Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Een coördinaatvrije basis voor vectorvelden in de context van rotatiesymmetrische operatoren met behulp van sferisch harmonische functies

(Engelse titel: A coordinate free basis for vectorfields in the context of rotationally symmetric operators using spherical harmonic functions)

Scriptie ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

JULES FLEUREN

begeleid door
Ramses van der Toorn

Delft, Nederland
Juli 2021

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Aanleiding en introductie

De aanleiding van dit onderzoek is het artikel *Homogeneous Dynamos and Terrestrial Magnetism* van E. Bullard en H. Gellman [2]. In dit artikel wordt onderzocht of het in theorie mogelijk is of rondstromend metaal in de kern van een planeet een magnetisch veld in stand kan houden. Het is namelijk de hypothese dat dit mechanisme magnetische velden zoals dat van de aarde in stand houdt. In het artikel wordt de interactie van een stromende geleidende vloeistof met een aanwezig magnetisch veld bestudeerd. Het stromingsveld van de vloeistof en het magnetisch veld worden gemodelleerd met behulp van de Navier-Stokes vergelijkingen en de Maxwell vergelijkingen. Als er dan een equilibriumoplossing van dit stelsel wordt gezocht ontstaat er een niet-lineair stelsel van partiële differentiaalvergelijkingen. Dit stelsel wordt vervolgens opgelost met behulp van een spectrale methode: het stromingsveld en het magnetisch veld worden geschreven als lineaire combinatie van zogenaamde sferisch harmonische vectorfuncties. Het resulterende stelsel van vergelijkingen wordt dan numeriek onderzocht.

Deze sferisch harmonische vectorfuncties zijn precies waar dit onderzoek over gaat. Dit zijn namelijk uitbreidingen van de sferisch harmonische functies naar vectorfuncties. Er zijn verschillende manieren om dit te doen, met elk hun eigen voor en nadelen. In zijn artikel maakt Bullard echter niet helemaal duidelijk waarom hij de sferisch harmonische vectorfuncties in deze vorm neemt. Het doel van dit onderzoek is om te kijken of we de stap beter kunnen duiden, of een andere manier kunnen vinden om de sferisch harmonische functies uit te breiden naar vectorfuncties. In het bijzonder zal ik kijken naar een coördinaatvrije manier van uitbreiden.

Wat bedoelen we precies met coördinaatvrij? En hoe pakken we dit aan? We proberen coördinaatvrij te werken door alleen maar functies te gebruiken die niet geïnspireerd zijn door het coördinatenstelsel waarin we werken. Het natuurkundige fenomeen wat in het artikel van Bullard beschreven wordt, heeft immers ook geen intrinsiek coördinatenstelsel en treedt op onafhankelijk van de vorm, schaal of oriëntatie van het coördinatenstelsel dat je gebruikt om het te beschrijven.

1.1 Belang van coördinaatvrij werken

Coördinaten zijn dus afhankelijk van je coördinatenstelsel, maar dingen die dat niet zijn, zijn bijvoorbeeld afstand, volume, hoeken, of de waarde van een functie. De waarde van een functie kan je bijvoorbeeld vaak interpreteren als een fysieke grootheid zoals bijvoorbeeld temperatuur, wat natuurlijk ook niet afhankelijk is van een coördinatenstelstel. Het voordeel van coördinaatvrij werken is dat het vaak algemener is en dus op meer plekken toe te passen is en soms geeft het ook meer inzicht geeft over de achterliggende mechanismen. Natuurkundige fenomenen zijn immers niet afhankelijk van het coördinatenstelsel wat je kiest om ze te beschrijven, hoewel die je die indruk soms wel kan krijgen bij het rekenen in een gekozen coördinatenstelsel.

Een mooie analogie is taal: in verschillende talen hebben we verschillende woorden voor objecten. In het Nederlands spreken we over een *boom*, in het Engels *tree* en in het Frans *arbre*. Drie verschillende woorden voor hetzelfde object. Om het object te beschrijven is het onvermijdelijk om een taal te kiezen, maar we moeten wel het achterliggende object in het oog houden. In het Nederlands rijmt *boom* op *sloom*, dus je zou de indruk kunnen krijgen dat *sloom* iets zegt over de boom, maar dat is natuurlijk onzin. Door ook naar het Engels en het Frans te kijken, zien we dat dit een eigenschap is van de taal waarin je het object beschrijft en niet van het object zelf.

Welk coördinatenstelsel er gekozen wordt heeft vaak wel grote invloed op de berekeningen die je er vervolgens op uitvoert. De componenten van vectoren krijgen andere waarden, basisvectoren zijn misschien niet meer orthogonaal, of krijgen andere lengtes en bepaalde operatoren hebben in het ene coördinatenstelsel een veel mooiere uitdrukking dan in het andere. Ook is het soms makkelijker om een bepaald domein of bepaalde randvoorwaarden te beschrijven. Als we het hebben over een stromingsveld in een bol, waarbij er geen vloeistof de bol verlaat is dit in sferische coördinaten heel makkelijk te beschrijven, de radiale component van het stromingsveld is dan nul op het boloppervlak. Dit kunnen dus redenen zijn om een bepaald coördinatenstelsel te verkiezen boven een andere, maar om de onderliggende werking te respecteren, zouden de berekeningen in elk coördinatenstelsel equivalent moeten zijn en zou het mogelijk moeten zijn om op elk moment het ene coördinatenstelsel voor het andere in te wisselen. Hiermee houden we in het oog dat de coöordinaat-representaties van bijvoorbeeld vectorvelden slechts een representatie zijn van het abstractere achterliggende object.

Dat een coördinaatvrije beschrijving van het probleem meer inzicht geeft in de achterliggende mechanismen van natuurkundige problemen en verklaringen kan geven voor fenomenen die anders lastig te verklaren zijn, is bijvoorbeeld te lezen in het artikel van R. van der Toorn [5], de begeleider van dit onderzoek.

Naast het artikel van Bullard [2] is ook in het artikel van R. G. Barrera [1], die in zijn beschrijft hoe de sferisch harmonische functies naar vectorfuncties uitgebreid kunnen worden, een groot deel van de redenatie gebaseerd op eigenschappen die specifiek horen bij het sferische coördinatenstelsel. Aan het eind van het artikel wordt dit ook benoemd:

> We remark that provided one is not going to do transformations of axes, one can have scalars and vectors as they are in the present paper. but as soon as transformations are introduced the description given in this paper is not adequate. [1, p.294]

In dit onderzoek gaan we dus proberen om de sferisch harmonische vectorfuncties zo te definiëren dat dit wel mogelijk is.

1.2 Tensoren

De wiskunde objecten die we zullen gebruiken om coördinaatvrij te rekenen zijn tensoren. Tensoren zijn objecten die vaak beschouwd worden als generalisaties van vectoren en matrices. Tensoren zijn objecten met componenten die afhangen van het coördinaatsysteem waarin je de tensor bekijkt, maar waarbij de componenten wel aan bepaalde logische rekenregels voldoen als je verandert van coördinatensysteem. Denk bijvoorbeeld aan afstand, je kan afstand meten in verschillende eenheden, bijvoorbeeld meters en kilometers, en daarbij verschillende waarden krijgen, terwijl het wel over dezelfde afstand gaat. Maar ondanks dat je andere waarden toekent aan dezelfde afstand kan wel op elk moment de ene eenheid voor de andere inwisselen, in het geval van meters en kilometers simpelweg door met 1000 te vermenigvuldigen of door 1000 te delen. Tensoren zijn daarom uitermate geschikt om fysieke grootheden zoals afstand, vectorvelden zoals stromingsvelden of nog complexere dingen als bijvoorbeeld een metriek te beschrijven.

Het doel van dit onderzoek is dus om een basis te vinden voor vectorvelden met behulp van de sferisch harmonische functies, zoals dat ook gedaan wordt in het artikel van Barrera [1] en dat van Bullard [2], maar om dit volledig in termen van tensoren en operatoren die op tensoren werken te doen. Daarnaast zullen we ook kijken of een aantal eigenschappen die de sferisch harmonische functies hebben met betrekking tot draaisymmetrieën ook gelden voor deze vectorfuncties.

Hoofdstuk 2

Tensoren en tensoroperatoren

In dit hoofdstuk zullen we een aantal definities en begrippen geven uit de tensoranalyse en differentiaalmeetkunde. Er zijn veel manieren om tensoren te definiëren en beschrijven, maar in dit stuk volgen we grotendeels de notatie en definities uit het boek van Dubrovin [3].

We behandelen een aantal specifieke gevallen die relevant zijn voor dit onderzoek. We beperken ons tot deelruimtes van $\mathbb{R}^m$. We veronderstellen dat we werken op een n-dimensionale deelvariëteit $M \subset \mathbb{R}^m$ en dat er een coördinatenstelsel $x^1, \dots, x^n$ (en kaart $\phi = (x^1, \dots, x^n)$) gegeven is. Hieronder zullen we een aantal definities geven. We zullen alleen een aantal specifieke gevallen behandelen van tensoren en tensoroperatoren. Voor de algemene definities (bijvoorbeeld van een algemene tensor) of bewijzen van de eigenschappen die hieronder genoemd worden verwijs ik graag door naar het boek van Dubrovin [3]. In de rest van dit stuk zullen we ook de Einstein-sommatieconventie gebruiken.

2.1 Vectorvelden

We beginnen met raakvectoren. Gegeven een bepaald punt p op onze deelvariëteit (deelverzameling) $M \subset \mathbb{R}^m$. We definiëren de raakruimte van M in het punt p (geschreven als T_pM) als volgt:

$$T_pM = \left\{ v \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \gamma(t), \text{ met } \gamma \text{ een gladde kromme in } M \text{ zó dat } \gamma(0) = p \right\}.$$

Raakvectoren zijn dus snelheidsvectoren van paden door M. We zeggen dat de vector $v \in T_pM$ aangrijpt in p. De verzameling van alle punten $p \in M$ en de vectoren die aangrijpen in p noemen we de raakbundel en schrijven we als volgt:

$$TM = \{(p, v) \,|\, p \in M, v \in T_pM\}$$

Een vectorveld is dan een functie die aan ieder punt $p \in M$ een raakvector in dat punt koppelt, een afbeelding $v : M \to TM$ dus. We schrijven de ruimte van vectorvelden op M als $\mathrm{Vec}(M)$. Zowel de raakruimtes T_pM als de ruimte van vectorvelden zijn vectorruimtes in de zin dat ze gesloten zijn onder optellen en vermenigvuldigen met een getal en een nulvector hebben. Voor de raakruimtes T_pM vormen we ook een basis. We nemen de raakvectors $e_1(p), \dots, e_n(p)$ als basis, waarin $e_i(p)$ de raakvector is die correspondeert met $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} \phi^{-1}(x^1(p), \dots, x^i(p) + t, \dots, x^n(p))$ (hier is $\phi^{-1}(x^1, \dots, x^n)$ het punt in M dat door de coördinaten $x^1, \dots, x^n$ wordt beschreven). Als we aan elk punt $p \in M$ de raakvector $e_i(p)$ koppelen krijgen we het vectorveld e_i. We kunnen nu elk vectorveld v in het punt p als volgt schrijven: $v(p) = v^i(p)\, e_i(p)$ (de Einstein-sommatieconventie impliceert hier dus een sommatie over i). Hierin zijn $v^i(p)$ de component functies van v ten opzichte van de gegeven basis. Meestal hebben we het echter over het vectorveld als geheel en niet in een specifiek punt en schrijven we $v = v^i\, e_i$. Voor $\mathbb{R}^3$ zal meestal de notatie e_x, e_y, e_z gebruikt worden ten opzichte van de standaard cartesische coördinaten, of e_r, e_θ, e_ϕ ten opzichte van bolcoördinaten. Vectorvelden worden vaak ook wel contravariante vectorvelden genoemd en zijn tensoren van type (1,0). We zullen in de rest van dit stuk ook wel de term vectorfunctie gebruiken voor vectorvelden.

We kunnen het begrip van een raakruimte nog iets generaliseren. Als we ook toelaten dat we de vectoren in de raakruimte vermenigvuldigen met complexe scalairen, krijgen we een complexe vectorruimte. Omdat onze ruimte M nog steeds reëel is, verliezen we dan wel de connectie tussen vectoren in de raakruimte en snelheidsvectoren van paden door de variëteit. Dit geeft ons echter wel de mogelijkheid om complexe vectorvelden op reële ruimtes te definiëren.

In sommige gevallen is het natuurlijk om een (reëel) vectorveld v te zien als het stromingsveld van een vloeistof. Het vectorveld beschrijft dan dus de snelheidsvectoren van deeltjes in de vloeistof. We definiëren de *flow* langs het vectorveld v, die start in $p \in M$ als de functie $t \mapsto \phi_t(p)$ die voldoet aan de differentiaalvergelijking

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \phi_t(p) = v(\phi_t(p))$$

met beginvoorwaarde $\phi_0(p) = p$. Voor een vaste t geldt dan dus $\phi_t : M \to M$. Als p vast is, is de afbeelding $t \mapsto \phi_t(p)$ dus een pad over M en als t vast is, is de afbeelding $p \mapsto \phi_t(p)$ een afbeelding $M \to M$.

2.2 Covectorvelden

Net zoals in de standaard lineaire algebra heeft elke raakruimte T_pM ook een duale ruimte, die we aanduiden met $T_p^\star M$. Dit is de ruimte van lineare afbeeldingen $T_pM \to \mathbb{R}$ (of $T_pM \to \mathbb{C}$ als T_pM complex is). Als we, vergelijkbaar met vectorvelden, aan ieder punt $p \in M$ een element uit $T_p^\star M$ koppelen krijgen we zogenaamde covariante vectorvelden, ook wel covectorvelden. De basis $e_1, \dots, e_n$ geeft een bijbehorende basis voor de ruimte van covectors op ieder punt $p \in M$, namelijk $dx^1, \dots, dx^n$. Als we een covector beschouwen als een lineaire afbeelding van TM naar $\mathbb{R}$, dan is dx^i de covector zó dat $dx^i(e_j) = \delta^i_j$. We schrijven een covector α alsvolgt: $\alpha = v_i\, dx^i$. Ook voor covectoren schrijven we weleens dx, dy, dz of $dr, d\theta, d\phi$ als we in respectievelijk cartesische of sferische coördinaten werken. Covectoren zijn tensoren van type (0,1). We zullen ook wel de term covectorfunctie gebruiken voor covectorvelden.

De termen contravariant of covariant hebben te maken met de manier waarop de componentfuncties zich gedragen bij coördinatentransformaties. Gegeven coördinaten $x^1, \dots, x^n$ en $x^{1'}, \dots, x^{n'}$ is dit voor (contravariante) vectorvelden als volgt:

$$v^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} v^j$$

en voor covariante vectorvelden als volgt:

$$\alpha_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \alpha_j.$$

Hier uit volgt ook de conventie dat we de componenten van vectorvelden met een hoge index schrijven en die van covectorvelden met een lage index.

2.3 Correspondentie tussen vectorvelden en covectorvelden

In de voorgaande paragraven zijn vectorvelden en covectorvelden geïntroduceerd en besproken, maar wat is precies het verschil tussen de twee en kunnen we de objecten aan elkaar verbinden?

We hebben dus gezien dat bijvoorbeeld een snelheidsvector een contravariante vector is. Omdat het in de natuurkunde vaak gaat over contravariante vectorvelden, in het artikel van Bullard [2] wordt er bijvoorbeeld gewerkt met een stromingsveld, zijn we in dit onderzoek op zoek naar een uitbreiding van de sferisch harmonische functies naar contravariante vectorvelden. Er zijn echter een aantal manieren om scalaire functies uit te breiden naar covectorvelden met een paar hele fijne eigenschappen. Het zou dus fijn zijn als we deze manieren kunnen gebruiken, maar op de een of andere manier toch zouden kunnen eindigen met contravariante vectorvelden.

Gelukkig blijkt dat niet heel ingewikkeld. In de aanwezigheid van een metriek g is er namelijk een 1-op-1 correspondentie tussen vectoren en covectoren. Gegeven een covector $\alpha = \alpha_i \, dx^i$ kiezen we de bijbehorende vector $v = v^i \, e_i$ zó dat $\alpha(w) = g(v, w)$ voor alle vectoren w. Het blijkt dat de vector v die deze eigenschap heeft de volgende componenten heeft:

$$v^i = g^{ij} \alpha_j.$$

Hierin zijn g^{ij} de componenten van de metrische tensor g. Het omzetten van een covector naar een vector wordt in het Engels ook wel *raising the index* genoemd, omdat we dus van een covector met een lage index naar een vector met een hoge index gaan. We schrijven $v = \sharp\alpha$ (de notatie wordt vaak als $\alpha^\sharp$ geschreven, in overeenkomst met het kruis in de muzieknotatie, maar wij zullen deze notatie gebruiken, omdat dit meer overeenkomt met de notatie van andere operatoren). We kunnen op een vergelijkbare manier natuurlijk ook een vector omzetten in een covector. Dit heet dan *lowering the index* en wordt geschreven als $\alpha = \flat v$. Beide operatoren zijn lineaire operatoren. Voor een uitgebreidere beschrijving van deze operaties en een introductie van metrische tensoren beveel ik het boek van Dubrovin [3] weer aan.

Aan het eind van dit onderzoek zullen we nog bespreken of het omzetten van covectoren naar vectoren invloed heeft op de eigenschappen van de functies.

2.4 Lie-afgeleide

We definiëren nu de zogenaamde Lie-afgeleide langs een vectorveld. Voor scalaire functies is de Lie-afgeleide eigenlijk niets anders dan een richtingsafgeleide. Eerst kijken we naar de Lie-afgeleide van een scalaire functie f en dan van vectorvelden en covectorvelden.

Definitie 2.4.1 (Lie-afgeleide van scalair veld)**.** *Gegeven een vectorveld $X = X^i e_i$ en een (continu differentieerbare) functie f. De Lie-afgeleide van f langs X is als volgt gedefinieerd:*

$$\mathscr{L}_X(f) = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

We breiden de definitie uit naar vectorvelden en covectorvelden, op zo een manier dat het resultaat van de Lie-afgeleide weer een tensorveldveld is en de operator aan de Leibniz productregel voldoet.

Definitie 2.4.2 (Lie-afgeleide vectorveld)**.** *Gegeven vectorvelden $X = X^i e_i$ en $Y = Y^i e_i$. De Lie-afgeleide van Y langs X geeft een nieuw vectorveld en wordt gedefinieerd met de volgende componenten:*

$$(\mathscr{L}_X(Y))^i = X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j}$$

Deze operatie wordt ook wel de commutator van X en Y genoemd en wordt ook als volgt geschreven: $[X, Y] = \mathscr{L}_X(Y)$.

Deze operatie geeft ons dus een anti-symmetrisch product $[\cdot,\cdot] : \mathrm{Vec}(M) \times \mathrm{Vec}(M) \to \mathrm{Vec}(M)$. De ruimte $\mathrm{Vec}(M)$ vormt een Lie-algebra met dit product.

Definitie 2.4.3 (Lie-afgeleide covectorveld)**.** *Gegeven een vectorveld $X = X^i e_i$ en een covectorveld $\alpha = \alpha_i\, dx^i$. De Lie-afgeleide van α langs X is gedefinieerd met de volgende componenten:*

$$(\mathscr{L}_X(\alpha))_i = X^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \alpha_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i}$$

2.5 Uitwendige afgeleide d

In het boek van Dubrovin [3] worden de differentiaaloperatoren beschreven die coördinaatonafhankelijk werken op tensoren. Eén van deze operatoren is de uitwendige afgeleide, geschreven als d. Deze operator wordt ook wel de differentiaal of gradiënt genoemd. Het mooie aan de uitwendige afgeleide is dat het een vrij simpel object is, met toch een paar mooie eigenschappen. Het is bijvoorbeeld de enige gedocumenteerde differentiaal operator die geen ander gegeven veld nodig heeft, zoals bijvoorbeeld de Lie-afgeleide. De operator maakt van een scheefsymmetrische tensor van type $(0,k)$ een scheefsymmetrische tensor van type $(0,k+1)$. De operator wordt door Dubrovin [3] op pagina 235 voor algemene tensoren van type $(0,k)$ gedefinieerd, maar wij zullen ons beperken tot het geval $k = 0$.

Definitie 2.5.1. *Zij f een scalaire functie (oftewel tensor van type (0,0)) gedefinieerd op een n-dimensionale ruimte met coordinaten $x^1, \ldots, x^n$. De uitwendig afgeleide df van f is de covector (van type (0,1)) met componenten*

$$df_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}. \tag{2.1}$$

Ten opzichte van een tweede coördinaatsysteem $x^{1'}, \ldots, x^{n'}$ zien we dat

$$df_{i'} = \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} df_i$$

en dat df dus inderdaad een tensor is van type (0,1), oftewel een covectorveld.

In formule (2.1) kunnen we de gradiënt van een functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ herkennen, zoals die vaak in de analyse wordt gedefinieerd, die wordt namelijk vaak alsvolgt geschreven:

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

ten opzichte van het cartesische coördinatenstelsel.

2.5.1 Commutatie met de Lie-afgeleide

Eén van de fijne eigenschappen van de uitwendige afgeleide, is dat hij commuteert met de Lie-afgeleide. Dit geldt voor algemene covariante tensoren, maar in het volgende lemma zullen we ons weer beperken tot scalaire functies.

Lemma 2.5.1. *Zij f een (twee keer continu differentieerbare) scalaire functie en $X = X^j \partial_j$ een vectorveld op een n-dimensionale ruimte. Dan geldt*

$$d\mathscr{L}_X(f) = \mathscr{L}_X d(f)$$

Bewijs. Neem coordinaten $x^1, \dots, x^n$. Dan

$$\begin{aligned}(d\mathscr{L}_X(f))_i &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^j \frac{\partial f}{\partial x^j}\right) \\ &= \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + X^j \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\end{aligned}$$

Schrijf $df = Y_j dx^j$. Dan

$$\begin{aligned}(\mathscr{L}_X df)_i &= X^j \frac{\partial Y_i}{\partial x^j} + Y_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \\ &= X^j \frac{\partial}{\partial x^j}\frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\frac{\partial X^j}{\partial x^i} \\ &= X^j \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j} + \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}\end{aligned}$$

□

2.6 Hodge-ster ⋆

Een andere tensoroperator gedefinieerd op covariante tensoren die beschreven wordt in het boek van Dubrovin [3] is de zogenaamde Hodge-ster (Engels: *Hodge-star*). We zullen deze operator niet heel uitvoerig beschrijven, daarvoor verwijs ik graag door naar zijn boek. De belangrijkste eigenschappen van de Hodge-ster die we zullen gebruiken zijn de volgende: het maakt van een scheefsymmetrische tensor van type $(0,k)$ een scheefsymmetrische tensor van type $(0,n-k)$, waarin n de dimensie van de ruimte is. De Hodge-ster is afhankelijk van een metriek, we gebruiken hiervoor de standaard metriek van $\mathbb{R}^m$ beperkt tot onze variëteit M.

De Hodge-ster heeft ook een inverse $\star^{-1}$. Op een Riemannse variëtiet geldt namelijk het volgende:

$$\star(\star T) = (-1)^{k(n-k)} T$$

en dus

$$\star^{-1} = \begin{cases} \star & \text{als } n \text{ even} \\ (-1)^k \star & \text{als } n \text{ oneven} \end{cases}.$$

Ten slotte commuteert de operator met een Lie-afgeleide $\mathscr{L}_X$ als $\mathscr{L}_X g = 0$, waarin g de metriek is. Zo een veld X wordt een *Killing*-vectorveld genoemd. Deze vectorvelden genereren isometriën. Dat wil zeggen, als ϕ_t de flow is langs het vectorveld X, dan is de functie $\phi_t : M \to M$ een isometrie. Als we dus twee punten met het vectorveld X 'mee laten stromen', dan verandert de afstand tussen die punten niet. Omgekeerd geldt ook dat als een vectorveld X een isometrie genereert, dat het dan een Killing-veld is. Dit wordt aangetoond in het boek van Jost [4, p.75].

2.7 Laplaciaan-Beltrami operator

Het is mogelijk om de Laplaciaan, zoals we die kennen uit de analyse te schrijven met behulp van de tensoroperatoren die we hier voor hebben beschreven. De Laplaciaan wordt normaal in cartesische in $\mathbb{R}^3$ coordinaten als volgt gedefinieerd:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Dit komt overeen met de combinatie van operatoren $\star^{-1} d \star d$. We hebben dus $\Delta = \star^{-1} d \star d$. Op deze manier kunnen we de Laplaciaan dus ook generaliseren naar een algemene variëteit M. De operator Δ wordt op niet-Euclidische ruimtes ook wel de Laplace-Beltrami operator genoemd.

2.8 Tensorgelijkheid

We sluiten dit hoofdstuk af met nog een kleine verduidelijking van het begrip 'gelijkheid' tussen tensoren en de 'tensoroperator' =. Aangezien een tensor een object is dat geen intrinsieke waarde heeft, maar alleen componenten die een waarde krijgen in de context van een coördinatenstelsel. Het blijkt gelukkig dat als alle componenten van twee tensoren gelijk zijn in een bepaald coördinatenstelsel, dat dat dan in ieder coördinatenstelsel zo is. Op deze manier is ook het vermenigvuldigen van een tensor met een scalair gedefinieerd: we definiëren voor een scalair λ en een tensor T, de tensor λT als de tensor die in een willekeurig coördinatenstelsel de componenten $(\lambda T)^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p} = \lambda T^{j_1 \ldots j_q}_{i_1 \ldots i_p}$ heeft. Dit geldt dan namelijk voor elk coördinatenstelsel. Op deze manier kunnen we ook de nultensor definiëren, dit is namelijk de tensor die in een willekeurig coördinatenstelsel (en dus in elk coördinatenstelsel) alle componenten gelijk aan nul heeft.

Hoofdstuk 3

De actie van SO(3) op functies

Aangezien het oorspronkelijke probleem van het bestuderen van de interactie tussen stromend metaal in de aardkern en het aardmagnetisch veld zich afspeelt op een bolvormig domein, is het voordehandliggend om de rotatiesymmetrieën te bekijken. Een bol is immers rotatiesymmetrisch. De rotatiesymmetrieën van een 3-dimensionale bol vormen samen de welbekende SO(3) groep. In een coördinaatvrije beschrijving heb je in principe geen canonieke oorsprong, maar de SO(3) groep heeft natuurlijk wel een bepaald middelpunt als we spreken over rotaties van 3-dimensionale ruimte, namelijk het punt dat behouden blijft onder alle rotaties in SO(3). We noemen dit punt $\mathcal{O}$. Het zal in bepaalde gevallen ook handig zijn om te kunnen spreken over de afstand tot dit middelpunt die we als volgt definiëren: $r(p) = \mathrm{dist}(p, \mathcal{O})$. De metriek dist is hier de standaard metriek van $\mathbb{R}^3$.

In het hoofdstuk hierna zullen we de sferisch harmonische functies bestuderen en de eigenschappen die deze functies hebben onder rotaties. Maar om dit te kunnen bestuderen moeten we eerst definiëren wat de actie van SO(3) op een functie precies is. We definiëren de actie als volgt:

Definitie 3.0.1. *Gegeven een functie $f : D \to \mathbb{R}$ en $R \in \mathrm{SO}(3)$. We definiëren de rotatieoperator $\mathcal{R}$ alsvolgt:*

$$\mathcal{R}f(x) = f(R^{-1}x)$$

Hierin is $R^{-1}x$ de werking van R^{-1} op $x \in \mathbb{R}^3$, waarbij we de R^{-1} als rotatiematrix zien die we vermenigvuldigen met de kolomvector x. We gebruiken de inverse van R om te zorgen dat de rotatieoperators homomorf zijn aan SO(3). We willen daarvoor namelijk dat $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2 f(x) = f((R_1R_2)^{-1}x)$. Dit is dezelfde conventie die gebruikt wordt in het boek van Wigner [7]. Het domein D van de functie kan heel $\mathbb{R}^3$ zijn of een deel daarvan, maar het moet wel gesloten zijn onder de acties van SO(3) om er voor te zorgen dat de operator altijd goed gedefinieerd is. De groep $\{\mathcal{R} | R \in \mathrm{SO}(3)\}$ van rotatieoperatoren is homomorf aan SO(3), maar het aantal elementen hangt af van de functie. Zo is er slechts één rotatieoperator op een constante functie, namelijk de eenheid. In de meeste gevallen zullen we echter te maken hebben met functies die niet precies draaisymmetrisch zijn en zal de groep van operatoren isomorf zijn aan SO(3).

3.1 $\mathscr{L}_z$ en $\mathscr{L}^2$ operatoren

We zullen nu nog twee operatoren bespreken die gerelateerd zijn aan rotaties en waaronder de sferisch harmonische functies interessante eigenschappen hebben.

Als eerst kijken we naar de $\mathscr{L}_z$ operator. Deze operator wordt veel gebruikt in de quantummechanica en wordt daar meestal gedefineerd als $\mathscr{L}_z = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$, in carthetische coördinaten dus. Om zo veel mogelijk met coördinaatvrije wiskunde te werken definiëren we de operator als een Lie-afgeleide. We kijken namelijk naar de Lie-afgeleide langs het veld r_z op $\mathbb{R}^3$, waar r_z het snelheidsveld is van ieder punt in $\mathbb{R}^3$ bij een rotatie rond een gekozen z-as. Het is conventie om hiervoor de z-as in cartesische coördinaten te gebruiken, maar het maakt niet uit hoe deze as georiënteerd is. In het geval van het aardmagnetisch veld zou het misschien voor de hand liggen om de rotatie-as als z-as te nemen, we zullen later zien dat de berekeningen bij rotatie rond deze as namelijk eenvoudiger zijn. Als $R_\phi \in \mathrm{SO}(3)$ de rotatie(matrix) rond de z-as is met hoek ϕ, dan definiëren we r_z als volgt:

$$r_z(x) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0} R_{-t}x = L_z x.$$

Waarin $L_z = \frac{d}{dt} R_t$. Met behulp van L_z kunnen we ook het volgende stellen:

Lemma 3.1.1.

$$\mathscr{L}_z f(x) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0} f(R_{-t}x) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0} \mathcal{R}_t f(x)\ .$$

Bewijs. We werken van rechts naar links:

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0} \mathcal{R}_t f(x) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0} f(R_{-t}x) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(R_0 x)(L_z x)^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x)(r_z(x))^i = \mathscr{L}_z f(x).$$

□

We kunnen hier ook uit afleiden dat $\mathscr{L}_z f = 0$ als f rotatiesymmetrisch is (dat wil zeggen, als $\mathcal{R}f = f$, voor alle $\mathcal{R} \in \mathrm{SO}(3)$).

Deze zelfde constructie kunnen we in cartesische coördinaten herhalen voor de x-as en de y-as om op deze manier de vectorvelden r_x en r_y te krijgen en de bijbehorende Lie-afgeleides $\mathscr{L}_x$ en $\mathscr{L}_y$. De vectorvelden r_x, r_y en r_z zijn gedefiniëerd als snelheidsvelden van rotaties en er geldt dus ook de de flows van deze vectorvelden weer rotaties zijn. De velden genereren dus de rotaties rond de x-, y- en z-as, respectievelijk. Omdat rotaties isometrieën zijn, zijn r_x, r_y en r_z Killing-velden. Met deze drie operatoren definiëren we de volgende operator voor een tensor T:

$$\mathscr{L}^2 T = (\mathscr{L}_x^2 + \mathscr{L}_y^2 + \mathscr{L}_z^2)T = \mathscr{L}_x(\mathscr{L}_x T) + \mathscr{L}_y(\mathscr{L}_y T) + \mathscr{L}_z(\mathscr{L}_z T).$$

Deze operator wordt in het engels vaak de *angular momentum operator* genoemd en heeft veel toepassingen in de quantummechanica. Dit wordt ook besproken in het boek van Wigner [7]. De manier waarop we de operator hier definiëren lijkt heel erg geïnspireerd door cartesische coördinaten en ook uit de notatie lijkt dat zo, maar het is ook mogelijk om de operator op een minder coördinaatafhankelijke manier af te leiden. De operator is namelijk het zogenaamde Casimir-element van de SO(3) rotatiegroep. Deze afleiding valt echter buiten het bereik van dit onderzoek.

3.1.1 Commutatie met uitwendige afgeleide en Hodge-ster

We hebben in het vorige hoofdstuk al gezien dat Lie-afgeleides commuteren met de uitwendige afgeleide. Aangezien de $\mathscr{L}_z$ en $\mathscr{L}^2$ operatoren opgebouwd zijn uit Lie-afgeleides commuteren deze ook met de uitwendige afgeleide. Voor de Hodge-ster ligt het iets ingewikkelder, deze commuteert namelijk alleen met Lie-afgeleides langs Killing velden. De vectorvelden r_x, r_y en r_z zijn Killing velden, dus de Lie-afgeleides $\mathscr{L}_x, \mathscr{L}_y$ en $\mathscr{L}_z$ commuteren met de Hodge-ster en de $\mathscr{L}^2$ operator dus ook.

Hoofdstuk 4

De sferisch harmonische functies

In dit hoofdstuk zullen we de sferisch harmonische functies introduceren en een aantal belangrijke eigenschappen van deze functies beschrijven. De sferisch harmonische functies worden meestal geïntroduceerd aan de hand van de Laplace-vergelijking. We doen het hier als in het boek van Wigner [7].

De laplacevergelijking is $\Delta f = 0$. In cartesische coördinaten ziet die er als volgt uit:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Zoals we in sectie 2.7 hebben gezien is deze uitdrukking ook op een coördinaatvrije manier te schrijven. Deze vergelijking wordt meestal opgelost in bolcoördinaten met behulp van het scheiden van variabelen (seperation of variables) in een deel dat afhangt van de straal en een deel dat afhangt van de hoeken:

$$f(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi).$$

We krijgen dan twee aparte (partiële) differentiaalvergelijkingen, één voor het radiale deel en één voor het hoekafhankelijke deel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\left(r^2 \frac{dR}{dr}\right) &= \lambda R \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} &= -\lambda Y \end{aligned} \tag{4.1}$$

De uiteindelijke oplossingen zijn van de vorm $r^\ell Y^\ell_m(\theta, \phi)$ (bij r is ℓ een macht, bij Y^ℓ_m een index), waarin $\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$ en voor elke ℓ er $2\ell + 1$ oplossingen zijn. Deze worden weer aangeduid met de index m, die volgende waarden aanneemt: $m = -\ell, -\ell + 1, \ldots, \ell$. We bekijken het hoekafhankelijke deel van de oplossingen, de functies Y^ℓ_m. Omdat ze alleen afhankelijk van de hoeken θ en ϕ kunnen we ze beschouwen als functies op de eenheidsbol $\mathbb{S}^2$. Het blijkt dan dat vergelijking (4.1) precies de vergelijking $\Delta_{\mathbb{S}^2} Y = -\lambda Y$ is, waarin $\Delta_{\mathbb{S}^2}$ de Laplaciaan op de ruimte $\mathbb{S}^2$ is. De functies Y^ℓ_m zijn complexe functies. Hieronder staan een aantal van de functies expliciet uitgedrukt in sferische coördinaten om een impressie te krijgen van hoe de functies er uit zien.

$$Y_0^0(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$$
$$Y_{-1}^1(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{-i\phi}$$
$$Y_0^1(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\cos\theta$$
$$Y_1^1(\theta,\phi) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2\pi}}\sin\theta e^{i\phi}$$

4.1 Eigenschap 1 (basis): sferisch harmonische functies als basis voor functies

Een belangrijke eigenschap van de sferisch harmonische functies is dat ze een basis vormen voor de $L^2(\mathbb{S}^2)$, de kwadratisch integreerbare functies op $\mathbb{S}^2$. We kunnen een arbitraire L^2 functie $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ dus op deze manier schrijven: $f = \sum_{\ell,m} f_{\ell m} Y_m^\ell$. De gelijkheid betekent hier dat de reeks convergeert ten opzichte van de L^2 norm op $\mathbb{S}^2$. Als we de functies vervolgens beschouwen als restricties van de functies $\tilde{Y}_m^\ell : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, met $\tilde{Y}_m^\ell(r,\theta,\phi) = Y_m^\ell(\theta,\phi)$ kunnen we een continue functie $f : \mathbb{R}^3 \supset D \to \mathbb{C}$ op een compact rotatiesymmetrisch domein $D \subset \mathbb{R}^3\backslash 0$ in sferische coördinaten als volgt schrijven (het gaat hier wederom om convergentie in de L^2 norm, ditmaal op D):

$$f(r,\phi,\theta) = \sum_{\ell,m} f_{\ell m}(r)\tilde{Y}_m^\ell. \tag{4.2}$$

Hierin zijn de f_{lm} functies van de straal r. In de rest van dit stuk zullen we zowel voor Y_m^ℓ als voor $\tilde{Y}_m^\ell$ de notatie Y_m^ℓ gebruiken, als het nodig is om toch onderscheid te maken tussen de twee zullen we $Y_m^\ell|_{\mathbb{S}^2}$ schrijven voor Y_m^ℓ en $Y_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}$ voor $\tilde{Y}_m^\ell$.

Het feit dat we een functie f dus in de vorm van (4.2) kunnen schrijven, wordt vaak gebruikt bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen. De functie wordt in de vorm van (4.2) in de vergelijking gesubstitueerd, daaruit volgen dan vergelijkingen voor de functies $f_{\ell m}$, die makkelijker op te lossen zijn dan het beginprobleem. Dit wordt een spectrale methode genoemd en dit wordt ook vaak gedaan met de sin en cos functies als basis, men spreekt dan van Fourier reeksen.

Het feit dat we hier te maken hebben met een compact rotatiesymmetrisch domein, zonder de oorsprong maakt deze constructie misschien minder makkelijk toepasbaar. De functies $Y_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}$ zijn op deze manier echter niet continu uit te breiden naar $\mathbb{R}^3$ en de compactheid gebruiken we hier om zeker te weten dat (4.2) convergeert in de L^2 norm. Het zou wellicht interessant zijn om de functies Y_m^ℓ op een andere manier uit te breiden naar $\mathbb{R}^3$, zó dat ze wel ook in het punt 0 gedefinieerd zijn. We zouden bijvoorbeeld de functies kunnen uitbreiden als $\tilde{Y}_m^\ell(r,\theta,\phi) = r^\ell Y_m^\ell(\theta,\phi)$, de vorm waarin ze $\Delta f = 0$ oplossen. We zouden ook kunnen kijken of we de convergentie kunnen garanderen met een minder sterke eis dan dat het domein compact moet zijn. We zullen deze vragen echter hier niet verder onderzoeken. In het artikel van Barrera [1] wordt hier ook geen aandacht aan besteed.

4.2 Eigenschap 2 (eigenfuncties): eigenfuncties van $\mathscr{L}_z$ en $\mathscr{L}^2$ operatoren

De tweede belangrijke eigenschap van de sferisch harmonische functies is het feit dat ze allemaal eigenfuncties zijn van de $\mathscr{L}_z$ en $\mathscr{L}^2$ operatoren. Deze eigenschap geeft ze hun kenmerkende indices. We hebben namelijk de volgende twee eigenschappen:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_z Y_m^\ell &= im Y_m^\ell \\ \mathscr{L}^2 Y_m^\ell &= \ell(\ell+1) Y_m^\ell.\end{aligned}$$

Deze twee operatoren samen specificeren dus precies over welke sferisch harmonische functie we het hebben: als we de eigenwaarden van een functie Y_m^ℓ weten ten opzichte van beide operatoren, weten we (op een schaalfactor na) precies over welke functie het gaat.

4.3 Eigenschap 3 (irreps.): irreducibele representaties van SO(3)

De derde eigenschap die we bestuderen gaat over de werking van rotatieoperatoren op de sferisch harmonische functies. Als we een rotatieoperator $\mathcal{R}$ toepassen op een een sferisch harmonische functie Y_m^ℓ, dan krijgen we een functie die te schrijven is als een lineaire combinatie van sferisch harmonische functies met dezelfde parameter ℓ. Als we de rotatieoperatoren op de volgende (complexe) functieruimte beschouwen: $V_\ell = \operatorname{span}\left\{Y_{-\ell}^\ell, \ldots, Y_\ell^\ell\right\}$, kunnen we elke rotatieoperator $\mathcal{R}$ dus representeren als een $(2\ell+1) \times (2\ell+1)$ matrix ten opzichte van de basis $(Y_{-\ell}^\ell, \ldots, Y_\ell^\ell)$. We schrijven deze matrix als $D^{(\ell)}(\mathcal{R})$ met componenten $D_{mm'}^{(\ell)}(\mathcal{R})$. De matrices $D^{(\ell)}(\mathcal{R})$ worden de Wigner D-matrices genoemd. Hoe de matrices er uit zien is onder andere beschreven door Wigner zelf [7]. Een rotatieoperator die op een sferisch harmonische functie werkt ziet er met behulp van deze matrices dus als volgt uit:

$$\mathcal{R} Y_m^\ell = \sum_{m'=-l}^{\ell} D_{mm'}^{(\ell)}(\mathcal{R}) Y_{m'}^\ell$$

De matrixgroep $\left\{ D^{(\ell)}(\mathcal{R}) \middle| R \in \mathrm{SO}(3) \right\}$ is natuurlijk homomorf aan SO(3) en wordt samen met V_ℓ een representatie van SO(3) genoemd. Het blijkt bovendien dat V_ℓ de kleinste ruimte is die gesloten is onder de rotatieoperatoren. Dat wil zeggen, er is geen geen subset $W \subset V_\ell$ zó dat W volledig gesloten is onder de rotatieoperatoren en $W \neq V_\ell$. We noemen V_ℓ met de matrixgroep $\left\{ D^{(\ell)}(\mathcal{R}) \middle| R \in \mathrm{SO}(3) \right\}$ een $(2\ell+1)$-dimensionale irreducibele representatie van SO(3).

In combinatie met eigenschap 1 (basis) kunnen we dus stellen dat de functieruimte $L^2(\mathbb{S}^2)$ te schrijven is als de directe som van irreducibele representaties van SO(3):

$$L^2(\mathbb{S}^2) = V_0 \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots$$

Dit heeft een aantal hele mooie gevolgen, vooral in de context van het lemma van Schur. In het boek van Wigner [7] staat dit lemma als volgt geformuleerd:

Lemma 4.3.1 (Lemma van Schur)**.** *Een matrix die commuteert met alle matrices van een irreducibele representatie is constant (i.e. een veelvoud van de eenheidsmatrix).*

Als we dus een lineaire operator hebben op de ruimte $L^2(\mathbb{S}^2)$ die commuteert met alle rotatieoperatoren, dan is deze op iedere ruimte V_ℓ te schrijven als een veelvoud van de identiteit. Dit kan berekeningen met deze operatoren sterk vereenvoudigen. Het betekent dus ook dat de ruimtes V_ℓ eigenruimtes zijn van de operator en dat de eigenwaarden van de operator van twee sferisch harmonische functies Y_m^ℓ hetzelfde zijn als ze dezelfde index ℓ hebben. We hebben hier al twee voorbeelden van gezien, namelijk de Δ operator en de $\mathscr{L}^2$ operator, waarbij we inderdaad zien dat de eigenwaarden van Y_m^ℓ ten opzichte van deze operatoren alleen afhangt van ℓ.

Hoofdstuk 5

Uitbreiden van sferisch harmonische functies naar vectorfuncties

We hebben in het vorige hoofdstuk gezien dat de sferisch harmonische functies een aantal fijne eigenschappen hebben. Het doel van de rest van dit onderzoek is nu om ook vectorfuncties te vinden met deze eigenschappen. We willen namelijk de spectrale methode ook kunnen gebruiken voor differentiaalvergelijkingen met vectorvelden, zoals bijvoorbeeld in het artikel van Bullard [2]. We willen dus een willekeurig covectorveld v als volgt kunnen schrijven in sferische coördinaten:

$$v = \sum_i v_i(r) T_i(\theta, \phi) \tag{5.1}$$

Hierin is v_i een scalaire functie en zijn T_i de basisfuncties die we zouden willen vinden. Het is mogelijk om de sferisch harmonische functies uit te breiden op zo een manier dat ze een basis vormen voor vectorvelden in $\mathbb{R}^3$ (eigenschap 1 dus), zie bijvoorbeeld het artikel van Barrera [1]. In dit artikel wordt echter ook specifiek in sferische coördinaten gewerkt en worden eigenschap 2 (eigenfunctie) en 3 (irreps.) niet besproken. Het doel is dus om dit om een coördinaatvrije manier te doen en te kijken of we daarbij eigenschap 2 en 3 kunnen behouden.

Net als bij de sferisch harmonische functies zelf zullen we ons eerst beperken tot $\mathbb{S}^2$. Als we een basis vinden voor covectorvelden op $\mathbb{S}^2$, kunnen we namelijk al elk covectorveld dat geen radiale component heeft schrijven als in (5.1). Later zullen we dan nog kijken naar de radiale component. We zullen in de rest van dit hoofdstuk alleen gladde covectorvelden beschouwen (een gladde tensor is een tensor waarvan de componenten ten opzichte van een willekeurig coördinatenstelsel glad zijn). Voor gladde covectorvelden op $\mathbb{S}^2$ gebruiken we de notatie $\Omega^1(\mathbb{S}^2)$ en $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ op $\mathbb{R}^3$ (in het algemeen $\Omega^k(M)$ voor tensorvelden van type $(0,k)$ op M).

5.1 Uitwendig afgeleide van sferisch harmonische functies

We hebben eerder gezien dat de uitwendige afgeleide d van een scalaire functie een covectorveld maakt. We passen de operator d nu toe op de sferisch harmonische functies. Dit geeft ons de covectorvelden $dY_m^\ell : \mathbb{S}^2 \to T^\star\mathbb{S}^2$. We beschouwen de functies waarbij $\ell > 0$, aangezien dY_0^0 overal gelijk is aan nul. Hebben deze functies ook dezelfde eigenschappen die de sferisch harmonische functies ook hebben? We zullen ze één voor één nalopen, te beginnen met eigenschap 2 (eigenfunctie). Hiervoor hebben we het volgende lemma nodig:

Lemma 5.1.1. *Zij K, L twee commuterende lineaire operatoren. Zij E_λ de eigenruimte van L met eigenwaarde λ, dan is K een operator op E_λ. Dat wil zeggen, als $v \in E_\lambda$, dan $Kv \in E_\lambda$.*

Bewijs. Zij $v \in E_\lambda$, dan
$$L(Kv) = K(Lv) = K(\lambda v) = \lambda K v,$$
dus $Kv \in E_\lambda$. □

We hebben in lemma 2.5.1 gezien dat de uitwendige afgeleide d commuteert met de Lie-afgeleide. Aangezien de operatoren $\mathscr{L}_z$ en $\mathscr{L}^2$ opgebouwd zijn uit Lie-afgeleides, geldt dus dat dY_m^ℓ ook een eigenveld is van $\mathscr{L}_z$ met eigenwaarde m en een eigenfunctie van $\mathscr{L}^2$ met eigenwaarde $\ell(\ell+1)$.

We kijken nu naar eigenschap 3 (irreps.). Deze eigenschap geldt ook voor de functies dY_m^ℓ. Dit zullen we laten zien door een vaste rotatieoperator $\mathcal{R}$ te beschouwen als de pullback van de functie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, met $f(x) = R^{-1}x$ (R is de matrix die bij $\mathcal{R}$ hoort). De pullback f^* van een functie g is immers als volgt gedefinieerd: $f^*g = g \circ f$. We kunnen dus schrijven $\mathcal{R}dY_m^\ell = f^*dY_m^\ell$. Van pullbacks weten we dat ze commuteren met de uitwendige afgeleide. We krijgen dus het volgende:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}dY_m^\ell &= f^*(dY_m^\ell) = df^*Y_m^\ell \\ &= d\mathcal{R}Y_m^\ell = d\sum_{m'=-l}^{\ell} D_{mm'}^{(\ell)} Y_{m'}^\ell \\ &= \sum_{m'=-l}^{\ell} D_{mm'}^{(\ell)} dY_{m'}^\ell = \sum_{m'=-l}^{\ell} D_{mm'}^{(\ell)} dY_{m'}^\ell\end{aligned}$$

We zien dus dat eigenschap 3 (irreps.) ook geldt voor de functies dY_m^ℓ. De functieruimtes $V_\ell^d = \operatorname{span}\left\{dY_{-\ell}^\ell, \ldots, dY_\ell^\ell\right\}$ vormen op dezelfde manier als de ruimtes V_ℓ een irreducibele representatie van SO(3).

Ten slotte kijken we naar eigenschap 1 (basis). Het is vrij duidelijk dat deze eigenschap niet geldt voor de functies dY_m^ℓ. Als we namelijk een vectorveld van de vorm $\star dY_m^\ell$ bekijken (we beschouwen $\star$ hier als een operator op $T^\star\mathbb{S}^2$, dus $\star dY_m^\ell : \mathbb{S}^2 \to T^\star\mathbb{S}^2$. Een zorgvuldigere notatie zou wellicht zijn $\star d(Y_m^\ell\big|_{\mathbb{S}^2})$), kunnen we deze niet schrijven met behulp van onze functies dY_m^ℓ. Als we namelijk de operator $\star^{-1}d$ toepassen op de covectorvelden $\star dY_m^\ell$ kijken, krijgen we de volgende formule:
$$\star^{-1}d(\star dY_m^\ell) = \star^{-1}d\star dY_m^\ell = \Delta Y_m^\ell = -\ell(\ell+1)Y_m^\ell$$
Voor de velden dY_m^ℓ krijgen we echter altijd nul als we de operator $\star^{-1}d$ toepassen, aangezien we altijd nul krijgen als we de d operator twee keer achter elkaar toepassen op een tensor. Covectorvelden van de vorm $\star dY_m^\ell$ kunnen we dus nooit als lineaire combinatie van de functies dY_m^ℓ schrijven.

5.2 Tweede type covectorveld met behulp van Hodge-ster

We kiezen de vectorvelden van de vorm $\star dY_m^\ell$ dus als ons tweede type covectorveld. We zullen in dit onderzoek niet bewijzen dat deze twee type functies samen een basis vormen voor de gladde covectorvelden op $\mathbb{S}^2$, maar in bijlage A is geprobeerd een opzet te geven voor het bewijs. In de rest van dit stuk zullen we aannemen dat de covectorvelden dY_m^ℓ en $\star dY_m^\ell$ een basis vormen voor de gladde covectorvelden op $\mathbb{S}^2$.

Eigenschap 2 (eigenfunctie) geldt ook voor de functies $\star dY_m^\ell$, omdat de Hodge-ster commuteert met $\mathscr{L}_z$ en $\mathscr{L}^2$, zoals we gezien hebben in hoofdstuk 3.1.1. Eigenschap 3 (irreps.) geldt ook voor de functies $\star dY_m^\ell$ en is op dezelfde manier te bewijzen als voor de dY_m^ℓ functies, aangezien de Hodge-ster ook commuteert met pullbacks.

Op de eenheidsbol $\mathbb{S}^2$ hebben we nu een set covectorfuncties gevonden die samen dezelfde eigenschappen hebben als de sferisch harmonische functies hebben voor scalaire velden. We kunnen bovendien het volgende zeggen:

$$\Omega^1(\mathbb{S}^2) \subset V_1^d \oplus V_1^{\star d} \oplus V_2^d \oplus V_2^{\star d} \oplus \dots$$

Hierin is $V_\ell^{\star d} = \operatorname{span}\left\{\star dY_{-\ell}^\ell, \dots, \star dY_\ell^\ell\right\}$. We schrijven hier een inclusie, omdat het wellicht ook mogelijk is om bepaalde niet continue covectorvelden te schrijven als lineaire combinatie van de basisfuncties. Voor de covectorvelden op de bol $\mathbb{S}^2$ is dus ook een basis te vinden van irreducibele representaties van de SO(3) groep. We hebben nu alleen niet meer dat de eigenwaarden van de operatoren $\mathscr{L}_z$ en $\mathscr{L}^2$ volledig specificeren over welke basisfunctie we het hebben, zoals het geval was in hoofdstuk 4.2. De functies dY_m^ℓ en $\star dY_m^\ell$ hebben namelijk dezelfde eigenwaarden ten opzichte van deze operatoren.

5.3 Uitbreiden van covectorveld op $\mathbb{S}^2$ naar $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$

We zullen nu net als in hoofdstuk 4.1 de vectorfuncties uitbreiden naar $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. We zullen ons hier uitsluitend bezighouden met coördinaatsystemen van de vorm r, x^1, x^2, waarbij x^1 en x^2 constant blijven als we in een rechte lijn van het middelpunt weg bewegen.

Gegeven een coördinaatsysteem x^1, x^2 op de eenheidsbol en r als in hoofdstuk 3. We zien r, x^1, x^2 nu als een coördinatensysteem op $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Stel x^1, x^2 zijn de coördinaten van het punt p in $\mathbb{S}^2$ dan zijn r, x^1, x^2 de coordinaten van het punt p geschaald met r, na inclusie van p in $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ (dus $p' = r\iota(p)$, waarin ι de inclusie $\iota : \mathbb{S}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ is).

We breiden nu de functies $dY_m^\ell|_{\mathbb{S}^2}$ uit naar $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Neem het covectorveld $dY_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}$ zó dat $\left(dY_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}\right)_i(r, x^1, x^2) = \left(dY_m^\ell|_{\mathbb{S}^2}\right)_i(x^1, x^2)$ voor $i = 1, 2$, waarin we met $\left(dY_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}\right)_i(r, x^1, x^2)$ de component die bij dx^i hoort bedoelen, in het punt r, x^1, x^2, van het covectorveld $dY_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}$. De component van $dY_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}(r, x^1, x^2)$ die bij dr hoort is nul. Op deze manier geldt dat $(dY_m^\ell)|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}} = d(Y_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}})$, waarin met de linkerkant van de vergelijking het covectorveld bedoeld wordt zoals we hem net hebben gedefinieerd en de rechterkant de uitwendig afgeleide is van $Y_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}$ zoals we die gedefineerd hebben in hoofdstuk 4.1.

We doen hetzelfde voor de functies $\star dY_m^\ell$, maar we maken nu expliciet onderscheid tussen $(\star dY_m^\ell)|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}$ en $\star d(Y_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}})$. Met de eerste bedoelen we de uitbreiding van $\star dY_m^\ell|_{\mathbb{S}^2}$ op dezelfde manier als in de alinea hiervoor en met de tweede bedoelen we de operator $\star d$ toegepast op de functie $Y_m^\ell|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}$ zoals die gedefinieerd is in hoofdstuk 4.1. Deze twee zijn namelijk niet hetzelfde! De eerste is een covectorveld, dus een tensor van type (0,1), de tweede is een tensor van type (0,2), de operator $\star d$ maakt namelijk van een scalair veld een type (0,2) tensor als de dimensie $n = 3$. We zien hier ook meteen de noodzaak van de constructie die we in de alinea hiervoor hebben gebruikt.

Helaas betekent dit ook dat we voor $(\star dY_m^\ell)|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}$ geen mooie uitdrukking hebben in de vorm van tensoren en tensoroperatoren op $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ en dat in coördinatensystemen die niet van de vorm r, x^1, x^2 zijn, de functie er waarschijnlijk minder mooi uitziet. Het doel van de uitbreiding naar covectorvelden op $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ is echter om covectorvelden in de vorm van (5.2) te schrijven, waarin r hetzelfde is gedefinieerd als hier. We zullen hier in de praktijk dus weinig last van hebben. Het is bovendien ook nog mogelijk om r te vervangen voor een willekeurige continue monotone functie van r, zoals bijvoorbeeld r^2 of $1/r$. Er is dus nog steeds een redelijk grote mate van vrijheid bij het kiezen van het coördinaatsysteem.

In het vervolg zullen we met dY_m^ℓ het covectorveld $(dY_m^\ell)|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}$ bedoelen, en met $\star dY_m^\ell$ het covectorveld $(\star dY_m^\ell)|_{\mathbb{R}^3\backslash\{0\}}$ als we het over 3-dimensionale ruimtes hebben. Als we in een coördinatensysteem van de vorm r, x^1, x^2 werken, zoals hierboven hangen decomponenten van

dY^ℓ_m en $\star dY^\ell_m$ niet af van r en zullen we dus in sommige gevallen bijvoorbeeld $dY^\ell_m(\theta,\phi)$ en $\star dY^\ell_m(\theta,\phi)$ schrijven in plaats van $dY^\ell_m(r,\theta,\phi)$ en $\star dY^\ell_m(r,\theta,\phi)$.

5.4 Derde type covectorveld met behulp van dr

We hebben nu de stap gemaakt naar covectorvelden op $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Aangezien we een basis hebben voor gladde vectorvelden op de eenheidsbol kunnen we elk covectorveld α zonder radiale component op de volgende manier schrijven:

$$\alpha(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell,m} \alpha^d_{\ell m}(r)\, dY^\ell_m(\theta,\phi) + \alpha^{\star d}_{\ell m}(r) \star dY^\ell_m(\theta,\phi).$$

Hierin zijn dY^ℓ_m en $\star dY^\ell_m$ dus uitgebreid naar $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. We sommeren hier weer alleen over $\ell > 0$. Als we een derde type basisfunctie nemen die er in sferische coördinaten zo uit ziet: $Y^\ell_m dr$, dan kunnen we elk (glad) covectorveld α in de volgende vorm schrijven:

$$\alpha(r,\theta,\phi) = \sum_{\ell,m} \alpha^d_{\ell m}(r) dY^\ell_m(\theta,\phi) + \alpha^{\star d}_{\ell m}(r) \star dY^\ell_m(\theta,\phi) + \alpha^{dr}_{\ell m}(r) Y^\ell_m(\theta,\phi) dr. \tag{5.2}$$

We maken hier een klein beetje misbruik van de notatie, voor de eerste twee termen sommeren we namelijk over $\ell > 0$, terwijl we bij de laatste term ook $\ell = 0$ mee moeten nemen. Dit is de vorm waarin vectorvelden uiteindelijk ook worden geschreven in de artikelen van Barrera [1] en Bullard [2]. De vraag is nu of we $Y^\ell_m dr$ ook op een coordinaatvrije manier kunnen schrijven, de dr is immers in sferische coördinaten geschreven.

In hoofdstuk 3 hebben we de afstand tot het middelpunt r gedefinieerd. Deze notatie is natuurlijk niet toevallig, want als we de uitwendige afgeleide van r in sferische coördinaten bekijken krijgen we $d(r) = dr$, waarin de linkerkant de uitwendige afgeleide is van r en rechts de eerste basis covector is in sferische coördinaten. We hebben nu dus een manier gevonden om een coördinaatvrije betekenis te geven aan het covectorveld dr, dat in eerste instantie sterk geïnspireerd leek door het sferische coördinatenstelsel. Het blijkt dat het in een systeem waarin we met draaisymmetriën te maken hebben best natuurlijk is om één van de coordinaatfuncties de afstand tot het middelpunt te laten beschrijven en waarbij we een boloppervlak krijgen als we de eerste coördinaat constant houden.

We hebben nu onze derde set basisfuncties $Y^\ell_m dr$ gedefiniëerd. Voor deze functies is het duidelijk dat eigenschap 3 (irreps.) geldt en zelfs een sterkere eis dan dat, de functies veranderen namelijk niet onder rotatieoperatoren. De rotaties zijn immers isometrieën van de standaard metriek die we gebruikt hebben voor de definitie van r. Dat wil zeggen $\mathrm{dist}(Rx, Ry) = \mathrm{dist}(x, y)$ als $x, y \in \mathbb{R}^3$ en $R \in \mathrm{SO}(3)$. Hieruit volgt dus het volgende:

$$\mathcal{R} Y^\ell_m dr(x) = Y^\ell_m(R^{-1}x) dr(R^{-1}x) = \sum_{m'=-l}^{\ell} D^{(\ell)}_{mm'}(\mathcal{R}) Y^\ell_{m'}(x) dr(x)$$

Eigenschap 2 (eigenfunctie) geldt ook voor de functies $Y^\ell_m dr$. We bekijken eerst $\mathscr{L}_z$:

$$\mathscr{L}_z(Y^\ell_m dr) = \mathscr{L}_z(Y^\ell_m) dr + Y^\ell_m d\mathscr{L}_z(r) = im Y^\ell_m dr$$

Voor $\mathscr{L}^2$ geldt hetzelfde, we kunnen dr namelijk op dezelfde manier uit de Lie-afgeleide halen als bij $\mathscr{L}_z$.

5.5 Covectorvelden omzetten naar vectorvelden

Nu dat we onze basis hebben gevonden voor covectorvelden is het nog zaak om ze om te zetten in vectorvelden. In hoofdstuk 2.3 hebben we gezien dat de metriek ons de zogenaamde *raising operator* geeft. De vraag is nu of deze operator nog enige invloed heeft op de eigenschappen van de basisfuncties die we hebben gevonden.

We bekijken eerst eigenschap 1 (basis). Aangezien de raising operator een 1-op-1 correspondentie geeft tussen covectorvelden en vectorvelden kunnen we simpelweg voor een vectorveld v een basis vinden voor het bijbehorende covectorveld $\flat v$ en dit vervolgens weer omzetten naar een vectorveld. Eigenschap 1 blijft dus behouden.

Bij eigenschap 2 (eigenfunctie) kunnen we gebruik maken van het feit dat een Lie-afgeleide $\mathscr{L}_X$ commuteert met de raising operator als $\mathscr{L}_X g = 0$. Een bewijs hiervoor is te vinden in bijlage B. Op dezelfde manier als bij de Hodge-ster zijn de operatoren $\mathscr{L}_z$ en $\mathscr{L}^2$ opgebouwd uit Lie-afgeleides die hier aan voldoen en commuteren ze dus met de $\sharp$ operator.

Eigenschap 3 (irreps.) laten we zien met behulp van de volgende berekening:

$$\mathcal{R}\left(\sharp T^\ell_m(x)\right) = \sharp T^\ell_m(R^{-1}x) = \sharp(\sum_{m=-\ell}^{\ell} D^{(\ell)}_{mm'}(\mathcal{R})T^\ell_{m'}(x)) = \sum_{m=-\ell}^{\ell} D^{(\ell)}_{mm'}(\mathcal{R})\sharp T^\ell_{m'}(x)).$$

Susbstitueer hier voor T één van de basisfuncties.

Hoofdstuk 6

Conclusie

6.1 Samenvatting van de belangrijkste concrete resultaten

In dit onderzoek hebben we basisfuncties gevonden voor covectorvelden op de eenheidsbol $\mathbb{S}^2$. De basisfuncties zijn van de vorm dY^l_m en $\star dY^l_m$. Met behulp van de raising operator kunnen we de functies omzetten in vectorvelden om zo ook een basis te vormen voor vectorvelden op $\mathbb{S}^2$. De functies zijn volledig in tensorvorm opgesteld en zijn dus uit te drukken in ieder coördinatenstelsel. Als we deze covectorfuncties uitbreiden naar covectorfuncties op $\mathbb{R}^3$ en we ook een derde type functie toevoegen van de vorm $Y^l_m dr$ is het mogelijk (onder voorbehoud dat de functies dY^ℓ_m en $\star dY^\ell_m$ de ruimte gladde covectorvelden op $\mathbb{S}^2$ opspannen) om elk glad covectorveld in de vorm van (5.2) te schrijven. Met behulp van de raising operator kunnen we deze functies vervolgens omzetten in vectorfuncties om ook vectorfuncties in de volgende vorm te schrijven:

$$F(r, \phi, \theta) = \sum_i F_i(r) T_i(\phi, \theta). \tag{6.1}$$

Hier zijn de basisfuncties T_i dus in de vorm $\sharp dY^\ell_m, \sharp \star dY^\ell_m$ en $\sharp Y^\ell_m dr$ (let op: we beschouwen Y^ℓ_m hier als een functie op $\mathbb{S}^2$ en gebruiken dus de Hodge-ster op een 2-dimensionale ruimte).

6.2 Reflectie

Dat het mogelijk is om vectorvelden als in (6.1) te schrijven, is in principe niets nieuws, het wordt bijvoorbeeld ook gedaan in de artikelen van Barrera [1] en Bullard [2], maar het is ook gelukt om de vectorvelden T_i op een coördinaatvrije manier op te stellen. Het is mogelijk om in plaats van ϕ en θ elk mogelijk coördinatensysteem voor de eenheidsbol te gebruiken. Samen met r vormt dit dan een coördinatesysteem voor $\mathbb{R}^3$. In de artikels van Barrera [1] en Bullard [2] wordt de keuze van basisfuncties namelijk niet echt gemotiveerd of lijkt de keuze van basisfuncties sterk geïnspireerd door het gebruikte (sferische) coördinatenstelsel. Bij het opstellen van deze coördinaatafhankelijke basisfuncties worden bovendien een aantal interessante eigenschappen van de sferisch harmonische functies niet in beschouwing genomen. Met behulp van een aantal begrippen en operatoren uit de tensorrekening, met als meest benoemenswaardig de uitwendige afgeleide en de Hodge-ster, is het gelukt de basis volledig in termen van tensoren en tensoroperatoren te schrijven. Dit maakt het mogelijk om bij het rekenen met deze basisfuncties op elk moment te wisselen tussen verschillende coördinaatsystemen voor de sferische component. Verder hebben we gezien dat de eigenschappen die de sferisch harmonische functies hebben ten opzichte van draaisymmetrieën die beschreven worden in hoofdstuk 4.2 en 4.3 op deze manier behouden blijven voor de vectorfuncties.

We hebben in dit onderzoek veel gebruik gemaakt van twee takken van wiskunde die in de natuurkunde vaak niet samen gebruikt worden. De theorie over groepen en irreducibele representaties, zoals we die vooral uit het boek van Wigner [7] hebben gebruikt wordt vooral gebruikt in de quantummechanica, terwijl de theorie over differentiaalmeetkunde en tensoren, zoals we vooral uit het boek van Dubrovin [3] hebben gebruikt, vooral toegepast wordt in de relativiteitstheorie. Het blijkt dus dat deze twee deelgebieden van de wiskunde te combineren zijn en vervolgens toegepast kunnen worden op een probleem in de klassieke fysica, zoals het aardmagnetisch veld.

6.3 Inventarisatie van nieuwe onderzoeksvragen

Tijdens dit onderzoek zijn we tegen een aantal dingen aangelopen.

In hoofdstuk 2.1 definiëren we de raakruimte met behulp van snelheidsvectoren van krommen door de ruimte. Vervolgens breiden we deze ruimte uit naar een comlexe ruimte door toe te staan dat we met complexe scalairen vermenigvuldigen. Bij de onderliggende ruimte staan we dat echter niet toe, we werken nog steeds op $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Hierdoor verliezen we de connectie tussen raakvectoren en gladde krommen door de ruimte. Niet elke vector is meer te schrijven als de afgeleide van een gladde kromme en omgekeerd, vectorvelden geven niet altijd meer de oorsprong aan krommen door de ruimte in de vorm van een flow. Natuurkundig gezien is het natuurlijk überhaubt gek om het te hebben over functies of vectorvelden met complexe waarden, maar dit is iets wat we vaker tegenkomen bij differentiaalvergelijkingen: we werken vaak met complexe functies en gebruiken dan dat zowel het reële als het imaginaire deel van de complexe oplossing oplossingen zijn voor het probleem. Op deze manier eindigen we toch weer met reële functies die we dus kunnen interpreteren als fysieke grootheden. Het is soms ook mogelijk om alleen met de reële functies te werken, zoals bijvoorbeeld de sinus en de cosinus, zonder te gebruiken dat deze functies het reële en complexe deel zijn van de comlexe exponentiële functie. Dat was hier ook een mogelijkheid geweest. Het zou wellicht interessant zijn om te kijken wat voor invloed dit heeft op de eigenschappen van de functies.

In dit onderzoek zijn de twee eigenschappen van de sferisch harmonische functies die we beschreven hebben in hoofdstuk 4.2 (eigenfunctie) en 4.3 (irreps.) als losstaande eigenschappen behandeld en zijn voor de (co)vectorfuncties telkens los bewezen. De eigenschappen zijn echter sterk aan elkaar gerelateerd. Wellicht zou het interessant zijn om de connectie tussen deze twee eigenschappen beter te bestuderen. We weten immers dat de vectorvelden die we gebruiken om de operatoren $\mathscr{L}_z$ en $\mathscr{L}^2$ te definiëren de rotaties genereren. Is het misschien zo dat de ene eigenschap de andere impliceert?

Een gat in dit artikel is natuurlijk dat we niet volledig bewezen hebben dat de eerste twee basisfuncties die we gevonden hebben de ruimte $\Omega^1(\mathbb{S}^2)$ opspannen. In bijlage A is een opzet voor het bewijs te zien, er mist hier echter nog wel een stap. Het is waarschijnlijk mogelijk om dit bewijs compleet te maken met behulp van zogenaanmde *de Rham cohomologieën*.

Verder hebben we ook niet gekeken naar welke ruimte de basisfunctie precies opspannen. We hebben het nu vooral gehad over gladde covectorvelden en dat is voor alle praktische toepassingen waarschijnlijk voldoende, maar de functies Y_m^ℓ zijn compleet op $L^2(\mathbb{S}^2)$, een ruimte die niet alleen de gladde functies op $\mathbb{S}^2$ bevat, maar zelfs nog groter is. Waarschijnlijk is de ruimte die onze functies opspannen dus ook groter dan alleen de gladde covectorvelden. Het zou wellicht interessant zijn om precies uit te zoeken wat deze ruimte precies is.Bovendien hebben we op een korte vermelding in hoofdstuk 4.1 na, geen aandacht besteed aan op welke manier de reeksen convergeren. Is dit net als in hoofdstuk 4.1 convergentie ten opzichte van de L^2 norm? Is het misschien mogelijk om bij bijvoorbeeld gladde functies zelfs uniforme convergentie te hebben? Voor deze vragen zullen we ons verder in de functionaalanalyse moeten verdiepen.

Bij het opstellen van een basis voor covectorvelden op $\mathbb{S}^2$ hebben we gezien dat de basisfuncties nog steeds een irreducibele representatie vormen voor SO(3), maar dat elke representatie met index ℓ (en dimensie $2\ell+1$) twee keer voorkomt, éénmaal bij de basisfuncties van de vorm dY_m^ℓ en éénmaal bij de basisfuncties van de vorm $\star dY_m^\ell$. We hebben ook opgemerkt dat dit betekent dat de eigenwaarden ten opzichte van de operatoren $\mathscr{L}_z$ en $\mathscr{L}^2$ dus niet meer precies specificeren over welke basisfunctie het gaat, wat wel het geval was bij de scalaire velden. Dit zou misschien invloed kunnen hebben op het rekenen met de basisfunctie. Wellicht is het interessant om een derde operator te vinden die onderscheidt maakt tussen dY_m^ℓ en $\star dY_m^\ell$ en daarmee ook een derde index toe te voegen aan de functies.

Bij het maken van de stap van covector functies op $\mathbb{S}^2$ naar covectorfuncties op $\mathbb{R}^3$, liepen we er tegen aan dat het niet meer mogelijk was om de tweede covectorfunctie te schrijven met behulp van de Hodge-ster in de 3-dimensionale ruimte $\mathbb{R}^3$. We hadden voor deze uitbreiding namelijk de constructie nodig die we in hoofdstuk 5.3 hebben beschreven. Dit heeft waarschijnlijk te maken met de vorm waarin we de vectorvelden probeerden te beschrijven, dit was namelijk de vorm van vergelijking (5.2). We zien de r component van de coördinaat los van de sferische componenten en proberen als het ware voor elke losse r een ontbinding te vinden van het veld als we dat beperken tot een bol met straal r, waarbij het dan nog wel mogelijk is dat het vectorveld een radiale component heeft. In deze opstelling is het opzich niet gek dat de coördinaat r een andere rol heeft dan de andere twee componenten. Het feit dat in een rotatiesymmetrisch domein de radiale component r losstaat van de andere twee is waarschijnlijk juist de kracht van deze spectrale methode. De r component blijft immers behouden onder rotaties. Aangezien we op de bol de vectorvelden allemaal wel met behulp van tensoroperatoren hebben gedefinieerd, kunnen we wel makkelijk wisselen tussen coördinaatsystemen die het sferische deel anders coördinatiseren. Ook zouden we de component r kunnen vervangen door een willekeurige (continue monotone) functie van r, om bijvoorbeeld te zorgen dat de standaardbasis op ieder punt orthonormaal is. Het zou wellicht interessant zijn om deze constructie ook te proberen voor andere coördinatenstelsel waarin we één van de coördinaten een aparte rol geven, bijvoorbeeld in de aanwezigheid van andere groepen dan de rotatiegroep.

Ten slotte zou het misschien nog interessant zijn om de vectorfuncties die we in dit onderzoek hebben gevonden te vergelijken met de vectorfuncties die gebruikt worden in de artikelen van Barrera [1] en Bullard [2]. Zijn de functies die we hebben gevonden dezelfde als die zij gebruiken, maar hebben wij ze in een coördinaatvrije manier weten te definiëren, of zijn de functies echt anders? In dat geval zou het misschien ook interessant zijn om het onderzoek van Bullard over te doen met onze functies en te kijken of dit tot nieuwe inzichten leidt.

Bijlage A

Motivatie voor aanname dat basisfuncties $\Omega^1(\mathbb{S}^2)$ opspannen

In deze bijlage zullen we een begin maken met bewijzen dat de twee type basisfuncties dY_m^ℓ en $\star dY_m^\ell$ de ruimte $\Omega(\mathbb{S}^2)$ opspannen. In het bewijs ontbreekt één stap.

In hoofdstuk 2.7 hebben we al laten zien hoe je de Laplace operator kunnen generaliseren naar scalaire funties op een willekeurige ruimte, maar we willen de operator nu nogmaals generaliseren zo dat deze ook gedefinieerd is voor tensoren van type $(0,k)$. We gebruiken hiervoor de operator $\delta : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$, gedefinieerd als $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star$, met n de dimensie van de ruimte. Voor $n = 2$ en $p = 2$ geldt dus $\delta = -\star d\star$. We definiëren de gegeneraliseerde laplace operator dan als volgt: $\Delta = d\delta + \delta d$. Deze operator wordt ook wel de Laplace-de Rham operator genoemd.

We gebruiken het *Hodge decomposition theorem* uit het boek van Warner [6, p.223]. Deze stelling zegt dat elke $\omega \in \Omega^1(\mathbb{S}^2)$ te schrijven is als $\omega = d\alpha + \delta\beta + \gamma$, waarin $\alpha \in \Omega^0(\mathbb{S}^2)$, $\beta \in \Omega^2(\mathbb{S}^2)$ en $\gamma \in \Omega^1(\mathbb{S}^2)$, met $\Delta\gamma = 0$.

Wat we niet zullen bewijzen, maar waarvan ik een sterk vermoeden heb dat het klopt is dat de enige $\gamma \in \Omega^1(\mathbb{S}^2)$ die voldoet aan $\Delta\gamma = 0$ de nul tensor is. Dit zou betekenen dat we kunnen schrijven $\omega = d\alpha + \delta\beta$. Dit is waarschijnlijk te bewijzen met behulp van zogenaamde *de Rham cohomologieën*. Deze theorie zegt namelijk iets over het aantal cotensors dat aan de vergelijking $\Delta\gamma = 0$ voldoet. Zie bijvoorbeeld stelling 6.11 in het boek Warner [6, p.225].

We schrijven het covectorveld ω dus in de vorm $\omega = d\alpha - \star d \star \beta$. We bekijken nu $\star\beta$. Dit is een scalair veld omdat de Hodge-ster van een type (0,2) tensor een type (0,0) tensor maakt. We schrijven nu $\tilde{\beta} = -\star\beta \in \Omega^0(\mathbb{S}^2)$. Vervolgens schrijven we $\alpha = \sum_{\ell,m} \alpha_{\ell m} Y_m^\ell$ en $\tilde{\beta} = \sum_{\ell,m} \tilde{\beta}_{\ell m} Y_m^\ell$, we weten immers dat span $\left\{Y_m^\ell\right\} \supset \Omega^0(\mathbb{S}^2)$. Dan geldt

$$\omega = d\left(\sum_{\ell m} \alpha_{\ell m} Y_m^\ell\right) + \star d\left(\sum_{\ell m} \tilde{\beta}_{\ell m} Y_m^\ell\right) = \sum_{\ell,m} \alpha_{\ell,m} dY_m^\ell + \sum_{\ell,m} \tilde{\beta}_{\ell,m} \star dY_m^\ell.$$

We sommeren hier over $\ell > 0$, aangezien $dY_0^0 = 0$.

Bijlage B

Commutatie raising operator en Lie-afgeleide langs killing-vectorveld

In deze bijlage zal het volgende lemma bewezen worden:

Lemma B.0.1. *Gegeven de metriek g en coördinaten $x^1, \ldots, x^n$. Als $\mathscr{L}_X g = 0$, voor een vectorveld X, dan $\mathscr{L}_X \sharp = \sharp \mathscr{L}_X$.*

Bewijs. Zij $\alpha = \alpha_i dx^i$ een covectorveld. Eerst bekijken we $\mathscr{L}_X g$:

$$(\mathscr{L}_X g)^{ki} = X^s \frac{\partial g^{ki}}{\partial x^s} - g^{ks} \frac{\partial X^i}{\partial x^s} - g^{si} \frac{\partial X^k}{\partial x^s} = 0. \tag{B.1}$$

Nu bekijken we $\mathscr{L}_X \sharp$:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_X(\sharp\alpha) &= X^s \frac{\partial}{\partial x^s}(g^{ki}\alpha_k) - (g^{ks}\alpha_k)\frac{\partial X^i}{\partial x^s} \\
&= X^s \frac{\partial g^{ki}}{\partial x^s}\alpha_k + X^s \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^s} g^{ki} - g^{ks}\alpha_k \frac{\partial X^i}{\partial x^s} \\
&= X^s g^{ki} \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^s} + g^{si}\alpha_k \frac{\partial X^k}{\partial x^s} \qquad \text{(B.2)} \\
&= g^{ki}(X^s \frac{\partial \alpha_k}{\partial x^s} + \alpha_s \frac{\partial X^s}{\partial x^k}) = \sharp \mathscr{L}_X(\alpha) \qquad \text{(B.3)}
\end{aligned}$$

We hebben hier voor (B.2) vergelijking (B.1) gebruikt en voor (B.3) gebruikt dat we zowel over s als over k sommeren en de namen van de indices dus kunnen omdraaien. $\square$

Bibliografie

[1] R G Barrera, G A Estevez, and J Giraldo. Vector spherical harmonics and their application to magnetostatics. *European Journal of Physics*, 6(4):287–294, 1985.

[2] Edward Bullard and H Gellman. HOMOGENEOUS DYNAMOS AND TERRESTRIAL MAGNETISM National Physical Laboratory and University of Toronto. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 247(928):213–278, 1954.

[3] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, and S.P. Novikov. *Modern Geometry - Methods and Applications Part I. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups, and Fields*. 1984.

[4] Jürgen Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Cham: Springer International Publishing, 7th ed. 20 edition.

[5] Ramses van der Toorn. Elementary properties of non-Linear Rossby-Haurwitz planetary waves revisited in terms of the underlying spherical symmetry. *AIMS Mathematics*, 4(2):279–298, 2019.

[6] Frank W Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, volume 94. New York, NY: Springer, 2013.

[7] Eugene Paul 1902-1995. Wigner and J J Griffin. *Group theory and its application to the quantum mechanics of atomic spectra LK - https://tudelft.on.worldcat.org/oclc/475039*. Academic Press, New York SE - 372 pages : illustrations ; 24 cm., expanded a edition, 1959.