

3. Spannungs-Dehnungsverhalten von gerissenem Beton

Ir. J. C. WALRAVEN

3.1 Einleitung

Seitdem man bewehrten Beton anwendet, wurden auch Untersuchungen zum Spannungs- und Dehnungsverhalten konstruktiver Elemente durchgeführt, die durch viele mögliche Belastungskombinationen beansprucht werden. Weil es häufig schwierig war, das Trag- und Verformungsverhalten auf eine mathematisch befriedigende Weise zu beschreiben, wurden viele empirischen Forschungen ausgeführt, um dieses Verhalten vorhersagen zu können. Diese Entwicklung wurde durch zunehmenden Gebrauch neuer Baustoffe und neuer konstruktiven Entwicklungen verstärkt. Weil ein grosser Bedarf an Prüfungsergebnissen bestand, um Richtlinien zum Konstruieren herleiten zu können, ist die Forschung nach den grundlegenden Mechanismen der Kräfteübertragung ziemlich in den Hintergrund geraten. Heutzutage aber gibt es wieder ein wachsendes Interesse für die Grundmechanismen, weil die Entwicklung moderner Rechenanlagen die Möglichkeiten beträchtlich erweitert hat, um das Verhalten von Konstruktionen zutreffend zu beschreiben. Diese Betrachtungsweise fordert aber eine neue Art der Darstellung des Baustoffverhaltens.

Im folgenden wird eine theoretische Herleitung des Spannungs-Dehnungsverhaltens gerissener Betonscheiben im elastischen Zustand gegeben.

3.2 Spannungen und Dehnungen im ungerissenen Zustand

Um das Verhalten im gerissenen Zustand beschreiben zu können, ist es auch nötig zu wissen, wie das Material sich im ungerissenen Zustand verhält, da ein gerissenes Material ein Nebeneinander ungerissener Teile ist. Von Professor de Josselin de Jong (TU Delft) wurde abgeleitet [siehe Cement 26 (1974), S. 166/176], dass ein elastisches Material, das in einer Richtung mit Fasern verstärkt ist, ein Verhalten zeigt, das beschrieben werden kann durch

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_3 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

worin

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \omega E_a \cos^4 \varphi + (1 - \omega) E_b / (1 - v_b^2) \\ \lambda_2 &= \omega E_a \cos^3 \varphi \sin \varphi \\ \lambda_3 &= \omega E_a \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (1 - \omega) v_1 E_b / (1 - v_b^2) \\ \lambda_4 &= \omega E_a \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + (1 - \omega) E_b / 2(1 + v_b) \end{aligned}$$

$$\lambda_5 = \omega E_a \cos \varphi \sin^3 \varphi$$

$$\lambda_6 = \omega E_a \sin^4 \varphi + (1 - \omega) E_b / (1 - \nu_b^2)$$

ω = Bewehrungsgrad
 E_a = E-Modul des Fasermaterials
 E_b = E-Modul des Matrixmaterials
 ν_b = Querdehnzahl des Matrixmaterials

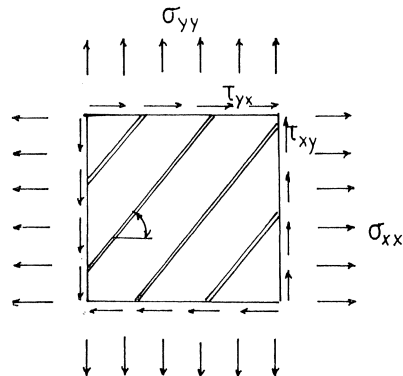


Bild 3.1. Bewehrtes ungerissenes Element.

Im ungerissenen Zustand ist bei bewehrtem Beton der Einfluss der Bewehrung klein. Dies wird illustriert mit einer Scheibe, die nur in einer Hauptspannungsrichtung auf Zug beansprucht ist. In Bild 3.2 wird der berechnete Zusammenhang zwischen der Bewehrungsrichtung und der Rissrichtung gegeben. Dabei ist angenommen, dass die Rissrichtung senkrecht zu der Hauptdehnungsrichtung im Material ist.

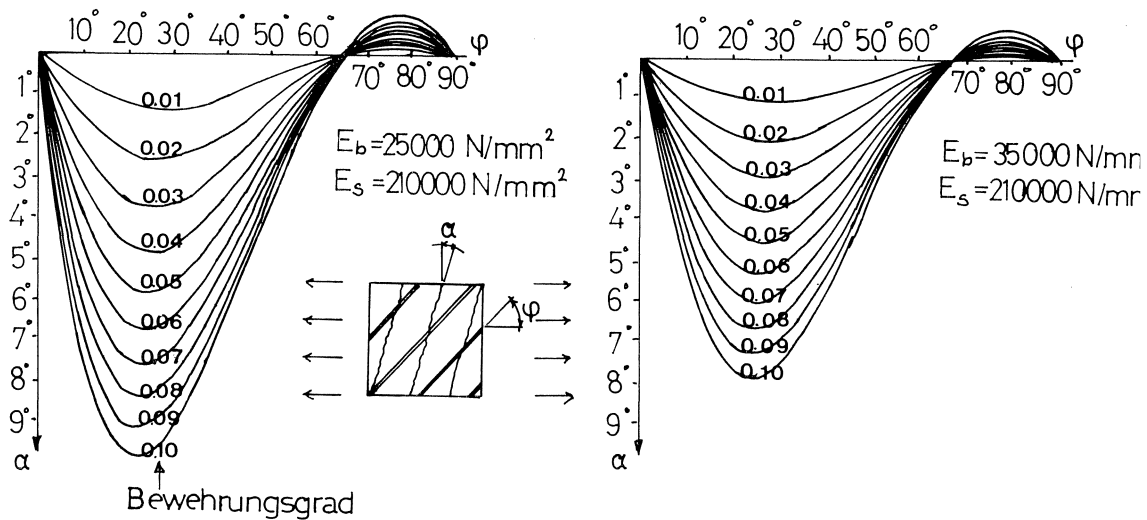


Bild 3.2. Zusammenhang zwischen Bewehrungsrichtung und Hauptdehnungsrichtung.

Man sieht, dass bei Beton, bei dem der Bewehrungsgrad niedrig ist, kein grosser Unterscheid zwischen Hauptspannungs- und Hauptdehnungsrichtung auftritt.

3.3 Gerissener Zustand

3.3.1 Annahmen und Bezeichnungen

Bei Rissbildung wird ein Scheibenelement in eine Anzahl ungerissener Teile unterteilt, die von der Bewehrung zusammengehalten werden.

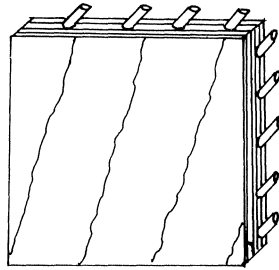


Bild 3.3. Gerissenes Element.

In einem Riss soll der Stahl alle Kräfte senkrecht zur Rissrichtung übertragen, wodurch die Stahlspannung hier höher als sonst im Material ist. In einem bestimmten Gebiet zu beiden Seiten des Risses wird über Haftspannungen ein Uebergang von Zugkräften aus der Bewehrung zum Beton stattfinden. Ein Riss ist somit nicht allein ein Querschnitt, in dem keine Betonzugspannungen übertragen werden, sondern er führt im angrenzenden Gebiet auch zu einer grösseren Dehnung der Bewehrung.

Die bewehrte, gerissene Scheibe wird zusammengesetzt gedacht aus Gebieten, in denen näherungsweise ein homogener Spannungszustand herrscht, und Gebieten, in denen dieser homogene Spannungszustand durch einen Riss gestört ist.

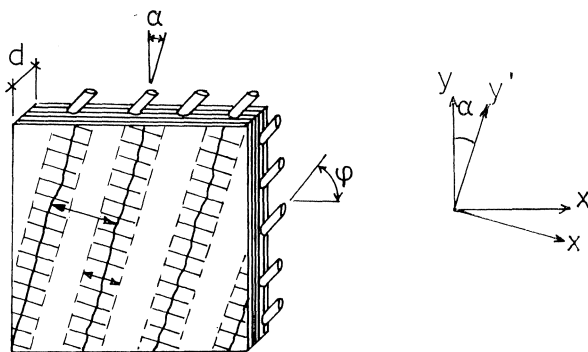


Bild 3.4. Verschiedene Zonen eines gerissenen Elements. S gestört, U ungestört.

Die Spannungs-Dehnungsbeziehung des ungestörten Gebietes wird durch Gl. (3.1) beschrieben, für das Störungsgebiet wird eine Beziehung abgeleitet, wobei die beiden Gebiete miteinander verknüpft werden.

Ausgegangen wird von einem $x_1'y_1'$ -Achsensystem, wobei y' im Richtung des Risses liegt. Für die Breite des Störungsgebietes wird b angenommen, für den Rissabstand a . Der Stababstand ist k .

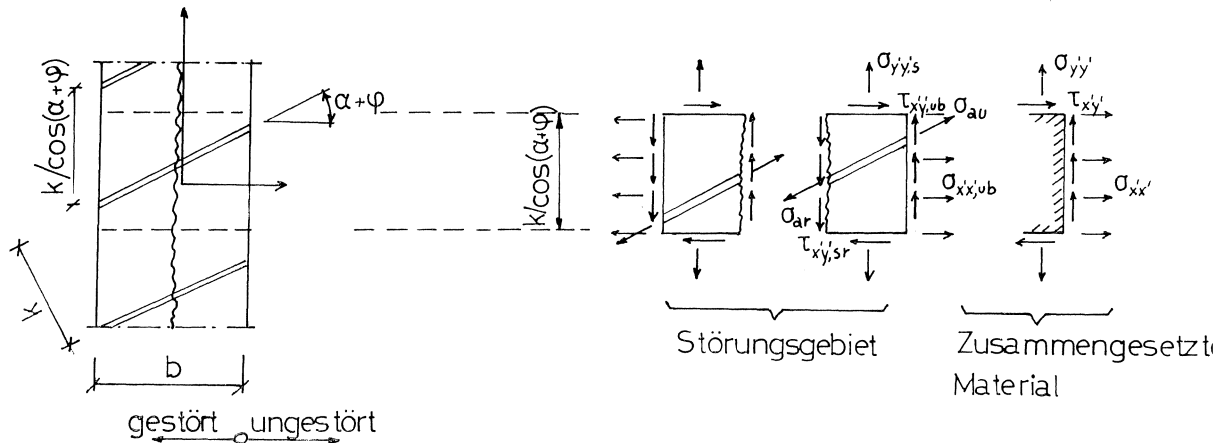


Bild 3.5. Spannungen im gerissenen Element.

σ_{au}	= Stahlspannung im ungestörten Gebiet
σ_{ar}	= Stahlspannung im Riss
$\sigma_{x'x',u,b}$	= Normalspannung $\sigma_{x'x'}$ ungestörtes Gebiet Beton
$\tau_{x'y',u,b}$	= Schubspannung $\tau_{x'y'}$ ungestörtes Gebiet Beton
$\tau_{x'y',s,r}$	= Schubspannung $\tau_{x'y'}$ Störungsgebiet, im Riss
$\tau_{y'x',s}$	= Schubspannung, Störungsgebiet
$\sigma_{y'y',s}$	= Normalspannung $\sigma_{y'y'}$, Störungsgebiet
$\sigma_{xx'}, \sigma_{y'y'}, \tau_{x'y'}$	= Zusammengesetzte Spannungen
	= äussere Spannungen

3.3.2 Herleitung der Spannungen

– Stahlspannung σ_{au} am Rande des ungestörten Gebietes

Der Dehnungszustand im ungestörten Gebiet ist bekannt aus Gl. (3.1), wobei jetzt $(\alpha + \varphi)$ statt (φ) eingesetzt werden soll. Durch Umformung der Gleichungen bekommt man dann

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{x'x'} &= \mu_1 \sigma_{x'x'} + \mu_2 \tau_{x'y'} + \mu_3 \sigma_{y'y'} \\
 \gamma_{x'y'} &= \mu_2 \sigma_{x'x'} + \mu_4 \tau_{x'y'} + \mu_5 \sigma_{y'y'} \\
 \varepsilon_{y'y'} &= \mu_3 \sigma_{x'x'} + \mu_5 \tau_{x'y'} + \mu_6 \sigma_{y'y'}
 \end{aligned}
 \tag{3.2}$$

Die Koeffizienten μ_1 usw. sind die Koeffizienten einer Matrix, die die Invertierte der λ -Matrix ist. So kann man zum Beispiel μ_1 bestimmen nach

$$\mu_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ 0 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_2 & \lambda_4 & \lambda_5 \\ \lambda_3 & \lambda_5 & \lambda_6 \end{vmatrix} \quad (3.2b)$$

Für die anderen Koeffizienten findet man entsprechende Ausdrücke.

Aus der Mechanik ist bekannt, dass die Dehnung in der Richtung der Bewehrung $(\alpha + \varphi)$ abgeleitet werden kann aus:

$$(\varepsilon_{\alpha+\varphi})_u = \frac{1}{2}(\varepsilon_{x'x'} + \varepsilon_{y'y'}) + \frac{1}{2}(\varepsilon_{x'x'} - \varepsilon_{y'y'}) \cos 2(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2}\gamma_{xy} \sin 2(\alpha + \varphi) \quad (3.3)$$

Aus (3.2) und (3.3) ergibt sich:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{\alpha+\varphi})_u &= \sigma_{x'x'} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\alpha + \varphi) \right) \mu_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\alpha + \varphi) \right) \mu_3 + \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \varphi) \mu_2 \right\} \\ &\quad + \tau_{x'y'} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\alpha + \varphi) \right) \mu_2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\alpha + \varphi) \right) \mu_5 + \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \varphi) \mu_4 \right\} \\ &\quad + \sigma_{y'y'} \left\{ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\alpha + \varphi) \right) \mu_3 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2(\alpha + \varphi) \right) \mu_6 + \frac{1}{2} \sin 2(\alpha + \varphi) \mu_5 \right\} \\ &= \theta_1 \sigma_{x'x'} + \theta_2 \tau_{x'y'} + \theta_3 \sigma_{y'y'} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dan folgt σ_{au} aus

$$\sigma_{au} = E_a (\varepsilon_{\alpha+\varphi})_u = E_a \cdot \theta_1 \sigma_{x'x'} + E_a \cdot \theta_2 \tau_{x'y'} + E_a \cdot \theta_3 \sigma_{y'y'} \quad (3.5)$$

– Schubspannung $\tau_{x'y',ub}$ im Beton am Uebergang vom Störungsgebiet zum ungestörten Gebiet

Die Schubspannung $\tau_{x'y',ub}$ kann aus der Differenz zwischen der äusseren Schubspannung $\tau_{x'y'}$ und dem Anteil $\tau_{ax'y'}$ der Stahlspannung bestimmt werden.

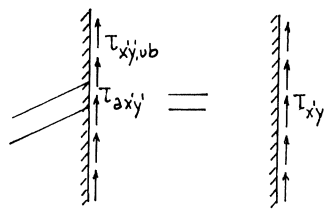


Bild 3.6. Schubspannung am Uebergang zwischen den zwei Zonen.

Aus dem Gleichgewicht folgt:

$$\tau_{x'y'} = \omega \tau_{ax'y'} + (1 - \omega) \tau_{x'y',bu} \quad (3.6)$$

Die Schubspannung im Stahl kann mit Hilfe des Mohrschen Kreises, aus Gl. (3.5) bestimmt werden, denn

$$\tau_{ax'y'} = \frac{1}{2}\sigma_{au} \cdot \sin 2(\varphi + \alpha) \quad (3.7)$$

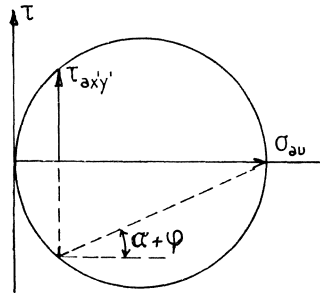


Bild 3.7. Mohrscher Spannungskreis.

Gl. (3.7) und (3.5) in (3.6) ergibt:

$$\begin{aligned} \tau_{x'y',ub} &= \sigma_{x'x'} \left(\frac{-\omega}{2(1-\omega)} \sin 2(\alpha + \varphi) E_a \theta_1 \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{-\omega}{2(1-\omega)} \sin 2(\alpha + \varphi) E_a \theta_3 \right) \\ &+ \tau_{x'y'} \left(\frac{1}{1-\omega} - \frac{\omega}{2(1-\omega)} \sin 2(\alpha + \varphi) E_a \theta_2 \right) \\ &= \psi_1 \sigma_{x'x'} + \psi_2 \tau_{x'y'} + \psi_3 \sigma_{y'y'} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nun folgen noch:

– Stahlspannung im Riss σ_{ar}

Aus dem Gleichgewicht im Riss (Bild 3.5) findet man

$$\sigma_{ar} = \frac{1}{\omega} \frac{1}{\cos^2(\alpha + \varphi)} \cdot \sigma_{x'x'} \quad (3.9)$$

– Betonschubspannung im Riss $\tau_{x'y',sr}$

Die Schubspannung im Riss $\tau_{x'y',sr}$ kann aus dem Gleichgewicht bestimmt werden

$$\omega \tau_{ar} + (1-\omega) \tau_{x'y',sr} = \tau_{x'y'}$$

Mit (3.9) und mit Hilfe von (3.7) ergibt sich:

$$\tau_{x'y',sr} = \frac{\tau_{x'y'}}{1-\omega} - \frac{1}{1-\omega} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \cdot \sigma_{x'x'} \quad (3.10)$$

– Die Spannung $\sigma_{yy,s}$ im gestörtem Bereich

Angenommen wird, dass $\sigma'_{yy,s}$ gleich σ'_{yy} im ungestörten Gebiet ist.

3.3.3 Herleitung der Dehnungen

Mit Hilfe der berechneten Spannungen können die Dehnungen bestimmt werden. Dazu müssen noch einige Annahmen über den Verlauf der Spannungen getroffen werden. Die Annahmen können auf Grund von Versuchsergebnissen verfeinert werden, ohne dass sich die Berechnung wesentlich ändert.

Der Verlauf der Stahl- und Betonspannungen im Störungsgebiet wird sinusförmig angenommen, was impliziert, dass auch die Schubspannungen sinusförmig verlaufen müssen. In dieser Betrachtung wird von der Annahme ausgegangen, dass die Kräfte in der Bewehrung nicht in einzelnen Stäben verlaufen, sondern in unendlich vielen Stäben mit unendlich kleinem Querschnitt, die gleichmässig über die Scheibe verteilt sind.

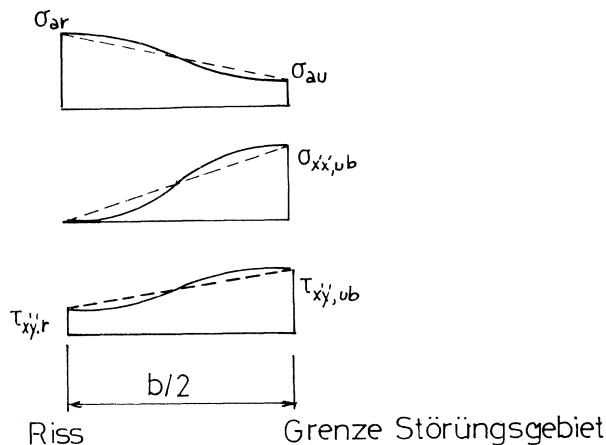


Bild 3.8. Sinusförmiger Verlauf der Spannungen im Störungsgebiet.

Weitere Untersuchungen über das Verhalten des Materials im Rissbereich werden nötig sein, um zu klären, inwieweit die Annahmen wirklichkeitsnah sind und wie sie eventuell verbessert werden können.

Im Störungsbereich werden jetzt drei Dehnungsgrößen bestimmt:

– Stahlverlängerung (Richtung $(\alpha + \varphi)$)

Die gesamte Verlängerung des Stahles über die Länge $b/2$ ist

$$\Delta l_a = \frac{1}{\cos(\alpha + \varphi)} \int_0^{b/2} \varepsilon(b) db$$

und das ist gerade gleich

$$\Delta l_a = \frac{1}{\cos(\alpha + \varphi)} \left\{ (\varepsilon_{\varphi + \alpha})_u + \varepsilon_{ar} \right\} \frac{b}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$(\varepsilon_{\varphi + \alpha})_u$ und ε_{ar} werden bestimmt aus Gl. (3.4) und (3.9).

Die mittlere Dehnung des Stahles im Störungsbereich ist dann:

$$\bar{\varepsilon}_{\alpha+\varphi} = \frac{\Delta l_a}{b/2 \cos(\alpha+\varphi)} = \frac{1}{2} \left[\left\{ \theta_1 + \frac{1}{\omega \cos^2(\alpha+\varphi) E_a} \right\} \sigma_{x'x'} + \theta_2 \tau_{x'y'} + \theta_3 \sigma_{y'y'} \right] \quad (3.11)$$

– Dehnung in y' -Richtung

Angenommen wird, dass die Dehnung $\varepsilon_{y'y'}$ im gestörten Bereich gleich ist wie im ungestörten Bereich, Gl. (3.2)

$$\varepsilon_{y'y'} = \mu_3 \sigma_{x'x'} + \mu_5 \tau_{x'y'} + \mu_6 \sigma_{y'y'} \quad (3.12)$$

– Die Schubverformung $\gamma_{x'y'}$

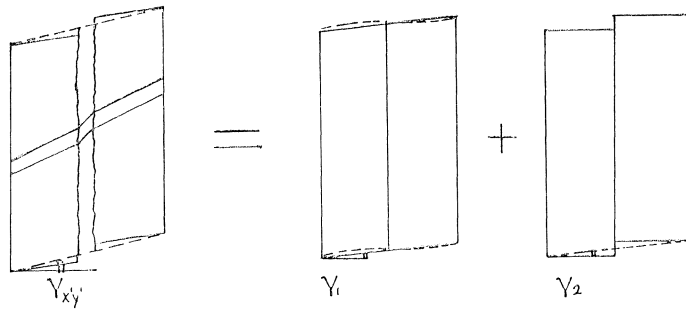


Bild 3.9. Schubverformung im Riss.

Die Schubverformung besteht aus zwei Anteilen:

1. Eine Verformung zufolge der Schubspannungen in den zwei Teilen neben dem Riss, γ_1

Diese Schubverformung γ_1 ist:

$$\gamma_1 = 2 \int_0^{b/2} \frac{\tau dx}{b G_b} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} (\tau_{x'y'sr} + \tau_{x'y',ub}) b/2}{b G_b} = \frac{(\tau_{x'y'sr} + \tau_{x'y',ub}) (1 + \nu_b)}{E_b}$$

2. Die Schubverformung γ_2 zufolge der Verschiebung Δ der beiden Rissufer. Geht man aus von einem Verschiebungsmodul E_v , wie von Baumann (Heft 227, DAfStb, 1972) vorgeschlagen, so findet man

$$\gamma_2 = \frac{\tau_{x'y'r}}{E_v \cdot b}$$

oder, mit Gl. (3.10)

$$\gamma_2 = \frac{1}{E_v \cdot b} \left\{ \frac{\tau_{x'y'}}{1-\omega} - \frac{1}{1-\omega} \operatorname{tg}(\alpha+\varphi) \sigma_{x'x'} \right\}$$

Für die gesamte Schubverformung findet man dann mit Gl. (3.8) und (3.10)

$$\begin{aligned}\gamma_{x'y'} = \gamma_1 + \gamma_2 = \sigma_{x'x'} & \left\{ \left(\psi_1 - \frac{1}{1-\omega} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right) \frac{1+\nu_b}{E_b} - \frac{1}{E_v b} \frac{1}{1-\omega} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right\} \\ & + \tau_{x'y'} \left\{ \left(\psi_2 + \frac{1}{1-\omega} \right) \frac{1+\nu_b}{E_b} + \frac{1}{E_v b} \frac{1}{1-\omega} \right\} \\ & + \sigma_{y'y'} \psi_3 \frac{(1+\nu_b)}{E_b}\end{aligned}\quad (3.13)$$

Da jetzt $\varepsilon_{\alpha+\varphi}$ (3.11), $\varepsilon_{y'y'}$ (3.12) und $\gamma_{x'y'}$ (3.13) bekannt sind, kann mit dem Mohrschen Dehnungskreis die Dehnung $\varepsilon_{x'x'}$ bestimmt werden:

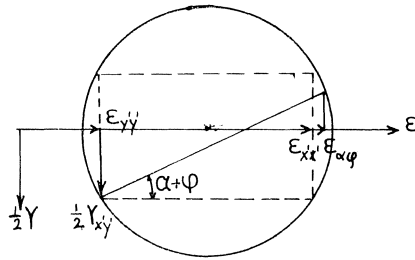


Bild 3.10. Mohrscher Dehnungskreis.

$$\varepsilon_{x'x'} = -\varepsilon_{y'y'} \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) + \varepsilon_{\alpha+\varphi} \{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi)\} - \gamma_{x'y'} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi)$$

Unter Verwendung von (3.11), (3.12), (3.13) ergibt sich:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'x'} = \sigma_{x'x'} & \left[-\mu_3 \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) + \{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi)\} \left(\frac{1}{2} \theta_1 + \frac{1}{2\omega \cos^2(\alpha + \varphi) E_a} \right) \right. \\ & \left. - \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \left\{ \left(\psi_1 - \frac{1}{1-\omega} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right) \frac{1+\nu_b}{E_b} - \frac{1}{E_v b} \frac{1}{1-\omega} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right\} \right] \\ & + \tau_{x'y'} \left[-\mu_5 \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) + \{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi)\} \frac{1}{2} \theta_2 - \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right. \\ & \quad \left. \left\{ \left(\psi_2 + \frac{1}{1-\omega} \right) \frac{1+\nu_b}{E_b} + \frac{1}{E_v b} \frac{1}{(1-\omega)} \right\} \right] \\ & + \sigma_{y'y'} \left[-\mu_6 \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} \theta_3 (1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) - \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \psi_3 \frac{(1+\nu_b)}{E_b}) \right]\end{aligned}\quad (3.14)$$

Die Dehnungen im Störungsbereich können somit als Funktion der äusseren Spannungen geschrieben werden.

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \gamma_{y'y'} \\ \varepsilon_{y'y'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ \beta_7 & \beta_8 & \beta_9 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \tau_{x'y'} \\ \sigma_{y'y'} \end{vmatrix} \quad (3.15)$$

worin gemäss (3.12), (3.13), (3.14)

$$\begin{aligned} \beta_1 &= -\mu_3 \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) + \{ \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) + 1 \} \left(\frac{1}{2} \theta_1 + \frac{1}{2\omega \cos^2(\alpha + \varphi) E_a} \right) \\ &\quad - \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \left\{ \left(\psi_1 - \frac{1}{1-\omega} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right) \frac{1+v_b}{E_b} - \frac{1}{E_v b} \frac{1}{1-\omega} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right\} \\ \beta_2 &= -\mu_5 \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) + \{ 1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) \} \frac{1}{2} \theta_2 - \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \left\{ \left(\psi_2 + \frac{1}{1-\omega} \right) \frac{1+v_b}{E_b} + \frac{1}{E_v b} \frac{1}{1-\omega} \right\} \\ \beta_3 &= -\mu_6 \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) + \frac{1}{2} \theta_3 (1 + \operatorname{tg}^2(\alpha + \varphi) - \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \psi_3) \frac{(1+v_b)}{E_b} \\ \beta_4 &= \left\{ \psi_1 - \frac{1}{1-\omega} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \right\} \frac{1+v_b}{E_b} - \frac{1}{E_v b} \frac{1}{1-\omega} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \\ \beta_5 &= \left(\psi_2 + \frac{1}{1-\omega} \right) \frac{1+v_b}{E_b} + \frac{1}{E_v b} \frac{1}{1-\omega} \\ \beta_6 &= \psi_3 \frac{(1+v_b)}{E_b} \\ \beta_7 &= \mu_3 \\ \beta_8 &= \mu_5 \\ \beta_9 &= \mu_6 \end{aligned}$$

Die Werte μ findet man in (3.2b), θ in (3.4) und ψ in (3.8).

Die Spannungs-Dehnungsbeziehung für die gesamte, gerissene Scheibe kann jetzt angegeben werden.

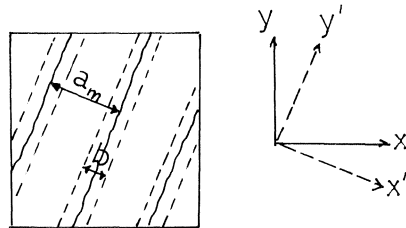


Bild 3.11. Rissabstand a_m .

Wenn der mittlere Rissabstand gleich a_m ist, ist in x' -Richtung:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{x'x'} &= \frac{1}{a_m} \{ b\varepsilon_{x'x',s} + (a_m - b)\varepsilon_{x'x',u} \} \\ &= \sigma_{x'x'} \left(\frac{b}{a_m} \beta_1 + \frac{(a_m - b)}{a_m} \mu_1 \right) + \tau_{x'y'} \left(\frac{b}{a_m} \beta_2 + \frac{(a_m - b)}{a_m} \mu_2 \right) + \sigma_{y'y'} \frac{(a_m - b)}{a_m}\end{aligned}$$

In y' -Richtung kann geschrieben werden

$$\varepsilon_{y'y'} = \mu_3 \sigma_{x'x'} + \mu_5 \tau_{x'y'} + \mu_6 \sigma_{y'y'}$$

und für die Schubverformung:

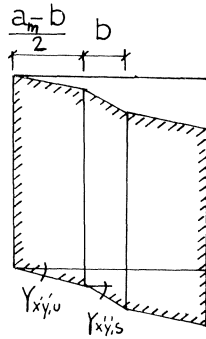


Bild 3.12. Schubverformung.

$$\gamma_{x'y'} = \frac{(a_m - b)\gamma'_{x'y',u} + b\gamma_{x'y',s}}{a_m}$$

oder, mit Gl. (3.2) und (3.15)

$$\gamma_{x'y'} = \left(\frac{a_m - b}{a_m} \mu_2 + \frac{b}{a_m} \beta_u \right) \sigma_{x'x'} + \left(\frac{a_m - b}{a_m} \mu_4 + \frac{b}{a_m} \beta_5 \right) \tau_{x'y'} + \left(\frac{a_m - b}{a_m} \mu_5 + \frac{b}{a_m} \beta_6 \right) \sigma_{y'y'}$$

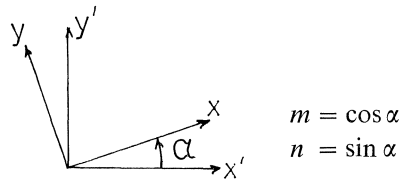
Damit sind jetzt die Koeffizienten der Nachgiebigkeitsmatrix im $x'y'$ -System bekannt:

$$\{\varepsilon\}_{x'y'} = F\{\sigma\}_{x'y'}$$

Dann ist auch die Steifigkeitsmatrix bekannt, denn $S = F^{-1}$, so

$$\{\sigma\}_{x'y'} = S\{\varepsilon\}_{x'y'} \quad (3.16)$$

Eine Verdrehung des $x'y'$ -Systems zum Hauptsystem, durch Drehung um einen Winkel α , leitet zu anderen Spannungs- und Dehnungsvektoren:



$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m^2 & 2mn & n^2 \\ -mn & m^2 - n^2 & mn \\ n^2 & -2mn & m^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sigma_{x'x'} \\ \tau_{x'y'} \\ \sigma_{y'y'} \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \{\sigma\}_{xy} = M_s \{\sigma\}_{x'y'}$$

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m^2 & mn & n^2 \\ -2mn & m^2 - n^2 & 2mn \\ n^2 & -mn & m^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varepsilon_{x'x'} \\ \gamma_{x'y'} \\ \varepsilon_{y'y'} \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \{\varepsilon\}_{xy} = M_e \{\varepsilon\}_{x'y'}$$

Diese Gleichungen geben mit (3.10)

$$M_s^{-1} \{\sigma\}_{xy} = S \cdot M_e^{-1} \{\varepsilon\}_{xy}$$

oder

$$\{\sigma\}_{xy} = S^* \{\varepsilon\}_{xy} \quad \text{mit} \quad S^* = M_s \cdot S \cdot M_e^{-1} \quad (3.17)$$

womit die Spannungs-Dehnungsbeziehung bekannt ist.