval te verklaren uit de vorm van de ribbels niet erg succesvol was. Vervolgens wordt een artikel van Koltorff besproken, gebaseerd op een theorie die een verklaring probeert te geven van zandribbels in alluviale rivieren, waarbij de resultaten van deze theorie worden toegepast op de ribbelachtige afzettingen zoals die in een aantal pijpleidingen zijn aangetroffen. De nodige bezwaren worden tegen het artikel ingebracht, zoals de gelaagdheid, die gevonden is bij de Bévercé leiding.

Uit dit reeds uitgevoerde onderzoek wordt de konklusie getrokken dat slechts een deel van het grote verval dat bij de verschillende watertransportleidingen is gekonstateerd, verklaard kan worden uit de bijzondere vorm van de ribbels in de slijmlaag.

Aan het onderzoek dat in de rest van het rapport van Klaassen beschreven wordt ligt de veronderstelling ten grondslag dat het energieverlies niet alleen plaats vindt in het water, maar dat ook een deel van de energie verloren gaat in de slijmerige afzetting. Doordat de slijmlaag in golvende beweging zou komen, kan energie in de laag worden gedissipeerd door viskositeitseffecten. De energieoverdracht van water naar afzetting zou voornamelijk door normale drukkrachten tot stand worden gebracht. In beschouwing zijn golven genomen die zich met een bepaalde snelheid in de richting van de hoofdstroom verplaatsen.

Ondanks het feit dat de afzetting waarschijnlijk een niet-Newtons gedrag vertoont, wordt in de rest van het verslag aangenomen dat de afzetting een Newtons gedrag heeft, daar dit de enige mogelijkheid is om een idee te krijgen van de optredende verschijnselen.

In het verdere van zijn verslag is geprobeerd een theorethische beschrijving te geven van zowel water als afzetting.

Wat betreft de beweging van het water is van de aanname uitgegaan dat de snelheid onafhankelijk is van de hoogte. Voorts is de viskositeit en de samendrukbaarheid van het water nul verondersteld. Bij deze afleiding blijkt er geen energie-overdracht gevonden te worden. Vervolgens wordt een vergelijking gemaakt met het ontstaan van windgolven, veroorzaakt door over water stromende lucht. Een goede beschrijving hiervan geeft de theorie van Miles, de zogenaamde „shear flow theory", die later experimenteel bevestigd is. Miles neemt aan dat het zee-oppervlak reeds gegolfd is en onderzocht dan of energie-overdracht plaats kan vinden. De samendrukbaarheid en de viskositeit van de lucht worden nul gesteld, terwijl aangenomen is dat een bepaald snelheidsprofiel zich heeft ingesteld. Toepassing van deze theorie op het onderhavige probleem zou moeten uitwijzen in hoeverre deze van toepassing is op de golfvorming tussen water en een viskeuze afzetting.

Teneinde een beschrijving te geven van de beweging van de afzetting is aangenomen dat het materiaal onsamendrukbaar is en een viskeus gedrag heeft. Een uitdrukking wordt afgeleid voor de druk op het grensvlak tussen water en afzetting en voor de hoeveelheid energie die in een viskeuze vloeistof wordt gedissipeerd als in het grensvlak een sinusoïdale verstoring optreedt.

Om de ontwikkelde theorie te testen zijn enige experimenten uitgevoerd. In de proefopstelling kon de stroming van water over een iets dichtere en aanzienlijk meer viskeuze vloeistof worden bestudeerd. De resultaten van de proeven tonen aan dat op het grensvlak tussen een laag viskeuze olie en er langs stromend water golfvormige verstoringen kunnen optreden. Dit heeft een duidelijk konstateerbaar groter verval tot gevolg.

Het blijkt niet mogelijk om het gemeten extra verval, veroorzaakt door een dergelijke viskeuze vloeistof, geheel te verklaren met behulp van het opgezette model.

Ook door Lindeyer zijn proeven gedaan met betrekking tot energie-overdracht van water naar een afzetting waarbij op het grensvlak een golfvormige verstoring ontstond. Hij nam voor de afzetting een visko-elastisch materiaal. Daarbij is geen wiskundig model opgesteld, maar is de energiedissipatie in de afzetting op empirische wijze bepaald.

1.3 Nadere precisering van het doel van dit onderzoek.

(1) Een beschrijving geven van de beweging van het water uitgaande van de theorie van Miles.

(2) Een beschrijving geven van een visko-elastische afzetting. Hierin ligt het model van de viskeuze afzetting van Klaassen besloten als de elasticiteit eruit geëlimineerd wordt. Daarbij komt naar voren dat een rekenfout in het verslag van Klaassen tot gevolg had dat de met behulp van dit model berekende verliezen te laag uitkwamen.

(3) Het aan elkaar knopen van de modellen van water en afzetting, om te komen tot een verband tussen voortplantingssnelheid en de lengte van de golven die optreden in het grensvlak.

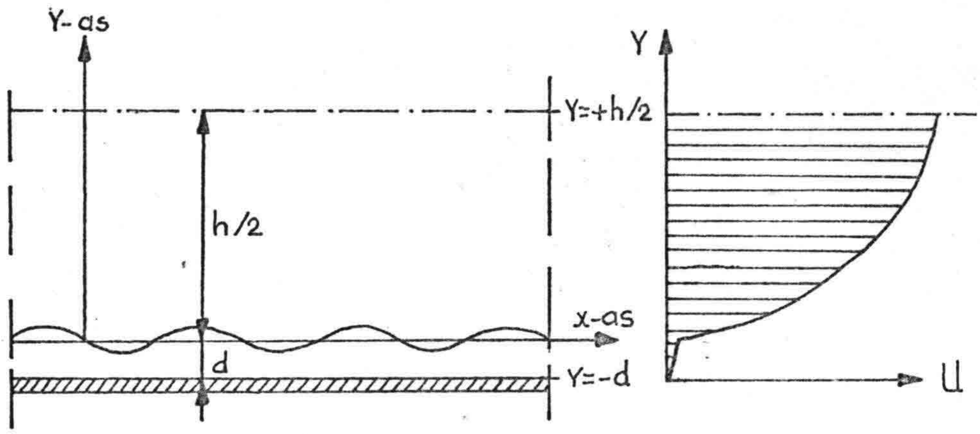
2. Beweging van het water.

2.1 Inleiding.

Uitgaande van de „shear flow theory" van Miles wordt een beschrijving gegeven van de beweging van het water. Het verwaarlozen van enkele termen levert de gewenste vereenvoudiging op. Dit leidt tot de zogenaamde niet-viskeuze Orr-Sommerfeld vergelijking. De randvoorwaarde aan de wand is dezelfde als bij Miles, de tweede echter niet. Miles legt deze namelijk op oneindig, terwijl die in dit geval uit symmetrie-overwegingen gelegd wordt ter plaatse van de as van de buis. De gevonden bewegingsvergelijking wordt numeriek uitgewerkt zoals dit gebeurd is door Conte & Miles voor de lucht, terwijl niet à priori een verband wordt aangenomen tussen voortplantingssnelheid en golflengte van de verstoring in het grensvlak.
In eerste instantie wordt uitgegaan van een parabolisch snelheidsprofiel. Later wordt de berekening nogmaals uitgevoerd, maar dan voor een logaritmische snelheidsverdeling. Hiermee wordt in eerste instantie geprobeerd de snelheidsverdeling, zoals gemeten bij de Ecker leiding te benaderen.

2.2 Theoretische beschrijving van de beweging van het water.

Aangezien zowel ribbelhoogte als dikte van de afzetting klein zijn ten opzichte van de pijpdiameter, lijkt het voldoende om een tweedimensionaal stroombeeld te beschouwen. Als referentie-systeem wordt aangenomen een x-as in het ongestoorde grensvlak terwijl de y-as loodrecht op het grensvlak staat.
Het systeem is symmetrisch ten opzichte van de centrale as van de buis op y = + h/2. Deze as nemen we aan als de eerste grens van het model. De tweede grens wordt gevormd door de buiswand op y = - d. (zie figuur 2.1)



figuur 2.1 Definitieschets van het beschouwde geval. De oorsprong van het assenkruis is aangebracht in het ongestoorde grensvlak.

Tengevolge van een drukverschil in de richting van de positieve x-as, stroomt het water in de richting van de positieve x-as, waarbij zich een snelheidsverdeling U = U(y) heeft ingesteld. Ook op de afzetting wordt een schuifspanning uitgeoefend, zodat ook de afzetting zal bewegen, zij het met een aanzienlijk lagere snelheid.

We nemen aan dat de dichtheid en de viskositeit konstant zullen zijn en ongeveer gelijk aan deze waarden voor gedestilleerd water:

$$\rho_w = 1000 \ kg/m^3 \tag{2.1a}$$

$$\nu_w = 1.6 * 10^{-6} \ m^2/s \tag{2.1b}$$

De beweging van het water wordt beschreven door de vergelijkingen van Navier-Stokes, die voor het aangenomen assenstelsel en de hiervoor gedane veronderstellingen luiden:

$$\rho\frac{\partial U}{\partial t} + \rho U\frac{\partial U}{\partial x} + \rho V\frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}\right] \tag{2.2a}$$

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t} + \rho U\frac{\partial V}{\partial x} + \rho V\frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial p}{\partial Y} + \mu\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}\right] \tag{2.2b}$$

en de massabalansvergelijking:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \tag{2.2c}$$

Verstoringen in het grensvlak tussen water en afzetting zullen in het systeem water-afzetting in elk punt kleine variaties in horizontale en vertikale snelheid en in druk veroorzaken (perturbaties). Zo is de horizontale snelheid in een willekeurig punt opgebouwd te denken uit de volgende drie komponenten:

(1) een konstante snelheid $\bar{U}$, die ontstaat door middelen van de horizontale snelheid over een langere tijd (een tijd die lang is ten opzichte van de trillingstijd van de verstoring in het grensvlak en van de turbulente fluctuaties).

(2) een komponent u' die de turbulente beweging van het water of van de afzetting in dat punt weergeeft.

(3) een komponent u ten gevolge van de verstoring in het grensvlak.

Het zelfde geldt uiteraard voor de vertikale snelheid en de druk in een willekeurig punt, waarbij opgemerkt kan worden dat de door de keuze van het assenstelsel als boven is gedaan, de eerste komponent $\bar{V}$ van de vertikale snelheid nul is.

In formulevorm wordt het bovenstaande beschreven door:

$$U = \bar{U} + u' + u \tag{2.3a}$$

$$V = v' + v \tag{2.3b}$$

$$P = \bar{P} + p' + p \tag{2.3c}$$

De komponenten $\bar{U} + u'$, v' en $\bar{P} + p'$ bepalen het stroombeeld indien geen verstoring in het grensvlak aanwezig is. Deze beweging zal verder worden aangeduid als de hoofdstroom. De hoofdstroom moet dan voldoen aan de vergelijkingen (2.2), dus:

$$\rho\frac{\partial u'}{\partial t} + \rho\bar{U}\frac{\partial u'}{\partial x} + \rho u'\frac{\partial u'}{\partial x} + \rho v'\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} + \rho v'\frac{\partial u'}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2}. \tag{2.4a}$$

$$\rho\frac{\partial v'}{\partial t} + \rho\bar{U}\frac{\partial v'}{\partial x} + \rho u'\frac{\partial v'}{\partial x} + \rho v'\frac{\partial v'}{\partial y} = -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} - \frac{\partial p'}{\partial y} + \mu\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} - \rho g. \tag{2.4b}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \tag{2.4c}$$

Nu kunnen de vergelijkingen voor de hoofdstroom (2.4) afgetrokken worden van de vergelijkingen, die het stroombeeld van de verstoorde beweging beschrijven (2.2), nadat hierin de veronderstelling (2.3) over de gedaante van U, V en P is gesubstitueerd. Dit levert de volgende vergelijkingen op:

$$\underbrace{\rho\frac{\partial u}{\partial t}}_{1} + \underbrace{\rho\bar{U}\frac{\partial u}{\partial x}}_{2} + \underbrace{\rho u\frac{\partial u}{\partial x}}_{3} + \underbrace{\rho u\frac{\partial u'}{\partial x}}_{4} + \underbrace{\rho u'\frac{\partial u}{\partial x}}_{5} + \underbrace{\rho v\frac{\partial \bar{U}}{\partial y}}_{6} + \underbrace{\rho v\frac{\partial u}{\partial y}}_{7} + \underbrace{\rho v\frac{\partial u'}{\partial y}}_{8} + \underbrace{\rho v'\frac{\partial u}{\partial y}}_{9} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial x}}_{10} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{11} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{12}. \tag{2.5a}$$

$$\underbrace{\rho\frac{\partial v}{\partial t}}_{13} + \underbrace{\rho\bar{U}\frac{\partial v}{\partial x}}_{14} + \underbrace{\rho u\frac{\partial v}{\partial x}}_{15} + \underbrace{\rho u'\frac{\partial v}{\partial x}}_{16} + \underbrace{\rho u\frac{\partial v'}{\partial x}}_{17} + \underbrace{\rho v\frac{\partial v}{\partial y}}_{18} + \underbrace{\rho v\frac{\partial v'}{\partial y}}_{19} + \underbrace{\rho v'\frac{\partial v}{\partial y}}_{20} = \underbrace{-\frac{\partial p}{\partial y}}_{21} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}}_{22} + \underbrace{\mu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}}_{23}. \tag{2.5b}$$

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{24} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}_{25} = 0 \tag{2.5c}$$

Om bovenstaande vergelijkingen te vereenvoudigen worden nu twee aannamen gedaan. De eerste veronderstelling is

dat de termen 4, 5, 8, 9 en 16, 17, 19 en 20, die de wisselwerking aangeven tussen de turbulente fluctuaties en de variaties in snelheid en druk, te verwaarlozen zijn ten opzichte van de andere termen. Vergelijken van bijvoorbeeld term 2 en 5 toont aan dat in feite wordt verondersteld dat de turbulente fluctuaties klein zijn ten opzichte van de hoofdstroom. In de buurt van het grensvlak water-afzetting is dit zeer dubieus, terwijl ook op andere plaatsen in de vloeistof deze aanname niet juist is. De verwaarlozing moet echter gedaan worden om de vergelijkingen op te kunnen lossen.
De tweede aanname is dat de variaties in de snelheid klein zijn ten opzichte van de horizontale snelheid van de hoofdstroom, dus:

$$u \ll \overline{U} \qquad (2.6a)$$

$$v \ll \overline{U} \qquad (2.6b)$$

Door deze veronderstelling kan bijvoorbeeld term 3 verwaarloosd worden ten opzichte van term 2. Hetzelfde geldt voor term 7 en voor de termen 15 en 18 ten opzichte van term 14. De volgende vergelijkingen worden dan verkregen:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\overline{U}\frac{\partial u}{\partial x} + \rho v\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right]. \qquad (2.7a)$$

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} + \rho\overline{U}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]. \qquad (2.7b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \qquad (2.7c)$$

Voorts wordt de viskositeit van het water nul verondersteld. Zodat we overhouden voor de bewegingsvergelijkingen betreffende een kleine perturbatie van een tweedimensionaal stroombeeld U(y) in een niet-viskeuze en onsamendrukbare vloeistof met dichtheid ρ:

$$\rho(u_t + \overline{U}u_x + v\overline{U}_y) = -p_x \qquad (2.8a)$$

$$\rho(v_t + \overline{U}v_x) = -p_y \qquad (2.8b)$$

$$u_x + v_y = 0 \qquad (2.8c)$$

Hierin duiden de onderschriften t, x en y de partiële afgeleiden aan naar respektievelijk t, x en y.
Het probleem is nu teruggebracht tot het vinden van oplossingen, die voldoen aan (2.8) en die behoren bij een bepaalde verstoring in het grensvlak tussen water en afzetting. Voor de vorm van de verstoring wordt nu aangenomen:

$$\eta = a \cdot e^{ik(x-ct)} , \tag{2.9}$$

waarbij uiteindelijk alleen het reële deel beschouwd zal worden. Verondersteld is dat de verstoring periodiek is in de tijd en in de x-richting. Hierin is k het golfgetal en c de voortplantingssnelheid van de verstoring. Indien L de golflengte en T de periode is van de golf, dan geldt het volgende verband (n is de frekwentie):

$$k = \frac{2\pi}{L} \tag{2.10a}$$

$$n = \frac{2\pi}{T} \tag{2.10b}$$

$$c = -\frac{n}{k} \tag{2.10c}$$

Verondersteld wordt verder dat u, v en p dezelfde afhankelijkheid van x en t zullen hebben als η. Met behulp van scheiding van variabelen zijn u, v en p dan ook te schrijven als:

$$u = \hat{u}(z) \cdot e^{ik(x-ct)} \tag{2.11a}$$

$$v = \hat{v}(z) \cdot e^{ik(x-ct)} \tag{2.11b}$$

$$p = \hat{p}(z) \cdot e^{ik(x-ct)} \tag{2.11c}$$

Aangezien fase-verschuiving ten opzichte van de verstoring η waarschijnlijk is zullen de amplituden $\hat{u}$, $\hat{v}$ en $\hat{p}$ in het algemeen ook een imaginair deel bevatten.
De perturbatiedruk bevat in het algemene geval naast een periodiek deel ook een lineair deel:

$$p = \hat{p}(z) \cdot e^{ik(x-ct)} + C_1 \cdot x \tag{2.12}$$

Maar bij het afleiden van de bewegingsvergelijkingen (2.8) zijn de kwadratische termen verwaarloosd. In dit gelineariseerde geval zal $C_i = 0$ aangezien de energie-overdracht kwadratisch is.

Verder wordt nu de oplossingsmethode gevolgd, zoals dat ook is gedaan door Miles.
Nu wordt een stroomfunktie ψ geïntroduceerd, die gedefinieerd wordt door:

$$u = -\psi_Y \tag{2.13a}$$

$$v = \psi_X \tag{2.13b}$$

zodat ook ψ dezelfde afhankelijk van x en t heeft als .
Invullen van deze vergelijkingen in (2.8) levert het volgende op:

$$\rho\,[(\bar{U}-c)\,\psi_Y - \bar{U}_Y\,\psi] = p \tag{2.14a}$$

$$\rho k^2\,(\bar{U}-c)\,\psi = p_Y \tag{2.14b}$$

Nadat (2.14a) éénmaal naar y is gedifferentieerd gaan deze vergelijkingen er als volgt uitzien:

$$\rho\,[(\bar{U}-c)\,\psi_{YY} - \bar{U}_{YY}\,\psi\,] = p_Y \tag{2.15a}$$

$$\rho\,k^2\,(\bar{U}-c)\,\psi = p_Y \tag{2.15b}$$

Door deze vergelijkingen van elkaar af te trekken wordt p hieruit geëlimineerd. We houden dan de volgende vergelijking over:

$$(\bar{U}-c)\,\psi_{YY} - [\,\bar{U}_{YY} + k^2(\bar{U}-c)]\,\psi = 0. \tag{2.16}$$

Vergelijking (2.16) is de niet-viskeuze vorm van de bekende Orr-Sommerfeld vergelijking. Opgemerkt dient te worden dat het weglaten van de viskeuze termen aanleiding geeft tot een singulariteit voor $\bar{U} = c$.
De oplossing wordt wat gemakkelijker te hanteren indien overgegaan wordt op een assenstelsel dat met een snelheid c met de verstoring meebeweegt. Tevens wordt gebruik gemaakt van de dimensieloze variabelen z, w en ϕ die gedefinieerd worden door de volgende vergelijkingen:

$$z = k \cdot Y \tag{2.17a}$$

$$\bar{U} - c = U_1 \cdot w(z) \tag{2.17b}$$

$$\psi(Y) = U_1 \cdot \phi(z) \cdot \eta(x,t) \tag{2.17c}$$

De differentiaal-vergelijking (2.16) gaat dan over in:

$$w\left(\frac{d^2\phi}{dz^2} - \phi\right) - \left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)\phi = 0 \tag{2.18}$$

De randvoorwaarden waaraan ϕ moet voldoen worden bepaald door het feit dat het grensvlak een stroomlijn moet zijn en door de symmetrie.

De eerste randvoorwaarde wordt verkregen door te eisen dat de horizontale komponent van de perturbatie-snelheid moet voldoen aan:

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{2.19}$$

In het gelineariseerde geval veronderstellen we $u = \bar{U}$. Opgemerkt wordt dat deze benadering veronderstelt dat de golfhoogte klein is ten opzichte van de golflengte (dus a/L 1 of strenger ka 1). We kunnen dan schrijven voor (2.19):

$$v = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \bar{U} \frac{\partial \eta}{\partial x} \tag{2.20}$$

Dit is met behulp van de dimensieloze variabelen volgens (2.17) te schrijven als:

$$ik \cdot U_1 \cdot \phi \cdot \eta = -ikc\eta + \bar{U}\, ik\eta \tag{2.21}$$

Zodat de eerste randvoorwaarde wordt:

$$\phi_0 = w_0 \tag{2.22}$$

waarbij het nul-ondreschrift inhoudt $z = z_0$.

Uit symmetrie overweging moet voor $y = y_M$ (het midden van de buis) het volgende gelden:

$$v = 0 \qquad \text{of} \qquad \psi_x = 0 \tag{2.23a,b}$$

Met behulp van de dimensieloze variabelen wordt dit:

$$U_1 \cdot \phi \cdot ik \cdot \eta = 0 \qquad \text{voor } z = z_M \tag{2.24}$$

Aangezien dit moet gelden op ieder tijdstip op iedere plaats waar $z = z_M$ kan dit ook geschreven worden als:

$$\phi = 0 \qquad \text{voor } z = z_M \tag{2.25}$$

De perturbatiedruk volgt uit (2.8a):

$$\rho(u_t + \bar{U} u_x + v \bar{U}_y) = - p_x \tag{2.26}$$

Na overgang op de dimensieloze grootheden wordt dit:

$$U_1^2 \cdot ik^2 \cdot \rho \cdot (\phi \frac{dw}{dz} - w \frac{d\phi}{dz}) \eta = -ik \cdot p \tag{2.27a}$$

$$p = -U_1^2 k \cdot \rho \cdot (\phi w' - w \phi') \eta \tag{2.27b}$$

De druk op het grensvlak tussen water en afzetting wordt dus gegeven door:

$$p = -U_1^2 k \cdot \rho \cdot (\phi w' - w \phi')_0 \cdot a \cdot e^{ik(x-ct)} . \tag{2.28}$$

Hier impliceert het onderschrift weer $z = z_0$. Aangezien op het grensvlak moet gelden dat $\phi_0 = w_0$ volgens (2.22) mogen we dit dus ook schrijven als:

$$p = -U_1^2 \cdot k \cdot \rho \cdot w_0 (w' - \phi')_0 \, a e^{ik(x-ct)} . \tag{2.29}$$

De resulterende perturbatiedruk op de wand is dus gegeven door:

$$p = (\alpha + i\beta) \rho U_1^2 k a e^{ik(x-ct)} . \tag{2.30}$$

waarin

$$\alpha + i\beta = w_0 \left(\frac{d\phi}{dz} - \frac{dw}{dz} \right)_0 \tag{2.31}$$

2.3 Numerieke integratie van de niet-viskeuze Orr-Sommerfeld vergelijking voor parabolisch snelheidsprofiel.

We hebben dus te doen met de volgende vergelijking:

$$w\left(\frac{d^2\phi}{dz^2}-\phi\right)-\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)\phi=0 \qquad (z_0<z<z_M) \quad (2.32)$$

Terwijl de randvoorwaarden zijn:

$$\phi_0 = w_0 \qquad (z=z_0) \quad (2.33a)$$

$$\phi = 0 \qquad (z=z_M) \quad (2.33b)$$

Om dit probleem op te lossen is het tevens noodzakelijk dat we $w(z)$ expliciet kennen. De integratieweg in (2.32) moet gekozen worden boven of onder de singulariteit in $z = z_c$, waar $w(z_c) = 0$, en deze keus bepaalt het teken van β. Deze moeilijke en beslissende vraag is in detail behandeld door Lin (1955, § 4.3 en ch. 8) en hier wordt alleen vermeld de konklusie dat de integratieweg gekozen moet worden onder de singulariteit.
Er bestaat slechts één analytische oplossing $\phi_1 = O(w)$ in de omgeving van de singulariteit. De tweede, lineair onafhankelijke oplossing heeft daar een logarithmisch vertakkingspunt en kan worden geschreven als:

$$\phi_2 = \phi_1 \log w + \phi_3 \quad (2.34)$$

waarin ϕ_3 analytisch is en $O(1)$ in de omgeving van $w = 0$, en voldoet aan de inhomogene differentiaalvergelijking bepaald door (2.32) en (2.34).
De te volgen oplossingsmethode zal zijn eerst successievelijk ϕ_1 en ϕ_3 op te lossen en daarna ϕ_1 en ϕ_3 zo samen te voegen dat voldaan is aan de randvoorwaarden (2.33a,b)

We zullen α en β bepalen voor het parabolische snelheidsprofiel:

$$U(y) = a - b\,y^2 \qquad (2.35)$$

Na overgang op dimensieloze variabelen kunnen we dan schrijven voor w:

$$w(z) = A - B\,z^2 \qquad (2.36)$$

waarin de dimensieloze konstanten A en B de volgende waarden hebben:

$$A = (a - c) \,/\, U_1 \qquad (2.37a)$$

$$B = b \,/\, (U_1\, k^2) \qquad (2.37b)$$

Allereerst wordt bekeken waaraan a , b en U_1 moeten voldoen (zie ook figuur 2.2).

$$\text{voor } y = \pm \tfrac{1}{2} h \qquad \text{moet } U(y) = 0 \qquad (2.38a)$$

$$\text{voor } y = 0 \qquad \text{moet } U(y) = v_{max} \qquad (2.38b)$$

Hieruit kunnen we ogenblikkelijk afleiden dat

$$\sqrt{a/b} = h \qquad (2.39)$$

$$a = v_{max} \qquad (2.40a)$$

$$b = v_{max} \,/\, h^2 \qquad (2.40b)$$

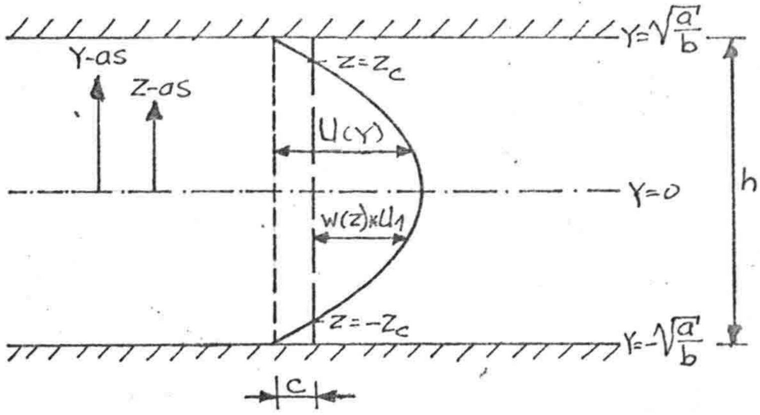
We mogen U_1 vrij kiezen, daarom nemen we die waarde die ons het beste uitkomt:

$$U_1 = 1 \text{ m/s} \qquad (2.40c)$$

Resumerend kunnen we dan voor A en B schrijven:

$$A = (v_{max} - c) \,/\, 1 \text{ m/s} \qquad (2.41a)$$

$$B = v_{max} \,/\, (k^2\, h^2\, 1 \text{ m/s}) \qquad (2.41b)$$



figuur 2.2 Parabolisch snelheidsprofiel in de buis met de plaats van de singulariteiten.

We lossen het probleem op voor die helft van de buis waar y negatief is. De singulariteit verschijnt dan voor $z = -z_c$. We gaan uit van de volgende differentiaalvergelijking:

$$w\left(\frac{d^2\phi}{dz^2} - \phi\right) - \left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)\phi = 0 \tag{2.42}$$

Er ontstaat dan een singulariteit voor $z = -z_c$, waarvoor geldt:

$$w = A - B\,z_c^2 = 0 \tag{2.43}$$

zodat gevonden wordt voor z_c:

$$z_c = \sqrt{\frac{A}{B}} \tag{2.44}$$

We kunnen voor w dan ook het volgende schrijven:

$$w(z) = B\left(\frac{A}{B} - z^2\right) = B\left(z_c^2 - z^2\right) \tag{2.45}$$

We merken op dat

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -2B \tag{2.46}$$

Zodat voor de differentiaalvergelijking (2.42) geschreven kan worden:

$$B(z_c^2 - z^2)\left(\frac{d^2\phi}{dz^2} - \phi\right) + 2B\phi = 0 \tag{2.47}$$

Hieruit kan B worden geëlimineerd door deling. Anders gerangschikt wordt de vergelijking dan:

$$(z_c^2 - z^2)\frac{d^2\phi}{dz^2} + (z^2 - z_c^2 + 2)\phi = 0 \qquad (2.48)$$

We gaan nu over van z-coördinaat op q-coördinaat volgens:

$$z + z_c = q \qquad \text{of} \qquad z = q - z_c \qquad (2.49)$$

De berekening is wat eenvoudiger uit te voeren op deze wijze omdat de singulariteit nu verschijnt voor q = 0. De differentiaalvergelijking kan dan worden geschreven als:

$$-q(q - 2z_c)\frac{d^2\phi}{dq^2} + (q^2 - 2z_c q + 2)\phi = 0 \qquad (2.50)$$

Definieer R en S als volgt:

$$R(q) = -q\,(\,q - 2\,z_c\,) \qquad (2.51a)$$

$$S(q) = q^2 - z_c\,q + 2 \qquad (2.51b)$$

Dan kan voor (2.50) geschreven worden:

$$L\phi = R\frac{d^2\phi}{dq^2} + S\phi = 0 \qquad (2.52)$$

De operator L is hierdoor tevens bepaald. De q-as is dus gedefinieerd als de reële as behalve in de omgeving van q = 0 , waar de integratieweg genomen moet worden onder de singulariteit.

Nadere bepaling van de te volgen oplossingsmethode:

daarvoor moeten we dus:

(a) (2.32) oplossen voor de analythische oplossing ϕ_1.

(b) (2.34) substitueren in (2.32) en uit de resulterende vergelijking ϕ_3 oplossen.

(c) ϕ_1 en ϕ_3 zó kombineren dat voldaan is aan de randvoorwaarden (2.32a,b).

(d) α en β bepalen met behulp van (2.31).

Om de numerieke integratie te kunnen starten moeten we eerst weg komen van de singulariteit. Daarvoor hebben we twee reeksontwikkelingen nodig (lineair onafhankelijk). We schrijven daartoe ϕ in de vorm van een machtreeks, waarna deze gesubstitueerd wordt in de vergelijking waaraan voldaan moet worden. Daarna kunnen de coëfficiënten van de machtreeks bepaald worden.
De eerste, analytische oplossing verkrijgen we als volgt:
Stel ϕ_1 is te schrijven als:

$$\phi_1 = a_o + a_1 q + a_2 q^2 + a_3 q^3 + a_4 q^4 + a_5 q^5 + a_6 q^6 + \ldots + a_n q^n + \ldots \qquad (2.53)$$

Zodat we voor de tweede afgeleide vinden:

$$\phi_1'' = 2a_2 + 6a_3 q + 12a_4 q^2 + 20a_5 q^3 + 30a_6 q^4 + \ldots \qquad (2.54)$$

Invulling van de machtreeks voor ϕ_1 en ϕ_1'' in (2.50) geeft:

$$-q(q-2z_c)(2a_2+6a_3q+12a_3q^2+20a_5q^3+30a_6q^4+\ldots)+$$
$$+(q^2-2z_cq+2)(a_o+a_1q+a_2q^2+a_3q^3+a_4q^4+a_5q^5+\ldots)=0 \qquad (2.55)$$

Dit moet gelden voor alle $q < \delta$ zodat alle coëfficiënten voor respektievelijk q^o, q^1, q^2, ... alle nul moeten zijn. Dit levert de volgende vergelijkingen op:

$$q^o:\ 2a_o = 0 \qquad (2.56a)$$

$$q^1:\ -2z_c a_o + 2a_1 + 4z_c a_2 = 0 \qquad (2.56b)$$

$$q^2:\ a_0 - 2z_c a_1 + 2a_2 - 2a_2 + 12z_c a_3 = 0 \qquad (2.56c)$$

$$q^3:\ a_1 - 2z_c a_2 + 2a_3 - 6a_3 + 24z_c a_4 = 0 \qquad (2.56d)$$

$$q^4:\ a_2-2z_c a_3+2a_4-12a_4+40z_c a_5 = 0 \qquad (2.56e)$$

$$q^5:\ a_3-2z_c a_4+2a_5-20a_5+60z_c a_6 = 0 \qquad (2.56f)$$

etc.....

Uit (2.56a) volgt $a_0 = 0$. Indien we nu voor $a_1 = 1$ nemen dan volgt uit (2.56b) dat $a_2 = -1/(2z_c)$. Uit (2.56c) volgt dan a_3. Op deze manier kunnen respektievelijk a_4, a_5 en a_6 gevonden worden. We vinden op deze wijze de volgende waarden voor de coëfficiënten van de machtreeks:

$$a_0 = 0 \qquad (2.57a)$$

$$a_1 = 1 \qquad (2.57b)$$

$$a_2 = -\frac{1}{2z_c} \qquad (2.57c)$$

$$a_3 = \frac{1}{6} \qquad (2.57d)$$

$$a_4 = -\frac{1}{18z_c} \qquad (2.57e)$$

$$a_5 = \frac{1}{120} - \frac{1}{720z_c^2} \qquad (2.57f)$$

$$a_6 = -\frac{1}{10800z_c} - \frac{1}{2400z_c^3} \qquad (2.57g)$$

We hebben dus de volgende reeksontwikkeling gevonden voor ϕ_1:

$$\phi_1 = q - \frac{1}{2z_c}q^2 + \frac{1}{6}q^3 - \frac{1}{18z_c}q^4 + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{720z_c^2}\right)q^5 + \left(-\frac{23}{10800z_c} - \frac{1}{2400z_c^3}\right)q^6 + \ldots \qquad (2.58)$$

waarbij de reeks zó genormaliseerd is dat $\phi_1 \to q$ als $q \to 0$.

Om de tweede reeks te vinden maken we gebruik van de volgende veronderstelling (in verband met het logarithmische vertakkingspunt):

$$\phi_2 = \phi_1 \log q + \phi_3 \qquad (2.59)$$

Door differentiëren vinden we de eerste en de tweede afgeleide:

$$\frac{d\phi_2}{dq} = \frac{d\phi_1}{dq}\log q + \frac{d\phi_3}{dq} + \phi_1 \cdot \frac{1}{q} \qquad (2.60)$$

$$\frac{d^2\phi_3}{dq} = \frac{d^2\phi_1}{dq}\log q + \frac{d^2\phi_3}{dq} + \frac{2}{q}\frac{d\phi_1}{dq} - \frac{1}{q^2}\phi_1 \qquad (2.61)$$

Indien we dit invullen in (2.52) krijgen we:

$$R\frac{d^2\phi_2}{dq^2} + S\phi_2 = 0 \qquad (2.62)$$

$$R\left(\frac{d^2\phi_1}{dq^2}\log q + \frac{d^2\phi_3}{dq^2} + \frac{2}{q}\frac{d\phi_1}{dq} - \frac{1}{q^2}\phi_1\right) + S(\phi_1 \log q + \phi_3) = 0 \qquad (2.63)$$

$$\log q\left\{R\frac{d^2\phi_1}{dq^2} + S\phi_1\right\} + \left\{R\frac{d^2\phi_3}{dq^2} + S\phi_3\right\} + R\left\{\frac{2}{q}\frac{d\phi_1}{dq} - \frac{1}{q^2}\phi_1\right\} = 0 \qquad (2.64)$$

$$\log q \cdot L\,\phi_1 + L\,\phi_3 = -R\left\{\frac{2}{q}\frac{d\phi_1}{dq} - \frac{1}{q^2}\phi_1\right\}. \qquad (2.65)$$

Aangezien $L\phi_1 = 0$ wordt dit:

$$L\phi_3 = -R\left\{\frac{2}{q}\frac{d\phi_1}{dq} - \frac{1}{q^2}\phi_1\right\}. \qquad (2.66)$$

ϕ_3 wordt weer in de vorm van een machtreeks geschreven met coëffiënten $b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots$:

$$\phi_3 = b_0 + b_1 q + b_2 q^2 + b_3 q^3 + b_4 q^4 + b_5 q^5 + b_6 q^6 + \ldots + b_n q^n + \ldots \qquad (2.67)$$

Voor de tweede afgeleide wordt dan gevonden:

$$\phi_3'' = 2b_2 + 6b_3 q + 12 b_4 q^2 + 20 b_5 q^3 + 30 b_6\, q^4 + \ldots \qquad (2.68)$$

Voor ϕ_1 hadden we reeds gevonden:

$$\phi_1 = q - \frac{1}{2z_c}q^2 + \frac{1}{6}q^3 - \frac{1}{18z_c}q^4 + \left(\frac{1}{120} - \frac{1}{720 z_c^2}\right)q^5$$
$$- \left(\frac{23}{10800 z_c} + \frac{1}{2400 z_c^3}\right)q^6 + \ldots \qquad (2.69)$$

Door (2.69) te differentiëren vinden we ϕ_1':

$$\phi_1' = 1 - \frac{1}{z_c}q + \frac{1}{2}q^2 - \frac{2}{9z_c}q^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{144 z_c^2}\right)q^4 - \left(\frac{23}{1800 z_c} + \frac{1}{400 z_c^3}\right)q^5 + \ldots \qquad (2.70)$$

Zodat nu voor de inhomogene differentiaalvergelijking (2.66) geschreven kan worden:

$$\begin{aligned}
&-q(q-2z_c)(2b_2+6b_3q+12b_4q^2+20b_5q^3+30b_6q^4+\ldots)+ \\
&\quad+(q^2-2z_cq+2)(b_0+b_1q+b_2q^2+b_3q^4+b_4q^3+b_5q^5+\ldots)+ \\
&\quad-q(q-2z_c)\Big\{\frac{2}{q}\Big[1-\frac{1}{z_c}q+\frac{1}{2}q^2-\frac{2}{9z_c}q^3+\Big(\frac{1}{24}-\frac{1}{144z_c^2}\Big)q^4-\Big(\frac{23}{1800z_c}+\frac{1}{400z_c^3}\Big)q^5+\ldots\Big]+ \\
&\quad-\frac{1}{q^2}\Big[q-\frac{1}{2z_c}q^2+\frac{1}{6}q^3-\frac{1}{18z_c}q^4+\Big(\frac{1}{120}-\frac{1}{720z_c^2}\Big)q^5-\Big(\frac{23}{10800z_c}+\frac{1}{2400z_c^3}\Big)q^6+\ldots\Big]\Big\}=0
\end{aligned} \qquad (2.71)$$

Het feit dat de coëfficiënten voor respektievelijk q^0, q^1, q^2, q^3, etc. nul moeten zijn levert een aantal vergelijkingen op waaruit dan achtereenvolgens b_0, b_1, b_2, etc. volgen.

$$q^0:\quad 2b_0+4z_c-2z_c=0 \qquad (2.72a)$$

$$q^1:\quad -2z_cb_0+2b_1+4z_cb_2-2-4+1+1=0 \qquad (2.72b)$$

$$q^2:\quad -2b_2+12z_cb_3+b_0-2z_cb_1+2b_2+\frac{2}{z_c}+2z_c-\frac{1}{2z_c}-\frac{1}{3}z_c=0 \qquad (2.72c)$$

$$q^3:\quad -6b_3+24z_cb_4+b_1-2z_cb_2+2b_3-1-\frac{8}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=0 \qquad (2.72d)$$

$$q^4:\quad -12b_4+40z_cb_5+b_2-2z_cb_3+2b_4+\frac{4}{9z_c}+\Big(\frac{1}{6}z_c-\frac{1}{36z_c}\Big)-\frac{1}{18z_c}-\Big(\frac{1}{60}z_c-\frac{1}{360z_c}\Big)=0 \qquad (2.72e)$$

$$q^5:\quad -20b_5+60z_cb_6+b_3-2z_cb_4+2b_5+\Big(-\frac{1}{12}+\frac{1}{72z_c^2}\Big)+\Big(-\frac{23}{450}-\frac{1}{100z_c^2}\Big)+\Big(\frac{1}{120}-\frac{1}{720z_c^2}\Big)+\Big(\frac{23}{5400}+\frac{1}{1200z_c^2}\Big)=0 \qquad (2.72f)$$

Uit (2.72a) volgt rechtstreeks dat $b_0 = -z_c$. We kunnen b_1 vrij kiezen. Neem dan $b_1 = 0$, zodat ϕ_3 geen veelvoud van ϕ_1 bevat. Uit de andere vergelijkingen (2.72) zijn b_2, b_3, b_4, etc. te berekenen. Dit levert dan op:

$$b_0 = -z_c \qquad (2.73a)$$

$$b_1 = 0 \qquad (2.73b)$$

$$b_2 = -\frac{1}{2}z_c + \frac{1}{z_c} \qquad (2.73c)$$

$$b_3 = -\frac{1}{18} - \frac{1}{8z_c^2} \qquad (2.73d)$$

$$b_4 = -\frac{z_c}{24} + \frac{61}{432z_c} + \frac{1}{48z_c^3} \qquad (2.73e)$$

$$b_5 = -\frac{1}{225} - \frac{109}{21.600 z_c^2} - \frac{1}{192 z_c^4} \qquad (2.73e)$$

$$b_6 = -\frac{z_c}{720} - \frac{13.333}{1.620.000 z_c} - \frac{13}{72.000 z_c^3} + \frac{1}{640 z_c^5} \qquad (2.73f)$$

Dit alles resulteert in de volgende reeksontwikkeling voor :

$$\phi_3 = -z_c + \left(-\tfrac{1}{2}z_c + \tfrac{1}{z_c}\right)q^2 + \left(-\tfrac{1}{18} - \tfrac{1}{8z_c^2}\right)q^3 + \left(-\tfrac{z_c}{24} + \tfrac{61}{432 z_c} + \tfrac{1}{48 z_c^3}\right)q^4 +$$
$$+\left(-\frac{1}{225} - \frac{109}{21.600 z_c^2} - \frac{1}{192 z_c^4}\right)q^5 + \qquad (2.74)$$
$$+\left(-\frac{z_c}{720} - \frac{13.333}{1.620.000 z_c} + \frac{1}{640 z_c^5}\right)q^5 + \ldots$$

waarbij ϕ_3 zó genormaliseerd is dat zij geen lineaire veelvoud bevat van ϕ_1.
De algemene oplossing van (2.50) is dan:

$$\phi = E\,\phi_1 + F\,\phi_2 \qquad (2.75)$$

waarin E en F konstanten zijn en zó gekozen moeten worden dat voldaan is aan de randvoorwaarden (2.33a,b).
De vergelijkingen waaruit E en F bepaald moeten worden zijn:

$$E\,\phi_1(q_0) + F\,\phi_2(q_0) = w_0 \qquad (2.76a)$$

$$E\,\phi_1(q_M) + F\,\phi_2(q_M) = 0 \qquad (2.76b)$$

waarbij q_0 en q_M de q-coördinaten aangeven voor respektievelijk de wand en het midden van de buis.
Hierbij geldt dat:

$$q_0 = z_c - k \cdot h / 2 \qquad (2.77a)$$

$$q_M = z_c \qquad (2.77b)$$

Verder wordt opgemerkt dat

$$\phi_2 = \phi_1 \operatorname{Log} q + \phi_3 \qquad (q \neq 0) \qquad (2.59)$$

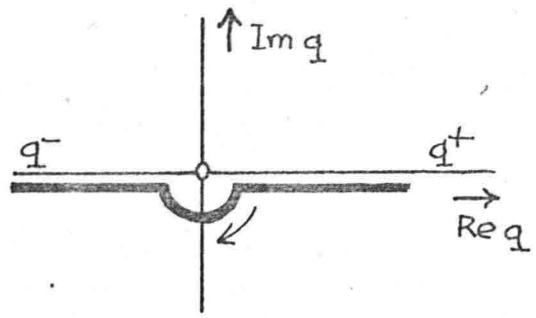
Alvorens verder te gaan moet eerst de definitie van een logarithme van een complex getal voor ogen staan. Deze luidt als volgt:

$$\operatorname{Log} x = \log|x| + i.\arg(x) \qquad (2.78)$$

Zodat we kunnen schrijven voor q reëel en $q > 0$:

$$\text{Log}\, q = \log(q) \qquad (q>0) \tag{2.79}$$

waarbij we log(q) reëel gekozen hebben voor q reëel en $q>0$.



figuur 2.3 Integratieweg verloopt onder de singulariteit voor q = 0.

Als $q^+ > 0$ en reëel en $q^- < 0$ en reëel dan kunnen we schrijven (zie ook figuur 2.3):

$$\arg(q^-) = \arg(q^+) - \pi \tag{2.80}$$

Aangezien we $\log(q^+)$ reëel hebben gekozen moet dus $\arg(q^+) = 0$, zodat voor $q<0$ gevonden wordt:

$$\text{Log}\, q = \log(-q) - i\pi \qquad (q<0) \tag{2.81}$$

Resumerend kan dan voor ϕ_2 geschreven worden:

$$\phi_2 = \phi_1 \log(q) + \phi_3 \qquad (q>0) \tag{2.82a}$$

$$\phi_2 = \phi_1 \log(-q) + \phi_3 - i\pi\phi_1 \qquad (q<0) \tag{2.82b}$$

Terug komend op het probleem om E en F te vinden wordt opgemerkt dat deze konstanten in het algemeen komplex zullen zijn. Om het probleem verder te ontrafelen worden deze konstanten gesplitst in een reëel en een imaginair deel:

$$E = E_1 + i E_2 \tag{2.83a}$$

$$F = F_1 + i F_2 \tag{2.83b}$$

Randvoorwaarde (2.75a) is dan te schrijven als:
(rekening houdend met $q_0 < 0$)

$$(E_1 + iE_2)\phi_1(q_0) + (F_1 + iF_2)\phi_2(q_0) = W_0 \qquad (2.84)$$

of: $$(E_1 + iE_2)\phi_1(q_0) + (F_1 + iF_2)(\alpha_3 - i\alpha_8) = W_0 \qquad (2.85)$$

waarin: $$\alpha_3 = \phi_1(q_0)\log(-q_0) + \phi_3(q_0) \qquad (2.86)$$

en: $$\alpha_8 = \pi\,\phi_1(q_0) \qquad (2.87)$$

Voor de reële delen geldt dan:

$$(\mathrm{I}) \quad E_1\phi_1(q_0) + \alpha_3 F_1 + \alpha_8 F_2 = W_0 \qquad (2.88a)$$

En voor de imaginaire delen:

$$(\mathrm{II}) \quad E_2\phi_1(q_0) + \alpha_3 F_2 - \alpha_8 F_1 = 0 \qquad (2.88b)$$

Omdat $q_M > 0$ is randvoorwaarde (2.75b) te schrijven als:

$$(E_1 + iE_2)\phi_1(q_M) + (F_1 + iF_2)\phi_2(q_M) = 0 \qquad (2.89)$$

of: $$(E_1 + iE_2)\phi_1(q_M) + (F_1 + iF_2)(\phi_1(q_M)\log(q_M) + \phi_3(q_M)) = 0 \qquad (2.90)$$

of: $$E_1 + iE_2 + \alpha_4(F_1 + iF_2) = 0 \qquad (2.91)$$

waarin: $$\alpha_4 = \log(q_M) + \frac{\phi_3(q_M)}{\phi_1(q_M)} \qquad (2.92)$$

Voor de reële delen geldt dan:

$$(\mathrm{III}) \quad E_1 + \alpha_4 F_1 = 0 \qquad (2.93a)$$

En voor de imaginaire delen:

$$(\mathrm{IV}) \quad E_2 + \alpha_4 F_2 = 0 \qquad (2.93b)$$

Uit de vergelijkingen (I)...(IV) worden daarna E_1, E_2, F_1 en F_2 opgelost. Het resultaat daarvan kan als volgt worden samengevat:

$$E_1 = \frac{\alpha_4\alpha_6 W_0}{D} \qquad (2.94a)$$

$$E_2 = -\frac{\alpha_4\alpha_8 W_0}{D} \qquad (2.94b)$$

$$F_1 = -\frac{\alpha_6 W_0}{D} \qquad (2.94c)$$

$$F_2 = \frac{\alpha_8 W_0}{D} \qquad (2.94d)$$

Hierin is dan: $\alpha_6 = \phi_1(q_0)\,\alpha_4 - \alpha_3$ (2.95a)

en: $D = \alpha_6^2 + \alpha_8^2$ (2.95b)

Vervolgens worden dan α en β berekend. Volgens (2.31) is:

$$\alpha + i\beta = w_0\left(\frac{d\phi}{dz} - \frac{dw}{dz}\right)_0 \qquad (2.31)$$

Om bij de tweede term te beginnen hebben we de berekening van ϕ uitgevoerd voor het parabolische snelheidsprofiel:

$$w = A - B\,z^2 \qquad (2.36)$$

zodat we nu kunnen schrijven voor $\frac{dw}{dz}$:

$$\frac{dw}{dz} = -2Bz \qquad (2.96)$$

uitgedrukt in dimensieloze variabelen wordt dit:

$$\frac{dw}{dz} = -2B(q - z_c) \qquad (2.97)$$

Zodat de tweede term van (2.31) nu wordt:

$$-w_0\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 = 2w_0\,B\,(q_0 - z_c) \qquad (2.98)$$

Voor de tweede term moeten we de afgeleide van ϕ vinden. Voor ϕ hadden we gevonden:

$$\phi = E\,\phi_1 + F\,\phi_2 \qquad (2.75)$$

Voor $q<0$ kan dit geschreven worden als:

$$\phi = E\,\phi_1 + F\,(\phi_1 \log(-q) + \phi_3 - i\pi\phi_1) \qquad (2.99)$$

Voor de afgeleide van ϕ wordt dan afgeleid:

$$\frac{d\phi}{dz} = \frac{d\phi}{dq} = E\frac{d\phi_1}{dq} + F\left[\frac{d\phi_1}{dq}\log(-q) + \frac{d\phi_3}{dq} - i\pi\frac{d\phi_1}{dq} + \frac{1}{q}\phi_1\right]. \qquad (2.100)$$

Indien we de afgeleiden naar q aangeven met een accent kan voor de eerste term van (2.31) geschreven worden:

$$w_0\left(\frac{d\phi}{dz}\right)_0 = w_0 F\left\{\frac{E}{F}\phi_1' + \phi_1' \log(-q) + \phi_3' - i\pi\phi_1' + \frac{1}{q}\phi_1\right\}_{q_0} \qquad (2.101)$$

$$= \frac{w_0}{D}(-\alpha_6 + i\alpha_8)\left\{w_0[\phi_1' \log(-q) + \phi_3'] + \frac{w_0}{q}\phi_1 - \alpha_4 w_0 \phi_1' - i w_0 \pi \phi_1'\right\}_{q_0} \qquad (2.102)$$

$$= \frac{w_0}{D}(-\alpha_6 + i\alpha_8)(\alpha_5 - i\alpha_7) \qquad (2.103)$$

waarin: $\alpha_5 = \left\{w_0[\phi_1' \log(-q) + \phi_3'] + \frac{w_0}{q}\phi_1 - \alpha_4 w_0 \phi_1'\right\}_{q_0}$ (2.104)

en: $\alpha_7 = w_0 \pi \phi_1'(q_0)$ (2.105)

Oftewel:

$$W_0\left(\frac{d\phi}{dz}\right)_0 = \frac{W_0}{D}\left\{-(\alpha_5\alpha_6-\alpha_7\alpha_8)+i(\alpha_6\alpha_7+\alpha_5\alpha_8)\right\} \qquad (2.106)$$

$$W_0\left(\frac{d\phi}{dz}\right)_0 = \frac{R}{D} - \frac{I}{D}i \qquad (2.107)$$

waarin dan: $R = -W_0(\alpha_5\alpha_6 - \alpha_7\alpha_8)$ (2.108)

en: $I = -W_0(\alpha_6\alpha_7 + \alpha_5\alpha_8)$ (2.109)

zodat nu gevonden is voor (2.31):

$$\alpha + i\beta = W_0\left(\frac{d\phi}{dz}\right)_0 - W_0\left(\frac{dw}{dz}\right)_0$$
$$= \frac{R}{D} - \frac{I}{D}i + 2W_0 B(q_0 - z_c) \qquad (2.110)$$

Hieruit kunnen we dan afleiden voor en :

$$\alpha = \frac{R}{D} + 2W_0 B(q_0 - z_c) \qquad (2.111a)$$

$$\beta = -\frac{I}{D} \qquad (2.111b)$$

De perturbatiedruk op de grens water-afzetting wordt gegeven door (2.30):

$$p = (\alpha + i\beta)\rho U_1^2 ka e^{ik(x-ct)} \tag{2.30}$$

Hiervan moeten we alleen het reële deel in rekening brengen. Deze uitdrukking is overigens weinig overzichtelijk. Tevens reden om de druk in de volgende vorm te schrijven:

$$p = C_{p_{zz}} \cdot \rho \cdot akc^2 \cos[k(x-ct) + \phi_p] \tag{2.112}$$

waarin $C_{p_{zz}}$ de dimensieloze amplitude is en ϕ_p de faseverschuiving ten opzichte van de verstoring in het grensvlak. $C_{p_{zz}}$ wordt bepaald door de volgende uitdrukking:

$$C_{p_{zz}} = -\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot U_1^2 / c^2 \tag{2.113}$$

En ϕ_p wordt bepaald door het volgende stelsel:

voor $\alpha > 0$ $\quad \phi_p = \arctan(\beta/\alpha) + \pi.$ (2.114a)

voor $\alpha < 0$ en $\beta > 0$ $\quad \phi_p = \arctan(\beta/\alpha) + 2\pi.$ (2.114b)

en voor $\alpha < 0$ en $\beta < 0$ $\quad \phi_p = \arctan(\beta/\alpha).$ (2.114c)

De berekeningsprocedure.

De aànwezigheid van de singulariteit in $w=0$ noodzaakte ons tot de reeksontwikkelingen (2.58) en (2.74) tot twee punten $\pm\bar{q}$, voldoende verwijderd van de singulariteit voordat de numerieke berekening kon worden uitgevoerd. Van deze reeksontwikkelingen verkregen we ϕ_1, ϕ_3 en hun afgeleiden in $\pm\bar{q}$. De numerieke integratie werd vervolgens uitgevoerd waarbij gebruik gemaakt is van de methode van Runge-Kutta. De gekozen waarde van $\bar{q}$ en de stapgrootte zijn zó gekozen dat verder verkleining nauwelijks meer effect had op de uitkomsten.
Voor het berekenen van α en β zijn de hieronder volgende stappen in volgorde uitgevoerd:

(A) $\alpha_3 = \phi_1(q_0)\log(-q_0) + \phi_3(q_0)$ (2.86)

(B) $\alpha_4 = \log(q_M) + \dfrac{\phi_3(q_M)}{\phi_1(q_M)}$ (2.92)

(C) $\alpha_5 = \{w_0[\phi_1'\log(-q) + \phi_3'] + \frac{w_0}{q}\phi_1 - \alpha_4 w_0 \phi_1'\}_{q_0}$ (2.104)

(D) $\alpha_6 = \phi_1(q_0)\,\alpha_4 - \alpha_3$ (2.95a)

(E) $\alpha_7 = w_0 \pi \phi_1'(q_0)$ (2.105)

(F) $\alpha_8 = \pi \phi_1(q_0)$ (2.87)

(G) $D = \alpha_6^2 + \alpha_8^2$ (2.95b)

(H) $R = -w_0(\alpha_5\alpha_6 - \alpha_7\alpha_8)$ (2.108)

(I) $I = -w_0(\alpha_6\alpha_7 + \alpha_5\alpha_8)$ (2.109)

(J) $\alpha = \dfrac{R}{D} + 2w_0 B(q_0 - z_c)$ (2.111a)

(K) $\beta = -\dfrac{I}{D}$ (2.111b)

Numerieke integratie.

De differentiaalvergelijking is van de volgende vorm:

$$\frac{d^2\phi}{dq^2} = F(q,\phi) \qquad (2.115)$$

Voer een nieuwe variabele χ in, gedefinieerd door:

$$\chi = \frac{d\phi}{dq} \qquad (2.116)$$

zodat de tweede orde differentiaalvergelijking overgaat in het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen van de eerste orde:

$$\frac{d\chi}{dq} = F(q,\phi) \qquad (2.117a)$$

$$\frac{d\phi}{dq} = \chi \qquad (2.117b)$$

Voor $q = \pm \bar{q}$ zijn de beginvoorwaarden bekend door de reeksontwikkelingen voor ϕ_1 en ϕ_3.

Het stelsel differentiaalvergelijkingen is dus van de algemene vorm:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y,z) \qquad (2.118a)$$

$$\frac{dz}{dx} = g(x,y,z) \qquad (2.118b)$$

met de beginvoorwaarden:

$$y(x_0) = y_0 \qquad (2.119a)$$

$$z(x_0) = z_0 \qquad (2.119b)$$

Als stapgrootte wordt genomen: h.
Indien gebruik gemaakt wordt van de methode van Heun , dan verloopt de procedure als volgt:

$$x_1 = x_0 + h \qquad (2.120a)$$

$$y_1^* = h * f(x_0,y_0,z_0) + y_0 \qquad (2.120b)$$

$$z_1^* = h * g(x_0,y_0,z_0) + z_0 \qquad (2.120c)$$

$$y_1 = \tfrac{1}{2}h * \{ f(x_0,y_0,z_0) + f(x_1,y_1^*,z_1^*) \} + y_0 \qquad (2.120d)$$

$$z_1 = \tfrac{1}{2}h * \{ g(x_0,y_0,z_0) + g(x_1,y_1^*,z_1^* \} + z_0 \qquad (2.120e)$$

Iets nauwkeuriger werkt de methode van Runge-Kutta, in welk geval de procedure verloopt volgens:

$$x_1 = x_0 + h \qquad (2.121a)$$

$$k_1 = h * f(x_0, y_0, z_0) \qquad (2.121b)$$

$$m_1 = h * g(x_0, y_0, z_0) \qquad (2.121c)$$

$$k_2 = h * f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{m_1}{2}) \qquad (2.121d)$$

$$m_2 = h * g(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}, z_0 + \frac{m_1}{2}) \qquad (2.121e)$$

$$k_3 = h * f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{m_2}{2}) \qquad (2.121f)$$

$$m_2 = h * g(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}, z_0 + \frac{m_2}{2}) \qquad (2.121g)$$

$$k_4 = h * f(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + m_3) \qquad (2.121h)$$

$$m_4 = h * g(x_0 + h, y_0 + k_3, z_0 + m_3) \qquad (2.121i)$$

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (2.121j)$$

$$M = \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \qquad (2.121k)$$

$$y_1 = y_0 + k \qquad (2.121l)$$

$$z_1 = z_0 + M \qquad (2.121m)$$

Gekozen is de methode van Runge-Kutta, vanwege de grotere nauwkeurigheid.

Integratie van ϕ_1.

Dit levert weinig problemen op. ϕ_1 moet voldoen aan vergelijking (2.50), zodat deze geschreven kan worden als:

$$\frac{d^2\phi_1}{dq^2} = \frac{q^2 - 2z_c q + 2}{q(q - 2z_c)} \cdot \phi_1 \qquad (2.122)$$

Zodat de funktie F uit (2.115) dan wordt:

$$F(q, \phi) = \frac{q^2 - 2z_c q + 2}{q(q - 2z_c)} \cdot \phi \qquad (2.123)$$

De beginvoorwaarden volgen uit de gevonden reeksontwikkeling voor ϕ_1 en zijn $\phi_1(\bar{q})$ en $\phi_1'(\bar{q})$ voor integratie in positieve richting. De integratie eindigt in q_M. Voor integratie in negatieve richting zijn de beginvoorwaarden $\phi_1(-\bar{q})$ en $\phi_1'(-\bar{q})$ en deze integratie eindigt in q_0.

In het volgende wordt verstaan onder q_H:

een waarde gelijk aan $\bar{q}$ of $\bar{q}$ vermeerderd met een veelvoud van de integratie-stapgrootte h.

Alle gevonden waarden voor $\phi_1(q_H)$ en $\phi_1'(q_H)$ worden opgeslagen in arrays.

<u>Integratie van ϕ_3.</u>

ϕ_3 moet voldoen aan vergelijking (2.66). Dit is ook te schrijven als:

$$\frac{d\phi_3}{dq} = \frac{q^2-2z_cq+2}{q(q-2z_c)}\phi_3 - \frac{2}{q}\frac{d\phi_1}{dq} + \frac{1}{q^2}\phi_1 \qquad (2.124)$$

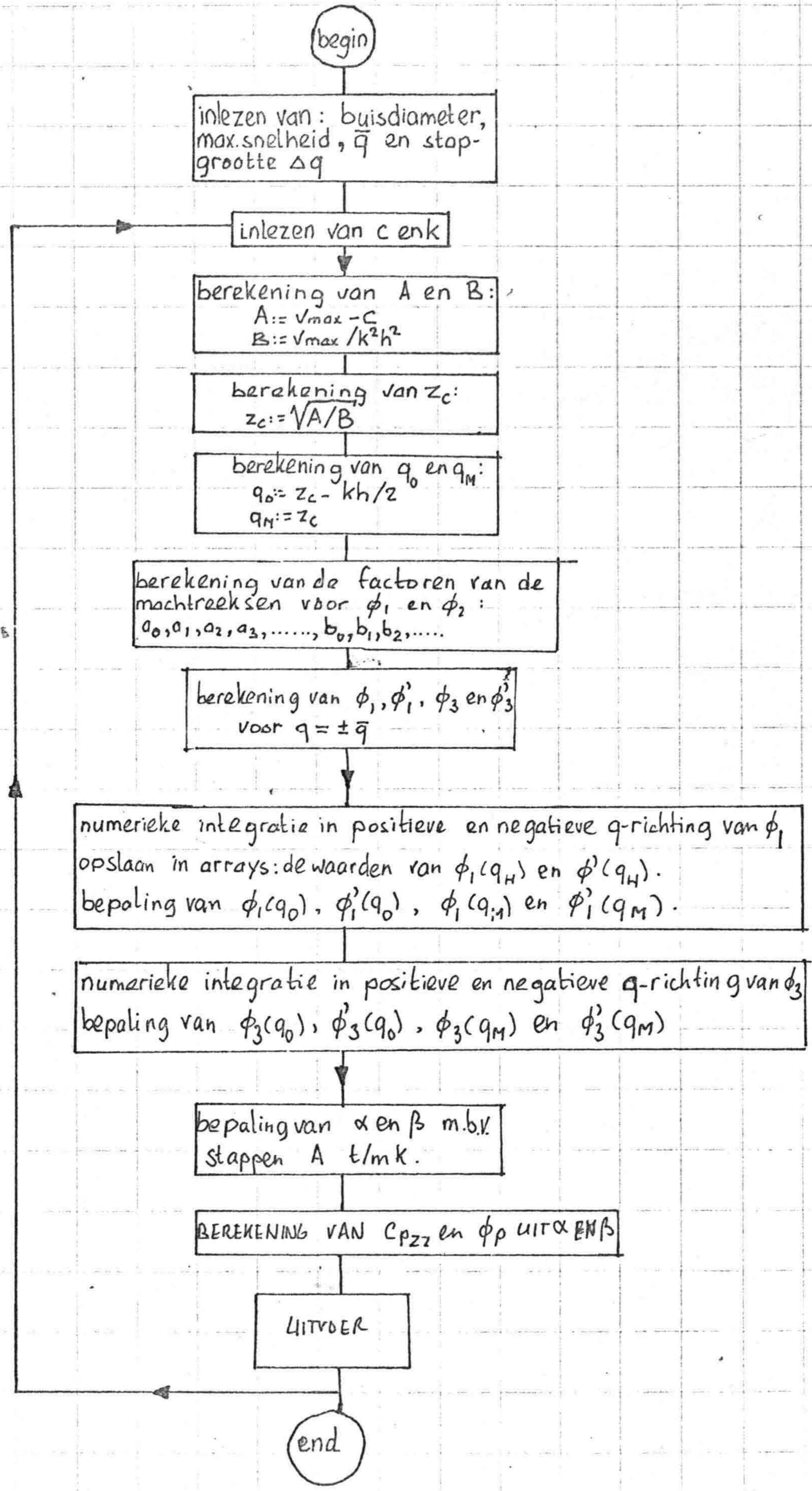
zodat de funktie F uit (2.115) dan wordt:

$$F(q,\phi) = \frac{q^2-2z_cq+2}{q(q-2z_c)}\phi - \frac{2}{q}\frac{d\phi_1}{dq} + \frac{1}{q^2}\phi_1 \qquad (2.125)$$

Het probleem, dat zich nu voordoet is, dat ϕ_1 en ϕ_1' bekend moeten zijn voor de waarde van q waarvoor $F(q,\phi)$ gevraagd wordt. Indien $F(q,\phi)$ gevraagd wordt voor $q = q_H$, dan is dit probleem niet aanwezig, daar de waarden voor ϕ_1 en ϕ_1' opgeslagen zijn in arrays voor waarden van q gelijk aan q_H. Indien echter $F(q,\phi)$ gevraagd wordt voor $q = q_H + \varepsilon\cdot h$ met $0<\varepsilon<1$, dan moet dus eerst de waarde van $\phi_1(q)$ en $\phi_1'(q)$ bepaald worden. Dit gebeurt door numerieke integratie van ϕ_1 (met behulp van de methode van Runge-Kutta) met beginvoorwaarden $\phi_1(q-\varepsilon h)$ en $\phi_1'(q-\varepsilon h)$ en stapgrootte $\varepsilon\cdot h$

De beginvoorwaarden voor de integratie van ϕ_3 volgen uit de gevonden reeksontwikkeling voor ϕ_3 en zijn $\phi_3(\bar{q})$ en $\phi_3'(\bar{q})$ voor integratie in positieve richting, welke integratie eindigt in q_M. Voor integratie in negatieve richting zijn de beginvoorwaarden $\phi_3(-\bar{q})$ en $\phi_3'(-\bar{q})$ en deze integratie eindigt in q_0

stroomdiagram voor de numerieke berekening van $C_{P_{22}}$ en ϕ_P:



2.4 Numerieke integratie van de niet-viskeuze Orr-Sommerfeld vergelijking voor logaritmisch snelheidsprofiel.

We gaan uit van de onderstaande differentiaalvergelijking voor de stroomfunktie ϕ :

$$w\left(\frac{d^2\phi}{dz^2}-\phi\right)-\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)\phi=0 \qquad (z_0<z<z_M) \qquad (2.126)$$

De randvoorwaarden zijn:

$$\phi_0 = w_0 \qquad (z=z_0) \qquad (2.127a)$$

$$\phi = 0 \qquad (z=z_M) \qquad (2.127b)$$

Daarbij geeft $z=z_0$ de coördinaat van de buiswand en $z=z_M$ de coördinaat van de as van de buis.
De oplossing zal nu bepaald worden voor het volgende logarithmische snelheidsprofiel:

$$U(Y) = U_1 \log(Y/Y_0) \qquad (2.128)$$

Nu wordt overgegaan op de dimensieloze variabelen z en w, die bepaald worden door de volgende transformaties:

$$z = k\cdot Y \qquad (2.129a)$$

$$U(Y) - c = U_1 w(z) \qquad (2.129b)$$

Voor w kan dan ook geschreven worden:

$$w(z) = \log(z/z_0) - c/U_1 \qquad (2.130a)$$

$$w(z) = \log(z/z_c) \qquad (2.130b)$$

waarbij geldt dat $w(z_c)=0$ en z_c wordt bepaald door:

$$z_c = z_0 e^{c/U_1} = k\cdot Y_0 e^{c/U_1} \qquad (2.131)$$

Voor $z=z_0$ (of $y=y_0$) geldt $U(y)=0$. Dit is in dimensieloze variabelen te schrijven als:

$$w(z_0) = w_0 = -c/U_1 \qquad (2.132)$$

De differentiaalvergelijking voor ϕ kan dan ook als volgt worden geschreven:

$$\log(z/z_c)\left(\frac{d^2\phi}{dz^2}-\phi\right) + \frac{1}{z^2}\phi = 0 \qquad (2.133)$$

$$\log(z/z_c)\frac{d^2\phi}{dz^2} + \left(\frac{1}{z^2} - \log(z/z_c)\right)\phi = 0 \qquad (2.134)$$

Er ontstaat dan een singulariteit voor $z=z_c$ ($w=0$). Om de berekening wat te vergemakkelijken wordt nu overgegaan van de z-coördinaat op s-coördinaat volgens:

$$z - z_c = s \qquad \text{of} \qquad z = s + z_c \tag{2.135}$$

Zodat nu de singulariteit verschijnt voor $s=0$. De differentiaalvergelijking geschreven in s wordt dan als volgt:

$$\log(1+\frac{s}{z_c})\frac{d^2\phi}{ds^2}+[\frac{1}{(z_c+s)^2}-\log(1+\frac{s}{z_c})]\phi=0 \tag{2.136}$$

Of na vermenigvuldiging met $(z_c+s)^2$:

$$L\phi = (z_c+s)^2\log(1+\frac{s}{z_c})\frac{d^2\phi}{ds^2}+[1-(z_c+s)^2\log(1+\frac{s}{z_c})]\phi=0 \tag{2.137}$$

Hierdoor is tevens de operatot L bepaald. Indien we nu de funkties Q en R invoeren volgens:

$$Q=(z_c+s)^2\log(1+\frac{s}{z_c}) \tag{2.138}$$

$$R = 1-(z_c+s)^2\log(1+\frac{s}{z_c}) \tag{2.139}$$

dan is de differentiaalvergelijking kort samen te vatten als:

$$L\phi = Q\phi'' + R\phi = 0 \tag{2.140}$$

Om de numerieke procedure te kunnen starten hebben we twee lineair onafhankelijke reeksontwikkelingen nodig om weg te komen van de singulariteit. De eerste, analytische oplossing verkrijgen we als volgt:

Stel ϕ_1 is te schrijven als volgt:

$$\phi_1 = a_0+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+a_4s^4+a_5s^5+\ldots+a_ns^n+\ldots \tag{2.141}$$

Zodat we dan voor de tweede afgeleide kunnen schrijven:

$$\phi_1'' = 2a_2+6a_3s+12a_4s^2+20a_5s^3+30a_6s^4+\ldots \tag{2.142}$$

We merken op dat:

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \qquad |x|<1 \tag{2.143}$$

Substitutie van (2.141), (2.142) en (2.143) in de differentiaalvergelijking levert de volgende betrekking op:

$$(z_c^2+2z_cs+s^2)(\frac{s}{z_c}-\frac{s^2}{2z_c^2}+\frac{s^3}{3z_c^3}-\frac{s^4}{4z_c^4}+\ldots)(2a_2+6a_3s+12a_4s^2+20a_5s^3+\ldots)+$$
$$+\left[1-(z_c^2+2z_cs+s^2)(\frac{s}{z_c}-\frac{s^2}{2z_c^2}+\frac{s^3}{3z_c^3}-\frac{s^4}{4z_c^4}+\ldots)\right](a_0+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+\ldots)=0 \tag{2.144}$$

Dit moet gelden voor alle $s<\delta$ zodat alle coëfficiënten voor respektievelijk s^0, s^1, s^2, ... alle nul moeten zijn. Dit levert de volgende vergelijkingen op:

$$s^0: \quad a_0 = 0 \tag{2.145a}$$

$$s^1: \quad 2a_2 z_c - a_0 z_c + a_1 = 0 \tag{2.145b}$$

$$s^2: \quad 3a_2 + 6a_3 z_c - \tfrac{3}{2} a_0 - z_c a_1 + a_2 = 0 \tag{2.145c}$$

$$s^3: \quad \frac{2}{3z_c} a_2 + 9a_3 + 12 a_4 z_c - \frac{1}{3z_c} a_0 - \frac{3}{2} a_1 - z_c a_2 + a_3 = 0 \tag{2.145d}$$

$$s^4: \quad -\frac{1}{6z_c^2} a_2 + \frac{2}{z_c} a_3 + 18 a_4 + 20 a_5 z_c + \frac{1}{12 z_c^2} a_0 - \frac{1}{3z_c} a_1 - \frac{3}{2} a_2 - z_c a_3 + a_4 = 0 \tag{2.145e}$$

... etc.

Uit (2.145a) volgt: $a_0=0$. Indien we nu $a_1=1$ nemen dan volgt uit (2.145b) dat $a_2 = -\frac{1}{2z_c}$. Uit (2.145c) volgt dan a_3. Op deze manier worden respektievelijk a_4 en a_5 gevonden. De volgende waarden worden dan gevonden voor de coëfficiënten van de machtreeks:

$$a_0 = 0 \tag{2.146a}$$

$$a_1 = 1 \tag{2.146b}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2z_c} \tag{2.146c}$$

$$a_3 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3z_c^2} \tag{2.146d}$$

$$a_4 = -\frac{1}{18z_c} - \frac{1}{4z_c^3} \tag{2.146e}$$

$$a_5 = \frac{1}{120} + \frac{23}{720 z_c^2} + \frac{1}{5z_c^4} \tag{2.146f}$$

We hebben dus de volgende reeksontwikkeling gevonden voor ϕ_1:

$$\phi_1 = s - \frac{1}{2z_c} s^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3z_c^2}\right) s^3 + \left(-\frac{1}{18z_c} - \frac{1}{4z_c^3}\right) s^4 + \left(\frac{1}{120} + \frac{23}{720 z_c^2} + \frac{1}{5z_c^4}\right) s^5 + \dots \tag{2.147}$$

waarbij de reeks zó genormaliseerd is dat $\phi_1 \to s$ als $s \to 0$.

Om de tweede reeks te vinden maken we gebruik van de volgende veronderstelling in verband met het logarithmische vertakkingspunt:

$$\phi_2 = \phi_1 \log(s) + \phi_3 \qquad (2.148)$$

Door differentiëren vinden we de eerste en tweede afgeleide:

$$\frac{d\phi_2}{ds} = \frac{d\phi_1}{ds}\log(s) + \frac{d\phi_3}{ds} + \frac{1}{s}\phi_1 \qquad (2.149)$$

$$\frac{d^2\phi_2}{ds^2} = \frac{d^2\phi_1}{ds^2}\log(s) + \frac{d^2\phi_3}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{d\phi_1}{ds} - \frac{1}{s^2}\phi_1 \qquad (2.150)$$

Indien we dit invullen in de differentiaalvergelijking (2.140) krijgen we:

$$L\phi_2 = Q\phi_2'' + R\phi_2 = 0 \qquad (2.151)$$

$$L\phi_2 = Q\left\{\frac{d^2\phi_1}{ds^2}\log s + \frac{d^2\phi_3}{ds^2} + \frac{2}{s}\frac{d\phi_1}{ds} - \frac{1}{s^2}\phi_1\right\} + R\{\phi_1 \log s + \phi_3\} = 0 \qquad (2.152)$$

$$L\phi_2 = \log s\left\{Q\frac{d^2\phi_1}{ds^2} + R\phi_1\right\} + \left\{Q\frac{d^2\phi_3}{ds^2} + R\phi_3\right\} + Q\left\{\frac{2}{s}\frac{d\phi_1}{ds} - \frac{1}{s^2}\phi_1\right\} = 0 \qquad (2.153)$$

$$\log s \cdot L\phi_1 + L\phi_3 = -Q\left\{\frac{2}{s}\frac{d\phi_1}{ds} - \frac{1}{s^2}\phi_1\right\} \qquad (2.154)$$

Aangezien $L\phi_1 = 0$ wordt dit:

$$L\phi_3 = -Q\left\{\frac{2}{s}\frac{d\phi_1}{ds} - \frac{1}{s^2}\phi_1\right\} \qquad (2.155)$$

Stel dat ϕ_3 geschreven kan worden als:

$$\phi_3 = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 + b_5 s^5 + \ldots + b_n s^n + \ldots \qquad (2.156)$$

Voor de tweede afgeleide wordt dan gevonden:

$$\phi_3'' = 2b_2 + 6b_3 s + 12b_4 s^2 + 20b_5 s^3 + 30b_6 s^4 + \ldots \qquad (2.157)$$

Voor ϕ_1 hadden we reeds gevonden:

$$\phi_1 = s - \frac{1}{2z_c}s^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3z_c^2}\right)s^3 + \left(-\frac{1}{18z_c} - \frac{1}{4z_c^3}\right)s^4 + \left(\frac{1}{120} + \frac{23}{720z_c^2} + \frac{1}{5z_c^4}\right)s^5 + \ldots \qquad (2.158)$$

Zodat we vinden voor ϕ_1':

$$\phi_1' = 1 - \frac{1}{z_c}s + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{z_c^2}\right)s^2 - \left(\frac{2}{9z_c} + \frac{1}{z_c^3}\right)s^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{144z_c^2} + \frac{1}{z_c^4}\right)s^4 + \ldots \qquad (2.159)$$

Voor de inhomogene differentiaalvergelijking (2.155) kan dan geschreven worden:

$$\begin{aligned}
&(z_c^2 + 2z_c s + s^2)\left(\frac{s}{z_c} - \frac{s^2}{2z_c^2} + \frac{s^3}{3z_c^3} - \frac{s^4}{4z_c^4} + \ldots\right)(2b_2 + 6b_3 s + 12b_4 s^2 + 20b_5 s^3 + \ldots) + \\
&+\left[1 - (z_c^2 + 2z_c s + s^2)\left(\frac{s}{z_c} - \frac{s^2}{2z_c^2} + \frac{s^3}{3z_c^3} - \frac{s^4}{4z_c^4} + \ldots\right)\right](b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 + \ldots) + \qquad (2.160)\\
&+(z_c^2 + 2z_c s + s^2)\left(\frac{s}{z_c} - \frac{s^2}{2z_c^2} + \frac{s^3}{3z_c^3} - \frac{s^4}{4z_c^4} + \ldots\right) * \left\{\frac{2}{s} * \left[1 - \frac{1}{z_c}s + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{z_c^2}\right)s^2 - \left(\frac{2}{9z_c} + \frac{1}{z_c^3}\right)s^3 + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{144z_c^2} + \frac{1}{z_c^4}\right)s^4 + \ldots\right] + \right.\\
&\left. -\frac{1}{s^2}\left[s - \frac{1}{2z_c}s^2 + \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3z_c^2}\right)s^3 - \left(\frac{1}{18z_c} + \frac{1}{4z_c^3}\right)s^4 + \left(\frac{1}{120} + \frac{23}{720z_c^2} + \frac{1}{5z_c^4}\right)s^5 + \ldots\right]\right\} = 0
\end{aligned}$$

De voorwaarde dat alle coëfficiënten voor s^0, s^1, s^2, etc. alle nul moeten zijn levert de volgende vergelijkingen op:

$$s^0: \quad b_0 + 2z_c - z_c = 0 \tag{2.161a}$$

$$s^1: \quad 2z_c b_2 - z_c b_0 + b_1 + 3 - 2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 0 \tag{2.161b}$$

$$s^2: \quad 2b_2 + 6z_c b_3 - \frac{3}{2} b_0 - z_c b_1 + b_2 + \frac{2}{3z_c} - \frac{3}{z_c} + z_c + \frac{2}{z_c} - \frac{1}{3z_c} + \frac{3}{4z_c} - \frac{1}{6} z_c - \frac{1}{3z_c} = 0 \tag{2.161c}$$

$$s^3: \quad \frac{2}{3z_c} b_2 + 9b_3 + 12z_c b_4 - \frac{1}{3z_c} b_0 - \frac{3}{2} b_1 - z_c b_2 + b_3 - \frac{1}{6z_c^2} - \frac{2}{3z_c^2} + \frac{3}{2} + \frac{3}{2z_c^2} - \frac{4}{9} - \frac{2}{z_c^2} + \frac{1}{12z_c^2} + \frac{1}{6z_c^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2z_c^2} + \frac{1}{18} + \frac{1}{4z_c^2} = 0 \tag{2.161d}$$

... etc.

Uit (2.161a) volgt onmiddelijk dat $b_0 = -z_c$. We kunnen b_1 vrij kiezen. Neem dan $b_1 = 0$, zodat ϕ_3 geen veelvoud van ϕ_1 bevat. Uit de andere vergelijkingen (2.161) zijn b_2, b_3 en b_4 te berekenen. Dit levert dan op:

$$b_0 = -z_c \tag{2.162a}$$

$$b_1 = 0 \tag{2.162b}$$

$$b_2 = -\frac{z_c}{2} \tag{2.162c}$$

$$b_3 = -\frac{1}{18} + \frac{1}{24z_c^2} \tag{2.162d}$$

$$b_4 = -\frac{z_c}{24} - \frac{11}{432z_c} - \frac{7}{144z_c^3} \tag{2.162e}$$

Dit alles resulteert in de volgende reeksontwikkeling voor ϕ_3:

$$\phi_3 = -z_c - \frac{z_c}{2} s^2 + \left(-\frac{1}{18} + \frac{1}{24z_c^2}\right) s^3 - \left(\frac{z_c}{24} + \frac{11}{432z_c} + \frac{7}{144z_c^3}\right) s^4 + \dots \tag{2.163}$$

Nu kan de numerieke integratie worden gestart. Van de reeksontwikkelingen voor ϕ_1 en ϕ_3 verkrijgen we de waarden voor ϕ_1 en ϕ_3 en de waarde van hun afgeleide in twee punten $\pm \bar{s}$, voldoende ver verwijderd van de singulariteit. De gebruikte numerieke integratie-methode is die van Runge-Kutta.

Met de gevonden waarden voor $\phi_1(s_0)$, $\phi_1'(s_0)$, $\phi_3(s_0)$, $\phi_3'(s_0)$, $\phi_1(s_M)$ en $\phi_3(s_M)$ kunnen dan vervolgens α en β berekend worden. Volgens (2.31) worden deze bepaald door:

$$\alpha + i\beta = w_0\left(\frac{d\phi}{dz} - \frac{dw}{dz}\right)_0 \tag{2.31}$$

De eerste term hiervan is dan gelijk aan:

$$w_0\left(\frac{d\phi}{dz}\right)_0 = \frac{R}{D} - \frac{I}{D}i \tag{2.164}$$

waarbij R, I en D bepaald worden op dezelfde wijze zoals dit aangegeven is bij het parabolische snelheidsprofiel door de stappen A tot en met I.
Bij de berekening zijn we hier uitgegaan van het volgende snelheisprofiel:

$$w = \log(z/z_c) \tag{2.165}$$

zodat we vinden voor $\frac{dw}{dz}$:

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z} \tag{2.166}$$

zodat de tweede term dan wordt:

$$-w_0\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 = -\frac{w_0}{z_0} \tag{2.167}$$

Hierin wordt z_0 bepaald door het snelheidsprofiel. Immers voor $z=z_0$ moet gelden $w=w_0$, zodat:

$$w_0 = \log(z_0/z_c) \tag{2.168}$$

Zodoende mogen we ook voor z_0 schrijven:

$$z_0 = z_c e^{w_0} \tag{2.169}$$

En de tweede term uit (2.31) is dan gelijk aan:

$$-w_0\left(\frac{dw}{dz}\right)_0 = -w_0/(z_c e^{w_0}) \tag{2.170}$$

Voor α en β moet dan gelden (2.32) met daarin ingevuld de gevonden waarden voor het rechter lid (2.164) en (2.170):

$$\alpha + \beta i = \frac{R}{D} - \frac{I}{D} i - w_0 / (z_c e^{w_0}) \qquad (2.171)$$

Zodat dus moet gelden:

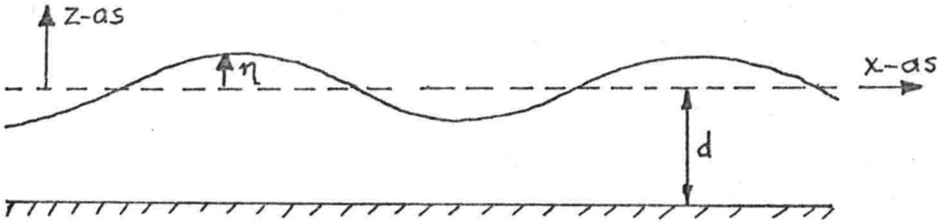
$$\alpha = \frac{R}{D} - w_0 / (z_c e^{w_0}) \qquad (2.172a)$$

$$\beta = -\frac{I}{D} \qquad (2.172b)$$

3. Beweging van de afzetting.

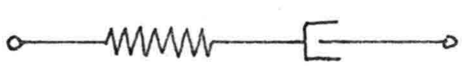
3.1 Inleiding visko-elastisch model.

We veronderstellen het materiaal niet-samendrukbaar. Tevens wordt het model 2-dimensionaal opgezet, daar het anders te gekompliceerd zou worden. Deze laatste veronderstelling is wel gerechtvaardigd omdat de laagdikte klein is ten opzichte van de buisdiameter.



figuur 3.1 Afzetting met de aangebrachte assenstelsels.

We beschouwen een mootje waarop de spanningen σ_X, σ_Y en σ_Z werken. Als positieve spanning nemen we de trekspanning. De bijbehorende ververvormingen zijn dan respektievelijk ε_X, ε_Y en ε_Z. We gebruiken het geschematiseerde model uit figuur 3.2 om het verband tussen spanningen en vervormingen te krijgen.



figuur 3.2 Schematische voorstelling van een visko-elastisch materiaal.

De spanningen en vervormingen behorende bij het elastische deel duiden we aan met het onderschrift „e" en de spanningen en vervormingen behorende bij het viskeuze deel met het onderschrift „v".

Voor de totale spanningen en vervormingen vinden we dan de volgende betrekkingen:

$$\sigma = \sigma_e = \sigma_v \qquad \tau = \tau_e = \tau_v \qquad (3.1a,b)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_v \qquad \gamma = \gamma_e + \gamma_v \qquad (3.2a,b)$$

3.2 Elastisch deel.

Voor het elastische deel van het model geldt dat de vervormingen evenredig zijn met de spanningen. Algemeen geldt:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \qquad (3.3a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \qquad (3.3b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \qquad (3.3c)$$

We beschouwen een 2-dimensionaal geval dus: $\varepsilon_y = 0$:

$$\sigma_y = \nu(\sigma_x + \sigma_z) \qquad (3.4)$$

Aangezien we het materiaal als onsamendrukbaar beschouwen moet $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0$ zodat bij eindige E: $\nu = \frac{1}{2}$

$$\sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) \qquad (3.5)$$

Zodat we nu voor ε_x en ε_z kunnen schrijven:

$$\varepsilon_x = \frac{3}{4E}(\sigma_x - \sigma_z) \qquad (3.6a)$$

$$\varepsilon_z = \frac{3}{4E}(\sigma_z - \sigma_x) \qquad (3.6b)$$

Als we nu u en w definiëren als de snelheden in respektievelijk x- en z-richting, dan is:

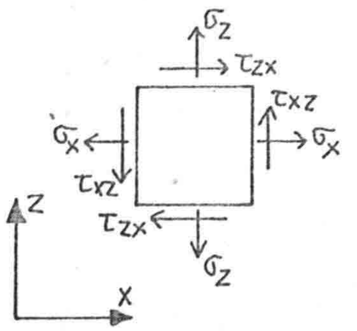
$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad (3.7a)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad (3.7b)$$

Met $\mu_e = G = \frac{E}{3}$ kunnen we dan schrijven:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\mu_e}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_x - \sigma_z) \qquad (3.8a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\mu_e}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_z - \sigma_x) \qquad (3.8b)$$



figuur 3.3 Definitie van de spanningen in het materiaal.

De schuifspanningen moeten voldoen aan:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = G \cdot \gamma_{xz} \tag{3.9}$$

Het verband tussen γ_{xz} en u en w is de volgende:

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.10}$$

Zodat we voor het verband tussen τ_{xz} en u en w het volgende kunnen stellen:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \tag{3.11}$$

of ook: $$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mu_e} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} \tag{3.12}$$

3.3 Viskeus deel.

Voor het viskeuze deel geldt dat de vervormingssnelheden evenredig zijn met de spanningen. Om met de schuifspanningen te beginnen:

$$\tau_{xz} = \mu_v \cdot \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} \tag{3.13}$$

Met behulp van (3.10) kunnen we nu het verband tussen de schuifspanning en de snelheden van de deeltjes vinden:

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mu_v} \tau_{xz} \tag{3.14}$$

Op analoge wijze als bij het elastisch deel wordt gevonden:

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{1}{4\mu_v} (\sigma_x - \sigma_z) \tag{3.15a}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \frac{1}{4\mu_v} (\sigma_z - \sigma_x) \tag{3.15b}$$

Dit is met behulp van (2.7a,b) ook te schrijven als:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\mu_v}(\sigma_x - \sigma_z) \tag{2.16a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\mu_v}(\sigma_z - \sigma_x) \tag{2.16b}$$

3.4 Samenvoegen van elastisch en viskeus deel.

Volgens (3.1a,b) moeten de spanningen in het elastische en in het viskeuze deel gelijk zijn aan elkaar. Dit kan worden geschreven als:

$$\sigma_x = (\sigma_x)_e = (\sigma_x)_v \tag{3.17a}$$

$$\sigma_z = (\sigma_z)_e = (\sigma_z)_v \tag{3.17b}$$

$$\tau_{xz} = (\tau_{xz})_e = (\tau_{xz})_v \tag{3.17c}$$

Volgens (3.2a,b) zijn de totale vervormingen gelijk aan de som van de vervormingen van het elastisch en het viskeus deel. Hieruit volgt dat ook de totale vervormingssnelheden gelijk zijn aan de som van de vervormingssnelheden van elastisch en viskeus deel:

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}\right)_e + \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}\right)_v \tag{3.18a}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}\right)_e + \left(\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}\right)_v \tag{3.18b}$$

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial t}\right)_e + \left(\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial t}\right)_v \tag{3.18c}$$

Met behulp van de snelheden van de deeltjes kan dit ook geschreven worden als:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_v \tag{3.19a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_e + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_v \tag{3.19b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_e + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_v \tag{3.19c}$$

Tevens geldt de massabalansvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.20}$$

Met behulp van (3.8a) en (3.16a) wordt dan de volgende uitdrukking gevonden:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\mu_e}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_x - \sigma_z) + \frac{1}{4\mu_e}(\sigma_x - \sigma_z) \qquad (3.21)$$

Dit kan worden geschreven op een wat overzichtelijker manier als we een nieuwe (afhankelijke) variabele p invoeren volgens:

$$\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) = p \qquad (3.22)$$

Dan kan voor (2.21) worden geschreven:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{1}{2\mu_e}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_V}\right)(p + \sigma_x) = \theta(p + \sigma_x) \qquad (3.23)$$

Daarbij is tevens operator θ ingevoerd, die gedefinieerd is door:

$$\theta(\xi) = \left(\frac{1}{2\mu_e}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_V}\right)\cdot\xi \qquad (3.24)$$

Uit (2.23) kan dan een uitdrukking worden afgeleid voor :

$$\sigma_x = -p + \theta^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad (3.25)$$

waarin θ^{-1} de inverse operator is van θ:

$$\theta^{-1}(\theta(\xi)) = \xi \qquad (3.26)$$

Op analoge wijze wordt eenzelfde soort uitdrukking afgeleid voor σ_z. Met behulp van (3.8b) en (3.16b) kan geschreven worden voor (3.19b):

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\mu_e}\frac{\partial}{\partial t}(\sigma_x - \sigma_z) + \frac{1}{4\mu_V}(\sigma_x - \sigma_z) \qquad (3.27)$$

Dit is ook te schrijven als:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{1}{2\mu_e}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_V}\right)(p + \sigma_z) = \theta(p + \sigma_z) \qquad (3.28)$$

zodat voor σ_z de volgende uitdrukking gevonden wordt:

$$\sigma_z = -p + \theta^{-1}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \qquad (3.29)$$

Op dezelfde wijze kan voor (3.19c) geschreven worden met behulp van (3.12) en (3.14):

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mu_e}\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_V}\tau_{xz} \qquad (3.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 2\left(\frac{1}{2\mu_e}\cdot\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_V}\right)\cdot\tau_{xz} = 2\,\theta(\tau_{xz}) \qquad (3.31)$$

Zodoende wordt de volgende uitdrukking voor de schuifspanning gevonden:

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2}\,\theta^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{3.32}$$

De algemene bewegingsvergelijkingen voor een 2-dimensionaal geval worden gegeven door de onderstaande vergelijkingen:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial x}u^2 + \rho\frac{\partial}{\partial z}(uw) - \frac{\partial}{\partial x}\sigma_x - \frac{\partial}{\partial z}\tau_{xz} = k_x \tag{3.33a}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial x}(uw) + \rho\frac{\partial}{\partial z}w^2 - \frac{\partial}{\partial x}\tau_{xz} - \frac{\partial}{\partial z}\sigma_y = k_y \tag{3.33b}$$

en de massabalansvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.33c}$$

Indien we in (3.33a,b) de gevonden uitdrukkingen voor σ_x, σ_z en $\tau_{xz}=\tau_{zx}$ substitueren dan levert dit het volgende stelsel vergelijkingen op:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial x}u^2 + \rho\frac{\partial}{\partial z}(uw) + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\theta^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\theta^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = k_x \tag{3.34a}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial x}(uw) + \rho\frac{\partial}{\partial z}w^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\theta^{-1}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\theta^{-1}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) = k_y \tag{3.34b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.34c}$$

Dit kan nog verder worden uiteengerafeld als we bedenken dat θ^{-1} een lineaire operator is:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial x}u^2 + \rho\frac{\partial}{\partial z}(uw) + \frac{\partial p}{\partial x} - \theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) = k_x \tag{3.35a}$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t} + \rho\frac{\partial}{\partial x}(uw) + \rho\frac{\partial}{\partial z}w^2 - \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\right) - \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial p}{\partial z} - \theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) = k_y \tag{3.35b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.35c}$$

De horizontale snelheid is opgebouwd te denken uit een komponent $\bar{u}$, die ontstaat door het middelen over een langere tijd (lang ten opzichte van de trillingstijd van de verstoring in het grensvlak) en uit een komponent u' ten gevolge van de verstoring in het grensvlak. Op dezelfde manier kunnen we de vertikale snelheid en de druk splitsen. In formule-vorm kan dit worden geschreven worden als weergegeven in (3.36a,b,c).

$$u = \bar{u} + u' \qquad (3.36a)$$

$$w = \bar{w} + w' \qquad (3.36b)$$

$$p = \bar{p} + p' \qquad (3.36c)$$

De komponenten $\bar{u}$, $\bar{w}$ en $\bar{p}$ bepalen het stroombeeld, indien geen verstoring in het grensvlak aanwezig is. Deze beweging wordt aangeduid als de hoofdstroom. De variaties in deze beweging worden perturbaties genoemd.
Daarbij wordt opgemerkt dat de vertikale snelheid van de hoofdstroom nul is:

$$\bar{w} = 0 \qquad (3.36d)$$

De hoofdstroom moet voldoen aan de vergelijkingen (3.35) dus:

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \bar{u}^2 + \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right) = 0 \qquad (3.37a)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x \partial z}\right) = -\rho g \qquad (3.37b)$$

En aangezien de beweging van de hoofdstroom eenparig is, moet dus gelden:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = 0 \qquad (3.37c)$$

Nu kunnen de vergelijkingen (3.37a,b) afgetrokken worden van de vergelijkingen (3.35a,b), nadat hierin de veronderstellingen (3.36) en (3.37c) in zijn gesubstitueerd.
Het volgende stelsel vergelijkingen wordt dan verkregen:

$$\rho \frac{\partial u'}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x} u'^2 + 2\rho \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}u') + \rho \frac{\partial}{\partial z} u'w' + \rho \frac{\partial}{\partial z} \bar{u}w' + \frac{\partial p'}{\partial x} - \theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\right) - \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2}\right) - \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z}\right) = 0 \qquad (3.38a)$$

$$\rho \frac{\partial w'}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x}(u'w') + \rho \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}w') + \rho \frac{\partial}{\partial z} w'^2 + \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial z}\right) - \frac{1}{2}\theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2}\right) - \theta^{-1}\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\right) = 0 \qquad (3.38b)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \qquad (3.38c)$$

Om deze vergelijkingen op te lossen moeten er nog een aantal vereenvoudigingen worden uitgevoerd. De eerste aanname is dat de variaties in de snelheid klein zijn ten opzichte van de snelheid van de hoofdstroom, dus:

$$u' \ll \bar{u} \tag{3.39a}$$

$$w' \ll \bar{u} \tag{3.39b}$$

De vergelijkingen zijn dan al vereenvoudigd tot de volgende gedaante:

$$\rho \frac{\partial u'}{\partial t} + 2\rho\bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + \rho\bar{u}\frac{\partial w'}{\partial z} - \sigma^{-1}\left\{\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z}\right\} = -\frac{\partial p'}{\partial x} \tag{3.40a}$$

$$\rho \frac{\partial w'}{\partial t} + \rho\bar{u}\frac{\partial w'}{\partial x} - \sigma^{-1}\left\{\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial z}\right\} = -\frac{\partial p'}{\partial z} \tag{3.40b}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \tag{3.40c}$$

Uit (3.40c) kunnen we afleiden dat:

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} \tag{3.41a}$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \tag{3.41b}$$

Zodat (3.40) daarmee vereenvoudigd kan worden. Teneinde de oplossing van deze vergelijkingen te vergemakkelijken wordt aangenomen dat de niet-lineaire termen te verwaarlozen zijn. Achteraf zal moeten worden nagegaan of hieraan voldaan wordt. Door de niet-lineaire termen weg te laten wordt het volgende stelsel differentiaalvergelijkingen verkregen (daarbij worden de accenten weggelaten):

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^{-1}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} = -\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.42a}$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^{-1}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right\} = -\frac{\partial p}{\partial z} \tag{3.42b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3.42c}$$

Het probleem wordt nu opgelost voor de volgende vorm van de verstoring in het grensvlak tussen water en afzetting:

$$\eta = a e^{ik(x-ct)} \tag{3.43}$$

waarin k het golfgetal en c de voortplantingssnelheid is van de verstoring. Alleen het reële deel moet uiteindelijk beschouwd worden. De variabelen u, w en p zullen dezelfde afhankelijkheid van x en t hebben, terwijl ze tevens een funktie van z zijn. Met behulp van scheiding van variabelen zijn u, w en p dan ook te schrijven als:

$$u = \hat{u}(z)\, e^{ik(x-ct)} \tag{3.44a}$$

$$w = \hat{w}(z)\, e^{ik(x-ct)} \tag{3.44b}$$

$$p = \hat{p}(z)\, e^{ik(x-ct)} \tag{3.44c}$$

Daar faseverschuiving ten opzichte van   waarschijnlijk is, zullen de amplitudes $\hat{u}$, $\hat{w}$ en $\hat{p}$ in het algemeen ook een imaginair deel bevatten. Substitutie van (2.44) in de vergelijkingen (3.42) levert het volgende stelsel vergelijkingen:

$$-ik\hat{p} + \tfrac{1}{2}\theta^{-1}\left(-k^2\hat{u} + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}\right) = -ipkc\hat{u} \tag{3.45a}$$

$$-\frac{\partial\hat{p}}{\partial z} + \tfrac{1}{2}\theta^{-1}\left(-k^2\hat{w} + \frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2}\right) = -ipkc\hat{w} \tag{3.45b}$$

$$ik\hat{u} + \frac{\partial\hat{w}}{\partial z} = 0 \tag{3.45c}$$

Het is nu ook mogelijk wat meer te zeggen over de operator θ^{-1}. Indien ξ dezelfde afhankelijkheid van t heeft als η dan kunnen we voor θ schrijven:

$$\theta(\xi) = \left(\frac{1}{2\mu_e}\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2\mu_v}\right)\cdot\xi \tag{3.24}$$

$$\theta(\xi) = \left(-\frac{ikc}{2\mu_e} + \frac{1}{2\mu_v}\right)\cdot\xi \tag{3.46}$$

$$\theta(\xi) = \frac{\mu_e - ikc\mu_v}{2\mu_e\mu_v} * \xi \tag{3.47}$$

Voor de inverse operator moet gelden dat $\mathcal{O}^{-1}(\mathcal{O}(\xi))=\xi$,

zodat:

$$\mathcal{O}^{-1}(\xi) = \frac{2\mu_e\mu_v}{\mu_e - ikc\,\mu_v}\cdot\xi \tag{3.48}$$

Om de verder berekening wat overzichtelijker te maken wordt een faktor α ingevoerd die gedefinieerd wordt door:

$$\alpha = \frac{\mu_e\mu_v}{\mu_e - ikc\mu_v} \tag{3.49}$$

Het stelsel vergelijkingen (3.45) is dan nu ook te schrijven als:

$$-ik\hat{p} - \alpha k^2\hat{u} + \alpha\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2} = -i\rho kc\hat{u} \tag{3.50a}$$

$$-\frac{\partial\hat{p}}{\partial z} - \alpha k^2\hat{w} + \alpha\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2} = -i\rho kc\hat{w} \tag{3.50b}$$

$$ik\hat{u} + \frac{\partial\hat{w}}{\partial z} = 0 \tag{3.50c}$$

Met (3.50c) kan $\hat{u}$ worden uitgedrukt in $\hat{w}$:

$$\hat{u} = \frac{i}{k}\frac{\partial\hat{w}}{\partial z} \tag{3.51}$$

Met behulp van (3.51) wordt $\hat{u}$ geëlimineerd uit (3.50a,b), waarna uit deze vergelijkingen $\hat{p}$ geëlimineerd wordt. Dit resulteert in de volgende vergelijking:

$$\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial z^4} - \left(2k^2 - i\frac{\rho kc}{\alpha}\right)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2} - \left(i\frac{\rho k^3c}{\alpha} - k^4\right)\hat{w} = 0 \tag{3.52}$$

Om de algemene oplossing van deze vierde orde differentiaalvergelijking te vinden splitsen we deze in twee tweede orde vergelijkingen. Dit wordt aanzienlijk overzichtelijker indien we een faktor β invoeren, die gedefiniëerd wordt door:

$$\beta^2 = 1 - \frac{i\rho c}{k\alpha} \tag{3.53}$$

Zodat nu vergelijking (2.52) geschreven kan worden als:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z} - k^2\beta^2\right)\hat{w} = 0 \tag{3.54}$$

De algemene oplossing hiervan is:

$$\boxed{\hat{w} = A e^{-kz} + B e^{kz} + C e^{-k\beta z} + D e^{k\beta z}} \qquad (3.55)$$

Met behulp van (2.51) vinden we dan $\hat{u}$:

$$\boxed{\hat{u} = -iAe^{-kz} + iBe^{kz} - i\beta C e^{-k\beta z} + i\beta D e^{k\beta z}} \qquad (3.56)$$

Door invulling van de gevonden uitdrukkingen voor $\hat{u}$ en $\hat{w}$ in de vergelijking (2.50a) wordt de onderstaande uitdrukking gevonden voor $\hat{p}$:

$$\boxed{\hat{p} = -i\rho c A e^{-kz} + i\rho c B e^{kz}} \qquad (3.57)$$

De konstanten A, B, C en D kunnen nu bepaald worden uit de fysische randvoorwaarden. De eerste twee randvoorwaarden worden verkregen door te eisen dat de snelheid aan de wand in beide richtingen nul moet zijn zodat voor $z = -d$ moet gelden $\hat{u}=0$ en $\hat{w}=0$:

$$\underline{A e^{kd} + B e^{-kd} + C e^{k\beta d} + D e^{-k\beta d} = 0} \qquad (3.58)$$

$$\underline{-iA e^{kd} + iB e^{-kd} - i\beta C e^{k\beta d} + i\beta D e^{-k\beta d} = 0} \qquad (3.59)$$

Aan het oppervlak geldt de volgende betrekking:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w - u\frac{\partial \eta}{\partial x} \qquad \text{voor } z = \eta \qquad (3.60)$$

In gelineariseerde vorm wordt dit:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = w \qquad \text{voor } z = 0 \qquad (3.61)$$

We krijgen dan als derde randvoorwaarde:

$$\underline{A + B + C + D = -ikc\,a} \qquad (3.62)$$

De vierde randvoorwaarde krijgen we door evenals Klaassen te veronderstellen dat de schuifspanningsvariatie in het grensvlak te verwaarlozen is.

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 \qquad \text{voor } z = \eta \qquad (3.63)$$

Of in gelineariseerde vorm:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0 \qquad \text{voor } z = 0 \qquad (3.64)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \mu_e\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mu_v \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$= \left(\mu_e + \mu_v \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

Na invullen van de gevonden oplossingen voor u en w wordt dit:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = (\mu_e - ikc\mu_v)(ik\,A e^{-kz} + ik\,B e^{kz} + ik\beta^2 C e^{-k\beta z} + ik\beta^2 D e^{k\beta z} +$$
$$+ ik\,(A e^{-kz} + B e^{kz} + C e^{-k\beta z} + D e^{k\beta z})\,).$$

De randvoorwaarde wordt dan als volgt:

$$\alpha\,(ik\,A + ik\,B + ik\beta^2 C + ik\beta^2 D + ik\,A + ik\,B + ik\,C + ik\,D) = 0$$

$$\underline{2A + 2B + (\beta^2+1)C + (\beta^2+1)D = 0} \qquad (3.65)$$

Om deze vergelijkingen op te lossen worden eerst de konstanten A, B, C en D dimensieloos gemaakt en daarna wordt iedere konstante, die in het algemeen een komplex getal is, gescheiden in een reëel en een imaginair deel. Dit levert op:

$$\frac{A}{akc} = A_1 + i A_2 \qquad (3.66a)$$

$$\frac{B}{akc} = B_1 + i B_2 \qquad (3.66b)$$

$$\frac{C}{akc} = C_1 + i C_2 \qquad (3.66c)$$

$$\frac{D}{akc} = D_1 + i D_2 \qquad (3.66d)$$

Hierin zijn A_1, A_2, ..., D_1 en D_2 reële dimensieloze getallen. Na substitutie van het hierboven gestelde gaan de vier randvoorwaarden (3.58), (3.59), (3.62) en (3.65) over in:

$$e^{kd}(A_1+iA_2) + e^{-kd}(B_1+iB_2) + e^{k\beta d}(C_1+iC_2) + e^{-k\beta d}(D_1+iD_2) = 0 \quad (3.67a)$$

$$-ie^{kd}(A_1+iA_2) + ie^{-kd}(B_1+iB_2) - i\beta e^{k\beta d}(C_1+iC_2) + i\beta e^{-k\beta d}(D_1+iD_2) = 0 \quad (3.67b)$$

$$A_1 + iA_2 + B_1 + iB_2 + C_1 + iC_2 + D_1 + iD_2 = -i \quad (3.67c)$$

$$2(A_1+iA_2) + 2(B_1+iB_2) + (\beta^2+1)(C_1+iC_2) + (\beta^2+1)(D_1+iD_2) = 0 \quad (3.67d)$$

Voorts wordt om de vorige vergelijkingen verder uit te werken de faktor β nog wat nader bezien.

$$\beta^2 = 1 - \frac{i\rho c}{k\alpha} \qquad (3.53)$$

$$\alpha = \frac{\mu_e \mu_v}{\mu_e - ikc\mu_v} \qquad (3.49)$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{\rho c}{k} i \cdot \frac{\mu_e - ikc\mu_v}{\mu_e \mu_v} = \left(1 - \frac{\rho c^2}{\mu_e}\right) - \left(\frac{\rho c}{k\mu_v}\right) i \qquad (3.68a)$$

Stel dat:

$$re(\beta^2) = m = 1 - \frac{\rho c^2}{k\mu_v} \qquad (3.68b)$$

$$im(\beta^2) = n = -\frac{\rho c}{k\mu_v} \qquad (3.68c)$$

Nu is: modulus $(\beta) = \sqrt{\text{modulus } (\beta^2)}$

en: argument $(\beta) = \frac{1}{2}$ argument $(\beta^2) + k \cdot \pi$

zodat we nu kunnen stellen dat:

$$mod(\beta) = \sqrt[4]{m^2 + n^2} \qquad (3.69)$$

We kiezen arg (β) zodanig dat β een positief reëel deel heeft, zodat we kunnen schrijven voor arg (β):

$$m > 0 \quad : arg(\beta) = \tfrac{1}{2} \arctan(n/m) \qquad (3.70a)$$

$$m < 0 \text{ en } n > 0 : arg(\beta) = \tfrac{1}{2} \arctan(n/m) + \tfrac{\pi}{2} \qquad (3.70b)$$

$$m < 0 \text{ en } n < 0 : arg(\beta) = \tfrac{1}{2} \arctan(n/m) - \tfrac{\pi}{2} \qquad (3.70c)$$

zodat we nu β kunnen schrijven als:

$$\beta = \beta_1 + i\beta_2 \qquad (3.71)$$

waarin β_1 en β_2 reële getetallen zijn waarbij geldt dat:

$$\beta_1 = mod(\beta) \cdot \cos[arg(\beta)] \qquad (3.72a)$$

$$\beta_2 = mod(\beta) \cdot \sin[arg(\beta)] \qquad (3.72b)$$

Voorts kunnen we schrijven:

$$e^{k\beta d} = e^{kd(\beta_1 + i\beta_2)} = e^{\beta_1 kd}[\cos(\beta_2 kd) + i \sin(\beta_2 kd)] \qquad (3.73a)$$

$$e^{-k\beta d} = e^{-kd(\beta_1 + i\beta_2)} = e^{-\beta_1 kd}[\cos(\beta_2 kd) - i \sin(\beta_2 kd)] \qquad (3.73b)$$

Terwijl we kunnen schrijven voor (β^2+1):

$$\beta^2+1 = (\beta_1+i\beta_2)^2+1 = \beta_1^2-\beta_2^2+1 + 2\beta_1\beta_2 i \qquad (3.74)$$

Substitutie van (3.71), (3.73) en (3.74) in de vergelijkingen (3.67) levert vier vergelijkingen op, die na splitsing in reële en imaginaire delen overgaan in acht vergelijkingen waaruit de acht onbekenden A_1, A_2, ..., D_1 en D_2 kunnen worden opgelost. Op de volgende pagina zijn deze vergelijkingen in matrix-vorm weergegeven.

$$\begin{bmatrix} e^{kd} & 0 & e^{-kd} & 0 & e^{\beta_1 kd}\cos\beta_2 kd & -e^{\beta_1 kd}\sin\beta_2 kd & e^{-\beta_1 kd}\cos\beta_2 kd & e^{-\beta_1 kd}\sin\beta_2 kd \\ 0 & e^{kd} & 0 & e^{-kd} & e^{\beta_1 kd}\sin\beta_2 kd & e^{\beta_1 kd}\cos\beta_2 kd & -e^{-\beta_1 kd}\sin\beta_2 kd & e^{-\beta_1 kd}\cos\beta_2 kd \\ 0 & e^{kd} & 0 & -e^{-kd} & \begin{matrix} e^{\beta_1 kd}\beta_2\cos\beta_2 kd \\ +e^{\beta_1 kd}\beta_1\sin\beta_2 kd \end{matrix} & \begin{matrix} e^{\beta_1 kd}\beta_1\cos\beta_2 kd \\ -e^{\beta_1 kd}\beta_2\sin\beta_2 kd \end{matrix} & \begin{matrix} -e^{-\beta_1 kd}\beta_2\cos\beta_2 kd \\ +e^{-\beta_1 kd}\beta_1\sin\beta_2 kd \end{matrix} & \begin{matrix} -e^{-\beta_1 kd}\beta_1\cos\beta_2 kd \\ -e^{-\beta_1 kd}\beta_2\sin\beta_2 kd \end{matrix} \\ -e^{kd} & 0 & e^{-kd} & 0 & \begin{matrix} -e^{\beta_1 kd}\beta_1\cos\beta_2 kd \\ +e^{\beta_1 kd}\beta_2\sin\beta_2 kd \end{matrix} & \begin{matrix} e^{\beta_1 kd}\beta_2\cos\beta_2 kd \\ +e^{\beta_1 kd}\beta_1\sin\beta_2 kd \end{matrix} & \begin{matrix} e^{-\beta_1 kd}\beta_1\cos\beta_2 kd \\ +e^{-\beta_1 kd}\beta_2\sin\beta_2 kd \end{matrix} & \begin{matrix} -e^{\beta_1 kd}\beta_2\cos\beta_2 kd \\ +e^{-\beta_1 kd}\beta_1\sin\beta_2 kd \end{matrix} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & \beta_1^2-\beta_2^2+1 & -2\beta_1\beta_2 & \beta_1^2-\beta_2^2+1 & -2\beta_1\beta_2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2\beta_1\beta_2 & \beta_1^2-\beta_2^2+1 & 2\beta_1\beta_2 & \beta_1^2-\beta_2^2+1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \\ C_1 \\ C_2 \\ D_1 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (3.75)$$

Bij gegeven waarden van k, c, d, ρ , μ_e en μ_v kunnen de konstanten A_1, A_2, ..., D_1 en D_2 uit de matrixvergelijking (3.75) worden opgelost.
Dit is gebeurt met behulp van een computer.
Het stelsel vergelijkingen A $\underline{x}=\underline{r}$ is opgelost door matrix A te inverteren zodat $\underline{x}=A^{-1}\underline{r}$, waarin A^{-1} de inverse is van A. Zijn de konstanten A_1, A_2, ..., D_1 en D_2 bekend dan kunnen daarmee de uitdrukkingen voor $\hat{u}$ en $\hat{p}$ gevonden worden:

$$\hat{p} = -i\rho c A e^{-kz} + i\rho c B e^{kz} \tag{3.57}$$

$$= -i\rho c(A_1+iA_2)akc\,e^{-kz} + i\rho c(B_1+iB_2)akc\,e^{kz}$$

$$\hat{p} = \rho c^2 k a (A_2 - iA_1)e^{-kz} + \rho c^2 ka(-B_2+iB_1)e^{kz} \tag{3.76}$$

$$\hat{u} = -iAe^{-kz} + iBe^{kz} - i\beta Ce^{-k\beta z} + i\beta e^{k\beta z} \tag{3.56}$$

$$\hat{u} = akc\{-i(A_1+iA_2)e^{-kz} + i(B_1+iB_2)e^{-kz} + \\ -i(\beta_1+i\beta_2)(C_1+iC_2)e^{-k\beta z} + i(\beta_1+i\beta_2)(D_1+iD_2)e^{k\beta z}\} \tag{3.77}$$

We kunnen schrijven voor de drukspanning in het visko-elastische materiaal:

$$P_{zz} = -\sigma_z = p - \theta^{-1}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{3.78}$$

Dit is met behulp van (3.48) en (3.49) ook te schrijven als:

$$P_{zz} = p - 2\alpha\frac{\partial w}{\partial z} \tag{3.79}$$

Uit (3.45c) volgt dat:

$$\frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = -ik\hat{u} \tag{3.80}$$

We splitsen α in een reëel en een imaginair deel:

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2 \tag{3.81}$$

waarin α_1 en α_2 reële getallen zijn.

Met behulp van (3.49) kunnen we dan afleiden dat:

$$\alpha_1 = \frac{\mu_e^2 \mu_v}{\mu_e^2 + k^2c^2\mu_v^2} \tag{3.82a}$$

$$\alpha_2 = \frac{kc\,\mu_e \mu_v}{\mu_e^2 + k^2c^2\mu_v^2} \tag{3.82b}$$

Nadat we w en p in de vorm van (3.44) hebben geschreven vinden we de volgende uitdrukking voor de normale druk:

$$p_{zz} = \hat{p}\,e^{ik(x-ct)} + 2(\alpha_1 + i\,\alpha_2)\,ik\,\hat{u}\,e^{ik(x-ct)} \tag{3.83a}$$

$$p_{zz} = \{\hat{p} - 2k(\alpha_2 - i\,\alpha_1)\,\hat{u}\}\,e^{ik(x-ct)} \tag{3.83b}$$

Hierin worden de gevonden uitdrukkingen voor $\hat{p}$ en $\hat{u}$ gesubstitueerd:

$$\begin{aligned} p_{zz} = \{&\rho c^2 ka(A_2 - iA_1)e^{-kz} + \rho c^2 ka(-B_2 + iB_1)e^{kz} + \\ &-2k(\alpha_2 - i\alpha_1) * akc * [-i(A_1 + iA_2)e^{-kz} + i(B_1 + iB_2)e^{kz} \\ &-i(\beta_1 + i\beta_2)(C_1 + iC_2)e^{-k\beta z} + i(\beta_1 + i\beta_2)(D_1 + iD_2)e^{k\beta z}]\} * e^{ik(x-ct)} \end{aligned} \tag{3.84}$$

De druk op het grensvlak tussen water en afzetting wordt, in gelineariseerde vorm, gegeven door (3.84) indien we daarin substitueren z=0. Dit levert dan de volgende vergelijking op:

$$\begin{aligned} p_{zz}\Big]_g = \{&\rho akc^2(A_2 - iA_1 - B_2 + iB_1) - 2ak^2c\,(\alpha_2 - i\,\alpha_1) * \\ &*[-i(A_1 + iA_2) + i(B_1 + iB_2) - i(\beta_1 + i\beta_2)(C_1 + iC_2) + \\ &+ i(\beta_1 + i\beta_2)(D_1 + iD_2)]\} * e^{ik(x-ct)} \end{aligned} \tag{3.85}$$

Bovenstaande vergelijking is weinig overzichtelijk, omdat niet zonder meer af te lezen is hoe groot de amplitude van de normale druk is en hoe groot de faseverschuiving is ten opzichte van de oppervlakte-verstoring η. Daarom wordt de vergelijking voor k (x - c t) = 0 gesplitst in een dimensieloos reëel deel RE en imaginair deel IM.

We kunnen dan voor de normale druk schrijven:

$$P_{zz} = \rho a k c^2 \{ RE + i\, IM \} * e^{ik(x-ct)} \tag{3.86}$$

waarin:

$$\begin{aligned} RE = {} & A_2 - B_2 + \frac{2\alpha_1 k}{\rho c} * \{A_1 - B_1 + \beta_1 C_1 - \beta_2 C_2 - \beta_1 D_1 + \beta_2 D_2\} + \\ & + \frac{2\alpha_2 k}{\rho c} * \{-A_2 + B_2 - \beta_2 C_1 - \beta_1 C_2 + \beta_2 D_1 + \beta_1 D_2\}. \end{aligned} \tag{3.87a}$$

$$\begin{aligned} IM = {} & -A_1 + B_1 + \frac{2\alpha_1 k}{\rho c} * \{A_2 - B_2 + \beta_2 C_1 + \beta_1 C_2 - \beta_2 D_1 - \beta_1 D_2\} + \\ & + \frac{2\alpha_2 k}{\rho c} * \{A_1 - B_1 + \beta_1 C_1 - \beta_2 C_2 - \beta_1 D_1 + \beta_2 D_2\}. \end{aligned} \tag{3.87b}$$

De grootte van de amplitude van de normale druk aan het oppervlak wordt dan gegeven door de vergelijking:

$$\hat{P}_{zz} = -\rho a k c^2 \sqrt{RE^2 + IM^2}. \tag{3.88}$$

terwijl de faseverschuiving ten opzichte van de oppervlakte-verstoring gegeven wordt door:

Voor $RE > 0$: $\phi_p = \arctan(IM/RE) + \pi$ (3.89a)

$RE < 0, IM > 0$: $\phi_p = \arctan(IM/RE) + 2\pi$ (3.89b)

$RE < 0, IM < 0$: $\phi_p = \arctan(IM/RE)$ (3.89c)

Omdat alleen het reële deel fysische betekenis heeft wordt de druk aan het oppervlak beschreven door de onderstaande vergelijking:

$$P_{zz} = \hat{P}_{zz} \cos[k(x-ct) + \phi_p] \tag{3.90}$$

Deze vergelijking is nog te herschrijven als:

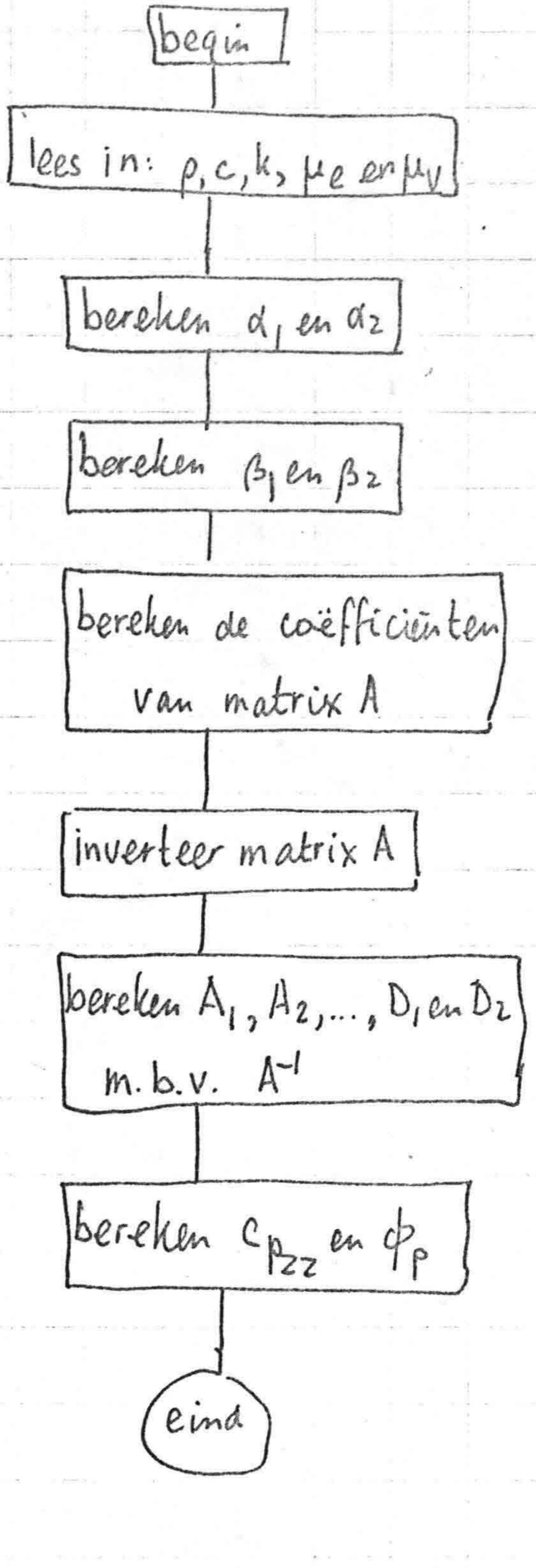
$$P_{zz} = \rho a k c^2 C_{P_{zz}} \cos[k(x-ct) + \phi_p] \tag{3.91}$$

waarin $C_{P_{zz}}$ een dimensieloze faktor is, die bepaald wordt door:

$$C_{P_{zz}} = -\sqrt{RE^2 + IM^2} \tag{3.92}$$

Stroomdiagram voor numerieke berekening van

$c_{p_{zz}}$ en ϕ_p



4. Energie-overdracht.

4.1 Inleiding.

Door het water wordt een zekere hoeveelheid energie overgedragen aan de afzetting. We hebben verondersteld dat dit voornamelijk gebeurt door drukkrachten. De perturbatie-schuifspanning aan het grensvlak is dan ook verwaarloosd. Verondersteld wordt dat de hoeveelheid energie die in de afzetting wordt gedissipeerd gelijk is aan de hoeveelheid arbeid die door de aan het grensvlak werkende krachten wordt verricht.

De hoeveelheid arbeid die het water per eenheid van breedte per tijdje dt en over een lengte dx verricht door de drukkrachten aan het oppervlak van de afzetting is gelijk aan:

$$dE = p_{zz} * (-w) * dx * dt \tag{4.1}$$

waarin w de vertikale snelheid is van de deeltjes aan het oppervlak. Per eenheid van oppervlak en per trillingstijd wordt dit:

$$E = -\int_0^T p_{zz}\, w\, dt \tag{4.2}$$

Voor p_{zz} wordt de volgende uitdrukking ingevuld:

$$p_{zz} = \rho a k c^2 \cdot C_{p_{zz}} \cos[k(x-ct) + \phi_p] \tag{4.3}$$

en voor w kunnen we afleiden dat:

$$w = \frac{d\eta}{dt} = +akc \sin[k(x-ct)] \tag{4.4}$$

Zodat we kunnen schrijven voor de energie-overdracht:

$$E = -\int_0^T C_{p_{zz}} \rho a k c^2 \cos[k(x-ct) + \phi_p] \cdot (akc) \sin[k(x-ct)]$$

$$= -C_{p_{zz}} \rho a^2 k^2 c^3 \Big\{ \int_0^T \cos(k(x-ct)) \cdot \sin(k(x-ct)) \cos\phi_p \, dt + $$

$$- \int_0^T \sin^2(k(x-ct)) \sin\phi_p \, dt \Big\}. \tag{4.5}$$

Integratie van deze uitdrukking over een gehele trillingstijd levert voor het eerste deel van deze vergelijking nul op. Voorts is:

$$\int_0^T \sin^2(k(x-ct))\,dt = +\frac{T}{2}. \qquad (4.6)$$

Hieruit volgt dat door de normale drukkrachten de volgende hoeveelheid energie per oppervlakte-eenheid en per trillingstijd wordt overgedragen door het water aan de afzetting:

$$E = \frac{1}{2} C_{P_{zz}} \rho a^2 k^2 c^3 T \sin\phi_P \qquad (4.7)$$

Dus per tijdseenheid en per eenheid van oppervlak wordt aan de afzetting de volgende hoeveelheid energie toegevoerd:

$$E_1 = E/T = \frac{1}{2} C_{P_{zz}} \rho a^2 k^2 c^3 T \sin\phi_P / T \qquad (4.8)$$

$$E_1 = \frac{1}{2} C_{P_{zz}} \cdot \sin\phi_P \cdot \rho a^2 k^2 c^3 \qquad (4.9)$$

Voorts wordt een dimensieloze coëfficiënt C_{E_1} ingevoerd, welke gedefiniëerd wordt door:

$$C_{E_1} = \frac{1}{2} C_{P_{zz}} \sin\phi_P \qquad (4.10)$$

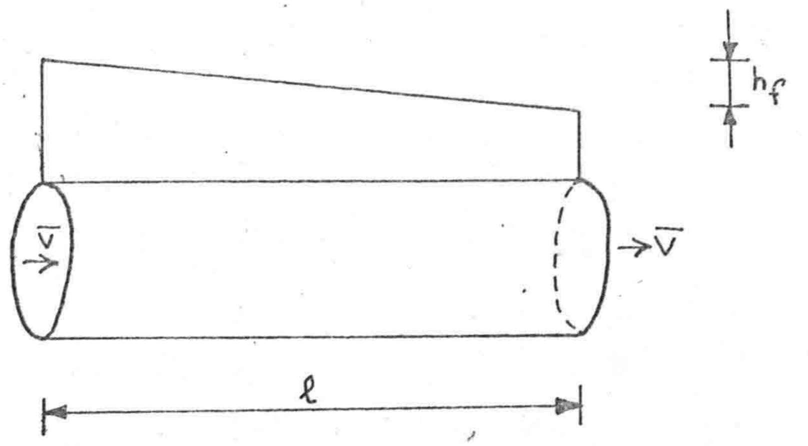
Zodat we vinden voor de gedissipeerde energie per eenheid van oppervlak en per tijdseenheid:

$$E_1 = C_{E_1} \rho a^2 k^2 c^3 \qquad (4.11)$$

4.2 Extra verval veroorzaakt door de afzetting.

Beschouw een gedeelte van een buis met lengte l, waarvan de doorsnede A is en het gedeelte van de omtrek waardoor energie getransporteerd wordt O is.

Het water in de buis verplaatst zich met een gemiddelde snelheid $\bar{v}$. Over de lengte l treedt een drukverlies van h_f op.



figuur 4.1 Buisgedeelte met lengte l en drukverlies h_f.

Aangezien we de toestand als permanent beschouwen moet de totale energie-inhoud van het beschouwde gedeelte van de buis konstant zijn. Of in andere woorden: de toename minus de afname is nul:

$$E_{IN_{LINKS}} - E_{UIT_{RECHTS}} - E_{UIT_{AFGIFTE\ AAN\ AFZETTING}} = 0 \qquad (4.12)$$

De eerste twee samen zijn gelijk aan de hoeveelheid ingegane ($\equiv$ uitgegane) massa vermenigvuldigd met het drukverlies h_f en de zwaartekrachtsversnelling g. We beschouwen deze twee termen over een tijdje Δt en zijn dan gelijk aan:

$$E_{IN_{LINKS-RECHTS}} = A\bar{V}\Delta t \cdot \rho_W \cdot h_f \cdot g \qquad (4.13)$$

De tweede term is gelijk aan $E_1 = C_{E_1}\rho_a a^2 k^2 c^3$, vermenigvuldigd met het opperblak waardoor energietransport optreedt en vermenigvuldigd met het tijdje Δt.

$$E_{UIT_{AFZETTING}} = \theta \cdot \ell \cdot C_{E_1}\rho_a a^2 k^2 c^3 \cdot \Delta t \qquad (4.14)$$

Nu moet dus gelden dat de toename minus de afname nul is, of te wel:

$$A\bar{V}\Delta t\,\rho_W h_f g - \theta \ell C_{E_1}\rho_a a^2 k^2 c^3 \Delta t = 0 \qquad (4.15)$$

Uit vergelijking (4.15) kan worden afgeleid dat:

$$I_E = \frac{h_f}{\ell} = C_{E_1} * \frac{\rho_a}{\rho_W} * a^2 k^2 c^3 * \frac{O}{A \bar{v} g} \qquad (4.16)$$

Voor de ronde buis geldt dat $O = 2\pi r$ en $A = \pi r^2$ zodat $O/A = 2/r = 4/D$ waarin r en D respektievelijk de straat en de diameter zijn van de buis, zodat het extra verval voor een buis kan worden weergegeven door:

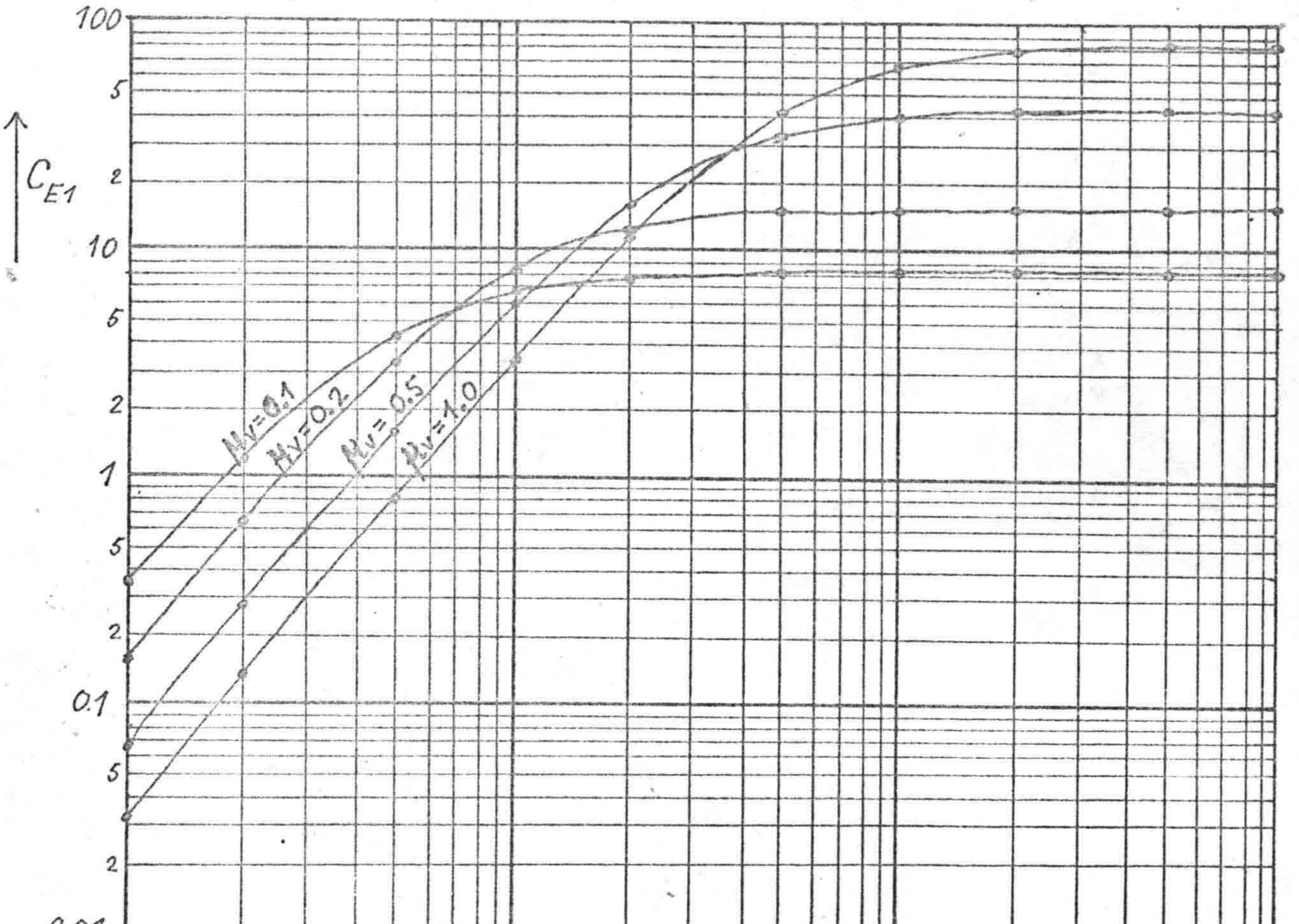
$$I_E = C_{E_1} * \frac{\rho_a}{\rho_W} * a^2 k^2 c^3 * \frac{4}{D \cdot \bar{v} \cdot g} \qquad (4.17)$$

4.3 Toelichting op het visko-elastische materiaal.

We zoeken een verklaring voor hoge energie-verliezen. Voor een bepaald geval is de faktor C_{E_1} berekend voor diverse kombinaties van μ_{vi} en μ_{el}-waarden. Dit is uitgezet in een grafiek (zie figuur 4.2). Het blijkt dat het visko-elastische materiaal bij dezelfde c en k van de verstoring lagere energie-verliezen geeft als een puur viskeus materiaal, d.w.z. het elastische deel wordt oneindig stijf verondersteld of ook wel:

$$\frac{\mu_{el}}{1\ kg\,m^{-1}s^{-1}} \gg \frac{\mu_{vi}}{1\ m^2 s^{-1}} \qquad (4.18)$$

Dit geldt voor iedere willekeurige waarde van c en k. Daarom is verder bij de koppeling van modellen voor water en afzetting alleen gewerkt met het model dat gedrag van de afzetting als een viskeus materiaal beschrijft.



μ_v in $m^2 s^{-1}$, μ_e in $kg m^{-1} s^{-2}$

figuur 4.2

5. Aan elkaar knopen van de modellen voor water en afzetting.

5.1 Inleiding.

Willen de twee modellen voor water en afzetting hetzelfde geval beschrijven dan moet op het grensvlak een evenwichtstoestand aanwezig zijn. Dus bij eenzelfde verstoring moet de druk voor beide modellen in het grensvlak gelijk zijn. Daarom stellen we de eis dat de druk in amplitude en in fase gelijk moet zijn voor water en afzetting. De druk van het water op het grensvlak wordt gegeven door de volgende uitdrukking:

$$p_W = C_{P_{ZZ}} \cdot \rho_W \cdot akc^2 \cdot \cos[k(x-ct) + \phi_P] \tag{5.1}$$

Voor de druk van de afzetting in het grensvlak is een soortgelijke uitdrukking afgeleid:

$$p_A = C_{P_{ZZ}} \cdot \rho_A \cdot akc^2 \cdot \cos[k(x-ct) + \phi_P] \tag{5.2}$$

Indien nu wordt verondersteld dat

$$\rho_W \approx \rho_A \tag{5.3}$$

dan kunnen we de genoemde eis samenvatten door te stellen dat de dimensieloze amplitude en faseverschuiving voor water en afzetting aan elkaar gelijk moeten zijn:

$$C_{P_{ZZ}}\Big]_{WATER} = C_{P_{ZZ}}\Big]_{AFZETTING} \tag{5.4a}$$

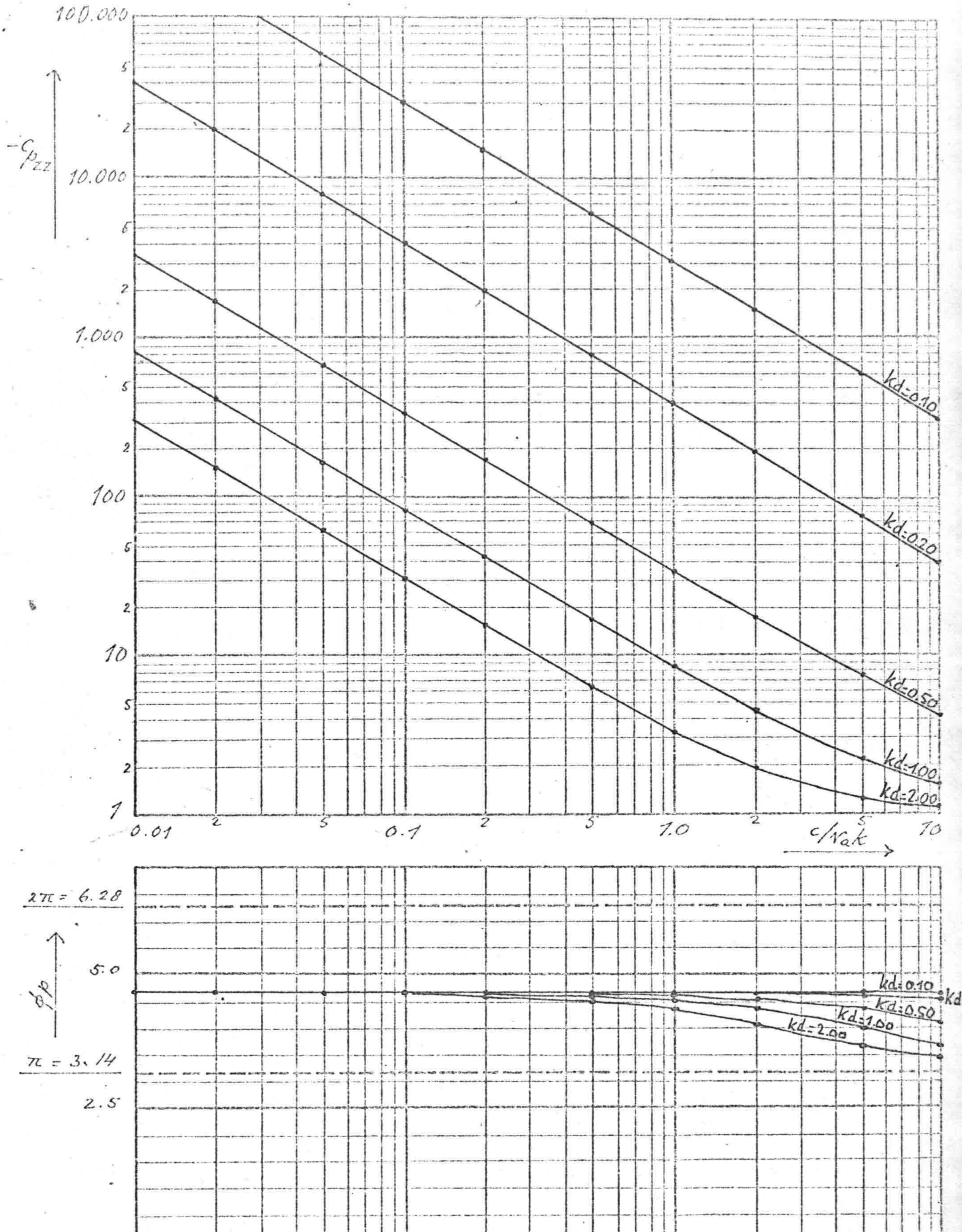
$$\phi_P\Big]_{WATER} = \phi_P\Big]_{AFZETTING} \tag{5.4b}$$

5.2 Afzetting.

De beweging van de afzetting is, indien deze als viskeus wordt verondersteld (zie 4.3), alleen afhankelijk van de waarden voor kd en voor $c/\nu_a k$. Zie hiervoor ook het verslag van Klaassen. Dit houdt in dat de kenmerkende coëfficiënten $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P als funktie van de beide parameters kd en $c/\nu_a k$ kunnen worden bepaald. Het resultaat is in een grafiek weergegeven (zie figuur 5.1). Voor een aantal kd-waarden zijn lijnen getekend waarlangs $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P beschouwd zijn als funkties van $c/\nu_a k$.

5.3 Water.

De coëfficiënten $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P voor het water hangen in de eerste plaats af van de gekozen snelheidsverdeling in de buis en de afmetingen van de buis en in de tweede plaats van de c en k van de verstoring. Deze twee laatste zijn equivalent met voortplantingssnelheid en golflengte van de vertoring. Om dit model te kunnen koppelen aan het model van de afzetting worden ook hier $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P voor bepaalde kd-waarden uitgezet tegen $c/\nu_a k$. Uitgaande van zekere waarden voor kd en $c/\nu_a k$ moeten we hieruit de waarden voor c en k destilleren om $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P te kunnen berekenen. Daarvoor is het nodig dat we d (dit is de dikte van de afzetting) en ν_a (dat is de viskositeit van de afzetting kennen.


100.000
10.000
1.000
100
10
1
$-c_{p_{zz}}$
kd=0.10
kd=0.20
kd=0.50
kd=1.00
kd=2.00
0.01
0.1
1.0
10
$c/\sqrt{ak}$
$2\pi = 6.28$
5.0
$\pi = 3.14$
2.5
0
ϕ_p

figuur 5.1

5.4 Koppeling.

Algemeen kunnen we dus van een bepaald geval de twee modellen aan elkaar koppelen. We gaan er daarbij vanuit dat gegeven zijn:

(1) buisdiameter

(2) snelheidsverdeling over de hoogte

(3) dikte van de afzetting

(4) viskositeit van de afzetting

Voor de waarden van kd = 0.10, 0.20, 0.50, 1.00 en 2.00 worden $C_{P_{ZZ}}$ en ϕ_P uitgezet tegen $c/\nu_a k$ voor zowel water als afzetting. Wat betreft de lijnen voor $C_{P_{ZZ}}$ levert dit een aantal snijpunten op. Deze worden uitgezet in een nieuwe grafiek waarin de waarde van $c/\nu_a k$ uitgezet wordt tegen de kd-waarde. Door deze punten wordt een lijn getrokken.
Ook de lijnen voor ϕ_P van water en afzetting leveren een aantal snijpunten op. Ook deze worden in de nieuwe grafiek uitgezet, en ook door deze punten wordt een lijn getrokken. De twee op deze gevonden lijnen geven de kombinaties van kd - $c/\nu_a k$ aan waar respektievelijk $C_{P_{ZZ}}$ en ϕ_P voor water en afzetting gelijk zijn. We zoeken echter naar de punten waar $C_{P_{ZZ}}$ èn ϕ_P gelijk zijn voor water en afzetting. Dit is het snijpunt van de twee laatstgenoemde lijnen. Dit punt wordt verder aangeduid als „koppelingspunt".

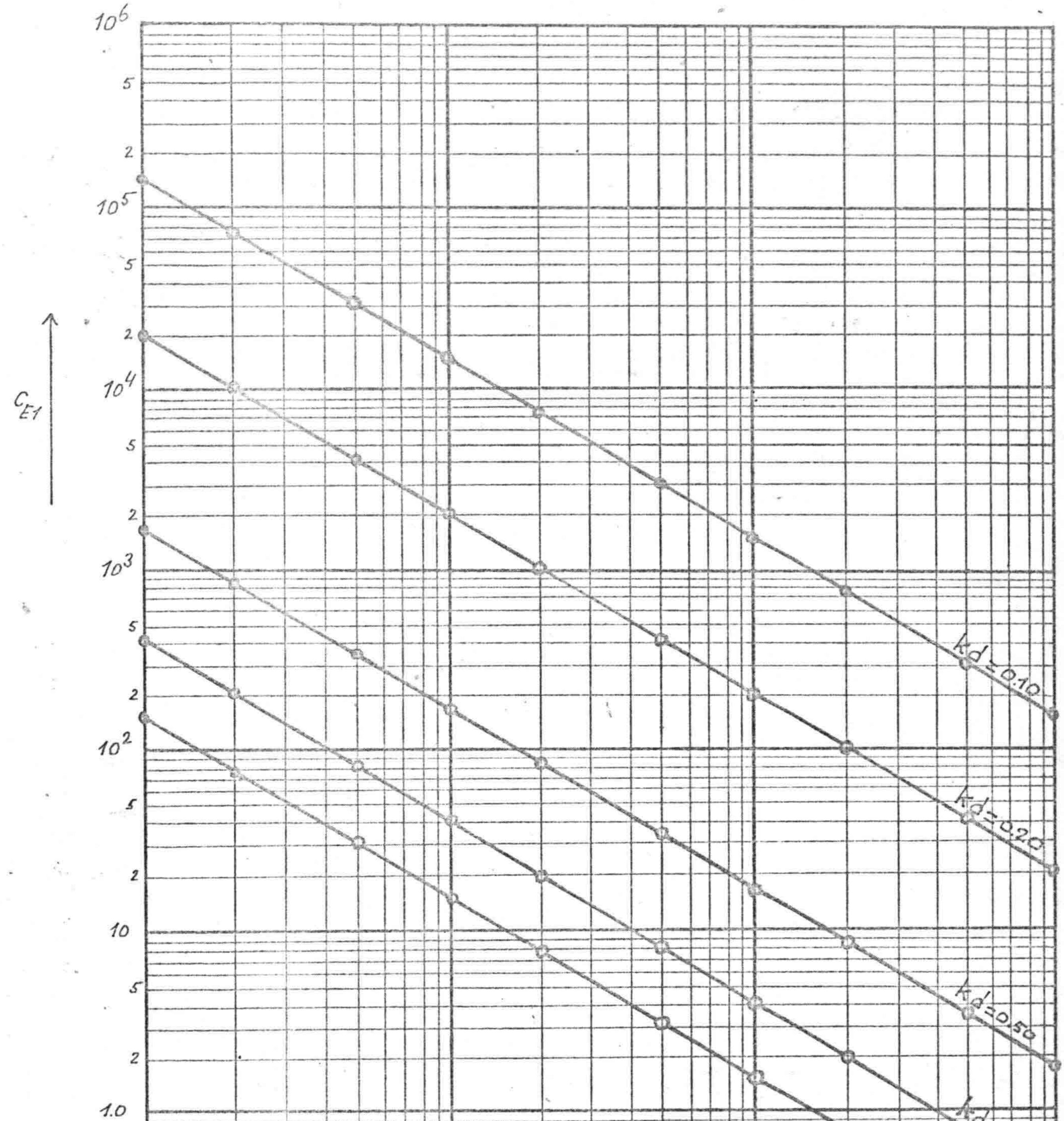
Met de gevonden waarden voor $C_{P_{ZZ}}$ en ϕ_P kan dan C_{E_1} berekend worden. Deze waarde kan ook afgelezen worden uit figuur 5.2 waar C_{E_1} bepaald is als funktie van de bijbehorende waarden van $c/\nu_a k$ en kd.
De waarde van C_{E_1} is berekend voor elke kombinatie van $c/\nu_a k$ en kd uit de hierbij behorende waarden voor $C_{P_{ZZ}}$ en ϕ_P voor de afzetting volgens:

$$C_{E_1} = \frac{1}{2} C_{P_{ZZ}} \sin \phi_P \qquad (5.5)$$

Dit resultaat is uitgezet in de grafiek.

Indien de waarden voor de dikte en de viskositeit van de afzetting bekend zijn, dan is uit de bij het koppelingspunt behorende waarden voor $c/\nu_a k$ en kd de waarde van k en c te berekenen.
We gaan hier nog steeds uit van de veronderstelling dat de dichtheden van water en afzetting ongeveer aan elkaar gelijk zijn. Indien tevens de buisdiameter en de gemiddelde snelheid van het water bekend is, dan valt hiermee het extra verval te berekenen, dat veroorzaakt wordt door de afzetting:

$$I_E = C_{E_1} \cdot d^2 k^2 c^3 \cdot \frac{4}{D \cdot \bar{v} \cdot g} \qquad (5.6)$$



figuur 5.2

5.5 Keuze snelheidsprofiel van het water.

Na de bepaling van het $C_{P_{zz}}$- en ϕ_p-verloop voor parabolische snelheidsprofielen voor diverse gevallen blijkt dat een koppelingspunt, zoals hiervoor beschreven niet te vinden is. Dit is te verklaren doordat met dit snelheidsprofiel slechts kleine energieverliezen zijn te verklaren. Een parabolisch snelheidsprofiel hoort eigenlijk ook bij een laminaire stroming, en deze wordt gekenmerkt door lage energieverliezen.
Uit grafieken voor $C_{P_{zz}}$ en ϕ_p blijkt tevens dat slechts redelijke energieverliezen plaats vinden bij hoge voortplantingssnelheden van de verstoring (ca. 1m/s). Naar analogie van de experimenten van Klaassen wordt echter gezocht naar een verklaring van hoge energieverliezen bij lage voortplantingssnelheden (ca. 1 - 10 cm/s).
Een parabolisch profiel wordt slechts gekenmerkt door één parameter. Hiervoor kan gekozen worden v_{max} of $\bar{v}$.
In tegenstelling daarmee staat het logarithmische profiel, welke gekenmerkt wordt door 2 parameters. In de eerste plaats moet de gemiddelde snelheid worden vastgesteld. De tweede parameter is vrij te kiezen en deze bepaalt de snelheidsgradiënt nabij de wand (in ons geval: nabij het grensvlak water-afzetting). Voor het logarithmische snelheidsprofiel wordt de volgende vorm gekozen:

$$v(y) = U_1 \log(y/y_0) \tag{5.7}$$

waarin dus U_1 en y_0 de twee parameters zijn.
In het volgende wordt de theorie getoetst aan een praktijk geval. Daar is gekozen voor een logarithmisch snelheidsprofiel. U_1 is daarbij zodanig gekozen dat de gemiddelde snelheid slechts weinig afwijkt van de gemeten snelheid. Voor y_0 zijn verschillende waarden geprobeerd.

5.6 Voorbeelden.

We toetsen de theorie op een geval wat bekend is uit de praktijk. Daarvoor is gekozen de Ecker-leiding. De gebruikte gegevens zijn de volgende:

buisdiameter	0.4956	m
gemiddelde snelheid	1.75	m/s
dikte van de afzetting	0.7	mm
amplitude van de ribbels	0.35	mm

Omdat het werken met een vastgelegde gemiddelde snelheid nogal lastig is met een logarithmisch snelheidsprofiel, is er vanuit gegaan dat de maximum snelheid

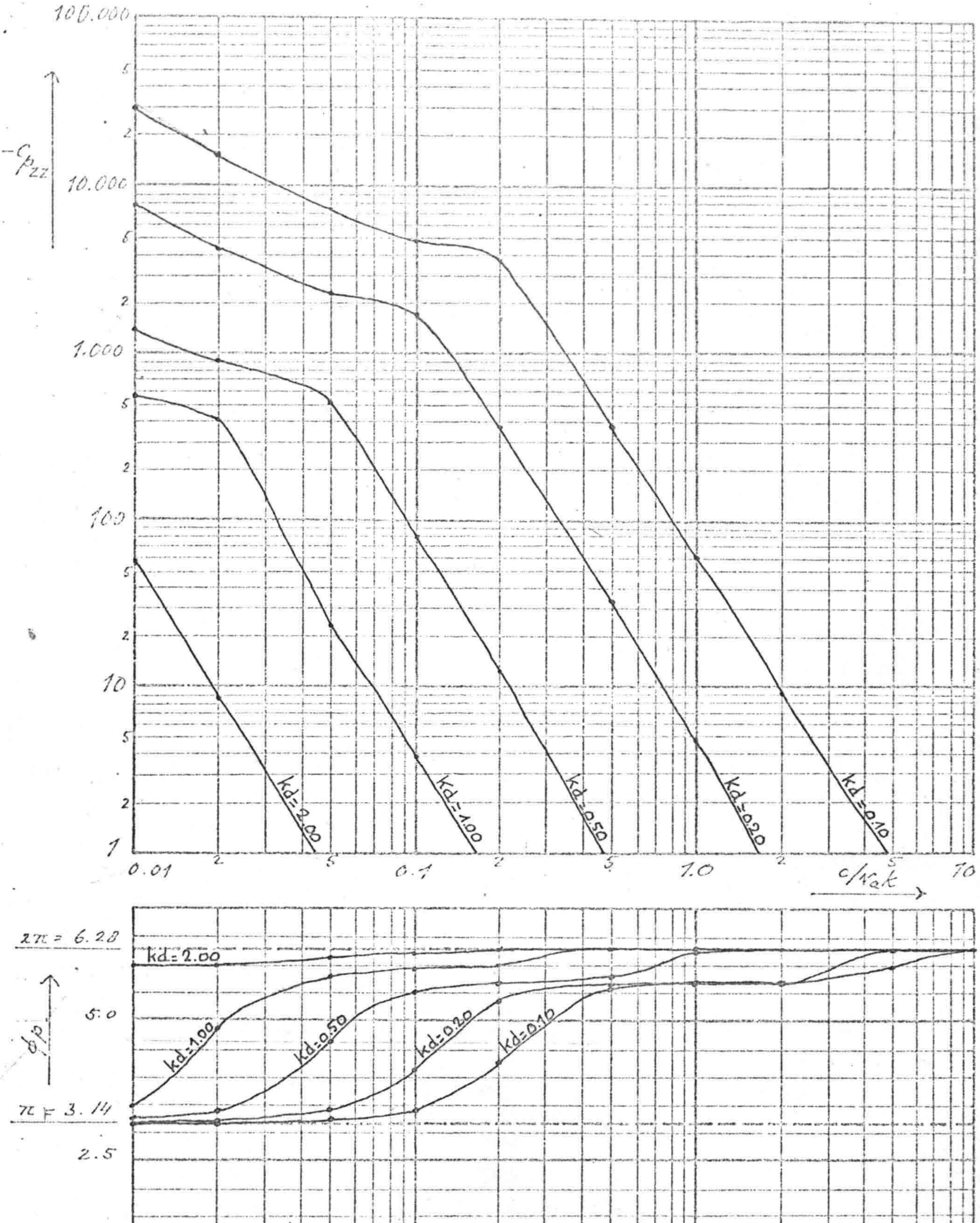
$$v_{max} = 1.4 \times \bar{v} = 1.4 \times 1.75 = 2.45 \text{ m/s}$$

De afwijking met de werkelijke gemiddelde snelheid is dan minimaal.

Verder zijn er nog twee onbekenden nl. de snelheidsgradiënt nabij de wand en de viskositeit van de afzetting. In de eerste plaats is verondersteld dat $y_0 = 10^{-4} \times H$, waarin H de buisdiameter voorstelt. Voor de viskositeit van de afzetting is in eerste instante aangenomen $\nu_a = 10^{-3}$ m^2/sek.

Uitgaande van deze gegevens zijn lijnen voor $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P getekend (zie figuur 5.3). Indien we deze lijnenbundels nu zoeken voor een andere waarde van ν_a, dan behoeven we alleen de lijnen te verschuiven evenwijdig met de $c/\nu_a k$-as. Immers $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P hangen alleen af van c en k. Op deze wijze is voor verschillende waarden voor de viskositeit ν_a van de afzetting het koppelingspunt gevonden.

ECHTER LEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) MET $Y_0 = 10^{-4}$ EN $\nu_a = 10^{-3}\ m^2/s$

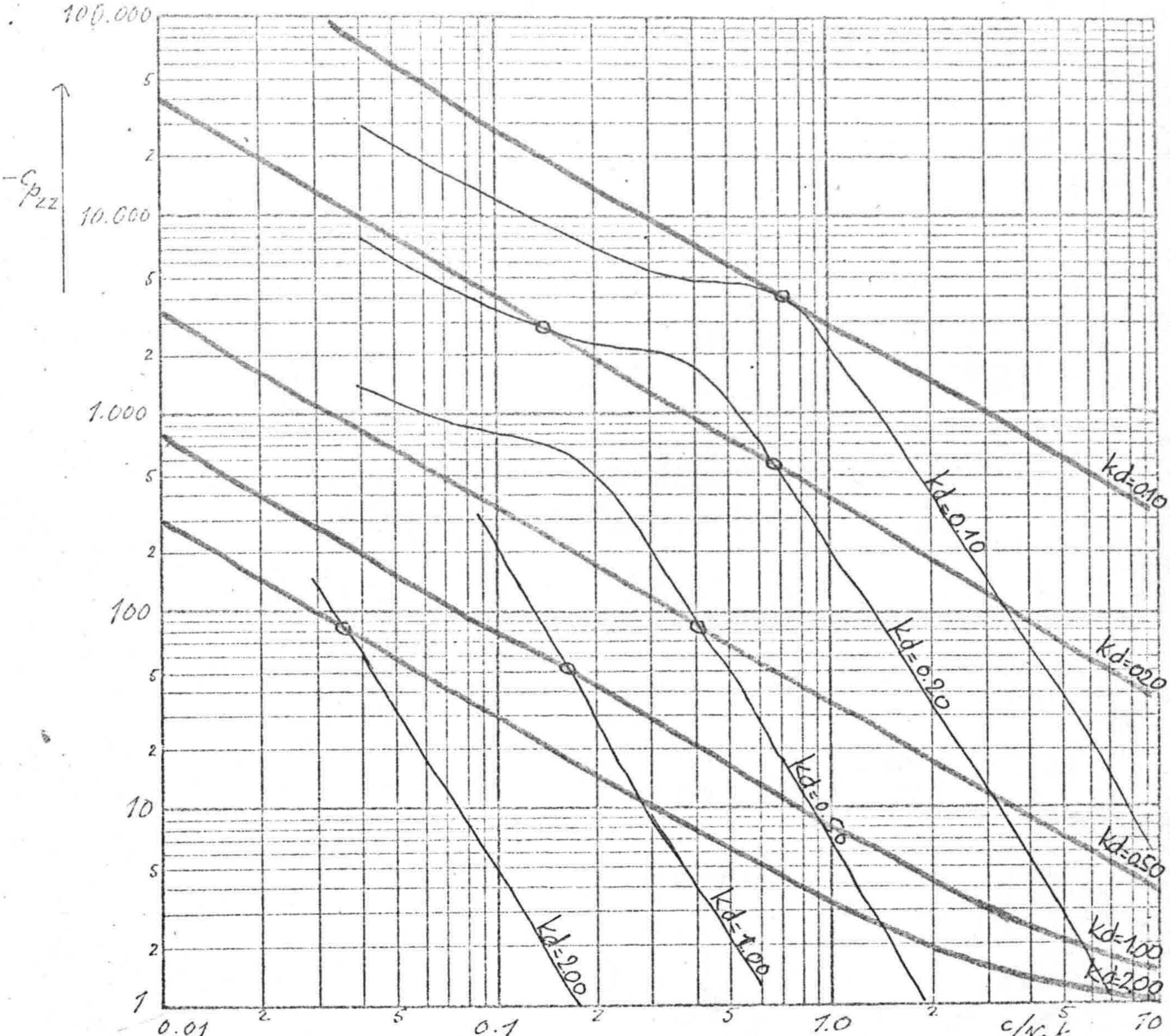


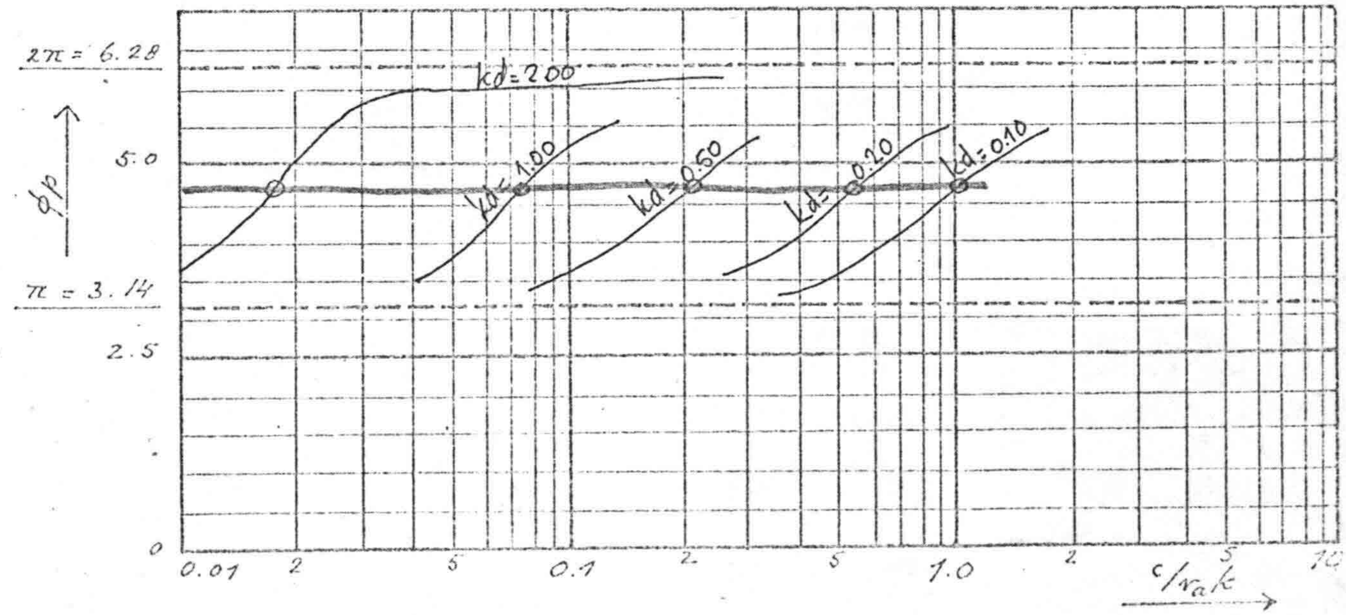
figuur 5.3

ECKER LEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) $Y_0 = 10^{-4} \cdot H$ $V_a = 2.5 \cdot 10^{-4}\ m^2/s$.

AFZETTING

WATER



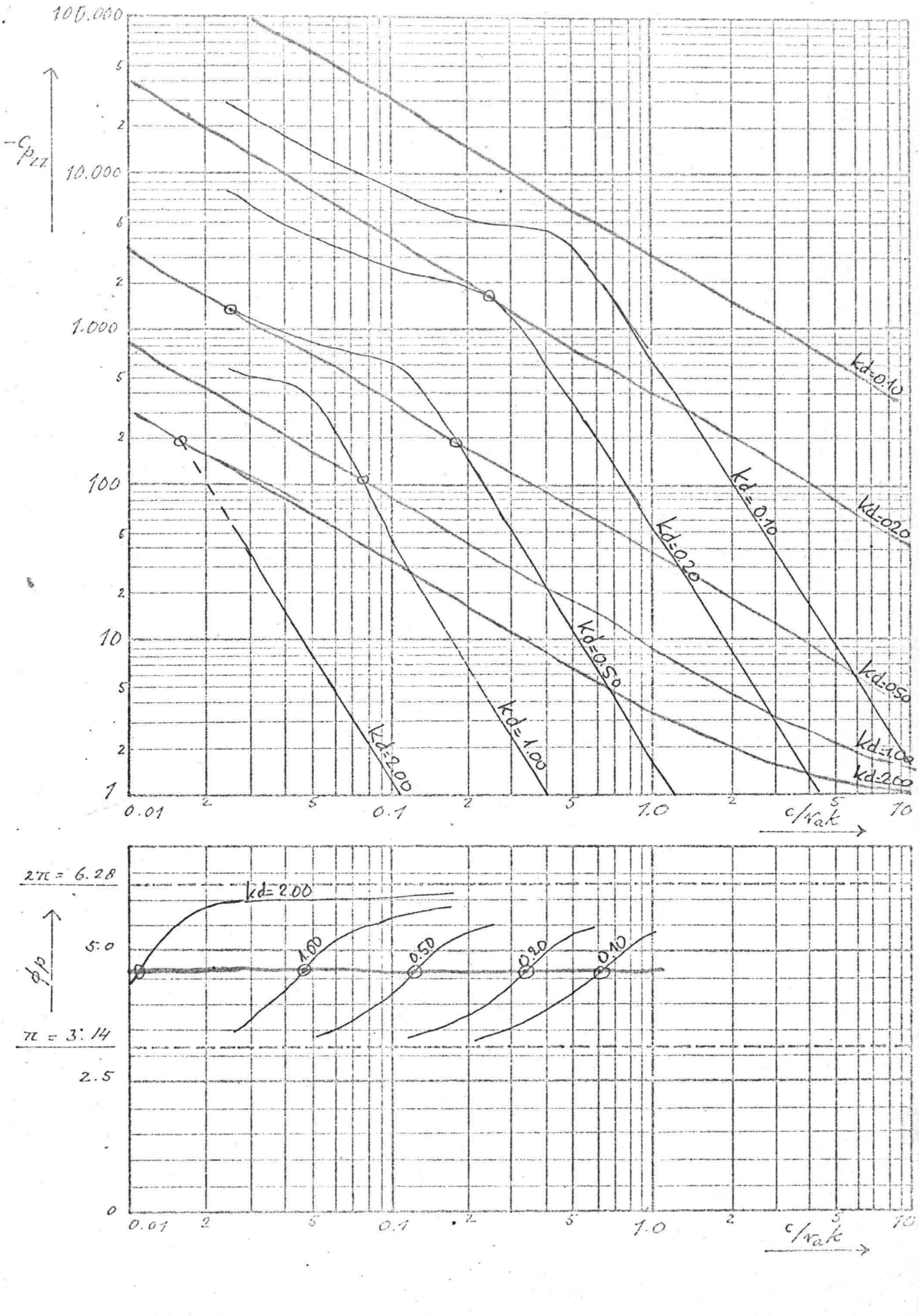


figuur 5.4

ECHER LEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) $Y_0 = 10^{-4} H$ $D_0 = 4.10^{-4}\ M^2/S$

AFZETTING

WATER

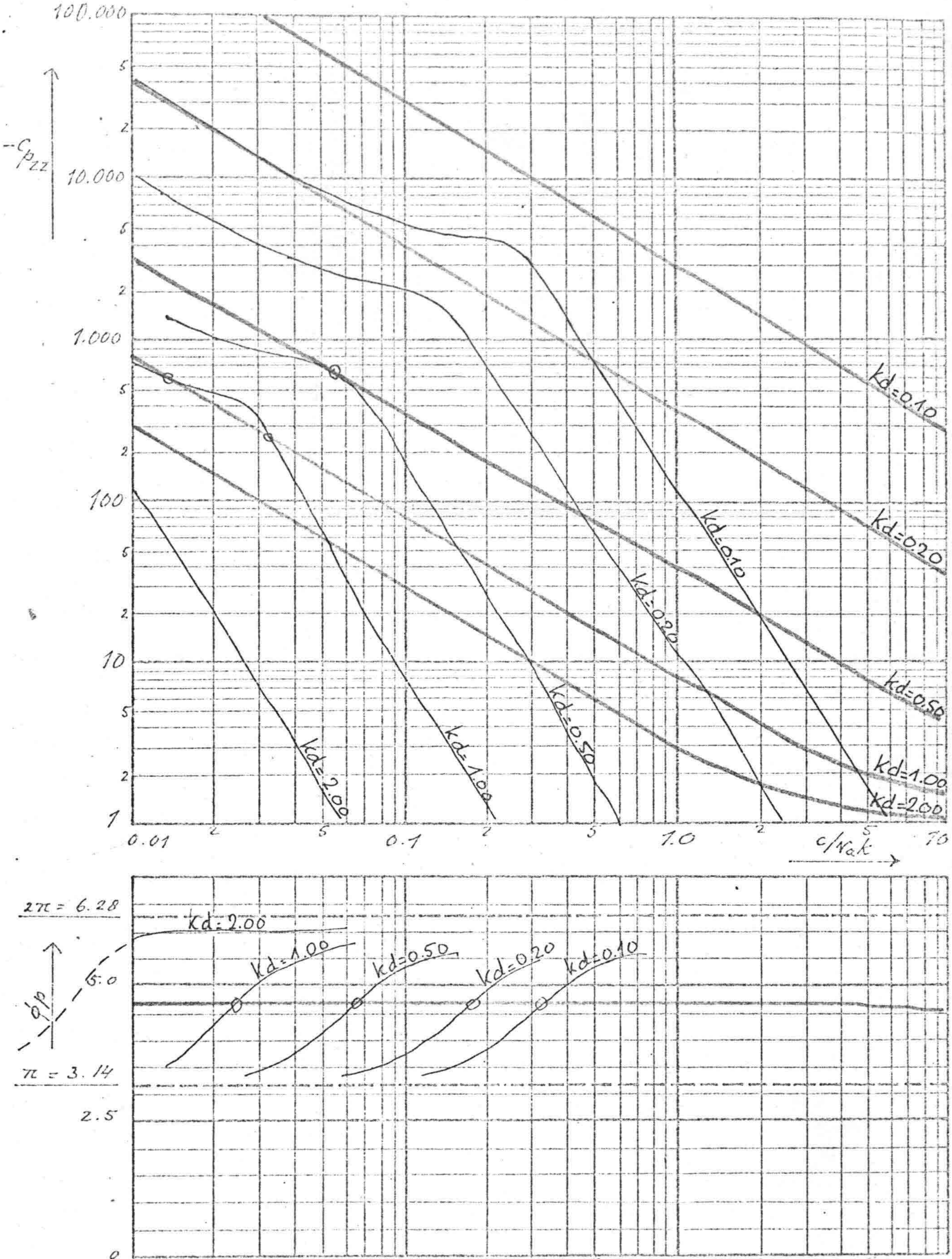


figuur 5.5

ECHTER LEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) $Y_0 = 10^{-4}$ M $\nu_a = 7.75 \cdot 10^{-4}$ M²/S

AFZETTING

WATER

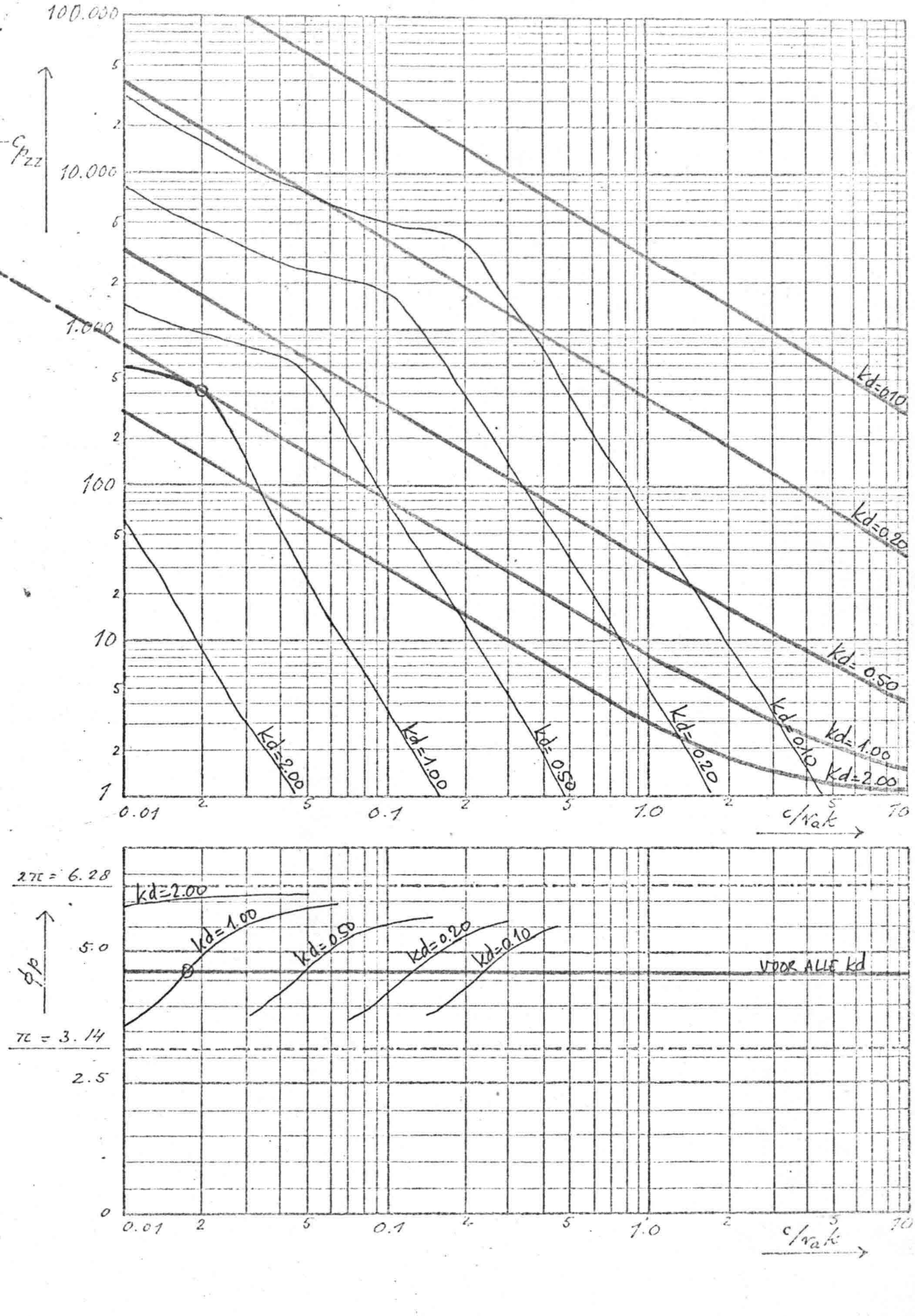


figuur 5.6

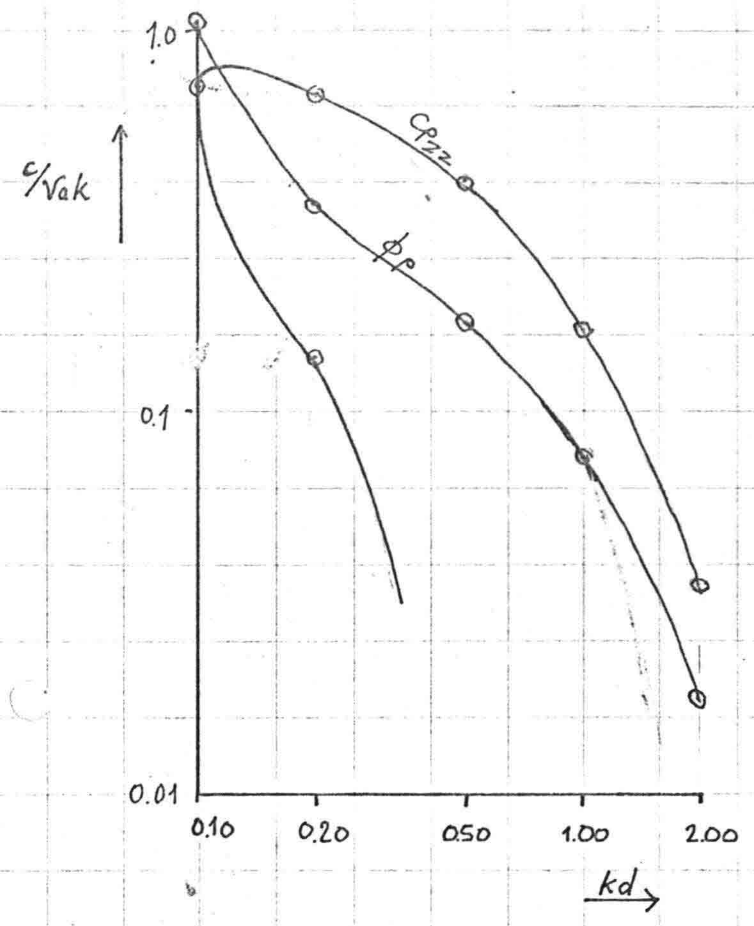
ECHER - LEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) $Y_0 = 10^{-4} \cdot H$ $\nu_a = 10^{-3}\ M^2/S$

— AFZETTING

— WATER



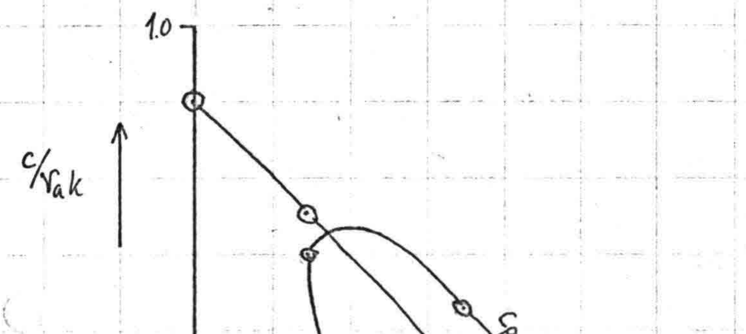
figuur 5.7



ECKER LEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL)

$Y_0 = 10^{-4} \cdot H$ $\nu_a = 2.5 \cdot 10^{-4}\ M^2/S.$

figuur 5.8



ECKER LEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL)

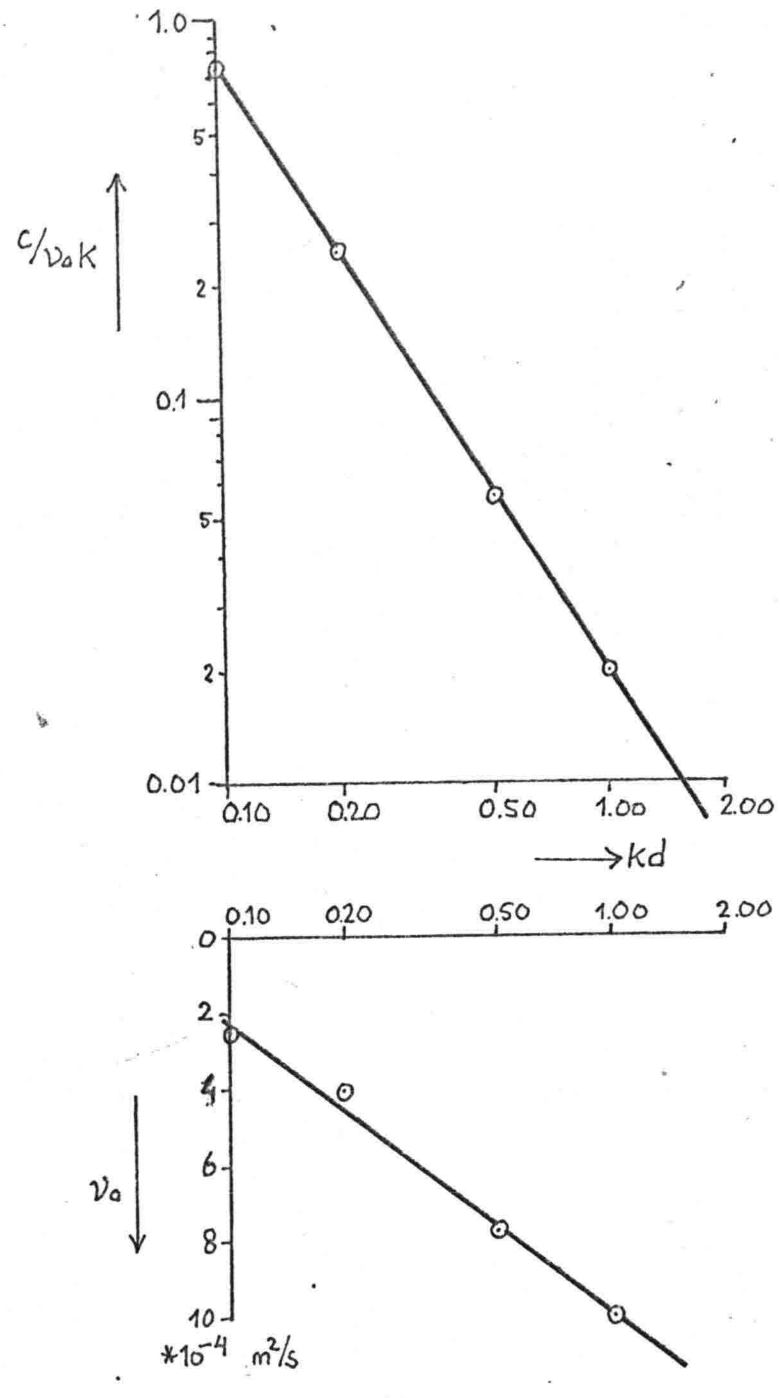
$Y_0 = 10^{-4} \cdot H$ $\nu_a = 4 \cdot 10^{-4}\ M^2/S.$

figuur 5.9

Na vergelijking van diverse gevallen blijkt dat het koppelingspunt slechts een geringe afwijking vertoont met het punt waar de lijnen voor $C_{p_{zz}}$-waarden voor water en afzetting elkaar raken.

In plaats van de voorafgaande procedure om het punt te vinden waar $C_{p_{zz}}$ en ϕ_p voor water en afzetting aan elkaar gelijk zijn (dat is het koppelingspunt) kunnen we dus ook het punt bepalen waar de lijnen voor $C_{p_{zz}}$ voor water en afzetting elkaar raken (bij eenzelfde kd-waarde natuurlijk).

In het algemeen kunnen we nu de gevonden koppelingspunten grafisch uitzetten in een $c/\nu_a k$ - kd - diagram, en door deze punten kan een lijn getrokken worden. Elk koppelingspunt, en dus ieder punt van die lijn, hoort bij een bepaalde waarde van ν_a. Deze waarde is bekend voor de koppelingspunten. Dit verband kan weer uitgezet worden in een diagram. Voor het onderhavige geval is dit gedaan in figuur 5.10


1.0
5
c/ν₀K
2
0.1
5
2
0.01
0.10
0.20
0.50
1.00
2.00
kd
0.10
0.20
0.50
1.00
2.00
0
2
4
ν₀
6
8
10
*10⁻⁴ m²/s

figuur 5.10

In het beschouwde geval (de Ecker-leiding dus) weten we niet wat de viskositeit is van de afzetting. De golflengte van de verstoring is echter wel bekend, zodat k hierdoor vastgelegd is.

$$L \approx 4.4 \text{ mm}$$

$$k = 2\pi/L = 2\pi/4.4\times10^{-3} = 1430 \text{ m}^{-1}$$

$$d = 0.7 \text{ mm}$$

$$kd = 1430 \times 0.7 \times 10^{-3} = 1.00$$

In het $c/\nu_a k$ - kd en in het ν_a - kd - diagram zijn de hierbij behorende punten dus vastgelegd. Dit geeft dan de volgende uitkomsten:

$$c/\nu_a k = 0.02$$

$$\nu_a = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

Uit de waarde voor $c/\nu_a k$ kan de waarde voor C_{E_1} gevonden worden. Dit gebeurt met de grafiek in figuur 5.2. Dit levert dan de volgende waarde op:

$$C_{E_1} = 200$$

We hebben nu voldoende gegevens om het extra verval te berekenen dat veroorzaakt wordt door de verstoring. De voortplantingssnelheid volgt uit de gegevens dat

$$c/\nu_a k = 0.02$$

$$\nu_a = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$$

$$k = 1430 \text{ m}^{-1}$$

$$c = 0.02 \times \nu_a \times k = 0.02 \times 10^{-3} \times 1430 \text{ m/s}$$

$$c = 0.0286 \text{ m/s}$$

Het verval wordt berekend met behulp van de volgende formule:

$$I_E = C_{E_1} \cdot \frac{\rho_a}{\rho_W} \cdot a^2 k^2 c^3 \frac{4}{D\bar{v}g}$$

We veronderstellen dat $\rho_a \approx \rho_W$, zodat:

$$I_E = 200 \cdot 3{,}5^2 \cdot 10^{-8} \cdot 1430^2 \cdot 0{,}0286^3 \cdot \frac{4}{0{,}4956 \cdot 1{,}75 \cdot 9{,}81}$$

$$I_E = 1{,}9 \cdot 10^{-3}$$

Dit is circa 30 % van het gemeten extra verval.

De procedure wordt nu in het kort herhaald, maar nu met $y_0 = 10^{-3} \times H$. Voor de viskositeit van de afzetting wordt in eerste instantie gekozen: $\nu_a = 10^{-4}\ m^2/s$. Hiervoor worden $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P uitgezet tegen $c/\nu_a k$ bij verschillende kd-waarden.

Het koppelingspunt wordt nu gezocht voor kd = 1.00. Daartoe worden de lijnen voor $C_{P_{zz}}$-waarden zodanig verschoven dat voor kd = 1.00 de $C_{P_{zz}}$-lijnen van water en afzetting elkaar raken. Dit gebeurt bij $c/\nu_a k = 0.02$ indien voor ν_a gekozen wordt $\nu_a = 3 \times 10^{-4}\ m^2/s$. De bijbehorende waarde voor C_{E_I} wordt opgezocht en dit resulteert in $C_{E_I} = 200$.

Voor de voortplantingssnelheid wordt gevonden dat:

$$c = 0.02 \times \nu_a \times k = 0.02 \times 3 \times 10^{-4} \times 1430 = 0.0086\ m/s$$

aangezien $k = 1430\ m^{-1}$.

Voor het extra verval wordt dan gevonden:

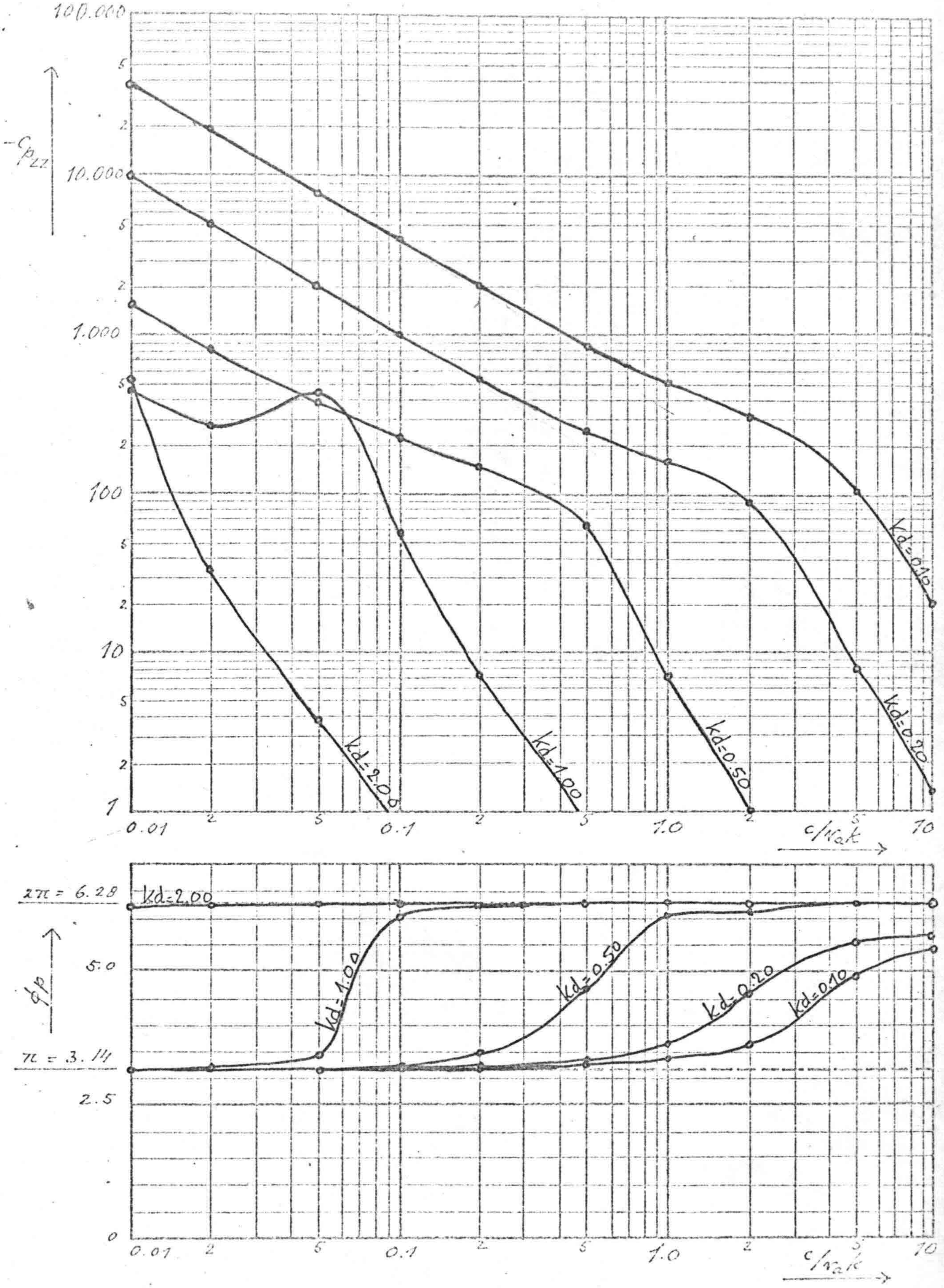
$$I_E = C_{E_I} \cdot a^2 k^2 c^3 \cdot \frac{4}{D \cdot \bar{V} \cdot g}$$

$$I_E = 200 \cdot 3{,}5^2 \cdot 10^{-8} \cdot 1430^2 \cdot 0{,}0086^2 \cdot \frac{4}{0{,}4956 \cdot 1{,}75 \cdot 9{,}81}$$

$$I_E = 1{,}78 \cdot 10^{-5}$$

Dit is slechts een fraktie van het gemeten extra verval.

ECHER-LEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) $Y_0 = 10^{-3} H$ EN $D_a = 10^{-4}\ M^2/SEK$

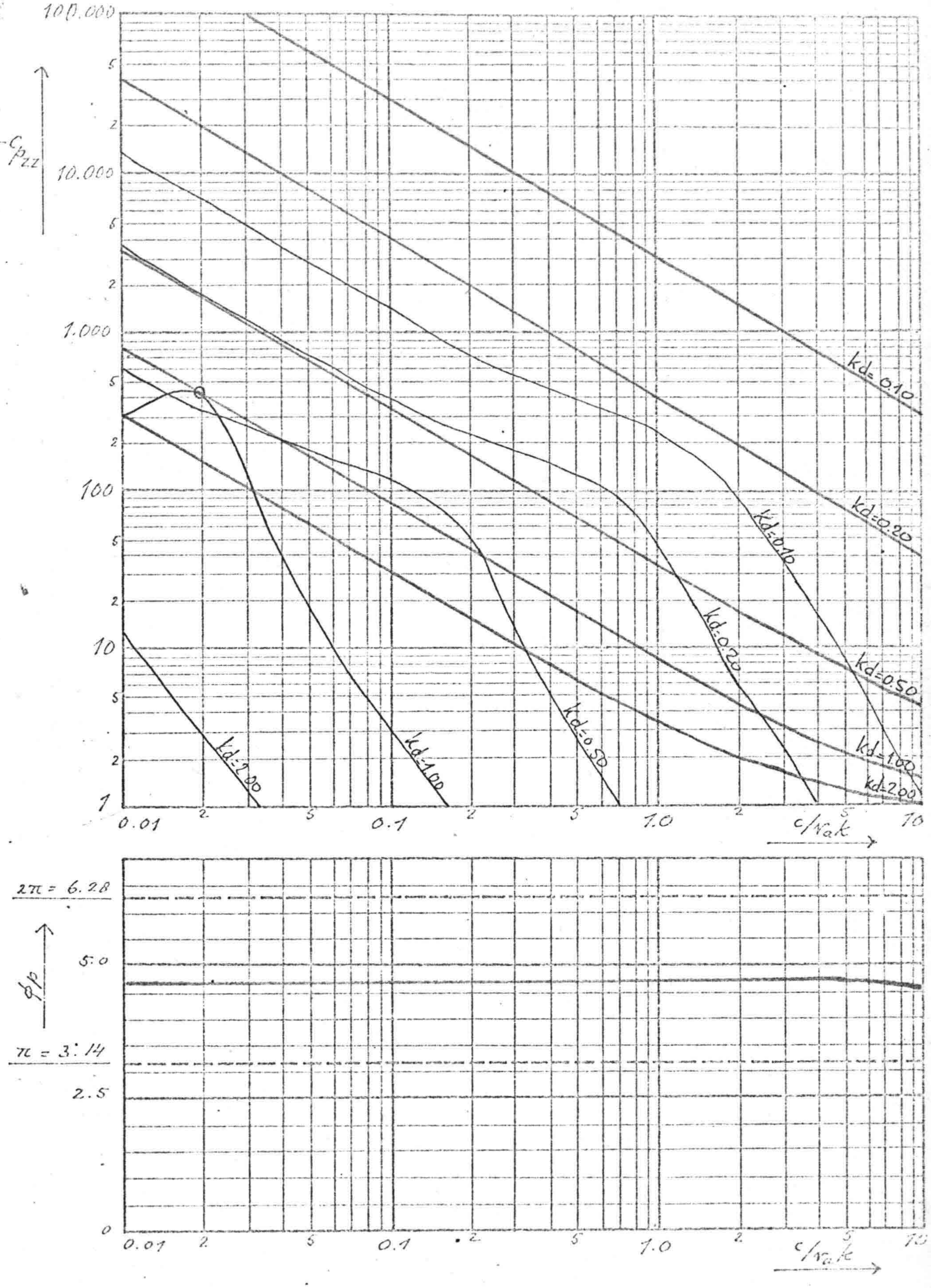


figuur 5.11

ECKER - LEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) $Y_o = 10^{-3} H$ EN $D_a = 3 \cdot 10^{-4}$ M²/SEK

AFZETTING

WATER



figuur 5.12

Ook wordt gekeken naar het geval dat $y_0 = 10^{-5} \times H$.
Voor de viskositeit van de afzetting wordt eerst de waarde $\nu_a \doteq 10^{-4}$ m/s aangenomen. De gevonden $C_{p_{zz}}$-waarden worden grafisch uitgezet in figuur 5.13. Deze lijnen worden daarna zodanig verschoven dat voor kd = 1.00 de $C_{p_{zz}}$-lijnen van water en afzetting elkaar raken.
Dit gebeurt bij $c/\nu_a k = 0.002$ als voor ν_a gekozen wordt:
$\nu_a = 6 \times 10^{-3}$ m^2/s.
Hierbij hoort een waarde van $C_{E_I} = 2000$
De voortplantingssnelheid van de verstoring is dan:

$$c = 0.002 \times \nu_a \times k = 0.002 \times 6 \times 10^{-3} \times 1430 = 0.017 \text{ m/s}$$

aangezien $k = 1430$ m^{-1}.
Het extra verval is dan:

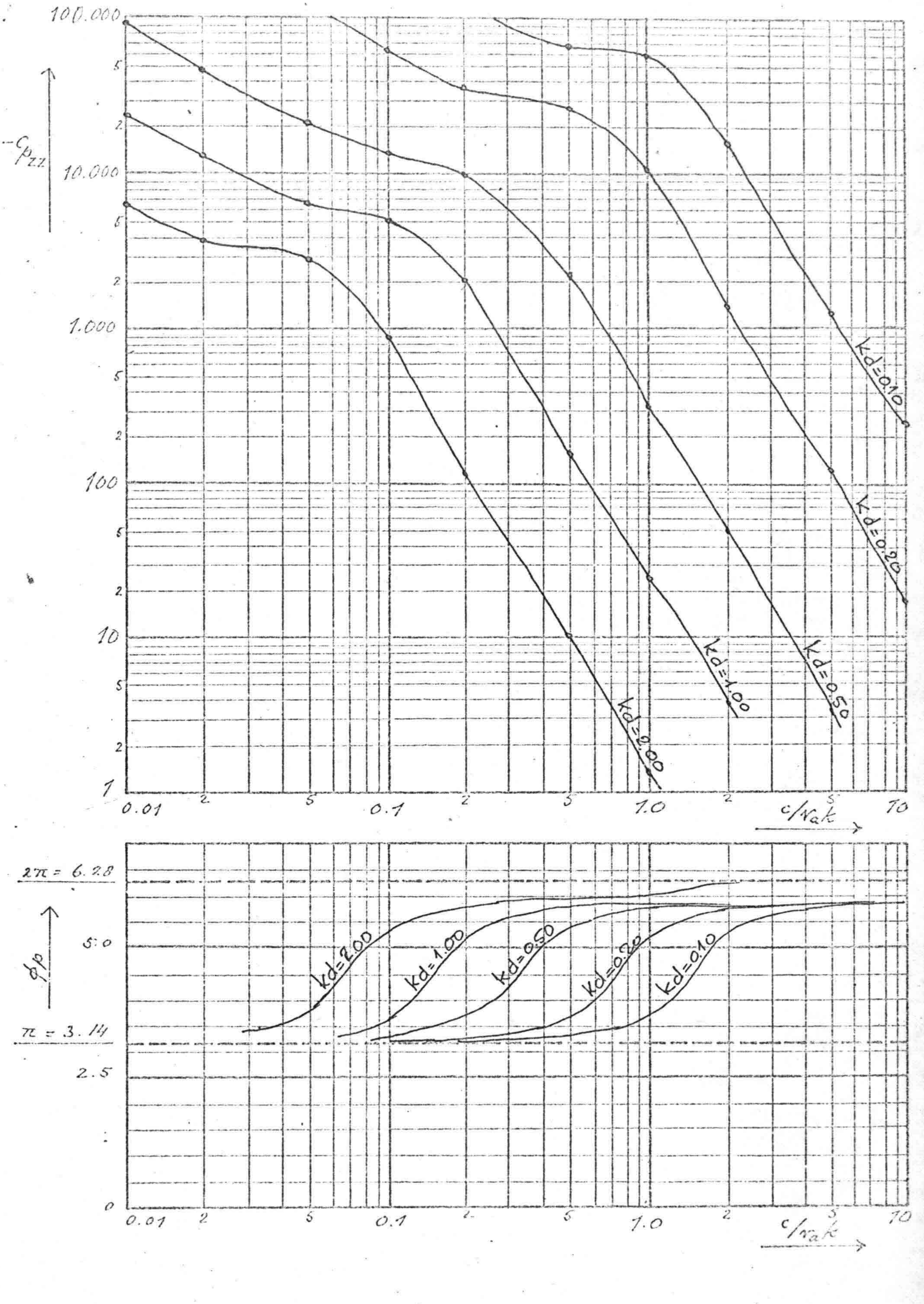
$$I_E = C_{E_I}\, d^2 k^2 c^3 \frac{4}{D \cdot \bar{V} \cdot g}$$

$$I_E = 2000 \cdot 3{,}5^2 \cdot 10^{-8} \cdot 1430^2 \cdot 0{,}017^2 \cdot \frac{4}{0{,}4956 \cdot 1{,}75 \cdot 9{,}81}$$

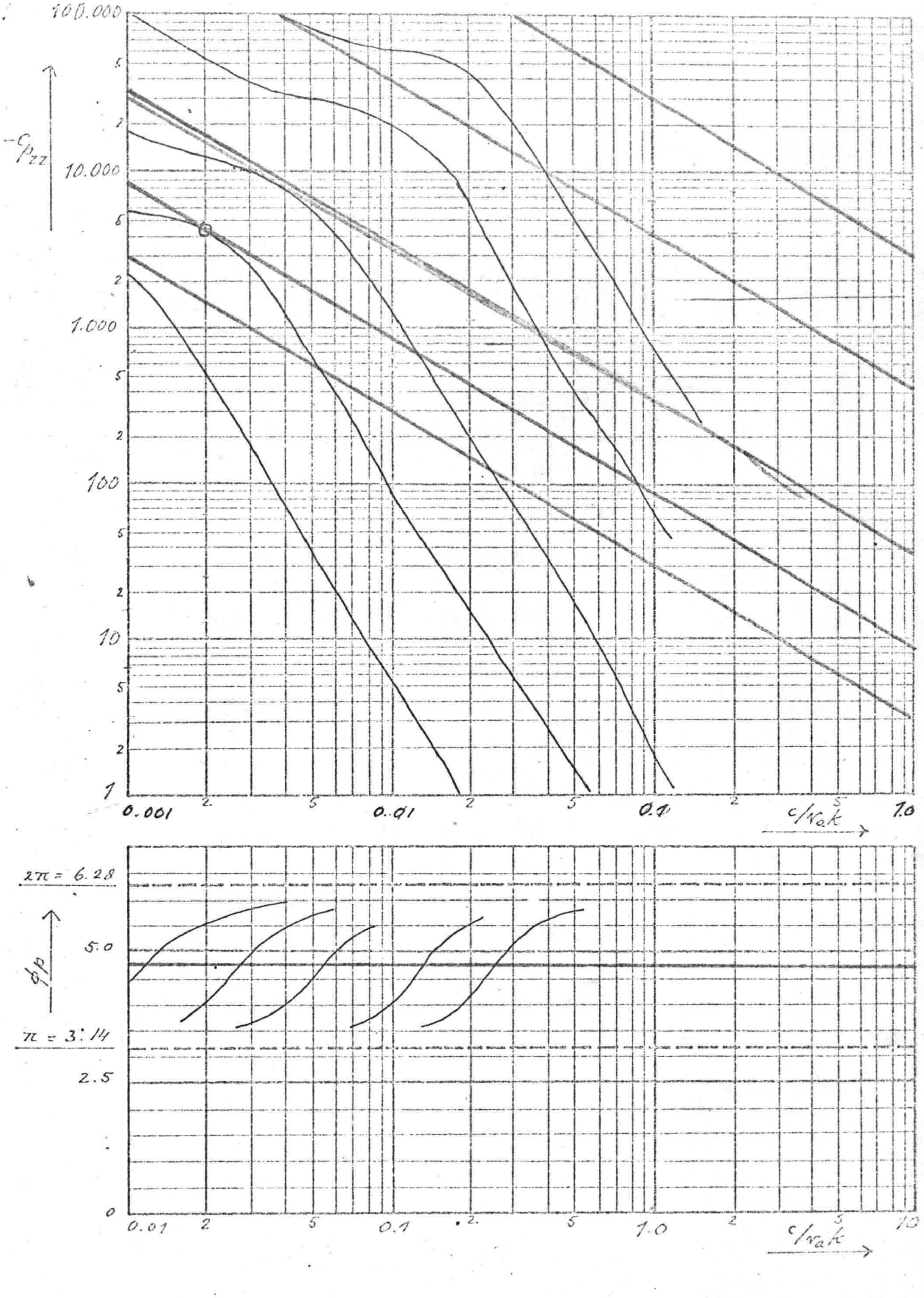
$$I_E = 1.15 \cdot 10^{-3}$$

Dit is circa 20 % van het gemeten extra verval.

ECKER-LEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) MET $V_0 = 10^{-5} \cdot H$ EN $V_a = 10^{-4}\ m^2/s$.



figuur 5.13



100.000
10.000
1.000
100
10
1
$-c_{p_{zz}}$
0.001
0.01
0.1
1.0
$c/v_0 k$
$2\pi = 6.28$
5.0
$\pi = 3.14$
2.5
0
ϕ_p
0.01
0.1
1.0
10
$c/v_a k$

figuur 5.14

6. Enkele andere modellen.

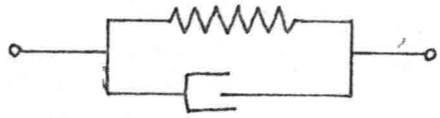
6.1 Inleiding.

Voor de afzetting is tot hier gewerkt met een visko-elastisch model, waarbij we dus denken aan een serieschakeling van een elastisch en een viskeus element. Er is voornamelijk gewerkt met het uiterste, nl. dat het elastische element oneindig stijf was, zodat dit model overeenkwam met het puur viskeuze model. Het is echter ook mogelijk een model op te zetten waarbij uitgegaan wordt van een parallelschakeling van een elastisch en een viskeus element. Dit model is bekend onder de naam van Maxwell. In het volgende is aangegeven hoe dit model opgezet wordt. Het zou in het kader van dit onderzoek echter te ver gaan indien dit model numeriek uitgewerkt zou worden.

Tot nu toe is ook aangenomen dat we te doen hadden met lopende golven. In kort bestek is hier verder aangegeven wat het resultaat zou zijn indien er vanuit zou worden gegaan dat in het grensvlak tussen water en afzetting staande golven zouden voorkomen.

6.2 Maxwell-model.

Het model wordt analoog opgezet als bij het visko-elastische model. Hier wordt echter het volgende schematische model gebruikt om het verband tussen spanningen en vervormingen te krijgen:



figuur 6.1 Schematische voorstelling van het Maxwell-model.

De spanningen en vervormingen die behoren bij het elastische dan wel viskeuze deel worden weer aangeduid met respektievelijk de onderschriften „e" en „v". Voor de totale spanningen en vervormingen gelden de volgende betrekkingen:

$$\sigma = \sigma_e + \sigma_v \qquad \tau = \tau_e + \tau_v \qquad (6.1a,b)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_e = \varepsilon_v \qquad \gamma = \gamma_e = \gamma_v \qquad (6.2a,b)$$

Voor de afzonderlijke delen gelden dezelfde betrekkingen als reeds bij het visko-elastische model is afgeleid. Kort samengevat zijn de resultaten voor het elastische deel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\mu_e} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_x - \sigma_z) \qquad (6.3a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\mu_e} \frac{\partial}{\partial t} (\sigma_z - \sigma_x) \qquad (6.3b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mu_e} \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xz} \qquad (6.3c)$$

Voor het viskeuze deel zijn deze betrekkingen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{4\mu_V}(\sigma_x - \sigma_z) \qquad (6.4a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{4\mu_V}(\sigma_z - \sigma_x) \qquad (6.4b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\mu_V}\tau_{xz} \qquad (6.4c)$$

Vervolgens moeten de afzonderlijke delen worden samengevoegd, zodanig dat de vervormingen van beide delen dezelfde is, dus

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_e = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_V \qquad (6.5a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_e = \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_V \qquad (6.5b)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_e = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)_V \qquad (6.5c)$$

De totale spanningen zijn de som van de spanningen van de afzonderlijke delen:

$$\sigma_x = (\sigma_x)_e + (\sigma_x)_V \qquad (6.6a)$$

$$\sigma_z = (\sigma_z)_e + (\sigma_z)_V \qquad (6.6b)$$

$$\tau_{xz} = (\tau_{xz})_e + (\tau_{xz})_V \qquad (6.6c)$$

Uit (6.3a) kunnen we afleiden dat

$$4\mu_e \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}\left[(\sigma_x)_e - (\sigma_z)_e\right]$$

En uit (6.4a):

$$4\mu_V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[(\sigma_x)_V - (\sigma_z)_V\right]$$

Optellen van deze vergelijkingen levert de onderstaande betrekking op tussen de totale vervormingen en totale spanningen:

$$4\mu_e \frac{\partial u}{\partial x} + 4\mu_V \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_x - \sigma_z) \qquad (6.7a)$$

Op analoge wijze worden de volgende betrekkingen afgeleid:

$$4\mu_e \frac{\partial w}{\partial z} + 4\mu_v \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\sigma_z - \sigma_x) \tag{6.7b}$$

$$\mu_e \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) + \mu_v \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \tau_{xz} \tag{6.7c}$$

We voeren de variabele p in die gedefinieerd wordt door:

$$\frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_z) = p \tag{6.8}$$

Daardoor kan het stelsel vergelijkingen ook worden geschreven als:

$$\left(2\mu_e + 2\mu_v \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \tag{6.9a}$$

$$\left(2\mu_e + 2\mu_v \frac{\partial}{\partial t}\right) \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial t} \tag{6.9b}$$

$$\left(\mu_e + \mu_v \frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} \tag{6.9c}$$

Voer tevens een operator $\mathcal{P}$ in die gedefinieerd wordt door:

$$\mathcal{P}(\xi) = \left(2\mu_e + 2\mu_v \frac{\partial}{\partial t}\right) \cdot \xi \tag{6.10}$$

Dan kunnen de vergelijkingen nog eenvoudiger worden geschreven als:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{P}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{6.11a}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{P}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \tag{6.11b}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mathcal{P}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \tag{6.11c}$$

Op dezelfde wijze als bij 3.4 is gedaan kunnen de gelineariseerde bewegingsvergelijkingen worden afgeleid voor de perturbaties. Deze luiden als volgt:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \tag{6.12a}$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} \tag{6.12b}$$

En de massa balansvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{6.12c}$$

Door éénmaal differentiëren naar de tijd van (6.12a) krijgen we de volgende vergelijking:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial z \partial t} \qquad (6.13)$$

Hierin worden de gevonden uitdrukkingen voor $\frac{\partial \sigma_x}{\partial t}$ en $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t}$ gesubstitueerd. Dit levert dan op:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\varphi\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \qquad (6.14)$$

Aangezien φ een lineaire operator is mag dit ook worden geschreven als:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + \varphi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\right) \qquad (6.15)$$

Uit (6.12c) kan worden afgeleid dat:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Zoadt (6.15) overgaat in:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (6.16a)$$

Op dezelfde wijze wordt afgeleid dat:

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 p}{\partial z \partial t} + \frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad (6.16b)$$

Tevens hadden we nog de massabalansvergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad (6.16c)$$

Het probleem wordt weer opgelost voor de vorm van de verstoring zoals die gegeven werd in (3.43):

$$\eta = a e^{ik(x-ct)} \qquad (6.17)$$

En voor u, w en p wordt aangenomen dat ze te schrijven zijn in de volgende vorm:

$$u = \hat{u}\, e^{ik(x-ct)} \qquad (6.18a)$$

$$w = \hat{w}\, e^{ik(x-ct)} \qquad (6.18b)$$

$$p = \hat{p}\, e^{ik(x-ct)} \qquad (6.18c)$$

Operator $\mathcal{P}$ kunnen we schrijven als volgt, indien ξ dezelfde afhankelijkheid van t heeft als η :

$$\mathcal{P}(\xi) = (2\mu_e - 2\mu_v ikc)\cdot\xi \tag{6.19}$$

Voor het gemak voeren we de variabele Ω in, die gegeven wordt door:

$$\Omega = \mu_e - \mu_v ikc \quad , \tag{6.20}$$

zodat we voor $\mathcal{P}$ kunnen schrijven:

$$\mathcal{P}(\xi) = 2\Omega\xi \tag{6.21}$$

En het stelsel (6.16) is dan als volgt te schrijven:

$$-\rho k^2c^2\hat{u} = -k^2c\hat{p} + \Omega\left(-k^2\hat{u} + \frac{\partial^2\hat{u}}{\partial z^2}\right) \tag{6.22a}$$

$$-\rho k^2c^2\hat{w} = ikc\frac{\partial\hat{p}}{\partial z} + \Omega\left(-k^2\hat{w} + \frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2}\right) \tag{6.22b}$$

$$ik\,\hat{u} + \frac{\partial\hat{w}}{\partial z} = 0 \tag{6.22c}$$

Uit (6.22c) volgt dat

$$\hat{u} = \frac{i}{k}\frac{\partial\hat{w}}{\partial z} \tag{6.23}$$

Hiermee wordt $\hat{u}$ uit de vergelijking (6.22a) geëlimineerd. Daarna wordt uit de betrekkingen (6.22a,b) $\hat{p}$ geëlimineerd door de eerste vergelijking eerst naar z te differentiëren en daarna beide met bepaalde gewichtsfaktoren op te tellen. Dit resulteert in de volgende betrekking:

$$\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial z^4} - \left(2k^2 - \frac{\rho k^2c^2}{\Omega}\right)\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial z^2} + \left(k^4 - \frac{\rho k^4c}{\Omega}\right)\hat{w} = 0 \tag{6.24}$$

Hetgeen met variabele β, gedefinieerd door:

$$\beta^2 = 1 - \frac{\rho c^2}{\Omega} \tag{6.25}$$

ook te schrijven is als:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\beta^2\right)\hat{w} = 0 \tag{6.26}$$

De algemene oplossing hiervan is:

$$\boxed{\hat{w} = Ae^{-kz} + Be^{kz} + Ce^{-k\beta z} + De^{k\beta z}} \tag{6.27}$$

Met behulp van (6.23) wordt dan gevonden voor $\hat{u}$:

$$\boxed{\hat{u} = -iAe^{-kz} + iBe^{kz} - i\beta Ce^{-k\beta z} + i\beta De^{k\beta z}} \tag{6.28}$$

Na invullen van de gevonden uitdrukking voor $\hat{u}$ in (6.22a) wordt gevonden voor $\hat{p}$:

$$\boxed{\hat{p} = -i\rho cAe^{-kz} + i\rho cBe^{kz}} \tag{6.29}$$

De konstanten A, B, C en D worden bepaald uit de fysische randvoorwaarden. Dit zijn dezelfde als in 3.4 zodat de vergelijkingen waaruit de konstanten opgelost moeten worden ook dezelfde zijn. A, B, C en D worden daarbij weer dimensieloos gemaakt en gescheiden in een reëel en een imaginair deel, zoals dat aangegeven is in (3.66). Indien de konstanten A_1, A_2, ..., D_1 en D_2 bekend zijn dan kunnen voor $\hat{u}$ en $\hat{p}$ de volgende uitdrukkingen worden opgesteld:

$$\hat{p} = \rho akc^2(A_2 - iA_1)e^{-kz} + \rho akc^2(-B_2 + iB_1)e^{kz} \tag{6.30}$$

$$\hat{u} = akc\{-i(A_1 + iA_2)e^{-kz} + i(B_1 + iB_2)e^{kz} + \tag{6.31}$$
$$-i(\beta_1 + i\beta_2)(C_1 + iC_2)e^{-k\beta z} + i(\beta_1 + i\beta_2)(D_1 + iD_2)e^{k\beta z}\}.$$

Voor de drukspanning kunne we de volgende uitdrukking afleiden uit (6.11b), als we bedenken dat $p_{zz} = -\sigma_z$:

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} - 2\mu_e \frac{\partial w}{\partial z} - 2\mu_v \frac{\partial}{\delta t} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} \tag{6.32}$$

$\frac{\partial \hat{w}}{\partial z}$ wordt uitgedrukt in $\hat{u}$ volgens (6.23) zodat ook geldt dat:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -iku \tag{6.33}$$

We mogen dan ook schrijven voor p_{zz}:

$$\frac{\partial p_{zz}}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + 2ik\mu_e \cdot u + 2ik\mu_v \cdot \frac{\partial u}{\partial t} \tag{6.34}$$

Indien dit geschreven wordt in de vorm van (6.18) wordt de volgende uitdrukking verkregen:

$$-ikc\, p_{zz} = -ikc\, p + 2ik\mu_e \cdot u - 2k^2 c\, \mu_v \cdot u \tag{6.35}$$

Daarbij is verondersteld dat óok p_{zz} dezelfde afhankelijkheid heeft van t als η. Zodat voor de normale druk op het grensvlak geldt:

$$p_{zz} = p - (2\frac{\mu_e}{c} - 2ik\mu_v)\, u \tag{6.36}$$

Hierin worden de gevonden uitdrukkingen voor p en u gesubstitueerd:

$$p_{zz} = \{\hat{p} - (2\frac{\mu_e}{c} - 2ik\mu_v)\,\hat{u}\}\, e^{ik(x-ct)} \tag{6.37}$$

$$p_{zz} = \{\hat{p} - 2k(\alpha_2 - i\alpha_1)\,\hat{u}\}\, e^{ik(x-ct)} \tag{6.38}$$

Hetgeen dezelfde notatie is als in (3.83). Daarvoor moet dus gelden dat:

$$\alpha_1 = +\mu_v \tag{6.39a}$$

$$\alpha_2 = +\frac{\mu_e}{kc} \tag{6.39b}$$

6.3 Staande golven.

6.3.1 Inleiding.

Een staande golf wordt gedacht opgebouwd te zijn uit twee golven met dezelfde amplitude en golflengte maar waarvan de voortplantingssnelheid slechts van teken verschilt

$$\eta_1 = a\cos(kx - kct) \qquad \eta_2 = a\cos(kx + kct) \qquad (6.40a,b)$$

figuur 6.1 De opbouw van een staande golf uit twee lopende golven.

De momentane uitwijking is evenals de druk op het grensvlak gelijk aan de som van respektievelijk de uitwijkingen en de drukken van de afzonderlijke golven.

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 \qquad (6.41)$$

$$p = p_1 + p_2 \qquad (6.42)$$

6.3.2 Afzetting.

Voor de afzetting is het niet belangrijk wat de richting is, waarin de golf zich voorplant zodat de reeds afgeleide formules op beide golven toepasbaar zijn.

$$p_1 = C_{p_{zz}} \cdot \rho \cdot akc^2 \cos(kx - kct + \phi_p) \qquad (6.43a)$$

$$p_2 = C_{p_{zz}} \cdot \rho \cdot akc^2 \cos(kx + kct - \phi_p) \qquad (6.43b)$$

Zodat we nu vinden voor de uitwijking en de druk op het grensvlak van de staande golf:

$$\begin{aligned} \eta &= a\cos(kx - kct) + a\cos(kx + kct) \\ &= a\{\cos(kx - kct) + \cos(kx + kct)\} \\ &= 2a\cos(kx)\cos(kct) \qquad (6.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p &= C_{p_{zz}} \cdot \rho \cdot akc^2 \cdot \cos(kx - kct + \phi_p) + C_{p_{zz}} \cdot \rho \cdot akc^2 \cos(kx + kct - \phi_p) \\ &= C_{p_{zz}} \rho akc^2 \{\cos(kx - kct + \phi_p) + \cos(kx + kct - \phi_p)) \\ &= C_{p_{zz}} \rho akc^2 \cdot 2 \cdot \cos(kx)\cos(kct - \phi_p) \\ &= C_{p_{zz}} \rho akc^2 \cdot 2 \cdot \cos(kx)\{\cos(kct)\cos\phi_p + \sin(kct)\sin\phi_p\} \qquad (6.45 \end{aligned}$$

De energie-overdracht van water naar afzetting is dan gelijk aan:

$$E = -\dot{\eta} \cdot p \qquad (6.46)$$

waarbij gemiddeld moet worden over x en t.

$$E = \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{L} \int_T \int_L -\dot{\eta}\, p \, dx \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{L} \int_T \int_L -[-2akc \cos(kx) \sin(kct)] *$$

$$* [2 C_{p_{zz}} \rho a k c^2 \cos(kx) \{\cos(kct)\cos\phi_p + \sin(kct)\sin\phi_p\}] \, dx \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{L} \cdot 4\rho a^2 k^2 c^3 C_{p_{zz}} \int_T \int_L \{\cos^2(kx)\sin(kct)\cos(kct)\cos\phi_p + \cos^2(kx)\sin^2(kct)\sin\phi_p\} \, dx \, dt$$

$$= 4\rho a^2 k^2 c^3 C_{p_{zz}} \frac{1}{L} \int_L \cos^2(kx) \, dx \left\{ \cos\phi_p \frac{1}{T} \int_T \sin(kct)\cos(kct) \, dt + \sin\phi_p \frac{1}{T} \int_T \sin^2(kct) \, dt \right\}$$

$$= 4\rho a^2 k^2 c^3 C_{p_{zz}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{ \cos\phi_p \cdot 0 + \sin\phi_p \cdot \frac{1}{2} \right\}$$

$$E = \rho a^2 k^2 c^3 \, C_{p_{zz}} \sin\phi_p \qquad (6.47)$$

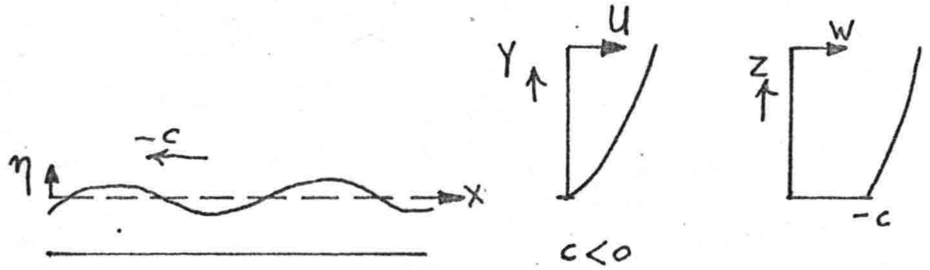
Dit is dus de energiedissipatie in de afzetting per tijdseenheid en per eenheid van oppervlak. Deze is tweemaal zo groot als de lopende golven waaruit ze is opgebouwd.
Of ook: de energie-dissipatie in een staande golf is tweemaal zo groot als de energie-dissipatie in een lopende golf met dezelfde golflengte en trillingstijd, waarvan de amplitude de helft is van die van de staande golf.
We kunnen dit ook nog anders formuleren:
De energiedissipatie in een staande golf is de helft van de energiedissipatie in een lopende golf met dezelfde amplitude, golflengte en trillingstijd.
Dit mogen we doen omdat $C_{p_{zz}}$ en ϕ_p niet afhangen van de amplitude van de verstoring.

6.3.3. Water.

Voor het water is het wel belangrijk te weten wat de richting is waarin de verstoring zich voortplant ten opzichte van de richting van de hoofdstroom, daar we anders niet kunnen weten wat de druk is op het grensvlak. De berekening van deze druk verloopt in beide gevallen geheel verschillend.

Indien de golven zich voortplanten in de stromingsrichting van het water, dan verloopt de berekening zoals hiervoor reeds is aangegeven in dit onderzoek.

We kijken daarom nu naar golven met een negatieve voortplantingssnelheid, d.w.z. de golven planten zich voort tegengesteld aan de stromingsrichting van het water.
We werken weer met een stroomfunktie ψ, zoals reeds eerder is aangegeven. De snelheidsverdeling over de hoogte wordt gegeven door $U(y)$. In dimensieloze variabelen ontstaat weer de differentiaalvergelijking, zoals we die kennen uit het gedeelte met positieve voortplantingssnelheid.



figuur 6.2 Waterbeweging met negatieve voortplantingssnelheid van de verstoring.

$$U - c = U_1 \, W(z) \tag{6.48}$$

$$z = k \cdot Y \tag{6.49}$$

$$\psi = U_1 \cdot \phi(z) \cdot \eta(x,t) \tag{6.50}$$

Voor de verstoring wordt weer de volgende vorm aangenomen:

$$\eta = a\, e^{ik(x-ct)} \tag{6.51}$$

waarbij uiteindelijk weer alleen het reële deel beschouwd moet worden.
De differentiaalvergelijking waaraan de dimensieloze stroomfunktie nu moet voldoen luidt als volgt:

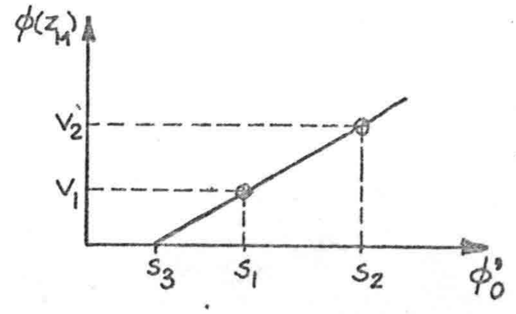
$$W\left(\frac{d^2\phi}{dz^2} - \phi\right) - \left(\frac{d^2W}{dz^2}\right)\phi = 0 \tag{6.52}$$

Deze heeft dezelfde vorm als voor positieve voortplantingssnelheid, maar nu treedt er geen singulariteit op. De randvoorwaarden zijn dezelfde en luiden als volgt:

$$\phi_0 = W_0 \qquad (z = z_0) \tag{6.53a}$$

$$\phi_M = 0 \qquad (z = z_M) \tag{6.53b}$$

Als we de differentiaalvergelijking oplossen volgens de methode van Runge-Kutta (numeriek) dan doet zich wel een klein probleem voor, namelijk:
Om te starten zij twee randvoorwaarden nodig.
Als we in z_0 (y_0) starten is alleen ϕ_0 bekend.
Als we in z_M (y_M) starten is alleen ϕ_M bekend.
We lossen dit probleem op met de zogenaamde „inschiet-methode". We starten in bijvoorbeeld z_0 en we nemen daar voor ϕ' de waarde $\phi'_0 = s_1$ aan. Daarmee wordt de integratie uitgevoerd tot z_M, waarbij we $\phi(z_M) = V_1 \neq 0$ vinden.
Daarna wordt de integratie nogmaals uitgevoerd, maar nu met de beginvoorwaarde $\phi'_0 = s_2$. We vinden dan in z_M voor ϕ_M: $\phi(z_M) = V_2 \neq 0$.
Door interpolatie, of extrapolatie, wordt dan de startwaarde voor ϕ'_0 geschat op s_3 (zie figuur 6.3).



figuur 6.3
Bepaling van de tweede randvoorwaarde door extrapolatie.

$$\frac{V_2}{s_2 - s_3} = \frac{V_2 - V_1}{s_2 - s_1} \tag{6.54}$$

$$s_3 = s_2 - V_2 \frac{s_2 - s_1}{V_2 - V_1} \tag{6.55}$$

Met de nieuwe beginvoorwaarde $\phi_0'' = s_3$, die bepaald wordt door (6.55), wordt de berekening nogmaals uitgevoerd. Met de waarde voor $\left(\frac{d\phi}{dz}\right)_0$ wordt de druk berekend op het grensvlak volgens:

$$p = (\alpha + i\beta)\,\rho\, U_1^2\, k a\, e^{ik(x-ct)} \tag{6.56}$$

waarin:

$$\alpha + i\beta = w_0 \left(\frac{d\phi}{dz} - \frac{dw}{dz}\right)_0 \tag{6.57}$$

Het samenvoegen van de drukken voor de golven met positieve en negatieve voortplantingssnelheid zal voor het water wel wat problemen geven. De dimensieloze amplitude en faseverschuiving zullen nl. in het algemeen niet gelijk zijn aan elkaar, zodat de druk een komplex geheel zal worden. En daaruit volgt dat voor de energie-overdracht niet zo één twee drie te zeggen valt hoe groot deze zal worden.

7. Toepassing op de experimenten van Klaassen.

Aangezien Klaassen door een fout in zijn verslag heel andere uitkomsten kreeg voor de waarden van $C_{\rho_{zz}}$ en ϕ_ρ, en dus ook van C_{E_1} is op de volgende pagina weergegeven welk gedeelte van het gemeten extra verval in de proefbuis verklaard kan worden met het viskeuze model.
Het blijkt dat de resultaten nu wel gunstiger uitkomen.
Het berekende verval ligt echter toch nog wel een orde lager dan het gemeten verval.

waar-neming	frekwentie n [sec^{-1}]	golfhoogte a [m]	golfgetal k [m^{-1}]	kd	$c/\nu_a k$	c_{E1}	gemeten extra verval [m/m']	berekend verval door energie-overdracht [m/m']	percentage, dat het berekende verval van het gemetene uitmaakt [%]
1-3	-1.16	$\sim 0.10 \times 10^{-2}$	105	0.315	0.50	135	0.15×10^{-3}	0.020×10^{-3}	13
3-2	-0.96	0.35×10^{-2}	63	0.630	0.222	50	0.6×10^{-3}	0.075×10^{-3}	12,5
3-3	-1.14	0.35×10^{-2}	78	0.625	0.172	60	1.0×10^{-3}	0.086×10^{-3}	8,6
3-4	-3.59	0.30×10^{-2}	157	0.628	0.134	85	2.2×10^{-3}	0.6×10^{-3}	27

8. Beperkte geldigheid van de gevonden oplossing.

8.1 Inleiding.

Bij het oplossen van de beschrijvende vergelijkingen voor de afzetting en het water zijn enkele aannamen gedaan. Hier wordt in het kort nagegaan in hoeverre hieraan is voldaan.
Daarvoor moeten we allereerst een idee krijgen van de orde van grootte van de beweging van de afzetting. Op de afzetting werkt een schuifspanning τ, die gelijk doch tegengesteld gericht is aan de schuifspanning die op het water werkt. Deze maakt evenwicht met het drukverval I in de buis en is gelijk aan:

$$\tau = \rho_w \cdot g\, RI \tag{8.1}$$

waarin R de hydraulische straal is. Aangezien de dikte d van de afzetting klein is ten opzichte van de buisdiameter lijkt het gerechtvaardigd om aan te nemen dat deze schuifspanning konstant is over de hoogte van de afzetting. Aangezien de stroming van de afzetting in dit geval laminair is, moet gelden:

$$\tau = \mu_a \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{8.2}$$

of, bij invullen:

$$\rho_w\, g RI = \rho_a \cdot \nu_a \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \tag{8.3}$$

Integratie van deze vergelijking en invullen van de randvoorwaarde dat de snelheid aan de wand nul moet zijn, levert dan de snelheidsverdeling van de afzetting over de hoogte. De snelheid is maximaal ter hoogte van de grenslaag en heeft daar de grootte:

$$(\bar{u})_{z=0} = \frac{\rho_w}{\rho_a} \cdot \frac{gRId}{\nu_a} \tag{8.4}$$

8.2 Gevonden oplossingen voor het water.

De eerste aanname is dat de variaties in snelheid klein zijn ten opzichte van de hoofdstroom:

$$u \ll \overline{U} \tag{2.6a}$$

$$v \ll \overline{U} \tag{2.6b}$$

De perturbatie-snelheden zijn niet expliciet bepaald voor de beweging van het water. We kunnen echter wel stellen dat deze in de grenslaag van dezelfde orde van grootte zijn als de perturbatie-snelheden van de afzetting. Deze laatste zijn volgens (3.77) van de volgende orde van grootte:

$$\mathcal{O}(u) = \mathcal{O}(akc) \tag{8.5}$$

Zodat we voor (2.6a) kunnen schrijven:

$$akc \ll \frac{\rho_w}{\rho_a} \frac{gRId}{\nu_a} \tag{8.6}$$

Na invulling van de gegevens voor de Ecker-leiding:
$R = \frac{1}{4}\phi = 0{,}125\ m$, $I = 12{,}5 \cdot 10^{-3}\ m/m'$, $\rho_w \approx \rho_a$, $\nu_a \approx 10^{-3}\ m^2/s$
wordt dit:

$$\frac{akc}{d} \ll 16 \tag{8.7}$$

Voor $L < 8\ mm$ en $c > 1\ cm/s$ wordt dit

$$\frac{a}{d} \ll 2 \tag{8.8}$$

Aan deze voorwaarde is eigenlijk niet voldaan, maar deze moest gedaan worden, daar het probleem anders niet oplosbaar is.

De tweede aanname die gedaan wordt is dat de termen, waar de viskositeit in voor komt verwaarloosd worden. Dit geeft aanleiding tot een singulariteit in het stromingsveld, welke aanleiding geeft tot oneindig hoge snelheden en een wervellaag ter plaatse van de singulariteit. Deze toestand is niet stabiel.

Miles kende dit probleem ook en heeft de som ook benaderd zonder de viskositeit te verwaarlozen. Het op deze wijze verkregen resultaat (d.w.z. de druk aan het grensvlak) vertoonde veel gelijkenis met het berekende met het niet-viskeuze model.

Wel zullen de met het niet-viskeuze model berekende snelheden voor de deeltjes in het algemeen niet overeenkomen met de juiste snelheden (geheel niet ter plaatse van de singulariteit). Het model is echter opgezet om een uitdrukking te vinden voor de druk op het grensvlak water-afzetting.

De theorie van Miles is ook experimenteel geverifiëerd door Zagustin, Hsu en Street (1968) en door Kendall (1970). Beide onderzoekingen blijken de juistheid van de theorie van Miles te bevestigen ten aanzien van de energie-overdracht van lucht naar water.

Blijft de vraag of deze theorie ook toegepast kan worden op de golfvorming in het grensvlak tussen water en afzetting. Zoals Brooke Benjamin (1959) op pagina 170 van zijn artikel opmerkt, is deze hele theorie alleen toepasbaar als er zich een viskeuze grenslaag kan vormen, zodat nagegaan zou moeten worden of de viskeuze grenslaag aanwezig is.

8.3 Gevonden oplossingen voor de afzetting.

Allereerst is weer aangenomen dat de variaties in snelheid klein moeten zijn ten opzichte van de hoofdstroom:

$$u \ll \overline{U} \tag{3.39a}$$

$$v \ll \overline{U} \tag{3.39b}$$

Dit leidt tot dezelfde eis die gesteld is bij het water; voor $L < 8$ mm en $c > 1$ cm/s wordt dit:

$$\frac{a}{d} \ll 2 \tag{8.9}$$

Ten tweede zijn de niet-lineaire termen verwaarloosd ten opzichte van de lineaire termen. Dit levert drie voorwaarden op, namelijk:

$$\rho_a \cdot \overline{U} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \ll \rho_a \frac{\partial u}{\partial t} \tag{8.10}$$

$$\rho_a \cdot \overline{U} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \ll \frac{\partial p}{\partial x} \tag{8.11}$$

$$\rho_a \cdot \overline{U} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \ll \mu_a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8.12}$$

We hebben reeds gezien dat de snelheid op het grensvlak gelijk is aan:

$$(\overline{U})_{z=0} = \frac{\rho_w}{\rho_a} \cdot \frac{gRId}{\nu_a} \tag{8.13}$$

We stellen echter dat $\rho_w \approx \rho_a$, zodat dit nog wat te vereenvoudigen is. We hebben afgeleid dat de orde van grootte van u gelijk is aan:

$$\mathcal{O}(u) = \mathcal{O}(akc) \tag{8.14}$$

Zodat hieruit is af te leiden dat:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \mathcal{O}(ak^2c) \tag{8.15}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \mathcal{O}(ak^3c) \tag{8.16}$$

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = \mathcal{O}(ak^2c^2). \tag{8.17}$$

omdat u dezelfde afhankelijkheid van x en t heeft als η.

Verder is reeds afgeleid dat de orde van grootte van $\frac{\partial p}{\partial x}$ gelijk is aan:

$$\mathcal{O}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) = \mathcal{O}(\rho a k^2 c^2) \tag{8.18}$$

De voorwaarde (8.10) is dan te schrijven als:

$$\rho_a \frac{gRId}{\nu_a} a k^2 c \ll \rho_a a k^2 c^2 \tag{8.19}$$

$$\frac{c}{d} \gg \frac{gRI}{\nu_a} \tag{8.20}$$

De voorwaarde (8.11) is te schrijven als:

$$\rho_a \frac{gRId}{\nu_a} a k^2 c \ll \rho_a a k^2 c^2 \tag{8.21}$$

Hetgeen dezelfde voorwaarde oplevert als (8.19).
Verder is voorwaarde (8.12) nog te schrijven als:

$$\rho_a \frac{gRId}{\nu_a} a k^2 c \ll \mu_a a k^3 c \tag{8.22}$$

$$\frac{k}{d} \gg \frac{gRI}{\nu_a^2} \tag{8.23}$$

In de voorwaarden (8.20) en (8.23) worden de gegevens van de Ecker-leiding ingevuld. Dit resulteert dan in:

$$\frac{c}{d} \gg \frac{1}{64\,\nu_a} \tag{8.24}$$

$$\frac{k}{d} \gg \frac{1}{64\,\nu_a^2} \tag{8.25}$$

Indien ingevuld wordt $\nu_a > 10^{-3}\ m^2/s$ en $d = 0{,}7 \cdot 10^{-3}\ m$ dan levert dit op:

$$c \gg 0{,}011 \quad m/s \tag{8.26}$$

$$L \ll 0{,}57 \quad m \tag{8.27}$$

Aan voorwaarde (8.27) is zeker voldaan. De vraag is het echter wel of voldaan is aan (8.26). Dit is zeer dubieus. Bij lagere waarden van ν_a wordt echter hieraan ook voldaan.

9. Konklusie.

Het blijkt dat met de opgezette modellen voor zowel water als afzetting grotere energieverliezen zijn te verklaren dan met behulp van de theorie dié dit energieverlies wil verklaren uit de vorm van de ribbels.

Indien gezocht wordt naar een verklaring van grote energieverliezen, dan moet voor de afzetting een viskeus gedrag worden aangenomen, daar dit hogere energie-verliezen geeft dan een visko-elastisch materiaal.

Het blijkt dat de keuze van het snelheidsprofiel van het water nabij de wand van grote invloed is. Er zou dan ook eens gekeken moeten worden naar deze snelheidsverdeling in een proefopstelling.

Bij de uitkomsten moet er wel rekening worden gehouden met het feit dat niet voldaan is aan de voorwaarde dat $\frac{a}{d} \ll 2$, zodat de invloed van de niet-lineaire termen niet te verwaarlozen is.

Met het gekoppelde model voor het systeem water-afzetting kan - uitgaande van een bepaalde golflengte - een benadering worden gegeven voor de voortplantingssnelheid. De met dit model berekende energie-verliezen verklaren het grote energieverlies, zoals gemeten bij de Ecker-leiding. Indien echter de theorie wordt toegepast op de Béverсé-leiding, dan lijkt dit nergens op (verklaard van het gemeten verval wordt hoogstens 1 %). Voor dit geval zijn de berekende lijnen voor $C_{f_{zz}}$ en ϕ_p weergegeven in de bijlagen. Dit geldt voor een logarithmisch snelheidsprofiel, omdat voor deze leiding daarover verder niets bekend is. Misschien dat daarin de reden zit dat het voor dit geval niet klopt. Wellicht is het zinvol om eens verder onderzoek te verrichten naar de snelheidsverdeling indien er een afzetting aanwezig is.

10. Literatuur.

1949 Wiederholt, W. "Über den Einfluss von Rohrablagerungen auf den hydraulischen Druckabfall", Gas- und Wasserfach, 96, 1949 no. 34, 31 Dez. pp 634-641.

1950 Seiferth, R. en Krüger, W. "Überraschend hohe Reibungsziffer einer Fernwasserleitung", VD-1-Zeitschrift, 92, 1950, no. 24, 11 Mär. pp 189-191.

1951 Schlag, A. en Simons, R. "Variations de la perte de charge du canal d'amenée de la centrale de Bévercé", La Homille Blanche, 6, 1951, Numéro Spécial B, pp 603 - 608.

1954 Thibessard, G. "Observations sur les dépôts de boue dans la galérie d'amenée de la centrale de Bévercé", La Homille Blanche, 9, 1954, Numéro Spécial A, pp 266-274.

1954 Thibessard, G. "Influence de dépôts boueux sur la perte de charge en conduits", Bull. du centre Belge d'Etude et de Doc. des Eaux, 1954, no. 25, pp 174-181.

1955 Lin, C.C. "Motion in the boundary layer with a rapidity oscillating exterbal flow", Actes IX-ième congrès Intern. de Mécanique Appliquée, Tome IV, pp 155-167.

1957 Miles, J.W. "On the generation of surface waves by shear flows", Journ. Fluid Mech. 3, 1957, no.3, pp 185-204.

1959 Miles, J.W. "On the generation of surface waves by shear flows (part 2)", Journ. Fluid Mech., 6, 1959, pp 568-582.

1959 Miles, J.W. en Conte, S.D. "On the numerical integration of the Orr-Sommerfeld equation", Journ. Soc. Indust. Appl. Math., I, 1959 no.4, Dec., pp 361-366.

1959 Brooke Benjamin, T. "Shearing flow over a wavy b boundary", Journ. Fluid Mech, 6, 1959, pp 161-205.

1968 Zagustin, K., Hsu, E.Y. and Street, R.L. "Turbulent flows over a moving boundary", Proc Am. Soc. Civ. Engrs., 94, 1968, no. WW 4, Nov., pp 397-414.

1969 Koltorff, G. "Die Riffelbildung im wandbelag von Rohrleitungen", Gas- und Wasserfach, 110, 1969, no. 48, 28 Nov., pp 1338-1344.

1970 Kendall, J.M. "The turbulent boundary layer over a wall with progressive surface waves", Journ. Fluid Mech., 41, 1970, part 2, pp 259-281.

1970 Klaassen, G.J. "Viskeuze afzettingen in leidingen", rapport T.H.Delft, 1970, Okt.

1972 Lindeijer, E.W. "Friction loss along a viscoelastic boundary", University of Cincinnati, 1972.

11. Bijlagen.

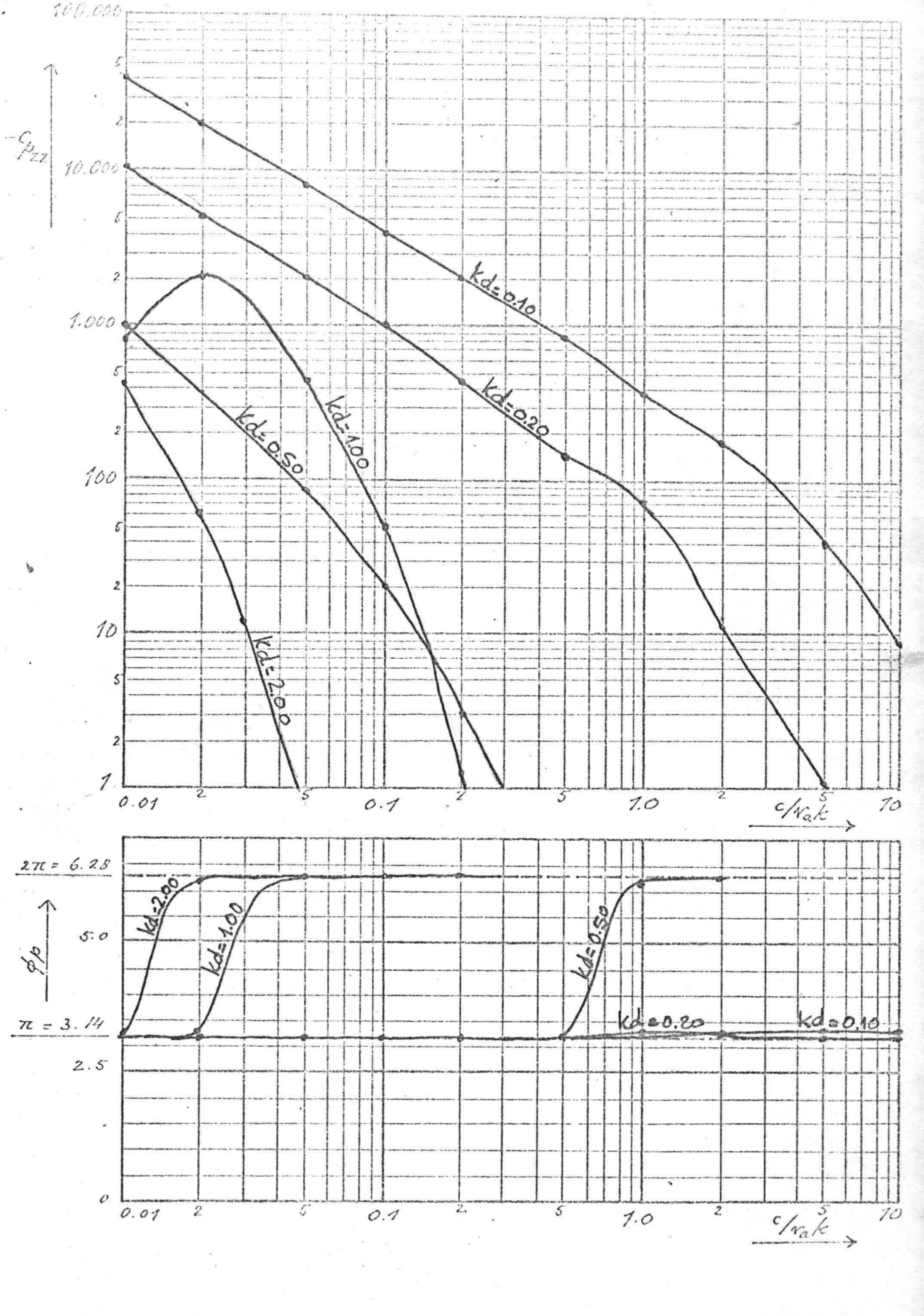
Als bijlagen zijn opgenomen:

(a) lijnen voor $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P voor de Béverçé-leiding voor drie verschillende waarden van y_0.

(b) algol programma voor de berekening van $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P voor het water als funktie van k en c.

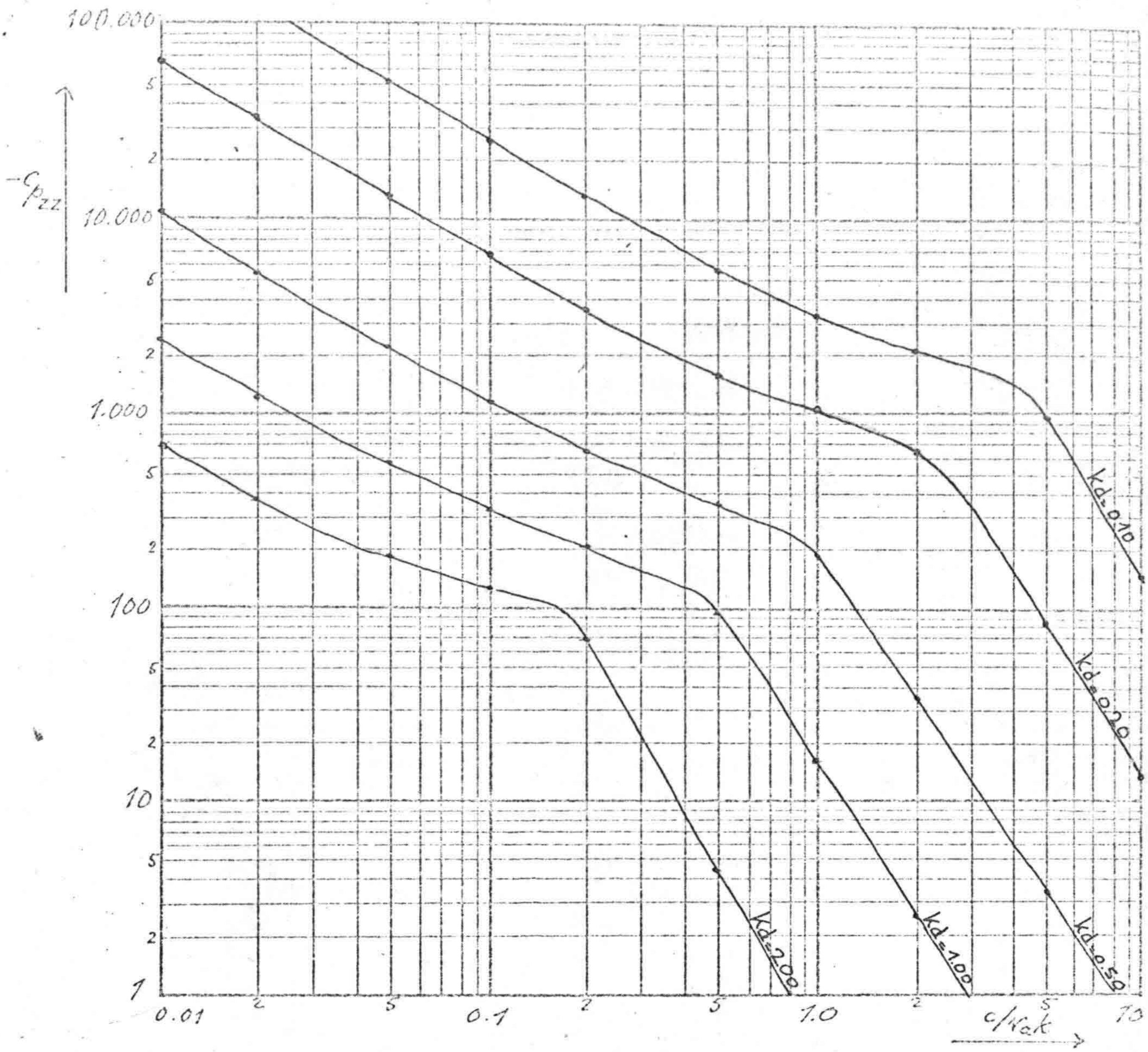
(c) algol programma voor de berekening van $C_{P_{zz}}$ en ϕ_P voor de afzetting als funktie van k en c.

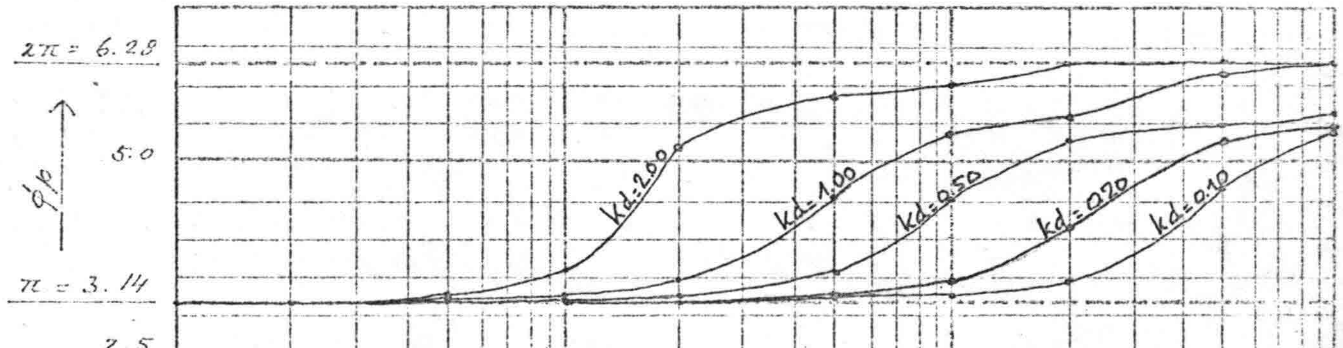
BÉVERCÉ TRANSPORTLEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) MET $Y_0 = 10^{-2} H$ EN $\nu_a = 10^{-3}\ M^2/SEK$



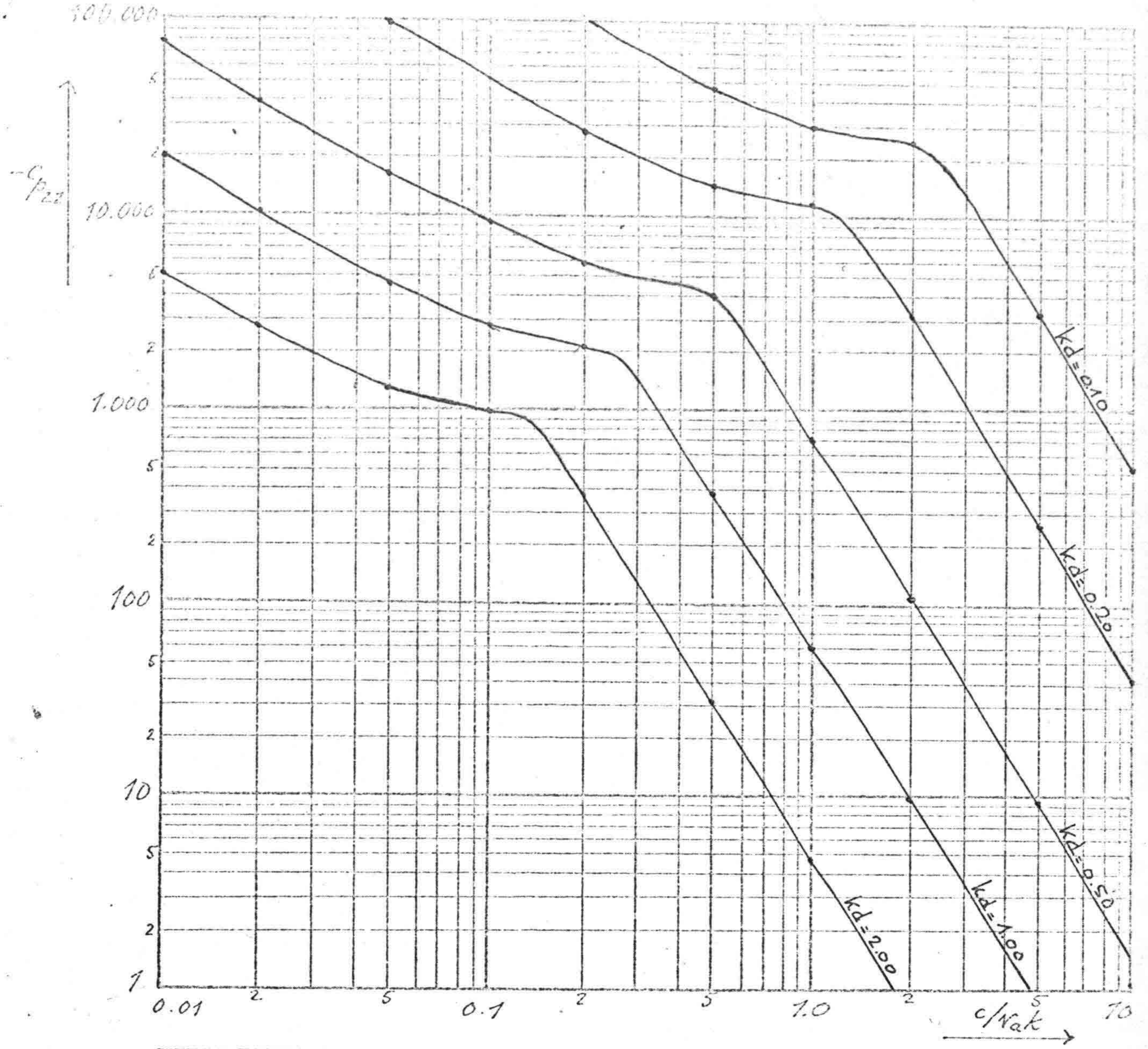
BEVERGE TRANSPORTLEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) MET $Y_0 = 10^{-3}.H$ EN $\nu_0 = 10^{-3}\ M^2/S$.

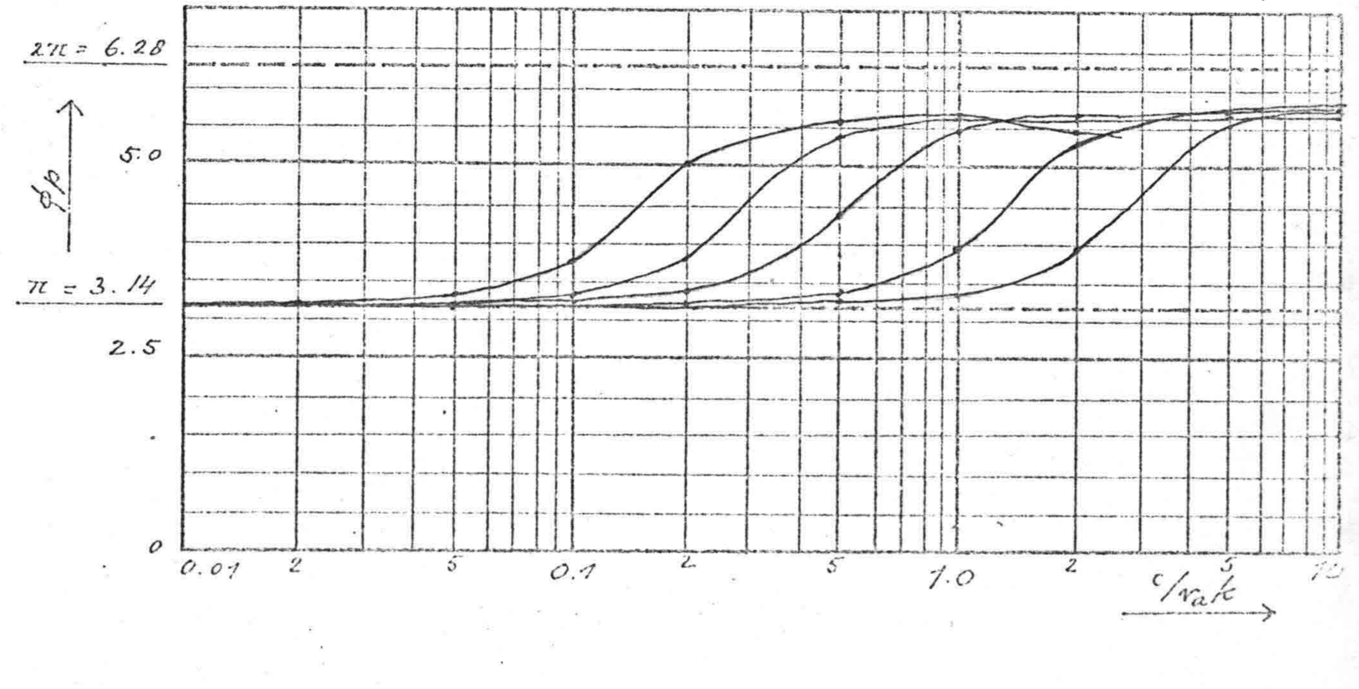
$= 196$ mm





BÉVERCÉ TRANSPORTLEIDING (LOG. SNELHEIDSPROFIEL) MET $Y_0 = 10^{-4} H$ EN $V_a = 10^{-3}$ M²/SEK.





ALGOL PROGRAMMA VOOR DE BEREKENING VAN CPZZ EN FIP VOOR HET WATER

FAST ALGOL COMPILER OF DELFT,RELEASE OF 1/10/1973 INCR

```
'BEGIN'
   'REAL'H,C,K,VMAX,VO,DP,S,A,B,ZC,WO,PO,PM,SOM,P,FI,AFGFI,
   FI1PO,A  FI1PO,FI1PM,A  FI1PM,FI3PO,A  FI3PO,FI3PM,A  FI3PM
   A3,A4,A5,A6,A7,A8,PI,RE,IM,D,ALFA,BETA,GR;
      'REAL'A1,A2;
   'REAL'T;
   'REAL'DIKTE,NUA;
'REAL'CU,FVU,CE1;
'REAL'VGEM,U1,ENV;
'REAL'AMPL;
   'INTEGER'INDEX1,INDEX2,I,J,N,AANTAL,TAL;
   'REAL''ARRAY'ARC(/0:6/),ARD(/0:6/);
   'REAL''ARRAY'COEF(/1:10/),KD(/1:5/);
   'INTEGER''ARRAY'ARA(/1:4/);
'REAL''PROCEDURE'F1(X);'REAL'X;F1:=RY(X,ARC);
'REAL''PROCEDURE'F3(X);'REAL'X;F3:=RY(X,ARD);
'REAL''PROCEDURE'AFGF1(X);'REAL'X;AFGF1:=RYA(X,ARC);
'REAL''PROCEDURE'AFGF3(X);'REAL'X;AFGF3:=RYA(X,ARD);
'REAL''PROCEDURE'RY(V,W);'REAL'V;'ARRAY'W;
   'BEGIN'
      SOM:=0;
      'FOR'I:=0'STEP'1'UNTIL'6.5'DO'
      SOM:=SOM+W(/I/)*V**I;
      RY:=SOM;
   'END';
'REAL''PROCEDURE'RYA(V,W);'REAL'V;'ARRAY'W;
   'BEGIN'
      SOM:=0;
      'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'6.5'DO'
      SOM:=SOM+W(/I/)*I*V**(I-1);
      RYA:=SOM;
   'END';
SETTING(1,120,60);
INREAL(0,H);
INREAL(0,VGEM);
INREAL(0,DIKTE);
INREAL(0,NUA);
INREAL(0,DP);
INARRAY(0,COEF);
INARRAY(0,KD);
AMPL:=0.00035;
OUTSTRING(1,'('     H     = ')');
FIX(1,1,4,H);
OUTSTRING(1,'('M')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('     VMAX = ')');
VMAX:=1.40*VGEM;
FIX(1,1,4,VMAX);
OUTSTRING(1,'('M/SEC')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('     VGEM = ')');
FIX(1,1,4,VGEM);
OUTSTRING(1,'('M/SEC')');
LINE(1,1);
```

```
OUTSTRING(1,'('     D      = ')');
FIX(1,1,4,DIKTE);
OUTSTRING(1,'('M')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('     AMPL  = ')');
FIX(1,1,5,AMPL);
OUTSTRING(1,'('M     ')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('     NUA   = ')');
FIX(1,1,8,NUA);
OUTSTRING(1,'('M**2/SEC')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('     DS    = ')');
FIX(1,1,8,DP);
PAGE(1);
TAL:=0;
C:=0;
   CNF:
AANTAL:=0:
TAL:=TAL+1;
K:=KD(/TAL/)/DIKTE;
OUTSTRING(1,'(' KD = ')');
FIX(1,1,2,KD(/TAL/));
OUTSTRING(1,'('            K = ')');
FIX(1,5,5,K);
OUTSTRING(1,'('                    ECHER LEIDING      ')');
LINE(1,3);
OUTSTRING(1,'(' C/NUA*K          - FACTOR F P      FI P              BETA
     BETA ALT.BER  C               CE1                EN.VERLIES')');
LINE(1,2);
   CNDM:
AANTAL:=AANTAL+1;
A2:=C;
C:=NUA*K*COEF(/AANTAL/);
'IF'C<VMAX'THEN''GOTO'FFYV;
C:=A2;
'GOTO'WIJK;
   FFYV:

U1:=VMAX/LN(501);
WO:=-C/U1;
ZC:=-K*H*EXP(-WO)*0.001;
   PO:=-ZC*(1-EXP(WO));
   PM:=PO-K*H/2;
S:=ABS(PO)/10;
T:=ABS(PM)/5;
   INDEX1:=-ENTIER((ABS(PM)-DP*0.999999)/T+1);
   INDEX2:=ENTIER((ABS(PO)-DP*0.999999)/S+1);
ARC(/0/):=0;
ARC(/1/):=1;
ARC(/2/):=-1/(2*ZC);
ARC(/3/):=1/6+1/(3*ZC**2);
ARC(/4/):=-1/18-1/(4*ZC**3);
ARC(/5/):=1/120+23/(720*ZC**2)+1/(5*ZC**4);
ARC(/6/):=0;
```

```
118  ARD(/0/):=-ZC;
119  ARD(/1/):=0;
120  ARD(/2/):=-ZC/2;
121  ARD(/3/):=-1/18+1/(24*ZC**2);
122  ARD(/4/):=-ZC/24-11/(432*ZC)-7/(144*ZC**3);
123  ARD(/5/):=0;
124  ARD(/6/):=0;
125  ARA(/1/):=0;
126  ARA(/2/):=1;
127  ARA(/3/):=1;
128  ARA(/4/):=2;
129  PI:=4*ARCTAN(1);
130        'BEGIN'
131  'REAL''ARRAY'AP(/INDEX1:INDEX2/),FI1(/INDEX1:INDEX2/),
132  AFGFI1(/INDEX1:INDEX2/);
132  'REAL''PROCEDURE'Q(X,Y,Z);'REAL'X,Y,Z;Q:=Z;
135  'REAL''PROCEDURE'R(X,Y,Z);'VALUE'X;'REAL'X,Y,Z;
138     R:=Y*((ZC+X)**2*LN(1+X/ZC)-1)/((ZC+X)**2*LN(1+X/ZC));
139  'REAL''PROCEDURE'RR(XX,YY,ZZ);'VALUE'XX;'REAL'XX,YY,ZZ;
142     'BEGIN''INTEGER'M;'REAL'U1,U2,SS;
145        'IF'XX<0'THEN'SS:=T'ELSE'SS:=S;
149        M:=SIGN(XX)*(ENTIER((ABS(XX)-DP*0.99999)/SS)+1);
150  'BEGIN'
151     'REAL'RRKO,RRMO,GER1,GER2,GER3,GVW;
152     'INTEGER'L;
153     'REAL''ARRAY'RRARK(/0:4/),RRARM(/0:4/);
154     RRARK(/0/):=0;RRARM(/0/):=0;
156     GER1:= AP(/M/);
157     GER2:=FI1(/M/);
158     GER3:=AFGFI1(/M/);
159     GVW  :=XX-AP(/M/);
160     'FOR'L:=1'STEP'1'UNTIL'4.5'DO'
161     'BEGIN'
162  RRARK(/L/):=GVW*Q(GER1+ARA(/L/)/2*GVW,GER2+ARA(/L/)/2*RRARK(/L-1/),GER3+
163  ARA(/L/)/2*RRARM(/L-1/));
163  RRARM(/L/):=GVW*R(GER1+ARA(/L/)/2*GVW,GER2+ARA(/L/)/2*RRARK(/L-1/),GER3+
164  ARA(/L/)/2*RRARM(/L-1/));
164     'END';
165     RRKO:=1/6*(RRARK(/1/)+2*RRARK(/2/)+2*RRARK(/3/)+RRARK(/4/));
166     RRMO:=1/6*(RRARM(/1/)+2*RRARM(/2/)+2*RRARM(/3/)+RRARM(/4/));
167     U1:=GER2+RRKO;
168     U2:=GER3+RRMO;
169  'END';
170        RR:=-(2/XX*U2-1/(XX**2)*U1)+R(XX,YY,ZZ);
171     'END';
172  'PROCEDURE'RK(X0,Y0,Z0,DX,F,G,X1,Y1,Z1);'VALUE'DX;
174  'REAL'X0,Y0,Z0,X1,Y1,Z1,DX;
175  'REAL''PROCEDURE'F,G;
175  'COMMENT'RK INTEGREERT HET SYSTEEM
176     Y'=F(X,Y,Z)
176     Z'=G(X,Y,Z)
176  VOOR 1 STAP, GROOT DX, EN MET STARTWAARDEN X0, Y0 EN Z0;
176  'BEGIN'
177     'REAL'K0,M0;
178     'REAL''ARRAY'ARK(/0:4/),ARM(/0:4/);
```

```
      ARK(/0/):=0;ARM(/0/):=0;
      'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'4.5'DO'
      'BEGIN'
     ARK(/J/):=DX*F(X0+ARA(/J/)/2*DX,Y0+ARA(/J/)/2*ARK(/J-1/),Z0+ARA(/J/)/2
     *ARM(/J-1/));
     ARM(/J/):=DX*G(X0+ARA(/J/)/2*DX,Y0+ARA(/J/)/2*ARK(/J-1/),Z0+ARA(/J/)/2
     *ARM(/J-1/));
      'END';
    K0:=1/6*(ARK(/1/)+2*ARK(/2/)+2*ARK(/3/)+ARK(/4/));
    M0:=1/6*(ARM(/1/)+2*ARM(/2/)+2*ARM(/3/)+ARM(/4/));
      X1:=X0+DX;
      Y1:=Y0+K0;
      Z1:=Z0+M0;
   'END' VAN RK;
   'COMMENT':NU VOLGT DE INTEGRATIE VAN F1 IN POSITIEVE P-RICHTING;
   P:=DP; N:=0;
   FI:=F1(P);
   AFGFI:=AFGF1(P);
   INTF1POS: N:=N+1; AP(/N/):=P; FI1(/N/):=FI; AFGFI1(/N/):=AFGFI;
   'IF' (P+S) > P0 'THEN''GOTO'LP1;
   RK(P,FI,AFGFI,S,Q,R,P,FI,AFGFI);
   'GOTO'INTF1POS;LP1:
   RK(P,FI,AFGFI,ABS(P0-P),Q,R,GR,FI1P0,A  FI1P0);
   'COMMENT':NU VOLGT DE INTEGRATIE VAN F1 IN NEGATIEVE P-RICHTING;
   P:=-DP; N:=0;
   FI:=F1(P);
   AFGFI:=AFGF1(P):
   INTF1NEG: N:=N-1; AP(/N/):=P; FI1(/N/):=FI; AFGFI1(/N/):=AFGFI;
   'IF' (P-T) < PM 'THEN''GOTO'LN1:
   RK(P,FI,AFGFI,-T,Q,R,P,FI,AFGFI);
   'GOTO'INTF1NEG;LN1:
   RK(P,FI,AFGFI,-ABS(PM-P),Q,R,GR,FI1PM,A  FI1PM);
   'COMMENT':NU VOLGT DE INTEGRATIE VAN F3 IN POSITIEVE P-RICHTING;
   P:=DP:
   FI:=F3(P);
   AFGFI:=AFGF3(P);
   INTF3POS:
   'IF' (P+S) > P0 'THEN''GOTO'LP3;
               RK(P,FI,AFGFI,S,Q,RR,P,FI,AFGFI);
   'GOTO'INTF3POS;LP3:
   RK(P,FI,AFGFI,ABS(P0-P),Q.RR,GR,FI3P0,A  FI3P0);
   'COMMENT':NU VOLGT DE INTEGRATIE VAN F3 IN NEGATIEVE P-RICHTING;
   P:=-DP;
   FI:=F3(P);
   AFGFI:=AFGF3(P);
   INTF3NEG:
   'IF' (P-T) < PM 'THEN''GOTO'LN3;
               RK(P,FI,AFGFI,-T,Q,RR,P,FI,AFGFI);
   'GOTO'INTF3NEG;LN3:
   RK(P,FI,AFGFI,-ABS(PM-P),Q,RR,GR,FI3PM,A  FI3PM); .
   A3:=FI1P0*LN(P0)+FI3P0;
   A4:=LN(-PM)+FI3PM/FI1PM;
   A5:=W0*(A  FI1P0*LN(P0)+A  FI3P0)+W0/P0*FI1P0-W0*A4*A  FI1P0;
   A6:=FI1P0*A4-A3;
   A7:=+W0*PI*A  FI1P0;
```

```
ST ALGOL COMPILER OF DELFT,RELEASE OF 1/10/1973                INCR.NR.+SOURC

 247   A8:=+PI*FI1PO;
 248   RE:=-WO*(A5*A6-A7*A8);
 249   IM:=-WO*(A6*A7+A5*A8);
 250   D:=A6**2+A8**2;
 251   ALFA:=-RE/D+WO/(ZC*EXP(WO));
 252   BETA:=+IM/D;
 253   'END';
 254   A1:= SQRT(ALFA**2+BETA**2)*U1**2/C**2;
 255   'IF'ALFA>0'THEN'A2:=ARCTAN(BETA/ALFA)+PI'ELSE'
 258      'BEGIN''IF'BETA>0'THEN'A2:=ARCTAN(BETA/ALFA)+2*PI'ELSE'
 262      A2:=ARCTAN(BETA/ALFA)
 263      'END';
 264      WIJK:
 264   FIX(1,2,5,C/(NUA*K));
 266   FIX(1,7,8,A1);
 267   FIX(1,3,8,A2);
 268   FIX(1,2,8,BETA):
 269   FIX(1,2,8,-PI*ZC*WO*WO/D);
 270   FIX(1,3,8,C);
 271   CE1:=-0.5*A1*SIN(A2);
 272   FIX(1,5,8,CE1);
 273   ENV:=AMPL*AMPL*C*C*C*K*K*CE1*4/(VGEM*H*9.81);'COMMENT'VOOR BUIS:
 274   FIX(1,1,8,ENV);
 275   LINE(1,2 );
 276   'IF'AANTAL¬=10'THEN''GOTO'CNDM;
 278   PAGE(1);
 279   'IF'TAL¬=5'THEN''GOTO'CNF;
 281   'COMMENT'
 281   NU VOLGEN GETALKAARTEN
 281   OP DE EERSTE STAAN ACHTEREENVOLGENS:H EN VGEM
 281   OP DE VOLGENDE:DIKTE EN NU VAN DE AFZETTING
 281                  DS
 281                  DE COEFFICIENTENARRAY VOOR WAARDEN VAN C/NUA*K
 281                  EN DE ARRAY VAN KD-WAARDEN;
 281   'END'

0 ERRORS FOUND
CPU-TIME USED FOR COMPILATION:   184 CENTISEC.
```

ALGOL PROGRAMMA VOOR DE BEREKENING VAN CPZZ EN FIP VOOR DE AFZETTING

ST ALGOL COMPILER OF DELFT,RELEASE OF 1/10/1973 INCR.NR.+SOURC

```
 0  'BEGIN'
 1     'REAL'C,K,NEL,NVI,RO,D,O,R,ARGBT,PI,MODBT,KD,M1,M2,RE,IM,CPZZ,FIP,
 2     A1,A2,B1,B2,C1,C2,D1,D2,BT1,BT2,ENV,AMPL,CE1,VGEM,H;
 2    'REAL'EPM1,ENM1,CM2,SM2;
 3     'REAL'ALFA1,ALFA2;
 4  'REAL'VAR,S;
 5     'INTEGER'X,Y;
 6     'REAL''ARRAY'A(/1:8,1:8/);
 7          'PROCEDURE'INVGAU(A,N,EPS,SINGULIER);
 8          'VALUE'N;
 9          'INTEGER'N;'REAL'EPS;'ARRAY'A;
12          'LABEL'SINGULIER;
13  'BEGIN''INTEGER'I,J,K;'REAL'PIVOT,Z;
16          'ARRAY'B,C(/1:N/);'INTEGER''ARRAY'P,Q(/1:N/);
18          'FOR'K:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
19  'BEGIN'PIVOT:=0;
21          'FOR'I:=K'STEP'1'UNTIL'N'DO'
22          'FOR'J:=K'STEP'1'UNTIL'N'DO'
23  'BEGIN''IF'ABS(A(/I,J/))>ABS(PIVOT)'THEN'
25  'BEGIN'PIVOT:=A(/I,J/);P(/K/):=I;Q(/K/):=J;
29  'END'
30  'END';
31          'IF'ABS(PIVOT)<=EPS'THEN''GOTO'
33          SINGULIER;
33          'IF'P(/K/)¬=K'THEN'
34  'BEGIN''FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
36  'BEGIN'Z:=A(/P(/K/),J/);A(/P(/K/),J/):=A(/K,J/);
39          A(/K,J/):=Z
40  'END'
41  'END';
42          'IF'Q(/K/)¬=K'THEN'
43  'BEGIN''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
45  'BEGIN'Z:=A(/I,Q(/K/)/);A(/I,Q(/K/)/):=A(/I,K/);
48          A(/I,K/):=Z
49  'END'
50  'END';
51          'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
52  'BEGIN''IF'J=K'THEN'
54  'BEGIN'B(/J/):=1/PIVOT;C(/J/):=1
57  'END''ELSE'
59  'BEGIN'B(/J/):=-A(/K,J/)/PIVOT;C(/J/):=A(/J,K/)
62  'END';
63          A(/K,J/):=A(/J,K/):=0
64  'END';
65          'FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
66          'FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
67          A(/I,J/):=A(/I,J/)+C(/I/)*B(/J/)
68  'END';
69          'FOR'K:=N'STEP'-1'UNTIL'1'DO'
70  'BEGIN''IF'P(/K/)¬=K'THEN'
72  'BEGIN''FOR'I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
74  'BEGIN'Z:=A(/I,P(/K/)/);A(/I,P(/K/)/):=A(/I,K/);
77           A(/I,K/):=Z
78  'END'
```

```
'END';
          'IF'O(/K/)¬=K'THEN'
'BEGIN''FOR'J:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO'
'BEGIN'Z:=A(/O(/K/),J/);A(/O(/K/),J/):=A(/K,J/);
          A(/K,J/):=Z
'END'
'END'
'END'
'END';
PI:=4*ARCTAN(1);
INREAL(0,NEL);
INREAL(0,NVI);
INREAL(0,RO);
INREAL(0,D);
OUTSTRING(1,'('   N EL = ')');
FLO(1,3,1,NEL);
OUTSTRING(1,'('N/M2')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('   N VI = ')');
FLO(1,3,1,NVI);
OUTSTRING(1,'('M2/SEC')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('   RO   = ')');
FIX(1,4,0,RO);
OUTSTRING(1,'('KG/M3')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('   D    = ')');
FIX(1,1,4,D);
OUTSTRING(1,'('M')');
INREAL(0,AMPL);
INREAL(0,H);
INREAL(0,VGEM);
LINE(1,5);
OUTSTRING(1,'('   AMPL = ')');
AFIX(1,1,4,AMPL);
OUTSTRING(1,'('M')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('   H    = ')');
AFIX(1,1,4,H);
OUTSTRING(1,'('M')');
LINE(1,1);
OUTSTRING(1,'('   VGEM = ')');
AFIX(1,1,4,VGEM);
OUTSTRING(1,'('M/SEC')');
LINE(1,8);
OUTSTRING(1,'('  C                    K                         CP ZZ
FI P      EN.VERLIES              CE1            C*RO/(NVI*K)')');
INREAL(0,K);
KD:=K*D;
HERHAAL:
LINE(1,1);
INREAL(0,C);
ALFA1:=NVI;
ALFA2:=-NEL*K*C;
Q:=(NEL**2+NVI**2*K**2*C**2-NEL*RO*C**2)/(NEL**2+NVI**2*K**2*C**2);
```

```
136  R:=-NVI*RO*K*C**3/(MEL**2+NVI**2*K**2*C**2);
137  'IF'ABS(Q)<'-10'THEN'
138        'BEGIN''IF'R>0'THEN'ARGBT:=PI/4'ELSE'
142        ARGBT:=-PI/4;
143        'GOTO'GIEL;
144        'END';
145  'IF'Q>0'THEN'ARGBT:=0.5*ARCTAN(R/Q)'ELSE'
148     'BEGIN''IF'R>0'THEN'ARGBT:=0.5*ARCTAN(R/Q)+PI/2'ELSE'
152     ARGBT:=0.5*ARCTAN(R/Q)-PI/2
153     'END';
154  GIEL:
154  MODBT:=(Q*Q+R*R)**0.25;
156  BT1:=MODBT*COS(ARGBT);
157  BT2:=MODBT*SIN(ARGBT);
158  M1:=BT1*KD;
159  M2:=BT2*KD;
160  EPM1:=EXP(M1);
161  ENM1:=EXP(-M1);
162  CM2:=COS(M2);
163  SM2:=SIN(M2);
164  A(/1,1/):=EXP(KD);
165  A(/1,2/):=0;
166  A(/1,3/):=EXP(-KD);
167  A(/1,4/):=0;
168  A(/1,5/):=EPM1*CM2;
169  A(/1,6/):=-EPM1*SM2;
170  A(/1,7/):=ENM1*CM2;
171  A(/1,8/):=ENM1*SM2;
172  A(/2,1/):=0;
173  A(/2,2/):=EXP(KD);
174  A(/2,3/):=0;
175  A(/2,4/):=EXP(-KD);
176  A(/2,5/):=EPM1*SM2;
177  A(/2,6/):=EPM1*CM2;
178  A(/2,7/):=-ENM1*SM2;
179  A(/2,8/):=ENM1*CM2;
180  A(/3,1/):=0;
181  A(/3,2/):=EXP(KD);
182  A(/3,3/):=0;
183  A(/3,4/):=-EXP(-KD);
184  A(/3,5/):=EPM1*BT2*CM2+EPM1*BT1*SM2;
185  A(/3,6/):=EPM1*BT1*CM2-EPM1*BT2*SM2;
186  A(/3,7/):=-ENM1*BT2*CM2+ENM1*BT1*SM2;
187  A(/3,8/):=-ENM1*BT1*CM2-ENM1*BT2*SM2;
188  A(/4,1/):=-EXP(KD);
189  A(/4,2/):=0;
190  A(/4,3/):=EXP(-KD);
191  A(/4,4/):=0;
192  A(/4,5/):=-EPM1*BT1*CM2+EPM1*BT2*SM2;
193  A(/4,6/):=EPM1*BT2*CM2+EPM1*BT1*SM2;
194  A(/4,7/):=ENM1*BT1*CM2+ENM1*BT2*SM2;
195  A(/4,8/):=-ENM1*BT2*CM2+ENM1*BT1*SM2;
196  A(/5,1/):=1;
197  A(/5,2/):=0;
198  A(/5,3/):=1;
```

```
A(/5,4/):=0;
A(/5,5/):=1;
A(/5,6/):=0;
A(/5,7/):=1;
A(/5,8/):=0;
A(/6,1/):=0;
A(/6,2/):=1;
A(/6,3/):=0;
A(/6,4/):=1;
A(/6,5/):=0;
A(/6,6/):=1;
A(/6,7/):=0;
A(/6,8/):=1;
A(/7,1/):=2;
A(/7,2/):=0;
A(/7,3/):=2;
A(/7,4/):=0;
A(/7,5/):=BT1*BT1-BT2*BT2+1;
A(/7,6/):=-2*BT1*BT2;
A(/7,7/):=BT1*BT1-BT2*BT2+1;
A(/7,8/):=-2*BT1*BT2;
A(/8,1/):=0;
A(/8,2/):=2;
A(/8,3/):=0;
A(/8,4/):=2;
A(/8,5/):=2*BT1*BT2;
A(/8,6/):=BT1*BT1-BT2*BT2+1;
A(/8,7/):=2*BT1*BT2;
A(/8,8/):=BT1*BT1-BT2*BT2+1;


INVGAU(A,8,'-12,EINDE);

A1:=-A(/1,6/);
A2:=-A(/2,6/);

B1:=-A(/3,6/);
B2:=-A(/4,6/);

C1:=-A(/5,6/);
C2:=-A(/6,6/);

D1:=-A(/7,6/);
D2:=-A(/8,6/);

RE:=A2-B2+2*ALFA1*K/(RO*C)*(A1-B1+BT1*C1-BT2*C2-BT1*D1+BT2*D2)
           +2*ALFA2*K/(RO*C)*(-A2+B2-BT2*C1-BT1*C2+BT2*D1+BT1*D2);
IM:=-A1+B1+2*ALFA1*K/(RO*C)*(A2-B2+BT2*C1+BT1*C2-BT2*D1-BT1*D2)
           +2*ALFA2*K/(RO*C)*(A1-B1+BT1*C1-BT2*C2-BT1*D1+BT2*D2);
CPZZ:=-SQRT(RE*RE+IM*IM);
'IF'RE>0'THEN'FIP:=ARCTAN(IM/RE)+PI'ELSE'
   'BEGIN''IF'IM>0'THEN'FIP:=ARCTAN(IM/RE)+2*PI'ELSE'
   FIP:=ARCTAN(IM/RE)
   'END';
CE1:=0.5*CPZZ*SIN(FIP);
```

T ALGOL COMPILER OF DELFT,RELEASE OF 1/10/1973 INCR.NR.+SOURCE

```
250  ENV:=-AMPL*AMPL*C*C*C*<*K*CE1*4/(VGEM*H*9.81);'COMMENT'VOOR BUIS;
251  FIX(1,2,5,C);
252  FIX(1,8,5,K);
253  FIX(1,10,8,CPZZ);
254  FIX(1,8,5,FIP);
255  FLO(1,5,2,ENV);
256  FIX(1,5,4,CE1);
257  FIX(1,2,3,C*RO/(NVI*K));
258  'GOTO'STOP;
259  EINDE:
259  OUTSTRING(1,'('INVERSIE MATRIX GESTRAND')');
261  STOP:
261  ININTEGER(0,X);
263  'IF'X=1'THEN''GOTO'HERHAAL;
265  PAGE(1);
266  'END'
```

ERRORS FOUND
U-TIME USED FOR COMPILATION: 172 CENTISEC.