



TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

VLIEGTUIGBOUWKUNDE

Rapport VTH - 166

**HET WIKKELEN VAN DRUKVATEN  
VOLGENS  
DE "NETTING" THEORIE**

door

**Ir. Th. de Jong**

DELFT - NEDERLAND

april 1971



TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

VLIEGTUIGBOUWKUNDE

Rapport VTH - 166

**HET WIKKELEN VAN DRUKVATEN  
VOLGENS  
DE "NETTING" THEORIE**

door

**Ir. Th. de Jong**

DELFT - NEDERLAND

april 1971

### Samenvatting

Dit rapport behandelt het ontwerp van gewikkelde drukvaten volgens de "netting" theorie. De hars wordt hierbij beschouwd als een niet meedragend bindmiddel; de vezels, gewikkeld volgens geodetische lijnen, worden overal gelijk belast.

De optimale vorm van het drukvat en het wikkelpatroon worden door slechts één parameter volledig bepaald.

Deze parameter geeft tevens een eenvoudig verband tussen de overdruk in het vak en het benodigd aantal vezels.

Inhoud

	blz.
Notaties	3
1. Inleiding	5
2. Ligging van de vezel	6
3. De meridiaan van het optimale drukvat	7
4. Karakteristieken van het optimale drukvat	11
5. De vormparameter $q$	13
6. Berekening van enkele grootheden van het optimale drukvat	15
7. Uitwerking van de integralen	18
8. Conclusies	20
9. Literatuuropgave	22
10. Grafieken	23

Notaties

- a constante; geeft bij gekozen vorm en vezelmateriaal een relatie tussen toelaatbare druk en aantal vezels.
- f kracht per lengte-eenheid loodrecht op de vezels t.g.v. de overdruk in het vat.
- $f_0$  contactdruk tussen vezel en kern tijdens wikkelen
- l lengte van één vezel tussen de minimale en maximale straal
- n aantal vezels in een doorsnede loodrecht op de omwentelingsas
- p overdruk
- q vormparameter
- v volume van het drukvat
- w gewicht van het drukvat
- x coördinaat langs de omwentelingsas
- y coördinaat loodrecht op de omwentelingsas
- $y_0$  straal van de poolopeningen
- C gewicht per lengte-eenheid van de vezels
- F kracht in de vezel in langsrichting t.g.v. de overdruk
- $F_0$  voorspankracht tijdens het wikkelen
- $I^2$  imaginaire wortel van vergelijking (24)
- L  $l/y_0$
- R kromtestraal
- V  $v/y_0^3$
- X  $x/y_0$
- Y  $y/y_0$
- $Y_i$  kleinste straal van het optimale gedeelte van het drukvat
- $Y_u$  grootste straal van het optimale gedeelte van het drukvat
- $\alpha$  wikkelhoek
- $\gamma$  soortelijk gewicht

$\varepsilon$  rotatiehoek

$\varphi$  hoek tussen raakvlak aan het drukvat en de omwentelings-  
as

$\sigma_{br}$  treksterkte van de vezel

$\theta$  variabele in elliptische integralen.

## 1. Inleiding

Het systeem van draden in een gewikkelde constructie kan worden opgevat als één lange, ononderbroken draad die alleen in staat is om een trekbelasting op te nemen. De "netting" theorie veronderstelt dat de stijfheid van het matrix-materiaal verwaarloosbaar klein is t.o.v. de stijfheid van de vezels, waardoor in de belaste vezel-hars-combinatie de vezels geen belasting op elkaar kunnen overdragen via afschuiving in de hars.

Het ontwerp van een drukvat volgens de "netting" theorie gaat dan ook uit van een overall even grote trekbelasting in de vezels.

Bovendien wordt aangenomen dat tijdens het wikkelproces de vezels geen wrijving ondervinden van het onderliggende oppervlak en daardoor de kortste weg zullen zoeken tussen twee punten op dat oppervlak.

Dit houdt geometrisch in dat de vezels liggen langs geodetische lijnen.

Het probleem van het ontwerp van een optimaal drukvat wordt nu teruggebracht tot de vraag welke vorm de meridiaan van het vat moet hebben opdat het systeem van draden, overall gelijk belast en liggend volgens geodetische lijnen, kan voldoen aan het evenwicht onder hydrostatische druk.

De met de "netting" theorie afgeleide vormen, isotensoïden, worden weergegeven door elliptische integralen die alleen door middel van numerieke methoden kunnen worden opgelost. In deze integralen is er slechts één parameter die de vorm van het optimale drukvat en het wikkelpatroon bepaalt.

Iedere vorm blijkt een klein gebied rond de opening van het gat te hebben waar de volgens geodetische lijnen gewikkelde vezels niet aan het evenwicht kunnen voldoen. De randen van de openingen zullen dan ook moeten worden versterkt.

## 2. Ligging van de vezel

In figuur 1 zijn  $F_0$  en  $f_0$  krachten die tijdens het wikkelen op de draad worden uitgeoefend.  $F_0$  is de voorspankracht,  $f_0$  de daaruit voortkomende contactdruk. Als wordt aangenomen dat er tijdens het wikkelen geen wrijving is tussen draad en kern, dan vormen  $f_0$  en  $F_0$  een evenwichtssysteem.

Beschouw nu een elementje van de kern waarvan de diagonaal wordt gevormd door de vezel (Zie figuur 2a.)

Als draadelement BD klein is en de vezel tijdens het wikkelen geen weerstand tegen buiging heeft, dan is er een vlak waarin de contactdrukken  $f_0$  geen componenten hebben.

In dit vlak is in figuur 2b het beschouwde element weergegeven; omdat de spankrachten  $F_0$  de enige krachten zijn in het vlak van tekening ligt de vezel langs een rechte lijn.

Uit figuur 2a volgt nu:

$$dx = ds \cdot \cos \varphi \quad (1)$$

$$y = s \cdot \sin \varphi \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{s d\beta}{ds} \quad (\text{bij benadering}) \quad (3)$$

De hoek  $\alpha$  is de wikkelhoek; dit is dus de hoek tussen de vezel en de meridiaan in een bepaald punt  $x, y$ .

Verder volgt uit  $\triangle OBD$  in figuur 2b:

$$\alpha = d\beta + d\alpha + \alpha \quad (4)$$

$$d\beta = -d\alpha$$

Uit (1) t/m (4) en  $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$  is op eenvoudige wijze af te leiden dat

$$\frac{d\alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{dy}{y} \quad (5)$$



Integratie van (5) geeft

$$\ln \sin \alpha = - \ln y + \ln c = \ln \frac{c}{y}$$

waaruit volgt:

$$\sin \alpha = \frac{c}{y} \quad (6)$$

De wikkelhoek  $\alpha$  heeft tijdens het wikkelen op de plaats waar de draad "omkeert" de waarde  $\pi/2$ . Dit gebeurt bij de poolopeningen van het omwentelingslichaam. Uit (6) volgt dan dat  $c$  de straal is van deze openingen.

Deze straal wordt in het vervolg  $y_0$  genoemd, waarmee (6) wordt:

$$\sin \alpha = \frac{y_0}{y} \quad (7)$$

Formule (7) is de formule voor een geodetische lijn op een omwentelingslichaam met minimale straal  $y_0$  (Clairaut). Kennelijk gaat een vezel, die geen weerstand tegen buiging heeft en met een zekere voorspanning zonder wrijving over een omwentelingslichaam wordt gelegd, langs een geodetische lijn liggen.

### 3. De meridiaan van het optimale drukvat.

Een noodzakelijk veronderstelling bij het gebruik van de "netting" theorie is dat het drukvat een membraan is. Dit houdt in dat wordt aangenomen dat er geen dwarskrachten zijn of momenten waarvan de vectoren liggen in het vlak van de wand. De spanningen zijn gelijkmatig over de dikte van de wand verdeeld.

Uit (7) blijkt dat de wikkelhoek in een bepaald punt afhankelijk is van de afstand van dat punt tot de omwentelingsas. Omdat meestal verschillende lagen over elkaar heen worden gewikkeld zal de wikkelhoek over de dikte van de wand variëren. Bij de bepaling van de vorm van de meridiaan zal deze variatie in de wikkelhoek worden verwaarloosd.

Beide voorgaande veronderstellingen zijn juist op plaatsen waar

de wanddikte klein is t.o.v. de overige afmetingen van het drukvat.

Het systeem van draden dat de dragende constructie van het drukvat vormt is in evenwicht als ieder draadelement afzonderlijk in evenwicht is. In figuur 3 is een draadelement weergegeven in een vlak door dat element loodrecht op het omwentelingsoppervlak. De kromtestraal van het element is ter plaatse R, f is de belasting op de draad t.g.v. de overdruk p in het vat, F is de hierdoor ontstane kracht in de vezels. Volgens de "netting" theorie kunnen op de vezel geen andere krachten werken.

Uit figuur 3 volgt voor de belasting f (per lengte-eenheid)

$$fdl = fRd\psi = 2F\sin \frac{1}{2} d\psi = Fd\psi$$

$$\text{ofwel} \quad f = \frac{F}{R} \quad (8)$$

In figuur 4 is een uit het drukvat ter plaatse van x en x + dx gesneden "band" weergegeven.

Zijn er in totaal n draden "doorgesneden", dan vereist het evenwicht:

$$nfdl = 2\pi y \cdot ds \cdot p \quad (9)$$

(8) en (9) combineren geeft:

$$\frac{F}{R} = \frac{2\pi y p}{n} \frac{ds}{dl} = \frac{2\pi y p}{n} \cos \alpha \quad (10)$$

Nu is de kromming  $\frac{1}{R}$  in het punt x,y uit te drukken in de kromming  $\frac{1}{R_1}$  van de meridiaan in x,y en de kromming  $\frac{1}{R_2}$  in x,y van de snijlijn van het omwentelingsoppervlak met het vlak loodrecht op de meridiaan.

En wel volgens:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \alpha + \frac{1}{R_2} \sin^2 \alpha \quad (\text{formule van Euler}) \quad (11)$$

waarin

$$\frac{1}{R_1} = - \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} \quad (12)$$

en

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{y \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}} \quad (13)$$

(Formules 12 en 13 zijn de uit de differentiaal-meetkunde bekende formules voor de hoofd-kromtestralen in punt  $x, y$  van een omwentelingsoppervlak).

Combineren van (7), (10), (11), (12) en (13) geeft:

$$\frac{nF}{\pi p} \left[ \frac{y_0^2}{y^3} \frac{1}{\left\{1 - \frac{y_0^2}{y^2}\right\}^{1/2}} \frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{1/2}} - \left\{1 - \frac{y_0^2}{y^2}\right\}^{1/2} \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}} \right] = 2y$$

Links en rechts vermenigvuldigen met  $\frac{dy}{dx}$  en daarna integreren over  $x$  levert:

$$\frac{nF}{\pi p} \left[ \left\{1 - \frac{y_0^2}{y^2}\right\}^{1/2} \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-1/2} \right] = y^2 + K_1 \quad (14)$$

waarin

$$\left\{1 - \frac{y_0^2}{y^2}\right\}^{1/2} = \cos \alpha$$

$$\text{en } \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{-1/2} = \cos \varphi$$

$$\text{ofwel: } \boxed{nF \cos \alpha \cos \varphi = \pi y^2 \cdot p + K_2} \quad (15)$$

In (15) geeft het linkerlid de totale kracht weer die de vezels in een doorsnede loodrecht op de omwentelingsas in X-richting kunnen leveren. Het rechterlid geeft de totale kracht die de

vezels in die richting moeten opnemen.

Voor een gesloten drukvat heeft  $K_1$  (resp.  $K_2$ ) de waarde nul. (K heeft een waarde als het drukvat behalve door inwendige druk ook door uitwendige krachten wordt belast, zoals bijvoorbeeld bij de uitstroomtuit van een raketmotor het geval is.)

Zijn alle draden in een doorsnede gewikkeld onder dezelfde hoek  $\alpha$  dan zullen de krachten F componenten hebben in tangentiële richting die een moment geven met de vector langs de X-as. Bij oppompen zou het drukvat zichzelf afwikkelen.

In de praktijk van het wikkelen wordt dit probleem vanzelf opgelost doordat  $\frac{1}{2}n$  draden onder  $+\alpha$  en  $\frac{1}{2}n$  draden onder  $-\alpha$  worden gewikkeld. Voor de voorgaande evenwichtsbeschouwing van een draad-element heeft dit uiteraard geen consequenties.

Formule (14), die in feite het evenwicht van een draadelement beschrijft, geeft tevens de vorm van de meridiaan weer.

Eerst worden ingevoerd de dimensieloze grootheden X, Y en a volgens:

$$X = \frac{x}{y_0} \quad (16)$$

$$Y = \frac{y}{y_0} \quad (17)$$

$$a = \frac{nF}{\pi p} \cdot \frac{1}{y_0^2} \quad (18)$$

In deze dimensieloze grootheden wordt (14):

$$a \left[ \left\{ 1 - \frac{1}{Y^2} \right\}^{1/2} \left\{ 1 + \left( \frac{dY}{dX} \right)^2 \right\}^{-1/2} \right] = Y^2$$

waaruit volgt:

$$\cot \varphi = \frac{dX}{dY} = \pm \frac{Y^3}{\left\{ a^2(Y^2-1) - Y^6 \right\}^{1/2}} \quad (19)$$

$$X = \pm \int \frac{Y^3 dY}{\left\{ a^2(Y^2-1) - Y^6 \right\}^{1/2}} + K \quad (20)$$

waarin  $K=0$  als het centrum van het assenstelsel op de rotatie-as t.p.v. de maximale straal  $Y_u$  wordt gelegd.

$$X = - \int_{Y_u}^{Y(X)} \frac{Y^3 dY}{\left\{ a^2(Y^2-1) - Y^6 \right\}^{1/2}}$$

(In (19) en (20) kan het + of - teken worden weggelaten als slechts één helft van het axiaalsymmetrische drukvat wordt beschouwd.) Uit (20) kan  $X$  als functie van  $Y$  slechts met numerieke methoden worden bepaald. Toch kunnen uit (19) en (20) reeds enige conclusies worden getrokken over de vorm van de meridiaan van het optimale drukvat.

#### 4. Karakteristieken van het optimale drukvat

$\frac{dX}{dY} = \cot \varphi$  moet overal reëel zijn. Dit houdt in dat in de noemer van (19) de vorm onder het wortelteken altijd positief moet zijn.

$$f(Y^2) = a^2(Y^2-1) - Y^6 \gg 0 \quad (21)$$

Het is meteen in te zien dat  $Y=1$  (ofwel  $y=y_0$ , waar  $\alpha=\pi/2$ ) niet aan deze voorwaarde voldoet; dit verklaart waarom voor  $\alpha=\pi/2$ ,  $y=y_0$  en  $K_2=0$  formule (15) tot een tegenstrijdigheid leidt. Er bestaat kennelijk geen rotatiesymmetrisch lichaam, van de ene poolopening naar de andere gewikkeld volgens geodetische lijnen, waarbij in ieder punt de belasting geheel kan worden opgenomen door de vezels. Er is echter wel een gebied aan te wijzen waar dit wel het geval is.

Uit figuur 5 blijkt dat voor de reële waarden van  $Y$  tussen  $Y_1$  en  $Y_u$ , dus in het in de figuur gearceerde gebied, aan voorwaarde (21) wordt voldaan.

In  $Y=Y_1$  en  $Y=Y_u$  geldt volgens (19):

$$\frac{dY}{dX} = \operatorname{tg}\varphi = 0$$

zodat de vorm van een optimaal gewikkeld drukvat moet zijn als in figuur 6 weergegeven.

Onderscheid hierin:

- 1e Straal  $Y=1$ , de straal van de poolopening
- 2e Straal  $Y=Y_1$ , de kleinste straal waar de volgens geodetische lijnen gewikkelde vezels de belasting nog volledig kunnen opnemen.
- 3e Straal  $Y=Y_u$ , de grootste straal van het drukvat.

De meridiaan heeft tussen  $Y=Y_1$  en  $Y=Y_u$  een buigpunt waar geldt:

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 0$$

Met (19) is eenvoudig af te leiden dat ter plaatse van dit buigpunt voor  $Y$  geldt:

$$Y = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} = 1,225 \quad (22)$$

De ligging van het buigpunt van de meridiaan is onafhankelijk van de grootte  $a$ . Van alle meridianen die door (20) worden beschreven ligt het buigpunt onveranderlijk bij  $Y=1,225$ .

Volgens (7) geldt in dit buigpunt voor de wikkelhoek:

$$\begin{aligned} \sin \alpha_b &= \left(\frac{2}{3}\right)^{1/2} \\ \alpha_b &= 54,7^\circ \end{aligned} \quad (23)$$

In lit. 4 wordt vermeld dat optimaal wikkelen slechts mogelijk is voor waarden van  $Y$  tussen  $\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}$  en  $Y_u$ , en dat voor  $Y < \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2}$  een versterking nodig is om de belasting in de richting van de meridiaan op te nemen. Uit bovenstaande blijkt echter dat deze

versterking alleen nodig is voor  $Y < Y_1$ .

5. De vormparameter q. (Lit.2)

De vergelijking

$$a^2(Y^2-1) - Y^6 = 0 \quad (24)$$

is een derdegraadsvergelijking in  $Y^2$  waarvan  $Y_1^2$  en  $Y_u^2$  twee wortels zijn.

De derde wortel is imaginair; stel deze  $I^2$ , dan is:

$$a^2(Y^2-1) - Y^6 = (Y_u^2 - Y^2)(Y^2 - Y_1^2)(Y^2 - I^2) = 0 \quad (24a)$$

Invoeren van de vormparameter

$$q = \frac{Y_u^2}{Y_1^2} \quad (25)$$

levert voor de wortels van (24a):

$$Y_1^2 = \frac{q^2 + q + 1}{q(q + 1)} \quad (26)$$

$$Y_u^2 = \frac{q^2 + q + 1}{q + 1} \quad (27)$$

$$I^2 = - (Y_1^2 + Y_u^2) \quad (28)$$

terwijl bovendien wordt gevonden:

$$a = \frac{(q^2 + q + 1)^{3/2}}{q(q + 1)} \quad (29)$$

De vorm van het optimale drukvat wordt slechts door één groot-  
heid bepaald, namelijk de verhouding van de grootste en de klein-  
ste diameter van het optimale gedeelte.

Voor  $q=1$  wordt:  $Y_i = Y_u = (\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}$

$q=1$  geeft een cilinder weer met straal  $(\frac{3}{2})^{\frac{1}{2}}$ . Omdat de volgens geodetische lijnen gewikkelde vezels voor  $Y < Y_i$  niet meer volledig de belasting door hydrostatische druk kunnen opnemen zal van een cilinder met eindschotten alleen het cilindrische gedeelte optimaal kunnen worden gewikkeld en moeten de eindschotten worden versterkt. Een oneindig lange cilinder is een limietgeval van het in figuur 6 geschetste type van drukvaten. De wikkelhoek voor de cilinder is  $54,7^\circ$ .

Dit is dezelfde hoek als die t.p.v. het buigpunt van de door (20) beschreven meridianen.

(26) en (27) geven met  $\sin \alpha = \frac{1}{Y}$  voor de wikkelhoeken t.p.v.  $Y_i$  en  $Y_u$ :

$$\sin \alpha_{y_i} = \left\{ \frac{q(q+1)}{q^2 + q + 1} \right\}^{1/2} \quad (30)$$

$$\sin \alpha_{y_u} = \left\{ \frac{q+1}{q^2 + q + 1} \right\}^{1/2} \quad (31)$$

Voor een drukvat met  $q > 1$  is de wikkelhoek bij  $Y = Y_u$  altijd kleiner dan  $54,7^\circ$ .

Wordt ter plaatse van  $Y_u$  dan ook een cilindrisch tussenstuk gewikkeld, dan zal dit tussenstuk een wikkelhoek  $< 54,7^\circ$  hebben en niet optimaal zijn.

Het tussenstuk zal dan ook versterkt moeten worden met wikkelingen die een wikkelhoek  $> 54,7^\circ$  hebben, zodanig dat alle vezels dezelfde belasting hebben. Worden alle vezels evenveel belast, dan zullen de rekken eveneens overal gelijk zijn en treden er geen discontinuïteiten op tussen cilinder en eindschot. (Lit. 3)

Voor  $q \gg 1$  wordt het niet-optimale gedeelte tussen  $Y=1$  en  $Y=Y_i$  zeer klein. Zo is voor  $q=5$  de straal  $Y_i$  reeds zeer dicht tot 1 genaderd (afwijking slechts 1,7%). In de praktijk is het door een grote  $q$  te kiezen dan ook wel mogelijk geheel optimale drukvaten te



vervaardigen. De altijd aanwezige versterkingen rond de poolopeningen (denk aan aansluitingen voor het drukvat) kunnen bij grote  $q$  zo klein mogelijk worden gehouden.

Dit geldt tevens voor het gebied waar de veronderstellingen dat het drukvat een membraan is en de wikkelhoek over de wanddikte constant is niet gelden.

## 6. Berekening van enkele grootheden van het optimale drukvat

### 1° Het gewicht

Het gewicht van de versterkings-elementen aan de poolopeningen en van de constructie tussen  $Y_i$  en  $l$  wordt buiten beschouwing gelaten en aangenomen wordt dat het gewicht van de glas-hars constructie evenredig is met de lengte van de glasdraad.

$$\text{Met} \quad dL \cos \alpha \cos \varphi = dX \quad (\text{fig. 2a, } dL = \frac{dl}{y_0})$$

$$\text{en} \quad \cos \alpha \cos \varphi = \frac{Y^2}{a} \quad (15)$$

wordt gevonden:

$$\frac{dL}{dX} = \frac{a}{Y^2} \quad (32)$$

$$\frac{dL}{dY} = \frac{dL}{dX} \frac{dX}{dY}$$

geeft met (19) en (32)

$$\frac{dL}{dY} = \frac{a}{Y^2} \quad \frac{dX}{dY} = \frac{-aY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{1/2}}$$

De lengte van een glasvezel tussen  $Y=Y_i$  en  $Y=Y_u$  is nu:

$$L = a \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{-YdY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{1/2}} \quad (33)$$

De totale lengte van n glasvezels over het optimale gedeelte van het drukvat gewikkeld is dus:

$$L_t = 2na \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{-YdY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{1/2}} \quad (34)$$

Voor het gewicht van het optimale gedeelte van het drukvat geldt nu:

$$w = C \cdot l_t = C \cdot L_t \cdot y_o = -2Cn a y_o \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{YdY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{1/2}} \quad (35)$$

## 2° De inhoud

Als het centrum van het coördinaat-assenstelsel op de omwentelingsas ter plaatse van  $Y=Y_u$  ligt:

$$V = 2\pi \int_0^{X(Y_i)} Y^2 dX = 2\pi \int_{Y_u}^{Y_i} Y^2 \frac{dX}{dY} dY$$

Met (19):

$$V = -2\pi \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{Y^5 dY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{1/2}} \quad (36)$$

Formule (36) kan als volgt worden gesplitst:

$$V = + \frac{2\pi}{3} \left\{ a^2(Y^2-1) - Y^6 \right\}^{1/2} \Big|_{Y_u}^{Y_i} - \frac{2a^2\pi}{3} \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{YdY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{1/2}}$$

waarin de eerste term nul wordt.

$$V = V \cdot y_o^3 = - \frac{y_o^3 2a^2\pi}{3} \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{YdY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{1/2}} \quad (37)$$

3° Het gewicht per volume-eenheid

Met (35) en (37) wordt

$$\frac{w}{v} = c \frac{3p}{F} \quad (38)$$

waarin C het gewicht per lengte-eenheid van de vezel is.

$$\text{Met} \quad \frac{F}{C} = \frac{\sigma_{br}}{\gamma}$$

wordt (38):

$$\frac{w}{v} = 3p \frac{\gamma}{\sigma_{br}} \quad (39).$$

Bij een optimaal gewikkeld drukvat is het gewicht per volume-eenheid van het optimale gedeelte onafhankelijk van de vorm, dus van  $q$ , en wordt uitsluitend bepaald door de inwendige overdruk  $p$  en de specifieke sterkte  $\sigma_{br}/\gamma$  van de vezel.

Formules (18) en (29) geven voor een bepaalde  $q$  een eenvoudig verband tussen de inwendige overdruk en het benodigd aantal vezels.

4° Het verband tussen  $d\xi$  en  $dX$ 

Uit figuur 2a volgt:

$$d\xi = \frac{BC}{y} = \frac{\text{tg}\alpha}{y} (dx^2 + dy^2)^{1/2} = \frac{\text{tg}\alpha}{y} (dX^2 + dY^2)^{1/2}$$

$$\text{waarin} \quad \text{tg}\alpha = \frac{y_0}{(y^2 - y_0^2)^{1/2}} = \frac{1}{(Y^2 - 1)^{1/2}}$$

$$\frac{d\xi}{dY} = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dX}{dY}\right)^2\right\}^{1/2}}{(Y^2 - 1)^{1/2}} \cdot \frac{1}{Y}$$

Substitutie van (19) geeft met

$$\frac{d\xi}{dX} = \frac{d\xi}{dY} \frac{dY}{dX}$$

$$\frac{d\xi}{dX} = \frac{a}{Y^4} \quad (40)$$

Formule (40) kan met de lineaire benadering  $\frac{d\xi}{dX} = \frac{\Delta\xi}{\Delta X}$  worden gebruikt voor de besturing van een wikkelbank. (Zie lit. 3)

$\Delta X$  is de axiale verplaatsing van de draadgeleider, behorend bij een rotatie  $\Delta\xi$  van de wikkelmal.

### 7. Uitwerking van de integralen

De integralen in formules (20), (34) en (37) kunnen met behulp van de substitutie

$$Y^2 = Y_u^2 \cos^2 \Theta + Y_i^2 \sin^2 \Theta \quad (41)$$

worden omgezet in standaard elliptische integralen van de eerste en tweede soort.

Uit (41) volgt:

$$YdY = (Y_i^2 - Y_u^2) \sin \Theta \cos \Theta d\Theta \quad (42)$$

Met

$$a^2(Y^2 - 1) - Y^6 = (Y_u^2 - Y)(Y - Y_i)(Y^2 + Y_i^2 + Y_u^2) \quad (24a \text{ en } (28)$$

$$\text{en } q = \frac{Y_u^2}{Y_i^2} \quad (25)$$

wordt (20):

$$X = - \int_{Y_u}^{Y(X)} \frac{Y^2 dY}{\left\{ (Y_u^2 - Y^2)(Y^2 - Y_i^2)(Y^2 + Y_i^2 + Y_u^2) \right\}^{1/2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_0^{\Theta_1} \frac{(Y_u^2 \cos^2 \Theta + Y_i^2 \sin^2 \Theta) (Y_i^2 - Y_u^2) \sin \Theta \cos \Theta \, d\Theta}{\left[ (Y_u^2 - Y_i^2)^2 \left\{ Y_i^2 (\sin^2 \Theta + 1) + Y_u^2 (\cos^2 \Theta + 1) \right\} \sin^2 \Theta \cos^2 \Theta \right]^{1/2}} \\
 X &= Y_i (2q+1)^{1/2} \int_0^{\Theta_1} \frac{\left\{ 1 - \frac{q-1}{2q+1} \sin^2 \Theta \right\} - \frac{q+1}{2q+1}}{\left\{ 1 - \frac{q-1}{2q+1} \sin^2 \Theta \right\}^{1/2}} d\Theta \\
 X &= Y_i (2q+1)^{1/2} \left\{ \int_0^{\Theta_1} \left( 1 - \frac{q-1}{2q+1} \sin^2 \Theta \right)^{1/2} d\Theta - \frac{q+1}{2q+1} \int_0^{\Theta_1} \left( 1 - \frac{q-1}{2q+1} \sin^2 \Theta \right)^{-1/2} d\Theta \right\}
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

(41) en (42) geven een direkte koppeling tussen X en Y via de parameter  $\Theta_1$ .

In lit. 1 zijn de uitkomsten van de integralen in (42) getabelleerd voor 19 waarden van  $\Theta_1$  tussen  $0^\circ$  en  $90^\circ$ . Voor een bepaalde q zijn dus 19 punten van de meridiaan van het drukvat bekend. Deze punten kunnen worden gebruikt voor het bepalen van de contour van de wikkel-kern.

In de grafieken 1 en 2 is het uitgewerkte verband gegeven tussen X en Y voor een aantal waarden van q.

(In de tabellen in lit. 1 wordt gebruik gemaakt van de parameter  $\alpha$ , waarbij  $\sin^2 \alpha = \frac{q-1}{2q+1}$  en  $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$

Omdat  $1 \leq q < \infty$  geldt altijd:  $\sin^2 \alpha \leq 1/2$

De parameter  $\alpha$  is daarom slechts bruikbaar tot  $45^\circ$ . Nadeel van het gebruik van de tabellen is dan ook dat slechts een beperkt aantal waarden van  $\frac{q-1}{2q+1}$  is gegeven en q bovendien niet willekeurig kan worden gekozen. Om dit nadeel te ondervangen en een vrije keuze van q mogelijk te maken is voor de voorbeelden in de grafieken 1 en 2 een computer gebruikt voor de uitwerking van de integralen in (42)).

Voor de inhoud en de totale lengte van de vezels van een drukvat wordt met de substitutie (41) gevonden:

$$v = \frac{2}{3} \pi y_0^3 \left\{ \frac{(q^2 + q + 1)^5}{(q^2 + q)^3 (2q + 1)} \right\}^{1/2} \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{q-1}{2q+1} \sin^2 \Theta \right)^{-1/2} d\Theta \quad (43)$$

$$l_t = 2\pi y \frac{q^2 + q + 1}{(q^2 + q)^{1/2} (2q + 1)^{1/2}} \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{q-1}{2q+1} \sin^2 \Theta \right)^{-1/2} d\Theta \quad (44)$$

### 8. Conclusies

Het uitgangspunt voor het ontwerp van een volgens de "netting" theorie gewikkeld drukvat kan niet zijn een van tevoren gekozen vorm. Om een drukvat te verkrijgen waarvan de vezels allemaal op hetzelfde niveau zijn belast, moet worden uitgegaan van de isotensoïden ("q-krommes") uit de grafieken (1) en (2).

Slechts de parameter q kan vrij worden gekozen, waarna de vorm van het drukvat en het wikkelpatroon vastliggen. De poolopeningen dienen relatief klein te zijn (q zo groot mogelijk) om het gebied rond de openingen waar de vezels de belasting niet geheel kunnen opnemen en waar geen membraan-spanningstoestand heerst klein te houden. Om een grote opeenhoping van vezels en hars rond de openingen te voorkomen, kunnen eventueel vaten met verschillende q-waarde over elkaar heen worden gewikkeld, mits q voldoende groot is. (Zie grafiek 2, het verschil tussen de krommes voor q=100 en q=∞ is slechts gering).

Een cilindrisch tussenstuk kan altijd worden gewikkeld, mits dit in tangentiële richting wordt versterkt met extra wikkelingen. Is het aantal tangentiële wikkelingen juist gekozen, dan hebben alle vezels dezelfde spanning; de rekken zijn dan eveneens overal gelijk. Bij het onder druk brengen van het vat treden dan ook geen discontinuïteiten op tussen cilinder en eind-

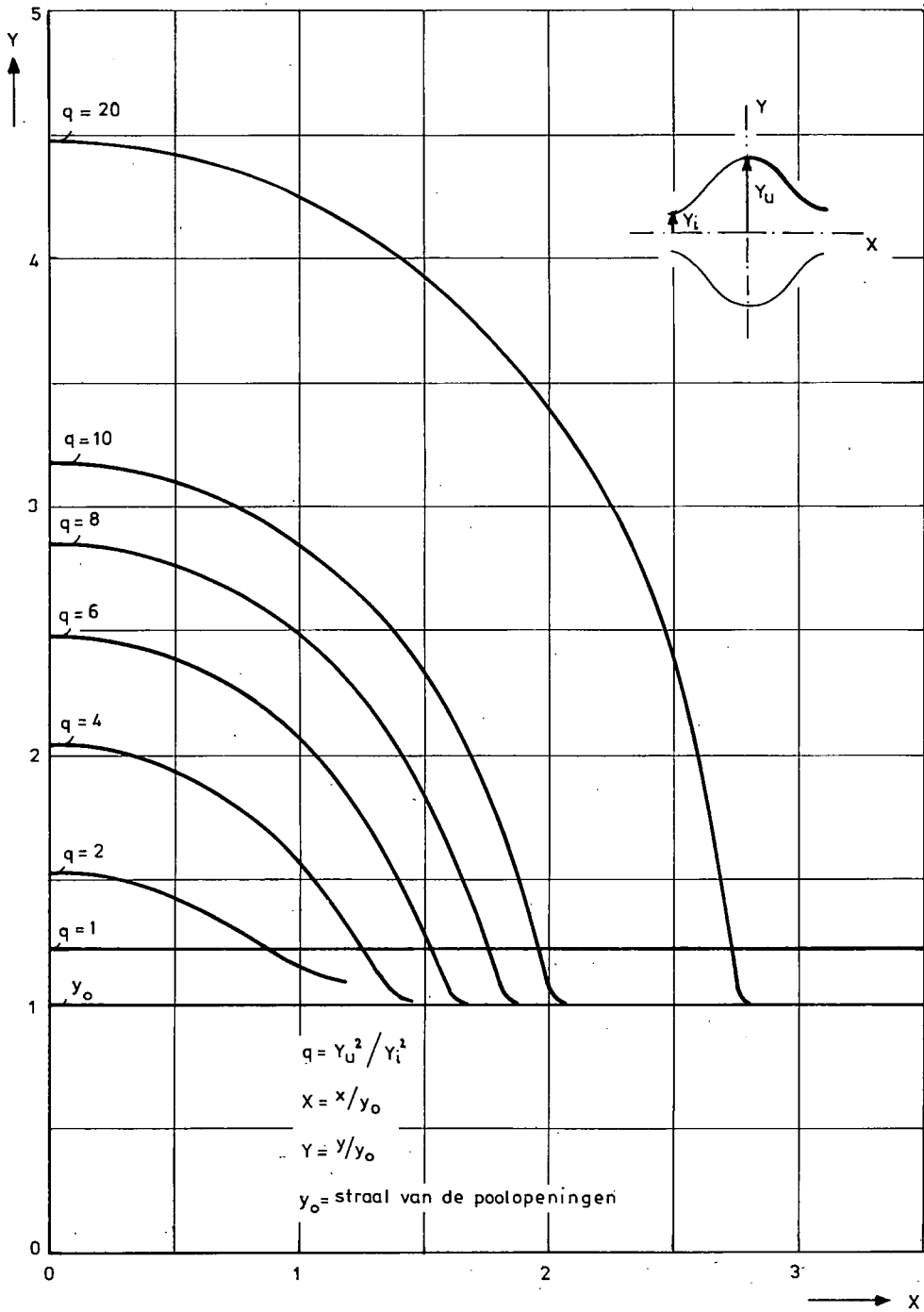
schotten.

De hars, waarvan de invloed bij het gebruik van de "netting" theorie wordt verwaarloosd, stelt de vezels in staat belastingen op te nemen. Meestal zal bij het oppompen van drukvaten de hars eerder bezwijken dan de vezels, waardoor in feite de samenhang van de vezels verloren gaat. De "netting" theorie geeft voor de maximaal toelaatbare druk dan ook een te optimistische waarde.

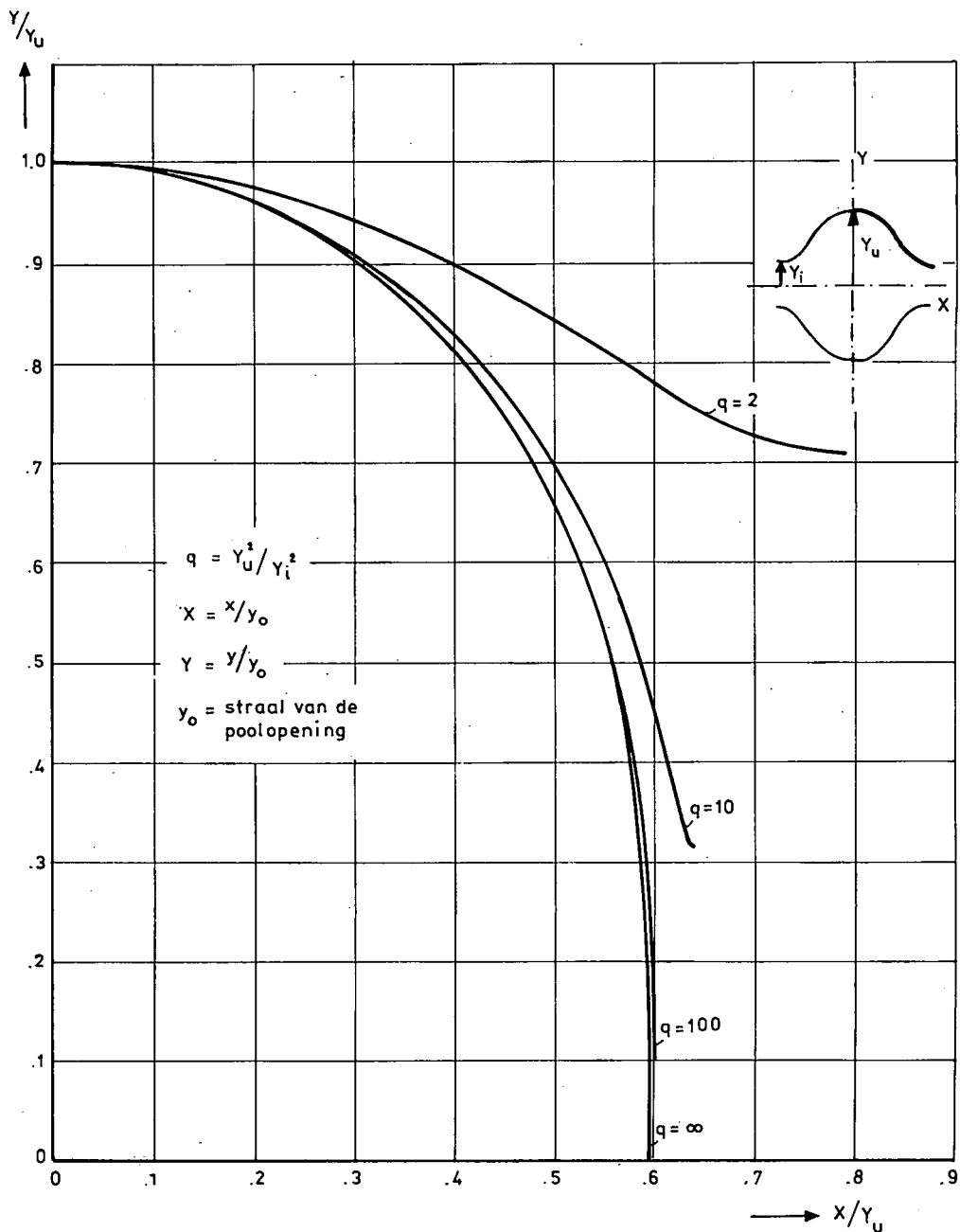
Literatuur

1. M. Abramowitz,  
J.A. Stegun  
Handbook of Mathematical Functions  
Dover Publications, Inc.  
New York (page 608-626)
2. L.J. de Kruyk  
Onderzoek naar de technologische  
en theoretische aspecten van rota-  
tie-symmetrische drukvaten, belast  
door hydrostatische druk.  
Niet gepubliceerd afstudeerverslag,  
Onderafdeling der Vliegtuigbouw  
T.H. Delft, Lab. voor Vormgeving  
en Fabricage.
3. W.H.M. van Dreumel  
Verdere uitwerking van het  
Wikkelproces.  
Niet gepubliceerd afstudeerverslag  
Onderafdeling der Vliegtuigbouw  
T.H. Delft, Lab. voor Vormgeving  
en Fabricage.
4. J. Zickel  
Isotensoid Pressure Vessels  
A.R.S. Journal 32, 1962  
(page 950-951)





GRAF. 1: VORMEN VAN OPTIMALE DRUKVATEN (isotensoiden)  
 VOOR EEN AANTAL WAARDEN VAN  $q$  BIJ CONSTANTE  $y_0$ .



GRAF. 2 : VORMEN VAN OPTIMALE DRUKVATEN (isotensoiden)  
 VOOR EEN AANTAL WAARDEN VAN  $q$  BIJ CONSTANTE  $y_u$ .

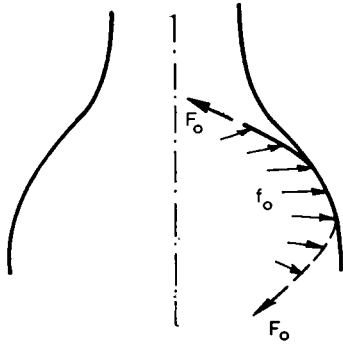


FIG.1: VEZEL GESPANNEN OVER EEN ROTATIE-SYMMETRISCHE KERN

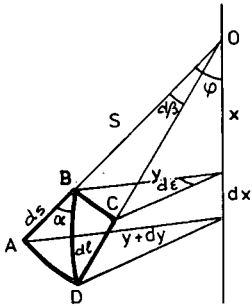


FIG.2a: GEOMETRIE VAN EEN GEWIKKELD DRAADELEMENT

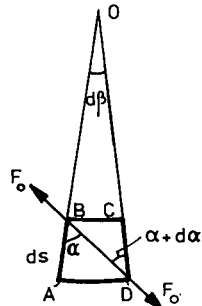


FIG.2b: GEWIKKELD DRAADELEMENT IN PLAT VLAK WEERGEGEVEN

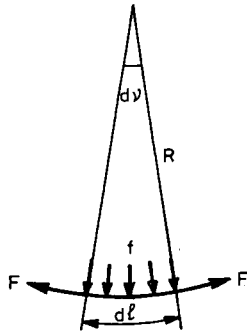


FIG.3: HET DOOR HYDROSTATISCHE DRUK BELASTE VEZEL-ELEMENT.

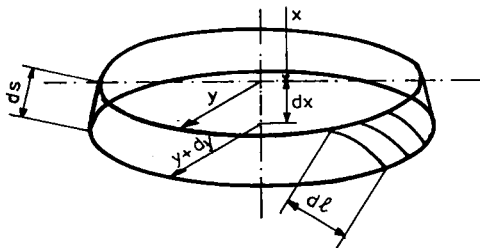


FIG.4: UIT HET DRUKVAT GESNEDEN BAND, LOODRECHT OP DE OMWENTELINGSAS.

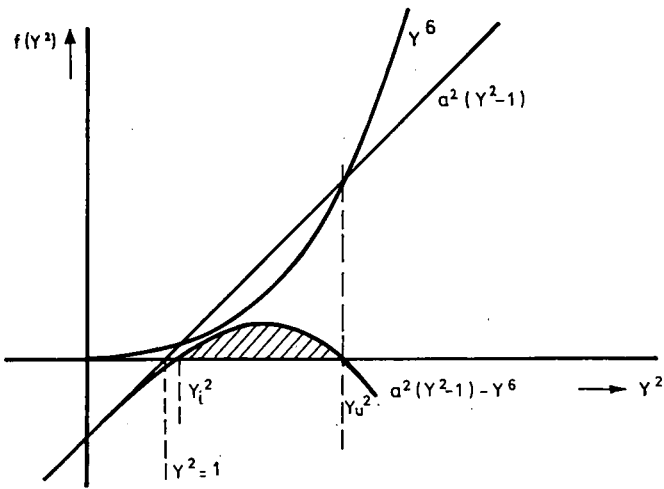


FIG. 5 : HET GEBIED WAAR AAN VOORWAARDE (21) WORDT VOLDAAN.

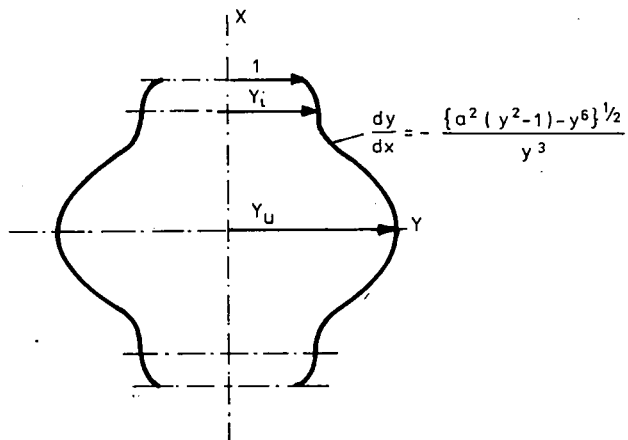


FIG. 6 : DE VORM VAN HET OPTIMAAL DRUKVAT

1  
2  
3  
4  
5  
6  
7  
8  
9  
10  
11  
12  
13  
14  
15  
16  
17  
18  
19  
20  
21  
22  
23  
24  
25  
26  
27  
28  
29  
30  
31  
32  
33  
34  
35  
36  
37  
38  
39  
40  
41  
42  
43  
44  
45  
46  
47  
48  
49  
50  
51  
52  
53  
54  
55  
56  
57  
58  
59  
60  
61  
62  
63  
64  
65  
66  
67  
68  
69  
70  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100