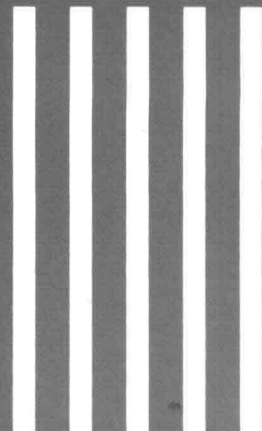


ministerie van verkeer en waterstaat

rijkswaterstaat

dienst getijdewateren



nota GWAO-88.021

DRIE-DIMENSIONALE NUMERIEKE
SIMULATIE VAN DE WATERBEWEGING
VOOR DE NEDERLANDSE KUST

auteur(s): N. Praagman, R. van Dijk, J. Dijkzeul, J.M. de Kok en R. Plieger

datum: 9 juni 1988

samenvatting: Resultaten van twee 3-D simulatiemodellen worden getoond en deels vergeleken met de resultaten van een 2-D model. Tevens wordt achtergrondinformatie gegeven over de aangebrachte vereenvoudigingen in de beschrijvende vergelijkingen en over de gebruikte numeriek-wiskundige technieken.

De uitkomsten van de berekeningen sluiten zowel kwalitatief als kwantitatief redelijk aan bij de waarnemingen. Overigens is de invloed van diverse empirische parameters in de modelvergelijkingen op de uitkomsten groot. Naast gevoeligheidsberekeningen is dan ook zowel ondersteunend fysisch modelonderzoek als meten in de natuur nodig om het inzicht in de te simuleren processen te vergroten.

DRIE - DIMENSIONALE NUMERIEKE SIMULATIE VAN DE WATERBEWEGING VOOR DE NEDERLANDSE KUST

1. Inleiding

De laatste decennia hebben numerieke simulatiemodellen ruime toepassing gevonden in de waterloopkunde. Met succes, gegeven het feit dat het gebruik van deze modellen voor het beantwoorden van beleids- en beheersvragen nog steeds toeneemt.

Voor de tot nu gerealiseerde toepassingen voor praktische gevallen is het doorgaans geoorloofd de mathematische basisvergelijkingen, die in essentie een drie-dimensionaal karakter hebben, door vereenvoudigingen om te schrijven tot 2-dimensionale of zelfs 1-dimensionale vergelijkingen. De binnen de Rijkswaterstaat veel gebruikte pakketten IMPLIC en WAQUA zijn op dergelijke vereenvoudigde vergelijkingen gebaseerd.

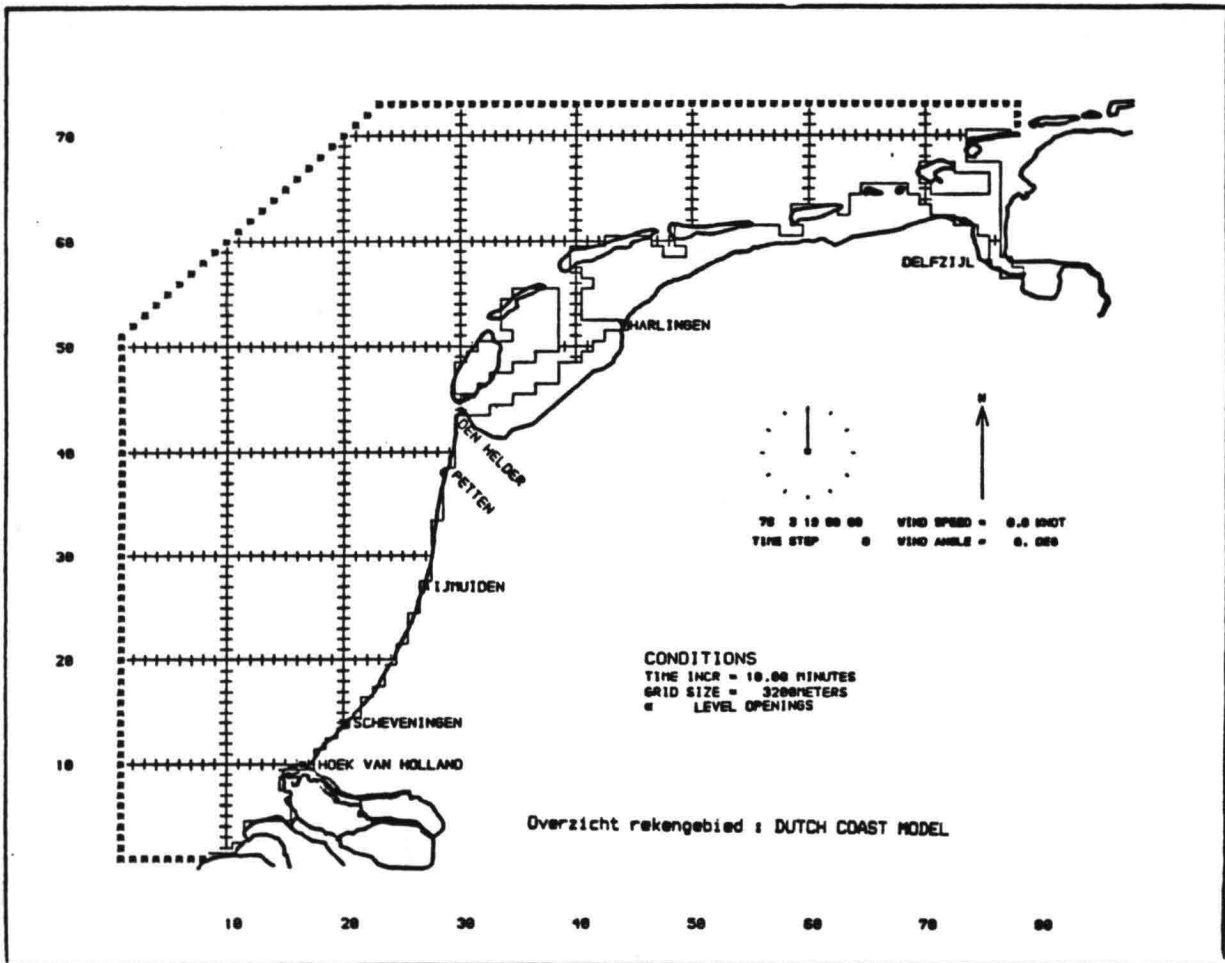
Alhoewel bij de huidige stand van kennis omtrent allerlei processen deze simulatiepakketten in veel gevallen naar tevredenheid worden toegepast, valt te voorzien dat door uitbreiding van die kennis binnen enkele jaren de vraag naar 3-dimensionale simulatiemodellen die nu nog gering is, sterk toe zal nemen.

Binnen Rijkswaterstaat is daarom besloten naast de nodig geachte uitbreidingen van de 1-D en 2-D pakketten ook aan de ontwikkeling van een 3-D pakket, genaamd TRISULA, te werken. In samenwerking met de Rand Corporation en het Waterloopkundig Laboratorium heeft dit eind 1986 geleid tot een eerste release van het pakket.

Recent is met TRISULA een aantal simulaties gedraaid van twee gebieden voor de Nederlandse kust. De bedoeling van deze modellen is om enerzijds na te gaan waar verschillen optreden tussen 2-D en 3-D simulaties en anderzijds om de invloed van de empirische parameters, die in de modellen voorkomen, vast te stellen.

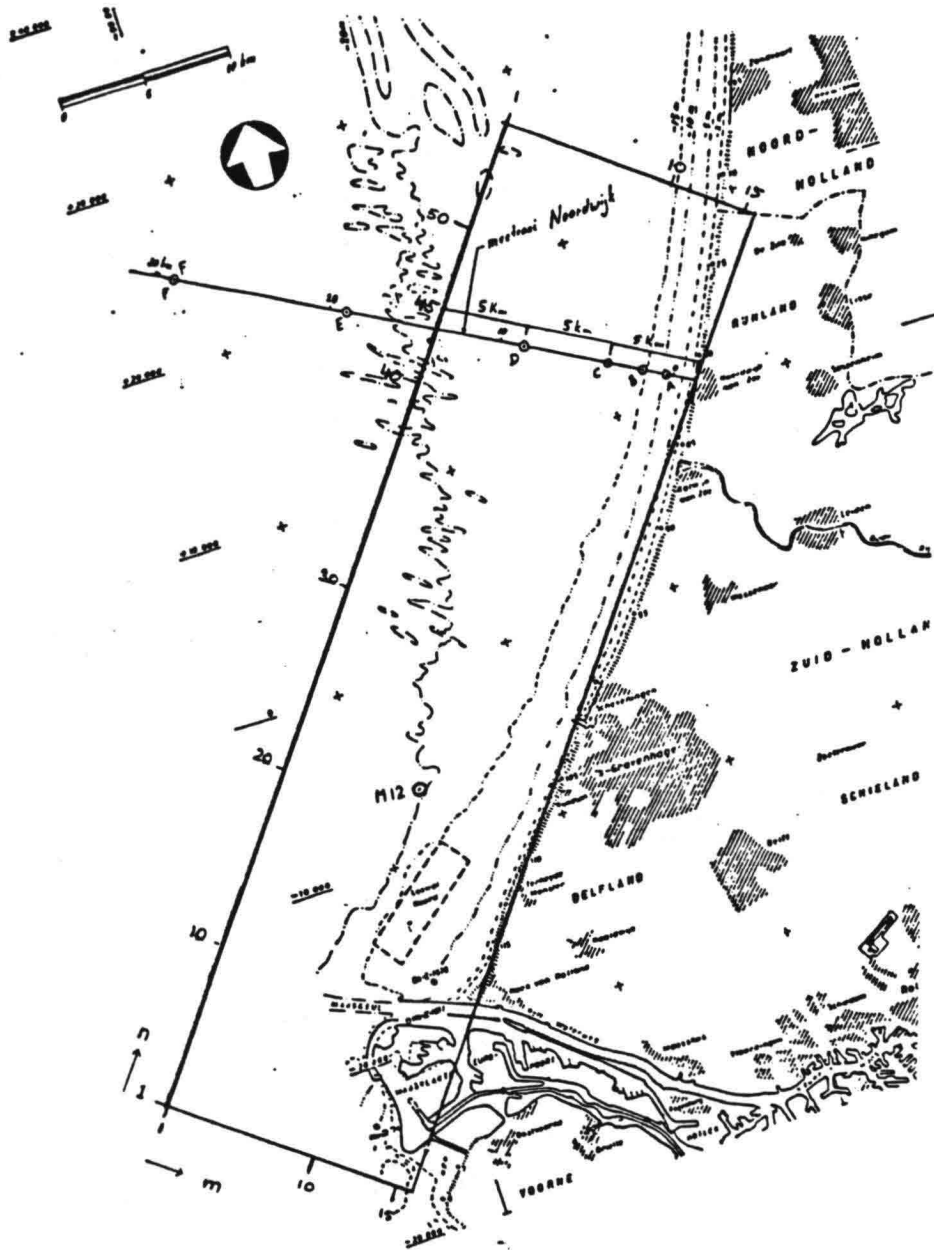
In de voorliggende nota zijn de verkregen inzichten op schrift gesteld. Achtereenvolgens wordt aandacht aan de volgende aspecten besteed: in hoofdstuk 2 wordt aangegeven wat de gebruikte basisvergelijkingen en diskretisatietechnieken zijn. In de hoofdstukken 3 en 4 worden de simulatieberekeningen behandeld voor respectievelijk een strook langs vrijwel de gehele Nederlandse kust

(zie figuur 1) en een smallere strook langs de kust van Zuid-Holland. (zie figuur 2) In hoofdstuk 5 staan enkele konklusies en aanbevelingen.



Figuur 1 : Rekengebied Nederlandse Kust Model

In een bijlage wordt getoond hoe via integratie van de modelvergelijkingen per laag een systeem partiële differentiaalvergelijkingen dat per laag geldt kan worden afgeleid. Dit systeem dient als basis voor de in TRISULA gebruikte gediskretiseerde vergelijkingen.



Figuur 2 : Grenzen model "Zuid-Holland"

2. De Basisvergelijkingen en de diskretisatie

In het TRISULA model wordt uitgegaan van de ondiepwatervergelijkingen voor incompressibele niet-homogene stroming. Deze luiden :

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}-(u u) + \frac{\partial}{\partial y}-(u v) + \frac{\partial}{\partial z}-(u w) - f v + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{xz} \right) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}-(u v) + \frac{\partial}{\partial y}-(v v) + \frac{\partial}{\partial z}-(v w) + f u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{yx} + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{yy} + \frac{\partial}{\partial z} \tau_{yz} \right) = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$$

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$(5) \quad \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}-(u S) + \frac{\partial}{\partial y}-(v S) + \frac{\partial}{\partial z}-(w S) + \frac{\partial}{\partial x}-(D_x \frac{\partial S}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}-(D_y \frac{\partial S}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}-(\kappa \frac{\partial S}{\partial z}) = 0$$

$$(6) \quad \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}-(u T) + \frac{\partial}{\partial y}-(v T) + \frac{\partial}{\partial z}-(w T) + \frac{\partial}{\partial x}-(M_x \frac{\partial T}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}-(M_y \frac{\partial T}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}-(\mu \frac{\partial T}{\partial z}) = 0$$

$$(7) \quad \rho = \bar{\rho} + \rho'(S, T)$$

met

x, y, z	Cartesiaanse coördinaten
u, v, w	Snelheidscomponenten
t	Tijd
f	Parameter van Coriolis
p	Druk
S	Saliniteit
ρ	Dichtheid
$\bar{\rho}$	Referentie dichtheid

ρ'	Afwijking t.o.v. de referentie dichtheid
T	Temperatuur
τ	Spanningstensor
D, κ	Diffusiecoëfficiënten saliniteit
M, μ	Diffusiecoëfficiënten temperatuur

De derde bewegingsvergelijking is gereduceerd tot de hydrostatische drukvergelijking. Dit is in veel, met name grootschalige, toepassingen, toegestaan vanwege de relatieve onbelangrijkheid van de overige termen. In de toestandsvergelijking (7) wordt uitgedrukt dat de dichtheid met de saliniteit en/of de temperatuur kan variëren.

Het systeem vergelijkingen (1) - (7) leidt, voorzien van begin- en randvoorwaarden na diskretisatie en met gebruik van de juiste geometrische gegevens tot een numeriek model. Alhoewel niet uitputtend zullen in deze nota enkele stappen van het diskretisatieproces nader worden besproken.

Bij de diskretisatie van het stelsel in verticale richting (z) zal een totaal andere roosterfijnheid worden aangehouden dan in de horizontale richtingen vanwege het specifieke toepassingsgebied, te weten waterbewegingen en transporten in ondiepe kustzeeën en estuaria.

Voor de diskretisatie wordt aangenomen dat het oppervlak van de te beschouwen watermassa wordt gegeven door

$$(8) \quad z = z(x, y, t)$$

en de bodem door

$$(9) \quad z = -h(x, y)$$

Variaties in de bodemligging worden in dit rapport verder buiten beschouwing gelaten !

Het rekenrooster wordt gevormd door het totale te beschouwen 3-Dimensionale gebied in regelmatige blokjes te verdelen. Deze verdeling gaat in twee stappen : In de eerste stap wordt een aantal horizontale vlakken in de vertikaal geformeerd. Hierdoor ontstaan de lagen. In de tweede stap wordt op de bekende wijze in ieder horizontaal vlak een verspringend rooster ("gestaggered") opgebouwd. (zie figuur 3 en [5]).

Indien in de vertikaal wordt gekeken, bijvoorbeeld in een vlak parallel aan de x-as dan volgt een plaatje zoals gegeven in figuur 4.

De u-waarde is steeds representatief voor één laag van het model evenals de in de figuur niet vermelde v-waarden.

Door de vergelijkingen, in de vertikaal, per laag te integreren worden per laag vergelijkingen met

$j+1$	+	-	+	-	+
$j+\frac{1}{2}$		o		o	
j	+	-	+	-	+
$j-\frac{1}{2}$		o		o	
$j-1$	+	-	+	-	+
	$i-1$	$i-\frac{1}{2}$	i	$i+\frac{1}{2}$	$i+1$

Figuur 3 : vlak $z = \text{constant}$,
 - u - punt
 | v - punt
 + , o andere parameters

laaggemiddelde grootheden gevonden. Teneinde enig inzicht in dit proces te geven wordt in een bijlage de integratie voor de vgl'n (4) en (1), zijnde respectievelijk de continuïteitsvergelijking en de impulsvergelijking, verder uitgewerkt.

ζ		ζ		ζ
+	u	+	u	+
w	o	w	o	w
+	u	+	u	+
w	o	w	o	w

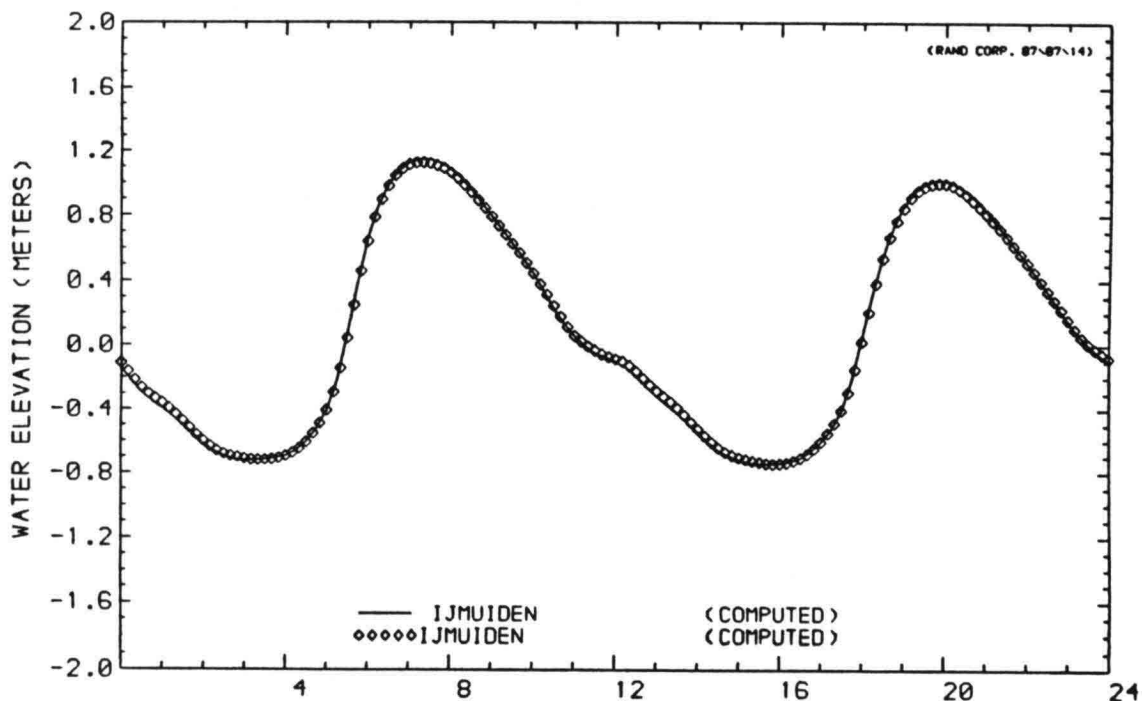
Figuur 4 : Vertikale doorsnede $y = \text{constant}$,
 met ζ , w en u punten.
 + en o : andere variabelen

3. Simulatie Nederlandse Kust

Het eerste testgeval betreft een strook langs een gedeelte van de Nederlandse kust, te weten vanaf Schouwen-Duiveland tot en met het Eems-Dollard estuarium. (zie figuur 1) Doel van deze testsimulatie is na te gaan waar duidelijke verschillen optreden tussen de uitkomsten van het 3-D model TRISULA en de resultaten van het 2-D dieptegemiddelde model WAQUA (zie ook [9]).

De horizontale maaswijdte van de beide modellen is 3200 meter terwijl een tijdstap van 50 seconden is aangehouden.

In dit hoofdstuk wordt kort ingegaan op enkele van de vele testberekeningen die met het model zijn uitgevoerd. Uitgebreide informatie is te vinden in [11].

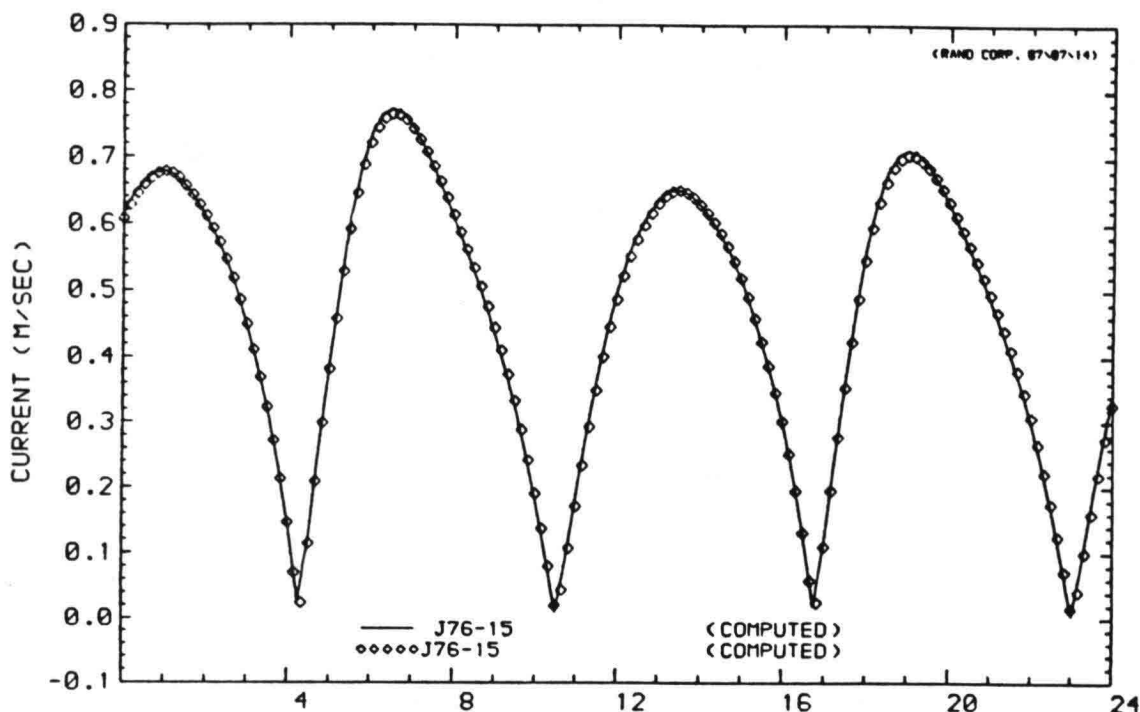


Figuur 5 : Waterstand in IJmuiden berekend met TRISULA en WAQUA.

Resultaten 3-D model met een laag

Er is ter controle een vergelijkende berekening uitgevoerd voor het TRISULA model met een laag en WAQUA. Zoals uit de figuren 5 en 6 blijkt komen de

resultaten zowel wat waterstand als diepte gemiddelde snelheid betreft, goed overeen.



Figuur 6 : Snelheid voor WAQUA en TRISULA

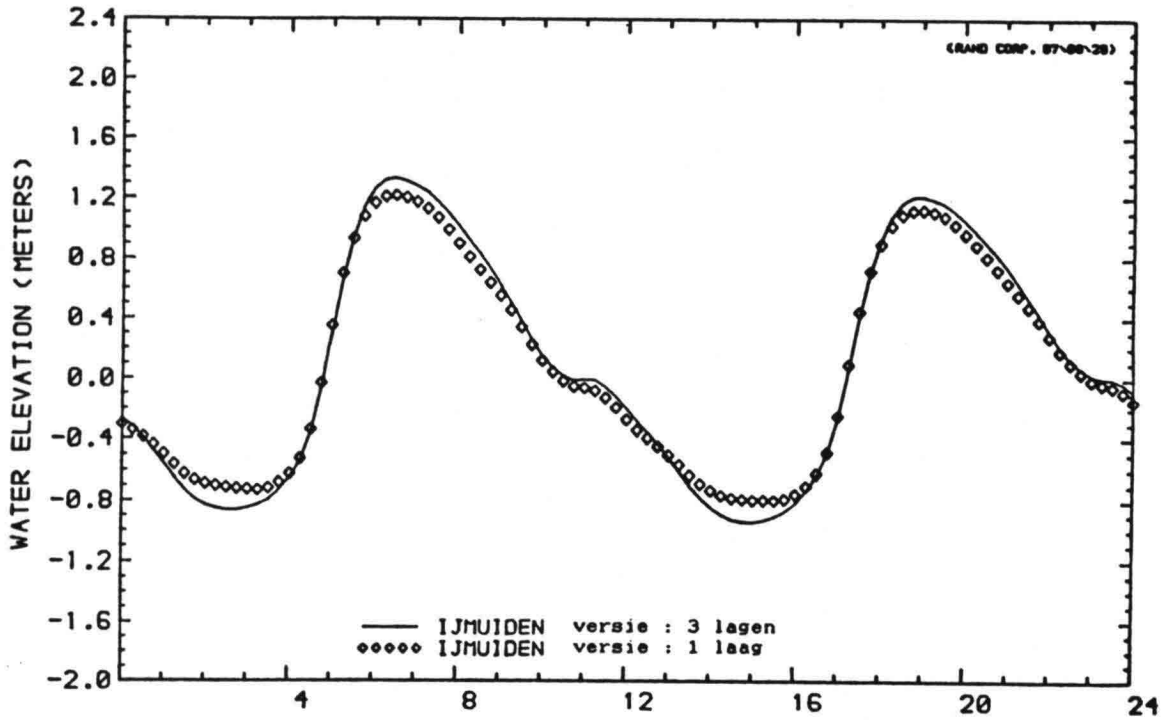
Resultaten 3-D model met drie lagen

Er zijn berekeningen uitgevoerd met een modelversie met drie lagen waarbij zes meter als laagdikte is aangehouden. Daar de diepte in grote delen van het gemodelleerde gebied groter is dan 18 meter betekent dit dat de onderste laag vrijwel steeds een dikte groter dan zes meter zal hebben. Vergelijking van waterstanden laat zien dat de amplitude bij meerdere lagen aanzienlijk toeneemt (zie figuur 7). De oorzaak van de toename ligt in het feit dat de Chezy coëfficiënt, de parameter voor de bodemweerstand, in beide gevallen hetzelfde is gehouden. Aangezien de bodemwrijving in het 2-D model gerelateerd is aan de over de vertikaal gemiddelde snelheid en bij TRISULA aan de veel kleinere snelheid in de onderste laag mag duidelijk zijn dat bij TRISULA een aanzienlijk kleinere Chezy-coëfficiënt vereist is. (zie ook hoofdstuk 4 en [3]).

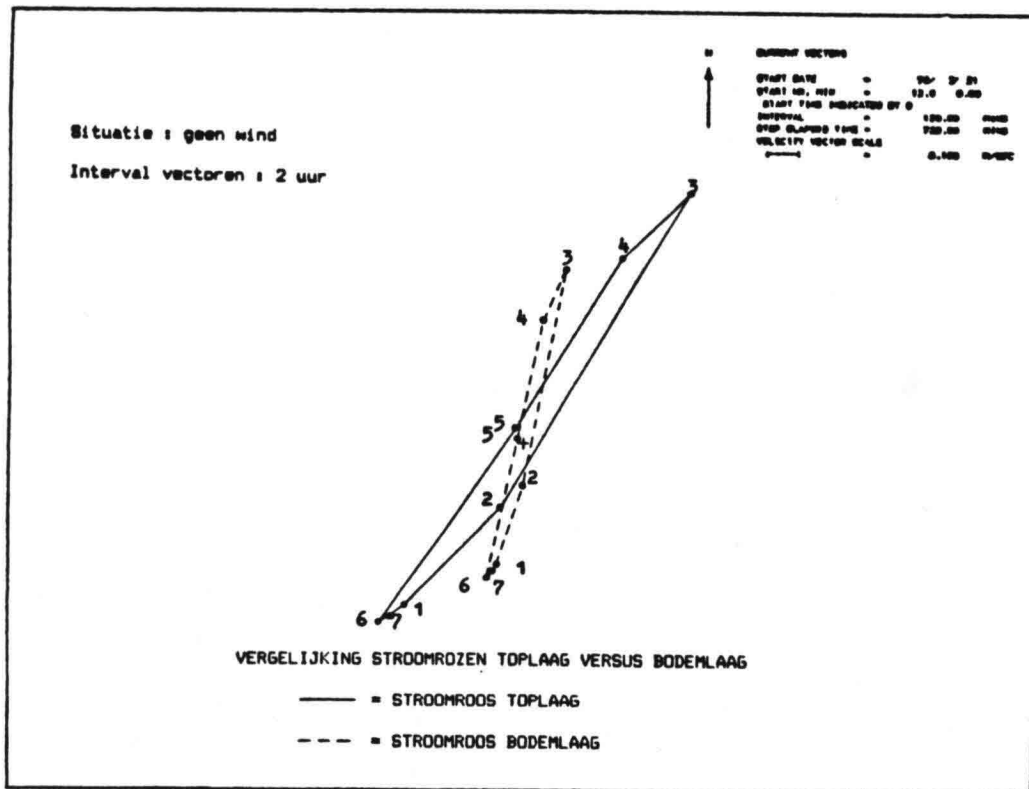
Bij de snelheidsvelden is bij de drie lagen versie een duidelijk profiel over de vertikaal aanwezig en is bovendien op veel plaatsen een draaiing van richting in de vertikaal waar te nemen (zie figuur 8). Dergelijke drie dimensionale effecten zijn uiteraard niet met het 2-D model te simuleren.

Resultaten stoftransportberekeningen

Tenslotte zijn berekeningen vergeleken van het concentratieverloop van een verontreinigende stof voor

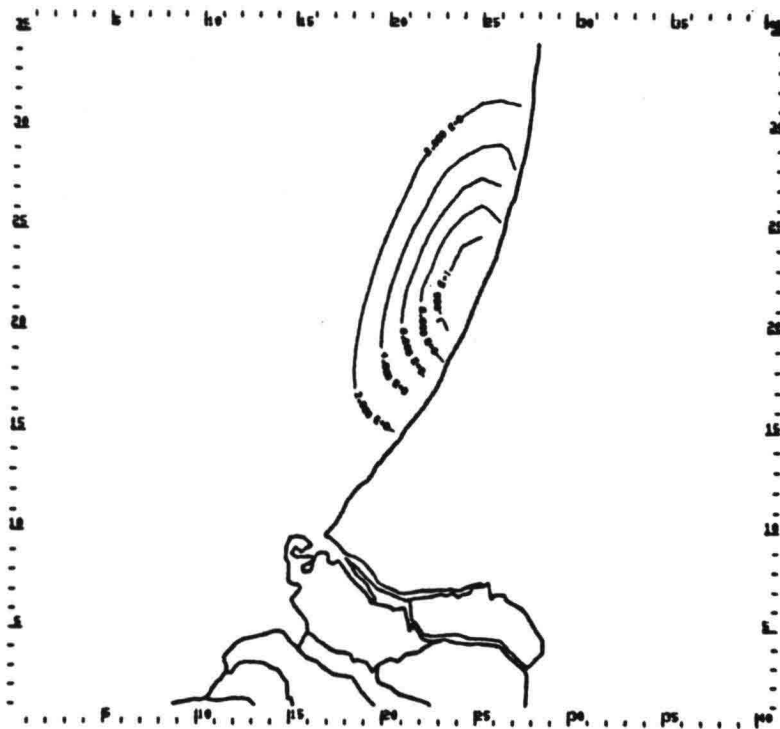


Figuur 7 : Waterstand in IJmuiden in geval dat TRISULA drie lagen heeft



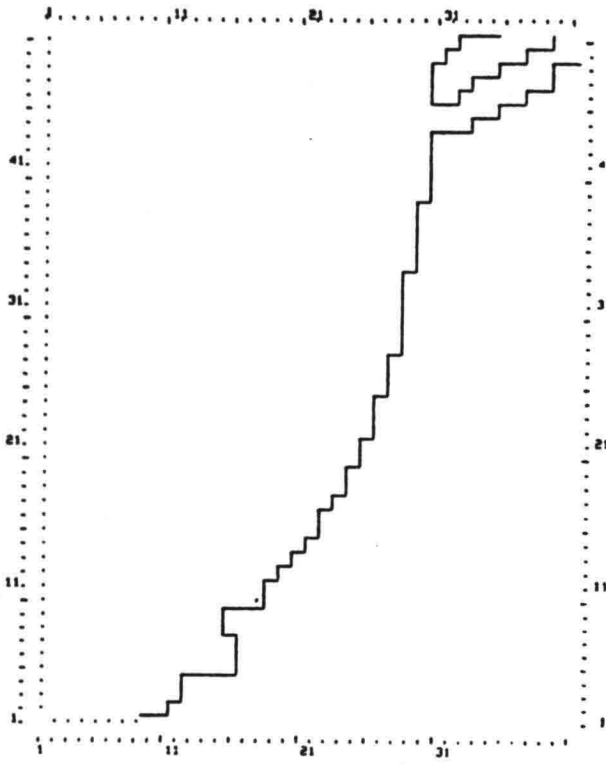
Figuur 8 : Stroomrozen in twee lagen in lokatie (22,20) voor de kust bij Noordwijk

een eenvoudig testgeval. Ter hoogte van de mond van de Nieuwe Waterweg is initieel een uniform over de vertikaal verdeelde concentratie gedefinieerd. Vervolgens is gekeken naar de verspreiding van de vlek na negen dagen zoals berekend met WAQUA en met TRISULA met drie lagen. (zie figuren 9 en 10)

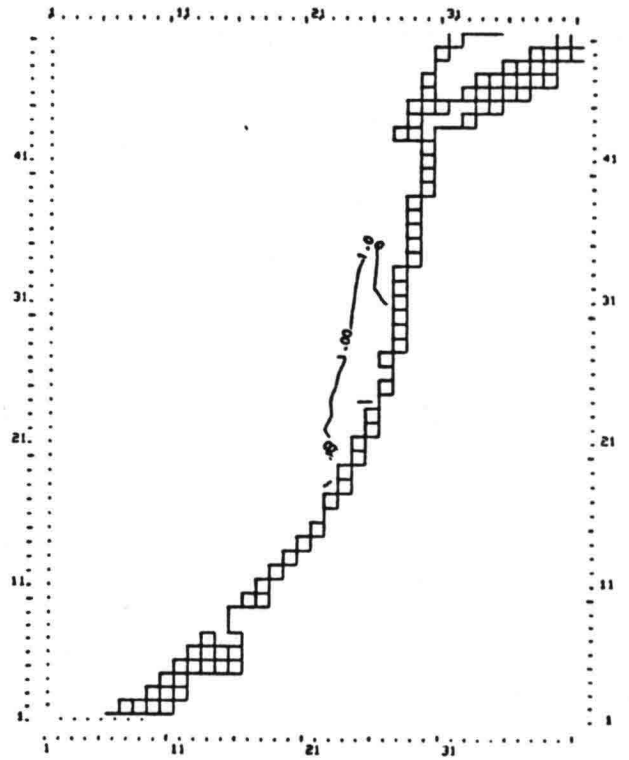


Figuur 9 : Concentratie na 9 dagen simuleren met WAQUA. (Wind : Z-W , 10 m/s)

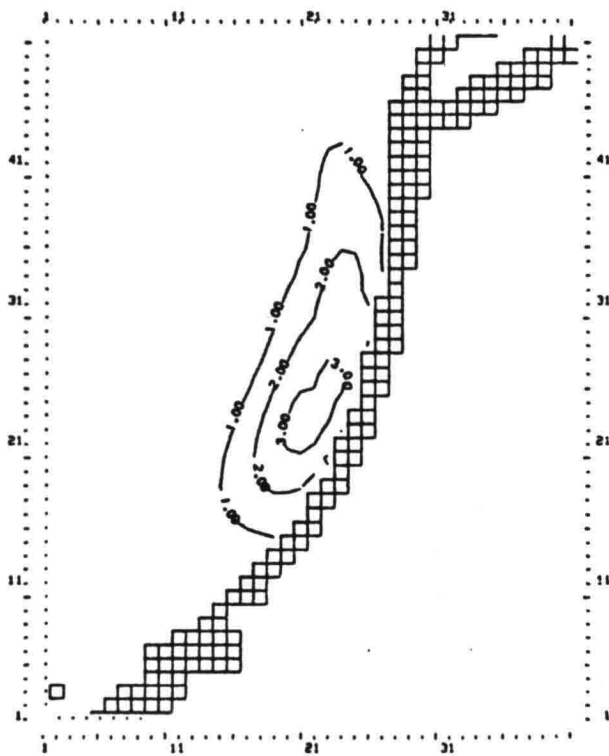
Uit de figuren blijkt dat er een groot verschil in transport is tussen de lagen onderling als ook tussen het WAQUA model en het drie lagen TRISULA model. De sterke verandering over de vertikaal van de concentratie, die in dit stadium van het onderzoek uitsluitend kwalitatieve waarde heeft, geeft duidelijk de meerwaarde van een 3-D model tegenover een 2-D model aan. De kwalitatieve beperking is uiteraard gelegen in het feit dat de kennis van de diverse diffusiecoëfficiënten, die voor een belangrijk gedeelte bepalend zijn voor de verticale menging, nog zeer gering is.



Bovenlaag



Middenlaag



Onderlaag

Figuur 10 :

Isoconcentratielijnen voor de drie TRISULA-lagen. De verticale turbulente uitwisselingscoëfficiënt is klein, (0.00001) en de wind zw : 10 m / s.

4. Simulatie Zuid - Hollandse Kust

Het tweede testgeval betreft het gebied voor de Zuid-Hollandse kust van de Maasvlakte tot de provinciegrens met Noord-Holland. (zie figuur 2). De lengte van dit beperkte gebied is 55 km en de breedte 15 km. De maaswijdten van het simulatiemodel zijn in de horizontaal 1000 meter en in de vertikaal 5 meter met de beperking dat er maximaal vier lagen mogen zijn.

Doel van dit experiment : het krijgen van inzicht in de gevoeligheid voor variaties in een aantal parameters te weten

- de verticale turbulente viscositeitscoefficient
- de horizontale turbulente viscositeitscoefficient
- de Chezy-coefficient
- de diffusiecoefficient

naast uiteraard controle op de realiteitswaarde van de uitkomsten. Daar zich in het betreffende gebied enige meetlokaties bevinden is vergelijkingsmateriaal beschikbaar.

Met name in de meetraai Noordwijk bevindt zich een aantal lokaties waar vrijwel permanent op verschillende dieptes snelheden worden gemeten. Ook zijn er rond de Maasgeul en het gebied Loswal-noord 13-uursmetingen beschikbaar in de vorm van grafieken van snelheids- en zoutvertikalen.

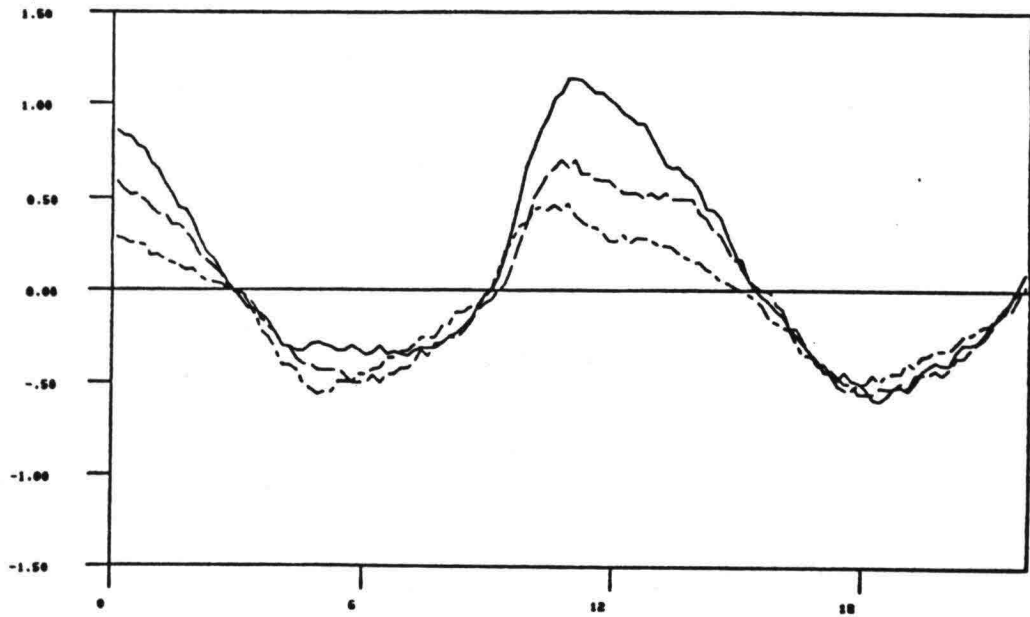
Evenals in hoofdstuk 3 zullen de resultaten niet uitputtend worden behandeld maar slechts kort vermeld worden. Gedetailleerde informatie is te vinden in [4].

Uniforme verticale turbulente viscositeitscoefficient

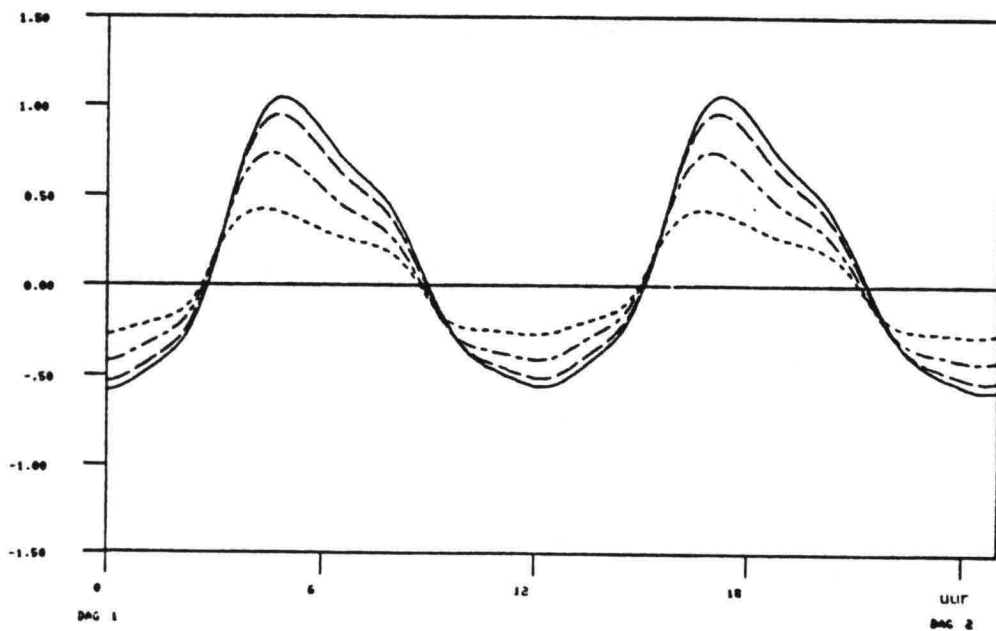
Na een aantal experimenten waarin waarden van $0.001 \text{ m}^2/\text{s}$ tot $1 \text{ m}^2/\text{s}$ zijn gebruikt voor de verticale turbulente viscositeitscoefficient is besloten een waarde van $0.01 \text{ m}^2/\text{s}$ aan te houden. De snelheden in het model zijn dan qua orde-grootte redelijk in overeenstemming met de waargenomen snelheden zoals uit de figuren 11 en 12 blijkt. Merk op dat de tijdas niet precies dezelfde is in beide figuren.

Niet Uniforme Vert. Turb. Viscositeit

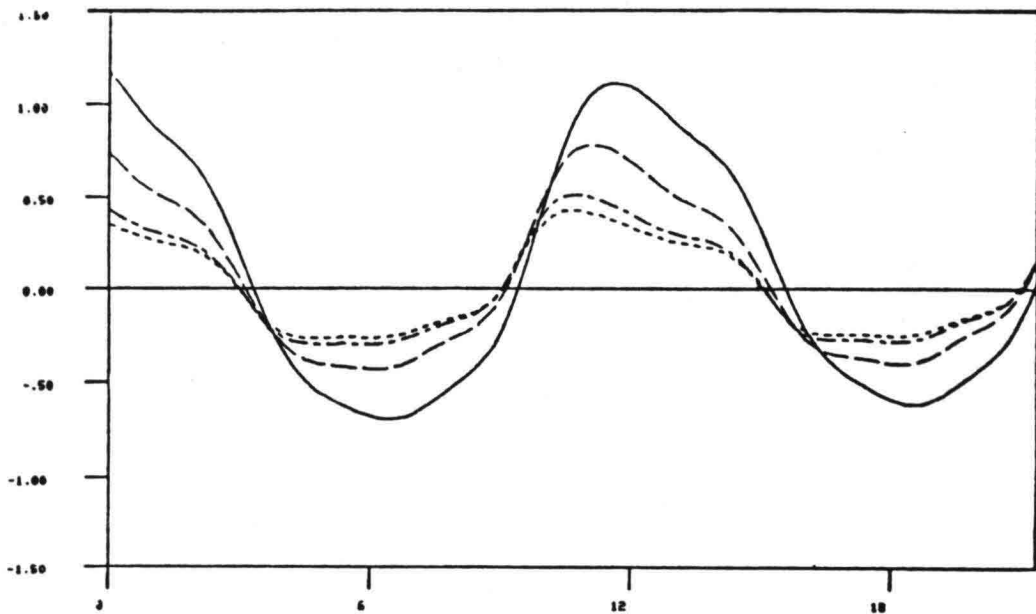
Het water voor de Zuid Hollandse kust is over het algemeen gelaagd als gevolg van de uitstroming van zoet Rijnwater bij Hoek van Holland. Deze zoete bovenlaag (dikte 2-5 meter) mengt zich slechts langzaam met de onderlaag en impulsoverdracht en



Figuur 11 : Snelheden in m/s als functie van de tijd Gemeten, in meetraai Noordwijk, 5 km uit de kust op resp 4 , 8 en 13 meter diepte Snelheid is in bovenste laag het grootst



Figuur 12 : Berekende snelheden in dezelfde lokatie als fig. 11. op resp 2.5 , 7.5 , 12.5 en 16.5 m diepte. Vertikale turbulente viscositeitscoefficient is $.01 \text{ m}^2/\text{s}$



Figuur 13 : Berekende snelheden in dezelfde lokatie als fig. 11 Vertikale turbulente viscositeit per laag anders : .002, .01 en .05

stofuitwisseling zijn dan ook een orde kleiner dan bij homogeen water. Om dit te simuleren is de verticale viscositeitscoëfficiënt in de bovenlaag op $.002 \text{ m}^2/\text{s}$ gezet, aan de bodem op $.05 \text{ m}^2/\text{s}$ en daartussen op $.01 \text{ m}^2/\text{s}$, terwijl de Chezywaarde op $35 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ is gehouden.

Dit geeft evenwijdig aan de kust realistische snelheidsvertikalen (Vergelijk de figuren 11, 12 en 13). Met name de onderlinge verhouding van de snelheid in de verschillende lagen wordt met een variabele coëfficiënt beter weergegeven. Ook wordt dan duidelijker zichtbaar dat de kenteringstijdstippen per laag verschillend zijn, (zie figuren 11 en 13) een verschijnsel dat ook uit de waarnemingen bekend is.

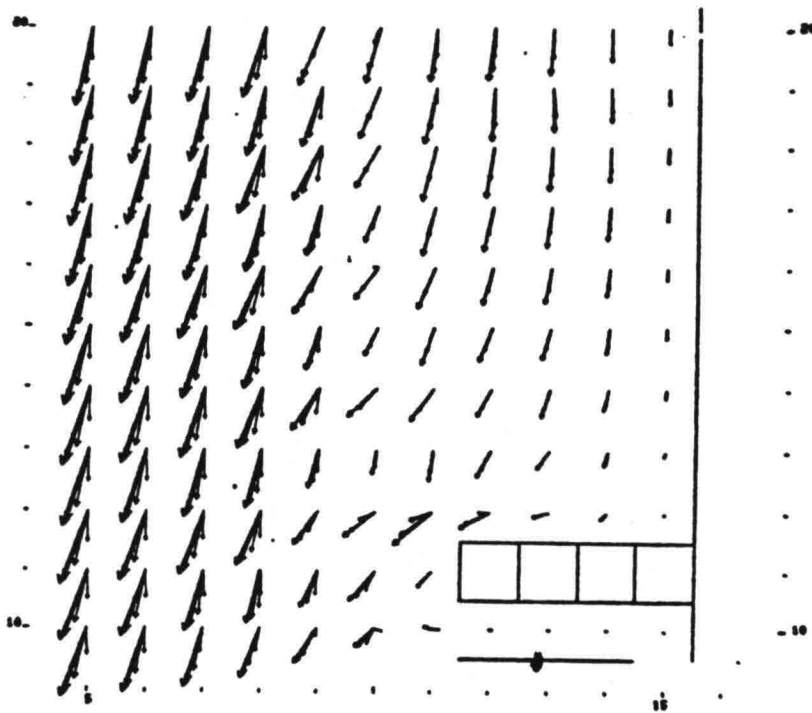
Horizontale viscositeitscoëfficiënt

De horizontale viscositeitscoëfficiënt die een zekere mate van stabiliteit in de uitkomsten bevordert, is in analogie met de 2-D modellen, op de realistische waarde van $10 \text{ m}^2/\text{s}$ gezet. Dit tast de nauwkeurigheid niet aan daar het model een maaswijdte heeft van 1000 m. Kleinere waarden, 0.1 en 1.0 in plaats van 10, geven duidelijk schommelingen in de berekende snelheidswaarden te zien.

De Bodemwrijving

Variaties van de Chezy-waarde, die bepalend is voor de invloed van de bodemwrijving, geven aan dat in het onderhavige voorbeeld een waarde van $35 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ de beste resultaten oplevert, als wordt uitgegaan van de eis dat een dieptegemiddelde snelheid die overeenkomt met de werkelijkheid moet worden gevonden. Deze Chezy-waarde is aanzienlijk lager dan de gebruikelijke $65 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$ voor 2-D modellen van de zuidelijke Noordzee, en wel om twee redenen (zie ook [2]):

- i) De grootte van de bodemwrijvingsterm wordt bepaald door de snelheid in de onderste laag, waar de snelheden veel kleiner zijn dan de over de diepte gemiddelde snelheid. (Vergelijk ook hoofdstuk 3)
- ii) Het model beslaat in het onderhavige geval alleen een vrij ondiepe kuststrook waardoor de invloed van de bodemwrijving relatief groot zal zijn. Ook in 2-D modellen wordt de Chezy-waarde dan kleiner genomen.



Figuur 14 : Snelheidsvectoren voor alle lagen. Per punt hoort de langste vector bij de bovenste laag.

Spiraal

Een van de verschijnselen die in een

dieptegemiddeld 2-D model niet gesimuleerd kan worden is de variatie van een grootte over de vertikaal. In figuur 14 is de spiraal tengevolge van de bodemwrijving en het Corioliseffect in de opgetreden snelheden duidelijk waarneembaar. De snelheden worden zoals reeds gemeld sterk beïnvloed door de verticale viscositeitscoëfficiënt.

Stofverspreiding

Er is geëxperimenteerd met meerdere waarden voor de diffusiecoëfficiënten in zowel de x-, y- en z-richting. Zoals bekend ([7]) moet in het geval van een lineaire convectie-diffusie vergelijking een cel-Peclet getal ($u \Delta x / D$) kleiner dan twee genomen worden. Dit is een zo strenge eis dat hieraan alleen in de z-richting voldaan kan worden. Gelukkig blijkt evenwel uit de resultaten dat de overige termen van de bewegingsvergelijkingen en de niet-lineariteit een dermate gunstige invloed hebben dat er nauwelijks slingeringen in de berekende concentraties ontstaan.

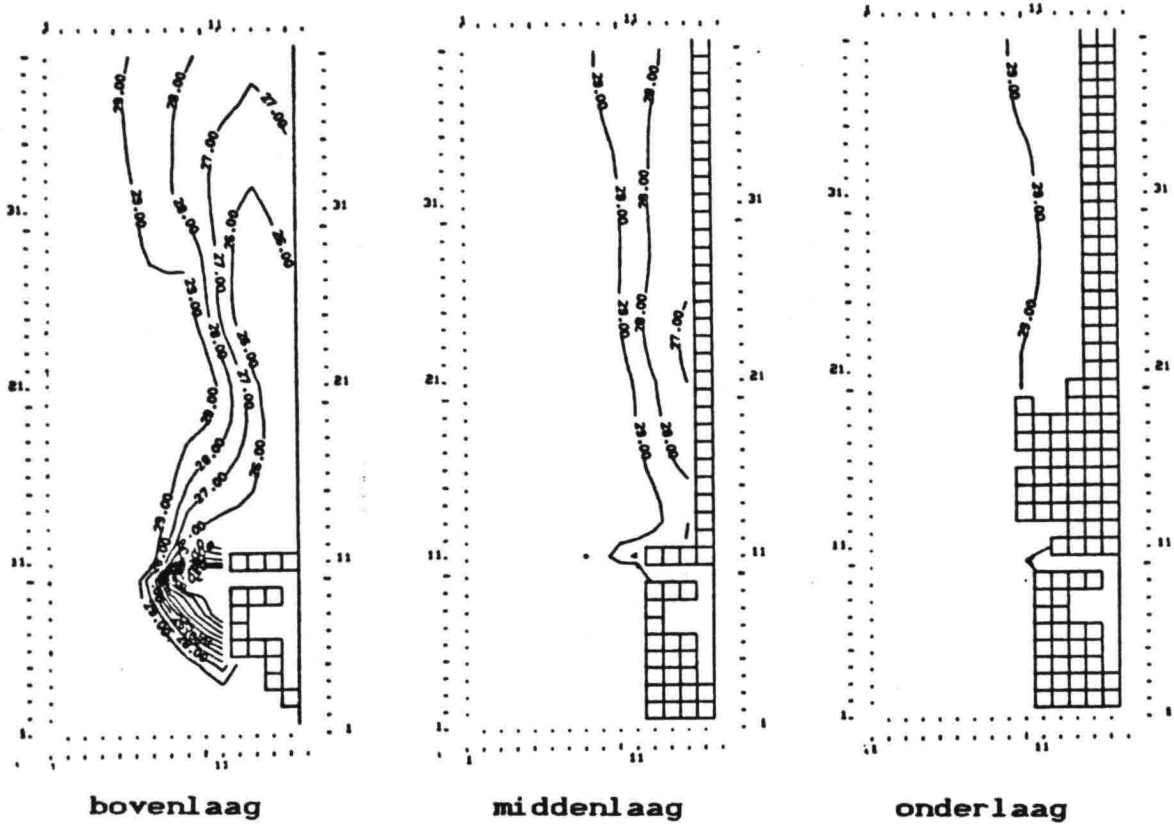
In horizontale richting is een diffusiecoëfficiënt gekozen ($D = 30 \text{ m}^2/\text{s}$) die in overeenstemming is met de afmetingen van een vlek van een tot enkele km doorsnede. Kleinschalige toepassingen (concentratievlekken met afmetingen kleiner dan twee maal de maaswijdte Δx) zijn hierdoor uitgesloten, maar voor het weergeven van het tamelijk gladde saliniteitspatroon voldoet deze waarde goed, (zie figuur 15), ook al wordt de cel-Peclet eis lang niet gehaald. Kleinere coëfficiënten geven te sterke slingeringen in de concentratie en grotere een onrealistisch grote uitsmering van de concentratie.

Bij sterke gelaagdheid is per definitie geen sprake van een glad vertikaal concentratieverloop, en voor deze situatie zijn er daarom speciale aanpassingen in het programma nodig.

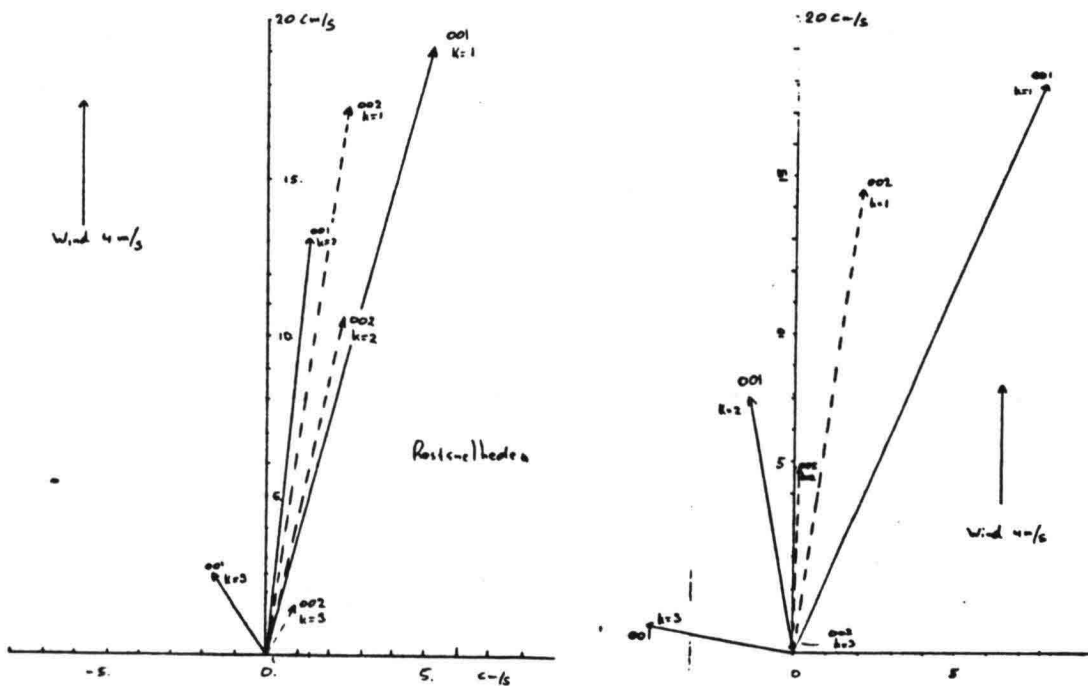
De invloed van de horizontale dichtheidsgradient

Om de invloed van de horizontale dichtheidsgradient in beeld te brengen zijn twee runs gedraaid: een met homogeen water en een met zowel een horizontale als verticale dichtheidsgradient. Zie figuur 16 voor de resultaten. Hierin staan de getijgemiddelde snelheidsvectoren voor drie lagen in een tweetal punten bij Loswal Noord.

De verandering van de snelheidsvectoren is opvallend: enerzijds wat betreft de richting welke in de bovenlaag tegengesteld is aan de verandering in de onderlaag en anderzijds de absolute grootte welke duidelijk kleiner is in de situatie met een dichtheidsgradient. Dit is in overeenstemming met metingen. (zie voor een verklaring van dit effect [2]).



Figuur 15 : Lijnen van gelijke saliniteit



Figuur 16 : Restsnelheidsvectoren voor drie lagen, resp met (002) en zonder (001) horizontale dichtheidsgradient. Bovenlaag $k=1$

5. Konklusies en aanbevelingen

Alhoewel slechts twee gebieden gemodelleerd zijn is het aantal berekeningen vrij groot geweest. Op grond van deze berekeningen en de daarmee verkregen resultaten zijn de volgende konklusies te trekken :

- Met de modellen zijn resultaten verkregen die, kwalitatief en kwantitatief, redelijk bij de waargenomen waarden aansluiten.
- De invloed van de diverse parameters is groot, met name de variabiliteit in de vertikaal vraagt nog om veel gevoeligheids-berekeningen. Daarnaast is ondersteunend fysisch modelonderzoek nodig om de kennis van de te simuleren processen te vergroten.
- Stofverspreiding geeft vergelijkbare problemen als bij 2-D modellen met betrekking tot negatieve concentraties.
- Gezien de rekentijd per stap is het de vraag of een expliciet schema in de tijd het meest voor de hand ligt. Met name in die gevallen waarbij gedetailleerde informatie nodig is en de maaswijdte overeenkomstig klein waardoor de rekentijden per simulatie onacceptabel kunnen oplopen.
- Er is grote behoefte aan goede programmatuur voor de weergave van 3-D resultaten.

Literatuur

- [1] van Dijk, R en R. Plieger
Rapportage testruns 3D-case
Notitie GWAO-87.482, 1987, DGW
- [2] de Kok, J.M.
De invloed van de horizontale
dichtheidsgradient op rest-
snelheden voor de Zuid-Hol-
landse kust.
Notitie GWAO-87.293, 1987, DGW
- [3] de Kok, J.M.
Effect van bodemwrijving,
vertikale impulsuitwisseling
en wind op de gemiddelde
snelheid in TRISULA en WAQUA
Notitie GWAO-87.419, 1987, DGW
- [4] de Kok, J.M.
Testcase TRISULA
Notitie GWAO-87.420, 1987, DGW
- [5] Leendertse, J.J.
Aspects of a computational
model for long-period water-
wave motion.
Proefschrift, T. U. Delft, 1967
- [6] Praagman, N.
Numerical Solution of the
shallow water equations by a
Finite Element Method
Proefschrift, T. U. Delft, 1979
- [7] Roache, P. J.
Computational Fluid Dynamics
Hermosa Publishers, 1972
- [8] Rodi, W.
Turbulence models and their
application in hydraulics
I. A. H. R., 1984
- [9] Stelling, G.S.
On the construction of compu-
tational methods for shallow
water flow problems
Proefschrift, T. U. Delft, 1983

Bijlage

In het volgende worden als voorbeeld enkele vergelijkingen in de vertikaal per laag geïntegreerd zodat per laag gemiddelde grootheden ontstaan. Voor deze integratie wordt gebruik gemaakt van laaggemiddelde grootheden die als volgt gedefinieerd worden :

$$(10) \quad \bar{G}_k = \frac{1}{h_k} \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} G \, dz$$

waarbij G een willekeurige grootheid en h_k de laagdikte van de k 'de laag.

De vlakken $z = z_{k+1/2}$ en $z = z_{k-1/2}$ begrenzen laag k .

Merk op dat de positieve z -as met de x - en y -as een rechtsdraaiend assenkruis vormt en dat de nummering van de lagen juist in tegengestelde richting toeneemt.

Integratie van de continuïteitsvergelijking

Integratie over laag k geeft voor (4) :
(Stel $kt =$ totaal aantal lagen, dan geldt voor $k=2,3,\dots,kt-1$)

$$(11) \quad w_{z_{k-1/2}} = w_{z_{k+1/2}} - \frac{\partial}{\partial x} (h_k \bar{u}_k) - \frac{\partial}{\partial y} (h_k \bar{v}_k)$$

daar voor de vlakken z geldt :

$$z_{k-1/2} = \text{konstant} \text{ en } z_{k+1/2} = \text{konstant.}$$

Aan de bodem, dat is laag kt , volgt door gebruik te maken van (9)

$$(12) \quad w_{z_{kt+1/2}} = \frac{dz}{dt} \Big|_{kt+1/2} =$$

$$= u_{z_{kt+1/2}} \frac{\partial}{\partial x} (z_{kt+1/2}) + v_{z_{kt+1/2}} \frac{\partial}{\partial y} (z_{kt+1/2})$$

zodat integratie van (4) over de onderste laag met de regel van Leibniz (zie [6]) levert :

$$(13) \quad w_{z_{kt-1/2}} = - \frac{\partial}{\partial x} (h_{kt} \bar{u}_{kt}) - \frac{\partial}{\partial y} (h_{kt} \bar{v}_{kt})$$

terwijl aan het vrije oppervlak op dezelfde wijze uit (8) volgt :

$$(14) \quad w_{z_{1/2}} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + u_{1/2} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v_{1/2} \frac{\partial \zeta}{\partial y}$$

zodat met (4) gecombineerd :

$$(15) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = w_{z_{1/2}} - \frac{\partial}{\partial x} (h_{11} \bar{u}_{11}) - \frac{\partial}{\partial y} (h_{11} \bar{v}_{11})$$

Door combinatie van de vergelijkingen voor alle lagen volgt :

$$(16) \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{kt} \left[- \frac{\partial}{\partial x} (h_i \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial y} (h_i \bar{v}_i) \right] = 0$$

Hiermee is zowel voor de verticale snelheden op de tussenvlakken als voor de vrije waterspiegel ζ een uitdrukking gevonden.

Integratie van de x - impulsvergelijking

Integratie van de niet-lineaire impuls vergelijking levert meer problemen op. Op de gebruikelijke wijze, zie ook [6], zullen diverse termen parametrisch benaderd moeten worden door diffusie-achtige termen.

Omdat in de loop van de afleiding gebruik gemaakt zal worden van de geïntegreerde vorm van vergelijking (3), wordt deze vorm eerst uitgeschreven:

$$\int_z^{z_{1/2}} \frac{\partial p}{\partial z} dz + \int_z^{z_{1/2}} \rho g dz = 0$$

$$p(z) = p_{1/2} + g \int_z^{z_{1/2}} \rho(z) dz =$$

$$= p_{1/2} + g \left(\int_{z_{3/2}}^{z_{1/2}} \rho(z) dz + \int_{z_{5/2}}^{z_{3/2}} \rho(z) dz + \dots \int \dots \right)$$

waaruit tenslotte volgt ($i=1,2,\dots,kt$) :

$$(17) \quad p_{i+1/2} = p_{1/2} + g (\bar{\rho}_1 h_1 + \bar{\rho}_2 h_2 + \dots + \bar{\rho}_i h_i)$$

met $p_{1/2}$ de atmosferische druk aan de vrije waterspiegel.

Beschouw nu vergelijking (1) :

$$(18) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(u v) + \frac{\partial}{\partial z}(u w) - f v +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (A_x \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (A_x \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{xz}) \right) = 0$$

Merk op dat er een vereenvoudiging heeft plaatsgevonden door de aanname :

$$(19) \quad \begin{cases} \tau_{xx} = A_x \frac{\partial u}{\partial x} \\ \tau_{xy} = A_x \frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

de introductie van de "Eddy-viscosity" coefficient A_x . Vanwege de invloed die de horizontale schuifspanningstermen hebben, een invloed die vergelijkbaar is met diffusieprocessen, is voor (19) gekozen. Afhankelijk van het beoogde doel van het mathematische model kunnen geavanceerdere technieken gebruikt worden. (zie ook [8]).

Integratie van (18) over de verticale laag k geeft (uitgewerkt per term) :

$$(20) \quad \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} (h_k \bar{u}_k) -$$

$$+ u_{z_{k-1/2}} \frac{\partial}{\partial t} (z_{k-1/2}) + u_{z_{k+1/2}} \frac{\partial}{\partial t} (z_{k+1/2})$$

dit leidt voor $k = 1$ tot :

$$= \frac{\partial}{\partial t} (h_{11} \bar{u}_1) - u_{z_{1/2}} \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

en voor $k > 1$ tot :

$$= \frac{\partial}{\partial t} (h_k \bar{u}_k)$$

voor de tweede term volgt (maak steeds gebruik van de regel van Leibniz) :

$$(21) \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} \frac{\partial}{\partial x} (u^2) dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} u^2 dz \right) -$$

$$+ u_{z_{k-1/2}}^2 \frac{\partial}{\partial x} (z_{k-1/2}) + u_{z_{k+1/2}}^2 \frac{\partial}{\partial x} (z_{k+1/2})$$

de laatste twee termen uit (21) vallen voor alle tussenvlakken $z = \text{konstant}$ weg, zodat voor $1 < k < kt$ volgt :

$$= \frac{\partial}{\partial x} (h_k \bar{u}_k^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} (u - \bar{u}_k)^2 dz \right)$$

terwijl indien $k = 1$:

$$= \frac{\partial}{\partial x} (h_{11} \bar{u}_1^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{z_{3/2}}^{z_{1/2}} (u - \bar{u}_1)^2 dz \right) - u_{z_{1/2}}^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

en als $k = kt$:

$$= \frac{\partial}{\partial x} (h_{kt} \bar{u}_{kt}^2) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{z_{kt+1/2}}^{z_{kt-1/2}} (u - \bar{u}_{kt})^2 dz \right) + u_{z_{kt+1/2}}^2 \frac{\partial h}{\partial x}$$

De term $\frac{\partial}{\partial y} (uv)$ uit de oorspronkelijke vergelijking wordt op dezelfde wijze verwerkt.

Daarna volgt :

$$(22) \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} \frac{\partial}{\partial z} (uw) dz =$$

$$uw \Big|_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} = u_{k-1/2} w_{k-1/2} - u_{k+1/2} w_{k+1/2}$$

en

$$(23) \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} f v dz = f h_k \bar{v}_k$$

met de nodige verwaarlozingen geldt voor de drukterm voor alle lagen k ($1 \leq k \leq kt$) :

$$(24) \int_{z_{k+1/2}}^{z_{k-1/2}} \frac{\partial p}{\partial x} dz = g h_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \bar{\rho}_i h_i \right) + \frac{1}{2} h_k \frac{\partial \bar{\rho}_k}{\partial x} \right)$$

Samenvoegen van de verschillende termen zorgt voor de uiteindelijke vorm van de vergelijking :

laag $k = 1$:

$$\frac{\partial}{\partial t} (h_1 \bar{u}_1) - u_{z_{1/2}} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 \bar{u}_1^2) - u_{z_{1/2}}^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{z_{3/2}}^{z_{1/2}} (\tilde{u}_1)^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} (h_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1) - u_{z_{1/2}} v_{z_{1/2}} \frac{\partial \zeta}{\partial y} +$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \int_{z_{3/2}}^{z_{1/2}} (\tilde{u}_1 \tilde{v}_1) dz + u_{1/2} w_{1/2} - u_{3/2} w_{3/2} - f h_1 \bar{v}_1 +$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} g h_1^2 \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial x} + g h_1 \bar{\rho}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = \left(A_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(A_x \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left(\tau_{xz} \right)$$

met $\tilde{u}_k = u - u_k$.

Indien wordt aangenomen dat geldt

$$\rho \int_{z_{3/2}}^{z_{1/2}} \tilde{u}_1^2 dz + A_x \frac{\partial u}{\partial x} = \tilde{A}_x \frac{\partial u}{\partial x},$$

opnieuw een aanname dat het effect van bepaalde processen op een specifieke wijze gemodelleerd kan worden, dan volgt met vgl (14) voor de eerste laag :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (h_1 \bar{u}_1) + \frac{\partial}{\partial x} (h_1 \bar{u}_1^2) + \frac{\partial}{\partial y} (h_1 \bar{u}_1 \bar{v}_1) - u_{3/2} w_{3/2} + \\ (25) \quad & - f h_1 \bar{v}_1 + \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{2} g h_1^2 \frac{\partial \bar{\rho}_1}{\partial x} + g h_1 \bar{\rho}_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) = \\ & \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{A}_x \frac{\partial u}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{A}_x \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tilde{\tau}_{xz}) \right) \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze kan door combinatie een bewegingsvergelijking voor de andere lagen worden afgeleid met het voorgaande materiaal.

