

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

**Max-plus algebra en een toepassing in de luchtvaart
(Engelse titel: Max-plus algebra and an application
in aviation)**

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

**BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE**

door

ROLF RENGERS

**Delft, Nederland
Juni 2017**

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

”Max-plus algebra en een toepassing in de luchtvaart”
(Engelse titel: ”Max-plus algebra and an application in aviation”)

ROLF RENGERS

Technische Universiteit Delft

Begeleiders

Dr.ir. J.W. van der Woude
Prof.dr.ir. H.X. Lin

Overige commissieleden

Drs. E.M. van Elderen
Dr. N.V. Budko

Juni, 2017

Delft

Samenvatting

Dit bacheloreindverslag gaat over Max-plus Algebra. Dit is een algebraïsche structuur die gebruikt kan worden om roosterplanning te modelleren. In plaats van de normale optelling en vermenigvuldiging worden de operaties 'maximum nemen' en optellen gebruikt. Wanneer Max-plus Algebra wordt gebruikt in matrices, spelen de eigenwaarden en eigenvectoren van deze matrices een rol. Dit alles wordt toegepast in een voorbeeld in de luchtvaart, waar de max-plus algebra wordt gebruikt om een optimale dienstregeling te vinden in een netwerk met twee hubs op verschillende continenten.

Voorwoord

Voor u ligt het bacheloreindverslag dat geschreven is ten behoeve van het behalen van mijn bachelordiploma Technische Wiskunde aan de TU Delft. Ik heb er met veel plezier aan gewerkt en ik hoop dat u het met evenveel plezier zult lezen.

In dit verslag zal ik ingaan op max-plus algebra en dit toepassen op een situatie in de luchtvaart. Max-plus algebra is een op het oog eenvoudige wiskundige structuur, die toch verrassende handigheden bevat. Het mooie is dat dit rechtstreeks gekoppeld kan worden aan een voorbeeld uit de praktijk, iets waarvan ik altijd een voorstander ben geweest en zal zijn. Wiskunde op zichzelf is iets prachtigs, maar het wint aan schoonheid als het gebruikt kan worden om het alledaagse leven te verbeteren.

Een woord van dank voor mijn begeleiders Jacob van der Woude en Hai Xiang Ling voor hun ondersteuning bij dit project en Neil Budko en Emiel van Elderen voor het plaatsnemen in de beoordelingscommissie.

Rolf Rengers
Delft, juni 2017

Inhoudsopgave

1	Max-plus Algebra	1
1.1	Basiseigenschappen van max-plus algebra	1
1.2	Max-plus algebra in matrixnotatie	2
1.3	Rekenvoorbeelden	2
1.4	Voorbeeld toepassing	3
1.5	Eigenwaarden en eigenvectoren	3
2	Situatieschets in de luchtvaart	5
2.1	Hub-and-Spoke model	5
2.2	Toename aantal blokken	6
2.3	Minimum overstaptijden	6
2.4	Doel van het onderzoek	8
3	Max-plus Algebra in de luchtvaart	9
3.1	Waarom max-plus Algebra?	9
3.2	Vergelijkingen opstellen	9
3.3	Resultaten	11
4	Conclusie	13
5	Discussie	15
6	Maple Code	19

Hoofdstuk 1

Max-plus Algebra

In dit hoofdstuk zal een beknopte uitleg van de hoofdpunten van de max-plus algebra gegeven worden. Er zal hierbij worden ingegaan op wat max-plus algebra precies is, welke notatie gebruikt wordt, de neutrale elementen en hoe max-plus algebra kan worden gebruikt in matrices. Verder wordt er ingegaan op de eigenwaarden en -vectoren en het belang daarvan, en er zal worden afgesloten met een rekenvoorbeeld.

1.1 Basiseigenschappen van max-plus algebra

De max-plus algebra is een algebraïsche structuur bestaande uit de reële getallen waar de standaard operaties van optellen en vermenigvuldiging vervangen zijn door respectievelijk het nemen van een maximum en het optellen. Dit kunnen we op de volgende manier met weer wiskundige precisie beschrijven: Laat \mathbb{R}_{\max} de notatie zijn voor $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, \oplus een binaire operator zijn op \mathbb{R}_{\max} met $x \oplus y = \max\{x, y\}$, en laat \otimes de binaire operatie op \mathbb{R}_{\max} met $x \otimes y = x + y$. Dan is de **max-plus algebra** de algebraïsche structuur bestaande uit \mathbb{R}_{\max} en de binaire operaties \oplus and \otimes .

Interessante gevolgen van het gebruik van het maximum als de additieve operator is de additieve identiteit en het consequente gebrek van een additieve inverse in dit systeem. Wanneer we een additieve identiteit zoeken, zoeken we een element ε zódat $\varepsilon \oplus x = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}_{\max}$. De enige manier waarop we dit kunnen garanderen is door te kiezen voor $\varepsilon = -\infty$, dan geldt immers $\varepsilon \otimes x = \max\{-\infty, x\} = x$ voor alle $x \in \mathbb{R}_{\max}$. Het gebrek aan een additieve inverse zien we hierin, dat er informatie verloren gaat als we een maximum hebben genomen: We kunnen daaraan niet meer zien met welk getal een maximum was genomen (bijvoorbeeld: $3 \oplus 5 = 5 = 4 \oplus 5$). Verder geldt voor het multiplicatieve neutrale element dat $e = 0$, immers $0 \otimes a = 0 + a = a + 0 = a \otimes 0 = a$ voor alle $a \in \mathbb{R}_{\max}$.

Dit alles zorgt ervoor dat er minder structuur in de max-plus algebra is dan bij de 'gewone' algebra, maar er zijn nog steeds voldoende interessante fenomenen waar te nemen.

Samenvattend gelden in de max-plus algebra de volgende rekenregels:

$$\bullet a \oplus b = \max\{a, b\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_{\max} \quad (1.1)$$

$$\bullet a \otimes b = a + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_{\max} \quad (1.2)$$

$$\bullet \varepsilon = -\infty \quad (1.3)$$

$$\bullet \varepsilon \oplus a = \max\{-\infty, a\} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}_{\max} \quad (1.4)$$

$$\bullet \varepsilon \otimes a = -\infty + a = -\infty = \varepsilon \quad \forall a \in \mathbb{R}_{\max} \quad (1.5)$$

$$\bullet 0 \otimes a = 0 + a = a \quad \forall a \in \mathbb{R}_{\max} \quad (1.6)$$

$$\bullet \varepsilon \text{ is het neutrale element voor de additiviteit, } 0 \text{ voor de multiplicativiteit.} \quad (1.7)$$

1.2 Max-plus algebra in matrixnotatie

De theorie van max-plus algebra kan bij uitstek worden toegepast op matrices. De additieve bewerking is alleen gedefinieerd voor matrices van dezelfde grote en gebeurt elementsgewijs, terwijl multipliceren gedefinieerd is voor $n \times p$ -matrix (A) en een $p \times m$ -matrix (B):

$$[A \otimes B]_{ij} := \bigoplus_{k=1}^p (A_{ik} \otimes B_{kj}) \quad (1.8)$$

Dit is min of meer hetzelfde als matrixvermenigvuldigen in de 'normale' algebra.

De macht van $a \in \mathbb{R}_{\max}$ is gedefinieerd zoals je dat zou verwachten, en wordt genoteerd met:

$$a^{\otimes n} := \underbrace{a \otimes a \otimes \dots \otimes a}_{n \text{ keer}} = n \cdot a \quad (1.9)$$

In deze laatste vergelijking kunnen niet alleen natuurlijke getallen gebruikt worden, maar ook andere reële getallen. Dit is niet het geval voor matrices. Een macht berekenen van een matrix kan alleen bij vierkante matrices en met natuurlijke getallen als machten.

Uiteraard geldt dat de multiplicatieve bewerking voor de additieve bewerking gaat, dus optellen is belangrijker dan maximum nemen.

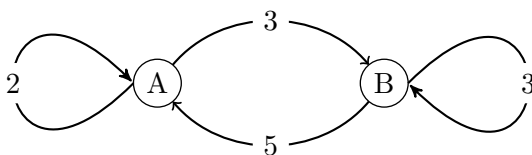
1.3 Rekenvoorbeelden

Om wat meer vertrouwd te raken met de definities en wat handigheid te krijgen in het rekenen, volgen hieronder eerst wat voorbeelden. laat $A = \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, en $B = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$. Dan

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \begin{bmatrix} 10 \oplus 8 & \varepsilon \oplus 2 \\ 5 \oplus 7 & 3 \oplus 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} \\ 5 \otimes A &= \begin{bmatrix} 5 \otimes 10 & 5 \otimes \varepsilon \\ 5 \otimes 5 & 5 \otimes 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & \varepsilon \\ 10 & 8 \end{bmatrix} \\ A \otimes B = AB &= \begin{bmatrix} 10 & \varepsilon \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 \otimes 8 \oplus \varepsilon \otimes 7 & 10 \otimes 2 \oplus \varepsilon \otimes 0 \\ 5 \otimes 8 \oplus 3 \otimes 7 & 5 \otimes 2 \oplus 3 \otimes 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 18 \oplus \varepsilon & 12 \oplus \varepsilon \\ 13 \oplus 10 & 7 \oplus 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 12 \\ 13 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

1.4 Voorbeeld toepassing

Het volgende voorbeeld laat zien waar max-plus algebra voor gebruikt kan worden. Beschouw een eenvoudig spoornetwerk, met twee stations A en B (zie figuur 1.1). De labels op de pijlen stellen reistijden voor. Er zijn 4 treinen: één op elk lokaal circuit, en twee tussen de stations. De treinen moeten zo frequent mogelijk vertrekken, maar wel op gezette tijden. We geven als belangrijkste voorwaarde mee dat de treinen op de stations op elkaar moeten wachten voordat ze weer vertrekken, om mensen de gelegenheid te geven over te stappen.



Figuur 1.1: Een eenvoudig spoornetwerk

Laat x_A de vertrektijd van de treinen op station A zijn en x_B hetzelfde voor station B. Dit vormt samen een vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$. Het eerste vertrek is $x(0)$, de volgende $x(1)$, en $x(k-1)$ is de k -de vertrektijd. Uit de gegeven criteria volgt dat de treinen van station A kunnen vertrekken als zowel de trein op het lokale circuit bij A als een trein vanaf B bij A gearriveerd zijn. Dit komt neer op het maximum nemen van beide tijden. De aankomsttijd op een station is gelijk aan de vertrektijd van het vorige station plus de reistijd. Met deze informatie kunnen we het volgende model opstellen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_A(k+1) &= \max\{\mathbf{x}_A(k) + 2, \mathbf{x}_B(k) + 5\} \\ &= (\mathbf{x}_A(k) \otimes 2) \oplus (\mathbf{x}_B(k) \otimes 5) \\ \mathbf{x}_B(k+1) &= \max\{\mathbf{x}_A(k) + 3, \mathbf{x}_B(k) + 3\} \\ &= (\mathbf{x}_A(k) \otimes 3) \oplus (\mathbf{x}_B(k) \otimes 3) \end{aligned}$$

Als we dit in matrix-notatie schrijven, zien we het herhalingspatroon:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \otimes \mathbf{x}(k)$$

En de oplossing van dit stelsel is:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}^{\otimes k} \otimes \mathbf{x}(0).$$

1.5 Eigenwaarden en eigenvectoren

Beschouw een matrix $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ en een vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times 1}$. Bij de vergelijking

$$\mathbf{x}(k+1) = A \otimes \mathbf{x}(k) \tag{1.10}$$

noemen we $\mathbf{x}(0)$ een eigenvector van A . We willen nu $\mathbf{x}(0)$ handig kiezen, zodat de gebruikte dienstregeling logisch en makkelijk te onthouden is. We weten:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(1) &= A \otimes \mathbf{x}(0) = \lambda \otimes \mathbf{x}(0) \\ \mathbf{x}(2) &= A \otimes \mathbf{x}(1) = A \otimes \lambda \otimes \mathbf{x}(0) = \lambda^2 \otimes \mathbf{x}(0),\end{aligned}$$

en in het algemeen

$$\mathbf{x}(k) = \lambda^{\otimes k} \otimes \mathbf{x}(0) \text{ voor } k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Uit deze vergelijking volgt $(\mathbf{x}(k+1))_i - (\mathbf{x}(k+1))_j = (\mathbf{x}(k))_i - (\mathbf{x}(k))_j$ en $(\mathbf{x}(k+1))_i = \lambda \otimes (\mathbf{x}(k))_i$ voor $i, j = 1, \dots, n$, de rijen van kolomvector $\mathbf{x}(k)$. De oplossing van deze vergelijkingen bevatten dus een bepaalde mate van periodiciteit. In het bijzonder geldt $\mathbf{x}(k+p) = \lambda^p \otimes \mathbf{x}(k)$, met p de periode, en dus $\lambda = \frac{(\mathbf{x}(k+p))_i - (\mathbf{x}(k))_i}{p}$ voor elke $i = 1, \dots, n$. Om dit in te zien beschouwen

we het vorige voorbeeld, dus $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix}$, waar $x_1(k)$ correspondeert met de k -de vertrektijd van station A en $x_2(k)$ met de k -de vertrektijd van station B . We beginnen met $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ en kijken of dit een optimale dienstregeling geeft. Er volgt

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(1) &= A\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(2) &= A\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Met periode $p = 2$, $k = 0$, en $i = 1$ volgt nu dat $\lambda = \frac{(\mathbf{x}(2))_1 - (\mathbf{x}(0))_1}{2} = \frac{8 - 0}{2} = 4$. We zoeken bij deze eigenwaarde nu een ideale eigenvector. Invullen van $A \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes \mathbf{x}$ geeft de volgende vergelijkingen:

$$\begin{cases} 2 \otimes x_1 \oplus 5 \otimes x_2 = 4 \otimes x_1 \\ 3 \otimes x_1 \oplus 3 \otimes x_2 = 4 \otimes x_2 \end{cases}$$

In de eerste vergelijking staat: Het maximum van $2 \otimes x_1$ en $5 \otimes x_2$ is $4 \otimes x_1$. De grootste hiervan moet dus wel $5 \otimes x_2$ zijn, immers de andere heeft als enige oplossing $x_1 = \varepsilon$ en dat betekent dat de treinen op station A nooit vertrekken, wat technisch gezien een juiste oplossing is maar in de praktijk hebben we er niks aan. Er volgt dus dat $5 \otimes x_2 = 4 \otimes x_1$ oftewel $x_1 = x_2 + 1$. Uit de tweede vergelijking volgt precies dezelfde restrictie. Een betere keuze voor $\mathbf{x}(0)$ is dus $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Hiermee volgt

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(2) = \begin{bmatrix} 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(3) = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(4) = \begin{bmatrix} 17 \\ 16 \end{bmatrix}.$$

en we zien dat elke 4 minuten de treinen van station A en van station B vertrekken, waarbij de treinen op station A telkens 1 minuut later vertrekken dan die uit B .

In hoofdstuk 3 zien we dat de eigenvectoren en eigenwaardes ook nuttig zijn bij het luchtvaartprobleem dat we gaan bekijken.

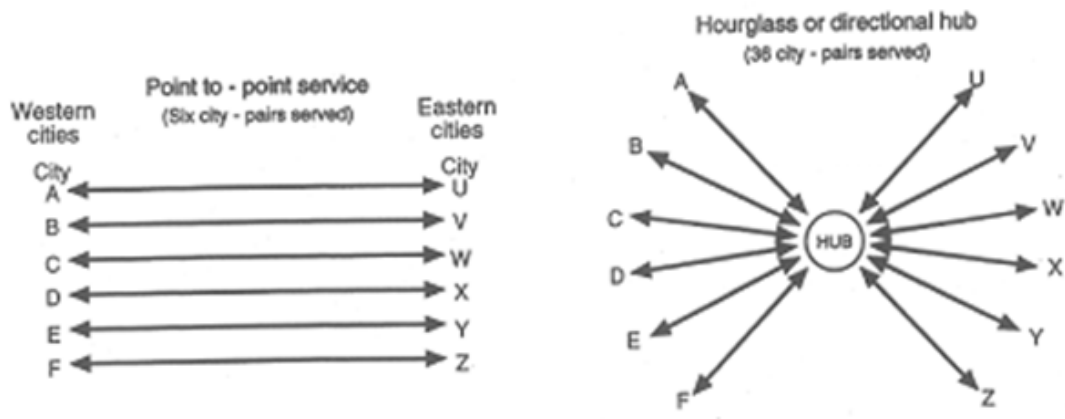
Hoofdstuk 2

Situatieschets in de luchtvaart

In dit hoofdstuk zal kort worden ingegaan op de situatie in de luchtvaart, zoals die in hoofdstuk 3 als basis wordt gebruikt.

2.1 Hub-and-Spoke model

In de luchtvaart worden voor het transporteren van reizigers hoofdzakelijk gebruik gemaakt van twee vervoersmodellen: Het eerste is het zogenaamde 'point-to-point'-netwerk, waarbij verschillende luchthavens via een directe vlucht met elkaar verbonden zijn. Het tweede vervoersmodel wordt het 'hub-and-spoke'-model genoemd. Een voorbeeld van beide netwerken is te zien in figuur 2.1.

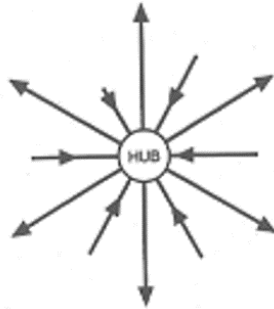


Figuur 2.1: Een point-to-point en een hub-and-spoke netwerk.

Bij het hub-and-spokesysteem geldt één luchthaven als de belangrijke 'hub', de knoop. Alle andere steden (de 'spokes' of spaken) worden met een directe vlucht aan dit knooppunt verbonden. Het nadeel van dit systeem is voor de reiziger dat hij altijd een overstap moet doen als hij niet in het knooppunt begint of eindigt. De voordelen voor de luchtvaartmaatschappijen zijn echter legio: Neem bijvoorbeeld een stelsel met 12 steden. Om al deze steden direct met elkaar te verbinden, zijn $\sum_{n=1}^{11} n = 66$ retourvluchten nodig. Vlieg je echter via een hub, waarbij één van de 12 steden de functie van hub vervult, dan zijn er slechts 11 retourvluchten nodig. De extra reistijd en overstap die de passagiers hebben weegt niet op tegen de uitsparing van

zoveel vluchten. En hoe meer luchthavens je verbindt, hoe groter het voordeel wordt voor het hub-and-spoke-netwerk. Dit omdat de toename van het aantal vluchten exponentieel is in een point-to-pointnetwerk, tegenover een lineaire toename bij een hub-and-spoke.

De hub in het hub-and-spoke-model bestaat in twee smaken: Naast de reeds beschreven zandloperhub, waarbij de hub twee even belangrijke kanten bedient, bestaat er ook een achterlandhub zoals te zien in figuur 2.2. In deze variant verbindt de hub lange-afstandsroutes met korte-afstandsroutes, die als feeder fungeren vanuit het omliggende gebied (de zogenaamde *catchment area*). Een voorbeeld hiervan is Schiphol, die punten in Europa (korte afstand) verbindt met intercontinentale bestemmingen, zoals Amerika en Dubai.



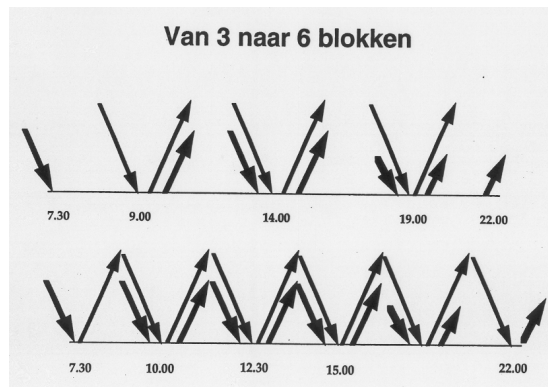
Figuur 2.2: Een achterlandhub.

2.2 Toename aantal blokken

KLM hanteert momenteel een 3-blokkenbeleid op Schiphol. Dit houdt in dat elke dag een patroon van inkomende en uitgaande vliegtuigen driemaal herhaald wordt. In één zo'n blok komen vliegtuigen van de feederverbindingen aan, hebben passagiers tijd om over te stappen op hun aansluitende vlucht en vertrekken de lange-afstandsvluchten weer. Om de dienstverlening te verbeteren denkt KLM na over een 6-blokkenbeleid, waarbij van de vroege ochtend tot laat in de avond vliegtuigen zullen aankomen en vertrekken vanaf Schiphol. Dit heeft als voordeel voor de reiziger dat ze op meer momenten van de dag hun reis kunnen aanvangen, en dat als er vertraging optreedt, en een aansluitende intercontinentale vlucht niet wordt gehaald, de passagiers niet zoveel vertraging oplopen (die in het huidige systeem makkelijk kan oplopen tot 4 tot 6 uur) maar al eerder met volgende blok mee kunnen, die simpelweg eerder vertrekt dan in het huidige systeem. Dit komt wel erg nauw in de dienstregeling en in het reguleren van de start- en landingsbanen, die veel meer belast zullen worden.

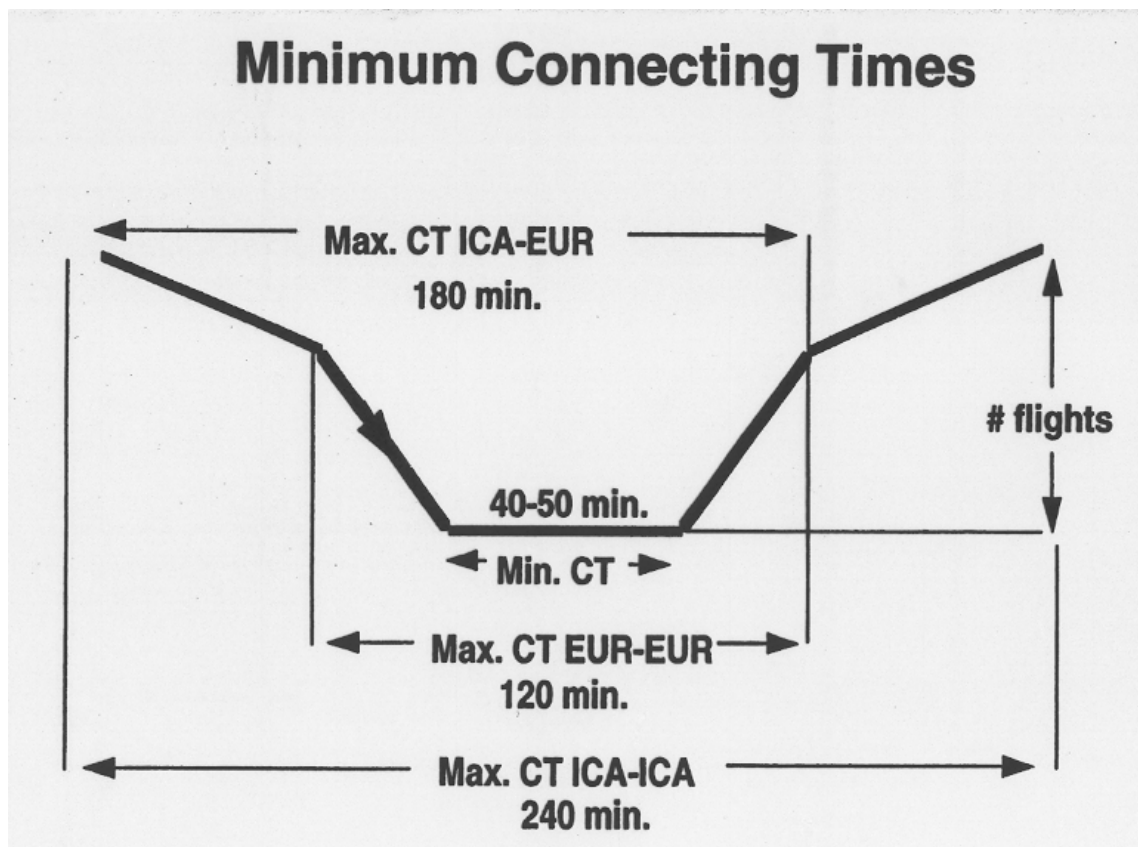
2.3 Minimum overstaptijden

Zoals reeds vermeld in sectie 2.1 heeft het hub-and-spokemodel niet alleen maar voordelen. Één van de belangrijkste nadelen is het overstappen en de overstaptijd, die zoals iedereen die wel eens gevlogen heeft en daarbij moest overstappen kan beamen, vrij fors kan uitvallen. In figuur 2.4 is een schema te zien waarin de overstaptijden voor zowel Europese (EUR) als intercontinentale (ICA) vluchten op Schiphol zijn weergegeven. De overstaptijd varieert van 40 minuten tot zo'n 4 uur, en is behalve van het soort vlucht (EUR of ICA) onder andere afhankelijk van verschillende factoren, zoals of beide vluchten door dezelfde maatschappij worden gevlogen, of er van terminal gewisseld moet worden, of de vluchten binnenlands, in het Schengengebied of daarbuiten gevlogen wordt, of het vliegtuig aan een zogenoemde *airbridge* komt te staan of



Figuur 2.3: Van 3 naar 6 blokken.

dat de passagiers eerst met een bus naar de terminal getransporteerd moeten worden. Dit zijn allerlei factoren die de luchtvaartmaatschappijen mee kunnen laten wegen in de bepaling van de minimum overstaptijd of MCT (minimum connecting time).



Figuur 2.4: Minimum overstaptijden

2.4 Doel van het onderzoek

In dit verslag beschouwen we een fictief netwerk, bestaande uit twee hubs met een onderlinge verbinding. Denk aan deze hubs als bijvoorbeeld Schiphol en een Atlanta, waarbij Schiphol de hub is die gefeederd wordt door Europa en Atlanta die rol vervult voor de Verenigde Staten. In dit netwerk kunnen passagiers efficiënt vanuit geheel Europa naar geheel Amerika worden vervoerd, met slechts twee overstappen. Op Schiphol worden de vluchten als het ware 'verzameld', waarna gezamenlijk naar Atlanta wordt gevlogen. Hier kunnen mensen vervolgens overstappen naar elke bestemming in Amerika. Zo hoeft er slechts 1 intercontinentale vlucht retour uitgevoerd te worden, en worden de kosten voor de luchtvaartmaatschappij geminimaliseerd.

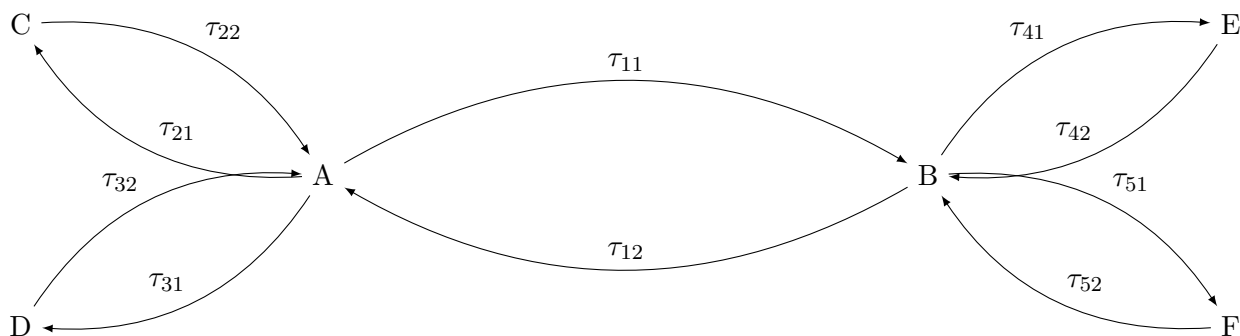
We hebben in dit hoofdstuk verschillende zaken gezien als achtergrond uit de luchtvaart. In het volgende hoofdstuk zullen we de in het eerste hoofdstuk genoemde max-plus algebra toepassen op een model uit de luchtvaart. Het doel daarbij is het opstellen van een zo efficiënt mogelijk reisschema. Hiermee houden we in dit hoofdstuk genoemde zaken in het achterhoofd.

Hoofdstuk 3

Max-plus Algebra in de luchtvaart

3.1 Waarom max-plus Algebra?

De max-plus algebra kan bij uitstek gebruikt worden bij een systeem dat zichzelf herhaalt, en bij het toenemen van het aantal blokken op Schiphol (zie sectie 2.2) wordt in voldoende mate aan deze voorwaarde voldaan. We beschouwen een netwerk zoals in figuur 3.1.



Figuur 3.1: 2 hubs met elk 2 feederluchthavens

De gestelde voorwaarde, dat vliegtuigen die van hub naar hub vliegen, in de hub op elkaar wachten, kan in de max-plus algebra goed worden weergegeven met de max-operatie (\oplus). De plus-operatie (\otimes) wordt gebruikt voor het berekenen van de vertrektijd van het volgende vliegtuig.

3.2 Vergelijkingen opstellen

We noemen $dA_j(k)$ de k -de vertrektijd van vliegveld A_j voor $j = 1, 2, 3$, waarbij A_1 naar vliegveld C vliegt, A_2 naar vliegveld D en A_3 naar vliegveld B. A_1 , A_2 en A_3 zijn dus hetzelfde vliegveld A, maar we maken dit onderscheid om duidelijk te maken naar welk vliegveld de vlucht gaat en omdat dat later in een matrix makkelijker weergegeven kan worden. Voor B gelden dezelfde regels, naar A, E en F respectievelijk. Verder zijn τ de vliegtijden zoals aangegeven in figuur 3.1. Als laatste definiëren we s_i de overstaptijd op vliegveld i , voor $i = A, \dots, F$. We kunnen

nu de volgende ongelijkheden opstellen:

$$\begin{aligned}
dA_1(k) &\geq dA_1(k-1) \otimes \tau_{21} \otimes \tau_{22} \otimes s_C \otimes s_A \\
&\quad \oplus dB_1(k-1) \otimes \tau_{12} \otimes s_A \\
&\quad \oplus dD(k-1) \otimes \tau_{32} \otimes s_A \\
dA_2(k) &\geq dA_2(k-1) \otimes \tau_{31} \otimes \tau_{32} \otimes s_D \otimes s_A \\
&\quad \oplus dB_1(k-1) \otimes \tau_{12} \otimes s_A \\
&\quad \oplus dC(k-1) \otimes \tau_{22} \otimes s_A \\
dA_3(k) &\geq dB_1(k-1) \otimes \tau_{12} \otimes s_A \\
&\quad \oplus dC(k-1) \otimes \tau_{22} \otimes s_A \\
&\quad \oplus dD(k-1) \otimes \tau_{32} \otimes s_A \\
dB_1(k) &\geq dA_3(k-1) \otimes \tau_{11} \otimes s_B \\
&\quad \oplus dE(k-1) \otimes \tau_{42} \otimes s_B \\
&\quad \oplus dF(k-1) \otimes \tau_{52} \otimes s_B \\
dB_2(k) &\geq dB_2(k-1) \otimes \tau_{41} \otimes \tau_{42} \otimes s_E \otimes s_B \\
&\quad \oplus dA_3(k-1) \otimes \tau_{11} \otimes s_B \\
&\quad \oplus dF(k-1) \otimes \tau_{52} \otimes s_B \\
dB_3(k) &\geq dB_3(k-1) \otimes \tau_{51} \otimes \tau_{52} \otimes s_F \otimes s_B \\
&\quad \oplus dA_3(k-1) \otimes \tau_{11} \otimes s_B \\
&\quad \oplus dE(k-1) \otimes \tau_{42} \otimes s_B \\
dC(k) &\geq dC(k-1) \otimes \tau_{21} \otimes \tau_{22} \otimes s_C \otimes s_A \\
&\quad \oplus dA_1(k-1) \otimes \tau_{21} \otimes s_C \\
dD(k) &\geq dD(k-1) \otimes \tau_{31} \otimes \tau_{32} \otimes s_D \otimes s_A \\
&\quad \oplus dA_2(k-1) \otimes \tau_{31} \otimes s_D \\
dE(k) &\geq dE(k-1) \otimes \tau_{41} \otimes \tau_{42} \otimes s_E \otimes s_B \\
&\quad \oplus dB_2(k-1) \otimes \tau_{41} \otimes s_E \\
dF(k) &\geq dF(k-1) \otimes \tau_{51} \otimes \tau_{52} \otimes s_F \otimes s_B \\
&\quad \oplus dB_3(k-1) \otimes \tau_{51} \otimes s_F
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ondanks dat dit ongelijkheden zijn, kunnen we dit beschouwen als vergelijkingen (met een =-teken). Dit omdat de minst gunstige situatie in het geval van een gelijkheid is; Mocht een vliegtuig langer moeten wachten met vertrek, dan is er niks dat dat tegenhoudt. We rekenen dus alsof hier sprake is van gelijkheden.

Op de vliegvelden C , D , E en F gelden extra restricties die we nu niet modelleren, voor meer duidelijkheid in de situatie in de hubs. Deze extra restricties kunnen bijvoorbeeld bestaan uit andere vluchten die op de respectievelijke vliegvelden aankomen. In principe hebben deze extra restricties geen gevolgen voor de situatie in de hubs A en B , waar we ons vooral op richten.

Laat $\mathbf{x}(k)$ de vector met vertrektijden zijn in de hierbovengenoemde volgorde. Dan volgt hieruit de vergelijking $\mathbf{x}(k) = A \otimes \mathbf{x}(k-1)$ met $\varepsilon = -\infty$ op de plekken waartussen geen directe verbinding is:

$$A \otimes \mathbf{x}(k) = \lambda \otimes \mathbf{x}(k) \tag{3.2}$$

met $A =$

$$\begin{bmatrix} \tau_{21}\tau_{22}SCSA & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{12}SA & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{32}SA & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{31}\tau_{32}SDSA & \varepsilon & \tau_{12}SA & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{22}SA & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{12}SA & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{22}SA & \tau_{32}SA & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \tau_{11}SB & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{42}SB & \tau_{52}SB \\ \varepsilon & \varepsilon & \tau_{11}SB & \varepsilon & \tau_{41}\tau_{42}SESB & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{52}SB \\ \varepsilon & \varepsilon & \tau_{11}SB & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{51}\tau_{52}SFSB & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{42}SB & \varepsilon \\ \tau_{21}SC & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{21}\tau_{22}SCSA & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \tau_{31}SD & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{31}\tau_{32}SDSA & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{41}SE & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{41}\tau_{42}SESB & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{51}SF & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \tau_{51}\tau_{52}SFSB \end{bmatrix}$$

en

$$\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} dA_1(k) \\ dA_2(k) \\ dA_3(k) \\ dB_1(k) \\ dB_2(k) \\ dB_3(k) \\ dC(k) \\ dD(k) \\ dE(k) \\ dF(k) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Met de in sectie 1.5 genoemde methode kunnen we nu λ bepalen: Met Maple (zie de bijlage in hoofdstuk 6) rekenen we $\mathbf{x}(k)$ uit voor een aantal k , en we zien dat het verschil tussen $\mathbf{x}(k)$ en $\mathbf{x}(k+1)$ vanaf een bepaalde k (namelijk al bij $k=3$) $\lambda = 12$ uur is: ideaal voor dagelijkse herhaling. We hebben hier de volgende waarden ingevuld, gestoeld op enige realisme (vluchttijd Amsterdam - Atlanta is zo'n 10.5 uur, en voor de overstaptijden is 1 uur op elk vliegveld gerekend. De feedervliegvelden liggen op 1 of 2 uur afstand van de hub).

$$\begin{aligned} \tau_{11} = 11; \tau_{12} = 11; \tau_{21} = 1; \tau_{22} = 1; \tau_{31} = 2; \tau_{32} = 2; \tau_{41} = 1; \tau_{42} = 1; \\ \tau_{51} = 2; \tau_{52} = 2; s_A := 1; s_B = 1; s_C = 1; s_D := 1; s_E = 1; s_F = 1 \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.3 Resultaten

In hoofdstuk 6 is de Maplecode opgenomen. Hier zien we dat we $\lambda = 12$ hebben gevonden, en een bijbehorende eigenvector is

$$\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} \tau_{12} - \tau_{21} - s_C - s_A \\ \tau_{12} - \tau_{31} - s_D - s_A \\ 0 \\ 0 \\ \tau_{11} - \tau_{41} - s_E - s_B \\ \tau_{11} - \tau_{51} - s_F - s_B \\ \tau_{12} - \tau_{22} - s_C + s_A \\ \tau_{12} - \tau_{32} - s_D + s_A \\ \tau_{11} - \tau_{42} - s_E + s_B \\ \tau_{11} - \tau_{52} - s_F + s_B \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Dit betekent dat vliegtuigen het best op bovengenoemde tijdstippen vertrekken van hun respectievelijke vliegvelden, voor een optimaal vluchtschema. Een eigenwaarde λ van 12 betekent dat we dit schema tweemaal daags kunnen herhalen.

Het volledige vertrekschema:

k	A_1	A_2	A_3	B_1	B_2	B_3	C	D	E	F
0	8	7	0	0	8	7	10	9	10	9
1	12	13	12	12	12	13	14	15	14	15
2	24	24	24	24	24	24	18	21	18	21
3	36	36	36	36	36	36	26	27	26	27
4	48	48	48	48	48	48	38	39	38	39
5	60	60	60	60	60	60	50	51	50	51

(3.6)

We hebben nu een schema gevonden dat dagelijks vertrekt; Ons doel was echter om 6 maal per dag te vertrekken. Één optie daarvoor is om bovenstaand vluchtschema 6x op een dag te versturen, een andere, iets nettere is om een vergelijking van de volgende vorm te gebruiken:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & A_0 \otimes \mathbf{x}(k) \oplus A_1 \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus A_2 \otimes \mathbf{x}(k-2) \\ & \oplus A_3 \otimes \mathbf{x}(k-3) \oplus A_4 \otimes \mathbf{x}(k-4) \end{aligned} \quad (3.7)$$

In zo'n systeem neem je voor de volgende vertrektijd de vorige 5 vertrektijden mee. Hiermee kun je dus dagelijks 6 vertrektijden simuleren. Het voert voor dit verslag te ver om hier dieper op in te gaan, en blijft open voor vervolgonderzoek.

Het systeem met aan beide kanten 2 feederluchthavens kan makkelijk worden uitgebreid naar een systeem met aan beide kanten 4 feederluchthavens, of een algemeen geval met n luchthavens links en m luchthavens rechts.

Hoofdstuk 4

Conclusie

In hoofdstuk 2 hebben we gezien voor welke uitdagingen de luchtvaart staat. We hebben gezien dat door de toename van het aantal vertrek- en aankomsttijden op een vliegveld de max-plus algebra een interessante aanpak biedt om een vluchtschema te modelleren. In hoofdstuk 3 hebben we vervolgens aan de hand van de in hoofdstuk 1 geïntroduceerde wiskunde in een netwerk de eigenwaarde en eigenvectoren bepaald en het vertrekschema opgesteld.

Hoofdstuk 5

Discussie

In dit verslag is een eerste aanzet gegeven voor het oplossen van een transportnetwerk in de luchtvaart met behulp van max-plus algebra. Er blijven nog een aantal vragen over, zoals onder welke voorwaarden het uitbreiden van het netwerk kan en een efficiëntere methode voor het vinden van eigenvectoren bij een gevonden eigenwaarde.

de vergelijking

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) = & A_0 \otimes \mathbf{x}(k) \oplus A_1 \otimes \mathbf{x}(k-1) \oplus A_2 \otimes \mathbf{x}(k-2) \\ & \oplus A_3 \otimes \mathbf{x}(k-3) \oplus A_4 \otimes \mathbf{x}(k-4) \end{aligned} \quad (5.1)$$

is een goede manier om meerdere vertrektijdstoppen per dag te simuleren. In dit project ben ik er niet aan toegekomen dit nader te onderzoeken, doordat verschillende andere onderdelen veel werk kostten. Je probeert iets, het lukt eerst niet, je probeert het op een iets andere manier, en na lang puzzelen kom je eindelijk op iets uit. Deze vergelijking heb ik nog niet nader onderzocht, maar het ziet er veelbelovend uit en kan onderwerp zijn van een vervolgonderzoek.

Om meerdere vertrektijdstoppen per dag te simuleren kan ook gebruik worden gemaakt van petrinetten. Dit is een grafische methode waarin stapsgewijze processen (in ons geval: vertrek van een luchthaven, vlucht en aankomst luchthaven) worden weergegeven. Hiermee kan worden gemodelleerd hoeveel vliegtuigen er op bepaalde momenten in de lucht zijn, en aan de hand daarvan het vertrek van het volgende vliegtuig worden bepaald. Een dergelijke aanpak kan onderwerp zijn van een vervolgonderzoek.

Bibliografie

- [1] B. Heidergott, G.J. Olsder and J.W. van der Woude, *Max Plus at Work*. Princeton University Press, 2006.
- [2] Maria H Andersen, *Max-Plus Algebra: Properties and applications*. Laramie, 2002.
- [3] Misoo Chung, *Eigenvalues and Eigenvectors in the Max-Plus Algebra*. Denver, 1995.

Hoofdstuk 6

Maple Code

restart:

with(MaxLinearAlgebra) : with(LinearAlgebra) :

```
C := << (tau_21 + tau_22 + s_C + s_A, -infinity, -infinity, tau_12 + s_A, -infinity, -infinity, -infinity,
tau_32 + s_A, -infinity, -infinity) | < -infinity, tau_31 + tau_32 + s_D + s_A, -infinity, tau_12
+ s_A, -infinity, -infinity, tau_22 + s_A, -infinity, -infinity, -infinity) | < -infinity, -infinity,
-infinity, tau_12 + s_A, -infinity, -infinity, tau_22 + s_A, tau_32 + s_A, -infinity, -infinity) | <
-infinity, -infinity, tau_11 + s_B, -infinity, -infinity, -infinity, -infinity, -infinity, tau_42 + s_B,
tau_52 + s_B) | < -infinity, -infinity, tau_11 + s_B, -infinity, tau_41 + tau_42 + s_E + s_B,
-infinity, -infinity, -infinity, -infinity, tau_52 + s_B) | < -infinity, -infinity, tau_11 + s_B, -infinity,
-infinity, tau_51 + tau_52 + s_F + s_B, -infinity, -infinity, tau_42 + s_B, -infinity) | (tau_21
+ s_C, -infinity, -infinity, -infinity, -infinity, -infinity, tau_21 + tau_22 + s_C + s_A, -infinity,
-infinity, -infinity) | < -infinity, tau_31 + s_D, -infinity, -infinity, -infinity, -infinity, -infinity,
tau_31 + tau_32 + s_D + s_A, -infinity, -infinity) | < -infinity, -infinity, -infinity, -infinity, tau_41
+ s_E, -infinity, -infinity, -infinity, tau_41 + tau_42 + s_E + s_B, -infinity) | < -infinity, -infinity,
-infinity, -infinity, -infinity, tau_51 + s_F, -infinity, -infinity, -infinity, tau_51 + tau_52 + s_F
+ s_B) >> :
```

```
C := Transpose(C) : MaxMatrixVectorMultiply(C, <x[1], x[2], x[3], x[4], x[5], x[6], x[7], x[8],
x[9], x[10]>) : C;
```

$$\begin{pmatrix} 4 & -\infty & -\infty & 12 & -\infty & -\infty & -\infty & 3 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 6 & -\infty & 12 & -\infty & -\infty & 2 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & 12 & -\infty & -\infty & 2 & 3 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & 12 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 2 & 3 \\ -\infty & -\infty & 12 & -\infty & 4 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 3 \\ -\infty & -\infty & 12 & -\infty & -\infty & 6 & -\infty & -\infty & 2 & -\infty \\ 2 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 4 & -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & 3 & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 6 & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 2 & -\infty & -\infty & -\infty & 4 & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & -\infty & 3 & -\infty & -\infty & -\infty & 6 \end{pmatrix} \quad (1)$$

```
tau_11 := 11 : tau_12 := 11 : tau_21 := 1 : tau_22 := 1 : tau_31 := 2 : tau_32 := 2 : tau_41 := 1 :
tau_42 := 1 : tau_51 := 2 : tau_52 := 2 : s_A := 1 : s_B := 1 : s_C := 1 : s_D := 1 : s_E := 1 :
s_F := 1 :
```

```
x := <tau_12 - tau_21 - s_C - s_A, tau_12 - tau_31 - s_D - s_A, 0, 0, tau_11 - tau_41 - s_E
- s_B, tau_11 - tau_51 - s_F - s_B, tau_12 - tau_22 - s_C + s_A, tau_12 - tau_32 - s_D
+ s_A, tau_11 - tau_42 - s_E + s_B, tau_11 - tau_52 - s_F + s_B > :
```

```
x_1 := MaxMatrixVectorMultiply(C, x) :
```

```
x_2 := MaxMatrixVectorMultiply(C, x_1) :
```

```
x_3 := MaxMatrixVectorMultiply(C, x_2) :
```

```
x_4 := MaxMatrixVectorMultiply(C, x_3) :
```

```
x_5 := MaxMatrixVectorMultiply(C, x_4) :
```

```
X := <x | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 > : Transpose(X);
```

$$\begin{bmatrix} 8 & 7 & 0 & 0 & 8 & 7 & 10 & 9 & 10 & 9 \\ 12 & 13 & 12 & 12 & 12 & 13 & 14 & 15 & 14 & 15 \\ 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 24 & 18 & 21 & 18 & 21 \\ 36 & 36 & 36 & 36 & 36 & 36 & 26 & 27 & 26 & 27 \\ 48 & 48 & 48 & 48 & 48 & 48 & 38 & 39 & 38 & 39 \\ 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 60 & 50 & 51 & 50 & 51 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$res := (x_5 - x_4) :$
 $lambda := res[1];$

$$12 \quad (3)$$

$s := Vector(10) :$
 $MaxMatrixVectorMultiply(C, \langle y[1], y[2], y[3], y[4], y[5], y[6], y[7], y[8], y[9], y[10] \rangle) = lambda$
 $\cdot Vector(10, symbol=y);$

$$\begin{aligned} & [[\max(3 + y_8, 4 + y_1, 12 + y_4, -\infty + y_2, -\infty + y_3, -\infty + y_5, -\infty + y_6, -\infty + y_7, -\infty + y_9, -\infty \\ & \quad + y_{10})], \\ & [\max(2 + y_7, 6 + y_2, 12 + y_4, -\infty + y_1, -\infty + y_3, -\infty + y_5, -\infty + y_6, -\infty + y_8, -\infty + y_9, \\ & \quad -\infty + y_{10})], \\ & [\max(2 + y_7, 3 + y_8, 12 + y_4, -\infty + y_1, -\infty + y_2, -\infty + y_3, -\infty + y_5, -\infty + y_6, -\infty + y_9, \\ & \quad -\infty + y_{10})], \\ & [\max(2 + y_9, 3 + y_{10}, 12 + y_3, -\infty + y_1, -\infty + y_2, -\infty + y_4, -\infty + y_5, -\infty + y_6, -\infty + y_7, \\ & \quad -\infty + y_8)], \\ & [\max(3 + y_{10}, 4 + y_5, 12 + y_3, -\infty + y_1, -\infty + y_2, -\infty + y_4, -\infty + y_6, -\infty + y_7, -\infty + y_8, \\ & \quad -\infty + y_9)], \\ & [\max(2 + y_9, 6 + y_6, 12 + y_3, -\infty + y_1, -\infty + y_2, -\infty + y_4, -\infty + y_5, -\infty + y_7, -\infty + y_8, \\ & \quad -\infty + y_{10})], \\ & [\max(2 + y_1, 4 + y_7, -\infty + y_2, -\infty + y_3, -\infty + y_4, -\infty + y_5, -\infty + y_6, -\infty + y_8, -\infty + y_9, \\ & \quad -\infty + y_{10})], \\ & [\max(3 + y_2, 6 + y_8, -\infty + y_1, -\infty + y_3, -\infty + y_4, -\infty + y_5, -\infty + y_6, -\infty + y_7, -\infty + y_9, \\ & \quad -\infty + y_{10})], \\ & [\max(2 + y_5, 4 + y_9, -\infty + y_1, -\infty + y_2, -\infty + y_3, -\infty + y_4, -\infty + y_6, -\infty + y_7, -\infty + y_8, \\ & \quad -\infty + y_{10})], \\ & [\max(3 + y_6, 6 + y_{10}, -\infty + y_1, -\infty + y_2, -\infty + y_3, -\infty + y_4, -\infty + y_5, -\infty + y_7, -\infty \end{aligned} \quad (4)$$

$$+ y_8, -\infty + y_9)]] = \begin{bmatrix} 12 y_1 \\ 12 y_2 \\ 12 y_3 \\ 12 y_4 \\ 12 y_5 \\ 12 y_6 \\ 12 y_7 \\ 12 y_8 \\ 12 y_9 \\ 12 y_{10} \end{bmatrix}$$

for i from 1 to 10 do

s[*i*] := *a*[*i*]

end do:

v := [seq(*a*[*i*], *i* = 1 ..10)]:

MaxGenerateEquations(*C*, *v*, lambda * *s*) :

allvalues(solve(%o, *v*));

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 0 \\ 0 \\ 8 \\ 7 \\ 10 \\ 9 \\ 10 \\ 9 \end{bmatrix}$$

(5)