

Wiskundige problemen leren oplossen in "Thinking Classrooms"

Het verbeteren van de lespraktijk met individuele
werkbladen en het stimuleren van reflecties

SL3502: The Science Education Thesis
Anna Dolron

Wiskundige problemen leren oplossen in "Thinking Classrooms"

Het verbeteren van de lespraktijk met
individuele werkbladen en het stimuleren van
reflecties

door

Anna Dolron

ter verkrijging van de graad van Master of Science
aan de Technische Universiteit Delft,
te verdedigen op woensdag 12 juni 2024 om 11:00 uur.

Studentnummer: 4706420
Looptijd project: 1 september 1, 2023 – 12 juni, 2024
Faculteit: Technische Natuur Wetenschappen
Afdeling: Science Education
Afstudeercommissie: dr. J. G. Spandaw,
dr. ir. M. Keijzer,
Prof. dr. M. de Vries,

TU Delft / SEC, dagelijks begeleider
TU Delft / Applied Mathematics
TU Delft / SEC

Omslag is afkomstig van <https://wallpapercave.com/cool-vertical-4k-wallpapers>

Voorwoord

Voor u ligt de masterscriptie *Wiskundige problemen leren oplossen in "Thinking Classrooms"*. Deze scriptie is geschreven in het kader van mijn afstudeeronderzoek voor de opleiding "Science Education and Communication", met de specialisatie wiskunde educatie, van de TU Delft. Ik ben vanaf september tot en met mei bezig geweest met het uitvoeren van dit onderzoek en het schrijven van deze scriptie.

In mijn eigen ervaring als scholier op de middelbare school werden er nauwelijks inspirerende werkvormen gebruikt tijdens de wiskunde lessen. Wiskunde was voor mij dan ook een individuele activiteit en ik wist niet zo goed hoe je daarbij kon samenwerken. Pas op de universiteit ontdekte ik hoe je door samen te werken verder kan komen alleen. Door elkaars kennis, creativiteit, doorzettingsvermogen en plezier te benutten zijn zelfs de moeilijkste problemen gezamenlijk op te lossen. Samen studeren zorgde er dan ook voor dat je sneller het benodigde inzicht ontwikkeld. Tijdens het doorlopen van de lerarenopleiding van de TU Delft ging er voor mij een wereld vol mogelijkheden open om het samenwerkend leren ook in de wiskundelessen in het voorgezet onderwijs in te zetten. Verder heeft deze scriptie mij meer inzicht gegeven hoe in het bijzonder "Thinking Classrooms" ingezet kan worden om leerlingen te leren moeilijke problemen op te lossen en daarmee het wiskundige denken te stimuleren. Ik hoop deze inzichten dan ook in de toekomst toe te passen in mijn eigen lessen als wiskundedocent.

Ik wil graag Jeroen Spandaw bedanken voor de goede begeleiding en ondersteuning tijdens het uitvoeren van dit onderzoek. De gesprekken over het onderwerp waren interessant en inspireerde me om verder te gaan met dit onderzoek. Daarbij kreeg ik wanneer het nodig was een duwtje in de goede richting. Bovendien wil ik graag Sanne Schaap bedanken voor het bieden van de gelegenheid om dit onderzoek tijdens zijn lessen te mogen uitvoeren, het verzorgen van de lessen met interessante problemen, de prettige samenwerking daarbij en het meedenken over het onderzoek.

Ik wens u veel leesplezier toe.

Anna Dolron
Delft, 12 juni 2024

Samenvatting

Hoewel het probleemoplossen in het wiskundecurriculum is opgenomen, krijgt dit over het algemeen in de les weinig systematische aandacht [14] en hebben docenten behoefte aan meer praktische ondersteuning hierbij [16]. De recent in het Nederlands gepubliceerde didactiek "Building Thinking Classrooms" van Peter Liljedahl met daarin veertien praktisch beschreven principes kan daarbij van betekenis zijn [12].

Het doel van dit onderzoek is om meer inzicht te verkrijgen in de effectiviteit van twee van de veertien principes ten aanzien van de beoogde leeropbrengst binnen de specifieke lespraktijk. Hierbij gaat het om het maken van aantekeningen met behulp van een ontworpen werkblad en het consolideren van een les door ontworpen lesactiviteiten waarin leerlingen zelfstandig reflecteren. De specifieke lespraktijk waarin dit onderzoek wordt uitgevoerd bestaat uit zes onafhankelijke lessen in "Thinking Classrooms". Deze lessen staan in het teken van het onderwijs van het oplossen van algemene wiskundige problemen. De bijbehorende leerdoelen zijn gerelateerd aan het ontwikkelen van metacognitieve vaardigheden en een geschikte wiskundige houding, wat volgens Schoenfeld behoren tot twee van de vier essentiële bekwaamheden voor het wiskundig probleemoplossen [17]. Om het doel van dit onderzoek te bereiken is de volgende hoofdvraag opgesteld.

Welke leerlingactiviteiten binnen de principes "note-taking" en het "consolideren" in een "Thinking Classroom", ontwikkeld door Peter Liljedahl, dragen bij aan een verhoogde leeropbrengst met betrekking tot het oplossen van algemene wiskundige problemen door leerlingen een gemengde havo/vwo bovenbouwklas?

Vanwege de afwezigheid van potentiële leeropbrengsten gerelateerd aan een specifiek ontworpen werkblad en de stimulans voor het reflecteren wordt dit onderzoek uitgevoerd door middel van het cyclische "Design-Based research" [1]. Deze onderwijsbenadering richt zich op het ontwerpen, implementeren en evalueren van onderwijsinterventies in echte leeromgevingen [1]. Hiermee wordt er op een gestructureerde manier kwalitatieve data verzameld gedurende zes lessen.

Naar aanleiding van de verschillende opeenvolgende iteraties kunnen er verschillende patronen worden ontdekt in het leergedrag van de leerlingen. Zo blijkt er dat een individueel werkblad, na het gezamenlijk oplossen van het probleem, een passende niveauverhogende activiteit kan zijn. Dit is het geval wanneer er op het werkblad gevraagd wordt om de stappen voor het vinden van de oplossing van een probleem individueel volledig uit te werken en daarop te reflecteren. Daarnaast komen er verschillende reflecties van leerlingen voor die aangemerkt kunnen worden als betekenisvol ten aanzien van het leren probleemoplossen. Echter blijken deze wel zeer beknopt te worden omschreven. Om meer uitgebreide betekenisvolle reflecties van leerlingen te stimuleren blijkt dat het afhankelijk is van de vordering van een groep leerlingen binnen het proces van het probleemoplossen of een docentgestuurd klassengesprek of een leerlinggestuurd groepsgesprek relevanter is. Een bijzonder resultaat hierbij is dat wanneer leerlingen het centrale probleem uit een les al snel hadden opgelost, zij in sommige gevallen uit zichzelf met elkaar gaan discussiëren over hoe de gevonden oplossing toegepast of geoptimaliseerd kan worden en dit vervolgens gaan uitvoeren.

Wanneer de resultaten met de inzichten uit de bestaande literatuur worden vergeleken, kunnen voornamelijk de volgende zaken worden opgemaakt. Zo blijkt dat wanneer de leerlingen de oplossing aan zichzelf uitleggen op het werkblad, dit een krachtige leeractiviteit is waarbij het voorkomen wordt dat de leerlingen overweldigd raken door de hoeveelheid nieuwe of complexe informatie [2]. Vermoedelijk is het op deze manier overweldigd raken, een reden waarom de leerlingen die het probleem niet opgelost hebben enkel beperkt reflecties kunnen verwoorden voor een ander. Het uitleggen aan een ander vergt namelijk een meer mentale inspanning dan het uitleggen aan jezelf [2]. Om dit te voorkomen is een docentgestuurde bespreking van het werk van de leerlingen geschikter. Voor het

reflecteren op het oplosproces is het daarom aan te bevelen, om de keuze in een docentgestuurd of leerlinggestuurd gesprek aan te passen gebaseerd op de ontwikkeling van de leerlingen.

Vervolgonderzoek zou zich kunnen richten op de invloed van deze lessen op de leerprestaties van de deelnemende leerlingen binnen het curriculum. Hierbij krijgen namelijk wiskundige kennis en onderwerpspecifieke heuristieken, de overige twee essentiële bekwaamheden voor het wiskundig probleemoplossen [17], meer de nadruk.

Inhoudsopgave

Voorwoord	i
Samenvatting	ii
1 Inleiding	1
2 Onderzoeksverloop	4
2.1 De praktijksituatie	4
2.2 Deelvragen voor dit onderzoek	5
2.3 Algemene beschrijving uitvoering DBR	6
2.4 Documentatie uitvoering DBR	6
3 Theoretisch kader	8
3.1 Kenmerken van problemen en probleemoplossers	8
3.2 Het onderwijzen van probleemoplossers	12
3.2.1 De visie van experts	12
3.2.2 De rol van de docent	13
3.2.3 Alle kenmerken van probleemoplossers onderwijzen	15
3.3 "Thinking Classrooms" en probleemoplossers	17
3.3.1 Het handhaven van de "flow"	18
3.3.2 Het consolideren van een les	19
3.3.3 Het maken van aantekeningen	19
3.4 De toepassing van BTC in de lespraktijk	21
3.4.1 Specificering algemene leerdoelen	21
3.4.2 Lesopbouw	22
3.5 Mogelijkheden binnen de lespraktijk	24
3.5.1 Individueel aantekeningen maken	24
3.5.2 Reflecteren	26
4 Methodologie	31
4.1 Design-Based Research en hypothetische doceer- en leertrajecten	31
4.2 Onderzoeksinstrumenten en -technieken	32
4.3 Data-analysemethoden	33
4.4 Validiteit, betrouwbaarheid en ethiek	34
5 Resultaten	36
5.1 Gedetailleerde beschrijving uitvoering DBR	36
5.2 Het implementeren van een individueel werkblad	40
5.2.1 Observatieaantekeningen	40
5.2.2 Korte feedbackvragen	41
5.2.3 Mini-interviews	42
5.2.4 Leerlingwerk	42
5.2.5 Ontworpen lesmateriaal: werkblad en voorbeeld	46
5.2.6 Overkoepelende analyse	48
5.3 Kenmerken van waardevolle leerlingreflecties	49
5.3.1 Observatie aantekeningen	49
5.3.2 Individueel leerlingwerk	50
5.3.3 Overkoepelende analyse	51
5.4 Leerlingen stimuleren betekenisvol te reflecteren	53
5.4.1 Observatieaantekeningen	53
5.4.2 Korte feedbackvragen	55
5.4.3 Mini-interviews	57

5.4.4	Individueel leerlingwerk	58
5.4.5	Ontwerpresultaat lesmateriaal: vragenkaart voor probleemoplossen	59
5.4.6	Overkoepelende analyse	60
5.5	Strategisch inzetten van lesmaterialen en lessen	62
5.5.1	Observatieaantekeningen	62
5.5.2	Korte feedbackvragen	65
5.5.3	Mini-interviews	65
5.5.4	Leerlingwerk	65
5.5.5	Overkoepelende analyse	67
6	Conclusie	69
7	Discussie	72
	Literatuurlijst	77
A	Gebruikte problemen	79
B	Globale lesplannen	82
C	Algemene aantekeningen per iteratie	88
D	Observatiepunten en bijbehorende aantekeningen	112
E	Mini-interview vragen	122
F	Resultaten korte feedbackvragen	124
G	Analyse leerlingreflecties	128
H	Resultaten leerlingreflecties	138
I	Analyse werkbladen	146
J	Aanpassingen per iteratie	156
K	Ontwerpstadia werkblad en het bijbehorende voorbeeld	162
L	Ontwerpstadia vragenkaart	190
M	Groepswerk leerlingen	194
N	Individueel leerlingwerk	213

Lijst van figuren

3.1	Algemene "graphic organizer" voor betekenisvolle aantekeningen [12]	26
3.2	Metacognitieve vragenkaart V4WA Moderne Wiskunde Hoofdstuk 11: Telproblemen [9]	28
5.1	Resultaat ontworpen lesmateriaal: werkblad	47
5.2	Resultaat ontworpen lesmateriaal: voorbeeldwerkblad	47
5.3	Verdeling reflectiekenmerken en categorieën vragenkaart per iteratie	59
5.4	Resultaat ontworpen lesmateriaal: vragenkaart voor probleemoplossen	60
F.1	Resultaten gesloten korte feedbackvragen iteratie 1.1	125
F.2	Resultaten gesloten korte feedbackvragen iteratie 1.2	125
F.3	Resultaten gesloten korte feedbackvragen iteratie 2.1	126
F.4	Resultaten gesloten korte feedbackvragen iteratie 2.3	126
F.5	Resultaten gesloten korte feedbackvragen iteratie 2.4	127
J.1	Onderverdeling kenmerken van leerlingreflecties op de vragenkaart	161
M.1	Groep 1 iteratie 1.1	194
M.2	Groep 2 iteratie 1.1	195
M.3	Groep 3 iteratie 1.1	195
M.4	Groep 4 iteratie 1.1	196
M.5	Groep 5 iteratie 1.1	196
M.6	Groep 1 iteratie 1.2	197
M.7	Groep 2 iteratie 1.2	198
M.8	Groep 3 iteratie 1.2	198
M.9	Groep 4 iteratie 1.2	199
M.10	Groep 5 iteratie 1.2	199
M.11	Groep 6 iteratie 1.2	200
M.12	Groep 1 iteratie 2.1	201
M.13	Groep 2 iteratie 2.1	201
M.14	Groep 3 iteratie 2.1	202
M.15	Groep 4 iteratie 2.1	202
M.16	Groep 5 iteratie 2.1	203
M.17	Groep 6 iteratie 2.1	203
M.18	Groep 1 iteratie 2.2	204
M.19	Groep 2 iteratie 2.2	205
M.20	Groep 3 iteratie 2.2	205
M.21	Groep 4 iteratie 2.2	206
M.22	Groep 5 iteratie 2.2	206
M.23	Groep 1 iteratie 2.3	207
M.24	Groep 2 iteratie 2.3	208
M.25	Groep 3 iteratie 2.3	208
M.26	Groep 4 iteratie 2.3	209
M.27	Groep 1 iteratie 2.4	210
M.28	Groep 2 iteratie 2.4	210
M.29	Groep 3 iteratie 2.4	211
M.30	Groep 4 iteratie 2.4	211
M.31	Groep 5 iteratie 2.4	212
N.1	Groep 1 leerling a iteratie 1.1	214

N.2 Groep 1 leerling b iteratie 1.1	215
N.3 Groep 1 leerling c iteratie 1.1	216
N.4 Groep 2 leerling a iteratie 1.1	217
N.5 Groep 2 leerling b iteratie 1.1	218
N.6 Groep 2 leerling c iteratie 1.1	219
N.7 Groep 3 leerling a iteratie 1.1	220
N.8 Groep 3 leerling b iteratie 1.1	221
N.9 Groep 4 leerling a iteratie 1.1	222
N.10 Groep 4 leerling b iteratie 1.1	223
N.11 Groep 4 leerling c iteratie 1.1	224
N.12 Groep 5 leerling a iteratie 1.1	225
N.13 Groep 5 leerling b iteratie 1.1	226
N.14 Groep 5 leerling c iteratie 1.1	227
N.15 Groep 1 leerling a iteratie 1.2	229
N.16 Groep 1 leerling b iteratie 1.2	230
N.17 Groep 1 leerling c iteratie 1.2	231
N.18 Groep 2 leerling a iteratie 1.2	232
N.19 Groep 2 leerling b iteratie 1.2	233
N.20 Groep 2 leerling c iteratie 1.2	234
N.21 Groep 3 leerling a iteratie 1.2	235
N.22 Groep 3 leerling b iteratie 1.2	236
N.23 Groep 3 leerling c iteratie 1.2	237
N.24 Groep 4 leerling a iteratie 1.2	238
N.25 Groep 4 leerling b iteratie 1.2	239
N.26 Groep 4 leerling c iteratie 1.2	240
N.27 Groep 5 leerling a iteratie 1.2	241
N.28 Groep 5 leerling b iteratie 1.2	242
N.29 Groep 5 leerling c iteratie 1.2	243
N.30 Groep 6 leerling a iteratie 1.2	244
N.31 Groep 6 leerling b iteratie 1.2	245
N.32 Groep 1 leerling a iteratie 2.1	247
N.33 Groep 1 leerling b iteratie 2.1	248
N.34 Groep 1 leerling c iteratie 2.1	249
N.35 Groep 2 leerling a iteratie 2.1	250
N.36 Groep 2 leerling b iteratie 2.1	251
N.37 Groep 2 leerling c iteratie 2.1	252
N.38 Groep 3 leerling a iteratie 2.1	253
N.39 Groep 3 leerling b iteratie 2.1	254
N.40 Groep 3 leerling c iteratie 2.1	255
N.41 Groep 4 leerling a iteratie 2.1	256
N.42 Groep 4 leerling b iteratie 2.1	257
N.43 Groep 4 leerling c iteratie 2.1	258
N.44 Groep 5 leerling a iteratie 2.1	259
N.45 Groep 5 leerling b iteratie 2.1	260
N.46 Groep 5 leerling c iteratie 2.1	261
N.47 Groep 6 leerling a iteratie 2.1	262
N.48 Groep 6 leerling b iteratie 2.1	263
N.49 Groep 6 leerling c iteratie 2.1	264
N.50 Groep 1 leerling a iteratie 2.3	266
N.51 Groep 1 leerling b iteratie 2.3	267
N.52 Groep 1 leerling c iteratie 2.3	268
N.53 Groep 2 leerling a iteratie 2.3	269
N.54 Groep 2 leerling b iteratie 2.3	270
N.55 Groep 3 leerling a iteratie 2.3	271
N.56 Groep 3 leerling b iteratie 2.3	272
N.57 Groep 3 leerling c iteratie 2.3	273

N.58 Groep 4 leerling a iteratie 2.3	274
N.59 Groep 4 leerling b iteratie 2.3	275
N.60 Groep 4 leerling c iteratie 2.3	276
N.61 Groep 1 leerling a iteratie 2.4	278
N.62 Groep 1 leerling b iteratie 2.4	279
N.63 Groep 1 leerling c iteratie 2.4	280
N.64 Groep 2 leerling a iteratie 2.4	281
N.65 Groep 2 leerling b iteratie 2.4	282
N.66 Groep 2 leerling c iteratie 2.4	283
N.67 Groep 3 leerling a iteratie 2.4	284
N.68 Groep 3 leerling b iteratie 2.4	285
N.69 Groep 3 leerling c iteratie 2.4	286
N.70 Groep 4 leerling a iteratie 2.4	287
N.71 Groep 4 leerling b iteratie 2.4	288
N.72 Groep 4 leerling c iteratie 2.4	289
N.73 Groep 5 leerling a iteratie 2.4	290

Lijst van tabellen

2.1	Overzicht deelvragen, dataverzamelingmethoden en iteraties	7
5.1	DBR-fase 1: HTLT in de fase van voorbereiden en ontwerpen	37
5.2	DBR-fase 2: HTLT in het onderwijsexperiment	38
5.3	DBR-fase 3: HTLT in de retrospectieve analyse	39
5.4	Leerlingvoorbeelden met verwijzing naar opdracht werkblad, bij de beoordelingscategorïeën	44
5.5	Resultaat aanwezige categorieën op de ingevulde werkbladen	45
5.6	Kenmerken van leerlingreflecties en bijbehorende categorieën	51
B.1	Voorbeeld vragen tijdens klassikale bespreking reflectie	85
F.1	Resultaten optionele open feedbackvragen	124

1

Inleiding

In een steeds complexer wordende maatschappij wordt het steeds relevanter om te leren hoe de wiskunde kan worden ingezet complexe problemen te analyseren, begrijpen en op te lossen [19]. Het is dan ook niet vreemd dat het probleemoplossen wordt benoemd als één van de 21e-eeuwse vaardigheden door het landelijk expertisecentrum voor het curriculum [18] en dat binnen de Nederlandse wiskunde eindexamens het probleemoplossen veelvuldig aan bod komt [16]. Bovendien is het omschreven als een van de kernaspecten van het "wiskundige denken" [7]. Toch blijkt het in de praktijk een uitdaging te zijn om leerlingen hierin te onderwijzen. Zo blijken docenten meer ondersteuning nodig te hebben bij het in de praktijk implementeren van wetenschappelijke inzichten op het gebied van het onderwijs in probleemoplossen [16]. Ook krijgen de wiskundige denkactiviteiten weinig systematische aandacht binnen de wiskundelessen volgens de Inspectie van het Onderwijs [14].

Volgens Anne van Streun is een wiskundig probleem een wiskundig vraagstuk waarbij de oplosser niet direct een oplossingsweg ziet [22]. Voor het oplossen van wiskundige problemen is daarom meer nodig dan enkel procedurele kennis en vaardigheden. Alan Schoenfeld stelt namelijk dat er naast voorkennis ook kennis over heuristieken, metacognitieve vaardigheden en een geschikte wiskundige houding vereist zijn [17]. Aangezien het bij het probleemoplossen gaat om het bedenken van iets wat je in eerste instantie nog niet weet of ziet, lijkt het onderwijzen er van tegenstrijdig te zijn. Want, hoe leer je een leerling een probleem op te lossen die gedefinieerd zijn als een probleem waarvan de leerling niet weet hoe deze opgelost moeten worden? Hierbij is het van belang om op te merken dat het enkel voordoen van oplossingen zal niet volstaan, aangezien de leerling dan de kans ontnomen wordt dit zelf te bedenken. Verschillende wiskundendidactici adviseren daarom om leerlingen de juiste begeleiding te bieden bij het zelfstandig oplossen van problemen [7]. De docent speelt hierin een cruciale rol, bijvoorbeeld door het organiseren van groepswork [7].

Een recent gepubliceerde didactiek met als hoofddoel het stimuleren van de denkactiviteit van de leerling is "Building Thinking Classrooms" van Peter Liljedahl [12], kan een oplossing zijn. Binnen deze didactiek staat het coöperatief probleemoplossen centraal, maar is het tegelijkertijd ook een middel om juist het probleemoplossen te onderwijzen [13]. Het creëren van een "Thinking Classroom" is gebaseerd op veertien praktisch beschreven principes die binnen het wiskundeonderwijs geïmplementeerd kunnen om "zelfdenkende klassen" te creëren, waarbij het samenwerken centraal staat. Hiervoor kunnen de principes in vier opeenvolgende fasen worden ingevoerd in de lespraktijk [13].

Om meer inzicht te verkrijgen in de effectiviteit van de "Thinking Classrooms" voor het onderwijs in probleemoplossen in de praktijk worden deze principes geïmplementeerd in een specifieke lespraktijk. De specifieke lespraktijk betreft opzichzelfstaande lessen die zijn gegeven door een wiskunde docent op een school in het voortgezet onderwijs. Hierbij zal er een samenwerking plaats vinden tussen Anna Dolron, de uitvoerder van dit onderzoek, en Sanne Schaap, docent binnen de lessen. In de lessen waarin dit onderzoek is uitgevoerd wordt het algemeen wiskundig probleemoplossen onderwezen aan een gemengde groep havo- en vwo-leerlingen uit de bovenbouw. De deelnemende leerlingen kiezen vrijwillig voor deze lessen, als aanvulling op de reguliere wiskundelessen. Hierdoor is het niet noodzakelijk dat de onderwerpen van de problemen direct verband houden met de onderwerpen uit het

wiskundecurriculum. Het is echter wel noodzakelijk dat voor de gebruikte problemen enkel wiskundige basiskennis vereist is, zodat de lessen toegankelijk zijn voor leerlingen uit verschillende klassen. Aangezien de lessen niet in het teken staan van problemen in een specifiek wiskundig domein, zijn de leerdoelen van deze lessen zijn voornamelijk gerelateerd aan het ontwikkelen van metacognitieve vaardigheden en een geschikte wiskundige houding. Dit zijn namelijk de meer universele bekwaamheden voor het probleemoplossen die Schoenfeld benoemd.

In dit onderzoek ligt de focus op het effectief implementeren van twee van deze principes in een specifieke lespraktijk. Het gaat hierbij om het individueel maken van aantekeningen, het zogeheten "note-taking" [12], en het consolideren van een les.

Voor het maken van aantekeningen geeft Liljedahl voorbeelden van hoe je leerlingen door middel van de zogeheten "graphic organizers" op een betekenisvolle manier aantekeningen kan laten maken [12]. Deze "graphic organizers" kunnen worden gezien als werkbladen die de leerlingen richting geven bij het maken van aantekeningen. Dit onderzoek richt zich daarom op het ontwerpen en inzetten van een dergelijk werkblad dat van betekenis is in de specifieke lespraktijk voor het onderwijzen van het algemeen wiskundig probleemoplossen. De functie van het werkblad zou moeten zijn dat dat het de leerlingen ondersteund bij het ontwikkelen van hun niveau in het probleemoplossen. Op deze manier kan binnen het coöperatief leren in "Thinking Classrooms" ook de individuele leeropbrengst worden gestimuleerd.

Daarnaast richt dit onderzoek zich op de effectiviteit van het consolideren van een les. Volgens Liljedahl zou dit gedaan moeten worden met een docentgestuurd klassengesprek gebaseerd op het werk van de leerlingen, de zogeheten "gallery-walk" [12]. Hierdoor zouden de leerlingen gestimuleerd worden om mee te denken [12]. Toch lijkt het in de praktijk lastig te zijn voor de docent om te er voor te zorgen dat ook de leerlingen die geen verbale bijdrage leveren aan de bespreking daadwerkelijk meedenken. Het verschil tussen enkel luisteren en meedenken kan immers niet altijd visueel worden opgemerkt. Daarnaast wordt er door te consolideren gereflecteerd op het proces van het probleemoplossen, wat onder de vereiste metacognitieve vaardigheden valt. Het kan daarom een verrijking zijn voor het consolideren van een les over het probleemoplossen om te garanderen dat iedere leerling hierbij een actieve bijdrage levert. In dit onderzoek wordt er daarom gezocht naar een geschikte methode om in de praktijk van alle leerlingen reflecties te stimuleren die kunnen bijdragen aan de benodigde metacognitieve vaardigheid voor het probleemoplossen. Voor een van de onderzochte methoden is een vragenkaart ontworpen voor het stimuleren van betekenisvolle reflecties van leerlingen. Daarmee zal dit onderzoek inzicht geven in kenmerken van reflecties die voor leerlingen zinvol zijn.

Om te achterhalen op welke manier het maken van aantekeningen, in de vorm van individuele werkbladen, en het stimuleren van reflecties van leerlingen mogelijk kan bijdragen aan een verhoogde leeropbrengst wat betreft het probleemoplossen in "Thinking Classrooms", is de volgende hoofdvraag opgesteld.

Welke leerlingactiviteiten binnen de principes "note-taking" en het "consolideren" in een "Thinking Classroom", ontwikkeld door Peter Liljedahl, dragen bij aan een verhoogde leeropbrengst met betrekking tot het oplossen van algemene wiskundige problemen door leerlingen een gemengde havo/vwo bovenbouwklas?

Om deze hoofdvraag te beantwoorden is een onderzoek verricht in zes lessen binnen de lespraktijk. Dit is gedaan door middel van "Design-Based research" [1]. Gebaseerd op de kwalitatieve dataverzameling tijdens het doorlopen van verschillende cycli "hypothetische leertrajecten", worden patronen in het leergedrag van de leerlingen geïdentificeerd [1]. Deze patronen geven inzicht in de bijdrage van de geïmplementeerde leeractiviteiten aan de daadwerkelijke leeropbrengst van de leerlingen in de lespraktijk [1]. Daarmee kan dit onderzoek bijdragen aan het opstellen van algemene theorieën over de effectiviteit van "Thinking Classrooms" voor het onderwijs in probleemoplossen.

In het volgende hoofdstuk van deze scriptie zal de documentatie van het onderzoeksverloop nader worden toegelicht. Ook zullen hierin de vier opgestelde deelvragen voor het beantwoorden van de hoofdvraag worden beschreven. Vervolgens zal het derde hoofdstuk de relevante literatuur uiteenzetten. Daarna wordt in het vierde hoofdstuk de onderzoeksmethodologie gespecificeerd. In het vijfde hoofdstuk worden de relevante resultaten per deelvraag gepresenteerd. Afsluitend aan elke paragraaf binnen dit hoofdstuk worden de geïdentificeerde patronen beschreven voor het beantwoorden van de

desbetreffende deelvraag. Tot slot worden er in hoofdstuk 6 de conclusies getrokken naar aanleiding van de opgestelde onderzoeksvragen en zal in hoofdstuk 7 de discussie volgen.

2

Onderzoeksverloop

Zoals eerder vermeld in de inleiding van deze scriptie zal dit onderzoek worden uitgevoerd door middel van "Design-Based Research", afgekort als DBR, [1]. In dit type onderzoek zullen er verschillende opeenvolgende onderzoeksfasen zich herhalen. Het gaat hierbij om het voorbereiden en ontwerpen, het onderwijs experiment en de retrospectieve analyse [1]. Daarnaast kan er tijdens het onderwijs experiment worden afgeweken van de voorbereiding wanneer er gedurende het experiment daar aanleiding voor is [1]. Hierdoor is het verloop van een onderwijs experiment niet altijd volledig te voorspellen.

Als gevolg hiervan zijn analyses van theoretische inzichten, bedachte methoden voor de implementatie van die inzichten, bijbehorende hypothesen, het praktische onderwijs experiment in de praktijk en evaluaties met elkaar verweven. Deze activiteiten vormen de basis voor het ontwikkelen van een nieuwe inzichten in de onderwijs praktijk die vervolgens getest kunnen worden. Uit een evaluatie van een les kan bijvoorbeeld een mogelijke verbetering volgen voor een volgende les, die vervolgens geïmplementeerd kan worden. In dit onderzoek is er begonnen met het oplossen van geconstateerde problemen in de les praktijk, waarna verschillende praktijk iteraties nieuwe vragen oproepen die vervolgens zijn onderzocht. De opgedane inzichten bij dit proces vormen de basis voor het beantwoorden van de hoofd- en deelvragen van dit onderzoek. Echter zijn deze inzichten door de iteratieve en soms onvoorspelbare aard van dit type onderzoek, niet geheel achtereenvolgend opgedaan.

Om het onderzoeksverloop te verduidelijken bevindt zich in dit hoofdstuk een beschrijving van het startpunt van dit onderzoek, namelijk de praktijksituatie. Naar aanleiding van de geconstateerde praktische problemen zullen vervolgens de deelvragen van dit onderzoek worden gespecificeerd in dit hoofdstuk. Daarna wordt er een algemene beschrijving gegeven van het verloop van DBR in dit onderzoek en hoe dit gedocumenteerd wordt in deze scriptie. Daarbij zal er een overzicht worden gegeven bij welke dataverzamelmethode binnen een deelvraag relevant zijn bevonden voor een bepaalde deelvraag.

2.1. De praktijksituatie

In deze paragraaf zal eerst een beschrijving van de les praktijk waarbinnen dit onderzoek zal plaatsvinden worden beschreven. Vervolgens zal de bijbehorende onderzoeksomvang en beperkingen worden beschreven. Daarna worden de praktische problemen binnen de omschreven les praktijk kort toegelicht.

De onderzoeksomvang in de praktijksituatie

Het praktische deel van dit onderzoek zal plaatsvinden tijdens een wekelijks keuzewerktijd uur in een gemengde klas van havo en vwo-bovenbouwleerlingen. Eén lesuur is gelijk aan één klokuur. Hierbij maakt het niet of de leerlingen wiskunde A, B, C, D of rekenen in hun vakkenpakket hebben zitten. De deelnemende leerlingen kiezen dus zelf voor deze lessen in probleemoplossen. Voorafgaand aan de lessen wordt dit bij de leerlingen geverifieerd, zodat er een klas met intrinsiek gemotiveerde leerlingen over blijft. Op deze manier worden algemene belemmeringen in de les praktijk, zoals gebrek aan motivatie of interesse, beperkt, waardoor er een geschikte testomgeving wordt gecreëerd. Na een periode

van ongeveer zes lessen kiezen de leerlingen opnieuw een invulling voor hun keuzewerktijd. De groep leerlingen is tijdens de lessen probleemoplossen blijft daarom niet altijd hetzelfde. Verder zal er geen huiswerk worden gegeven in deze lessen.

Tijdens deze lessen zal "Building Thinking Classrooms", afgekort als BTC, worden ingezet [12]. Dit zal in het theoretisch kader verder worden toegelicht, zie hoofdstuk 3. In elke les staat telkens een ander wiskundig probleem centraal. Deze problemen mogen niet direct verband houden met het wiskundecurriculum van de bovenbouw, maar moeten op te lossen zijn met algemene rekenkundige en wiskundige vaardigheden. Dit heeft namelijk als voordeel dat er maar beperkte voorkennis nodig waardoor de lessen toegankelijk voor iedere leerling in de gemengde klas.

De lessen zullen door een vaste docent gegeven worden. Daarnaast is de onderzoeker van dit onderzoek aanwezig voor het doen van de benodigde observaties en het stellen van vragen aan de leerlingen. Voorafgaand aan de lessen zullen de lesplannen in samenwerking met de onderzoeker van dit onderzoek worden opgesteld.

Dit onderzoek zal zich daarom beperken tot de praktijksituatie. Dit onderzoek zal zich daarmee richten op gemotiveerde leerlingen in zijn algemeen en niet op het specificeren van de didactiek per niveau of jaarlaag. In de data-analyse zal geen rekening gehouden worden met het individuele leerproces binnen meerdere lessen, aangezien dit onderzoek zich zal richten op het verbeteren van de leerresultaten van een opzichzelfstaande les. Het is namelijk mogelijk dat de leerlingen niet alle lessen aanwezig zijn. Wel zal het leerproces van iedere leerling binnen één les in kaart worden gebracht. Verder moeten de gespecificeerde lesplannen, ontworpen lesactiviteiten en lesmaterialen in dit onderzoek algemeen inzetbaar zijn, aangezien er elke les een ander soort wiskundig probleem behandeld zal worden. Dit maakt de resultaten dan ook algemeen en breed inzetbaar. Daarbij richt dit onderzoek zich niet op het ontwerpen van problemen, maar worden wel de leereffecten naar aanleiding van deze problemen in kaart gebracht.

Geconstateerde praktijkproblemen

Eerder zijn er tijdens de lessen in de eerder beschreven praktijksituatie voorafgaand aan dit onderzoek een aantal beperkingen opgemerkt voor het bereiken van leeropbrengst bij iedere leerling ten aanzien van het probleemoplossen. Zo is er opgemerkt dat het lastig is om te constateren en handhaven of de denkactiviteit bij iedere leerling voldoende is gestimuleerd en dat de individuele bijdrage en betrokkenheid binnen het groepsproces voldoende is. Daarnaast gaf de docent aan er tegen aan te lopen dat tijdens de nabespreking hij zelf voornamelijk aan het woord is en dat leerlingen er weinig aandacht voor hebben als andere leerlingen hen iets klassikaal uitleggen. Ook blijkt uit de eerste observaties voorafgaand aan dit onderzoek dat de aandacht van de leerlingen tijdens de nabespreking van de les lijkt te verminderen, terwijl hier nu juist de belangrijke inzichten rondom het probleemoplossen aan de orde komen. Bovendien is er geconstateerd dat er bij meerdere groepen de activiteit op een bepaald moment in de les tijdelijk verminderd is.

2.2. Deelvragen voor dit onderzoek

Tijdens het doorlopen van de verschillende iteraties zijn er verschillende deelvragen in acht genomen. Met beantwoording van deze deelvragen kan de hoofdvraag van dit onderzoek worden beantwoord. Hierbij zal dit onderzoek zich richten op het maken van aantekeningen door leerlingen, aan de hand van het beantwoorden van de volgende deelvraag. *"Welke opdrachten op een individueel werkblad zijn geschikt als implementatie van het principe van "note-taking" van Liljedahl voor het bereiken van een verhoogde leeropbrengst?"*. Voor het beantwoorden van deze deelvraag zal er onderzoek gedaan worden naar de inhoud van geschikte opdrachten, een duidelijke formulering hiervan, een passende vormgeving van het werkblad en de inhoud van een bijbehorend voorbeeldwerkblad voor de leerlingen.

Vervolgens zal de bijbehorende leeropbrengst in de praktijk worden geïdentificeerd. Daarnaast zal dit onderzoek zich richten op het consolideren van een les, waarbij de focus ligt op het stimuleren van geschikte leerlingreflecties. Om te achterhalen wat deze reflecties zijn is de volgende deelvraag opgesteld. *"Wat zijn kenmerken van reflecties van leerlingen die bijdragen aan het vergroten van het probleemoplossend vermogen?"*. Voor het beantwoorden van deze deelvraag zal onder andere onderzoek gedaan worden naar het ontwerpen van een vragenkaart voor leerlingen die hen stimuleert om betekenisvol te reflecteren. Hierbij gaat het om het achterhalen welke vragen voor de leerlingen

relevant zijn en hoe deze op een logische manier kunnen worden gepresenteerd. Tegelijkertijd wordt er aandacht besteed aan de deelvraag: *"Welke aanvullingen of alternatieven binnen het principe "consolideren" van Liljedahl kunnen leerlingen stimuleren actief te reflecteren voor het bereiken van een verhoogde leeropbrengst?"*. Voor het beantwoorden van deze deelvraag zullen de leereffecten van verschillende leeractiviteiten worden vergeleken. Tot slot zal de beantwoording van de laatste deelvraag advies geven gebaseerd op de algemene ervaringen met de ontworpen lessen en lesmaterialen. Deze deelvraag luidt: *"Wat zijn onderwijsaspecten die binnen een les van belang zijn voor het behouden van de positief bevonden leereffecten gedurende dit onderzoek?"*. Hierbij zal het voornamelijk gaan over aspecten wat betreft de planning en keuze van verschillende lesactiviteiten en de ervaringen van de leerlingen omtrent de lesinhoud.

2.3. Algemene beschrijving uitvoering DBR

Voor het beantwoorden van de onderzoeksvragen moet eerst geconstateerd wat de eigenschappen van een goede probleemoplosser zijn. Daarna moet er onderzocht worden hoe dit onderwezen kan worden. Op basis daarvan kan worden geïdentificeerd in hoeverre hier in "Thinking Classrooms" aandacht aan wordt besteed. Daaropvolgend kunnen de mogelijkheden binnen de huidige lespraktijk worden vastgesteld. Hierbij gaat het om het specificeren van relevante leerdoelen en het aandragen van verbeteringsmogelijkheden omtrent het behalen van deze leerdoelen. Deze zaken zullen in het theoretisch kader worden toegelicht, zie hoofdstuk 3. Daarna zal er praktische invulling aan deze verbeteringsmogelijkheden moeten worden gegeven door middel van ontworpen lesplannen, lesactiviteiten en lesmaterialen. Deze zijn iteratief opgesteld en geïmplementeerd in de lespraktijk.

In totaal zijn er zes iteraties met implementaties in de lespraktijk doorlopen. De iteraties bestaan uit een volledige les binnen de lespraktijk. Echter beslaan de uitgevoerde interventies per iteratie niet het gehele lesplan van de les. Er worden wel enkele momenten binnen het lesplan aangepast ten opzichte van een vorige iteratie.

De eerste twee iteraties staan in het teken van het betekenis geven aan het individueel aantekeningen maken voor het onderwijzen van probleemoplossen. Hierbij is er gezocht naar een praktische uitvoering van "example" en "procedures" uit de "graphic organizer" van Liljedahl. Het werkblad zal voornamelijk bestaan uit twee opgaven. In de eerste opgave wordt er aan de leerlingen gevraagd om de oplossing van het probleem volledig uit te werken. In de tweede opgave wordt gevraagd om op het probleemoplossen te reflecteren. Tegelijkertijd is het de bedoeling om door middel van het werkblad geleidelijker aandacht te besteden aan de "modes of engagement" voor een goede "flow". Dit maakt niveauverhoging mogelijk [12], en daarmee het verticaal mathematiseren, waardoor het probleemoplossend vermogen wordt gestimuleerd. De genoemde begrippen, principes en de motivatie voor het beoogde leereffect zal in het theoretisch kader worden toegelicht, zie hoofdstuk 3.

In de vier iteraties die daarop volgde, ligt de nadruk op het verbeteren van de leerlingresultaten van op de reflectieve opgave. Dit is gedaan door verschillende leeractiviteiten toe te voegen of te vervangen. Bij iteratie 2.1 is dit gedaan door middel van een onderwijsleergesprek in combinatie met het werkblad. Dit is in iteratie 2.2 herhaald voor meer dataverzameling. Echter zijn de leerlingen tijdens deze iteratie niet toegekomen aan het werken aan het werkblad. Hierdoor ontbreekt deze data tijdens deze iteratie. Toch heeft deze iteratie nuttige data opgeleverd met behulp van andere dataverzamelingsmethoden. Vervolgens is bij iteratie 2.3 naast het werkblad de in dit onderzoek ontworpen vragenkaart ingezet. In deze iteratie is de functie van de tweede vraag op het werkblad meer een methode voor dataverzameling dan dat het een didactisch middel is. Deze opgave is namelijk zo geformuleerd dat de leerlingen enkel de belangrijkste bevindingen naar aanleiding van het werken met de vragenkaart moeten noteren. Tot slot is in de derde iteratie het werken met de vragenkaart anders georganiseerd en is de eerste vraag op het werkblad weggelaten. Zo dient het gebruikte werkblad bij iteratie 2.4 voornamelijk voor de dataverzameling. Gedurende alle iteraties is er geanalyseerd wat betekenisvolle leerlingreflecties zijn en hoe de ontworpen lesmaterialen strategisch kunnen worden ingezet.

2.4. Documentatie uitvoering DBR

Zoals eerder gezegd bestaat DBR per iteratie uit de volgende drie fases: voorbereiden en ontwerpen, het onderwijsexperiment en de retrospectieve analyse. Voor alle iteraties is een deel van de fase

voorbereiden en ontwerpen opgenomen in het theoretisch kader van dit onderzoek, namelijk in subparagrafen 3.4 en 3.5. Het gaat hierbij over het algemene deel van de beschrijving van deze fase. Hieronder vallen de algemene wiskundige leerdoelen van de lessen, relevante voorkennis, de potentiële leereffecten van bepaalde leeractiviteiten en de ontwerpeisen voor het werkblad en de vragenkaart. Deze zaken volgen namelijk uit de theorie en niet uit opgedane inzichten binnen de lespraktijk.

Na de beschrijving van het theoretisch kader kan de onderzoeksopzet per iteratie gedetailleerder beschreven worden dan in de vorige paragraaf is gedaan. Verder volgen in door het iteratieve onderzoeksverloop specifieke hypothesen voor de praktijksituatie op analyses van eerdere iteraties. Binnen deze analyses zijn de hypothesen met de werkelijke leereffecten met elkaar vergeleken en verklaard met theoretische inzichten. Hierdoor behoren deze hypothesen tot het resultaat van dit onderzoek. Ook de werkelijke leereffecten, de evaluaties en verbeteringsmogelijkheden resulteren uit het uitvoeren van de iteraties. Een gedetailleerdere beschrijving van het doorlopen DBR proces kan daarom pas worden gegeven in de resultaten van dit onderzoek, zie paragraaf 5.1. Daarnaast zullen er in dit hoofdstuk de relevante resultaten per deelvraag worden gepresenteerd. Binnen elk van de paragrafen 5.2, 5.3 en 5.4 staat daarbij een deelvraag centraal. Binnen deze paragrafen wordt de relevante data per iteratie gepresenteerd. Hiermee kunnen de secundaire deelvragen worden beantwoord. Vervolgens sluit elke paragraaf af met een overkoepelende analyse, waarbij de resultaten van alle iteraties samen worden genomen voor het identificeren van mogelijke patronen.

Aan de hand van deze resultaten zal er in de conclusie van dit onderzoek antwoord gegeven worden op de vier deelvragen en de hoofdvraag van dit onderzoek, zie hoofdstuk 6. Tot slot zal er in de discussie, zie hoofdstuk 7, discussiepunten worden aangedragen die over dit onderzoek in het geheel gaan. Daarbij worden alle iteraties in acht genomen.

Relevante dataverzamelingsmethoden per deelvraag en iteratie

Voor het beantwoorden van de deelvragen is tijdens alle iteraties op verschillende manieren data verzameld. Door de iteratieve en soms onvoorspelbare aard van dit type onderzoek is niet tijdens elke iteratie data verzameld die voor elke deelvraag relevant is. Daarnaast is niet tijdens elke iteratie op elke manier data verzameld. Tijdens sommige iteraties lag de focus bijvoorbeeld op een andere deelvraag of is er geen data verzameld dat te relateren is aan een bepaalde deelvraag. Daarnaast is het ook voorgekomen dat er door omstandigheden überhaupt geen data is verzameld. In iteratie 2.2 hebben de leerlingen bijvoorbeeld geen individuele werkbladen ingevuld door gebrek aan tijd. In Tabel 2.1 is weergegeven welk type dataverzameling binnen een specifieke iteratie voor een bepaalde deelvraag relevant is. Wanneer dit het geval is, is er een "x" genoteerd. Wanneer dit niet het geval is, is er een "0" genoteerd. Met de letters a, b, c, d, e en f wordt er naar de verschillende dataverzamelingsmethoden verwezen, zie onderaan Tabel 2.1. Dit zijn respectievelijk: het groepswork van de leerlingen op de whiteboards (zie appendix M), het individuele leerlingwerk op de ingeleverde werkbladen (zie appendix N), de algemene aantekeningen per iteratie (zie appendix C), de specifieke observatieaantekeningen zie appendix D, de mini-interviews (zie appendix E) en de korte feedbackvragen (zie appendix F). Deze dataverzamelingsmethoden zijn verder toegelicht in hoofdstuk 4, zie paragraaf 4.2.

Tabel 2.1: Overzicht deelvragen, dataverzamelingsmethoden en iteraties

Deelvraag ↓ Methode →	Iteratie 1.1						Iteratie 1.2						Iteratie 2.1						Iteratie 2.2						Iteratie 2.3						Iteratie 2.4						
	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f	
1	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0	x	0	0	0	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2	0	x	x	0	0	0	0	x	x	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x	x	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
3	0	x	x	0	0	0	0	0	x	x	x	0	0	0	x	x	x	x	x	0	0	0	x	x	0	0	x	x	x	x	x	0	x	x	x	x	x
4	x	x	x	0	0	0	0	x	x	x	x	0	x	x	x	x	x	0	x	x	x	x	0	0	0	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	0	0

	Dataverzamelingsmethode
a	Het groepswork van de leerlingen
b	Het individuele leerlingwerk
c	De algemene aantekeningen
d	De specifieke observatieaantekeningen
e	De mini-interviews
f	De korte feedbackvragen

3

Theoretisch kader

In dit hoofdstuk bevindt zich het theoretisch kader voor het uitvoeren van dit onderzoek. Hierin zal verschillende literatuur worden toegelicht die relevant zijn voor het onderwijzen van wiskundig probleemoplossen. Allereerst wordt er een beschrijving gegeven van wat wiskundige problemen zijn en waar vaardige probleemoplossers aan moeten voldoen in paragraaf 3.1. Daarna zullen in paragraaf 3.2 de inzichten die de literatuur biedt voor het onderwijzen van het probleemoplossen uiteengezet worden. Vervolgens zullen de principes van "Thinking Classrooms" worden toegelicht in paragraaf 3.3. Daarbij zal er geanalyseerd worden op welke manier deze onderwijsomgeving kan bijdragen aan het onderwijzen van probleemoplossen. Aan het eind van dit hoofdstuk zal er beschreven worden hoe deze theoretische inzichten zijn vertaald naar de specifieke lespraktijk. Dit wordt gedaan in paragraaf 3.4 en 3.5. Deze beschrijvingen lichten daarmee voor alle iteraties de doorlopen de eerste fase van DBR, voorbereiden en ontwerpen, toe.

(Aangezien er in de paragrafen 3.4 en 3.5 ook analyses worden gedaan, behoren deze paragrafen niet volledig tot het theoretisch kader. Toch is er voor gekozen deze paragrafen hier te plaatsen, aangezien deze analyses gebaseerd zijn op de theorieën uit dit hoofdstuk)

3.1. Kenmerken van problemen en probleemoplossers

In de literatuur wordt een wiskundig probleem op verschillende manieren gedefinieerd [22]. Van Streun hanteert de volgende, en ook in dit onderzoek gestelde, definitie.

"Een opgave is voor een oplosser een probleem als hij niet onmiddellijk een oplossing(sweg) ziet" [22].

Hierbij is een "opgave" een verzamelnaam voor benamingen als vraagstukken, probleemstellingen, toepassingen [22]. Bij deze definitie voor een probleem is de benoeming van een opgave als probleem niet enkel afhankelijk van de aard van de opgave. Het is daarom van belang om op te merken dat persoons- en tijdsgebonden is [22]. Zo kan eenzelfde opgave voor een leerling een probleem zijn, terwijl een expert de oplossing direct ziet en het voor deze persoon dus geen probleem is. Een probleem kenmerkt zich daarom door de noodzaak van het uitvoeren van een probleemanalyse en het opstellen van een oplossingsmethode tijdens het proces van probleemoplossen.

Voor het oplossen van een probleem zijn de stappen die Polya aandraagt voor het oplossen van problemen [15] volgens Barton in eerste instantie erg voor de hand liggend [2]. Kort omschreven zijn dit: "begrijp waar het probleem over gaat", "bedenk een plan", "voer het plan uit" en "reflecteer op de verkregen oplossing" [15].

Dit kan voor een ervaren probleemoplosser, net zoals Schoenfeld zegt te vinden [17], erg herkenbaar zijn als een stappenplan dat inderdaad wordt gebruikt tijdens het probleemoplossen. Toch is het simpelweg aanleren van dit stappenplan niet voldoende voor een beginnende probleemoplosser [17]. Het is dan ook niet verwonderlijk dat leerlingen er moeite mee hebben om dit stappenplan bij een probleem uit te voeren [2]. Er is namelijk meer nodig dan enkel routinematig stappen doorwerken, want bij een probleem liggen die stappen niet voor de hand en zijn deze niet logisch opeenvolgend. Een

ervaren probleemoplosser heeft door wiskundige ervaring in weze een eigen stappenplan ontwikkeld dat zich automatisch aanpast aan het probleem en de situatie binnen het oplosproces. Wanneer je het stappenplan van Polya aan beginnende probleemoplossers geeft, hebben zij deze ontwikkeling niet doorgemaakt en missen daarom een bepaald inzicht. Zij missen in dat geval de vaardigheid "wiskundig denken" [17]. Wat het benodigde wiskundig denken gerelateerd aan het probleemoplossen inhoudt berust volgens Schoenfeld op vier categorieën: "resources", "heuristics", "control" en "belief-systems" [17]. In dit verslag zal hiernaar verwezen worden met de termen: wiskundige kennis, heuristieken, metacognitie en overtuigingen. Een succesvolle probleemoplosser beheerst z'n zekere zin al deze categorieën. Anders gezegd, een succesvolle probleemoplosser schiet niet tekort op vaardigheden die verband houden met deze categorieën. Aan de hand van categorieën is dan ook het succes of falen in het probleemoplosproces te verklaren [17].

Wiskundige kennis

De eerste categorie die Schoenfeld noemt, wiskundige kennis. Het gaat hierbij om domeinspecifieke kennis waarover de probleemoplosser beschikt [17]. Hieronder valt onder andere feitelijke kennis van begrippen, wetten, regels en algoritmen [21]. Ook is het ook van belang de betekenis van deze feitelijke kennis te begrijpen [21]. Daarnaast moet een probleemoplosser voor het beheersen van de categorie wiskundige kennis in staat is te relateren aan het probleem en deze hiervoor kan inzetten [17]. Zo is enkel de beschikking over de relevante kennis niet voldoende, maar het is ook van belang dat dit georganiseerd is opgeslagen in het geheugen en hier daadwerkelijk op kan komen [17]. Specifiek gaat het bij deze kennis over intuïtie en informele kennis rondom het domein, feiten, algoritmische en niet-algoritmische procedures en relevante competenties [17]. Verder is het van belang dat de wiskundige kennis accuraat is om het probleem correct te kunnen oplossen. Toch wil dat niet altijd zeggen dat een probleemoplosser volledig onbekwaam is in het probleemoplossen [17]. Wanneer een oplossing gebaseerd is op een misconceptie, wil dat bijvoorbeeld zeggen dat deze probleemoplosser procedurele kennis niet beheerst, maar mogelijk wel consequent kan doorredeneren en zo een oplossing kan vinden [17]. Zo kan er op een correcte manier toch een ongeldige oplossing worden gevonden.

Heuristieken

Schoenfeld noemt heuristieken als tweede categorie die bepalend is voor het probleemoplossend vermogen. Heuristieken zijn algemene vuistregels die bijdragen aan het effectief oplossen van problemen of vooruitgang te boeken in het oplosproces bij onbekende of lastige problemen [17]. Het toepassen van heuristieken is dan ook noodzakelijk bij het oplossen van problemen volgens de definitie van een probleem. Voorbeelden van heuristieken zijn "achterwaarts werken", "vereenvoudig het probleem", "bekijk een speciaal geval" en "maak een schets". Het stappenplan van Polya is voornamelijk een toen ter tijd vernieuwende en gestructureerde weergave van heuristische strategieën [17]. Zo draagt Polya in zijn tweede stap technieken aan als "zoek een patroon", "raad en controleer", "elimineer mogelijkheden", "gebruik symmetrie", "los een vergelijking op", "werk achterstevoren", "los een simpeler probleem op" en "wees ingenieus" [15]. Volgens Barton vallen deze onder "generieke strategieën" [2]. Het gaat hierbij om technieken die zorgen voor een beter begrip van het probleem en die mogelijk leiden tot de oplossing ervan [17], maar geen garantie tot succes geven. Deze technieken bevatten mogelijk vele onderliggende strategieën en zijn op zichzelf te algemeen beschreven om te kunnen gebruiken als specifieke hulp bij het oplossen [17]. Dit maakt het dan ook moeilijk om deze te onderwijzen voor het beheersen van de categorie heuristieken. Naast generieke strategieën bestaan er onderwerpspecifieke strategieën [2]. Hieronder vallen bijvoorbeeld de heuristieken "teken hulplijnen" of "introduceer een variabele". Verder is het van belang voor het correct uitvoeren van de strategieën om goede besluitvorming te hanteren en over verschillende onderliggende vaardigheden te beschikken [17]. Tot slot heeft een probleemoplosser vrij weinig aan heuristische kennis op zichzelf, zonder domeinspecifieke wiskundige kennis [17].

Metacognitie

Metacognitie wordt door Schoenfeld als derde categorie genoemd. Volgens Barton is dit een derde soort van probleemoplossende strategieën [2]. Hierbij gaat het niet zo zeer om een strategie voor het

oplossen van de opgave zelf, maar om het vermogen van de probleemoplosser om het oplosproces te managen en bij te sturen wanneer dat nodig is. Het op een geschikte manier uitvoeren van metacognitieve vaardigheden tijdens het probleemoplossen is bepalend voor het hebben van succes [17]. Expert probleemoplossers houden zich bijvoorbeeld regelmatig bezig met het reflecteren op het oplossingsproces, stellen zichzelf planning- en monitoringsvragen, overwegen alternatieve methodes en wisselen mogelijk van aanpak [2]. Op deze manier hebben zij het meest aan hun wiskundige kennis en kunnen efficiënt te werk gaan [17]. Bij het gebrek aan deze vaardigheden houden probleemoplossers zich vaak vast aan één aanpak, hoewel dit mogelijk slechts beperkte of te trage voortgang binnen het oplossen van het probleem oplevert [2]. Het uitblijven van succes tijdens het probleemoplossen kan daarom ook voorkomen terwijl de benodigde wiskundige kennisbasis van een probleemoplosser ruim voldoende is [17]. Zo kan het voorkomen dat de gekozen methode om een probleem algebraïsch op te lossen correct is, maar de uitvoering ervan te complex en tijdsintensief om binnen de gekregen tijd tot een succesvolle oplossing te komen. Een meetkundige benadering van het probleem kan in dit geval mogelijk tot meer succes leiden. Om daartoe te besluiten moet de probleemoplosser zich dit wel realiseren en een goede afweging tussen de verschillende benaderingen maken. Goede besluitvorming is daarom essentieel voor het succesvol oplossen van problemen.

Overtuigingen

De laatste categorie die Schoenfeld noemt is overtuigingen. Naar deze categorie wordt ook wel verwezen met de benaming "houding". Hierbij gaat het om het wiskundige wereldbeeld van de probleemoplosser, dat onder andere bepalend is voor hoe een probleem wordt benaderd [17]. Deze overtuigingen kunnen gaan over zichzelf, de omgeving, het onderwerp en wiskunde op zichzelf [17]. Ze bepalen de context waarin wiskundige kennis, heuristieken en metacognitie functioneren [17]. Wanneer een probleemoplosser over de juiste voorkennis beschikt kan het bijvoorbeeld voorkomen dat deze niet wordt toegepast doordat context hier niet overtuigend genoeg voor is. Dit kan bijvoorbeeld voorkomen wanneer een probleem uit het leerboek afwijkt van eenzelfde probleem uit de praktijk of als de vraagstelling of het perspectief ervan afwijkt van het gebruikelijke. In dat geval gelooft de probleemoplosser er niet in dat de benodigde kennis relevant is voor het oplossen van het probleem [17]. Een ander inzicht van Schoenfeld dat hieraan gerelateerd is er een die veel voorkomt in de reguliere lespraktijk. Leerlingen zijn vaak wel in staat een opgebouwde opgaven met behulp van deelvragen op te lossen, maar wanneer enkel de slotvraag wordt gesteld, zijn leerlingen niet in staat deze tussenstappen zelfstandig te bedenken. Dit kan betekenen dat de leerlingen de wiskundige kennis hiervoor nog niet voldoende begrijpen, maar volgens Schoenfeld kan een andere verklaring ook relevant zijn. Namelijk (vrij vertaald), "Studenten zijn naïeve empiristen die de wiskundige hulpmiddelen die ze tot hun beschikking hebben niet gebruiken, omdat het niet bij hen opkomt dat dergelijke hulpmiddelen nuttig zouden kunnen zijn" [17]. Met "naïeve empiristen" wordt bedoeld dat zij in mindere mate aandacht besteden aan theoretische kennis en voornamelijk de aandacht hebben voor wat zij daadwerkelijk voor zich zien. Deze verklaring van Schoenfeld valt dan binnen de categorie overtuigingen in plaats van wiskundige kennis. Van Streun zegt hierover dat wanneer een opgave wordt opgedeeld in deelvragen de noodzaak voor een goede probleemanalyse en het toepassen van heuristieken niet meer voordoet, omdat het resultaat van benodigde denkwerk als is gepresenteerd in de deelvragen [21]. Op deze manier wordt het vastlopen in het oplossingsproces vermeden [21], wat dan vervolgens wel aan de orde komt bij het stellen van enkel de slotvraag. Deze verklaring van Van Streun is dan weer meer gericht op de categorieën wiskundige kennis (het uitvoeren van een probleemanalyse en het selecteren van geschikte wiskundige kennis) en heuristieken van Schoenfeld.

Om meer inzicht te creëren bij typische overtuigingen die leerlingen kunnen hebben, zijn de volgende drie richtinggevend: "formele wiskunde heeft weinig of niets te doen met het echt denken of probleemoplossen", "wiskundige problemen zijn altijd op te lossen in minder dan tien minuten" en "alleen geniën zijn in staat om wiskunde te ontdekken of te creëren" [17]. Deze overtuigingen hebben gevolgen die het succesvol probleemoplossen in de weg staan [17]. De eerste overtuiging heeft namelijk als gevolg dat wanneer voor het oplossen van een probleem het benodigd is een ontdekking te doen, formele wiskunde niet zomaar wordt aangehaald. De tweede overtuiging heeft als gevolg dat leerlingen geneigd zijn op te geven wanneer ze het probleem niet binnen die standaard aangenomen tijd kunnen oplossen [17]. De derde overtuiging heeft twee gevolgen. Ten eerste, wanneer een leerling essentiële kennis is vergeten, zal dit leiden tot falen, want je zult het zelf niet kunnen bedenken

[17]. Ten tweede, leerlingen zullen gemakkelijk algoritmische methoden als kennis aannemen en niet gemotiveerd zijn deze te begrijpen, aangezien ze dat toch niet denken te kunnen [17]. Bij dit laatste gevolg wordt er dus tegelijkertijd tekort geschoten op het begrijpen van kennis, wat binnen de eerste categorie van Schoenfeld valt.

3.2. Het onderwijzen van probleemoplossen

In de vorige paragraaf is uiteengezet aan welke verschillende kenmerken een succesvolle probleemoplosser moet voldoen. In deze paragraaf zal er op worden ingegaan hoe experts in de wiskunde didactiek vinden dat onderwijs in probleemoplossen moet worden vormgegeven en wat de rol van de docent hierin is. Deze paragraaf zal worden afgesloten met hoe dit zich verhoudt tot het ontwikkelen van de genoemde kenmerken voor succesvolle probleemoplossers.

3.2.1. De visie van experts

Zoals in de paragraaf 3.1 is toegelicht is er geen standaard stappenplan voor het oplossen van problemen, zoals dat van Polya in [15]. Het volstaat dan ook niet om dit te onderwijzen voor het onderwijzen van probleemoplossen. Toch herkennen ervaren probleemoplossers in dergelijke stappenplannen hun eigen oplosprocessen. Het is dan ook voor de hand liggend leerlingen ervaring op te laten doen met het oplossen van problemen, zodat ze vanzelf een betekenisvolle strategie zullen ontwikkelen [2]. Alleen zal enkel het opdoen van ervaring niet werken. Dit is in feite een paradox [6]. Door de definiëring van een probleem weet je per definitie niet hoe je het moet oplossen. Verder heb je ook niet direct iets aan het oplossen van een ander probleem, aangezien je anders wel zou weten hoe je het moet oplossen [6]. In dat geval zou het ook geen probleem meer zijn. Daarnaast is er ook onderzoek gedaan naar uitgebreide en onderwerpspecifieke adviesschema's en handelingsvoorschriften [22]. De bezwaren hierbij waren dat er door het onderwerpspecifieke karakter van de adviesschema's het ontwikkelen en het gebruik er van niet efficiënt bleek. Bovendien bestaat er het gevaar dat leerlingen dergelijke materialen uit hun hoofd gaan leren, daardoor zelf niet meer nadenken en dus ook niet leren problemen op te lossen. Hoe moet het dan wel?

In [21] licht Van Streun drie stellingen van hem toe met betrekking tot het onderwijs in probleemoplossen. De eerste stelling is "Onderwijs in probleemoplossingsmethoden heeft alleen zin als leerlingen aan de hand van de voorgelegde probleemsituaties kunnen ervaren dat die methoden hen helpen bij het overwinnen van blokkades in het oplossingsproces" [21]. Een van de grote problemen bij probleemoplossen is het vastlopen tijdens het proces. Volgens [21] kan daarom het uitlokken en benutten van blokkades in oplossingsprocessen het onderwijs in heuristische methoden te motiveren, waardoor het onderwijs in vakinhoud en oplossingsmethoden beter wordt verdeeld. Hierbij is het van belang dat er voldoende aandacht wordt besteed aan de probleemanalyse aan het begin van het oplosproces en het toepassen van heuristische strategieën om verder te komen. Dit moet beide noodzakelijk zijn, anders is een opgave ook geen probleem en maakt dat het leren probleemoplossen niet urgent. Enkel wanneer deze noodzaak wel aan de orde is kan het probleemoplossend vermogen worden ontwikkeld.

De tweede stelling is "Bij het β -onderwijs in het probleemoplossen is het geïntegreerd ontwikkelen van een brede oriënteringsbasis voor de nieuwe begrippen en de oplossingsmethoden aan de hand van instapsituaties van cruciaal belang" [21]. Aan deze stelling ligt ten grondslag dat in het reguliere wiskundeonderwijs voornamelijk de nadruk ligt op ontwikkeling van procedurele kennis en vaardigheden [21]. Zoals eerder omschreven in de vorige paragraaf 3.1 is herkenning waar het om gaat binnen het probleemoplossen ook van belang. Hierin wordt dus tekort geschoten. Bij het behandelen van een nieuwe onderwerp moeten er daarom breed op georiënteerd worden en moeten leerlingen worden geholpen met herkennen van onderliggende abstracties.

De derde stelling is "De innovatie van het onderwijs in probleemoplossen staat of valt met het ontwikkelen van een optimale fasering in de leerstof en goed hanteerbare werkvormen, waarbij veel tijd wordt ingeruimd voor zelfstandig werken" [21]. Hierbij wordt er toegelicht dat leerlingen vaak moeite hebben tot het komen van de vereiste abstractie en dat een klassendiscussie met reflectie en explicitering op de probleemsituaties hierbij kan helpen. Wel is dit een lastige en vermoeiende werkvorm en hangt de kwaliteit van het onderwijs af van de kwaliteit van de interactie. Daarom is het beter leerlingen veel zelfstandig te laten werken en op gestructureerde momenten klassikaal te reflecteren om daarmee de mathematische didactische kernen te identificeren en overzicht op het wiskundige geheel te versterken.

De visie van Barton op onderwijs in probleemoplossen komt redelijk overeen met de tweede stellingen van Van Streun. Wanneer domeinspecifieke kennis niet voldoende is en niet georganiseerd is opgeslagen, lopen leerlingen vast en lukt het leerlingen niet de benodigde kennis in te zetten voor een

probleem [2]. Het ontwikkelen van een sterke en structurele kennisbasis is dus essentieel voor het probleemoplossen en daar moet dan ook sterk de nadruk op liggen. Dit is daarom de eerste stap in het drietrapsproces dat Barton specifiek aandraagt voor het oplossen van problemen [2]. Binnen deze eerste stap komt expliciete instructie, voorbeelden en tegenvoorbeelden en formatief evalueren aan de orde [2]. Hiermee moet de kennisbasis stapsgewijs worden opgebouwd en worden geautomatiseerd [2]. Voor het ontwikkelen van probleemoplossend vermogen is het hierbij van belang dat leerlingen gedurende het hele proces worden aangezet tot nadenken, wat hen helpt bij het herkennen van de diepe structuur van problemen [2]. Na het automatiseren van de kennisbasis kunnen leerlingen gaan werken met verschillende soortgelijke problemen de tweede stap in het drietrapsproces [2]. In de laatste stap oefenen de leerlingen gespreid met geïsoleerde problemen [2].

Door het drietrapsproces wordt het onderwijs in probleemoplossen stapsgewijs opgebouwd waardoor het op een efficiëntere manier geleerd wordt dan wanneer problemen direct of te vroeg worden geïntroduceerd [2]. Hierdoor voorkomt het cognitieve overbelasting, iets wat volgens Barton een grote belemmering is van het onderwijs in probleemoplossen [2]. Dit komt voor als het werkgeheugen overbelast raakt met domeinspecifieke kennis wanneer dit nog niet geautomatiseerd in het langetermijngeheugen ligt. Er is dan geen cognitieve capaciteit beschikbaar voor zaken als het dieper nadenken over het probleem, het herkennen van de benodigde kennis en het afwegen van strategieën. Dit komt ook voor wanneer een leerling een eigen antwoord moet uitleggen aan een ander, want dan wordt de cognitieve capaciteit volledig in belang genomen door de interactie met de gesprekspartner en er onvoldoende capaciteit over is voor de inhoud [2]. Daarentegen kan het "uitleggen-aan-jezelf" dit voorkomen. Hoewel dit ook de cognitieve belasting verhoogt ten opzichte van bijvoorbeeld het uitvoeren van een oplossingsaanpak, kan het uitleggen van de oplossing wel een positief effect hebben op het probleemoplossend vermogen [2]. Dit komt doordat je door het uitleggen automatisch gaat reflecteren op de redenering achter elke oplossingsstap [2]. Hierdoor leidt het tot een dieper begrip [2]. Daarnaast kan "het antwoord van iemand anders uitleggen" van positieve invloed zijn op het leren probleemoplossen [2]. Door de oplossing van iemand anders uit te leggen kunnen leerlingen namelijk meer leren dan enkel hun eigen oplossing uit te leggen [2].

Tot slot geven Bos en Drijvers in [3] nog de volgende praktische aanbevelingen gegeven voor in de les: "Kies 'low floor-high ceiling' opgaven", "kies opgaven dicht bij het curriculum", "laat leerlingen zelf een opgave bedenken", "begin met de eindvraag", "keer vraag en antwoord om" en "bespreek de cyclus met leerlingen".

3.2.2. De rol van de docent

Eerder in de vorige subparagraaf 3.2.1 is al naar voren gekomen dat de uitvoerende taak van de docent belangrijk is voor de kwaliteit van het onderwijs, aangezien de docent voor veel van de genoemde zaken verantwoordelijk is. In deze subparagraaf zal verder worden toegelicht wat de rol van de docent precies inhoudt.

Volgens Polya is de rol van de docent essentieel voor de motivatie van leerlingen voor probleemoplossen, een geschikte houding en benodigde metacognitieve vaardigheden [22], [21]. Van Streun omschrijft in [22] en [21] de rol van de docent meer accuraat. Voorafgaand is aangenomen dat er al een kennisbasis bij de leerlingen is gevormd. Samengevat komt dit op het volgende neer.

Het doorlopen van een systematische probleemaanpak door de docent is een belangrijk voorbeeld voor de leerlingen om dit zelf ook uit te voeren, omdat de docent een sterke invloed heeft op het gedrag van de leerlingen. Daarnaast is het de taak van de docent om hiervoor een veilig en stimulerend onderwijsklimaat te scheppen. Vervolgens is het van belang dat de docent de leerlingen stimuleert om cruciale momenten in het oplosproces te kunnen verwoorden. Bovendien stellen Henningsen en Stein de leerlingen gestimuleerd worden om zichzelf te monitoren in het oplossingsproces [7]. Dat kan het vertrouwen van leerlingen in hun eigen kunnen bevorderen en hen motiveren om ook te werken aan opgaven van een hoger niveau [7]. Daarna moet voor het ontwikkelen van het probleemoplossend vermogen van de leerlingen de docent het oplossingsproces en de verschillende strategieën nabespreken. Op deze manier kunnen de leerlingen het door hen geleerde bevestigen. Hiermee moet de docent hoge eisen stellen aan het werk van leerlingen en wordt hetgeen waar nog van te leren valt besproken en door leerlingen aantekeningen van gemaakt. Tegelijkertijd moeten alle variaties aan oplossingen van leerlingen gewaardeerd worden. Hierbij moet voortdurend gedemonstreerd worden dat een geschikte

aanpak belangrijker is dan een goed antwoord. Hiermee stimuleer je de overtuiging van leerlingen dat ze in mindere mate tevreden zullen zijn met enkel succes op korte termijn. Leerlingen kun je zelf ook hun eigen werk te laten beoordelen en zelfbedachte adviezen laten opstellen. Op deze wijze ontwikkelen leerlingen zelfstandige leerstrategieën voor het probleemoplossen. Verder is voor het over het algemeen van belang dat de docent tijdens het onderwijs in probleemoplossen zelf het de (heuristische) oplosstrategieën expliciet maakt. Ook is het aan het beging van het behandelen van een nieuw onderwerp al van belang om problemen in bijbehorende context te verkennen en het probleemoplossen regelmatig centraal te stellen. Van Streun zegt ook dat hier in grote mate overeenstemming over bestaat tussen verschillende vooraanstaande vakdidactische auteurs. Zo zegt Drijvers bijvoorbeeld dat "het voorbeeldgedrag van de docent" en "het expliciteren van het probleemoplossingsproces en de bijbehorende heuristieken" [6] essentieel is.

De invloed van de docent op het coöperatief leren

Gebaseerd op het drietrapsproces van Barton, zoals eerder beschreven in subparagraaf 3.2.1, kan gesteld worden dat hij niet direct een voorstander is voor enkel samenwerkend leren voor het onderwijs in probleemoplossen. Dit moet volgens hem in ieder geval docentgestuurd zijn door onder andere het selecteren en sorteren van opgaven. Over de invloed van de leraar in de leerprocessen van leerlingen bestaan er in de literatuur verschillende opvattingen. Zo is Van Parren ook voorstander van een meer sturende rol van de leraar, maar wel zodanig dat er tegelijkertijd wel de vrijheid bestaat om het probleemoplossen zelf te ontdekken [8]. Hierbij is veel interactie tussen de docent en de leerlingen van belang [8]. De docent is dan in feite de regisseur van de leerprocessen [8]. Daarentegen is Freudenthal meer voor het begeleid herontdekken van de materie door interactie tussen de leerlingen onderling te stimuleren [8]. Hierbij heeft de docent dan een observerende en stimulerende rol [8].

Het wiskundig denken

Zoals Schoenfeld in eerste instantie ook zegt, is het "wiskundig denken" cruciaal voor het succesvol probleemoplossen, maar hoe dit zich verhoudt tot het probleemoplossen is in de literatuur ook anders omschreven. Zo omschrijft Drijvers dat het "wiskundig denken" gaat om het bedenken hoe je wiskundig gereedschap kunt inzetten voor het probleemoplossen [6]. Hierbij is het wiskundig denken volgens de Commissie vernieuwing wiskundeonderwijs onderverdeeld in zes "wiskundige denkactiviteiten": modelleren en algebraïseren, ordenen en structureren, analytisch denken en probleemoplossen, formules manipuleren, abstraheren en logisch redeneren en bewijzen [7]. Wanneer dit ontwikkeld wordt, zal volgens de visie van Drijvers, dit resulteren in het beter kunnen inzetten van het wiskundige gereedschap voor het probleemoplossen. Het stimuleren van wiskundige denkactiviteiten stimuleert daarmee het probleemoplossend vermogen.

In [7] worden, aanvullend op de eerder beschreven adviezen van Van Streun, voor het stimuleren van deze wiskundige denkactiviteit "probleemoplossen" door de docent de volgende adviezen aangedragen. Ten eerste wordt er benadrukt dat de docent dit kan bereiken door middel van veel interactie met de leerlingen. Tijdens groepswork kan de docent dit volgens Schoenfeld het beste doen door rond te lopen en te observeren, leerlingen te vragen wat ze doen en waarom, hierover doorvragen en indien nodig heuristische hints te geven. Hiermee wordt het op den duur een gewoonte voor leerlingen om dit uit zichzelf te doen. Ook kan het aan uitleggen van ideeën aan elkaar zorgen voor een betere begripsvorming. Verder is het van belang dat de docent leerlingen procesgericht assisteert wanneer ze zelfstandig aan problemen werken. Daarbij is het van belang dat dit de complexiteit of de cognitieve uitdaging van de opgaven vermindert. Leerlingen moeten er mogelijk aan wennen dat de docent enkel procesgerichte hulp aanbiedt en minder uitleg geeft. Het geven van uitleg is namelijk wat leerlingen verwachten van een docent. Hierbij kan het helpen als de docent de reden voor enkel de procesgerichte hulp en groepswork uitlegt. Zo moeten de leerlingen en de docent ook samenwerken. Schoenfeld beschrijft deze samenwerking als een "didactisch contract". Daarnaast is het voor het creëren van zelfvertrouwen en motivatie bij leerlingen essentieel om leerlingen te laten reflecteren op de bedachte ideeën en hoe zij daar op zijn gekomen. Dit is een moeilijk onderdeel, maar hiervoor kan het helpen om leerlingen hier op enige regelmaat een verslagje van te laten maken en dit als docent te waarderen. Tot slot is het van belang om als docent je zelf ook te verdiepen in het probleemoplossen zodat je de uitdagingen van de leerlingen beter begrijpt en je zelf geïnspireerd raakt door het wiskundig denken. Al met al speelt de docent een cruciale rol voor het stimuleren van het wiskundige denken.

3.2.3. Alle kenmerken van probleemoplossers onderwijzen

Om een volledig beeld te construeren over waar het onderwijs in probleemoplossen aan moet voldoen kunnen de essentiële aanbevelingen uit de vorige subparagrafen puntsgewijs worden samengevat aan de hand van de kenmerken van probleemoplossers. Deze zijn in paragraaf 3.1 omschreven als de categorieën van Schoenfeld: wiskundige kennis, heuristieken, metacognitie en overtuigingen.

Wiskundige kennis

- Het onderwijs in specifieke wiskundige kennis met daarin procedurele kennis en vaardigheden vormt de basis voor het probleemoplossen. Hiervoor geven didactiekboeken, zoals [7], specifieke richting.
- Het uitleggen van de benodigde wiskundige kennis door de leerling zelf kan helpen bij het begrijpen ervan [7]. Echter zegt Barton dat het uitleggen aan een ander cognitieve overbelasting veroorzaakt en het "uitleggen-aan-jezelf" daarom een goed alternatief is.
- Om tot de benodigde abstracte wiskundige kern van een probleem te komen is voldoende aandacht voor de probleemanalyse noodzakelijk aan het begin van het oplossingsproces noodzakelijk. Na afloop van het oplossingsproces kan klassikale reflectie helpen [21].
- Om herkenning te stimuleren is het noodzakelijk de wiskundige kennis georganiseerd te hebben opgeslagen in het geheugen. Tijdens het behandelen van een nieuw onderwerp moet er daarom al regelmatig aandacht zijn voor het herkennen van onderliggende abstracties en het probleemoplossen [21]. Barton suggereert specifieker hierover dat er eerst voldoende aandacht moet zijn voor het automatiseren van de kennis, vervolgens het herkennen ervan en daarna pas het probleemoplossen [2]. Verder kan klassikale reflectie de herkenning van de onderlinge abstracties en het abstractieniveau versterken [21].

Heuristieken

- Voor het onderwijzen van heuristieken is het essentieel dat het gebruik hiervan voor de leerlingen noodzakelijk is voor de voortgang in het oplossingsproces [21].
- Het is van belang dat de docent tijdens het onderwijs in probleemoplossen zelf het de (heuristische) oplosstrategieën expliciet maakt [21].
- Het bespreken van verschillende strategieën voor het oplossen van een probleem moeten worden nabesproken. Het is van belang dat de docent hierbij hoge eisen stelt aan het werk van de leerlingen en onder de aandacht brengt wat er nog te leren valt [21].

Metacognitie

- Door leerlingen te stimuleren om belangrijke momenten in het oplosproces te verwoorden kunnen leerlingen leren zichzelf te monitoren [21], [7].
- Het is van belang dat leerlingen leren reflecteren op het oplossingsproces [7]. Dit kan door leerlingen hun oplossingsproces te laten uitleggen, aangezien dit zorgt voor reflectie op elke stap binnen dit proces [2]. Om cognitieve overbelasting hierbij te voorkomen is "uitleggen-aan-jezelf" een geschikte methode [2].
- Het is een essentieel voorbeeld voor de leerlingen als de docent demonstreert hoe je een probleem systematisch aanpakt en de bijbehorende denkstappen verwoort [21].
- Door leerlingen hun eigen werk te laten nakijken en zichzelf advies te geven, worden ze gestimuleerd in het ontwikkelen van zelfstandige leerstrategieën voor het probleemoplossen [21].

Overtuigingen

- De rol van de docent is essentieel voor het opwekken van motivatie van de leerlingen voor het probleemoplossen en het ontwikkelen van een geschikte houding.
- Door een veilig onderwijsklimaat te scheppen, krijgen leerlingen de ruimte om vertrouwen te krijgen in hun eigen denken [22].
- Door leerlingen te laten reflecteren op hun eigen denkproces en de oorzaak daarvan, kan dat hun zelfvertrouwen en motivatie stimuleren [7]. Het kan hierbij helpen om leerlingen hier een verslagje van te laten schrijven en dit te waarderen [7].

- Om de overtuiging van leerlingen te stimuleren dat ze in mindere mate tevreden zijn met enkel kortetermijnsuccessen kan er rekening gehouden worden met het volgende. Tijdens de bespreking van de oplossingen van leerlingen moeten deze allemaal gewaardeerd worden [21]. Hierbij moet vooropstaan dat een geschikte aanpak belangrijker is dan een goed antwoord [21]. Daarnaast moeten gestimuleerd worden om zichzelf te monitoren tijdens het oplossingsproces [7]. Bovendien moet er een stimulerend onderwijsklimaat aanwezig zijn [21].
- De docent moet aan de leerlingen uitleggen waarom het onderwijs mogelijk anders wordt vormgegeven om zo weerstand van de leerlingen te verminderen [7].

Overige bevindingen

- "De innovatie van het onderwijs in probleemoplossen staat of valt met het ontwikkelen van een optimale fasering in de leerstof en goed hanteerbare werkvormen, waarbij veel tijd wordt ingeruimd voor zelfstandig werken" [21].
- Voor het ontwikkelen van de wiskundige denkactiviteit is veel interactie tussen leerlingen en de docent bevorderend [7].
- Volgens Schoenfeld kan de docent de leerlingen het beste helpen met procesgerichte hulp anders dan uitleggen [7].
- Tot slot is het van belang om als docent jezelf ook te verdiepen in het probleemoplossen zodat je de uitdagingen van de leerlingen beter begrijpt en je zelf geïnspireerd raakt door het wiskundig denken [7].

3.3. "Thinking Classrooms" en probleemoplossen

In deze paragraaf zullen de principes van "Thinking Classrooms" worden benoemd en zullen de principes die relevant zijn voor dit onderzoek worden samengevat. Daarbij zullen de belangrijkste elementen die bijdragen aan het onderwijzen van het wiskundig probleemoplossen, gezien de adviezen uit paragraaf 3.2, worden benoemd.

"Building Thinking Classrooms", afgekort als BTC, van Peter Liljedahl is een recent gepubliceerde didactiek met als hoofddoel het stimuleren van de denkactiviteit van de leerling is [12]. Binnen deze didactiek staat het coöperatief probleemoplossen centraal, maar is het tegelijkertijd ook een middel om juist dit te onderwijzen [13]. Zoals meerdere malen beschreven is in paragraaf 3.2, is het samenwerkend leren bevorderlijk voor het onderwijs in probleemoplossen. Dit bevestigt dat een "Thinking Classroom" een geschikte methode hiervoor is. Het creëren van een "Thinking Classroom" is gebaseerd op veertien praktisch beschreven principes die binnen het wiskundeonderwijs geïmplementeerd kunnen om "zelfdenkende klassen" te creëren, waarbij het samenwerken centraal staat [12]. Op deze manier wordt er voornamelijk voorkomen dat leerlingen in de wiskundelessen enkel gedachteloos opgaven maken en daarmee de onderwezen oplossingsprocessen te imiteren zonder de redenering daarachter te begrijpen, wat Liljedahl "mimicking" noemt [12]. Zo worden leerlingen in "Thinking Classrooms" gestimuleerd om "wiskundig" na te denken, wat het leren probleemoplossen ondersteunt, zie subparagraaf 3.2.2

Om een "Thinking Classroom" te creëren kunnen de principes in vier opeenvolgende fasen worden ingevoerd in de lespraktijk [12]. Hiervan is de eerste fase essentieel en karakteristiek voor het werken in een "Thinking Classroom". Het gaat hierbij om de principes over het gebruiken van "highly engaging thinking tasks", het werken in zichtbaar gekozen willekeurige groepssamenstellingen en het werken op verticale uitwisbare oppervlaktes [12]. In "Thinking Classrooms" wordt er namelijk aan het begin van een les een probleem, ofwel een "highly engaging thinking task", geïntroduceerd, waarna de leerlingen dit vervolgens in groepjes op bijvoorbeeld whiteboards gaan oplossen.

Een "highly engaging thinking task" is een probleem dat uitdagend is om over na te denken, bij te experimenteren en waarbij het nodig is om kennis toe te passen [12]. Wanneer de principes van "Thinking Classrooms" nog maar net worden geïmplementeerd is het volgens Liljedahl aan te raden om voor deze "highly engaging thinking tasks" problemen te gebruiken die buiten het curriculum vallen [12]. Dit motiveert leerlingen namelijk meer om daadwerkelijk na te denken, waarna ze dit gedrag later kunnen leren toepassen bij problemen die binnen het curriculum vallen. Verder moeten deze problemen al in de eerste vijf minuten van de les worden geïntroduceerd [12]. Daarna gaan de leerlingen in groepen aan de slag op uitwisbare verticale oppervlaktes.

De groepen moeten op een zichtbare manier willekeurig worden ingedeeld om meer motivatie op te wekken voor het bijdragen aan de samenwerking in de gekozen groep en om sociale barrières te voorkomen [12]. Dit kan bijvoorbeeld door leerlingen speelkaarten te laten trekken [12]. Bovendien hebben de leerlingen op deze manier het idee dat zij zelf invloed hebben op de groepssamenstelling, wat weerstand voorkomt [12]. Voor de uitwisbare verticale oppervlaktes kunnen vervolgens whiteboards worden gebruikt.

Een verticale oppervlakte zorgt voor een actieve houding tijdens het probleemoplossen en blijven leerlingen meer betrokken bij het groepsproces [12]. Daarnaast zorgt de uitwisselbaarheid dat leerlingen gestimuleerd worden om iets te proberen, aangezien de fout dan niet permanent zichtbaar hoeft te zijn [12]. Verder mag er per groep maar één stift aanwezig zijn, waardoor het samenwerken wordt gestimuleerd en de docent door het doorgeven van de stift de betrokkenheid van iedere leerling kan stimuleren [12]. Doordat op deze manieren gestimuleerd worden om samen in groepen aan problemen te werken, wordt er een coöperatieve leeromgeving gecreëerd. Eerder is in paragraaf 3.2 geconstateerd is dat het bevorderlijk is voor het leren probleemoplossen.

In de tweede fase voor het creëren van een "Thinking Classroom" wordt er aandacht besteed aan de principes: de plaatsing van het meubilair in een klaslokaal, het beantwoorden van vragen van leerlingen, de manier van het introduceren van een "thinking task", het geven van huiswerk en het organiseren van autonomie van de leerlingen. Aangezien in de lespraktijk van dit onderzoek geen huiswerk zal worden gegeven, zie paragraaf 2.1, wordt zal dit principe niet verder worden toegelicht.

Om actief leren te stimuleren, is het bevorderlijk om de tafels in een klaslokaal niet te richten naar het

bord en willekeurig gepositioneerd in groepen te plaatsen [12]. Een van de redenen waarom dit werkt, is volgens Liljedahl, omdat het zo voor de leerlingen zichtbaar is dat deze les anders zou verlopen dan normaal. Hierdoor zijn de leerlingen minder geneigd zijn om hun oude passieve leergedrag toe te passen. Om dit effect te versterken moet de docent niet op de plek wat oorspronkelijk de voorkant van de klas is gaan staan en moet hij of zij zich tijdens de instructie verplaatsen [12].

Voor het beantwoorden van vragen van de leerlingen door de docent mogen volgens Liljedahl enkel vragen worden beantwoord die het denken stimuleren. Dit zijn vragen waarvan de leerlingen de antwoorden nodig heeft om daadwerkelijk verder te kunnen denken. Dit zijn meestal vragen om iets te verduidelijken of vragen naar een volgende opdracht [12]. Vragen waarvan de leerlingen de antwoorden niet nodig hebben of vragen waarvan de antwoorden er toe leiden dat de leerlingen minder moeite hoeven te doen, de zogeheten "proximity questions" en "stop-thinking questions", mogen niet worden beantwoord [12]. In dat geval moet de docent reageren door een vraag terug te stellen, zoals: "Weet je dat zeker?", "Waarom denk je dat?", "Vraag of vertel je me dit nu?". Op deze manier zal het zelfstandig denken van leerlingen worden gestimuleerd [12]. Deze manier van begeleiding door de docent komt overeen met het aanbieden van procesgerichte hulp in plaats van oplosgerichte hulp. Dit is in [7] beschreven is als geschikt gedrag van de docent, zie subparagraaf 3.2.2.

Voor het introduceren van "thinking tasks" in een "Thinking Classroom" is het van belang dat dit binnen de eerste vijf minuten gebeurt, dit mondeling wordt gedaan en dat de leerlingen om de docent heen staan [12]. Hierbij mag de docent enkel details opschrijven die de leerlingen anders zouden moeten onthouden, zoals getalswaarden en vormen [12]. Op deze manier worden de leerlingen al tijdens het horen van het probleem geactiveerd om te denken [12].

Verder wordt het creëren van een zelfstandig denkende klas gecreëerd door het stimuleren van "mobilizing knowlegde" [12]. Hierbij is de docent niet meer de enige bron van informatie voor de leerlingen, maar moeten de leerlingen dit voor elkaar zijn [12]. Doordat de leerlingen op verticale oppervlaktes werken kunnen zij gemakkelijk naar het werk van een andere groep kijken voor het ontdekken van een hint of tip [12]. Volgens Liljedahl zullen zij nooit het werk van een andere groep direct kopiëren, maar zullen zij dit eerst willen begrijpen [12]. De docent kan de onafhankelijkheid van de leerlingen promoten door leerlingen te verwijzen naar een andere groep te verwijzen als dit een gestelde vraag van hen beantwoord of hen verder helpt wanneer leerlingen zijn vastgelopen [12]. Het doel van "mobilizing knowlegde" is dat het leerlingen hierdoor geforceerd worden om samen te werken [12]. Daarnaast zorgt het voorkomen van "mobilizing knowledge" er voor dat leerlingen gezamenlijk convergeren naar het vinden van de juiste antwoorden [12]. Hierdoor versterkt "mobilizing knowlegde" het samenwerkend leren.

In de derde fase voor het creëren van een "Thinking Classroom" wordt er aandacht besteed aan de principes: het geven van hints en uitbreidingen voor het handhaven van de "flow", het consolideren van een les en de wijze waarop leerlingen betekenisvol aantekeningen kunnen maken [12]. Deze principes zullen in de subparagrafen 3.3.1, 3.5.1 en 3.3.2 verder worden toegelicht. Dit zijn namelijk de principes die van belang zijn voor het beantwoorden van de hoofdvraag van dit onderzoek. Dit onderzoek richt zich daarmee voornamelijk op het implementeren van de principes uit de derde fase en gebruikt hiervoor ook de principes uit de eerste fase. Aangezien de fases achtereenvolgens kunnen worden geïmplementeerd, zijn in dit stadium de principes uit de vierde en laatste fase niet relevant. Deze worden daarom niet verder toegelicht. De principes die onder deze vierde fase vallen gaan over het evalueren van een les, het formatief toetsen en hoe je geen leerlingen kan beoordelen zonder dat je hen cijfers geeft [12].

3.3.1. Het handhaven van de "flow"

Sinds het invoeren van de leerplicht is het leren van wiskunde voornamelijk een synchrone activiteit, waarbij het krijgen van uitleg en het maken van aantekeningen gelijktijdig plaats vinden [12]. Dit is een efficiënte manier voor het overdragen van veel kennis in korte tijd, maar doet geen recht aan het individuele denkproces van een leerling [12]. Om het zelfstandig denken van leerlingen te bevorderen zegt Liljedahl dat het bevorderlijk is om op een asynchrone manier leerlingen op het juiste moment te voorzien van de benodigde hints en vervolg activiteiten [12]. De gegeven hints en vervolgactiviteiten kunnen dus bij iedere groep verschillen. Wanneer dit op de juiste manier wordt toegepast zal de zogeheten "flow" van een groep worden gehandhaafd [12]. Hiermee wordt de juiste verhouding tussen het vermogen van de leerlingen en de mate van uitdaging behouden, de "flow", waardoor frustratie en verveldheid kan worden voorkomen [12]. Door het geven van een nieuwe opgave, waarmee de

uitdaging wordt vergroot, raken de leerlingen niet verveeld en door het geven van een tip, waarmee het vermogen van de leerlingen wordt uitgebreid, kan frustratie worden voorkomen [12]. Dit is een dynamisch proces, waardoor het moment van het geven van een opgave of tip uitmaakt.

Naast het geven van opgaven en hint kan er gebruik gemaakt worden het verschuiven binnen de "modes of engagement" [12]. Dit zijn, in opeenvolgende volgorde van toenemende uitdaging, "doing", "justifying", "explaining", "teaching" en "creating" [12]. De manier waarop de leerlingen bezig zijn, maakt namelijk ook uit voor de mate van uitdaging. Op het laagste niveau van uitdaging behoort "doing", waarin leerlingen enkel bezig zijn met het uitvoeren van een taak. Wanneer leerlingen gevraagd wordt of het gevonden antwoord echt wel goed is wordt de uitdaging verhoogd naar "justifying" en wanneer zij hun antwoorden uitleggen behoort dit tot "explaining". Vervolgens is de uitdaging van een hogere orde wanneer leerlingen andere leerlingen leren om ook de antwoorden te vinden, wat bij "teaching" hoort [12]. De hoogste mate van uitdaging is "creating", waarbij er naast didactische kwaliteiten van de leerlingen ook pedagogische benodigd zijn [12]. Naast dat met aandacht voor alle "modes of engagement" de mate van uitdaging wordt verhoogd, helpt het de leerlingen om betrokken te blijven nadenken [12]. Het is dan ook het doel van het creëren van "Thinking Classrooms" is dan ook om leerlingen bereid te laten zijn om na te denken over elke opgave [12].

3.3.2. Het consolideren van een les

Het consolideren van een les is een belangrijk deel binnen iedere les voor het bespreken van de leeropbrengst van de leerlingen en dit samen te voegen tot een conceptueel geheel [12]. Hierbij is het volgens Liljedahl van belang om te beseffen dat leerlingen niks leren wanneer hen verteld wordt hoe iets gedaan moet worden [12]. Het volgens Liljedahl daarom geen goed idee om opgaven vanaf begin tot het eind door te spreken en daarbij geen rekening te houden met waar de leerlingen zich bevinden binnen hun leerproces [12]. Wat Liljedahl beschrijft dat wel gedaan moet worden is het consolideren van "the bottom" [12]. Hiermee wordt bedoeld dat het consolideren van een les moet beginnen bij het presenteren van de oplossingen die alle leerlingen hebben gevonden en vanaf daar een bepaald concept op te bouwen [12]. Op deze manier zullen alle leerlingen het begin van deze bespreking kunnen volgen. Hier beschrijft Liljedahl als effectiefste methode de zogeheten "gallery-walk" [12]. In een "gallery-walk" leidt de docent een gedetailleerde discussie over de opgaven en de antwoorden aan de hand van het werk van de leerlingen op de verticale oppervlaktes [12]. Tijdens de les kan de docent dit voorbereiden door, met een stift van een afwijkende kleur, kaders te zetten om betekenisvolle delen binnen het werk van verschillende leerlingen. Daarbij kan er met een nummer de volgorde binnen het oplosproces worden aangegeven. Tijdens de "gallery-walk" kan door middel van het omkaderde werk een concept worden toegelicht. Daarnaast is het typerend voor de "gallery-walk" dat leerlingen staan en meelopen naar het werk dat besproken wordt, waardoor de leerlingen worden geactiveerd [12]. Een "gallery-walk" wordt voor de leerlingen een denkactiviteit wanneer door de docent aan hen wordt gevraagd het werk van andere leerlingen uit te leggen [12]. Dit komt overeen met het principe "het antwoord van iemand anders uitleggen", wat Barton beschrijft als een goede methode om van te leren, zie paragraaf 3.2.1.

3.3.3. Het maken van aantekeningen

Binnen de wiskunde lessen is het over het algemeen gebruikelijk dat leerlingen aantekeningen maken. Echter is volgens Liljedahl een veel voorkomende beperking hierbij dat leerlingen vaak nooit meer terugkijken naar hun aantekeningen [12]. Daarnaast komt het veel voor dat leerlingen in mindere mate de boodschap van de les meekrijgen, doordat zij bezig zijn bij het maken van aantekeningen [12]. Op die manier belemmert het maken van aantekeningen de denkactiviteit van de leerlingen [12]. Ook het overschrijven van aantekeningen is een activiteit waarbij het denken niet vereist is [12]. Leerlingen zouden eigenlijk gestimuleerd moeten worden tot het maken van betekenisvolle aantekeningen, waar zij zelf later wat aan kunnen hebben. Volgens Liljedahl moeten leerlingen daarom zelf een voorbeeld selecteren en deze uitwerken [12]. Verder zijn er drie zaken bepalend om een aantekening van betekenis te laten zijn voor een leerling. Allereerst maakt het feit dat de leerlingen zelf een voorbeeld uitwerken het maken van aantekeningen betekenisvol. Verder is het van belang deze te annoteren, door middel van bijvoorbeeld korte zinnen of kleine voorbeelden, om het doorlopen proces te verduidelijken [12]. Op deze manier maken leerlingen aan hun toekomstige zelf niet alleen duidelijk hoe iets is gedaan, maar ook waarom. Daarnaast is het selecteren van een geschikt voorbeeld voor de leerling om een aantekening van te maken een betekenisvolle activiteit [12]. Om leerlingen te ondersteunen

bij het maken van deze betekenisvolle aantekeningen kunnen "graphic organizers" helpen [12]. Dit zijn templates met verschillende kaders met een bepaalde titel. Deze titels geven dan een indicatie van de inhoud die een leerling moet plaatsen in het bijbehorende kader op de aantekening. Deze kaders kan de docent voorafgaand aan een les zelf opstellen of de docent kan er voor kiezen de leerlingen dit zelf te laten kiezen. Een algemeen voorbeeld van Liljedahl voor een "graphic organizer" is gegeven in Figuur 3.1. Het maken van aantekeningen kan gezien worden als waardevol ten aanzien van het onderwijs in probleemoplossen, omdat er zo binnen een coöperatieve werkvorm aandacht is voor het individuele leren [21] en de voordelen van "uitleggen-aan-jezelf" hierbij naar voren komen [2], zie paragraaf 3.2. Deze voordelen zullen in subparagraaf 3.5.1 verder worden toegelicht.

3.4. De toepassing van BTC in de lespraktijk

Allereerst zullen in deze paragraaf in 3.4.1 de specifieke leerdoelen voor deze lespraktijk worden geformuleerd door middel van de eerder opgestelde kenmerken van succesvolle probleemoplossers. In de vorige paragraaf is te lezen dat veel elementen van het geadviseerde onderwijs in probleemoplossen naar voren komt wanneer BTC uitgevoerd wordt zoals dit is omschreven. Toch schiet het op een aantal zaken in de specifieke lespraktijk, zie paragraaf 2.1, te kort. Zo is er door Liljedahl geen advies uitgebracht in [12] hoe BTC kan worden ingezet voor lessen waarin het probleemoplossen onderwezen wordt aan de hand van één centraal probleem. Er moet daarom een invulling van BTC worden gegeven, zodat deze de leerdoelen ondersteunt. Dit wordt gedaan in subparagraaf 3.4.2.

3.4.1. Specificering algemene leerdoelen

In deze lespraktijk zullen de lessen gaan over algemene wiskundige problemen die niet direct verband houden met het curriculum, zoals eerder beschreven is in paragraaf 2.1. De benodigde wiskundige kennis berust daarom op voorkennis en algemene wiskundige kennis. In deze lespraktijk wordt er dus verondersteld dat de leerlingen de categorie "wiskundige kennis" van Schoenfeld voldoende beheersen. Hierdoor zullen de leerdoelen in mindere mate gericht zijn op deze categorie. Dit brengt als voordeel met zich mee dat er gericht kan worden op de andere aspecten van probleemoplossen, waar anders in reguliere lessen in mindere mate aandacht aan kan worden besteed wanneer de kennisbasis van de leerlingen nog onvoldoende is.

Zo is er nu gegarandeerd tijd beschikbaar om aandacht te besteden aan, wat Liljedahl in [12] beschrijft als "highly engaging thinking tasks", die buiten het curriculum vallen. De functie hiervan is dat deze opgaven leerlingen stimuleert tot het willen nadenken en het doen van wiskunde [12]. Daarnaast wordt de effectiviteit en het zelfvertrouwen van de leerlingen gestimuleerd [12]. Op deze manier worden de leerlingen betere wiskundige denkers en zijn meer leerlingen bereid na te denken over problemen binnen het curriculum [12]. Liljedahl omschrijft dat dit het "mimicking" voorkomt [12]. Met "mimicking" wordt bedoeld dat leerlingen, mede als gevolg van de toegepaste onderwijsmethode, vaak geneigd zijn specifieke kennis en methoden direct toe te passen, alleen gebaseerd op een voorbeeld en verder niet nadenken over waarom dit nu van toepassing is. Het komt overeen met de veelvoorkomende overtuiging bij leerlingen dat ze zelf niet in staat zijn wiskunde te creëren zoals Schoenfeld dat beschrijft, zie in paragraaf 3.1. Ook Van Streun zegt dat leerlingen denken dat het beoefenen van wiskunde enkel het automatiseren van kennis en oplossingsmethoden betreft [21]. Zoals in paragraaf 3.1 te lezen is, zorgen deze overtuigingen voor een ongunstige houding voor het probleemoplossen. "Highly engaging thinking tasks" buiten het curriculum kunnen hier daarom een oplossing voor bieden. Op deze manier zullen deze lessen als leerdoel hebben van creëren van een algemene gunstige houding ten aanzien van het algemeen probleemoplossen. Specifiek gaat het hier voor leerlingen om de durf om te beginnen aan het oplossen van een probleem, doorzettingsvermogen te creëren ondanks het resultaat en vertrouwen te krijgen in hun eigen denken. Het hebben van zelfvertrouwen maakt het mogelijk dat leerlingen in staat zijn door middel van redeneren voort te bouwen op hun eigen kennis om het probleem op te kunnen lossen. Hiermee kan er worden voorkomen dat leerlingen de overtuiging hebben zelf geen wiskunde te kunnen ontdekken, zie paragraaf 3.1. Ook het durven te beginnen en het hebben van doorzettingsvermogen vallen onder de categorie "overtuigingen" van Schoenfeld. Daarnaast valt het hebben van een geschikte wiskundige houding onder "productive disposition", een van de strengen van Kilpatrick die bepalend zijn voor het succesvol kunnen beoefenen van wiskunde in de algemene zin [7].

Tegelijkertijd is tijdens het oplossen van algemene wiskundige problemen aandacht voor het ontwikkelen van algemene oplosmethoden wat onder de categorie "heuristieken" van Schoenfeld valt en het stimuleren van de categorie "metacognitie" van Schoenfeld. Hiermee is het specifieke doel om leerlingen het nut van heuristieken in te laten zien. Verder gaat het om de leerlingen te leren nadenken over het oplosproces voor meer structuur in het denken en meer bewustwording tijdens het probleemoplossen.

De leerdoelen

Samengevat kunnen de algemene leerdoelen voor de lespraktijk van dit onderzoek, zoals omschreven is in paragraaf 2.1, als volgt worden omschreven.

1. De leerlingen durven bij een moeilijk probleem te beginnen met het zoeken naar een oplossing.
2. De leerlingen blijven gemotiveerd om een probleem op te lossen ongeacht het resultaat van hun voortgang.
3. Leerlingen zijn zelfverzekerd in hun vermogen om problemen op te lossen, waardoor ze in staat zijn om betrouwbare wiskundige kennis op te bouwen.
4. De leerlingen kunnen het nut van heuristieken inzien en weten deze op toepasbare momenten in te zetten.
5. De leerlingen kunnen bewust nadenken over het oplosproces en dit verwoorden.

Deze leerdoelen vallen onder het hoofddoel van het onderwijs, zoals Van Streun dit aangeeft: "Het gaat kennelijk om het durven vertrouwen op je eigen denken, om het stimuleren van denken en leren, om het denken zelf" [20]. Aangezien de leerdoelen algemeen van aard zijn kunnen deze mogelijk ook effect hebben op de leeropbrengst in een andere context, zoals bij problemen binnen het curriculum. Toch is het van belang om op te merken dat dit leerdoelen zijn voor de lange termijn en kunnen dus niet volledig behaald worden binnen één les. Een les kan hier wel aan bijdragen. Dit onderzoek richt zich ook niet direct op het behalen van deze leerdoelen bij alle leerlingen, maar op het verbeteren van het onderwijs dat is vormgegeven om deze leerdoelen te ondersteunen.

3.4.2. Lesopbouw

In deze lespraktijk zullen de problemen die gebruikt worden niet gaan over specifieke wiskundige kennis, maar over algemene wiskunde buiten het curriculum, zoals eerder beschreven in paragraaf 2.1. Tijdens elke les zal er één probleem centraal staan waar de leerlingen gedurende het overgrote deel van de les mee bezig zullen zijn. Aan het begin van deze lessen zal er op de manier hoe Liljedahl dit in [12] omschrijft, uitgelegd worden hoe de les zal verlopen, worden de groepen gemaakt, worden de groepen verdeeld over de whiteboards en zal het probleem worden geïntroduceerd. Vervolgens gaan de groepen leerlingen aan de slag met het probleem. Hierbij worden zo veel mogelijk gerelateerde adviezen van Liljedahl in acht genomen. Tot slot zal de les worden afgesloten met de "gallery-walk" met consolideren als doel, zoals Liljedahl dit heeft vormgegeven in [12]. Voor deze lespraktijk wordt verondersteld dat alle hoofdstukken rondom de beoordeling van het werk van de leerlingen, zie [12], niet direct relevant is. Deze zal daarom niet worden geïmplementeerd in de lespraktijk. Daarnaast is het geven van huiswerk niet relevant voor deze lessen, aangezien de lessen op zichzelf moeten staan en het opbouwen van een wiskundige kennisbasis niet het doel is. Het bijbehorende hoofdstuk in [12] zal daarom ook niet worden geïmplementeerd.

Er bestaat altijd de mogelijkheid dat de leerlingen sneller dan de gegeven tijd klaar zijn met hun opdracht. In dat geval zullen er soortgelijke en opvolgende problemen worden gegeven. Naast deze praktische overweging bevat dit een theoretische motivatie bij omtrent BTC en het onderwijs in probleemoplossen. Geïnspireerd op het "verticaal mathematiseren in ergere zin" [10] en het handhaven van de "flow" [12] wordt er de volgende opbouw binnen het oplossen van problemen met BTC gehanteerd. Eerst krijgen de leerlingen in alle groepjes hetzelfde "basisprobleem". Wanneer dit probleem binnen een groepje is opgelost, mogen ze zelf een "vergelijkbaar probleem" bedenken en dat met het groepje oplossen. Dit kunnen ze meerdere malen doen, totdat ze toe zijn aan de laatste uitdaging. Deze laatste uitdaging is het vinden van de "algemene oplossing". Op deze manier is het type probleem overeen met een "low-floor-high ceiling" opgave, zoals [6] adviseert voor het onderwijs in probleemoplossen. Het "verticaal mathematiseren in ergere zin" komt hierin naar voren aangezien er niveauverhoging binnen de opgave plaats vindt. Het "verticaal mathematiseren in ergere zin" slaat namelijk op "het uitvoeren van wiskundige bewerkingen gericht op niveauverhoging" [10].

In het vervolg van deze subparagraaf zal nader worden toegelicht hoe deze opbouw binnen het oplossen van problemen, bijdraagt aan het behalen van de opgestelde leerdoelen in subparagraaf 3.4.1.

De ondersteuning van de leerdoelen

Allereerst is het van belang dat het basisprobleem van dusdanig niveau is dat alle leerlingen in de gegeven tijd kunnen oplossen. Hiermee verzeker je dat alle leerlingen in "flow" beginnen [12]. Zo krijgen alle leerlingen een succeservaring, wat zelfvertrouwen geeft en daarmee bevorderlijk is voor het behalen van de eerste drie leerdoelen. Vervolgens kan het zelf bedenken van een vergelijkbaar

probleem gezien worden als een uitbreiding op het eerdere probleem [12]. Door één aspect binnen het probleem tegelijk te variëren wordt de moeilijkheidsgraad stap voor stap opgebouwd, waardoor de "flow" gehandhaafd wordt [12].

Daarnaast heeft het zelf bedenken van een vergelijkbaar probleem op zichzelf een toegevoegde waarde. Dit valt onder de meest uitdagende "modes of engagement", namelijk "creating" [12]. Hiervoor moeten leerlingen tot de mathematische didactische kern komen, de mogelijkheden doorzien en dit met elkaar kunnen bespreken [12]. Om dit te kunnen bereiken moeten leerlingen het oplossingsproces tot dan toe voldoende hebben geanalyseerd, wat hun metacognitieve activiteit stimuleert. Dit ondersteunt daarom voornamelijk het vijfde leerdoel. Daarnaast wordt het door Bos en Drijvers aangeraden om leerlingen zelf een vergelijkbare opgave te laten bedenken voor onderwijs in probleemoplossen [3] en zegt ook Freudenthal dat dit een goede methode is om leerlingen over hun eigen handelen na te laten denken [23].

Tot slot worden de leerlingen door het formuleren een algemene oplossing gestimuleerd de abstractere wiskundige kern van het probleem te ontdekken, wat het probleemoplossendvermogen stimuleert. Op deze manier wordt er aandacht besteed aan het verticaal mathematiseren dat zich richt op onder andere de generalisatie van de oplossing en de verhoging van het niveau [10]. Tijdens dit proces worden opgedane intuïtieve en wiskundige ervaringen geabstraheerd en toegepast op algemenere problemen [10]. Dit is essentieel voor begripsvorming en niveauverhoging binnen de wiskunde [10]. Wanneer dit wordt toegepast rondom het oplossen van problemen, kan ook gesteld worden dat dit ook het de moeilijkheidsgraad van de problemen verhoogt. Hierbij is het komen tot de vereiste abstractie voor leerlingen vaak een belemmering bij het oplossen van problemen, zie paragraaf 3.2.1. Maar zoals eerder beschreven in deze subparagraaf zal dit stapsgewijs worden gedaan, waardoor leerlingen mogelijk gemakkelijker tot de vereiste abstracties kunnen komen dan wanneer enkel het gegeneraliseerde probleem gegeven zou worden. Het stimuleren van de vordering binnen het proces van verticaal mathematiseren kan daarom zorgen voor het verhogen van het probleemoplossend vermogen. Om opgedane inzichten te behouden is het noodzakelijk dat leerlingen reflecteren op hun leerproces zodat dit de basis kan vormen voor verdere ontwikkeling [10]. In subparagraaf 3.5.2 zal verder worden ingegaan op deze noodzakelijke reflectie. De centrale context problemen voor het verticaal mathematiseren geschikt zijn kunnen worden getypeerd als "low-floor high ceiling" opgaven. Dit soort opgaven worden in [3] ook aangeraden voor lessen in probleemoplossen. Hiermee komen alle groepjes gegarandeerd op een probleem uit waarbij het uitvoeren van een probleemanalyse en mogelijk het toepassen van heuristieken noodzakelijk is. Zo ontstaat er ook voor de gevorderde probleemoplossers een leermoment omtrent voornamelijk het vierde leerdoel, ongeacht de moeilijkheidsgraad van het basisprobleem. Ook worden leerlingen op deze manier gestimuleerd voldoening te halen uit grotere successen, in dit geval groter dan enkel de oplossing van het basisprobleem. Daardoor wordt er gewerkt aan een betere houding van alle leerlingen, wat voornamelijk aansluit bij de eerste drie leerdoelen.

Het oplossen van het basisprobleem en de vergelijkbare problemen kunnen op deze manier gezien worden als opeenvolgende tussendoel en binnen de les voor het behalen van de leerdoelen. Vervolgens kan het formuleren van een algemene oplossing gezien worden als het einddoel van de les. Toch is dit niet noodzakelijk. Hoewel deze opbouw binnen het oplossen van problemen theoretisch gezien bijdraagt aan het behalen van de leerdoelen, kan mogelijk ook enkel het werken aan het oplossen van het basisprobleem volstaan. Wanneer dat het hoogst haalbare voor een groepje leerlingen blijkt te zijn, kan hier namelijk voldoende van geleerd worden tijdens andere fasen in de les. Er kunnen bijvoorbeeld ook leermomenten ontstaan bij de ervaring van het oplossen zelf, de begeleiding van de docent of tijdens de "gallery-walk".

3.5. Mogelijkheden binnen de lespraktijk

Als de didactiek van BTC en de geformuleerde de toepassing hiervan worden vergeleken met de opgestelde leerdoelen en de gerelateerde adviezen hiervoor, zie 3.2.3, kan er worden geconcludeerd dat er verbeteringsmogelijkheden voor het onderwijs zijn voor het behalen van de leerdoelen. In deze paragraaf zal er worden ingegaan op de voornaamste verbeteringsmogelijkheden. Daarnaast zijn er een aantal beperkingen van het onderwijs geconstateerd tijdens de eerste ervaringen in de lespraktijk, zie paragraaf 2.1. In deze paragraaf zullen op basis van deze bevindingen mogelijkheden worden aangedragen om de toepassing van BTC binnen de lespraktijk te verbeteren. Hierbij ligt de nadruk op de vormgeving van het onderwijs zelf en in mindere mate op de gedragingen van de docent tijdens de lessen. In het vervolg van dit onderzoek zal er worden ingegaan op het realiseren, evalueren en verbeteren van enkel deze aangedragen verbeteringen in de praktijk. Deze paragraaf zal daarom de onderzoeksomvang van het onderzoek in de lespraktijk verder specificeren.

3.5.1. Individueel aantekeningen maken

Een van de beperkingen van het onderwijs in de lespraktijk bleek te zijn dat het lastig is om de individuele denkactiviteit en de betrokkenheid van de leerlingen te garanderen, zie paragraaf 2.1. Liljedahl omschrijft vier essentiële stappen hoe het coöperatieve leren omgezet kan worden in individueel begrip [12]. Als eerste moet er na het groepswork geconsolideerd worden vanaf "the bottom". Vervolgens moeten leerlingen betekenisvolle aantekeningen maken, waarna ze aan de gang gaan met oefenopgaven [12]. Tot slot kan formatieve feedback leerlingen helpen te begrijpen waar ze staan in hun leerproces en waar ze naartoe gaan [12]. Hierbij zegt Liljedahl dat deze stappen het effectiefst werken als deze alle vier tegelijk worden geïmplementeerd. Echter komen in de lespraktijk van dit onderzoek de laatste twee stappen niet direct aan de orde, zie subparagraaf 3.4.2. Deze stappen vallen ook in de vierde fase die niet wordt meegenomen binnen dit onderzoek, zie paragraaf 3.3. Om de individuele leeropbrengst te waarborgen kan daarom, enkel het maken van betekenisvolle aantekeningen worden toegevoegd aan de lespraktijk. Op deze manier wordt er ook ruimte binnen een coöperatieve werkvorm ruimte gemaakt voor het zelfstandig werken, wat volgens Van Streun van belang is voor het onderwijs in probleemoplossen [21]. Zonder het implementeren van het principe van het maken van aantekeningen schiet de beschreven toepassing van BTC op de lespraktijk dan ook tekort.

Vormgeving van bijpassend onderwijs

Binnen de huidige lespraktijk zal het maken van betekenisvolle aantekeningen op een ander moment binnen de les worden toegepast dan Liljedahl adviseert. Liljedahl adviseert namelijk dit na het consolideren van een les toe te passen. Toch lijkt het binnen de huidige toepassing van BTC dat het effectiever is voor het behalen van de leerdoelen om dit op een specifiek moment tijdens het probleemoplossen in groepjes te doen. Dit wordt gedaan om gedurende het proces van verticaal mathematiseren specifiek aandacht te besteden aan alles "modes of engagement" en daarmee de gewenste verhouding tussen het cognitieve vermogen en de mate van uitdaging in balans te houden [12].

De functie van het individueel aantekeningen maken

De leerlingen zullen in eerste instantie het basisprobleem in groepjes op de whiteboards moeten oplossen, hierin staat "doing" binnen de "modes of engagement" centraal [12]. Wanneer zij klaar zijn en alle groepsgenoten het over de oplossing eens zijn, zullen ze hierover individueel betekenisvolle aantekeningen maken door middel van een ontworpen werkblad. Hierin komen binnen de "modes of engagement" naast "doing", ook "justifying" en "explaining" meer aan de orde [12]. Dit doen ze door in dezelfde groepjes bij elkaar aan tafel te gaan zitten. Tijdens het maken van de aantekeningen mogen ze terugkijken naar hun werk op het whiteboard. Op deze manier consolideren de leerlingen actief vanaf het begin van het oplossen van het basisprobleem tot aan alles wat ze tot dan toe hebben gedaan. Doordat iedere leerling voor zich een aantekening maakt zijn ze bezig met het uitleggen van het basisprobleem aan zichzelf. Dit is volgens Barton een geschikte methode om cognitieve overbelasting te voorkomen en tegelijkertijd de noodzakelijke begripsvorming te stimuleren. Dit zal zorgen voor een sterkere beheersing van de voorwaardelijke categorie "wiskundige kennis" van Schoenfeld, zie paragraaf 3.1. Hierdoor wordt er bewust een fundamentele basis gevormd voor een mogelijk het oplossen van een vergelijkbaar probleem. Wanneer een van de leerlingen hier moeite mee heeft kan een groepsgenoot gemakkelijk om hulp gevraagd worden. Als leerlingen elkaar vervolgens helpen met

het formuleren van hun individuele aantekeningen komt ook "teaching" aan de orde. Daarna kunnen de leerlingen, indien er nog voldoende tijd beschikbaar is, wederom in groepjes verder werken aan een vergelijkbaar probleem en eventueel aan het vinden van een algemene oplossing en daarmee aandacht besteden aan "creating". Zo zal de overgang van het oplossen van het basisprobleem naar het vergelijkbare probleem geleidelijker opgebouwd worden en de "flow" worden behouden. Hierdoor komen de leerlingen mogelijk verder in het proces van het verticaal mathematiseren, wat het probleemoplossend vermogen begunstigt. Echter, als groepen leerlingen niet aan deze volgende fase in de les toekomen, garandeert het maken van aantekeningen op dit moment alsnog de individuele leeropbrengst. Het maken van aantekeningen wordt dus ingezet na het oplossen van het basisprobleem door de groepen. Wanneer dit de groepen niet lukt, zal het werkblad geen hulp bieden bij het probleemoplossen.

De aantekening zal voornamelijk bestaan uit het volledig uitwerken van het basisprobleem en deze te annoteren met kleine zinnen of symbolen voor het verduidelijken van het oplosproces. Deze uitwerking zal verschillen met het werk op de whiteboards, aangezien deze mogelijk ook oplossingsroutes bevat die tot niets geleid zijn en in de praktijk vaak enkel een schets van de oplossing vormen. Het gevolg hiervan is dat als leerlingen de oplossing van het basisprobleem individueel volledig gaan opschrijven dat zij het oplossingsproces nogmaals doorlopen. Hierbij zullen ze de juiste stappen binnen het werk op het whiteboard moeten selecteren en moeten reproduceren. Deze stappen zullen ze tegelijkertijd moeten verantwoorden en dit mogelijk te annoteren. Door leerlingen op basis van selectie van de juiste stappen een uitwerking te laten maken en te laten annoteren maken ze een aantekening die volgens Liljedahl als betekenisvol aangemerkt kan worden [12]. Daardoor zouden de aantekeningen in de volgende lesfase door de leerlingen gebruikt kunnen worden als "worked-out example" voor wat en vooral waarom ze iets gedaan hebben [12]. De aantekening dient in dat geval als geheugensteuntje voor het oplossen van een vergelijkbaar probleem en vervolgens voor het formuleren van een algemene oplossing. Toch is de voornaamste functie van het daadwerkelijk maken van een geannoteerde aantekening dat het er voor zorgt dat de leerling de tot dan toe opgebouwde kennis in kaart brengt [7], wat de metacognitieve kennis van de leerling versterkt. Hierdoor kan het bijdragen aan ontwikkelen van de metacognitieve vaardigheden van de leerling [7], wat de leerdoelen ondersteunt. Daarnaast kan dit het vertrouwen van een leerling stimuleren, wanneer de leerling ook zelfstandig het probleem kan oplossen, wat wederom bijdraagt aan het behalen van de leerdoelen.

Op deze manier wordt er geprobeerd om van het maken van aantekening een leeractiviteit voor het leren probleemoplossen te maken. De leeropbrengst die daarbij mogelijk ontstaat van kan mogelijk nog nuttig zijn voor de leerlingen in de rest van de les.

Ontwerpeisen werkblad

Voor het maken van een betekenisvolle aantekening draagt Liljedahl het gebruik van "graphic organizers" aan [12]. Op deze manier worden leerlingen gestimuleerd om over verschillende aspecten van een onderwerp een aantekening te maken en een goed voorbeeld te selecteren. Een algemeen voorbeeld dat Liljedahl hiervoor geeft, is weergegeven in Figuur 3.1. Hiermee wordt er aan de leerlingen door middel van de kaders een richtlijn gegeven voor zelf opstellen van een aantekening van wat zij belangrijk vinden. Hierbij is het voornamelijk van belang de leerlingen aan de hand van deze "graphic organizer" een voorbeeld volledig uitwerken [12]. Hierdoor wordt deze aantekening namelijk een betekenisvolle aantekening, zie subparagraaf 3.5.1. Om dit toe te passen voor het onderwijs in probleemoplossen en in de lespraktijk wordt er daarom gekozen om een vergelijkbaar werkblad te ontwerpen dat de leerlingen helpt bij het maken van een betekenisvolle aantekening.

Vocabulary/Definition	Big Ideas/Concepts
Procedures	Examples

Figuur 3.1: Algemene "graphic organizer" voor betekenisvolle aantekeningen [12]

Voor deze lespraktijk zal het uitwerken van de oplossing van het basisprobleem dienen als een invulling op het kader "Example", zie Figuur 3.1. Zoals eerder beschreven brengt dit verschillende voordelen voor het leerproces van de leerlingen met zich mee. Het is daarom een ontwerpseis voor het werkblad dat ontworpen zal worden op enige wijze invulling geeft aan het vakje "Example", gerelateerd aan de uitwerking van het basisprobleem. "Vocabulary/Definition" lijkt in het kader van het leren probleemoplossen binnen de grenzen van algemene basis wiskundige kennis niet direct van toepassing te zijn. Er is namelijk verondersteld dat de leerlingen de categorie "wiskundige kennis" in deze lespraktijk beheersen. Daardoor is er geen noodzaak om van deze categorie te betrekken in de ontwerpseisen van dit werkblad. Voor het onderwijs in probleemoplossen lijken de kaders "Procedures" en "Big Ideas/Concepts" mogelijk meer relevant, zie Figuur 3.1. Echter geeft Liljedahl geen precieze beschrijving bij wat er met de kaders bedoeld wordt en wat de functie ervan is. Ze staan dus open voor interpretatie. Deze kaders kunnen, met betrekking tot het onderwijs in probleemoplossen (zoals samengevat is in paragraaf 3.2.3), op de volgende manier geïnterpreteerd worden. "Procedures" kan bijvoorbeeld leerlingen aanzetten tot het verwoorden van de probleemaanpak en de heuristische methoden. Op deze manier zouden leerlingen zelf gestimuleerd worden in het expliciet maken van heuristische methoden, wat een aanvulling is op het onderwijs rondom de categorie van Schoenfeld "heuristieken". "Big Ideas/Concepts" zou kunnen wijzen op het verwoorden van de mathematische kern van het probleem en daarmee het generaliseren van de oplossing of het formuleren van belangrijke opgedane inzichten tijdens het probleemoplossen. Zo zouden beide kaders bij kunnen dragen aan het onderwijs in probleemoplossen. Daarentegen kan "Procedures" ook geïnterpreteerd worden als het omschrijven van standaard stappen die onder de voorkennis vallen, zoals het oplossen van een kwadratische vergelijking. Op deze manier is dit kader meer gericht op de categorie "wiskundige kennis" van Schoenfeld, die waar in de lespraktijk niet de nadruk op ligt. Eveneens kan "Big Ideas/Concepts" leerlingen er toe aansturen om veelvuldig oppervlakkige reflectieve uitspraken te doen over het probleemoplossen of de wiskunde in het algemeen, bijvoorbeeld "met wiskunde kun je problemen oplossen". In dit geval geeft dit kader dan onvoldoende richting voor de leerlingen. Zo dragen de kaders "Procedures" en "Big Ideas/Concepts" onvoldoende aantoonbaar bij aan het probleemoplossen. Voor het onderwijs in probleemoplossen is het daarom belangrijk dat opdrachten op het werkblad, maar op één manier geïnterpreteerd kunnen worden en dat deze dus expliciet voor de leerlingen zijn geformuleerd. Dit is dan ook de eerste ontwerpseis van het werkblad dat ontworpen zal worden. Hierbij moeten de leerlingen niet alleen begrijpen wat ze moeten doen, maar moeten ook voldoende ondersteund worden om een geschikt antwoord te kunnen formuleren. Dit is voornamelijk van belang omdat leerlingen niets van het werkblad zouden leren als zij niet in staat zouden zijn zelfstandig iets op te schrijven. Daarnaast is het een ontwerpseis dat het beantwoorden van dergelijke vragen door leerling bij moet dragen aan het onderwijs in probleemoplossen dat volgens het theoretisch kader als geschikt bevonden is.

3.5.2. Reflecteren

In paragraaf 3.2 is er meerdere malen naar voren gekomen dat het leren reflecteren en het reflecteren op zichzelf waardevol is voor het onderwijs in probleemoplossen. Voor het stimuleren van reflectie is eerder in subparagraaf 3.4.2 al aangekaart dat dit bevorderd wordt door leerlingen een vergelijkbaar

probleem te laten bedenken. Ook wordt er tijdens de "gallery-walk" aandacht aan reflectie besteed door de verschillende oplossingen het bijbehorende oplossingsproces te bespreken, zie subparagraaf 3.3.2. Toch wordt er tijdens de "gallery-walk" in de lespraktijk in mindere mate gestructureerd aandacht besteed aan het verwoorden van de reflecties door de leerlingen zelf, wat benodigd is voor het behalen van het vijfde leerdoel. Daarnaast kan er altijd enige vorm reflectie plaats vinden aan het eind van de les. Dit zorgt voor een gegarandeerd leermoment, ongeacht de vordering van de leerlingen in het oplossen van het probleem. Wanneer de leerlingen door het verwoorden van hun reflecties hier een actieve rol in krijgen, worden ze meer betrokken tijdens het consolideren van een les. Dit moet vermoedelijk op een andere manier dan klassikaal, want dan worden op deze manier eerder geconstateerde beperkingen in de lespraktijk mogelijk verholpen, zie subparagraaf 2.1. In de rest van deze subparagraaf zal er meer betekenis gegeven worden aan het begrip reflectie, wat de functie van een goede reflectie is en waar deze aan moet voldoen. Vervolgens zullen er methoden worden aangedragen om het onderwijs in de lespraktijk te verbeteren.

De functie van reflectie

Zoals eerder genoemd heeft het reflecteren een directe relatie met het onderwijs in probleemoplossen en is het relevant voor het versterken van alle categorieën die Schoenfeld noemt die van belang zijn voor het probleemoplossen. Zo zorgt klassikale reflectie op de oplossing voor het versterken van de wiskundige kennis en reflectie op de oplossingsmethoden bevordert de beheersing van de categorie heuristieken [21]. Deze vormen van reflectie vallen voornamelijk onder cognitieve reflectie. Daarnaast bestaat er een andere vorm van reflectie, namelijk metacognitieve reflectie. Hieronder valt het verwoorden van het proces tijdens het probleemoplossen, wat bevorderlijk is voor het ontwikkelen van de metacognitieve vaardigheid monitoren. Verder kan het reflecteren op het eigen denken in dit proces zorgen voor het ontwikkelen van zelfvertrouwen en motivatie [7]. De combinatie van cognitieve en metacognitieve reflectie geeft leerlingen meer inzicht dat benodigd is voor het probleemoplossen [9]. Door hier aandacht aan te besteden wordt er meer nadruk gelegd op de probleemaanpak dan op het uiteindelijke antwoord, wat volgens [21] het onderwijs in probleemoplossen zal bevorderen.

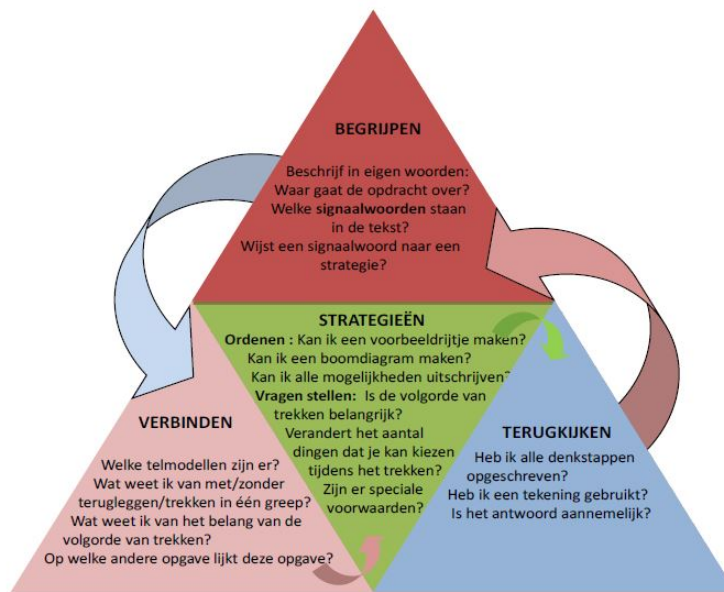
Bovendien omschrijft Freudenthal dat reflectie het wiskundige denken karakteriseert. Reflectie zorgt namelijk voor de verbinding van vorm en inhoud van de wiskunde [10]. Hierbij is de vorm relevant voor het begrijpen van een probleem of concept en slaat de inhoud op het doorzien van onderliggende patronen en de diepere betekenis ervan. Reflectie is daarom essentieel om tot een hoger abstractie niveau te komen en een oplossing te kunnen generaliseren [5]. Tegelijkertijd zorgt het voor niveauverhoging [10]. Op deze manier is reflectie een grote stimulans voor het wiskundig heruitvinden [10] en ondersteunt dit het proces van verticaal mathematiseren. Eerder in subparagraaf 3.4.2 is beschreven dat dit het de leerdoelen ondersteunt.

In de lespraktijk wordt er dus in eerste instantie vooral aandacht besteed aan cognitieve reflectie. Maar aangezien de leerdoelen voornamelijk gericht op de categorieën waar ook metacognitieve reflectie relevant voor is, kan de focus van het reflectiemoment worden verbeterd door meer specifieke aandacht aan metacognitieve reflectie te geven.

Vormgeving van bijpassend onderwijs

In de literatuur zijn er verschillende mogelijkheden beschreven voor de vormgeving van onderwijs dat het reflecteren bij leerlingen stimuleert. In deze subparagraaf zullen drie mogelijkheden verder worden uitgelicht. Daarna wordt een van de veelvoorkomende belemmeringen bij het stimuleren van reflectie besproken.

De eerste mogelijkheid sluit aan bij het individueel aantekeningen maken. Zoals eerder beschreven in 3.5.1 kunnen de kaders "Procedures" en "Big Ideas/Concepts" uit 3.1 de cognitieve en metacognitieve activiteit van leerlingen stimuleren en zo bijbehorende reflecties bij leerlingen oproepen. Op deze manier sluit het aan een van de mogelijkheden die in [7] wordt beschreven voor het stimuleren van het reflecteren en zelfmonitoring door leerlingen. Hier wordt namelijk aangedragen dat dit bevorderd kan worden door leerlingen hier een verslag van te laten maken [7]. De eerste mogelijkheid voor het stimuleren van het reflecteren door leerlingen is door hen specifieke reflecties op te laten schrijven. Dit kan bijvoorbeeld op hetzelfde werkblad dat ook zal worden ontworpen voor het individueel aantekeningen maken. Hierbij is het van belang hierbij voldoende richting te geven, zodat de leerlingen eerder komen op reflecties die het probleemoplossen ondersteunen. Eerder is dit al benoemd als ontwerpeis voor



Figuur 3.2: Metacognitieve vragenkaart V4WA Moderne Wiskunde Hoofdstuk 11: Telproblemen [9]

het te ontwerpen werkblad. De vormgeving van de opdracht op het werkblad of een verslag is daarom van belang voor de leeropbrengst.

De tweede mogelijkheid heeft, in tegenstelling tot de eerste, een verbaal karakter. Het onderwijsleergesprek waarbij de docent een sterk sturende rol heeft staat hierin centraal. Op deze manier worden de leerlingreflecties klassikaal besproken. Het verbaliseren en het communiceren hiervan heeft een stimulerende en motiverende werking [10]. Hierbij is het van belang dat de docent laat merken geïnteresseerd te zijn in de antwoorden van de leerlingen en dat de bijdragen van leerlingen een rol gaan spelen in het gesprek [10]. Ook kan de docent leerlingen helpen met het komen tot een relevante kern van een reflectie door te vragen op hetgeen dat een leerling zegt [5]. Tegelijkertijd kan de docent in het gesprek met de leerlingen feedback geven over de kwaliteit van hun reflecties, waardoor leerlingen beter leren te reflecteren [5]. Op deze manier stimuleert het formatief handelen tijdens het onderwijsleergesprek betere reflecties bij leerlingen.

Tot slot is de recent ontwikkelde META-methode een manier om leerlingen aan te sturen en te activeren tot reflectie waardoor leerlingen beter worden in het probleemoplossen [9]. Deze methode richt zich op de ontwikkeling van cognitieve en metacognitieve vaardigheden bij het probleemoplossen door het gebruik de META-kaart en/of mindmaps [9]. Om het werken met de META-kaart te motiveren bij de leerlingen kan daarnaast nog gebruik worden gemaakt van het bespreken van veel voorkomende leerovertuigingen bij leerlingen. Aangezien er eerder in subparagraaf 3.5.1 al aandacht besteed is aan het structureren en opschrijven van opgebouwde kennis, zal hier het implementeren van mindmaps buiten beschouwing worden gelaten. De META-kaart richt zich op het stimuleren cognitieve en voornamelijk metacognitieve reflectie bij leerlingen door hen een instrument te geven waarmee elke individuele leerling zichzelf vragen leert te stellen [9]. Dit instrument, de META-kaart, bestaat uit vier categorieën: "begrijpen", "verbinden", "terugkijken" en "strategieën". Met "begrijpen" en "verbinden" wordt de metacognitieve vaardigheid oriënteren gestimuleerd, met "strategieën" het plannen en monitoren en met "terugkijken" het evalueren [9]. In Figuur 3.2 is een ingevuld voorbeeld van een META-kaart gegeven die toepasbaar is bij het behandelen van een specifiek hoofdstuk. Wanneer in deze lespraktijk gebruikt gemaakt zou kunnen worden van de META-kaart, zal er eerst een ontworpen moeten worden voor deze specifieke lespraktijk. In [9] staat ook beschreven dat leerlingen de META-kaart tijdens het oplossen van problemen kunnen gebruiken, zodat ze leren welke vragen ze zichzelf kunnen stellen om verder te komen. Echter zal er in deze lespraktijk er voor worden gekozen de META-kaart enkel na het probleemoplossen in te zetten voor het stimuleren van reflectie bij leerlingen.

Voor het realiseren van deze mogelijkheden in het onderwijs zijn er een veelvoorkomende belemmering waarmee rekening gehouden moet worden. Een docent moet zich realiseren dat een leerling

geneigd is het leerproces te vergeten wanneer het doel ervan bereikt is [10], zoals het oplossen van het probleem. Toch is het van belang dit inzicht te behouden, omdat dit de basis vormt van het opbouwen van wiskundige kennis [10]. Hoewel het reflecteren na het vinden van een oplossing irrelevant lijkt te zijn, is het essentieel voor het onderwijs in probleemoplossen om een leerling hier toch toe aan te zetten. Dit is voornamelijk een uitdaging wanneer een leerling de oplossing van het probleem direct ziet [21]. Gerelateerd aan de eerder gestelde definitie van een probleem in paragraaf 3.1 kan gezegd worden dat het hier dan toch niet om een probleem blijkt te gaan. Om leerlingen in dat geval toch te motiveren om te reflecteren en een probleemanalyse te maken is het dan van belang om het niveau van het probleem te verhogen [21]. Hierdoor ervaren de leerlingen namelijk dat reflecteren noodzakelijk kan zijn [21]. In de geformuleerde lesopbouw in de lespraktijk, zie subparagraaf 3.4.2, gebeurt dit tijdens het bedenken en oplossen van een algemeen probleem en het generaliseren van de oplossing.

Ontwerpeisen vragenkaart

Voor het ontwerpen van een vragenkaart die past bij de META-methode, BTC en het probleemoplossen in een algemene wiskundige context zullen de ideeën achter de META-kaart en de "graphic organizer" van Liljedahl in Figuur 3.1 met elkaar worden vergeleken. Eerder is er namelijk al geconstateerd dat Liljedahl met zijn algemene "graphic organizer" leerlingen mogelijk ook tot reflectie wil aanzetten. De META-kaart geeft in tegenstelling tot Liljedahl meer richting aan leerlingen om tot een goede reflectie te komen bij het probleemoplossen. Door beide methoden te analyseren en vervolgens te combineren kan er een passende invulling van een vragenkaart voor de lespraktijk met de bijbehorende leerdoelen ontworpen worden.

Voor deze lespraktijk zijn de onderdelen "strategieën" en "terugkijken" van de META-kaart die over diepe kennis en denkvaardigheden gaan [9], het meest relevant. Het onderdeel "terugkijken" in de META-kaart is hierbij meer evaluerend dan reflecterend van aard. Verder is het zelf construeren van nieuwe kennis en ideeën relevant voor het verticaal mathematiseren, echter komt deze niet terug in de META-kaart [9]. Dit onderdeel kan wel aan de orde komen in de algemene graphic organizer van Liljedahl binnen het kader "big ideas/concepts". Omdat dit zorgt voor een diepergaand begrip en meer inzicht is dit voornamelijk reflecterend van aard. Daarnaast is het kader "examples" van de algemene graphic organizer van Liljedahl een toevoeging vergeleken met de META-kaart. Doordat leerlingen hiervoor een voorbeeld moeten kiezen of de oplossing van het probleem wederom moeten samenstellen op het werkblad wordt hun metacognitieve activiteit gestimuleerd, al gaat het dan niet om het specifiek verwoorden hiervan. De META-kaart heeft daarentegen wel het onderdeel "verbinden", die leerlingen er toe aanzet om het probleem te relateren aan andere en eerder opgedane kennis [9]. Voor het probleemoplossen is dit ook relevant, aangezien dit het overzicht van leerlingen op het wiskundige geheel te versterkt [21]. Verder komen de onderdelen "begrijpen" van de META-kaart redelijk overeen met het kader "vocabulary/Definition" en "strategieën" komt overeen met "procedures". Doordat de ingevulde META-kaarten per onderwerp duidelijk zijn voor leerlingen, geven ze ook meer inzicht in welke metacognitieve vragen per onderdeel relevant zijn om te stellen tijdens het reflecteren of monitoren van het oplossingsproces. Deze vragen zijn daarom ook richtinggevend voor het ontwerpen van een vragenkaart voor deze lespraktijk.

Naast dat [9] voorbeelden van geschikte metacognitieve vragen geeft, geeft [21] voor het onderdeel "terugkijken" of "terugblik" de volgende specifieke vragen. "Hoe heb je het aangepakt? Wat heeft je verder geholpen? Kun je de oplossing nog controleren? Is het probleem nog te variëren? Zijn andere modelveronderstellingen mogelijk?" [21].

Voor deze lespraktijk een nieuwe "vragenkaart" ontworpen moeten worden, die ook een onderdeel bevat voor het zelf construeren van nieuwe kennis en specifieke invulling geeft aan voornamelijk het onderdeel "strategieën" en "terugkijken". Wel moet hierbij het onderdeel "terugkijken" meer reflecterend van aard zijn dan evaluerend. Het doel is namelijk dat leerlingen het probleemoplossen leren door dit terugkijken en niet per se hun antwoord verbeteren. Het onderdeel "verbinden" zal, ondanks de voordelen, niet direct worden meegenomen. Dit onderdeel valt namelijk onder de categorie "wiskundige kennis" van Schoenfeld en zoals eerder gesteld in subparagraaf 3.4.1 is deze categorie minder relevant binnen de lespraktijk. Daarnaast zouden de vragen die onder "verbinden" vallen de leerlingen eerder inspiratie kunnen bieden tijdens het oplossen zelf of het activeren van voorkennis dan dat ze relevant zijn voor een reflectieve afsluiten van de les. Samenvattend zullen de ontwerpeisen van een nieuwe vragenkaart zijn dat deze een invulling van de onderdelen "strategieën", "terugkijken", met de nadruk op reflectie en het zelf construeren van nieuwe kennis. Hierin staat de volgende volgorde

centraal: analyseren, evalueren en reflecteren. De categorie "strategieën" moet de leerlingen namelijk aanzetten tot het analyseren van verschillende oplossingen en oplossingsstrategieën. Vervolgens moet de categorie "terugkijken" de leerlingen aanzetten tot het evalueren van hun werk. Tot slot moet de categorie "vooruitkijken" de leerlingen aanzetten tot het reflecteren en het aandragen van mogelijke toepassingen van de opgedane kennis voor in de toekomst.

4

Methodologie

In dit hoofdstuk zal de toegepaste methodologie in dit kwalitatieve onderzoek worden beschreven. Hiervoor wordt er eerst een beschrijving van Design-Based Research worden gegeven in paragraaf 4.1. Vervolgens worden in paragraaf 4.2 de gebruikte onderzoeksinstrumenten en -technieken toegelicht. Daarna zullen de data-analysemethoden worden beschreven in paragraaf 4.3. Tot slot zal in paragraaf 4.4 uiteengezet worden hoe de validiteit, betrouwbaarheid en ethische verantwoording zal worden gegarandeerd.

4.1. Design-Based Research en hypothetische doceer- en leertrajecten

Zonder het implementeren van het principe van Liljedahl over het maken van aantekeningen binnen "Thinking Classrooms" wordt er weinig aandacht besteed aan de individuele leeropbrengst binnen het groepswerk. Daarnaast worden de leerlingen in "Thinking Classrooms" in mindere mate gestimuleerd om zelfstandig te reflecteren op het probleemoplossen. De afwezigheid van deze potentiële leeropbrengsten die verband houden met de opgestelde leerdoelen in de lespraktijk zijn de redenen om dit onderzoek uit te voeren door middel van "Design-Based Research" [1]. Dit type onderzoek is er namelijk op gericht op theorieën te ontwikkelen over het leerproces van leerlingen en tegelijkertijd middelen te ontwikkelen die dat leerproces ondersteunen [1].

"Design-Based Research", afgekort als DBR, is een onderzoeksbenadering binnen het onderwijs die zich richt op het ontwerpen, implementeren en evalueren van onderwijsinterventies in echte leeromgevingen [1]. In dit onderzoek gaat het hierbij over het ontwerpen van een individueel werkblad en de vragenkaart, het implementeren van de bijbehorende lesactiviteiten en het evalueren ervan. Daarbij staat het doorlopen van verschillende cycli hypothetische doceer- en leertrajecten, afgekort als HTLT, centraal [1].

Het doel van DBR is om praktische en theoretische kennis te genereren die kan worden gebruikt om onderwijspraktijken te verbeteren en educatieve problemen op te lossen [1]. Hiermee kan ook het beoogde doel van dit onderzoek worden bereikt, namelijk het verkrijgen van meer inzicht in de effectiviteit van individuele werkbladen en het stimuleren van reflecties van leerlingen ten aanzien van het onderwijs in probleemoplossen. DBR wordt gekenmerkt door zijn cyclische en iteratieve karakter, waarbij onderzoekers voortdurend leren van en reageren op de uitkomsten van eerdere cycli om de onderwijspraktijk te verbeteren [1]. Het richt zich op het ontwikkelen van praktisch toepasbare kennis die zowel de onderwijspraktijk als de onderwijsonderzoeksgemeenschap ten goede komt [1]. DBR bestaat uit de verschillende fases: voorbereiden en ontwerpen, het onderwijs experiment en de retrospectieve analyse [1].

Hypothetische doceer- en leertrajecten begeleiden onderzoekers en leraren in Design-Based Research bij het ontwerpen, implementeren en analyseren van onderwijsinterventies [1]. Het HTLT is gebaseerd op het idee van een hypothetisch leertraject en legt de nadruk op het voorspellen van hoe studenten zullen leren en begrijpen in reactie op specifieke onderwijsactiviteiten [1]. Een hypothetisch leertraject bestaat uit drie hoofdcomponenten: de leerdoelen die de onderzoeksrichting aangeven, de leeractiviteiten voor de leerlingen en het hypothesen van het bijbehorende leerproces dat voortkomt uit

de leeractiviteiten [1].

HTLT in de DBR-fase: voorbereiden en ontwerpen

In de fase voorbereiden en ontwerpen in DBR wordt een grondige analyse gemaakt van de onderwijscontext en worden theoretische inzichten geïntegreerd om een onderwijsinterventie te ontwerpen die is gericht op specifieke leerdoelen [1]. Het HTLT begint in deze fase met een analyse van het onderwerp van de ontwerpstudie en de leerdoelen. Tijdens het ontwerpproces worden hypothesen geformuleerd over het potentiële leren van leerlingen en de rol van de leraar daarbij [1]. Vanwege de iteratieve aard van DBR behoort de beschrijving van het ontwerpproces per iteratie tot de resultaten van dit onderzoek, aangezien deze resulteren uit de bevindingen van de eerder uitgevoerde iteraties.

Als resultaat van deze fase zijn eerder in de paragrafen 3.4 en 3.5 van het theoretisch kader de potentiële leereffecten van alle iteraties beschreven. Daarnaast wordt in paragraaf 5.1 van de resultaten beschreven hoe per iteratie de docent deze leereffecten kan bevorderen. Dit wordt gedaan met een verwijzing naar de gebruikte problemen, ontworpen lesmaterialen en lesplannen in Tabel 5.1. Bovendien worden de aanpassingen die per iteratie zijn gedaan aan het ontworpen lesmateriaal benoemd en worden de hypothetische leereffecten behorend bij de lesplannen beschreven. Verder bevat HTLT in deze fase van DBR een beschrijving van de algemene wiskundige leerdoelen en de relevante voorkennis [1]. Deze leerdoelen zijn beschreven in subparagraaf 3.4.1 en voorkennis in paragraaf 2.1.

HTLT in de DBR-fase: het onderwijsexperiment

In de fase van het onderwijsexperiment worden de ontworpen onderwijsinterventies geïmplementeerd in de praktijksituatie. Tijdens deze fase worden data verzameld over het leerproces en de effectiviteit van de interventie [1]. Tijdens het experiment fungeert het HTLT als leidraad voor leraren en onderzoekers. Daarbij mogen gedurende het experiment aanpassingen aan het HTLT worden gemaakt wanneer daar op basis van observaties en ervaringen tijdens de lessen aanleiding voor is [1]. Hierdoor is het verloop van een onderwijsexperiment niet altijd volledig te voorspellen.

In de resultaten van HTLT zullen de werkelijke leereffecten per iteratie worden gedocumenteerd. Voorafgaand daaraan worden per iteratie ook de volgende zaken beschreven: de specifieke leerdoelen voor de leerlingen die de richting van het onderzoek bepalen, de bijbehorende leeractiviteiten, de mogelijke aanpassingen binnen een iteratie en de hypothetische leereffecten naar aanleiding van de leeractiviteiten [1]. Specifiek wordt dit gedaan in Tabel 5.2.

HTLT in de DBR-fase: de retrospectieve analyse

Na afloop van het onderwijsexperiment worden de verzamelde gegevens geanalyseerd om inzicht te krijgen in de effectiviteit van de onderwijsinterventie en eventuele aanpassingen voor toekomstige iteraties te identificeren [1]. Dit gebeurt in de fase van de retrospectieve analyse binnen DBR [1]. Deze fase omvat het vergelijken van observaties met voorspellingen, het identificeren van patronen en het ontwikkelen van theoretische inzichten [1]. Het HTLT wordt in deze fase gebruikt als richtlijn voor het analyseren van de gegevens die tijdens het onderwijsexperiment zijn verzameld [1]. Door observaties te vergelijken met de voorspellingen van het HTLT, kan door de onderzoeker inzicht worden verkregen in het effect van de onderwijsinterventie en mogelijke aanpassingen voor toekomstige cycli identificeren [1]. Vanwege de iteratieve aard van DBR behoort ook de beschrijving van de retrospectieve analyse per iteratie tot de resultaten van dit onderzoek, aangezien deze resulteren uit de bevindingen van de eerder uitgevoerde iteraties.

In de resultaten van de HTLT zullen daarom per iteratie de leeractiviteiten en het ontworpen lesmateriaal worden geëvalueerd. Op basis daarvan worden er verbeteringsmogelijkheden in de HTLT voor een volgende iteratie aangedragen. Dit wordt gedaan in Tabel 5.3.

4.2. Onderzoeksinstrumenten en -technieken

Tijdens het uitvoeren van de HTLT's zal er voorafgaand aan het onderwijsexperiment en daarna overleg met de uitvoerende docent van de lessen plaats vinden. Voorafgaand zullen de lessen die daarna gegeven worden besproken, de onderzoeksdoelen duidelijk gemaakt worden en de lesactiviteiten in samenspraak worden vormgegeven. Achteraf zullen de lessen worden besproken en de lesactiviteiten worden geëvalueerd.

Tijdens het onderzoeksexperiment in DBR bestaat de verzamelde data doorgaans uit onder andere leerlingwerk, observatieaantekeningen en mini-interviews met leerlingen [1]. In dit onderzoek zal deze data daarom ook tijdens vrijwel alle iteraties verzameld worden. Bovendien zullen de leerlingen gevraagd worden korte feedbackvragen op papier in te vullen en zullen de observaties van de uitvoerende docent worden verwerkt in de observatie aantekeningen. Toch is het vanwege de iteratieve en soms onvoorspelbare aard van DBR het niet altijd gelukt om in elke iteratie in de praktijk met elke dataverzamelmethode relevante data te verzamelen voor elke deelvraag. Eerder is er daarom in Tabel 2.1 hier een overzicht bij gegeven.

Het verzamelde leerlingwerk bestaat uit foto's van het groepswork op de whiteboards en scans van de ingevulde werkbladen. Tijdens de lessen zullen de leerlingen altijd eerst een probleem oplossen in groepen op het whiteboard. Vervolgens zullen zij individueel de oplossing uitwerken op het werkblad en hierop reflecteren. Hierbij kan het resulterende groepswork op het whiteboard gezien worden als een klad uitwerking en geeft het inzicht in het denkproces van de groep, voorafgaand aan het werken met het werkblad. Het werken op de whiteboards is daarom zowel een didactisch middel als een instrument voor de dataverzameling. Zo is ook het individuele werkblad zowel een potentieel didactisch middel als een instrument voor de dataverzameling voor het identificeren van het bijbehorende leereffect. In de laatste twee iteraties, iteratie 2.3 en 2.4, is bovendien de ontworpen vragenkaart ingezet als didactisch middel voor het verbeteren van de leerlingreflecties. Met het oog op de bijbehorende dataverzameling wijkt de formulering van de opgaven op de werkbladen uit die iteraties af van de eerdere iteraties. Hierdoor is het werkblad in iteratie 2.4 enkel ingezet als instrument voor de dataverzameling en heeft het geen bewuste didactische functie.

De observatieaantekeningen bestaan uit algemene aantekeningen en aantekeningen bij vooraf opgestelde observatiepunten. Gedurende de hele les zal er door de onderzoeker algemene aantekeningen over het verloop van de les gedaan worden. Hiermee wordt er een beeld geschetst van de uitvoering van de vooraf opgestelde lesplannen. Daarnaast worden er vooraf aan een les specifieke observatiepunten opgesteld om de hypothesen van een iteratie gericht te kunnen onderzoeken en daarmee theoretische inzichten te verbinden met uitkomsten in de praktijk. Bij elk van deze observatiepunten is een reden gedocumenteerd, om de bijbehorende onderzoeksdoeleinden te herinneren. Hierdoor kunnen de observaties gericht worden uitgevoerd. Gedurende een les zal er een opvatting over deze punten worden gevormd door de onderzoeker en zullen deze na de les worden besproken met de uitvoerend docent.

Verder zullen er door de onderzoeker mini-interviews met enkele willekeurige leerlingen aan het eind van de les worden uitgevoerd. Mini-interviews van ongeveer twintig seconden tot ongeveer vier minuten kunnen namelijk erg nuttig zijn voor het onderzoek wanneer deze systematisch worden uitgevoerd [1]. De vragen voor deze mini-interviews zijn daarom per iteratie vooraf opgesteld naar aanleiding van de onderzoeksdoeleinden van die iteratie. Om deze te herinneren en daardoor de interviews gericht te kunnen begeleiden is bij elk van de vragen ook de reden beschreven. De antwoorden die de leerlingen in deze mini-interviews geven zullen de verklaring voor hun ervaringen inzichtelijker maken. Tijdens het uitvoeren van de mini-interviews is het van belang de vragen niet sturend naar een bepaald antwoord te laten zijn. De leerlingen moeten namelijk uit zichzelf een eerlijk antwoord kunnen formuleren en daarbij niet beïnvloed zijn.

Daarnaast zullen er korte feedbackvragen aan iedere leerling gesteld. Dit zal gedaan worden door middel van een extra opgave op het werkblad. Op deze manier zal systematisch de ervaring van iedere leerling in kaart worden gebracht. In deze opgaven worden gesloten vragen gesteld, naar aanleiding van de bijbehorende onderzoeksdoelen van de iteratie. Daarnaast zal er in een optionele open vraag gevraagd worden naar algemene feedback voor de lessen.

4.3. Data-analysemethoden

Na afloop van het onderwijsexperiment worden de verzamelde gegevens geanalyseerd om inzicht te krijgen in de effectiviteit van de onderwijsinterventie en eventuele aanpassingen voor toekomstige iteraties te identificeren [1]. Deze fase omvat het vergelijken van observaties met voorspellingen, het identificeren van patronen en het ontwikkelen van theoretische inzichten [1]. Een beschrijving van deze analyses is specifiek voor dit onderzoek en bevindt zich daarom binnen de resultaten, zie paragraaf 5.1. Na het uitvoeren van alle iteraties in dit onderzoek kan een overkoepelende analyse worden uitgevoerd.

In deze analyse zullen de resultaten uit alle iteraties samen worden genomen voor het beantwoorden van de deelvragen van dit onderzoek. Eerder is in Tabel 2.1 weergegeven welke data uit welke iteratie relevant is voor het beantwoorden van een bepaalde deelvraag.

Bij het analyseren van de algemene aantekeningen, de specifieke observatie aantekeningen, de mini-interviews en de korte feedbackvragen zijn deze "thematisch gecodeerd" [4]. De thema's omvatten de vier verschillende deelvragen van dit onderzoek. Op deze manier zal worden nagegaan of de theoretische inzichten uit de literatuur terugkomen in de lespraktijk [4]. Vervolgens zijn de resultaten hiervan per thema verwerkt in de desbetreffende paragrafen in de resultaten van dit onderzoek. Aanvullend op deze analyse zijn er per deelvraag andere analyses uitgevoerd. Deze zullen in het vervolg van deze paragraaf worden beschreven.

Voor het beantwoorden van de eerste deelvraag van dit onderzoek, over het implementeren van individuele werkbladen, is het individuele leerlingwerk geanalyseerd aan "de hand van categorieën" [4]. De categorieën die hierbij zijn gebruikt zijn de categorieën die Schoenfeld aandraagt die van belang zijn bij het probleemoplossen en de wiskundige denkactiviteiten van Drijvers. Hiermee kan worden geconstateerd of er meer individuele bewustwording ontstaat over deze belangrijke onderdelen. Daarnaast is het individuele leerlingwerk vergeleken met het voorafgaande groepswerk. Hiermee kan worden geconstateerd of het individuele werk mogelijk explicieter is of dat er inhoudelijke toevoegingen worden gedaan.

Voor het beantwoorden van de tweede deelvraag van dit onderzoek, over de kenmerken van betekenisvolle leerlingreflecties, zijn de leerlingreflecties afkomstig uit verschillende data geanalyseerd. Hiervoor zijn zowel de geschreven leerlingreflecties uit het individuele leerlingwerk als de verbale leerlingreflecties, gedocumenteerd in de observatieaantekeningen, gebruikt. Deze data is open gecodeerd" [4]. Zo is aan elke reflectie van een leerling een label toegekend met een bijbehorende specificering. Vervolgens zijn de labels met vergeleken met de van de aanbevelingen voor onderwijs in probleemoplossen, categorieën van de META-kaart en de 'graphic organizers'. Hiermee kan geconstateerd worden of de reflecties van betekenis zijn ten aanzien van het leren probleemoplossen. Daarnaast worden de leerlingreflecties gerelateerd aan de categorieën op de te ontwerpen vragenkaart. Deze categorieën volgen uit de opgestelde ontwerpeisen in het theoretisch kader, zie subparagraaf 3.5.2.

Voor het beantwoorden van de derde deelvraag van dit onderzoek, over het stimuleren van betekenisvolle reflecties van leerlingen, is onder andere de vragenkaart ontworpen. Hiervoor is per betekenisvol label bij een reflectie van een leerling een vraag bedacht die daartoe zou kunnen leiden. Daarnaast is er data geanalyseerd voor het vergelijken van de effectiviteit van de verschillende geïmplementeerde lesactiviteiten voor het reflecteren. Hiervoor zijn de aantallen van de eerder geconstateerde betekenisvolle kenmerken van leerlingreflecties vergeleken per iteratie. Wanneer er in de iteraties met de vragenkaart meer betekenisvolle kenmerken worden genoemd, heeft dit bijvoorbeeld een positief effect gehad op het leren probleemoplossen. Ter vergelijking worden ook de aantallen van de niet betekenisvolle reflecties vergeleken.

Voor het beantwoorden van de vierde deelvraag van dit onderzoek, over het strategisch inzetten van de ontworpen, is het leerlingwerk geanalyseerd. Hiermee kunnen nieuwe inzichten ontdekt worden wat betreft de ervaringen van de leerlingen ten aanzien van de gebruikte problemen en tijdens de lesactiviteiten voor het probleemoplossen.

4.4. Validiteit, betrouwbaarheid en ethiek

Voor het waarborgen van de validiteit binnen dit onderzoek is er tegelijkertijd gebruik gemaakt van meerdere soorten dataverzamelmethode, zoals eerder in dit hoofdstuk zijn beschreven. Hierdoor kunnen de opgedane inzichten door de docent van de lespraktijk en de onderzoeker worden vergeleken met de perceptie van de leerlingen. Op deze manier kunnen ontwikkelde inzichten geverifieerd kunnen worden. Verder zal door de iteratieve benadering van DBR de interne validiteit worden gewaarborgd door middel van het testen en verfijnen van aannames door opeenvolgende experimenten [1]. Daarnaast zal het analyseren van meerdere soorten data bijdragen aan het waarborgen van de interne validiteit [1]. Bovendien zullen praktijkcontexten uitgebreid worden gedocumenteerd voor het onderbouwen van de opgedane theoretische inzichten [1]. Dit is voornamelijk gedaan door middel van appendix C en D. Aangezien DBR plaatsvindt in een specifieke lespraktijk is het uitdaging om de resultaten zo weer te geven dat de externe validiteit gewaarborgd wordt [1]. Daarom wordt er getracht om de resultaten zo te presenteren dat deze aangepast kunnen worden aan andere specifieke contexten

[1]. In dit onderzoek zal het daarom gaan om bijvoorbeeld het herkennen van verschillende kenmerken, zoals kenmerken van geschikte ontwerpen en leerlingreflecties. Ook kan de generaliseerbaarheid van DBR worden geïdentificeerd door het voorkomen van succesvolle implementaties van inzichten uit eerdere iteraties in volgende [1].

Om de interne betrouwbaarheid van dit onderzoek te waarborgen zal er op verschillende momenten overleg tussen de onderzoeker en de docent van de lespraktijk plaatsvinden. Zo zijn er voorafgaand aan een onderwijsexperiment nieuwe ideeën voor implementaties in de les besproken. Achteraf zijn de observaties van de docent en de onderzoeker besproken. Op basis daarvan zijn de observatie-aantekeningen verfijnd. Daarnaast zijn er ook enkele objectieve data verzameld. Hieronder valt het leerlingwerk, waarin de juistheid gegeven antwoorden kan worden beoordeeld, en sommige gesloten feedbackvragen. De kwaliteit van de gegeven antwoorden van de leerlingen is ook besproken door de onderzoeker en de docent van de lespraktijk. Op basis hiervan zijn onder andere de labels bedacht voor het analyseren van de reflecties van leerlingen. Verder is er voor het analyseren van de ingevulde werkbladen door de leerlingen overleg gevoerd met een andere onderwijsexpert. Tijdens deze bespreking is een steekproef van de data bekeken en geanalyseerd naar aanleiding van de thema's "wiskundige denkactiviteiten" en de categorieën van Schoenfeld. Vervolgens zijn gebaseerd op eenzelfde redenering ook de andere data geanalyseerd. Voor het waarborgen van de externe betrouwbaarheid moet het onderzoek zodanig worden gedocumenteerd dat het duidelijk is hoe het is uitgevoerd en hoe de conclusies daaruit volgen [1]. Hierdoor moet de lezer het doorlopen proces zelf ook kunnen ervaren [1]. In dit onderzoek zijn daarom de doorlopen fasen van DBR gedetailleerd beschreven aan de hand van de hypothetische doceer- en leertrajecten, zie 5.1.

Tijdens het onderzoek worden de leerlingen geïnformeerd dat er in die lessen onderzoek wordt gedaan en de manier waarop dat wordt gedaan. Zo wordt er verteld dat de lesactiviteiten soms iets worden aangepast, dat er foto's van de whiteboards worden gemaakt, de werkbladen moeten worden ingeleverd en hen om feedback zal worden gevraagd. Er zal de leerlingen verzekerd worden dat het maken van fouten of het geven van eerlijke feedback op de les voor hen geen nadelige invloed voor hen zal hebben. Daarnaast is het in het belang van hun eigen leerproces om de lesactiviteiten wel zo goed mogelijk uit te voeren. Daarbij wordt er duidelijk gemaakt dat de leerlingen geen cijfer krijgen voor het door hen gemaakte werk en het inleveren van het werk hun schoolcijfers niet zal beïnvloeden. Dit wordt gedaan om de leerlingen te motiveren om de lesactiviteiten naar behoren uit te voeren en dat zij daarvoor niet weerhouden worden door de angst voor het maken van fouten. Verder zal worden verteld dat het geven van eerlijke feedback noodzakelijk is voor de vooruitgang van het onderzoek en daarmee het verbeteren van de lessen. Op deze manier worden de leerlingen gestimuleerd de lesactiviteiten uit te voeren, zonder dat zij nadelige invloed hoeven te ervaren door het uitvoeren van het onderzoek. Verder zal er vertrouwelijk omgegaan worden met de gegevens door deze enkel te delen met direct betrokkenen.

Bovendien worden de genoteerde namen na het verkrijgen van de data geanonimiseerd worden. Dit is gedaan door per iteratie naar iedere leerling te verwijzen een getal en letter. Het getal correspondeert met het groepsnummer waarin de leerling heeft samengewerkt tijdens die les. Voor het maken van onderscheid tussen de leerlingen is binnen een groep aan iedere leerling een andere letter toegekend. In iteratie 2.1 bestaat groep 3 bijvoorbeeld uit leerling 3a, 3b en 3c. Het is van belang om op te merken dat op deze manier naar eenzelfde leerling die meerdere lessen aanwezig is op verschillende manieren wordt verwezen.

5

Resultaten

In dit hoofdstuk bevinden zich de resultaten van dit onderzoek. Allereerst wordt er in de eerste paragraaf een beschrijving van het iteratieve proces van DBR met hypothetische doceer- en leertrajecten beschreven, zie 5.1. Vervolgens staat er in de paragrafen 5.2, 5.3, 5.4 en 5.5 per paragraaf een andere deelvraag centraal. In de eerste subparagrafen van die paragrafen worden de resultaten uit alle iteraties gerelateerd aan de desbetreffende deelvraag beschreven. In elke subparagraaf staat een andere dataverzamelmethode centraal en wordt de resulterende data per iteratie gepresenteerd. Vervolgens zullen deze resultaten in de subparagrafen van de overkoepelende analyse in het geheel worden geanalyseerd.

5.1. Gedetailleerde beschrijving uitvoering DBR

Eerder in paragraaf 2.3 een algemene beschrijving van de uitvoering van dit onderzoek geven. Aangezien de opgedane en vervolgens geteste inzichten gedurende het iteratieve proces van DBR zijn onderzocht, behoort een gedetailleerde beschrijving van dit proces tot de eerste resultaten van dit onderzoek. Dit wordt gedaan door de resultaten van de HTLT's per fase van DBR te beschrijven.

De volgende drie Tabellen geven een overzicht van de doorlopen hypothetische doceer- en leertrajecten in de DBR-fases en de belangrijkste resultaten per iteratie. Hierbij is eerst de eerste iteratie van Tabel van Tabel 5.1 doorlopen, vervolgens de eerste iteratie van Tabel 5.2 en daarna de eerste iteratie van Tabel 5.3. Hiermee is de eerste cyclus van DBR voltooid. Vervolgens is van elke Tabel achtereenvolgens de tweede iteratie doorlopen, enzovoorts.

In Figuur 5.1 worden de voornaamste zaken binnen de fase "voorbereiden en ontwerpen" genoemd. De resultaten die hierin te vinden zijn worden ondersteund door verschillende appendixen. De in de Tabel genoemde problemen zijn terug te vinden in appendix A. De gebruikte lesmaterialen zijn in appendix K en L gepresenteerd. De aanpassingen van het lesmateriaal en de lesplannen zijn gedetailleerder beschreven in appendix J. Verder zijn er in appendix B de bijbehorende lesplannen ter voorbereiding van de lessen te vinden. Om de invulling van deze fase compleet te maken bevatten paragrafen 3.4 en 3.5 een beschrijving van de algemene wiskundige leerdoelen, de voorkennis van de leerlingen en aannames over de leerpotentie van leerlingen. Deze beschrijving is relevant voor alle iteraties.

In Figuur 5.2 worden de voornaamste leerdoelen voor de leerlingen genoemd die passen bij de onderzoeksdoelen per iteratie. In paragrafen 3.4 en 3.5 zijn deze verder toegelicht. Daarnaast worden de bijbehorende leeractiviteiten en hypothetische leereffecten kort omschreven. Wanneer er gedurende een les is afgeweken van het opgestelde HLT vanwege onvoorziene omstandigheden of situaties is dit ook genoteerd. Vervolgens zijn de geconstateerde werkelijke leereffecten tijdens het uitvoeren van de iteratie benoemd. Een meer gedetailleerde context van deze resultaten is gegeven in appendix C en D.

Tot slot vat Figuur 5.3 per iteratie de belangrijkste evaluatie punten en de verbeteringsmogelijkheden samen. Deze volgen uit de verzamelde data van een iteratie. Het gaat hierbij om informatie behorende bij de desbetreffende deelvraag uit de appendices C, D, E, M en N. Gebaseerd op deze evaluatie en verbeteringsmogelijkheden is een volgende iteratie voorbereid zoals in Tabel 5.3 is beschreven.

	Probleem	Ontworpen Lesmateriaal	Aanpassingen lesmateriaal en hypothese	Aanpassingen lesplannen en hypothese
1.1	Het zwembad	Werkblad met drie opgaven en voorbeeld.	Gebaseerd op ontwerpeisen uit 3.5.1. Voorbeeld gebaseerd op opgave uit [12].	Na het oplossen van het basisprobleem op whiteboards, werken leerlingen individueel aan het werkblad aan tafels. Dit stimuleert mogelijk de individuele leeropbrengst. Het moment hiervan is afhankelijk van de voortgang van een groep. Als er voldoende tijd is kunnen zij hierna verder met op het whiteboard met het bedenken oplossen van vergelijkbare problemen.
1.2	VIP in de woestijn	Werkblad met twee opgaven en voorbeeld.	De lay-out is overzichtelijker en korter voor meer motivatie van de leerlingen. Formulering van opgave 2 is verbeterd. De inhoud van het voorbeeld opgave 2 is gebaseerd op leerlingwerk om het betekenisvoller te maken. Opgave 3 verwijderd, deze is overbodig geworden en zou daarom afleidend werken.	Om het leereffect te verbeteren, moet de docent het werkblad en voorbeeld klassikaal introduceren en motiveren. Er wordt een tijdslimiet gesteld voor het werkblad. Dit een belemmering in de overgang terug naar het whiteboard. Leerlingen moeten actief door de docent worden doorverwezen naar deze vervolgactiviteiten om hun betrokkenheid te waarborgen.
2.1	Munten wegen	Werkblad met twee opgaven en voorbeeld. Voorbeeld vragen voor de docent, zie appendix A.	Er is een hulpvraag toegevoegd bij opgave 2, voor het stimuleren van specifiekere reflecties gebaseerd op het verwoorden van de mathematische kern van het probleem. De uitwerking van het voorbeeld is gedigitaliseerd voor overzicht en verduidelijking.	De antwoorden op opgave 2 van het werkblad worden besproken om leerlingen te motiveren dit zo goed mogelijk te doen, samen met de leerlingen betekenis te geven aan een goede reflectie, de leerlingen te leren wat een goede reflectie is en helpen te reflecteren door te vragen elkaar tips te geven over de probleemaanpak. Mogelijk zullen hierdoor de antwoorden van de leerlingen op opgave 2 uiteindelijk verbeteren.
2.2	Red de drenkeling	Werkblad met twee opgaven en voorbeeld.	Het voorbeeld van het werkblad is algemener gemaakt, zodat leerlingen die eerder niet aanwezig waren tijdens de lessen dit ook begrijpen. Verder is er een tip gegeven op het voorbeeld om op een overzichtelijke wijze leerlingen te stimuleren over toegepaste heuristieken na te denken en deze te verwoorden.	Om de deels nieuwe groep leerlingen eerst kennis te laten maken met BTC is de inhoud van het lesplan vereenvoudigd. De les omvat hoofdzakelijk het oplossen van het basisprobleem, het werkblad en eventueel het oplossen van een vergelijkbaar probleem en het generaliseren van de oplossing.
2.3	Kluisjes open en dicht	Werkblad met twee opgaven en voorbeeld. Vragenkaart.	De functie van de oorspronkelijke tweede opgave op het werkblad is vervangen voor een lesonderdeel waarmee leerlingen werken met de ontworpen vragenkaart. Deze vragenkaart bevat vragen die sturend zijn naar geconstateerde betekenisvolle leerlingreflecties. De tweede opgave op het werkblad is vervangen voor twee anderen opgaven, met dataverzameling als voornaamste functie.	Leerlingen zullen nu voornamelijk mondeling reflecteren in nieuwe gemengde groepen met behulp van de vragenkaart. Dit is effectiever gebleken en daarbij stimuleren gemengde groepen interessante gesprekken. Het werken met de vragenkaart zal plaats vinden na het mogelijk uitbreiden van het probleem. Zo verhogen groepen indien nodig de moeilijkheidsgraad van het probleem, waardoor het reflecteren mogelijk makkelijker is. Voorafgaand werken de leerlingen aan de eerste opgave van het werkblad.
2.4	Het chipspel	Werkblad met twee opgaven voor dataverzameling. Vragenkaart.	De eerste opgave op het werkblad is achterwege gelaten, aangezien dit niet direct relevant is gezien de leerdoelen. Het voorbeeld achterwege gelaten om de leerlingen niet met te veel lesmaterialen te laten werken. Het rode vlak op de vragenkaart is verwijderd om de vragenkaart compacter te maken, waardoor de vragenkaart mogelijk aantrekkelijker is voor de leerlingen. Dit was ook van ondergeschikt belang aan de andere categorieën. Er is voor een basisprobleem gekozen dat waarschijnlijk gemakkelijk op te lossen is en uit te breiden is. Zo zal er voldoende gelegenheid in de les over blijven voor het werken met de vragenkaart.	Om het werken met de vragenkaart te motiveren zal dit tijdens de introductie worden toegelicht. Ook zal voorafgaand aan het werken met de vragenkaart hier een volledige instructie voor worden gegeven. Verder zal voor het werken met de vragenkaart op de oplossing van het basisprobleem geconsolideerd worden om leerlingen bevestiging te geven van hun werk, waardoor zij mogelijk met meer zelfvertrouwen met elkaar in gesprek kunnen gaan. Pas na het werken met de vragenkaart krijgen de leerlingen het werkblad om hen tijdens het voeren van gesprekken hier niet mee af te leiden. Tot slot wordt de vragenkaart besproken en kunnen leerlingen hun werkbladen aanvullen.

Tabel 5.1: DBR-fase 1: HTLT in de fase van voorbereiden en ontwerpen

Zie ook paragraaf 3.4 en 3.5 en appendix A, B, J, K en L

	Leerdoelen	Leeractiviteiten	Hypothetische leereffecten	Aanpassingen binnen de HTLT gedurende een iteratie	Werkelijke leereffecten
1.1	Individueel begrip verhogen, d.m.v. 'modes of engagement' [12]: 1. 'Doing': het probleem kunnen oplossen. 2. 'Justifying': de oplossing kunnen reproduceren. 3. 'Explaining': de oplossing kunnen uitleggen. 4. 'Teaching': leerlingen kunnen elkaar helpen bij het formuleren van de oplossing. 5. 'Creating': leerlingen kunnen een vergelijkbaar probleem bedenken en oplossen.	BTC met individueel werkblad: 1. Groepswerk op whiteboards. 2. Individueel werkblad opgave 1 3. Individueel werkblad opgave 1 en 2 4. Leerlingen kunnen elkaar helpen met het werkblad 5. Individueel werkblad opgave 3	Maakt stapsgewijze niveauverhoging mogelijk en daardoor ook het verticaal mathematiseren, waardoor leerlingen beter kunnen worden in het probleemoplossen [10].	N.v.t.	Het werkblad stimuleert bij sommige leerlingen niveauverhoging doordat zij hun uitwerking volledig en netter opschrijven en hun aanpak generaliseren, maar velen ervaren geen bewuste leermomenten. Het formuleren van betekenisvolle antwoorden bij de tweede opgave vinden leerlingen lastig. Enkele leerlingen helpen elkaar met het werkblad.
1.2	Naast de leerdoelen van iteratie 1.1 worden er in deze les de volgende leerdoelen toegevoegd. 1. Heb belang van een individuele nette uitwerking inzien. 2. Begrijpen dat de tweede opgave van het werkblad bedoeld is om van het probleemoplossen te kunnen leren.	Aanvullend op iteratie 1.1, wordt er tijdens de introductie het leermoment toegevoegd voor de additionele leerdoelen.	Aanvullend op iteratie 1.1 zullen de leerlingen nu mogelijk meer motivatie hebben voor het werken aan het werkblad. Daarom meer leerlingen mogelijk het werkblad volledig en uitgebreider invullen.	N.v.t.	Sommige leerlingen hebben meer inzicht gekregen door de eerste opgave van het werkblad, inclusief het ontdekken en verbeteren van fouten. Anderen vinden het lastig om de oplossing begrijpelijk op te schrijven. Sommige leerlingen vonden het probleem te makkelijk. Ook waren er leerlingen bezig met het uitbreiden en generaliseren van de oplossing.
2.1	Naast de leerdoelen van iteratie 1.1 worden er in deze les de volgende leerdoelen toegevoegd. Deze leerdoelen zijn in deze iteratie groter belang dan de eerder opgestelde leerdoelen. 1. De leerlingen kunnen reflecteren op de oplossing. 2. De leerlingen kunnen reflecteren op het oplossingsproces.	Aanvullend op het werkblad zal er een onderwijsleergesprek plaatsvinden voor het behalen van de additionele leerdoelen.	Door het bespreken en gezamenlijk zoeken naar betekenisvolle reflecties gaan de leerlingen mogelijk beter het belang ervan ervaren en hoe je moet reflecteren. Zo zullen de resultaten op de tweede opgave van het werkblad mogelijk verbeteren.	Het oplossen van het probleem bleek lastiger dan gedacht. Er wordt daarom op een later moment besloten om alle groepen tegelijkertijd aan het werkblad te laten werken. De leerlingen gaan nu door elkaar zitten. Door tijdgebrek werd dit niet gecorrigeerd en is er niet gevraagd om leerlingen elkaar tips laten geven. Bovendien was er concentratiegebrek bij de leerlingen.	De reflectieve opgave op het werkblad heeft bij iets meer dan de helft van de leerlingen voor meer inzicht op een beetje meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gezorgd. De rest van de leerlingen geven aan dat deze opgave hierop geen effect heeft. Verder worden er tijdens de klassikale bespreking worden er enkele goede aanvulling gedaan.
2.2	Naast dat in deze les de algemeen opgestelde leerdoelen voor het probleemoplossen in deze lespraktijk centraal zullen staan is het voornamelijk van belang dat deze deels nieuwe groep leerlingen begrijpt hoe BTC in zijn werk gaat en hoe de problemen in deze lessen zijn opgebouwd.	Problemen oplossen doormiddel van BTC, gecombineerd met de ideeën over verticaal mathematiseren en het gebruik van het werkblad.	De leerlingen leren wat er van hen wordt verwacht tijdens deze manier van lesgeven. Hierbij leren ze dat er na het oplossen van het basisprobleem het de bedoeling is om verder te denken en dus onder andere vergelijkbare problemen moet gaan oplossen.	Er is niet aan het werkblad gewerkt en geen vergelijkbaar probleem opgelost, maar dit is wel toegelicht. Het probleem bleek namelijk lastiger dan gedacht, waardoor er meer tijd voor nodig was. Om de leerlingen hierbij te helpen is er besloten om tussendoor te consolideren gebaseerd op de whiteboards en uitleg van leerlingen.	Er is logischerwijs geen leeropbrengst rondom het werken met BTC en beperkte leeropbrengst rondom het werken met het werkblad en het uitbreiden van het probleem.
2.3	In deze les zullen de volgende leerdoelen voornamelijk van belang zijn. 1. Het kunnen voeren van gesprekken met medeleerlingen over het probleemoplossen. 2. Het kunnen verwoorden van een betekenisvolle reflectie over het probleemoplossen.	1. Door nieuwe groepssamenstellingen zullen de leerlingen gestimuleerd worden om te converseren en ideeën uit te wisselen. 2. Door de vragen van de vragenkaart mondeling te beantwoorden zijn de leerlingen bezig met het betekenisvol reflecteren op het probleemoplossen.	Door verbale interactie, zullen leerlingen gemakkelijker en specifiekere kunnen reflecteren dan individueel. De vragenkaart zal richting geven voor metacognitieve reflecties om deze reflecties betekenisvol te maken. Voorafgaand zal de eerste opgave van het werkblad zorgen voor het benodigde cognitieve niveau.	Het probleem bleek moeilijker dan gedacht, waardoor dit meer tijd kostte. Anders zouden minder leerlingen het benodigde cognitieve behalen. Er is later op een centraal moment overgegaan op het werken met het werkblad en de vragenkaart. De leerlingen gaan door elkaar of alleen zitten. Door tijdgebrek werd dit niet gecorrigeerd.	Het werkblad en de vragenkaart hadden door tijdgebrek een beperkt leereffect. Daarnaast konden de leerlingen die alleen zaten niet overleggen. Verder had het probleem geen duidelijke oplossing, wat voor onzekerheid en misconcepties zorgde. Wel zijn er twee leerlingen geweest die voornamelijk met elkaar en met de docent in gesprek zijn geweest over de algemene oplossing van het probleem.
2.4	De leerdoelen omschreven in iteratie 2.3 zijn wederom van het voornaamste belang.	Wederom zal het werken met de vragenkaart hieraan bijdragen, zie iteratie 2.3.	Deze iteratie heeft hetzelfde hypothetische leereffect als bij iteratie 2.3. Enkel het effect van de eerste opgave van het werkblad is hier irrelevant.	Er is niet voor het werken met de vragenkaart geconsolideerd, aangezien er voldoende interactie met de docent is geweest en niemand onzeker leek te zijn. Tijdens de afsluiting van de les zijn de whiteboards wel besproken.	Een van groepen was snel klaar met de vragenkaart en voerde dus maar beperkt gesprekken. Een andere groep legde elkaar de oplossing en de gebruikte notatie uit. Zij gebruikte de vragenkaart verder als afvinklijst. De derde groep beantwoordde enkele vragen en daarna ging een deel van de groep oplossingen van vergelijkbare problemen bespreken.

Tabel 5.2: DBR-fase 2: HTLT in het onderwijsexperiment

Zie ook paragraaf 3.4 en 3.5 en appendix C en D.

	Evaluatie leeractiviteiten	Evaluatie ontworpen lesmateriaal	Verbeteringsmogelijkheden HTLT
1.1	De activiteit van de leerlingen wisselde. Sommige waren er lang mee bezig en anderen waren zo klaar. Daarnaast verliep de overgang van werkblad naar whiteboard niet vanzelf, aangezien de leerlingen wachtten verdere instructies van de docent. Veder begonnen enkele leerlingen al met het formuleren van een algemene oplossing tijdens het werken aan het werkblad.	Ongeacht de kwaliteit van de inhoud hebben leerlingen minder ruimte nodig voor hun antwoorden. Het werkblad is dus onnodig groot. Daarnaast gaan de meeste leerlingen die eerder klaar zijn niet aan het werk met de derde opgave. Verder behalen niet alle leerlingen het gewenste resultaat op het werkblad, mogelijk door onduidelijke opdrachten of gebrek aan motivatie.	Om het werkblad en het voorbeeld te verduidelijken en om dit te motiveren zal dit van tevoren moeten worden toegelicht door de docent. Daarnaast kan een overzichtelijker en compacter ontwerp en betere formuleringen van de opgaven helpen. Om er voor te zorgen dat het werken aan een vergelijkbaar probleem en het generaliseren van de oplossing wederom in groepen op de whiteboards plaats vindt, kan er een tijdslimiet voor het werkblad gesteld worden, de dan overbodige opgave 3 verwijderd worden en kan de docent de leerlingen actief doorverwijzen naar het whiteboard als ze met het werkblad klaar zijn.
1.2	Een tijdslimiet van 5 tot 10 minuten is voldoende om aan het werkblad te werken en een goed antwoord te formuleren. Als deze limiet wordt overschreden of als leerlingen na 5 minuten niets meer doen, is het beter om ze door te verwijzen naar het whiteboard. Dit heeft geleid tot meer betrokkenheid van leerlingen bij het werken aan vergelijkbare of algemene problemen en bevorderde samenwerking.	Alle ondervraagde leerlingen zeiden dat het werkblad is verbeterd ten opzichte van de eerste iteratie. Hierbij vonden ze voornamelijk prettig dat het nu op één A4'tje paste. Daarnaast geven de meeste leerlingen aan dat de tweede opgave helpt bij het verticaal mathematiseren. Toch vinden leerlingen dit wel moeilijk om op het probleem betekenisvol te reflecteren als het probleem eenmaal is opgelost of als het te makkelijk was om het op te lossen.	Leerlingen blijven het reflecteren een lastig onderdeel vinden, dit kan verbeterd worden door het werkblad en het voorbeeld specifiek te maken en aandacht te besteden aan het leren reflecteren. Voor het laatste kan het handig zijn om door te vragen op hetgeen dat de leerlingen zeggen. De gegeven antwoorden op opgave 2 zijn namelijk eerder onvolledig dan direct fout. Verder kan het verhogen van de moeilijkheidsgraad van het probleem een oplossing bieden om het reflecteren makkelijker te maken wanneer leerlingen gemakkelijk tot de oplossing zijn gekomen [16].
2.1	Tijdens de klassikale bespreking van de reflectie deden leerlingen goede aanvullingen, vooral over verschillende oplossingsstrategieën. Hoewel dit interessante gesprekken veroorzaakte, schreven leerlingen hier maar weinig van op. De nieuw gevormde groepen stimuleerden de uitwisseling van nieuwe informatie. Het gesprek tussen leerlingen maakte de overgang naar een klassikale bespreking lastig en er was weinig concentratie aan het einde van de les.	De leerlingen geven aan dat hulpvraag c, "Waar moest je rekening mee houden?", hen het meest heeft geholpen bij het formuleren van een goede reflectie. Hulpvraag b, "Wat ging er goed? Waarom?", het minst.	Het lijkt voor de leerlingen gemakkelijker te zijn om samen in groepjes verbaal te reflecteren op het probleem. Ook de nieuwe groepssamenstellingen lijken interessante gesprekken en daarmee betere reflecties te stimuleren. Voor het stimuleren van betekenisvolle leerlingreflecties is het dus mogelijk beter dit voornamelijk met een verbale werkvorm te doen, in plaats van doormiddel van een werkblad met een bijbehorend voorbeeld.
2.2	Wanneer het probleem nog niet volledig is opgelost is er meer aandacht voor elkaars werk en de centrale besprekingen, omdat deze informatie nodig is om verder te komen. Leerlingen luisteren nu zelfs meer naar elkaar dan eerder tijdens een klassikale bespreking. Ook stimuleert dit het contact tussen groepen, waardoor het oplosproces versnelt.	N.v.t.	Wanneer het oplossen van een probleem langer duurt of moeilijker is dan gedacht kan het leerlingen helpen om begeleid door de docent elkaar wat uit te leggen. In dit geval hebben leerlingen hier wel aandacht voor. Ook stimuleert dit op dit moment aandacht voor het werk van andere leerlingen, waardoor meer leerlingen naar de juiste oplossing zullen convergeren.
2.3	Leerlingen hadden door onzekerheid en heersende misconcepties moeite met het werkblad en de vragenkaart. Daarnaast was er te weinig tijd door de moeilijkheidsgraad van het probleem en de vele nieuwe lesmaterialen. Verder had het uitbreiden van het probleem er voor gezorgd dat er een aantal leerlingen meer interesse hadden om met elkaar en met de docent over het uitbreiden van het probleem te praten, dan het werkblad.	Alle leerlingen vinden dat de vragenkaart in meer of mindere mate helpt bij het uitleggen van hun denkstappen en dat dat deze uitleg grotendeels begrepen werd door de leerlingen uit de andere groepjes. De categorie 'terugkijken' was hierbij het meest behulpzaam en daarna de categorie 'strategieën'. De categorie 'voortuitkijken' was het minst behulpzaam.	Om te voorkomen dat onzekerheid en misconcepties het werken met het werkblad en de vragenkaart belemmeren kan het mogelijk helpen om voorafgaand hieraan te consolideren. Verder helpt het de leerlingen mogelijk als een probleem een duidelijke oplossing heeft en waar leerlingen ook in de les ook op kunnen komen. Daarnaast moet er voldoende tijd in de les over zijn voor het werken met de vragenkaart. Er moet daarom een basisprobleem worden gebruikt waar alle leerlingen tijdig uit kunnen komen.
2.4	De vragenkaart werd maar beperkt gebruikt als gesprekstarter en eerder als kortantwoord-vragen. Wel zeggen de leerlingen dat de vragenkaart helpt bij het uitleggen van de gemaakte denkstappen en zij elkaar hebben begrepen. Verder zeggen ze meer behoefte te hebben aan het bespreken van het werk van de andere leerlingen. Wederom zijn er wel leerlingen geweest die intensiever dan de rest met elkaar gesproken hebben over oplossingen van vergelijkbare problemen. Toch is het maar de vraag of de vragenkaart hen hiertoe heeft aangezet of dat dit komt door de stimulans voor het verticaal mathematiseren. Wel hadden de leerlingen hier op deze manier voldoende gelegenheid voor.	Een aantal vragen op de vragenkaart werden gerelateerd aan het probleem van deze les irrelevant bevonden door de leerlingen. Dit kan zo zijn, maar mogelijk zijn de algemeen geformuleerde vragen in sommige gevallen ook te algemeen geformuleerd, waardoor het lastiger is om er betekenis aan te geven voor een specifiek probleem.	Sommige leerlingen hebben er behoefte aan om samen met elkaar te praten over zaken die voornamelijk binnen de categorie 'voortuitkijken' van de vragenkaart vallen. Tegelijkertijd zijn er leerlingen die zeggen meer behoefte te hebben aan een 'gallery-walk' om zo ook van alle andere groepjes de oplossingen te begrijpen. Om aan beide behoeften te voldoen zou er binnen een lessenserie het doorlopen van een 'gallery-walk' en het organiseren van groepsgesprekken van leerlingen afgewisseld kunnen worden. Zo wordt er binnen een lessenserie gegarandeerd aandacht besteed aan zowel cognitieve reflectie en metacognitieve reflectie. Met de 'gallery-walk' zijn de meeste leerlingen namelijk vooral geïnteresseerd in de verschillende oplossingen van andere groepen en daarmee cognitieve reflectie. Daarnaast zijn in groepsgesprekken zijn de leerlingen zelf vooral ook actief bezig en kan er met behulp van interactie en de vragenkaart meer aandacht zijn voor de oplossingsprocessen en daarmee metacognitieve reflectie.

Tabel 5.3: DBR-fase 3: HTLT in de retrospectieve analyse

Zie ook appendix C, D, E, M en N.

5.2. Het implementeren van een individueel werkblad

Deze paragraaf zal ingaan op de resultaten rondom de deelvraag *“Welke opdrachten op een individueel werkblad zijn geschikt als implementatie van het principe van “note-taking” van Liljedahl voor het bereiken van een verhoogde leeropbrengst?”*. Voor het beantwoorden van deze deelvraag is er een werkblad ontworpen dat dient als specifiek hulpmiddel voor de leerlingen om beter te worden in het probleemoplossen. Dit richt zich op het waarborgen van de individuele leeropbrengst binnen een coöperatieve werkvorm en het meer aandacht besteden aan het stapsgewijs opbouwen van de moeilijkheidsgraad van een les om de “flow” te waarborgen [12]. Aangezien het werkblad betrekking heeft op de ideeën van “note-taking” uit [12] zal dit werkblad dienen als een individuele aantekening van de leerlingen voor henzelf.

Voor het beantwoorden van de deelvraag die in deze paragraaf centraal staat zullen de resultaten naar aanleiding van de relevante data aan deze deelvraag worden beschreven. Voor deze deelvraag zijn voornamelijk de data uit iteratie 1.1 en 1.2 relevant. Eerder is in Tabel 2.1 een overzicht gegeven voor welke soort data uit welke iteratie relevant is voor het beantwoorden van deze deelvraag. Eerst zullen in subparagraaf 5.2.1 per iteratie de relevante observatiepunten worden beschreven. Daarna zullen in subparagraaf 5.2.2 de resultaten van de korte feedbackvragen per iteratie worden gepresenteerd. Vervolgens worden in subparagraaf 5.2.3 de resultaten van de mini-interviews uit de relevante iteraties worden beschreven. Dan worden in subparagraaf 5.2.4 de resultaten naar aanleiding van het leerlingwerk weergegeven. Daarna geeft subparagraaf 5.2.5 het ontwerpresultaat van het werkblad en het bijbehorende voorbeeld. Tot slot zal in subparagraaf 5.2.6 een overkoepelende analyse worden beschreven van de eerder gepresenteerde resultaten uit de verschillende iteraties.

5.2.1. Observatieaantekeningen

In deze subparagraaf wordt er verwezen naar de algemene aantekeningen per iteratie in appendix C en de vooraf opgestelde observatiepunten met de bijbehorende aantekeningen in appendix D. In beide appendices zijn de teksten in de **blauw** kleur relevant voor het beantwoorden van de deelvraag uit deze paragraaf. In deze subparagraaf zullen de voornaamste bevindingen uit beide appendices per onderwerp worden toegelicht.

Motivatatie voor het werken met het werkblad

In iteratie 1.1 en 1.2 bleek dat sommige leerlingen lang bezig waren met het werkblad en dat anderen er eerder klaar mee waren. Dit is te lezen in appendix C. In het bijzonder was het opvallend dat de groep die als eerste de oplossing op het basisprobleem had gevonden, het langst bezig bleef met het werkblad. Een van deze leerlingen geeft aan ook liever zelfstandig te werken dan in groepsverband, zie appendix D. Daarnaast zaten de leerlingen die het kortst met het werkblad bezig waren in de groep die als laatste de oplossing op het basisprobleem had gevonden. Een van de leerlingen die eerder klaar was met het werkblad zei het volgende. *“Ik heb het antwoord toch al netjes in mijn hoofd zitten, waarom zou ik het dan nog opschrijven?”*. Deze uitspraak illustreert dat hij de waarde van het werkblad niet inzag en daarom niet gemotiveerd was.

Niveauperhoging door het werkblad

Wanneer de leerlingen na het oplossen van het basisprobleem in groepsverband op de whiteboards individueel de oplossing op het werkblad volledig moeten noteren, worden er verschillende uitspraken gedaan die illustreren dat dit een niveauperhogende activiteit voor de leerlingen is. Zo wordt er in iteratie 1.1 en 1.2 gezegd *“Nu wordt het pas echt moeilijk, nu moeten we gaan uitleggen wat we hebben gedaan!”*, *“Hoe schrijf ik dit nu netjes op?”* en *“We moeten onze gekheid opschrijven, dat is moeilijk”*, zie appendix C. Verder verklaarde in iteratie 1.2 een leerling dat hij moeite had met het noteren van de oplossing, omdat hij het lastig vond dit uit te leggen en niet omdat hij de oplossing niet begreep: *“Ja, maar ik begrijp het wel, alleen is het zelf uitleggen lastig”*, zie appendix D.

Ook werd er in iteratie 1.1 de uitspraak gedaan: *“Dan moeten we gaan zoeken wat nu ook alweer de goede oplossing is op het bord”*, zie appendix C. Verder blijkt uit appendix D dat er meer leerlingen terugkijken naar het werk op de whiteboards tijdens het werken aan het werkblad. De leerlingen zijn dus bezig geweest met het reproduceren van de oplossing en worden daarbij geholpen door het werk op de whiteboards. Doordat de leerlingen dit dus niet uit hun hoofd doen, lijken zij het probleem nog niet volledig zelfstandig te beheersen. Op deze manier helpt het eerdere werk de leerlingen zelfstandig de oplossing te reproduceren, wat het individuele leereffect mogelijk versterkt.

Daarnaast kwam het voor bij iteratie 1.1 in groep 3 dat een leerling vond dat de oplossing pas goed zou zijn genoteerd in de vorm van een formule, zie appendix C. Op deze manier werd deze leerling door het werkblad er toe gezet om de algemene oplossing te vinden, waarmee er verticaal gemathematiseerd wordt en het niveau van de opdracht wordt verhoogd.

Verder was het opvallend dat in iteratie 1.1 de groepen 3 en 5 wel relatief lang bezig waren met het werkblad, zoals te lezen is in appendix C maar niet per se veel meer hadden opgeschreven. Aangezien deze leerlingen geconcentreerd leken te werken aan het werkblad, is het waarschijnlijk dat ze hierbij veel hebben moeten nadenken, wat duidt op een verhoogd niveau van de opdracht.

Na het werken aan het werkblad zijn vervolgens in iteratie 1.2 meerdere groepen gemotiveerd om het probleem te variëren, zie appendix D. Er is echter een groep die verklaart dit niet te willen doen, omdat ze denken dat ze na het oplossen van het basisprobleem een vergelijkbaar probleem gemakkelijk kunnen oplossen: *"Ja, nu we deze al hebben opgelost kunnen we een kwart afstand ook wel, dat is dan gewoon makkelijk"*, zie appendix D. In dit geval demotiveert na het werken aan het werkblad het perspectief van een sterk vergelijkbare opgave de leerlingen in eerste instantie.

Overige bevindingen

Uit appendix C blijkt in iteratie 1.1 dat de leerlingen het vooral lastig vonden om op opdracht 2 een geschikt antwoord te formuleren en daarmee te reflecteren op het probleemoplossen. Zo zegt een leerling *"Ja, het is toch logisch hoe we het hebben opgelost, ik had gewoon opeens een geniaal idee."*

Verder blijkt uit iteratie 1.2 in appendix C dat tijdens het werken aan het werkblad groep 6 zich realiseerde dat de door hun gevonden oplossing op het basisprobleem niet kon. Later realiseerde een van deze leerlingen dat er alsnog een fout in zijn uitwerking op het werkblad stond en wilde dit verbeteren.

Daarnaast blijkt uit appendix C dat er in iteratie 2.1 in groep 4 er een leerling was die nog niet had begrepen wat zijn groep tot nu toe had gedaan en daarom niet aan het werkblad kon werken. Zo zegt hij: *"Het is voor mij niet eens duidelijk wat we hebben opgeschreven, hoe moet ik dat werkblad dan invullen"*. Hieruit kan geconstateerd worden dat het noodzakelijk is om de basisoplossing te begrijpen voordat de leerlingen aan het werkblad kunnen werken. In deze situatie werd deze leerling niet vanzelf verder geholpen met het werkblad door zijn medeleerlingen, waardoor het werkblad in dit geval geen leeropbrengst veroorzaakte. Ook in iteratie 1.1 zijn er in appendix C en D geen momenten geregistreerd dat leerlingen samenwerkten aan het probleem.

5.2.2. Korte feedbackvragen

In appendix F is een overzicht te vinden van alle korte feedbackvragen en de antwoorden die na afloop van de les door leerlingen zijn gegeven. Voor het beantwoorden van de deelvraag uit deze paragraaf zijn voornamelijk de iteraties 1.1 en 1.2 van belang, zie Tabel 2.1. Hierbij horen de eerste twee rijen van Tabel F.1, Tabel F.1 en Tabel F.2. De bevindingen naar aanleiding van deze resultaten worden in deze subparagraaf toegelicht per iteratie.

Iteratie 1.1

Uit de antwoorden op de korte feedbackvragen is op te maken dat niemand het werken met het werkblad nutteloos heeft gevonden. Maar er bleken maar een paar leerlingen te zijn die zeiden het nuttig gevonden te hebben. Ook zijn er maar een paar leerlingen die vonden dat het werkblad een positieve invloed had op de begripsvorming rondom het probleem. Op de rest van de leerlingen had het werkblad in hun perceptie een geen significant effect. Uit deze resultaten op de korte feedbackvragen is dus af te leiden dat deze versie van het werkblad de meeste leerlingen geen bewuste leeropbrengst oplevert. Tot slot hebben de meeste leerlingen alleen gewerkt tijdens het werken aan het werkblad. Er waren wel enkele leerlingen die elkaar hebben geholpen.

Iteratie 1.2

Met de beantwoorde korte feedback vragen geven de leerlingen aan dat het overgrote deel van hen de vragen op het werkblad begreep. Hiervoor is het voorbeeld maar door een aantal leerlingen gebruikt. Toch was het voorbeeld wel voor iedereen duidelijk. Verder zeggen de meeste leerlingen hun uitwerkingen op het werkblad geannoteerd te hebben. Echter zeggen daarvan maar een klein aantal leerlingen hierdoor meer inzicht in het probleem gekregen te hebben. Tot slot zeggen de meeste leerlingen dat de tweede vraag op het werkblad bijdraagt bij het oplossen van een vergelijkbaar probleem.

Iteratie 2.1

Hoewel iteratie 2.1 niet direct hoorde bij het beantwoorden van de deelvraag uit deze paragraaf, heeft een leerling na afloop van deze les wel een gerelateerde opmerking geplaatst bij de optionele open feedbackvragen. Deze leerling geeft namelijk aan door de eerste vraag op het werkblad een betere manier bedacht heeft om de oplossing te noteren, zie Tabel F.1. Hieruit valt af te leiden dat door deze opdracht deze leerling zichzelf heeft verbeterd en dat deze opdracht dus voor leeropbrengst bij deze leerling rondom het probleemoplossen heeft gezorgd.

5.2.3. Mini-interviews

In deze subparagraaf zullen de resultaten naar aanleiding van de gehouden mini-interviews met de leerlingen na afloop van een les worden beschreven. De vragen die vooraf zijn opgesteld als leidraad voor deze interviews is te vinden in appendix E.

Iteratie 1.1

Er is aan verschillende leerlingen gevraagd wat ze van het werkblad vonden. Om een specifiekere vraag te stellen, werd er voornamelijk gevraagd of ze het nuttig vonden om het antwoord van het probleem individueel op te schrijven.

Een aantal leerlingen zeiden dat ze dit een nuttige toevoeging vonden. Ze lichtten dit toe door te vertellen dat je dan pas echt gaat nadenken over hoe het zit en je het pas echt gaat begrijpen. Vervolgens is er ook gevraagd of zij het niet jammer vonden dat er zo minder tijd over was voor het werken op het whiteboard. Hierop reageerde deze leerlingen over het algemeen dat dat ze dat niet veel uit maakte. Eén van deze leerlingen zei dat je door het werken aan het werkblad ook elkaar beter kunt helpen waardoor jij en je groepsgenoten het beter begrijpen. Een andere leerling, zei dat hij het prettig vond om de oplossing van het probleem juist zelfstandig te doorgronden. Dit vond hij omdat je dan makkelijker dieper kan nadenken dan als je het samen doet. Dat dieper nadenken zei hij graag te doen.

Een paar andere leerlingen vond het werkblad geen nuttige toevoeging aan de les. Eén van deze leerlingen zei dat hij de oplossing al goed en netjes in zijn hoofd had zitten, dus dat het niet nodig was om dit nog eens op te schrijven. Een andere leerling zei dat het toch al op het bord stond en zag niet de noodzaak om dit antwoord te verduidelijken. Verder begreep een leerling niet zo goed wat er gedaan moest worden en vond het nogal een groot werkblad.

Iteratie 1.2

Tijdens deze iteratie zijn er verschillende vragen gesteld aan verschillende leerlingen. Hieruit is naar voren gekomen dat een van de ondervraagde leerlingen van het werkblad heeft geleerd op welke manieren je een oplossing kunt opschrijven, namelijk in woorden of met een berekening of een combinatie ervan. Een andere leerling zei juist helemaal niets van het werkblad geleerd te hebben, aangezien het probleem makkelijk was.

Daarnaast vonden er een aantal leerlingen dat ze door het werkblad het probleem wel beter hadden begrepen. Toch vonden zeiden er ook leerlingen dat het oplossen van het volgende probleem anders ook wel was gelukt. Daarbij zei een leerling de vorige les hiervoor wel wat aan het werkblad gehad te hebben, omdat dat volgens hem meer een wiskundig probleem was.

Verder verklaarden de ondervraagde leerlingen zowel dat het invullen van het werkblad gemakkelijk was als dat ze het moeilijk vonden. De leerlingen vonden het makkelijk, omdat ze het probleem al eens op het whiteboard hadden opgelost. Daarnaast vonden andere leerlingen het juist moeilijk, omdat je nu de oplossing juist begrijpelijk moest opschrijven en dat het duidelijk moest zijn hoe er op deze oplossing gekomen is.

Tot slot zeiden verschillende leerlingen dat het werkblad wel is verbeterd vergeleken met de eerste iteratie. Ze vonden het vooral prettig dat het formaat van het werkblad niet zo lang was en het dus op één pagina paste.

5.2.4. Leerlingwerk

De ingevulde werkbladen van de leerlingen, zie appendix N, zijn geanalyseerd in appendix I. In deze subparagraaf zullen de resultaten van deze analyses worden weergegeven.

In appendix I is beoordeeld in hoeverre de categorieën van Schoenfeld voor het wiskundig probleemoplossen en de wiskundige denkactiviteiten worden vertegenwoordigd in het werk van de leerlingen. Vervolgens wordt in appendix I het individuele leerlingwerk vergeleken met het groepswork op de whiteboards. Dit groepswork is terug te vinden in appendix M. Hierin is er gekeken of het individuele leerlingwerk duidelijker is dan het werk op het whiteboard en of het volledig is. Hierbij is het van belang dat de benodigde stappen in het oplossen van het probleem aanwezig zijn, dat deze zijn uitgelegd, dat deze te volgen zijn en dat er enige vorm van reflectie voor komt. Verder is er gekeken of er kladberekeningen aanwezig zijn op het werkblad die geen functie hebben voor het presenteren van de oplossing van het probleem. Bovendien is er gekeken naar inhoudelijke toevoegingen op het werkblad ten opzichte van het werk op het whiteboard.

In Figuur 5.4 zijn bij de beoordelingscategorieën voorbeelden gegeven van het werk van leerlingen op het werkblad die binnen de deze categorieën vallen. Daarnaast wordt er aan elke categorie een letter gegeven om in Figuur 5.5 naar de desbetreffende categorie te verwijzen. In deze Figuur 5.5 wordt namelijk een overzicht gegeven van de voorkomende categorieën in het werk van de leerlingen. Daarbij wordt er verwezen naar in welke opdracht op het werkblad een categorie voorkomt. Dit resultaat is toegelicht in appendix I, waarin er verwezen wordt naar een specifiek antwoord van een leerling.

Categorieën Schoenfeld [14]		Leerlingvoorbeeld
a	Wiskundige kennis (intuïtie en informele kennis over het domein, feiten, algoritmische procedures, 'routine' non-algoritmische procedures, propositionele kennis over regels in het domein) [14]	<i>Priemgetallen (1), even en oneven (1), aantal delers (1)</i>
b	Heuristieken (plaatjes maken, introduceren geschikte notatie, vergelijkbare problemen analyseren, probleem herformuleren, achteruit werken, testen en verifiëren procedures) [14]	<i>"Door eerst een schets te maken ..." (2), "... een onbekende waarde, ... formule opstellen" (2)</i>
c	Metacognitie (plannen, monitoren en beoordelen, beslissingen maken, bewuste metacognitieve handelingen) [14]	<i>"Zet je bevindingen op een rij en kijk of je het probleem misschien anders kan aanpakken" (2)</i>
d	Overtuigingen (over zichzelf, de omgeving, het onderwerp of de wiskunde) [14]	<i>"Ik dacht gelijk dat ik gebruik moest maken van formules, ..." (2)</i>

Categorieën WDA [7]		Leerlingvoorbeeld
e	Modelleren en algebraïseren	<i>De gebruikte notatie (1)</i>
f	Ordenen en structureren	<i>Er is onderscheid gemaakt tussen een even en oneven aantal delers (1)</i>
g	Analytisch denken en probleemoplossen	<i>Er is geconstateerd tussen welke waarde het antwoord moet liggen en vanuit daar is verder gegaan met het zoeken naar de oplossing (1)</i>
h	Formules manipuleren	<i>Formule herleiden en vergelijking oplossen (1)</i>
i	Abstraheren	<i>Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)</i>
j	Logisch redeneren en bewijzen	<i>Het antwoord is geverifieerd met een berekening en uitleg (2)</i>

Verschil whiteboard en werkblad		Voorbeeld beoordeling leerlingantwoord
Expliciet gemaakt?		
k	Duidelijker (meer uitleg en te volgen) en volledig (alle betekenisvolle stappen zijn benoemd of er is op gereflecteerd)	<i>Beetje. Er ontbrak enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.</i>
l	Zonder kladberekeningen	<i>Ja / Nee</i>
m	Inhoudelijke toevoeging in oplossing van het probleem of presentatie daarvan op het werkblad ten opzichte van het whiteboard	<i>Ja. Een efficiëntere oplossing, de optimale oplossing, wordt geconstateerd met een notatievorm als onderbouwing die abstracter is dan de eerder gebruikte versie (2)</i>

Tabel 5.4: Leerlingvoorbeelden met verwijzing naar opdracht werkblad, bij de beoordelingscategorieën

Iteratie	Leerling	Werkblad										Verschil whiteboard en werkblad		
		a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
1.1	1a	1	-	-	-	1	-	1	1	1	-	Nee	Ja	Nee
	1b	1	-	-	2	1	-	-	1	1	-	Nee	Ja	Nee
	1c	1	-	2	2	1	2	1,1	1	1	1	Ja	Ja	Nee
	2a	1	2	2	-	1	-	1,2	1	1	1	Beetje	Ja	Ja
	2b	1	2	2	-	1	-	1,1,2	-	1	1	Beetje	Ja	Ja
	2c	1	2	-	2	1	-	1,1	1	1	1	Nee	Ja	Ja
	3a	1,1	-	2	-	1	-	1,2	1	1	1	Ja	Ja	Nee
	3b	1,1	2,2	-	-	1,3	1	3	1	1	1	Ja	Ja	Ja
	3c	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	4a	-	2	2	-	-	-	1	-	-	-	Nee	Nee	Nee
	4b	-	2,2	-	2	-	-	1	-	-	1	Nee	Nee	Nee
	4c	-	1	-	-	-	-	-	-	-	2	Nee	Ja	Nee
	5a	1	2	2	-	1	1	1	1	1	1	Nee	Ja	Nee
	5b	1	-	2	-	1	1	1	1	1	1	Nee	Ja	Nee
	5c	1,1	2	2	-	1	1	1	1	1	1	Ja	Ja	Nee
1.2	1a	1	2,2	2	-	2	1	2	-	2	1	Ja	Ja	Nee
	1b	1	1	-	-	1	1	-	-	-	1	Beetje	Ja	Nee
	1c	1	1	-	-	1	1	-	-	1	1	Beetje	Ja	Nee
	2a	1	2,2	2	-	1	1	2	-	-	1	Ja	Ja	Nee
	2b	1	1,2	-	-	1	1	-	-	1	-	Beetje	Ja	Nee
	2c	1	1	2	2	1	1	2	-	1	1	Beetje	Ja	Nee
	3a	1	1	-	2	1	1	-	-	1	1	Ja	Ja	Nee
	3b	1	1,2	-	-	1	1	2	-	1	2	Ja	Ja	Nee
	3c	1	1	-	-	1	1	-	-	1	-	Nee	Ja	Nee
	4a	1	1	-	-	1	1	-	-	1	-	Beetje	Ja	Nee
	4b	1	1	-	-	1	-	-	-	1	-	Nee	Ja	Nee
	4c	1	1	-	-	1	1	1	-	1	1	Beetje	Ja	Ja
	5a	1	1,1,2	-	-	1	1	R	R	1,R	1	Ja	Ja	Nee
	5b	-	1	-	-	1	1	1	1	1,R	-	Nee	Ja	Nee
	5c	-	1,2	-	-	1	-	-	-	1	-	Nee	Ja	Nee
	6a	1	1	2	1	1	-	1,2	1	1,2	-	Nee	Nee	Ja
	6b	1	1,2	2,R,R	-	1	1	1	1	1,1,R	1,2	Ja	Nee	Ja
2.1	1a	-	-	2	1	1,1	-	-	1	1	-	Nee	Ja	Nee
	1b	-	-	2	2	-	1,1	1	-	1,1	1,2	Ja	Ja	Ja
	1c	-	2,2	-	-	-	1,1	1,2	-	1	1	Ja	Ja	Ja
	2a	-	1	-	2	1	1,1	1	-	1	-	Nee	Ja	Nee
	2b	-	-	-	-	1	1	1	-	1	1	Beetje	Ja	Nee
	2c	-	1	-	-	1	1	1	-	1	1	Beetje	Ja	Nee
	3a	-	2,2	-	-	-	-	2	-	2	1	Ja	Ja	Ja
	3b	-	-	-	-	-	-	-	-	R	-	Nee	Ja	Nee
	3c	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	Nee	Nee	Nee
	4a	-	1	-	-	1	1,2	1,2	-	1	1	Nee	Ja	Nee
	4b	-	1	2	-	1	1,1	1,2,2	-	1	1,2	Ja	Ja	Ja
	4c	-	1	-	-	1	1	-	-	-	-	Nee	Ja	Nee
	5a	-	-	-	-	-	-	2,2	-	-	-	Nee	N.v.t.	Nee
	5b	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	Nee	Ja	Nee
	5c	-	2,2	-	-	-	-	-	-	-	-	Nee	N.v.t.	Nee
	6a	-	-	-	-	1	1	1	-	-	1	Beetje	Ja	Ja
	6b	-	-	-	-	1	1,1	1,2	-	1	1	Beetje	Ja	Ja
	6c	-	2	-	-	1	1	-	-	1	-	Nee	Nee	Nee
2.3	1a	1	1	-	-	-	-	1	-	1	-	Ja	Ja	Nee
	1b	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	Nee	N.v.t.	Nee
	1c	1	3	2	-	-	-	1,2	-	1	1	Ja	Ja	Ja
	2a	1,1,1	1	-	-	1	1	1	-	1	1	Beetje	Ja	Ja
	2b	-	-	-	2	-	-	-	-	-	-	Nee	N.v.t.	Nee
	2c	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	3a	1	1	2	-	-	-	-	-	-	-	Nee	N.v.t.	Nee
	3b	1,1	-	-	-	-	1	1,2	-	1	1	Beetje	Ja	Ja
	3c	1,1,1	1	-	1	-	1	1	-	1	-	Nee	Ja	Ja
	4a	-	1,2	-	-	-	-	-	-	-	-	Nee	N.v.t.	Nee
	4b	1	1	-	-	-	-	-	-	1	-	Nee	N.v.t.	Nee
	4c	1,1	3	3	-	-	-	2	-	1	1	Ja	Ja	Ja

Tabel 5.5: Resultaat aanwezige categorieën op de ingevulde werkbladen

Uit Figuur 5.5 valt op te maken dat opdrachten 1, 2 en in sommige gevallen ook opdracht 3, er voor zorgen dat er veel van de betekenisvolle categorieën voorkomen in het werk van de leerlingen. Verder blijkt in veel gevallen het individuele leerlingwerk duidelijker en vollediger te zijn dan het werk op het whiteboard. Ook worden kladberekeningen achterwege gelaten op het werkblad. Veel leerlingen leggen hun antwoorden dus explicieter uit dan op het whiteboard en er worden tegelijkertijd meerdere betekenisvolle categorieën gerepresenteerd. Doordat de leerlingen hun antwoorden op deze manier uitleggen heeft dit een positieve invloed op hun leeropbrengst. Daarnaast vullen de leerlingen het werkblad individueel in wat ook de individuele bewustwording over de betekenisvolle categorieën stimuleert. Bovendien komt het voor dat de leerlingen een inhoudelijke aanvulling doen op het werkblad ten opzichte van het werk op het whiteboard. In deze gevallen heeft het werkblad gezorgd voor het formuleren van een antwoord van een hoger niveau.

Een bijkomend voordeel van de ingevulde werkbladen is dat ze aanvullende informatie geven over het oplosproces van een groep en de individuele leeropbrengst van de leerlingen. Wanneer er gekeken wordt naar enkel de resultaten op de whiteboards, zie appendix M, is hier namelijk niet altijd het doorlopen oplosproces uit te reduceren door een persoon buiten de groep. De ingevulde werkbladen zijn daarom waardevol voor het formatief handelen, wat het onderwijs in probleemoplossen kan versterken.

5.2.5. Ontworpen lesmateriaal: werkblad en voorbeeld

In appendix K zijn per iteratie de ontworpen en gebruikte werkbladen en bijbehorende voorbeelden te vinden. Het is van belang om hierbij op te merken dat er vanwege onderzoeksdoeleinden er korte feedbackvragen aan de leerlingen worden gesteld op de werkbladen. Deze onderdelen van het werkblad behoren niet tot de ontwerpen, maar zijn bedoeld voor de dataverzameling van dit onderzoek.

Dit onderzoek resulteert daarmee in onder andere het volgende werkblad en bijbehorende voorbeeld, als ondersteuning voor het individueel aantekeningen maken binnen BTC lessen waarin algemeen wiskundig probleemoplossen centraal staat, zie Figuur 5.1 en Figuur 5.2.

De vragen die op dit werkblad zijn gesteld zijn de vragen om de oplossing van het probleem volledig uit te werken en te reflecteren op de probleemaanpak.

De formulering die daar het beste bij past, is om te vragen om "de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar" uit te werken. Wanneer er wordt gevraagd om de oplossing van het probleem uit te werken kan echter ook alleen het antwoord worden uitgelegd en niet hoe dit is gevonden. Om te reflecteren op de probleemaanpak zijn er drie deelvragen geformuleerd, omdat enkel de vraag hoe het probleemoplossen is aangepakt te weinig richtinggevend is. Kenmerkend voor de bijbehorende formulering is dat het vragen naar "waar liep je op vast" leidt tot meer betekenisvolle antwoorden dan "wat ging er niet goed". Vastlopen is namelijk typerend voor het probleemoplossen, aangezien je de opgave anders niet als probleem kunt zien, maar dat wil niet zeggen dat je niet "goed" bezig bent. Het gaat er namelijk juist om hoe je vanuit het vastlopen toch verder komt. Verder is de vraag over "waar moest je rekening mee houden" stimulerend om de wiskundige kern van het probleem te ontdekken en te begrijpen.

De ontwerpelementen die in het gepresenteerde ontwerp sterk zijn gebleken zijn het formaat, één A4 is voldoende, en het naast elkaar positioneren van de opdrachten. Het naast elkaar positioneren van de opdrachten komt overeen met de "graphic organizers" van Liljedahl. Daarnaast werd en ook verwezen in antwoorden op opdracht twee naar opdracht één, wat een teken is dat het prettig is voor het formuleren van een goed antwoord het eerdere werk in beeld te houden. Dit gebeurt bijvoorbeeld in Figuur N.29 en N.42. Het oorspronkelijke ontwerpidee hierbij was dat op deze manier je achter een beschreven stap in het probleemoplossen in de tweede opdracht op die stap kon reflecteren. Dit is dus beperkt uitgevoerd.

In het voorbeeld is het kleurgebruik opvallend en overzichtelijk, versterken de gebruikte plaatjes de betekenis van de inhoud en zijn voorbeelden en non-voorbeelden meer in leerlingtaal beschreven. Verder is er in de eerste opdracht een probleem uit [12] gebruikt, dat voor de doelgroep in deze lespraktijk simpel zou zijn. Voor de tweede opdracht zijn voorbeelden en non-voorbeelden gebruikt van leerlingen uit eerdere iteraties, maar zijn deze algemeen geformuleerd. Typerend voor een reflectie in "Thinking Classrooms" is dat een goede reflectie gebaseerd kan zijn op ideeën van een ander groepje. Dit voorbeeld antwoord kan leerlingen daarom stimuleren om te reflecteren op wat zij hebben geleerd van een ander groepje.

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Naam:

Groep:

2. Hoe heb je het aangepakt?

Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
- Wat ging er goed? Waarom?
- Waar moest je rekening mee houden?

Pagina 1/2

Figuur 5.1: Resultaat ontworpen lesmateriaal: werkblad

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Probleem:

(Het probleem zelf hoeft je niet over te nemen.)

Je koopt een Pokémonkaart voor €10, vervolgens verkoop je het voor €20, koop je het weer voor €30 en tot slot verkoop je het voor €40. Hoeveel winst/verlies maak je?

Niet zo:

Kopen	Verkopen
10	20
30	40



Dus 20 winst

- Mist redenering: hoe kom je op 20?
→ Geen eenheden gebruikt: €

Maar zo:

$$-10 + 20 - 30 + 40 = €20 \rightarrow (+) \text{ dus } €20 \text{ winst}$$

Want bij kopen geef je geld uit. Want bij verkopen krijg je geld.

Neem de som voor netto bedrag.

Naam: **VOORBEELD**Groep: **VOORBEELD**

2. Hoe heb je het aangepakt?

Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
- Wat ging er goed? Waarom?
- Waar moest je rekening mee houden? Leg uit.

Niet zo:

"Ik zag opeens wat er moest gebeuren." ❌

→ Wat moest er gebeuren? Waarom? Waarop heb je dat gebaseerd?

Maar zo:

"Door een schema te maken konden we een patroon herkennen waardoor we het antwoord konden vinden." ⌘

"Een ander groepje kwam op een ander antwoord. Daardoor konden we onze fout ontdekken, dat was namelijk ..., want" ⌘

**Denk bijvoorbeeld aan het volgende en leg uit:**

Voorbeelden bedenken, zoeken naar patronen, kijken naar grenzen, achteruit denken, blijven proberen, plaatjes maken, organiseren van wat je weet, stap voor stap oplossen, kiezen voor een andere aanpak, tussenresultaten controleren

Pagina 1/1

Figuur 5.2: Resultaat ontworpen lesmateriaal: voorbeeldwerkblad

Het resulterende ontwerp komt overeen met het ontwerp van iteratie 2.2. Hoewel dit ontwerp niet in de praktijk getest is, is dit ontwerp beter inzetbaar voor de lespraktijk. Dit komt doordat het algemener

is dan de eerdere ontwerpen. De lesmaterialen moeten namelijk zo algemeen mogelijk zijn, zodat ze inzetbaar zijn voor alle soorten algemene wiskundige problemen die in deze lespraktijk behandeld worden. Tegelijkertijd zijn alle elementen die positief bevonden zijn in eerdere iteraties behouden en alle beperkende elementen aangepast. Zo vinden de leerlingen in iteratie 1.2 het werkblad en het bijbehorende duidelijk, zie subparagraaf 5.2.2. Toch zijn er ook meer hulpvragen toegevoegd om de leerlingen meer te sturen. Een leerling zei namelijk hier behoefte aan te hebben, zoals beschreven is in de observatieaantekeningen, zie subparagraaf 5.2.1. Verder geven de leerlingen aan het formaat van het werkblad en het voorbeeld prettiger te vinden, zie subparagraaf 5.2.3. Daarnaast wordt er in dit ontwerpresultaat van het werkblad op een subtiele manier aandacht besteed aan heuristieken wat de leerdoelen en daarmee het onderwijs in probleemoplossen ondersteunt, zie hoofdstuk 3, zonder dat dit het werkblad onoverzichtelijk maakt. Alle ontwerpaanpassingen die die zijn toegepast in het iteratieve ontwerpproces zijn benoemd en specifiek toegelicht in appendix J.

5.2.6. Overkoepelende analyse

In deze subparagraaf zullen de eerder beschreven resultaten uit deze paragraaf gezamenlijk worden geanalyseerd voor het beantwoorden van de deelvraag: "Welke opdrachten op een individueel werkblad zijn geschikt als implementatie van het principe van "note-taking" van Liljedahl voor het bereiken van een verhoogde leeropbrengst?".

In "Thinking Classrooms" is het waarschijnlijk dat wanneer leerlingen individueel een volledige oplossing op papier uitwerken, meer leerlingen een hoger denkniveau bereiken. Het denkniveau wordt verhoogd doordat leerlingen na het gezamenlijk brainstormen over de oplossing op de whiteboards de oplossing wel begrijpen, maar het probleem nog niet altijd beheersen. Het komt namelijk voor dat het voor de leerlingen makkelijker is om gezamenlijk tot de oplossing te komen en het resultaat hiervan met beperkte tussenstappen op te schrijven op het whiteboard, terwijl het moeilijker kan zijn de volledige redenering die daartoe geleid heeft individueel begrijpelijk uit te werken. De leerlingen zeggen zelf dan ook dat het "*pas echt moeilijk*" wordt wanneer ze de uitwerking op het werkblad moeten opschrijven, schrijven en moeten uitleggen wat ze hebben gedaan. Het werkblad zet leerlingen dan ook aan om hun antwoorden explicieter te formuleren dan zij op het whiteboard hebben gedaan. Daarbij worden de leerlingen zich bewust van de categorieën van Schoenfeld en de wiskundige denkactiviteiten, aangezien de geformuleerde antwoorden van de leerlingen aan veel van deze categorieën te relateren zijn. Bovendien moet het werkblad door iedere leerling worden ingevuld, waardoor iedere leerling gestimuleerd wordt op deze manier van het probleemoplossen te leren. Tegelijkertijd maken de ingevulde werkbladen het leerproces van de individuele leerlingen inzichtelijk, wat waardevolle informatie is voor de docent.

Verder komt het voor dat leerlingen elkaar met het werkblad helpen. In dat geval is er dan ook sprake geweest van "teaching" binnen de "modes of engagement" en wordt het coöperatief leren gestimuleerd. Toch wordt deze mogelijkheid niet altijd benut.

Daarnaast is het naar voren gekomen dat leerlingen hun oplossingen verbeteren of tot een nieuw inzicht komen naar aanleiding van het werken aan het werkblad. Dit heeft dus geleid tot een verbeterd inzicht in het probleem en de bijbehorende oplossing. Verder worden veel leerlingen gestimuleerd tot verticaal mathematiseren door het geven van een antwoord bij de tweede opdracht. Veel leerlingen zeggen namelijk dat dit hen helpt bij het oplossen van een vergelijkbaar probleem.

Tegelijkertijd zijn er leerlingen die behoefte hebben aan het individueel te werken aan het probleem, om zo bijvoorbeeld dieper na te kunnen denken. Bovendien geven de resultaten van het werkblad, naast de whiteboards, aanvullende informatie over het oplosproces binnen de groepen leerlingen en de individuele leeropbrengst, wat waardevol is voor het formatief handelen.

5.3. Kenmerken van waardevolle leerlingreflecties

Deze paragraaf zal ingaan op de resultaten rondom de deelvraag: *"Wat zijn kenmerken van reflecties van leerlingen die bijdragen aan het vergroten van het probleemoplossend vermogen?"*. De bevindingen in hoofdstuk 3 zijn in het algemeen richtinggevend voor de voorwaarden van een goede reflectie met als doel leren probleemoplossen. Er ontbreekt echter een specifieke omschrijving van een betekenisvolle reflectie van een leerling als beginner bij het oplossen van probleem. Daarnaast zal niet iedereen dezelfde lessen trekken, omdat de oplossing en het oplosproces bij ieder persoon kan verschillen. Verder is het als ervaren probleemoplosser het lastig om te realiseren waar beginners tegen aan lopen en wat er voor hen van belang is [22]. Deze deelvraag is daarom bedoeld om te achterhalen welke reflecties voor leerlingen waardevol kunnen zijn, zodat hier vervolgens later in de lespraktijk meer op gestuurd kan worden.

Voor het beantwoorden van de deelvraag die in deze paragraaf centraal staat zullen de resultaten naar aanleiding van de relevante data aan deze deelvraag worden beschreven. Eerder is in Tabel 2.1 een overzicht gegeven voor welke soort data uit welke iteratie relevant is voor het beantwoorden van deze deelvraag. Eerst zullen in subparagraaf 5.3.1 per iteratie de relevante observatiepunten worden beschreven. Vervolgens worden in subparagraaf 5.3.2 de resultaten naar aanleiding van het leerlingwerk weergegeven. Tot slot zal in subparagraaf 5.3.3 een overkoepelende analyse worden beschreven van de eerder gepresenteerde resultaten uit de verschillende iteraties.

5.3.1. Observatie aantekeningen

In deze subparagraaf wordt er verwezen naar de algemene aantekeningen per iteratie in appendix C en de vooraf opgestelde observatiepunten met de bijbehorende aantekeningen in appendix D. In beide appendices zijn de teksten in de **roze** kleur relevant voor het beantwoorden van de deelvraag uit deze paragraaf. In deze subparagraaf zullen de voornaamste bevindingen uit beide appendices worden toegelicht en worden per onderwerp gepresenteerd.

Notatie bij het probleemoplossen

Uit de observatieaantekeningen uit appendix D kunnen de volgende zaken worden geconstateerd. Ten eerste is er geconstateerd dat er tijdens de "gallery-walk" van iteratie 1.1, 1.2, 2.1 en 2.4 het bespreken van de verschillende zelfbedachte notatievormen centraal stond. Hierbij was er aandacht voor de overeenkomsten en verschillen. De leerlingen konden in de meeste zelf iets vertellen over deze overeenkomsten en verschillen tussen het werk van verschillende groepen. Tijdens iteratie 1.2 is hierbij de functie twee verschillende notaties van elkaar onderscheiden. Er is namelijk gebleken dat een notatie die je helpt om tot de oplossing van het probleem te komen kan verschillen van een notatie die geschikt is voor het presenteren van de gevonden oplossing.

Verschillende oplosstrategieën

Uit iteratie 2.1 is gebleken dat de perceptie van de leerlingen is dat zij het nuttig vinden om te praten over verschillende oplosstrategieën. Het bespreken van het vinden van de oplossing wat ook een van de voornaamste onderwerpen van de "gallery-walk" in iteratie 1.1.

Belangrijke inzichten

Verder blijkt dat in iteraties 2.1 en 2.3 leerlingen inzichten hebben opgedaan die belangrijk waren voor het oplossen van het probleem. Door deze uit te spreken hebben ze gereflecteerd op het probleemoplossen. Zo was het tijdens iteratie 2.1 het een belangrijk inzicht of de valse munt zwaarder of lichter was. In iteratie 2.3 realiseerde een leerling zich dat het te veel werk is om een groter probleem uit te tekenen, maar onderbouwde wel dat dit wel nuttig is om de bedachte theorie te bewijzen.

Het samenwerken

Daarnaast komen er verschillende reflecties wat betreft de samenwerking naar voren in de observatieaantekeningen in appendix C en D. In iteratie 2.3 wordt er bijvoorbeeld door een leerling gezegd dat je het schrijfwerk door je groepsgenoten moet laten doen, zodat jij kan denken. Op deze manier reflecteert de leerling op de taakverdeling binnen het groepswerk. Daarnaast is deze leerling zich bewust van het feit dat je makkelijker kan denken als je niet schrijft of zaken noteert. Verder staat in iteratie 2.2 het reflecteren op het coöperatief leren centraal. Tijdens de gallery-walk wordt er besproken hoe

leerlingen op de formule zijn gekomen. Twee groepjes blijken deze formule te hebben overgenomen van een andere groep. Een van deze groepen heeft vervolgens geprobeerd de totstandkoming ervan te achterhalen en de andere groep heeft pogingen gedaan om het werken met de formule beter te kunnen begrijpen. Door deze toelichting van de docent kunnen de leerlingen zich realiseren dat ze een leermoment wat betreft het probleemoplossen beleven wanneer ze iets doen met het inzicht van een ander. Zo wordt er door leerling 4a in iteratie 2.3, zie Figuur N.58, ook gezegd dat hij heeft geleerd dat afkijken niet erg is. Hoewel deze uitspraak onderbouwing ontbreekt, lijkt dit te volgen op het besproken leermoment uit onder andere iteratie 2.2. Ook in de individuele leerlingreflecties, die in de volgende subparagraaf besproken worden, komt het inzicht van een andere leerling of andere groep vaak naar voren. Leerlingen zijn zich dus bewust van het leerrendement van wat Liljedahl "mobilizing knowledge" noemt. Ook is er gebleken dat de leerlingen niet de oplossing van een ander gedachteloos over nemen, wat overeenkomt met wat Liljedahl omschrijft als het positieve effect van "mobilizing knowledge" op de denkactiviteit.

5.3.2. Individueel leerlingwerk

In appendix G is de ruwe data gerelateerd aan deze deelvraag geanalyseerd. In deze subparagraaf zullen de resultaten van deze analyses worden weergegeven.

De leerlingreflecties zijn geïnterpreteerd en vervolgens is er per reflectie een kenmerk (label) toegekend met een onderliggend kenmerk (de specificering van het label). Hoewel de kenmerken mogelijk te relateren zijn aan het onderwijs in probleemoplossen, wil dat niet direct zeggen dat de specifieke leerlingreflecties als voldoende kunnen worden beschouwd. De reflecties zijn namelijk vaak beknopt omschreven, wat de toegekende kenmerken twijfelachtig maken. Bovendien leidt de vraagstelling op de werkbladen van iteratie 2.3 en 2.4 eerder tot de vermelding van (gespreks)onderwerpen dan specifiek geformuleerde reflecties. Indien een van deze zaken het geval is, is er tijdens de data-analyse een vervolgvraag geformuleerd die een reflectie van een leerling specifiek en daarmee waardevoller kan maken. Desalniettemin geven de toegekende kenmerken wel een beeld bij de reflecties die leerlingen relevant vinden. Daarnaast lijken de toegekende onderliggende kenmerken in sommige gevallen te overlappen. Toch zijn er kenmerken toegekend en deze van elkaar onderscheiden, gebaseerd op de context van het antwoord binnen de rest van het werkblad, de gestelde vraag dat tot het antwoord leidde, het probleem of het groepsproces. Deze context is terug te vinden in appendixen C, K, M, N en A. De bijgevoegde opmerkingen in appendix G geven indien nodig een aanvullende onderbouwing bij de interpretatie van het antwoord van een leerling.

Uit deze analyse zijn twaalf kenmerken van leerlingreflecties naar voren gekomen die leerlingen relevant vinden. Van deze kenmerken kunnen er tien gerelateerd worden aan een leerrendement voor het probleemoplossen. Dit zijn: het denkproces illustreren, inzicht in probleem, methode, monitoren, probleemverkenning, samenwerking, wijze van notatie, wiskundige structuur, perspectief uitbreiden en de oplossing generaliseren. De overige twee kenmerken zijn niet of beperkt van toegevoegde waarde voor het ontwikkelen van het probleemoplossend vermogen.

Tabel 5.6 geeft bij de twaalf kenmerken een voorbeeld van een antwoord van een leerling dat gerelateerd is aan het desbetreffende kenmerk. Verder is in de derde kolom het leerrendement voor het probleemoplossen benoemd. Het verband hiervan met het onderwijs in probleemoplossen is in hoofdstuk 3 uiteengezet. Aanvullend hierop moet worden vermeld dat met "Bewustwording" wordt verwezen naar een of beide van de volgende twee effecten. Zo kan het formuleren van belangrijke momenten in het oplosproces een bijdrage leveren aan de ontwikkeling van de vaardigheid monitoren [21]. Daarnaast kan het de herkenning van onderlinge abstracties stimuleren [21], wat bevorderlijk is voor het verticaal mathematiseren. Het is van belang om op te merken dat de voorbeelden van leerlingantwoorden niet altijd voldoende zijn bevonden voor het bereiken van het genoemde leerrendement, maar deze voorbeelden vallen wel onder het genoemde kenmerk.

In de vierde en vijfde kolom in Tabel 5.6 is per kenmerk de relatie gelegd met algemene graphic organizer (zie Tabel 3.1) en de META-kaart (zie Figuur 3.2). Op deze manier wordt er een specifiekere betekenis gegeven aan de categorieën van algemene graphic organizers van Liljedahl voor het onderwijs in probleemoplossen. Daarnaast heeft de relatie van de gevonden kenmerken met een specifieke categorie van de META-kaart meer inzicht in de waarde van een reflectie.

Verder wordt in de zesde kolom van Tabel 5.6 de relatie gelegd met een van de drie opgestelde

categorieën van de ontworpen vragenkaart. Deze categorieën zijn in subparagraaf 3.5.2 verder toegelicht.

Ter aanvulling op de kenmerken in Figuur 5.6 zijn deze in appendix H verdeeld in meerdere geconstateerde onderliggende kenmerken. Indien nodig wordt de betekenis hiervan verder toegelicht in de derde kolom van de Figuur. Verder is in deze Figuur per onderliggend kenmerk een specifieke vraag voor op de vragenkaart geformuleerd.

Kenmerk leerlingreflectie	Leerlingvoorbeeld	Stimulus voor het probleemoplossend vermogen	Relatie met 'graphic-organizers' [12]	Relatie met de META-kaart [9]	Categorie op de vragenkaart
Bepert van toegevoegde waarde	... en blijf logisch nadenken.	N.v.t.	N.v.t.	N.v.t.	N.v.t.
Het denkproces illustreren	Met een plaatje kan je je denkproces illustreren waardoor het betekenisvoller is.	Probleemaanpak expliciet maken	Procedures	Strategieën	Terugkijken
Inzicht in probleem	Ik zag dat na 1/4 van de route de tank 1/2 was.	Bewustwording	Big Ideas/Concepts	Begrijpen	Vooruitkijken
Methode	Je moet het probleem eerst kleiner maken, een stapel van 4 chipjes, en daarna kan je het zo groot maken als je wilt.	Heuristieken/probleemaanpak expliciet maken	Procedures	Strategieën	Strategieën
Monitoren	Toch 3x want $18m \times 2$ is de oppervlakte en de volume met diepte is $V = 18m \times 2 \times \text{diepte} (m)$.	Monitoren	Procedures	Strategieën	Terugkijken
Niet van toegevoegde waarde	Nadenken	N.v.t.	N.v.t.	N.v.t.	N.v.t.
Probleemverkenning	Vind het getal vanaf je het niet wilt pakken.	Probleemanalyse maken	N.v.t.	Begrijpen	Strategieën
Samenwerking	We bedenken steeds 1 ding en vulde elkaar aan.	Coöperatief leren	N.v.t.	N.v.t.	Terugkijken
Wijze van notatie	Vervolgens met een soort van boom bij mogelijkheden voor kansberekening keek ik met hoeveel auto's ik 1 afstand kon afleggen.	Realisatie overwonnen blokkade met behulp van specifieke notatie	Procedures	Strategieën	Strategieën
Wiskundige structuur	Het gebruik van breuken maakte het makkelijk.	Cognitieve vaardigheden	Big Ideas/Concepts	Verbinden	Vooruitkijken
Perspectief uitbreiden	Het forceren van de stappen (de manier) zal helpen als je andere getallenrijen wilt gebruiken (1,2) (1,2,3) (1,2,3,4,5), etc.	Abstractie verhoging	Big Ideas/Concepts	Verbinden	Vooruitkijken
Oplossing generaliseren	Uiteindelijk hebben we een kloppende formule gemaakt.	Abstractie verhoging	Big Ideas/Concepts	Verbinden	Vooruitkijken

Tabel 5.6: Kenmerken van leerlingreflecties en bijbehorende categorieën

5.3.3. Overkoepelende analyse

In deze subparagraaf zullen de eerder beschreven resultaten uit deze paragraaf gezamenlijk worden geanalyseerd voor het beantwoorden van de deelvraag: "Wat zijn kenmerken van reflecties van leerlingen die bijdragen aan het vergroten van het probleemoplossend vermogen?"

In Figuur 5.6 zijn alle kenmerken van reflecties van leerlingen die van waarde zijn voor leren oplossen van wiskundige problemen benoemd en waarom dat zo is. Daarnaast geeft deze figuur hier leerlingvoorbeelden bij en relateert deze aan de kaders van de graphic organizers van Liljedahl en de onderdelen van de META-kaart. Hierdoor zijn er bij die kaders en onderdelen voorbeelden van leerlingen gegeven die van betekenis zijn voor het onderwijzen van probleemoplossen in "Thinking Classrooms". Doordat de meeste kenmerken onderdelen van de META-kaart ondersteunen is er aangetoond dat deze reflecties metacognitief van aard zijn.

Het is opvallend aan de resultaten dat de geconstateerde betekenisvolle leerlingreflecties "Samenwerking" niet naar voren komt op zowel de algemene graphic organizers van Liljedahl als de META-kaart. Toch is het coöperatieve leren wel typerend voor "Thinking Classrooms". Het feit dat leerlingen hier op reflecteren is dan ook een teken dat er daadwerkelijk wordt geleerd door de samenwerking.

Verder valt het op dat "Probleemverkenning" wel wordt gerepresenteerd op de META-kaart, maar niet in de algemene graphic organizers van Liljedahl.

Daarnaast is het opvallend dat de wijze van notatie tijdens de meeste "gallery-walks" en bij veel van de individuele leerlingreflecties naar voren komt. Dit blijkt daarom een van de voornaamste kenmerken van leerlingreflecties te zijn. Bovendien blijken de leerlingen hier zelf ook in geïnteresseerd te zijn en wordt hier van geleerd. Dit zal in de volgende paragraaf worden toegelicht. Hoewel de wijze van notatie onder "Procedures" van de "graphic organizers" van Liljedahl en "Strategieën" van de META-kaart geplaatst is, zou dit gezien grote waarde van het kenmerk bij deze lessen mogelijk een eigen categorie verdienen.

Wel volgt er uit de resultaten bij deze deelvraag dat de reflecties van leerlingen vaak beknopt zijn beschreven en dus verbeterd kunnen worden. In de volgende deelvraag zal het zoeken naar een geschikte methode hiervoor centraal staan, zie paragraaf 5.4. Hier zal onder andere een vragenkaart

voor worden ontworpen, die vragen voor het stimuleren van betekenisvolle leerlingreflecties overzichtelijk moet weergeven. Voor het ontwerpen van deze vragenkaart is er naar een manier gezocht om alle betekenisvolle kenmerken te combineren en op een logische manier in te delen. In Tabel 5.6 zijn hiervoor de categorieën "strategieën", "terugkijken" en "vooruitkijken" toegekend. Het ontwerpproces van de vragenkaart is in appendix J verder toegelicht.

5.4. Leerlingen stimuleren betekenisvol te reflecteren

Deze paragraaf zal ingaan op de resultaten rondom de deelvraag: *"Welke aanvullingen of alternatieven binnen het principe "consolideren" van Liljedahl kunnen leerlingen stimuleren actief te reflecteren voor het bereiken van een verhoogde leeropbrengst?"*. Eerder is in paragraaf 3.5.2 geconstateerd dat het reflecteren op de oplossing en het oplossingsproces positieve leereffecten oplevert op het probleemoplossen. Met behulp van de resultaten uit paragraaf 5.3 kunnen specifieke vragen voor leerlingen geformuleerd worden om hen te laten komen voor hen relevante reflecties. Deze vragen kunnen worden ingezet om leerlingen te stimuleren zelf op een geschikte manier te reflecteren, waardoor ze een actieve en betekenisvolle bijdrage kunnen leveren bij het consolideren van een les. Verschillende implementaties in de praktijk zijn hiervoor onderzocht. In de eerste pogingen (iteratie 1.1 en 1.2) wordt dit gegaan door middel van een tweede opdracht op het werkblad, vervolgens een docentgestuurd klassengesprek (voornamelijk iteratie 2.1) en later groepsgesprekken met behulp van een ontworpen vragenkaart (iteratie 2.3 en 2.4). Het ontworpen werkblad en het docentgestuurde klassengesprek zijn in de onderzochte situaties aanvullingen op het principe "consolideren" van Liljedahl. In deze situaties zal de "gallery-walk", dat binnen het "consolideren" van Liljedahl valt, worden behouden. De lesactiviteit met de ontworpen vragenkaart is in de onderzochte situaties toegepast als een alternatief voor de "gallery-walk".

Voor het beantwoorden van de deelvraag die in deze paragraaf centraal staat zullen de resultaten naar aanleiding van de relevante data aan deze deelvraag worden beschreven. Eerder is in Tabel 2.1 een overzicht gegeven voor welke soort data uit welke iteratie relevant is voor het beantwoorden van deze deelvraag. Eerst zullen in subparagraaf 5.4.1 per iteratie de relevante observatiepunten worden beschreven. Daarna zullen in subparagraaf 5.4.2 de resultaten van de korte feedbackvragen per iteratie worden gepresenteerd. Vervolgens worden in subparagraaf 5.4.3 de resultaten van de mini-interviews uit de relevante iteraties worden beschreven. Dan worden in subparagraaf 5.4.4 de resultaten naar aanleiding van het leerlingwerk weergegeven. Daarna geeft subparagraaf 5.4.5 het ontwerpresultaat van het werkblad en het bijbehorende voorbeeld. Tot slot zal in subparagraaf 5.4.6 een overkoepelende analyse worden beschreven van de eerder gepresenteerde resultaten uit de verschillende iteraties.

5.4.1. Observatieaantekeningen

In deze paragraaf wordt er verwezen naar de algemene aantekeningen per iteratie in appendix C en de vooraf opgestelde observatiepunten met de bijbehorende aantekeningen in appendix D. In beide appendices zijn de teksten in de **groen** kleur relevant voor het beantwoorden van de deelvraag uit deze paragraaf. In deze subparagraaf zullen de voornaamste bevindingen uit beide appendices per onderwerp worden toegelicht.

Algemene aantekeningen: moeite of geen moeite met het basisprobleem en overige bevindingen
De algemene aantekeningen per iteratie zijn te vinden in appendix C. Hieruit kunnen de volgende zaken worden geconstateerd.

Allereerst kunnen er een aantal zaken worden geconstateerd bij de groep leerlingen die moeite hadden met het oplossen van het basisprobleem gedurende de gegeven tijd in de les. In iteratie 2.1 waren dit de leerlingen in groep 5, zie appendix C. Wanneer zij aan het werkblad gingen werken hadden ze daarom meer tijd nodig voor het formuleren van de oplossing van het probleem op het werkblad of lukte dit helemaal niet, zie groep C in appendix C. Op deze manier komen deze leerlingen niet toe aan het beantwoorden van de reflectieve opdracht op het werkblad of zijn ze hier niet in geïnteresseerd. In iteratie 2.3 zijn er ook leerlingen die moeite hebben met het oplossen van het basisprobleem. Deze leerlingen lukt het niet om een gesprek te voeren naar aanleiding van de vragenkaart. Verder komt er in iteratie 2.3 naar voren dat wanneer de leerlingen het basisprobleem nog niet helemaal begrijpen of als er misconcepties over de oplossing bestaan, leerlingen elkaars uitleg of werk op het whiteboard minder goed begrijpen. Vervolgens gaan ze daar, ondanks de vragenkaart, niet verder over in gesprek. Deze bevindingen uit iteratie 2.3 zijn terug te vinden in C.

Omdat het probleem voor veel leerlingen in iteratie 2.2 en 2.3 lastig werd gevonden, bleek het de leerlingen te helpen om de oplossing te vinden door tussentijds klassikaal te consolideren. Hiervoor lag de nadruk voornamelijk op cognitieve vaardigheden en nauwelijks op metacognitieve reflectie. Opvallend is dat de leerlingen vooral in iteratie 2.2 meer aandacht voor de klassikale besprekingen hadden,

dan in andere iteraties. Er was in iteratie 2.2 zelfs aandacht voor een klassikale uitleg van een medeleerling. Dit zorgde er namelijk voor dat groep 3 en groep 4 hun werk op het whiteboard verbeterde of aanvulde. Ook is het voorgekomen dat in deze iteraties de leerlingen een actievare bijdrage aan deze bespreking kunnen geven. Zo discussiëren de leerlingen in iteratie 2.3 wel klassikaal met de docent en met elkaar over de volgorde van de bewerkingen in de formule, terwijl dit in iteratie 1.1 alleen de docent hierover aan het woord was.

Daarnaast kunnen er een aantal zaken worden geconstateerd bij de groep leerlingen die minstens het basisprobleem hebben opgelost gedurende de gegeven tijd in de les. In iteratie 1.2 is het opvallend dat er al voorafgaand aan de "gallery-walk" leerlingen uit verschillende groepen uit zichzelf met elkaar in gesprek gaan over hoe ze een algemene formule voor het probleem kunnen opstellen. Op deze manier zijn ze samen actief bezig met het samenvoegen van alle oplossingen die ze tot dan toe hebben gevonden. Dit is dus het geval geweest wanneer de leerlingen al verder zijn met het oplossen dan alleen het oplossen van het basisprobleem.

Ook in iteratie 2.1 vonden er verschillende groepen leerlingen de oplossing van het basisprobleem. Dit waren groepen 1, 2, 4 en 6. Tijdens het werken aan het werkblad gingen ze vervolgens uit zichzelf met elkaar in gesprek over hoe hun oplossingen verbeterd konden worden of hoe de oplossing geoptimaliseerd kon worden. Er werd zo voornamelijk over de categorie "vooruitkijken" van de vragenkaart gesproken. Leerlingen uit groep 1 en 2 gingen daarmee zelfs door tijdens het klassikale gedeelte van de les. Blijkbaar vonden zij het interessanter om met elkaar over het probleem te discussiëren. Toch leidde dit niet tot overduidelijk meer betekenisvolle leerlingreflecties binnen deze groep leerlingen ten opzichte van de andere leerlingen, zie appendix G. Wel is de meest uitgebreide leerlingreflectie afkomstig van een leerling uit deze groep, zie leerling 4b in appendix G.

Verder kwam het voor dat in iteratie 2.3 er twee leerlingen uit groep 2, waren die tijdens het werken aan het werkblad en met de vragenkaart hier minder interesse in hadden. Zij hadden namelijk meer interesse in hoe de oplossing geprogrammeerd kon worden. Dit was niet per se de bedoeling voor in de les, maar werd wel als leerzaam beschouwd. Er werd zo voornamelijk over de categorie "vooruitkijken" van de vragenkaart gesproken. Hier waren ze over in gesprek met elkaar en met de docent. Deze leerlingen leken het probleem ook beter begrepen te hebben dan de andere leerlingen.

In iteratie 2.4 hadden onder andere groepen 2 en 3 het basisprobleem opgelost. Daarnaast hadden groepen 1 en 3 zelfs een vergelijkbaar probleem opgelost. Tijdens het werken met de vragenkaart bespraken de leerlingen van groepen 1 en 2 voornamelijk wat ze naast het basisprobleem nog meer konden oplossen, zie groep A in appendix C. Er werd zo voornamelijk over de categorie "vooruitkijken" van de vragenkaart gesproken. Bij de leerlingen uit groep 3 ontstonden er echter weinig gesprekken naar aanleiding van de vragenkaart, zie groep C in appendix C. Deze leerlingen gaven aan de "gallery-walk" te missen om de oplossingen van alle andere groepjes te zien. Uiteindelijk lopen na de les twee van deze leerlingen naar het werk van groep 4 om te kijken hoe zij het probleem hebben opgelost.

Ook kan er worden geconstateerd dat er in iteratie 2.3 tijdens de tweede keer tussentijds consolideren wordt gevraagd aan een cognitief sterke leerling om hun tussenresultaat uit te leggen, dat hij veel hulp nodig heeft van de docent. Dit sluit aan bij de eerder beschreven bevindingen van de leerlingen die het basisprobleem nog niet hebben opgelost. Na deze bespreking schrijven groep 3 en 4 nauwelijks iets erbij op het whiteboard. Ze zijn er (onterecht) van overtuigd dat zij het juiste antwoord al hebben gevonden en dit begrijpen. Dit sluit aan bij de bevindingen van de leerlingen die (denken) het basisprobleem al hebben opgelost. Waarschijnlijk heeft deze veronderstelling er voor gezorgd dat ze in mindere mate hebben geluisterd naar de centrale uitleg. Toch blijkt dat hier door de andere leerlingen minder van wordt begrepen en dat ze minder worden geactiveerd dan na het tussentijds consolideren in iteratie 2.2.

In iteratie 2.4 werken een groep leerlingen die het basisprobleem hebben opgelost (groep 5) samen met een groep leerlingen die het basisprobleem nog niet hebben opgelost (groep 4) samen aan de vragenkaart, zie groep B. Nadat er verschillende vragen van de vragenkaart kort beantwoord zijn, ontstaat er een gesprek tussen de twee groepen leerlingen. Hierbij legt een leerling van groep 4 de leerlingen van groep 5 de oplossing van het probleem uit aan de hand van de door hen gebruikte notatievorm en stellen de leerlingen van groep 5 vragen. Dit lijkt er toe te leiden dat de oplossing ook door de leerlingen van groep 5 wordt begrepen.

Verder zijn er een aantal overige relevante inzichten op te merken in appendix C.

Ten eerste is het in iteratie 1.2 gebleken dat het vragen aan leerlingen om overeenkomsten en verschillen te noemen tussen het werk van verschillende groepen op de whiteboards kan leiden tot reacties van leerlingen. Ook leidde de vraag om het resultaat van een groepje te bewijzen tot een reactie van een leerling. Op deze manier zijn leerlingen dus geactiveerd tijdens het consolideren.

Ten tweede kwam het in iteratie 2.1 voor dat er een groep leerlingen onzeker was over welke antwoorden op de reflectieve opdracht van voldoende kwaliteit zouden zijn, waardoor ze niks opschreven. Nadat zij bevestiging van de docent kregen, werd dit wel gedaan. Ook startte de interactie met de docent en met elkaar wel het gesprek over het oplosproces en het vergelijken van de verschillende oplossingen. Aangezien er leerlingen van verschillende groepen bij elkaar zaten, hadden de leerlingen een ander oplosproces doorlopen. Dit had daarom waarschijnlijk invloed op de hoeveelheid onderlinge interactie die er plaats vond. Er werd zo voornamelijk over de categorie "strategieën" van de vragenkaart gesproken. Vervolgens lukt het de leerlingen tijdens de "gallery-walk" van deze iteratie wel om elkaars strategieën en notatiewijze toe te lichten.

Vervolgens blijkt uit iteratie 2.1 dat de nieuwe groepjes bij het werkblad het effect hebben dat leerlingen elkaars oplossingen gaan bespreken, zoals bij groep A en B in appendix C, of dat ze met elkaar gaan kletsen, zoals bij groep C in appendix C. Ook in iteratie 2.3 en 2.4 maken de leerlingen van de gelegenheid om de vragen op de vragenkaart te bespreken gebruik om te kletsen met elkaar.

Daarnaast heeft in docentgestuurde klassengesprek in iteratie 2.1, 2.3 en 2.4 geleid tot nuttige aanvullingen op de twee van de drie besproken reflectie antwoorden, zie ook appendix G.

Verder is er in iteratie 2.3 een leerling geweest die uit zichzelf andere oplossingen op andere borden is gaan bekijken tijdens het werken met de vragenkaart. Dit lukte hem niet zelfstandig, maar blijktbaar was deze leerling hier wel in geïnteresseerd.

Tot slot gaan niet alle leerlingen in iteratie 2.4 direct aan de slag met de vragenkaart wanneer dit moet van de docent. Dit gebeurt bij leerlingen in groep 1, 2 en 5. Alle leerlingen willen verder werken aan het probleem op het whiteboard. De leerling uit groep 1, omdat hij nog meer oplossingen van meer vergelijkbare problemen wil bedenken. De leerling uit groep 2 wil hun antwoord nog verbeteren. De leerlingen uit groep 5 willen verder werken omdat deze groep de oplossing nog niet heeft gevonden.

Specifieke observatieaantekeningen

De specifieke observatieaantekeningen zijn te vinden in appendix D. Hieruit kunnen de volgende zaken worden geconstateerd.

In iteratie 1.2 kwam hieruit naar voren dat wanneer leerlingen gevraagd wordt om overeenkomsten en verschillen te noemen, dit hen helpt om een verbale bijdrage te leveren aan de gallery-walk.

Vervolgens is er in iteratie 2.1 gebleken dat doordat de docent een vervolgvraag stelt aan een leerling, deze leerling zijn reflectie kan specificeren. Daarnaast is er gebleken dat de interactie met de docent gesprekken over verschillende oplosstrategieën kan stimuleren. Daarbij was het optimaliseren van de oplossing het voornaamste doel van de leerlingen.

Later, in iteratie 2.2 is er gebleken dat leerlingen gemotiveerder zijn om naar het klassikale gesprek te luisteren wanneer ze de oplossing nog niet gevonden hebben. Ook hebben ze dan meer aandacht voor het werk van anderen.

Uit de aantekeningen van iteratie 2.3 kan worden geconstateerd dat er maar weinig gesprekken gevoerd zijn naar aanleiding van de vragenkaart. Een van de redenen was hiervoor dat wanneer het voor leerlingen niet duidelijk is hoe het basisprobleem is opgelost, het hen niet lukt om te kunnen werken met het werkblad en de vragenkaart. Daarnaast is het gebleken dat samengestelde groepen betekenisvolle gesprekken kunnen stimuleren.

Tot slot is in iteratie 2.4 gebleken dat in voornamelijk een van de drie groepen de vragenkaart de gesprekken van de leerlingen positief beïnvloedt. Een andere groep maakt van de gelegenheid gebruik om zelfstandig te spreken over het probleem. De derde groep heeft maar redelijk kort gewerkt met de vragenkaart. De vragenkaart heeft dus beperkte invloed op de gesprekken. Tijdens deze gesprekken zijn niet alle leerlingen even verbaal actief. Verder kan er niet geconstateerd worden dat de vragenkaart de denkactiviteit stimuleert, aangezien veel leerlingen het gebruiken als afvinklijst.

5.4.2. Korte feedbackvragen

In appendix F is een overzicht te vinden van alle korte feedbackvragen en de antwoorden die na afloop van de les door leerlingen zijn gegeven. Voor het beantwoorden van de deelvraag uit deze paragraaf

zijn voornamelijk de iteraties 2.1, 2.3 en 2.4 van belang. Verder zijn de laatste drie rijen van Tabel F.1, Tabel F.3, Tabel F.4 en Tabel F.5 relevant. De bevindingen naar aanleiding van deze resultaten worden in deze subparagraaf toegelicht per iteratie.

Hoewel iteratie 1.2 niet direct hoorde bij het beantwoorden van de deelvraag uit deze paragraaf, zegt de feedbackvraag over "vraag 2" wel dat de meeste leerlingen door de reflectieve opdracht op het werkblad geholpen zijn bij het oplossen van het volgende probleem. Aangezien het volgende probleem een hogere moeilijkheidsgraad heeft, zoals een leerling ook constateerde zoals te lezen is in Tabel F.1, kan geconstateerd worden dat het stellen van een reflectieve vraag bijdraagt aan niveauverhoging binnen het probleemoplossen.

Uit de antwoorden op de korte feedbackvragen van iteratie 2.1 is het volgende op te maken. De reflectieve opdracht op het werkblad heeft bij iets meer dan de helft van de leerlingen voor meer inzicht of een beetje meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gezorgd. De rest van de leerlingen geven aan dat deze opdracht hierop geen effect heeft. Daarnaast zeggen de leerlingen dat hulpvraag c, "Waar moest je rekening mee houden?", hen het meest heeft geholpen bij het formuleren van een goede reflectie en hulpvraag b, "Wat ging er goed? Waarom?", het minst.

Met deze beantwoorde korte feedbackvragen uit iteratie 2.3 geven de leerlingen aan dat een groot deel van hen het nuttig vindt om ideeën uit te wisselen met andere groepen. Daarbij vinden alle leerlingen dat de vragenkaart in meer of mindere mate helpt bij het uitleggen van hun denkstappen en dat dat grotendeels begrepen werd door de leerlingen uit de andere groepjes. De groene categorie, terugkijken, van de vragenkaart was hierbij het behulpzaamst en daarna de gele, strategieën. De blauwe categorie, "vooruitkijken", was het minst behulpzaam.

Tot slot is uit de antwoorden op de korte feedbackvragen uit iteratie 2.4 het volgende op te maken. De meeste leerlingen geven aan dat de vragenkaart helpt bij het uitleggen van de gemaakte denkstappen. Hierbij zegt de meerderheid van de leerlingen veel gesproken te hebben, veel nagedacht te hebben of allebei. Een minderheid van de leerlingen zegt bij het werken met de vragenkaart een beetje gepraat te hebben en een beetje nagedacht te hebben. Niemand zegt hierbij weinig te hebben gepraat, weinig te hebben nagedacht of allebei niet. Daarnaast zeggen vrijwel alle leerlingen dat ze door het werken met de vragenkaart hebben begrepen hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, alleen zegt enkel de helft van deze leerlingen daar iets van geleerd te hebben.

Uit de resultaten van de korte feedbackvragen van iteratie 2.3 en iteratie 2.4 valt af te leiden dat door het gebruiken van de vragenkaart de leerlingen zelf ervaren dat ze worden geactiveerd om te reflecteren op hun denkstappen, zowel verbaal als non-verbaal. Het is echter maar de vraag of andere leerlingen er bewust wat van leren als zij zelf hun bevindingen uitwisselen. In de optionele open feedbackvragen, zie F.1, wordt deze bevinding ook verder toegelicht. Twee leerlingen zeggen namelijk dat je er meer aan hebt als de denkwijze en oplossingen van andere groepen door de docent worden besproken. Hierdoor zie je dit ook van meerdere groepjes in plaats van enkel één ander groepje.

Specifieke observatieaantekeningen

De specifieke observatieaantekeningen zijn te vinden in appendix D. Hieruit kunnen de volgende zaken worden geconstateerd. In iteratie 1.2 kwam hieruit naar voren dat wanneer leerlingen gevraagd wordt om overeenkomsten en verschillen te noemen, dit hen helpt om een verbale bijdrage te leveren aan de gallery-walk. Vervolgens is er in iteratie 2.1 gebleken dat doordat de docent een vervolgvraag stelt aan een leerling, deze leerling zijn reflectie kan specificeren. Daarnaast is er gebleken dat de interactie met de docent gesprekken over verschillende oplossstrategieën kan stimuleren. Daarbij was het optimaliseren van de oplossing het voornaamste doel van de leerlingen. Later, in iteratie 2.2 is er gebleken dat leerlingen gemotiveerder zijn om naar het klassikale gesprek te luisteren wanneer ze de oplossing nog niet gevonden hebben. Ook hebben ze dan meer aandacht voor het werk van anderen. Uit de aantekeningen van iteratie 2.3 kan worden geconstateerd dat er maar weinig gesprekken gevoerd zijn naar aanleiding van de vragenkaart. Een van de redenen was hiervoor dat wanneer het voor leerlingen niet duidelijk is hoe het basisprobleem is opgelost, lukt het hen niet om te kunnen werken met het werkblad en de vragenkaart. Daarnaast is het gebleken dat samengestelde groepen betekenisvolle gesprekken kunnen stimuleren. Tot slot is in iteratie 2.4 gebleken dat in voornamelijk een van de drie groepen de vragenkaart de gesprekken van de leerlingen positief beïnvloedt. Een andere groep maakt van de gelegenheid gebruik om zelfstandig te spreken over het probleem. De derde groep heeft maar

redelijk kort gewerkt met de vragenkaart. De vragenkaart heeft dus beperkte invloed op de gesprekken. Tijdens deze gesprekken zijn niet alle leerlingen even verbaal actief. Verder kan er niet geconstateerd worden dat de vragenkaart de denkactiviteit stimuleert, aangezien veel leerlingen het gebruiken als afvinklijst.

5.4.3. Mini-interviews

In deze subparagraaf zullen de resultaten naar aanleiding van de gehouden mini-interviews met de leerlingen na afloop van een les worden beschreven. De vragen die vooraf zijn opgesteld als leidraad voor deze interviews is te vinden in appendix E.

Iteratie 2.1

Wanneer er aan het werkblad wordt gewerkt is aan alle groepjes gevraagd of zij de hulpvragen bij opdracht 2 begrijpen. De leerlingen die hierop reageerden zeiden dat dit begrijpelijk was. De hulpvragen zijn daarom voldoende in leerlingentaal geformuleerd. Verder zeiden een aantal leerlingen dat ze de hulpvraag "Waar moet je rekening mee houden?" het behulpzaamst, omdat ze zich hierdoor herinnerde wat tot de doorbraak bij het vinden van de oplossing heeft geleid en het je helpt om in te zien waar het probleem echt om gaat. Daarnaast vonden deze leerlingen de eerste hulpvraag nutteloos, aangezien je altijd kan zeggen dat het goed ging omdat het probleem is opgelost. Over opdracht 2 zelf zeiden deze leerlingen dat ze er niets van hadden geleerd. Dat is tegenstrijdig aan hun reacties op hulpvraag. De leerlingen zijn zich er zelf dus niet bewust van dat ze wat geleerd hebben van opdracht 2. Verder is er aan niemand meer gevraagd of de leerlingen er wat aan hebben om hun werk op het whiteboard te vergelijken met hun antwoord op opdracht 1. Dit kwam omdat na enige hulp bij opdracht 2 de leerlingen gezamenlijk met elkaar in gesprek gingen. Hierdoor was er geen gelegenheid om de vraag te stellen. Wel blijkt hieruit dat leerlingen het nuttig vinden om elkaars oplossingen te vergelijken. Het vergelijken op zichzelf is dus stimulerend voor het reflecteren op de oplossing en het oplossingsproces.

Iteratie 2.3

Tijdens deze iteratie zijn er verschillende vragen gesteld aan verschillende leerlingen. Aan twee groepen leerlingen is er gevraagd of het duidelijk is wat er van hen verwacht wordt met de vragenkaart. In deze groepen zitten voornamelijk leerlingen die ook bij de vorige lessen aanwezig waren. Een groep, bestaande uit twee leerlingen, zegt vertellen dat ze vooral bespreken hoe je de oplossing van het probleem kan vinden door te programmeren en dat ze daarmee bezig zijn met de categorie "vooruitkijken" van de vragenkaart. Een andere groep, bestaande uit vier leerlingen, zegt dat ze niet alle vragen op dit probleem vinden aansluiten. De vragen zelf zijn wel duidelijk alleen niet altijd toepasbaar. Het probleem uit de vorige les zeggen ze interessanter te vinden en ze zeggen dat de vragenkaart daar misschien wel beter aansluit. Ook van opdracht 1 van het werkblad zeggen ze dit keer niks geleerd te hebben. Wanneer gevraagd wordt of ze de kopjes boven de vragen begrijpen leggen ze dit uit door te vertellen: *"Eerst moet je de oplossing beter begrijpen, dan bekijkt hoe je het hebt gedaan en daar kun je van leren om nieuwe dingen te kunnen ontdekken"*.

Iteratie 2.4

Tijdens deze iteratie is er aan een aantal leerlingen gevraagd wat ze er van vonden om de samen te reflecteren op de les aan de hand van de vragenkaart. Sommige leerlingen geven aan dat ze dit een prettige manier van werken vinden, omdat ze zo beter kunnen begrijpen wat het andere groepje heeft gedaan. Andere leerlingen vinden het geen succes, omdat ze het fijner vinden als de docent alle oplossingen van alle andere groepjes bespreekt. Volgens deze leerlingen gaat het bespreken dan sneller en duidelijker. Ook geeft een leerling eerlijk toe dat ze nu makkelijk de gelegenheid hebben om iets anders te gaan doen.

Daarnaast is tijdens het bespreken van de vragenkaart in groepen aan deze drie groepen een aantal dingen gevraagd. Als eerste is er gevraagd of de leerlingen de vragen op de vragenkaart begrijpen. Twee groepen zeggen dat de vragen duidelijk zijn, alleen niet allemaal even handig zijn. Vervolgens is er gevraagd of de groepen hun oplossingsstrategieën hebben uitgewisseld. Twee van de drie groepen zeggen dit gedaan te hebben, de andere groep zegt van niet. Van de groepen die zeggen dit gedaan te hebben zegt een groep zegt dat de twee oplossingsstrategieën overeenkwamen. De andere groep zegt dat dit besproken is door voornamelijk twee van de leerlingen in dat groepje, terwijl de andere twee leerlingen zeiden dit niet te kunnen volgen. Tot slot is gevraagd of ze liever werken met de vragenkaart

of liever doorwerken aan het probleem. Twee groepen leerlingen zeggen dat ze liever verder hadden gewerkt en de andere groep wist het niet zo goed. Wel reageerde twee leerlingen dat zij het wel fijn vonden om samen in detail over het probleem te kunnen praten, maar dat de vragenkaart daar verder niet bij hielp of nodig was.

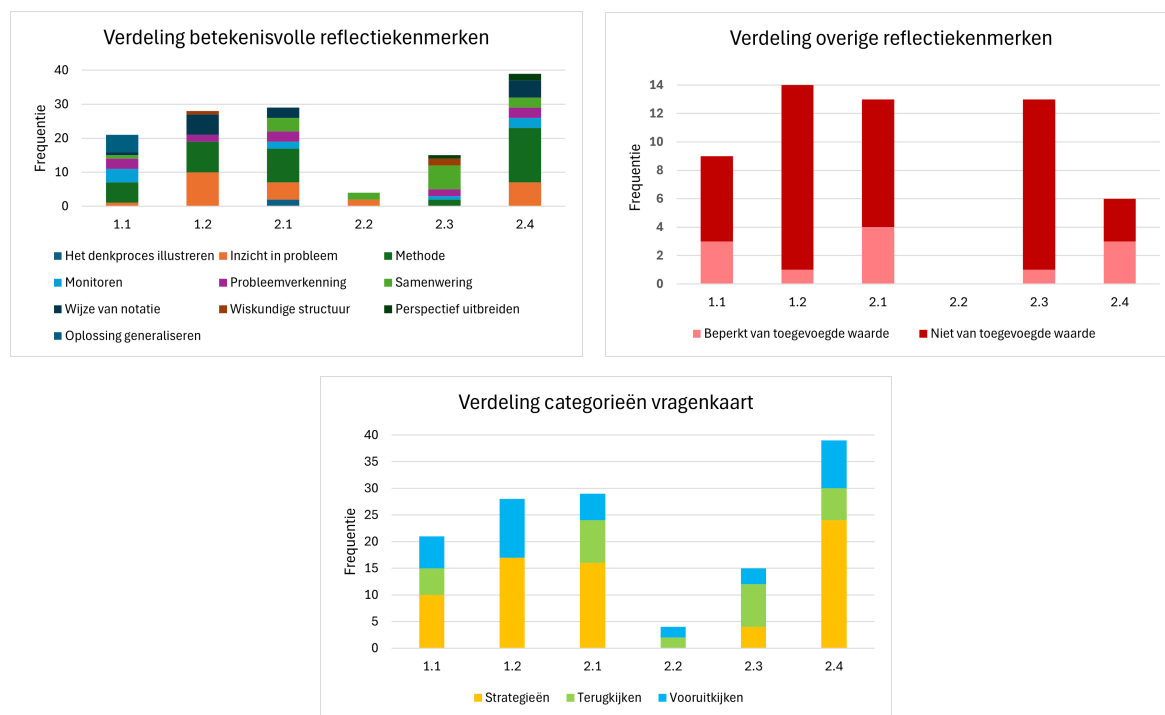
5.4.4. Individueel leerlingwerk

Alle gedocumenteerde leerlingreflecties die zijn verzameld binnen dit onderzoek zijn in appendix G geanalyseerd. In deze subparagraaf zullen de resultaten van deze analyses worden gepresenteerd. Aanvullend daarop zijn in appendix H deze resultaten in meer detail weergegeven.

In Figuur 5.3 zijn de voorkomende betekenisvolle en overige reflectiekenmerken per iteratie weergegeven. Verder is er weergegeven in hoeverre de categorieën op de vragenkaart naar voren zijn gekomen per iteratie. Hoewel uit deze kwalitatieve data geen harde conclusies getrokken kunnen worden, geeft dit wel een globaal beeld bij de waarde van de individuele leerlingreflecties. Hieruit kan worden opgemaakt dat er, op iteratie 2.2 en 2.3 na een gematigd stijgende trend is in de het aantal betekenisvolle leerlingreflecties. Dat iteraties 2.2 en 2.3 afwijken is te verklaren aangezien er in deze iteraties weinig of geen gelegenheid was voor de leerlingen om het werkblad in te vullen, zie appendix C. Hierdoor is er tijdens deze iteraties minder data verzameld van het leereffect van het reflecteren. Daarnaast kan worden opgemerkt dat de frequentie van de verschillende kenmerken verschilt per iteratie. Ook kan er worden geconstateerd dat de het aantal reflectiekenmerken die beperkt of niet van toegevoegde waarde zijn, het minst is in iteratie 2.4.

In de iteraties waarin de tweede opdracht op het werkblad centraal stond voor het reflecteren zijn in de meeste reflecties betekenisvolle kenmerken te herkennen, maar zijn de desbetreffende reflecties meestal niet specifiek genoeg. In dat geval is er een aanvullende vervolgvraag opgesteld bij de desbetreffende reflectie, zie appendix G. Gebaseerd op de deze vervolgvragen zijn de formuleringen van de opdrachten op het werkblad aangepast en is er een invulling gegeven aan de opgestelde categorieën van de vragenkaart, zie subparagraaf 3.5.2. Dit is per iteratie specifiek omschreven in appendix J. Daarnaast kunnen de opgestelde aanvullende vervolgvragen de docent helpen bij het stellen van geschikte vragen die leerlingen helpen bij het betekenisvol reflecteren tijdens de klassikale bespreking. Deze vragen zijn daarom opgenomen in het lesplan van iteratie 2.1, zie appendix B.

Verder zijn in de iteraties waarin het werken met de vragenkaart centraal stond voor het reflecteren er in totaal aan relatief iets meer reflecties een betekenisvol kenmerk voor het leren probleemoplossen toegekend dan in de andere iteraties, zie Figuur 5.3 en appendix H. Toch zijn de formuleringen van de leerlingen waaraan de kenmerken zijn toegekend nog beknopter geformuleerd dan in eerdere iteraties. Dit is te verklaren door de vraagstelling. Deze was dan ook bedoeld voor de dataverzameling van de gespreksonderwerpen. Op deze manier geven de antwoorden een indicatie van wat er besproken is tijdens het werken met de vragenkaart. Zo zijn in beide iteraties waarmee er met de vragenkaart is gewerkt, alle drie de betekenisvolle categorieën van de vragenkaart aan bod zijn gekomen, zoals te zien is in Figuur 5.3. Dit was in eerdere iteraties niet altijd het geval. Bovendien is er geconstateerd dat er wanneer het nodig is tijdens de groepsgesprekken of tijdens het klassengesprek er nuttige toevoegingen door de leerlingen worden gedaan op hun formuleringen, zie appendix G. Verder zijn er in iteratie 2.4 minder reflectiekenmerken naar voren gekomen die van beperkte toegevoegde waarde zijn of niet van toegevoegde waarde zijn, zie Figuur 5.3. Het is daarom mogelijk dat de vragenkaart er toe heeft geleid dat er leerlingen zijn die meer van deze onderwerpen zelf in groepjes specifiek hebben besproken in plaats van in een minder actieve vorm van een klassikale bespreking of individueel op een werkblad. Het leerdoel van de vragenkaart is daarmee in iteratie 2.4 bij een deel van de leerlingen bereikt, zie Figuur 5.2.



Figuur 5.3: Verdeling reflectiekenmerken en categorieën vragenkaart per iteratie

5.4.5. Ontwerpresultaat lesmateriaal: vragenkaart voor probleemoplossen

In appendix L zijn de verschillende ontwerpen van de vragenkaart te vinden die per iteratie verbeterd zijn. Dit onderzoek resulteert daarmee in onder andere de vragenkaart uit Figuur 5.4, als ondersteunend lesmateriaal voor het activeren van leerlingen tijdens het consolideren en hen te helpen bij het reflecteren op het probleemoplossen, zie Figuur 5.4. Op deze vragenkaart zijn de vragen die aan leerlingen kunnen worden gesteld om hen te stimuleren om betekenis voor te reflecteren gepresenteerd onder de categorieën "strategieën", "terugkijken" en "vooruitkijken".



Figuur 5.4: Resultaat ontworpen lesmateriaal: vragenkaart voor probleemoplossen

Het resulterende ontwerp komt overeen met het ontwerp van iteratie 2.4. Deze vragenkaart bevat onder andere de hulpvraag die de leerlingen in iteratie 2.1 het meest geholpen heeft, zie subparagraaf 5.4.2. Verder is dezelfde formering overgenomen, aangezien leerlingen deze begrepen. Dit is geconstateerd in subparagraaf 5.4.3. Hoewel subparagraaf 5.4.2 en 5.4.3 aangeven dat de leerlingen de hulpvraag over wat er goed ging niet van toegevoegde waarde vonden, is deze toch toegevoegd. Dit is gedaan om een logische en positieve opbouw binnen de vragen te hanteren binnen de vragen. De aanpassingen in het ontwerp van iteratie 1.2 duiden er ook op dat een positieve benadering van belang kan zijn, zie appendix J. Daarnaast geven de leerlingen in iteratie 2.4 aan dat de vragen op dit ontwerp van de vragenkaart allemaal duidelijk zijn, zie subparagraaf 5.4.3. Toch zeggen de leerlingen ook dat niet alle vragen even handig zijn in die specifieke les.

5.4.6. Overkoepelende analyse

In deze subparagraaf zullen de eerder beschreven resultaten uit deze paragraaf gezamenlijk worden geanalyseerd voor het beantwoorden van de deelvraag: "Welke aanvullingen of alternatieven binnen het principe "consolideren" van Liljedahl kunnen leerlingen stimuleren actief te reflecteren voor het bereiken van een verhoogde leeropbrengst?".

Alles bij elkaar genomen heeft de vragenkaart niet direct geleid tot meer betekenisvolle reflecties van leerlingen die bijdragen aan het probleemoplossend vermogen ten opzichte van de poging met het werkblad. Daarnaast zorgt het niet voor een actievere betrokkenheid van alle leerlingen tijdens het consolideren van de les. Bovendien geeft het werken met de vragenkaart leerlingen de gelegenheid om juist minder actief te worden. Toch geeft de vragenkaart voor zowel de leerlingen als de docent meer inzicht in waar een betekenisvolle reflectie voor het leren probleemoplossen uit zou kunnen bestaan. Wel vinden de leerlingen niet alle vragen voor elke les relevant. Ook de variërende verdeling in reflectiekenmerken per iteratie in Figuur 5.3 wijst dit uit. Dit zou kunnen liggen aan het type van de gekozen problemen of aan de gekozen lesactiviteit. In de volgende paragraaf wordt dit verder toegelicht, zie paragraaf 5.5. Het werkblad kan daarentegen wel zorgen voor een actieve betrokkenheid van alle

leerlingen, aangezien de leerlingen op die manier allemaal een antwoord formuleren op een reflecterende vraag. Toch heeft dit maar een beperkt leereffect, aangezien dit niet leidt tot veel diepgang in de gegeven antwoorden. Interactie met de docent of met elkaar kan dit verbeteren.

Gedurende de onderzochte iteraties in deze paragraaf zijn er daarnaast twee verschillende effecten ervan geconstateerd op het gedrag en de behoefte van leerlingen tijdens het consolideren van een les.

Ten eerste, wanneer leerlingen nog moeite hebben met het volledig beheersen van het basisprobleem dat ze moeite hebben met het zelf uitleggen van hun werk of dat van anderen. Ook kunnen ze behoefte hebben aan bevestiging over de kwaliteit van hun werk. Wel hebben deze leerlingen meestal interesse in een docentgestuurde "gallery-walk" of soms zelfs in de uitleg van een medeleerling, omdat dit hen kan helpen bij het oplossen van het basisprobleem. Hierbij staat het cognitief reflecteren centraal. Hoewel in deze gevallen de docent of een medeleerling voornamelijk aan het woord is, is het waarschijnlijk dat de leerlingen wel actief meedenken. Het komt bijvoorbeeld voor dat leerlingen hierbij korte vragen stellen en vervolgens hun werk aanvullen of verbeteren. Daarnaast is het gebleken dat vragen over het benoemen van overeenkomsten en verschillen leerlingen helpen een verbaal actievere bijdrage te geven.

Ten tweede, het komt voor dat leerlingen de behoefte hebben om met elkaar in detail te discussiëren over verschillende oplossingen, strategieën en mogelijke uitbreidingen. Dit is vaak het geval wanneer leerlingen het basisprobleem beheersen en al bezig zijn geweest met vergelijkbare problemen. Zij zijn dan voornamelijk geïnteresseerd in wat andere leerlingen daarna hebben gedaan en hoe je de oplossing kunt verbeteren of kunt uitbreiden. Hiervoor kunnen ideeën van de docent stimulerend zijn, maar er is gebleken er leerlingen zijn die deze gesprekken zelfstandig initiëren en kunnen voeren. Toch zijn er ook leerlingen die juist behoefte hebben aan een docentgestuurde "gallery-walk" omdat dan de ideeën van alle andere leerlingen besproken worden.

De vragenkaart is voornamelijk bedoeld om op het voorafgaande probleemoplossen naast cognitief ook metacognitief te reflecteren. Hierdoor zou het leerrendement kunnen toenemen, zie subparagraaf 3.5.2. Het is de bedoeling dat de leerlingen begeleid door de vragenkaart met elkaar in gesprek gaan, waardoor het reflecteren mogelijk uitgebreider gebeurt. Echter is er gebleken dat leerlingen de vragen op de vragenkaart kort beantwoorden en dus meer als afvinklijst gebruiken dan als stimulans voor een uitgebreid en gesprek. Mogelijk speelt hier cognitieve overbelasting een rol bij. In dit geval stimuleerde de vragenkaart in mindere mate leerzame gesprekken gerelateerd aan het probleemoplossen en werden er maar beperkt ideeën uitgewisseld. Toch zijn de leerlingen hier wel in geïnteresseerd en wellicht missen deze leerlingen hierdoor de "gallery-walk".

Daarnaast zijn er leerlingen die gebruik maken van de gelegenheid om met de vragenkaart om met elkaar in discussie te gaan over de categorie "vooruitkijken" maar heeft daarbij de vragenkaart zelf niet nodig. Hierbij gaat het voornamelijk over leerlingen die minsten het basisprobleem hebben opgelost.

5.5. Strategisch inzetten van lesmaterialen en lessen

Deze paragraaf zal ingaan op de resultaten rondom de deelvraag: *"Wat zijn onderwijsaspecten die binnen een les van belang zijn voor het behouden van de positief bevonden leereffecten gedurende dit onderzoek?"*. Tijdens de eerste ervaringen met het inzetten van de ontworpen lesmaterialen werd er duidelijk dat de effectiviteit ervan sterk afhankelijk is van het verloop van een les. In deze praktijk situatie gaat het voornamelijk om de specifieke aard van het behandelde probleem en de ervaren moeilijkheidsgraad door de leerlingen ervan. Aangezien de lesinhoud van deze lessen buiten het standaard wiskundecurriculum ligt en de samenstelling van de klas kan wisselen, is het verloop in de les moeilijk te voorspellen. Er is daarom gebleken dat er soms beter afgeweken kan worden van het vooraf opgesteld plan. Door de ervaringen met betrekking tot het verloop in de les en de verschillende soorten behandelde problemen gestructureerd te documenteren, zal dit resulteren in het beantwoorden van deze deelvraag.

Voor het beantwoorden van de deelvraag die in deze paragraaf centraal staat, zullen de resultaten naar aanleiding van de relevante data aan deze deelvraag worden beschreven. Eerder is in Tabel 2.1 een overzicht gegeven voor welke soort data uit welke iteratie relevant is voor het beantwoorden van deze deelvraag. Eerst zullen in subparagraaf 5.5.1 per iteratie de relevante observatiepunten worden beschreven. Daarna zullen in subparagraaf 5.5.2 de resultaten van de korte feedbackvragen per iteratie worden gepresenteerd. Vervolgens worden in subparagraaf 5.5.3 de resultaten van de mini-interviews uit de relevante iteraties worden beschreven. Dan worden in subparagraaf 5.5.4 de resultaten naar aanleiding van het leerlingwerk weergegeven. Tot slot zal in subparagraaf 5.5.5 een overkoepelende analyse worden beschreven van de eerder gepresenteerde resultaten uit de verschillende iteraties.

5.5.1. Observatieaantekeningen

In deze paragraaf wordt er verwezen naar de algemene aantekeningen per iteratie in appendix C en de vooraf opgestelde observatiepunten met de bijbehorende aantekeningen in appendix D. In beide appendices zijn de teksten in de oranje kleur relevant voor het beantwoorden van de deelvraag uit deze paragraaf. In deze subparagraaf zullen de voornaamste bevindingen uit beide appendices per onderwerp worden toegelicht.

Timing en organisatie

Uit appendix D blijkt dat er in iteratie 2.1 dat er minder concentratie bij de leerlingen was voor de klassikale bespreking, door het late tijdstip binnen de les. Daarnaast had de overgang van groepswork naar een klassikale bespreking hier invloed op. Toch werkte het in dit geval wel om leerlingen hun antwoorden voor te laten lezen en om andere leerlingen daar op te laten reageren. Uit appendix C blijkt dat het ook in iteratie 2.4 niet mogelijk was om in de laatste paar minuten van de les nog wat te verwachten van de leerlingen. In dit geval vulde de leerlingen de werkbladen namelijk niet aan, hoewel dit van hen werd gevraagd.

Daarnaast blijkt er uit appendix C en D dat het de leerlingen in iteratie 2.3 meer tijd en energie kostte om voor het eerst met de lesmaterialen te werken. Er zijn er dan ook veel tegelijk in een les geïntroduceerd. Het gaat hierbij om het werkblad, het bijbehorende voorbeeld en de vragenkaart. Verder werd er later dan gepland overgegaan naar dit lesonderdeel. Dit kwam doordat het probleem moeilijker op te lossen bleek dan verwacht. Als gevolg hiervan kwamen vooral de leerlingen die niet eerder met de lesmaterialen hadden gewerkt er niet aan toe om te werken met de vragenkaart of hadden ze hier geen energie meer voor aan het einde van deze les. In tegenstelling hierop is het in appendix D gebleken dat het weglaten van de lesactiviteit met het werkblad in iteratie 2.2 er niet voor een verminderde activiteit van de leerlingen zorgde. Ook in deze iteratie was het probleem moeilijker dan verwacht. Hoewel dit voor veel leerlingen de eerste les met BTC was, waren de leerlingen voldoende gemotiveerd om het probleem op te lossen en bleven ze wel doorwerken tot het eind van de les. Hieruit kan daarom worden geconstateerd dat het leerrendement in mindere mate wordt belemmerd als nieuwe lesactiviteiten en lesmaterialen niet gezamenlijk in een les worden geïntroduceerd. Hierbij gaat het om het introduceren van de didactiek van "Thinking Classrooms" in het geheel, het werkblad, het bijbehorende voorbeeld, de vragenkaart en het werken met de vragenkaart.

Verder blijkt er uit appendix C dat er leerlingen in iteratie 2.3 alleen zijn gaan zitten tijdens het werken met het werkblad. Hierbij had een van de leerlingen eerder moeite met het samenwerken met zijn groepsgenoten en begreep niet veel van waar ze mee bezig waren. Omdat hij nu ook alleen is gaan zitten, kan hij ook niet gemakkelijk geholpen worden door zijn medeleerlingen met het maken van

het werkblad en daarmee de oplossing mogelijk alsnog begrijpen. Bovendien is het voor de leerlingen die alleen zijn gaan zitten onmogelijk om gesprekken te voeren met behulp van de vragenkaart. Het is daarom van belang dat de docent er voor zorgt dat leerlingen niet alleen gaan zitten.

De lesactiviteiten met het werkblad en de vragenkaart

Uit appendix C blijkt dat in iteratie 1.1 de leerlingen die eerder klaar waren met het werkblad aan de tafels bleven zitten en niet vanzelf teruggingen naar het whiteboard om te werken aan een vergelijkbaar probleem. Daarom zijn in iteratie 1.2 de leerlingen actief door de docent terugverwezen naar het whiteboard, zie appendix C. Hierdoor gingen sommige groepen vervolgens weer gezamenlijk verder werken aan een vergelijkbaar probleem. Ook kwam het voor dat in groep 1 nog niet alle leerlingen klaar waren met het werkblad, maar dat er toch de beslissing is gemaakt om hen gezamenlijk door te verwijzen naar het whiteboard. Hiermee is het voorkomen dat er twee leerlingen niks zouden gaan doen. Daarnaast blijkt uit appendix D dat wisselen tussen het werken aan het whiteboard en aan de tafels er ook voor zorgde dat leerlingen op een later moment juist gingen zitten en daarmee passief werden.

Verder blijkt er uit appendix D dat er doordat het de leerlingen niet lukte op de optimale oplossing te komen in iteratie 2.1 zij het basisprobleem niet hadden opgelost en daardoor niet uit zichzelf aan het werkblad gingen werken. Vervolgens is er toch besloten om de leerlingen dan de beste oplossing die ze wel gevonden hadden op het werkblad te laten noteren. Hier had ook eerder voor gekozen kunnen worden, zodat het werkblad nog wel nuttig voor de leerlingen zou kunnen zijn bij het vinden van de optimale oplossing van dit probleem.

Daarnaast is er in iteratie 2.3 gebleken dat er een leerling helemaal niet bezig is geweest met het werkblad, omdat hij enkel bleef nadenken en praten over hoe je de oplossing mogelijk zou kunnen programmeren, zie appendix C. In dit geval is het werkblad blijkbaar overbodig om het verticaal mathematiseren mogelijk te maken.

Voor het werken met de vragenkaart is het gebleken in iteratie 2.1 en 2.3 dat wanneer leerlingen zelf kiezen bij wie ze gaan zitten dat leerlingen gemakkelijker met elkaar gaan praten. De gesprekken gaan dan over het probleem, maar in sommige gevallen gaan leerlingen ook met elkaar kletsen. Zo worden er in iteratie 2.1 in groep A en B elkaars oplossingen besproken, zie appendix C. Voor het starten van het gesprek binnen de groepjes kan het nuttig zijn om ingedeelde groepen te mengen, aangezien de leerlingen dan niet hetzelfde oplosproces hebben doorlopen.

Ook blijkt er uit appendix D dat er in iteratie 2.3 minder motivatie was voor het werkblad en het werken met de vragenkaart door de misconceptie dat dit probleem niet op te lossen is. Vervolgens is er daarom in het lesplan van iteratie 2.4 opgenomen om voorafgaand aan het werken met de vragenkaart klassikaal te consolideren vanaf de basis, zie appendix B. Toch is hiervan afgeweken, aangezien er bij alle groepen tijdens het werken op de whiteboards voldoende interactie met de docent is geweest. Dit is verder beschreven in appendix C. Hierdoor was de noodzaak van het klassikaal te consolideren kleiner en is dit overgeslagen.

Verder is te lezen in appendix C dat de docent een toevoeging doet ten opzichte van het lesplan, zie appendix B, dat de leerlingen die even niet aan het woord zijn de vragenkaart kunnen gebruiken om vervolgens een vraag te kunnen stellen aan de andere leerlingen. Dit werd later ook gedaan door de leerlingen, wat hun betrokkenheid binnen deze lesactiviteit stimuleerde.

Het verticaal mathematiseren

Uit appendix C volgt dat de meeste leerlingen in iteratie 1.1 een formule hebben kunnen opstellen als oplossing van het probleem. In appendix C is beschreven dat in ook iteratie 1.2 de meeste groepen bezig zijn geweest met het bedenken en oplossen van vergelijkbare problemen en het opstellen van een algemene formule. Hoewel groep 3 hier weinig tijd voor heeft, proberen de leerlingen toch een voorspelling te maken van de algemene oplossing in de vorm van een grafiek. Verder zegt groep 5 het in eerste instantie makkelijk te vinden om een vergelijkbaar probleem op te lossen, waardoor hun motivatie enigszins zakt. Vervolgens blijken ze dit toch uitdagender te vinden dan ze van tevoren dachten. Dit motiveert hen om nog meer vergelijkbare problemen te bedenken en op te lossen. Wanneer ze een nieuwe oplossing hebben gevonden roept een leerling enthousiast: *"Nu hebben we er weer een opgelost!"*. Groep 6 heeft gekeken naar het werk van deze groep 5 en wil vervolgens zelf een origineler vergelijkbaar probleem bedenken. Doordat zij het probleem op een andere manier aanpassen maken zij het extra moeilijk. Dit ziet een leerling uit groep 5 en deze reageert met de uitspraak: *"Wow,*

jullie willen het helemaal moeilijk maken". Alhoewel groep 6 het opgestelde probleem niet oplossen bespreken ze wel wat ze voor het vinden van de oplossing nodig hebben.

Verder zijn de leerlingen in iteratie 2.4 ook bezig geweest met het uitbreiden van het probleem en het bedenken en oplossen van vergelijkbare problemen. In appendix C is te lezen dat dit bij groep 1 en 2 voorkwam. Bovendien heeft groep 2 zelfs een poging gedaan om een algemene formule te vinden. Vervolgens is er in appendix D geconstateerd dat er leerlingen waren die het jammer vonden om hier mee te moeten stoppen en met de vragenkaart aan het werk moesten. Wel bleek het bespreken van de oplossingen van vergelijkbare problemen een interessant gespreksonderwerp voor de leerlingen, zie appendix C.

Daarnaast is het van belang om een observatie aantekening van iteratie 1.2 uit appendix D aan te halen. Hier staat namelijk beschreven dat het lastig is voor de docent om tijdens de les bij alle leerlingen te controleren of ze geen fouten maken bij het oplossen van vergelijkbare problemen of het formuleren van een algemene oplossing. Aangezien het de bedoeling is dat leerlingen zelf vergelijkbare problemen gaan bedenken is het ook lastig om als docent voorbereid te zijn op alle variaties.

Tussentijds consolideren

In iteratie 2.2 is het voor het eerst besloten om niet alleen aan het eind van de les te consolideren, maar dit ook tussentijds te doen. Hier is voor gekozen om de leerlingen te helpen met het oplossen van het probleem. Dit was nodig omdat de leerlingen meer moeite hadden met het oplossen van het probleem dan er van tevoren was gedacht. Door tussentijds te consolideren worden voornamelijk groep 3 en 4 verder geholpen, zie appendix C. Bovendien blijkt uit appendix D dat het zorgde voor meer motivatie bij het oplossen en voor meer aandacht voor elkaars werk. Ook is in iteratie 2.3, zoals beschreven is in appendix C, voor gekozen om meermaals tussentijds te consolideren, hoewel dit extra tijd kostte. Hier is voor gekozen omdat het noodzakelijk is om inzicht in het probleem te hebben om er over te kunnen praten.

Ervaringen bij de gebruikte problemen

Tijdens de iteratie 1.1 bleken er leerlingen te zijn die al tijdens het oplossen van het basisprobleem "Het zwembad" op de whiteboards of tijdens het werken op het werkblad bezig waren met het opstellen van een algemene formule. Dit blijkt uit appendix C. Aan het eind van de les lukte het bijna alle leerlingen ook om binnen 5 minuten het vergelijkbare probleem op te lossen, zie appendix C.

Tijdens iteratie 1.2 waren er een aantal leerlingen die in eerste instantie dachten dat het oplossen van een vergelijkbaar probleem aan het "Vip in de woestijn"-probleem eenvoudig zou zijn, maar dit bleek lastiger dan gedacht. Dit gebeurt bijvoorbeeld bij groep 5, zie appendix C. Vervolgens werden deze leerlingen geënthousiasmeerd om meer vergelijkbare problemen op te lossen, ze roepen namelijk zinnen als *"Nu hebben we er weer een opgelost!"*. Vervolgens zijn tijdens deze iteratie leerlingen die samen zoeken naar een algemene formule. Dit zijn voornamelijk groep 1, groep 4 en groep 5.

In iteratie 2.1 bleken alle leerlingen er moeite mee te hebben om tot de optimale oplossing van drie keer wegen te komen in het "Munten wegen"-probleem, zie appendix C. Hierdoor daalde bijvoorbeeld in groep 6 de motivatie voor het probleemoplossen. Daarnaast stimuleerde de wetenschap dat er een efficiëntere oplossing bestaat ook het contact tussen de leerlingen zoals te lezen is in appendix C. Er gingen namelijk verschillende groepen met elkaar in gesprek om de optimale oplossing te vinden. Ook kwam het voor dat wanneer leerlingen een oplossing hadden gevonden die efficiënter was dan die van een ander groepje, dit de onderlinge interactie stimuleerde. Zo ging groep 3 overleggen met groep 4, omdat zij een efficiëntere oplossing hadden gevonden.

In iteratie 2.2 hadden de leerlingen de hele les nodig om tot de oplossing van het "Red de drenkeling"-probleem te komen, zie appendix C. Zoals in deze appendix ook te lezen is, benoemt de docent in de les zelf hier ook een van de verklaringen hiervoor, namelijk dat de aanwezige havo leerlingen nog geen differentiëren hebben gehad. Daarnaast lopen de leerlingen onder andere vast op de realisatie dat de gevonden route geoptimaliseerd kan worden en op het kiezen van een geschikt assenstelsel en het opstellen van een formule.

Uit appendix C van iteratie 2.3 blijkt dat de leerlingen het lastig vinden om een oplossing op het probleem "Kluisjes open en dicht" te formuleren of te begrijpen wat de oplossing is, aangezien het niet met de hand op te lossen is. Mede hierdoor kostte het leerlingen meer tijd om de oplossing op het werkblad op te schrijven.

Tot slot bleek in iteratie 2.4 dat het probleem "Het chips-spel" gemakkelijk door de leerlingen zelf uit te breiden en te variëren was, zie appendix C.

5.5.2. Korte feedbackvragen

In de optionele open korte feedbackvragen hebben sommige leerlingen bij sommige lessen feedback gegeven over de problemen die tijdens die lessen centraal stonden. De bevindingen naar aanleiding van deze resultaten worden in deze subparagraaf toegelicht.

In iteratie 1.2 merkte een leerling op bij het probleem "Vip in de woestijn" dat het basisprobleem heel makkelijk was, maar als je het probleem een beetje veranderde heel moeilijk werd, zie Tabel F.1. Hieruit valt af te leiden dat dit probleem geschikt is voor het bedachte verloop in de opdrachten, zie subparagraaf 3.4.2, maar dat er volgens deze leerling mogelijk een gat zit wat betreft de moeilijkheidsgraad van het basisprobleem en het vergelijkbare probleem.

Verder hadden er drie leerlingen een reactie gegeven op het probleem "Kluisjes open en dicht" in iteratie 2.3. Hierover zei een leerling dat hij door dat probleem geconstateerd had dat dat problemen niet wiskundig hoeven te zijn en een andere leerling problemen soms geen oplossing hebben, zie Tabel F.1. Vooral de tweede opmerking kan gezien worden als misconceptie aangezien er wel een oplossing op dit probleem bestaat. Tot slot zei een leerling dat het geen leuk probleem was, zie Tabel F.1. De laatste reactie spreekt hierbij voor zich, deze leerling vond deze opdracht minder leuk. Deze opdracht heeft bij deze leerling dan waarschijnlijk voor minder motivatie gezorgd. De andere twee reacties zeggen meer over de kwaliteit van het probleem. Zo zegt de reactie van de eerste leerling, gerelateerd aan de gegeven les, iets over zijn of haar beeld bij wat wiskunde is. Blijkbaar sluit deze opdracht daar niet bij aan en heeft de les hier niet bij geholpen. De reactie van de tweede leerling geeft aan dat hij of zij niet helemaal begrepen heeft wat er in de les is besproken. Zo is er gezegd dat dit probleem wel op te lossen is, maar dan met behulp van een computer. Dit komt doordat het met de hand te veel werk zou zijn. Blijkbaar had deze leerling niet door dat er wel besproken is welk wiskundig principe hier achter zit of dat je dit ook als oplossing zou kunnen zien, hoewel je geen eindantwoord hebt berekend. Hieruit valt af te leiden dat de vraagstelling van het probleem mogelijk verbeterd kan worden.

5.5.3. Mini-interviews

In deze subparagraaf zullen de resultaten naar aanleiding van de gehouden mini-interviews met de leerlingen na afloop van een les worden beschreven. De vragen die vooraf zijn opgesteld als leidraad voor deze interviews is te vinden in appendix E.

Iteratie 1.2

In iteratie 1.2 is er aan de leerlingen gevraagd of zij wat aan het werkblad hadden. Een van de onder-vraagde leerlingen gaf daarbij aan dat hij dit keer niks aan het werkblad had gehad, maar de vorige les wel. Dit heeft hij zo ervaren omdat "Het zwembad"-probleem volgens hem een meer wiskundig probleem was. Hij vond het probleem "Vip in de woestijn" daarom ook makkelijker.

Iteratie 2.3

De leerlingen die niet bij de vorige lessen aanwezig waren, is ook om hun mening over de vragenkaart gevraagd. Een aantal leerlingen zegt er maar kort naar gekeken te hebben, aangezien ze bezig waren met het werkblad en het bekijken van het voorbeeld. Daarna geven ze aan dat de energie op is om er nog aan te beginnen. De gegeven tijd en het late moment in de les is hier logischerwijs de oorzaak van, zie appendix C. In dit geval helpt de vragenkaart dus niet om een nuttig gesprek te voeren.

Verder komen er, wanneer er tijdens deze iteratie gevraagd wordt naar de effecten van de vragenkaart, verschillende leerlingen al snel met opmerkingen over het probleem dat centraal stond tijdens deze les. Een leerling zegt dat hij dit probleem niets vindt, omdat je geen patroon kan herkennen. Het probleem van de vorige iteratie zegt hij leuker te vinden. Een andere leerling vult dit aan. Hij zegt dat hij wel begrijpt hoe de oplossing werkt, maar dat je dit niet zomaar kunt opschrijven voor alle getallen. Daarom vindt ook deze leerling dit probleem niet leuk.

5.5.4. Leerlingwerk

Naar aanleiding van het analyseren van het leerlingwerk van de leerlingen in appendix M en N zijn er verschillende inzichten verkregen naar aanleiding van de deelvraag die in deze paragraaf centraal staat. In deze subparagraaf zullen deze inzichten per onderwerp worden gepresenteerd.

Het maken van een "fout"

Uit het werk van de leerlingen kunnen verschillende betekenisvolle momenten in het oplosproces worden aangemerkt. In sommige gevallen kan het maken van een "fout" leiden tot een bepaald inzicht in het probleem waardoor de juiste oplossing kan worden gevonden. Dit is in de volgende situaties waargenomen.

Ten eerste kan in het werk van groep 1 uit iteratie 1.1 worden opgemerkt dat de leerlingen eerst een foute volgorde in het delen binnen de opgestelde formule hadden toegepast, zie rechtsonderin Figuur M.1. De leerlingen kwamen hier achter wanneer ze de formule getest hadden op drie verschillende situaties, waarna ze de formule verbeterden. Dit licht leerling 1c toe in het antwoord op de tweede vraag van het werkblad, zie Figuur N.3. Doordat de eerder opgestelde formule van de leerlingen in eerste instantie een fout bevatte, moest deze bij het verifiëren van de formule worden verbeterd. Hierdoor werden de leerlingen zich bewuster van de juiste volgorde van delen.

Ten tweede kan in het werk van groep 4 uit iteratie 1.1, zie Figuur M.4, worden opgemerkt dat de leerlingen in het probleem "Het zwembad" in eerste instantie niet bewust veelvouden van 18 probeerden. Hierdoor weet je hoeveel er is gegraven en kan je niet uitrekenen hoe diep het zwembad uiteindelijk wordt. Zo probeerden de leerlingen telkens iets als oplossing, zie #2 Figuur M.1, zonder dit te kunnen verifiëren. Wanneer de leerlingen wel de veelvouden van 18 bijhielden, zie #3 Figuur M.1, konden ze gericht naar de oplossing zoeken en deze met een volgende berekening verifiëren wanneer die gevonden was. Op deze manier hebben de leerlingen wel gebruik gemaakt van hun eerdere berekeningen bij #2, maar hebben ze deze berekening op een andere manier toegepast. Daarnaast maken ze gebruik van tussenresultaten die niet tot de oplossing leiden in #3 om op het juiste resultaat te komen.

Ten vierde blijkt dat beide leerlingen van groep 6 in iteratie 1.2 er na het uitwerken van hun oplossing op het werkblad achter kwamen dat zij iets over het hoofd hadden gezien, waarna zij ook op het werkblad hun oplossing verbeterden. Dit is te zien in Figuur N.30 en N.31. Door het noteren van hun oplossing kwamen zij er dus achter dat hun oplossing efficiënter kon.

Ten derde kan in het werk van groep 2 uit iteratie 2.4, zie het rode kader in Figuur M.1, worden opgemerkt dat de leerlingen in het probleem "Het chips-spel" proberen een optimale strategie voor speler 1 te vinden. Dit is gebaseerd op het vermoeden dat als de som van zetten gelijk is aan 4 je altijd kan winnen. Dit blijkt voor speler 1 echter alleen te gelden voor de situaties met een streep onder het laatste getal. Voor speler 2 geldt dit wel altijd, waardoor deze speler altijd kan winnen. De leerlingen hebben dus eerst een vermoeden dat fout blijkt te zijn, maar trekken door die realisatie wel de juiste conclusie dat er alleen een optimale strategie voor alleen speler 2 bestaat.

Tot slot komen er in iteratie 2.2 twee verschillende variaties in de volgorde van het delen voor in de antwoorden van de leerlingen, zie appendix M. Deze hebben de leerlingen in sommige gevallen van elkaar overgenomen en vervolgens geverifieerd of de betekenis achterhaald. Tijdens de "gallery-walk" raakt ook de docent raakt even in de war over welke volgorde correct is, zie appendix C. Vervolgens is er bij de meeste leerlingen veel aandacht voor de dimensie-analyse die de docent uitvoert om de volgorde te controleren, zie appendix C. Het maken van deze veelvoorkomende fout heeft op deze manier gezorgd voor een bewust leermoment over het controleren van je antwoord door middel van de dimensie-analyse. In dit geval was hier meer aandacht voor dan in iteratie 1.1, aangezien er tijdens deze iteratie meer groepjes waren waarvoor deze informatie relevant was, zie appendix C. Dit kwam vermoedelijk omdat de leerlingen er achter wilde komen welk van de twee voorkomende formules goed was. Tijdens iteratie 1.1 waren uiteindelijk alle leerlingen het er over eens wat de volgorde van het delen moest zijn, aangezien iedereen dezelfde volgorde gebruikte op de whiteboards, zie appendix M. Hier was dus minder aandacht voor.

Verder zegt er een leerling dat presenteren van ideeën gerelateerd aan het oplossen van het probleem op het whiteboard deze voor iedereen overzichtelijk maakt waardoor vervolgens samen gekeken kan worden of de ideeën goed zijn, zie het antwoord van leerling 1c uit iteratie 2.3 in Figuur N.52. Ook zijn er leerlingen die zeggen dat je kunt leren van elkaars fouten, zie de antwoorden op opdracht 1 van leerling 4a en leerling 4b in iteratie 2.4 in Figuur N.70 en N.71. Op deze manier kan het presenteren van "foute" ideeën leiden het coöperatief leren stimuleren.

Ervaringen van de leerlingen met de problemen

Wanneer er nogmaals naar het werk van de leerlingen op de whiteboards en de ingevulde werkbladen wordt gekeken, zie appendix M en N, valt op dat de problemen op verschillende manieren ervaren worden door de leerlingen. Zo zegt een leerling het "Vip in de woestijn"-probleem makkelijk te vinden als antwoord op de tweede opdracht, zie N.28. Over het "Munten wegen"-probleem zegt een leerling juist het volgende. *"Wij hadden snel bedacht hoe het in 4x moest, maar we liepen vast op 3x en konden dat niet oplossen"*, zie Figuur N.37.

Verder blijkt er uit Figuur N.30 en N.31 dat de leerlingen bij het probleem "Vip in de woestijn" de door hun gevonden oplossing ging optimaliseren. Zo dachten ze eerst dat het probleem opgelost kon worden met 16 auto's, maar realiseerden zich later dat dit ook met 8 of zelf 4 kon.

Daarnaast bleek ook het "Vip in de woestijn"-probleem goed te variëren was door de leerlingen. Uit Figuur M.10 blijkt bijvoorbeeld dat deze groep leerlingen een variatie op het probleem gingen oplossen. Hierbij hadden zij de vraagstelling veranderd naar dat er in plaats van twee keer een volle tank nodig was, er vier keer een volle tank nodig was. Ook "Het chips-spel"-probleem bleek goed te variëren door de leerlingen. Uit Figuur M.27 en M.29 blijkt namelijk dat de leerlingen bezig zijn geweest met oplossen van het probleem bij andere spelregels, waarbij er een ander aantal chipjes mag worden gepakt.

Verder is het "Het chips-spel"-probleem goed uit te breiden. Er zijn namelijk verschillende groepjes die hebben geprobeerd hetzelfde probleem op te lossen, maar dan met een grotere stapel chips. Dit is bijvoorbeeld te zien in het werk in Figuur M.28 en M.30. Dit is onder andere geholpen bij het formuleren van een algemene oplossing. Hier hebben voornamelijk groep 1, 2 en 3 een poging voor gedaan, zie Figuur M.27 M.28 en M.29. Ook bij het "Vip in de woestijn"-probleem zijn er groepen leerlingen geweest die een poging hebben gedaan om een algemene formule voor het probleem te vinden. Dit is voornamelijk terug te zien in het werk van groep 5 en 6, zie Figuur M.10 en M.11. Daarnaast zijn vrijwel alle leerlingen op de whiteboards en de werkbladen bezig geweest met het opstellen van een formule voor "Het zwembad"-probleem, maar slechts een leerling heeft een formule opgesteld die enkel uit variabelen bestaat, zie Figuur N.8.

5.5.5. Overkoepelende analyse

In deze subparagraaf zullen de eerder beschreven resultaten uit deze paragraaf gezamenlijk worden geanalyseerd voor het beantwoorden van de deelvraag: "Wat zijn onderwijsaspecten die binnen een les van belang zijn voor het behouden van de positief bevonden leereffecten gedurende dit onderzoek?".

Strategisch inzetten van het werken op het whiteboard, het werkblad en de vragenkaart

In het leerlingwerk is er geconstateerd dat tijdens het probleemoplossen het maken van fouten kan leiden tot goede ideeën met betrekking tot het vinden van de juiste oplossing. Bovendien kan het tegelijkertijd leiden tot een betere samenwerking tussen de leerlingen. Hierbij gaat het om een fout waarover bewustwording ontstaat. Zo kan het bedenken en testen van een vermoedens leiden tot nieuwe inzichten. Het gaat dan in feite meer op een stap binnen het oplosproces dan het maken van een fout. In de praktijk zijn de leerlingen vaak geneigd deze foute vermoedens uit te vegen of durven deze überhaupt niet op te schrijven. Toch is er dus gebleken dat het leerlingen kan helpen met het oplossen van het probleem door dit grove denkwerk wel te noteren. Daarnaast is het gebleken in paragraaf 5.2 dat het volledig uitwerken van een oplossing een verhoogd denkniveau vereist. Dit kan het bedenken van de oplossing in de weg staan. Het kan daarom leerlingen helpen met het probleemoplossen om eerst op het whiteboard een grove uitwerking van de oplossing te presenteren en daarin fouten niet uit te vegen en de oplossing eventueel korter te presenteren. Vervolgens zorgt, zoals eerder beschreven in paragraaf 5.2, het formuleren van een volledige en juiste uitwerking van de oplossing op het werkblad voor niveauverhoging binnen het probleemoplossen. Doordat dit mogelijk nog niet eerder gedaan is op het whiteboard zorgt het werkblad eerder voor het gewenste effect.

Verder is er gebleken dat om het werkblad van betekenis te laten zijn het van belang dat de leerlingen hier voldoende tijd voor krijgen. Bovendien is het gebleken dat het werkblad ook gebruikt kan worden voor het noteren van een oplossing van het probleem, hoewel deze oplossing mogelijk niet de optimale oplossing is. Eerder is in 5.2 al gebleken dat de leerlingen hun oplossing optimaliseren of algemeen formuleren naar aanleiding van het werkblad (zie bijvoorbeeld Figuur N.31).

Voor het werken met de vragenkaart is het gebleken dat het mengen van groepen interessante

gesprekken kan stimuleren na het oplossen van het basisprobleem. Hiervoor is het noodzakelijk dat de leerlingen het basisprobleem ook begrijpen om er over te kunnen praten. Daarnaast kan interactie met de docent er voor zorgen dat de gesprekken van de leerlingen betekenisvoller zijn ten aanzien van het leren probleemoplossen, zoals eerder is beschreven in paragraaf 5.4.

In het algemeen is er gebleken dat wanneer de didactiek van "Thinking Classrooms", het werkblad, het bijbehorende voorbeeld en het werken met de vragenkaart voor het eerst worden toegepast in een les, het de leerlingen tijd en energie kost om hier aan te wennen.

Het strategisch benutten van de complexiteit van problemen

Over het algemeen is er gebleken dat de moeilijkheidsgraad en het karakter van de gebruikte problemen het verloop van de les kunnen beïnvloeden. Zo werd het probleem "Red de drenkeling" in iteratie 2.2 dusdanig moeilijk voor de leerlingen gevonden, waardoor er geen tijd over was in de les om aan het werkblad te werken. Verder was het "Kluisjes open en dicht"-probleem voor verschillende leerlingen onduidelijk. Daarnaast bleek het vinden van de optimale oplossing van het "Munten wegen"-probleem naar verhouding veel moeilijker dan om überhaupt een oplossing te vinden. Om leerlingen te helpen met het oplossen van moeilijke problemen bleek het nuttig te zijn om ook tussentijds te consolideren. Dit zorgde ervoor dat er verschillende groepen geholpen werden vorderingen te maken in het oplosproces. Tegelijkertijd stimuleerde dit de aandacht van de leerlingen voor elkaars werk en het onderlinge contact over het probleem.

Wel motiveerde het vinden van een efficiëntere oplossing bij het "Munten wegen"-probleem, naast de eerder gevonden oplossing, de aandacht voor elkaars werk en de onderlinge interactie. Mogelijk speelt hierbij de succeservaring van het al gevonden hebben van een minder efficiënte oplossing een rol. Bij het probleem "Red de drenkeling" hadden de leerlingen ook allemaal minstens één oplossing gevonden, maar lag de uitdaging in het vinden van de optimale oplossing. Het verticaal mathematiseren in dit probleem kan dan ook anders gezien worden dan in appendix A beschreven is. In dat geval wordt het "basisprobleem" geïntroduceerd als probleem waar überhaupt een oplossing op gevonden moet worden en wordt er niet direct benoemd dat dit de optimale oplossing moet zijn. Nadat de leerlingen dit hebben opgelost kan de moeilijkheidsgraad van het probleem verhoogd worden door de leerlingen naar de optimale oplossing te vragen, waardoor er verticaal gemathematiseerd wordt. Door deze andere definiëring van het basisprobleem wordt het benodigde niveau van dit probleem verlaagd, waardoor er waarschijnlijk meer leerlingen dit basisprobleem oplossen. Zo krijgen er meer leerlingen een bewuste succeservaring, wat direct verband houdt met de opgestelde algemene leerdoelen bij deze lessen probleemoplossen, zie subparagraaf 3.4.1. Een dergelijke vraagstelling kan naast het probleem "Red de drenkeling" en "munten wegen" ook worden toegepast op "Vip in de woestijn".

Verder is er gebleken dat de problemen "Vip in de woestijn" en "Het chips-spel" goed uit te breiden of te variëren waren door de leerlingen en sommige leerlingen zelfs zochten naar een algemene formule. Het kwam voor dat hierdoor leerlingen gemotiveerd werden en dat hierdoor interactie tussen verschillende groepen werd gestimuleerd, zoals eerder ook beschreven is in paragraaf 5.4.

Ook bij "Het zwembad"-probleem werden de leerlingen door de probleemstelling gestimuleerd een algemene formule op te stellen, waardoor zij het vergelijkbare probleem gemakkelijk hebben kunnen oplossen. Mogelijk was de oorzaak hiervoor wel dat de leerlingen eerder met problemen over oppervlaktes in inhoud te maken hadden gekregen en daardoor herkenbaarder zijn. Naar eigen zeggen van een van de andere leerlingen is dit probleem voor hem ook meer een "wiskundig probleem" dan een eerder behandeld probleem. Binnen de categorieën van Schoenfeld kan daarom gesteld worden dat de leerlingen de overtuiging hebben dat ze een formule moeten opstellen, zoals een van de leerlingen in zijn antwoord op de eerste opdracht ook aangeeft, zie Figuur N.3. Het vergelijkbare probleem had daarom op een complexere manier geïntroduceerd kunnen worden dan is gedaan.

6

Conclusie

In dit onderzoek is op een kwalitatieve wijze getracht een antwoord te vinden op de volgende vraag.

Welke leerlingactiviteiten binnen de principes “note-taking” en het “consolideren” in een “Thinking Classroom”, ontwikkeld door Peter Liljedahl, dragen bij aan een verhoogde leeropbrengst met betrekking tot het oplossen van algemene wiskundige problemen door leerlingen een gemengde havo/vwo bovenbouwklas?

Door middel van Design-Based Research zijn de bevindingen van dit onderzoek geanalyseerd en geïnterpreteerd, met als doel een dieper inzicht te verkrijgen in de mogelijkheden voor het onderwijzen van probleemoplossen met “Thinking Classrooms” [12]. Voor de toepassing van “Thinking Classrooms” in deze lespraktijk wordt er een lesopbouw gehanteerd waarin de leerlingen eerst een gegeven basisprobleem oplossen, vervolgens zelf vergelijkbare problemen bedenken en oplossen en tot slot een algemene oplossing formuleren. Deze opbouw is gebaseerd op het verticaal mathematiseren en stapsgewijze niveauverhoging [10].

In de volgende alinea's zal er antwoord worden gegeven op de vier deelvragen van dit onderzoek, waarna het antwoord op de hoofdvraag kan worden geformuleerd.

1. Welke opdrachten op een individueel werkblad zijn geschikt als implementatie van het principe van “note-taking” van Liljedahl voor het bereiken van een verhoogde leeropbrengst?

Dit onderzoek resulteert in een ontworpen werkblad voor het maken van betekenisvolle aantekeningen in de lespraktijk. Het ontworpen werkblad bestaat uit een opdracht waarbij de eerder gevonden oplossing individueel volledig moet worden uitgewerkt en een opdracht waarin er gereflecteerd moet worden op het probleemoplossen. Dit werkblad kan een waardevolle bijdrage leveren aan de leeropbrengst binnen het onderwijs in probleemoplossen in de lespraktijk. Uit de resultaten van dit onderzoek blijkt dat het aannemelijk is dat het werkblad bij veel leerlingen zorgt voor niveauverhoging. Uit het resulterende leerlingwerk is namelijk op te maken dat veel leerlingen na het oplossen van het probleem hun oplossing explicieter uitleggen op het individuele werkblad dan op de whiteboards. Bovendien is de perceptie van de leerlingen dat het uitleggen van de oplossing in de eerste opdracht op het werkblad moeilijker is dan het oplossen op het whiteboard. Tijdens dit proces worden de leerlingen zich daarom bewust van meer belangrijke aspecten van probleemoplossen. Daarnaast is het de perceptie van sommige leerlingen dat de reflectieve opdracht hen helpt bij het oplossen van een vergelijkbaar probleem. In sommige gevallen is uit het werk van de leerlingen op te maken dat zij door het werkblad zelfs geholpen worden bij formuleren van een algemene oplossing. Om dit te bereiken moet het werkblad worden ingezet na het oplossen van het basisprobleem en voor het bedenken en oplossen van een vergelijkbaar probleem. De ingevulde werkbladen kunnen tevens waardevol zijn voor het formatief handelen, aangezien het aanvullende informatie geeft over het oplosproces binnen de verschillende groepjes leerlingen en de individuele leeropbrengst in kaart brengt.

2. Wat zijn kenmerken van een leerlingreflectie die bijdragen aan het vergroten van het probleemoplossend vermogen?

De kenmerken van de betekenisvolle reflecties van leerlingen op het probleemoplossen die in dit onderzoek verzameld zijn, vallen binnen verschillende categorieën die waardevol zijn voor het verbeteren van het probleemoplossend vermogen, zie ook Tabel 5.6. Dit zijn reflecties die gaan over het illustreren van het denkproces, een inzicht in het probleem, een toegepaste methode, het monitoren van het oplosproces, het verkennen van het probleem, de samenwerking, de wijze van notatie of het uitbreiden van het perspectief op het probleem. Voor de onderzochte lespraktijk zijn reflecties over het analyseren van de notatiwijze en reflecties over het leerrendement van het uitwisselen van inzichten, karakteristiek. In deze lespraktijk, met problemen die niet direct binnen het curriculum vallen, gebruiken leerlingen namelijk vaak zelfbedachte notatievormen. Daarnaast is het uitwisselen van inzichten typerend voor een "Thinking Classroom".

3. Welke aanvullingen of alternatieven binnen het principe "consolideren" van Liljedahl kunnen leerlingen stimuleren actief te reflecteren voor het bereiken van een verhoogde leeropbrengst?

Om leerlingen een actieve rol te laten spelen tijdens het consolideren van de lessen en zo bij te dragen aan hun leeropbrengst, is geprobeerd om leerlingen op een actievere manier en specifiek te laten reflecteren op het probleemoplossen. Enkel het toevoegen van reflectieve opdracht op het werkblad blijkt hiervoor onvoldoende. Er is wel gebleken dat interactie met de docent reflecties van de leerlingen zowel kan stimuleren als specificeren. Daarnaast resulteert dit onderzoek in een ontworpen vragenkaart. De vragen op deze vragenkaart zijn gericht op de aangemerkte betekenisvolle leerlingreflecties uit de praktijk en het expliciet maken van heuristieken. Deze vragen zijn onderverdeeld in categorieën die, naast cognitief, voornamelijk metacognitief van aard zijn. Het is daarom aannemelijk dat het stellen van dergelijke vragen de leeropbrengst verhoogt in vergelijking met enkel het stellen van cognitieve vragen. De vragenkaart is ingezet als hulpmiddel voor leerlingen bij het reflecteren op het doorlopen oplosproces. Dit hebben zij in gemengde groepjes gedaan als alternatief voor de "gallery-walk". Echter, er is niet geconstateerd dat de reflecties van de leerlingen substantieel verbeterd zijn door het gebruik van de vragenkaart.

Wanneer leerlingen gestimuleerd werden om actiever en specifiek te reflecteren op de lessen, zijn er over het algemeen twee verschillende leeruitkomsten opgemerkt. Ten eerste, wanneer de leerlingen binnen de gegeven tijd niet verder zijn gekomen dan het oplossen van het basisprobleem, lukt het hen vaak niet om zelfstandig te kunnen reflecteren op het doorlopen proces bij het probleemoplossen. In dat geval kan het voldoende zijn om de door Liljedahl beschreven docentgestuurde "gallery-walk" uit te voeren en te consolideren vanaf "the bottom" [12]. Uit de resultaten van dit onderzoek blijkt namelijk dat hierdoor de denkactiviteit van deze leerlingen wel wordt gestimuleerd, aangezien de meeste leerlingen geïnteresseerd zijn in de basisoplossingen van anderen. Ten tweede, het komt vaker voor bij leerlingen die minstens het basisprobleem hebben opgelost dat zij zelfstandig met elkaar in detail gaan discussiëren. Hierbij zijn ze geïnteresseerd in de oplossingen van meerdere problemen gebaseerd voor het basisprobleem, de bijbehorende aanpak en mogelijke algemene oplossingen. De vragenkaart lijkt hierbij weinig bij te dragen als hulpmiddel. Interactie met elkaar en met de docent kan daarentegen wel stimulerend zijn. Op deze manier kan het organiseren groeps gesprekken er voor zorgen dat de leerlingen actief consolideren op de les.

4. Wat zijn onderwijsaspecten die binnen een les van belang zijn voor het behouden van de positief bevonden leereffecten gedurende dit onderzoek?

Voor het onderwijzen van probleemoplossen in "Thinking Classrooms" is het aan te raden om de keuze voor bepaalde lesactiviteiten en het moment van inzetten af te stemmen op de voortgang van de leerlingen bij het probleemoplossen. Allereerst kan het leerlingen helpen met het oplossen van het probleem dat als alle ideeën op het whiteboard worden genoteerd deze niet direct worden uitgeveegd. Verder kan het tussentijds consolideren leerlingen helpen en onderlinge interactie over de oplossing stimuleren. Vervolgens kan het werkblad waardevol zijn wanneer er een oplossing, mogelijk anders dan de optimale oplossing, is gevonden op het basisprobleem en deze wordt genoteerd. Afsluitend kan

het organiseren van gemengde groepsgesprekken nuttig zijn indien er ook vergelijkbare problemen zijn opgelost. Zoals eerder beschreven kan "gallery-walk" hier een geschikt alternatief voor zijn.

Verder blijkt uit de resultaten van dit onderzoek dat de gekozen problemen van invloed zijn op het verloop van een les in een "Thinking Classroom". Zo kunnen belemmeringen in de voortgang van de opeenvolgende lesactiviteiten ontstaan wanneer een probleem te moeilijk blijkt. Omgekeerd blijkt juist dat leerlingen gemotiveerd kunnen worden wanneer ze het basisprobleem oplossen en vervolgens in staat zijn om de oplossing te optimaliseren, uit te breiden of te variëren. Bovendien kan dit de interactie tussen verschillende groepen leerlingen stimuleren.

Uit dit kwalitatieve onderzoek is gebleken dat in de onderzochte "Thinking Classroom" het individueel uitwerken van de gezamenlijk gevonden oplossing en het reflecteren op het probleemoplossen niveauverhoging mogelijk kan maken. Daarnaast is het afhankelijk van het opgebouwde cognitieve vermogen van de leerlingen tijdens een les of een docent gestuurde "gallery-walk" of het discussiëren met medeleerlingen over het proces van probleemoplossen de leerlingen meer activeert. Het individueel uitwerken van de oplossing, de "gallery-walk" en het discussiëren met medeleerlingen zijn daarom activiteiten waardoor leerlingen in veel gevallen meer inzicht verkrijgen in de oplossing van het probleem of het doorlopen proces.

7

Discussie

In dit hoofdstuk wordt er dieper ingegaan op de resultaten van dit onderzoek. Allereerst worden de resultaten bij de verschillende deelvragen besproken met behulp van inzichten uit de literatuur. Ook worden er aanbevelingen voor de praktijk gedaan. Vervolgens worden de algemene beperkingen en implicaties voor dit onderzoek beschreven. Ten slotte zullen er suggesties worden gedaan voor het vervolgonderzoek.

Bespreking van de resultaten

In deze paragraaf zullen de resultaten van de deelvragen worden geïnterpreteerd met inzichten uit de literatuur. Op basis daarvan worden er aanbevelingen gedaan voor de praktijk. Daarnaast zullen, indien aanwezig, specifieke beperkingen en implicaties van de resultaten worden benoemd. In ieder van de volgende subparagrafen staat een andere deelvraag centraal.

Het implementeren van een individueel werkblad

Uit de resultaten bij de eerste deelvraag van dit onderzoek blijkt dat de leerlingen het vaak moeilijker vinden om de oplossing van het probleem in de eerste opdracht van het werkblad uit te werken dan deze oplossing in groepsverband te bedenken. De theorie van Liljedahl over de "modes of engagement" komt hiermee overeen [12]. Wanneer er gezamenlijk de oplossing wordt bedacht op het whiteboard zijn de leerlingen dan voornamelijk bezig "doing", het laagste niveau binnen de "modes of engagement". Vervolgens zijn de leerlingen tijdens het individueel en volledig uitwerken van de oplossing bezig met het reproduceren van de oplossing en moeten zij hier in de tweede opdracht van het werkblad op reflecteren. Daarmee zijn de leerlingen binnen de "modes of engagement" bezig met denkactiviteiten van een hoger niveau, namelijk "justifying" en "explaining" [12]. Bovendien komt op deze manier de visie van Liljedahl overeen met het principe "uitleggen-aan-jezelf", wat Barton ook benoemt als een geschikte methode voor creëren van dieper begrip bij het probleemoplossen [2]. Barton zegt namelijk dat je bij het uitleggen van de oplossing bij elke stap aan het reflecteren bent [2]. Doordat er niet wordt uitgelegd aan een ander, wordt er volgens Barton cognitieve overbelasting voorkomen [2]. Hierdoor is het een meerwaarde dat het werkblad individueel wordt uitgevoerd en niet in groepsverband. Daarnaast is er sprake geweest van "teaching" binnen de "modes of engagement", dat een nog hogere denkactiviteit vereist [12]. Dit kwam voor bij de leerlingen die andere leerlingen gingen helpen met het oplossen van het probleem. Tot slot blijkt er uit de resultaten dat er leerlingen waren die door het werkblad geholpen zijn met het bedenken en oplossen van vergelijkbare problemen, waardoor de leerlingen ook stimuleert worden in het "creating" van "modes of engagement". Uit de resultaten volgt dus dat naar aanleiding van het werkblad alle "modes of engagement" zijn gestimuleerd. De niveauverhoging die, zoals eerder geconcludeerd, wordt gestimuleerd door het werkblad vindt daarom geleidelijk plaats. Dit zal volgens Liljedahl frustratie en verveling voorkomen [12].

Verder bleek er uit de resultaten van de eerste deelvraag dat de antwoorden van leerlingen op het werkblad verschillende categorieën van Schoenfeld en de wiskundige denkactiviteiten vertegenwoordigden. Mogelijk komt dit doordat op het werkblad aan de leerlingen gevraagd werd om hun uitwerkingen aan te vullen met notities, aangezien Liljedahl ook beweert dat het annoteren van de uitwerking

voor leerlingen zorgt voor bewuste leeropbrengst [12].

Daarnaast bleek uit de resultaten van de eerste deelvraag dat er leerlingen waren die behoefte hadden aan het zelfstandig werken tijdens het probleemoplossen. Het belang van zelfstandig werken binnen coöperatieve werkvormen, zoals van Streun dat beargumenteerd in [21], wordt daarmee ook in de praktijk waargenomen.

Hoewel het overbodig lijkt voor de leerlingen om na groepswork de oplossing van een probleem ook zelfstandig uit te leggen, kan dit dus toch van meerwaarde zijn wanneer dit op papier wordt gedaan. Het is daarom aan te bevelen leerlingen dit individueel te laten doen en hen te stimuleren hun uitwerkingen te annoteren. Het annoteren van een uitwerking kan namelijk voor uitgebreidere redeneringen zorgen waardoor de kans groter is dat er meer bewustwording rondom betekenisvolle inzichten rondom het probleemoplossen ontstaat. Soms hebben leerlingen hier weinig motivatie voor, aangezien ze de oplossing wel erg makkelijk gevonden hebben en daarom geen meerwaarde in het uitwerken van de oplossing zien. In dat geval is het aan te raden eerst het probleem voor de leerlingen moeilijker te maken, waardoor zij het uitleggen van een gevonden oplossing wel uitdagend gaan vinden. Echter, er is niet specifiek onderzocht wat de docent er aan kan doen om de uitwerkingen van de leerlingen te verbeteren.

Kenmerken van waardevolle leerlingreflecties

Uit de resultaten van de tweede deelvraag van dit onderzoek volgt dat Lijedahl met de algemene "graphic organizer" tekortschiet als hulpmiddel voor het onderwijzen van probleemoplossen. Volgens de resultaten ontbreekt namelijk een kader waarin reflecties over het samenwerken direct onder valt. Deze zijn relevant aangezien het coöperatief leren een geschikte manier is om het probleemoplossen te leren [7] en het reflecteren op de bijbehorende leeropbrengst dus waardevol is. Daarnaast ontbreekt er volgens de resultaten ook een kader waar de probleemverkenning direct onder valt. Dit is namelijk volgens de META-methode relevant voor het leren probleemoplossen [9]. Wel is het kader "Procedures" belangrijk voor het onderwijzen van probleemoplossen, aangezien het kenmerk van leerlingreflecties over de wijze van notatie daarin vertegenwoordigd wordt. Toch zou dit gezien de grote waarde van dit kenmerk meer aandacht verdienen binnen een "graphic organizer".

In de resultaten bij de tweede deelvraag zijn de kenmerken van leerlingreflecties aangemerkt als betekenisvol door deze te relateren aan belangen voor het onderwijzen van probleemoplossen. Echter is er gebleken dat de leerlingreflecties vaak beknopt worden geformuleerd en dat deze gespecificeerd kunnen worden met het beantwoorden van een vervolgvraag. Het is daarom onzeker of het genoemde leerrendement voor het probleemoplossen wel daadwerkelijk wordt bereikt door de leerlingen die een bepaalde reflectie verwoorden. Daarnaast hebben de leerlingen de toegekende labels aan hun reflecties niet bevestigd. Gezien de beknopte omschrijvingen van de reflecties is het daarom onzeker of de interpretatie van de reflecties overeenkomt met de intentie van de leerlingen.

Leerlingen stimuleren betekenisvol te reflecteren

In data-analyse van de derde deelvraag worden de aantallen van de aangemerkte betekenisvolle leerlingreflecties met elkaar vergeleken. Echter gaat het hier om absolute aantallen per iteratie. Er is daarbij geen rekening gehouden met het feit dat er soms meerdere betekenisvolle reflectiekenmerken genoemd kunnen worden door enkel één leerling, terwijl anderen niks noemen. Verder zijn er geen criteria opgesteld voor het beoordelen van de waarde van een reflectie. Zo kan er in een beperkt geformuleerde reflectie hetzelfde kenmerk worden herkend als in een uitgebreid geformuleerde reflectie. Daarnaast had er onderscheid gemaakt kunnen worden tussen de waarde van bijvoorbeeld 5 beperkt geformuleerde betekenisvolle reflecties en een uitgebreid geformuleerde reflectie. De reden waarom reflecties niet op waarde zijn beoordeeld is, omdat een betekenisvolle reflectie persoonlijk is en afhankelijk is van het individuele leerproces. Het probleemoplosgedrag is ook afhankelijk van de samenhang tussen de beheersing van alle vier de categorieën van Schoenfeld [17], zoals beschreven in hoofdstuk 3. De uitdaging bij het oplossen van een bepaald probleem is daardoor te verklaren aan de hand van ten minste een van de categorieën, maar niet noodzakelijk aan de hand van allemaal [17]. Ook kan het per probleem en per leerling verschillen welke categorie bepalend is voor het verklaren van het gedrag [17]. Het is dan ook begrijpelijk dat niet iedereen hetzelfde hoeft te leren bij het probleemoplossen. Alles bij elkaar genomen geven de gepresenteerde resultaten van de derde deelvraag een beeld bij het de algemene resultaat van de klas naar aanleiding van de gebruikte lesactiviteiten, maar is hier

geen individuele leeropbrengst uit af te leiden.

In de resultaten van de derde deelvraag wordt er duidelijk dat het beperkt kunnen verwoorden van een reflectie vaak voorkomt bij leerlingen die het basisprobleem nog niet hebben kunnen oplossen. Aangezien de leerlingen het probleem nog niet voldoende beheersen is het voor hen waarschijnlijk een te grote cognitieve stap om hier verbaal op te kunnen reflecteren [2]. Binnen de "modes of engagement" zit het denkniveau van deze leerlingen nog op de trede "doing", waardoor de hogere tredes "justifying", "explaining" en "creating" nog niet toereikend zijn [12]. Het is daarom niet aannemelijk dat deze groep leerlingen ook geïnteresseerd is in het reflecteren op uitbreidingen van het probleem met een hogere moeilijkheidsgraad. Dit valt dan ook onder het hogere denkniveau "creating" binnen de "modes of engagement" [12]. Ook zegt Liljedahl dat het consolideren voorbij het desbetreffende denkniveau geen zin heeft, zie subparagraaf 3.3.2. In dit geval is een docentgestuurde "gallery-walk" een geschiktere methode [12]. Uit de resultaten van de derde deelvraag blijkt namelijk wel dat interactie met de docent kan zorgen voor betere reflecties van leerlingen. Ook is er gebleken dat wanneer leerlingen gevraagd wordt om binnen het werk op de whiteboards van verschillende groepen overeenkomsten en verschillen te benoemen, dit hen helpt. Dit komt overeen met wat Barton beschrijft als "het antwoord van iemand anders uitleggen" [2]. Door op deze manier de oplossing van iemand anders uit te leggen kunnen leerlingen meer leren dan enkel hun eigen oplossing uit te leggen [2]. Op deze manier kan het organiseren van de "gallery-walk" dan voor meer leeropbrengst zorgen dan het organiseren van zelfstandige groeps gesprekken.

Daarnaast blijkt uit de resultaten van de derde deelvraag dat leerlingen die minstens het basisprobleem hebben opgelost, vaker de behoefte hebben om met elkaar te discussiëren over variaties van het probleem of mogelijke uitbreidingen. Deze leerlingen worden dus niet belemmerd door cognitieve overbelasting, doordat zij al verder zijn gekomen dan enkel het oplossen van het basisprobleem. Het denkniveau van deze groep leerlingen valt daarmee onder de trede "creating" van de "modes of engagement" [12]. Het lijkt er op dat deze leerlingen in minder behoefte hebben om te consolideren vanaf "the bottom", zoals Liljedahl belangrijk vindt bij een "gallery-walk" [12]. Een logische verklaring hiervoor is dan ook dat het denkniveau van deze groep te ver af ligt van het lagere denkniveau van deze "bottom".

Over het algemeen is er gebleken dat gedurende een les niet elke groep even ver komt in het probleemoplossen. Om rekening te houden met alle cognitieve niveaus van de leerlingen is het aan te bevelen om binnen een lessenserie variatie aan te brengen in het organiseren van een docentgestuurd klassengesprek of een leerlinggestuurd groeps gesprek.

Verder blijkt uit de resultaten van de derde deelvraag dat de leerlingen de vragen op de vragenkaart vaak kort beantwoorden en deze dus meer als afvinklijst gebruiken dan als stimulans voor een uitgebreid gesprek. Dit komt overeen met wat Liljedahl beschrijft het als effect op het direct geven van meerdere vervolgpogingen [12]. Bovendien zegt Liljedahl dat hierdoor de denkactiviteit van de leerlingen juist wordt belemmerd [12]. Dit is dan mogelijk ook de reden waarom er naar aanleiding van de vragenkaart er niet significant betere leerlingreflecties kunnen worden geconstateerd. Daarnaast is het leren reflecteren waarschijnlijk een langdurig proces, wat niet binnen enkele lessen te leren is. Zo moeten leerlingen ook leren te werken met de META-kaart, waar de vragenkaart op geïnspireerd is [9]. Bovendien verklaarde de docent na afloop van iteratie 2.1 dat de leerlingen het niet gewend zijn om dit soort reflectieve vragen te beantwoorden, waardoor zij nog moeten leren wat nuttige antwoorden zijn. Ook is er maar beperkt feedback gegeven op de reflecties van leerlingen, waardoor het leerrendement groter had kunnen zijn. Verder blijkt er uit de resultaten van de derde deelvraag dat de leerlingen de vragen op de vragenkaart wel begrepen hebben, maar zijn tegelijkertijd reflecties niet significant verbeterd. Het is daarom maar de vraag of de leerlingen de vragen op de vragenkaart daadwerkelijk hebben begrepen, dat zij deze enkel dachten te begrijpen of dat de vragen niet sturend genoeg zijn. De waarde van de vragen op de vragenkaart kan daarom niet bevestigd worden.

De aangemerkte betekenisvolle kenmerken in deelvraag 2 geven een goed beeld bij reflecties die voor leerlingen van belang zijn bij het leren oplossen van problemen. De ontworpen vragenkaart, waar deelvraag 3 onder andere in resulteert, op basis van deze kenmerken ontworpen. De vragenkaart is daardoor een praktisch handvat voor de docent. Het kan de docent helpen bij het stellen van de juiste vragen om leerlingen betekenis vol te laten reflecteren. De vragenkaart kan dan door de docent gebruikt ter inspiratie voor het organiseren van de "gallery-walk" of bij het begeleiden van groeps gesprekken van leerlingen.

Strategisch inzetten van lesmaterialen en lessen

Gebaseerd op de resultaten van deelvraag 4 kan worden geconstateerd dat het tussentijds consolideren, het karakter van sommige problemen in combinatie met het verticaal mathematiseren voor een stimulans kunnen zorgen op het principe "mobilizing knowlegde" van Liljedahl [12]. Op deze manier wordt het samenwerkend leren versterkt, waardoor leerlingen elkaar helpen verder te komen tijdens het probleemoplossen en zo meer leren. Daarnaast is het gebleken dat interactie met andere leerlingen, leerlingen kan stimuleren de oplossing vervolgens te optimaliseren, het probleem uit te breiden of te variëren. Hierdoor worden de leerlingen gestimuleerd in het wiskundig denken.

Verder volgt er uit de resultaten van de vierde deelvraag dat wanneer de didactiek van "Thinking Classrooms", het werkblad, het bijbehorende voorbeeld en het werken met de vragenkaart voor het eerst worden toegepast in een les, kost het de leerlingen tijd en energie om hier aan te wennen. Het is daarom belangrijk om dit te realiseren bij het maken van een lesplan. Om het bijbehorende leerrendement zo min mogelijk te beperken is het aan te raden deze lesactiviteiten en lesmaterialen afzonderlijk van elkaar worden geïntroduceerd.

Daarnaast is het aan te bevelen voor vergelijkbare lessen in "Thinking Classrooms" om het basisprobleem zo te formuleren dat de gevonden oplossing geoptimaliseerd kan worden of dat het probleem uitgebreid of gevarieerd kan worden. Dit kan namelijk volgens de resultaten bijdragen het beleven van een succeservaring bij het oplossen van problemen en het motiveren van leerlingen.

Tot slot is er geconstateerd dat de leerlingen naar aanleiding van de les en de opgaven aangezet werden om verticaal te mathematiseren. Daarmee wordt bedoeld dat leerlingen vergelijkbare problemen gaan bedenken en oplossen gaan zoeken naar een algemene oplossing. In de praktijk is er echter gebleken dat het lastig is om dit proces te begeleiden in een "Thinking Classroom". Het komt bijvoorbeeld voor iedere groep leerlingen ergens anders mee bezig gaat, waardoor het lastig is om het overzicht te bewaren. Daarbij is het hoe dan ook al een uitdaging om het proces van de vele groepen te monitoren. Daarnaast bedenken leerlingen soms variaties op problemen die niet van tevoren zijn voorbereid. Verder komt het voor dat leerlingen in hun enthousiasme veel dingen gaan bedenken op basis van intuïtie. Dit zou het gokken van antwoorden kunnen stimuleren. Het is daarom dus lastig om de juistheid van het werk van alle groepen leerlingen te blijven controleren gedurende een les en hier feedback op te geven. Toch is er voor gekozen dit proces zijn beloop te laten. Volgens Liljedahl kan "mobilizing knowlegde" er namelijk voor zorgen dat er geconvergeerd wordt naar het juiste antwoord. Dit gebeurde bijvoorbeeld in iteratie 2.2, waarbij leerlingen elkaars formules overnamen om vervolgens de betekenis hiervan te achterhalen en daarmee het probleem te kunnen oplossen, zie appendix C. Daarnaast zijn veel van de algemene leerdoelen van de lessen gebaseerd op het hebben van een geschikte houding ten aanzien van het wiskundig probleemoplossen. Door het werk van de leerlingen te gaan beoordelen zou dit hen kunnen demotiveren en daardoor het bereiken van deze leerdoelen in de weg staan. Zo zegt Liljedahl ook dat het afkraken van het werk van leerlingen hun denkactiviteit doet verminderen [12].

Algemene beperkingen en implicaties van dit onderzoek

In de paragraaf hiervoor zijn er al verschillende beperkingen en implicaties van dit onderzoek benoemd per deelvraag. In deze paragraaf zullen de beperkingen en implicaties die gelden voor het gehele onderzoek kort worden besproken.

Allereerst is het van belang om op te merken dat dit onderzoek sterk context gebonden is en enkel is onderzocht in een specifieke lespraktijk. Dit is ook specifiek voor DBR [1]. Voor het opstellen van meer generieke theoretische inzichten is daarom een bredere onderzoeksvang nodig. Daarnaast was de focus in dit onderzoek behoorlijk breed en is daardoor niet alles in detail onderzocht.

Verder zijn er verschillende opmerkingen te plaatsen over het karakter van de deelnemende groep leerlingen die waarschijnlijk van invloed zijn geweest op de resultaten van dit onderzoek. Zo bestond de groep leerlingen uit een mix van havo en vwo-leerlingen. De invloed van de samenstelling van deze groep is niet onderzocht. Verder kenden deze leerlingen elkaar niet altijd, wat belemmeringen in de samenwerking kan opleveren. Daarnaast verliep dit onderzoek met twee verschillende groepssamenstellingen. Dit kwam omdat de leerlingen binnen de looptijd van dit onderzoek een nieuwe keuze voor hun keuzewerktijd, waar de lessen in de lespraktijk onder vallen, konden maken. Hierdoor hadden halverwege de onderzochte lessen sommige leerlingen wel ervaring met de gebruikte lesactiviteiten

en andere niet, wat de leeropbrengst beïnvloedde. Ook bestond de groep leerlingen altijd uit enkel gemotiveerde leerlingen die het wiskundig probleemoplossen leuk vinden. Dit maakte het geven van de lessen gemakkelijker en zorgde mogelijk voor meer motivatie van de leerlingen bij de lesactiviteiten. Het is daarom onzeker of dezelfde resultaten ook behaald zullen worden bij een andere groep leerlingen.

Wel zijn de gevonden resultaten van dit onderzoek bruikbaar voor andere lespraktijken in "Thinking Classrooms". Zo is het individuele werkblad algemeen inzetbaar, ongeacht het gekozen probleem. Toch is het specifiek voor het onderwijs in probleemoplossen dan de algemene "graphic organizers" van [12]. Hiermee kan de leeropbrengst van de leerlingen worden gestimuleerd en maken de ingevulde werkbladen het individuele leerproces van de leerlingen inzichtelijk voor de docent. Ook kan het ontwerp van de vragenkaart door een docent gebruikt worden als handvat bij het stimuleren van betekenisvolle leerlingreflecties bij het probleemoplossen. Verder geven de opgestelde kenmerken en bijbehorende voorbeelden van betekenisvolle reflecties van leerlingen een indicatie waaraan een leerlingreflectie zou moeten voldoen.

Aanbevelingen voor vervolgonderzoek

Hoewel dit onderzoek tot nieuwe inzichten heeft geleid, is er nog ruimte voor verdere verkenning van de toepassing van "Thinking Classrooms" voor het onderwijzen van het wiskundig probleemoplossen. In deze paragraaf zullen de aanbevelingen voor vervolgonderzoek worden toegelicht.

Allereerst zou vervolgonderzoek zich kunnen richten op de leeropbrengst van de lessen in het wiskundig probleemoplossen in de onderzochte "Thinking Classroom" bij een langere looptijd. Aangezien de algemene leerdoelen van de lessen langetermijndoelen zijn, kan nu nog niet volledig geconstateerd worden of deze zijn behaald.

Ook is het interessant om onderzoek te doen naar de invloed van de onderzochte lessen op de leerprestaties van de deelnemende leerlingen binnen het curriculum. Naast metacognitieve vaardigheden en een geschikte wiskundige houding, krijgen wiskundige kennis en onderwerpspecifieke heuristieken hier meer de nadruk. Op deze manier kan pas daadwerkelijk in kaart gebracht worden in hoeverre de onderzochte lessen van invloed zijn op alle bepalende aspecten voor het wiskundig probleemoplossen van Schoenfeld [17].

Daarnaast kan worden aangeraden om te onderzoeken of dezelfde leeropbrengst wordt behaald bij een reguliere groep leerlingen. Daarmee worden leerlingen bedoeld die niet noodzakelijk intrinsiek gemotiveerd zijn voor het probleemoplossen. Hierdoor kan de waarde van de ontworpen lesactiviteiten en materialen beter worden bepaald. Bovendien zou het vergelijken van eenzelfde onderzoek in een aparte havo-klas en in een aparte vwo-klas inzicht kunnen geven in de waarde van lessen in gemengde "Thinking Classrooms".

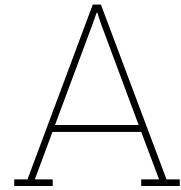
Verder kan vervolgonderzoek zich richten op het ontwikkelen van een methode voor het beoordelen van de kwaliteit van de leerlingreflecties door de leerlingen zelf. Dit is namelijk waardevolle informatie om een beter beeld te krijgen van de leeropbrengst, naar aanleiding van de lesactiviteiten voor het stimuleren van betekenisvolle reflecties. Ook kan dit leerlingen meer inzicht geven in hoe zij hun reflecties kunnen verbeteren. Hierdoor kunnen vervolgens de lesactiviteiten gericht worden verbeterd.

Tot slot is het interessant om onderzoek te doen naar het ontwerpen van een volledige lessenserie voor het wiskundig probleemoplossen in "Thinking Classrooms". Zo is er in dit onderzoek gebleken dat niet altijd alle onderzochte lesactiviteiten relevant waren voor elke les en voor elk moment van de les. Verder beïnvloedde de aard van de gekozen problemen het verloop van de les. Wanneer deze keuzes van de lesactiviteiten en de problemen van tevoren op elkaar worden afgestemd binnen een lessenserie kan dit mogelijk de leerprestaties op lange termijn beïnvloeden.

Literatuurlijst

- [1] A. Bakker en D. van Eerde. „An introduction to design-based research with an example from statistics education”. In: *Approaches to qualitative research in mathematics education: Examples of methodology and methods* (2015), p. 429–466.
- [2] C. Barton. *Volgens Barton: Lesgeven in Wiskunde aan de hand van wetenschap, experts, en 12 Jaar Aan Mislukkingen*. Vert. door Rene Kneyber. Derde druk. Phronese, 2019.
- [3] R. Bos en P. Drijvers. *Diep in de problemen zitten*. 2019. URL: <https://www.uu.nl/sites/default/files/2019-02-02nwd-bos-drijvers.pdf> (bezocht op 16-02-2024).
- [4] C. van der Donk en B. van Lanen. *Praktijkonderzoek in de school*. 4th ed. Uitgeverij Coitinho, 2020.
- [5] J. van Dormolen. *Reflecteren in en buiten de klas*. <https://www.fi.uu.nl/publicaties/literatuur/6430/>. Utrecht, 2000.
- [6] P. Drijvers e.a. „Denken over wiskunde, onderwijs en ICT: Inaugurale rede”. In: (2015).
- [7] P. Drijvers, A. van Streun en B. Zwaneveld. *Handboek Wiskundendidactiek*. Zevende druk. Epsilon Uitgaven, 2012.
- [8] D. van Eerde. „Wiskunde en psychologie”. In: *Freudenthal* (2005), p. 55–63.
- [9] R Ernst, P Nijhof en J.M.C. Ghysels. „De metadenkende leerling: effecten van de META-methode”. In: *NRO-Paper* (2017). URL: <https://www.nro.nl/sites/nro/files/migrate/NRO-paper-META-methode-versie-januari-2017-def.pdf>.
- [10] K. Gravemeijer. „Revisiting ‘Mathematics education revisited’”. In: *Freudenthal* 100 (2005), p. 106–113.
- [11] H. Hofstede. *hhofstede*. URL: <https://www.hhofstede.nl/raadsels/muntenwegen.htm> (bezocht op 06-03-2024).
- [12] P. Liljedahl. *Building thinking classrooms in mathematics, grades K-12: 14 teaching practices for enhancing learning*. Voorwoord door Tracy Johnston Zager en illustraties door Laura Wheeler. Corwin press, 2021.
- [13] P. Liljedahl. „Building thinking classrooms: Conditions for problem-solving”. In: *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives* (2016), p. 361–386.
- [14] Inspectie van het Onderwijs. „Rapport De Staat van het Onderwijs 2019”. In: (2019). p. 105.
- [15] George Polya. *How to solve it*. Princeton University Press, 1945.
- [16] G. Roorda, Annemieke Smale - Jacobse en Siebrich Vries. „Teaching Through Problem-solving en Lesson Study”. In: *University of Groningen* (2023). NRO eindrapport 40.5.20500.172.
- [17] A.H. Schoenfeld. *Mathematical Problem Solving*. 8th ed. Academic Press, INC, 1985.
- [18] SLO: website van het landelijk expertisecentrum voor het curriculum. *21e-eeuwse vaardigheden*. 2023. URL: <https://www.slo.nl/thema/meer/21e-eeuwsevaardigheden/> (bezocht op 05-01-2024).
- [19] SLO: website van het landelijk expertisecentrum voor het curriculum. *Probleemoplossend denken en handelen*. 2020. URL: <https://www.slo.nl/thema/meer/21e-eeuwsevaardigheden/probleemoplossend/> (bezocht op 05-01-2024).
- [20] A. van Streun. „Het denken bevorderen”. In: *Groningen: Rksuniversiteit Groningen, Faculteit der Wiskunde en Natuurwetenschappen, Universitair Centrum voor de Lerarenopleiding* (2001).
- [21] A. van Streun. „Hoe onderwijs je probleemoplossen?” In: *Tijdschrift voor Didactiek der β -wetenschappen* 12.3 (1994), p. 210–255.

- [22] A. van Streun. *Heuristisch wiskunde-onderwijs; verslag van een onderwijsexperiment*. Dissertatie Rijksuniversiteit Groningen, 1989.
- [23] A. Treffers. „De (on) navolgbare Freudenthal”. In: *Panama Post* 24 (2005), p. 13–144.
- [24] Wikipedia. *Don't Look Up*. URL: https://nl.wikipedia.org/wiki/Don%27t_Look_Up (bezocht op 06-03-2024).



Gebruikte problemen

Het zwembad

Het probleem 'Het zwembad' is als volgt geformuleerd.

In een tuin van 10 meter bij 15 meter wordt een zwembad gegraven met een lengte van 6 meter en een breedte van 3 meter. De opgegraven grond wordt gelijkmatig over de tuin verspreid. Hoe diep moet er gegraven worden om een zwembad van 2 meter diepte te krijgen?

De mogelijke uitbreidingen van dit probleem zijn de volgende:

- Een peuterbadje van 22 centimeter diep.
- Een bad van 3 meter diepte.
- Een algemene formele opstellen voor een zwembad met diepte d , lengte 6 meter en breedte 3 meter.
- Een algemene formele opstellen voor een zwembad met diepte d , lengte l en breedte b .

Vip in de woestijn

Het probleem 'vip in de woestijn' is als volgt geformuleerd.

Een auto moet een zeer belangrijk persoon, de vip, door de barre woestijn vervoeren. In de uitgestrekte woestijn is geen benzinstation te bekennen en de auto heeft enkel genoeg brandstof om halverwege te komen. Er zijn echter ook andere identieke auto's die hun brandstof met elkaar kunnen delen. Het doel is om de vip veilig door de woestijn te krijgen met zo min mogelijk gebruik van extra auto's. De auto's vertrekken allemaal vanaf dezelfde kant. Wat is het minimale aantal auto's wat je nodig hebt om de persoon naar de andere kant van de woestijn te vervoeren? En hoe werkt dit dan?

De mogelijke uitbreidingen van dit probleem zijn de volgende:

- De auto's kunnen maar tot een kwart komen.
- De auto's kunnen maar tot een achtste komen.
- Kun je de oplossing generaliseren?

Munten wegen

Het probleem 'Munten wegen' is als volgt geformuleerd.

"Voor je liggen 12 munten. Daarvan hebben 11 precies hetzelfde gewicht, maar eentje is vals. Die ene is zwaarder of lichter dan de anderen, je weet het niet. Het verschil in gewicht is te klein om te voelen, maar is wel te meten met een balans. Wat is het minimale aantal wegingen dat je met de balans moet doen om de valse munt eruit te halen, en om ook vast te stellen of de munt zwaarder dan wel lichter is dan de anderen?" [11]

De mogelijke uitbreidingen van dit probleem zijn de volgende:

- Kies een ander aantal munten.
- Kan je een algemene oplossing vinden?
- Wat als er twee valse munten zijn?

Red de drenkeling

Het probleem 'Red de drenkeling' is als volgt geformuleerd.

Er is een drenkeling in de zee die gered moet worden. De drenkeling is in totaal 20 meter van de strandwacht verwijderd. De afstand tussen de drenkeling en de strandwacht in de breedte 100 meter. Verder is de afstand van de strandwacht tot de zee 50 meter. De strandwacht heeft over het land een snelheid van 6 m/s door te rennen. Over het water heeft hij een snelheid van 1,5 m/s door te zwemmen. Welke route kan de strandwacht het beste nemen om het snelst de drenkeling te bereiken?

De mogelijke uitbreidingen van dit probleem zijn de volgende:

- Varieer in afstanden en snelheden.
- Stel een algemene formule op.
- Wat als de strandwacht op de parkeerplaats achter het strand staat?

Kluisjes open en dicht

Het probleem 'Kluisjes open en dicht' is als volgt geformuleerd.

Stel je voor dat je op een school bent met 1000 kluisjes in de gang. Een groepje leerlingen besluit een spelletje te spelen met deze kluisjes. De eerste leerling loopt langs alle kluisjes en sluit ze. Dan komt er een tweede leerling die elk tweede kluisje opent. Vervolgens komt er een derde leerling die de toestand van elk derde kluisje verandert: als hij open was, sluit hij hem, en als hij gesloten was, opent hij hem. Dit patroon gaat door met elke volgende leerling die de toestand van elke vierde, vijfde, enzovoort, kluisje verandert. Als alle 1000 leerlingen langs zijn geweest, welke kluisjes denk je dan dat gesloten zijn?

De mogelijke uitbreidingen van dit probleem zijn de volgende:

- Wat als het geen kluisjes zijn, maar draaischijven met drie posities: A, B en C?
- Stel een algemene formule op.
- Hoe kun je het proces van het vinden van priemfactoren versnellen?
- Hoe weet je dat je klaar bent met het ontbinden in priemfactoren?

Het chips-spel

Het probleem 'Het chips-spel' is als volgt geformuleerd.

Jij en ik gaan een spel spelen met een stapel van 8 chipjes. We spelen om beurten en per beurt je moet minstens 1 en maximaal 3 chipjes van de stapel pakken. De persoon die het laatste chipje pakt wint. Hoe kun je winnen? Bestaat er een optimale strategie zodat je altijd kunt winnen? Zo ja, hoe? Zo nee, waarom niet?

De mogelijke uitbreidingen van dit probleem zijn de volgende:

- Wie wint er bij een stapel van 21 chipjes?
- Bij welke stapelgrootte kan de eerste speler altijd winnen en bij welke de tweede?
- Stel je hebt twee stapels van 21 chipjes en je mag per beurt zo veel chipjes pakken als je wil, maar minstens 1 en enkel van één van de twee stapels. Wie kan er altijd winnen, speler 1 of speler 2? Hoe?

B

Globale lesplannen

In deze appendix zijn de globale lesplannen te vinden bij de bijbehorende lessen. Deze lesplannen geven een indicatie van hoe het verloop een les over het algemeen is gepland. Er wordt in deze uitwerking vooral de nadruk gelegd op de aanpassingen en op de zaken waar meer nadruk op gelegd moet worden tijdens de les ten opzichte van de vorige lessen. Wanneer er in de praktijk is afgeweken van het lesplan ligt dit aan de specifieke situatie in de praktijk of is hier een specifieke afweging voor gemaakt. Wanneer dit het geval is, is dit te vinden in appendix C.

Iteratie 1.1

1. **Introductie.**

Vertel kort wat over het algemene verloop van de les: eerst het probleem in groepen op whiteboards oplossen, dan individueel werken aan het werkblad aan de tafels, vervolgens een vergelijkbaar probleem bedenken en oplossen in groepen op whiteboards. Vermeld ook dat er onderzoek wordt gedaan in deze lessen. Vertel de leerlingen dat er foto's gemaakt zullen worden van de whiteboards, dat ze daarom de werkbladen moeten inleveren en dat hen om eerlijke feedback wordt gevraagd. Verzeker de leerlingen dat dit geen nadelige effecten zal hebben voor hen persoonlijk, maar dat het enkel noodzakelijk is voor vooruitgang van het onderzoek om zo de lessen te verbeteren. Het is dus daarom van belang dat ze eerlijk zijn.

2. **Groepen maken en (basis)probleem introduceren.**

3. **In groepen werken aan het (basis)probleem op de whiteboards.**

Als dit is opgelost en iedereen binnen het groepje is het over de oplossing eens, dan kunnen de leerlingen van die groep aan de slag met het werkblad. Het moment hiervan is afhankelijk van de snelheid van de groep.

4. **Individueel werken aan het werkblad aan de tafels.**

5. **Optioneel: Groepen bedenken samen op de whiteboards een vergelijkbaar probleem en lossen dit op.**

Dit onderdeel wordt enkel uitgevoerd indien bij groepen die klaar zijn met het werkblad en er nog tijd over is. Na het oplossen van een of meerdere vergelijkbare problemen kunnen ze zoeken naar een algemene oplossing.

6. **Afsluiting met de 'gallery-walk'.**

Iteratie 1.2

1. **Introductie.**

- (a) Vertel kort wat over het algemene verloop van de les: eerst het probleem in groepen op whiteboards oplossen, dan individueel werken aan het werkblad aan de tafels, vervolgens een vergelijkbaar probleem bedenken en oplossen in groepen op whiteboards.

- (b) Licht het werkblad kort toe:

- Vraag 1: “Het werk op het whiteboard is eigenlijk een grove uitwerking en bevat ook ideeën die op niks uitliepen. Een nette uitwerking is een vollediger en beter te volgen voor anderen, waardoor jij je goede ideeën kunt overbrengen en zij jou antwoord geloven, denk aan de film: ‘Don’t look up’, zie [24]. Ook ga je het zelf beter begrijpen wat je weer verder helpt.”
- Vraag 2: “Vervolgens ga je op je proces reflecteren en doorgronden hoe je op de oplossing gekomen, achteraf is dat altijd logisch, maar toch zie je als je begint met een probleem nooit direct wat je moet doen. Als je nu kan achterhalen wat de weg was naar succes, kan je dat ook verder helpen of kan jij mensen helpen met het overbruggen van blokkades”
- “Er is een voorbeeld van een ingevuld werkblad beschikbaar voor als je hulp nodig hebt.”
- “Als je klaar bent en je kan niemand helpen is het de bedoeling dat je teruggaat naar het whiteboard om alvast na te denken over het volgende probleem of kan je er zelf een bedenken. Na ongeveer 10 minuten kan iedereen weer verder met het whiteboard.”

2. Groepen maken en (basis)probleem introduceren.

3. In groepen werken aan het (basis)probleem op de whiteboards.

4. Individueel werken aan het werkblad aan de tafels.

Dit mag ongeveer 10 tot 15 minuten duren per groep. Het is vooral niet de bedoeling dat de leerlingen wachten tot de hele klas klaar is en ze verdere instructie krijgen. Dan zit deze activiteit het mogelijk volgende onderdeel in de les in de weg. In het geval dat een leerling niks meer kan doen, moet deze leerling gestimuleerd worden terug te gaan naar het whiteboard om een vergelijkbaar probleem te bedenken. Het is ook niet de bedoeling dat de leerlingen zelfstandig verder werken aan het oplossen van een vergelijkbaar probleem of het optimaliseren van het antwoord. In dat geval moet een leerling gestimuleerd worden dit samen met de rest van de groep op het whiteboard te gaan doen. Daarnaast zal per groep het voorbeeld werkblad verder worden toegelicht zodat leerlingen beter begrijpen wat er van hen verwacht wordt.

5. Optioneel: Groepen bedenken samen op de whiteboards een vergelijkbaar probleem en lossen dit op.

6. Afsluiting met de ‘gallery-walk’.

Vraag hierbij leerlingen elkaars oplossingen te laten uitleggen, als hen dat lukt.

Iteratie 2.1

1. Introductie.

- Vertel kort wat over het algemene verloop van de les.
- Benadruk dat aan het eind van de les de antwoorden van de werkbladen dit keer besproken zullen worden.
- Licht het werkblad kort toe.

2. Groepen maken en (basis)probleem introduceren.

3. In groepen werken aan het (basis)probleem op de whiteboards.

4. Individueel werken aan het werkblad aan de tafels.

5. Groepen bedenken samen op de whiteboards een vergelijkbaar probleem en lossen dit op.

6. Klassikale bespreking werkblad.

Dit onderdeel vindt plaats wanneer het grootste deel van de leerlingen het werkblad afhebben en maximaal op 75% van de lestijd. Dit wordt gedaan door middel van een onderwijsleergesprek en met de principes van formatief handelen. Dit is docentgestuurd, maar leerlingantwoorden zijn richtinggevend.

- Consolideren op de oplossing van het basisprobleem aan de hand van whiteboards met kaders en vraag 1 op het werkblad.
- Vraag naar wat leerlingen hebben opgeschreven bij vraag 2, vraag door en geef het verschil aan tussen een volledige en een minder volledige reflectie. Hierbij is het van belang iedere reactie wel te waarderen. Evalueer vervolgens samen met de leerlingen wat zijn belangrijk vinden aan een goede reflectie.

- Vermeld bij de bespreking van vraag 2: “Het is lastig te vertellen hoe je het hebt opgelost als je het eenmaal al weet, maar hier kan je ook veel van leren.”
- Vraag leerlingen om andere leerlingen die er nog niet uitgekomen zijn of zij hen tips kunnen geven. Er kan ook gevraagd worden om een les te trekken uit de reflectie en om te verwoorden wat ze er mee van kunnen nemen voor het oplossen van een soortgelijk probleem.

7. Optioneel: Groepen bedenken samen op de whiteboards een vergelijkbaar probleem en lossen dit op.

8. Afsluiting met de 'gallery-walk'.

Hierbij ligt de nadruk op hetgeen dat er gedaan is na de bespreking van het werkblad.

Algemene richtlijnen voor de docent tijdens de klassikale bespreking van het werkblad

De volgende richtlijnen voor de docent tijdens de klassikale reflectie van het werkblad zijn volgens het theoretisch kader, zie subparagraaf 3.5.2, van belang voor het onderwijs.

- Waardeer ieders antwoord op de vraag en oordeel niet te direct over de kwaliteit ervan.
- Stel enkel interpreterende vragen aan leerlingen zodat ze zelf meer betekenis kunnen geven aan hun reflectie.
- Laat merken daadwerkelijk geïnteresseerd te zijn in het denken van de leerling.
- Zorg ervoor dat de bijdragen van de leerlingen op dit gebied ook daadwerkelijk een rol gaan spelen in het onderwijsleerproces.

Voorbeeld vragen voor de klassikale bespreking van het werkblad

Gebaseerd op de leerlingantwoorden op de werkbladen van de vorige iteraties zijn er vragen opgesteld die leerlingen kunnen stimuleren hun antwoorden specifieker te maken. Deze vragen dienen als voorbeeld voor de vragen die gesteld kunnen worden tijdens het bespreken van de leerlingreflecties. Een overzicht hiervan is te vinden in Tabel B.1.

Iteratie 2.2

Dit is de eerste les van een nieuwe periode aan keuzewerktijd lessen. In deze les zijn er daarom leerlingen aanwezig die er eerder nog niet bij waren en dus nog kennis moeten maken met BTC. Het hoofddoel van deze les is daarom om de leerlingen kennis te laten maken met deze manier van onderwijs. Deze iteratie is voornamelijk bedoeld voor meer algemene dataverzameling van reflecties van leerlingen op de werkbladen en de nabespreking ervan.

1. Introductie.

Vertel hoe BTC werkt en vertel de leerlingen dat er onderzoek gedaan wordt in deze lessen. Hierbij is het van belang om te vermelden dat er foto's gemaakt zullen worden van de whiteboards, dat ze de werkbladen moeten inleveren en dat hen om eerlijke feedback wordt gevraagd. Verzekeren de leerlingen dat dit geen nadelige effecten zal hebben voor hen persoonlijk, maar dat het enkel noodzakelijk is voor vooruitgang van het onderzoek om zo de lessen te verbeteren. Het is dus daarom van belang dat de leerlingen eerlijk zijn.

2. Groepen maken en (basis)probleem introduceren.

3. In groepen werken aan het (basis)probleem op de whiteboards.

4. Individueel werken aan het werkblad aan de tafels.

5. Optioneel: Groepen bedenken samen op de whiteboards een vergelijkbaar probleem en lossen dit op.

6. Afsluiting met een korte bespreking opgave 2 op het werkblad en de 'gallery-walk'.

Tabel B.1: Voorbeeld vragen tijdens klassikale bespreking reflectie

Voorbeeld antwoorden leerlingen	Bijbehorende vervolgvragen docent
Opnieuw proberen en logisch nadenken.	Wat verander je als je het steeds opnieuw bekijkt, waarom en wat is de uitkomst daarvan?
Als je op het verkeerde moment benzine verplaatst werkt het niet.	Waarom werkt het dan niet?
Omdat dit het meest efficiënt was.	Wat bedoel je met efficiënt?
Het kan beter, je kan ook met 4 auto's beginnen	Hoe ben je hier op gekomen?
Opschrijven.	Wat schreef je dan op en waarom had je daar wat aan?
Samenwerken.	Wat had je aan de samenwerking? Hoe hebben jullie elkaar geholpen?
Pietje zag het in één keer.	Wat zag hij in één keer?
Pietje zag het in één keer.	Hoe wist jij ook dat het goed was?
Goede notatie.	Wat maakte die notatie nou een goede notatie?
Door een schets werd het duidelijk.	Wat werd er duidelijk?
Als je dat proces nog een keer herhaalt haal je het eind.	Hoe kun je dit precies herhalen dan?
Dan rij je vier kwarten.	Wat bedoel je hier mee?
Nergens vastgelopen.	Wat ging er dan goed?
Het was makkelijk.	Later werd het wel moeilijk, waarom?
Het was makkelijk.	Wat was er meteen duidelijk? Wat maakte die notatie nou een goede notatie?
Nadenken.	Waar moet je dan rekening mee houden? Waar dacht je precies over na? Wat was van belang bij dat denken?

Iteratie 2.3

1. Introductie.

- Vertel over het algemene verloop van de les.
- Vertel dat de nadruk in het laatste deel van de les ligt op het reflecteren. Hiervoor gaan de leerlingen in groepjes de vragen van de 'vragenkaart' bespreken.

2. Groepen maken en (basis)probleem introduceren.

3. In groepen werken aan het (basis)probleem op de whiteboards.

4. Individueel werken aan het werkblad opgave 1 aan de tafels.

5. Leerlingen bespreken de vragenkaart in 'nieuwe' groepen.

6. Leerlingen noteren individueel de hun belangrijkste bevindingen uit de gesprekken als antwoord op opgave 2 en 3 van het werkblad.

7. Algemene lesafsluiting.

Indien er voldoende tijd over is kan er worden afgesloten met het bespreken van het werkblad en een kortere 'gallery-walk'.

Aanvullende informatie

Vragenkaart bespreken en opgave 2 en 3.

De vragen op het werkblad hoeven niet allemaal beantwoord te worden, maar het liefst wel minstens één vraag van elke categorie. De vragen dienen als hulpmiddel en stimulans voor interessante gesprekken. De leerlingen mogen zelf kiezen welke vragen zij het relevantst en interessant vinden. Hierbij is het van belang dat groepsgenoten elkaar helpen om zo specifiek mogelijk te zijn en dus vragen stellen als 'waarom', 'hoe', 'wat bedoel je', 'kan je dat uitleggen'. De nieuwe groepssamenstelling stimuleert dit mogelijk. Ook kan de docent hierbij helpen en leerlingen proberen te helpen met het voeren van interessante gesprekken. Om hier data van te verzamelen moeten de leerlingen als antwoord op opgave 2 en 3 hun belangrijkste inzichten noteren. Het doel voor de leerlingen is het kunnen bespreken van de vragen op de vragenkaart en het voor het onderzoek is het van belang dat zij hier iets over noteren.

Nieuwe groepen

De nieuwe groepen bestaan uit samenstellingen van de bestaande groepen. De omvang van de nieuwe groepen is daarom groter. Dit heeft als nadeel dat er waarschijnlijk minder leerlingen zijn die in de gelegenheid zijn om iets te zeggen of dat zij iets anders gaan doen. Toch is hier voor gekozen, omdat zo niemand van een oorspronkelijke groep alleen in een nieuwe groep komt. Dit verkleint sociale barrières en ze kunnen elkaar om hulp vragen voor het uitleggen van hun oplossing. Daarbij is het dan praktischer om groepen samen te stellen in plaats van te verdelen, aangezien de oorspronkelijke groepen uit drietallen bestaan.

Iteratie 2.4

1. Introductie.

- Vertel over het algemene verloop van de les.
- Vertel dat de nadruk in het laatste deel van de les ligt op het reflecteren. Hiervoor gaan de leerlingen in groepjes de vragen van de 'vragenkaart' bespreken. Bijvoorbeeld zo: "Vervolgens ga je op je proces reflecteren en doorgronden hoe je op de oplossing gekomen achteraf is dat altijd logisch, maar toch zie je als je begint met een probleem nooit direct wat je moet doen. Als je nu kan achterhalen wat de weg was naar succes kan je daarvan leren, beter worden in het probleem oplossen en misschien ook andere mensen hiermee helpen. De vragenkaart zal jullie hopelijk helpen voor het voeren van betekenisvolle gesprekken."

2. Groepen maken en (basis)probleem introduceren.

3. In groepen werken aan het (basis)probleem op de whiteboards.

4. Optioneel: Groepen bedenken samen op de whiteboards een vergelijkbaar probleem en lossen dit op.

5. Oplossing basisprobleem bespreken.

De docent vat kort met de leerlingen de resultaten op het basisprobleem, in de vorm van een 'gallery-walk'. Dit is om de leerlingen bevestiging te geven dat hun werk tot dan toe (waarschijnlijk) goed is. Zo wordt er herhaald waar de les in eerste instantie over ging, waardoor leerlingen gemakkelijker met elkaar verder kunnen praten. Wanneer deze bespreking te kort voor leerlingen blijkt en het voor hen nog niet helemaal duidelijk is, kunnen ze hier met medeleerlingen over verder praten in het volgende onderdeel. Dit zal dan ook bijdragen aan het voeren van interessante gesprekken, wat het doel is van deze les.

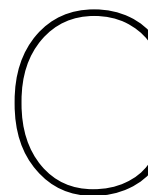
6. Vragenkaart en werkblad in samengestelde groepen aan tafels

Voor dit onderdeel is de oorspronkelijke opgave 1 op het werkblad weggelaten. Dit lesonderdeel gaat daarom alleen over het zelfstandig consolideren en reflecteren op de les in groepjes. Het volledige werkblad nu enkel bedoeld voor de dataverzameling. Dit lesonderdeel zal ongeveer 10 minuten moeten duren om leerlingen voldoende gelegenheid te geven om tot interessante gesprekken te komen. De docent loopt langs voor verticale interactie met de leerlingen als stimulans voor interessante gesprekken. Het werkblad krijgen de leerlingen pas halverwege dit lesonderdeel, om hen niet af te leiden van het gesprek. Een mogelijke instructie bij dit lesonderdeel is als volgt. "Ga met je groepje samen met een ander groepje aan een tafel zitten. Vervolgens gaan jullie aan de slag met de vragenkaart. Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om elkaars oplossingsprocessen beter te begrijpen en zo van elkaar te leren. Probeer zo specifiek mogelijk te zijn en probeer de ander echt te begrijpen. Als jullie vastlopen in de bespreking kan je de rode vakken op de whiteboards gebruiken als inspiratie. Uiteindelijk noteert iedereen zijn of haar belangrijkste bevindingen uit het gesprek op het werkblad. Die gaan we vervolgens met de hele klas bespreken en dan kan je de werkbladen waar nodig nog aanvullen."

7. Bespreken groepsgesprekken en werkblad.

8. Gelegenheid voor leerlingen om het werkblad aan te vullen en de feedback vragen in te vullen.

9. Algemene lesafsluiting.



Algemene aantekeningen per iteratie

In deze appendix zijn de algemene aantekeningen van de lessen te vinden van de lessen bij de bijbehorende iteraties. Op deze manier wordt er een globaal beeld geschetst bij hoe een les is verlopen. Momenten belangrijk rondom het onderzoek zijn hierin aangemerkt. Hierbij wordt er met een kleur aangegeven voor welke deelvraag een aantekening voornamelijk relevant is. Voor de eerste deelvraag, over het individueel aantekeningen maken, wordt de kleur **blauw** gebruikt. Voor de tweede deelvraag, over de kenmerken van leerlingreflecties, wordt de kleur **roze** gebruikt. Voor de derde deelvraag, over het consolideren van een les, wordt de kleur **groen** gebruikt. Tot slot wordt voor de vierde deelvraag, over het strategisch inzetten van de ontworpen lesmaterialen, **oranje** gebruikt. Verder is het van belang om op te merken dat er in de aantekeningen met 'de docent' soms ook de onderzoeker bedoeld wordt. Op die op bepaalde momenten in de les nam ze dan namelijk ook de rol als docent aan.

Iteratie 1.1

Deze les vond plaats op 03-11-2023.

Start van de les

- Docent: "Wie kan er vertellen wat het idee is van wat we gaan doen?"
- Geen reacties van de leerlingen.
- Docent helpt: "Op de middelbare school doen we vaak directe instructie, dan een som samen en daarna doe je er zelf een." Vervolgens vertelt hij over deze les: probleem oplossen, in groepjes en "gaan we echt onze tanden erin zetten".
- Docent introduceert de onderzoeker, licht kort het onderzoek toe en vertelt dat er vanwege het onderzoek een werkblad is toegevoegd aan de les. Hierbij trekt één leerling, een gek gezicht dat tegenzin uitstraalt. Daarnaast wordt er verteld dat het maken van fouten of het geven van feedback geen negatieve gevolgen voor de leerlingen zullen hebben, maar dat dit het onderzoek wel verder helpt.
- Groepjes worden verdeeld en leerlingen gaan naar het toegewezen bord.
- Probleem wordt geïntroduceerd. Op het bord wordt enkel "10 & 15" en "3 & 6".
- De docent kondigt aan dat het niet meer per se nodig is dat de leerlingen die niet schrijven denken en praten en dat degene die schrijft stil is. Hierbij stelt hij de voorwaarde dat de samenwerking goed moet gaan. Als dat het geval is zal de docent ingrijpen.
- Algemene opvallendheden tijdens het werken in groepjes: veel 'breien' en weinig eenheden, één doorsnede tekening en twee oppervlakte tekeningen, later hadden de andere groepjes ook een plaatje gemaakt.

Groepswerk: Basis probleem

Hier volgt een verdere beschrijving van de groepsprocessen en andere opvallende momenten die vervolgens tijdens het groepswerk plaatsvonden.

Groep 1

- Leerling maakt een doorsnede-tekening met variabelen.
- Na overleg, o.a. gebaseerd op de tekening hadden ze een idee om de oplossing te vinden, maar al snel volgde de opmerking "oh, dit is echt moeilijk om op te schrijven".
- De leerlingen geven Verklaring aan de docent: "ja we moeten iets doen met een formule, letter en substitueren toch? maar hoe?"
- Een andere leerling binnen groepje gaf soort van hint, waardoor de eerste leerling begon uit te leggen in woorden wat ze hadden gevonden, ook al was dit nog niet de gezochte uiteindelijke diepte.
- De docent stelt voor om dit eens op te schrijven als tussen resultaat. Dit deden de leerlingen en liepen daarna weer vast.
- De docent stelt voor om nog een waarde te proberen. Dit deden de leerlingen en ze konden daarna weer zelfstandig verder.
- Tussendoor was er binnen dit groepje een leerling die eigenlijk alleen met het groep dat ernaast stond aan het samenwerken was op het bord van die andere groep, noem leerling A. Hij werd verwezen terug te gaan, maar zei toen dat hij het bij zijn oorspronkelijke groep niet meer begreep. Dat is natuurlijk logisch als hij het gehele proces daarvoor er niet bij was. Uiteindelijk probeerde hij het toch en kwam hier zelfstandig uit. Vervolgens ging hij wel weer met zijn eigen groepje verder.
- Dit groepje was als laatste toe om aan het werkblad te beginnen. Wel waren ze eigenlijk het verst gekomen met het oplossen van het probleem, aangezien ze al een formule hadden opgesteld en dus een algemene oplossing hadden gevonden.
- Tijdens het werken aan het werkblad:
 - "Dan moeten we gaan zoeken wat nu ook alweer de goede oplossing is op het bord."
 - "Hoe schrijf ik dit nu netjes op?"
 - Een van de drie leerlingen deed enorm zijn best en was lang bezig. Een ander was snel klaar en wist niet wat er nog meer gedaan kon worden.
 - Leerling A schreef een kort antwoord op vraag 1 en was er klaar mee: "Ik heb het antwoord toch al netjes in mijn hoofd zitten, waarom zou ik het dan nog opschrijven?"
 - Er werden verder nauwelijks gesprekken gevoerd tijdens dit onderdeel van de les.

Groep 2

- Direct na de introductie van het probleem werd eerste regel opgeschreven.
- Hier bleven ze wel ongeveer vijf tot tien minuten op steken en voerde veel overleg. Ze schreven gedurende die tijd niks op.
- Daarna schreven ze de oplossing redelijk snel uit en waren als tweede klaar. Tijdens dit proces hadden ze ook een plaatje gemaakt.
- Ze waren het alle drie over eens dat dit de goede oplossing was.
- Tijdens het werken aan het werkblad vonden ze het vooral lastig om op vraag 2 een geschikt antwoord te formuleren: "Ja, het is toch logisch hoe we het hebben opgelost, ik had gewoon opeens een geniaal idee."

Groep 3

- Later dan bij de andere groepjes volgde hier ook later een plaatje.
- Deze groep was als eerste klaar en gingen erg gemotiveerd aan de slag met het werkblad.
- Tijdens het werken aan het werkblad:
 - De leerlingen uit deze groep zijn langst actief bezig geweest met het werkblad.
 - Een leerling, moet bij het zien van het werkblad lachen: "Nu wordt het pas echt moeilijk, nu moeten we gaan uitleggen wat we hebben gedaan!"
 - Een andere leerling, liep vast bij het netjes opschrijven. Hij vond het pas echt netjes als hij een formule in variabelen zou geven (voor de afmetingen van het zwembad, de tuin en de dieptes), echter stond zoiets nog niet op hun bord. Toch schreef hij uiteindelijk zonder tussenstappen een formule op met variabelen voor de diepte en de afmetingen van de tuin

en het zwembad. Vervolgens begreep hij niet hoe je dit beter kon uitwerken. "Dit is toch gewoon het antwoord?". Na een tip begreep hij dat hij er bijvoorbeeld bij kon zetten dat je deelt door een oppervlakte.

- Later is het gelukt door deze leerling om de formule op te stellen die hij voor ogen had, een formule bestaande uit variabelen voor alle afmetingen, zie opgave 3 in Figuur N.8.

Groep 4

- Deze groep tekende na de uitleg direct een plaatje
- De leerlingen probeerde een soort inklemmen, maar kwamen er niet helemaal uit.
- De leerlingen hadden wat tips nodig van de docent en de docent gaf hun een tip over een (verhoudings)tabel.
- Uiteindelijk vonden de groep, als laatste, het antwoord en gingen aan de slag met het werkblad.
- De leerlingen begonnen erg actief aan het werkblad, maar dat hield redelijk snel op.
- Na de les vertelde de docent dat hij vermoedde dat ze het antwoord gewoon hadden overgeschreven van een andere groep. Waarschijnlijk stopte ze redelijk snel met het werkblad omdat zij het basisprobleem nog niet begrepen hadden en de oplossing dus niet konden opschrijven.

Groep 5

- Ook deze groep maakte gelijk een plaatje.
- De groep had maar een paar kleine tips nodig tijdens het oplossen van het basisprobleem.
- Ze gingen redelijk actief aan de slag met het werkblad.

Overgang van het werkblad naar de 'gallery-walk'

- Sommige leerlingen waren al klaar met het werkblad en anderen waren nog actief bezig. De leerlingen die gestopt waren of klaar waren met het werkblad bleven aan de tafels zitten en deden niks. Ze wachtten tot verdere instructie van de docent.
- Opvallend was dat vooral de groep die als eerste klaar was op het whiteboard (groep 3), het langst bezig was met het werkblad en binnen de groep die als laatste klaar was op het whiteboard (groep 1) waren twee van de drie leerlingen al eerder gestopt met werken aan het werkblad.
- Het leek erop dat de leerlingen die nog bezig waren met het werkblad, daarop al zelfstandig het probleem aan het uitbreiden en algemeen aan het maken waren. Ook op de whiteboards stonden al wat uitdrukkingen die leken op een formule.

'Gallery-walk'

- De oplosstrategieën en resultaten op de borden werden besproken, met behulp van de gezette kaders. Op de volgende dingen werd de nadruk gelegd.
 - Bespreking van de soorten plaatjes: doorsnede en oppervlakte.
 - Bespreking van de formule of de vermeende stappen daarnaartoe.
- De volgende dingen werden door de docent toegelicht als uitbreiding op hetgeen dat de leerlingen hadden bedacht.
 - Bespreking van het gebruik van eenheden en de dimensie-analyse.
 - Bespreking van de tactiek met een verhoudingstabel.
 - Bespreking van een algemene formule.

Groepswerk: vergelijkbaar probleem / algemene oplossing

- Na de 'gallery-walk' was er nog ongeveer vijf minuten over. Maar de docent vond dit voldoende tijd om de leerlingen nog even uit te dagen om het vergelijkbare probleem over het pierenbadje op te lossen. Dit lukte ook bij alle groepen, op groep 4 na.
- Groep 1: Een leerling loste dit op om door de opgestelde formule in te vullen. Dit deed hij zonder rekenmachine dus had alle tijd nodig. Het antwoord was correct.

- Groep 2: Ze vulde de formule in die ze hadden gevonden in op de grafische rekenmachine en noteerde het antwoord.
- Groep 3: Leerling C vulde met behulp van zijn werkblad de formule in.
- Groep 4: Dit probleem hadden ze met behulp van de verhoudingstabel wel als groep opgelost, zonder hulp van andere groepen.
- Groep 5: Vulde de formule in en vonden het antwoord.

Iteratie 1.2

Deze les vond plaats op 10-11-2023.

Start van de les

- Docent vertelt kort hoe de les gaat verlopen en dat er weer gewerkt wordt met een werkblad:
 - Met elkaar afspreken, zo weet je wat je moet doen wat we verwachten.
 - De docent legt uit dat het whiteboard is voor de grove uitwerkingen en om te zoeken naar de oplossing. Daarbij kan het laten staan van foute tussenstappen ook soms helpen. Het whiteboard is dus voor ook de foute ideeën voor het doorlopen van het proces. De docent wil de leerlingen uitdagen om dit te laten staan, want het is namelijk niet erg en kan je juist verder helpen.
 - Daarna licht de docent toe dat het werkblad er voor bedoeld is om de uitwerking netjes op te schrijven, zodat een ander de oplossing ook kan begrijpen. Dit is bijvoorbeeld nodig voor het overbrengen van de goede ideeën. Hierbij legt de docent uit dat gelijk hebben en gelijk krijgen ook andere dingen zijn. Dit ligt hij toe door het voorbeeld van de film 'Don't look up'.
- Verder benadrukt de docent dat de tafels deze les verder aan de kant staan dan de vorige les om de activiteit van de leerlingen te stimuleren.
- De groepjes worden verdeeld en wanneer de leerlingen bij de borden staan wordt de opdracht gegeven.
- Na het geven van de opdracht worden past de stiften gegeven. Tegelijkertijd praten de meeste leerlingen al over het probleem. Het is hierbij beter om tijdens het uitdelen van de kaarten voor de groepsindeling, de stiften ook al te geven. Dan kunnen de leerlingen direct na de introductie van de opdracht al beginnen met schrijven. Nu konden ze hier alleen over praten.

Groepswerk

Hier volgt een verdere beschrijving van de groepsprocessen en andere opvallende momenten die vervolgens tijdens het groepswerk plaatsvonden.

Groep 1

- Deze groep zegt gelijk te weten wat ze moeten doen en herhalen meerdere keren: "Ja, we gaan gewoon een formule maken!" en anderen bevestigen dit "Ja, we moeten een formule maken."
- Tijdens het werken aan de werkbladen is deze groep langer bezig dan de andere groepen. Even later zijn twee van de drie leerlingen klaar en is de ander nog bij de eerste vraag. Aangezien de twee leerlingen die al klaar zijn niks meer doen en de derde afleiden, worden ze alle drie terugverwezen naar het whiteboard voor een vergelijkbaar probleem. Hier hebben ze enige weerstand op, want ze vinden dit onzinnig: "Ja, nu we deze al hebben opgelost kunnen we een kwart afstand ook wel, dat is dan gewoon makkelijk".
- Toch gaan de leerlingen er mee aan de slag op het whiteboard. Ze zijn relatief snel klaar en gaan weer zitten aan de tafels. Ze zijn niet direct te motiveren om nog een vergelijkbaar probleem op te lossen.
- Vervolgens wordt aan deze leerlingen gevraagd om te zoeken naar een algemene formule, waar ze het eerder ook al over hadden. Dat lijkt hen eerst te eenvoudig, maar enkele momenten later lijkt hen dit weer lastiger. Ze hebben het over een formule met een term $(64^2)^2$ en vermoeden dat dit van invloed is op de formule. Hierbij zitten ze aan de tafels en zijn ze niet aan het schrijven. Dit proces komt dus redelijk passief over.
- Richting het eind van de les komt een van de leerlingen uit groepje 4 naar dit groepje toe en vertelt wat hij heeft bedacht over een algemene formule. Vervolgens gaan de leerlingen van groep 1 met de leerling van groep 4 in gesprek over hoe deze formule er dan uit zou moeten zien. Hierbij gaan de leerlingen ook rekenen op een grafische rekenmachine.

Groep 2

- Ze maken al snel een tekening van de af te leggen afstand en hoe ver de auto's kunnen komen. Hier blijven ze relatief lang op steken.

- Twee van de drie leerlingen haken soms af en lopen naar anderen groepen of lijken niet betrokken te zijn bij het groepsproces. De andere leerling doet erg zijn best en schrijft veel op. Later lijkt een leerling daar weer bij aan te haken.
- Wanneer de oplossing gevonden is wordt deze aan de derde leerling nog eens toegelicht. Deze derde leerling is wel kritisch en denkt dat de oplossing op een bepaalde manier geoptimaliseerd kan worden. Hierop reageren de andere twee dat ze dit eerst ook dachten, maar dat in dat specifieke geval de tank dan te vroeg leeg is en de andere auto's dat punt niet kunnen halen. Hier stemt de derde leerling mee in en ook zij is daarmee overtuigd van de oplossing.
- Deze groep leerlingen is het langste bezig met het basisprobleem en komen er niet aan toe om na het werkblad terug te gaan naar het whiteboard.

Groep 3

- Ook deze groep maakt al snel een weergave van de af te leggen route van de vip auto, van A naar B.
- Deze groep lijkt het snel een oplossing gezien te hebben en gaan aan de slag met het werkblad.
- Een leerling heeft zichtbaar moeite met het werkblad invullen. Hierbij zegt hij: "We moeten onze gekheid opschrijven, dat is moeilijk." Hierop wordt er door de docent gezegd dat je ook alleen de berekening mag opschrijven, zolang het maar duidelijk is wat er is gebeurd. De leerling reageert vervolgens: "Dat is lastig, het is geen sommetje." De docent zegt daarna dat het ook in woorden mag en laat de leerling verder met rust.
- Later gaan de leerlingen weer terug naar het whiteboard voor een vergelijkbaar probleem.
- Net als een paar andere groepen willen ze vervolgens een algemene formule bedenken. Echter is er nu nog maar weinig tijd over in de les. Toch maken de leerlingen een grafiek over hoe ze denken hoe zo'n algemene oplossing er waarschijnlijk uit zou zien.

Groep 4

- Het duurt relatief lang voordat deze leerlingen iets op het bord schrijven. Ze zijn wel met elkaar aan het praten over het probleem.
- Vervolgens schrijven ze relatief snel hun oplossing uit.
- Wanneer de leerlingen aan de docent uitleggen wat hun oplossing is en de docent vragen stelt over wat ze met hun notatie bedoelen komt er een vraag in hen naar boven. Maakt het uit in welke auto de vip zit? Met deze vraag zijn ze even bezig en concluderen dat het niet uit maakt. Wel geven ze dit nu ook aan in hun notatie.
- Na het werken aan het werkblad gaat dit groepje verder met het zoeken naar meer oplossingen van vergelijkbare problemen.
- Later gaan ze met groep 5 gezamenlijk zoeken naar een algemene oplossing.

Groep 5

- Deze groep begint direct met het opschrijven van de gegevens. Hierdoor vragen ze zich af hoe lang de woestijn is. Wanneer ze deze vraag aan de docent stellen antwoordt de docent dat de woestijn 'lang genoeg' is. Dit antwoord lijkt de leerlingen in eerste instantie een klein beetje te frustreren, maar al gauw schrijft een leerling op 'y_auto = eind' en ze gaan rustig verder. De leerlingen lijken het antwoord toch gewoon geaccepteerd te hebben.
- Tijdens het oplossen, zegt een leerling: "Ik mag niet nadenken, ik heb de pen!"
- Wanneer ze het hebben opgelost en aan het werkblad hebben gewerkt, wordt hen verzocht een variatie op het probleem te bedenken. Ze stellen dat een volle tank voldoende is om een kwart van de af te leggen afstand te halen. Vervolgens zeggen ze gelijk dat je hier acht auto's voor nodig hebt. Hierna wordt hen toch verzocht dit uit te werken. Desalniettemin lijken de leerlingen hier langer mee bezig te zijn dan met het basisprobleem.
- Tussendoor zegt een van de leerlingen enthousiast "Nu hebben we er nog een opgelost!" en even later "Nu hebben we er weer een opgelost!"
- Even later sluiten de leerlingen van groepje 4 bij dit groepje aan. Ze zoeken samen naar een algemene oplossing en schrijven hierbij veel. Aan het eind van dit deel in de les lijken ze gezamenlijk de oplossing gevonden te hebben.

Groep 6

- Deze groep bestaat, maar uit twee leerlingen.
- Voor het zoeken naar de oplossing gebruiken ze een soort stroomschema als notatie. Een van de leerlingen licht dit toe en vertelt dat hij dit heeft gebaseerd op iets wat hij ooit eens binnen een andere soort wiskunde heeft gezien.
- Zij vinden het lastig en zijn trager dan de andere groepen.
- Tijdens het werken aan het werkblad ontdekt een leerling dat de tactiek de vip verder zou laten komen dan nodig is. De andere leerling ontdekt een foutje in hun oplossing en gaat hier vervolgens alleen op het werkblad mee aan de slag.
- Wanneer ze uiteindelijk klaar zijn met het werkblad gaan ze terug naar het whiteboard om een nieuw probleem te bedenken. Alle andere groepen zijn hier al mee bezig. Deze groep kijkt eerst wat groep 5 heeft gedaan en zegt vervolgens een ander en origineel probleem te willen bedenken. Ze roepen eerst een aantal variaties die toch vergelijkbaar lijken te zijn aan hetgeen waar de andere groepen mee bezig zijn. Uiteindelijk komen ze op het probleem, wat als een van de tanks lek is. Een leerling uit groep 5 hoort dit en reageert verontwaardigd, "Wow, jullie willen het helemaal moeilijk maken!". Dat dit het probleem enorm veel moeilijker zou maken realiseerde deze groep zich pas toen ze het er kort over hadden samen. "Je moet dan op een bepaalde manier aangeven hoeveel er dan uit gaat, hmm", waarop de ander reageert "En wanneer". De leerlingen zijn hier verder niet meer mee aan de slag gegaan, omdat de tijd om was.
- Na afloop van de les worden de werkbladen door de leerlingen bij de docent ingeleverd. Een van de leerlingen van deze groep komt hierbij erg teleurgesteld naar de docent. Hij zegt weer een fout ontdekt te hebben en het nu helemaal fout moet inleveren. De docent legt vervolgens uit dat de bedoeling is van het werkblad dat je er van kunt leren en dat hij dat dus juist gedaan heeft door zijn oplossing op te schrijven en er nog eens over na te denken. Daar stemde hij mee in en leek enigszins opgelucht.

'Gallery-walk'

- De docent geeft aan dat hij dit keer geen kader heeft gezet om het werk van de leerlingen, omdat hij het lastig vond om de betekenisvolle momenten aan te geven. Na de les licht de docent dat het hierdoor een minder goed idee is om leerlingen dit wel te laten doen en dus elkaars oplossingen uit te leggen. Wel vraagt hij de leerlingen verschillen op te merken, zoals later beschreven is.
- Vervolgens kaart hij aan dat het er bij hoort dat sommige leerlingen het snel kunnen oplossen en andere langzaam zijn. Daarbij zegt hij dat het soms kan helpen om even los te komen van het werk en dat zo ook vaak goeie ideeën op bijvoorbeeld de wc ontstaan. Gerelateerd hieraan vertelt de docent een verhaal over de laatste stelling van Fermat.
- Wanneer het leerlingwerk wordt besproken zegt de docent veel overeenkomsten te zien en vraagt de leerlingen naar de verschillen.
- Daarna ligt de docent een van de genoemde verschillen toe. Zo is een soort tijdlijn-schema minder overzichtelijk en minder handig om je oplossing te presenteren, maar dat wel helpt om het beeld in je hoofd duidelijker te krijgen.
- De tip van de docent voor de volgende keer is dan ook: door het probleem en de oplossing te visualiseren, kan je er makkelijker uitkomen.
- Op dit moment roept een leerling: "Hoelang nog?"
- De docent sluit de bespreking af met de opmerking dat er ook door een aantal leerlingen een algemene oplossing is gevonden. Hij zegt niet te kunnen concluderen of deze correct is, maar spreek hoe dan ook zijn waardering uit. Hij daagt de andere leerlingen uit om voor volgende week uit te vinden of deze oplossing correct is of om juist te bewijzen dat hij niet klopt. Groep 1 roept hierop al snel dat de formule klopt.

Iteratie 2.1

Deze les vond plaats op 24-11-2023.

Start van de les

- De docent opent de les met onder andere de opmerking: “Jullie krijgen een probleem en dat gaan we weer uitbreiden om het interessant te maken.”
- Vervolgens licht hij het werkblad toe: “Het werkblad is iets aangepast. De eerste vraag ging bij de meesten van jullie iedere keer wel redelijk goed. De tweede vraag bleek wat lastiger te zijn. Het is ook lastig om nadenken over welke denkstappen je ook alweer hebt gemaakt om tot je antwoord te komen. Maar het terugkijken op je uiteindelijke denkproces is erg waardevol.”
- De docent vertelt dat het voor ons tegelijkertijd de bedoeling is om geschikte vragen te bedenken om de leerlingen te helpen met het reflecteren. Ook vertelt hij dat daarvoor er vragen aan de leerlingen gesteld kunnen worden. Hierdoor kunnen de vragen op het werkblad hopelijk verbeterd worden.
- Er wordt vermeld dat het werkblad de antwoorden van de leerlingen op het werkblad dit keer besproken gaan worden.
- De groepen worden gemaakt en verdeelt over de borden, de stiften worden uitgedeeld en vervolgens wordt het probleem geïntroduceerd.

Groepswork: Basis probleem

Hier volgt een verdere beschrijving van de groepsprocessen en andere opvallende momenten die vervolgens tijdens het groepswork plaatsvonden.

Groep 1

- Een leerling constateert: “Het grootste probleem is dat je niet weet of die zwaarder is”.
- De leerlingen werken samen aan een strategie om achter de valse munt te kunnen komen.
- Twee van de drie leerlingen zijn vooral bezig. De derde leerling haakt af en toe af. Dat deed ze vorige lessen ook wel eens. Ook is ze bezig op haar telefoon. Het lijkt er op dat ze naar het antwoord aan het zoeken is op het internet, maar dat is niet zeker.
- Wanneer dit groepje klaar is vertellen ze de docent de oplossing waarmee ze in vier keer wegen de valse munt gegarandeerd kunnen vinden. De docent zegt dat dit efficiënter kan. Op dit moment haakt de derde leerling direct in. Zij had dus in ieder geval meegeluisterd hoe de oplossing aan de docent werd uitgelegd. De derde leerling vroeg aan de leerling die het uitlegde waarom ze eigenlijk niet begonnen waren met groepjes van vier munten. Vervolgens gingen ze alle drie gezamenlijk zoeken naar een efficiëntere oplossing gebaseerd op dit principe. Wanneer ze toch op hetzelfde antwoord uitkwamen vroeg 'de derde leerling' zich wederom hardop af waarom je dan vervolgens die nieuwe tactiek niet klaar bent na drie keer wegen in plaats van vier. Hierop reageert een andere leerling dat je er ook nog achter moet komen of de valse munt zwaarder of lichter is. 'De derde leerling' reageert bevestigend.

Groep 2

- Voor het probleem geïntroduceerd is: schrijven ze op het bord het antwoord is 3, $3=3$ dus $1=1$. Uiteraard hadden ze niet kunnen weten dat 3 inderdaad het antwoord was, maar dit toont in ieder geval wel aan dat ze geactiveerd zijn om te beginnen. Tijdens het introduceren van het echte probleem vegen ze dit ook uit.
- Het duurt relatief lang voordat de leerlingen uit deze groep beginnen met schrijven. Ze zijn de twee na laatste. Ze zijn wel druk met discussiëren, ook met een leerling uit groep 3.
- De leerlingen zijn druk bezig met het bedenken met hoeveel munten ze moeten beginnen, maar komen er niet achter wat nu het handigst is: “Nee, 6 aan elke kant.”
- Wanneer ze er niet uitkomen en de docent langs loopt: “Meneer mogen we een weegschaal?”. Waarschijnlijk hopen ze daarmee het beter te kunnen achterhalen wat het handigst is. De docent gaat niet direct op deze vraag in, maar vraagt naar welke informatie je uit een balans kan halen.

- Even later heeft een van de leerlingen de volgende reactie: “Je weet niet of die zwaarder of lichter is, dan is het toch gewoon geluk?” Een andere leerling zegt vervolgens: “Als je geluk hebt kan het in één keer. Oh nee, twee, want je weet niet welke vals is.” Daarna reageert weer een andere leerling met: “Als je 8 hebt (in plaats van 12) kan je beter steeds twee muntjes wegen.” Ondanks dat ze er nog steeds niet definitief uit zijn waarmee ze het beste kunnen beginnen, heeft het gesprek nu wel een impuls de goede richting op gekregen.

Groep 3

- Deze groep begint pas als laatste met schrijven op het whiteboard.
- Ze kiezen direct voor vier groepen van drie munten.
- Uiteindelijk komen ze op 8 keer wegen, maar zijn ook niet helemaal overtuigd, want ze blijven wel bezig met het praten over deze oplossing. Ze overleggen ook af en toe met groep 4, omdat deze leerlingen een efficiëntere manier hadden gevonden.

Groep 4

- Deze groep begint met een strategie waar aan beide kanten van de weegschaal zes munten worden geplaatst.
- Tijdens het werken aan het werkblad zegt een leerling: “Het is voor mij niet eens duidelijk wat we hebben opgeschreven, hoe moet ik dat werkblad dan invullen”. Deze leerling vindt dit dan ook lastig en schrijft niet veel. Een andere leerling is ook niet lang bezig met het werkblad, terwijl de derde leerling erg uitgebreid en zelfstandig bezig is.

Groep 5

- Deze groep gaat redelijk chaotisch en met veel lawaai/gelach/enthousiasme te werk. Het lijkt er dan ook op dat de meiden vriendinnen zijn. Wel blijft het gaan over het probleem. Degene met de stift heeft duidelijk een leidende rol. Zij maakt vertelt, schrijft wat op, vraagt beide andere leerlingen of ze het er mee eens zijn en wat ze vervolgens denken. Vervolgens schrijft ze de gezamenlijke bevindingen op.
- De groep kwam na enige tijd gezamenlijk tot het vaste besluit: Het is een strikvraag. Zij vertellen de docent waarom. Ze blijken als strategie te hebben gehanteerd telkens twee nieuwe muntjes met elkaar te vergelijken, totdat de balans uit balans is. Op dat moment zeggen ze dat je dan weet dat een van de twee vals is, maar je weet niet welke en dat kan je ook niet weten. Ze hebben verder niet geteld hoe vaak je hierbij (maximaal) moet wegen. Dit vinden ze niet nodig, omdat het toch een strikvraag is en je toch niet kan achterhalen welke vals is. Ze verklaren: “Want als je telkens per munt weegt weet je uiteindelijk een van de twee valse munt, maar welke is dan onbekend.”
- De docent stelt vervolgens de vraag: “Wat weet je nog meer van de munten die je daarvoor (voor de valse) gewogen hebt?”
- De leerling met de leidende rol reageert hier redelijk snel op: “O dat die goed zijn! Maar dan makkelijk!”. De docent reageert: “Hoeveel keer minimaal dan?”. De leerling antwoordt: “Ja, maar dat maakt niet uit”, en ze schrijft snel de conclusie in woorden op van hoe je het globaal moet aanpakken.”
- Hierna wordt de groep weer alleen gelaten en worden de nieuwe bevindingen besproken. Echter is dit van korte duur, aangezien de andere twee leerlingen er genoeg mee namen dat de leerling met de leidende rol het had opgelost. Ze gingen vervolgens over op kletsen, maar keken af en toe ook bij de borden van andere groepen.
- Opmerking: Voor groep 5 zou mogelijk een goede reflectie zijn: “Eerst dachten we dat het een strikvraag was, maar we realiseerde ons later dat ook de munten die even zwaar zijn en dus sowieso goed zijn kan gebruiken om te achterhalen welke munt niet vals is. Hier kwamen we achter door ons af te vragen / de docent vroeg wat we nog meer wisten. Als je vast loopt moet je dus altijd even goed nagaan welke informatie je precies hebt, wat dat betekent en wat je ermee kan”.

Groep 6

- Deze groep bleef heel lang en heel rustig met z'n drieën praten en begonnen als een-na-laatste met schrijven. Ze schreven vier vieren onder elkaar in twee paren op. Hier bleven ze een paar minuten op steken. En praatte gezamenlijk rustig verder. Na in totaal ongeveer tien minuten bezig te zijn geweest wisten zij als eerste het antwoord. Ze kwamen op 4 keer wegen.
- De docent komt naar hen toe om de oplossing te controleren en checkt of iedereen hem kan uitleggen. Dat bleek ook het geval. De docent geeft aan dat ze het goed gedaan hebben, maar dat het nog een beetje efficiënter kan, namelijk in drie keer wegen. Vervolgens worden ze hiermee aan het werk gezet, om ook een strategie bij dit antwoord te kunnen vinden.
- Hier bleven ze mee bezig tot ze aan het werkblad moesten gaan werken. Het lukte hen niet om tot drie keer te komen.
- Je zag tussendoor wel de moed hen in de schoenen zakken, want ze gingen toch op de tafels (die dit keer nog verder van het bord geplaatst waren) zitten. Ze zeiden ook dat ze er niet uit kwamen.
- Opmerking: Vermoedelijk is drie keer wegen ook te moeilijk, er zit namelijk ook een ander principe achter, alleen groep 1 had een vergelijkbare tactiek toegepast en gebruikte een tweetallig stelsel.

Werken aan het werkblad

- Ondanks dat nog niemand ontdekt heeft hoe het probleem met drie keer wegen kan worden opgelost, besloot de docent ongeveer om 40/60 min alle leerlingen aan het werkblad te laten werken en daarop hun beste oplossing tot dan toe te presenteren.
- De leerlingen gaan niet per se in de eerder gevormde groepjes zitten, maar gaan ook bij elkaar zitten. Dit ontstond waarschijnlijk omdat er nu, in tegenstelling tot de vorige iteratie, een centraal moment was waarop werd overgegaan op het werkblad. Hierdoor zitten er twee leerlingen alleen. Een van de 'nieuwe' groepjes is vermoedelijk daardoor minder ver gekomen met het werkblad, want ze waren ook aan het kletsen. Bij twee andere groepjes leek dit ook het geval, maar ze bleken op een enthousiaste manier wel elkaars oplossingen te bespreken.
- Vervolgens verliep de leerling-activiteit wisselend. Het bleek over het algemeen weer een uitdaging om de gevonden oplossingen netjes op te schrijven.
- De docent liep rond om de leerlingen met het werkblad te helpen waar dat nodig was. Wanneer er iets zinnigs werd gezegd als antwoord op opgave twee bevestigde de docent hen dat dit inderdaad iets is dat waardevol is om op te schrijven, om de leerlingen alvast te helpen met betekenis te geven aan goede antwoorden. Ze zijn onzeker over de waarde van hun antwoorden en schrijven dit daarom ook maar niet op. Hier volgt een beschrijving van de bevindingen bij elke 'nieuwe' groep.

– Groep A: bestaande uit leerlingen van groep 4 en 6.

- * Vooral bij deze groep was er veel onzekerheid te merken en onduidelijkheid over de antwoorden op opgave 2. Het bedenken van mogelijke antwoorden was hierbij niet zo zeer het probleem, wel dat het net een te grote drempel was om dit op te schrijven. Hierbij moet je je realiseren dat het daadwerkelijke een waardevol en nuttig antwoord is en dat is lastig. Wanneer een leerling in het gesprek met de docent zei dat het bij dit probleem van belang is om je te realiseren of de valse munt zwaarder of lichter is, bevestigde de docent dat dit een prima antwoord kan zijn. Vervolgens schreef deze leerling dit op.
- * Over de hulpvragen zeiden ze dat ze vooral "Wat ging er goed?" een open deur vonden, omdat je kan zeggen dat je het probleem hebt opgelost. Hierbij vertelde de docent dat het beantwoorden van deze vraag juist bedoeld is om je te helpen een oplossing op een moeilijkere vraag te kunnen vinden. Dit kon deze leerling (uit groep 6) wel begrijpen, want het bleef alsnog niet lukken om op drie keer wegen te komen en ze hadden daarom wel een hulpmiddel nodig. Maar vermoedelijk vond de leerling het nog wel lastig vond te begrijpen hoe dit dan een hulpmiddel kon zijn. Vervolgens startte juist deze vraag over wat er goed ging vervolgens wel het gesprek tussen de leerlingen onderling over de aanpak van de vraag. Dit ging over of het nu wel of niet kon om met zes munten aan iedere kant te starten. De leerling waar oorspronkelijk de vraag aan werd gesteld,

zei namelijk dat het logisch was, dit niet te doen, omdat het nutteloos is. De leerling die hierop reageerde, stelde dat dit wel kon.

- **Groep B: bestaande uit leerlingen van groep 1 en 2.** Wanneer er naar de antwoorden op opgave twee gevraagd werd gevraagd, startte in deze groep gelijk al het gesprek. Daarbij hadden de leerlingen geen interesse meer hulpvragen van de docent of vragen over de hulpvragen voor de mini-interviews, maar discussieerde volop gezamenlijk over het onderwerp. Hierbij zei een leerling te begrijpen hoe je op drie keer wegen kon komen. Gezamenlijk probeerde ze te achterhalen hoe je daarop kon komen.
- **Groep C: bestaande uit leerlingen van voornamelijk groep 5.** Twee van de vier leerlingen waren nog druk bezig met de eerste opgave en bleven daar voor langere tijd dan de andere groepen aan werken. De andere twee leerlingen hadden wel de gelegenheid om met de docent in gesprek te gaan over opgave 2, ook al hadden ze nog niks opgeschreven. De docent maakte hier de afweging om niet de leerlingen eerst aan opgave 1 te laten werken, maar met hen te praten. Hier is voor gekozen om te voorkomen dat de leerlingen niks zouden blijven doen en op deze manier in ieder geval hen aan het denken te kunnen zetten. Deze leerlingen gaven aan opgave 2 niet zo nuttig te vinden, maar opgave 1 wel. Ze vonden de hulpvragen bij opgave 2 daarom allemaal niet echt nuttig en hebben geen suggesties voor andere vragen.

Overgangen in de les

- De docent vraagt eerst om echt even stilte om van het werkblad over te gaan naar de klassikale bespreking. Dat duurt lang, maar de docent geeft ook aan dat dat normaal is na groepswork. Tussentijds wordt groep B hier ook meermaals individueel op aangesproken. Ditzelfde gebeurde later weer bij de overgang van de klassikale bespreking naar de gallery-walk.
- Achteraf in het nagesprek wat de docent met groep B had, bleek dat ze wel door aan het praten waren over het vergelijken en optimaliseren van hun oplossingsstrategieën. Ze waren het er namelijk nog niet over eens. Het leek dus alsof zij aan het kletsen waren, maar ze waren werkelijk aan het discussiëren over mogelijk efficiëntere oplossingen.
- Mogelijk hebben de gemengde 'nieuwe' groepjes hen er toe aangezet om verschillende oplossingen te vergelijken, aangezien groep 1 en groep 2 oorspronkelijk andere oplossingen hadden bedacht.

Bespreking werkblad vraag 2

- Docent: "Ik ga kijken wat jullie hebben opgeschreven bij vraag 2. 'Leerling ...' zou jij je antwoord willen voorlezen"?
- Leerling ... leest voor: "Nadenken. Money on my mind, toen was ik slim".
- Docent: "Ja, heel goed. Dat is over het algemeen ook wat er gebeurt, als je hard nadenkt kan je slimmer worden. Maar hebben jullie (klas) ook een idee bij het horen van dit antwoord hoe het is aangepakt?"
- Geen reactie.
- Docent: "Hoe kunnen we dit nu specifieker maken"?
- Leerling ...: "Plaatjes erbij maken".
- Docent: "Heel goed, nog meer ideeën? Of heeft iemand nog iets anders opgeschreven"?
- Leerling ...: "Ik heb: Goed. We konden het in één keer het probleem oplossen, want iedere persoon kwam steeds een stap verder".
- Docent: "Goed, jullie hadden een goede samenwerking dus".
- Leerling ...: "..., maar we kwamen op vier. Een tekening maken heeft geholpen".
- Docent: "Heel goed, en ook weer een tekening maken dus. Heeft iemand nog andere aanvullingen over hoe je het probleem precies oplost"?
- Leerling ...: "Ja, je kan er visueel over nadenken." Een andere leerling reageert hier op met: "Ja, maar dat zei ik toch ook al, plaatjes maken" Leerling: "Nee dat bedoel ik niet." Docent: "Oké, wat bedoel je dan wel precies met visueel maken?". Leerling: "Nou, je kan het in je hoofd uitbeelden en over nadenken en dan zo puzzelen hoe je het moet doen." Docent: "Oké, ja dat is wel echt een denkproces in je hoofd".

- Docent: “We kunnen dus concluderen dat opgave twee nog best wel lastig is. Wij gaan er over nadenken hoe we meer specifieke antwoorden meer bij jullie kunnen ontlokken.”
- Het tips kwamen we niet aan toe door tijdgebrek, er waren nog vijf minuten over en om ook nog de inhoud van het probleem aan bod te laten komen en de Gallery-walk moest ook nog gebeuren. Hier waren namelijk nog interessante dingen over te zeggen. Dit was nu meer van belang dan de tips, aangezien de leerlingen toch geen tijd meer hadden om profijt van de tips te hebben en sommige groepjes er nog niet helemaal uit kwamen.

'Gallery-walk'

- Docent zegt veel weegschalen te zien, een leerling reageert hierop dat het toch bij iedereen te zien is.
- Groep 1 vertelt dat ze eerst ook een plaatje hadden van een weegschaal, maar dat dat heeft plaatsgemaakt voor het uitwerken van het stappenplan. En dat de weegschaal later weer teruggekomen is bij het optimaliseren van het antwoord.
- De docent zegt bij groepje 4 iets te zien over open en gesloten bolletjes en vraagt een ander groepje uit te leggen wat hun strategie geweest zou zijn. Een leerling kan dit uitleggen en vervolgens bevestigt een leerling uit groep 4 dit met ongeveer hetzelfde verhaal.
- Bij groep 3 vraagt de docent wat de pijl zou betekenen en een leerling uit een andere groep reageert dat dit staat voor een 'weegstap', wat correct is.
- Bij groep 1 denken een aantal leerlingen dat er elektronen zijn getekend (zie #5 in Figuur M.12) en verder begrijpt niemand wat hiermee bedoeld is. Groep 1 legt uit dat dit zo genoteerd is om de verdeling van de munten in de twee groepen uit elkaar te houden. De docent bevestigt dat dit inderdaad een goede manier is om te zien welke je eerder hebt gewogen. Deze strategie had niemand verder gebruikt.

Iteratie 2.2

Deze les vond plaats op 01-12-2023. Dit is de eerste les van een nieuwe periode aan keuzewerktijd lessen. In deze les zijn er daarom leerlingen aanwezig die er eerder nog niet bij waren en dus nog kennis moeten maken met BTC. Er zijn ongeveer 5 leerlingen aanwezig die er de vorige lessen ook bij waren.

Start van de les

- De docent licht toe hoe BTC werkt en motiveert dit.
- Er wordt vermeld dat er onderzoek wordt gedaan. Daarbij wordt er verteld dat het maken van fouten of het geven van feedback geen negatieve gevolgen voor hen zullen hebben, maar dat dit het onderzoek wel verder helpt.
- Het werkblad wordt vervolgens ongeveer als volgt toegelicht. "Om jullie zo veel mogelijk te helpen met het worden van betere probleemoplossers hebben we ook een werkblad. Daarbij ga je eerst bij vraag 1 wat opschrijven wat je hebt gedaan. Vraag 2 gaat er vooral om hoe je het precies hebt opgelost. Wij focussen ons nu vooral op die vraag 2. Dat is namelijk echt belangrijk om in te investeren om een betere probleemoplosser te worden. Wij proberen jullie daar zoveel mogelijk mee te helpen, met vragen te stellen in leerlingen taal en algemene vragen te stellen, zodat je er altijd antwoord op kunt geven. Maar ook weer niet te algemeen. Antwoorden kunnen bijvoorbeeld zijn het maken van een plaatje of eerst een eenvoudiger probleem oplossen en het steeds een beetje moeilijker maken. En dat dan verder toelichten."
- Vervolgens worden de groepjes gemaakt. Tegelijkertijd legt de docent uit waarom dit op die manier gaat: "Zo hebben jullie het zelf in de hand en hoeft je niet te denken van, de docent zet ons bewust bij elkaar."
- "We beginnen meteen met een uitdagend probleem, maar ik zal eerst nog even de pennen uitdelen, zodat jullie zo gelijk kunnen beginnen".
- Het probleem wordt geïntroduceerd.
- Tot slot zegt de docent: "Het is een lastig probleem, maar jullie zijn knappe koppen. Oh nee dat mag ik niet zeggen, dat blokkeert schijnt. Maar jullie hebben best wat ervaring dus het zal vast lukken!"

Groepswork

Hier volgt een verdere beschrijving van de groepsprocessen en andere opvallende momenten die vervolgens tijdens het groepswork plaatsvonden.

Groep 1

- Deze leerlingen hebben het direct over gelijkvormige driehoeken en maken een kleine situatieschets.
- Uit de situatieschets stellen gelijk een formule op voor het bepalen van de optimale route.
- Later gaan ze helemaal op in de algebra. Wanneer de docent vraagt wat ze aan het doen zijn zeggen ze dat ze de formule mooi willen opschrijven. Vervolgens vraagt de docent waarom ze dat willen doen. Hierop antwoorden ze dat ze het antwoord al hebben. Hiermee bedoelen ze dat ze weten wat ze moeten doen om tot de uiteindelijke oplossing te komen. Ze lichten toe dat ze de formule mooi willen opschrijven om deze te kunnen differentiëren. Hierbij hebben ze nog niet gedacht of in ieder geval het nog niet gehad over de grafische rekenmachine.
- Uiteindelijk gebruiken ze toch de grafische rekenmachine om tot de optimale oplossing te komen.
- Tot slot schrijven ze de betekenis van de door hun gevonden waarde uit, waarmee de oplossing compleet is.
- **Opmerking: een goede reflectie voor deze leerlingen zou zijn dat het sneller is om de gevonden formule zonder het herschrijven met de grafische rekenmachine te stoppen, aangezien dit voor de rekenmachine niet uit maakt.**

Groep 2

- Aan het begin van het groepswork werd er even kennis gemaakt. Zeker twee leerlingen kenden elkaar namelijk nog niet. Gekeken naar de manier van samenwerken wat hier later verder niks van te merken.

- Ze tekenen de situatie uit en berekenen alle onbekende schuine zijdes. Vervolgens berekenen ze de tijd bij een bepaalde route.
- Later berekenen ze de snelheid van een andere route. **Toch zijn ze er nog niet over uit hoe ze de optimale oplossing kunnen vinden.**
- **Op een bepaald moment zien ze bij groep 1 dat ze een formule hebben opgesteld. Een leerling is daar enthousiast over en neemt de formule over op hun eigen bord.**
- **Twee van de drie leerlingen proberen vervolgens te achterhalen wat de termen in de formule betekenen en waar ze vandaar komen. De derde leerling interesseert zich daar minder voor en vraagt aan de andere twee of een van hun wel een grafische rekenmachine mee heeft. Hij wil hem namelijk invullen om de "formule op te lossen".**
- Wanneer ze een grafische rekenmachine hebben voert een leerling de formule in, maar niet in het formulescherm. Hier geeft een andere leerling feedback op, maar de leerling die de formule invoerde lijkt dit niet te begrijpen waarom en wat de volgende stap zal zijn.
- Vervolgens voeren ze een discussie over of het minimum of maximum moeten vinden. Daar gaan ze toch wederom weer naar de betekenis van de formule kijken.

Groep 3

- Eerst zeggen de leerlingen dat de optimale route de kortste is. Later bedenken ze pas dat dit ook met de snelheid van de strandwacht te maken heeft.
- Na enige tijd hebben deze leerlingen de snelheid van twee route opties bepaald en concluderen dat de snelste de optimale route is.
- Dit wordt uitgelegd aan de docent, waarop hij de vraag stelt of ze er nu zeker van zijn of er niet nog een andere route sneller kan zijn dan degene die ze nu gevonden hebben.
- Vervolgens berekenen de leerlingen de snelheid van de route die tussen de andere twee routes ligt. Ze trekken nu een conclusie gebaseerd op deze drie snelheden.
- **Na het tussentijds consolideren is het duidelijk voor de leerlingen dat ze een andere route moeten zoeken, door de 'x-waarde' te variëren.** Echter lopen ze hier op vast.
- **Later nemen ze wel de formule van groep 4 over, aangezien groep 2 ook een formule van groep 1 had overgenomen. Groepen 2 en 3 hebben het er nog over of dit nu wel of niet mag. Groep 3 probeert de formule van groep 4 alleen niet te herleiden, wat groep 2 wel deed.**

Groep 4

- In het begin maken deze leerlingen een plaatje van de betekenis van alle gegeven afstanden en bedenken twee route opties.
- Wanneer ze er achter komen dat ze de optimale route moeten vinden, proberen ze een formule op te stellen.
- **Ze hebben moeite met het kiezen van een geschikt assenstelsel. Ze vinden het lastig waar je dit positioneert, omdat dit vervolgens kan betekenen dat de 'y-waarden' op sommige plekken negatief worden.**
- Daarnaast zoeken ze meer informatie over de driehoeken. Hierbij werken ze soms samen met groep 4.
- Deze groep bestaat enkel uit 2 leerlingen. Waarschijnlijk is het voor deze groep daarom extra moeilijk. Een van de twee haakt soms af of vind het lastig om alle denkstappen van de andere leerling bij te houden.
- **De leerlingen proberen meerdere posities van assenstelsel en nemen na het 'tussentijds consolideren' de configuratie van groep 1 over. Op basis daarvan lukt het de leerlingen wel om de formule op te stellen. Echter maken ze net als groep 1 een fout in de volgorde van het delen.**

Groep 5

- Deze groep is een groot deel van de tijd kwijt met het berekenen van alle benodigde afstanden.
- Later berekenen ze ook de snelheid van drie gekozen routes.
- Vervolgens proberen ze de optimale route te vinden door naar de geometrie van de driehoeken te kijken. Ze proberen de relaties tussen de twee driehoeken te ontdekken, maar kunnen niks vinden. Het plan is wel om op basis van die informatie een formule op te stellen.

- Tussendoor leggen ze ook de link met de formule voor afstand, tijd en snelheid.
- Uiteindelijk lukt het de leerlingen niet om een logische formule op te stellen waarmee ze het probleem zouden kunnen oplossen.

Tussentijds consolideren

- Tussendoor legt de docent het samenwerken even stil en wordt er centraal door hem wat gezegd.
- Op dit moment is groep 1 al bezig met het vereenvoudigen van hun formule voor de routetijd. De groepen 2, 3 en 5 hebben de routetijden van twee routes berekend en geconcludeerd dat de een beter is dan de ander. Ze zijn nog niet op de optimale oplossing gekomen. Groep 4 heeft wel al bedacht dat het met een formule kan maar zijn op dit moment nog bezig met het bepalen van hoe je een assenstelsel aan het plaatje kan toevoegen. Groep 5 is ook bezig met het zoeken naar een formule en overlegt af en toe met groep 3 hierover.
- De docent vertelt dat deze les een snelkookpan is voor het probleemoplossen en dat we voor een probleem maar één les gebruiken. Daarom wil hij iedereen even stimuleren met een zetje in de goede richting voor het oplossen van het probleem.
- De docent begint met een uitleg over de formule voor afstand, tijd en snelheid. Hiervoor maakt hij een notitie op het werk van groep 2, zie rechtsboven in Figuur M.19.
- Hij vertelt vervolgens wat hij heeft gezien bij alle verschillende groepjes en zegt dat dit goed is, maar wel efficiënter kan. Hiervoor laat hij een leerling uit groepje 1 hun inzichten bij het gemaakte plaatje illustreren. De leerling moet het plaatje nog eens tekenen, maar dan groter. Vervolgens moet hij ook uitleggen wat het betekent en wat hij ermee gedaan heeft.
- De leerling doet twee keer over het maken van een goed plaatje. Het eerste plaatje vond de docent niet duidelijk genoeg voor de andere leerlingen. Bij het eerste plaatje is het namelijk nog niet duidelijk dat de schuine zijdes van de twee driehoeken niet op één lijn liggen. Vervolgens vertelt de leerling ook wat hij x heeft genoemd en dat je zoekt naar de juiste is voor de kortste tijd.
- Hoewel de uitleg van de leerling wat rommelig verliep en enigszins lang duurde, was hier wel veel aandacht voor door de andere leerlingen. Vermoedelijk omdat ze graag verder wilde komen met het oplossen en deze informatie daarom echt nodig hadden.

'Gallery-walk'

- De docent merkt op dat vrijwel alle leerlingen bezig zijn geweest met het opstellen van een formule voor het vinden van de optimale 'x-waarde'. Wel merkt hij op dat er twee verschillende versies zijn ontstaan. Het verschil zit in de volgorde van het delen. Hier discussiëren de leerlingen met elkaar over.
- Vervolgens licht de docent de afstand, tijd, snelheid formule nog eens toe. Ook introduceert hij de dimensie-analyse en noteert hier links op het bord van groep 2 iets over, zie Figuur M.19.
- Wanneer de docent wil concluderen welke volgorde van de formule volgens hem nu correct is, raakt hij ook even in verwarring. Hij voert daarom de dimensie analyse achter de formule die groep 3 had opgeschreven uit, zie Figuur M.20. Dit wordt met de leerlingen besproken. Vervolgens concluderen ze samen dat dit de goede versie moet zijn.
- Daarna heeft de docent het met de leerlingen over hoe ze aan de formules zijn gekomen. Naast de afleiding ervan hebben ze het er over dat groep 2 en groep 3 een formule hebben overgenomen van een andere groep. Hierbij benadrukt de docent dat dat geen probleem is, maar dat het wel belangrijk is om de betekenis te achterhalen. Je kon zien dat groep 2 dat had geprobeerd de betekenis van de termen te achterhalen, de volgorde van de bewerkingen te verifiëren/heruitvinden en daar verwijst de docent ook naar. De docent zegt dat je het dan 'goed jatten' kan noemen.
- Groep 3 was er niet aan toe gekomen om de betekenis van de 'gejatte' formule te achterhalen. Wel merkt de docent op welke verschillende dingen ze gedaan hebben en dat ze daardoor meer gevoel hebben gekregen bij het probleem. Vervolgens zegt de docent dat dat allemaal goede stappen zijn in de richting van het vinden van de oplossing: het uitwerken van voorbeelden en het toepassen van verschillende strategieën.
- Verder zegt de docent dat dit inderdaad een moeilijk probleem bleek te zijn, voornamelijk voor de havoleerlingen. Zij hebben namelijk nog geen differentiëren gehad.

- Wederom is er veel aandacht voor deze 'gallery-walk'. Waarschijnlijk omdat de leerlingen graag willen weten of ze het goed hebben gedaan (bijvoorbeeld of zij de goede volgorde in de formule hadden) en wat uiteindelijk het antwoord is. Dat laatste vroegen namelijk veel leerlingen na de les nog expliciet.

Iteratie 2.3

Deze les vond plaats op 08-12-2023.

Start van de les

- De docent vertelt dat de tafels nu nog efficiënter aan de kant zijn gezet zodat er meer ruimte is rond de whiteboards. Zo kan iedereen "makkelijker actief denken".
- Verder vertelt de docent dat de leerlingen vorige les gemerkt hadden dat er foto's van de whiteboards gemaakt worden. Hij zegt daarbij: "Deze foto's zijn er niet per se voor om jullie te controleren of te beoordelen, maar voornamelijk voor ons om de les te kunnen verbeteren."
- Vervolgens herhaalt de docent de mooiste leerpunten uit de vorige les: "Jullie hadden ook veel discussie en overleg gevoerd, dat is heel goed! Daarnaast hadden we gezien dat je een dimensie-analyse kan doen .." Vervolgens licht de docent dit toe aan de hand van de eenheid 1/s. Daarna vervolgt hij zijn praatje: "Ook hadden we gezien dat sommige groepjes een formule hadden overgenomen van een andere groep en die gingen ontcijferen, heel slim. Dat zijn allemaal kleine voorbeeldjes wat erg leuk was om te zien."
- De groepen worden gemaakt, de stiften uitgedeeld en het probleem geïntroduceerd.
- Na de introductie van het probleem licht de docent toe dat je waarschijnlijk niet direct een praktisch nut van dit probleem in zult zien, maar dat dat soms later wel kan komen. Hierbij noemt hij het voorbeeld van Euler met de coderingstheorie, waar pas later een toepassing voor is gevonden zodat we nu kunnen pinnen.

Groepswork

Hier volgt een verdere beschrijving van de groepsprocessen en andere opvallende momenten die vervolgens tijdens het groepswork plaatsvonden.

Groep 1

- Ze maken een getallenlijn van 1 t/m 10. Naar aanleiding van de eerste keer tussendoor consolideren proberen ze met een schema te achterhalen wat er met 10 kluisjes zou gebeuren. Ze gebruiken '0' als symbool voor 'open' en '1' als symbool voor 'dicht'.
- Een leerling zegt: "Ja, het antwoord is dus gewoon dit, maar dan 100 keer achter elkaar."
- Na de tweede keer tussendoor consolideren, zegt die leerling: "Ja, nu moeten we er meer, het maakt dus wel echt uit".
- Ze maken een nieuwe getallenlijn, 0 t/m 28, en proberen te achterhalen wat er daar mee gebeurt.
- Een leerling zegt: "Ik zie hier geen patroon in hoor!"

Groep 2

- Deze groep begint ook met een getallenlijn van 1 t/m 10. Ze kiezen voor een onoverzichtelijke combinatie van symbolen, namelijk 'o' voor 'open' en 'd' voor 'dicht'. Wel zijn ze eerder dan groepje 1 met het opstellen van een dergelijk schema.
- Ze komen als tweede groepje op het begrip priemgetallen. Mogelijk hadden ze dit van groep 3 gehoord. De docent vraagt een leerling daarom hoe ze daar op gekomen zijn en waarom dit relevant is. De leerling antwoordt: "Je skipt dingen, dus daar moest ik als eerste aan denken toen ik dit hoorde".
- Na het tussendoor consolideren vragen de leerlingen aan de docent om een groter bord, want dan zeggen ze wel om het op te kunnen lossen.
- Later zeggen de leerlingen de oplossing gevonden te hebben en schrijven dit in drie regels op het bord. Dit proberen ze aan elkaar uit te leggen. Een leerling zegt hierbij: "Is het aantal priemfactoren even dan eindigt het kluisje open, bij oneven dicht." Het lijkt er op dat een leerling de andere twee niet kan volgen en maar delen van de uitleg begrijpt.
- Ze proberen nu te achterhalen hoe ze efficiënt voor elk getal van 1 t/m 1000 dit kunnen bepalen. Ze brainstormen hierover waarbij een leerling een 'sigma-notatie' suggereert en een andere leerling heeft het over 'verzamelingen'. Toch weten ze deze genoemde begrippen niet helemaal binnen de probleemsituatie te plaatsen.

- De docent heeft door waar de leerlingen mee bezig zijn en vraagt hen of het misschien tijd is om de door hun gevonden oplossing op te schrijven op het werkblad.
- Vervolgens volgt er een gesprek met de docent over hoe je alle uitkomsten handmatig kunt vinden en of het met de computer misschien niet sneller kan. De leerlingen concluderen dat dit handmatig echt niet sneller kan dan hoe ze nu bezig zijn. Een leerling zegt: "Het kan sowieso met python en coderen".
- Daarna gaan de leerlingen toch aan de tafels zitten om met het werkblad aan de slag te gaan.
- Tijdens het werken met het werkblad gebeuren er bij elke leerling andere dingen.
 - De leerling die de uitleg niet kon volgen is alleen gaan zitten. Hij is vervolgens voornamelijk bezig met het bestuderen van het voorbeeld werkblad. Het lukt hem niet om iets van de oplossing van het probleem te noteren bij de eerste opgave. Wel heeft hij als enige een fout in de oplossing van het voorbeeld ontdekt. (Dit was een typefout, ergens stond er '50', wat '40' moest zijn.) Hij had hier dus wel aandachtig naar gekeken, ondanks dat het andere probleem voor hem op dat moment te moeilijk was om mee verder te gaan.
 - De andere twee leerlingen zitten bij elkaar. Hiervan is een leerling druk bezig met de eerste opgave van het werkblad, terwijl de andere leerling blijft nadenken over hoe je de oplossing van het probleem zou kunnen programmeren. Deze andere leerling heeft niks op het werkblad gedaan en heeft deze ook niet ingeleverd. Ze kijken kort naar de vragenkaart, maar laten die verder voor wat het is en bespreken samen het programmeervraagstuk. Later gaat de docent hier wederom over in gesprek met deze twee leerlingen.

Groep 3

- Deze groep komt als eerste op het begrip 'priemgetallen'. Waarschijnlijk inspireren ze groep 2 hiermee, want deze groep komt bij hen kijken en ze voeren hier ook kort overleg over.
- Vervolgens zijn de leerlingen druk bezig met het opschrijven van alle priemgetallen die tussen 1 en 1000 liggen, wat ze op het internet hebben gevonden.
- Ze zeggen als eerste de oplossing gevonden te hebben, want al deze kluisjes zullen open blijven. Dit is nog niet de volledige oplossing. De docent reageert hier op dat dit klopt, maar dat de volledige uitkomst een beetje meer is dan enkel deze kluisjes.
- De rest van de les schrijven ze niet veel meer op het whiteboard.

Groep 4

- Deze groep komt lastig op gang. In het begin wordt er weinig gepraat.
- Later wordt er toch een klein beetje overleg gevoerd over het probleem.
- Een leerling uit groep 3 komt iets vertellen, waarna de leerlingen iets meer met elkaar gaan overleggen.
- Na een kwartier hebben deze leerlingen nog niks opgeschreven. De docent maakt hierover een grapje: "Hebben jullie smetvrees?"
- Ze schrijven de getallen 1 t/m 29 onder elkaar. En voeren weer wat overleg.
- Ze blijken er nog niet helemaal uit te komen en lopen vast. De docent verwijst daarom één leerling van deze groep naar groep 1 en een ander naar groep 2 om wat inspiratie op te doen. Dit doen ze ook.
- Later, maar voor het tussentijds consolideren, komen ze tot de conclusie dat de kluisjes met een priemgetal als nummer uiteindelijk open zullen staan. Dit is nog niet de volledige oplossing. Ze vragen aan groep 3 hoeveel priemgetallen er zijn tussen de 1 en de 1000. Groep 3 is namelijk op dat moment alle priemgetallen aan het opschrijven, maar groep 4 vindt dat verder niet zo van belang. Groep 3 vertelt dat dit er 168 zijn en groep 4 formuleert hun antwoord op het bord: "168 kluisjes open".
- Wanneer de docent langskomt bij groep 3 en hen vertelt dat er meer kluisjes open zullen zijn, schrijft een leerling uit groep 4 het woord 'minimaal' achter hun antwoord.

Tussentijds consolideren

Tijdens de les leek de voortgang van de leerlingen wat betreft hun inzicht in het probleem beperkt te zijn. Er is er daarom voor gekozen meermaals tussentijds te consolideren. Op dit moment in de les werd er geacht dat dit geen belemmering zou zijn voor het later werken met de vragenkaart, maar dat dit juist essentieel was. Leerlingen moeten eerst meer inzicht in het probleem verkrijgen om er over te kunnen praten. Ook dat praten verliep bij sommige groepen stroef tijdens het eerdere groepswork..

Tijdens de eerste ronde van tussentijds consolideren is er aandacht gevestigd op het noteren van het aantal veranderingen zoals bij groep 2. Leerlingen uit andere groepen wordt gevraagd te vertellen wat ze hier zien, al blijken ze dit lastig te kunnen verwoorden. Uiteindelijk formuleert de docent samen met de leerlingen het voorbeeld: "Kluisje vier heeft 3 leerlingen die het veranderen dus die blijft dicht". Vervolgens wordt er de nadruk gelegd op dat de groepen 1 en 2 eerst tien kluisjes hebben bekeken en de groepen 3 en 4 al gelijk naar het grote plaatje hebben proberen te kijken. Voor het schema van de groepen 2 legt de docent uit dat het lastig is om dit uit te breiden naar bijvoorbeeld honderd kluisjes. Hij sluit af met de opmerking dat je dus het aantal veranderingen moet tellen, dus bij bijvoorbeeld kluisje vijf veranderd de eerste leerling en de zesde leerling en bij kluisje zeven de eerste leerling en de zevende leerling. Hij concludeert dat volgens hem iedereen op het goede spoor zit en wil de leerlingen daarom verder met rust laten.

Kort daarna wordt er nog een keer tussentijds geconsolideerd. Hier volgen een aantal aantekeningen daarover. Na deze bespreking krijgen de leerlingen kort de tijd om verder te werken aan het probleem op de whiteboards, daarna gaan ze aan de slag met het werkblad.

- Hierbij zegt de docent dat groepje 1 in een soort tussenfase zit en door middel van verschillende soorten lijstjes probeert verder te komen naar de 1000 kluisjes.
- Vervolgens vraagt hij aan een cognitief sterke leerling uit groepje 2 om uit te leggen wat zijn idee is. Dit vindt hij lastig, waarschijnlijk omdat hij dit algemeen wil formuleren: "Als je een random getal hebt, noem er eens een? Uhh, bijvoorbeeld tien. Bij tien is het vier, dus dan open. ... Uhhm nee ...". De docent helpt de leerling met het gestructureerd verwoorden van de uitleg van de leerling en schrijft in het rood op het bord wat er wordt gezegd.
- Aan een andere leerling uit deze groep wordt gevraagd wat er van belang is aan deze uitleg. Deze leerling zegt: "Alle getallen waardoor je kan delen en het geen breuk wordt."
- Later gaat het klassikale gesprek er over dat je kan hebben $20=1 \times 2 \times 5 \times 2$, maar ook $20=1 \times 10 \times 2$, zolang je maar onder het getal blijft. Dit is dus lastig te doen voor t/m 1000. De docent licht toe dat dit misschien ambitieus is voor in deze les. Wel benadrukt hij het belang dat het duidelijk moet zijn dat je deze theorie kan uitbreiden.

Werkblad + vragenkaart

- Doordat het voorgaande deel van de les wat traag verliep, is er nog maar tien minuten over voor dit onderdeel van de les.
- De leerlingen worden toch vrij gelaten om te gaan zitten waar ze willen zitten. Sommige leerlingen zaten namelijk al en om de voortgang van de les niet te verstoren, (wat van belang was aangezien er nog maar weinig tijd over was), werd hier verder niet moeilijk over gedaan door de docent.
- Wel zegt de docent dat de eerste opgave in stilte gemaakt moet worden. Wederom om de voortgang van de leerlingen op het werkblad niet te beperken. Later met de vragenkaart mag er wel gepraat worden.
- Na met wat leerlingen gesproken te hebben blijkt het zo te zijn dat leerlingen opgave 1 ook erg moeilijk vinden, omdat ze niet weten wat ze moeten opschrijven. Er is namelijk bij veel leerlingen geen eenduidig eindantwoord of statement gevonden als oplossing op de vraag. Ook verwijzen ze naar dat de docent had gezegd dat tot en met 1000 niet te doen is met de hand. De leerlingen die eerder bij de lessen waren geweest lukt het gemakkelijker om iets op te schrijven.
- Het blijkt dat het de leerlingen langer duurt dan in andere lessen om opgave 1 te voltooien. Dit komt doordat de meeste leerlingen meer tijd nodig hebben om het werkblad, het voorbeeld en de vragenkaart te bestuderen. Dit is ook logisch, aangezien de meeste leerlingen nog niet eerder met het werkblad hebben gewerkt. Hierdoor hebben maar twee groepen een beperkt aantal minuten de tijd om gesprekken met elkaar te voeren. Daarnaast lijken niet alle leerlingen door te hebben hoe het basisprobleem moet worden opgelost, waardoor het meer tijd kost hier iets over op te schrijven. Ook lijkt de energie van de leerlingen een beetje op te zijn in dit deel van de les.

- In een van de groepen waar de vragenkaart werd gebruikt stelde één leerling de vragen en de anderen gaven kort antwoord. Ze probeerde wel alle vragen te beantwoorden. Het werd zo meer als een afvinklijst voor een interview gebruikt dan als impuls voor een gesprek.
- In de andere groep waar de vragenkaart werd gebruikt zorgt de eerste vraag er voor dat de leerlingen naar de andere borden van de andere groepen gingen kijken. Een leerling probeerde te benoemen wat hij zag. Wanneer dit niet lukte, stopte dit gesprek al snel. Daarnaast werd er in deze groep gekletst. Er was ook niet veel tijd meer over hiervoor, aangezien deze leerlingen lang bezig waren met de eerste opgave.

Afsluiting

- De docent wil tot slot nog klassikaal horen wat de leerlingen voor antwoorden hebben opgeschreven. Er worden kort twee antwoorden van leerlingen besproken, er wordt doorgevraagd, samen nagedacht over verbeteringen en de nut van de antwoorden wordt geëvalueerd.
- Een leerling heeft als antwoord: "Opschrijven moet je je groepje laten doen." De docent: "Dus je moet zelf niks doen?" Leerling: "Nee, dan kan jij denken. Dat wordt in het echte leven ook gedaan toch." Docent concludeert dat er een verschil bestaat tussen denkwerk en arbeid.

Iteratie 2.4

Deze les vond plaats op 01-12-2023.

Start van de les

- Voordat de docent de les opstart zijn twee leerlingen met elkaar in gesprek gegaan over het probleem uit de vorige les. Een van de twee leerlingen was er toen namelijk niet en was benieuwd welk probleem er in die les centraal stond.
- De docent vertelt het algemene verloop van de les. Hierbij zegt hij dat de leerlingen eerder al de vragenkaart hadden gezien, maar dat hier niet veel tijd en energie voor over was de vorige les. Vervolgens zegt hij dat daarom er deze les er na het oplossen van het probleem alleen gewerkt gaat worden met de vragenkaart.
- De groepen worden gemaakt, de stiften uitgedeeld en het probleem geïntroduceerd.

Groepswerk

Hier volgt een verdere beschrijving van de groepsprocessen en andere opvallende momenten die vervolgens tijdens het groepswerk plaatsvonden.

Groep 1

- Deze groep begint redelijk snel te praten over de invloed van even en oneven getallen op dit probleem.
- Ze vinden redelijk snel de oplossing van het basisprobleem en gaan uit zichzelf andere stapelgroottes oplossen.
- Later wordt er door de docent gevraagd of ze hun oplossing algemeen kunnen opschrijven en daarna een moeilijker probleem kunnen bedenken.
- Dit is toevallig dezelfde groepsamenstelling als groep 2 uit de vorige iteratie. Toen liep de samenwerking tussen een leerling en de andere twee ook al niet lekker. Wederom haakt de ene leerling soms af. De docent merkt dit en zorgt dat hij weer betrokken wordt bij het groepsproces door hem de stift te geven.
- Later controleert de docent of de leerling die soms afhaakt ook de oplossing begrijpt. Dit blijkt het geval te zijn, aangezien hij het antwoord net zo goed kan uitleggen als de andere twee leerlingen.
- Later is vooral een van de twee andere leerlingen druk bezig met het zoeken naar moeilijkere gerelateerde problemen en om deze op te lossen.

Groep 2

- De leerlingen zeggen zelf een 'z-boom' schema gemaakt te hebben. Daaruit hebben ze de conclusie getrokken dat bij even getallen de speler twee wint.
- De docent reageert hier op door enkel te zeggen: "Ik blijf even denken over het 'even'". Hierdoor realiseren de leerlingen zich dat hun oplossing niet per se goed is. Samen proberen ze te ontdekken waar hun tekortkoming in zit en proberen hun antwoord te herformuleren.
- Uiteindelijk komen ze net voordat de tijd om is op een goede formulering uit.
- In deze groep waren ook vooral twee leerlingen aan het zichtbaar aan het werk, de derde haakte soms af. Dit gaat om een leerling die dit vaker doet, maar soms toch kritische opmerkingen kan maken (zoals ook eerder als is beschreven).

Groep 3

- Een leerling zegt dit probleem ongeveer te kennen. De docent zegt dat hij er daarom zijn groepsleden goed kan helpen met het vinden van de oplossing, zonder dit voor te zeggen.
- Deze groep leerlingen proberen alle versies van de spelverlopen op te schrijven.
- Deze groep leerlingen is het eerst achter de oplossing van het basisprobleem gekomen.
- Ze concluderen dat als het aantal chipjes deelbaar is door vier dat dan speler 2 wint.
- Later zijn de leerlingen ook bezig met de situatie als je maar 1, 3 of 4 chipjes mag pakken. Dit hebben ze waarschijnlijk bedacht door de suggestie van de docent voor uitbreidingsmogelijkheden bij groepje 4.
- Ze proberen naar een algemene oplossing te zoeken door middel van de term ' $N+1$ ', maar zijn het hier nog niet allemaal over eens.

Groep 4

- Deze groep komt er snel uit bij 8 chipjes.
- De docent vraagt hen vervolgens om het bij 21 chipjes op te lossen, maar het kwartje valt nog niet direct in die situatie. Een leerling zegt hierbij: "Ja, we moeten het patroon zoeken." De ander zegt vervolgens: "Ja, het is om de vier". Even later komen ze er uit door dit te tekenen.
- De docent geeft hun vervolgens de opdracht om dit bij 156 chipjes te doen, in de hoop dat ze nu het patroon beter doorzien en niet alles hoeven te tekenen. Vervolgens gaat er een leerling toch enthousiast aan de slag met het tekenen van 156 streepjes, terwijl de ander wederom bezig is de logica achter het patroon te zoeken.
- Later voeren de twee leerlingen overleg en concluderen samen dat in de situatie van 156 chipjes de tweede speler wint.
- De leerling die aan het tekenen was geweest werd gevraagd wat hij nu uiteindelijk van zijn aanpak vond ten opzichte van die van de andere leerling in zijn groep. Hierop zegt lachend hij dat hij dit deed om de theorie van de ander te kunnen bewijzen. Ook al leek het zo te zijn dat hij het gewoon eigenlijk leuk vond om lekker te tekenen op het bord, kon hij dit toch mooi beargumenteren.
- Uiteindelijk is de conclusie van de groep dat als je als tweede begint je altijd wint. Dit klopt alleen niet met hun eerdere bevinding bij een stapel van 21 chipjes. Het kwartje is waarschijnlijk nog niet helemaal gevallen bij deze leerlingen of dit ging enkel een bepaald aantal chipjes.

Groep 5

- Deze groep bestaat uit enkel twee leerlingen.
- Deze leerlingen komen lastig op gang en hebben moeite met het begrijpen van de inhoud van de opdracht.
- Ze vinden het lastig om te zoeken naar een goede aanpak. Later komen ze op gang doordat de docent voorstelt om het spel denkbeeldig met elkaar te spelen.
- De rest van de tijd dat ze hier voor krijgen hebben ze het over verschillende manieren hoe het spel gespeeld kan worden.
- Op basis daarvan ontdekken ze dat wanneer er maar vier chipjes over zijn er altijd hetzelfde gebeurt, dan wint de tweede speler altijd. Dit is een goede tussenoplossing voor het basisprobleem.

Overgang naar de vragenkaart

- In het lesplan stond dat er tussentijds geconsolideerd moest worden om onzekerheid bij de leerlingen weg te nemen. Toch is dit niet gedaan, aangezien er voldoende interactie met de docent geweest is bij alle groepen. De noodzaak hiervoor was daarom kleiner.
- Wanneer de leerling verzocht worden om aan de tafels te gaan zitten zijn er een aantal groepen die liever willen doorwerken. Dit zijn groep 1, 2 en 5. Een leerling uit groep 2 schrijft toch even hun verbeterde antwoord op en een leerling uit groep 1 blijft daarna nog ongeveer 3 minuten bij het bord staan om verder te werken aan meer oplossingen. Groep 5 was nog in gesprek over wat dan hun antwoord zou betekenen voor een stapel van acht chipjes en hadden daardoor nog niet helemaal door dat ze aan de tafels moesten gaan zitten.

Vragenkaart

- De docent voegt toe aan de introductie voor het werken met de vragenkaart dat de leerlingen die misschien even niet praten de vragenkaart erbij kunnen pakken en daarna een nieuwe vraag kunnen stellen. Dit zag je leerlingen later ook doen.
- Samen met de leerlingen is er bedacht hoe de groepen het beste samengesteld konden worden. Dit was praktisch gezien namelijk een uitdaging. Uiteindelijk worden de groepen gevormd zoals hieronder is beschreven. Hierbij is groep 1 toch opgesplitst en is groep B groter dan de andere twee groepen.
- Wanneer de energie een beetje weg begint te zakken worden de werkbladen aan de leerlingen gegeven.

Hier volgt een verdere beschrijving van de groepsprocessen en andere opvallende momenten die vervolgens tijdens het werken met de vragenkaart plaatsvonden.

Groep A: groep 1 en 2

- Deze groep blijft continue praten.
- Voornamelijk twee leerlingen zijn aan het woord. De andere twee leerlingen stellen de vragen.
- Op een bepaald moment hebben de twee leerlingen die voornamelijk aan het praten waren door op een van hun antwoorden op de vraag **wat voor nieuwe inzichten heeft gezorgd**. Een van de twee leerlingen komt uit groep 1 (leerling 1b) en de ander uit groep 2 (leerling 2b). Ze bespreken vervolgens samen wat ze na het basisprobleem nog meer hebben opgelost of kunnen oplossen. Hier blijven ze de rest van de les over praten en wijzen af en toe naar de whiteboards.
- De andere twee leerlingen lijken te zijn afgehaakt.

Groep B: groep 4 en 5

- Deze groep loopt gelijk al vast op de eerste vraag over de verschillende oplossingen. Deze vraag is eigenlijk ook niet relevant voor dit probleem en dat hebben de leerlingen door. De vraag is bedoeld voor een probleem zoals de vip in de woestijn, waarbij je op dezelfde oplossing kan komen op verschillende manieren van het inzetten van de auto's. Bij dit basisprobleem is er duidelijk maar één strategie, je moet als tweede speler zorgen dat de stapel op vier chipjes zal bestaan na zijn beurt. Ze vinden het dan ook een gekke vraag. Het lijkt de leerlingen dan ook te demotiveren, want het duurt even voordat iemand de volgende vraag stelt.
- Vervolgens gaat de volgende vraag die gesteld wordt aan de hand van de vragenkaart over **welke notatievorm er is gebruikt**. Hierbij licht vooral een leerling uit groep 4 hun notatie toe aan de twee leerlingen van groep 5. Er wordt uitgelegd wat de kruisjes en stipjes betekenen, wat het verschil erin is en waarom dat wordt aangegeven. De leerlingen van groep 5 stellen hier vragen over. Uit deze vragen blijkt dat ze de oplossing van het probleem ook nog niet helemaal begrepen hebben. De leerling uit groep 4 doet zijn best uit te leggen, waarna het lijkt te zijn begrepen door ten minste een van de twee leerlingen uit groep 5.

Groep C: groep 1 en 3

- Deze groep bespreekt voornamelijk de vraag welke tactiek er toegepast is. Zij zeggen **dat je het probleem eerst kleiner moet maken**, naar een stapel met vier chipjes. Daarna kan je het groter maken en het probleem oplossen. Tussendoor voeren ze discussie of het nu speler 1 of 2 is die er ook alweer wint en waarom.
- Het bovenstaande vinden de leerlingen het belangrijkste dat er besproken kan worden. Een leerling licht dit toe door te zeggen: "Ja, maar die andere vragen zijn dan eigenlijk niet meer relevant. We hebben alles al gezegd.". Ze zijn dus als eerste klaar met het werken aan de vragenkaart en wisten niet meer wat ze verder konden bespreken.
- Ze gaan vervolgens niet iets anders doen, maar vragen aan de docent wat ze nu kunnen doen. Vervolgens krijgen ze het werkblad om in te vullen.
- Uit zichzelf spreekt een leerling uit deze groep de docent aan om te vertellen dat hij het jammer vindt dat hij nu niet de oplossingen van de andere groepen ziet. Hij mist dus de 'gallery-walk'. Twee andere leerlingen uit deze groep stemmen hier mee in.

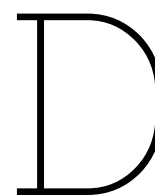
Nabespreking en gelegenheid voor aanvullingen

- De docent krijgt redelijk gelijk de aandacht weer centraal de aandacht.
- De docent vraagt welke vragen geholpen hebben bij het invullen van het werkblad. Hierop reageert een leerling dat de vraag over wat er geleerd is handig is.
- Verder vraagt de docent of leerlingen hun opgedane inzichten willen delen. Hierop reageert een leerling dat je gewoon lijntjes moet tekenen en moet proberen. Een andere leerling vult dit aan door te zeggen dat je eerst moet kijken naar een kleiner probleem, namelijk een stapel van 4 chipjes.

- Ook wordt er gezamenlijk gesproken over de irrelevante vragen. De docent geeft de leerlingen gelijk dat de vraag over verschillende oplossingen niet relevant is bij dit probleem, aangezien dit een probleem is waarbij iedereen uiteindelijk dezelfde oplossing vindt en op een soortgelijke manier. Toch haalt hij het probleem over de vip in de woestijn aan, waarbij je op verschillende manieren dezelfde afstand kunt afleggen. Hij vertelt dat het bij een soortgelijk probleem interessant kan zijn om te deze verschillende manieren te analyseren.
- Tijdens deze bespreking schrijft een leerling al dingen erbij op haar werkblad, zonder dat de docent dit expliciet heeft gevraagd.

Afsluiting

- Uiteindelijk is er toch nog een snelle gallery-walk gedaan. Dit duurde ongeveer vier minuten. Hierbij werd er vooral ingegaan op de verschillende notaties van de leerlingen.
- Daarna hadden de leerlingen nog ongeveer twee minuten om hun werkblad aan te vullen. Op dit moment werd dit echter enkel door één persoon gedaan. Vermoedelijk had dit te maken met dat de leerlingen weg wilde omdat de les bijna voorbij was.
- Na afloop van de les bleven er nog twee leerlingen langer in het lokaal om te kijken naar het werk van groep 4, dit waren leerlingen uit groep C. Ze waren uit zichzelf gaan ontcijferen hoe de notatievorm groep 4 werkt. Dit waren dan ook de leerlingen die eerder zeiden te missen te zien hoe de andere leerlingen het probleem hadden opgelost.



Observatiepunten en bijbehorende aantekeningen

In deze appendix zijn de observatiepunten die per iteratie als leidraad gebruikt zijn voor de observatieaantekeningen gedurende observaties tijdens de les te vinden. Wanneer het nodig is, wordt er vervolgens de reden van de observatiepunten kort toegelicht. Vervolgens zullen de bijbehorende aantekeningen van de observator in de les worden uiteengezet. Hierbij wordt er met een kleur aangegeven voor welke deelvraag een aantekening voornamelijk relevant is. Voor de eerste deelvraag, over het individueel aantekeningen maken, wordt de kleur **blauw** gebruikt. Voor de tweede deelvraag, over de kenmerken van leerlingreflecties, wordt de kleur **roze** gebruikt. Voor de derde deelvraag, over het consolideren van een les, wordt de kleur **groen** gebruikt. Tot slot wordt voor de vierde deelvraag, over het strategisch inzetten van de ontworpen lesmaterialen, **oranje** gebruikt. Wanneer er geen kleur gegeven is aan een observatieaantekening is deze relevant voor het herontwerpen van het lesplan of het lesmateriaal. In dat geval is dit beschreven in appendix J.

Iteratie 1.1

1. *Gaan de leerlingen met het werkblad aan de slag? Waarom?*

Reden: Is er motivatie om het uit te voeren?

Sommige leerlingen zijn zo klaar, anderen blijven er lang actief aan werken. Een van hen heeft ook aangegeven het zelfstandig werken prettiger te vinden dan in groepsverband. Toch heeft bijna niemand opgave drie gemaakt en gingen leerlingen die eerder klaar waren vervolgens niks doen.

2. *Hoe lang hebben de leerlingen nodig voor het werkblad?*

Reden: Het werken aan het werkblad kan er voor zorgen dat het naar verhouding te lang duurt ten opzichte van het in groepjes actief problemen oplossen. Als dit zo is, heeft het werkblad een remmend effect op het principe van BTC.

Voor mijn gevoel hebben ze er lang over gedaan, ook gezien voor de hoeveelheid dat ze hebben opgeschreven. Vooral ook de groepjes die lang actief bezig waren, voornamelijk 3 en 5, hebben niet per se veel meer opgeschreven. Aangezien ze zich duidelijk wel bezig waren met het werkblad, hebben ze hier waarschijnlijk veel bij moeten denken. Daarnaast kreeg ik ook de indruk dat het overweldigend lang was, vier pagina's en dan ook nog de mogelijkheid om een veel voorbeelden te bekijken. Dit deden overigens maar enkele leerlingen. Misschien ook omdat het te lang was.

3. *Kijken de leerlingen veel terug op het bord?*

Reden: Wellicht lukt het de leerlingen om uit het hoofd om de oplossing te reproduceren. Dat zou een teken zijn dat ze het probleem al voor het werkblad al voldoende begrepen hebben en

het werkblad dus daarvoor geen toevoeging is.

Ja, er wordt veel teruggekeken op het bord. Toch schrijven leerlingen het niet letterlijk over en zijn ze tussendoor bezig met nadenken. Aangenomen omdat ze tussendoor blijven kijken, langzaam schrijven en geen tekenen vertonen dat ze er niet mee bezig zijn.

4. *Gaan de leerlingen wederom met elkaar in gesprek, over zaken rondom het oplossen van het probleem, tijdens het werken aan het werkblad?*

Reden: Dit zou een teken zijn dat het werkblad het overleg tussen leerlingen en daarmee de samenwerking stimuleert.

Dit heb ik niet direct gemerkt, maar van een afstandje leek het er soms wel op.

Iteratie 1.2

1. *Gaat de overgang in de les van het werken op het whiteboard naar het werkblad en eventueel weer terug soepel of veroorzaakt dit te veel vertraging?*

Reden: Hier kan achterhaald worden of het wisselen van staand werken naar zittend werken mogelijk de les te veel verstoort. Daarnaast kan het zijn dat wanneer leerlingen niet direct met het werkblad beginnen dat dit een teken is dat het niet duidelijk is voor leerlingen wat ze moeten doen of dat het niet aantrekkelijk genoeg is om er mee te beginnen.

Na het werken aan de whiteboard is door de docent gestimuleerd om terug te gaan naar het whiteboard om vervolgens daar te werken aan het volgende probleem. Vervolgens vroegen de meeste leerlingen welk probleem ze dan moesten oplossen. Hier werd op gereageerd dat ze er zelf een mochten bedenken, een vergelijkbaar probleem, en als dat niet zou lukken de docent er wel een zou geven. Hier werd verschillend op gereageerd. Groepje 4 werd heel enthousiast en ging gelijk aan de slag. Anderen twijfelde, maar gingen vervolgens wel terug naar het whiteboard. Uiteindelijk stond, op groep 2 na, iedereen een tweede keer bij het whiteboard. Wel ging groep 1 wederom weer zitten en deden niet zo veel meer na het vergelijkbare probleem. Een algemene formule vonden ze in eerste instantie te moeilijk. Hieruit blijkt wel dat het een randvoorwaarde is om dit te laten werken, motivatie is. Dit soort problematiek zal dus zeer waarschijnlijk meer voorkomen als leerlingen niet uit zichzelf voor deze les kiezen.

2. *Hoelang blijven de leerlingen actief bezig met het werkblad? Stoppen ze eerder dan 10 minuten of willen ze langer verder werken?*

Reden: Hiermee kan achterhaald worden of de gegeven tijd voldoende, te lang of te kort is. Bovendien verschaft het inzicht in of het gebruik van het werkblad mogelijk het oorspronkelijke actieve proces belemmert.

Dit verschilt. Sommige leerlingen zijn erg gemotiveerd om hun uitwerkingen heel netjes op te schrijven of dit kost hen meer denkwerk. Het deel dat lijkt te moeten nadenken voor het individueel uitwerken van de oplossing zijn individueel aan het leren, medeleerlingen die dit eenvoudiger lijken te vinden kunnen hierbij niet zo goed helpen. De reactie die er in zo'n geval door een leerling die er moeite mee heeft gegeven is: "ja, maar ik begrijp het wel, alleen is het zelf uitleggen lastig". Het deel dat veel moeite in het heel netjes uitwerken zijn in sommige gevallen ook aantoonbaar aan het leren. Groepje 6 constateerde bijvoorbeeld hierdoor fouten in hun oplossing. Om deze fouten op te lossen bleven ze individueel werken op de werkbladen. Hierin moet je als docent een afweging maken in het stimuleren van individueel werk en samenwerken. In dit geval is er gevraagd om dit op het whiteboard op te gaan lossen en dat deden de leerlingen. Andere leerlingen schrijven sneller en wat korter hun uitwerkingen op. Hier lijken ze minder moeite in te steken. Zij hebben aan maximaal 5 tot 10 minuten voldoende. Hier is het lastig om te constateren of er iets is geleerd, of zij daarvoor langer moesten werken of dat ze het al konden. Hiervoor moeten de werkbladen bekeken worden.

3. *Gaan de leerlingen na het werkblad ook weer actief verder op het whiteboard met het volgende probleem?*

Reden: Hiermee kan worden geconstateerd of het werkblad wel of niet bevorderend is voor de bedachte opbouw in opgaven.

Een deel van de leerlingen gaat na het werken aan het werkblad actief verder op het whiteboard, namelijk groep 4, 5 en 6. Het andere deel doet dit niet actief. Groep 1 heeft weinig motivatie voor het algemene probleem, omdat ze dit te lastig vinden om op te lossen. Groep 2 gaat helemaal niet terug naar het whiteboard omdat zij het lastig vinden en blijven handen bij het werkblad. Groep 3 is niet volledig waargenomen in dit proces.

4. *Kunnen leerlingen elkaars oplossingen uitleggen tijdens de 'gallery-walk'?*

Reden: Hiermee kan geconstateerd worden of deze hogere cognitieve stap, in tegenstelling tot vorige lessen, nu wel lukt bij de leerlingen.

Wat goed werkte was om de leerlingen te vragen om de oplossingen te vergelijken en te vra-

gen wat de overeenkomsten en verschillen waren. Op deze manier werd de drempel om iets te zeggen verlaagd.

5. *Overige observatie opmerkingen.*

Het was lastig om tijdens deze les om tussendoor te controleren of de leerlingen geen fouten maken en of er daadwerkelijk geconvergeerd wordt naar het goede antwoord, zoals Liljedahl stelt als gevolg van 'mobilizing knowlegde' [12]. Dit kwam omdat leerlingen zelf nieuwe problemen bedachten en deze gingen oplossen. Deze oplossingen kan je dan ook niet allemaal voorbereiden. Door de vele groepjes raak je als docent snel het overzicht kwijt.

Iteratie 2.1

1. Worden er nuttige aanvullingen gedaan tijdens de klassikale bespreking?

Reden: Hiermee kan geconstateerd worden dat het onderwijsleergesprek de kwaliteit van de reflectie bij leerlingen positief beïnvloed.

De leerling die het had over 'visueel-denken' had een nuttige aanvulling gedaan op zijn reflectie tijdens de klassikale bespreking. Dit was leerling 6c. De mondelinge uitleg dat hij het in het hoofd heeft uitgebeeld gaf meer betekenis aan zijn antwoord op opgave 2, waarin hij wat situaties heeft uitgebeeld. Met enkel het antwoord op opgave 2 kan je namelijk niet opmaken dat dit een proces is dat hij in zijn hoofd heeft gedaan.

2. Wat vinden leerlingen nuttig aan een reflectie?

Reden: Hiermee kan achterhaald worden wat voor leerlingen van belang is bij een goede reflectie.

Het bespreken van verschillende oplosstrategieën vinden de leerlingen het nuttigst, want dat was het hoofdonderwerp van de gesprekken naar aanleiding van vragen over opgave 2.

3. Past de gekozen timing en de tijdsduur van het klassikale gesprek bij de les? Waarom?

Reden: Een les probleemoplossen met BTC loopt door verschillende factoren, zoals het gekozen probleem en de samenwerking, altijd anders dan je van tevoren zou verwachten. Het daarom de vraag of het klassikaal bespreken van de reflectie op het gekozen moment aansluit bij de rest van de les. Daarnaast is het van belang om te ontdekken hoe lang zo'n bespreking zou moeten duren. Hoe lang vraag je door als docent en wanneer zijn er voldoende goede reflecties besproken.

Doordat het oplossen van het basisprobleem langer duurde dan verwacht is er uiteindelijk centraal overgegaan naar het werkblad en de bespreking. Hier was niet uitgebreid de tijd voor. En het late moment in de les zorgde voor de onderstaande bevindingen.

4. Wat ging er goed tijdens de bespreking en wat kon er beter?

Tijdens de klassikale bespreking kon de concentratie bij de leerlingen beter. Deze was namelijk weg. De bespreking vond ook redelijk aan het eind van de les plaats. Verder is het ook lastig om na groepswork centraal dingen te bespreken. Daarnaast ging het goed dat leerlingen hun antwoorden voorlezen en dat andere leerlingen daar aanvullingen op konden geven of zelfs uit zichzelf er op reageerde. Wel waren er niet veel verschillende dingen genoemd, maar dat ligt waarschijnlijk aan het type probleem.

5. Overige observatie opmerkingen.

- De les bleef steken op het eerste deel. Dit lag aan twee dingen. Ten eerste aan het probleem, waarbij het wellicht te moeilijk was om tot de optimale oplossing van drie keer wegen te komen. De meeste bleven steken op de oplossing van vier keer wegen, een enkeling bij een hoger aantal. Ten tweede ligt het aan de keuze om de leerlingen te laten doorwerken tot zij ook de oplossing tot drie keer wegen hadden gevonden. De combinatie hiervan leidde ertoe dat de leerlingen niet aan het werkblad toekwamen. Wel bleven de leerlingen actief bezig. Zo had het werkblad in ieder geval geen remmende werking op de samenwerkende activiteit op het whiteboard (zoals bij iteratie 1.1). Toch had ervoor gekozen kunnen worden om de leerlingen eerst hun meest optimaal gevonden oplossing op het werkblad te laten uitwerken, voor ze dit verder zouden gaan optimaliseren. Zo had het werkblad mogelijk een stimulerende werking hiervoor gehad en daarmee zou het toch een hulpmiddel zijn voor het oplossen van het basisprobleem.
- Groepje 6 had veel moeite met het formuleren van goede antwoorden opgave 2 op papier. In het basisprobleem vonden zij het ook erg simpel om op vier keer wegen te komen, maar de optimale oplossing van drie keer wegen vinden weer erg lastig. Wanneer ik met hen in gesprek ging hierover, zie groep A, startte dit wel het gesprek en werden er verschillende oplossingsstrategieën gereflecteerd.

- In verschillende groepen werd er dus wel druk gesproken over verschillende oplossstrategieën. Deze gesprekken leken nuttig, maar niet direct het doel van opgave 2. Waarschijnlijk vinden de leerlingen deze gesprekken dan zelf ook nuttig.

Iteratie 2.2

Algemene observatie opmerkingen.

- Wanneer nog (bijna) niemand het probleem heeft opgelost is er meer aandacht voor andermans werk en de centrale besprekingen, omdat ze deze bronnen van informatie nodig hebben om verder te komen. Op deze manier luisteren leerlingen zelfs naar elkaar, waar eerder minder aandacht voor was, zie paragraaf 2.1.
- Het tussentijds consolideren zorgde voor een stimulans in motivatie bij het oplossen, zorgde voor meer aandacht voor elkaars werk en versnelde daarom het oplosproces.
- Ondanks dat dit voor veel leerlingen de eerste les BTC was, was er voldoende motivatie voor het probleemoplossen en het denken. Waarschijnlijk is het een goede keuze geweest om dit proces niet in de weg te staan door de leerlingen te laten werken met een werkblad. Ze hadden het probleem ook nog niet opgelost en hadden nog genoeg te doen. Indien de leerlingen nog voldoende te doen hebben kan het dus een belemmering in het denken voorkomen door niet met het werkblad te werken.

Iteratie 2.3

1. *Maak zo veel mogelijk notulen van wat er wordt gezegd door leerlingen.*

Reden: Hiermee kan geconstateerd worden dat de gesprekken van leerlingen onderling begeleid door de vragenkaart de kwaliteit van de reflectie bij leerlingen positief beïnvloed.

Er wordt niet heel veel gepraat naar aanleiding van de vragenkaart. Enkel een groepje gebruikt dit duidelijk. In dit groepje stelt een leerling de vragen en de andere geven kort antwoord.

2. *Hoe is de sfeer in de groepen leerlingen? Zijn ze rustig en is de situatie bevorderlijk voor leren, of is er onrust?*

Reden: Hiermee kan achterhaald worden of de manier van inzetten met de vragenkaart past binnen deze lessen.

Een groep is uiteen gevallen, waardoor een leerling alleen zit. Ook een andere leerling kiest er voor om alleen te gaan zitten. Verder ontstaat er een samengestelde groep leerlingen van bevriende leerlingen. Deze leerlingen lijken makkelijker met elkaar te praten en praten ook over de vragenkaart en het type probleem. Ze hebben namelijk elkaar wat te vertellen over de ervaringen waar de andere groep niet bij was. Ook leken er zo vrienden bij elkaar te gaan zitten, wat de drempel om te praten ook makkelijker maakte. Nadat ze alle vragen oppervlakkig hebben besproken kletsen ze vervolgens over andere dingen. Dit is dus aan de ene kant bevorderlijk voor het leren, maar het kan ook een belemmering zijn. Twee andere groepen zijn redelijk stil. Waarschijnlijk omdat ze voor het eerst met alle lesmaterialen worden geconfronteerd, maar kort de tijd hebben om dit te bestuderen en omdat de energie op is aan het eind van de les.

3. *Praten leerlingen over zaken gerelateerd aan het oplossen van het probleem of zijn ze afgeleid en praten ze eerder over andere dingen met elkaar?*

Reden: Hiermee kan worden geconstateerd of er genoeg motivatie is voor de leerlingen om de opdracht uit te voeren.

Zie de opmerkingen bij het vorige observatiepunt.

4. *Overige observatie opmerkingen.*

- Doordat de leerlingen zelf mochten kiezen waar ze gingen zitten gingen vrienden bij elkaar zitten en gingen er twee leerlingen alleen zitten. Hierdoor is de verleiding groot om over andere gingen te praten of is er überhaupt geen gelegenheid om te praten. Een van de leerlingen die alleen zat, de persoon die ook geen aansluiting vond bij zijn groepje 2, had ook niks opgeschreven op het werkblad. Er was dus geen individuele leeropbrengst hierdoor. De andere leerling die apart zat, een leerling uit groepje 3, had juist veel opgeschreven. Deze leerling vindt het mogelijk juist prettiger om alleen te werken.
- Er zijn maar weinig gesprekken zijn gevoerd naar aanleiding van de vragenkaart. De antwoorden op opgave 2 en 3 zijn daarom in mindere mate beïnvloed door de vragenkaart. De effectiviteit van deze lesmethode is daarom slecht te beoordelen aan de hand van de ingevulde werkbladen.
- De derde vraag op het werkblad werd moeizaam voorgelezen door de leerling. Het leek er op dat dit te maken had met de formulering van de vraag. Deze was in ieder geval niet gemakkelijk voor de leerlingen.
- Leerlingen minste het zelfvertrouwen om aan de slag te gaan met het werkblad en later de vragenkaart omdat ze de oplossing van het probleem niet allemaal helder voor ogen hadden, ondanks dat dit wel besproken was. Leerlingen zeiden namelijk hierover dat dit probleem niet op te lossen is. Er was ook door geen enkel groepje een duidelijke uitkomst geformuleerd, aangezien het ook niet met de hand op te lossen is.
- Om het werkblad, het voorbeeld en de vragenkaart allemaal in een keer voor het eerst te gebruiken zorgt voor veel oponthoud in de les. Waarschijnlijk is het prettiger voor de leerlingen als er minder lesmaterialen in een keer worden geïntroduceerd.

- In de vorige iteraties is gebleken dat leerlingen gemotiveerd worden om ideeën uit te wisselen, doordat ze horen dat een oplossing efficiënter kan of dat je ook meer kan oplossen. In deze les is er niet duidelijk gewerkt aan een vervolprobleem of zijn er verschillende oplossingsmethodes gevonden. Dit kan mede een reden zijn waarom de motivatie om ideeën uit te wisselen ontbreekt.

Iteratie 2.4

1. *Wordt er daadwerkelijk gewerkt met de vragenkaart, praten ze zelfstandig al over het probleem of gaan leerlingen iets anders doen?*

Reden: Achterhalen of de vragenkaart een positieve invloed heeft op de gesprekken van leerlingen over het probleemoplossen.

In groep A spreken even later twee leerlingen zelfstandig over het probleem. In groep B worden er, naast het afwerken van de vragenlijst, ook dingen aan elkaar uitgelegd, voornamelijk over de gebruikte notatievormen en de oplossing. In groep C wordt er maar relatief kort gewerkt aan het beantwoorden van vragen van de vragenkaart.

2. *Zijn de leerlingen voldoende actief tijdens de lesactiviteit met de vragenkaart?*

Reden: Achterhalen of op deze lesactiviteit leidt tot meer betrokken leerlingen dan bij de 'gallery-walk'.

Voornamelijk groep C haakt relatief snel af en stopt als eerste met het beantwoorden van vragen op de vragenkaart. Bij groep A haken er twee leerlingen op een bepaald moment volledig af. Zij hebben eerder wel de vragen gesteld. In groep B praten er twee leerlingen niet of substantieel minder dan de andere leerlingen.

3. *Doet iedere leerling actief mee in de gesprekken?*

Reden: Hiermee kan geconstateerd worden of deze lesactiviteit aansluit bij de leerlingen.

Bij groep A zijn twee van de vier leerlingen voornamelijk aan het woord. Bij groep B zijn er voornamelijk drie van de vijf leerlingen aan het woord. Bij groep C zijn er twee van de vier leerlingen aan het woord over de vragenkaart, de andere twee leerlingen praten over iets anders.

4. *Worden er gesprekken gevoerd naar aanleiding van de vragenkaart of wordt er meer een lijstje afgewerkt?*

Reden: Achterhalen of de vragenkaart gesprekken stimuleert en daarmee de denkactiviteit van leerlingen verhoogt in plaats van het domweg afwerken van lijstjes [12].

Bij groep A ontstaat er een gesprek na het beantwoorden van de eerste vragen. Groep B gebruikt de vragenkaart deels als een lijst van vragen die afgevinkt moeten worden. Hierbij geven ze telkens kort antwoord op de vragen of benoemen dat deze vraag niet relevant is. Daarnaast wordt er een bepaalde oplossing aan elkaar uitgelegd. Groep C beantwoordde enkele vragen van de vragenkaart, stopte er daarna mee en vroegen om het werkblad.

5. *Worden er nuttige gesprekken gevoerd? Waarover? Waarom niet?*

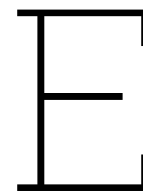
Reden: Als er geen gesprekken plaatsvinden naar aanleiding van de vragenkaart, kunnen er mogelijk wel andere onderwerpen besproken worden die op dat moment als nuttig worden beschouwd voor het leerproces van de leerlingen.

Dit is terug te lezen in de algemene notulen van deze les, zie appendix C.

6. *Is er motivatie te beginnen met de opdracht met de vragenkaart, waarom wel/niet?*

Reden: Hiermee kan geconstateerd worden of deze lesactiviteit aansluit bij de leerlingen.

De leerlingen deden gewoon netjes wat er van hen werd gevraagd. Er was dus waarschijnlijk niet veel weerstand, maar ook niet veel enthousiasme. Wel vonden er een aantal leerlingen het jammer om te moeten stoppen met het werken op de whiteboards, zoals te lezen is in de algemene notulen van deze les, zie appendix C.



Mini-interview vragen

In deze appendix zijn de vragen die per iteratie als leidraad gebruikt zijn voor de mini-interviews bij de leerlingen na afloop van de les te vinden. Daarnaast wordt de reden voor het stellen van deze vragen kort toegelicht.

Iteratie 1.1

1. *Wat vond je van het werken met het werkblad?*
Reden: Deze vraag is er voor bedoeld om de algemene mening van de leerlingen over het gehele werkblad in kaart te brengen.
2. *Was het nuttig om de oplossing ook individueel op te schrijven? Waarom wel/niet?*
Reden: Hiermee kan achterhaald worden wat het effect is van de eerste vraag op de leerlingen.
3. *Kon je door het werkblad makkelijker aan de slag met het derde deel / tweede keer bij het whiteboard?*
Reden: Hiermee kan geconstateerd worden of het werkblad een stimulerend effect heeft op het mogelijke volgende onderdeel in de les: het bedenken en oplossen van een volgend probleem.

Iteratie 1.2

1. *Heb je wat van het werkblad geleerd? Wat dan? Waarom wel/niet?*
Reden: Hiermee kan de visie van de leerlingen omtrent de algemene leeropbrengst in kaart gebracht worden en wat daaraan ten grondslag ligt.
2. *Heb je wat aan het werkblad gehad? / Heeft het werkblad je geholpen met het tweede probleem?*
Reden: Hiermee kan achterhaald worden of het werkblad leerlingen helpt bij het verticaal mathe-matiseren.
3. *Begreep je wat er van je werd verwacht?*
Reden: Hiermee kan in kaart gebracht worden of leerlingen het nut van het werkblad en de indeling van de les voldoende begrijpen.
4. *Vond je het moeilijk/neutraal/makkelijk om het werkblad in te vullen?*
Reden: Hiermee kan geconstateerd worden wat leerlingen van de moeilijkheidsgraad van het werkblad vinden. Mogelijk moet dit aangepast worden.
5. *Is het werkblad verbeterd?*
Reden: Hiermee kan achterhaald worden of leerlingen de verbeteringen van het werkblad ook als verbeteringen ervaren.

Iteratie 2.1

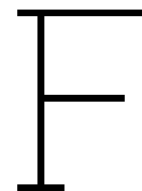
1. *Begrijp je alle hulpvragen?*
Reden: Hiermee kan achterhaald worden of de vragen voldoende in leerlingentaal zijn geformuleerd.
2. *Welke hulpvraag vindt het nuttigst? Waarom?*
Reden: Deze vraag zal meer inzicht geven in wat voor leerlingen van belang is binnen een reflectie.
3. *Zou je wat hebben aan de hulpvraag: "Verschilt het whiteboard met je antwoord bij vraag 1?"*
Reden: Mogelijk helpt het leerlingen bij het reflecteren om het 'grove' groepswork en het meer gedetailleerde individuele werk te vergelijken, aangezien de verbeteringen dan visueel zijn.
4. *Heb je iets geleerd bij het maken van vraag 2? Wat dan? Waarom wel/niet?*
Reden: Hiermee kan achterhaald worden of het beantwoorden van deze vraag leeropbrengst oplevert bij de leerlingen.

Iteratie 2.3

1. *Zijn de vragen op de vragenkaart duidelijk? / Snap je wat er van je wordt verwacht?*
Reden: Hiermee kan achterhaald worden of de vragen voldoende in leerlingentaal zijn geformuleerd.
2. *Wat vind je van de vragenkaart? Te groot of overzichtelijk?*
Reden: Mogelijk is de vragenkaart te groot en daardoor overweldigend voor leerlingen. Tegelijkertijd zijn niet alle vragen toepasbaar op elk probleem en moeten er dus wel voldoende vragen op een algemene vragenkaart komen. Deze moeten dan wel overzichtelijk gepresenteerd worden, zodat leerlingen bij elk probleem zelf efficiënt toepasbare vragen kunnen vinden.
3. *Helpt het je om een nuttig gesprek te voeren of goed te reflecteren?*
Reden: Hiermee kan achterhaald worden of de vragenkaart volgens de leerlingen het doel bereikt.
4. *Wat vind je van de hoeveelheid tijd die je er voor krijgt? (Te) lang/ kort?*
Reden: Hiermee kan achterhaald worden hoe lang leerlingen met de vragenkaart kunnen werken en of het mogelijk de activiteit van de rest van BTC les te veel belemmert.
5. *Vind je dit prettig om dit soort gesprekken te voeren met medeleerlingen of schrijf je liever individueel een uitwerking en reflectie op?*
Reden: Hiermee kan geconstateerd worden of leerlingen het prettig vinden om op deze manier met elkaar in gesprek te gaan of dat ze dan toch liever alleen werken.

Iteratie 2.4

1. *Besprek je liever de resultaten in groepjes of klassikaal? Waarom? Waar leer je meer van?*
Reden: Stimuleren de gemengde groepjes interessante gesprekken of is er meer behoefte om klassikaal zaken gerelateerd aan de les probleemoplossen te bespreken.
2. *Hebben jullie oplossingsstrategieën uitgewisseld?*
3. *Begrijp je de vragen op de vragenkaart? Zijn ze handig?*
Reden: Hiermee kan achterhaald worden of de vragen voldoende in leerlingentaal zijn geformuleerd en of dit leerlingen helpt bij het voeren van de gesprekken.
4. *Leer je van dit soort gesprekken of zou je liever proberen een volgend vergelijkbaar probleem oplossen of hier mee doorgaan?*
Reden: Hiermee kan achterhaald worden of leerlingen misschien meer behoefte hebben aan het doorwerken met het probleemoplossen dan het voeren van klassikale gesprekken of groeps gesprekken.



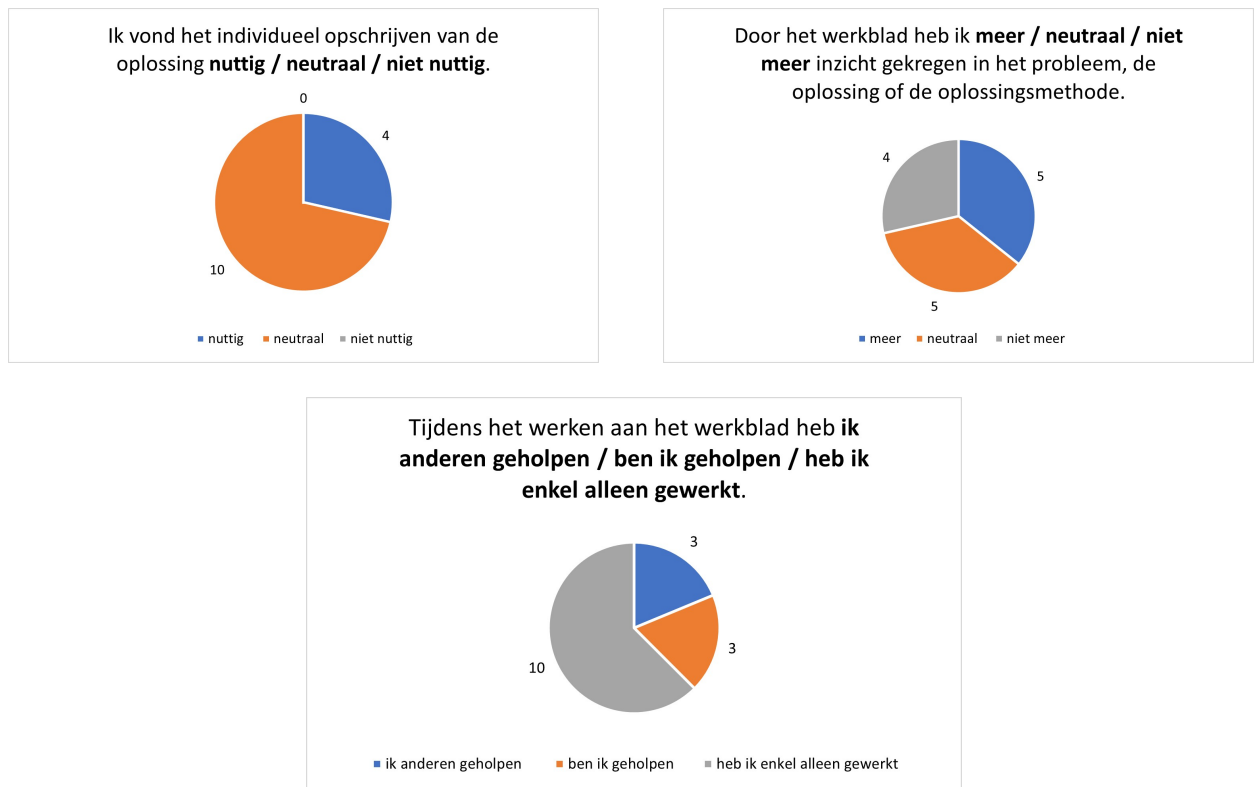
Resultaten korte feedbackvragen

Resultaten optionele open feedbackvragen

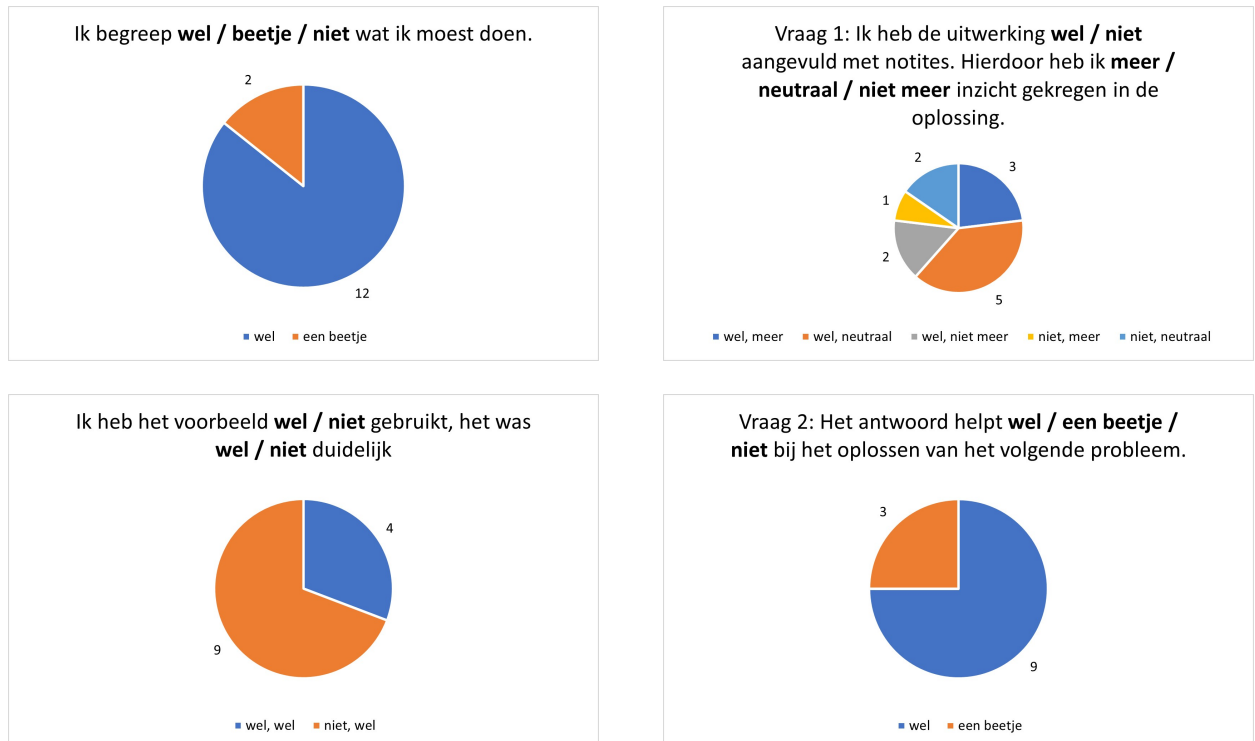
Tabel F.1: Resultaten optionele open feedbackvragen

	Tips/tops/opmerkingen:
Iteratie 1.1	-
Iteratie 1.2	"Het eerste probleem leek heel makkelijk, maar door het maar heel klein beetje te veranderen wordt het erg moeilijk."
Iteratie 2.1	"Ik heb een betere manier bedacht om alles te noteren door opdracht 1."
Iteratie 2.3	"Problemen hoeven niet altijd wiskundig te zijn." "Sommige problemen hebben geen oplossingen." "Tip: leukere problemen."
Iteratie 2.4	"Er was geen klassikale bespreking, dus we konden niet echt andere notaties en oplossingen zien." "Het nabespreken met de docent is handiger om er achter te komen wat de denkwijze is van de andere groepen."

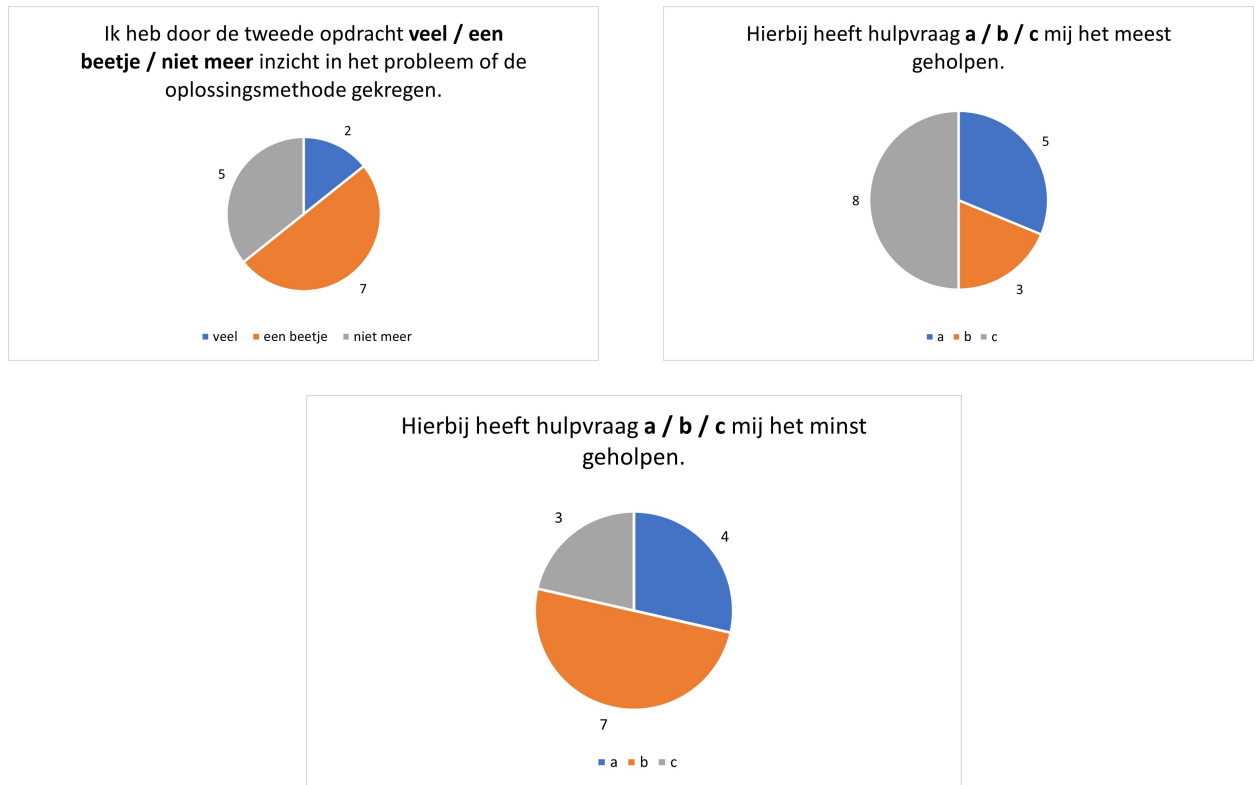
Resultaten gesloten feedbackvragen



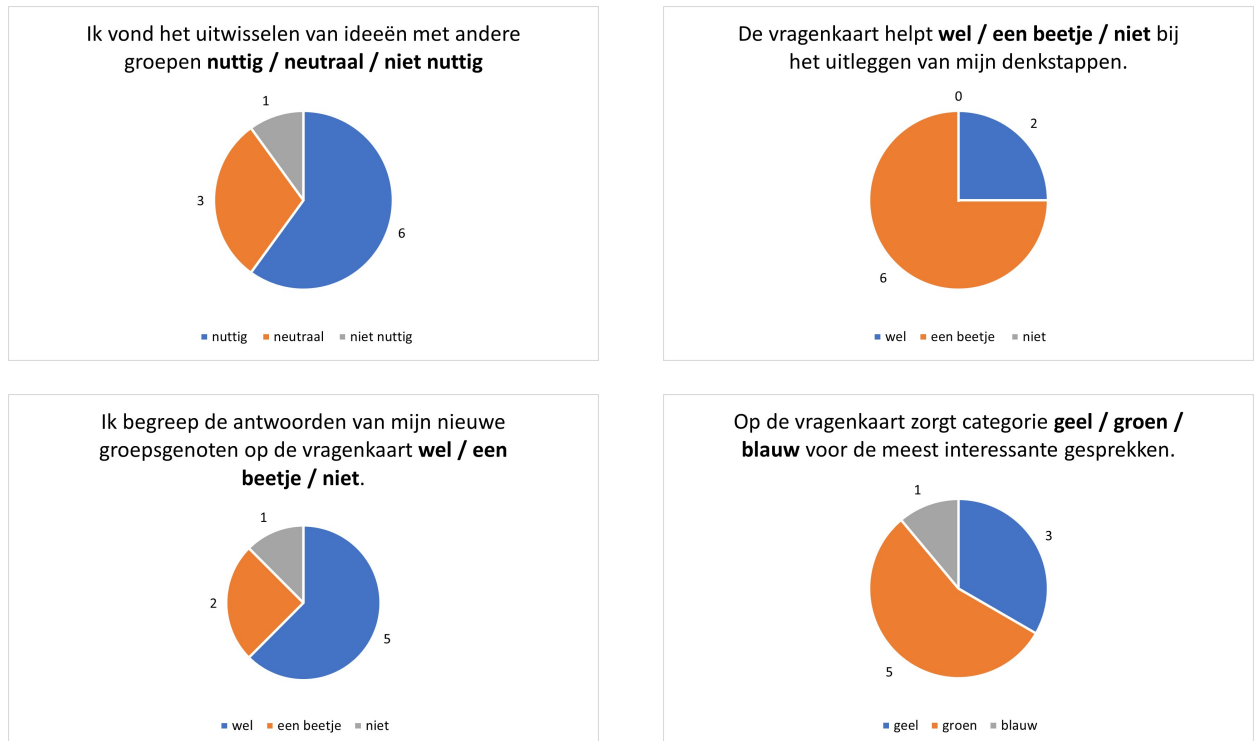
Figuur F.1: Resultaten gesloten korte feedbackvragen iteratie 1.1



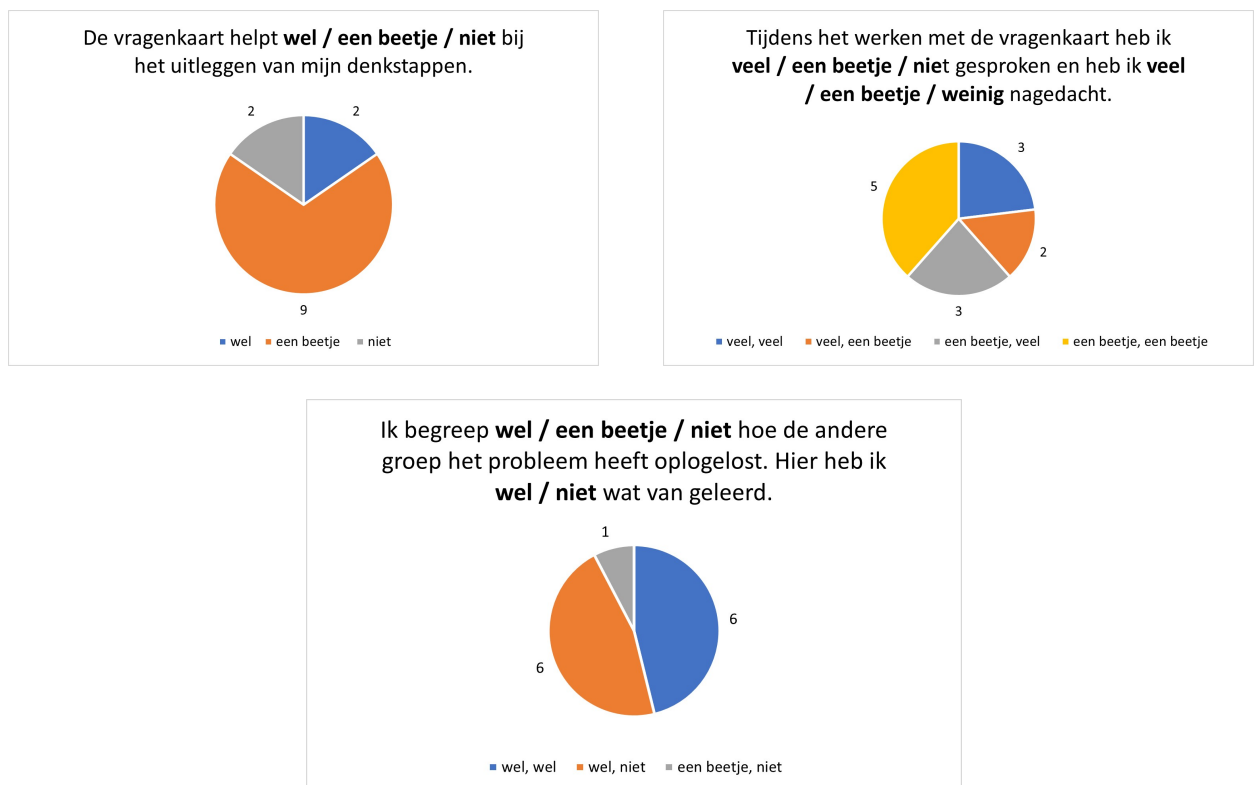
Figuur F.2: Resultaten gesloten korte feedbackvragen iteratie 1.2



Figuur F.3: Resultaten gesloten korte feedbackvragen iteratie 2.1



Figuur F.4: Resultaten gesloten korte feedbackvragen iteratie 2.3



Figuur F.5: Resultaten gesloten korte feedbackvragen iteratie 2.4

G

Analyse leerlingreflecties

Analyse resultaten tweede opgave werkblad iteratie 1.1

Formulering opgave

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
- a. Wat ging er niet (direct) goed?
- b. Wat ging er (later) wel goed?

Antwoord opgave 2 werkblad	Opmerkingen	Label	Specificering label	Aanvullende vervolgvraag, indien noodzakelijk
1a	Eerst gegevens opgeschreven en verder uit te werken	Probleemverkenning	Wat zijn de gegevens	
1b	(a) Ik begreep er eigenlijk vrij weinig van, maar gelukkig de rest van mijn groepje wel.	Samenwerking	Uitleg krijgen	
	(b) Uiteindelijk hebben we een kloppende formule gemaakt.	Oplossing generaliseren	Formule opstellen	Hoe wist je dat de formule klopte?
1c	Ik dacht gelijk dat ik gebruik moest maken van formules, maar ik wist niet hoe. Ik had eerst een fomrule opgesteld waar de toename per x gelijk was aan 1(3/22), maar toen ik ook een derde waarde had uitgerekend om te zien wat de diepte was, zag ik dat iets fout was. Pas na aandachtiger te kijken heb ik de formule herschreven als f(x)=x+3x/22. [Hier volgen drie voorbeeld berekeningen voor 1, 2 en 3 meter diepte. Hieruit wordt het volgende geconstateerd.]	Probleemverkenning Monitoren Beperkt van toegevoegde waarde Oplossing generaliseren Methode	Doelstelling specificeren Fout realiseren Te algemeen geformuleerd Formule opstellen Uitgewerkt voorbeeld	Waarom niet? Wat was er daarbij belangrijk?
	Toch 3x want 18m*2 is de oppervlakte en de volume met diepte is V=18m*2-diepte (m).	Ondanks dat de formulering niet klopt is er nagedacht over het toegewezen label.	Monitoren	Dimensie analyse
2a	Eerst liepen we vast toen kwam [leerling] met het idee om idee om uit te rekenen hoeveel de tuin stijgt als je 2 meter graaft.	Voorbeelden gebruiken om te convergeren naar het antwoord.	Methode	Uitgewerkt voorbeeld
	Hier heb ik een fomrule mee gemaakt en toen kwamen we op ons antwoord.	Oplossing generaliseren	Formule opstellen	
2b	(a) We beleven haken op de grootte van de tuin. (b) We gingen eerst kijken naar hoe hoog de tuin zou stijgen, hierdoor werd het duidelijker.	Beperkt van toegevoegde waarde Methode	Heeft aanvulling nodig Redeneren	Waarom bleven jullie daar op haken?
2c	Mijn geweldige brein zag wat er moest gebeuren.	Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Wat moest er gebeuren en hoe zag je dat?
3a	(a) Uitzoeken wat we moesten doen.	Dit gaat over het bepalen van de doelstelling, anders zou er 'hoe' staan.	Probleemverkenning	Doelstelling bepalen
	Weten wat er gebeurt bij een formule. (b) Begrijpen (soort van)			Wat weet je wat er gebeurd bij een formule? Wat was er daarbij belangrijk?
3b	Door eerst een schets te maken van ons probleem realiseerde we dat er	Niet van toegevoegde waarde Wijze van notatie Methode Inzicht in probleem	Te algemeen Situatieschets Visualiseren Aantal onbekenden geconstateerd	
	1 onbekende waarde was. Een logische volgende stap was om daarvoor een formule op te stellen.	Methode	Vergelijking opstellen voor een onbekende	
3c	Werkblad niet ingeleverd.			
4a	(a) We liepen een paar keer vast en wisten niet hoe we verder moesten. (b) Op een bepaald moment hadden we door hoe het werkte en toen lukte het wel.	Niet van toegevoegde waarde Niet van toegevoegde waarde Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen Te algemeen Te algemeen	Waar liepen jullie precies op vast? Waarom wisten jullie niet hoe je daarmee verder moest? Hoe werkte het?
4b	Steeds opnieuw proberen tot dat je het wel hebt.	Methode proberen is beschreven maar dit is niet specifiek op de probleemcontext beschreven.	Methode	Proberen
				Wat deden jullie opnieuw, wat veranderde er dan en hoe wist je dan wanneer je het wel hebt gevonden?
4c	We hebben gewoon gegokt en uiteindelijk ging het goed.	Deze leerlingen hadden vermoedelijk het antwoord van een andere groep overgenomen en dit gecontroleerd. Er kan verder niet geconstateerd worden uit dit antwoord dat er iets is begrepen.	Beperkt van toegevoegde waarde	Te algemeen geformuleerd
				Wat gokte jullie precies en hoe wist je vervolgens dat het gevonden antwoord goed was?
5a	Formule opstellen. (a) 132:18x i.p.v. 18x:132	Oplossing generaliseren Monitoren	Formule opstellen Fout realiseren	Hoe ben je daarop gekomen? Waarom klopt het zo wel?
5b	Had eerst inhoud en oppervlakte omgewisseld in formule voor hoogte. We hadden eerst een formule opgesteld.	Monitoren Oplossing generaliseren	Fout realiseren Formule opstellen	Hoe ben je daarop gekomen? Waarom en hoe had je dat gedaan?

Analyse resultaten tweede opgave werkblad 1.2

Formulering opgave

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

Antwoord opgave 2 werkblad	Opmerkingen	Label	Specificering label	Aanvullende vervolgvraag, indien noodzakelijk	
1a	Door een schets te maken hadden we overzicht op het probleem. Toen kwam [leerling] met het idee om ook andere auto's opnieuw te vullen, zodat de auto van de vip later in de woestijn nog gevuld kon worden. Hierdoor konden we het probleem oplossen. We liepen nooit vast. [Illustratie van gebruikt schema]	Wijze van notatie	Processchema	Wat was daarvoor essentieel?	
		Inzicht in probleem	Belangrijke constatering		
		Methode	Puzzelen		
		Bepert van toegevoegde waarde	Te algemeen geformuleerd	Waarom niet?	
1b	Opgave 2 niet gemaakt.	Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt		
1c	(a) Nergens, nadenken	Uit dit groepje had zei ook leerling 1a nergens vastgelopen te zijn. Echter zei die leerling meer betekenisvolle	Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Waar dacht je over na?
	(b) De oplossing vinden.		Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Wat was daarvoor belangrijk?
2a	Gewoon steeds opnieuw proberen en logisch nadenken.	Door het logisch nadenken is het puzzelen in plaats van enkel proberen.	Methode	Puzzelen	Wat probeerde je dan steeds opnieuw, waarom en wat was de uitkomst?
	(a) Wanneer je de benzine overplaatst naar de andere auto('s), als je het op een verkeerd moment verplaatst werkt het niet.		Inzicht in probleem	Randvoorwaarde	Waarom werkt het dan niet?
	(b) Opschrijven.	Gezien b heeft dit geholpen.	Methode	Notatie als oploshulp	Wat schreef je op en waarom?
	2b	Steeds opnieuw kijken	Steeds opnieuw beginnen.	Methode	Proberen
	en puzzelen hoe het moet.	Puzzelen, want er wordt dus meer gedaan dan enkel kijken. Waarschijnlijk wordt er hierbij gederneerd.	Methode	Puzzelen	Wat probeerde je dan steeds opnieuw, waarom en wat was de uitkomst?
2c	(a) Hoe kunnen we aan de overkant komen.	Gekeken naar de formulering van vraag (a) liep deze leerling er dus op vast hoe het moest.	Probleemverkenning	Methode bepalen	Waarom was dit een probleem?
	Ik kwam er pas later achter dat we op de helft een volle tank nodig hebben.		Inzicht in probleem	Belangrijke constatering	Waarom?
	(b) Het gebruik van breuken maakte het makkelijk.		Wiskundige structuur	Breuken	Waarom?
3a	(a) [Leerling] zag het in 1 keer.	Samenwerking	Inzicht medeleerling	Wat zag ze in één keer?	
	(b) Samenwerking, iedereen was gemotiveerd.	Samenwerking	Motivatie	Waarom is dat belangrijk?	
3b	Ik zag dat na 1/4 van de route de tank 1/2 was. Als je de tanks samenvoegt wordt dat weer 1. Als je dat proces nog een keer herhaalt haal je het eind. (a) Niet (b) Het denken en samenwerken.	Inzicht in probleem	Belangrijke constatering		
		Methode	Redeneren		
		Niet vastgelopen dus.	Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Waar dacht je over na?
			Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Wat ging er goed aan het samenwerken?
3c	Opgave 2 niet gemaakt.	Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt		
4a	Volle maan en stand + waterman	Niet van toegevoegde waarde	Grappige uitspraak		
4b	Volle maan en stand + sterrenbeeld + ik ben bijna jarig	Niet van toegevoegde waarde	Grappige uitspraak		
4c	Nadenken	Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Waar dacht je over na?	
5a	Door de schets werd het heel duidelijk	Gekeken naar opgave 1 valt dit onder een processchema.	Wijze van notatie	Processchema	Wat maakte die schets je duidelijk en hoe kwam dat?
	en was het makkelijk te berekenen.	Gekeken naar opgave 1 wordt er bedoeld dat er situaties worden doorgerekend en daarbij wordt gederneerd.	Methode	Puzzelen	Wat berekende je en waarom?
5b	Gewoon bedenken (was wel makkelijk)	Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Wat was er van belang?	
		Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Later in de les werd het wel moeilijk, waarom?	
5c	De notatie, zie bij 1. Omdat het meteen duidelijk was.	Wijze van notatie	Processchema	Wat maakte die notatie een goede notatie?	
		Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Wat was er meteen duidelijk?	
6a	16 was te veel dan zou je uitkomen met een volle tank. Beetje veel dus. Je begint eigenlijk met 8. Dan rij je vier kwarten. Oops. Je kan er ook met 4 beginnen. [Schema dat laatste bevinding onderbouwd.]	Methode	Optimaliseren		
		Inzicht in probleem	Optimaliseren		
		Inzicht in probleem	Onderbouwing		
		Inzicht in probleem	Optimaliseren		
6b	Ik keek wat de efficiëntste manier was om de tanks bij elkaar te voegen. Toen keek ik hoe ver ik kon komen met twee auto's na 1/4 afstand, omdat dit het efficiëntst was. Vervolgens met een soort van boom bij mogelijkheden voor kansberekening keek ik met hoeveel auto's ik 1 afstand kon afleggen. Ik had een vergissing gemaakt waardoor de auto met de vip de woestijn uitkwam met een volle tank. wat niet efficiënt was (te veel). Dit kwam doordat ik de breuken tussen de tijdsprongen deed i.p.v. op de tijdsprongen. De auto legt niet 1/4 af tijdens de benzine wisseling. Het antwoord is dus 8 auto's. Fout: we komen aan met een halve tank. Door verkeerd tekens dacht ik dat het (Q) een lege was.	Wijze van notatie	Boomdiagram	Kan je dit uitleggen?	
		Probleemverkenning	Methode bepalen		
		Methode	Proberen	Wat bedoel je met efficiëntst en waarom was dit zo?	
		Wijze van notatie	Boomdiagram		
			Fout realiseren		
		Inzicht in probleem	Optimaliseren		
Wijze van notatie	Notatie verbeteren				
		Inzicht in probleem	Fout realiseren		

Analyse resultaten tweede opgave werkblad iteratie 2.1

Formulering opgave

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?
c. Waar moest je rekening mee houden?

Antwoord opgave 2 werkblad	Opmerkingen	Label	Specificering label	Aanvullende vervolgvraag, indien noodzakelijk
1a (a) Hoe je minder vaak kan wegen (b) Samenwerken, we kunnen het gewoon goed. (c) Schrijven	Aangezien dit een antwoord op c is, werd dit waarschijnlijk lastig gevonden, maar wel noodzakelijk voor het oplossen van het probleem.	Probleemverkenning Samenwerking Methode	Methode bepalen Vertrouwen in de groep Ontwikkelen notatie	Waarom was dat lasitg? Wat is daar voor nodig? Waarom moest je daar rekening mee houden?
1b (a) We kregen het niet voor elkaar om van 4 naar 3 stappen te komen. (b) Oplossen van het probleem ging in een keer goed. We bedenken steeds 1 ding en vulde elkaar aan. (c) Dit probleem is ingewikkeld om te noteren.	Gezien vraag c vond deze leerling dit wel noodzakelijk.	Probleemverkenning Samenwerking Methode	Doelstelling bepalen Gezamenlijk redeneren Ontwikkelen notatie	Waarom was dat lasitg?
1c (a) Toen je het blijkbaar in 3x wegen kon doen, andere manier geprobeerd en weer op 4 uitgekomen. (b) Door muntjes te tekenen werd het makkelijk.		Monitoren Wijze van notatie Methode	Andere strategie toepassen Situatieschets Visualiseren	Wat was het verschil tussen beide pogingen? Waarom werd het daardoor makkelijk?
2a DREAMTEAM	Of hier samenwerken mee wordt bedoelt is echter onzeker, het kan ook gewoon als grap bedoelt zijn.	Beperkt van toegevoegde waarde	Te algemeen geformuleerd	
2b Opgave 2 niet gemaakt.		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt	
2c Wij hadden snel bedacht hoe het in 4x moest, maar we liepen vast op 3x en konden dat niet oplossen.		Beperkt van toegevoegde waarde	Heeft aanvulling nodig	
3a (a) Het verder beredeneren, plaatjes maken. (b) Het overzichtelijk maken (c) Of het muntje zwaarder of lichter is.		Methode Wijze van notatie Methode Inzicht in probleem	Redeneren Situatieschets Overzicht behouden door geschikte notatie Belangrijke constatering	Wat was daarbij belangrijk? Waarom is dit van belang?
3b Opgave 2 niet gemaakt.		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt	
3c Opgave 2 niet gemaakt.		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt	
4a Nadenken Money on my mind Min mogelijk en toen was ik slim [Met de bedachte notatie geïllustreerd welke situaties er voor kunnen komen]	Waarschijnlijk wordt hier bedoeld dat je zo min mogelijk keren moet wegen.	Niet van toegevoegde waarde Niet van toegevoegde waarde Probleemverkenning Niet van toegevoegde waarde Inzicht in probleem	Te algemeen Grappige uitspraak Doelstelling bepalen Grappige uitspraak Belangrijke constatering	Wat bedoel je hier mee? Kan je dit uitleggen?
4b We begonnen met de makkelijkste manier waar we het opsplitste in 2 groepen telkens. Dit beruste op het verkeerde geloof dat we wisten of de valse munt lichter of zwaarder was. Daarna begon ik te experimenteren met 3 groepen. Zo wisten we zeker dat de vaste munt was in een groep van 4 met max 2 stappen. [Verwijzing naar uitwerking van opgave 1 ter illustratie] Met de 4 munten bedachten we dat we groepen van 1 konden gebruiken. Door verwisseling van 1 munt konden we de valse munt beredeneren. [Verwijzing naar uitwerking van opgave 1 ter illustratie]	Goede toelichting. Goede toelichting.	Methode Monitoren Methode Methode	Uitgewerkt voorbeeld Fout realiseren Puzzelen Uitgewerkt voorbeeld	Wat heeft dit voor effect? Hoe deed je dat dan?
4c Opgave 2 niet gemaakt.		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt	
5a (a) Op dat we niet wisten welke van de 2 valse was. (b) Overleg (c) Dat je niet wist of die zwaarder of lichter was.		Inzicht in probleem Samenwerking Inzicht in probleem	Belangrijke constatering Overleggen Belangrijke constatering	Waarom is dit van belang? Waar overlegde jullie over? Waarom is dit van belang?
5b We wisten niet of de valse lichter of zwaarder was.		Inzicht in probleem	Belangrijke constatering	Waarom is dit van belang?
5c Aan het begin, maar toen we waren begonnen ging het beter. (b) Het tekenen		Methode Wijze van notatie	Proberen Situatieschets	Wat ging er beter? Wat tekende je en waarom?
6a Opgave 2 niet gemaakt.		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt	
6b (a) In 3 wegingen konden we niet vinden. (b) Het in 4 wegingen wisten we snel. (c) Of de munt lichter of zwaarder is.		Beperkt van toegevoegde waarde Beperkt van toegevoegde waarde Inzicht in probleem	Heeft aanvulling nodig Heeft aanvulling nodig Belangrijke constatering	Waarom lukte dit niet? Hoe kwamen jullie daar zo snel achter? Waarom is dit van belang?
6c [Geen antwoord verwoord, wel twee mogelijke groepsverdelingen geïllustreerd.]		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt	

Analyse resultaten klassengesprek iteratie 2.1

Opmerking leerling	Reactie docent	Aanvulling leerling	Nuttige toevoeging	Label	Specificering label
Nadenken, money on my mind, toen was ik slim.	... Hoe kunnen we dit specifiek maken?	Plaatjes erbij maken	Ja, met een plaatje kan je namelijk je denkproces illustreren waardoor het betekenisvoller is.	Het denkproces illustreren	Doormiddel van plaatjes
Goed. We konden het in één keer het probleem oplossen, want iedere persoon kwam steeds een stap verder.	Jullie hadden een goede samenwerking dus.	..., maar we kwamen op vier. Een tekening maken heeft geholpen."	Andere toevoeging, niet gerelateerd aan de samenwerking.	Samenwerking	Gezamenlijk redeneren
Je kan er visueel over nadenken.	Wat bedoel je dan precies, als het niet gaat om plaatjes maken?	Nou, je kan het in je hoofd uitbeelden en over na denken en dan zo puzzelen hoe je het moet doen.	Ja, er wordt toegelicht wat er bedoeld wordt.	Het denkproces illustreren	Doormiddel van denkbeeldig visualiseren

Analyse resultaten klassengesprek iteratie 2.2

Gesprek docent met groepjes	Label	Specificering label
Verklaring dat een groep de formule van de andere groep heeft overgenomen en deze vervolgens hebben herteid.	Samenwerking Inzicht in probleem	Inzicht andere groep Oplossing verifiëren
Verklaring dat een andere groep ook de formule had overgenomen en deze hadden toegepast op het resultaat dat zij eerder hadden gevonden om de formule te begrijpen.	Samenwerking Inzicht in probleem	Inzicht andere groep Oplossing begrijpen

Analyse resultaten tweede opgave werkblad iteratie 2.3

Formulering opgave

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

Antwoord opgave 2 werkblad	Opmerkingen	Label	Specificering label	Aanvullende vervolgvraag. Indien noodzakelijk
1a Denk na		Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Waar dat je over na of wat was daarbij belangrijk?
1b Makkelijker nadenken	Mogelijk is de methode om eerst een eenvoudiger of kleiner probleem op te lossen proberen te begrijpen.	Beperkt van toegevoegde waarde	Te algemeen geformuleerd	Hoe deed je dat?
1c Zet al je bevindingen op een rij en kijk of je het probleem misschien anders kan aanpakken.		Monitoren	Nieuwe methode bedenken	
2a Opgave 2 niet gemaakt.		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt	
2b Strategieën = eerst kijken naar de priemgetallen Terugkijken = slechte samenwerking		Wiskundige structuur	Priemgetallen	Waarom is dat een goed idee?
3a Samenwerken met andere groepen en om hulp vragen.		Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Hoe kan de samenwerking worden verbeterd?
3b Doe het niet handmatig.	De volledige oplossing van het kan niet zonder digitale middelen worden berekend binnen het lesuur.	Samenwerking	Inzicht andere groep	Wat was hiervan het resultaat?
		Samenwerking	Hulp vragen	Wat heb je gevraagd?
		Methode	Digitale middelen	Waarom niet en hoe dan wel?
3c Laat je groepje het werk doen.		Niet van toegevoegde waarde	Ongewenst antwoord	Heb jij ook wat geleerd?
4a Afkijken	Binnen de context dat je andere groepen kunt gebruiken om ideeën op te doen is dit een goed antwoord.	Samenwerking	Inzicht andere groep	Wat heb je daar van geleerd?
4b Beter nadenken		Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Wat ging er daarbij beter dan eerst?
4c Denk goed na over de kenmerken van priemgetallen.		Wiskundige structuur	Priemgetallen	

Analyse resultaten derde opgave werkblad iteratie 2.3

Formulering opgave

3. Wat is de **belangrijkste les die je meeneemt** naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

Antwoord opgave 2 werkblad	Opmerkingen	Label	Specificering label	Aanvullende vervolgvraag. Indien noodzakelijk
1a Nadenken		Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Hoe heb je geleerd na te denken?
1b Goed samenwerken		Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Wat ging er goed bij het samenwerken?
1c Begin met ideeën op het bord te schrijven (goed/fout) kijk dan bij elk idee of het bruikbaar is. Zo worden je ideeën ook zichtbaar voor anderen. Vereenvoudig het probleem zo goed mogelijk.		Probleemverkenning	Strategieën bedenken	
		Probleemverkenning	Methode bepalen	
		Samenwerking	Ideeën overzichtelijk maken	
		Methode	Vereenvoudig het probleem	
2a Opgave 3 niet gemaakt.		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt	
2b Opgave 3 niet gemaakt.		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt	
3a idk		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gelukt	
3b Opgave 3 niet gemaakt.		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gelukt	
3c Weet niet		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gelukt	
4a Afkijken is niet erg.	Binnen de context dat je andere groepen kunt gebruiken om ideeën op te doen is dit een goed antwoord.	Samenwerking	Inzicht andere groep	Wat heb je daar van geleerd?
4b Goed overleggen		Samenwerking	Overleggen	Waar hebben jullie het meest over gesproken?
4c Denk breed, omdat je dan kan zien wat er nog meer mogelijk is.		Perspectief uitbreiden	Toepassen van de oplossing	

Analyse resultaten klassengesprek iteratie 2.3

Opmerking leerling	Reactie docent	Aanvulling leerling	Nuttige toevoeging	Label	Specificering label
Opschrijven moet je je groepje laten doen.	Dus je moet zelf niks doen?	Nee, dan kan jij nadenken.	Ja, eerst leek het er ontbrekend op dat de leerling zelf liever niks deed.	Samenwerking	Verdeling van de taken

Analyse resultaten tweede opgave werkblad iteratie 2.4

Formulering opgave

1. Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?

Antwoord opgave 2 werkblad	Opmerkingen	Label	Specificering label	Aanvullende vervolgvraag, indien noodzakelijk
1a De rij nPk als [onleesbaar woord] even of oneven zijn met veelvouden van. Som middelste.	Dit is niet begrepen.	Inzicht in probleem	Belangrijke constatering	Kan je dit uitleggen?
1b Voor het forceren van een win: [Schema van getallen met annotatie als uitleg] De tweede beurt wint hier! De som is 4. Speler A is naar 4 gegaan en wint. Het patroon: De eerste speler die naar een product met factor 4 gaat (niet start), zal kunnen winnen. Het forceren van de stappen (de manier) zal helpen als je andere getallenrijen wilt gebruiken (1,2) (1,2,3) (1,2,3,4,5), etc.		Beperkt van toegevoegde waarde Probleemverkenning Wijze van notatie Methode Inzicht in probleem Perspectief uitbreiden	Heeft aanvulling nodig Doelstelling specificeren Schema met annotatie Uitgewerkt voorbeeld Ontdekking patroon Toepassen van de oplossing	Wat bedoel je precies? Hoe kwam je daar achter?
1c Logisch blijven nadenken	Mogelijk wordt hier de methode redeneren bedoeld	Beperkt van toegevoegde waarde	Te algemeen geformuleerd	Waar dacht je over na en wat was daar de logica achter?
2a Nadenken Verschillende manieren van notatie		Niet van toegevoegde waarde Wijze van notatie	Te algemeen Evalueren mogelijkheden	Waar dacht je over na en waarom? Wat waren de overeenkomsten en verschillen?
2b Dat het soms goed is om gewoon maar ergens te beginnen. zodat je uiteindelijk tot hoger inzicht komt. Dit geldt eigenlijk voor heel je leven. We hebben met elkaar vooral gehad over de manier noteren.		Methode Wijze van notatie	Proberen Tot inzicht komen Evalueren mogelijkheden	Wat deed je dan precies? Waardoor ben je tot dit inzicht gekomen en wat was dat? Wat waren de overeenkomsten en verschillen?
2c De verschillende manieren waarop je tot een oplossing kan komen.		Methode	Verschillende methoden	Wat waren de overeenkomsten en verschillen?
3a Zorg dat jij mag kiezen als hoeveelste je begint.		Inzicht in probleem	Belangrijke constatering	Waarom is dat belangrijk?
3b Bedenken met hoeveel pringles je sowieso hebt verloren.		Inzicht in probleem	Belangrijke constatering	Waarom is dat belangrijk?
3c Je moet altijd zorgen dat de tegenstander het max. aantal pringles dat je mag pakken + 1 pringles heeft.		Inzicht in probleem	Conclusie	Hoe ben je daar op gekomen en waarom is dat zo?
4a Dat je niet als 1e wilt pakken van de laatste 4.		Inzicht in probleem	Belangrijke constatering	Waarom is dat zo?
4b Goed met elkaar overleggen. Leren van elkaars fouten.		Samenwerking Monitoren	Overleggen Leren van fouten	Waar hebben jullie het meest over gesproken? Wat waren deze fouten en wat heb je daarvan geleerd?
4c Goed overleggen / samenwerken Leren van elkaars fouten.		Samenwerking Monitoren	Overleggen Leren van fouten	Waar hebben jullie het meest over gesproken? Wat waren deze fouten en wat heb je daarvan geleerd?
5a Dat als je er nog 4 over hebt je niet als eerste wilt starten met de eerste van de vier.		Inzicht in probleem	Belangrijke constatering	Waarom is dat belangrijk?

Resultaten derde opgave werkblad iteratie 2.4

Formulering opgave

2. Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?

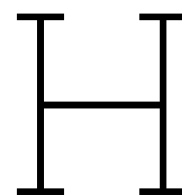
Antwoord opgave 2 werkblad	Opmerkingen	Label	Specificering label	Aanvullende vervolgvraag, indien noodzakelijk
1a Opgave 3 niet gemaakt.		Niet van toegevoegde waarde	Opgave niet gemaakt	
1b Kijken hoe je een win forceert.		Probleemverkenning	Doelstelling specificeren	
1c Werk goed samen en blijf logisch nadenken.	Mogelijk wordt hier de methode redeneren bedoeld	Niet van toegevoegde waarde Beperkt van toegevoegde waarde	Te algemeen Te algemeen geformuleerd	Hoe kan je hier voor zorgen? Waar dacht je over na en wat was daar de logica achter?
2a Nadenken		Niet van toegevoegde waarde	Te algemeen	Waar dacht je over na en waarom?
2b Speel tegen elkaar en schrijf alle zetten op. Probeer uit die data een verband te trekken.		Methode Methode Methode	Proberen Stappen noteren Patroon ontdekken	Wat deed je dan telkens anders? Hoe kwam je daar achter?
2c Blijven proberen.		Methode	Proberen	Wat deed je dan telkens anders?
3a Begin met een makkelijker probleem.		Methode	Vereenvoudig het probleem	Hoe doe je dat?
3b Verklein het probleem.		Methode	Verklein het probleem	
3c Probeer een andere aanpak. Vraag andere groepen om hulp.		Monitoren Samenwerking	Verander methode Hulp vragen	Welke verschillende aanpakken zijn er dan? Welke vraag stelde je deze groepen?
4a Vind het getal vanaf je het niet wilt pakken.		Probleemverkenning	Doelstelling specificeren	Waarom is dit van belang?
4b Gewoon proberen.		Methode	proberen	Wat deed je dan telkens anders?
4c Lijntjes tekenen, gewoon proberen.		Wijze van notatie Methode	Situatieschets Proberen	Waarom deed je dat en wat had je er aan? Wat deed je dan telkens anders?
5a Blijf door spelen en kijk naar patronen.		Methode Methode	Proberen Patroon ontdekken	Wat deed je dan telkens anders? Hoe kwam je daar achter?

Analyse resultaten groepsgesprekken iteratie 2.4

Gespreksonderwerp	Reacties	Aanvulling leerling	Nuttige toevoeging	Label	Specificering label
Oplossingen van meerdere vergelijkbare problemen	-	-		Perspectief uitbreiden	Probleem variëren
Vorm van notatie, door het gebruik van plaatjes met kruisjes en stipjes, wordt uitgelegd.	Er wordt gevraagd waarom dit zo is gedaan.	Dit wordt uitgelegd.	Ja, antwoord is zo specifieker.	Wijze van notatie	Plaatjes met symbolen
Je moet het probleem eerst kleiner maken en daarna kan je het zo groot maken als je wilt.	De leerlingen zijn het er samen over eens dat dit de kern van het probleem is.	-	N.v.t.	Methode	Verklein het probleem

Analyse resultaten klassengesprek iteratie 2.4

Opmerking leerling	Reactie docent	Aanvulling leerling	Nuttige toevoeging	Label	Specificering label
Je moet gewoon lijntjes tekenen en proberen.	Kan iemand dit verder uitleggen?	Je moet eerst kijken naar een kleiner probleem, namelijk een stapel van 4 chipjes.	Ja, want er is vertelt dat je in een kleiner probleem beter kunt proberen.	Methode	Verklein het probleem
De vraag over verschillende oplossingen kan je niet echt beantwoorden, het kan maar op één manier.	Vertelt over een situatie waarin deze vraag wel relevant kan zijn.	-	N.v.t.	-	-



Resultaten leerlingreflecties

Betekenis kenmerken van leerlingreflecties en bijbehorende vragen op de vragenkaart

Kernmerk leerlingreflectie	Leerlingvoorbeeld	Aanvullende betekenis	Stimulans voor het probleemoplossend vermogen	Relatie met graphic organizers [12]	Relatie met de META-kaart [9]	Bijbehorende vraag op vragenkaart
Beperkt van toegevoegde waarde						
Te algemeen geformuleerd	... en blijf logisch nadenken.	Er mist specifieke uitleg over het probleem of het oplosproces.	N.v.t	N.v.t	N.v.t	-
Heeft aanvulling nodig	Wij hadden snel bedacht hoe het in 4x moest, maar we liepen vast op 3x en konden dat niet oplossen.	Een specifiekere uitspraak, maar onderbouwing.	-	Procedures	Strategieën	-
Het denkproces illustreren						
Doormiddel van denkbeeldig visualiseren	Je kan het in je hoofd uitbeelden en over na denken en dan zo puzzelen hoe je het moet doen.	Verwoording van het denkproces.	Procedures	Procedures	Strategieën	Wat heeft voor nieuwe inzichten gezorgd?
Doormiddel van plaatjes	Met een plaatje kan je je denkproces illustreren waardoor het betekenisvoller is.	Visualisering van het denkproces.	Procedures	Procedures	Strategieën	Wat heeft voor nieuwe inzichten gezorgd?
Inzicht in probleem						
Aantal onbekenden geconstateerd	... realiseerde we dat er 1 onbekende waarde was.	-	Heuristieken expliciet maken	Big Ideas/Concepts	Begrijpen	Vooruitkijken
Belangrijke constatering	Ik zag dat na 1/4 van de route de tank 1/2 was.	Constatering die leidt tot het vinden van de oplossing.	Bewustwording	Procedures	Strategieën	Waar moest je rekenening mee houden?
Conclusie	Je moet altijd zorgen dat de tegenstander het max. aantal pringles dat je mag pakken + 1 pringles heeft.	-	Bewustwording	Big Ideas/Concepts	Begrijpen	Waar moest je rekenening mee houden?
Fout realiseren	Dit beruste op het verkeerde geloof dat we wisten of de valse munt lichter of zwaarder was.	Realiseren van een fout met betrekking op het probleem.	Bewustwording	Big Ideas/Concepts	Begrijpen	Waar moest je rekenening mee houden?
Onderbouwing	Je begint eigenlijk met 8. Dan rij je vier kwarten.	-	Cognitieve vaardigheden	Big Ideas/Concepts	Begrijpen	Waar moest je rekenening mee houden?
Ontdekking patroon	Het patroon: De eerste speler die naar een product met factor 4 gaat (niet start), zal kunnen winnen.	-	Bewustwording	Big Ideas/Concepts	Begrijpen	Waar moest je rekenening mee houden?
Optimaliseren	dan zou je uitkomen met een volle tank. Beetje veel dus.	Realiseren dat het resultaat geoptimaliseerd kan worden.	Probleemaanpak expliciet maken	Big Ideas/Concepts	Begrijpen	Kan je het antwoord verbeteren?
Randvoorwaarde	Wanneer je de benzine overplaatst naar de andere auto's), als je het op een verkeerd moment verplaatst werkt het niet.	-	Bewustwording	Big Ideas/Concepts	Begrijpen	Waar moest je rekenening mee houden?
Oplossing begrijpen	... toegepast op het resultaat dat zij eerder hadden gevonden om de formule te begrijpen.	Het gevonden resultaat begrijpen.	Demonstreren dat de probleem-aanpak essentieel is	Big Ideas/Concepts	Begrijpen	Hoe heb je (tussentijds) je resultaten gecontroleerd?
Oplossing verifiëren	en deze vervolgens hebben herleid.	Het gevonden resultaat heruitvinden.	Demonstreren dat de probleem-aanpak essentieel is	Big Ideas/Concepts	Verbinden	Hoe heb je (tussentijds) je resultaten gecontroleerd?
Methode			Heuristieken/probleemaanpak expliciet maken	Procedures	Strategieën	Strategieën
Digitale middelen	Doe het niet handmatig.	Constatering dat er digitale middelen nodig zijn.	-	Procedures	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Notatie als oploshulp	Door het opschrijven ging het goed.	-	Probleemaanpak expliciet maken	Procedures	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Ontwikkelen notatie	Dit probleem is ingewikkeld om te noteren.	Benoemen dat er een uitdaging zit in het opschrijven van de tussentappen.	Probleemaanpak expliciet maken	Procedures	Terugkijken	Welke tactiek heb je toegepast?
Optimaliseren	16 was te veel, ..., eigenlijk 8	Het resultaat optimaliseren.	Probleemaanpak expliciet maken.	Procedures	Verbinden	Welke tactiek heb je toegepast?
Patroon ontdekken	Probeer uit die data een verband te trekken.	Realiseren dat er een patroon is.	Probleemaanpak expliciet maken.	Big Ideas/Concepts	Verbinden	Welke tactiek heb je toegepast?
Proberen	Steeds opnieuw proberen tot dat je het wel hebt.	Gebaseerd op algemene logica of gevoel: als dit ... dan dat ..., en als dit ... dan dat ... enz.	Heuristieken expliciet maken.	Procedures	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Puzzelen	Gewoon steeds opnieuw proberen en logisch nadenken.	Gebaseerd op probleemspecifieke inzichten: als dit ... dan dat ..., dus nu ... want dan ..., dus nu ... want dan ..., dus nu ... want dan ... enz.	Heuristieken expliciet maken.	Procedures	Begrijpen	Welke tactiek heb je toegepast?

Redeneren	Als je de tanks samenvoegt wordt dat weer 1. Als je dat proces nog een keer herhaalt haal je het eind. ... en schrijf alle zetten op. ... zodat je uiteindelijk tot hoger inzicht komt.	Kennis opbouwen op basis van redentie.	Ondersteuning altemeen leerdoel 3.	Procedures	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Stappen noteren			Probleemaanpak expliciet maken.	Procedures	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Tot inzicht komen			Inzicht verkrijgen uit opgebouwde kennis.	Procedures	Verbinden	Welke tactiek heb je toegepast?
Uitgewerkt voorbeeld	We begonnen met de makkelijkste manier waar we het opspitste in 2 groepen telkens.		Heuristieken expliciet maken	Example	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Vereenvoudig het probleem	Begin met een makkelijk probleem.		Heuristieken expliciet maken	Procedures	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Vergelijking opstellen voor een onbekende	Een logische volgende stap was om daarvoor een formule op te stellen.		Heuristieken expliciet maken	Procedures	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Verklein het probleem	Je moet het probleem eerst kleiner maken, een stapel van 4 chigles, en daarna kan je het zo groot maken als je wilt.		Heuristieken expliciet maken	Procedures	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Verschillende methoden	De verschillende manieren waarop je tot een oplossing kan komen.	Realiseren dat er verschillende manieren zijn waarop een probleem	Demonstreren dat de probleem-aanpak essentieel is	Procedures	Strategieën	Welke verschillende oplossingen zijn er?
Visualiseren	Door de muntjes te tekenen werd het makkelijk.		Heuristieken expliciet maken	Procedures	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Overzicht behouden door geschikte notatie	Het overzichtelijk maken door plaatjes.		Probleemaanpak expliciet maken	Procedures	Strategieën	Welke tactiek heb je toegepast?
Monitoren			Monitoren.	Procedures	Strategieën	Terugkijken
Andere strategie toepassen	Toen je het blijkbaar in 3x wegen kon doen, andere manier geprobeerd en weer op 4 uitgekomen.		Monitoren	Procedures	Strategieën	Ben je tussentijds gewisseld van tactiek?
Dimensie analyse	Toch 3x want 18m*2 is de oppervlakte en de volume met diepte is V=18m*2 *diepte (m).	Dimensie analyse uitvoeren om resultaat te controleren.	Monitoren	Procedures	Terugkijken	Hoe heb je (tussentijds) je resultaten gecontroleerd?
Fout realiseren	Ik had eerst een formule opgesteld waar de toename per x gelijk was aan 1(3/22), maar toen ik ook een derde waarde had uitgerekend om te zien wat de diepte was, zag ik dat iets fout was.	Deze fout heeft betrekking op het oplossen van het probleem.	Monitoren		Strategieën	Wat heeft voor nieuwe inzichten gezorgd?
Leren van fouten	Leren van elkaars fouten.		Cognitieve vaardigheden.	-	Begrijpen	Wat heeft voor nieuwe inzichten gezorgd?
Verander methode	Probeer een andere aanpak.	Verander van probleem aanpak.	Probleemaanpak expliciet maken	-	Strategieën	Ben je tussentijds gewisseld van tactiek?
Nieuwe methode bedenken	Zet al je bevindingen op een rij en kijk of je het probleem misschien anders kan aanpakken.	Bedenk een andere probleem aanpak.	Monitoren	-	Strategieën	Zou je het ook anders kunnen oplossen?
Niet van toegevoegde waarde			N.v.t	N.v.t	N.v.t	N.v.t
Te algemeen	Nadenken	-	-	-	-	-
Ongewenst antwoord	Laat je groepje het werk doen.	-	-	-	-	-
Grappige uitspraak	Money on my mind.	-	-	-	-	-
Opgave niet gemaakt	-	-	-	-	-	-
Opgave niet gelukt	Idk	-	-	-	-	-
Probleemverkenning			Probleemanalyse maken.	N.v.t	Begrijpen	Strategieën
Doelstelling bepalen	We kregen het niet voor elkaar om van 4 naar 3 stappen te komen.	Algemeen doel stellen.	Probleemanalyse maken	-	Begrijpen	-
Doelstelling specificeren	Vind het getal vanaf je het niet wilt pakken.	Doel stellen binnen specifieke probleemcontext.	Probleemanalyse maken	-	Verbinden	-
Methode bepalen	... kijk dan bij elk idee of het bruikbaar is.	Hier wordt er de afweging gemaakt.	Probleemanalyse maken	-	Strategieën	-
Strategieën bedenken	Begin met ideeën op het bord te schrijven (goed/fout)	-	Probleemanalyse maken	-	Strategieën	Welke verschillende oplossingen zijn er?
Wat zijn de gegevens	Eerst gegevens opgeschreven en verder uit te werken	-	Probleemanalyse maken	Vocabulary/Definition	Begrijpen	-
Samenwerking			Coöperatief leren.	N.v.t.	N.v.t.	N.v.t.
Hulp vragen	Vraag andere groepen om hulp.	-	Coöperatief leren	-	-	-
Ideeën overzichtelijk maken	Zo worden je ideeën ook zichtbaar voor anderen.	-	Coöperatief leren	-	-	-
Inzicht andere groep	Verklaring dat een groep de formule van de andere groep heeft overgenomen.	-	Coöperatief leren	-	-	-
Inzicht medeleefing	[Leerling] zag het in 1 keer.	-	Coöperatief leren	-	-	-
Motivatie	Het ging goed dat iedereen gemotiveerd was.	-	Coöperatief leren	-	-	-

Overleggen	Je moet goed overleggen.	-	Coöperatief leren	-	-
Uitleg krijgen	Ik begreep er eigenlijk vrij weinig van, maar gelukkig de rest van mijn groepje wel.	-	Coöperatief leren	-	-
Verdeling van de taken	Opschrijven moest je je groepje laten doen, dan kan jij nadenken	-	Coöperatief leren	-	-
Gezamenlijk redeneren	Oplossen van het probleem ging in een keer goed. We bedenken steeds 1 ding en vulde elkaar aan.	-	Coöperatief leren	-	-
Vertrouwen in de groep	Samenwerken, we kunnen het gewoon goed.	-	Coöperatief leren	-	-
Wijze van notatie				Strategieën	Strategieën
Realisatie overwonnen blokkade met behulp van specifieke notatie					
Boomdiagram	Vervolgens met een soort van boom bij mogelijkheden voor kansberekening keek ik met hoeveel auto's ik 1 afstand kon afleggen.	-	Realisatie overwonnen blokkade met behulp van specifieke notatie	Big Ideas/Concepts	Strategieën
Evalueren mogelijkheden	Verschillende manieren van notatie zijn besproken.	-	Betekenis geven aan geschikte notatie	Procedures	Strategieën
Notatie verbeteren	Dit kwam doordat ik de breuken tussen de tijdsprongen deed i.p.v. op de tijdsprongen. De Notatie zie bij 1.	-	Betekenis geven aan geschikte notatie	Procedures	Strategieën
Processchema		-	Realisatie overwonnen blokkade met behulp van specifieke notatie	Big Ideas/Concepts	Strategieën
Schema met annotatie	[Schema van getallen met annotatie als uitleg]	-	Realisatie overwonnen blokkade met behulp van specifieke notatie	Procedures	Strategieën
Situatieschets	Door eerst een schets te maken van ons probleem	-	Realisatie overwonnen blokkade met behulp van specifieke notatie	Procedures	Strategieën
Plaaties met symbolen	Vorm van notatie, door het gebruik van plaatjes met kruisjes en stipjes, wordt uitgelegd.	-	Realisatie overwonnen blokkade met behulp van specifieke notatie	Procedures	Strategieën
Wiskundige structuur				Big Ideas/Concepts	Verbinden
Breuken	Het gebruik van breuken maakte het makkelijk.	-	Cognitieve vaardigheden	Big Ideas/Concepts	Verbinden
Priemgetallen	Denk goed na over de kenmerken van priemgetallen.	-	Cognitieve vaardigheden	Big Ideas/Concepts	Verbinden
Perspectief uitbreiden				Big Ideas/Concepts	Verbinden
Toepassen van de oplossing	Het forceren van de stappen (de manier) zal helpen als je andere getallenrijen wilt gebruiken (1,2) (1,2,3) (1,2,3,4,5), etc.	-	Abstractie verhoging	Big Ideas/Concepts	Verbinden
Probleem variëren	Oplossingen van meerdere vergelijkbare problemen	-	Abstractie verhoging	Big Ideas/Concepts	Verbinden
Oplossing generaliseren				Big Ideas/Concepts	Verbinden
Formule opstellen	Uiteindelijk hebben we een kloppende formule	-	Abstractie verhoging	Big Ideas/Concepts	Verbinden
					Hoe kan je een 'algemene oplossing' bedenken?

Verdeling kenmerken van leerlingreflecties per iteratie

Reflectie kenmerken iteratie 1.1	#
1.1	30
Beperkt van toegevoegde waarde	3
Te algemeen geformuleerd	2
Heeft aanvulling nodig	1
Inzicht in probleem	1
Aantal onbekenden geconstateerd	1
Methode	6
Proberen	1
Redeneren	1
Uitgewerkt voorbeeld	2
Vergelijking opstellen voor een onbekende	1
Visualiseren	1
Monitoren	4
Dimensie analyse	1
Fout realiseren	3
Niet van toegevoegde waarde	6
Te algemeen	6
Probleemverkenning	3
Doelstelling bepalen	1
Doelstelling specificeren	1
Wat zijn de gegevens	1
Samenwerking	1
Uitleg krijgen	1
Wijze van notatie	1
Situatieschets	1
Oplossing generaliseren	5
Formule opstellen	5
Eindtotaal	30

Reflectie kenmerken iteratie 1.2	#
1.2	44
Beperkt van toegevoegde waarde	1
Te algemeen geformuleerd	1
Inzicht in probleem	10
Belangrijke constatering	3
Fout realiseren	2
Onderbouwing	1
Optimaliseren	3
Randvoorwaarde	1
Methode	9
Notatie als oploshulp	1
Optimaliseren	1
Proberen	2
Puzzelen	4
Redeneren	1
Niet van toegevoegde waarde	13
Te algemeen	9
Grappige uitspraak	2
Opgave niet gemaakt	2
Probleemverkenning	2
Methode bepalen	2
Samenwerking	2
Inzicht medeleerling	1
Motivatie	1
Wijze van notatie	6
Boomdiagram	2
Notatie verbeteren	1
Processchema	3
Wiskundige structuur	1
Breuken	1
Eindtotaal	44

Reflectie kenmerken iteratie 2.1	#
2.1	43
Beperkt van toegevoegde waarde	4
Te algemeen geformuleerd	1
Heeft aanvulling nodig	3
Het denkproces illustreren	2
Doormiddel van denkbeeldig visualiseren	1
Doormiddel van plaatjes	1
Inzicht in probleem	6
Belangrijke constatering	6
Methode	10
Ontwikkelen notatie	2
Proberen	1
Puzzelen	2
Redeneren	1

Reflectie kenmerken iteratie 2.2	#
2.2	4
Inzicht in probleem	2
Oplossing begrijpen	1
Oplossing verifiëren	1
Samenwerking	2
Inzicht andere groep	2
Eindtotaal	4

Uitgewerkt voorbeeld	2
Visualiseren	1
Overzicht behouden door geschikte notatie	1
Monitoren	2
Andere strategie toepassen	1
Fout realiseren	1
Niet van toegevoegde waarde	9
Te algemeen	1
Grappige uitspraak	2
Opgave niet gemaakt	6
Probleemverkenning	3
Doelstelling bepalen	2
Methode bepalen	1
Samenwerking	4
Overleggen	1
Gezamenlijk redeneren	2
Vertrouwen in de groep	1
Wijze van notatie	3
Situatieschets	3
Eindtotaal	43

Reflectie kenmerken iteratie 2.3	#
2.3	28
Beperkt van toegevoegde waarde	1
Te algemeen geformuleerd	1
Methode	2
Digitale middelen	1
Vereenvoudig het probleem	1
Monitoren	1
Nieuwe methode bedenken	1
Niet van toegevoegde waarde	12
Te algemeen	5
Ongewenst antwoord	1
Opgave niet gemaakt	3
Opgave niet gelukt	3
Probleemverkenning	2
Methode bepalen	1
Strategieën bedenken	1
Samenwerking	7
Hulp vragen	1
Ideeën overzichtelijk maken	1
Inzicht andere groep	3
Overleggen	1
Verdeling van de taken	1
Wiskundige structuur	2
Priemgetallen	2
Perspectief uitbreiden	1
Toepassen van de oplossing	1

Reflectie kenmerken iteratie 2.4	#
2.4	45
Beperkt van toegevoegde waarde	3
Te algemeen geformuleerd	2
Heeft aanvulling nodig	1
Inzicht in probleem	7
Belangrijke constatering	5
Conclusie	1
Ontdekking patroon	1
Methode	16
Patroon ontdekken	2
Proberen	6
Stappen noteren	1
Tot inzicht komen	1
Uitgewerkt voorbeeld	1
Vereenvoudig het probleem	1
Verklein het probleem	3
Verschillende methoden	1
Monitoren	3
Leren van fouten	2
Verander methode	1
Niet van toegevoegde waarde	3
Te algemeen	3
Probleemverkenning	3
Doelstelling specificeren	3
Samenwerking	3
Hulp vragen	1

Eindtotaal	28
-------------------	-----------

Overleggen	2
Wijze van notatie	5
Evalueren mogelijkheden	2
Schema met annotatie	1
Situatieschets	1
Plaatjes met symbolen	1
Perspectief uitbreiden	2
Toepassen van de oplossing	1
Probleem variëren	1
Eindtotaal	45

I

Analyse werkbladen

Categorieën van Schoenfeld

Iteratie	Leerling	Werkblad	Heuristieken	Metacognitie	Overtuigingen
		Voorbeeld bij categoriën Schoenfeld [14]	(plaatjes maken, introduceren geschikte notatie, vergelijkbare problemen analyseren, probleem herformuleren, achteruit werken, testen en verifiëren procedures) [14]	(plannen, monitoren en beoordelen, beslissingen maken, bewuste metacognitieve handelingen) [14]	(over zichzelf, de omgeving, het onderwerp of de wiskunde) [14]
1.1	1a	Vergelijking oplossen (1)	-	-	-
	1b	Vergelijking oplossen (1)	-	-	"Ik begreep er weinig van, maar gelukkig de rest van mijn groepje wel" (2)
	1c	Vergelijking oplossen (1)	-	Gebaseerd op voorbeeld berekeningen de formule herschreven en daarmee de fout herstelt (2)	"Ik dacht gelijk dat ik gebruik moest maken van formules, ..." (2)
	2a	Vergelijking oplossen (1)	Voorbeeld uitrekenen (2)	Er is vertelt hoe een blokkade in het oplosproces is overwonnen (2)	-
	2b	Verhoudingen (1)	Voorbeeld uitrekenen (2)	Er is vertelt hoe een blokkade in het oplosproces is overwonnen (2)	-
	2c	Vergelijking oplossen (1)	Voorbeeld uitrekenen (2)	-	"Mijn geweldige brein ..." (2)
	3a	Vereenvoudigen breuken (1), vergelijking oplossen (1)	-	"Uitzoeken wat we moesten doen" (2)	-
	3b	Vereenvoudigen breuken (1), vergelijking oplossen (1)	"Door eerst een schets te maken ..." (2), "... een onbekende waarde, ... formule opstellen" (2)	-	-
	3c	Werkblad niet Ingeleverd.	Werkblad niet Ingeleverd.	Werkblad niet Ingeleverd.	Werkblad niet Ingeleverd.
	4a	-	Voorbeeld uitrekenen (2)	Er is een blokkade in het oplosproces overwonnen (2)	-
	4b	-	Voorbeeld uitrekenen (2), "... opnieuw proberen ..." (2)	-	"Steeds opnieuw proberen tot je het wel hebt" (2)
	4c	-	Testen van het antwoord (1)	-	-
1.2	5a	Vergelijking oplossen (1)	"Formule opstellen" (2)	Fout in de volgorde van delen realiseren en verbeteren (2)	-
	5b	Vergelijking oplossen (1)	-	Fout in de volgorde van delen realiseren en verbeteren (2)	-
	5c	Vereenvoudigen breuken (1), vergelijking oplossen (1)	"... formule opgesteld" (2)	Fout in de volgorde van delen realiseren en verbeteren (2)	-
	1a	Breuken en procenten (1)	Schets maken (2), introduceren geschikte notatie (2)	'Er is vertelt hoe een blokkade in het oplosproces is overwonnen (2)	-
	1b	Verhoudingen en procenten (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	1c	Breuken en procenten (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	2a	Breuken (1)	"... steeds opnieuw proberen en logisch nadenken" (2), "opschrijven" (2)	Er is vertelt hoe een blokkade in het oplosproces is overwonnen (2)	-
	2b	Breuken (1)	Introduceren geschikte notatie (1), "steeds opnieuw kijken en puzzelen hoe het moet" (2)	-	-
	2c	Breuken (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	Er is vertelt hoe een blokkade in het oplosproces is overwonnen (2)	"Het gebruik van breuken maakte het makkelijk." (2)
	3a	Breuken (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	-	"Samenwerking, iedereen was gemotiveerd." (2)
	3b	Breuken (1)	Introduceren geschikte notatie (1), er werd gerealiseerd op een kwart van de route de tank halfvol was waardoor het probleem kleiner werd gemaakt (2)	-	-
	3c	Breuken (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	4a	Percentages (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	4b	Percentages (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	4c	Percentages (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	4c	Percentages (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-

2.1	5a	Breuken (1)	Introduceren geschikte notatie (1), er werd gerealiseerd dat de auto tot de helft van de route kan komen waardoor het probleem kleiner gemaakt wordt (1), "Door de schets werd het heel duidelijk ..." (2)	-	-
	5b	-	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	5c	-	Introduceren geschikte notatie (1), "De notatie" (2)	-	-
	6a	Breuken (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	"16 was te veel" dus beoordeeld dat de oplossing efficiënter kon (2)	"Wow" dus deze leerling was vermoedelijk zelf ook onder de indruk van de opgestelde algemene formule (1)
	6b	Breuken (1)	Introduceren geschikte notatie (1), "... soort boom bij mogelijkheden ..." (2)	"Ik had een vergissing gemaakt waardoor ... niet efficiëntst (2)", "Fout: we komen aan met een halve tank" (Reserve werkruimte), "Door verkeerd gekozen tekens dacht ik dat (O) een lege was" (Reserve werkruimte)	-
	1a	-	-	-	"Samenwerken, we kunnen het gewoon goed" (2)
	1b	-	-	"We bedachten steeds een ding en vulde elkaar aan." (2)	"Dit probleem is ingewikkeld om te noteren." (2)
	1c	-	"... andere manier geprobeerd ..." (2), "Door de muntjes te tekenen werd het makkelijk" (2)	-	-
	2a	-	Introduceren geschikte notatie (1)	-	"Dreamteam" (2)
	2b	-	-	-	-
	2c	-	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	3a	-	"Het verder beredeneren, plaatjes" (2), "Het overzichtelijk maken" (2)	-	-
	3b	-	-	-	-
	3c	-	Introduceren notatie (1)	-	-
	4a	-	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	4b	-	Introduceren geschikte notatie (1)	"Dit beruiste op het verkeerde geloof dat we wisten of de valse munt lichter of zwaarder was" er is dus een verbetering is aangebracht (2)	-
2.3	4c	-	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	5a	-	-	-	-
	5b	-	-	-	-
	5c	-	"... toen we waren begonnen ging het beter ..." (2), "het tekenen" (2)	-	-
	6a	-	-	-	-
	6b	-	-	-	-
	6c	-	Introduceren geschikte notatie (2)	-	-
	1a	Het aantal delers (1)	Voorbeeld beredeneren (1)	-	-
	1b	-	Zoeken naar het patroon (1)	-	-
	1c	Priemgetallen (1)	"Vereenvoudig het probleem zo goed mogelijk" (3)	"Zet je bevindingen op een rij en kijk of je het probleem misschien anders kan aanpakken" (2)	-
	2a	Priemgetallen (1), even en oneven (1), aantal delers (1)	Introduceren geschikte notatie (1)	-	-
	2b	Priemgetallen (1)	-	-	"Slechte samenwerking" (2)
	2c	Werkblad niet ingeleverd	Werkblad niet ingeleverd	Werkblad niet ingeleverd	Werkblad niet ingeleverd
	3a	Priemgetallen (1)	"Alle priemgetallen opschrijven ..." (1)	"... andere groepen om hulp vragen" (2)	-
	3b	Even en oneven (1), aantal delers (1)	-	-	-
	3c	Priemgetallen (1), even en oneven (1), aantal delers (1)	"... alle priemgetallen opschrijven ..." (1)	-	"Toen had ik geen zin meer" (1)
	4a	-	"Afkijken" en "Afkijken is niet erg" in de context van de les bedoelt de leerling dat het kan helpen inspiratie te halen uit het werk van anderen (1) en (2)	-	-

4b	Priemgetallen (1)	"... alle priemgetallen opzoeken" (1)	-	-
4c	Priemgetallen (1), aantal delers (1)	"Denk breed, omdat je dan na een tijdje kan zien wat er nog meer mogelijk is" (3)	-	-

Categorieën WDA

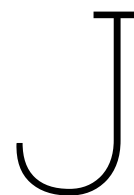
Iteratie	Leerling	Voorbeeld bij categorieën WDA (7) Modelleren en algebraïsen	Ordenen en structureren	Analytisch denken en probleemoplossen	Formules manipuleren	Abstraheren	Logisch redeneren en bewijzen
1.1	1a	Formule opgesteld (1)	-	Vergelijking opgesteld (1)	Vergelijking oplossen (1)	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)	-
	1b	Formule opgesteld (1)	-	-	Vergelijking oplossen (1)	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)	-
	1c	Formule opgesteld (1)	Verhouding (inhoud, oppervlakte en diepte (2))	Probleem is geanalyseerd (1), vergelijking opgesteld (1)	Vergelijking oplossen (1)	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)	Gebaseerd op logisch redeneren is de formule opgesteld (1)
	2a	Formule opgesteld (1)	-	Probleem is geanalyseerd (1), vergelijking opgesteld (1), je moet uitrekenen hoeveel de tuin stijgt (2)	Vergelijking oplossen (1)	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)	Gebaseerd op verhoudingen is de formule opgesteld (1)
	2b	Formule opgesteld (1)	-	Verhouding ondraaien (1), snijpunt zoeken met grafische rekenmachine (1), je moet uitrekenen hoeveel de tuin stijgt (2)	-	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)	Gebaseerd op verhoudingen is de formule opgesteld (1)
	2c	Formule opgesteld (1)	-	Probleem is geanalyseerd (1), vergelijking opgesteld (1)	Vergelijking oplossen (1)	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)	Gebaseerd op verhoudingen is de formule opgesteld (1)
	3a	Formule opgesteld (1)	-	Vergelijking opgesteld (1), "Begrijpen wat er gebeurd bij een formule" (2)	Formule herleiden en vergelijking oplossen (1)	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)	Het verspreiden van het zand en daarom delen (1)
	3b	Formule opgesteld (1), ook alle afmetingen komen naar voren in de algemene formule (3) <i>Werkblad niet ingeleverd.</i>	Er is expliciet onderscheid gemaakt in de verschillende oppervlaktes en dieptes (1)	Formule uit enkel variabelen opgesteld (algemene formule) (3) <i>Werkblad niet ingeleverd.</i>	Formule herleiden en vergelijking oplossen (1)	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1) <i>Werkblad niet ingeleverd.</i>	Het verspreiden van het zand en daarom delen (1)
	4a	-	-	Verschillende berekeningen proberen en controleren of het op het gewenste antwoord uit komt (1)	<i>Werkblad niet ingeleverd.</i>	-	<i>Werkblad niet ingeleverd.</i>
	4b	-	-	Er is geconstateerd tussen welke waarde het antwoord moet liggen en vanuit daar is verder gegaan met het zoeken naar de oplossing (1)	-	-	Er is onderbouwd waarom het antwoord tussen bepaalde waarden moet liggen (1)
1.2	4c	-	-	-	-	-	Het antwoord is geverifieerd met een berekening en uitleg (2)
	5a	Formule opgesteld (1)	Verhouding (inhoud, oppervlakte en diepte (1))	Vergelijking opgesteld (1)	Vergelijking oplossen (1)	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)	-
	5b	Formule opgesteld (1)	Verhouding (inhoud, oppervlakte en diepte (1))	Vergelijking opgesteld (1)	Vergelijking oplossen (1)	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)	-
	5c	Formule opgesteld (1)	Verhouding (inhoud, oppervlakte en diepte (1))	Vergelijking opgesteld (1)	Vergelijking oplossen (1)	Voor o.a. de te graven diepte is er een variabele gebruikt (1)	-
	1a	De gebruikte notatie (2)	De afstand is onderverdeeld met breuken en de tankinhoud is aangegeven met procenten (1)	I.p.v. een auto, meerdere auto's opnieuw vullen (2)	-	De gebruikte notatie (2)	De uitleg van het antwoord (1)
	1b	-	De afstand is onderverdeeld met verhoudingen en de tankinhoud is aangegeven met procenten (1)	-	-	-	De uitleg van het antwoord (1)
	1c	De gebruikte notatie (1)	De afstand is onderverdeeld met breuken en de tankinhoud is aangegeven met procenten (1)	-	-	De gebruikte notatie (1)	De uitleg van het antwoord (1)
	2a	De gebruikte notatie (1)	De tankinhoud in aangegeven in breuken en de afstand is grafisch onderverdeeld (1)	Het tijdstip van verplaatsen benzine maakt uit (2)	-	De gebruikte notatie (1)	-
	2b	De gebruikte notatie (1)	De tankinhoud in aangegeven in breuken en de afstand is oververdeeld met verhoudingen (1)	-	-	De gebruikte notatie (1)	-
	2c	De gebruikte notatie (1)	De tankinhoud in aangegeven in breuken en de afstand is oververdeeld met verhoudingen (1)	Er werd gerealiseerd dat de vip op de heft van de route een volle tank nodig heeft (2)	-	De gebruikte notatie (1)	De uitleg van het antwoord (1)
	3a	De gebruikte notatie (1)	De tankinhoud en de afgelegde afstand is aangegeven met breuken (1)	-	-	De gebruikte notatie (1)	De gebruikte notatie die anders en abstracter is dan de notatie op het whiteboard (1)
	3b	De gebruikte notatie (1)	De tankinhoud in aangegeven in breuken en de afstand is grafisch onderverdeeld (1)	Er werd gerealiseerd dat de tankinhoud kan samenvoegen en dat proces kan herhalen (2)	-	De gebruikte notatie (1)	De uitleg van het antwoord (2)
	3c	De gebruikte notatie (1)	De tankinhoud in aangegeven in breuken en de afstand is grafisch onderverdeeld (1)	-	-	De gebruikte notatie (1)	-
	4a	De gebruikte notatie (1)	De tankinhoud en de afgelegde afstand is aangegeven met percentages (1)	-	-	De gebruikte notatie (1)	-
	4b	De gebruikte notatie (1)	-	-	-	De gebruikte notatie (1)	-
	4c	De gebruikte notatie (1)	De tankinhoud en de afgelegde afstand is aangegeven met percentages (1)	Het antwoord is zo gepresenteerd in de situatie dat je met één auto wilt rijden. Er is vermoedelijk dus ook nagedacht over het eindigen met meerdere auto's wat duidt op het uitbreiden van het probleem of dat het probleem geoptimaliseerd is (1).	-	De gebruikte notatie (1)	De uitleg van het antwoord (1)
	5a	De gebruikte notatie (1)	De afstand is onderverdeeld met verhoudingen en de tankinhoud is aangegeven met breuken (1)	Er is een algemene formule genoemd (reserve werkruimte)	Er is een algemene formule opgesteld (reserve werkruimte)	De gebruikte notatie (1), variabele gebruikt voor het aantal auto's en het aantal volle tanken (reserve werkruimte)	De uitleg van het antwoord waarin duidelijk een logische redeneratie naar voren komt (1)
	5b	De gebruikte notatie (1)	De afstand is grafisch onderverdeeld en de tankinhoud is gepresenteerd als vol of halfvol (1)	Er is een algemene formule genoemd (1)	Er is een algemene formule opgesteld (1)	De gebruikte notatie (1), variabele gebruikt voor het aantal auto's en het aantal volle tanken (reserve werkruimte)	-
	5c	De gebruikte notatie (1)	-	-	-	De gebruikte notatie die bovendien abstracter is dan de notatie op het whiteboard (1)	-
	6a	De gebruikte notatie (1)	-	Er is een algemene formule genoemd (1), er is eerst een oplossing gevonden en deze is later geoptimaliseerd (2)	Er is een algemene formule opgesteld (1)	De gebruikte notatie (1), deze is in (2) abstracter geworden	-

2.1	6b	De gebruikte notatie (1)	De afstand is aangegeven met breuken en de tankinhoud is grafisch weergegeven (1)	Er is een algemene formule opgesteld (1)	Er is een algemene formule opgesteld (1)	De gebruikte notatie (1), balkjes zijn bolletjes geworden (1), variabele gebruikt voor het aantal auto's en het aantal volle tanken (reserve werkruimte)	Het is niet efficiënt als je tankinhoud overhoudt (1 en 2)
	1a	Uitbeelden balansstanden (1)	Onderverdelen lichtere en zwaardere groepen en dit aangeven met + of - (1), er wordt gaandeweg onderscheid gemaakt tussen de goede groepen en de groep met de valse munt (1)	-	-	De benaming van de zwaardere en lichtere groep: +, - (1)	Het beschreven stappenplan is een vorm van logisch redeneren met de balans (1)
	1b	-	Onderverdelen vier groepen die gepolst zijn uit twee (aa, ab, ba, bb) (1), "als aa=ub zit de valse munt in ba of bp" (1), er wordt gaandeweg onderscheid gemaakt tussen de goede groepen en de groep met de valse munt (1)	De vergelijking "aa=ab" (1)	-	De benaming van de vier groepen: aa, ab, ba, bb (1) en daarmee vergelijkingen maken: "aa=ab" (1)	Het beschreven stappenplan is een vorm van logisch redeneren met de balans (1), "We bedachten steeds een ding en vulde elkaar aan." (2)
	1c	-	Onderverdelen twee groepen en dit aangeven met + en - (1), er wordt gaandeweg onderscheid gemaakt tussen de goede groepen en de groep met de valse munt (1)	Alle mogelijke uitkomsten zijn beschreven (1), "Je wist niet of de valse munt zwaarder of lichter is" (2)	-	De benaming van de twee groepen (1)	Het beschreven stappenplan is een vorm van logisch redeneren met de balans (1)
	2a	De gebruikte notatie (1)	De 'verplaatsing' van de munten per stap ofwel de munten die 'afvallen' zijn schematisch weergegeven (1), er wordt gaandeweg onderscheid gemaakt tussen de goede groepen en de groep met de valse munt (1)	Er is verschil geconstateerd in "3 3" en de andere "3 3"	-	De gebruikte notatie (1)	-
	2b	De gebruikte notatie (1)	Er wordt gaandeweg onderscheid gemaakt tussen de goede groepen en de groep met de valse munt (1)	Voorbeeld van mogelijke uitkomst is beschreven, maar deze is toepasbaar op andere uitkomsten (1)	-	De hoeveelheid te wegen munten is aangegeven bij elke stap (1)	Het beschreven stappenplan is een vorm van logisch redeneren met de balans (1)
	2c	De gebruikte notatie (1)	De 'verplaatsing' van de munten per stap ofwel de munten die 'afvallen' zijn schematisch weergegeven (1)	Voorbeeld van mogelijke uitkomst is beschreven, maar deze is toepasbaar op andere uitkomsten (1)	-	De gebruikte schematische notatie en de weergave van de weeguitkomsten (1)	Het beschreven stappenplan is een vorm van logisch redeneren met de balans (1)
	3a	-	-	"Of het muntje zwaarder of lichter is" (2)	-	Er is geprobeerd de aanpak uit te leggen met een schema (2)	Het beschreven stappenplan is een vorm van logisch redeneren met de balans (1)
	3b	-	-	-	-	-	De redenatie bij de eerste stap (reserve werkruimte)
	3c	-	-	-	-	-	-
	4a	De gebruikte notatie (1)	Er is onderscheid gemaakt met open of ingekleurde bolletjes (1), (2)	Meerdere situaties zijn beschreven (1), (2)	-	De gebruikte notatie (1)	De redenatie in plaatjes (1)
	4b	De gebruikte notatie (1)	Er is aangegeven waar de valse munt zich bevindt (1), er wordt gaandeweg onderscheid gemaakt tussen de goede groepen en de groep met de valse munt (1)	Meerdere situaties zijn beschreven (1), je weet niet of de valse munt lichter of zwaarder is (2), "experimenteren" (2)	-	De gebruikte notatie (1)	De beschreven stappen is een vorm van logisch redeneren met de balans (1), "door verwisseling van 1 munt konden we de valse munt berekenen" (2)
	4c	De gebruikte notatie (1)	De 'verplaatsing' van de munten per stap ofwel de munten die 'afvallen' zijn schematisch weergegeven (1)	-	-	-	-
2.2	5a	-	-	"Op dat we niet wisten welke van de 2 de valse was" (2), "Dat je niet wist of de zwaarder of lichter was" (2)	-	-	-
	5b	-	-	"We wisten niet of de vast lichter of zwaarder was" (2)	-	-	-
	5c	-	-	-	-	-	-
	6a	De gebruikte notatie van de onbalans (1)	Er wordt gaandeweg onderscheid gemaakt tussen de goede groepen en de groep met de valse munt (1)	Alle mogelijke uitkomsten zijn beschreven (1)	-	-	De beschreven stappen is een vorm van logisch redeneren met de balans (1)
	6b	De gebruikte notatie van de onbalans (1)	De munten zijn in drie groepen verdeeld: A, B, C (1), 'Er wordt gaandeweg onderscheid gemaakt tussen de goede groepen en de groep met de valse munt (1)	Alle mogelijke uitkomsten zijn beschreven (1), 'Of de munt lichter of zwaarder is' (2)	-	De gebruikte notatie voor de mogelijkheden (1)	De beschreven stappen is een vorm van logisch redeneren met de balans (1)
	6c	De gebruikte notatie (1)	Er wordt gaandeweg gemaakt tussen alle mogelijke situaties (1)	-	-	De gebruikte notatie (1)	-
	1a	-	-	Er is gekeken naar het aantal veranderingen (1)	-	Er is gekeken naar het aantal veranderingen (1)	-
	1b	-	-	-	-	-	-
	1c	-	-	"De laatste 500 mensen raken maar 1 kuisje aan" (2), "de eerste persoon laat alle tentakels dicht" (1), "... worden twee keer aangeraakt ... dicht" (1)	-	"168 priemgetallen in 1000" (1)	"Ze worden twee keer aangeraakt ... dicht" (1)
	2a	De gebruikte notatie (1)	Er is onderscheid gemaakt tussen een even en oneven aantal delers (1)	Er is gekeken naar het patroon binnen de gebruikte notatie om tot het antwoord te komen (1)	-	Uiteindelijk is er gekeken naar het aantal delers van getallen in plaats van naar personen en kuisjes (1)	De oplossing is gepresenteerd als stelling en niet als oplossing. Blijkbaar vindt deze leerling zich dat het bewijs ontbreekt voor het gevonden resultaat (1)
	2b	-	-	-	-	-	-
	2c	Werkblad niet ingeleverd.	Werkblad niet ingeleverd.	Werkblad niet ingeleverd.	Werkblad niet ingeleverd.	Werkblad niet ingeleverd.	Werkblad niet ingeleverd.
2.3	3a	-	Er is onderscheid gemaakt tussen een even en oneven aantal delers (1)	De oplossing is in het algemeen beschreven dus de leerling realiseert zich dat dit een ook een oplossing is (1), "Doet het niet handmatig" (2)	-	Er is gekeken naar het aantal delers van getallen in plaats van naar personen en kuisjes (1)	De argumentatie van de gepresenteerde oplossing is een logische redenatie (1)
	3b	-	Er is onderscheid gemaakt tussen een even en oneven aantal delers (1)	De oplossing is in het algemeen beschreven dus de leerling realiseert zich dat dit een ook een oplossing is (1)	-	-	-
	3c	-	Er is onderscheid gemaakt tussen een even en oneven aantal delers (1)	De oplossing is in het algemeen beschreven dus de leerling realiseert zich dat dit een ook een oplossing is (1)	-	-	-
	4a	-	-	-	-	-	-
	4b	-	-	-	-	Er is gekeken naar het priemgetallen in plaats van naar personen en kuisjes (1)	-
	4c	-	-	"Denk goed na over de kenmerken van priemgetallen" (2)	-	Er is gekeken naar het aantal priemgetallen in plaats van naar personen en kuisjes (1)	De argumentatie waarom de priemgetallen dicht zullen zitten (1)

Vergelijking whiteboards en werkbladen

Iteratie	Leerling	Verschil whiteboard en werkblad Expliciet gemaakt? Duidelijker (meer uitleg en te volgen) en volledig (alle betekenisvolle stappen zijn benoemd of er is op gereflecteerd)	Zonder kladberekeningen	Inhoudelijke toevoeging in oplossing van het probleem of presentatie daarvan op het werkblad ten opzichte van het whiteboard
1.1	1a	Nee. Totstandkoming formule mist en eenheden missen.	Ja	Nee
	1b	Nee. Totstandkoming formule en het gelijkstellen aan de diepte mist.	Ja	Nee
	1c	Ja, bevat wel uitleg over de formule.	Ja	Nee
	2a	Beetje. Totstandkoming formule mist deels.	Ja	Ja. Het inverteren van de verhouding, deze stap staat niet op het whiteboard.
	2b	Beetje. Mist enkel oppervlakte berekeningen.	Ja	Ja. Het inverteren van de verhouding, deze stap staat niet op het whiteboard.
	2c	Nee. Totstandkoming formule mist deels.	Ja	Ja. Het inverteren van de verhouding, deze stap staat niet op het whiteboard.
	3a	Ja	Ja	Nee
	3b	Ja	Ja	Ja. Algemene formule opgesteld (3)
	3c	Werkblad niet ingeleverd.	Werkblad niet ingeleverd.	Werkblad niet ingeleverd.
	4a	Nee. Dit is te beknopt beschreven om te kunnen begrijpen zonder achtergrondkennis.	Nee	Nee
	4b	Nee. Er missen berekeningen bij de gegeven waarde en het antwoord komt redelijk uit de lucht vallen.	Nee	Nee
	4c	Nee. In dit antwoord wordt het probleem niet opgelost, maar wordt het antwoord uitgelegd.	Ja	Nee
	5a	Nee. Totstandkoming formule mist en eenheden missen	Ja	Nee
	5b	Nee. Totstandkoming formule mist en eenheden missen	Ja	Nee
	5c	Ja	Ja	Nee
1.2	1a	Ja	Ja	Nee
	1b	Beetje. Er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Nee
	1c	Beetje. Er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Nee
	2a	Ja	Ja	Nee
	2b	Beetje. Er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Nee
	2c	Beetje. Plaatje komt niet helemaal overeen met de uitleg.	Ja	Nee
	3a	Ja	Ja	Ja. De gebruikte notatie is aangepast (1).
	3b	Ja	Ja	Nee
	3c	Nee. Er mist uitleg en enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Nee
	4a	Beetje. Er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Nee
	4b	Nee. De gebruikte notatie is onvolledig gepresenteerd en er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Nee
	4c	Beetje. Er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Ja. Er is een berekening toegevoegd naar aanleiding van het schema om uit te rekenen hoeveel auto's je dan nodig hebt (1), dit kan helpen bij het formuleren van een algemene oplossing.
	5a	Ja	Ja	Nee
	5b	Nee. Het is niet duidelijk wat er bedoeld wordt en enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is mist.	Ja	Nee
	5c	Nee	Ja	Nee
2.1	6a	Nee	Nee	Ja. Een efficiëntere oplossing, de optimale oplossing, wordt geconstateerd met een notatievorm als onderbouwing die abstracter is dan de eerder gebruikte versie (2)
	6b	Ja. Door de toelichting bij opgave 2 is de gebruikte notatie en de denkwijze te begrijpen.	Nee	Ja. Op het werkblad zelf is ook een fout ten opzichte van whiteboard en eerdere werk op werkblad verbeterd (reserve werkruimte)
	1a	Nee. Het whiteboard geeft meer informatie over wat er bedoeld wordt.	Ja	Nee
	1b	Ja	Ja	Ja. Ondervinden met tweetalig stelsel (1) wat kan leiden tot het toepassen van een drietalig stelsel en daarmee het vinden van de optimale oplossing.
	1c	Ja	Ja	Ja. Verschil met uitlegstappen, verschillende situaties en weegmomenten aangegeven.
	2a	Nee. Dit is te beknopt beschreven om te kunnen begrijpen zonder achtergrondkennis.	Ja	Nee
	2b	Beetje. Er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Nee
	2c	Beetje. Er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Nee
	3a	Ja	Ja	Nee
	3b	Nee. De oplossing is niet volledig en er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Nee
	3c	Nee	Nee	Nee
	4a	Nee. Enige uitleg of argumentatie mist.	Ja	Nee

	4b	Ja	Ja	Ja. Er is naar zeggen van de leerling een betere notatie bedacht en er is geprobeerd het probleem efficiënter op te lossen (reserve werkruimte)
	4c	Nee. Enige uitleg of argumentatie mist en enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is mist.	Ja	Nee
	5a	Nee	N.v.t.	Nee
	5b	Nee. De oplossing is niet volledig en er mist enige over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Nee
	5c	Nee	N.v.t.	Nee
	6a	Beetje. Er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Ja. Op het whiteboard is alleen een hele abstracte versie van het antwoord te vinden, op het werkblad is de oplossing dus daadwerkelijk uitgewerkt.
	6b	Beetje. De laatste stap is niet uitgelegd in de eerste opgave.	Ja	Ja. Op het whiteboard is alleen een hele abstracte versie van het antwoord te vinden, op het werkblad is de oplossing dus daadwerkelijk uitgewerkt.
	6c	Nee. Dit is een onvolledig antwoord.	Nee	Nee
2.3	1a	Ja. Niet de volledige oplossing maar dat was ook nog niet gevonden door deze groep.	Ja	Nee
	1b	Nee	N.v.t.	Nee
	1c	Ja. Niet de volledige oplossing maar dat was ook nog niet gevonden door deze groep.	Ja. Wel constatering opgeschreven die in de uitwerking niet tot de oplossing leiden, maar aangezien de volledige oplossing niet gevonden is, is dit wel relevant.	Ja. Alles wat bij opgave 1 is genoteerd staat niet op het whiteboard bij deze groep.
	2a	Beetje. Er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Ja. In tegenstelling tot het whiteboard gaat het op het werkblad niet over het even of oneven aantal priemfactoren maar het even of oneven aantal delers, wat het goede antwoord is.
	2b	Nee	N.v.t.	Nee
	2c	<i>Werkblad niet ingeleverd.</i>	<i>Werkblad niet ingeleverd.</i>	<i>Werkblad niet ingeleverd.</i>
	3a	Nee	N.v.t.	Nee
	3b	Beetje. Er mist enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Ja. Er staat niks over het aantal delers op het whiteboard en er is toegevoegd dat je het beter niet handmatig kunt berekenen (2)
	3c	Nee. Er mist uitleg en enige informatie over hoe de gepresenteerde oplossing gevonden is.	Ja	Ja. Er staat niks over het aantal delers op het whiteboard.
	4a	Nee	N.v.t.	Nee
	4b	Nee	N.v.t.	Nee
	4c	Ja	Ja	Ja. Er is een argumentatie toegevoegd waarom de priemgetallen dicht zullen zitten.



Aanpassingen per iteratie

In deze appendix worden de aanpassingen binnen het lesplan meer gedetailleerd beschreven en gemotiveerd. Daarnaast zullen de aanpassingen binnen het ontwerp beschreven en beargumenteerd worden.

Iteratie 1.1

Ontworpen werkblad

Het werkblad is ontworpen met het oog op de theorie die beschreven in subparagraaf 3.5.1. In deze subparagraaf zal dit nader worden toegelicht.

De bedoeling van de eerste opgave op het werkblad, *"Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit. Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld door middel van pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken."*, is dat leerlingen een eigen individuele uitwerking van het basisprobleem maken. Hierdoor wordt er ruimte ingebouwd voor zelfstandig leren binnen een coöperatieve werkvorm, wat een geschikte onderwijssituatie is voor het leren probleemoplossen [21]. Verder wordt er door te vragen om de uitwerking te annoteren, er volgens Liljedahl een betekenisvolle aantekening gemaakt [12] en brengen de leerlingen hun tot dan toe opgebouwde kennis in kaart [7]. Dit kan mogelijk bijdragen aan het creëren van zelfvertrouwen. Daarnaast is deze vraag een middel om individuele niveauverhoging binnen het probleemoplossen geleidelijk aan plaats te laten vinden door specifieke aandacht te besteden aan 'doing' en 'justifying' binnen de 'modes of engagement' [12]. 'Doing' komt aan de orde doordat leerlingen ook individueel de oplossing van het probleem uitwerken. 'Justifying' komt aan de orde doordat leerlingen individueel de oplossing reproduceren en daarbij mogelijk gebruik maken van het groepswork op het whiteboard. Aangezien op het whiteboard in praktijk vaak ook foute tussenstappen te vinden zijn, moeten leerlingen elke stap binnen de oplossing heroverwegen. Door de uitwerking ook te moeten annoteren wordt er aandacht besteed aan 'explaining' binnen de 'modes of engagement' [12] en indien het relevant is ook aan het kader 'Vocabulary/Definition' van de algemene 'graphic organizer' die Liljedahl voorstelt, zie Figuur 3.1. Bovendien valt deze opgave in zijn geheel onder het kader 'Example' van de algemene 'graphic organizer'. Echter hoeven de leerlingen met het doen van de eerste opgave op het werkblad een geschikt voorbeeld te selecteren, wat volgens Liljedahl een belangrijke denkactiviteit is bij het kader 'Example'. Toch wordt deze denkactiviteit bij de leerlingen wel gestimuleerd door het reproduceren van de oplossing en deze op een nette manier met een logische opeenvolging van stappen te noteren.

De tweede opgave op het werkblad, *"Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen. a. Wat ging er niet (direct) goed? b. Wat ging er (later) wel goed?"*, is ontworpen gebaseerd op de kaders 'Big Ideas/Concepts' en 'Procedures'. Zoals eerder beschreven in subparagraaf 3.5.1 moet voor het onderwijs in probleemoplossen binnen deze lespraktijk het expliciet maken van (heuristische) methoden en het verwoorden van de mathematische kern centraal staan. De hoofdvraag van de tweede opgave op het werkblad is in het algemeen gericht op 'Procedures'. Om leerlingen hier meer richting bij te geven zijn de hulpvragen toegevoegd. Als mogelijk antwoord kunnen ze reflecteren op het oplossingsproces en daarmee (heuristische) methoden expliciet maken. Mogelijk kunnen

zij ook verwoordten dat het goed ging wanneer ze doorhadden hoe de kern van de oplossing van precies in elkaar steekt en dat het daarvoor niet zo goed ging. In dit geval zouden de leerlingen dan mogelijk de mathematische kern expliciet maken.

Tot slot is de derde opgave op het werkblad optioneel. Deze is bedoeld voor leerlingen die eerder klaar zijn en om de overgang terug naar het whiteboard en daarmee het bedenken en oplossen van een vergelijkbaar probleem en het formuleren van een algemene oplossing te stimuleren. In deze opgave worden leerlingen er daarom alvast toe aangezet om verticaal te mathematiseren: "Klaar? a. Help indien nodig je groepsgenoten. b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op. c. Wanneer iedereen klaar is gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.". Hiermee wordt er ook aandacht besteed aan 'Creating' binnen de 'modes of engagement' [12]. Daarvoor wordt er gesuggereerd om medeleerlingen te helpen met het werkblad, waardoor ook 'teaching' aan bod komt. Op deze manier wordt er aan elke 'mode of engagement' opeenvolgend aandacht besteed.

Ontworpen voorbeeld van het werkblad

Om de leerlingen meer te sturen naar betekenisvolle antwoorden op de opgaven op het werkblad, gerelateerd aan het leren probleemoplossen, wordt er aan de leerlingen een uitgewerkt voorbeeld gegeven. In dit voorbeeld wordt er een probleem uitgewerkt dat afkomstig is van [12]. Dit probleem heeft een relatief lage moeilijkheidsgraad voor de leerlingen in de lespraktijk, waardoor ze eerder kunnen overzien wat er bedoeld wordt met het voorbeeld. Als voorbeeld op de tweede opgave zijn ook andere betekenisvolle reflecties gegeven. In het voorbeeld voor de derde opgave is een vergelijkbaar probleem omschreven dat aansluit op het probleem van de vorige les. Deze zal voor deze groep leerlingen in de lespraktijk dan ook bekend zijn en daarom betekenis geven aan de bedoeling van deze opgave.

Iteratie 1.2

Aanpassingen binnen het lesplan

Tijdens iteratie 1.1 bleek het zo te zijn dat sommige leerlingen erg lang bezig waren met het werkblad en soms zelfs vanzelf doorgingen met het individueel verbeteren of uitbreiden van het probleem dat ook vervolgens gezamenlijk op het whiteboard gedaan kon worden. Tegelijkertijd waren er ook leerlingen die juist eerder klaar waren met het werkblad, vervolgens niks gingen doen en wachtten tot verdere instructie van de docent. Opgave 3, bedoelt als opgave voor leerlingen die eerder klaar zijn, werd niet gebruikt door deze leerlingen. Om dit te voorkomen zal er een tijdslimiet aan het werken aan het werkblad worden gesteld en leerlingen moeten daarna, indien er voldoende tijd over is, actief terug worden verwezen naar de whiteboards voor het volgende lesonderdeel.

Verder werd niet door iedere leerling een gewenst antwoord op opgave 1 en 2 van het werkblad gegeven. Omdat niet iedere leerling lang genoeg de tijd nam om te werken aan het werkblad is het aannemelijk dat deze leerlingen onvoldoende gemotiveerd waren om te werken aan het werkblad. Oorspronkelijk was de vermelding van de bijbehorende leerdoelen op het werkblad bedoeld om leerlingen te motiveren. Dit werkte dus niet voldoende. In het nieuwe werkblad zullen deze leerdoelen ook worden verwijderd, vanwege redenen die hierna zijn beschreven. De motivatie voor het werkblad moet daarom op een andere manier worden overgebracht op de leerlingen. Dit zal de docent tijdens de introductie van de les klassikaal doen door het werkblad verder toe te lichten en de redenen ervoor te motiveren, zie appendix B. . Hierbij is het ook van belang het verschil in het werk op het whiteboard en de nette individuele uitwerking toe te lichten.

Aanpassingen binnen het ontwerp

Het formaat van het werkblad en het bijbehorende voorbeeld was erg lang. Dit had mogelijk ook invloed op de motivatie van de leerlingen. Daarnaast bleek dat de leerlingen lang niet alle gekregen schrijfruimte op het werkblad nodig hadden. Om het ontwerp compacter te maken is de schrijfruimte verkleint, de formulering van de vragen verkort en zijn de leerdoelen verwijderd. Daarnaast bleek bijna niemand toe gekomen te zijn aan opgave 3 op het werkblad of was hier motivatie voor. Deze opgave was optioneel was en bedoeld was voor een soepele overgang naar het volgende les onderdeel. Die soepele overgang zal in deze les worden gecreëerd, doordat de docent de leerlingen hiertoe actief zal aanzetten, zoals hiervoor is beschreven. Daarmee is opgave 3 overbodig geworden. Deze zal daarom worden verwijderd op het werkblad.

Daarnaast kan het ook komen dat niet iedere leerling het gewenste antwoord op opgave 1 en 2 hebben gegeven, doordat leerlingen mogelijk niet voldoende begrepen hebben wat de bedoeling was. Het voorbeeld was mogelijk niet duidelijk genoeg. Zoals eerder genoemd is het ontwerp compacter en overzichtelijker gemaakt. Zo bestaat het werkblad nu enkel uit een voor- en achterkant van een A4'tje en ligt de nadruk op de voorkant. Verder zijn opgave één en twee naast elkaar gepositioneerd. Dit zal de leerlingen mogelijk helpen bij het maken van opgave 2, omdat ze dan tegelijkertijd terug kunnen kijken naar de uitwerking en hier mogelijk met een pijltje naar verwijzen. Ook lijkt deze lay-out ook meer op de 'graphic organizers' die Liljedahl voorstelt, zie Figuur 3.1. Het voorbeeld is ook compacter gemaakt door minder soorten antwoord opties te geven bij de tweede opgave. Daarnaast is het voorbeeld aangepast door het verder te verduidelijken. Daarvoor zijn het antwoord opties bij opgave 2 specifieker gemaakt en gebaseerd op goede leerling antwoorden uit de vorige iteratie. Deze zijn daarom mogelijk betekenisvoller voor de leerlingen. Bij de eerste opgave wordt aan het voorbeeld de aandacht voor het gebruik van eenheden toegevoegd, aangezien veel leerlingen dit bleken te vergeten. Bovendien worden er bij beide opgaven ook een non-voorbeeld gegeven, om er voor te zorgen dat de leerlingen beter begrijpen wat er wel en wat er niet de bedoeling is. Bij elk non-voorbeeld zijn er ook suggesties gegeven over hoe dit antwoord verbeterd kan worden, zodat leerlingen hier van kunnen leren. Ook is er grafisch aangegeven wat de voorbeelden en non-voorbeelden zijn en is er passend kleurgebruik toegepast om de aandacht hiervoor te vergroten. Verder is de aankondiging van de voorbeelden en non-voorbeelden in leerlingtaal verwoord. Daarnaast zal het voorbeeld tijdens de les verder worden toegelicht, zie appendix B.

Naast dat het voorbeeld mogelijk niet duidelijk genoeg was, kan het ook liggen aan de formulering van de opgaven op het werkblad. Deze waren mogelijk niet duidelijk en volledig genoeg. De formulering van de eerste opgave is aangepast zodat er nu expliciet naar de stappen wordt gevraagd. Er wordt expres niet naar 'alle' stappen, omdat er nog wel geselecteerd moet worden op het werk op het whiteboard. 'Foute' tussenresultaten horen bijvoorbeeld niet in deze uitwerking, maar zijn wel stappen in het oplossingsproces. Ook de tweede opgave is anders geformuleerd. Uit de resultaten van de leerlingen op de tweede opgave van het werkblad blijkt dat de meeste leerlingen niet voldoende uitleg geven bij hun antwoorden. Daarnaast bleek dat er maar beperkt antwoord werd gegeven op de hulpvraag wat er niet direct goed ging. Dit is ook een negatieve benadering. Dit is onterecht aangezien het vastlopen karakteristiek is voor het probleemoplossen en dat niet betekent dat het oplossen niet goed gaat. Mogelijk leidt een positievere formulering, waarbij er gevraagd wordt waar de leerlingen op vast liepen, tot meer betekenisvolle antwoorden. Tijdens het probleemoplossen loop je eigenlijk altijd wel even vast, dat wil niet per se zeggen dat dit valt onder iets wat niet goed gaat. Een formulering die op dit idee is gebaseerd geeft mogelijk meer richting voor een gewenst antwoord. Voor elke formulering is er gezocht naar passend taalgebruik voor leerlingen.

Om te onderzoeken of de volgende iteratie het werkblad en voorbeeld wel duidelijk genoeg was volgens de leerlingen zijn hier feedbackvragen over toegevoegd op de achterkant van het werkblad.

Tot slot wordt er nu op het werkblad gevraagd door wie het werkblad is ingevuld. Tijdens de analyse bleek het namelijk handig te zijn om gebruik te maken van voorkennis over een specifieke leerling. Als een cognitief sterke leerling iets als enige heeft begrepen zegt dat iets anders dan als een cognitief zwakkere leerling iets heeft begrepen.

Iteratie 2.1

Aanpassingen binnen het lesplan

De antwoorden op vraag 2 van het werkblad zullen tijdens deze iteratie worden besproken om leerlingen te motiveren om dit zo goed mogelijk te doen, de leerlingen te leren wat een goede reflectie is, samen met de leerlingen betekenis te geven aan een goede reflectie en hiermee leerlingen verder te helpen door het formuleren van tips over de probleemaanpak. Voor het doorvragen op de leerlingantwoorden om zo goed mogelijke reflecties te krijgen zijn er voor de docent voorbeeldvragen opgesteld, zie appendix B. Door leerlingen elkaar tips te laten geven zullen ze mogelijk gemotiveerd raken om tot een bruikbare en volledige reflectie te komen en weten ze mogelijk makkelijker te bepalen waar een reflectie aan moet voldoen.

Aanpassingen binnen het ontwerp

Uit de resultaten van de leerlingen op de tweede opgave op het werkblad blijkt dat de leerlingen uit de groepen die oplossen van het probleem makkelijk vonden het niet lukte om een betekenisvolle reflectie te formuleren, zie groep 4 en 5. Om er voor te zorgen dat deze leerlingen wel iets aan de opgave hebben kan hen beter gevraagd worden waar ze rekening mee moesten helpen. Dit kan hen stimuleren zich bewust te worden van de kern van het probleem. Tegelijkertijd kan dit de andere leerlingen helpen die hun antwoorden nog niet voldoende onderbouwen of uitleggen. Dit komt namelijk ook vaak naar voren in de resultaten van de tweede opgave. Op het werkblad is daarom bij opgave 2 de hulpvraag toegevoegd, "Waar moest je rekening mee houden?". Deze vraag geeft op een andere manier sturing voor goede leerling reflecties wat betreft het verwoorden van de mathematische kern en daarmee 'Big Ideas/Concepts' binnen de algemene 'graphic organizer' van Liljedahl, zie Figuur 3.1. Als antwoord op deze hulpvraag zouden leerlingen iets kunnen noemen wat van essentieel belang is voor het oplossen van het probleem, wat mogelijk bijdraagt aan het proces van verticaal mathematiseren.

Het bijbehorende voorbeeld is bijna helemaal hetzelfde gelaten. De leerlingen gaven in de feedback aan dit duidelijk te vinden. Enkel zijn logischerwijs de vraagstelling bij opgave 2 aangepast en is er bij het probleem gezet dat de leerlingen dit niet over hoeven te nemen. Leerlingen volgde namelijk nu zo goed het voorbeeld op, dat zij ook het probleem gingen beschrijven op het werkblad. Dit past niet bij de opgestelde leerdoelen bij het werkblad, waardoor het een overbodige activiteit voor de leerlingen is. Daarnaast is de uitwerking voorbeeld digitaal weergegeven in plaats van een geschreven uitwerking.

Iteratie 2.2

Aanpassingen binnen het lesplan

Het lesplan en het doel van deze les is aangepast, aangezien er vanaf deze les er een (deels) nieuwe groep leerlingen deel neemt aan de lessen. Het doel van deze les is daarom voornamelijk om de leerlingen kennis te laten maken met het onderwijs door middel van BTC. Aangezien BTC op zichzelf al erg afwijkt van de reguliere lessen, zullen er geen grote aanpassingen of een specifieke nadruk op de reflectie in de les worden toegevoegd.

Aanpassingen binnen het ontwerp

Aangezien er in deze les leerlingen met het werkblad en het bijbehorende voorbeeld gaan werken, is het niet handig om het voorbeeld bij opgave 2 goede leerlingantwoorden te gebruiken uit vorige iteraties. Deze zijn namelijk gebaseerd op de ervaringen van de leerlingen uit die lessen en daarom niet betekenisvol voor de nieuwe leerlingen. De voorbeeld antwoorden zijn daarom gegeneraliseerd. Verder wordt er een tip gegeven dat mogelijk leerlingantwoorden verder specificeert. Dit wordt gedaan in de vorm van een tip met een opvallend icoon. Dit trekt op deze manier mogelijk meer de aandacht van de leerlingen en houdt het voorbeeld overzichtelijk, wat waarschijnlijk nodig is omdat het voorbeeld erg vol is. De inhoud van de tip gaat over de verschillende heuristieken die tijdens het probleemoplossen kunnen worden toegepast. Voor het onderwijs in probleemoplossen is het nuttig om hier op te reflecteren, zoals eerder meerdere malen aan de orde is gekomen in het theoretisch kader, zie hoofdstuk 3. Op deze manier kan er naar dit soort goede reflecties gestuurd worden, zonder hier een algemene hulpvraag over te formuleren die leerlingen snel zouden begrijpen of vele voorbeeld antwoorden te omschrijven. Dit bleek namelijk een uitdaging te zijn in de ontwerpfase. Daarnaast kan er door middel van een tip op deze manier naar vele soorten goede reflecties worden verwezen, zonder aan iedere optie een volledige voorbeeldzin te moeten wijden. Wanneer je wel voor iedere optie een zin zou moeten schrijven zou het voorbeeld onoverzichtelijk groot worden en lang van stof, wat eerder in iteratie 1.1 al een geconstateerde belemmering was op het leereffect van het werkblad en het voorbeeld.

Iteratie 2.3

Aanpassingen binnen het lesplan

Uit iteratie 2.1 is er gebleken dat het samenstellen van groepen een stimulerend effect had op het bespreken van verschillende oplosstrategieën. Leerlingen kunnen dan ook op elkaar reageren wat de gesprekken en later de reflecties specifieker kan maken. Verder bleek het zo te zijn dat er een te grote drempel is om schriftelijk te reflecteren. Er over praten gaat daarentegen makkelijker. Ook kunnen leerlingen op elkaar reageren waardoor er zinvolle gesprekken kunnen ontstaan. Daarnaast

worden volgens de theorie, zie subparagraaf 3.5.2, leerlingen gestimuleerd om te reflecteren wanneer het probleem van een relevante moeilijkheidsgraad is. Verder is in iteratie 2.2 gebleken dat leerlingen beter naar elkaar luisteren als zij de oplossing van het probleem nog niet gevonden hebben. De moeilijkheidsgraad van het basisprobleem is hierin niet voor iedereen toereikend genoeg. Het kan daarom bevorderend zijn voor het stimuleren van interessante en betekenisvolle reflecterende gesprekken tussen leerlingen om dit plaats te laten vinden na het verticaal mathematiseren. Zo krijgen de groepen de gelegenheid om vooraf aan het gesprek de moeilijkheidsgraad van het probleem te verhogen. Vanwege deze redenen is er bedacht om de leerlingen eerste de tijd te geven voor het oplossen van het basisprobleem, vergelijkbare problemen te bedenken en op te lossen en vervolgens mogelijk een algemene oplossing te formuleren. Daarna zal het werkblad pas geïntroduceerd worden om de individuele leeropbrengst te garanderen. In dit geval zal het werkblad alleen niet meer helpen bij stapsgewijze niveauverhoging voor het verticaal mathematiseren, maar mogelijk kunnen leerlingen hierdoor wel gemakkelijker tot betekenisvolle reflecties komen. Voor de tweede opgave op het werkblad, zoals hierna beschreven is, zullen de leerlingen met elkaar gesprekken moeten voeren met behulp van de vragenkaart. Vervolgens noteren ze hun belangrijkste bevindingen op het werkblad. Indien er voldoende tijd over is kan er worden afgesloten met het bespreken hiervan en een kortere 'gallery-walk'.

Aanpassingen binnen het ontwerp van het werkblad en de vragenkaart

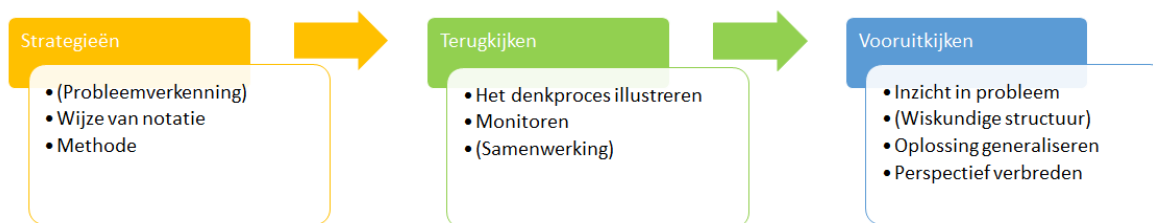
De tweede opgave van het werkblad is aangepast en vervangen door twee andere opgaven. Hierop staat de instructie voor het werken met de vragenkaart. Deze twee andere opgaven zijn voornamelijk bedoeld voor de dataverzameling van de gesprekken die leerlingen met elkaar voeren aan de hand van de vragenkaart. Er wordt gevraagd naar de belangrijkste inzichten die ze hebben opgedaan. Specifiek wordt er gevraagd om een medeleerling een tip te geven en om de belangrijkste les die ze hebben geleerd te verwoorden. In het bijbehorende voorbeeldwerkblad wordt er de leerlingen duidelijk gemaakt wat er wel en niet van hen verwacht wordt.

Ontworpen vragenkaart

Gebaseerd op de ontwerpeisen uit subparagraaf 3.5.2 zijn er drie categorieën opgesteld waaruit de vragenkaart zal bestaan. Dit zijn 'strategieën', 'terugkijken' en 'vooruitkijken'. De kenmerken van betekenisvolle leerlingantwoorden zijn onder deze categorieën verdeeld, dit is weergegeven in Figuur J.1. Bij elk kenmerk en elk betekenisvol antwoord van een leerling is een vraag bedacht om een leerling te sturen naar dit antwoord. De belangrijkste vragen vormen de basis van de vragen binnen de categorieën van de vragenkaart. De kenmerken die tussen haakjes staan leiden tot betekenisvolle antwoorden, maar passen niet direct bij de ontwerpeisen van de vragenkaart. Specifiek voor deze kenmerken zijn daarom niet direct vragen toegevoegd, maar het kan voorkomen dat een andere vraag dit kenmerk wel ondersteunt. Zo is 'Samenwerking' niet direct relevant voor de algemeen opgestelde leerdoelen, zie subparagraaf 3.4.1, maar kan het wel een antwoord zijn op de vraag wat er goed ging. Een antwoord dat onder 'Wiskundige structuur' valt kan bijvoorbeeld ook als antwoord worden gegeven op een van de andere vragen, wat het overbodig maakt om hier specifiek naar te vragen. Verder is 'Probleemverkenning' in mindere mate relevant zijn binnen de laatste fase van de les. Toch vormt het wel de basis de analyse van de verschillende oplossingen, waar ook naar wordt gevraagd binnen de categorie strategieën.

Omdat niet alle categorieën van de META-kaart en de 'graphic organizers' van Liljedahl worden toegepast in het ontwerp van de vragenkaart, moet er een ander design worden bedacht. Het design, dat overeenkomt met Figuur J.1, is gebaseerd op de META-kaart, maar dan met drie opeenvolgende categorieën in plaats van een driehoek met samenhangende categorieën. In de eerste categorie 'strategieën' ligt de nadruk op het analyseren, vervolgens ligt in de categorie 'terugkijken' de nadruk op het evalueren en tot slot in de laatste categorie 'vooruitkijken' ligt de nadruk op het reflecteren voor de toekomst.

De opgestelde vragen zijn per kenmerk te vinden in de laatste kolom in appendix H. Binnen een categorie worden de vragen worden op een opbouwende manier gesteld. Bij 'terugkijken' zijn de vragen uit de laatste kolom van appendix H aangevuld met de vragen "Wat ging er goed?" en "Waar liep je op vast?" om leerlingen betekenisvolle momenten tijdens het probleemoplossen helpen te herinneren. Om er voor te zorgen dat het de ontworpen vragenkaart voor iedere les en dus bij ieder probleem inzetbaar is, zijn deze vragen algemeen geformuleerd. Door aan de opgestelde ontwerpeisen te voldoen en meer hulpvragen gebaseerd op leerlingantwoorden te geven, worden leerlingen mogelijk gestimu-



Figuur J.1: Onderverdeling kenmerken van leerlingreflecties op de vragenkaart

leerd tot het metacognitief reflecteren. Tot slot is er een rood vlak toegevoegd aan de vragenkaart die de leerlingen moet stimuleren op elkaars antwoorden door te vragen voor specifiekere reflecties en daarmee antwoorden van meer betekenis. Dit zal ook veroorzaakt worden als leerlingen door de vragenkaart met elkaar in gesprek gaan, in plaats van het afwerken van een vragenlijst.

Iteratie 2.4

Aanpassingen binnen het lesplan

Om meer de leerlingen meer te motiveren voor het werken met de vragenkaart zal er van tevoren tijdens de introductie van de les de vragenkaart worden toegelicht en de functie ervan verduidelijkt. Verder wordt er voorafgaand aan het werken met de vragenkaart geconsolideerd vanaf het begin tot het oplossen van het basisprobleem met een 'gallery-walk'. Zo wordt er herhaald waar de les in eerste instantie over ging, waardoor leerlingen gemakkelijker met elkaar verder kunnen praten. Er wordt namelijk op deze manier aan de leerlingen bevestiging gegeven dat hun oplossing van het basisprobleem (waarschijnlijk) goed is. Wanneer deze bespreking te kort voor leerlingen blijkt, kunnen ze hier met medeleerlingen over verder praten in het volgende onderdeel. Vervolgens is het van belang dat de docent toe licht hoe er gewerkt moet worden met de vragenkaart en dat deze besproken wordt. De vermelding dat de vragenkaart klassikaal besproken wordt zal de leerlingen waarschijnlijk meer motiveren om de opdracht goed uit te voeren. Daarna is het van belang dat de docent er op toe ziet dat er samengestelde groepen worden gecreëerd en dat niemand alleen zit. Wanneer de leerlingen klaar zijn met de vragenkaart zullen ze pas het werkblad krijgen, om te voorkomen dat ze enkel het werkblad invullen en niet meer doorgaan met het bespreken van de vragen van de vragenkaart. Na het bespreken met de vragenkaart zal dit klassikaal besproken worden, waarna de leerlingen de gelegenheid krijgen hun werkbladen aan te vullen.

Aanpassingen binnen het ontwerp

op het werkblad is de eerste opgave waarin de oplossing van het probleem moet worden uitgewerkt achterwege gelaten, om te voorkomen dat hier te veel aandacht van de leerlingen naartoe gaat. Dit past beter bij de leerdoelen van deze les, namelijk het reflecteren door middel van het uitwisselen van ideeën met medeleerlingen aan de hand van de vragenkaart. Het werkblad bestaat daarom uit enkel twee opgaven die voornamelijk dienen als middel voor de dataverzameling. Verder is het voorbeeld achterwege te laten, om niet te veel aandacht van de leerlingen voor het lesmateriaal te vragen. Hierdoor kunnen ze zich mogelijk beter richten op het werken met de vragenkaart. Om dezelfde reden zijn de aanvullende vragen in het rode vlak op de vragenkaart verwijderd. Deze zijn namelijk van ondergeschikt belang van de rest en daarom mogelijk te afleidend.

K

Ontwerpstadia werkblad en het bijbehorende voorbeeld

Iteratie 1.1

Werkblad: Probleem Oplossen

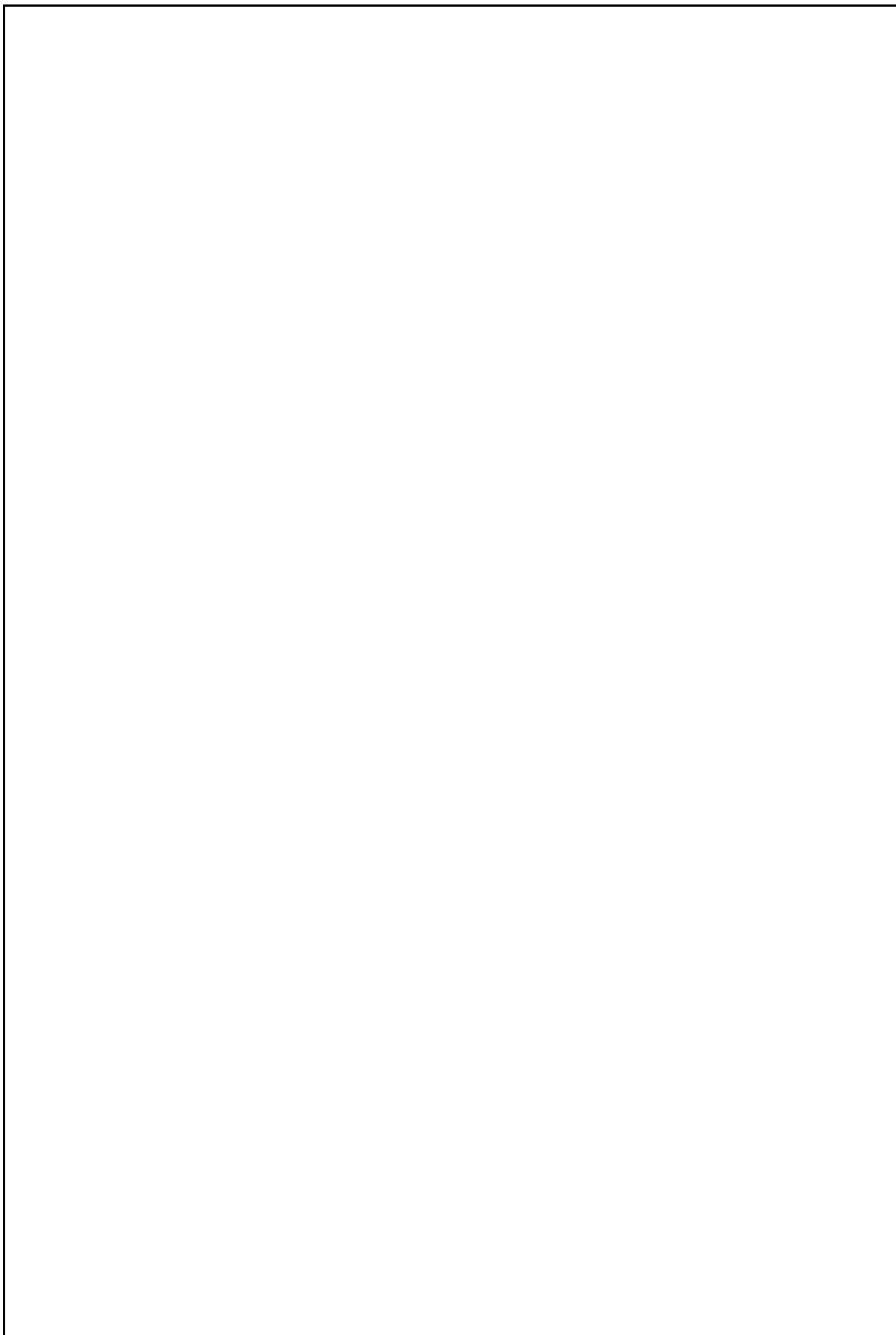
Groep:

Leerdoelen

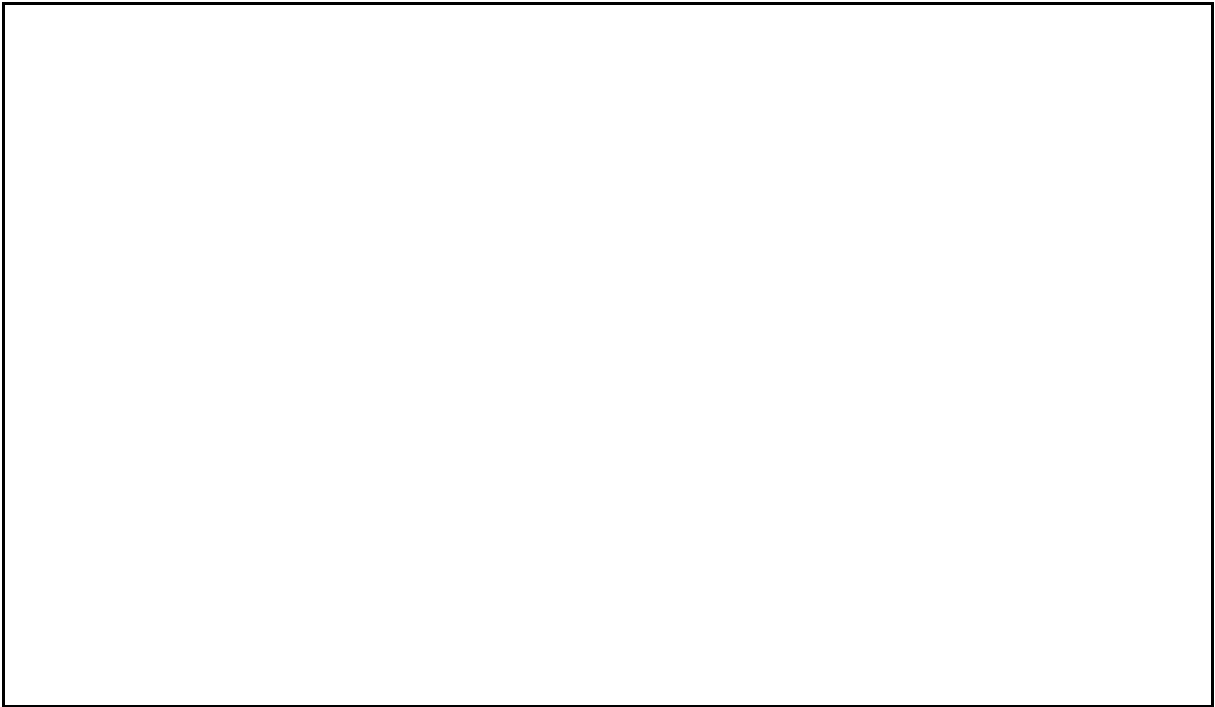
- Begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsgenoten kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.

Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

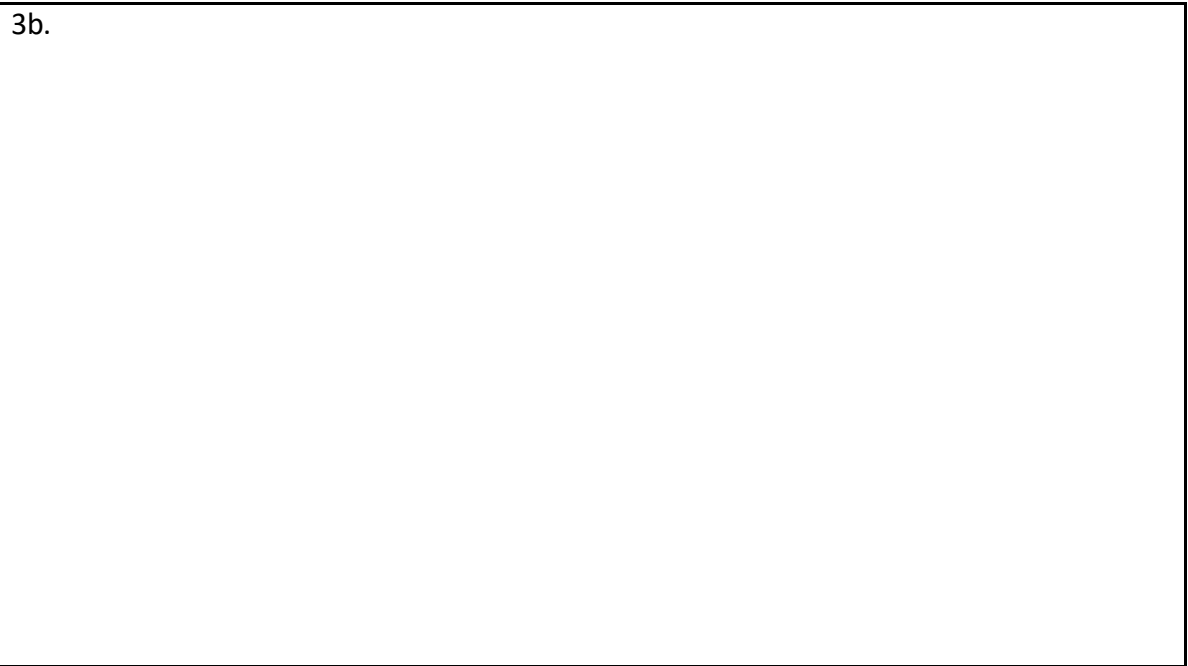


2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
- a. Wat ging er niet (direct) goed?
 - b. Wat ging er (later) wel goed?



3. Klaar?
- a. Help indien nodig je groepsgenoten.
 - b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.
 - c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.



Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing **nuttig / neutraal / niet nuttig**.
2. Door het werkblad heb ik **meer / neutraal / niet meer** inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
3. Tijdens het werken aan het werkblad **heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt**.

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: **VOORBEELD**

Leerdoelen

- Begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.

Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

Bij de uitwerking, denk aan:

- Welke acties (+, -, :, x, schets, constructie, schema enz.)?
- Welke notatie?

Bij de verklaring waarom, denk aan:

- Waarom een bepaalde actie?
- Wat is de volgorde van die acties?

→ Zie de volgende pagina voor een uitgewerkt voorbeeld.

PROBLEEM

Je koopt een Pokémon kaart voor €10, vervolgens verkoopt je het weer voor €20, koop je het weer voor €30 en verkoopt het tot slot voor €40.

Hoewel winst of verlies heb je gemaakt.

NON-VOORBEELD UITWERKING

Kopen	Verkopen
€10	€20
€30	€40

Dus €20 winst.

→ Mist Redeneratie, hoe kom je op €20?



VOORBEELD UITWERKING

Neem de som voor netto bedrag

$$-10 + 20 - 30 + 40 = +20 \rightarrow \oplus \text{ dus €20 winst}$$

want bij kopen geef je geld uit want bij verkopen krijg je geld



2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
- Wat ging er niet (direct) goed?
 - Wat ging er (later) wel goed?

“Door eerst de beginsituatie en de eindsituatie te tekenen zagen we welke formule we konden gebruiken.”

“We wisten niet wat we moesten doen, maar door alles wat we wisten op te schrijven zagen we dat het logisch was om de variabele kosten te vermenigvuldigen met de productie. Daarna werd duidelijker wat het probleem nu precies was en zagen we de volgende stap.”

“Omdat we schematisch bijhielden hoeveel tijd er nog in de zandloper zat en hoeveel er verstreken was, konden we gerichter wat uitproberen.”

“De berekening voor de winst klopte niet omdat we vergeten waren de vaste kosten van de omzet af te trekken. We kwamen daar achter doordat andere groepen allemaal een ander antwoord hadden.”

3. Klaar?
- Help¹ indien nodig je groepsgenoten.
 - Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.
 - Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.

Mogelijk vergelijkbaar probleem:

“Als we met één zandloper van 7 minuten en één van 4 minuten in totaal 9 minuten kunnen timen, kunnen we dan ook 13 minuten timen? En 8? Wat kunnen we allemaal wel timen en wat niet? Waarom?”

¹ Let op: je helpt de ander door hem/haar zelf tot de oplossing te laten komen.

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing **nuttig / neutraal / niet nuttig**.
2. Door het werkblad heb ik **meer / neutraal / niet meer** inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
3. Tijdens het werken aan het werkblad **heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt**.

Iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Naam:

Groep:

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
 - a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
 - b. Wat ging er goed? Waarom?

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik begreep **wel** / **beetje** / **niet** wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld **wel** / **niet** gebruikt, het was **wel** / **niet** duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking **wel** / **niet** aangevuld met notities. Hierdoor heb ik **meer** / **neutraal** / **niet meer** inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt **wel** / **een beetje** / **niet** bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: **VOORBEELD**

Groep: **VOORBEELD**

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Probleem als voorbeeld:

Je koopt een Pokémonkaart voor €10, vervolgens verkoop je het voor €20, koop je het weer voor €30 en tot slot verkoop je het voor €40.

Niet zo:

Kopen	Verkopen
10	20
30	40

Dus 20 winst.

→ Mist redeneratie: hoe kom je op 20?

→ Geen eenheden gebruikt: €

Maar zo:

$$-10 + 20 - 30 + 40 = €20 \rightarrow \oplus \text{ dus } €20 \text{ winst}$$

Neem de som voor netto bedrag

want bij kopen geef je geld uit want bij verkopen krijg je geld

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

Niet zo:

"Ik zag opeens wat er moest gebeuren." ❌

→ Wat moest er gebeuren? Waarom? Waarop heb je dat gebaseerd?

Maar zo:

"Door eerst een schets te maken realiseerde we dat er 1 onbekende was. De volgende stap is daarom om een vergelijking op te stellen, want dan kan je het uitrekenen." ⤵

"We moesten toch $\frac{\text{volume}}{\text{oppervlakte}}$ in plaats van andersom, want

$$\frac{m^3}{m^2} = m \text{ is de juiste eenheid.}" \quad \text{⤵}$$

"Een ander groepje kwam op een ander antwoord. Daardoor konden we onze fout ontdekken, dat was namelijk, want" ⤵

Iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Naam:

Groep:

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
 - a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
 - b. Wat ging er goed? Waarom?
 - c. Waar moest je rekening mee houden?

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik heb door de tweede opdracht **veel / een beetje / niet meer** inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
2. Hierbij heeft hulpvraag **a / b / c** mij het **MEEST** geholpen.
3. Hierbij heeft hulpvraag **a / b / c** mij het **MINST** geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: **VOORBEELD**

Groep: **VOORBEELD**

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Probleem:

(Het probleem zelf hoeft je niet over te nemen.)

Je koopt een Pokémonkaart voor €10, vervolgens verkoop je het voor €20, koop je het weer voor €30 en tot slot verkoop je het voor €40. Hoeveel winst / verlies maak je?

Niet zo:

Kopen	Verkopen
10	20
30	40



Dus 20 winst

- Mist redeneratie: hoe kom je op 20?
- Geen eenheden gebruikt: €

Maar zo:

$$-10 + 20 - 30 + 40 = €20 \longrightarrow (+) \text{ dus } €20 \text{ winst}$$

Want bij kopen geef je geld uit.

Want bij verkopen krijg je geld.

Neem de som voor netto bedrag.



2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
 - a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
 - b. Wat ging er goed? Waarom?
 - c. Waar moest je rekening mee houden?

Niet zo:

"Ik zag opeens wat er moest gebeuren."

→ Wat moest er gebeuren? Waarom? Waarop heb je dat gebaseerd?

Maar zo:

"Door eerst een schets te maken realiseerde we dat er 1 onbekende was. De volgende stap is daarom om een vergelijking op te stellen, want dan kan je het uitrekenen."

"We moesten toch $\frac{\text{volume}}{\text{oppervlakte}}$ in plaats van andersom, want

$$\frac{m^3}{m^2} = m \text{ is de juiste eenheid.}"$$

"Een ander groepje kwam op een ander antwoord. Daardoor konden we onze fout ontdekken, dat was namelijk, want"

Iteratie 2.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Naam:

Groep:

2. Hoe heb je het aangepakt?

Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
- b. Wat ging er goed? Waarom?
- c. Waar moest je rekening mee houden?

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing **nuttig** / **neutraal** / **niet nuttig**.
2. De tweede opdracht helpt **wel** / **een beetje** / **niet** bij het oplossen van een vergelijkbaar probleem.
3. Ik heb de tip op het voorbeeld **wel** / **niet** gebruikt, het was **wel** / **een beetje** / **niet** handig.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: **VOORBEELD**

Groep: **VOORBEELD**

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Probleem:

(Het probleem zelf hoeft je niet over te nemen.)

Je koopt een Pokémonkaart voor €10, vervolgens verkoop je het voor €20, koop je het weer voor €30 en tot slot verkoop je het voor €40. Hoeveel winst / verlies maak je?

Niet zo:

Kopen	Verkopen
10	20
30	40



Dus 20 winst

- Mist redeneratie: hoe kom je op 20?
- Geen eenheden gebruikt: €

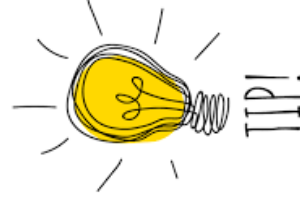
Maar zo:

$$-10 + 20 - 30 + 40 = \text{€}20 \longrightarrow (+) \text{ dus €}20 \text{ winst}$$

Want bij kopen geef je geld uit.

Want bij verkopen krijg je geld.

Neem de som voor netto bedrag.



Denk bijvoorbeeld aan het volgende en leg uit:

Voorbeelden bedenken, zoeken naar patronen, kijken naar grenzen, achteruit denken, blijven proberen, plaatjes maken, organiseren van wat je weet, stap voor stap oplossen, kiezen voor een andere aanpak, tussenresultaten controleren

2. Hoe heb je het aangepakt?

Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
- b. Wat ging er goed? Waarom?
- c. Waar moest je rekening mee houden? Leg uit.

Niet zo:

"Ik zag opeens wat er moest gebeuren."

→ Wat moest er gebeuren? Waarom? Waarop heb je dat gebaseerd?

Maar zo:

"Door een schema te maken konden we een patroon herkennen waardoor we het antwoord konden vinden."

"Een ander groepje kwam op een ander antwoord. Daardoor konden we onze fout ontdekken, dat was namelijk ..., want"

Iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Naam:

Groep:

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de *vragenkaart*.
Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?
3. Wat is de **belangrijkste les die je meeneemt** naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- 1. Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen **nuttig** / **neutraal** / **niet nuttig**.
- 2. Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op de *vragenkaart* **wel** / **een beetje** / **niet**.
- 3. De *vragenkaart* helpt **wel** / **een beetje** / **niet** bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- 4. Op de *vragenkaart* zorgt categorie **geel** / **groen** / **blauw** voor de meest interessante gesprekken.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: VOORBEELD

Groep: VOORBEELD

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Probleem:

(Het probleem zelf hoeft je niet over te nemen.)

Je koopt een Pokémonkaart voor €10, vervolgens verkoop je het voor €20, koop je het weer voor €30 en tot slot verkoop je het voor €40. Hoeveel winst / verlies maak je?

Niet zo:

Kopen	Verkopen
10	20
30	40

Dus 20 winst

- Mist redernatie: hoe kom je op 20?
- Geen eenheden gebruikt: €

Maar zo:

$$-10 + 20 - 30 + 40 = €20 \longrightarrow (+) \text{ dus } €20 \text{ winst}$$

Want bij kopen geef je geld uit.

Want bij verkopen krijg je geld.

Neem de som voor netto bedrag.



2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

Niet zo:

"Je moet gewoon beginnen." 

→ Goede tip, maar hoe? Wat schrijf je op? Hoe kom je verder?

Maar zo:

"Als je vast loopt moet je goed nagaan welke informatie je precies hebt, wat dat betekent en wat je ermee kan." 

3. Wat is de **belangrijkste les** die je meeneemt naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

Niet zo:

"Ik heb geleerd hoe je een formule opstelt." 

→ Goede les, maar wanneer komt dit van pas?

Maar zo:

"Ik heb geleerd dat je door een andere notatie te gebruiken, namelijk ..., je beter ziet hoe je het efficiënter kan oplossen." 

Iteratie 2.4

Werkblad Probleem Oplossen

Naam:

Groep:

1. Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?

2. Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. De *vragenkaart* helpt **wel** / **een beetje** / **niet** bij het uitleggen van mijn denkstappen.
2. Ik begreep **wel** / **een beetje** / **niet** hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik **wel** / **niet** wat van geleerd.
3. Tijdens het werken met de *vragenkaart* heb ik **veel** / **een beetje** / **niet** heb gesproken en heb ik **veel** / **een beetje** / **weinig** nagedacht.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen over het werken met de *vragenkaart*:

.....

.....

.....

.....

.....

.....



Ontwerpstadia vragenkaart

Iteratie 2.3

Vragenkaart Probleem Oplossen



Strategieën

- Welke verschillende oplossingen zijn er?
- Welke notatievorm heb je gebruikt?
- Welke tactiek heb je toegepast?
Voorbeelden bedenken, zoeken naar patronen, kijken naar grenzen, achteruit denken, blijven proberen, plaatjes maken, organiseren van wat je weet, stap voor stap oplossen, ...



Terugkijken

- Wat ging er goed?
- Waar liep je op vast?
- Hoe ben je verder gekomen?
- Ben je tussentijds gewisseld van tactiek?
- Hoe heb je (tussentijds) je resultaten gecontroleerd?
- Wat heeft voor nieuwe inzichten gezorgd?



Vooruitkijken

- Waar moest je rekening mee houden?
- Zou je het ook anders kunnen oplossen?
- Kan je het antwoord verbeteren?
- Wat kan je nu nog meer oplossen?
- Hoe kan je een 'algemene oplossing' bedenken?

Waarom? Wat bedoel je? Hoe doe je dat? Kan je dat uitleggen? Wanneer doe je dat?

Iteratie 2.4

Vragenkaart Probleem Oplossen

Strategieën

- Welke verschillende oplossingen zijn er?
- Welke notatievorm heb je gebruikt?
- Welke tactiek heb je toegepast?
Voorbeelden bedenken, zoeken naar patronen, kijken naar grenzen, achteruit denken, blijven proberen, plaatjes maken, organiseren van wat je weet, stap voor stap oplossen, ...

Terugkijken

- Wat ging er goed?
- Waar liep je op vast?
- Hoe ben je verder gekomen?
- Ben je tussentijds gewisseld van tactiek?
- Hoe heb je (tussentijds) je resultaten gecontroleerd?
- Wat heeft voor nieuwe inzichten gezorgd?

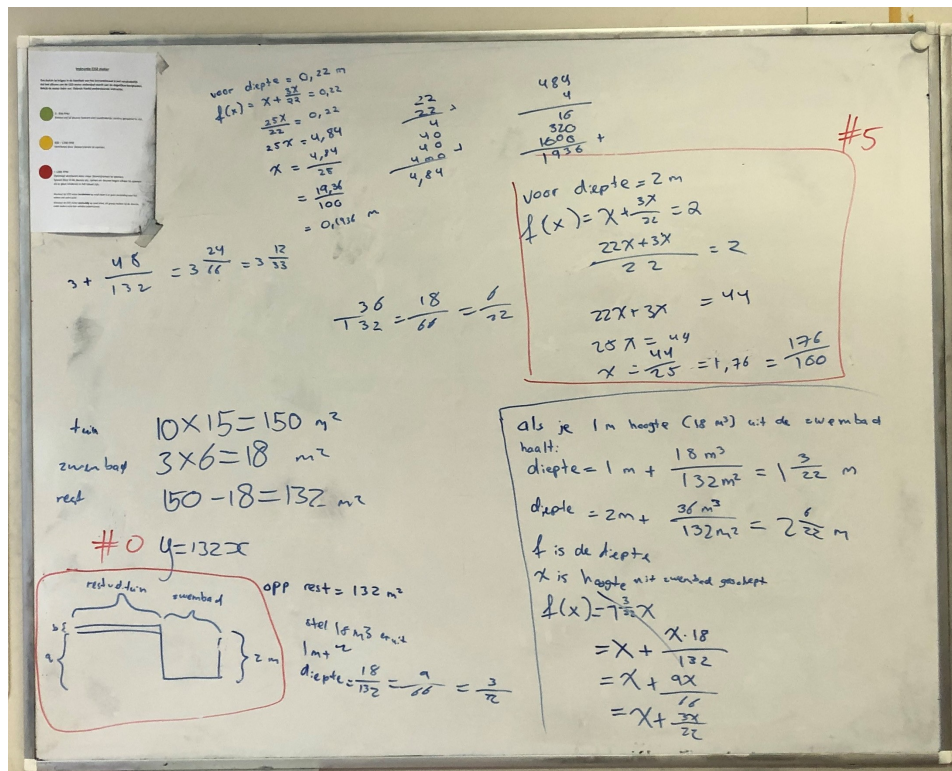
Vooruitkijken

- Waar moest je rekening mee houden?
- Zou je het ook anders kunnen oplossen?
- Kan je het antwoord verbeteren?
- Wat kan je nu nog meer oplossen?
- Hoe kan je een 'algemene oplossing' bedenken?

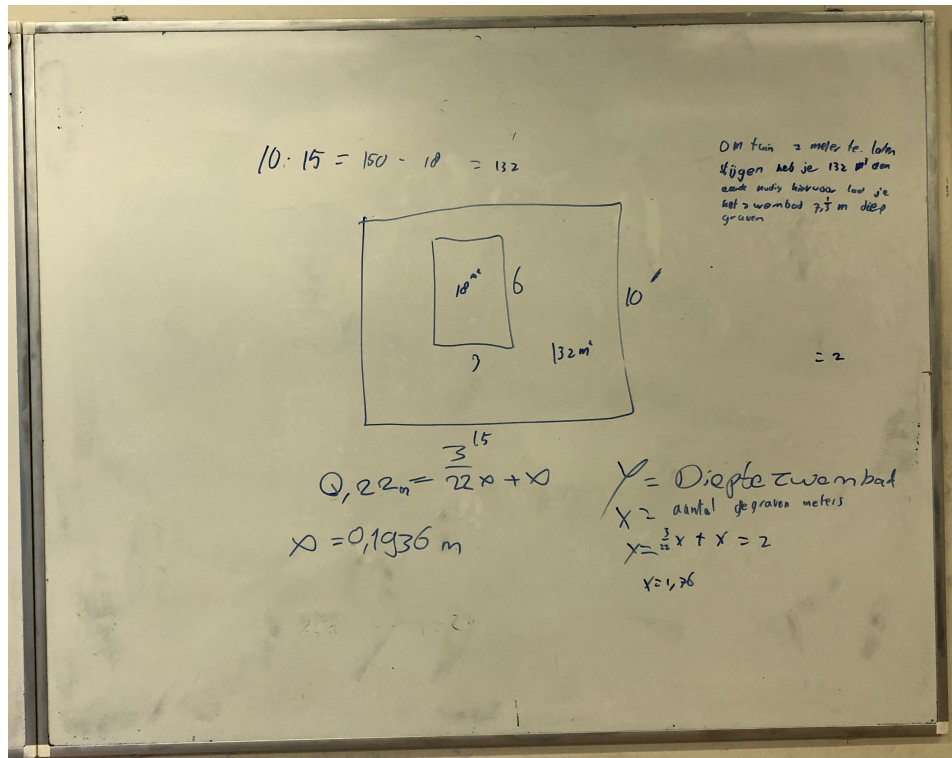
M

Groepswerk leerlingen

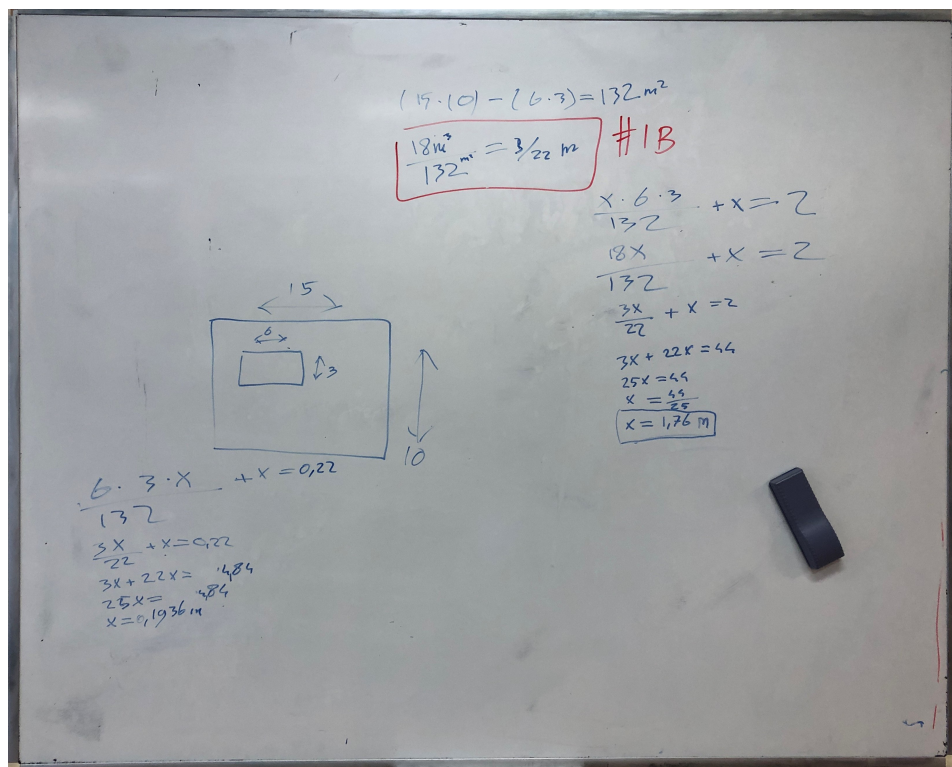
Iteratie 1.1



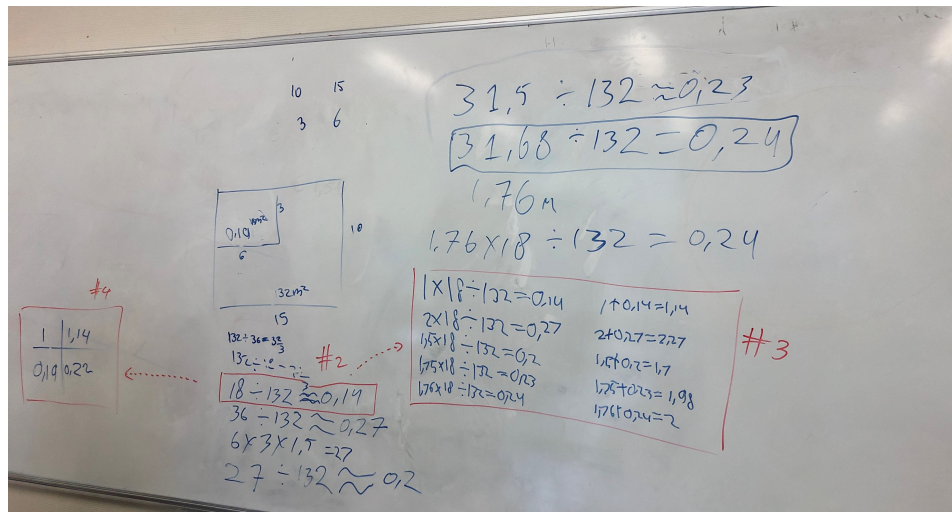
Figuur M.1: Groep 1 iteratie 1.1



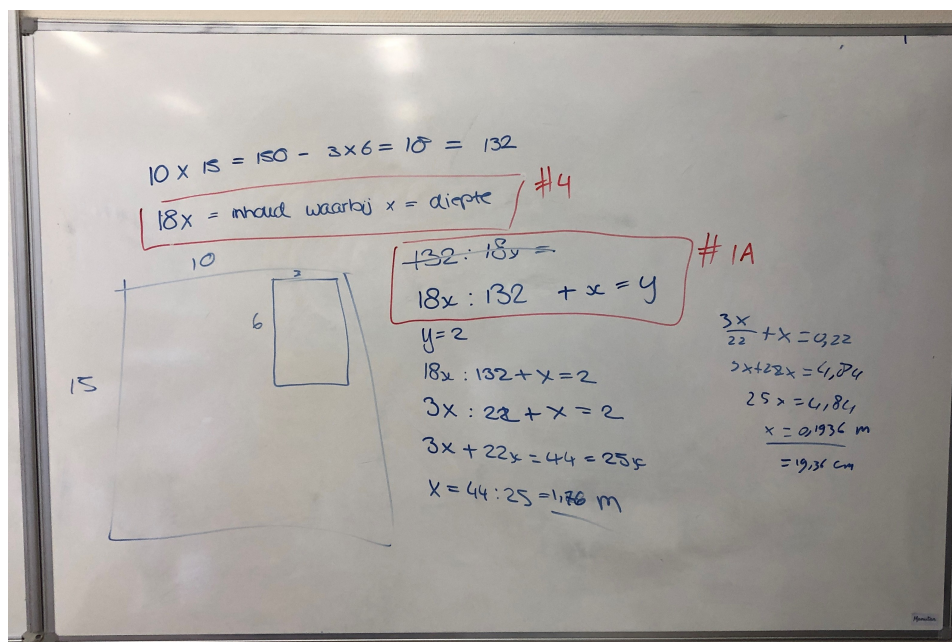
Figuur M.2: Groep 2 iteratie 1.1



Figuur M.3: Groep 3 iteratie 1.1

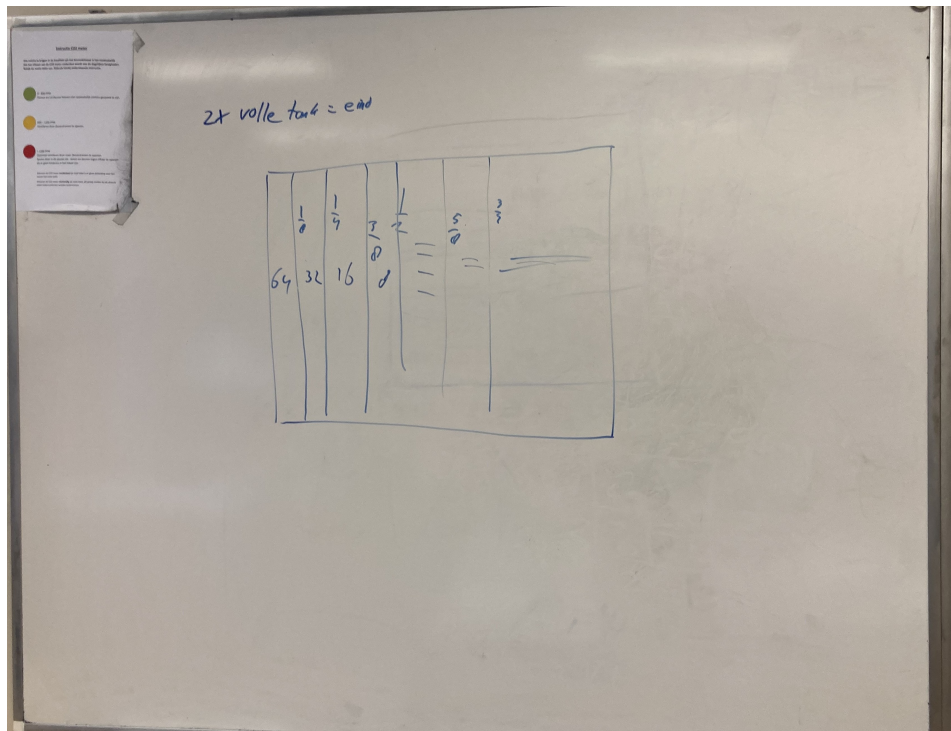


Figuur M.4: Groep 4 iteratie 1.1

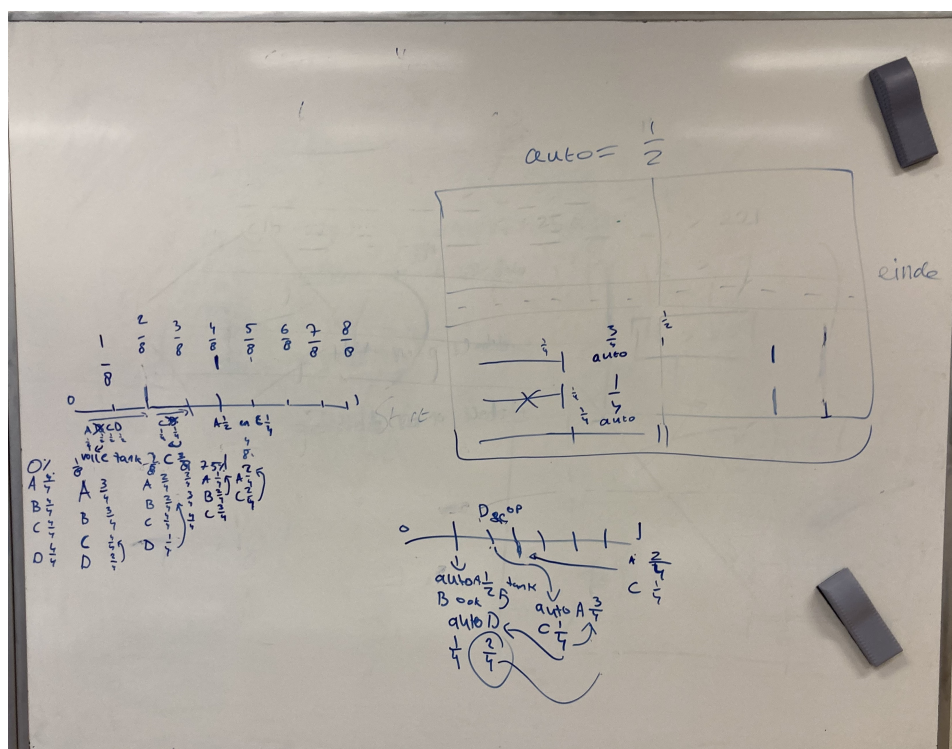


Figuur M.5: Groep 5 iteratie 1.1

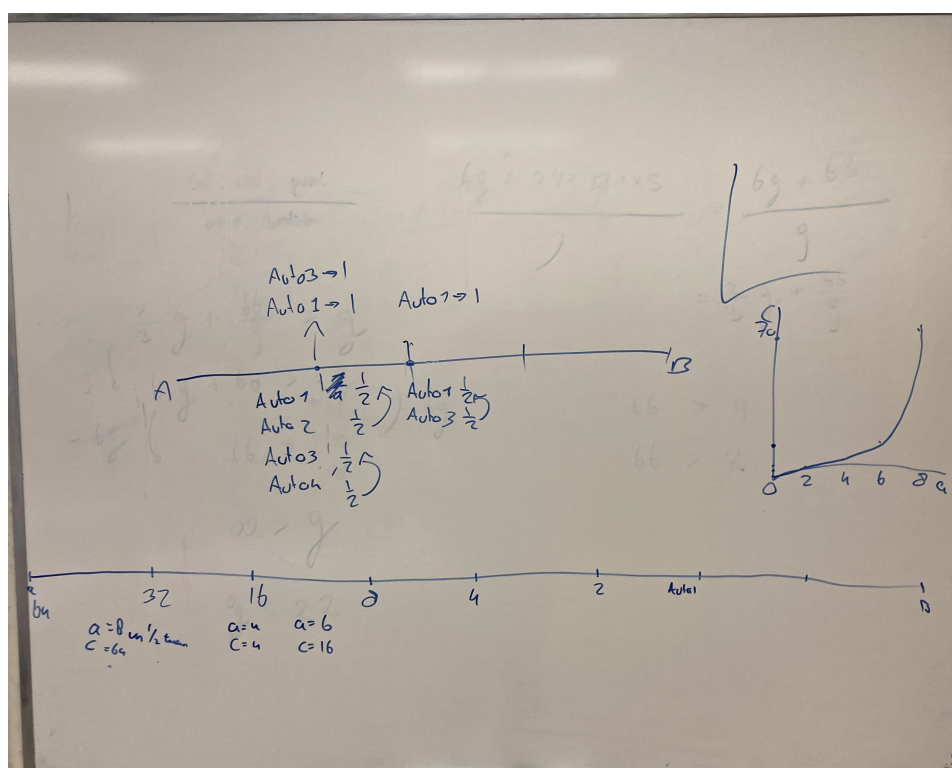
Iteratie 1.2



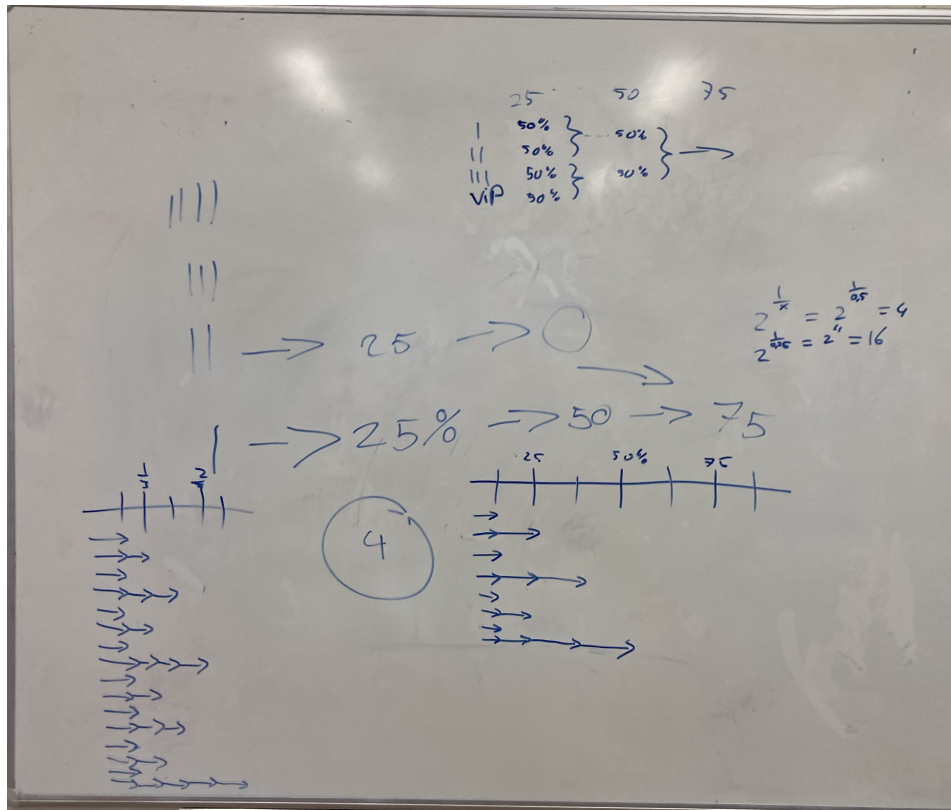
Figuur M.6: Groep 1 iteratie 1.2



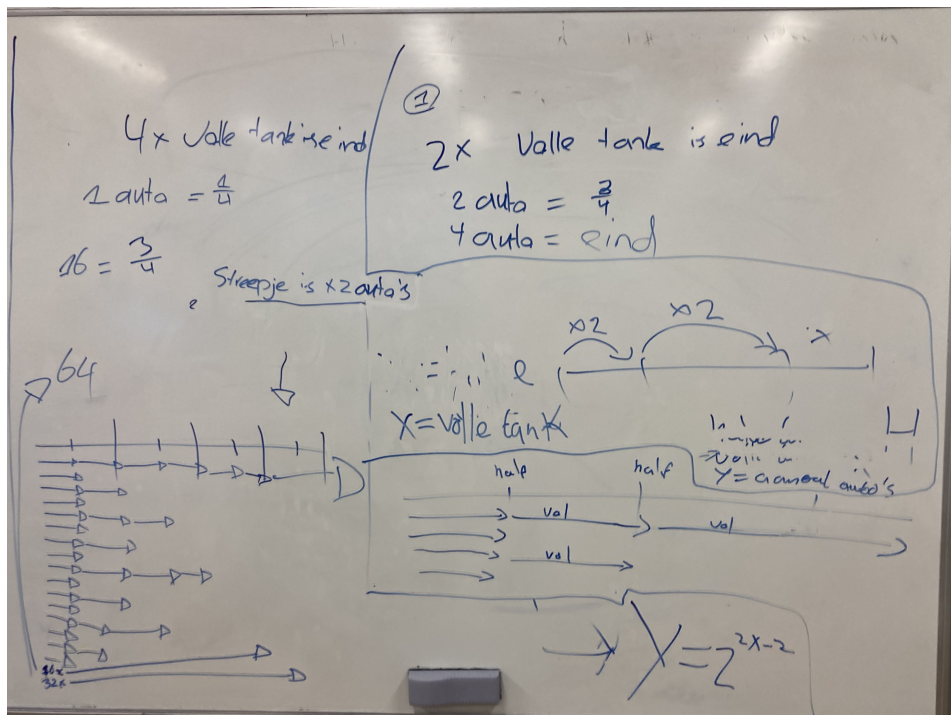
Figuur M.7: Groep 2 iteratie 1.2



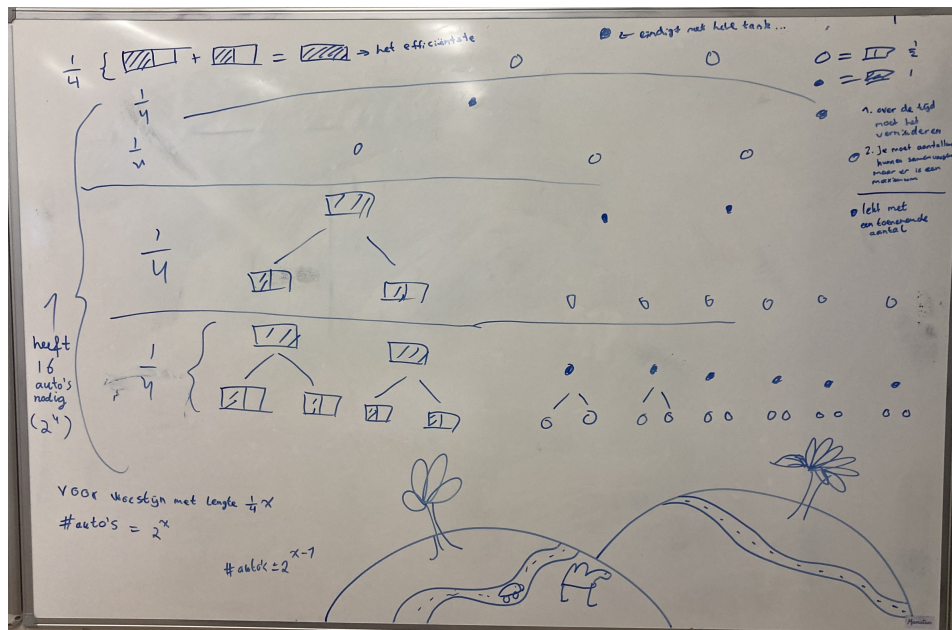
Figuur M.8: Groep 3 iteratie 1.2



Figuur M.9: Groep 4 iteratie 1.2

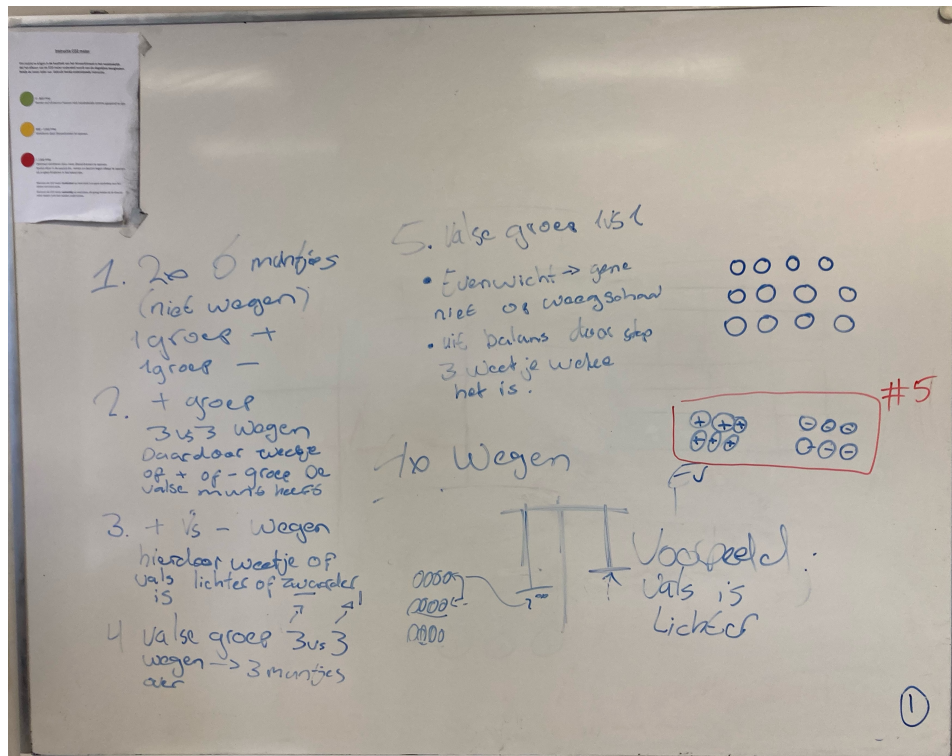


Figuur M.10: Groep 5 iteratie 1.2

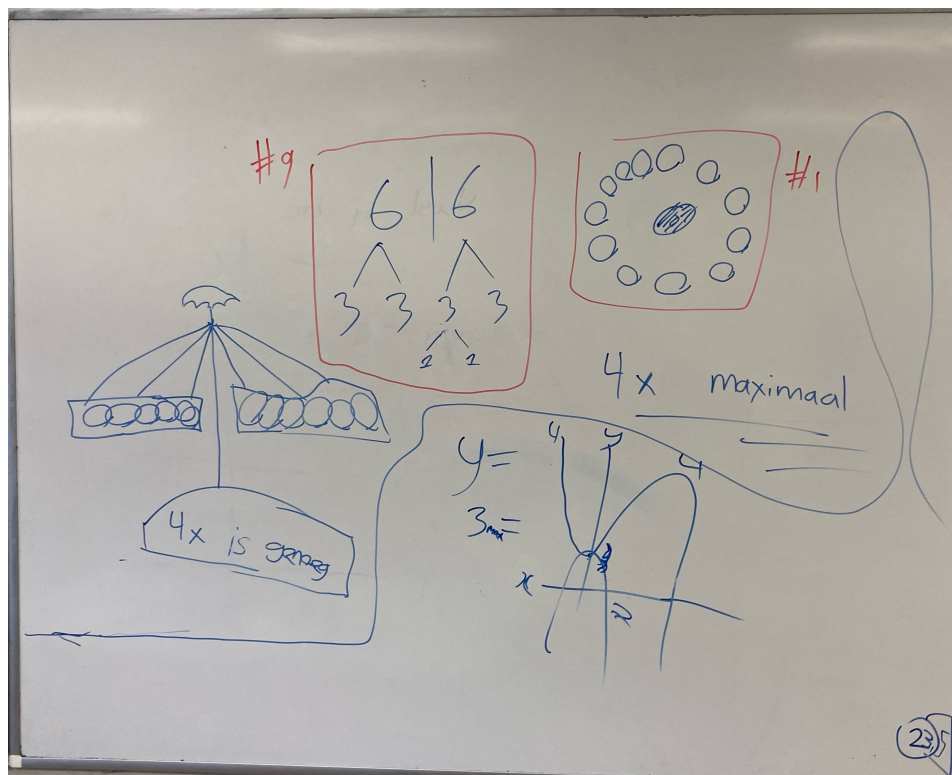


Figuur M.11: Groep 6 iteratie 1.2

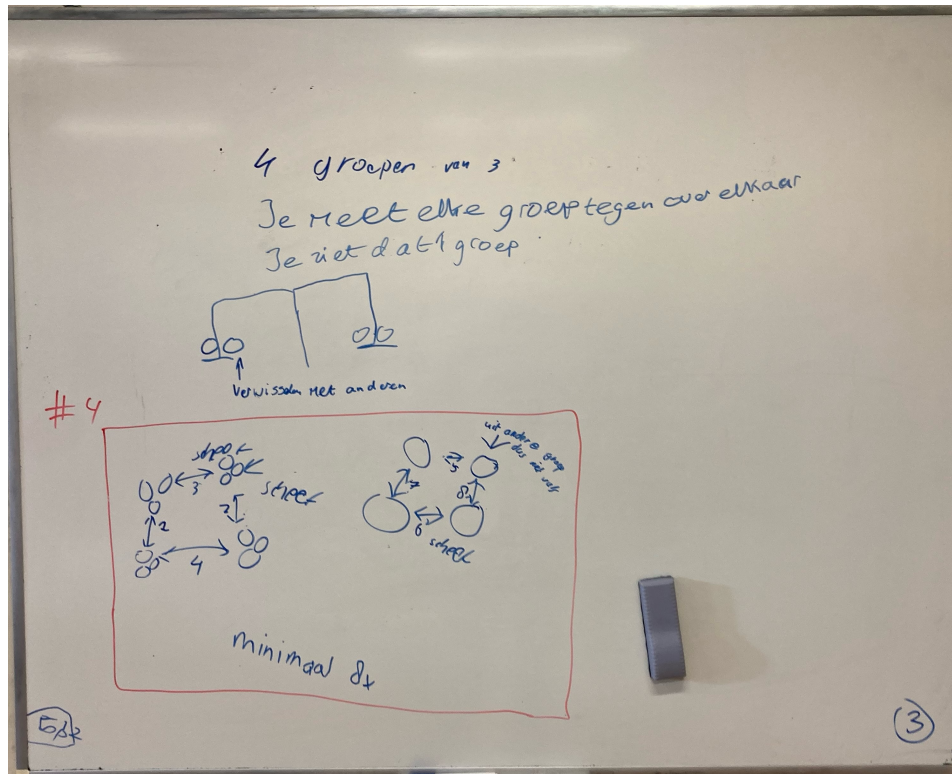
Iteratie 2.1



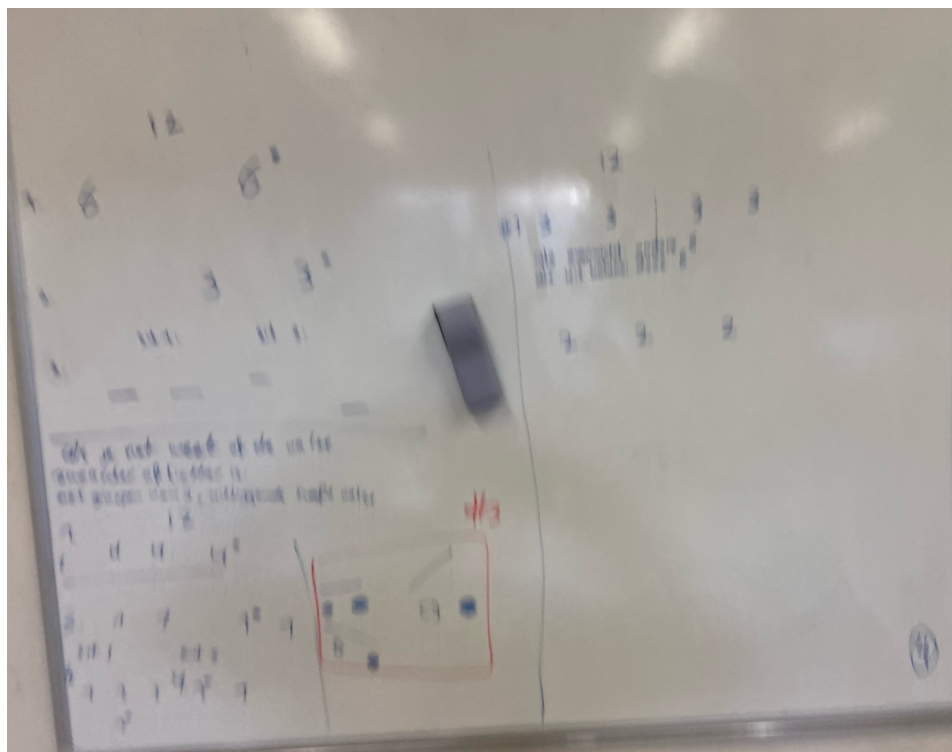
Figuur M.12: Groep 1 iteratie 2.1



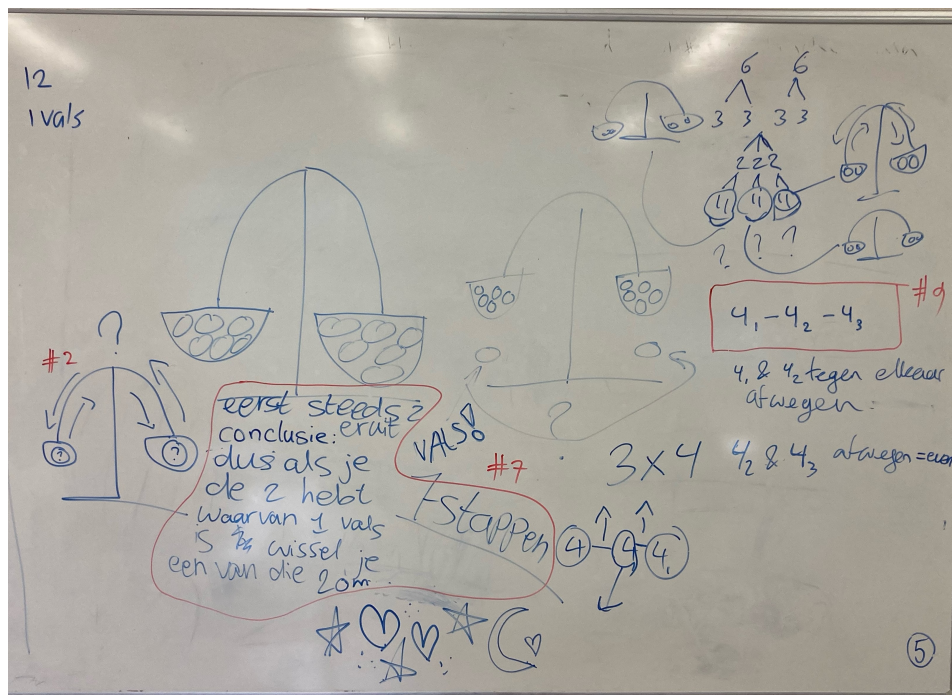
Figuur M.13: Groep 2 iteratie 2.1



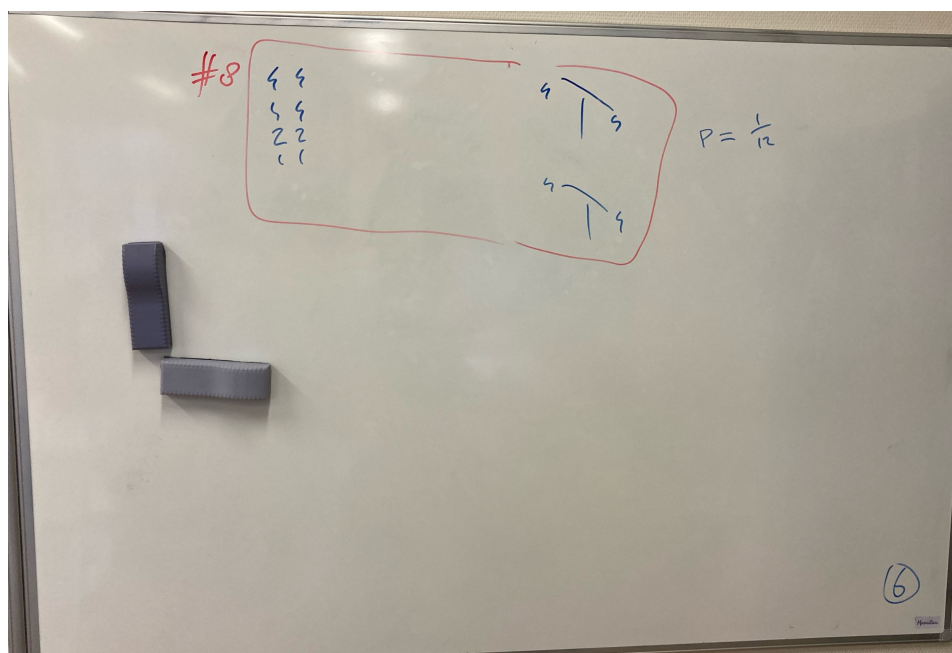
Figuur M.14: Groep 3 iteratie 2.1



Figuur M.15: Groep 4 iteratie 2.1



Figuur M.16: Groep 5 iteratie 2.1



Figuur M.17: Groep 6 iteratie 2.1

Iteratie 2.2

$$S = \sqrt{50^2 + (100-x)^2} + \sqrt{20^2 + x^2}$$

$$t = \frac{6}{\sqrt{50^2 + (100-x)^2}} + \frac{1\frac{1}{2}}{\sqrt{20^2 + x^2}}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{50^2 + (100-x)^2}} \cdot \frac{\sqrt{50^2 + (100-x)^2}}{\sqrt{50^2 + (100-x)^2}} + \frac{1\frac{1}{2}}{\sqrt{20^2 + x^2}}$$

$$= \frac{6\sqrt{50^2 + (100-x)^2}}{50^2 + (100-x)^2} + \frac{1\frac{1}{2}\sqrt{20^2 + x^2}}{20^2 + x^2}$$

$$= \frac{6\sqrt{2500 + x^2 - 200x + 10000}}{2500 + x^2 - 200x + 10000} + \frac{1\frac{1}{2}\sqrt{400 + x^2}}{400 + x^2}$$

$$= \frac{6\sqrt{x^2 - 200x + 12500}}{x^2 - 200x + 12500} + \frac{1\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 400}}{x^2 + 400}$$

$$= \frac{6(x^2 + 400)\sqrt{x^2 - 200x + 12500}}{(x^2 - 200x + 12500)(x^2 + 400)} + \frac{1\frac{1}{2}(x^2 - 200x + 12500)\sqrt{x^2 + 400}}{(x^2 - 200x + 12500)(x^2 + 400)}$$

$$= \frac{6x^4 + 400x^2 - 200x^3 - 80000x + 12500x^2 + 5000000}{(x^2 - 200x + 12500)(x^2 + 400)}$$

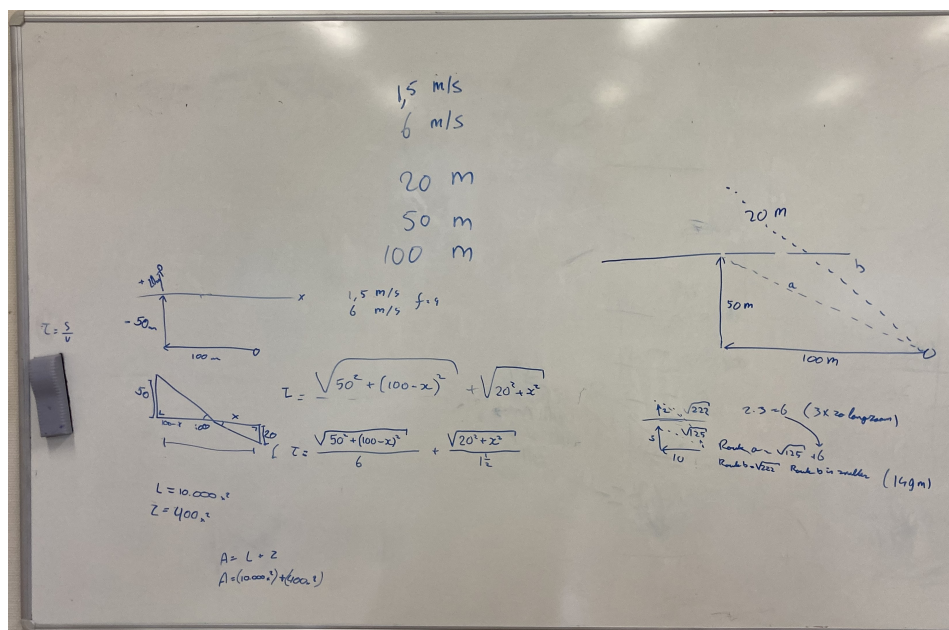
val in $y_6 = \frac{6x^4 + 400x^2 - 200x^3 - 80000x + 12500x^2 + 5000000}{(x^2 - 200x + 12500)(x^2 + 400)}$

Calc min geeft $x \approx 37,5$ $y \approx 0,11$

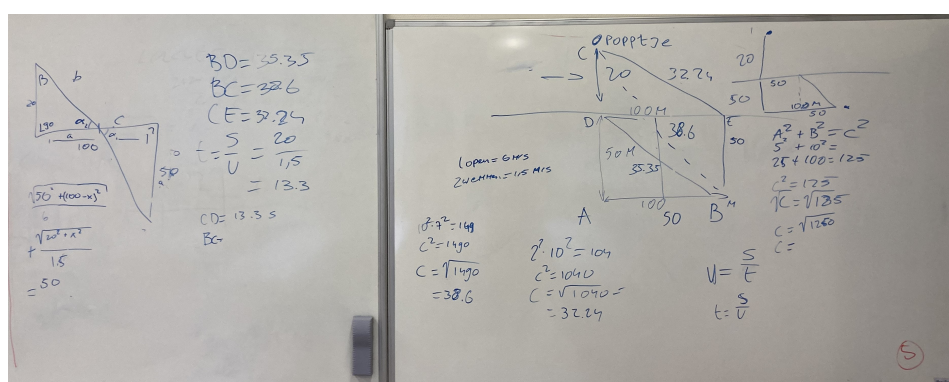
Dus je ren schuin naar het water t ot je bij 67,5 m ren je het water in
 van af daar zwem je schuin h et water in

1

Figuur M.18: Groep 1 iteratie 2.2

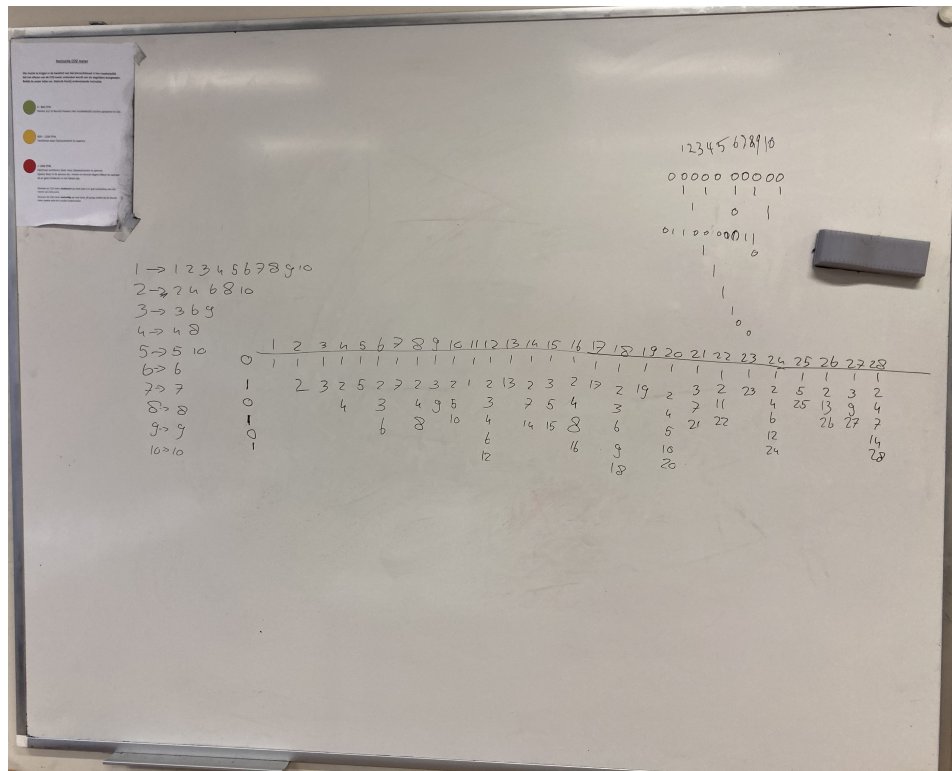


Figuur M.21: Groep 4 iteratie 2.2

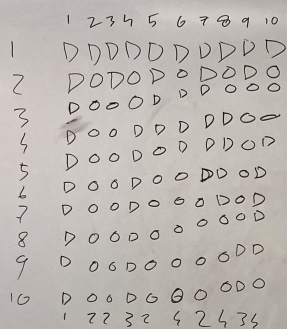


Figuur M.22: Groep 5 iteratie 2.2

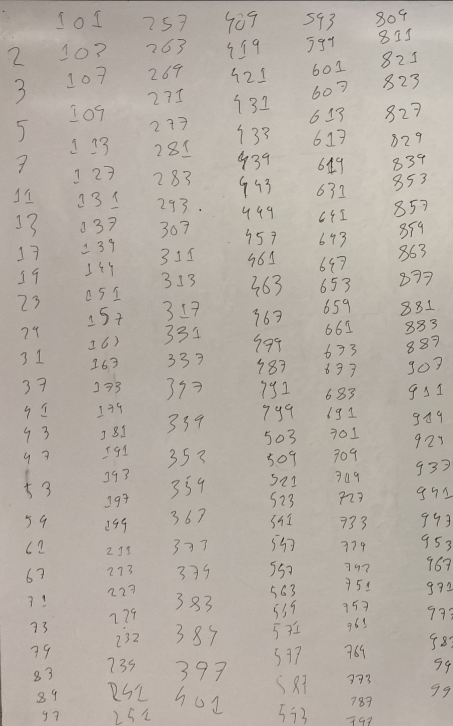
Iteratie 2.3



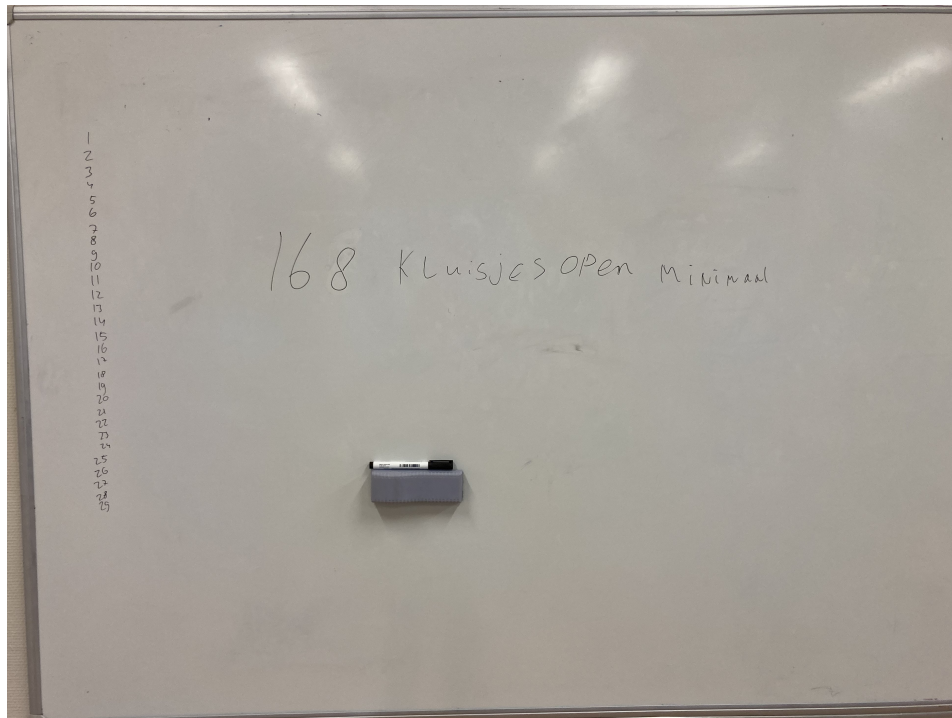
Figuur M.23: Groep 1 iteratie 2.3



Figuur M.24: Groep 2 iteratie 2.3

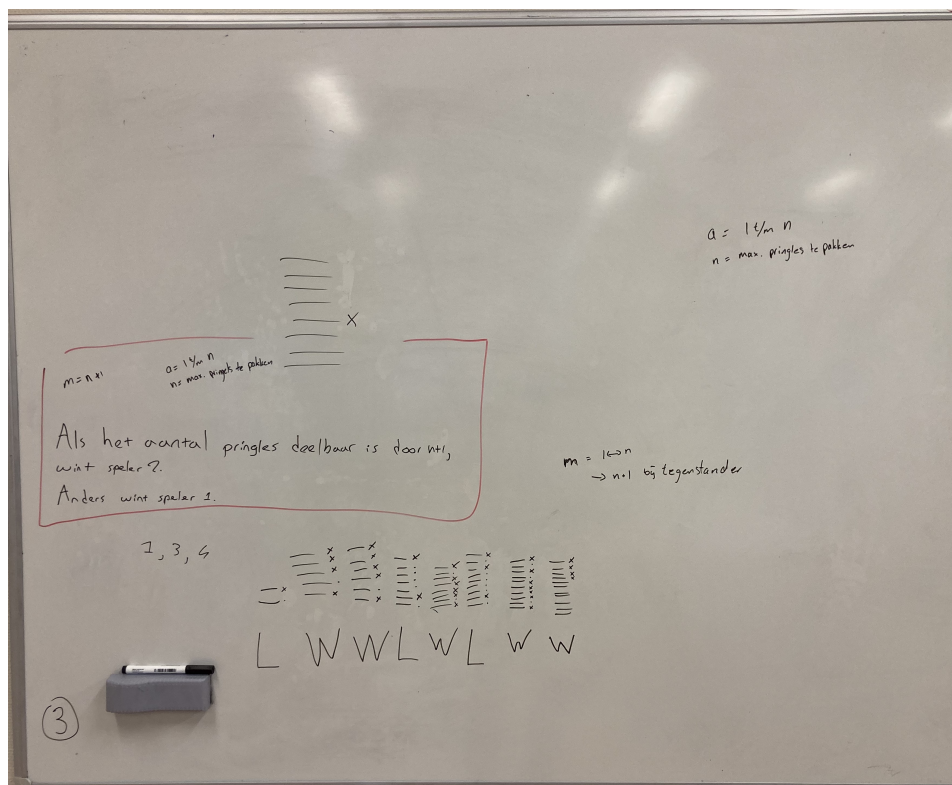


Figuur M.25: Groep 3 iteratie 2.3

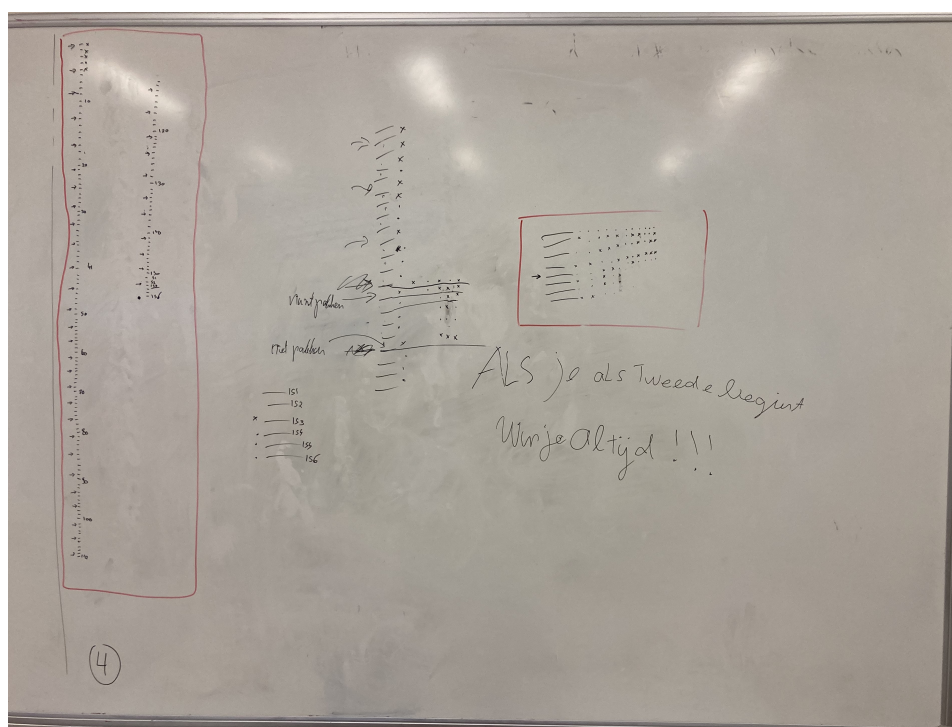


Figuur M.26: Groep 4 iteratie 2.3

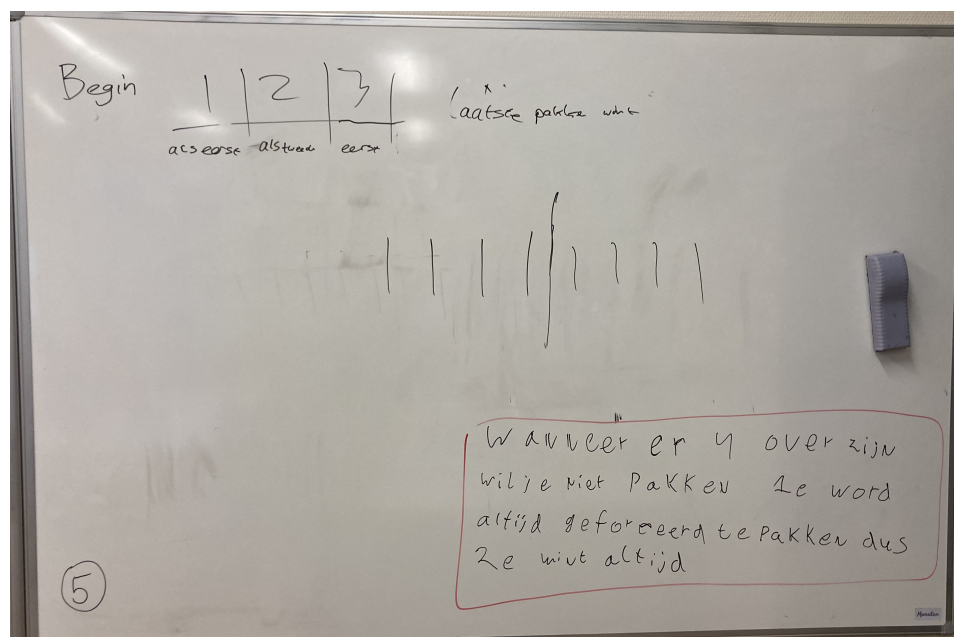
Iteratie 2.4



Figuur M.29: Groep 3 iteratie 2.4



Figuur M.30: Groep 4 iteratie 2.4



Figuur M.31: Groep 5 iteratie 2.4

N

Individueel leerlingwerk

Hier volgen de ingevulde werkbladen door de leerlingen. In verband met de privacy van de leerlingen zijn hun namen met een grijs vlak afgedekt. Verder is achteraf enkel rechts bovenin het hoekje van de werkbladen een verwijzing naar een algemene aanduiding per leerling genoteerd.

Iteratie 1.1

1a

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: 4

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsgenoten kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurje te gebruiken.

$t_{win} = 10 \times 15 = 150 \text{ m}^3$
 $zwembad = 3 \times 6 = 18 \text{ m}^3$
 $rest = 150 - 18 = 132 \text{ m}^3$
 voor $diepte = 2 \text{ m}$
 $f(x) = x + \frac{3x}{22} = 2$
 $\frac{22x + 3x}{22} = 2$
 $22x + 3x = 44$
 $x = \frac{44}{25} = 1,76 = \frac{176}{100}$

Pagina 1/4

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?
b. Wat ging er (later) wel goed?

eerst gegevens opgeschreven
en verder uit te werken

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsgenoten.
b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.
c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
- Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.1: Groep 1 leerling a iteratie 1.1

1b

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: 1

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurje te gebruiken.

Van chapele : 2 meter

$$f(x) = x + \frac{3x}{22}$$

$$= \frac{22x + 3x}{22}$$

$$= 22x + 3x = 44$$

$$= 25x = 44$$

$$x = \frac{44}{25} = 1,76 \text{ m}$$

Pagina 1/4

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?

b. Wat ging er (later) wel goed?

*a. ik begreep de eigenlijke vraagstelling van, maar getuig de
lost van mijn laatste deel.*

*b. uiteindelijk hebben we een kloppende formule gekregen.
gemaakt*

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.

b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.

c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.

2. Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.

3. Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.2: Groep 1 leerling b iteratie 1.1

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: XXXXXXXXXX

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

① $\text{tuin} = 10 \cdot 15 = 150 \text{ m}^2$
 $\text{zwemb.} = 3 \cdot 6 = 18 \text{ m}^2$ } hieruit volgt:
 $\text{rest} = 150 - 18 = 132 \text{ m}^2$

② als je x meter uit de zwembad haalt neemt de zwembad in diepte eerst toe met x m en, omdat de volume eruit gelijk is aan $18x \text{ m}^3$, moet je dat verdelen over de rest van de tuin. $\frac{18x \text{ m}^3}{132 \text{ m}^2}$ is de rest

③ voor $\frac{18x}{132}$ in f als je x meter uit de zwembad haalt: $f(x) = x + \frac{18x}{132} = x + \frac{3x}{22}$

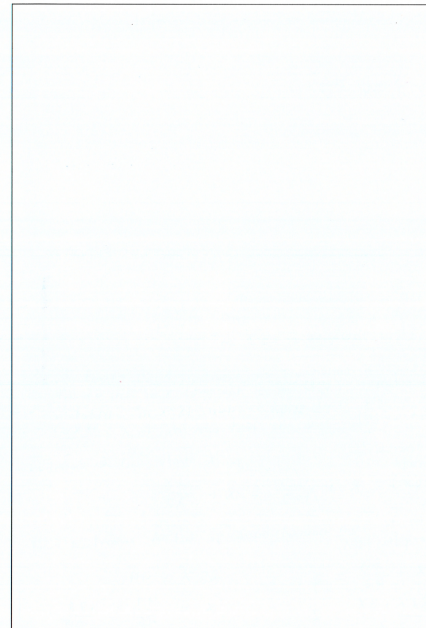
④ om te zien hoeveel aarde je uit de zwembad moet verplaatsen: $\rightarrow$ in diepte

$$x + \frac{3x}{22} = 2 \quad 25x = 44$$

$$\frac{22x + 3x}{22} = 2 \quad x = \frac{44}{25} = \frac{176}{100}$$

$$= 1,76 \text{ m}$$

Pagina 1/4



Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
- Wat ging er niet (direct) goed?
 - Wat ging er (later) wel goed?

Ik dacht gelijk dat ik gebruik moest maken van formules, maar ik wist nog niet hoe.

Ik had eerst een formule opgesteld waar de toename per x gelijk was aan $1\frac{1}{22}$, maar toen ik ook de een derde waarde had uitgerekend om te zien wat de diepte was zag ik dat iets fout was.

Nas na aandachtiger te kijken heb ik de formule herschreven als $f(x) = x + \frac{3x}{22}$.

voor diepte $1 \text{ m} \rightarrow 1 \text{ m} + \frac{18 \text{ m}^3}{22 \text{ m}^2} = 1\frac{9}{11}$ } telken een 3 } toch $3x$,
 diepte $2 \text{ m} \rightarrow 2 \text{ m} + \frac{36 \text{ m}^3}{22 \text{ m}^2} = 2\frac{6}{11}$ } toe net 3 } want 18 m^3
 diepte $3 \text{ m} \rightarrow 3 \text{ m} + \frac{54 \text{ m}^3}{22 \text{ m}^2} = 3\frac{9}{11}$ } en de formule volume met diepte is $x = 1,76 \text{ m}$ diepte (x)

3. Klaar?
- Help indien nodig je groepsleden.
 - Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.
 - Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
- Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.3: Groep 1 leerling c iteratie 1.1

2a

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: 2

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

Probleem

Je wilt een zwembad van 2 bij 6 van 2 meter diep in je tuin van 15 x 10. ~~De~~ met de derde die je uit de grond haalt wil je je tuin op dus die stijgt. Hoeveel meter moet je graven om je zwembad 2 meter diep te hebben

Witwerkblad

Hoeveel meter stijgt de tuin als je 2 meter weggraapt?

Tuin stijgt 2 meter als je $7\frac{1}{2}$ meter graaft dus $\frac{1}{7\frac{1}{2}} = \frac{2}{22}$

Dus formule is $f: y = \frac{2}{22}x + x$

$$\frac{2}{22}x + x = 2$$

$$x = 1,76$$

Als je 1,76 m diep graaft is het zwembad 2 meter diep

Pagina 1/4

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?

b. Wat ging er (later) wel goed?

Eerst lieten we uit een kwadraat met het idee om uit te rekenen hoeveel de tuin stijgt als je 2 meter graaft. Maar heb ik deze formule niet gemaakt en toen kwamen we op ons antwoord

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.

b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.

c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
- Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / het is enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.4: Groep 2 leerling a iteratie 1.1

2b

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: 2

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

Eerst uitgerekend hoe diep je moet graven om de tuin 1 meter te laten stijgen

$$132 \text{ m}^2 \div 18 \text{ m}^2 = 7\frac{1}{3} \text{ m}$$

↳ grote tuin ↳ grootte zwembad

Dan de $7\frac{1}{3} : 1$ om te bepalen hoeveel de grond stijgt als je 1m graaft

$$7\frac{1}{3} : 1 = \frac{3}{22}$$

Pagina 1/4

toen formule gemaakt

$Y = \text{Diepte zwembad} = 2\text{m}$

$x = \text{aantal gegraven meters}$

$Y = \frac{3}{22}x + x$

$2 = \frac{3}{22}x + x$ in grafische rekenmachine
+ $Y = 2$

Snijpunten zoeken gaf $x = 1,76 \text{ m}$

Dus je moet 1,76m diep graven om het zwembad 2m diep te laten zijn

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?

b. Wat ging er (later) wel goed?

a. we bleven haken op de grootte van de tuin

b. We gingen eerst kijken naar hoe hoog de tuin zou stijgen, hierdoor werd het duidelijker

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.

b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.

c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
- Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.5: Groep 2 leerling b iteratie 1.1

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep:

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

*Ik kwam op het geweldige idee
tuin = 15 * 10 zwembad = 6 * 3 Ik ga een
zwembad graven. Het moet 2 m diep. Al het
aarde van het zwembad doe ik in mijn tuin.
Dan mijn tuin stijgt ook. Hoe diep moet ik graven.
150 - 18 = 132 m³ aan tuin ik kwam op het geweldige
idee. Hoe veel m³ grond heb ik nodig om tuin 1 m
te laten stijgen. Dat is 132 m³ 18 * x = 132 m³
18 * 7 1/2 = 132 m³ dus tuin 1 m stijgen is zwembad
7 1/2 m diep 7 : 7 1/2 = 3/12 2/3 * x + x = 2
2/3 = hoeveel tuin stijgt x = diepte zwembad
2/3 * 4 = 3/12 x + x*

Pagina 1/4

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?
b. Wat ging er (later) wel goed?

*Mijn laatste geweldige idee zag wat er
moet gebeuren.*

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.
b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.
c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
- Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.6: Groep 2 leerling c iteratie 1.1

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: XXXXXXXXXX

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

1. Oppervlakte van ~~deur~~ vloer met het gat is verhoogd
 $2. (19 \cdot 10) - (6 \cdot 3) = 132 \text{ m}^2$
 $\uparrow$ wat we moeten bedekken

2. hoeveel 18 m² zand per we moeten verspreiden bij 132 m²
 $\frac{18 \text{ m}^2}{132 \text{ m}^2} = \frac{3}{22} \text{ m}$
 $\uparrow$ wat de diepte is

3. $\frac{18 \cdot 6 \cdot 3}{132} + x = 2$
 $\uparrow$ hoeveel water verhoogt

Herside
 $9 \cdot \frac{18 \cdot 6 \cdot 3}{132} + x = 2$
Herside
 $5 \cdot \frac{18 \cdot 6 \cdot 3}{132} + x = 2$

Bijden $3x + 7x = 44$
 $10x = 44$
 $x = 4.4$

Pagina 1/4

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?
b. Wat ging er (later) wel goed?

~~deur~~ a) uitroepen wat we moeten doen.
 wat we erg akkoord bij de formule
 b) begrijpen ervan (soort van)

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.
b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.
c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Door het werkblad heb ik minder / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
- Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.7: Groep 3 leerling a iteratie 1.1

Werkblad: Probleem Oplossen

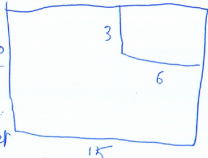
Groep: 4

Leerdoelen

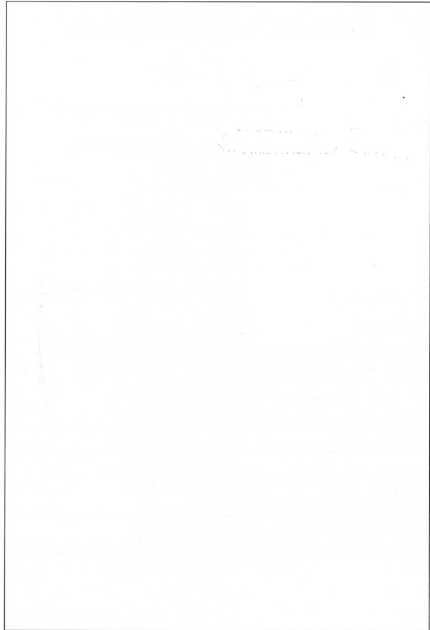
- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

$10 \times 15 = 150$
 $3 \times 6 = 18$
 $150 - 18 = 132$ is het oppervlakte zonder zwembad
 Als 1 m diep, dan $1 \cdot 3 \cdot 6 = 18 \text{ m}^3$, 18 m^3 verspreid over
 $132 \text{ m}^2 = 18 / 132 = 0,14$
 $2 \text{ m diep} = 32 \text{ m}^3 = 32 / 132 = 0,24$ $0,24 \neq 2$
 $1,5 \text{ m diep} = 27 \text{ m}^3 = 27 / 132 = 0,2$ $0,2 \neq 1,5$
 $1,75 \text{ m diep} = 18 \cdot 1,75 / 132 = 0,23$ $0,23 \neq 1,75$
 $1,76 \text{ m diep} = 18 \cdot 1,76 / 132 = 0,24$ $0,24 \neq 1,76$



Pagina 1/4



Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?
b. Wat ging er (later) wel goed?

a. We liepen een paar keer vast en wisten niet hoe we verder moesten
b. Op een bepaald moment hadden we door hoe het werkte en toen lukte het wel

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.
b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.
c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.

2. Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.

3. Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.9: Groep 4 leerling a iteratie 1.1

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: 4

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

als je de zwembad 1 meter diep graaft en dat stuk grond op het andere gedeelte zet wordt de zwembad 2,04 m diep, bij 2 meter bruit graven, wordt de zwembad 2,27 meter diep, je wilt dat de zwembad 2 meter diep is, dus je moet tussen 1-2 meter diep graven. bij 1,5 meter krijg je 1,7 meter diep. bij 1,75 meter graven krijg je 1,98 meter diep. bij 1,76 meter graven krijg je een zwembad, bij 1,76 meter graven krijg je een 2 meter diep zwembad. dus je moet 1,76 meter diep graven, wil je een zwembad van 2 m diep.

Pagina 1/4

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?

b. Wat ging er (later) wel goed?

a en b. steeds opnieuw proberen tot dat je het wel hebt.

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.

b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.

c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
- Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.10: Groep 4 leerling b iteratie 1.1

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: 4

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

Zwembad 2m oppervlakte tuin -
oppervlakte zwembad = 132m²

$1,76 \times 18 \div 132 = 2m$

↑

als je de zwembad eerst met 1,76m uitgraaft dus $\times 18$ als oppervlakte heb je $31,68m^2$ aan aarde. als je dat dan vergraaft over de rest van de tuin, dus $\div 132 = 0,24$

$1,76 + 0,24 = 2m$

Pagina 1/4

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?
b. Wat ging er (later) wel goed?

We hebben gewoon gegokt en uiteindelijk ging het goed

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.
b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.
c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / ~~neutraal~~ / niet nuttig.

2. Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.

3. Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.11: Groep 4 leerling c iteratie 1.1

5a

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: 5

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

$10 \cdot 25 = 250$, $3 \cdot 6 = 18$, $250 - 18 = 232$

$28x = \text{inhoud}$, waarbij $x = \text{diepte}$

$28x : 232 + x = y$ $y = 2$

$28x : 232 + x = 2$

$3x : 22 + x = 2$

$3x + 22x = 44$

$25x = 44$

$x = 44 : 25 = 1,76m$

Pagina 1/4

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?

b. Wat ging er (later) wel goed?

Formule opstellen

$a. 232 : 28x$ ipv $28x : 232$

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.

b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.

c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
- Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.12: Groep 5 leerling a iteratie 1.1

56

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: ...5.....

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurje te gebruiken.

$10 \cdot 15 = 150 - 3 \times 6 = 18 = 132$
 $18x = \text{inhoud waarbij } x = \text{diepte}$
 $18x : 132 + x = y$
 $y = 2$
 $18x : 132 + x = 2$
 $3x : 22 + x = 2$
 $3x + 22x = 44 = 25x$
 $x = 44 : 25 = 1,76 \text{ m}$

Pagina 1/4

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?
b. Wat ging er (later) wel goed?

~~18x~~ Eerst hadden we $132 : 18x$

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.
b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.
c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

3b.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.
- Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.13: Groep 5 leerling b iteratie 1.1

Werkblad: Probleem Oplossen

Groep: 5

Leerdoelen

- Het begrijpelijk kunnen uitwerken van de oplossing van het probleem.
- Het kunnen verklaren waarom de stappen binnen deze oplossing kloppen.
- Kunnen uitleggen hoe je op de oplossing bent komen.
- Groepsleden kunnen helpen met hun uitwerkingen.

1. Werk de oplossing van het probleem begrijpelijk uit.
Voeg waar nodig notities toe om de stappen binnen de oplossing te verklaren. Dit kan bijvoorbeeld doormiddel pijlen of tekst in een ander kleurtje te gebruiken.

oppvl. tuin = $10 \cdot 18 = 180 \text{ m}^2$
oppvl. zwembad = $5 \cdot 6 = 30 \text{ m}^2$
overige oppvl. = $160 - 18 = 142 \text{ m}^2$
inhoud zwembad = $18x$ waarbij x de diepte die je graaft in meter
hoogte verhoging tuin = $\frac{18x}{182} = \frac{3x}{22}$
totale diepte zwembad = $\frac{3x}{22} + x$
je wil je zwembad 2 meter diep
dus: $\frac{3x}{22} + x = 2$
 $3x + 22x = 44$
 $25x = 44$
 $x = \frac{44}{25} = 1,76 \text{ m}$
 $x = 1,76 \text{ m}$

Pagina 1/4

Pagina 2/4

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Wat ging er niet (direct) goed?
b. Wat ging er (later) wel goed?

had eerst inhoud en oppervlakte omgezet in formule voor hoogte
we hadden eerst een formule opgesteld

3. Klaar?

a. Help indien nodig je groepsleden.
b. Bedenk een vergelijkbaar probleem en los op.
c. Wanneer iedereen klaar is ga gezamenlijk verder met 3b op het whiteboard.

Pagina 3/4

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik vond het individueel opschrijven van de oplossing nuttig / neutraal / niet nuttig.

2. Door het werkblad heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de het probleem, de oplossing of de oplossingsmethode.

3. Tijdens het werken aan het werkblad heb ik anderen geholpen / ben ik geholpen / heb ik enkel alleen gewerkt.

Pagina 4/4

Figuur N.14: Groep 5 leerling c iteratie 1.1

Iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

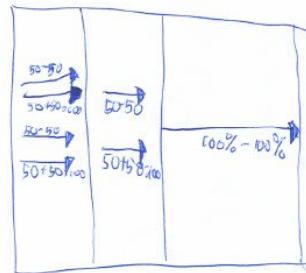
Je start met 4 auto's op $\frac{1}{4}$ van de woestijn. Legen 2 auto's hun tank in de tank van de 2 andere auto's. Dan op $\frac{1}{2}$ hebben beide auto's 50% van hun tank over. Hier legt de auto zonder vip zijn tank in de auto van de vip en deze auto kan nu de woestijn overrijden.

Naam: _____

Groep: ...

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

Door een schets te maken hadden we overzicht op het probleem. Toen kwam [naam] met het idee om ook andere auto's opnieuw te vullen zodat de auto van de vip later in de woestijn nog gevuld kon worden. Hierdoor konden we het probleem oplossen.
We liepen nooit vast.



Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.15: Groep 1 leerling a iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Een beroemd persoon moet aan de andere kant van de woestijn komen. Met een volle tank komen ze maar tot de helft van de woestijn. Hoeveel auto's zijn nodig om aan de andere kant van de woestijn te komen?

Aan het begin van de woestijn heb je 4 auto's die 100% gevuld zijn. Die rijden een kwart van de woestijn af. Dan zijn ze allemaal 50%. Twee daarvan geven daarvan hun benzine aan de andere, waardoor die twee nu 100% hebben. Die rijden tot de helft en ze hebben nu

Naam: [REDACTED]

Groep: ...1.

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

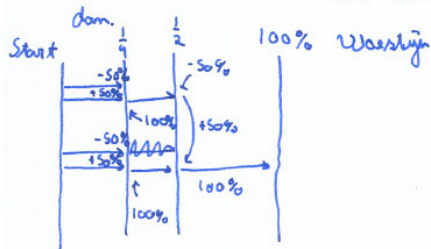
Pagina 2/2

Figuur N.16: Groep 1 leerling b iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

4 auto's starten bij het begin en iedereen rijdt tot de helft $\frac{1}{2}$, iedereen heeft dan een halve tank. Dus dan hebben er 2 auto's een volle tank. Die rijden naar de helft waardoor ze allebei 50% tank hebben = samen 100%. Dan haalt het einde.



Naam: _____

Groep: ..1..

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

2.a. negeens, vadenken.
b. de oplossing vinden

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

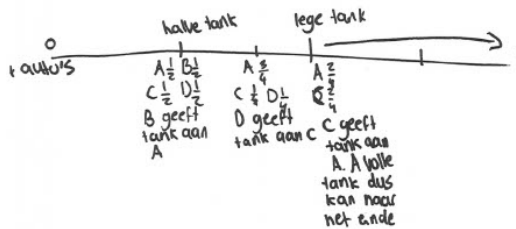
.....

Pagina 2/2

Figuur N.17: Groep 1 leerling c iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.



Reserve werkruimte

Naam: _____

Groep: 2.

2a

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

gewoon steeds opnieuw proberen en
logisch nadenken

a) of 4 auto's wanneer je de benzine overplaatst naar de andere auto(s), als je het op het verkeerde moment verplaatst werkt het niet.

b) samenwerken omschrijven

Pagina 1/2



Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik begreep wel beetje / niet wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

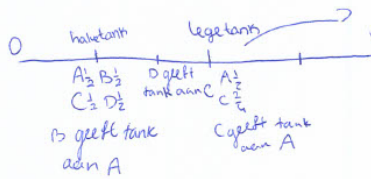
Lol

Pagina 2/2

Figuur N.18: Groep 2 leerling a iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.



Naam: _____

Groep: 2b

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

steeds opnieuw kijken
en puzzelen hoe het moet.

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
- Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
- Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
- Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:



.....

.....

.....

.....

.....

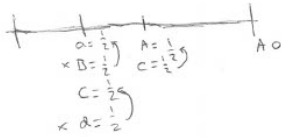
Pagina 2/2



Figuur N.19: Groep 2 leerling b iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.



- de * A de auto's moeten tegelijk
Starten en ~~tegelijk~~ ^{tegelijk} A tankt de hele tank
Van C. C tankt heel de tank v. D
dan ~~door~~ ^{de auto's} A en C tot midden
dan hebben alle drie A en C $\frac{1}{2}$ op de tank
C zet de brandstof op A, die wordt weer
en volle en kan zo de rit maken tot het einde

Naam: [REDACTED]

Groep: ...7

2C

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

- a) hoe kunnen we ~~aan~~ ^{aan de overkant}
kom. Ik kwam en later pas achter dat
we bij op de helft en volle tank nodig hebben
b) het gebruik v. brandstof ~~dat~~ ^{dat} ~~was~~ ^{was} dat
moest hen makkelijker

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.20: Groep 2 leerling c iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{array} \right\} \rightarrow 1 \rightarrow 0$$

Route: $\frac{1}{4} - \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - 1$

Het doel is om steeds 2 Malen honks te combineren

Het idee is om steeds, na elke ruwte, 2 Malen honks te combineren tot 1. Als je dit blijft doen kom je met genoeg honks uiteindelijk aan het eind. De laatste keer heb je honks helemaal begrepen. Vandaar 4 auto's

Reserve werkruimte

Naam: _____

Groep: _____

3a

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

- a. ~~Ik heb~~ zag het in 1 keer
 b. Samenwerking, iedereen was gemotiveerd

Pagina 1/2

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

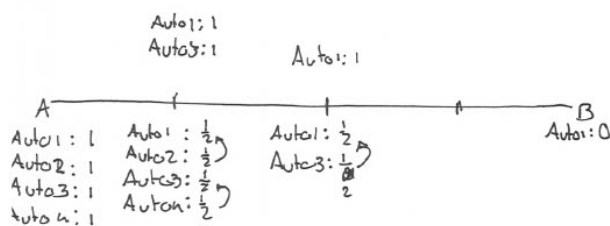
.....

Pagina 2/2

Figuur N.21: Groep 3 leerling a iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.



Naam:

Groep: 3

36

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

Ik zag dat na $\frac{1}{n}$ van de route de tank $\frac{1}{2}$ was.

Als je de tanks samen voegt wordt dat weer 1.

Als je dat proces nog een keer herhaalt haal je het eind

- a. niet
b. het denken en samenwerken.

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

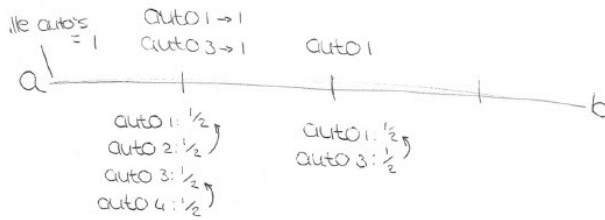
Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

Pagina 2/2

Figuur N.22: Groep 3 leerling b iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.



Naam: _____

Groep: 3

3c

2. Hoe ben je hierop gekomen?

Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

3c

1. Ik begreep ~~wat~~ / beetje / ~~wat~~ wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld ~~wel~~ / niet gebruikt, het was wel / ~~niet~~ duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / ~~een beetje~~ / ~~niet~~ bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.23: Groep 3 leerling c iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

25 50 75 100 (route)

I 50% } 50% } →

II 50% } 50% }

III 50% } 50% }

VIP 50% }

(hoeveel benzine)

Naam: [REDACTED] Groep: 4

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?

b. Wat ging er goed? Waarom?

Vleesman en tand + ~~toes~~ waterman

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.

2. Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.

3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.

4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.24: Groep 4 leerling a iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 11 \\
 111 \\
 \text{vip}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 25 \\
 50 \\
 50 \\
 50 \\
 50
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 50 \\
 \cancel{50} \\
 \cancel{50} \\
 50 \\
 50
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 75
 \end{array}
 \rightarrow$$

Naam:

Groep: 4

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

volle maan en stand + sterrenbeeld
+ ik ben bijna jarig

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik begreep **wel** / **beetje** / **niet** wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld **wel** / **niet** gebruikt, het was **wel** / **niet** duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking **wel** / **niet** aangevuld met notities. Hierdoor heb ik **meer** / **neutraal** / **niet meer** inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt **wel** / **een beetje** / **niet** bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

[illegible]

Pagina 2/2

Figuur N.25: Groep 4 leerling b iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

bij een halve tank inhoud voeg je 2 tanks samen om een hele tank inhoud te krijgen

Dat is dus eerst bij 25% van de route, dan heb je dus de helft van de auto's, dat doe je weer bij 50% van de route, waarna de auto's weer gehalveerd worden. Vanaf dat moment heb je genoeg tank inhoud om het einde te bereiken.

Het aantal autos ~~vermenigvuldigt~~ voor als je met 1 auto wil eindigen is $1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$ auto's

afstand	25%	50%	75%	100%
auto 1	100%	50%	25%	12.5%
auto 2	100%	50%	25%	12.5%
auto 3	100%	50%	25%	12.5%
auto 4	100%	50%	25%	12.5%

Naam: [REDACTED]

Groep: 4c

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

nadenken

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
- Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
- Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
- Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

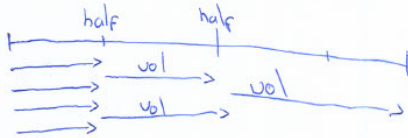
Pagina 2/2

Figuur N.26: Groep 4 leerling c iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

- We begonnen met 1 auto
Die van tot de helft komen
- toen 2 auto's, als ze beide tot een kwart komen hebben ze beide een halve tank, die gooien we bij elkaar dan heeft 1 auto een volle tank en die van dan tot $\frac{3}{4}$ rijden
- 4 auto's, stoppen op $\frac{1}{4}$ → 2 volle tanks
2 auto's stoppen op $\frac{1}{2}$ en gooien 2 halve tanks weer bij elkaar en dan van de laatste tot het eind



Reserve werkruimte

$$y = 2^{2x-2}$$

y = aan 1 auto's
 x = aantal volle tanks die heb
 kost om aan het eind van de
 woestijn te komen

Naam: _____

Groep: 5

5a

2. Hoe ben je hierop gekomen?
 Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
 a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
 b. Wat ging er goed? Waarom?

b. Door de schets werd het heel duidelijk en was het makkelijk te berekenen

Pagina 1/2

Feedback: omcirkel jouw antwoord

5a

- Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
- Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
- Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
- Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

Het eerste probleem leek heel makkelijk maar door het maar een heel klein beetje te veranderen word het erg moeilijk dat was leuk

Pagina 2/2

Figuur N.27: Groep 5 leerling a iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

2. Hoe ben je hierop gekomen? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

Naam: [REDACTED] Groep: 1.5

56

volle tank = eind

Als tank half is wordt het bijgevuld

$Y = 2^{X-2}$ als X = hoeveel volle tank is eind

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

56

1. Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.

2. Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk. niet / gezien

3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.

4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

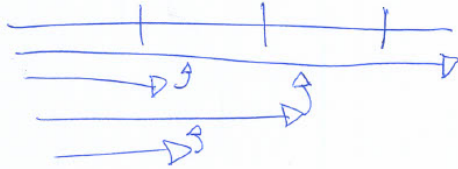
Schatkaart

Pagina 2/2

Figuur N.28: Groep 5 leerling b iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.



Dus 4 auto's

Naam: [REDACTED]

Groep: 5

5c

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

De Notatie, zie bij 1.
omdat het meteen duidelijk was

~~_____~~

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

**Feedback: omcirkel jouw antwoord**

5c

1. Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
2. Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
3. Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
4. Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

~~Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:~~

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.29: Groep 5 leerling c iteratie 1.2

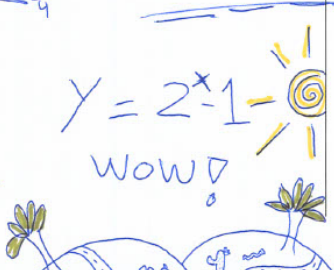
Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Zie Plaatje
op achter
KANT ook!

~~begin met 1/4 auto's~~ 1/4
dan naar 8 1/4
dan naar 4 1/4
dan naar 2 1/4
dan naar einde 1/4

$Y = 2 \times 1$
WOW!



Naam: [redacted] Groep:

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

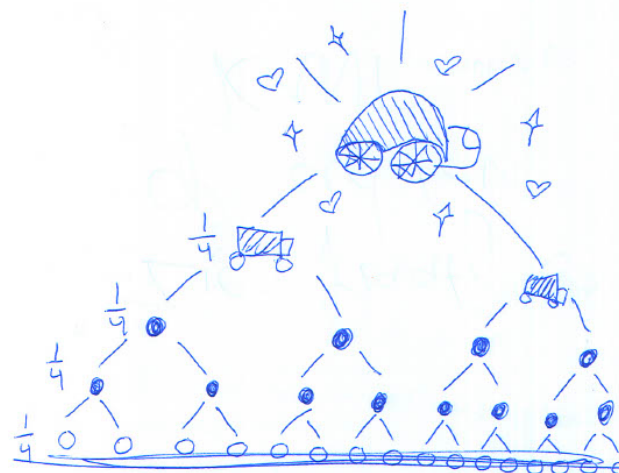
16 Was te veel
dan zoe je uit
kamen het een kleine
kamp beetje veel dus
je begint eigenz het
80 dan rij re 4 kwarten

[] [] [] []

oops je kan er ook met 4 beginnen?

$4 > 2$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$

Reserve werkruimte



Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
- Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
- Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
- Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

Figuur N.30: Groep 6 leerling a iteratie 1.2

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

$\frac{1}{4}$
 $\frac{1}{2}$
 $\frac{3}{4}$
 1

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow \frac{1}{2}$ het efficiëntste
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow 1$ verspillend
 $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \rightarrow 1$ te weinig

}

tanks

○ halve tank een auto $\frac{1}{2}$ afstand

● hele tank halve tank $\frac{1}{4}$ afstand

Reserve werkruimte

per $\frac{1}{4}$ afstand neemt de auto's toe met een factor van 2.

Voor afstand met lengte $\frac{1}{4} \cdot x$ is de auto'sing:

$y = 2^{x-2}$ pas bij $x=2$ start de toename

↑
toename factor 2

fout: we komen aan met een halve tank, $\frac{1}{2}$

door: verkeerd gekozen tekens dacht ik dat het (0) een lege was

$y = 2^{x-2}$:

Naam: _____ Groep:

2. Hoe ben je hierop gekomen?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

a. Waar liep je op vast? Hoe ben je toch verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?

ik keek wat de efficiëntste manier was om de tanks bij elkaar te voegen.

toen keek ik hoe ver ik kon komen met twee auto's na $\frac{1}{4}$ afstand, omdat dit het efficiëntst was.*

vervolgens met een soort van boom bij mogelijkheden voor kansberekening keek ik met hoeveel auto's ik 1 afstand kon afleggen.

Ik had een vergissing gemaakt waarbij de auto met de VIP de woestijn uitkwam met een volle tank, wat niet efficiënt was (te veel).

Dit kwam doordat ik de breuken tussen de tijdsprongen deed ipv op de tijdsprongen. → de auto legt niet $\frac{1}{4}$ af

Het antwoord is 8 auto's. tijdens de benzineverdeling

na $\frac{1}{4}$ afstand is in lengte woestijn.

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik begreep wel / beetje / niet wat ik moest doen.
- Ik heb het voorbeeld wel / niet gebruikt, het was wel / niet duidelijk.
- Vraag 1:
Ik heb de uitwerking wel / niet aangevuld met notities. Hierdoor heb ik meer / neutraal / niet meer inzicht gekregen in de oplossing.
- Vraag 2:
Het antwoord helpt wel / een beetje / niet bij het oplossen van het volgende probleem.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

6b

6b

Figuur N.31: Groep 6 leerling b iteratie 1.2

Iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

1. 2x 6 muntjes wegen



2. 1 groep 3 vs 3 wegen

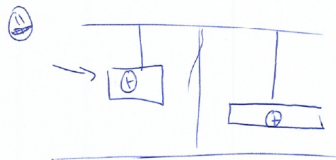


3. + vs - wegen, hier door weet je of het lichter/zwaarder is



4. valse groep 3 vs 3 wegen → 3 blijven over.

5. 2 wegen en zo weet je het muntje



Naam: _____

Groep: 1

la

2. Hoe heb je het aangepakt?

Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
- Wat ging er goed? Waarom?
- Waar moest je rekening mee houden?

a) hoe je minder vaak kan wegen
b) samenwerken, we kunnen het gun goed
c) schrijven

Pagina 1/2

Reserve werkruimte



Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

✓ lol

Pagina 2/2

Figuur N.32: Groep 1 leerling a iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

1. Je hebt 2 groepen van 5 en die verdeel je weer in groepjes van 3. Hebben we groep aa en ab en groep ba en bb als namen nemen.
 $ab = aa - ab$ zit de rode munt in de b-groepen, andersom geldt hetzelfde.
2. Hebben we aangenomen dat groep ab een va goed zijn dan wegen ze de a en b groepen tegen elkaar, nu weten we of de rode munt zwaarder of lichter is.
3. Neem de b groepen ^{en} weeg ze tegen elkaar nu weet je of de rode munt in groep ba en bb.
4. Hebben we zeggen dat de rode munt lichter is en in groep b b zit. Neem er een uit en weeg de overige 2 tegen elkaar.
 1. Gelijkt? dan is het de aangenomen munt
 2. Ongelekt? in dit geval hebben we bepaald dat de rode munt lichter is dan in het de lichte

Naam: [REDACTED]

Groep: 1...

2. Hoe heb je het aangepakt?
 Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
 - a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
 - b. Wat ging er goed? Waarom?
 - c. Waar moest je rekening mee houden?
- a. Die kregen het niet voor elkaar om van 4 naar 3 stappen te komen.
- b. Optomen van het probleem ging in een keer goed. Ze bedachten zichzelf 1 ding en velden elkaar aan.
- c. Al probleem ingewikkeld om te vinden

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
2. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
3. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.33: Groep 1 leerling b iteratie 2.1

→ meerdere antwoorden

verdere uitleg
werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

weeg moment

- 12 muntjes delen in 2 groepen van 6
 $1 \text{ groep} = +$
 $1 \text{ groep} = -$ } geen verdere betekenis
- 1 groep 3 vs 3 wegen
 → In evenwicht → andere groep heeft valse munt
 → uit balans → deze groep valse munt
- + vs - wegen, hierdoor weet je of de valse munt zwaarder of lichter is.
 weet welke geen valse munt heeft
 andere groep:
 → weegschaal naar benede: valse munt zwaarder
 → weegschaal omhoog: valse munt lichter
- valse groep 3 vs 3 wegen. Door stap 3 weet je in welke groep van 3 de valse munt zit
- laatste valse groep Munt 1 vs munt 2, munt 3 aan de kant
 → Evenwicht: munt 3 is vals
 → uit balans: door stap 3 weet je op het munt 1 of 2 is

Reserve werkruimte

Naam

Groep: 1/A

IC

2. Hoe heb je het aangepakt?
 Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
 - Wat ging er goed? Waarom?
 - Waar moest je rekening mee houden?
- a. Toen je het bij elkaar in 3 x wegen van doen, andere manier geprobeerd en weer op 4 uitgekomen
- b. Door muntjes te tellen werd het makkelijker
- c. Je wist niet of de valse munt lichter of zwaarder is

Pagina 1/2

Feedback: omcirkel jouw antwoord

IC

1. Ik heb door de tweede opdracht veel ^{meer} een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
2. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
3. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.34: Groep 1 leerling c iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?
c. Waar moest je rekening mee houden?

Naam: [REDACTED] Groep: 2a

DR EAMTEAM

Maximaal

① 6 | 6

② 3 | 3 (even)

③ Dus andere 3 | 3 En je weet of zwager of lichter

④ 1 | 1 Je weet welke het is

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.

2. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.

3. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

DR EAMTEAM

Figuur N.35: Groep 2 leerling a iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

- 1- 6/6 je weegt 6 aan elke kant
daar komt 1 lagere uit, de kant is
zwaarder.
- 2- 3/3 ~~dan~~ weeg je van een willekeurige
kant de muntjes met 3 aan elke
kant. Hier is het bijvoorbeeld de zwaardere.
- Als die ongelijk zijn, weet je dat het
valse muntje hier tussen zit en dat
de zwaardere is. In dit geval ga
je naar stap 1.
- Als die hetzelfde zijn en goed
~~balanceren~~, weeg je de muntjes om
balanceren, weet je dat het valse
muntje in de andere groep zit en die
lichter is. Hierbij ga je naar stap 3
- 3- 3/3 herhaling van stap 2 voor de andere
kant
- 4- 1/1 bij de ongelijke kant weeg je 2 muntjes
van de groep van 3 met het valse
muntje. als die gelijk zijn is het overige
muntje vals. als ze ongelijk zijn is het de lichtere/zwaardere.

Reserve werkruimte

Naam: [REDACTED]

Groep: 2...

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?
c. Waar moest je rekening mee houden?

Pagina 1/2

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer
inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
2. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
3. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.36: Groep 2 leerling b iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Als munt rechts en lichter (bijv.)
 Weeg 6 Kies een kant. (hier links)

(links)
 3
 3

(rechts)
 3
 3

Zijn gelijk, munt is dus lichter en rechts

Links hoger, vals = lichter, dus links

1 1
 1 1

Gelijks, dus vals is 3 munt. Max 4, min 3

Naam: [redacted] Groep: 2

2. Hoe heb je het aangepakt?
 Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
- Wat ging er goed? Waarom?
- Waar moest je rekening mee houden?

Wij hadden spel bedacht hoe het in 4x moest, maar we liepen vast op 3x en konden dat niet oplossen

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.37: Groep 2 leerling c iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Wk gaan er-5e
f. deel 12 in groepen v13

1. de groep in 4 groepen van 3 muntjes
2. Je weegt 2 tegen over elkaar
3. Je weet welke een overen is
4. Je stopt 2 van ~~overen~~ ^{elke} groepen tegen 1 de overen
kan
5. Als je weet dat ~~deze~~ ^{het nog steeds een}
is weet je dat ~~de rest~~ ^{ander} of de groep overen
is
6. Je weegt ~~dat a tegen b~~ ^{tegen} ~~de rest~~ ^{verdoord}
het 2: 2 stuur dan weet je welk
overen is

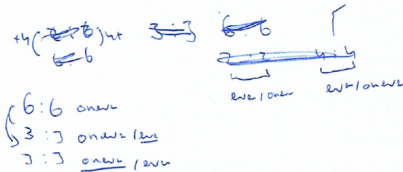
Naam:

Groep: 3...

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
 - Wat ging er goed? Waarom?
 - Waar moest je rekening mee houden?



- a. het verder breiden van plantjes
- b. het overnemen van de rivier
- c. ☒ het moneren van de rivier of het oeverbeheer



Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik heb door de tweede opdracht **veel / een beetje** / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
2. Hierbij heeft hulpvraag **a / b / c** mij het MEEST geholpen.
3. Hierbij heeft hulpvraag **a / b / c** mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

[illegible]

Pagina 2/2

Figuur N.38: Groep 3 leerling a iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
b. Wat ging er goed? Waarom?
c. Waar moest je rekening mee houden?

Naam: [REDACTED] Groep: 3b

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

je vult 1 van de kanten (na de kanten)
das 3 om 3 als ze gelijk zijn
zit het valse muntje aan de onderkant en is
het muntje lichter

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.

2. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.

3. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

Pagina 2/2

Figuur N.39: Groep 3 leerling b iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.



③ minimaal 0+

Naam:

Groep: ³

3c

2. Hoe heb je het aangepakt?

Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
- Wat ging er goed? Waarom? *Tekenen van oplossing*
- Waar moest je rekening mee houden? *Samenwerken*

Pagina 1/2

Reserve werkruimte



Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.40: Groep 3 leerling c iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Naam: [REDACTED] Groep: 4 4a

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
- Wat ging er goed? Waarom?
- Waar moest je rekening mee houden?

nadenken over mijn mening mijn mogelijk
en toen was ik slim

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

Pagina 2/2

Figuur N.41: Groep 4 leerling a iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

12 munten in 3 groepen

4 4 4^{*} met één valse

slechtste
geval:
[1]

1. balans schuin

4 4^{*} 4

2. balans schuin

4 4^{*} 4

conclusie: middelste is vals

2. balans recht

conclusie: eerste is vals

4^{*} 4 4
4^{*} 4 4

[2]

Situatie 1:

3. 1 1

verwisseling

← 4 groepen

4. 1 1

← degen e die is verwisseld is vals

Situatie 2: (na verwissel)

4. 1 1

→ de niet verwisselde is vals

Situatie 3: (na verwissel)

4. 1 1

verwisselde → vals

Situatie 4:

3. 1 1

4. 1 1

→ ongebleven munt vals

Naam: _____

Groep: 4a

2. Hoe heb je het aangepakt?

Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
- Wat ging er goed? Waarom?
- Waar moest je rekening mee houden?

We begonnen met de makkelijkste manier waar we het opsplijste in 2 groepen telkens. Dit beruiste op het verkeerde geloof dat we wisten of de valse munt lichter of zwaarder was.

Daarna begon ik te experimenteren met 3 groepen. Zo wisten we zeker dat de valse munt was in een groep van 4 met max 2 stappen. [1]

Met de 4 munten bedachten we dat we groepen van 3 konden gebruiken.

Door verwisseling van 1 munt konden we de valse munt berekenen. [2]

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

12

3 3

3 3^{*}

3 3^{*}

3 3

evenwicht: eerste 3
oneven: andere 3

kies 4 van 6

2 2

2 2^{*}

2 2

2 2

evenwicht: laatste 2
oneven: eerste 4

laatste 2:

#1 zeker goede

3 3
of 2 erbij
2 2 2 zeker goed
#3 #2
maar te veel stoppen...
want bij 3e stap
pas naar 2 mogelijke
met goede, 4e stap,
valse berekenen
1 2 1 2

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

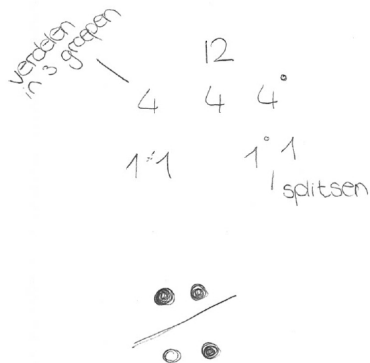
Ik heb een betere manier bedacht om alles te noteren door opdr.

Pagina 2/2

Figuur N.42: Groep 4 leerling b iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Naam: [REDACTED]

Groep: 4

4c

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
 - Wat ging er goed? Waarom?
 - Waar moest je rekening mee houden?

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

4c

1. Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
2. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
3. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.43: Groep 4 leerling c iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen 1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.	Naam: [REDACTED] Groep: 5 5a 2. Hoe heb je het aangepakt? Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen. a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen? b. Wat ging er goed? Waarom? c. Waar moest je rekening mee houden? a) op dat we niet wisten welke van de 2 de valse was b) overleg c) dat je niet wist of die zwaarder of lichter was Pagina 1/2
Reserve werkruimte	Feedback: omcirkel jouw antwoord 5b 1. Ik heb door de tweede opdracht veel / <u>een beetje</u> / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen. 2. Hierbij heeft hulpvraag a / b / <u>c</u> mij het MEEST geholpen. 3. Hierbij heeft hulpvraag a / <u>b</u> / c mij het MINST geholpen. Ruimte voor tips / tops / opmerkingen: Pagina 2/2

Figuur N.44: Groep 5 leerling a iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

1. je doet aan iedere kant 6 munten, ze zijn nu oneven qua gewicht
2. steeds één aan elke kant weghalen tot er evenwicht is
3. waarheen je weet in welke groep de valse zit,

Naam: [REDACTED]

Groep: 5

5b

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
- a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
 - b. Wat ging er goed? Waarom?
 - c. Waar moest je rekening mee houden?
- a. we wisten niet of de valse lichter of zwaarder was

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

5b

1. Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
2. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
3. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.45: Groep 5 leerling b iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
- Wat ging er goed? Waarom?
- Waar moest je rekening mee houden?

a. aan het begin, maar toen we waren begonnen ging het beter
b. het tekenen
c.

Naam: [REDACTED] Groep: **S** 5c

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord 5c

- Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

Pagina 2/2

ENJOY 2

Figuur N.46: Groep 5 leerling c iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

4-4 ~~2~~ wegen
 Stel is gelijk is de andere 4 niet goed
 Stel "I" dan verander je een van de 4 nummers
 of het
 Dan weet je welk van de twee of lichter moet ~~zijn~~
 Dan doe je de ene 4 die fout is 2-2 wegen
 en dan lijk je welke fout is en dan 1-1 endan
 Is eerste fout.

die 4 doe je dan 1-1 en
 dan stel = gelijk dan, verander je een
 en dan is weer gelijk

2. Hoe heb je het aangepakt?
 Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
 a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
 b. Wat ging er goed? Waarom?
 c. Waar moest je rekening mee houden?

Naam: [REDACTED] Groep: **6.** ba

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.

2. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.

3. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

Pagina 2/2

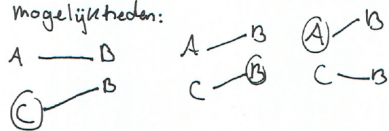
Figuur N.47: Groep 6 leerling a iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Weeg eerst 4 tegen 4. Verwissel dan een groepje van 4 met de overige 4.

Mogelijkheden:



Zo weet je welke groepje de valse munt heeft en of de valse munt lichter of zwaarder is. Dan weeg je van dat groepje 2 tegen 2 en dan 1 tegen 1. Zo doe je het in 4 wegingen.

Naam: _____

Groep: ..6

2. Hoe heb je het aangepakt?
Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.
- Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
 - Wat ging er goed? Waarom?
 - Waar moest je rekening mee houden?

- in 3 wegingen konden we niet uithalen.
- het in 4 wegingen wisten we snel.
- ~~weten~~ of de munt lichter of zwaarder is.

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
- Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

Pagina 2/2

Figuur N.48: Groep 6 leerling b iteratie 2.1

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Naam: [REDACTED]Groep: 6

2. Hoe heb je het aangepakt?

Gebruik indien nodig de volgende hulpvragen.

- a. Waar liep je op vast? Hoe ben je verder gekomen?
 b. Wat ging er goed? Waarom?
 c. Waar moest je rekening mee houden?

$$2 - 2 - 2$$

$$\begin{array}{ccc} > 3 & 3 & 3 \\ > 3 & 3 & 3 \\ > 3 & 3 & 3 \\ > 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$$2 \times 2$$

$$2 - 2 \quad 1$$

$$2 - 2$$

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik heb door de tweede opdracht veel / een beetje / niet meer inzicht in het probleem of de oplossingsmethode gekregen.
2. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MEEST geholpen.
3. Hierbij heeft hulpvraag a / b / c mij het MINST geholpen.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.49: Groep 6 leerling c iteratie 2.1

Iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

het aantal getallen waar je het getal door kan delen is het aantal veranderingen.

Bijv met deling 14:

14 kan je delen door 1, 2, 7, 14
dus het heeft 4 veranderingen
het deling gaat dus dicht, open, dicht,
open.

Naam: _____

Groep: ...l.

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de *vragenkaart*. Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

denk na

3. Wat is de **belangrijkste les die je meeneemt** naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

nadenken

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op de vragenkaart wel / een beetje / niet.
- De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Op de vragenkaart zorgt categorie geel / groen / blauw voor de meest interessante gesprekken.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.50: Groep 1 leerling a iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Die zijn opzoek gaan naar het patroon, maar die hebben we (nog) niet gevonden.

Naam: _____

Groep: *1.*

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de *vragenkaart*. Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

Makkelijker nadenken

3. Wat is de **belangrijkste les** die je meeneemt naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

Goed Samenwerken

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen nuttig / neutraal / niet nuttig.
2. Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op de vragenkaart wel / een beetje / niet.
3. De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
4. Op de vragenkaart zorgt categorie geel / groen / blauw voor de meest interessante gesprekken.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen:

Leuker nadenken

Pagina 2/2

Figuur N.51: Groep 1 leerling b iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

- 168 priemgetallen in 1000

- Worden 2e aangeraakt.

~~Minimaal~~ Minimaal 168 kluisjes dicht.

De laatste 500 mensen raken maar 1 kluisje aan.

de eerste persoon laat alle tientallen dicht.

Naam: [REDACTED]

Groep: 1

IC

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de vragenkaart. Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

Zet al je bevindingen op een rij en kijk of je het probleem misschien anders kan aanpakken.

3. Wat is de **belangrijkste les** die je meeneemt naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

Begin met ~~de~~ ideeën op het bord schrijven (goed/leef) kijk dan bij elk idee of het haalbaar is. Zo worden je ideeën ook zichtbaar voor anderen.

Vereenvoudig het probleem zo goed mogelijk.

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op de vragenkaart wel / een beetje / niet.
- De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Op de vragenkaart zorgt categorie geel / groen / blauw voor de meest interessante gesprekken.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.52: Groep 1 leerling c iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

persoon	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	D	D	D	D	D	D	D	D	D	D
2	D	O	D	O	D	O	D	O	D	O
3	D	O	O	O	D	D	D	O	O	O
4	D	O	O	O	D	D	D	D	O	O
5	D	O	O	O	D	O	O	D	O	O
6	D	O	O	O	D	O	O	D	O	O
7	D	O	O	O	D	O	O	D	O	O
8	D	O	O	O	D	O	O	D	O	O
9	D	O	O	O	D	O	O	D	O	O
10	D	O	O	O	D	O	O	D	O	O

② 1 2 2 3 2 4 2 4 3 4

D = dicht
O = open

→ tabel met resultaat

③ deelgetallen
aantal factoren
waar het quotiënt
resultaat een
heel getal is

Stelling:
voor aantal getallen die het kluisje door kan delen (getal kluisje) met een heel getal als resultaat

als even: open
als oneven: dicht

Naam: Groep: 2

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de vragenkaart. Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

3. Wat is de **belangrijkste les** die je meeneemt naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen nuttig / neutraal / niet nuttig.
- Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op de vragenkaart wel / een beetje / niet.
- De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Op de vragenkaart zorgt categorie geel / groen / blauw voor de meest interessante gesprekken.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

Pagina 2/2

Figuur N.53: Groep 2 leerling a iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Probleem:

Naam: [REDACTED]

Groep: 2..

26

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de *vragenkaart*. Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

Strategiën = Eerst kijken naar de priemgebellen
~~Tenig~~ Tenig kijken = Slechte samenwerking

3. Wat is de **belangrijkste les** die je meeneemt naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

26

- Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen **nuttig** / **neutraal** / **niet nuttig**.
- Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op de *vragenkaart* **wel** / **een beetje** / **niet**.
- De *vragenkaart* helpt **wel** / **een beetje** / **niet** bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Op de *vragenkaart* zorgt categorie **geel** / **groen** / **blauw** voor de meest interessante gesprekken.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

Pagina 2/2

Figuur N.54: Groep 2 leerling b iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

1.) alle priemgetallen opschrijven (168)
hierna wisten we het niet meer,

Naam: [redacted]

Groep: 3

3a

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de *vragenkaart*. Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

Samenwerken met andere groepen
en om hulp vragen.

3. Wat is de **belangrijkste les die je meeneemt** naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

idk

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen nuttig / neutraal / niet nuttig.

2. Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op de vragenkaart wel / een beetje / niet.

3. De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen. ~~een beetje~~

4. Op de vragenkaart zorgt categorie geel / groen / blauw voor de meest interessante gesprekken. ~~blauw~~

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:



...sommige problemen hebben geen oplossingen...

Pagina 2/2

Figuur N.55: Groep 3 leerling a iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

alle getallen met een ²even aantal
delers zal open zijn want,
na 2x een kluisje openen/dichtdoen
zal het weer teruggaan naar hoe
het daarvoor was. En alle kluisjes
beginnen open.

Naam: [REDACTED]

Groep: 3..

3b

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de *vragenkaart*.
Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer
grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo
specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven
die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

Doe het niet handmatig

3. Wat is de **belangrijkste les** die je meeneemt naar de volgende
masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

3b

1. Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen **nuttig** /
neutraal / niet nuttig.
2. Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op
de vragenkaart wel / een beetje / niet.
3. De vragenkaart helpt **wel** / een beetje / niet bij het uitleggen
van mijn denkstappen.
4. Op de vragenkaart zorgt categorie geel / groen / blauw voor
de meest interessante gesprekken.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.56: Groep 3 leerling b iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

eerst ging iemand alle priemgetallen opschrijven.
toen kwam ik er op dat elk ^{waars} getal met een
even aantal delers open staat. Dus dat ging ik
opschrijven en toen had ik geen zin meer

Naam: [REDACTED]

Groep: 3.

3C

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de vragenkaart. Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

Laat je groepje het werk doen,

3. Wat is de **belangrijkste les die je meeneemt** naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

Weet niet

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

3C

- Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen **nuttig** / neutraal / niet nuttig niet nodig
- Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op de vragenkaart wel / een beetje / niet.
- De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Op de vragenkaart zorgt categorie **geel** / groen / blauw voor de meest interessante gesprekken.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Pagina 2/2

Figuur N.57: Groep 3 leerling c iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

Naam: [REDACTED]

Groep: H4D

4a

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de *vragenkaart*. Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

afkijken

3. Wat is de **belangrijkste les die je meeneemt** naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

afkijken is niet erg.

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

4a

1. Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen nuttig / neutraal / niet nuttig.
2. Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op de vragenkaart wel / een beetje / niet.
3. De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
4. Op de vragenkaart zorgt categorie geel / groen / blauw voor de meest interessante gesprekken.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

Problemen hoeven niet altijd
wiskundig te zijn

Pagina 2/2

Figuur N.58: Groep 4 leerling a iteratie 2.3

Werkblad Probleem Oplossen

1. Werk de stappen naar de oplossing van het probleem navolgbaar uit. Vul aan met notities om je stappen te verklaren.

*we gingen allemaal alle vragen stellen
oplossen en dit was lastig voor mij*

Naam: [Redacted]Groep: *7*

4b

Vorm nieuwe groepjes en ga aan de slag met de *vragenkaart*. Bespreek van elke categorie zo veel mogelijk vragen om meer grip te krijgen op het probleem-oplossen. Daag elkaar uit om zo specifiek mogelijk te zijn, want daar kan jij ook van leren!

Noteer vervolgens je belangrijkste inzichten hieronder.

2. Wat is de **belangrijkste tip** die je een medeleerling zou geven die vast loopt bij het oplossen van dit probleem?

beten nadenken

3. Wat is de **belangrijkste les** die je meeneemt naar de volgende masterclass? Waarom, of wanneer komt dit van pas?

goed overleggen

Pagina 1/2

Reserve werkruimte

Feedback: omcirkel jouw antwoord

4b

1. Ik vond het uitwisselen van ideeën met andere groepen nuttig / neutraal / niet nuttig.
2. Ik begreep de antwoorden van mijn nieuwe groepsgenoten op de vragenkaart wel / een beetje / niet.
3. De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
4. Op de vragenkaart zorgt categorie geel / groen / blauw voor de meest interessante gesprekken.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.59: Groep 4 leerling b iteratie 2.3

Iteratie 2.4

la

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: [REDACTED] Groep:

1. Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?
2. Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?

de rij nPk als men bijde
ven of overen zijn met
veelvoud van 3 om middelste

Pagina 1/2

la

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
2. Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
3. Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje / niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen over het werken met de vragenkaart:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.61: Groep 1 leerling a iteratie 2.4

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: [redacted] Groep: ...1 (aas-v4a)

1. Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?

Voor het forceren van een win:
etc. $\rightarrow$ $\begin{array}{ccc} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}$ (a) (b) (c) beurt/keuze

De tweede beurt wint hier! De som is 4.
Speler A is naar 4 gegaan en wint.

Het patroon: De eerste speler die naar een
product met factor 4 gaat,
zal kunnen winnen. $\uparrow$
niet start

Voor geballenry

Het forceren van stappen (de manier)
zal helpen als je andere geballenryen wilt
gebruiken (1,2), (1,2,3), (1,2,3,4,5), etc.

2. Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die
vastloopt bij het oplossen van dit probleem?

Kijken hoe je een win forceert.

Pagina 1/2

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen
van mijn denkstappen.
2. Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het
probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
3. Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje
/ niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig
nagedacht.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen over het werken met de
vragenkaart:

Er was geen klassikale bespreking,
dus we konden niet echt andere
notaties en oplossingen zien.

Pagina 2/2

Figuur N.62: Groep 1 leerling b iteratie 2.4

1c

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: XXXXXXXXXX Groep: 1...

- Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?
Logisch blijven nadenken
- Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?
Werk goed samen en blijf logisch nadenken

Pagina 1/2

1c

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
- Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje / niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.

Ruimte voor tips / ~~tips~~ / opmerkingen over het werken met de vragenkaart:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.63: Groep 1 leerling c iteratie 2.4

2a

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: [REDACTED] Groep: 2

- Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?
nadenken
Verskillende manieren van notatie
- Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?
nadenken
overgive of!

Pagina 1/2

2a

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
- Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje / niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen over het werken met de vragenkaart:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.64: Groep 2 leerling a iteratie 2.4

26

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: [REDACTED] Groep: 2

- Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?

*Del het room goed is om gewoon maar ergens de beginnen
 zodat je uiteindelijk het hoge inzicht komt.
 Dit geldt eigenlijk voor heel je leven,

 We hebben het met elkaar vooral gehad over de
 manier van Noteren.*
- Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?

*Spel begin elkaar en schrijft alle zinnen op.
 Probeer niet die data een verhaal te breken*

Pagina 1/2

26

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
- Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje / niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen over het werken met de vragenkaart:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.65: Groep 2 leerling b iteratie 2.4

2c

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: [redacted] Groep: 2..

- Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
 Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?
 de verschillende manieren waarop je tot een oplossing kan komen.
- Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?
 blijven proberen

Pagina 1/2

2c

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
- Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje / niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.



Ruimte voor tips / tops / opmerkingen over het werken met de vragenkaart:



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.66: Groep 2 leerling c iteratie 2.4

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: [redacted]

Groep: 3

1. Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?

zorg dat jij mag kiezen als
hoeveelste je begint.

2. Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?

begin met een makkelijker probleem

Pagina 1/2

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. De *vragenkaart* helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
2. Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
3. Tijdens het werken met de *vragenkaart* heb ik veel / een beetje / niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen over het werken met de *vragenkaart*:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2



Figuur N.67: Groep 3 leerling a iteratie 2.4

36

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: XXXXXXXXXX Groep: 3

- Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd? Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?
bedenken niet hoeveel principes je samen hebt verloren
- Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?
verklein het probleem

Pagina 1/2

36

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- De *vragenkaart* helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
- Tijdens het werken met de *vragenkaart* heb ik veel / een beetje / niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen over het werken met de *vragenkaart*:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.68: Groep 3 leerling b iteratie 2.4

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: [REDACTED]

Groep: 3

1. Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?

Je moet altijd zorgen dat de tegenstander het max. aantal pringles dat je mag pakken + 1 pringles heeft.

2. Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?

Probeer een andere aanpak. Vraag andere groepen om hulp

Pagina 1/2

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
2. Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
3. Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje / niet gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen over het werken met de vragenkaart:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.69: Groep 3 leerling c iteratie 2.4

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: XXXXXXXXXX

Groep: 4.

1. Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?

Dat je niet als 4e wilt pakken
van de laatste y

2. Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?

vind het getal 1 vanaf
je het niet wilt pakken

Pagina 1/2

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
2. Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
3. Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje / niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen over het werken met de vragenkaart:

.....
.....
.....
.....
.....
.....

Pagina 2/2

Figuur N.70: Groep 4 leerling a iteratie 2.4

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: [REDACTED]

Groep:

1. Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?

*goed met elkaar overleggen
leren van elkaars besten*

2. Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?

gewoon proberen

Pagina 1/2

Feedback: omcirkel jouw antwoord

1. De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
2. Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
3. Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje / niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.

Ruimte voor tips / tops / opmerkingen over het werken met de vragenkaart:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Pagina 2/2

Figuur N.71: Groep 4 leerling b iteratie 2.4

4c

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: XXXXXXXXXX Groep: 4...

- Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?
*goed overleggen / samenwerken.
leren van elkaars fouten.*
- Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die vastloopt bij het oplossen van dit probleem?
Lijntjes tekenen, gewoon proberen.

Pagina 1/2

4c

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen van mijn denkstappen.
- Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
- Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje / niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig nagedacht.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen over het werken met de vragenkaart:

*goed overleggen / samenwerken.
Lijntjes tekenen, gewoon proberen.*

Pagina 2/2

Figuur N.72: Groep 4 leerling c iteratie 2.4

5a

Werkblad Probleem Oplossen

Naam: XXXXXXXXXX Groep: 5..

- Wat is het belangrijkste dat er is besproken / dat je hebt geleerd?
Waarom is dat belangrijk of wanneer komt dit van pas?

dat als je er nog voor hebt
je niet als eerst wilt starten Met
de eerste van de vier.
- Wat is de belangrijkste tip die je een medeleerling zou geven die
vastloopt bij het oplossen van dit probleem?

Blijf door s pelen en kijk naar
Patronen

Pagina 1/2

5a

Feedback: omcirkel jouw antwoord

- De vragenkaart helpt wel / een beetje / niet bij het uitleggen
van mijn denkstappen.
- Ik begreep wel / een beetje / niet hoe de andere groep het
probleem heeft opgelost, hier heb ik wel / niet wat van geleerd.
- Tijdens het werken met de vragenkaart heb ik veel / een beetje
/ niet heb gesproken en heb ik veel / een beetje / weinig
nagedacht.

Ruimte voor tips / tips / opmerkingen over het werken met de
vragenkaart:

Het Na bespreken is handig om vragen
te komen wat de denkwijze is
van de groepen

Pagina 2/2

Figuur N.73: Groep 5 leerling a iteratie 2.4