



TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT

VLIEGTUIGBOUWKUNDE

Rapport VTH-161

**BEPALING VAN DE INITIELE KNIKLAST VAN VLAKKE
PLATEN MET BEHULP VAN DE VERPLAATSINGSMETHODE**

door

**IR. T. J. VAN BATEN
IR. F. A. M. MOLHOEK**

DELFT - NEDERLAND

december 1969

Technische Hogeschool Delft

Vliegtuigbouwkunde

Rapport VTH-161

Bepaling van de initiële kniklast van vlakke
platen met behulp van de verplaatsingsmethode.

door

ir. T.J. van Baten
ir. F.A.M. Molhoek

Delft -- Nederland

december 1969

Summary

This report deals with the problem of computing the buckling stress of structures composed of flat plates, applying the "finite element method" or "displacement method".

The given method is evaluated for flat rectangular plates under arbitrary inplane loads; rectangular plate-bending elements with 12 and 16 degrees of freedom are used.

The results of a number of computations are compared among themselves and with values given in literature.

Inhoud

	blz.
Notaties	4
1. Inleiding	5
2. Het afleiden van de knikvergelijkingen	7
2.1 De inwendige energie van het continue model	7
2.2 Beschrijving met eindige elementen	8
3. Uitwerking voor rechthoekige vlakke platen	12
3.1 Keuze van de elementen	12
3.2 Uitwerking van de knikvergelijkingen voor R-12 en R-16	12
4. Resultaten en beschouwing	17
Literatuur	19
Figuren	20
Bijlagen:	
I De elementen R-12 en R-16	
II Resultaten	
III Numerieke uitwerking en programma's	

Notaties

- A - koëfficiënten matrix
- a - halve lengte van plaalement, in x-richting
- a_t - totale plaatlengte in x-richting
- b - halve lengte van plaalement, in y-richting
- b_t - totale plaatlengte in y-richting
- c - vektor van verplaatsingsparameters (n elementen)
- D - buigstijfheid van de plaat, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$
- E - elasticiteitsmodulus
- G - invloedsmatrix van een element (n x n elementen)
- h - plaatdikte
- k - knikkoëfficiënt in $\sigma_k = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b}\right)^2$
- n - aantal vrijheidsgraden per element
- p - vektor van polynoomtermen (n termen)
- s - elementaire stijfheidsmatrix voor een isotrope plaat
- S - stijfheidsmatrix m.b.t. buiging van een element (n x n elementen)
- t - index, geeft aan dat grootheid betrekking heeft op het gehele plaatveld
- u - vektor van vrijheidsgraden van een element (n elementen)
- U - inwendige energie
- w - doorbuiging
- x,y - koördinaten
- η - $\eta = \frac{y}{b}$, dimensieloze y-koördinaat
- κ - krommingsvektor
- λ - evenredigheidsfaktor in invloedsmatrix
- ν - konstante van Poisson
- ξ - $\xi = \frac{x}{a}$, dimensieloze x-koördinaat
- σ - initiële spanningsmatrix
- ϕ - hellingsvektor
- ω - $\omega = \frac{w}{h}$, dimensieloze doorbuiging.

1. Inleiding

In de literatuur zijn betrekkelijk weinig exakte oplossingen bekend van knikproblemen betreffende plaat- en schaalkonstrukties. Veelal worden numerieke methoden gebruikt om benaderingsoplossingen voor de kniklast te bepalen. Het meest bekende voorbeeld hiervan is de methode van Rayleigh-Ritz (lit. 1). Deze methoden op analytische grondslag zijn echter minder eenvoudig toe te passen indien er sprake is van gekompliceerde randvoorwaarden, zowel wat betreft de geometrie van de randen als de randbelastingen, samengestelde of niet-vlakke konstrukties of in geval van ingewikkelde knikvormen.

De "eindige elementenmethode" wordt reeds enige tijd op uitgebreide schaal toegepast om het gedrag van konstrukties onder diverse belastingen te bepalen. De methode berust op de gedachte dat het gedrag van een konstruktie kan worden beschouwd als het gedrag van een samenstel van door denkbeeldige doorsnijdingen verkregen elementen. Binnen een element wordt het verplaatsingsveld beschreven met behulp van een aantal karakteristieke verplaatsingen van dat element. Deze verplaatsingen worden "vrijheidsgraden" genoemd omdat zij de onbepaalde grootheden zijn waarin alle andere grootheden kunnen worden uitgedrukt. De punten waarin deze vrije verplaatsingen worden gekozen heten "knooppunten". Voor het opstellen van de vergelijkingen in de vrijheidsgraden wordt gebruik gemaakt van een variatieprincipe (b.v. virtuele arbeid). Door gebruik te maken van matrixrekening kan voor elk probleem een systematisch en eenvoudig rekenschema worden verkregen, dat zich leent voor verwerking door een digitale rekenmachine (zie lit. 6).

In dit rapport wordt een methode beschreven waarmee het mogelijk is de initiële kniklast van plaatkonstrukties te bepalen. Hierbij wordt gebruik gemaakt van het principe van de virtuele arbeid (of wat op hetzelfde neerkomt van minimum potentiële energie). Door de aanwezigheid van membraankrachten in het plaatvlak wordt de stijfheid van de plaat tegenover buiging beïnvloed. De buigstijfheid van de plaat wordt gerepresenteerd door een stijfheidsmatrix betrokken op de vrijheidsgraden; de genoemde verandering van de buigstijfheid wordt in rekening gebracht door een invloedsmatrix.

Om de methode te toetsen zijn een aantal berekeningen gemaakt voor rechthoekige plaatvelden belast op druk en/of afschuiving of op buiging in het plaatvlak, voor welke belastingen analytische oplossingen bekend zijn. Er worden twee rechthoekige elementen gebruikt respectievelijk met 12 en 16 vrijheidsgraden, in het vervolg R-12 en R-16 genoemd. Voor beide elementen zijn de stijfheids- en invloedsmatrices bepaald, de laatste voor diverse spanningen en spannings-

gradiënten binnen een element. De kniklast en de knikvorm voor diverse belastingsgevallen zijn berekend. De resultaten worden vergeleken met die van andere onderzoekers en met de analytische oplossingen (lit. 1). Gallagher en Padlog (lit. 2) onderzochten knik van staafkonstrukties. Ook onderzochten zij (lit. 4), evenals Kapur en Hartz (lit. 3) knik van vlakke platen met gebruik van het element R-12. Dawe (lit. 5) gebruikte hiervoor één variant op het element R-12.

2. Het afleiden van de knikvergelijkingen

2.1. De inwendige energie van het continue model

De inwendige energie van een alleen op buiging belast homogeen isotroop plaat-element met konstante dikte, wordt gegeven in lit. 1:

$$U_b = \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (1)$$

Hierin is D de buigstijfheid van de plaat, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$

Bij de afleiding van (1) zijn de volgende veronderstellingen gebruikt:

1. normalen op het middenvlak blijven normalen van dit vlak tijdens vervorming.
2. de vervorming t.g.v. afschuiving loodrecht op het middenvlak van de plaat is verwaarloosbaar ten opzichte van de buigvervorming van de plaat.
3. gebruik kan worden gemaakt van de tweedimensionale spannings-rek relaties, dit wil zeggen σ_z en de dwarskontraktie loodrecht op het middenvlak van de plaat worden verwaarloosd.

Aan de veronderstellingen kan alleen worden voldaan indien $h \ll l$, als l een representatieve afmeting in het plaatvlak is.

Indien er membraanspanningen σ_x , σ_y en τ_{xy} in het middenvlak van de plaat aanwezig zijn, wordt als gevolg van vervorming van dit vlak tijdens uitbuigen van de plaat, arbeid verricht door deze spanningen. Is de doorbuiging w voldoende klein om te mogen veronderstellen dat het membraanspanningssysteem tijdens uitbuigen van de plaat niet verandert, en worden de termen hoger dan de tweede orde in w verwaarloosd, dan wordt de potentiële energie van de membraanspanningen ten gevolge van de doorbuiging w gegeven door:

$$U_m = \frac{h}{2} \iint \left[\sigma_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \sigma_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2\tau_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dx dy \quad (2)$$

De totale verandering van de inwendige energie van het in zijn vlak belaste plaat-element is bij uitbuiging w :

$$U_t = U_b + U_m$$

De volgende matrix-notaties worden nu ingevoerd:

de krommingsvektor $\kappa' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}$, *

de hellingsvektor $\phi' = \begin{vmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}$,

de elementaire stijfheidsmatrix van een isotrope plaat: $s = \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix}$

en de initiële spanningsmatrix: $\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}$

Met behulp van deze matrixnotaties kan dan worden geschreven:

$$U_t = \frac{D}{2} \iint \kappa' s \kappa \, dx dy + \frac{h}{2} \iint \phi' \sigma \phi \, dx dy$$

of in termen van virtuele arbeid:

De virtuele arbeid verricht door de inwendige krachten bij een virtuele verplaatsing δw , wordt gegeven door:

$$\delta U_t = D \iint \delta \kappa' s \kappa \, dx dy + h \iint \delta \phi' \sigma \phi \, dx dy, \quad (3)$$

waarin: $\delta \kappa' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \end{vmatrix}$,

en $\delta \phi' = \begin{vmatrix} \frac{\partial \delta w}{\partial x} & \frac{\partial \delta w}{\partial y} \end{vmatrix}$.

2.2. Beschrijving met eindige elementen

Door een aantal denkbeeldige doorsnijdingen aan te brengen wordt de konstruktie (in dit geval een vlakke plaat) verdeeld in elementen. Binnen één element wordt het verloop van de verplaatsing w loodrecht op het plaatvlak, benaderd door een polynoom in x en y :

$$w = c_1 + c_2 x + c_3 xy + c_4 y + \dots \quad (\text{hogeregraadstermen in } x \text{ en } y) \quad (4)$$

* een ' boven een matrixnotatie geeft aan dat de matrix getransponeerd is.

Voor de voorwaarden waaraan het element en polynoom moeten voldoen wordt verwezen naar lit. 6, blz. 26. De coëfficiënten c_1, c_2, c_3 enz. worden de verplaatsingsparameters genoemd. Wordt met c de kolomvektor van de verplaatsingsparameters c_1 t/m c_n aangeduid, en met p de kolomvektor van de termen $1, x, xy, y$ etc. van het polynoom, dan kan (4) worden geschreven als:

$$w = p^T c \quad (5)$$

Indien het aantal gekozen vrijheidsgraden ($w_i, (\frac{\partial w}{\partial x})_i$ etc., waarin i een knooppuntsnummer is) gelijk is aan het aantal parameters van het verplaatsingsveld w , dan kan op eenvoudige wijze het verband tussen de verplaatsingsparameters en de vrijheidsgraden worden afgeleid. Is u de vektor van vrijheidsgraden van één element (zie b.v. fig. 1) dan wordt m.b.v. (4) en door substitutie van de coördinaten van de knooppunten gevonden:

$$u = A c, \quad (6)$$

waarin A een vierkante matrix met bekende coëfficiënten is.

Indien geen afhankelijke termen in het verplaatsingspolynoom voorkomen, is de matrix A niet singulier. Uit (6) volgt dan:

$$c = A^{-1} u, \quad (7)$$

waarmee de verplaatsingsparameters zijn uitgedrukt in de vrijheidsgraden.

Voor het verplaatsingsveld w kan nu worden geschreven:

$$w = p^T A^{-1} u \quad (8)$$

Ook de krommingsvektor kan nu in de vrijheidsgraden worden uitgedrukt:

$$\kappa = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad A^{-1} u = \kappa_p^T A^{-1} u = K u \quad (9)$$

κ_p en K zijn matrices waarvan de termen afhankelijk zijn van de coördinaten x en y . Zij hebben drie rijen en evenveel kolommen (n) als de vektor c elementen bevat.

Op analoge wijze kan voor de hellingsvektor worden geschreven:

$$\phi = \phi_p A^{-1} u = H u \quad (10)$$

De matrices ϕ_p en H hebben de afmetingen $2 \times n$.

Uitdrukking (3) voor de virtuele arbeid wordt nu:

$$\delta U_t = \delta \dot{u}^T D \iint \dot{K} s K dx dy u + \delta \dot{u}^T h \iint \dot{H} \sigma H dx dy u \quad (11)$$

Gedefinieerd worden:

De stijfheidsmatrix van een element:

$$S = D \iint \dot{K} s K dx dy, \quad (12)$$

en de invloedsmatrix van een element:

$$G = h \iint \dot{H} \sigma H dx dy, \quad (13)$$

zodat (11) wordt:

$$\delta U_t = \delta \dot{u}^T S u + \delta \dot{u}^T G u. \quad (14)$$

Voor een plaat bestaande uit een aantal elementen moet voor de totale virtuele arbeid van de inwendige krachten de uitdrukking (14) over alle elementen worden gesommeerd:

$$(\delta U_t)_t = \delta \dot{u}_t^T S_t u_t + \delta \dot{u}_t^T G_t u_t \quad (15)$$

waarin u_t de vektor van alle vrijheidsgraden van de plaat is en de vierkante symmetrische matrices S_t en G_t worden samengesteld uit S en G .

S_t en G_t zijn betrokken op u_t .

Volgens het principe van virtuele arbeid moet (15) gelijk zijn aan de virtuele arbeid verricht door de uitwendige krachten (loodrecht op het plaatvlak werkende krachten en momenten). Wordt de vektor van deze "gegeneraliseerde" krachten f_t genoemd, dan volgt:

$$\delta \dot{u}_t^T S_t u_t + \delta \dot{u}_t^T G_t u_t = \delta \dot{u}_t^T f_t \quad (16)$$

Daar deze vergelijking moet gelden voor ieder willekeurig kinematisch toelaatbaar verplaatsingsveld $\delta w(\delta u_t)$ volgt hieruit:

$$S_t u_t + G_t u_t = f_t \quad (17)$$

Bij de te beschouwen knikproblemen werken er geen belastingen loodrecht op het plaatvlak. Dan is f_t een nulvektor. Zoals uit (13) blijkt is de matrix G_t evenredig met de membraanspanningen. Indien verondersteld wordt dat deze spanningen tot aan de kniklast in vaste verhouding tot elkaar staan, zijn zij een faktor λ maal een gegeven spanningsverdeling σ^* .

Met $\sigma = \sigma^*$, of $\lambda = 1$, neemt G_t de waarde G_t^* aan zodat dan geldt:

$$S_t u_t + \lambda G_t^* u_t = 0 \quad (18)$$

Dit is een eigenwaardeprobleem van de gedaante

$$A x + \lambda B x = 0$$

Bij het knikprobleem is hiervan alleen de laagste eigenwaarde van belang.

3. Uitwerking voor rechthoekige vlakke platen

3.1. Keuze van de elementen

De methode zal worden getoetst aan berekeningen over rechthoekige vlakke platen; daartoe zijn twee elementen gebruikt, respectievelijk met 12 en 16 vrijheidsgraden (R-12 en R-16). Hiermede kan tevens worden nagegaan of het al dan niet voordeliger is om het meer verfijnde element R-16 te gebruiken (lit. 6).

De vrijheidsgraden van R-12 bestaan uit de zakking w en de hellingen $\frac{\partial w}{\partial x}$ en $\frac{\partial w}{\partial y}$ in elk van de 4 hoekpunten van het element. Voor R-16 wordt hier de afgeleide $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ in ieder knooppunt aan toegevoegd (zie fig. 1). Door het verloop van de hellingen $\frac{\partial w}{\partial x}$ en $\frac{\partial w}{\partial y}$ op respectievelijk de randen $x = \text{konstant}$ en $y = \text{konstant}$ te beschouwen, kan worden aangetoond dat R-12 niet konform is. Dit wil zeggen dat b.v. op een rand $x = \text{konstant}$ het verloop van $\frac{\partial w}{\partial x}$ niet eenduidig bepaald is door de waarden van $\frac{\partial w}{\partial x}$ in de op die rand liggende knooppunten; aangrenzende elementen sluiten niet aaneen wat betreft de helling in het vlak loodrecht op de gemeenschappelijke grenslijn.

Het element R-16 is wel konform, aan de voorwaarden van samenhang van de elementen wordt daar wel voldaan. Alhoewel konformiteit, tezamen met de andere voorwaarden (lit. 6, blz. 26) een voldoende eis is voor konvergentie van de benaderingsoplossing naar de exakte waarde bij vergroten van het aantal elementen, kunnen met R-12, zoals zal blijken, tamelijk goede resultaten worden bereikt.

Omdat bij het gebruik van de verplaatsingsmethode, de konstruktie een beperkt verplaatsingspatroon wordt opgelegd (door de keuze van het polynoom voor w), zal het minimum van de potentiële energie hoger liggen dan het minimum van de potentiële energie in de continue beschrijving. Dit resulteert in een overschatting van de kniklast.

Bij gebruik van het niet-konforme element R-12, wordt door de polynoomkeuze een diskontinu vervormingspatroon toegelaten. Hierdoor kan de potentiële energie worden onderschat, welke omstandigheid op zich een te lage waarde van de kniklast tot gevolg heeft.

3.2. Uitwerking van de knikvergelijkingen voor R-12 en R-16

Voor de elementen R-12 en R-16 zal nu in dimensieloze vorm de afleiding van de knikvergelijkingen worden doorlopen. In bijlage I zijn beide elementen met

richtingen van de koördinaatassen, vrijheidsgraden en verplaatsingspolynomen gegeven, waarbij gebruik is gemaakt van de volgende notaties:

$$\omega = \frac{w}{h}, \quad \xi = \frac{x}{a} \quad \text{en} \quad \eta = \frac{y}{b}$$

(a en b zijn de halve lengten van het element in respektievelijk de x- en de y-richting). Worden de knooppunten opeenvolgend genummerd, dan is de vektor van vrijheidsgraden van element R-12:

$$\dot{u} = \left| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)_1 & \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right)_1 & \omega_2 & \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)_2 & \dots \end{array} \right|$$

en voor R-16:

$$\dot{u} = \left| \begin{array}{cccc} \omega_1 & \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)_1 & \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right)_1 & \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}\right)_1 & \omega_2 & \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)_2 & \dots \end{array} \right|$$

Voor de doorbuiging kan nu in matrixnotatie worden geschreven:

$$\omega = \dot{p} \, c. \quad (19)$$

Door termsgewijze differentiatie zijn hieruit af te leiden: $\frac{\partial \omega}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \omega}{\partial \eta}$ en $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}$.

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = \frac{\partial \dot{p}}{\partial \xi} \, c,$$

$$\text{waarin } \frac{\partial \dot{p}}{\partial \xi} = \left| \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 2\xi & \eta & 0 & 3\xi^2 & \dots \end{array} \right|$$

Dan kan door substitutie worden geschreven:

$$\begin{aligned} \omega_i &= \left| \begin{array}{cccc} 1 & \xi_i & \eta_i & \xi_i^2 & \dots \end{array} \right| \cdot c \\ \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi}\right)_i &= \left| \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 2\xi_i & \eta_i & \dots \end{array} \right| \cdot c \\ \left(\frac{\partial \omega}{\partial \eta}\right)_i &= \dots \text{ enz.} \end{aligned} \quad (20)$$

waarin i het knooppuntsnummer aangeeft en ξ_i en η_i de waarden +1 of -1 hebben. Worden de rijvectoren in (20) samengevat in een matrix A, dan wordt het stelsel vergelijkingen (6) verkregen. Door oplossing hiervan kan de vektor c in de vrijheidsgraden u worden uitgedrukt. De geïnverteerde matrix A^{-1} is voor beide elementen in bijlage I gegeven.

Voor de krommingsvektor κ kan worden geschreven (analoog aan verg. (9)):

$$\kappa = \begin{vmatrix} \frac{h}{a^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \\ \frac{h}{b^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \\ 2 \frac{h}{ab} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} \end{vmatrix} A^{-1} u = \frac{h}{ab} \begin{vmatrix} \frac{b}{a} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \\ \frac{a}{b} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \\ 2 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} \end{vmatrix} A^{-1} u$$

Voor de hellingsvektor:

$$\phi = \frac{h}{ab} \begin{vmatrix} \frac{b}{a} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} \\ \frac{a}{b} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} \end{vmatrix} A^{-1} u$$

Zodat voor (11) kan worden geschreven:

$$\delta U_t = \delta u' A'^{-1} D \frac{h^2}{ab} \delta S^* A^{-1} u + \delta u' A'^{-1} \sigma_r h^3 G^* A^{-1} u \quad (21)^1$$

waarin σ_r een referentiespanning is waarvoor wordt geschreven:

$$\sigma_r = k \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{b_t}\right)^2 = k D \frac{\pi^2}{hb_t^2} \quad (22)$$

Hierin is gebruik gemaakt van de notatie b_t = totale breedte van de beschouwde plaat. De koëfficiënt k wordt hierdoor onafhankelijk van E en ν gedefinieerd.

De matrices S^* en G^* worden berekend uit:

$$S^* = \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{vmatrix} \frac{b}{a} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} & \frac{a}{b} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} & 2 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} \\ | & | & | \\ | & | & | \\ | & | & | \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{b}{a} \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} & - & - \\ \frac{a}{b} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} & - & - \\ 2 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi \partial \eta} & - & - \end{vmatrix} d\xi d\eta$$

¹⁾ Het verband tussen S en S^* en G en G^* (vergelijk (12) met (21)) wordt gegeven door de relaties:

$$S = D \frac{8h^2}{ab} A^{-1} S^* A^{-1} \quad \text{en} \quad G = \sigma_r h^3 A^{-1} G^* A^{-1}$$

$$G^* = \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{vmatrix} \frac{b}{a} \frac{\partial p}{\partial \xi} & \frac{a}{b} \frac{\partial^2 p}{\partial \eta^2} & \frac{\sigma_x}{\sigma_r} & \frac{\tau_{xy}}{\sigma_r} & \frac{b}{a} \frac{\partial p}{\partial \xi} & - & - \\ | & | & | & | & | & & \\ \frac{\sigma_y}{\sigma_r} & \frac{\tau_{xy}}{\sigma_r} & \frac{a}{b} \frac{\partial p}{\partial \eta} & - & - & & \end{vmatrix} d\xi d\eta$$

De matrices S^* en G^* (beide zijn symmetrisch) zijn uitgewerkt opgenomen in bijlage I, voor de elementen R-12 en R-16. De matrices voor R-12 bestaan hier uit de gedeeltelijke rijen en kolommen 1 t/m 11 en 13. De matrix G^* is uitgewerkt voor lineair verlopende spanningen in het beschouwde element:

$$\sigma_x/\sigma_r = (C_1 + C_2\xi + C_3\eta) \frac{a}{b}$$

$$\sigma_y/\sigma_r = (C_4 + C_5\xi + C_6\eta) \frac{b}{a}$$

$$\tau_{xy}/\sigma_r = C_7 + C_8\xi + C_9\eta$$

In verband met de ruimte is de bovendriehoek van G^* opgevuld met de termen van σ_x/σ_r en σ_y/σ_r , terwijl de onderdriehoek is benut voor de termen van τ_{xy}/σ_r (van beide komt dus een hoofddiagonaal voor).

Uit (21) volgt na substitutie van (22):

$$\delta U_t = D \frac{8h^2}{ab} \left| \delta u \quad \overset{!}{A}^{-1} S^* \overset{!}{A}^{-1} u + k \frac{\pi^2 ab}{2b_t^2} \delta u \quad \overset{!}{A}^{-1} G^* \overset{!}{A}^{-1} u \right| \quad (23)$$

Als de konstruktie wordt verdeeld in $n_a \times n_b$ gelijke elementen ($a_t = 2 n_a a$, $b_t = 2 n_b b$) dan kan voor de gehele beschouwde plaat in analogie met (18) worden geschreven:

$$S_t u_t + \frac{k}{8} \frac{\pi^2}{n_b} \frac{a}{b} G_t u_t = 0 \quad (24)$$

De elementen van de "systeemmatrices" S_t en G_t voor de gehele plaat worden dan samengesteld (door sommatie) uit de elementstijfheidsmatrices $\overset{!}{A}^{-1} S^* \overset{!}{A}^{-1}$ en $\overset{!}{A}^{-1} G^* \overset{!}{A}^{-1}$. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van lokatievectoren (zie lit. 6).

Voor het opstellen van de matrix G_t moeten in ieder element de membraan-spanningen (in G) bekend zijn. In geval van eenvoudige randbelastingen zijn de oplossingen voor σ_x , σ_y en τ_{xy} triviaal, in meer gekompliceerde gevallen

moet vooraf een berekening van de membraanspanningen, b.v. met de verplaatsingsmethode, worden gemaakt.

In bijlage III wordt beschreven op welke wijze het eigenwaarde probleem (24) kan worden opgelost. In deze bijlage is tevens een programma voor een eenvoudig geval opgenomen waarbij de beschouwde plaat in gelijke elementen is verdeeld en waarbij de spanningen in alle elementen dezelfde zijn. Dan zijn de matrices A^{-1} , S en G ook voor ieder element dezelfde.

4. Resultaten en beschouwing

De resultaten van een aantal berekeningen welke zijn gemaakt met behulp van het elektronische rekentuig IBM 360/65 van de T.H. Delft, zijn opgenomen in de tabellen van bijlage II.

Van de onderzochte gevallen zijn de knikkoëfficiënt en de knikvorm bepaald. Resultaten van de berekeningen, waarbij gebruik is gemaakt van het element R-12 en van het element R-16 zullen hierna met elkaar en met andere in de literatuur gegeven oplossingen worden vergeleken.

Lit. 1 geeft exakte waarden voor rechthoekige in één of twee richtingen gelijkmatig op druk belaste platen met opgelegde en ingeklemde randen.

De resultaten met R-12 verkregen, geven voor deze gevallen een onderschatting van de kniklast en zijn een redelijk goede benadering hiervan (bij $n_a = n_b = 8$ enkele % afwijking). Het is hieruit duidelijk dat de onderschatting t.g.v. het niet-konform zijn van het element een overheersende invloed heeft. Ook stemmen de resultaten van R-12 in hoge mate overeen met de in lit. 3 gegeven waarden, welke op gelijke wijze zijn bepaald (zie tabel in bijlage II).

Lit. 3 geeft waarden die de "exakte" oplossingen beter benaderen, maar maakt gebruik van een ervaringsfaktor in de interpolatiepolynoom (8) waardoor niet meer te voorspellen valt of de gevonden waarde een overschatting of onderschatting van de werkelijke kniklast is en hoe de mate van convergentie is. Ook berekeningen aan op afschuiving belaste platen laten redelijk goede resultaten zien.

Bij het itereren naar de benadering van de knikkoëfficiënt met de gevolgde methode voor het oplossen van het eigenwaarde probleem wordt altijd een overschatting van de eigenwaarde gevonden. Bij het element R-12 convergeert de knikkoëfficiënt van onderaf naar de werkelijke waarde, met toenemend aantal plastelementen. Dit houdt in dat tijdens het itereren naar de eigenwaarde, indien het iteratieproces voldoende snel convergeert, de "exakte" waarde wordt gepasseerd. Het is dus noodzaak het iteratieproces voldoende ver voort te zetten om betrouwbare en vergelijkbare resultaten te verkrijgen (zie fig. 2a).

Bij het element R-16 convergeren beide benaderingen van boven af (zie fig. 2b). Dit element geeft, zoals in bijlage II kan worden gezien, voor de hier berekende gevallen, verrassend nauwkeurige resultaten. Als benadering van de kniklast wordt nu een slechts iets te hoge waarde gevonden (afwijking $< 1\%$ bij $n_a = n_b = 2$).

Met gelijk of kleiner aantal vrijheidsgraden worden voor dezelfde belastingsgevallen, met R-16 betere resultaten gevonden dan met R-12. Het element R-16 is dus beter geschikt voor dit soort berekeningen.

De resultaten van element R-12, bij $\sigma_x = \text{constant}$, $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$, blijken duidelijk afhankelijk te zijn van de waarde van u^* , alhoewel k onafhankelijk hiervan moet zijn. De waarde van u komt echter voor in de elementstijfheidsmatrix S . Wordt een konstruktie in weinig elementen verdeeld dan wordt door de uit S samengebouwde systeemmatrix het mechanische gedrag van de konstruktie slecht benaderd. De gekozen waarde van u heeft dan duidelijk invloed op de resultaten. Met zeer veel elementen wordt het mechanisch gedrag van de konstruktie goed benaderd en is de afhankelijkheid van u veel kleiner of verwaarloosbaar.

Aangetoond kan worden dat de resultaten van het konforme element R-16 onafhankelijk zijn van de gebruikte waarde van u .

Op grond van de verkregen resultaten kan worden gesteld dat toepassing van de verplaatsingsmethode bij het bepalen van de kniklast en knikvorm van vlakke plaatkonstrukties goede mogelijkheden biedt. Voor niet rechthoekige platen kunnen driehoekige en parallellogramvormige elementen worden toegepast, terwijl het toevoegen van verstijvers aan de plaatvelden geen principiële wijziging van het berekeningsschema betekent.

Daar waar het onderzoek aan ingewikkelder problemen betreft, moet gezien de ervaringen, rekening worden gehouden met aanzienlijke rekentijden en gekompliceerde programma's. Als voorbeelden kunnen worden genoemd het onderzoek aan samengestelde konstrukties, aan platen met gekompliceerde randvormen, randbelastingen en spanningsverdelingen, en het onderzoek naar het gedrag van konstrukties boven de kniklast. Grote verbeteringen mogen worden verwacht van de ontwikkeling van snellere rekenautomaten met relatief goedkopere rekentijd, verbeterde programmeertalen en probleemgerichte programmeertalen.

* De afhankelijkheid van u is voor een plaat met rechte randen waarlangs $w = 0$, te elimineren. Dan geldt volgens Koiter (N.L.L.-rapport S 287):

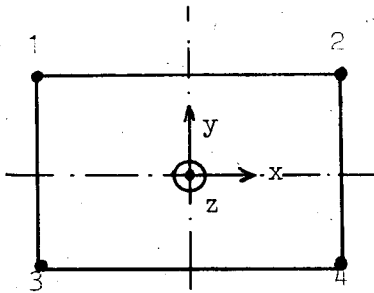
$$\iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy = 0 \quad \text{waardoor in (1)}$$

de termen met u wegvallen en S een diagonaalmatrix wordt.

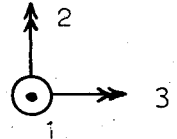
Literatuur

1. S.P. Timoshenko
Theory of elastic stability
Mc Graw-Hill book company, New York
2. R.H. Gallagher and J. Padlog
Discrete element approach to structural instability analysis
AIAA Journal, vol. 4, 1963 (page 1437)
3. K.K. Kapur and B.J. Hartz
Stability of plates using the finite element method
Journal of the Eng. Mech. Div., A.S.C.E., vol. 92, 1966 (page 177)
4. R.H. Gallagher a.o.
A discrete element procedure for thin shell instability analysis
AIAA Journal, vol. 5, no. 1, 1967 (page 138)
5. D.J. Dawe
Application of the discrete element method to the buckling analysis of
rectangular plates under arbitrary membrane loading
Royal Aircraft Establishment, T.R. 68037
6. W. Visser
The finite element method in deformation and heat conduction problems
Dissertatie 1968, T.H. Delft
7. L. Fox
Introduction to numerical linear algebra
Clarendon Press, Oxford, 1967
8. A.L. v.d. Vooren
Calculation of characteristic values and vectors of matrices
Report TW-5, Mathematical Institute, Groningen
9. J.H. Wilkinson
The algebraic eigenvalue problem
Clarendon Press, Oxford 1965.

Figuren



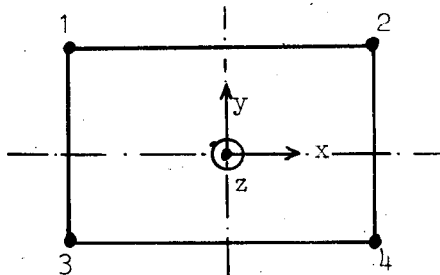
vrijheidsgraden per knooppunt:



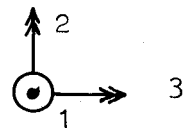
nummer vrijheidsgraad	vrijheidsgraad
1	w
2	$\frac{\partial w}{\partial x}$
3	$\frac{\partial w}{\partial y}$

$$u = \left[w_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 w_2 \dots \dots \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_4 \right]$$

Fig. 1a: Het element R-12.



vrijheidsgraden per knooppunt:



$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) = 4$$

nummer vrijheidsgraad	vrijheidsgraad
1	w
2	$\frac{\partial w}{\partial x}$
3	$\frac{\partial w}{\partial y}$
4	$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$

$$u = \left[w_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_1 w_2 \dots \dots \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_4 \right]$$

Fig. 1b: Het element R-16

k = knikkoëfficiënt

n = aantal elementen waarin de plaat verdeeld is

s = aantal iteraties bij het bepalen van de eigenwaarde.

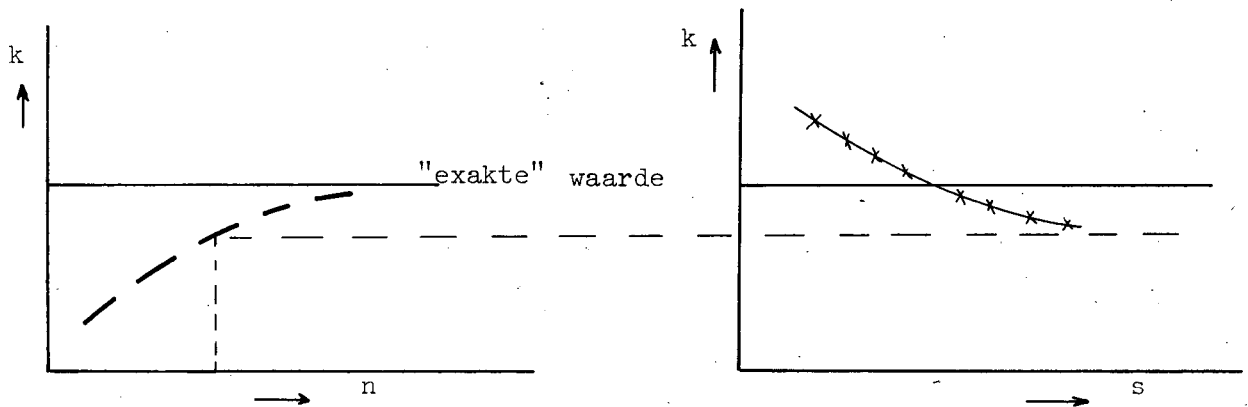


fig. 2a: schematisch verloop van de convergentie bij R-12.

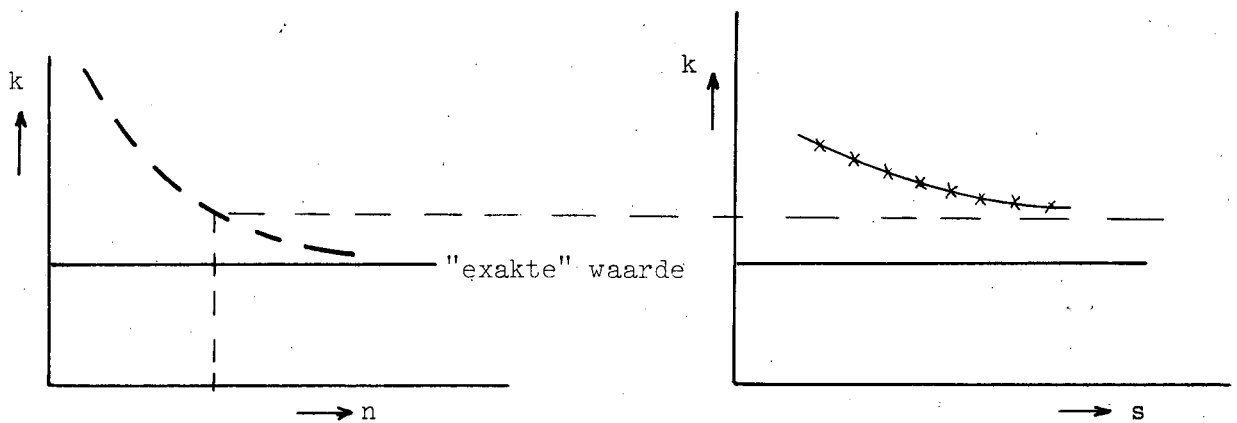
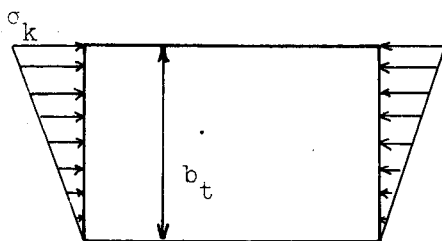
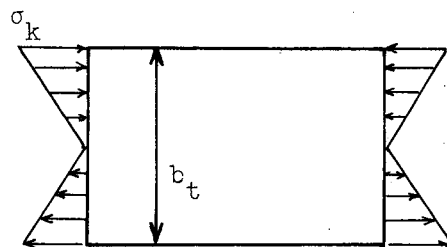


fig. 2b: schematisch verloop van de convergentie bij R-16.

FIGUUR 2: Het verloop van de convergentie van het numerieke iteratieproces (xxx) en van de benaderingsoplossing (---).



figuur 3 plaat belast op combinatie van druk en buiging in het vlak van de plaat.

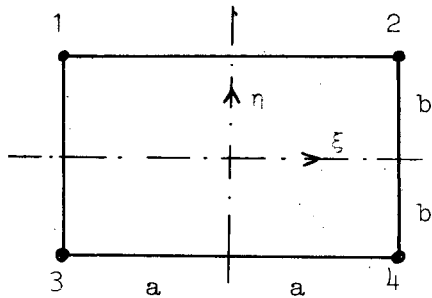


figuur 4 plaat belast op buiging in het vlak van de plaat.

Bijlage 1.

Beschrijving van de eigenschappen van de elementen R-12 en R-16.

Element R-12.

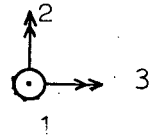


Vrijheidsgraden per knooppunt:

$$1. \omega = \frac{w}{h}$$

$$2. \theta_y = \frac{a}{h} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \omega}{\partial \xi}$$

$$3. \theta_x = \frac{b}{h} \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial \eta}$$

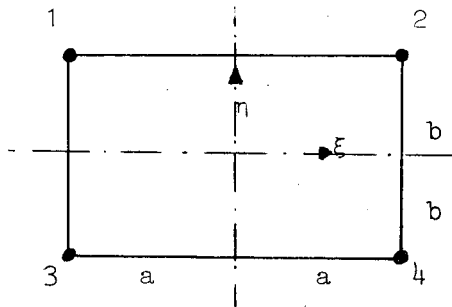


$$\dot{p} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & +1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 1 & 3 & -1 & -1 & -3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & -3 & -1 & -1 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 4 & -1 & -1 & 4 & 1 & 1 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\times \frac{1}{8}$

Element R-16



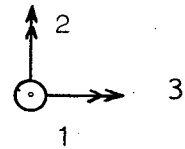
Vrijheidsgraden per knooppunt:

1. $\omega = \frac{w}{h}$

2. $\frac{\partial \omega}{\partial \xi}$

3. $\frac{\partial \omega}{\partial \eta}$

4. $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta}$



$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi^2 & \xi\eta & \eta^2 & \xi^3 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi^2\eta^2 & \xi\eta^3 & \xi^3\eta^2 & \xi^2\eta^3 & \xi^2\eta^3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 & -1 & 4 & -2 & -2 & 1 & 4 & 2 & 2 & 1 & 4 & -2 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 3 & 1 & 6 & -2 & -3 & 1 & -6 & -2 & -3 & -1 & 6 & -2 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & -2 & -1 & 6 & -3 & -2 & 1 & -6 & -3 & -2 & -1 & -6 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -9 & -3 & 3 & 1 & 9 & -3 & -3 & 1 & 9 & 3 & 3 & 1 & -9 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & -1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 2 & 2 & 1 & 1 & -2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -1 & -3 & 3 & 1 & -1 & -3 & -3 & -1 & -1 & 3 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -3 & -1 & -3 & 1 & 3 & -1 & -3 & -1 & -3 & -1 & 3 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{16}$$

De stijfheidsmatrix S^*

I 3

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4				$2 \frac{b^2}{a^2}$	0	$2u$	0	0	0	0	0	$2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{3}u$	0	0	0	0
5					$1-u$	0	0	0	0	0	$1-u$	0	$1-u$	0	0	$1-u$
6						$2 \frac{a^2}{b^2}$	0	0	0	0	0	$\frac{2}{3}u + \frac{2}{3} \frac{a^2}{b^2}$	0	0	0	0
7							$6 \frac{b^2}{a^2}$	0	$2u$	0	0	0	0	$2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{6}{5}u$	0	0
8								$\frac{2}{3} \frac{b^2}{a^2} + \frac{4}{3}(1-u)$	0	$2u$	0	0	0	0	$\frac{2}{5} \frac{b^2}{a^2} + \frac{2}{3}(2-u)$	0
9									$\frac{2}{3} \frac{a^2}{b^2} + \frac{4}{3}(1-u)$	0	0	0	0	$\frac{2}{5} \frac{a^2}{b^2} + \frac{2}{3}(2-u)$	0	0
10										$6 \frac{a^2}{b^2}$	0	0	0	0	$\frac{6}{5}u + 2 \frac{a^2}{b^2}$	0
11											$2 \frac{b^2}{a^2} + \frac{9}{5}(1-u)$	0	$1+u$	0	0	$\frac{6}{5} \frac{b^2}{a^2} + \frac{3}{5}(3-u)$
12												$\frac{2}{5}(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}) + \frac{4}{9}(4-3u)$	0	0	0	0
13													$2 \frac{a^2}{b^2} + \frac{9}{5}(1-u)$	0	0	$\frac{6}{5} \frac{a^2}{b^2} + \frac{3}{5}(3-u)$
14														$\frac{6}{5} \frac{a^2}{b^2} + \frac{2}{7} \frac{a^2}{b^2} + \frac{4}{5}(3-2u)$	0	0
15															$\frac{2}{7} \frac{b^2}{a^2} + \frac{6}{5} \frac{a^2}{b^2} + \frac{4}{5}(3-2u)$	0
16																$\frac{6}{7}(\frac{b^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2}) + \frac{9}{25}(9-5u)$

Bijlage II Resultaten.

De hier opgenomen tabellen bevatten de resultaten voor de knikkoëfficiënten van vlakke rechthoekige platen met eenvoudige randvoorwaarden en randbelastingen, uit berekeningen met de in het rapport beschreven methode. De berekeningen werden uitgevoerd op de IBM 360/65 rekenautomaat van de Technische Hogeschool Delft waarvoor in Algol 60 een programma werd geschreven (zie bijlage III)

Omdat bij gebruik van het element R-12 de resultaten van de waarde van ν afhangen is deze waarde in de tabel vermeld. Vergelijkbare referentiewaarden voor k (k_{ref}) worden gegeven; een index verwijst naar de bron van herkomst en komt overeen met de literatuuropgave van blz. 19.

In de tabellen is achter het aantal elementen (voor de gehele plaat) tussen haakjes het aantal vrijheidsgraden gegeven, waarmee het resultaat berekend is (dus evt. met gebruikmaking van symmetrie-eigenschappen).

De resultaten voor gelijkmatig op druk belaste platen met symmetrische randvoorwaarden, zijn bepaald voor een kwart gedeelte van de plaat (behalve voor de verdeling in 2x2 elementen) met inachtneming van de symmetrie en de hieruit volgende voorwaarden voor de vrijheidsgraden in de op de symmetrie-assen liggende knooppunten.

De knikkoëfficiënt k is steeds betrokken op de plaatbreedte b_t in y -richting. Gebruik wordt gemaakt van de afkortingen opg. en ~~ing.~~ waarmee wordt aangegeven of de randen a en b symmetrisch scharnierend opgelegd dan wel ingeklemd zijn.

Resultaten van berekeningen met R-12.

belasting	a/b	randvoorw.	u	k	k _{ref.}			aantal elem. (vrijh.gr.)
p _x	1	a,b opg.	0.28	3.3209	4.0 ¹⁾	3)	5)	2 x 2 (7)
			0.3	3.3079	4.0			2 x 2 (7)
			0.4	3.2428	4.0			2 x 2 (7)
			0.28	3.9363	4.0	3.933	3.99	8 x 8 (48)
			0.28	3.9712	4.0	3.977		12 x 12(108)
			0.3	3.9707	4.0			12 x 12(108)
			0.4	3.9685	4.0			12 x 12(108)
			0.3	3.9926	4.0			24 x 24(432)
p _x = p _y	1	a,b opg.	0.3	1.9854	2.0			12 x 12(108)
p _x	1.25	a,b opg.	0.3	4.1709	4.2023	*		12 x 12(108)
p _x	1.4	a,b opg.	0.3	4.3938	4.470	*		8 x 8 (48)
p _x	1	a,b ing.	0.3	9.9283	10.07			12 x 12(96)
p _{xy}	1	a,b opg.	0.3	8.3396	9.34		9.481	4 x 4 (39)
p _{xy}	1	a,b opg.	0.3	8.6879	9.34		4.308	6 x 6 (95)

* k_{ref} uit $k = (\frac{a}{b} + \frac{b}{a})^2$, als a de halve golflengte is.

Resultaten van berekeningen met R-16.

belasting	a/b	randvoorw.	k	k _{ref.}			aantal elem. (vrijh.gr.)
p _x	1	a,b opg.	4.0157	4.0 ¹⁾	3)	4)	2 x 2 (4)
			4.00021	4.0	3.887	3.989	6 x 6 (144)*
			4.00006	4.0	3.933	3.993	8 x 8 (64)
			4.00051	4.0			4 x 16 (64)
			4.00054	4.0			16 x 4 (64)
p _x	1.4	a,b opg.	4.4703	4.4702			8 x 8 (64)
buiging(fig.3)	1		7.9707	7.8			2 x 2 (16)
	1		7.8248	7.8			4 x 4 (64)
	0.6		9.7706	9.7	9.085		4 x 4 (64)
buiging(fig.4)	1	a,b opg.	26.270	25.6		25.34	4 x 4 (64)*
	0.6		24.839	24.1			4 x 4 (64)*
p _{xy}	1	a,b opg.	10.0157	9.34			2 x 2 (16)
	1		9.4182	9.34		9.481	4 x 4 (64)
	1		9.3458	9.34		9.305	6 x 6 (144)
	1		9.3285	9.34			10 x 10 (400)**
	0.2		5.688	5.55			4 x 4 (64)

* berekening uitgevoerd aan hele plaat.

** getwijfeld wordt hier aan de nauwkeurigheid van de door Timoshenko gegeven waarde.
De bepaalde knikvorm komt in hoge mate overeen met die in: Zeitschrift für
Flugtechnik und Motorluftschiffahrt, blz. 12 fig. 4a.

Bijlage III Numerieke uitwerking en programma's.Inhoud

1. Ter inleiding
2. Het opbergen van de onderdriehoek van een symmetrische (band)matrix in een vektor
3. Het bepalen van de kleinste eigenwaarde van $Ax = \mu Bx$, waarbij A en B symmetrische positief definitie matrices zijn
 - 3.1 Korte beschrijving van de methode
 - 3.2 Gebruiksaanwijzing van de procedure latvec
 - 3.3 Gebruiksaanwijzing van de procedures bound, symsol en decom
 - 3.4 Het gebruik van de subroutines uit 3.3 voor het oplossen van een stelsel vergelijkingen $Ax = b$, waarbij A een symmetrische positief definitie matrix is
4. Gebruiksaanwijzing van het programma voor de berekening van de knik-koëfficiënt van rechthoekige vlakke platen onder invloed van eenvoudige randbelastingen
5. Enige opmerkingen over de rekentijd
6. De concepten van de besproken programma's
 - 6.1 Procedure latvec
 - 6.2 De procedures bound, symsol en decom
 - 6.3 Het hoofdprogramma voor eenvoudige belastingsgevallen
 - 6.4 Voorbeeld van de uitvoer van het programma met de daarbij gebruikte getalkaarten.

1. Ter inleiding

De te bespreken Algol-programma's zijn geschreven voor de IBM 360/65 rekenautomaat van de Technische Hogeschool te Delft. Omdat de programma's oorspronkelijk werden geschreven voor de TR-4 rekenautomaat, richten zij zich hoofdzakelijk op minimaal geheugengebruik; dit gaat soms ten koste van reekentijd.

Meer dan beschrijvingen worden gebruiksaanwijzingen gegeven van de programma's. Alleen bij de oplossing van het eigenwaardeprobleem wordt een korte beschrijving van de methode gegeven.

2. Het opbergen van de onderdriehoek van een symmetrische (band)matrix in een vektor.

Gegeven is de symmetrische matrix A met bandbreedte bw en orde n .

De bandbreedte wordt gedefinieerd als het aantal nevendagonalen van de onder- of bovendriehoek van A ^{*)}. Om de onderdriehoek van A in een vektor a op te bergen is het systeem gevolgd dat werd aangegeven door Visser in lit. 6, blz.98. De rijen van de onderdriehoek van A worden opeenvolgend in de vektor a opgeborgen. Daartoe is een vektor jt nodig, die met de waarde $jt|i|$ de plaats in a aangeeft van het $(i-1)^e$ diagonaalelement van A . De vektor jt wordt opgesteld met behulp van het volgende algoritme:

$$\begin{array}{ll} & jt|1| = 0 \\ \text{Voor } i=1 \text{ t/m } bw \text{ geldt} & : \quad jt|i-1| = jt|i| + i \\ \text{Voor } i=bw+1 \text{ t/m } n \text{ geldt} & : \quad jt|i+1| = jt|i| + bw+1 \end{array}$$

Het aantal elementen dat de vektor a moet hebben, om daarin de onderdriehoek van A te kunnen opbergen, is gelijk aan de waarde van $jt|n+1|$ (een deklaratie van a moet dan overeenkomen met $a[1:jt|n+1|]$).

Een element uit de onderdriehoek van A : $A_{i,j} = A|i,j|$, waarbij $j \leq i$, wordt dan in de vektor a gevonden als:

$$a[jt|i+1|-i+j|].$$

*) Indien A geen bandmatrix is geldt: $bw = n-1$

3. Het bepalen van de kleinste eigenwaarde van $A x = \mu B x$, waarbij A en B symmetrische positief definitie matrices zijn.

3.1. Korte beschrijving van de methode.

Het eigenwaarde probleem is opgelost volgens een methode die is aangegeven in lit. 9:

Om de kleinste eigenwaarde van het stelsel $A x = \mu B x$ te bepalen, wordt de grootste eigenwaarde bepaald van

$$B x = \frac{1}{\mu} A x. \quad (1)$$

De matrix A wordt gedeclineerd in twee driehoeksmatrices volgens Choleski (zie lit. 7):

$$A = L L^T,$$

waarin L een onderdriehoeksmatrix is.

Vergelijking (1) kan dan (met $\frac{1}{\mu} = \lambda$) worden herleid tot:

$$L^{-1} B L^{-1^T} L^T x = \lambda L^T x.$$

$$\text{M.b.v.} \quad y = L^T x, \quad (2)$$

volgt dan:

$$L^{-1} B L^{-1^T} y = \lambda y \quad (3)$$

De eigenwaarden van dit stelsel zijn dezelfde als die van (1), het verband tussen de eigenvektoren van de stelsels (3) en (1) wordt gegeven door de relatie (2).

De grootste eigenwaarde van (3) kan worden bepaald door middel van een iteratieproces volgens de powermethod. Uitgaande van een willekeurige beginvektor y_0 , die niet de nulvektor is, wordt de volgende vektor in het iteratieproces y_1 gevonden uit:

$$y_1 = L^{-1} B L^{-1^T} y_0$$

Het bepalen van y_1 wordt in drie stappen uitgevoerd:

1. Bepaal y^* uit:

$$L^T y^* = y_0, \quad (4)$$

door middel van terugsubstitutie.

2. Bepaal y^{**} volgens:

$$y^{**} = B y^* \quad (5)$$

3. Bepaal y_1 uit:

$$L y_1 = y^{**} \quad (6)$$

door middel van substitutie.

Volgens de beschreven methode kan nu een opeenvolgend aantal geïtereerde vektoren $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ worden bepaald.

Een benadering van de grootste eigenwaarde van het stelsel (3) wordt bij de n^e iteratie verkregen uit het Rayleigh-quotient:

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} = \frac{y_n^T \cdot y_{n-1}}{y_{n-1}^T \cdot y_{n-1}}$$

Of indien bij elke iteratiestap y_{n-1} op de lengte 1 is genormeerd:

$$\lambda_n = \frac{1}{\mu_n} = y_n^T y_{n-1}$$

Het iteratieproces wordt voortgezet totdat wordt voldaan aan de eis:

$$\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n} < \epsilon, \quad (7)$$

waarbij ϵ een klein getal is. Op dat moment bevat y_n een benadering voor de eigenvektor van het stelsel (3) behorende bij λ_n . Een benadering voor de eigenvektor x_n behorende bij de kleinste eigenwaarde $\mu_n = \frac{1}{\lambda_n}$ van het stelsel (1) wordt gevonden uit de vektor y_n met behulp van vergelijking (2).

Indien de twee in absolute waarde grootste eigenwaarden van (3) bijna gelijk zijn, óf in absolute waarde gelijk zijn, dan convergeert dit iteratieproces slecht of niet. In dat geval moet het iteratieproces anders worden opgezet. Opeenvolgende iteratievectoren worden weliswaar op dezelfde manier berekend, maar het bepalen van de eigenwaarde en eigenvektor wordt nu uitgevoerd volgens de methode van de vierkantsvergelijkingen. Zijn λ_1 en λ_2 de twee in absolute waarde grootste eigenwaarden, dan worden uit drie opeenvolgende geïtereerde vectoren de coëfficiënten bepaald van een vierkantsvergelijking in de wortels λ_1 en λ_2 . De methode van de vierkantsvergelijkingen wordt uitvoerig beschreven in lit. 8.

3.2. Gebruiksaanwijzing van de procedure latvec.

3.2.1. De heading van de procedure die de kleinste eigenwaarde met bijbehorende eigenvektor van een stelsel $A x = \mu B x$ of $A x = \mu x$ bepaalt, luidt:

```
procedure latvec (a,b,n,bw,jt,&lv1,&lr1,inf,bound,symsol,decom);
value n,bw; integer n,bw; real &lr1; array a,b,&lv1,inf;
integer array jt; integer procedure bound;
procedure symsol, decom;
```

Betekenis van de parameters*):

a	i:	De vektor waarin de onderdriehoek van de matrix A is opgeborgen.
	u:	De matrix L volgens de decompositie $A = L L^T$.
b	i:	De vektor waarin de onderdriehoek van de matrix B staat.
n	i:	De orde van de matrices A en B.
bw	i:	De bandbreedte van de matrices A en B.
jt	i:	De vektor die de plaats van de diagonaalelementen van A en B aangeeft in a en b.
&lr1	u:	De benadering van de kleinste eigenwaarde.
&lv1	i:	De beginvektor voor de iteratie.
	u:	De berekende eigenvektor behorende bij de kleinste eigenwaarde.
inf		Informatievector (5 elementen) die tijdens de berekening wordt gebruikt.
inf 1	i:	Het maximum aantal uit te voeren iteraties.

*) i, betekent: de parameter gebruikt als invoerparameter.
u, betekent: de parameter gebruikt als uitvoerparameter.

- u: Het aantal uitgevoerde iteraties. Indien om één of andere reden niet met succes de kleinste eigenwaarde kan worden bepaald, krijgt $\text{inf}|1|$ de waarde -1.
- $\text{inf}|2|$ i: ϵ voor het afbreken van de iteratie volgens (7).
- $\text{inf}|3|$ i: De relatieve tolerantie voor de test op singulariteit van de matrix A tijdens het dekomponeren (zie onder 3.3).
- $\text{inf}|4|$ i: Indien $\text{inf}|4| \geq 1$, dan wordt een stelsel $A x = \mu B x$ beschouwd, anders een stelsel $A x = \mu x$.
- $\text{inf}|5|$ i: Het minimum aantal uit te voeren iteraties. Indien $\text{inf}|5| = 0$, wordt bij het bepalen van de eigenwaarde de methode van de vierkantsvergelijkingen gebruikt, en is het minimum aantal iteraties dat het programma uitvoert vastgesteld op 6.

bound

symsol

decom

deze procedures worden beschreven in 3.3.

3.2.2. Bespreking van de uitvoer van procedure latvec.

Foutmeldingen:

1. Indien tijdens het dekomponeren de matrix A als singulier wordt beschouwd, of als A niet positief definit blijkt te zijn, dan wordt een foutmelding gegeven door procedure decom (zie 3.3.1).
2. Indien bij het toepassen van de methode der vierkantsvergelijkingen, de vierkantsvergelijking in λ_1 en λ_2 geen reële wortels heeft dan wordt de melding: "GEEN REEELE WORTELS" op de uitvoer gegeven; er wordt echter minimaal zes keer geïtereerd, voordat een dergelijke foutmelding wordt gegeven.

Na het geven van een foutmelding wordt de procedure latvec via de nooduitgang verlaten, waarbij $\text{inf}|1|$ gelijk aan -1 wordt gemaakt.

Als het programma normaal wordt afgewerkt is de uitvoer als volgt:

a) $\text{inf}|5| \neq 0$ (normaal iteratieproces)

Er wordt een tabel gemaakt, waarin bij elke iteratiestap wordt afgedrukt:

$$\delta \text{ en } \lambda_n$$

$$\delta = \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}, \text{ waarin } \lambda_n \text{ de benadering voor } \lambda \text{ is bij de } n^{\text{e}} \text{ iteratie.}$$

De iteratie wordt afgebroken indien $\delta < \epsilon$ (zie (7)) of indien het maximum aantal iteraties is uitgevoerd.

b) $\inf |5| = 0$ (iteratie volgens de methode van de vierkantsvergelijkingen).

Er wordt een tabel afgedrukt die de volgende grootheden bevat:

$$n, \quad \delta, \quad \lambda_{n1}, \quad \lambda_{n2}$$

waarin: n het nummer van de iteratiestap is,

λ_{n1} en λ_{n2} de twee in absolute waarde grootste eigenwaarden

zijn ($|\lambda_{n1}| \geq |\lambda_{n2}|$), en

$$\delta = \frac{\lambda_{n1}^{-\lambda(n-1)} 1}{\lambda_{n1}}.$$

Er worden tenminste 6 iteraties uitgevoerd. Bij de eerste iteratiestap wordt niets afgedrukt (voor het berekenen van λ_{n1} en λ_{n2} zijn tenminste 3 opeenvolgende geïtereerde vektoren nodig).

3.3. Gebruiksaanwijzing van de procedures bound, symsol en decom.

3.3.1. Procedure bound.

Het algol concept van procedure bound ziet er als volgt uit:

```
integer procedure bound (p,q,r); value p,q,r; integer p,q,r;
bound:=if r=1 then (if p<q then q else p)
      else (if p>q then q else p);
```

Procedure bound bepaalt dus, afhankelijk van de waarde van r , het grootste óf het kleinste getal, van twee gehele getallen p en q .

Deze procedure wordt in latvec, decom en symsol gebruikt ten behoeve van het werken met matrices waarvan de onderdriehoek in een vektor is opgeborgen.

3.3.2. Procedure decom.

Deze procedure voert de dekompositie volgens Choleski uit.

De procedure-heading van decom luidt:

```
procedure decom (a,n,bw,jt,eps,lab,bound); value n,bw;
integer n,bw; real eps; array a; integer array jt; label lab;
integer procedure bound;
```

Betekenis van de parameters:

- a i: De vektor waarin de onderdriehoek van de te dekomponeren matrix is geplaatst.
- u: De vektor die de benedendriehoeksmatrix L uit de dekompositie volgens Choleski $A = L L^T$ bevat.
- n i: De orde van de matrices A en L .
- bw i: De bandbreedte van de matrices A en L .
- jt i: De vektor die de plaats van de diagonaalelementen in a aangeeft.
- eps i: De relatieve tolerantie voor het testen op singulariteit van A .
- lab i: Niet lokale label waarheen gesprongen wordt indien A op grond van de test met eps als singulier wordt beschouwd.

N.B. Op de plaatsen waar de diagonaalelementen van de matrix A in de vektor a staan, worden na de dekompositie niet de diagonaalelementen L_{jj} maar de reciproke waarden $1/L_{jj}$ geplaatst. Hierdoor wordt in de procedure `decom` en `symsol` aanzienlijk sneller gerekend: binnen deze procedures worden een groot aantal delingen, vervangen door vermenigvuldigingen. De procedure `symsol` is zodanig opgebouwd dat een matrix L moet worden aangeboden in de vorm zoals procedure `decom` die aflevert.

Als de dekompositie met sukses kan worden uitgevoerd, dan geeft procedure `decom` geen meldingen op de uitvoer.

Er zijn twee foutmeldingen van procedure `decom` mogelijk:

1. de melding:

j NPD,

waarin j een geheel getal is.

Betekenis: De matrix A is niet positief definitief omdat tijdens de berekening het kwadraat van het j^e diagonaalelement van L kleiner dan nul blijkt te zijn ($L_{jj}^2 < 0$).

Een noodzakelijk en voldoende voorwaarde voor het positief-definitief zijn van de matrix A is namelijk dat alle $L_{jj}^2 > 0$ zijn.

2. de melding:

j SING,

waarin j een geheel getal is.

Betekenis: De matrix A is singulier omdat het kwadraat van het j^e diagonaalelement van L kleiner blijkt te zijn dan een bepaalde tolerantie ($L_{jj}^2 < \text{tol}$).

Deze tolerantie wordt als volgt bepaald:

$\text{tol} = \text{eps} * (\text{maximum norm van de matrix A}),$

waarin eps de relatieve tolerantie is, die in decom als invoerparameter is meegegeven.

De maximum norm van een reële matrix A is gedefinieerd als het in absolute waarde grootste element van A. Voor een positief definitie matrix A geldt dat de maximum norm gelijk is aan het grootste diagonaal element.

3.3.3. Procedure symsol.

Procedure symsol bepaalt de oplossing x van een stelsel vergelijkingen $Lx=u$ of $L^T x = u$, waarin L een benedendriehoeksmatrix is en u de vektor van bekende termen.

De procedure-heading van symsol luidt:

```
procedure symsol (c,u,l,i,j,n,bw,bound); value c,n,bw;  
integer c,i,j,n,bw;real l; array u;  
integer procedure bound;
```

Betekenis van de parameters:

- c i: Keuze-parameter. Indien $c=1$, wordt het stelsel vergelijkingen $Lx = u$ opgelost waarbij L een benedendriehoeksmatrix is; indien $c \neq 1$ wordt $L^T x = u$ opgelost, echter ook dan wordt L aangeboden als onderdriehoeksmatrix. De wijze van aanroepen van de procedure zorgt voor het oplossen van $L^T x = u$, zonder de matrix L expliciet te transponeren.
- u i: De vektor van bekende termen.
u: De oplossingsvektor x.
- l i: Het geïndiceerde array-element van l (de onderdriehoek van de matrix L is opgeborgen in een vektor l) met als lopende indices i en j. De procedure symsol gebruikt het zogenaamde "Jensen's device", i en j zijn de gebonden variabelen.

i en j De gebonden variabelen.
 n i: De orde van de matrix L.
 bw i: De bandbreedte van de matrix L.

Voorbeelden van het aanroepen van procedure `symsol`:

Gegeven een vektor ℓ waarin de onderdriehoeksmatrix L is geplaatst,
 $bw = 20$ en $n = 100^*$.

Het stelsel $Lx = u$ wordt opgelost door het geven van de aanroep:

`symsol(1,u, $\ell$ |jt|i+1|-i+j|,i,j,100,20,bound);`

Het stelsel $L^T x = u$ wordt opgelost door het geven van de aanroep:

`symsol(2,u, $\ell$ |jt|j+1|-j+i|,i,j,100,20,bound);`

Bij deze laatste aanroep, waarbij een getransponeerde matrix L^T nodig is, wijst het geïndiceerde array-element naar een element uit de getransponeerde matrix L^T , doordat de indices i en j zijn verwisseld (de volgorde van i en j als gebonden variabelen in de procedure aanroep moet ongewijzigd blijven).

3.4. Het gebruik van de subroutines bound, symsol en decom voor het oplossen van een stelsel vergelijkingen $Ax = b$, waarbij A een symmetrische positief definitie matrix is.

Voor het oplossen van het stelsel $Ax = b$ kan men als volgt te werk gaan:

$$\text{Met} \quad A = L L^T, \quad (1)$$

$$\text{volgt:} \quad L L^T x = b. \quad (2)$$

$$\text{Stel:} \quad L^T x = y, \quad (3)$$

$$\text{zodat:} \quad L y = b. \quad (4)$$

De oplossing kan worden verkregen door y uit (4) te berekenen en vervolgens x uit (3).

^{*}) Op de plaatsen waar de diagonaalelementen L_{jj} in ℓ zouden moeten staan zijn de reciproke waarden $1/L_{jj}$ geplaatst, zie onder 3.3.2.

Indien de onderdriehoek van de matrix A is opgeborgen in een vektor a , dan wordt de oplossing van het stelsel $A x = b$ door de volgende drie procedure aanroepen bepaald:

1. `decom(a,n,bw,jt,10-3,lab,bound);`
2. `symsol(1,b,a|jt|i+1|-i+j|,i,j,n,bw,bound);`
3. `symsol(2,b,a|jt|j+1|-j+i|,i,j,n,bw,bound).`

Het resultaat van deze drie aanroepen is, dat in de vektor b , nu de oplossing x staat, in de vektor a staat de onderdriehoeksmatrix L volgens (1).

4. Gebruiksaanwijzing van het programma voor de berekening van de knikkoëfficiënt van rechthoekige vlakke platen onder invloed van eenvoudige randbelastingen.

- 4.1. Onder eenvoudige randbelastingen worden konstante randbelastingen (drukbelasting in x- en/of y-richting en/of schuifbelasting) verstaan. De membraanspannings-toestand in alle elementen is dan hetzelfde.

De opzet van het programma is erop gericht het aantal invoergegevens te beperken; daarbij wordt gebruik gemaakt van een "nodal point location vector" (lnp), een "first element location vector" (le1) en een "second element location vector" (le2), zie lit. 6 blz. 95 en volgende.

Een procedure elstif stelt de elementstijfheidsmatrices S en G op (resp. Sa en Sb in het programma; S_t en G_t heten in het programma resp. a en b), voor de gekozen geometrische en belastingsparameters die op getalkaarten staan. Om het programma te kunnen gebruiken is het nodig de procedures bound, symsol, decomp, latvec en elstif in een programmabibliotheek op te nemen.

Het programma is geschikt voor berekeningen met zowel het element R-12 als R-16. Daartoe moet de juiste versie van procedure elstif in de programmabibliotheek worden opgenomen en moet de grootheid nfp (aantal vrijheidsgraden per knooppunt) via de getalkaarten de juiste waarde worden gegeven (voor R-12 en R-16 dus resp. 3 of 4). De twee versies van procedure elstif voor R-12 en R-16 zijn niet in deze bijlage opgenomen, omdat in deze procedures nog wijzigingen worden aangebracht).

Ter verduidelijking is het concept van het programma hier en daar van commentaar voorzien.

4.2. De betekenis van enige variabelen in het programma.

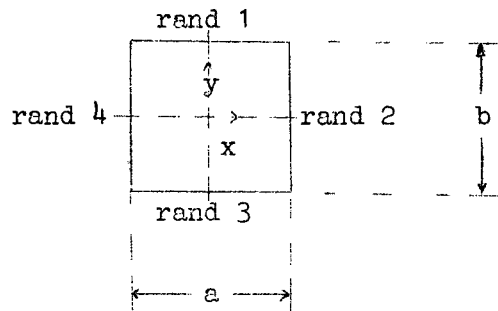
na	het aantal elementen langs de zijde a^{**}	} van de beschouwde plaat (of plaatdeel), zie figuur I.
nb	het aantal elementen langs de zijde b^{**}	
ab	de verhouding a/b^{**}	
fa	is gedefinieerd door $a_t = fa \cdot a^{**}$	
fb	is gedefinieerd door $b_t = fb \cdot b^{**}$	

(indien geen gebruik wordt gemaakt van symmetrie geldt: $fa = fb = 1$).

^{*}) dit zijn invoergegevens, de overige grootheden worden door de rekenautomaat bepaald.

- nfp aantal vrijheidsgraden per knooppunt.
 nfe aantal vrijheidsgraden per element.
 np totaal aantal knooppunten.
 ne aantal elementen.
 bw de bandbreedte van de systeemmatrices S_t en G_t (in het programma resp. a en b).
 n totaal aantal vrijheidsgraden met inachtnaam van de randvoorwaarden (= orde van de systeemmatrices).
 kb berekende knikcoëfficiënt betrokken op b_t (dus $kb = k$ uit formule (22)).
 ka berekende knikcoëfficiënt betrokken op a_t .

Figuur I: De beschouwde plaat (of plaatdeel).



De rekenmachine nummert de elementen en de knooppunten (te beginnen op rand 1 van links naar rechts, vervolgens van boven naar beneden).

4.3. Het invoerschema voor de getalkaarten.

	<u>grootheid in het programma</u>
1. <u>Geometrische en algemene gegevens.</u>	
1. Het aantal elementen langs de zijde a.	na
2. Het aantal elementen langs de zijde b.	nb
3. De verhouding a/b.	ab
4. f_a volgens $a_t = f_a \cdot a$	fa
5. f_b volgens $b_t = f_b \cdot b$	fb
6. Het aantal vrijheidsgraden per knooppunt.	nfp
7. Wel of geen testuitvoer (true of false).	tst
8. Wel of geen remote job output (true of false).	rjo

2. Randvoorwaarden.

1. Voor elke rand (in de volgorde 1,2,3,4)
het aantal vrijheidsgraden x dat
voorgeschreven nul is^{*},

n1,n2,n3,n4

2. Voor elke rand waar $x \neq 0$, de nummers
(zie fig. 1) van de vrijheidsgraden
die nul zijn.

bc|1:n|

3. Het aantal vrijheidsgraden van de vier
hoekpunten van de beschouwde plaat (of
plaatdeel) met inachtnaam van de rand-
voorwaarden.

n5

3. De belasting.

Er moeten drie spanningsparameters worden meege-
geven; één voor de drukspanning in x-richting (p_x),
één voor de drukspanning in y-richting (p_y) en
één voor de schuifspanning (p_{xy}).

 p_x, p_y, p_{xy}

Van de spanning waarvoor de knikkoëfficiënt
wordt berekend wordt de spanningsparameter 1 ge-
steld. De andere parameters geven de verhouding
tussen de andere spanningen en de spanning waarop
de knikkoëfficiënt is betrokken, b.v.:

1,0,0, betekent:

de knikkoëfficiënt betrokken op de druk-
spanning in x-richting wordt berekend;
 $p_y = p_{xy} = 0$.

3,1,3, betekent:

de knikkoëfficiënt betrokken op de spanning
in y-richting wordt berekend, waarbij

$$\frac{p_x}{p_y} = 3 \text{ en } \frac{p_{xy}}{p_y} = 3.$$

4. Materiaaleigenschappen.

De dwarskontraktiecoëfficiënt ν

 ν

^{*}) Hierbij zijn de randvoorwaarden uniform langs één rand.

4.4. De uitvoer.

Het wordt aanbevolen het programma niet in testversie te draaien en na zowel als nb groter dan twee te kiezen. De uitvoer is dan zodanig dat deze met de reeds verstrekte gegevens, zonder meer leesbaar is. De belangrijkste grootheden op de uitvoer vormen de berekende knikkoëfficiënten ka en kb. Op de uitvoer worden nog enkele andere grootheden afgedrukt zoals het aantal vrijheidsgraden, de bandbreedte, a/b, de gekozen belastingsparameters etc. Wat het afdrukken van de knikvorm betreft is het van belang te weten dat dit per vrijheidsgraad in de vorm van een overzichtelijke tabel gebeurt. Daarbij wordt zodanig genormeerd, dat het in absolute waarde grootste getal van de af te drukken knikvorm gelijk aan 1000 is.

Op de uitvoer verschijnen enige tijdmeldingen om een overzicht te verkrijgen over de verdeling van rekentijd over de verschillende programmaonderdelen. De besproken uitvoer (en/of mogelijke foutmeldingen) uit hoofdstuk 3 bij het berekenen van de eigenwaarde wordt eveneens gegeven.

Het hier besproken programma zelf kent drie foutmeldingen:

- alarm 1: Er wordt gekonstateerd dat het door de rekenmachine bepaalde aantal vrijheidsgraden n onjuist is, waarschijnlijk t.g.v. een fout in de invoergegevens.
- alarm 2: Er wordt gekonstateerd dat de berekende bandbreedte van de systeemmatrices niet juist is, waarschijnlijk t.g.v. verkeerde invoergegevens op de getalkaarten.
- alarm 3: De systeemmatrix S_t is singulier of niet positief definit.

Indien tst = false is gespecificeerd op de getalkaarten, wordt het programma na een dergelijke foutmelding afgebroken; dit wordt op de uitvoer aangegeven doordat na de alarmmelding de mededeling "TERMINATING" verschijnt. Indien tst = true wordt na een alarmmelding doorgerekend (daarbij kan het programma eventueel ergens vastlopen).

Als na of nb = 2 wordt altijd (namelijk ten onrechte) de melding "alarm 2" gegeven. Wil men een dergelijk geval doorrekenen dan moet de parameter tst = true worden meegegeven.

Onder 6.4 van deze bijlage is als voorbeeld een uitvoer van het programma opgenomen met de daarbij behorende getalkaarten.

5. Enige opmerkingen over de rekentijd.

De verdeling van de rekentijd over de programma-onderdelen is afhankelijk van het aantal vrijheidsgraden n .

Zeer globaal geldt het volgende:

De rekentijd nodig voor het opstellen van de systeemmatrices S_t en G_t is evenredig met n . De rekentijd die nodig is voor het bepalen van de eigenwaarde is evenredig met n^3 .

Het aantal benodigde iteraties voor het bepalen van de eigenwaarde blijkt nauwelijks afhankelijk van n . Indien n groot is (n van de orde 100), wordt de benodigde rekentijd voor het bepalen van de eigenwaarde, grotendeels in beslag genomen voor het dekomponeren van de matrix S_t . Om de reketijden te versnellen moet dus vooral de procedure decom worden verbeterd.

Bij het gebruik van de methode van de vierkantsvergelijkingen zijn meer iteratiestappen nodig dan bij het normale iteratieproces.

De verdeling van de reketijden over de programma-onderdelen bij gebruik van R-12 en het gewone iteratie-proces, is als volgt:

n	percentage van de rekentijd voor opstellen van de vergelijkingen	totale belaste rekentijd (min.)
~ 450	$\sim 1 \%$	~ 8
~ 50	$\sim 10 \%$	— *)
~ 10	$\sim 90 \%$	— *)

*) Hier kunnen geen reketijden ter vergelijking worden gegeven omdat de maatstaf waarmee de belaste rekentijd werd gemeten aan wijzigingen onderhevig was.

6.1 Procedure latvec.

```

001 'PROCEDURE' LATVEC(A,B,N,BW,JT,LV1,LR1,INF,BOUND,SYMSOL,DECOM);
002 'VALUE' N,BW;'INTEGER' N,BW;'REAL' LR1;'ARRAY' A,B,LV1,INF;
003 'INTEGER' 'ARRAY' JT;'INTEGER' 'PROCEDURE' BOUND;'PROCEDURE' SYMSOL,DECOM;
004 'BEGIN' 'BOOLEAN' P;'INTEGER' I,J,H,IT,MAXIT;'ARRAY' LV2,LVH(/1:N/);
005 'REAL' P1,P2,P3,P4,C,D,LR22,LR2,R,DELTA;
006 'PROCEDURE' MULT;
007 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
008 'BEGIN' LV2(/I/):=0;H:=BOUND(I+BW,N,0);
009 'FOR' J:=BOUND(I-BW,1,1) 'STEP' 1 'UNTIL' I 'DO'
010 LV2(/I/):=LV2(/I/)+B(/JT(/I+1/)-I+J/)*LVH(/J/);
011 'FOR' J:=I+1 'STEP' 1 'UNTIL' H 'DO'
012 LV2(/I/):=LV2(/I/)+B(/JT(/J+1/)-J+I/)*LVH(/J/);
013 'END' MULT;
014 'REAL' 'PROCEDURE' INPROD(X1,X2);'ARRAY' X1,X2;
015 'BEGIN' R:=0;'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' R:=R+X1(/I/)*X2(/I/);
016 INPROD:=R;
017 'END' INPROD;
018 'PROCEDURE' NORM(X,IP);'VALUE' IP;'ARRAY' X;'REAL' IP;
019 'BEGIN' IP:=1/SQRT(IP);'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' X(/I/):=X(/I/)*IP;
020 'END' NORM;
021 'PROCEDURE' CHANGE(X1,X2,X3);'ARRAY' X1,X2,X3;
022 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' X1(/I/):=X2(/I/):=X3(/I/);
023 'PROCEDURE' NEXTSTEP;
024 'BEGIN' SYMSOL(2,LVH,A(/JT(/J+1/)-J+I/),I,J,N,BW,BOUND);
025 'IF' INF(/4/)>.9 'THEN' MULT 'ELSE'
026 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' LV2(/I/):=LVH(/I/);
027 SYMSOL(1,LV2,A(/JT(/I+1/)-I+J/),I,J,N,BW,BOUND);
028 'END' NEXTSTEP;
029 DECOM(A,N,BW,JT,INF(/3/),SING,BOUND);NORM(LV1,INPROD(LV1,LV1));
030 CHANGE(LV2,LVH,LV1);IT:=0;LR1:=0;MAXIT:=INF(/1/);
031 'IF' INF(/5/)=0 'THEN' 'GOTO' S9;
032 S1:NEXTSTEP;
033 LR2:=INPROD(LV1,LV2);DELTA:=(LR2-LR1)/LR2;LR1:=LR2;
034 NORM(LV2,INPROD(LV2,LV2));CHANGE(LV1,LVH,LV2);IT:=IT+1;
035 SYSACT(1,14,1);OUTREAL(1,DELTA);OUTREAL(1,LR2);
036 'IF' DELTA<INF(/2/)!IT=MAXIT 'THEN' 'GOTO' S2;'GOTO' S1;
037 S2:'IF' IT<INF(/5/) 'THEN' 'GOTO' S1;'GOTO' S3;
038 S9:P1:=P2:=1;P:='FALSE';
039 S5:
040 NEXTSTEP;P3:=INPROD(LV2,LV1)*P2;P4:=INPROD(LV2,LV2)*P2;
041 D:=(P3*P3-P2*P4)/(P2*P2-P1*P3);C:=(P4+P2*D)/(P3*2);
042 P1:=P3/P2;P2:=P4/P2;IT:=IT+1;'IF' P 'THEN' 'GOTO' S6;
043 NORM(LV2,P2);CHANGE(LVH,LV1,LV2);
044 'IF' IT=1 'THEN' 'GOTO' S5;
045 S6:R:=C*C-D;'IF' R<0 'THEN'
046 'BEGIN' 'IF' IT<6 'THEN' 'GOTO' S5;
047 OUTSTRING(1,('GEEN REELE WORTELS'));'GOTO' SING;
048 'END';
049 R:=SQRT(R);LR2:=C+R;LR22:=C-R;DELTA:=(LR2-LR1)/LR2;LR1:=LR2;
050 SYSACT(1,14,1);OUTINTEGER(1,IT);OUTREAL(1,DELTA);
051 OUTREAL(1,LR1);OUTREAL(1,LR22);
052 'IF' P 'THEN' 'GOTO' S8;
053 'IF' ABS(DELTA)<INF(/2/)!IT=MAXIT 'THEN' 'GOTO' S7;'GOTO' S5;
054 S7:P:='TRUE';'GOTO' S5;
055 S8:'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
056 LV1(/I/):=LR22*LV1(/I/)-LV2(/I/);NORM(LV1,INPROD(LV1,LV1));

```

```

057 S3:SYMSOL(2, LV1, A(/JT(/J+1/)-J+1/), I, J, N, BW, BOUND);
058     INF(/1/):=IT; LR1:=1/LR1; 'GOTO'S4;
059 SING: INF(/1/):=-1;
060 S4:
061 'END'LATVEC;

```

6.2 De procedures bound, symsoi en decom.

```

0001 'INTEGER' 'PROCEDURE' BOUND(P, Q, R); 'VALUE' P, Q, R; 'INTEGER' P, Q, R;
0002 BOUND:='IF'R=1'THEN'('IF'P<Q'THEN'Q'ELSE'P)'ELSE'
0003 ('IF'P>Q'THEN'Q'ELSE'P);

```

```

0001 'PROCEDURE' SYMSOL(C, U, L, I, J, N, BW, BOUND); 'VALUE' C, N, BW;
0002 'INTEGER' C, I, J, N, BW; 'REAL' L; 'ARRAY' U; 'INTEGER' 'PROCEDURE' BOUND;
0003 'BEGIN' 'INTEGER' H1, ST, LB, UB; 'REAL' R1; 'IF' C=1 'THEN'
0004 'BEGIN' ST:=LB:=1; UB:=N 'END' 'ELSE' 'BEGIN' ST:=-1; LB:=N; UB:=1 'END';
0005 'FOR' I:=LB 'STEP' ST 'UNTIL' UB 'DO'
0006 'BEGIN' R1:=0; H1:=I-ST;
0007 'FOR' J:=BOUND(I-ST*BW, LB, C) 'STEP' ST 'UNTIL' H1 'DO'
0008 R1:=R1+L*U(/J/); J:=I; U(/I/):=(U(/I/)-R1)*L
0009 'END'
0010 'END' SYMSOL;

```

```

0001 'PROCEDURE' DECOM(A, N, BW, JT, EPS, LAB, BOUND); 'VALUE' N, BW; 'INTEGER' N, BW;
0002 'REAL' EPS; 'ARRAY' A; 'INTEGER' 'ARRAY' JT; 'LABEL' LAB;
0003 'INTEGER' 'PROCEDURE' BOUND;
0004 'BEGIN' 'REAL' R1, R2, TOL; 'INTEGER' I, J, K, H1, H2; R1:=0;
0005 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
0006 'IF' A(/JT(/I+1/)/) > R1 'THEN' R1:=A(/JT(/I+1/)/); TOL:=EPS*R1;
0007 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
0008 'BEGIN' J:=H1:=BOUND(I-BW, 1, 1);
0009 L1: R1:=0; H2:=J-1; 'FOR' K:=H1 'STEP' 1 'UNTIL' H2 'DO'
0010 R1:=R1+A(/JT(/I+1/)-I+K/)*A(/JT(/J+1/)-J+K/); H2:=JT(/I+1/)-I+J;
0011 R2:=A(/H2/)-R1; 'IF' I=J 'THEN' 'GOTO' L2; J:=J+1;
0012 A(/H2/):=R2*A(/JT(/J/)/); 'GOTO' L1;
0013 L2: 'IF' R2<TOL 'THEN'
0014 'BEGIN' OUTINTEGER(1, I); 'IF' R2<0 'THEN' OUTSTRING(1, '(' ' NPD' ')')
0015 'ELSE' OUTSTRING(1, '(' ' SING' ')'); 'GOTO' LAB
0016 'END';
0017 A(/H2/):=1/SQRT(R2);
0018 'END'
0019 'END' DECOM;

```

6.3 Het hoofdprogramma voor eenvoudige belastingsgevallen.

```

001 'BEGIN' 'COMMENT' 1;
002 'INTEGER' I, J, K, P, Q, R, NA, NB, NE, NP, NFE, NFP, BW, N, N1, N2, N3, N4, N5, D,
003 FA, FB; 'REAL' AB, R1, R2, R3, R4;
004 'BOOLEAN' RJO, TST;
005 'PROCEDURE' FIX(D, M, N, A); 'VALUE' D, M, N, A; 'INTEGER' D, M, N; 'REAL' A; 'CODE';
006 'PROCEDURE' FLO(D, M, N, A); 'VALUE' D, M, N, A; 'INTEGER' D, M, N; 'REAL' A; 'CODE';
007 'PROCEDURE' BLANK(D, N); 'VALUE' D, N; 'INTEGER' D, N; 'CODE';
008 'PROCEDURE' LINE(D, N); 'VALUE' D, N; 'INTEGER' D, N; 'CODE';
009 'PROCEDURE' PAGE(D); 'VALUE' D; 'INTEGER' D; 'CODE';
010 'PROCEDURE' SETTING(D, P, Q); 'INTEGER' D, P, Q; 'CODE';
011 'PROCEDURE' SETTIM; 'CODE'; 'INTEGER' 'PROCEDURE' ASKTIM; 'CODE';
012 'PROCEDURE' TIME(A); 'STRING' A;
013 'BEGIN' LINE(1, 1); OUTSTRING(1, A); BLANK(1, 1);
014 OUTSTRING(1, ('TIME= ')); OUTINTEGER(1, ASKTIM);
015 'END' TIME;
016 'PROCEDURE' PR(A); 'INTEGER' A;
017 'IF' TST THEN 'BEGIN' LINE(1, 1); FIX(1, 2, 0, A) 'END';
018 'PROCEDURE' ALARM(A, LAB); 'INTEGER' A; 'LABEL' LAB;
019 'BEGIN' LINE(D, 1); OUTSTRING(D, ('ALARM ')); FIX(D, 1, 0, A);
020 'IF' TST THEN 'GOTO' LAB ELSE 'GOTO' AL;
021 'END' ALARM;
022 'PROCEDURE' SETMAT(A, R, K, G); 'VALUE' R, K; 'ARRAY' A; 'INTEGER' R, K, G;
023 'BEGIN' 'INTEGER' I, J;
024 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' R 'DO' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' K 'DO' A(/I, J/):=G;
025 'END' SETMAT;
026 'PROCEDURE' SETJT(N, BW, JT); 'VALUE' N, BW; 'INTEGER' N, BW;
027 'INTEGER' 'ARRAY' JT;
028 'BEGIN' 'INTEGER' I; JT(/I/):=0;
029 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' BW 'DO' JT(/I+1/):=JT(/I/)+1;
030 'FOR' I:=BW+1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO' JT(/I+1/):=JT(/I/)+BW+1;
031 'END' SETJT;
032 'PROCEDURE' MAV(A, I, K, J, N1, N2, N3, B, C); 'VALUE' N1, N2, N3;
033 'ARRAY' A; 'INTEGER' I, J, K, N1, N2, N3; 'REAL' B, C;
034 'BEGIN' 'REAL' S;
035 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N1 'DO' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N3 'DO'
036 'BEGIN' S:=0; 'FOR' K:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N2 'DO' S:=S+B*C; A(/I, J/):=S;
037 'END';
038 'END' MAV;
039 SETTIM; ININTEGER(0, NA); ININTEGER(0, NB); INREAL(0, AB);
040 ININTEGER(0, FA); ININTEGER(0, FB); ININTEGER(0, NFP);
041 INBOOLEAN(0, TST); INBOOLEAN(0, RJO); SETTING(1, 132, 60); PR(1);
042 NE:=NA*NB; NP:=(NA+1)*(NB+1); NFE:=4*NFP; PR(2);
043 D:='IF' RJO THEN 15 ELSE 2;
044 'BEGIN' 'COMMENT' 2;
045 'INTEGER' 'ARRAY' LE1(/1:NFE/); 'ARRAY' LNP(/1:NP, 1:NFP/);
046 'PROCEDURE' GENERATE(CYCLUS); 'PROCEDURE' CYCLUS;
047 'BEGIN' 'COMMENT' M.B.V. GENERATE WORDEN ALLE LOCATIEVECTOREN
048 ACHTEREENVOLGENS OPGESTELD EN BEWERKT DOOR PROCEDURE CYCLUS;
049 'INTEGER' 'ARRAY' LE2(/1:4/);
050 'FOR' Q:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NB 'DO' 'FOR' R:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NA 'DO'
051 'BEGIN' 'FOR' I:=1, 2 'DO' 'FOR' J:=1, 2 'DO'
052 LE2(/J+2*(I-1)/):=(NA+1)*(Q+I-2)+R+J-1;
053 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' 4 'DO' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NFP 'DO'
054 LE1(/NFP*(I-1)+J/):=LNP(/LE2(/I/), J/); CYCLUS;
055 'END' Q, R LOOP;

```

```

0056 'END' GENERATE;
0057 'PROCEDURE' MAXDIF;
0058 'BEGIN' 'COMMENT' MAXDIF BEPAALT HET GROOTSTE VERSCHIL TUSSEN DE
0059 ELEMENTEN VAN DE LOCATIEVECTOREN; N1:=0;N2:=N;
0060 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NFE 'DO' 'BEGIN'
0061 P:=LE1(/I/); 'IF' P=0 'THEN' 'GOTO' RETURN;
0062 'IF' N1<P 'THEN' N1:=P; 'IF' N2>P 'THEN' N2:=P; RETURN: 'END' I;
0063 N4:=N1-N2; 'IF' N3<N4 'THEN' N3:=N4;
0064 'END' MAXDIF;
0065 'PROCEDURE' CONDIT(N, LB, ST, UB); 'INTEGER' N, LB, ST, UB;
0066 'BEGIN' 'COMMENT' CONDIT VOERT DE RANDVOORWAARDEN LANGS EEN ZIJDE VAN
0067 DE PLAAT IN; 'IF' N>0 'THEN' 'BEGIN'
0068 'INTEGER' 'ARRAY' BC(/1:N/); INTARRAY(0, BC);
0069 'FOR' I:=LB 'STEP' ST 'UNTIL' UB 'DO' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' N 'DO'
0070 LNP(/I, BC(/J/)):=0; 'END' IF;
0071 'END' CONDIT;
0072 'COMMENT' INVOEREN VAN DE RANDVOORWAARDEN;
0073 ININTEGER(0, N1); ININTEGER(0, N2); ININTEGER(0, N3); ININTEGER(0, N4);
0074 SETMAT(LNP, NP, NFP, 1); PR(3); P:=NA+1; Q:=NB*P+1;
0075 CONDIT(N1, 1, 1, P); CONDIT(N2, P, P, NP);
0076 CONDIT(N3, Q, 1, NP); CONDIT(N4, 1, P, Q); PR(4);
0077 'COMMENT' BEPALEN VAN HET AANTAL VRIJHEIDSGRADEN; N:=0;
0078 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NP 'DO' 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NFP 'DO'
0079 'IF' LNP(/I, J/)=0 'THEN' 'BEGIN' N:=N+1; LNP(/I, J/):=N 'END'; LINE(1, 2);
0080 'IF' TST 'THEN' OUTARRAY(1, LNP); ININTEGER(0, N5);
0081 P:=(NB-1)*(NA-1)*NFP+(NA-1)*(2*NFP-N1-N3)+(NB-1)*(2*NFP-N2-N4)+N5;
0082 'IF' N=N5 'THEN' ALARM(1, L1); 'COMMENT' BEPALEN VAN DE BANDBREEDTE;
0083 L1: BW:=NFP*(NA+3)-N2-N4-1; N3:=0; GENERATE(MAXDIF); PR(5);
0084 'IF' BW=N3 'THEN' ALARM(2, L2);
0085 L2: BW:=N3; 'IF' N<BW 'THEN' BW:=N-1; PR(6);
0086 'BEGIN' 'COMMENT' 3;
0087 'INTEGER' 'ARRAY' JT(/1:N+1/); 'INTEGER' UB; SETJT(N, BW, JT); UB:=JT(/N+1/);
0088 'BEGIN' 'COMMENT' 4; 'ARRAY' A, B(/1:UB/);
0089 'BEGIN' 'COMMENT' 5; 'ARRAY' SA, SB(/1:NFE, 1:NFE/);
0090 'PROCEDURE' ELSTIF(SA, SB, NA, NB, AB, FA, FB, MAV, SETMAT, TST, D);
0091 'VALUE' NA, NB, AB, FA, FB; 'ARRAY' SA, SB; 'REAL' AB; 'INTEGER' NA, NB, FA, FB, D;
0092 'BOOLEAN' TST; 'PROCEDURE' MAV, SETMAT;
0093 'CODE';
0094 'PROCEDURE' SYSTEMS;
0095 'COMMENT' SYSTEMS STELT DE SYSTEEMMATRICES OP;
0096 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NFE 'DO' 'IF' LE1(/I/)>0 'THEN'
0097 'FOR' J:=1 'STEP' 1 'UNTIL' NFE 'DO' 'IF' LE1(/J/)>0 & LE1(/I/)>=LE1(/J/) 'THEN'
0098 'BEGIN' N1:=JT(/LE1(/I/)+1/)-LE1(/I/)+LE1(/J/);
0099 A(/N1/):=A(/N1/)+SA(/I, J/); B(/N1/):=B(/N1/)+SB(/I, J/);
0100 'END' SYSTEMS;
0101 ELSTIF(SA, SB, NA, NB, AB, FA, FB, MAV, SETMAT, TST, D); PR(7);
0102 'FOR' I:=1 'STEP' 1 'UNTIL' UB 'DO' A(/I/):=B(/I/):=0; GENERATE(SYSTEMS);
0103 'END' 5; PR(8); TIME('(' OPSTELLEN VERGELIJKINGEN '));
0104 'BEGIN' 'COMMENT' 5; 'REAL' LR; 'ARRAY' LV(/1:N/), INF(/1:5/);
0105 'INTEGER' 'PROCEDURE' BOUND(P, Q, R); 'VALUE' P, Q, R; 'INTEGER' P, Q, R; 'CODE';
0106 'PROCEDURE' SYMSOL(C, U, L, I, J, N, BW, BOUND); 'VALUE' C, N, BW;
0107 'INTEGER' C, I, J, N, BW; 'REAL' L; 'ARRAY' U; 'INTEGER' 'PROCEDURE' BOUND; 'CODE';
0108 'PROCEDURE' DECOM(A, N, BW, JT, EPS, LAB, BOUND); 'VALUE' N, BW; 'INTEGER' N, BW;
0109 'REAL' EPS; 'ARRAY' A; 'INTEGER' 'ARRAY' JT; 'LABEL' LAB;
0110 'INTEGER' 'PROCEDURE' BOUND; 'CODE';

```

```

0111 'PROCEDURE' LATVEC(A,B,N,BW,JT,LV1,LR1,INF,BOUND,SYMSOL,DECOM);
0112 'VALUE' N,BW;'INTEGER' N,BW;'REAL' LR1;'ARRAY' A,B,LV1,INF;
0113 'INTEGER' 'ARRAY' JT;'INTEGER' 'PROCEDURE' BOUND;'PROCEDURE' SYMSOL,DECOM;
0114 'CODE';
0115 'PROCEDURE' PARTVEC(PV,NF); 'ARRAY' PV;'INTEGER' NF;
0116 'BEGIN' R1:=0;'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL'NP'DO' 'BEGIN'
0117 N2:=LNP(/I,NF/);PV(/I/):='IF' N2>0'THEN' LV(/N2/)'ELSE'0;
0118 R2:=ABS(PV(/I/));'IF' R2>R1'THEN' R1:=R2; 'END' I;
0119 R1:=1/R1*1000;'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL'NP'DO'
0120 PV(/I/):=PV(/I/)*R1;P:=NB+1;Q:=NA+1;
0121 'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL'P'DO' 'BEGIN'
0122 'FOR' K:=1'STEP'1'UNTIL'Q'DO' FIX(1,4,0,PV(/(I-1)*Q+K/));
0123 LINE(1,1); 'END';
0124 LINE(1,3);
0125 'END' PARTVEC;
0126 INARRAY(0,INF);'FOR' I:=1'STEP'1'UNTIL'N'DO' LV(/I/):=1;
0127 TIME('('START LATVEC')');
0128 LATVEC(A,B,N,BW,JT,LV,LR,INF,BOUND,SYMSOL,DECOM);LINE(1,1);
0129 TIME('('BEPALING EIGENWAARDE')');'IF' INF(/1/)<0'THEN'ALARM(3,AL);
0130 OUTSTRING(D,('VERHOUDING A/B='));FIX(D,2,2,AB);
0131 LINE(D,1);OUTSTRING(D,('NA='));OUTINTEGER(D,NA);
0132 OUTSTRING(D,('NB='));OUTINTEGER(D,NB);
0133 OUTSTRING(D,('FA='));OUTINTEGER(D,FA);
0134 OUTSTRING(D,('FB='));OUTINTEGER(D,FB);
0135 LINE(D,1);OUTSTRING(D,('KA='));OUTREAL(D,LR);LR:=LR*(FB/FA/AB)**2;
0136 OUTSTRING(D,('KB='));OUTREAL(D,LR);LINE(1,1);
0137 OUTSTRING(1,('N='));OUTINTEGER(1,N);OUTSTRING(1,('BW='));
0138 OUTINTEGER(1,BW);N1:=INF(/1/);OUTSTRING(1,('AANTAL ITERATIES:'));
0139 OUTINTEGER(1,N1);ININTEGER(0,N1);'IF' N1>0'THEN' 'BEGIN'
0140 'INTEGER' 'ARRAY' NF(/1:N1/);'ARRAY' PV(/1:NP/);INTARRAY(0,NF);
0141 LINE(1,4);OUTSTRING(1,('DE KNIKVORM'));LINE(1,2);
0142 'FOR' J:=1'STEP'1'UNTIL'N1'DO' PARTVEC(PV,NF(/J/)); 'END' IF;
0143 'END' 5;'END' 4;'END' 3;'END' 2;'GOTO' L3;
0144 AL:OUTSTRING(D,('TERMINATING'));
0145 L3:TIME('('EINDE')');
0146 'END' 1;
0147 /*

```

6.4 Voorbeeld van de uitvoer van het programma met de daarbij gebruikte getalkaarten.

Uitvoer:

```

OPSTELLEN VERGELIJKINGEN TIME=          +4057
START LATVEC TIME=          +4063
+1.0000000000000000'+00  +1.464998373518221'-02
+9.406194863825266'-01  +2.467136581127738'-01
+1.283854624677522'-02  +2.499222970819608'-01
+2.671713720853667'-04  +2.499890870093435'-01
+2.388070894878606'-05  +2.499950570685399'-01
BEPALING EIGENWAARDE TIME=          +20103
N=          +64  BW=          +23  AANTAL ITERATIES:          +5

```

DE KNIKVORM

0	0	0	0	0
0	+147	+271	+354	+383
0	+271	+500	+653	+707
0	+354	+653	+854	+924
0	+383	+707	+924	+1000
0	0	0	0	0
+383	+353	+270	+146	0
+707	+653	+499	+270	0
+924	+853	+653	+353	0
+1000	+924	+706	+382	0
0	-383	-707	-924	-1000
0	-354	-653	-854	-924
0	-271	-500	-653	-707
0	-147	-271	-354	-383
0	0	0	0	0
-1000	-924	-706	-382	0
-924	-853	-653	-353	0
-707	-653	-499	-270	0
-383	-353	-270	-146	0
0	0	0	0	0

EINDE TIME= +20436

BELASTING:+1.0000000000000000'+00 0 0

```

NU=+3.0000000000000000'-01  VERHOUDING A/B= +1.00
NA=          +4  NB=          +4  FA=          +2  FB=          +2
KA=+4.000079088467076'+00  KB=+4.000079088467076'+00

```

Getalkaarten:

4,4,1,2,2,4,'FALSE','FALSE',2,2,2,2,1,2,2,4,3,4,1,3,4,
1,0,0,.3,20,'-4','-5,1,5,4,1,2,3,4,

