Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Algebraïsche sommatieformules voor π^{-1}

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute for Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Martijn de Jong

Delft, Nederland
Augustus 2008

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

"Algebraïsche sommatieformules voor π^{-1}"

Martijn de Jong

Technische Universiteit Delft

Begeleider

Dr.ir. W. Groenevelt

Overige commissieleden

Prof.dr. A. Heemink

Dr. J. Spandaw

Augustus, 2008

Delft

Inhoudsopgave

Inleiding

In 1914 werd het artikel *"Modular equations and approximations to π"* gepubliceerd, zie [3]. Het artikel werd geschreven door het jonge Indiase wiskundige genie Srinivasa Ramanujan (1887-1920). In dit werk geeft Ramanujan aan het einde, vrijwel zonder enig bewijs, een aantal fascinerende sommatieformules voor π^{-1}. Tot op heden is het een raadsel hoe Ramanujan precies aan de formules kwam. Inmiddels zijn de formules wel 'verklaard', in die zin dat wiskundigen er achteraf in geslaagd zijn op basis van de structuur van de formules, een soort van recept te ontwikkelen waarmee dergelijke formules gemaakt kunnen worden. Belangrijk hierin is het pionierswerk *"Pi and the AGM"*, zie [1], van de broers Borwein. Omdat de formules zijn verklaard, en niet echt zijn afgeleid, doet een en ander 'gekunsteld' aan.

In dit verslag volgen we de Borweins op de voet. In het bijzonder zullen we ons concentreren op de volgende twee formules,

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{n!} \right]^3 \left(2n + \frac{1}{2}\right), \quad \text{waarin } \left(\frac{1}{2}\right)_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2},$$

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{n!} \right]^3 \left(\frac{1}{4} + 3n\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}.$$

De tweede staat daadwerkelijk in het artikel *"Modular equations and approximations to π"* van Ramanujan, het is formule (28). De eerste komt eigenlijk van Bailey, maar hij schrijft de formule toe aan Ramanujan. De reden dat wij juist deze twee formules gaan bekijken, is omdat het voor deze twee formules nog mogelijk is ze tot in detail uit te werken. Dit houdt in dat we straks (bijna) alle resultaten heel precies zullen onderbouwen en bewijzen en dat we elke berekening zullen uitvoeren. Er wordt zeg maar weinig 'aan de lezer overgelaten'.

Op weg naar 'onze' twee formules zullen we het volgende aan wiskunde tegenkomen:
- Gamma- en betafunctie;
- Euler integraal;
- Hypergeometrische reeks;
- Elliptische integralen + transformaties;
- Legendre's relatie;
- Singuliere waarde (functie);
- Modulaire vergelijkingen.

Op onze weg zal het ook duidelijk worden, dat de resultaten zich zeker niet beperken tot de genoemde twee formules. In principe kunnen we straks met 'ons recept' oneindig veel formules maken, alleen het rekenwerk wordt meer, en eigenlijk al snel ondoenlijk. Het grootste deel van wat we hier zullen doen blijft toepasbaar, maar we zullen zien dat met name het bepalen van singuliere waarden al snel moeilijkheden oplevert. Hiervoor zijn geavanceerde technieken nodig, die we zullen noemen, maar niet behandelen, want dat is een niveau hoger en veel meer werk.

De indeling van het verslag is als volgt. Hoofdstuk 1 is inleidend en behandelt grofweg de eerste drie punten uit het lijstje. In hoofdstuk 2 worden de elliptische integralen geïntroduceerd en we passen de in hoofdstuk 1 verkregen resultaten hierop toe. Ook komen we hier Legendre's relatie tegen waarmee in feite π in de formules komt. In hoofdstuk 3 gaan we ons bezighouden met zogenaamde singuliere waarden en het probleem van het bepalen ervan. In hoofdstuk 4 worden de formules daadwerkelijk gemaakt. Tenslotte vindt u in de appendices interessante extra's. Het is zeker de moeite waard die even door te lezen.

Voor de duidelijkheid zullen belangrijke resultaten zijn omkaderd.

Martijn de Jong, augustus 2008

Hoofdstuk 1

Voorbereidingen

In dit hoofdstuk worden enkele begrippen, concepten en technieken besproken welke veel zullen worden gebruikt in de hoofdstukken erna. We introduceren allereerst de gamma- en betafunctie, en het Pochhammer symbool. Deze drie concepten staan centraal in het bewijzen van stellingen over de hypergeometrische functie en de bijbehorende transformaties, welke we direct erna behandelen. U kunt de theorie terugvinden in [4], [6] en [7].

1.1 Gamma- en betafunctie

De *gammafunctie* (Euler en Goldbach, 1729), genoteerd met $\Gamma(z)$, is de generalisatie van het concept faculteit en is goed gedefinieerd voor $z \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(z) > 0$ via

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

Deze integraal wordt ook wel de *Euler integraal van de tweede soort* genoemd.

Via de substitutie $x^2 := t$ (met $x \geq 0$) krijgen we de alternatieve schrijfwijze

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty (x^2)^{z-1} e^{-x^2} \cdot 2x \, \mathrm{d}x = 2 \int_0^\infty x^{2z-1} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

Er geldt,

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \tag{1.3}$$

wat direct volgt uit partiële integratie;

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t} \, \mathrm{d}t \overset{\text{(P.I.)}}{=} -t^z e^{-t} \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t = z\Gamma(z).$$

Door herhaaldelijk toepassen van (1.3) kunnen we het linker halfvlak betreden en $\Gamma(z)$ stap voor stap uitbreiden naar $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$.

Verder geldt (Euler, 1771),

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \notin \mathbb{Z}. \tag{1.4}$$

Dit wordt de *reflectieformule voor gammafuncties* genoemd.

In het bijzonder is

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{a\to\infty}\left(-e^{-t}\Big|_0^a\right) = 0-(-1) = 1,$$

zodat we voor $n \in \mathbb{N}$ de gewone faculteit terugvinden via

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot\Gamma(1) = n! \tag{1.5}$$

Een interessante waarde is

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \tag{1.6}$$

wat direct volgt uit (1.4) in combinatie met de definitie van de gammafunctie waaruit de positieve wortel volgt. We kunnen dit ook aantonen via een bekende truc. Vul in uitdrukking (1.2) voor z de waarde $\frac{1}{2}$ in, we krijgen

$$\Gamma^2\left(\tfrac{1}{2}\right) = \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = 4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = (*).$$

Het integratiegebied is het 1ste kwadrant ($x, y > 0$). Nu de truc: gebruik poolcoördinaten; neem $x := r\cos\varphi$ en $y := r\sin\varphi$, zodat $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$. De integratiegrenzen voor r worden dan 0 en ∞ en die van φ worden 0 en $\pi/2$. We krijgen

$$\begin{aligned}(*) &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 4\int_0^\infty re^{-r^2}\varphi\Big|_0^{\pi/2}\,\mathrm{d}r = 2\pi\lim_{a\to\infty}\int_0^a re^{-r^2}\,\mathrm{d}r = \\ &= 2\pi\lim_{a\to\infty}\left(-\tfrac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_0^a\right) = 2\pi\cdot\left(0-\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = \pi.\end{aligned}$$

Op dezelfde manier vinden we dat in het algemeen geldt

$$\begin{aligned}\Gamma(z_1)\Gamma(z_2) &= \left(2\int_0^\infty x^{2z_1-1}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(2\int_0^\infty y^{2z_2-1}e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right)\\ &= 4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty (r\cos\varphi)^{2z_1-1}(r\sin\varphi)^{2z_2-1}e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\\ &= 2\int_0^\infty r^{2(z_1+z_2)-1}e^{-r^2}\,\mathrm{d}r\times 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2z_1-1}\varphi\sin^{2z_2-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi\\ &= \Gamma(z_1+z_2)\times 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2z_1-1}\varphi\sin^{2z_2-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi.\end{aligned}$$

De laatste integraal staat bekend als de *betafunctie*, genoteerd met $B(z_1, z_2)$, en deze is goed gedefinieerd voor $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ met $\mathrm{Re}(z_1) > 0$ en $\mathrm{Re}(z_2) > 0$ via

$$B(z_1, z_2) := \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1+z_2)} = 2\int_0^{\pi/2}\cos^{2z_1-1}\varphi\sin^{2z_2-1}\varphi\,\mathrm{d}\varphi. \tag{1.7}$$

Via de substitutie $\cos^2\varphi := t$ verkrijgen we de meest gehanteerde definitie (Euler, 1772),

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(p) > 0, \quad \mathrm{Re}(q) > 0. \tag{1.8}$$

Deze integraal wordt ook wel de *Euler integraal van de eerste soort* genoemd.

1.2 Pochhammer symbool

Het *Pochhammer symbool*, genoteerd als $(a)_n$, is voor $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$ en $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ als volgt gedefinieerd

$$(a)_n := \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} \quad \text{en} \quad (a)_0 := 1. \tag{1.9}$$

Door herhaaldelijk toepassen van $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, zien we in, dat

$$\begin{aligned} \Gamma(a+n) &= (a+n-1)\Gamma(a+n-1) \\ &= (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2) \\ &\vdots \\ &= (a+n-1)\cdots(a+2)(a+1)a \cdot \Gamma(a), \end{aligned}$$

oftewel

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)} = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1). \tag{1.10}$$

In het bijzonder, er geldt $(1)_n = n!$ en

$$\begin{aligned} (a)_{n+m} &= a(a+1)(a+2)\cdots(a+n+m-1) \\ &= a(a+1)\cdots(a+m-1)(a+m)\cdots((a+m)+n-1) \\ &= (a)_m(a+m)_n. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Verder is voor het vervolg nog interessant,

$$\begin{aligned} (a)_{2n} &= a(a+1)(a+2)\cdots(a+2n-2)(a+2n-1) \\ &= \left(\tfrac{1}{2}a\right)\left(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}a+1\right)\left(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{3}{2}\right)\cdots\left(\tfrac{1}{2}a+n-1\right)\left(\tfrac{1}{2}a+n-\tfrac{1}{2}\right)\cdot 2^{2n} \\ &= \left(\tfrac{1}{2}a\right)\left(\tfrac{1}{2}a+1\right)\cdots\left(\tfrac{1}{2}a+n-1\right)\cdot\left(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\right)\left(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{3}{2}\right)\cdots\left(\tfrac{1}{2}a+\left(n+\tfrac{1}{2}\right)-1\right)\cdot 2^{2n} \\ &= 4^n\left(\tfrac{1}{2}a\right)_n\left(\tfrac{1}{2}a+\tfrac{1}{2}\right)_n, \end{aligned} \tag{1.12}$$

en

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)_n = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{2}\cdots\left(n-\tfrac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}, \tag{1.13}$$

waarin $(2n-1)!!$ staat voor $1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$. Verderop komen we nog enkele identiteiten tegen.

1.3 Hypergeometrische functie

Definitie 1.3.1. De reeks

$$1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{z^3}{3!} + \cdots \quad (c \neq 0, -1, -2, \ldots) \tag{1.14}$$

heet de *reeks van Gauss* of de *hypergeometrische reeks*.

We spreken ook wel van de *functie van Gauss* of de *hypergeometrische functie*. De reeks wordt genoteerd via de compacte schrijfwijze

$${}_2F_1(a,b;c;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!}, \tag{1.15}$$

waarin $(a)_n$ het Pochhammer symbool is. We zien dat de reeks absoluut convergent is voor $|z| < 1$ via het quotiënt criterium; schrijf voor de coëfficiënt $g_n = ((a)_n(b)_n)/((b)_n n!)$. We vinden,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{g_{n+1}}{g_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(a+n)(b+n)}{(c+n)(n+1)}\right| = 1 = R.$$

De reeks is dus convergent voor $|z| < R = 1$.

Merk op, dat ${}_2F_1$ symmetrisch is in de eerste twee parameters;

$${}_2F_1(a,b;c;z) = {}_2F_1(b,a;c;z).$$

Analoog definiëren we

$${}_3F_2\,(a,b,c;d,e;z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n(c)_n}{(d)_n(e)_n}\frac{z^n}{n!}, \tag{1.16}$$

welke we de *gegeneraliseerde hypergeometrische functie* noemen.

Stelling 1.3.2 (Euler,1748)**.** *Er geldt,*

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,\mathrm{d}t, \quad \mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(c) > 0.$$

Bewijs. Schrijf

$${}_2F_1(a,b;c;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n\frac{(a)_n}{n!}\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c+n)} = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\frac{(a)_n}{n!}\frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)} = (*).$$

Door teller en noemer met $\Gamma(c-b)$ te vermenigvuldigen verschijnt een betafunctie;

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\frac{(a)_n}{n!}\frac{\Gamma(b+n)\Gamma(c-b)}{\Gamma(c+n)}\\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\frac{(a)_n}{n!}B(b+n,c-b)\\
&= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\sum_{n=0}^{\infty} z^n\frac{(a)_n}{n!}\int_0^1 t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}\,\mathrm{d}t = (**).
\end{aligned}$$

Als $\mathrm{Re}(b) > 1, \mathrm{Re}(c-b) > 1$ en $|z| < 1$, dan is

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n\frac{(a)_n}{n!}t^{b+n-1}(1-t)^{c-b-1}$$

uniform convergent voor $t \in (0,1)$, zodat integratie en sommatie verwisseld kunnen worden. Verder is

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}(zt)^n = (1-zt)^{-a},$$

zodat

$$(**) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}\,\mathrm{d}t.$$

Via analytische voortzetting naar b en c kunnen we uitbreiden naar de voorwaarden als boven, $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) \ > \ 0.$ $\square$

Een direct gevolg van Stelling 1.3.2 zijn de volgende identiteiten.

Stelling 1.3.3. *Voor $|z| < 1$ en $|z| < |z-1|$ geldt,*

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b;c;z) &= (1-z)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right) && \text{(i)}\\
&= (1-z)^{-b}\ {}_2F_1\left(c-a, b; c; \frac{z}{z-1}\right) && \text{(ii)}\\
&= (1-z)^{c-a-b}\ {}_2F_1(c-a, c-b; c; z) \quad \text{(Euler's identiteit).} && \text{(iii)}
\end{aligned}
$$

Bewijs. Als we in Stelling 1.3.2 substitueren $t := 1-s$, dan krijgen we (i);

$$
\begin{aligned}
{}_2F_1(a,b;c;z) &= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b}\int_0^1 (1-s)^{b-1}s^{c-b-1}(1-(1-s)z)^{-a}\,\mathrm{d}s\\
&= -\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b}\int_0^1 (1-s)^{b-1}s^{c-b-1}(z-1)^{-a}\left(1-\frac{sz}{z-1}\right)^{-a}\,\mathrm{d}s\\
&= (1-z)^{-a}\ {}_2F_1\left(a, c-b; c; \frac{z}{z-1}\right).
\end{aligned}
$$

(ii) volgt direct uit (i) in combinatie met de symmetrie van ${}_2F_1(a,b;c;z)$. (iii) volgt door tweemaal toepassen van (i) of (ii). □

Met behulp van Euler's identiteit kunnen we een andere interessante identiteit afleiden. Herschrijf Euler's identiteit naar

$$
{}_2F_1(c-a; c-b; c; z) = (1-z)^{a+b-c}\ {}_2F_1(a,b;c;z).
$$

We zien dat de coëfficiënt van z^N van de linkerkant is

$$
\frac{(c-a)_N(c-b)_N}{(c)_N N!},
$$

en we weten dat deze gelijk moet zijn aan de coëfficiënt van z^N van de rechterkant, wat een dubbele reeks is; schrijf hiertoe $(1-z)^{a+b-c}$ uit in machten van z,

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n z^n}{(c)_n n!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(c-a-b)_k z^k}{k!}.
$$

Als coëfficiënt van z^N vinden we zodoende (gebruik het Cauchy product voor reeksen; zet $k := N-n$):

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N}\frac{(a)_n(b)_n(c-a-b)_{N-n}}{(c)_n n!(N-n)!} &= \frac{(c-a-b)_N}{N!}\sum_{n=0}^{N}\frac{(a)_n(b)_n(-N)_n}{n!(c)_n(1-c+b+b-n)_n}\\
&= \sum_{n=0}^{N}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}\cdot\frac{(-N)_n(-1)^n}{N!}\cdot\frac{(c-a-b)_N}{(1+a+b-c-N)_n(-1)^n}\\
&= \frac{(c-a-b)_N}{N!}\ {}_3F_2\left(a,b,-N;c;1+a+b-c-N;1\right).
\end{aligned}
$$

Conclusie:

Stelling 1.3.4 (Stelling van Saalschutz). *Er geldt,*

$$
\frac{(c-a)_n(c-b)_n}{(c)_n(c-a-b)_n} = {}_3F_2\left(a,b,-n;c;1+a+b-c-n;1\right), \quad n = 0,1,2,\ldots
$$

1.4 Transformaties

In Stelling 1.3.3 zagen we reeds een drietal transformaties. We geven hieronder nog enkele transformaties. We zullen zien dat we via substituties uit 'oude' transformaties 'nieuwe' transformaties kunnen maken. We behandelen enkele transformaties welke van essentieel belang zijn bij het maken van formules voor π^{-1}.

Stelling 1.4.1 (Kummer's kwadratische transformatie)**.** *Voor* $|z| < 1$ *en* $|4z| < |1-z|^2$ *geldt,*

$$ {}_2F_1\left(a, b; 1+a-b; z\right) = (1-z)^{-a}\ {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}+\frac{a}{2}-b; 1+a-b; \frac{-4z}{(1-z)^2}\right). $$

Bewijs. In eerste instantie moet $|z| < 1$ en $|4z| < |z-1|^2$ opdat beide reeksen convergent zijn. In Figuur 1.1 is dit gebied gearceerd. We kunnen de rechterkant schrijven als

$$ \begin{aligned} (1-z)^{-a}\ {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, \frac{1}{2}+\frac{a}{2}-b; 1+a-b; \frac{-4z}{(1-z)^2}\right) &= (1-z)^{-a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_n}{\left(1+a-b\right)_n n!}\frac{(-4)^n z^n}{(1-z)^{2n}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_n}{\left(1+a-b\right)_n n!}(-4)^n z^n (1-z)^{-(a+2n)} = (*). \end{aligned} $$

De binomiaalformule geeft

$$ (1-z)^{-(a+2n)} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+2n)_k}{k!}z^k, $$

zodat

$$ \begin{aligned} (*) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_n}{\left(1+a-b\right)_n n!}(-4)^n z^n\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a+2n)_k}{k!}z^k\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_n(a+2n)_k}{\left(1+a-b\right)_n n!k!}(-4)^n z^{n+k}. \end{aligned} $$

Als coëfficiënt van z^N vinden we zodoende

$$ \sum_{n=0}^{N}\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_n(-4)^n(a+2n)_{N-n}}{\left(1+a-b\right)_n n!(N-n)!} = (**). $$

Merk op, dat

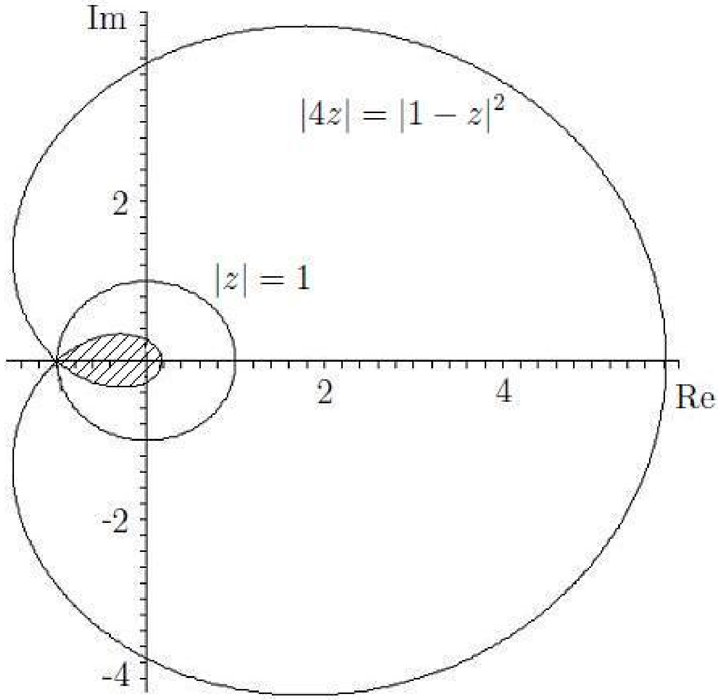
$$ (a+2n)_{N-n} \overset{(1.11)}{=} \frac{(a)_{N+n}}{(a)_{2n}} \overset{(1.11)}{=} \frac{(a)_N(a+N)_n}{(a)_{2n}} \overset{(1.12)}{=} \frac{(a)_N(a+N)_n}{4^n\left(\frac{1}{2}a\right)_n\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right)_n}. $$

Merk verder op, dat

$$ \begin{aligned} \frac{1}{(N-n)!} &= \frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{N!} \\ &= \frac{(-N)(-N+1)\cdots(-N+n-1)(-1)^N}{N!} = \frac{(-N)_n(-1)^n}{N!}, \end{aligned} $$

zodat

$$ \begin{aligned} (**) &= \sum_{n=0}^{N}\frac{\left(\frac{1}{2}a\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_n(-4)^n(a)_N(a+N)_n(-1)^n(-N)_n}{4^n n!(1+a-b)_n\left(\frac{1}{2}a\right)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)_n N!} \\ &= \frac{(a)_N}{N!}\sum_{n=0}^{N}\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_n(a+N)_n(-N)_n}{n!(1+a-b)_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)_n}. \end{aligned} $$



Figuur 1.1: Binnen het gearceerde gebied convergeren beide reeksen

De reeks is hiermee in een dusdanige vorm (de reeks is gebalanceerd) dat deze gesommeerd kan worden met Saalschutz, zie Stelling 1.3.4, we vinden

$$\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a-b\right)_n (a+N)_n(-N)_n}{n!(1+a-b)_n \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)_n} \overset{\text{(St. 1.3.4)}}{=} \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}a\right)_N (1-b-N)_N}{(1+a-b)_N \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}a-N\right)_N}.$$

Omdat

$$(1-b-N)_N = (-1)^N (b)_N \quad \text{en} \quad \left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}a-N\right)_N = (-1)^N \left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}a\right)_N$$

vinden we na vereenvoudiging als coëfficiënt voor z^N:

$$\frac{(a)_N (b)_N}{(1+a-b)_N N!},$$

wat precies de coëfficiënt is van z^N van de linkerkant van Kummer's transformatie. □

Op een gelijkwaardige manier kunnen we ook de volgende stelling bewijzen.

Stelling 1.4.2. *Voor $|z| < 1$ en $|4z| < |1+z|^2$ geldt,*

$${}_2F_1\left(a, b; 2b; \frac{4z}{(1+z)^2}\right) = (1+z)^{2a}\ {}_2F_1\left(a, a-b+\frac{1}{2}; b+\frac{1}{2}; z^2\right).$$

De volgende stelling is een speciaal geval van Kummer.

Stelling 1.4.3. *Voor* $|z| < 1$ *en* $4|z||1-z| < 1$ *geldt,*

$$ {}_2F_1\left(a, b; \frac{a+b+1}{2}; z\right) = {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}; \frac{a+b+1}{2}; 4z(1-z)\right). $$

Bewijs. Als we Kummer's kwadratische transformatie, zie Stelling 1.4.1, links en rechts vermenigvuldigen met $(1-z)^a$ en vervolgens nemen $c := 1+a-b$ krijgen we

$$ (1-z)^a \, {}_2F_1(a, a+1-c; c; z) = {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, c - \frac{a+1}{2}; c; \frac{-4z}{(1-z)^2}\right). $$

Toepassen van Stelling 1.3.3(i) levert vervolgens

$$ {}_2F_1\left(a, 2c-a-1; c; \frac{z}{z-1}\right) = {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, c - \frac{a+1}{2}; c; \frac{-4z}{(1-z)^2}\right). $$

Vervang tenslotte $z/(z-1)$ door z en vervang $2c-a-1$ door b. □

Tenslotte geven we de volgende stelling die zegt dat het kwadraat van een ${}_2F_1$ een ${}_3F_2$ oplevert.

Stelling 1.4.4 (Clausen's product)**.** *Voor* $|z| < 1$ *geldt:*

$$ \left[{}_2F_1\left(a, b; a+b+\frac{1}{2}; z\right)\right]^2 = {}_3F_2\left(2a, 2b, a+b; 2a+2b, a+b+\frac{1}{2}; z\right). $$

Bewijs. Vergelijk de coëfficiënten voor z^N van de linker- en rechterkant en gebruik Saalschutz, zie Stelling 1.3.4. □

Hoofdstuk 2

Elliptische integralen

2.1 Introductie

In dit hoofdstuk introduceren we elliptische integralen. U kunt de theorie terugvinden in [1], [5] en [7]. Voor een mogelijke interpretatie van de elliptische integralen, zie Appendix A.

Definitie 2.1.1. De *complete elliptische integraal van de eerste soort* is gedefinieerd als

$$K(k) := \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \tag{2.1}$$

$$= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{2.2}$$

en de *complete elliptische integraal van de tweede soort* is gedefinieerd als

$$E(k) := \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\,\mathrm{d}\phi \tag{2.3}$$

$$= \int_0^1 \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

k wordt vaak de *modulus* (meervoud: moduli) genoemd. We veronderstellen $0 \le k \le 1$.

Via een eenvoudige substitutie gaat (2.1) over in (2.2) en (2.3) over in (2.4), namelijk via de substitutie $t := \sin\phi$. Er geldt,

$$t = \sin\phi \implies \mathrm{d}t = \cos\phi\,\mathrm{d}\phi \implies \mathrm{d}\phi = \frac{1}{\cos\phi}\,\mathrm{d}t.$$

Op $[0, \frac{\pi}{2}]$ zijn de sinus en cosinus beide positief, zodat $\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi}$, oftewel

$$\mathrm{d}\phi = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Verder, voor de integratiegrenzen: als $\phi = 0$, dan is $t = \sin(0) = 0$ en als $\phi = \frac{\pi}{2}$, dan is $t = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Definitie 2.1.2. De *complementaire integralen* K' en E' zijn de integralen in de *complementaire modulus* $k' := \sqrt{1-k^2}$,

$$K'(k) := K(\sqrt{1-k^2}) = K(k') \tag{2.5}$$

en

$$E'(k) := E(\sqrt{1-k^2}) = E(k'). \tag{2.6}$$

Opmerking: het accentje betekent hier dus niet de afgeleide! Voor bijvoorbeeld de afgeleide van f naar x zullen we schrijven $\mathrm{d}f/\,\mathrm{d}x$ of $\dot{f}$.

Merk op, dat $k = 1/\sqrt{2}$ een speciaal geval is, er geldt namelijk

$$k' = \sqrt{1-k^2} = \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = k.$$

Laten we voor die modulus K en E eens evalueren. We hebben die later namelijk nodig.

Propositie 2.1.3. *Er geldt,*

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{\pi}}$$

en

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi^{-3/2}\Gamma^{-2}(\tfrac{1}{4}) + \frac{1}{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Bewijs. We hebben

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-\frac{1}{2}t^2)}} = (*).$$

Substitueer $x^2 := t^2/(2-t^2)$, ofwel $t^2 = 2x^2/(1+x^2)$. Er geldt, x is een strikt stijgende functie van t, bovendien, als $t = 0$, dan is $x = 0$, en als $t = 1$, dan is $x = 1$. Verder,

$$t = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x,$$

zodat

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{2x^2}{1+x^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{1+x^2}\right)}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{(1+x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Substitueer vervolgens $u := x^4$, zodat

$$\mathrm{d}u = 4x^3\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{4x^3}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4u^{3/4}}\,\mathrm{d}u,$$

en we zien dus dat

$$\begin{aligned} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^1 u^{(1/4)-1}(1-u)^{(1/2)-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\frac{\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \overset{(1.4)}{=} \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

(In de laatste stap is de reflectieformule gebruikt met $z = 1/4$.)

Voor het berekenen van $E(\frac{1}{\sqrt{2}})$ gaan we als volgt te werk. Bekijk

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{2-t^2}}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = (*).$$

Substitueer $x := \sqrt{1-t^2}$. Merk op, in dat geval is x een strikt dalende functie van t en de integratiegrenzen "klappen om" (levert minteken op bij de integraal); als $t=0$, dan is $x=1$, en als $t=1$, dan is $x=0$. Verder,

$$\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}}\cdot(-2t)\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{d}t = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\,\mathrm{d}x = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

We krijgen zodoende

$$(*) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{2-(1-x^2)}}{x}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{+1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Vermenigvuldig nu teller en noemer van de integrand met $\sqrt{1+x^2}$ en splits erna de integraal;

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Substitueer in de resterende integraal weer $u := x^4$ zodat we opnieuw een beta-integraal krijgen. Aldus,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^1 u^{(3/4)-1}(1-u)^{(1/2)-1}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{5}{4})} \overset{(1.3)}{=} \frac{1}{4\sqrt{2}}\frac{\Gamma(\frac{3}{4})\Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{1}{4}\Gamma(\frac{1}{4})} \overset{(1.4)}{=} \pi^{-3/2}\Gamma^{-2}(\tfrac{1}{4}). \end{aligned}$$

Uiteindelijk vinden we dus

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi^{-3/2}\Gamma^{-2}(\tfrac{1}{4}) + \frac{1}{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

□

2.2 Transformaties

Met behulp van Stelling 1.3.2 kunnen we de elliptische integralen schrijven als een ${}_2F_1$. Voor $o < k < 1$ geldt,

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) \tag{2.7}$$

en

$$E(k) = \frac{\pi}{2}\,{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right). \tag{2.8}$$

We hebben namelijk

$$\begin{aligned}{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right) &\overset{(\text{St.1.3.2})}{=} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 t^{(1/2)-1}(1-t)^{1-(1/2)-1}(1-k^2t)^{-(1/2)}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(1.6)}{=} \frac{1}{\pi}\int_0^1 t^{-(1/2)}(1-t)^{-(1/2)}(1-k^2t)^{-(1/2)}\,\mathrm{d}t = (*).\end{aligned}$$

Zet vervolgens $x^2 := t$, dan is $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$ en de integratiegrenzen blijven 0 en 1, zodat

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{1}{\pi}\int_0^1 x^{-1}(1-x^2)^{-(1/2)}(1-kx^2)^{-(1/2)}\cdot 2x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \frac{2}{\pi}K(k).\end{aligned}$$

En voor $E(k)$ gaan we precies zo te werk.

Met behulp van Stelling 1.4.2 zien we dat

$$\frac{1}{1+k}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)^2\right) = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right),$$

oftewel

$$K(k) = \frac{1}{1+k}K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right). \tag{2.9}$$

Deze transformatie staat bekend als *Landen's transformatie*. Een andere afleiding vind u in Appendix B.

Verder hebben we als direct gevolg van Stellingen 1.4.1 en 1.4.3 respectievelijk de volgende transformatieformules voor de elliptische integraal K. Voor $0 \le k \le 1/\sqrt{2}$ geldt,

$$\frac{2}{\pi}K(k) = {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 1; (2kk')^2\right), \tag{2.10}$$

en voor $0 \le k \le \sqrt{2}-1$ geldt,

$$\frac{2}{\pi}K(k) = k'^{-1}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}; 1; -\left(\frac{2k}{k'^2}\right)^2\right). \tag{2.11}$$

Passen we vervolgens Clausen's product, zie Stelling 1.4.4, toe op de formules hierboven, dan vinden we respectievelijk de transformaties

$$\boxed{\left[\frac{2}{\pi}K(k)\right]^2 = {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; (2kk')^2\right)} \tag{2.12}$$

en

$$\boxed{\left[\frac{2}{\pi}K(k)\right]^2 = k'^{-2}\ {}_3F_2\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2};1,1;-\left(\frac{2k}{k'^2}\right)^2\right),} \tag{2.13}$$

met k begrensd zoals boven.

2.3 Legendre's relatie

We bewijzen in deze paragraaf Legendre's relatie, zie Stelling 2.3.3. Legendre's relatie geeft een mooi verband tussen de elliptische integralen en π. In feite komt hiermee straks π in de sommatieformules. Eerst bewijzen we een tweetal proposities.

Propositie 2.3.1. *De elliptische integralen van de eerste en tweede soort zijn verbonden via de vergelijkingen*

$$\dot{E} = \frac{E-K}{k} \tag{i}$$

en

$$\dot{K} = \frac{E-k'^2K}{kk'^2}. \tag{ii}$$

Notatie: $\dot{E}$ betekent $\mathrm{d}E/\,\mathrm{d}k$.

Bewijs. Binnen de convergentiestraal van de reeks kunnen we termsgewijs differentiëren; zodoende krijgen we voor $0 < k < 1$ enerzijds

$$k\dot{E} = k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left(\frac{\pi}{2}\ {}_2F_1\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2};1;k^2\right)\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)^2}2nk^{2n},$$

en anderzijds

$$E-K = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n - \left(\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)^2}k^{2n} = (*).$$

Er geldt,

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{2}\right)_n &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdots\left(n-\tfrac{1}{2}\right)\\ &= \left(-\tfrac{1}{2}\right)\cdot\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\cdots\left(n-\tfrac{3}{2}\right)\cdot\frac{\left(n-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = (1-2n)\left(-\tfrac{1}{2}\right)_n,\end{aligned} \tag{2.14}$$

zodat

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n - (1-2n)\left(-\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)^2}k^{2n}\\ &= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n\left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)^2}2nk^{2n}.\end{aligned}$$

En deze laatste uitdrukking is dus precies $k\dot{E}$.

Voor het bewijs van (ii) vergelijken we wederom de coëfficiënten van machtreeksontwikkelingen, deze keer van $k(k')^2\dot{K}$ en $E-k'^2K$. Merk op, dat de ontwikkelingen bestaan uit even machten van k; beide kunnen dus worden geschreven als $\sum_{n=0}^{\infty}a_nk^{2n}$. We hebben enerzijds

$$k(k')^2\dot{K} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2}{(n!)^2}2n\cdot k^{2n}(1-k^2),$$

met als coëfficiënt voor de term k^{2N}:

$$a_N = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_N^2}{(N!)^2} 2N - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{N-1}^2}{((N-1)!)^2} 2(N-1).$$

Er geldt,

$$((n-1)!)^2 = \frac{(n!)^2}{n^2} \tag{2.15}$$

en

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1}{2}\right)_{n-1} &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdots \left(\tfrac{1}{2} + (n-1) - 2\right) \left(\tfrac{1}{2} + (n-1) - 1\right) \\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{2} \cdots \left(n + \tfrac{1}{2} - 2\right) \left(n + \tfrac{1}{2} - 1\right) \cdot \frac{1}{n - \frac{1}{2}} = \left(\tfrac{1}{2}\right)_n \cdot \frac{1}{n - \frac{1}{2}}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

zodat

$$a_N = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_N^2}{(N!)^2} \left(2N - 2(N-1) \frac{N^2}{\left(N - \frac{1}{2}\right)^2} \right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_N^2}{(N!)^2} \frac{\frac{1}{2}N}{\left(N - \frac{1}{2}\right)^2}.$$

We hebben anderzijds

$$E(k) - (1-k^2)K(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n}{(n!)^2} k^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n^2}{(n!)^2} k^{2n} (1-k^2),$$

met dus als coëfficiënt voor de term k^{2N}:

$$\begin{aligned} a_N &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)_N \left(\frac{1}{2}\right)_N}{(N!)^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_N^2}{(N!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{N-1}^2}{((N-1)!)^2} \\ &\overset{(2.14)}{=} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_N^2}{(1-2N)(N!)^2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_N^2}{(N!)^2} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_{N-1}^2}{((N-1)!)^2} \\ &\overset{(2.15) \text{ en } (2.16)}{=} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_N^2}{(N!)^2} \left(\frac{1}{1-2N} - 1 + \frac{N^2}{\left(N - \frac{1}{2}\right)^2} \right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_N^2}{(N!)^2} \frac{\frac{1}{2}N}{\left(N - \frac{1}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

En we zien dus dat de coëfficiënten gelijk zijn. □

Propositie 2.3.2. *Er geldt,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \left(EK' + E'K - KK' \right) = 0.$$

Bewijs. We hebben

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \left(EK' + E'K - KK' \right) &= (\dot{E}K' + E\dot{K}') + (\dot{E}'K + E'\dot{K}) - (\dot{K}K' + K\dot{K}') \\ &= (E - K)\dot{K}' + (E' - K')\dot{K} + \dot{E}K' + \dot{E}'K = (*). \end{aligned}$$

Nu moeten we dus "al die stipjes wegwerken". We hebben dus vergelijkingen nodig voor $\dot{E}, \dot{K}, \dot{E}'$ en $\dot{K}'$. We hebben er reeds twee, namelijk,

$$\dot{E} = \frac{E - K}{k} \quad \text{(i)} \quad \text{en} \quad \dot{K} = \frac{E - k'^2 K}{k(k')^2} \quad \text{(ii)}.$$

Er geldt verder dat

$$\dot{E'} = \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}k'}\frac{\mathrm{d}k'}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}k'}\frac{\mathrm{d}(\sqrt{1-k^2})}{\mathrm{d}k} = \frac{(-2k)}{2\sqrt{1-k^2}}\frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}k'} = -\frac{k}{k'}\frac{\mathrm{d}E'}{\mathrm{d}k'},$$

zodat we, gebruikmakend van (i), krijgen dat

$$\dot{E'} = -\frac{k(E'-K')}{(k')^2}.$$

Op eenzelfde manier gaan we met (ii) na dat

$$\dot{K'} = -\frac{E'-k^2K'}{k(k')^2}.$$

Substitutie van de vier uitdrukkingen voor $\dot{E}, \dot{K}, \dot{E'}$ en $\dot{K'}$ levert

$$\begin{aligned}
(*) &= -(E-K)\frac{E'-k^2K'}{kk'^2} + (E'-K')\frac{E-k'^2K}{kk'^2} + \frac{E-K}{k}K' - \frac{k(E'-K')}{k'^2}K \\
&= \frac{1}{(kk')^2}\left\{-kEE' + k^3EK' + kKE' - k^3KK' + kE'E - kk'^2E'K - kK'E \; + \cdots\right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdots + \; kk'^2K'K + kk'^2EK'EK' - kk'^2KK' - k^3E'K + k^3K'K\right\} \\
&= \frac{1}{(kk')^2}\left\{(k^3 + kk'^2 - k)EK' + (k - kk'^2 - k^3)KE'\right\} = 0.
\end{aligned}$$

□

We hebben nu genoeg 'gereedschap' om de volgende 'magische' identiteit te bewijzen.

Stelling 2.3.3 (Legendre's relatie)**.** *Voor $0 < k < 1$ geldt:*

$$\boxed{E(k)K'(k) + E'(k)K(k) - K(k)K'(k) = \frac{\pi}{2}.}$$

Bewijs. Met Propositie 2.3.2 vinden we dat

$$EK' + E'K - KK' = c. \qquad (c = \text{ constante}) \tag{2.17}$$

We moeten nu nog c bepalen voor een of andere k. Een handige keuze is om voor de modulus $k = 1/\sqrt{2}$ te kiezen, omdat in dat geval de complementaire modulus k' gelijk is aan k; in dat geval hebben we slechts $K(\frac{1}{\sqrt{2}})$ en $E(\frac{1}{\sqrt{2}})$ nodig. Propositie 2.1.3 geeft ons

$$K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{\pi}}$$

en

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pi^{-3/2}\Gamma^{-2}(\tfrac{1}{4}) + \frac{1}{2}K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Invullen van modulus $k = 1/\sqrt{2}$ in (2.17) geeft

$$\begin{aligned}
EK' + E'K - KK' = 2EK - K^2 &= 2\left(\pi^{-3/2}\Gamma^{-2}(\tfrac{1}{4}) + \tfrac{1}{2}K\right)K - K^2 = 2\pi^{-3/2}\Gamma^{-2}(\tfrac{1}{4})K \\
&= 2\pi^{-3/2}\Gamma^{-2}(\tfrac{1}{4}) \cdot \frac{\Gamma^2(\frac{1}{4})}{4\sqrt{\pi}} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

□

Hoofdstuk 3

Singuliere waarden

In dit hoofdstuk gaan we kijken naar singuliere waarden. De reden hiervoor wordt direct duidelijk uit de definitie; een modulus k_N waarvoor geldt dat

$$\boxed{\frac{K'}{K}(k_N) = \sqrt{N},} \qquad N \in \mathbb{N},$$

heet een *singuliere waarde* of *singuliere modulus*. We zien dus, dat in het geval van singuliere waarden we K' zeer eenvoudig kunnen uitdrukken in K.

Voor het bepalen van singuliere waarden zijn verschillende technieken voorhanden. Een ervan is het gebruik van de zogenaamde modulaire vergelijking. Waarom dit werkt, zien we zo direct. Herinner u Landen's transformatie uit hoofdstuk 2, zie 2.9, te weten

$$K(k) = \frac{1}{1+k} K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right).$$

Merk nu op, dat als k algebraïsch is en $l := 2\sqrt{k}/(1+k)$ dan zijn de waarden van K in de moduli l en k algebraïsch verbonden. We kunnen $l = 2\sqrt{k}/(1+k)$ omschrijven naar

$$l^2(1+k)^2 - 4k = 0. \tag{3.1}$$

De bovenstaande vergelijking is een vorm van de *kwadratische modulaire vergelijking*.

Welnu, waarom de modulaire vergelijking? Nou, bekijk wat er gebeurt als we k hierboven zó bepalen dat $l = k', l' = k$. In dat geval gaat (3.1) over in

$$(1-k^2)(1+k^2) - 4k = 0,$$

wat een polynomiale vergelijking is in k, en deze kunnen we oplossen! We vinden als oplossing, gebruikmakend van het gegeven dat $k \in (0,1)$, dat een singuliere waarde is

$$k_2 = \sqrt{2} - 1. \tag{3.2}$$

] Hierboven zagen we een kwadratisch verband $(n = 2)$ tussen de moduli l en k. Het idee is nu om modulaire vergelijkingen te vinden voor hogere graden. Dat kan met werk van Cayley, zie [2].

3.1 Modulaire vergelijking - algebraïsche aanpak

We gaan op zoek naar een verband van de vorm

$$\frac{M(l,k)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \tag{3.3}$$

waarin de moduli l en k met elkaar verbonden zijn via een algebraïsche vergelijking Ω in twee variabelen. Zo'n vergelijking die twee moduli met elkaar verbindt noemen we een *modulaire vergelijking*. Verder is M een algebraïsche functie van k en l en deze functie noemen we de *multiplier*.

Merk op, dat (3.3) invariant is onder de substitutie $(x,y) \mapsto (1/(kx), 1/(ly))$. We hebben namelijk

$$\begin{aligned}\frac{M(l,k)\,\mathrm{d}(1/ly)}{\sqrt{(1-(1/(ly))^2)(1-l^2(1/(ly)^2))}} &= -\frac{1}{ly^2}\cdot\frac{M(l,k)\,\mathrm{d}y}{(1/(ly^2))\cdot\sqrt{(1-l^2y^2)(1-y^2))}} \\ &= -\frac{M(l,k)\,\mathrm{d}y}{\sqrt{(1-y^2)(1-l^2y^2)}}.\end{aligned}$$

En voor x geldt precies hetzelfde, zodat we uitdrukking (3.3) weer terugkrijgen (de mintekens vallen tegen elkaar weg).

Cayley gaat als volgt te werk. Beschouw de uitdrukking $\mathrm{d}y/\sqrt{Y}$, waarin Y een (nu nog willekeurig) polynoom is van graad 4 in y. Schrijf

$$y = U/V,$$

waarin U en V op hun beurt polynomen zijn in x. Eén van die polynomen is van graad p, de ander van graad p of $p-1$ ($p \in \mathbb{N}$). Cayley toont de volgende stelling aan.

Stelling 3.1.1. *Zij Y een polynoom van graad 4 in y. Veronderstel $y = U/V$ waarin U, V twee polynomen zijn van respectievelijk graad p, p of $p, p-1$ of $p-1, p$ in x. Het is dan mogelijk U en V zodanig te bepalen dat*

$$\frac{M\,\mathrm{d}y}{\sqrt{Y}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}},$$

waarin X een polynoom van graad 4 in x is en M een constante.

Bewijs. Er geldt,

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{V^2}(V\dot{U} - \dot{V}U)\,\mathrm{d}x. \tag{3.4}$$

Verder, als we schrijven

$$Y(y) = \sum_{n=0}^{4} a_n y^n, \quad a_4 \neq 0,$$

dan vinden we als we voor y substitueren U/V, dat

$$Y\left(\frac{U}{V}\right) = \sum_{n=0}^{4} a_n \left(\frac{U}{V}\right) = \frac{1}{V^4}\sum_{n=0}^{4} a_n U^n V^{4-n} = \frac{1}{V^4}G(V,U), \tag{3.5}$$

waarin $G = G(V,U)$ een homogeen polynoom van graad 4 is in U en V, dat wil zeggen, een polynoom waarin voor elk van de termen de som van de exponenten van U en V steeds vier is.

We zien direct, dat G ook een homogeen polynoom is van graad $4p$ in x. Verder is van graad $2p-2$ in x, ongeacht de graden van U en V. Voor U, V met verschillende graden is dit duidelijk. Men zou nog kunnen denken dat $V\dot{U} - \dot{V}U$ van graad $2p - 1$ als U en V beide graad p hebben, maar dat is niet zo omdat in dat geval de coëfficiënt van x^{2p-1} wegvalt.

We kunnen met (3.4) en (3.5) schrijven

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{Y}} = \frac{(V\dot{U} - \dot{V}U)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{G}}. \tag{3.6}$$

We zien aan deze uitdrukking direct, dat als G een kwadratische factor $(x-a)^2$ bevat, dan is $x - a$ een deler van $V\dot{U} - \dot{V}U$ omdat $x - a$ een deler van zowel U als V is. Sterker, als G zelfs $2p - 2$ van zulke kwadratische factoren heeft, dan is G van de vorm T^2X, waarin T het product is van de wortels van de kwadratische factoren. De graad van T^2 is dan $4p - 4$ en zodoende is het resterende stukje X van graad 4. Bovendien, omdat zowel T als $V\dot{U} - \dot{V}U$ van graad $2p - 2$ is, is $(V\dot{U} - \dot{V}U)/T =$ constant! Als we die constante M^{-1} noemen dan vinden we dus dat het inderdaad mogelijk is om een relatie van de vorm

$$\frac{M\,\mathrm{d}y}{\sqrt{Y}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}$$

te maken, door U en V 'gewoon' zó te bepalen dat G een $(2p-2)$-tal kwadratische factoren heeft. □

Cayley stelt vervolgens voor om te gaan kijken naar

$$y = \frac{xQ_1(1, x^2)^{(n-1)/2}}{Q_2(1, x^2)^{(n-1)/2}} \quad (n \text{ oneven}). \tag{3.7}$$

We zien, de teller is van graad n en de noemer is van graad $n - 1$. We nemen nu voor P en Q even polynomen in x zodanig dat $P + xQ$ van de graad $\frac{1}{2}(n - 1)$ is. Op deze manier kunnen we schrijven

$$y = \frac{x(P^2 + 2PQ + x^2Q^2)}{P^2 + 2PQx^2 + x^2Q^2}, \tag{3.8}$$

wat niet alleen van de beoogde vorm is, er geldt bovendien

$$1 - y = \frac{(P - xQ)^2(1 - x)}{P^2 + 2x^2PQ + x^2Q^2} \quad \text{en} \quad 1 + y = \frac{(P + xQ)^2(1 + x)}{P^2 + 2x^2PQ + x^2Q^2} \tag{3.9}$$

en we zien dus dat $1 - y$ en $1 + y$ de eigenschap hebben dat de tellers kwadratische factoren van de juiste graad bevatten! Dit is de reden waarom de Borweins in paragraaf 4.1 naar de uitdrukking

$$\frac{1 - y}{1 + y} = \frac{(P - xQ)^2}{(P + xQ)^2}\frac{1 - x}{1 + x}. \tag{3.10}$$

gaan kijken voor het bepalen van P en Q.

Om te zien wat we voor P en Q mogen nemen, bekijken we

voor $n = 3$,	neem $P + xQ = a + bx$	$\Longrightarrow$ graad $P = 0$ en graad $Q = 0$,
voor $n = 5$,	neem $P + xQ = a + bx + cx^2$	$\Longrightarrow$ graad $P = 2$ en graad $Q = 0$,
voor $n = 7$,	neem $P + xQ = a + bx + cx^2 + dx^3$	$\Longrightarrow$ graad $P = 2$ en graad $Q = 2$,
voor $n = 9$,	neem $P + xQ = a + bx + cx^2 + dx^4 + ex^5$	$\Longrightarrow$ graad $P = 4$ en graad $Q = 2$,

en algemeen, voor $n = 4p+1$ nemen we P van graad $2p$ en Q van graad $2p-2$ en voor $n = 4p+3$ nemen we P en Q beide van graad $2p$.

Omdat P en Q even polynomen zijn hebben we in elk van de twee gevallen $\frac{1}{2}(n+1)$ graden van vrijheid. Om P en Q te kunnen bepalen gebruiken we dat (3.10) invariant moet zijn onder $(x,y) \to (1/(kx), 1/(ly))$. Dat dit kan, zien we als volgt in. Schrijf voor het gemak

$$y = \frac{xN(1,x^2)}{D(1,x^2)}, \tag{3.11}$$

waarin N en D net als boven homogene polynomen in twee variabelen zijn van graad $\frac{1}{2}(n-1)$. Er geldt,

$$N\left(1, \frac{1}{k^2x^2}\right) = \frac{1}{(kx)^{n-1}} N(k^2x^2, 1).$$

Als we de coëfficiënten van N als gegeven beschouwen, dan kunnen we die van D bepalen via

$$N(k^2x^2, 1) = \lambda D(1, x^2), \tag{3.12}$$

waarin $\lambda =$ constant. In feite zijn de coëfficiënten van D precies die van N maar dan in omgekeerde volgorde en vermenigvuldigd met een geschikte macht van k. We hebben dus

$$N\left(1, \frac{1}{k^2x^2}\right) = \lambda \frac{1}{(kx)^{n-1}} D(1, x^2),$$

en door vervanging van $1/(kx)$ door x vinden we ook

$$N\left(1, x^2\right) = \lambda x^{n-1} D\left(1, \frac{1}{k^2x^2}\right).$$

Samen levert dit:

$$N\left(1, x^2\right) N\left(1, \frac{1}{k^2x^2}\right) = \frac{\lambda^2}{k^{n-1}} D(1, x^2) D\left(1, \frac{1}{k^2x^2}\right). \tag{3.13}$$

Enerzijds hebben we onder $x \to 1/(kx)$ dat

$$\bar{y} = y\left(\frac{1}{kx}\right) = \frac{\frac{1}{kx} N\left(1, \frac{1}{k^2x^2}\right)}{D\left(1, \frac{1}{k^2x^2}\right)},$$

terwijl direct toepassen van (3.11) om $1/(ly)$ te bepalen geeft

$$\frac{1}{ly} = \frac{D(1,x^2)}{lxN(1,x^2)}.$$

We zien,

$$\begin{aligned} \bar{y} = \frac{1}{ly} &\iff \frac{l}{k} N(1,x^2) N\left(1, \frac{1}{k^2x^2}\right) = D(1,x^2) D\left(1, \frac{1}{k^2x^2}\right) \\ &\overset{(3.13)}{\iff} \frac{l}{k} \frac{\lambda^2}{k^{2n-1}} = 1 \implies \lambda = \sqrt{\frac{k}{l}} k^{(n-1)/2}. \end{aligned}$$

Uit (3.12) samen met λ hierboven volgt dat om P en Q te kunnen bepalen het voldoende is om op te lossen:

$$(P^2 + 2PQ + x^2Q^2)^* = \sqrt{\frac{k}{l}} k^{(n-1)/2} (P^2 + 2x^2PQ + x^2Q^2), \tag{3.14}$$

waarin de * operatie als volgt is gedefinieerd. Als

$$S := a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m,$$

dan is

$$S^* := a_0(kx)^m + a_1(kx)^{m-1} + \cdots + a_m.$$

De multiplier M berekenen we door nu Y te specificeren. We zien dat voor de elliptische integraal Y van de vorm is

$$Y(y) = (1 - y^2)(1 - l^2 y^2).$$

Als we hierin y vervangen door U/V krijgen we het homogene polynoom

$$G(V, U) = (V^2 - U^2)(V^2 - l^2 U^2).$$

Er geldt dus, $M^{-1} = (V\dot{U} - \dot{V}U)/\sqrt{G(V,U)}$ met G als boven is onafhankelijk van x. Door vervolgens U en V uit te drukken in P en Q en erna $x = 0$ in te vullen, vind men na veel rekenwerk uiteindelijk

$$\frac{1}{M(l,k)} = 1 + 2\frac{Q(0)}{P(0)}. \tag{3.15}$$

We hebben hiermee een techniek verkregen om de modulaire vergelijking en bijbehorende multiplier voor oneven n te bepalen. Voor andere n, zie [2]. Samenvattend, waar het dus op neerkomt is het volgende:

STAP 1: Bepaal P en Q zó dat graad $x(P^2 + 2PQ + x^2Q^2) = n$ en bereken hiermee de multiplier via (3.15).

STAP 2: Los op

$$(P^2 + 2PQ + x^2Q^2)^* = \sqrt{\frac{k}{l}}\,k^{(n-1)/2}(P^2 + 2x^2PQ + x^2Q^2),$$

via het vergelijken van coëfficiënten en door erna het corresponderende stelsel van $\frac{1}{2}(n+1)$ niet-lineaire vergelijkingen op te lossen.

Tenslotte, om de relatie te vinden tussen $K(l)$ en $K(k)$, impliciet gegeven in vergelijking (3.3), moeten we nog wel even laten zien dat de onderliggende transformatie (3.10) een bijectie is op $[0, 1]$.

We zullen de voorgaande theorie verduidelijken via de kubische transformatie.

Kubische transformatie ($n = 3$)

STAP 1: Er moet gelden: graad $x(P^2 + 2PQ + x^2Q^2) = n$. Voor $n = 3$ nemen we (bijvoorbeeld) $P = 1$ en $Q = \alpha$. In dat geval krijgen we inderdaad iets van graad 3. Voor de multiplier vinden we met (3.15) direct

$$M_3(l,k) = \frac{1}{1 + 2\alpha}.$$

STAP 2: Vergelijking (3.14) wordt

$$k^2x^2 + 2\alpha k^2 x^2 + \alpha^2 = \sqrt{\frac{k}{l}}\,k(1 + 2\alpha x^2 + \alpha^2 x^2).$$

Vergelijken van coëfficiënten levert twee vergelijkingen,

$$k^2(1+2\alpha) = \sqrt{\frac{k}{l}}k(2\alpha+\alpha^2), \tag{3.16}$$

$$\alpha^2 = \sqrt{\frac{k}{l}}k. \tag{3.17}$$

Substitutie van (3.17) in (3.16) levert direct k^2 waarna we via $l^2 = k^6/\alpha^6$ ook l^2 vinden. Aldus,

$$k^2 = \frac{\alpha^3(2+\alpha)}{1+2\alpha} \quad \text{en} \quad l^2 = \frac{\alpha(2+\alpha)^3}{(1+2\alpha)^3}. \tag{3.18}$$

Er zijn gelijkwaardige uitdrukkingen voor k'^2 en l'^2, namelijk,

$$\begin{aligned} k'^2 &= 1-k^2 = 1-\frac{\alpha^3(2+\alpha)}{1+2\alpha} = \frac{(1-\alpha)(1+\alpha^3)}{1+2\alpha} \quad \text{en} \\ l'^2 &= 1-l^2 = 1-\frac{\alpha(2+\alpha)^3}{(1+2\alpha)^3} = \frac{(1+\alpha)(1-\alpha)^3}{(1+2\alpha)^3}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Hieruit kunnen we afleiden dat

$$\sqrt{kl} + \sqrt{k'l'} = 1. \tag{3.20}$$

Deze uitdrukking heeft in de variabelen $u := k^{1/4}$ en $v := l^{1/4}$ een makkelijkere vorm. Er geldt, $\alpha^4 = k^3/l$, zodat $\alpha = u^3/v$ en

$$\sqrt{kl} = \frac{\alpha(2+\alpha)}{1+2\alpha}, \text{ ofwel } \quad u^2v^2 = \frac{\alpha(2+\alpha)}{1+2\alpha}.$$

Substitutie van $\alpha = u^3/v$ levert

$$u^2v^2 = \frac{u^3(2v+u^3}{v(v+2u^3)},$$

oftewel

$$u^4 - v^4 + 2uv(1-u^2v^2) = 0. \tag{3.21}$$

De multiplier heeft daarmee de volgende vormen:

$$M_3 = \frac{1}{2\alpha+1} = \frac{v}{v+2u^3} = \frac{2v^3-u}{3u}. \tag{3.22}$$

Merk op, dat voor $\alpha < 1$ de transformatie

$$y = \frac{x(2\alpha+1+\alpha^2)}{1+\alpha(\alpha+2)x^2}$$

een bijectie is op $[0,1]$, omdat y strikt stijgend is op $[0,1]$ en $y(0) = 0$ en $y(1) = 1$. We mogen dus schrijven

$$M_3(l,k)K(l) = K(k),$$

waarin we met M_3 de multiplier bedoelen behorende bij $n = 3$.

Voor het bepalen van de singuliere waarde k_3 bepalen we opnieuw k zó dat $l = k', l' = k$. In dat geval gaat (3.20) over in

$$2\sqrt{kk'} = 1,$$

wat een algebraïsche vergelijking van graad 4 in k is. Deze vergelijking kunnen we oplossen! De vergelijking hierboven is equivalent met

$$k^2(1-k^2) = \frac{1}{16},$$

zodat

$$k = \sqrt{\frac{2 \pm \sqrt{3}}{4}}.$$

Voor het bepalen van het juiste teken, herinneren we ons dat voor $k \in (0,1)$ moet gelden

$$\sqrt{3} = \frac{K(k')}{K(k)}.$$

Als we beide zijden numeriek benaderen, dan zien we dat het juiste teken een minteken moet zijn. Conclusie:

$$k_3 = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}}. \tag{3.23}$$

3.2 Modulaire vergelijking - hogere orde

Het zal u duidelijk zijn geworden dat de algebraïsche methode om modulaire vergelijkingen te bepalen alleen werkt voor kleine n. Het oplossen van een groter wordend stelsel van niet-lineaire vergelijkingen wordt al snel een onmogelijk karwei. Cayley stopt bij $n = 11$, de daarbij horende berekeningen zijn al verbluffend. Tegenwoordig zou men met computer algebrapakketten in principe nog wel een stapje verder moeten kunnen gaan.

Maar het kan slimmer. Namelijk via een methode die berust op modulaire functietheorie. Hiermee kan men op een elegante manier, met veel minder (en ander) rekenwerk, eenvoudiger hogere orde modulaire vergelijkingen bepalen. Hand in hand met deze methode gaan de zogenaamde theta-functies en manipulaties ervan. In hoofdstuk 4 van [1] wordt deze methode uiteengezet. De modulaire vergelijkingen worden veelal gegeven in de variabelen $u = k^{1/4}$ en $v = l^{1/4}$ omdat hiervoor de vorm het eenvoudigst is.

Echter, de coëfficiënten in de modulaire vergelijking worden al gauw onpraktisch groot, en een bijkomend probleem is, als je eenmaal de modulaire vergelijking hebt, hoe je ermee de singuliere waarde bepaalt. Wat we zojuist deden, k zó nemen dat $k' = l, k = l'$ werkt niet altijd; als de corresponderende gereduceerde polynomiale vergelijking in k van graad 5 of hoger is, is deze niet oplosbaar.

We zullen ons verder niet bezighouden met de geschetste problemen en het oplossen ervan. Voor onze twee 'simpele' formules spelen deze problemen geen rol. Er zijn zeker oplossingstechnieken, en mochten die niet toereikend zijn, bijvoorbeeld als we k_N voor heel grote N zouden willen bepalen, dan kunnen we onze uitvlucht nemen naar andere technieken dan de modulaire vergelijking, zoals de Kronecker limiet formule, zie [8]. In dit werk laat Villarino zien hoe "Ramanujan's meest singuliere waarde", k_{210}, kan worden berekend met de Kronecker limiet formule.

3.3 Singuliere waarde functie

Voordat we onze formules kunnen gaan bouwen hebben we nog 1 bouwsteen nodig;

Definitie 3.3.1. De *singuliere waarde functie* α is voor positieve N gedefinieerd via

$$\alpha(N) := \frac{E'}{K} - \frac{\pi}{4K^2}.$$

Waarvoor we α nodig hebben, zal bij het bouwen van de formules duidelijk worden. De reden om α precies als boven te definiëren en niet anders, is dat er in deze vorm technieken beschikbaar zijn om α iteratief te kunnen berekenen. In het bijzonder geldt voor p priem, en dat geven we zonder bewijs, dat

$$\boxed{\alpha(p) = \sqrt{p}k^2 - \frac{p}{2}kk'^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}M_p(k', k).} \tag{3.24}$$

Hoofdstuk 4

Formules voor π^{-1}

In de voorgaande hoofstukken zijn de bouwstenen voor formules voor π^{-1} bij elkaar geraapt. Het is nu tijd om er formules mee te gaan bouwen.

4.1 Algemene vorm

We leiden allereerst de algemene vorm af van elke formule.

STAP 1: Legendre's relatie is, zie Stelling 2.3.3,

$$EK' + E'K - KK' = \frac{\pi}{2}.$$

Voor singuliere waarden k_N geldt

$$\frac{K'}{K}(k_N) = \sqrt{N}.$$

Als we dit substitueren in Legendre's relatie krijgen we

$$\frac{\pi}{2} = \sqrt{N}EK + E'K - \sqrt{N}K^2. \tag{4.1}$$

Met de differentiaalvergelijking voor K, zie Propositie 2.3.1(i),

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}k} = \frac{E - {k'_N}^2 K}{k_N {k'_N}^2},$$

oftewel

$$E = k_N {k'_N}^2 + {k'_N}^2 K,$$

kunnen we E wegwerken. Substitutie in (4.1) levert namelijk

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2} &= \sqrt{N}(k_N {k'_N}^2 \dot{K} + {k'_N}^2 K)K + E'K - \sqrt{N}K^2 \\ &= \sqrt{N}k_N {k'_N}^2 K\dot{K} + \sqrt{N}(1 - k_N^2)K^2 - \sqrt{N}K^2 + E'K \\ &= \sqrt{N}k_N {k'_N}^2 K\dot{K} - \sqrt{N}k_N^2 K^2 + E'K.\end{aligned}$$

Links en rechts vermenigvuldigen met $4/\pi^2$ geeft

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{N}k_N {k'_N}^2 \frac{4K\dot{K}}{\pi^2} - \sqrt{N}k_N^2 \frac{4K^2}{\pi^2} + \frac{4E'K}{\pi^2}. \tag{4.2}$$

Trek links en rechts $1/\pi$ af en herschrijf naar

$$\frac{1}{\pi} = \sqrt{N} k_N {k'_N}^2 \frac{4K\dot{K}}{\pi^2} + \left(\left[\frac{E'}{K} - \frac{\pi}{4K^2} \right] - \sqrt{N} k_N^2 \right) \frac{4K^2}{\pi^2}, \tag{4.3}$$

zodat we het stukje tussen rechte haken precies kunnen vervangen door $\alpha(N)$, de singuliere waarde functie.

STAP 2: We vonden in hoofdstuk 2 de kwadratische transformaties, zie (2.12) en (2.13),

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{\pi} K(k) \right]^2 &= {}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; (2kk')^2 \right), \\ \left[\frac{2}{\pi} K(k) \right]^2 &= k'^{-2} \, {}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; -\left(\frac{2k}{k'^2} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Merk op, beide zijn van de vorm

$$\left[\frac{2}{\pi} K(k) \right]^2 = m(k) F(\phi(k)), \tag{4.4}$$

waarin m en ϕ algebraïsch, en waarin $F(\phi)$ een hypergeometrische ontwikkeling heeft; schrijf $F(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi^n$. Links en rechts differentiëren van (4.4) naar k levert

$$2 \cdot \frac{2K}{\pi} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} \left(\frac{2K}{\pi} \right) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}k} F(\phi) + m \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\phi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}k},$$

oftewel

$$\frac{4K\dot{K}}{\pi^2} = \tfrac{1}{2} \dot{m} F + \tfrac{1}{2} m \dot{\phi} \dot{F}(\phi). \tag{4.5}$$

Substitutie van uitdrukkingen (4.4) en (4.5) in (4.3) levert de algemene vorm,

$$\boxed{\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{\sqrt{N}}{2} k_N {k'_N}^2 \dot{m} + \left[\alpha(N) - \sqrt{N} k_N^2 \right] m + \frac{n\sqrt{N}}{2} m \frac{\dot{\phi}}{\phi} k_N k'^2_N \right] \phi^n.} \tag{4.6}$$

4.2 Reeksen in g_N

We bekijken eerst

$$\left[\frac{2}{\pi} K(k) \right]^2 = k'^{-2} \, {}_3F_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; -\left(\frac{2k}{k'^2} \right)^2 \right).$$

We hebben in dit geval

$$\begin{aligned} m(k) = k'^{-2} &\Longrightarrow \dot{m}(k) = 2kk'^{-4}, \\ \phi(k) = -(2k/k'^2)^2 &\Longrightarrow \dot{\phi}(k) = -8k(1+k^2)k'^{-6} \end{aligned}$$

en

$$a_n = ((\tfrac{1}{2})_n / n!)^3.$$

Substitutie in (4.6) geeft:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{\sqrt{N}}{2} k_N {k'_N}^2 \cdot 2k_N {k'_N}^{-4} + \left[\alpha(N) - \sqrt{N} k_N^2\right] \cdot {k'_N}^{-2} + \cdots \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{n\sqrt{N}}{2} \cdot {k'_N}^{-2} \cdot \frac{-8k_N(1+k_N^2){k'_N}^{-6}}{-(2k_N{k'_N}^{-2})^2} \cdot k_N {k'_N}^2 \right] (-1)^n (2k_N {k'_N}^{-2})^{2n}.$$

Na vereenvoudiging vinden we:

Reeksen in $g_N := (2k_N/k'_N)^{-1/12}$: Voor $N \geq 2$:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}\right]^3 a_n(N)(g_N^{-12})^{2n}, \tag{4.7}$$

waarin

$$a_n(N) := \alpha(N){k'_N}^{-2} + n\sqrt{N}\left(\frac{1+k_N^2}{1-k_N^2}\right). \tag{4.8}$$

We zagen dat $k_2 = \sqrt{2}-1$, zie (3.2). Hiermee vinden we $k'_2 = \sqrt{1-k_2^2} = \sqrt{2\sqrt{2}-1}$, zodat $g_2^{-12} = 1$. Voor het berekenen van $\alpha(2)$ hebben we de afgeleide van de multiplier nodig. Indien $l = k', l' = k$ zien we via Landen's transformatie, zie (2.9) dat $M_2(k',k) = 1/(1+k)$. We krijgen

$$M_2(k',k) = \frac{1}{1+k} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} M_2(k',k) = \frac{-1}{(1+k)^2}.$$

Als we hierboven de waarden voor k_2 en k'_2 invullen vinden we dat

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} M_2(k',k)\right|_{k'_2,k_2} = \frac{-1}{(1+\sqrt{2}-1)^2} = -\frac{1}{2},$$

en zodoende vinden we, gebruikmakend van (3.24), dat

$$\begin{aligned} \alpha(2) &= \sqrt{2}k_2^2 - \frac{2}{2} k_2 {k'_2}^2 \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} M_2(k',k)\right|_{k'_2,k_2} \\ &= \sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)^2 - (\sqrt{2}-1)(2\sqrt{2}-2)\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{2}-1. \end{aligned}$$

Als we k_2, g_2^{-12} en $\alpha(2)$ invullen in (4.7) en (4.8) krijgen we onze eerste formule:

$$\boxed{\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!}\right]^3 \left(2n + \frac{1}{2}\right).} \tag{4.9}$$

4.3 Reeksen in G_N

We bekijken nu

$$\left[\frac{2}{\pi}K(k)\right]^2 = {}_3F_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1, 1; (2kk')^2\right).$$

We hebben in dit geval

$$\begin{aligned} m(k) = 1 &\Longrightarrow \dot{m}(k) = 0, \\ \phi(k) = (2kk')^2 &\Longrightarrow \dot{\phi}(k) = 8k(k'^2 - k^2), \end{aligned}$$

en

$$a_n = ((\tfrac{1}{2})_n / n!)^3.$$

Substitutie in (4.6) geeft:

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\frac{\sqrt{N}}{2} k_N {k'_N}^2 \cdot 0 + \left[\alpha(N) - \sqrt{N} k_N^2\right] \cdot 1 + \frac{n\sqrt{N}}{2} \cdot 1 \cdot \frac{8k_N({k'_N}^2 - k_N^2)}{(2k_N k'_N)^2} k_N {k'_N}^2 \right] (2k_N k'_N)^{2n}.$$

Na vereenvoudiging vinden we:

Reeksen in $G_N := (2k_N k'_N)^{-1/12}$: Voor $N \geq 2$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} \right]^3 b_n(N) (G_N^{-12})^{2n}, \tag{4.10}$$

waarin

$$b_n(N) := [\alpha(N) - \sqrt{N} k_N^2] + n\sqrt{N}({k'_N}^2 - k_N^2). \tag{4.11}$$

We zagen dat, zie (3.23), $k_3 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$. Hiermee vinden we dat $k'_3 = \sqrt{1-k_3^2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$, zodat $G_3^{-12} = \frac{1}{2}$. Net zoals zojuist berekenen we, zie (3.22),

$$M_3(k', k) = \frac{1}{1+2\alpha} = \frac{1}{1+2(k^3 k'^{-1})^{1/4}} \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} M_3(k', k) = \frac{3 + k^2 k'^{-2}}{8k^{7/4} k'^{-1/4} + 8k + 2(kk')^{1/4}}.$$

Als we hierboven de waarden voor k_3 en k'_3 invullen vinden we uiteindelijk dat

$$\left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} M_3(k', k) \right|_{k'_3, k_3} = \frac{1}{3}\sqrt{2}(2\sqrt{3} - 5),$$

en zodoende vinden we

$$\begin{aligned} \alpha(3) &= \sqrt{3} k_3^2 - \frac{3}{2} k_3 {k'_3}^2 \left. \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k} M_3(k', k) \right|_{k'_3, k_3} \\ &= \sqrt{3} \cdot \left(\tfrac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\right)^2 - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}-1) \cdot \left(\tfrac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)\right)^2 \cdot \frac{1}{3}\sqrt{2}(2\sqrt{3}-5) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \end{aligned}$$

Als we k_3, G_3^{-12} en $\alpha(3)$ invullen in (4.10) en (4.11) krijgen we onze tweede formule:

$$\boxed{\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(\frac{1}{2})_n}{n!} \right]^3 \left(\frac{1}{4} + 3n \right) \left(\frac{1}{2} \right)^{2n}.} \tag{4.12}$$

4.4 Meer formules

Met het gegeven recept kunnen we in principe voor willekeurige N formules maken voor π^{-1}. Daarvoor hebben we k_N, M_N en $\alpha(N)$ nodig. Ramanujan geeft in "Modular equations and approximations to pi", zie [3], sommatieformules in G_N voor $N = 3, 7$ en 15. Verder geeft Ramanujan reeksen in andere invarianten welke uitgedrukt kunnen worden in G_N of in g_N. Ramanujan was van mening dat voor *oneven* N formules in G_N elegant zijn, terwijl voor *even* N formules in g_N elegant zijn.

Laten we bijvoorbeeld eens nagaan of de sommatieformules voor G_2 en g_3 inderdaad minder elegant zijn. Dat kunnen we doen, want we hebben alle benodigdheden. Met $k_2 = \sqrt{2} - 1$ vinden we

$$G_2^{-12} = (2\sqrt{2} - 2)^{3/2},$$

wat inderdaad al minder mooi is dan de $G_3^{-12} = \frac{1}{2}$ van zojuist. Verder vinden we na wat rekenen, dat

$$b_n(2) = 3 - 2\sqrt{2} + n(8 - 5\sqrt{2}),$$

zodat invullen in (4.10) levert

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{n!} \right]^3 \left(3 - 2\sqrt{2} + n(8 - 5\sqrt{2})\right) \left(2\sqrt{2} - 2\right)^{3n},$$

wat niet bepaald 'een plaatje' is. De formule is nog steeds algebraïsch maar daarmee is ook alles gezegd. Op dezelfde manier kunt u nagaan dat de sommatieformule voor g_3 nog 'viezer' is.

Een prachtige en zeer indrukwekkende formule van Ramanujan is

$$\frac{1}{\pi} = 2\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{4}\right)_n \left(\frac{1}{2}\right)_n \left(\frac{3}{4}\right)_n}{(n!)^3} (1103 + 26390n) \left(\frac{1}{99^2}\right)^{2n+1},$$

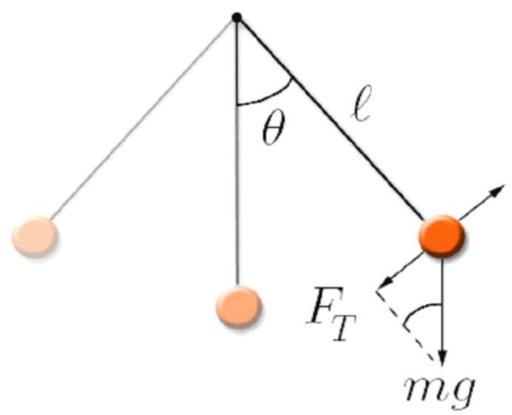
welke per iteratie maar liefst 8 goede decimalen toevoegt. We zien direct de grote gelijkenis met de vorige formules. De algemene vorm, zie vergelijking (4.6), is immers nog altijd dezelfde. De sommatieformule blijkt een reeks in de invariant $x_N := 2/(g_N^{12} + g_N^{-12})$ voor $N = 58$, wat na te lezen is in hoofdstuk 5 van [1].

Appendix A

Interpretatie van elliptische integralen

Bewering 1: *De complete elliptische integraal van de eerste soort heeft te maken met de periodetijd van een slinger.*

We zien dat als volgt in. Beschouw figuur A.1. Een massa m is bevestigd aan een slinger met lengte ℓ. Op de massa werkt een kracht ten gevolge van de gravitatieversnelling g. De uitwijking op tijd t noemen we $\theta(t)$. De hoek zoals getekend is positief. De maximale uitwijking van de slinger is α. We veronderstellen dat er geen wrijving is.



Figuur A.1: Slinger met lengte ℓ en massa m

We leiden de differentiaalvergelijking voor dit mechanische systeem af. De tweede wet van Newton zegt ons

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{A.1}$$

Bekijk het krachtenspel in een tangentieel coördinatenstelsel. Dat is een handige keuze; we hebben in dat geval als enige kracht de kracht $F_T = mg\sin\theta$ ten gevolge van de zwaartekracht. Immers, de spankracht staat steeds loodrecht op deze kracht en telt dus niet mee in de krachtenbalans in tangentiële richting. F_T staat precies de verkeerde kant op en levert dus een negatieve bijdrage. We krijgen daarom

$$m\frac{\mathrm{d}v_T}{\mathrm{d}t} = -F_T = -mg\sin\theta,$$

waarin v_T de snelheid is in tangentiële richting. Nu is v_T gegeven door $v_T = \ell \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ (= lengte slinger $\times$ hoeksnelheid), zodat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ell\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) + mg\sin\theta = 0,$$

oftewel,

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{g}{\ell}\sin\theta. \tag{A.2}$$

Vermenigvuldig (A.2) links en rechts met $\mathrm{d}\theta/\,\mathrm{d}t$ en integreer naar t, we krijgen

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{g}{\ell}\cos\theta + C,$$

waarin C een integratieconstante is. Gebruik nu dat als de uitwijking maximaal is, dus wanneer de hoek $\theta = \alpha$, dat dan de snelheid van de slinger nul is; $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 0$. Invullen van deze randvoorwaarde levert $C = -(g/\ell)\cos\alpha$ en we vinden

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2 = \frac{g}{\ell}(\cos\theta - \cos\alpha).$$

Oplossen voor $\mathrm{d}\theta/\,\mathrm{d}t$ geeft

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \pm\sqrt{\frac{2g}{\ell}}\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}. \tag{A.3}$$

We nemen aan, dat $t = 0$ als $\theta = 0$, en dat $\mathrm{d}\theta/\,\mathrm{d}t > 0$ wanneer $t = 0$. Integreren van 0 tot α levert

$$\int_0^\alpha \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}\int_0^{t_\alpha}\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2g}{\ell}}t_\alpha,$$

waarin t_α de tijd is die correspondeert met de maximale uitwijking α. Merk op, dat t_α in feite een kwart is van de hele periodetijd; schrijf $T = 4t_\alpha$. We gaan over op een nieuwe integratievariabele; zet

$$\sin\phi := \sin\tfrac{1}{2}\theta/\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$$

In dat geval is

$$\sin\tfrac{1}{2}\alpha\cos\phi\,\mathrm{d}\phi = \cos\tfrac{1}{2}\theta\,\mathrm{d}\theta \Longrightarrow \mathrm{d}\theta = \frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi$$

en

$$\frac{1}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\alpha - \sin^2\frac{1}{2}\theta}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\phi}.$$

Verder, voor de integratiegrenzen: als $\theta = 0$, dan is $\phi = 0$, als $\theta = \alpha$, dan is $\phi = \pi/2$. Alles bij elkaar krijgen we dus

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{\ell}{2g}}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\phi}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\phi}}\,\mathrm{d}\phi \\ &= 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\int_0^{\pi/2}\frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{1}{2}\alpha\sin^2\phi}} = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}K(k), \end{aligned}$$

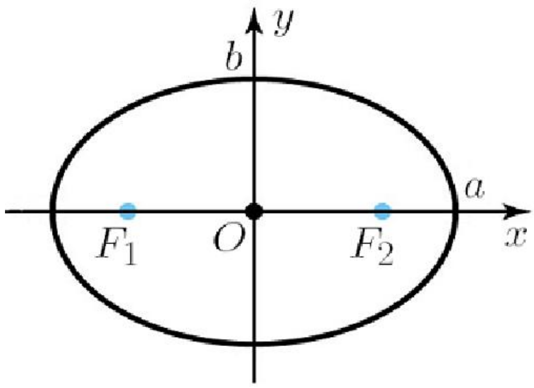
waarin $k = \sin \frac{1}{2}\alpha$. Merk op, dat wanneer de uitwijking van de slinger klein is, er geldt,

$$K(\sin \tfrac{1}{2}\alpha) \to \tfrac{1}{2}\pi \quad (\alpha \to 0),$$

zodat we de formule verkrijgen voor de periodetijd van een harmonische slinger, namelijk

$$T \sim 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Bewering 2: *De complete elliptische integraal van de tweede soort heeft te maken met de omtrek van een ellips.*



Figuur A.2: Ellips met brandpunten F_1 en F_2

We zien dat als volgt in. Beschouw figuur A.2. De impliciete vergelijking in standaardvorm van een ellips met lange as a en korte as b is

$$\mathrm{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{A.4}$$

In het eerste kwadrant $(x, y > 0)$ zou het functievoorschrift van het stuk ellips zijn

$$f(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}. \tag{A.5}$$

De omtrek van de ellips wordt op grond van symmetrie gegeven door

$$\text{Omtrek} = 4 \times \int_0^a \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x. \tag{A.6}$$

Voor de afgeleide van $f(x)$ vinden we

$$f'(x) = \frac{b}{2\sqrt{1-(x/a)^2}} \cdot (-2)(x/a) \cdot \frac{1}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{(x/a)}{\sqrt{1-(x/a)^2}},$$

zodat

$$\text{Omtrek} = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{(x/a)^2}{1-(x/a)^2}}\, \mathrm{d}x = (*).$$

We brengen de modulus erin via de substitutie $k^2 := 1 - b^2/a^2$. Substitueer verder $t := x/a$, dus $\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t$; voor de integratiegrenzen: als $x = 0$, dan is $t = 0$, en als $x = a$, dan is $t = 0$. We krijgen dus

$$(*) = 4a \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}}\,\mathrm{d}t = 4aE(k'),$$

waarin $k' = \sqrt{1 - k^2} = b/a$.

Appendix B

Het rekenkundig-meetkundig gemiddelde en formules voor π^{-1}

De titel van deze appendix is de originele titel van het bachelorproject. In deze appendix wordt kort uiteengezet wat het verband is tussen het rekenkundig-meetkundig gemiddelde, de elliptische integralen en de formules voor π^{-1}.

Voor twee positieve getallen a en b met $a > b$ definiëren we de reële rijen $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ en $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ via

$$\begin{aligned} a_0 &:= a, & b_0 &:= b, \\ a_{n+1} &:= \tfrac{1}{2}(a_n + b_n), & b_{n+1} &:= \sqrt{a_n b_n}. \end{aligned}$$

Er geldt, dat a_n en b_n convergeren naar dezelfde limiet welke uniek bepaald is door a en b;

$$M(a,b) := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dit limietproces wordt het *rekenkundig-meetkundig gemiddelde* genoemd. Als afkorting gebruiken we RMG.

Dat a_n en b_n inderdaad naar dezelfde limiet gaan, zien we als volgt in. Er geldt, dat a_n een monotoon dalende rij is en b_n een monotoon stijgende rij en bovendien zijn ze begrensd vanwege de ongelijkheid van het rekenkundig en meetkundig gemiddelde,

$$\min(a,b) \le \sqrt{ab} \le \tfrac{1}{2}(a+b) \le \max(a,b).$$

Rijen die monotoon en begrensd zijn hebben een limiet. Dat ze dezelfde limiet hebben volgt eruit dat het verschil $a_{n+1} - b_{n+1}$ naar nul gaat. Immers, omdat $\sqrt{b_n} < \sqrt{a_n}$ is

$$2b_n < 2\sqrt{a_n b_n}.$$

Tel hierboven links en rechts $a_n - b_n - 2\sqrt{a_n b_n}$ op, zodat

$$a_n + b_n - 2\sqrt{a_n b_n} < a_n - b_n.$$

Hiermee vinden we

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n}{2} < \frac{a_n - b_n}{2}.$$

Verder, uit de manier waarop het RMG is geconstrueerd zien we dat geldt

$$\lambda M(a,b) = M(\lambda a, \lambda b) \qquad \text{(homogeniteit)},$$

zodat we zonder verlies van algemeenheid kunnen nemen $a = 1$, en we zien dat geldt

$$M(a,b) = M\left(\tfrac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}\right). \tag{B.1}$$

Met andere woorden,

$$M(1,b) = \tfrac{1}{2}(1+b)M\left(1, \frac{2\sqrt{b}}{1+b}\right). \tag{B.2}$$

In mei 1799 ontdekte Gauss, puur door berekening, dat

$$\frac{1}{M(1,\sqrt{2})} \quad \text{en} \quad \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

voor tenminste 11 decimalen overeen kwamen. Dat dit geen toeval is volgt uit de volgende stelling.

Stelling.

$$\frac{1}{M(1,x)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2\phi}} \qquad (x > 0).$$

Bewijs. Laat

$$T(a,b) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}}.$$

Merk op, als $a = b$, dan is $T(a,a) = 1/a$. Verder, voor $a = 1$ en $b = x$ krijgen we precies de integrand zoals in de stelling. We nemen nu $t := b\tan\phi$. In dat geval is

$$\mathrm{d}t = \frac{b}{\cos^2\phi}\,\mathrm{d}\phi = b(1+\tan^2\phi)\,\mathrm{d}\phi \Longrightarrow \mathrm{d}\phi = \frac{1}{b + b\tan^2\phi}\,\mathrm{d}t = \frac{b}{b^2+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

en

$$\frac{1}{\sqrt{a^2\cos^2\phi + b^2\sin^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2\phi(a^2 + b^2\tan^2\phi)}} = \frac{\sqrt{b^2+t^2}}{b\sqrt{a^2+t^2}},$$

zodat

$$T(a,b) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}}. \tag{i}$$

waarbij verder is gebruikt dat de integrand een even functie is in t. Met nog een substitutie, ditmaal $u := \frac{1}{2}(t - ab/t)$, waaruit volgt dat

$$u^2 + ab = \frac{(t^2+ab)^2}{4t^2}, \quad u^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(a^2+t^2)(b^2+t^2)}{4t^2} \quad \text{en} \quad \mathrm{d}u = \frac{t^2+ab}{2t^2}\,\mathrm{d}t,$$

verkrijgen we

$$T(a,b) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2\right)\left(\left(\sqrt{ab}\right)^2 + u^2\right)}}. \tag{ii}$$

Vergelijken we (i) en (ii) dan zien we dus dat geldt

$$T(a,b) = T\left(\tfrac{1}{2}(a+b), \sqrt{ab}\right),$$

wat precies dezelfde vergelijking is waarin $M(a,b)$ voldoet. We zien, dat via verwisseling van limiet en integratie geldt,

$$T(a_0,b_0) = \lim_{n\to\infty} T(a_n,b_n) = T\left(\lim_{n\to\infty} a_n, \lim_{n\to\infty} b_n\right) = T(M(a_n,b_n), M(a_n,b_n)).$$

Met $a_0 = a = 1$ en $b_0 = b = x$ krijgen we dus

$$T(1,x) = T(M(1,x), M(1,x)).$$

Maar we hebben gezien dat $T(M,M) = 1/M$, zodat

$$\frac{1}{M(1,x)} = T(1,x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\phi}{\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2\phi}}.$$

□

Met $k^2 := 1 - x^2$ vinden we met deze stelling het fundamentele verband tussen het RMG en de elliptische integraal K, er geldt dan

$$\boxed{\frac{1}{M(1,k')} = \frac{2}{\pi}K(k).} \tag{B.3}$$

Merk op, dat we via dit verband sommatieformules voor $M(1,k')$ kunnen maken, net zo goed als we dat in hoofdstuk 4 voor π^{-1} hebben gedaan.

Verder is het volgende nog interessant. Enerzijds hebben we

$$M(1,k') = \frac{\pi}{2}\frac{1}{K(k)},$$

terwijl anderzijds toepassen van (B.2) levert

$$\begin{aligned} M(1,k') &= \tfrac{1}{2}(1+k')M\left(1, \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right) \overset{(B.3)}{=} \tfrac{1}{2}(1+k')\cdot\frac{\pi}{2K\left(\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}\right)^2}\right)} \\ &= \tfrac{1}{2}(1+k')\cdot\frac{\pi}{2K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)}. \end{aligned}$$

Combineren van de twee levert

$$K(k) = \frac{2}{1+k'}K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right). \tag{B.4}$$

We schrijven even

$$K(g) = \frac{2}{1+g'}K\left(\frac{1-g'}{1+g'}\right),$$

met $g' = \sqrt{1-g^2}$. Substitutie van $g(k) = 2\sqrt{k}/(1+k)$ en dus $\sqrt{k} = (1-\sqrt{1-g^2})/g)$ samen met

$$\frac{1-g'}{1+g'} = \frac{1-\sqrt{1-g^2}}{1+\sqrt{1-g^2}} = \frac{(1-\sqrt{1-g^2})^2}{g^2} = k, \quad \frac{2}{1+g'} = 1+k,$$

levert

$$K(k) = \frac{1}{1+k}K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right),$$

wat precies Landen's transformatie, zie (2.9), is!

Bibliografie

[1] J.M. Borwein, P.B. Borwein,*Pi and the AGM : a study in analytic number theory and computational complexity*, New York : John Wiley & Sons, 1987, 414 blz., ISBN 0-471-83138-7

[2] A. Cayley, *An Elementary Treatise on Elliptic Functions*, Cambridge, 1876.

[3] G.H. Hardy, P.V. Seshu Aiyar, B.H. Wilson, *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge University Press : Cambridge University Press, 1927, 355 blz.

[4] A. Kratzer, W. Franz, *Transzendente Funktionen*, Leipzig : Geest und Portig, 1960, 14+375 blz.

[5] H. McKean, V. Moll, *Elliptic Curves; Function Theory, Geometry, Arithmetic*, Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1997, 280 blz., ISBN 0-521-58228-8

[6] L.J. Slater, *Generalized Hypergeometric Functions*, Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1966UMI, 1991, 273 blz.

[7] N.M. Temme, *Special functions; an introduction to the classical functions of mathematical physics*, New York : John Wiley & Sons, 1996, 374 blz., ISBN 0-471-11313-1

[8] M.B. Villarino, *Ramanujan's Most Singular Modulus*, 2008, 4de editie, Arxiv.org, http://arxiv.org/abs/math/0308028v4, 43 blz.