

1924-K



Technische Universiteit Delft

FACULTEIT 3mE

MARITIEME TECHNIEK

mt-mi-105-14

Introductie Minor Zeiljachten

Dr. Ir. J. A. Keuning

DELFT 2014

INHOUDSOPGAVE

1. Hydrostatica
2. Beschrijving geometrie
3. Numerieke integratie
4. Stabiliteit
5. Weerstand
6. Voortstuwing
7. Comparologie in de maritieme techniek

1. HYDROSTATICA

De hydrostatica is een deel van de hydromechanica, dat is de wetenschap van de evenwichts- en de bewegingsvergelijkingen van vloeistoffen en van de wisselwerking tussen deze vloeistoffen en vaste lichamen.

De hydrostatica behandelt het deel waarbij de vloeistoffen en lichamen zich in een toestand van relatieve rust bevinden. Onder vloeistoffen verstaat men stoffen die grote weerstand bieden tegen samendrukkende krachten maar die daarentegen vrijwel geen weerstand hebben tegen trekkrachten en zeer langzame vormveranderingen.

In de gebruikelijke beschouwingen van de hydrodynamica worden vloeistoffen over het algemeen **homogeen** en **onsamendrukbaar** verondersteld.

Homogeen wil zeggen dat de soortelijke massa, dat is de massa van de vloeistof per eenheid van volume, niet afhankelijk is van de plaats in de vloeistof.

Onsamendrukbaar betekent dat er geen volume verandering optreedt ten gevolge van een drukverandering in de vloeistof. Bovendien wordt aangenomen dat de uitzetting van water ten gevolge van een temperatuurverandering eveneens verwaarloosd mag worden. Door deze aannamen worden de hydrostatische berekeningen aanzienlijk vereenvoudigd.

Om te verklaren waardoor een lichaam nu precies blijft drijven in de vloeistof, is het noodzakelijk een korte introductie te geven in de hydrostatica.

Uit de evenwichtsbeschouwing volgt dat een lichaam blijft drijven als er door de vloeistof een reactiekracht opgewekt wordt welke het gewicht van het lichaam compenseert.

Krachten door vloeistoffen op lichamen uitgeoefend zijn in het algemeen te beschouwen als drukken werkend op een oppervlak.

Wat kunnen we over de druk in een vloeistof zeggen?

Daartoe kijken we eerst naar de belangrijke wet van Pascal, welke stelt dat:

WET VAN PASCAL

"De druk in een bepaald punt van de vloeistof hangt niet af van de richting van het vlak waarop deze druk werkt"

Dit betekent dat in een willekeurig punt van de vloeistof de druk alzijdig even groot is. Dit impliceert dat als de druk in een bepaald punt van de vloeistof bekend is, de kracht op een vlak met willekeurige oriëntatie in dat punt te berekenen valt.

Hoe groot is nu die druk in een in rust verkerende vloeistof?

In een vloeistof heerst in het algemeen in elk punt een andere druk. Bij homogene en onsamendrukbare vloeistoffen die in rust verkeren, heerst onder invloed van de zwaartekracht over de verticaal een druk welke lineair afhankelijk is van de afstand tot het vrije vloeistof oppervlak: **de hydrostatische druk**.

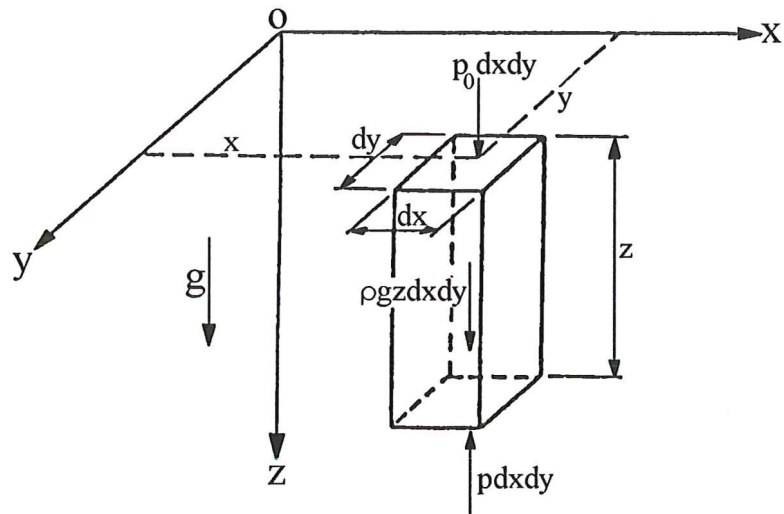
We bewijzen dat de hydrostatische druk lineair met de diepte toeneemt.

In de figuur is het assenstelsel zodanig gekozen dat het vlak Oxy in het vrije vloeistof oppervlak gelegen is.

Aan het oppervlak werkt de atmosferische druk p_0 .

Beschouw een vloeistof zuiltje met een hoogte z en een doorsnede $dx dy$. De druk in het punt (x,y,z) is p .

De verticale kracht omhoog is: $p \cdot dx dy$



Het verticale evenwicht van het zuiltje vereist nu dat de som van de verticale krachten gelijk is aan nul. Dus:

$$p_0 \cdot dx dy + \rho g z \cdot dx dy = p \cdot dx dy$$

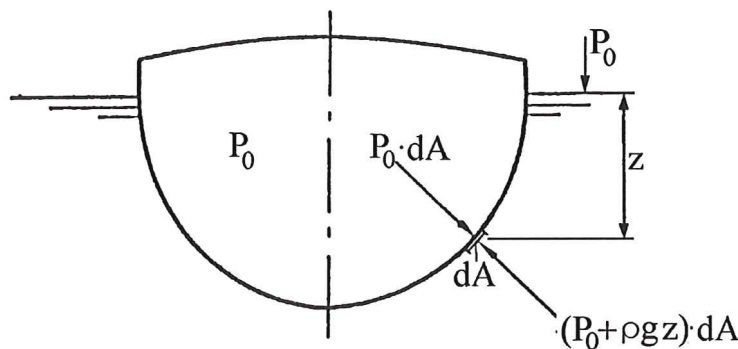
Hieruit volgt:

$$p = p_0 + \rho g z$$

De druk in het punt (x,y,z) is klaarblijkelijk samengesteld uit de atmosferische druk p_0 , welke aan het oppervlak heerst en $\rho g z$, welke deel veroorzaakt wordt door de zwaartekracht.

Dit laatste deel neemt inderdaad lineair toe met de diepte.

(dwz als z tweemaal zo groot wordt dan wordt de druk tweemaal zo groot).

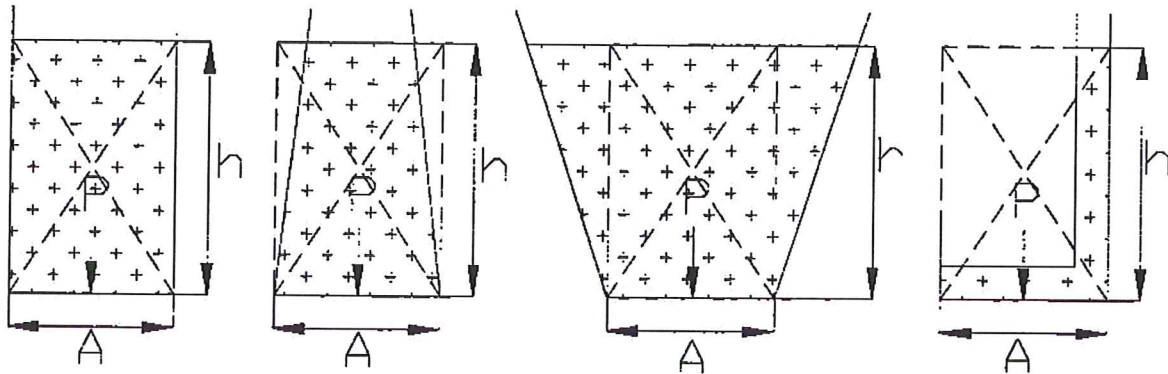


In het algemeen is alleen de overdruk van belang, immers aan de binnenzijde en de buitenzijde van bijvoorbeeld een scheepsromp is allebei p_0 "aanwezig". De krachten die het gevolg zijn van p_0 heffen elkaar dus op.

In het algemeen geldt dus voor de hydrostatische druk: $p = \rho g z$

Uit de combinatie van de wet van Pascal en de formulering voor de hydrostatische druk, volgt dat de drukkracht die bijvoorbeeld op de bodem van een tank wordt uitgeoefend onafhankelijk is van de vorm van de tank, doch alleen van de hoogte van de vloeistofkolom boven de bodem van de tank.

Dit noemt men de Hydrostatische Paradox.



In de bovenstaande voorbeelden is de druk op de bodem van de tank gelijk. De kracht op de bodem is gelijk omdat het oppervlak van de bodem gelijk is.

$$\text{kracht} = \text{druk} \times \text{oppervlak}$$

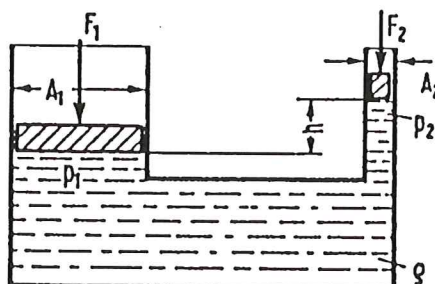
Zo kunnen bijvoorbeeld op de wanden van een tank grote krachten uitgeoefend worden door de stijghoogte van de vloeistof in een stand- of overlooppijp.

De Paradox geeft aanleiding tot de volgende uitspraken:

- verschillende hoeveelheden vloeistof kunnen één en dezelfde druk veroorzaken;
- de op de bodem van een vat of tank werkende kracht kan groter zijn dan het gewicht van de hoeveelheid vloeistof die zich boven de bodem bevindt;
- de werklijn van de drukkracht op de bodem gaat steeds door het zwaartepunt van de vloeistofzuil boven het oppervlak ongeacht of deze zuil daadwerkelijk aanwezig is of niet.

Bekende voorbeelden van werktuigen, welke gebaseerd zijn op de hydrostatische druk en de wet van Pascal zijn ondermeer:

Voorbeeld 1



De hydraulische pers. Deze bestaat uit twee door een slang of pijp doorverbonden cilinders met een sterk verschillend doorsnede oppervlak, resp. A_1 en A_2 . Er geldt nu dat:

$$p_1 = \frac{F_1}{A_1} \quad p_2 = \frac{F_2}{A_2}$$

In de vloeistof moet nu gelden dat:

$$p_2 = p_1 - \rho gh \rightarrow \frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} - \rho gh$$

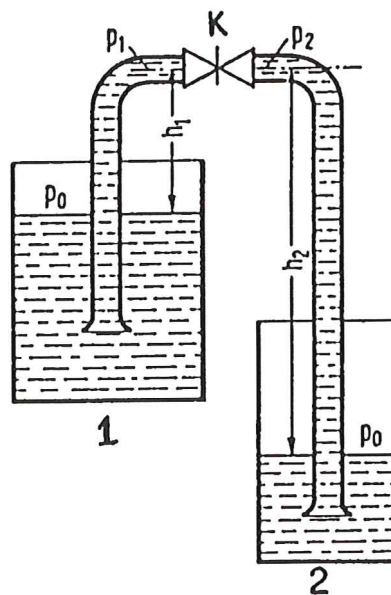
Bij praktische toepassingen van de hydraulische cilinder is bijna altijd Δgh velen malen kleiner dan de druk F_1/A_1 , zodat deze term in de vergelijking verwaarloosd mag worden.

Er geldt dan dat:

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1} \rightarrow \frac{F_2}{F_1} = \frac{A_2}{A_1}$$

Daar A_2 veel kleiner gekozen is dan A_1 , is ook de kracht F_2 veel kleiner dan F_1 . Dit betekent dat met een veel kleinere kracht F_2 een aanzienlijk grotere kracht F_1 ontwikkeld kan worden. De verplaatsing van de zuiger A_2 zal echter veel groter moeten zijn dan die van A_1 omdat het volume vloeistof dat verplaatst wordt door A_1 gelijk is aan dat verplaatst door A_2 . Het veel grotere oppervlak van A_1 maakt derhalve slechts een kleine verplaatsing mogelijk. Hierdoor wordt praktisch gesproken de overbrengingsverhouding van zulk een eenvoudig werktuig beperkt.

Voorbeeld 2



De hydraulische hevel. Twee afzonderlijke vaten zijn gevuld met vloeistof. De vloeistof heeft in beide vaten een verschillende vloeistofhoogte. De vaten zijn door middel van een geheel met vloeistof gevulde pijp met elkaar verbonden. In het hoogste punt van de pijp zit een kraan.

Links van de kraan heerst de druk: $p_1 = p_0 - \rho gh_1$

en rechts van de kraan heerst de druk: $p_2 = p_0 - \rho gh_2$

Daar $h_1 < h_2$ is $p_1 > p_2$ zal als de kraan geopend wordt de vloeistof van vat 1 naar vat 2 stromen. Zo is het dus mogelijk om een hoger gelegen vat leeg te pompen in een lager gelegen vat zonder mechanisch bewogen hulpmiddelen (pomp).

Terug naar de kracht op een drijvend lichaam. We leiden nu af de kracht welke een ondergedompeld oppervlak ondervindt ten gevolge van de hydrostatische druk. Beschouw daartoe een oppervlakte elementje dA , deel van een groter (gewelfd) oppervlak A welk een lichaam omsluit. Te denken valt hierbij aan een stukje van de huid van een schip.

Hierop werkt de volgende kracht: $F_T = \rho gz dA$ in de richting van de normaal vector.

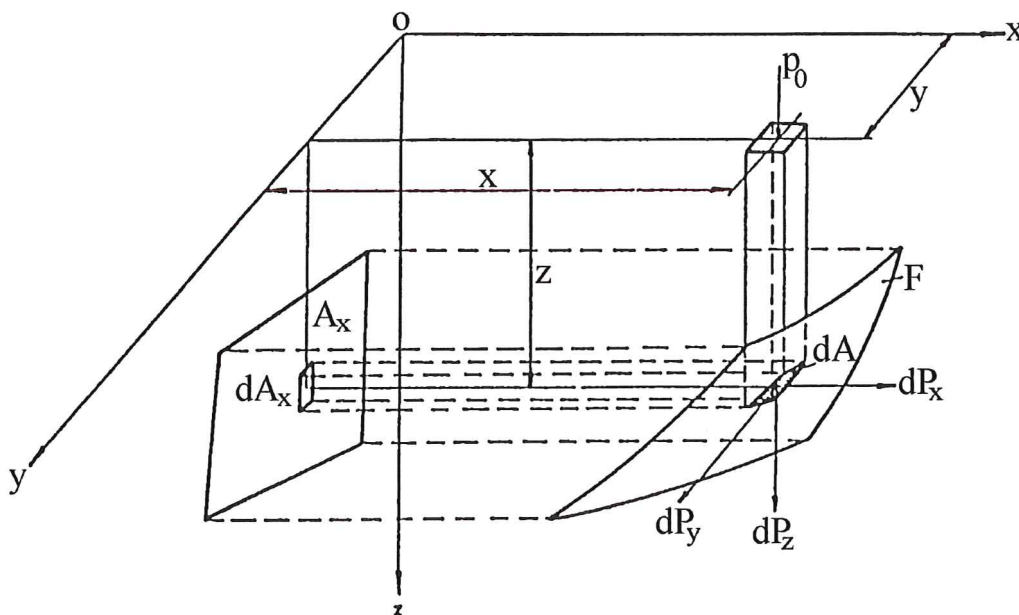
Ontbinden in de x , y en z richting geeft:

In x -richting: $F_x = \rho gz dA \cos \alpha_1 = \rho gz dA_x$

In y -richting: $F_y = \rho gz dA \cos \alpha_2 = \rho gz dA_y$

In z -richting: $F_z = \rho gz dA \cos \alpha_3 = \rho gz dA_z$

waarin α_1 , α_2 en α_3 de hoeken voorstellen tussen de normaal vector van het oppervlakje en de x -, y - en z -as.



We beperken ons tot de verticale component. De z -component van de kracht moet evenwicht maken met het gewicht van het lichaam. De sommatie van deze component over alle oppervlakte elementen waaruit het lichaamsoppervlak gedacht kan worden te zijn opgebouwd levert de totale verticale kracht.

$$F_z = \int \rho gz dA_z$$

De integraal $\int z dA_z$ stelt de inhoud ∇ voor van het lichaam gerekend tot aan het vrije vloeistof oppervlak.

Hieruit volgt dat de totale verticale kracht op het lichaam gelijk is aan:

$$F_z = \rho g \nabla$$

Dit staat bekend als de WET VAN ARCHIMEDES

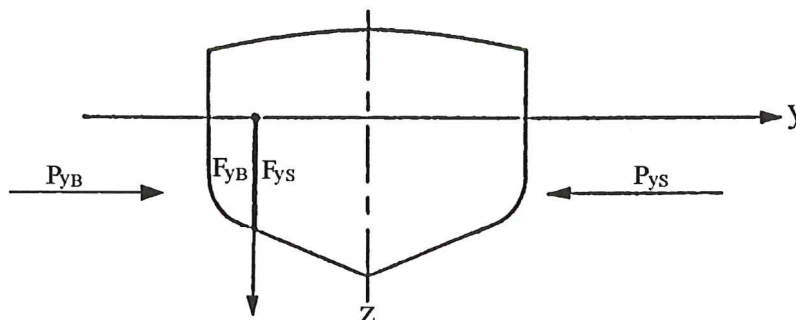
In woorden:

"Een lichaam, dat zich in rust in een vloeistof bevindt, ondervindt een opdrijvende kracht die gelijk is aan het gewicht van de door het lichaam verplaatste vloeistof".

Tevens kan afgeleid worden, hetgeen hier niet gedaan zal worden, dat de werklijn van de resulterende verticale kracht ten gevolge van de druk over het lichaam gaat door het zwaartepunt van het volume van het door het lichaam verplaatste water.

Dit volume zwaartepunt noemt men het **drukkingspunt**.

Tot nu toe is alleen gekeken naar de verticale component van de hydrostatische druk. Van de horizontale component kan gesteld worden dat de resulterende hiervan voor een drijvend of geheel ondergedompeld lichaam gelijk is aan nul. Dit is eenvoudig in te zien met behulp van de onderstaande figuur en geldt in zijn algemeenheid voor alle gesloten contouren.



Bezien wij de doorsnede van het schip zoals in de figuur aangegeven. Stel dat dit willekeurig gekozen xz-vlak het schip langsscheeps doormidden snijdt. De projectie van het bakboord gedeelte van de sloopshuid op het xz-vlak is gelijk aan de projectie van het stuurboord gedeelte, of te wel:

De linkerkant van de doorsnede is gelijk van vorm aan de rechterkant van de doorsnede, het oppervlak van beide doorsneden is aan elkaar gelijk:

$$A_{\text{bakboord}} = A_{\text{stuurboord}}$$

Derhalve zijn ook de statische momenten van deze projecties aan elkaar gelijk, zodat de krachten op A_B en A_S elkaar exact opheffen. Dit geldt uiteraard voor elke willekeurige verticale doorsnijding, zodat het schip geen resulterende horizontale kracht ondervindt, noch een moment.

Terugkerend naar het probleem van de drijvende bak kunnen we nu stellen dat er sprake zal zijn van een verticaal evenwicht als het gewicht van de bak G gelijk is aan het gewicht van het door de bak verplaatste water, ofwel:

$$G = \rho g \nabla = \rho g lbt$$

Een tweede noodzakelijke voorwaarde is dat de werklijn van het gewicht G en de opdrijvende kracht $\rho g \nabla$ samenvallen aangezien er alleen dan sprake is van momenten- evenwicht.

Bij een homogene vloeistof en een symmetrische massa verdeling van de bak is dit inderdaad het geval. Voor de beoordeling van het evenwicht is het klaarblijkelijk van essentieel belang het volume van het verplaatste water als ook het bijbehorende volume zwaartepunt te kunnen berekenen, ook als het de over het algemeen zeer gecompliceerde vorm van een schip betreft.

Het is daarvoor noodzakelijk de integraal:

$$\nabla = \int_0^{A_z} z \, dA_z$$

te kunnen oplossen, anders gezegd het volume van het lichaam moet bepaald kunnen worden door integratie van bijvoorbeeld de hoogte van het verticale zuiltje over de oppervlakte van het lichaam.

Hiertoe is het allereerst noodzakelijk om deze vorm in drie dimensies eenduidig te kunnen vastleggen. Uitgaande hiervan kan dan ondermeer met behulp van numerieke integratie methoden het volume en zwaartepunt berekend worden.

Eerst zullen we nu uiteenzetten hoe de **geometrie** beschreven wordt.

2. BESCHRIJVING GEOMETRIE

Teneinde de vorm van een lichaam eenduidig vast te leggen staat ons, afhankelijk van in hoeveel dimensies het lichaam is gedefinieerd en de complexiteit van de vorm, een aantal mogelijkheden ter beschikking.

De eerste mogelijkheid is een analytische formulering te geven voor de vorm van het lichaam. Dit kan zowel in 2 als in 3 dimensies. Meestal is dit slechts mogelijk voor relatief eenvoudige geometrische vormen, zoals cirkels, ellipsen, parabolen en rechthoeken in 2-D en voor omwentelingslichamen als bollen, ellipsoïden, kegels etc. in 3-D. Het voordeel hiervan is dat de vorm éénduidig is gedefinieerd in elk willekeurig punt en dat vele analytische manipulaties mogelijk zijn.

Bij zeer ingewikkelde vormen zoals de scheepsvorm is het in bijna alle gevallen niet mogelijk zo een formulering te vinden. Dan wordt voor het weergeven van de vorm meestal de toevlucht genomen tot grafische presentaties en voor het manipuleren met de scheepsvorm wordt deze weergegeven door een eindig aantal punten te geven op de huid van de vorm met behulp van de x , y , en z coördinaten van elk punt.

In twee dimensies, dat wil zeggen in een plat vlak, zijn we in staat om zeer ingewikkelde vormen weer te geven in een grafische voorstelling, al dan niet op schaal.

Door nu op verschillende plaatsen een drie dimensionale vorm in verschillende doorsneden (dit zijn 2-dimensionale vormen) weer te geven en de onderlinge relatie (bijvoorbeeld afstand en oriëntatie) ten opzichte van elkaar vast te leggen, ontstaat een beeld van de weer te geven vorm, welke deze (grotendeels) bepaalt.

Exact wordt de vorm alleen bepaald als een oneindig aantal doorsneden wordt gegeven, maar door er vanuit te gaan dat de vorm van het lichaam tussen twee doorsneden uitsluitend langzaam verandert en de doorsneden waarop de vorm gegeven wordt zo ook te kiezen, kan de vorm van het lichaam op elk punt gevonden worden door middel van een geschikte interpolatie procedure.

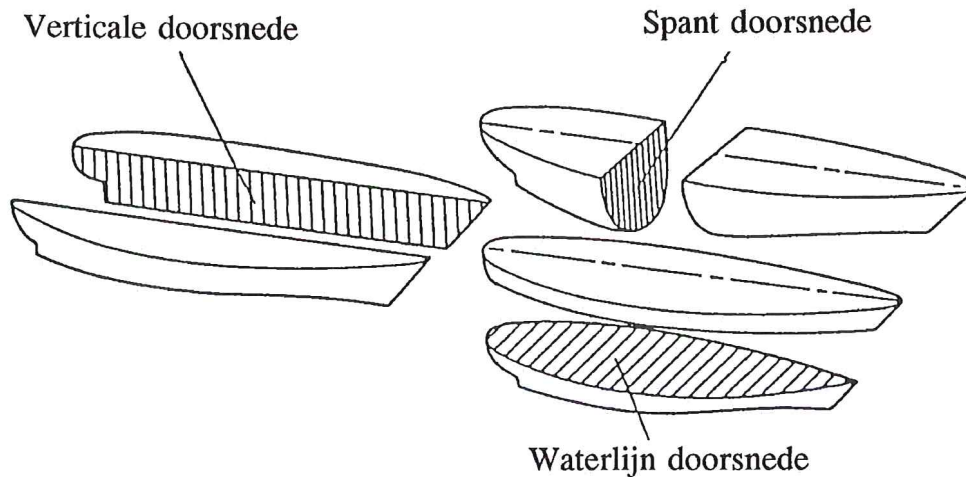
Aldus wordt te werk gegaan om de vorm van bijvoorbeeld een schip, een maritieme constructie, een auto, een drukvat, een cilinderkamer etc. weer te geven.

De vorm van een schip wordt vastgelegd door middel van een **lijnenplan**, dat is de verzameling van doorsneden waarmee de scheepsvorm wordt vastgelegd.

Voor een schip geldt doorgaans dat de vorm symmetrisch is t.o.v. het middenlangsvlak, het vlak dat gaat door het midden van kiel en stevens. Dit betekent dat voor het vastleggen van de vorm slechts het halve schip hoeft te worden getekend.

De scheepsvorm wordt nu doorsneden door drie stelsels van evenwijdige vlakken welke onderling loodrecht staan. Deze stelsels zijn:

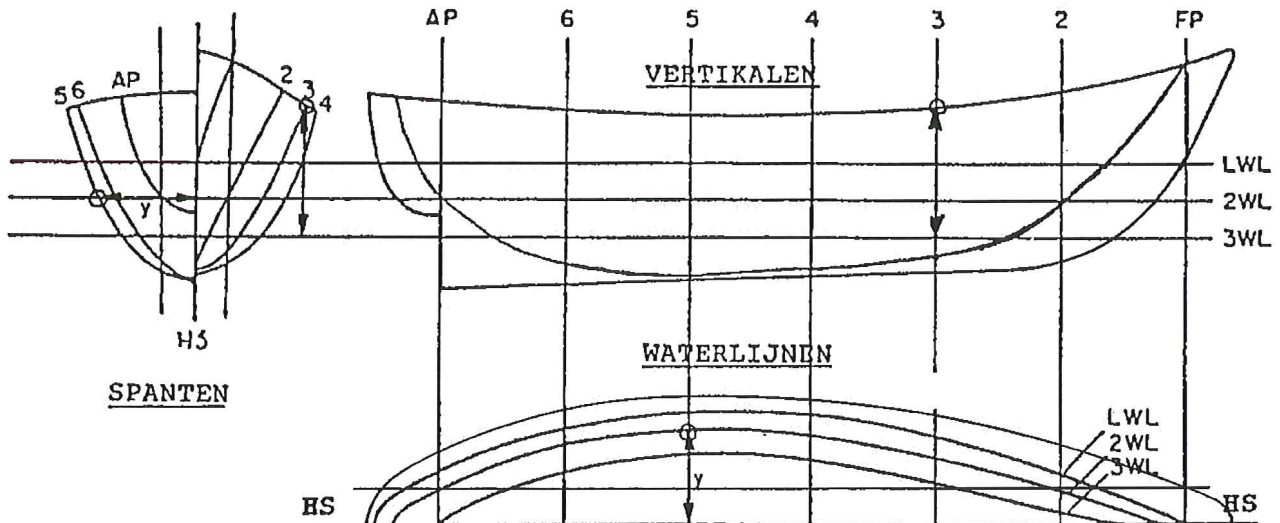
- een stelsel vlakken evenwijdig aan het waterlijn oppervlak (horizontaal); de aldus ontstane snijkrommen met de scheepsromp noemt men de waterlijnen;
- een stelsel vlakken evenwijdig met het verticale langsscheepse symmetrie vlak; deze snijkrommen met de scheepsromp noemt men de verticalen;
- een stelsel verticale vlakken loodrecht op de beide andere stelsels; de snijkrommen noemt men in dit geval de ordinaten of verdeelspanten, kortweg spanten.



We denken ons nu de aldus ontstane snijkrommen geprojecteerd op drie onderling loodrechte projectie vlakken, welke parallel zijn aan de gebruikte doorsnijdingsvlakken. Zo ontstaat het **waterlijnenplan, het verticaalplan of langsplan** en het **spantenraam**. Een voorbeeld hiervan staat weergegeven in de onderstaande figuur.

De drie projecties moeten uiteraard onderling overeenstemmen. Zo moeten de coördinaten van een bepaald punt op het weergegeven scheepsoppervlak in de drie aldus gevormde projecties met elkaar overeenstemmen.

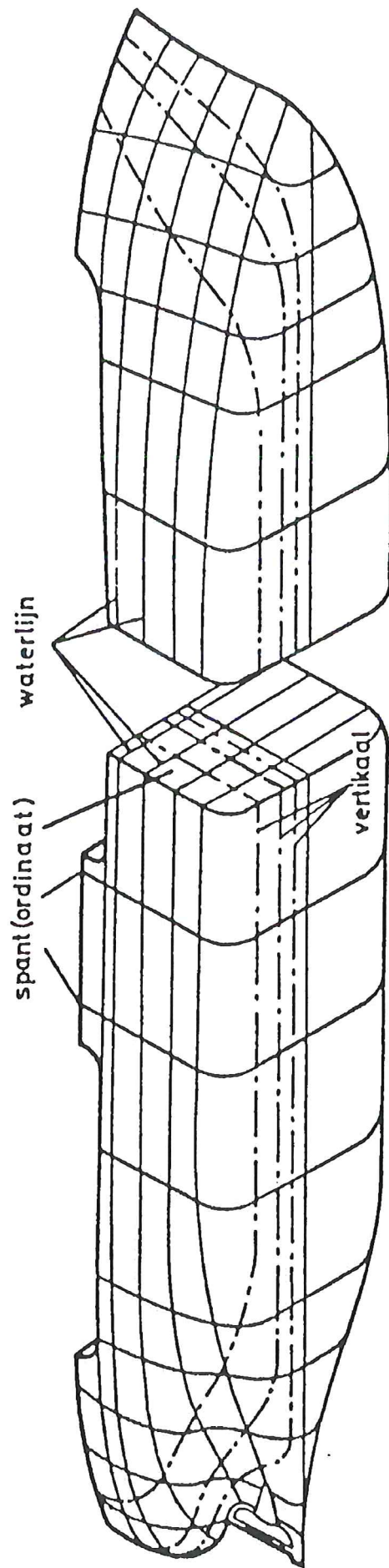
De complexe geometrie is teruggebracht tot een beperkt aantal gegevens. Dit geldt zowel grafisch als digitaal als een verzameling punten met discrete coördinaten. Dit laatste is voor het werken met digitale rekenapparatuur en numerieke integratie methoden uiterst belangrijk.



Elke projectie wordt gedacht te zijn opgebouwd uit een aantal concrete punten, waartussen de echte vorm gevonden kan worden door middel van interpolatie.

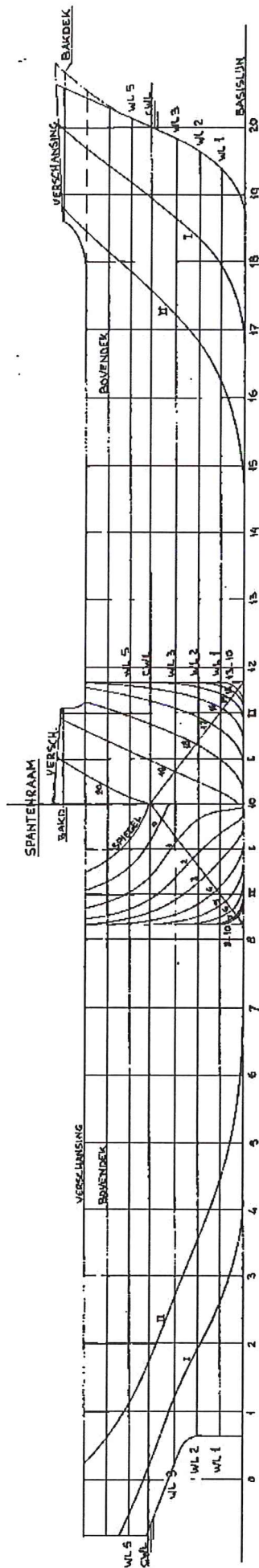
We zullen in hoofdstuk 3 (Numerieke Integratie) zien hoe met behulp van de aldus vastgelegde vorm oppervlakken, volumina, zwaartepunten en traagheidsmomenten berekend kunnen worden.

Het kunnen berekenen van deze zgn. hydrostatische grootheden is namelijk het doel van het vastleggen van de geometrie.

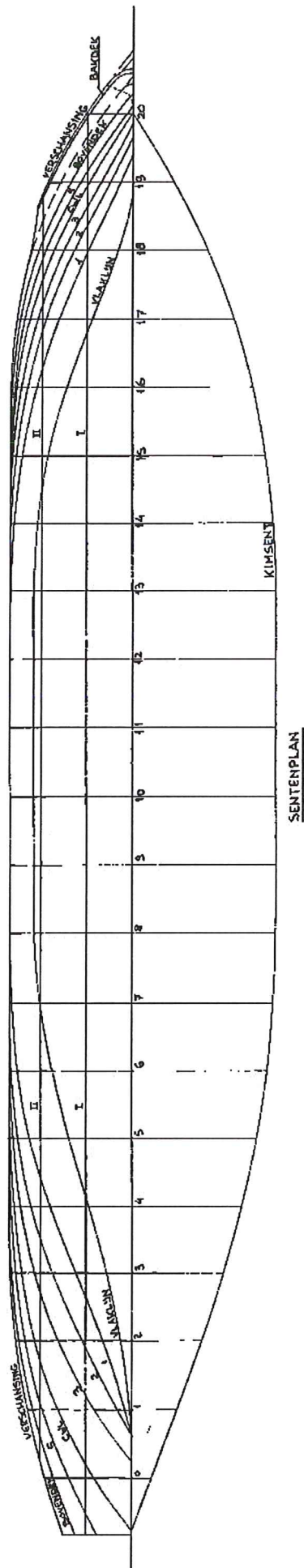


Perspectief schets van de gebruikte doorsnede projecties voor het vastleggen van de vorm.

LANGSPLAN



WATERLIJNENPLAN



SENTENPLAN

DE VORMCOËFFICIËNTEN

Dit zijn de verhoudingen tussen oppervlakken, inhoud en de hoofdafmetingen, zie figuur op de volgende pagina.

Waterlijn- of lastlijncoëfficiënt:

$$c_{wp} = \frac{\text{oppervlak lastlijn}}{L_{ord} B} = \frac{A_w}{L_{ord} B}$$

Grootspantcoëfficiënt:

$$c_m = \frac{\text{oppervlak grootspant}}{B T} = \frac{A_m}{B T}$$

Blokcoëfficiënt:

$$c_b = \frac{\text{waterverplaatsing}}{L_{ord} B T} = \frac{\nabla}{L_{ord} B T}$$

Langsscheepse prismatische coëfficiënt:

$$c_p = \frac{\text{waterverplaatsing}}{\text{inhoud cilinder met lengte } L_{ord} \text{ en doorsnede } A_m} = \frac{\nabla}{L_{ord} A_m}$$

Verticaal prismatische coëfficiënt:

$$c_{vp} = \frac{\text{waterverplaatsing}}{\text{inhoud cilinder met hoogte } T \text{ en doorsnede } A_w} = \frac{\nabla}{T A_w}$$

Er geldt:

$$c_p = \frac{\nabla}{L_{ord} A_m} = \frac{c_b L_{ord} B T}{L_{ord} c_m B T} = \frac{c_b}{c_m}$$

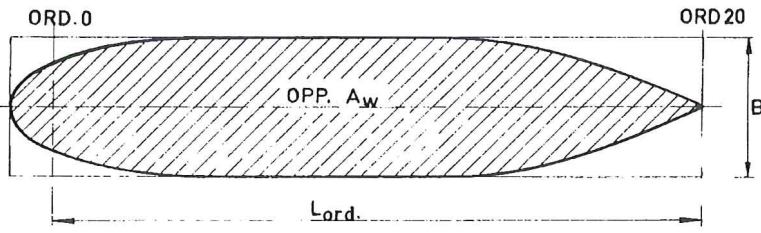
$$c_{vp} = \frac{\nabla}{T A_w} = \frac{c_b L_{ord} B T}{T c_{wp} L_{ord} B} = \frac{c_b}{c_{wp}}$$

De langsscheepse prismatische coëfficiënt c_p kan worden gesplitst in een coëfficiënt voor het achterschip c_{pa} en voor het voorschip c_{pf} , die gescheiden worden door ord. 10.

$$c_{pa} = \frac{\nabla_a}{1/2 L_{ord} B T c_m} = \frac{\nabla_a}{1/2 L_{ord} A_m}$$

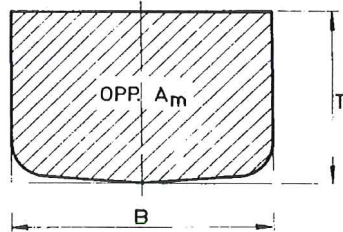
$$c_{pf} = \frac{\nabla_f}{1/2 L_{ord} B T c_m} = \frac{\nabla_f}{1/2 L_{ord} A_m}$$

Steeds geldt: $\frac{c_{pa} + c_{pf}}{2} = c_p$



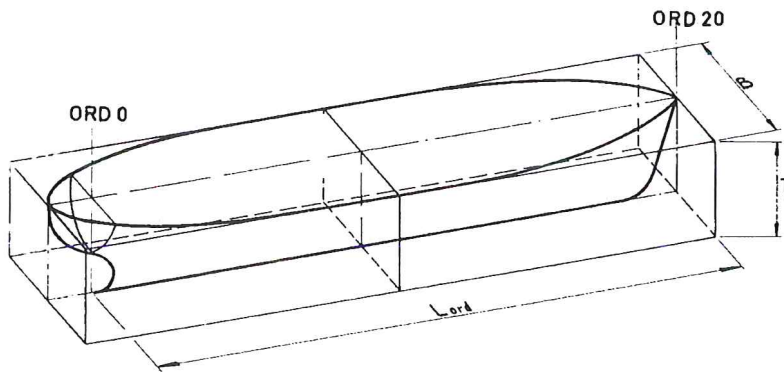
LASTLUN - COEFFICIENT

$$C_{wp} = \frac{A_w}{L_{ord} \cdot B}$$



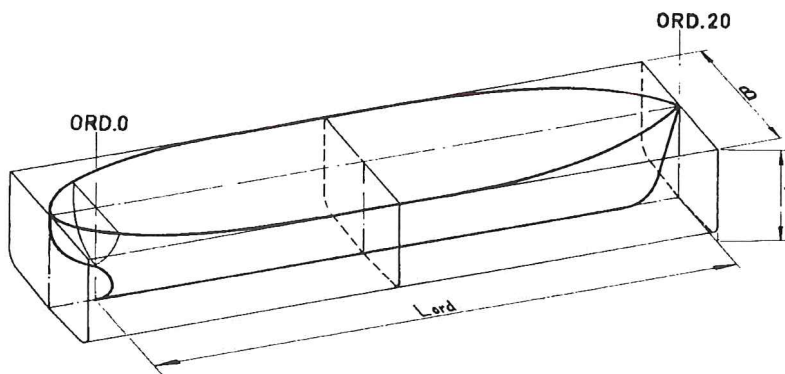
GROOTSPANT - COEFFICIENT

$$C_m = \frac{A_m}{B \cdot T}$$



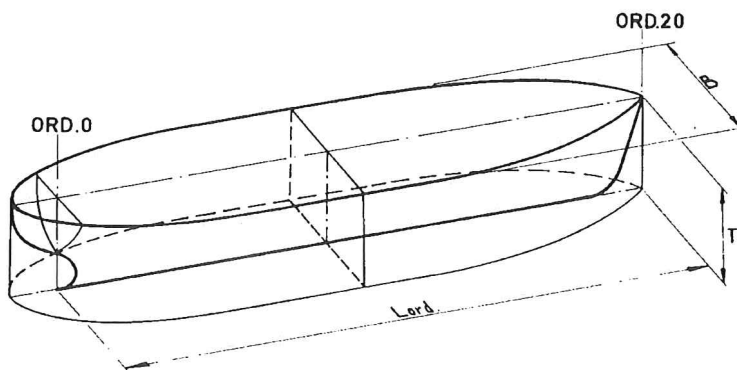
BLOK - COEFFICIENT

$$C_b = \frac{\nabla}{L_{ord} \cdot B \cdot T}$$



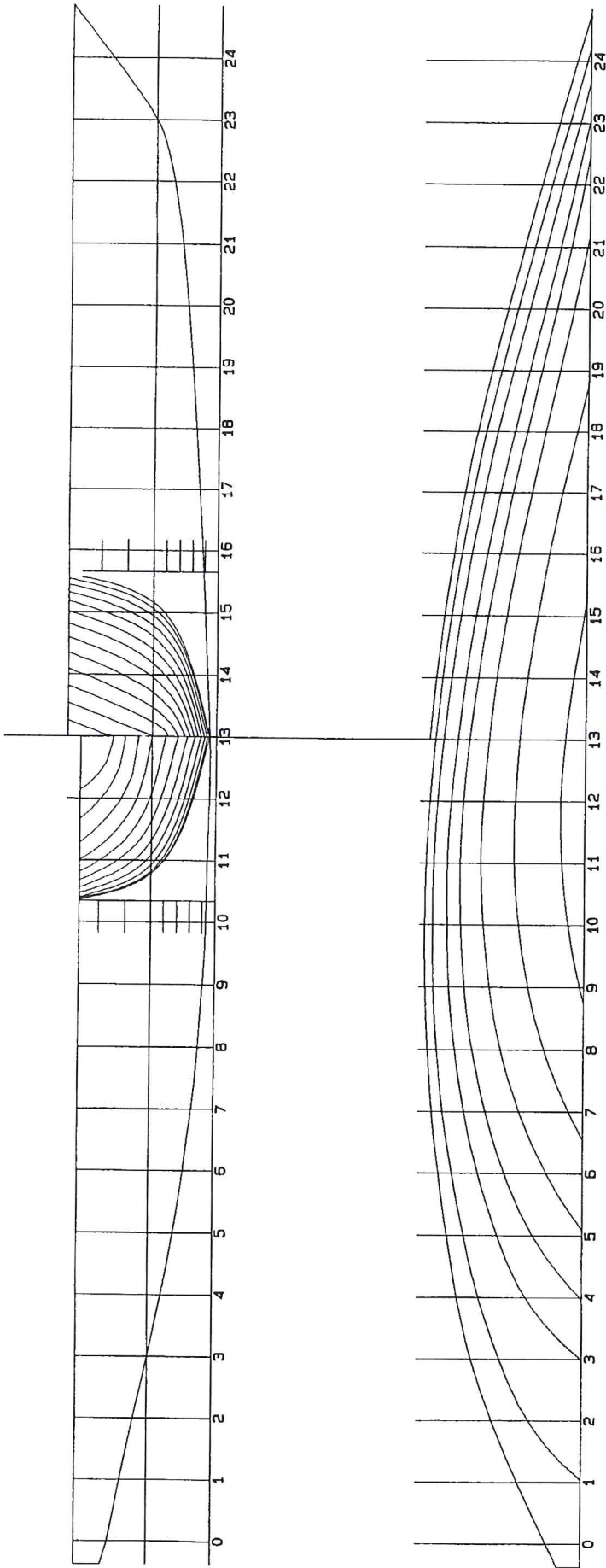
LANGSSCHEEPSE
PRISMATISCHE - COEFFICIENT

$$C_p = \frac{\nabla}{A_m \cdot L_{ord}}$$



VERTIKALE
PRISMATISCHE - COEFFICIENT

$$C_{vp} = \frac{\nabla}{A_w \cdot T}$$



Name: YACHT

Based on Parent 59

Scale 1 : 100

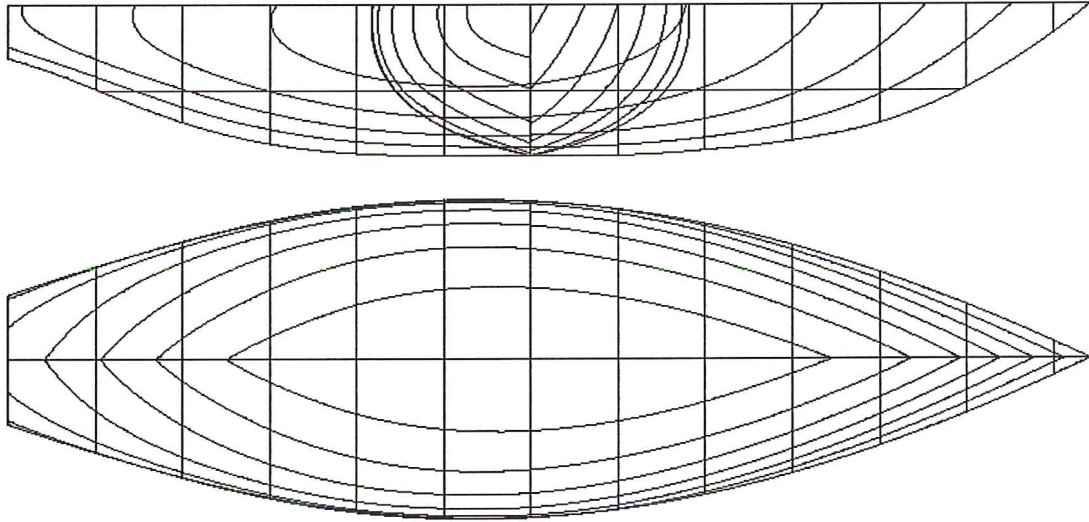
Main Dimensions

Length between Design Ordinates 19.180 [m]
 Moulded Breadth 5.100 [m]
 Draught at Construction Waterline 1.000 [m]
 Block Coefficient 0.298 [-]

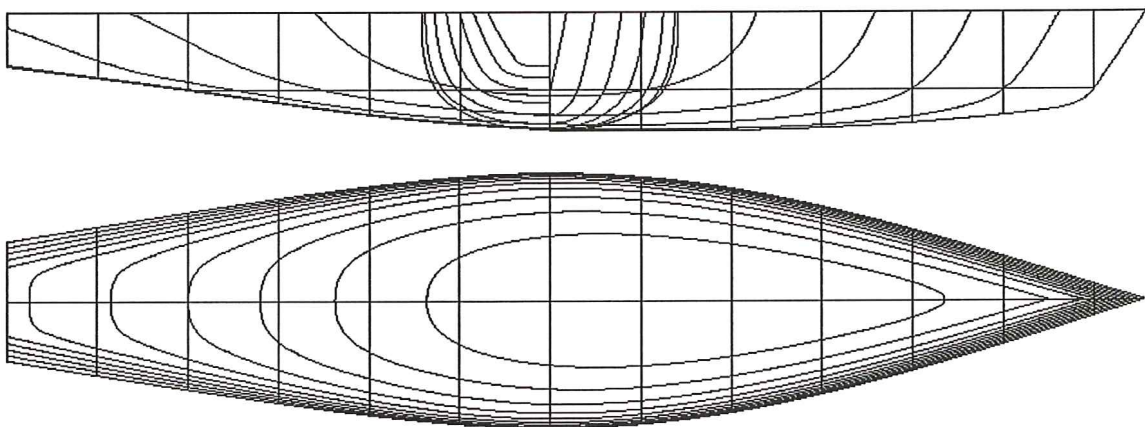
Length Center of Buoyancy -0.950 [m]
 Midship Area Coefficient 0.565 [-]
 L / B 3.8 [-]
 B / T 5.1 [-]

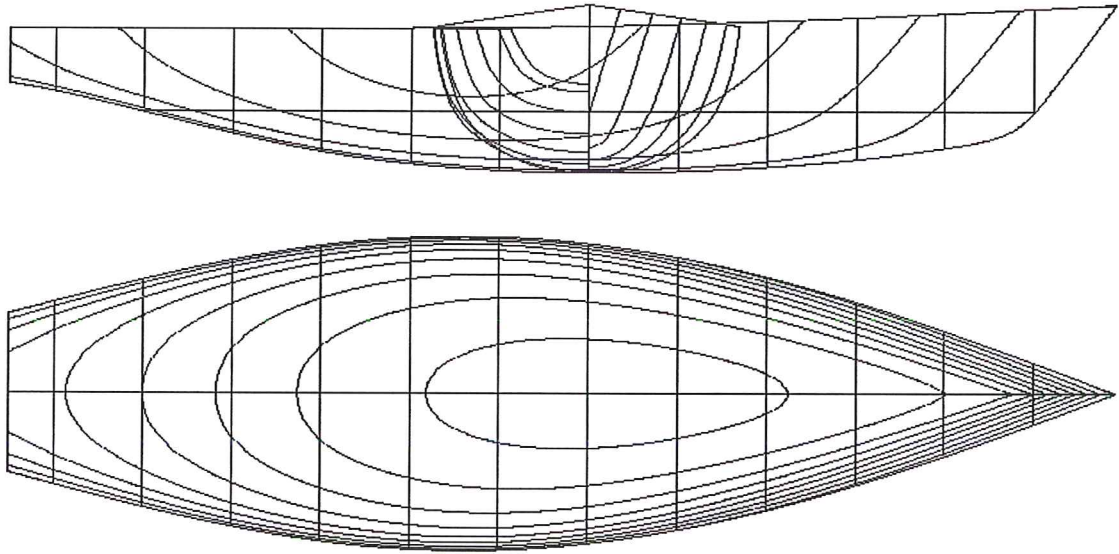
Vier moedermodellen uit de Delft Systematic Yacht Hull Serie (DSYHS)

Sysser 1

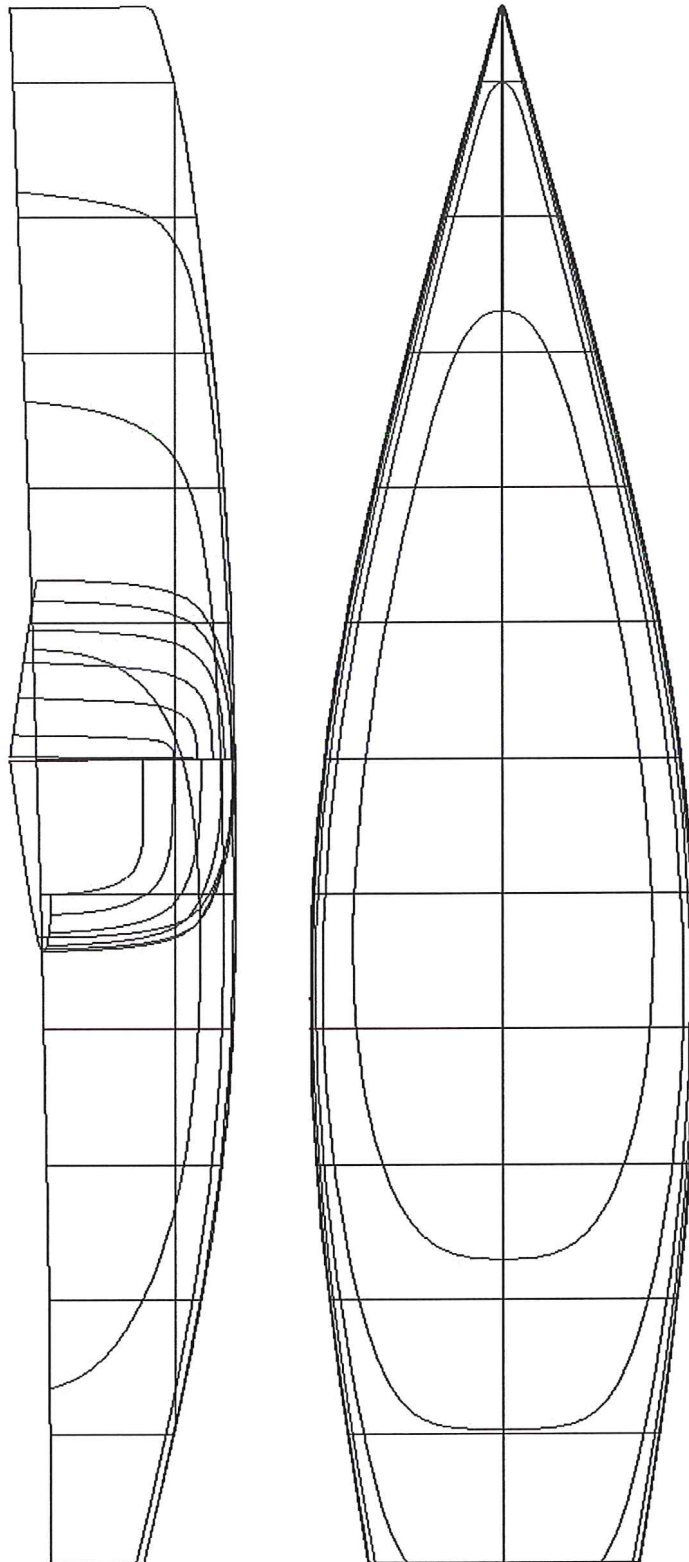


Sysser 25

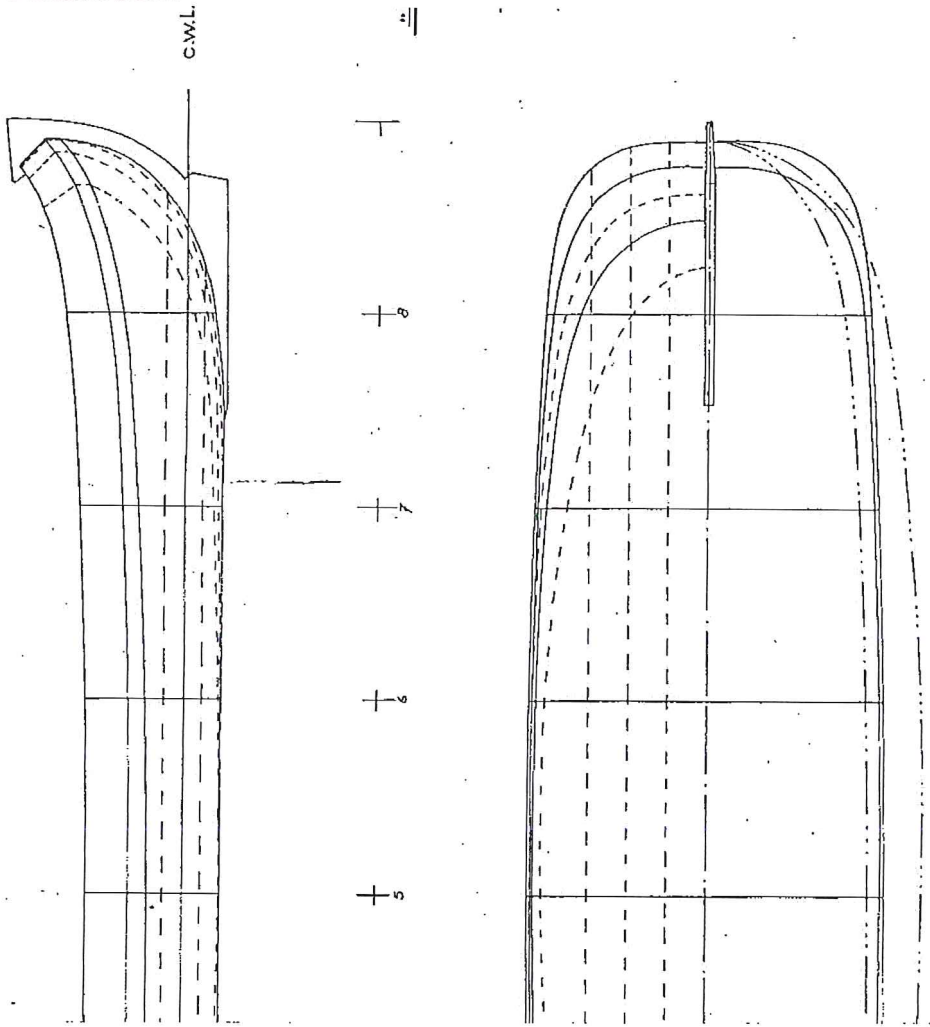


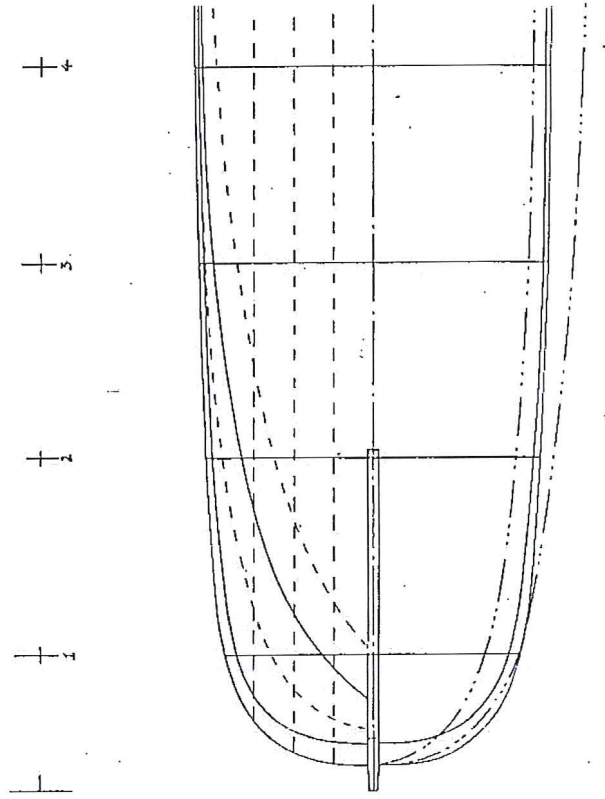
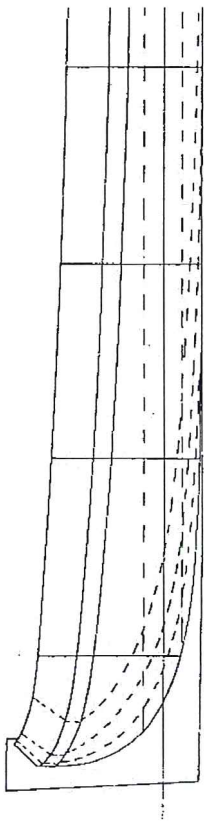


Sysser 'boxie'



Platbodem





3. NUMERIEKE INTEGRATIE

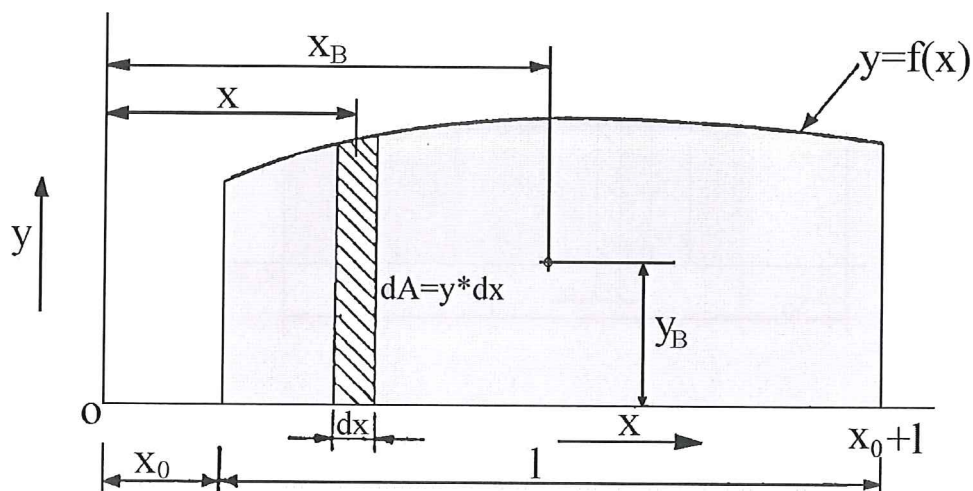
Uit het voorgaande is gebleken dat oppervlakken, volumina, zwaartepunten, statische momenten etc. een belangrijke rol spelen in de beschouwingen aangaande het evenwicht van drijvende constructies en ook in allerlei andere toepassingen.

Derhalve wordt nu eerst enige aandacht besteed aan hoe men deze grootheden van willekeurig gevormde oppervlakken en lichamen kan berekenen met behulp van numerieke methoden.

Het gebruik van numerieke in plaats van analytische methoden is veelal noodzakelijk omdat de te bewerken lichamen zich veelal niet analytisch laten beschrijven, zoals we hebben gezien bij het vastleggen van de scheepsromp.

Hoe bepalen we nu het oppervlak, het statische moment of het zwaartepunt van een figuur? In het algemene geval, zonder te letten op hoe de integralen worden opgelost, geldt het volgende:

Beschouw een willekeurige continue kromme zoals gegeven in de figuur.



Het **oppervlak** van het gearceerde strookje met hoogte y en breedte dx is gelijk aan: ydx . Het oppervlak A dat begrensd wordt door de x -as, $x = x_0$, $x = x_0 + l$ en de kromme wordt gevonden door de sommatie van al deze kleine oppervlakjes. Als we de breedte van het strookje naar nul laten gaan dan kennen we uit de wiskunde voor het oppervlak van de figuur de volgende integraal:

$$A = \int_{x_0}^{x_0+l} y dx$$

Het **statische moment** van het oppervlak A ten opzichte van de x -as wordt eveneens gevonden door eerst het statisch moment van het strookje te beschouwen en vervolgens te integreren over de gewenste range.

DEFINITIE:

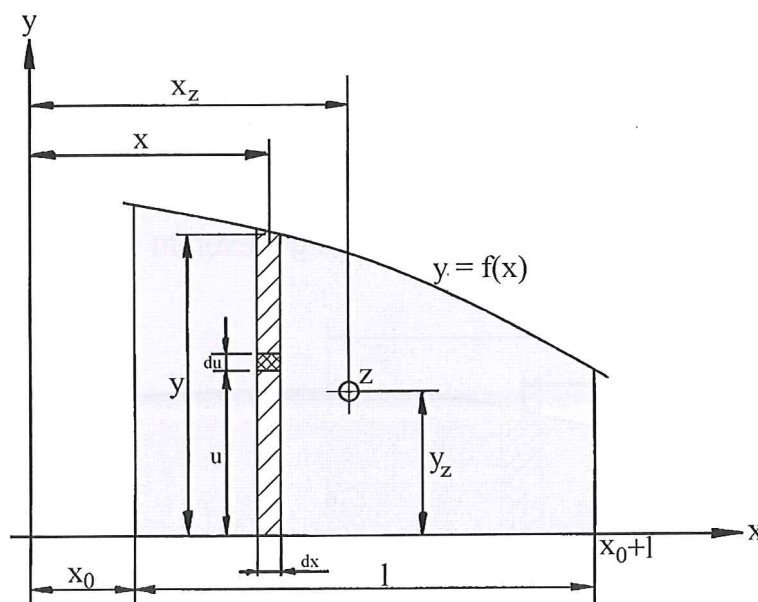
Het **statische moment** van een oppervlakte elementje (of volume elementje) t.o.v. een bepaalde as is het product van het oppervlak (volume) van het elementje en zijn afstand tot deze as.

Voor een klein elementje van het gearceerde strookje vinden we als statisch moment t.o.v. de x -as:

$$ududx$$

Voor het gehele strookje geldt dan:

$$dS_x = \int_0^y u du dx = \frac{1}{2} y^2 dx$$



En voor het gehele oppervlak A tenslotte:

$$S_x = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_0+1} y^2 dx$$

Op dezelfde wijze vindt men voor het statische moment van A ten opzichte van de y-as:

$$S_y = \int_{x_0}^{x_0+1} x y dx$$

Volgens de definities uit de mechanica geldt voor de coördinaten van het zwaartepunt van een oppervlak of volume het volgende:

DEFINITIE

x - coördinaat van het zwaartepunt: S_y/A

y - coördinaat van het zwaartepunt: S_x/A

In de hierna volgende behandeling van het evenwicht en de stabiliteit van drijvende constructies zal ook meermalen gebruik worden gemaakt van het begrip traagheidsmoment. Vandaar:

DEFINITIE:

Het **traagheidsmoment** van een oppervlakte elementje (of volume elementje) ten opzichte van een bepaalde as is het product van het oppervlak (volume) van het elementje en zijn afstand tot de as in het kwadraat.

Ook de traagheidsmomenten van A t.o.v. de x-as en de y-as zijn te bepalen. Het traagheidsmoment van het strookje ten opzichte van de y-as is:

$$dI_y = x^2 y dx$$

en het traagheidsmoment van het gehele oppervlak A t.o.v. de y-as wordt derhalve gevonden door sommatie van alle strookjes, ofwel:

$$I_y = \int_{x_0}^{x_0+1} x^2 y dx$$

Voor de berekening van het traagheidsmoment t.o.v. de x-as voeren we eerst weer een tussen integratie uit.

Voor het kleine elementje $du dx$ van het strookje is het traagheidsmoment t.o.v. de x-as gelijk aan:

$$u^2 du dx$$

en dus van het gehele strookje (sommatie over de elementjes):

$$dI_x = \int_0^y u^2 du dx = \frac{1}{3} y^3 dx$$

en tenslotte voor het gehele oppervlak A (sommatie over de strookjes):

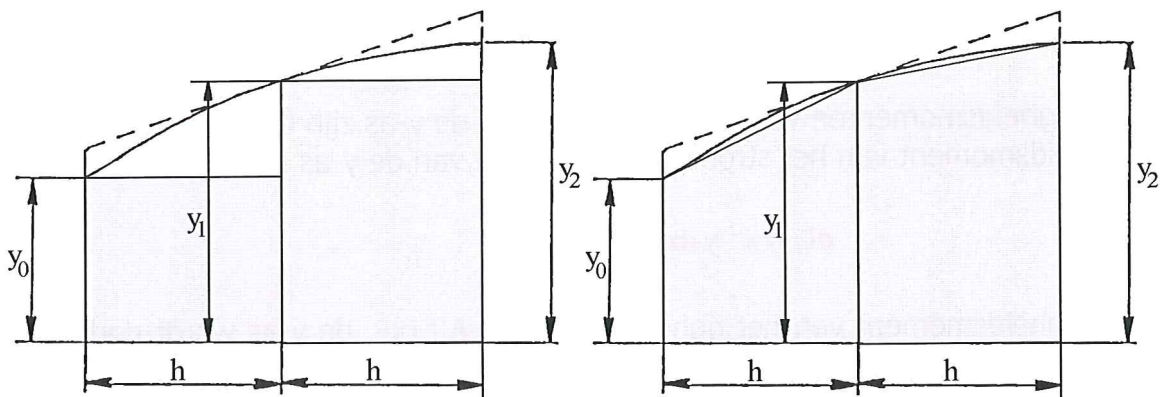
$$I_x = \frac{1}{3} \int_{x_0}^{x_0+1} y^3 dx$$

De hier gegeven uitdrukkingen zijn analytische uitdrukkingen. Als in het beschouwde geval y als functie van x bekend zou zijn dan kunnen de integralen zuiver analytisch worden opgelost. In ons geval is dat niet zo en moeten we onze toevlucht nemen tot numerieke methoden uitgaande van de verzameling punten waarmee de scheepsvorm is gedefinieerd.

Zoals we gezien hebben komt integratie neer op oppervlakte bepaling. De meest gebruikte regels voor numerieke integratie zijn **de trapeziumregel** en **de 1e regel van Simpson**.

In het kader van dit college zullen we ons tot deze beide regels beperken, ofschoon er nog een aantal andere zijn.

Beschouw daartoe de volgende figuur.



Het oppervlak tussen de x -as, $x = x_0$, $x = x_2$ en $y = f(x)$ moet worden bepaald.

Alleen de functiewaarden y_0 , y_1 en y_2 voor $x=x_0$, $x=x_1$ en $x=x_2$ zijn bekend (discrete punten).

De meest eenvoudige manier om het oppervlak te benaderen is door het oppervlak te berekenen van een tweetal ingeschreven rechthoeken. Dit staat weergegeven in de linkse figuur. Het oppervlak van een vierkant is eenvoudig te berekenen uit de gegeven functiewaarden en de onderlinge afstanden. De benadering van het werkelijke oppervlak onder de kromme is echter vrij onnauwkeurig, zoals uit de figuur wel blijkt. Deze methode wordt derhalve in de praktijk niet toegepast.

Een andere methode bestaat uit het bepalen van het oppervlak van twee ingeschreven trapezia eveneens gebruikmakende van de gegeven functiewaarden. Het oppervlak onder de kromme kan dan geschreven worden als:

$$A = \frac{1}{2}h(y_0 + 2y_1 + y_2)$$

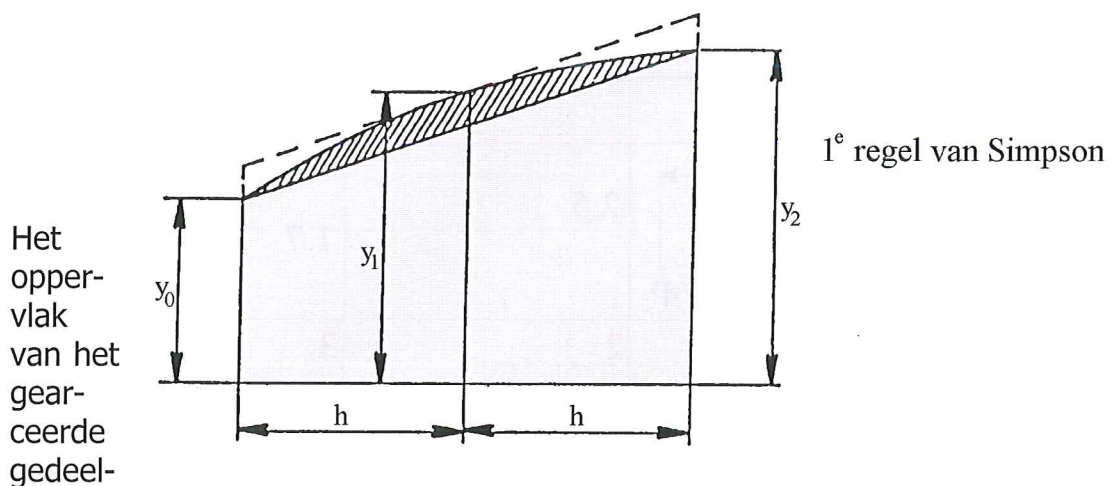
De kromme lijn wordt hier benaderd door twee rechte lijnstukken tussen de drie punten in.

Dit blijkt in de praktijk een redelijke benadering te zijn voor het oppervlak voor niet te sterk gekromde lijnstukken.

Deze regel staat bekend als **de trapeziumregel**.

Een derde benadering wordt gevonden door het oppervlak onder de kromme te splitsen in een gedeelte te benaderen door een trapezium en het resterende gedeelte door een tweedegraads functie. Het oppervlak van het trapezium is dan gelijk aan:

$$2h \frac{y_0 + y_2}{2} = h(y_0 + y_2)$$



$$\begin{aligned} \frac{2}{3}2h\left(y_1 - \frac{y_0 + y_2}{2}\right) = \\ \frac{4}{3}hy_1 - \frac{2}{3}hy_0 - \frac{2}{3}hy_2 \end{aligned}$$

Het totale oppervlak wordt nu gevonden door de twee gedeelten bij elkaar op te tellen. We vinden dan:

$$\begin{aligned} A &= h(y_0 + y_2) + \frac{4}{3}hy_1 - \frac{2}{3}hy_0 - \frac{2}{3}hy_2 \\ A &= \frac{1}{3}h(y_0 + 4y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Dit is **de eerste regel van Simpson**.

Een grotere nauwkeurigheid wordt bereikt als de te berekenen figuur wordt onderverdeeld in meer gedeelten, waarvan het **aantal altijd even moet zijn**.

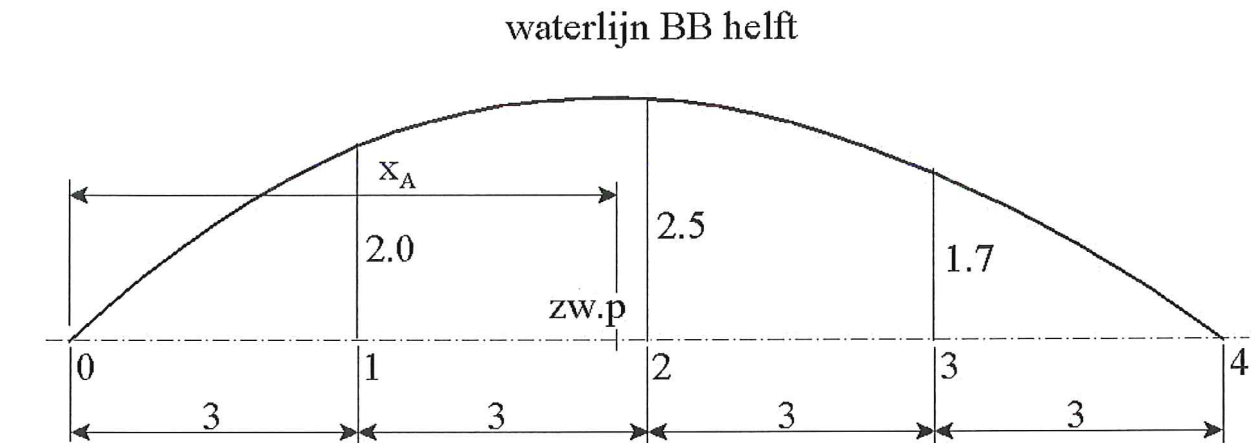
Er geldt dan de algemene formule, welke gevonden wordt door het oppervlak van twee gedeelten te bepalen en uiteindelijk over alle gedeelten te sommeren:

$$A = \frac{1}{3} h (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_5 + \dots + 4y_{n-1} + y_n)$$

De factoren 1, 4, 2, 4, 2, 4, 4, 1 worden wel de **Simpson factoren** genoemd.

Met behulp van een voldoende aantal verdeelstukken is een hoge nauwkeurigheid te bereiken. In de regel ligt de te bereiken nauwkeurigheid binnen enkele tienden van een procent.

Ter illustratie volgt hieronder een eenvoudig voorbeeld.



ord.	breedte	Simpson factor	prod.	mom. factor t.o.v. ord. 0	prod.
0	0	1	0	0	0
1	2	4	8	1	8
2	2.5	2	5	2	10
3	1.7	4	6.8	3	20.4
4	0	1	0	4	0

$$\Gamma_1 = 19.8$$

$$\Gamma_2 = 38.4$$

$$A = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 19.8 = 39.6 \text{ m}^2$$

$$x_A = 3 \cdot \frac{38.4}{19.8} = 5.82 \text{ m}$$

In het bovenstaande hebben we gedemonstreerd hoe we het oppervlak van een figuur kunnen bepalen met behulp van een numerieke methode.

Alle noodzakelijke integraties zijn aldus uit te voeren:

Immers een integraal als:
$$I_x = \frac{1}{3} \int_{x_0}^{x_0+1} y^3 dx$$

Kan opgevat worden als:
$$I_x = \frac{1}{3} \int_{x_0}^{x_0+1} t dx$$

Waarin $t = y^3$ dus I_x is $1/3$ van het oppervlak tussen $t = f(x)$, $x = x_0$, $x = x_0+1$ en de x -as.

Het berekenen van een volume kan uitgevoerd worden door tweemaal een oppervlakte integratie uit te voeren. We zullen dit trachten toe te lichten.

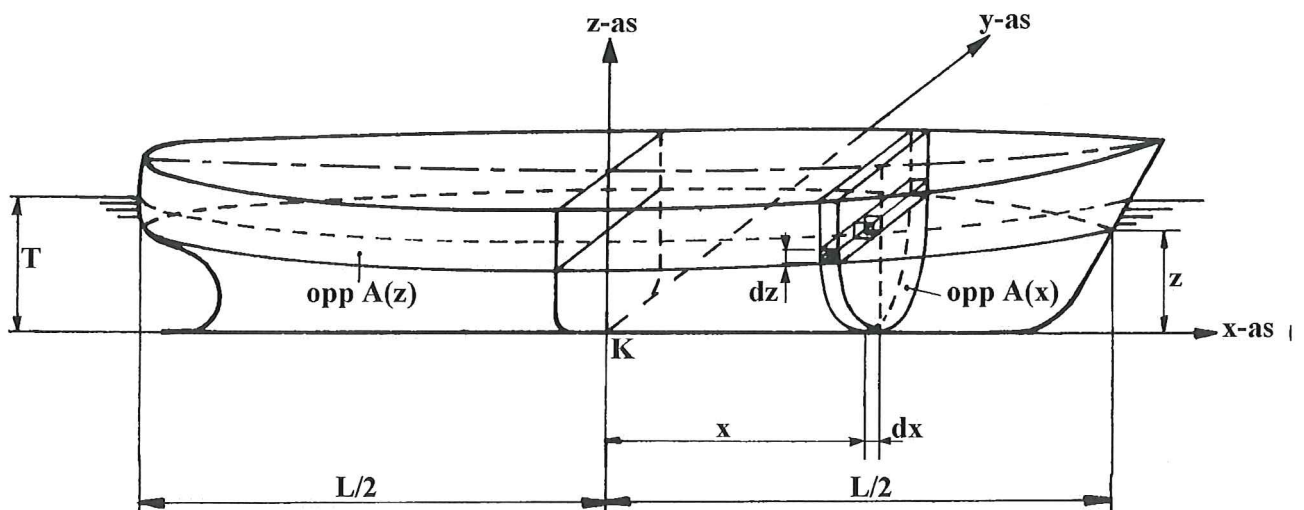
In het algemene geval wordt de inhoud van een lichaam zoals gegeven in de onderstaande figuur gegeven door:

$$V = 2 \int_0^{z_T} \int_{-x_T}^{x_T} y dx dz \quad (\text{factor 2 vanwege de symmetrie})$$

We kunnen dit op twee manieren splitsen in twee achter elkaar op te lossen oppervlakte integralen. Ten eerste door nu de oppervlakte integraal op te lossen:

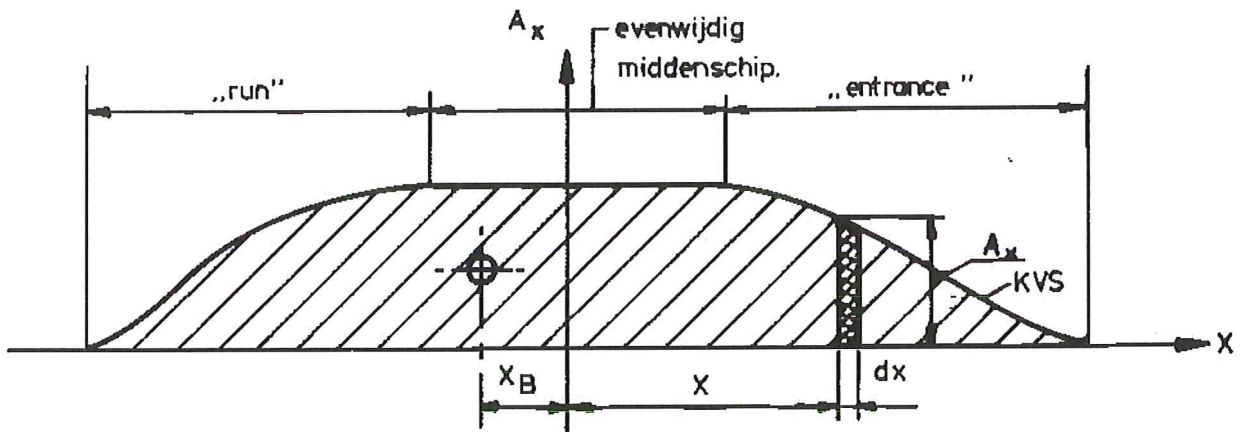
$$2 \int_0^{z_T} y dz = A_x$$

wordt de oppervlakte berekend van de dwarsdoorsnede van de vorm (spantoppervlak).



Door dit voor een groot aantal (bijvoorbeeld 20) waarden van x te doen en de aldus verkregen waarden van de spantoppervlakken te plotten op basis van hun onderlinge

afstand, verkrijgt men een figuur zoals hieronder weergegeven, voorstellende de verdeling van het dwarsdoorsnede oppervlak over de lengte van het lichaam.



Door hiervan de oppervlakte te bepalen met behulp van dezelfde numerieke integratiemethode wordt in feite de integraal:

$$\nabla = \int_{-x_T}^{x_T} A_x dx$$

opgelost. Hiermee is het volume van het lichaam bepaald: de integraal van het doorsnede oppervlak over de lengte van het lichaam is het volume.

Het drukingspunt in lengte tov. ord.10 is ook te bepalen:

$$x_B = \frac{\text{statisch moment spantoppervlak t.o.v. y-z vlak}}{\text{volume}}$$

$$x_B = \frac{\int_{-x_T}^{x_T} A_x \cdot x dx}{\nabla}$$

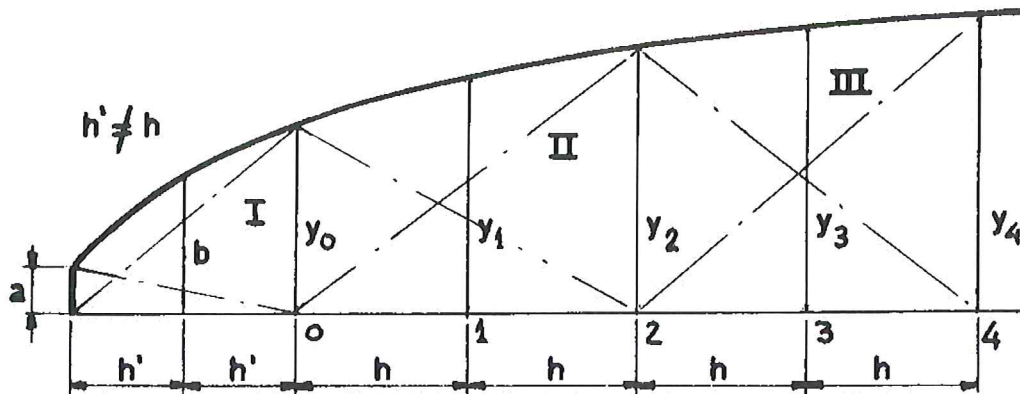
Voorbeeldsom:

Lwl: 125.00 m

Lord: 121.00 m

Alle spantoppervlakken zijn bekend (zie Simpsons tabel op blz.4.9).

Als men uitgaat van 10 spanten volgt hieruit dat de spantafstand 12.10 m is ($h=121/10=12.10$ m). Men ziet dat de waterlijn lengte (L_{wl}) groter is dan de ordinaat lengte (L_{ord}). Dit betekent dat er achter ordinaat 0 nog waterverplaatsing gegenereerd wordt. Dit moet natuurlijk meegenomen worden in de berekening van de waterverplaatsing en het drukingspunt. Dit doet men met behulp van een eindcorrectie, zie onderstaand figuur.



De ordinaatafstand h is groter dan h' . Het verschil in ordinaat afstand wordt als volgt gebruikt:

ord. nr.	Ax	s.f.	Ax * s.f.	m.f. tov. ord 5	Ax * s.f. * m.f.
a		$1 * h'/h$		$-(2 * h'/h + 5)$	
b		$4 * h'/h$		$-(h'/h + 5)$	
0		$1 * h'/h + 1$		-5	
1		4		-4	
2		2		-3	

enz.

De Simpson factoren worden als het ware gereduceerd in verband met een afwijkende ordinaatafstand. Op deze wijze kunnen deze eindcorrecties in de reketabellen worden opgenomen zonder verstoring van de systematiek van de berekening. Nu zullen de waterverplaatsing en het drukkingspunt berekend worden m.b.v. een Simpsontabel:

Opmerking: h' is bepaald m.b.v. het verschil van de L_{wl} met L_{ord} .

$$h' = (L_{wl} - L_{ord})/2 = 2 \text{ m.}$$

ord. nr.	Ax (m ²)	s.f.	Ax*s.f.	m.f.	Ax*s.f.*m.f.	
a	0	0.165	0	-5.331	0	
b	1.00	0.661	0.66	-5.165	-3.42	
0	2.90	1.165	3.38	-5	-16.90	
1	36.60	4	146.40	-4	-585.60	
2	82.70	2	165.40	-3	-496.20	
3	117.00	4	468.00	-2	-936.00	
4	134.10	2	268.20	-1	-268.20	
5	137.26	4	549.04	0	0.00	
6	128.70	2	257.40	1	257.40	
7	106.80	4	427.20	2	854.40	
8	72.70	2	145.40	3	436.20	
9	29.00	4	116.00	4	464.00	
10	0	1	0	5	0	
			SOM 1=	2547.08	SOM 2=	-294.31

Waterverplaatsing: $1/3 \cdot h \cdot \text{SOM 1} = 10273.22 \text{ m}^3$
Drukkingspunt Xb: $h \cdot \text{SOM 2} / \text{SOM 1} = -1.40 \text{ m}$

We zouden de integratie ook andersom uit kunnen voeren. Uitgaande van de integraal welke het volume van het lichaam bepaalt:

$$\nabla = 2 \int_0^{z_T} \int_{-x_T}^{x_T} y dx dz$$

kunnen we eerst de integraal

$$2 \int_{-x_T}^{x_T} y dx = A_z$$

oplossen.

Dit stelt voor het waterlijnoppervlak van het lichaam voor een bepaalde z. Door deze te plotten op basis van hun onderlinge afstand en het oppervlak van de aldus ontstane figuur te bepalen wordt eveneens het volume van het lichaam bepaald:

$$\nabla = \int_0^{z_T} A_z dz$$

De zwaartepuntsligging van een waterlijn wordt bepaald door het statische moment van de waterlijn tov het y-z vlak te bepalen:

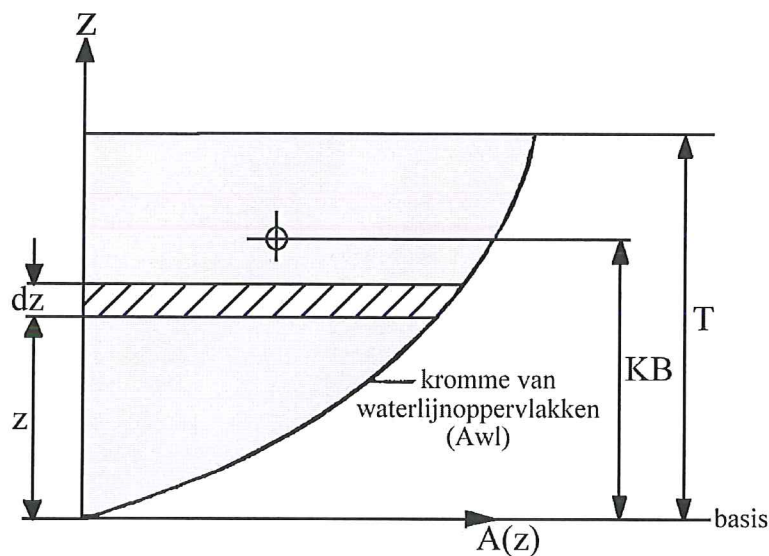
$$x_A = \frac{2 \int_{-x_T}^{x_T} xy dx}{A_z}$$

Voor de bepaling van het evenwicht was ook de positie van het zwaartepunt in hoogte en in lengte van belang. Deze hoogte- en lengteligging van het zwaartepunt van het volume (het drukkingspunt) wordt nu gevonden door het statische moment van de waterverplaatsing t.o.v. respectievelijk het xy en het zy vlak te bepalen. Afgeleid is reeds dat:

$$KB = \frac{\text{statisch moment volume t.o.v. x - y vlak}}{\text{volume}}$$

waaruit volgt:

$$KB = \frac{\int_0^{z_T} A_z z \, dz}{\nabla}$$



Eerst wordt nu dus voor verschillende waarden van z een discrete voorstelling van de waterlijn gemaakt en deze vervolgens geïntegreerd tot een waterlijn oppervlak. Deze waterlijn oppervlakken worden geplot op basis van z . Elk van de ordinaten van deze figuur, voorstellende een waterlijn oppervlak, wordt vervolgens vermenigvuldigd met zijn afstand z tot het vlak xy en opnieuw geplot op basis van z . Van de aldus ontstane figuur wordt nu tenslotte het oppervlak bepaald, voorstellende het gevraagde statische moment.

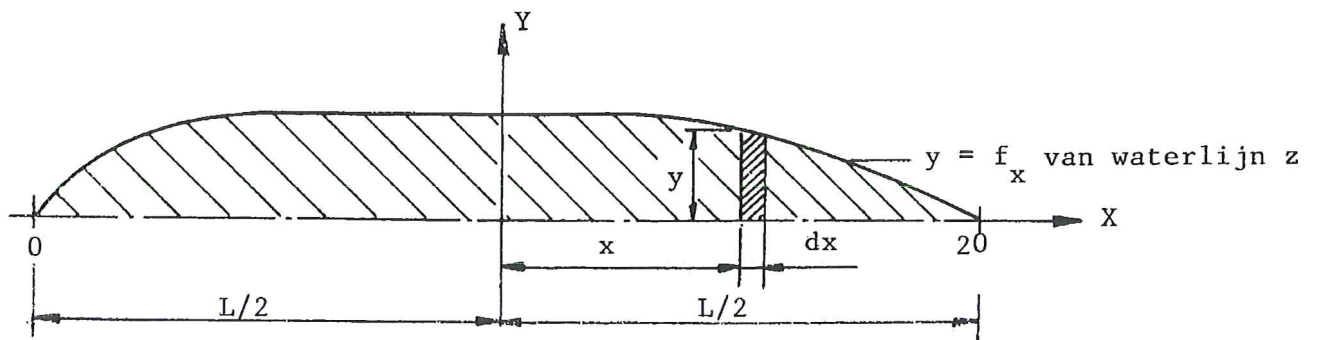
De bepaling van het drukkingspunt in lengte x_B adv de waterlijnoppervlakken gaat als volgt:

$$x_B = \frac{\text{statisch moment volume t.o.v. y-z vlak}}{\text{volume}}$$

$$x_B = \frac{\int_0^{z_T} 2 \int_{-x_T}^{x_T} xy \, dx \, dz}{\nabla},$$

waarin de binnenste integraal het statische moment van het oppervlak van de waterlijn z tov het y - z vlak is, oftewel het zwaartepunt van de desbetreffende waterlijn. Het drukingspunt in lengte kan ook bepaald worden adv de ordinaat oppervlakken, zie blz. 3.7.

Door de aldus verkregen statische momenten te delen door het volume van het lichaam worden de x en z coördinaat van het zwaartepunt verkregen ten opzichte van de referentie vlakken ten opzichte waarvan de statische momenten bepaald zijn.



Voorbeeldsom:

Hetzelfde schip als bij het vorige voorbeeld zal gebruikt worden.
Gegeven: Diepgang T: 7.20 m

Om te beginnen moet men op iedere spant de breedte van het schip weten bij een bepaalde waterlijn, bijv. de constructiewaterlijn (CWL). De breedte op elk spant is gegeven. Bovenstaande figuur stelt een waterlijn voor. Ook hier geldt weer dat een waterlijn niet precies op een spant hoeft te beginnen en te eindigen. Daarom moet ook hier weer gebruik gemaakt worden van de eindcorrectie. Zie eerste Simpsonstabel op blz.4.9. Voor de CWL geldt hier ook dat de $h' = 2$ m en dus $h'/h = 0.165$.

CWL					
ord. nr.	1/2 br. = y (m)	s.f	y s.f.	m.f.	y s.f. m.f.
a	0	0.165	0	-5.331	0
b	0.888	0.661	0.59	-5.165	-3.03
0	1.625	1.165	1.89	-5	-9.47
1	6.525	4	26.10	-4	-104.40
2	9.013	2	18.03	-3	-54.08
3	9.800	4	39.20	-2	-78.40
4	9.800	2	19.60	-1	-19.60
5	9.800	4	39.20	0	0.00
6	9.800	2	19.60	1	19.60
7	8.238	4	32.95	2	65.90
8	6.838	2	13.68	3	41.03
9	3.613	4	14.45	4	57.80
10	0	1	0	5	0
		SOM 1=	225.28	SOM 2=	-84.65
Aw: Waterlijnopp.: $2 \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot \text{SOM 1} = 1817.26 \text{ m}^2$ Xa: wl. zwaartepunt: $h \cdot \text{SOM 2} / \text{SOM 1} = -4.55 \text{ m}$					

Men herhaalt deze berekening voor de andere waterlijnen (vlaklijn, 1/4-wl, 1/2-wl, 3/4-wl). Zodoende krijgt men voor iedere waterlijn een oppervlak A_w en een waterlijnzwaartepunt x_a . Door vervolgens deze ook weer te Simpsoneren krijgt men een waterverplaatsing, de lengteligging van het drukkingspunt x_B en de hoogteligging van het drukkingspunt K_B ; zie onderstaande Simpsonstabel.

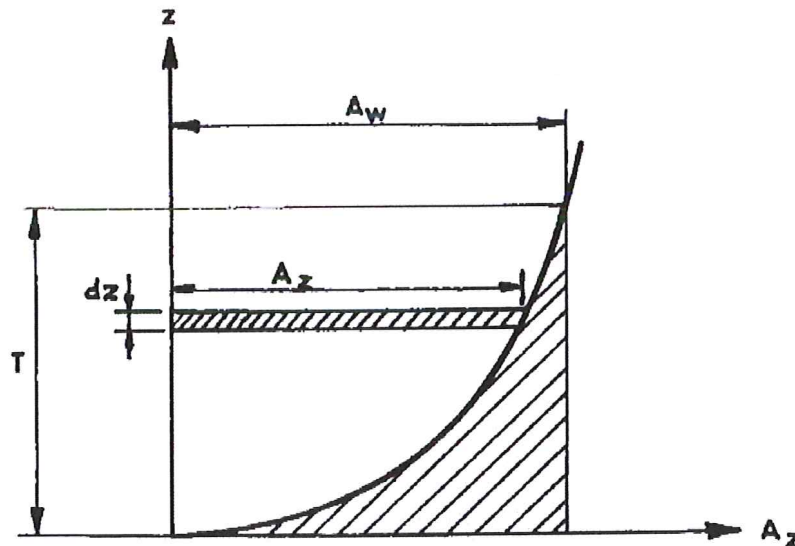
Waterlijn	A_w	s.f.	A_w s.f.	X_a	A_w s.f. X_a	z	A_w s.f. z
Vlak	668.16	1	668.16	1.36	908.70	0.00	0
1/4-WL	1241.93	4	4967.72	-0.61	-3030.31	1.80	8942
1/2-WL	1452.25	2	2904.50	-1.12	-3253.04	3.60	10456
3/4-WL	1598.34	4	6393.36	-2.04	-13042.45	5.40	34524
CWL	1817.26	1	1817.26	-4.55	-8268.53	7.20	13084
		som 1 =	16751.00	som 2 =	-26685.64	som 3 =	67007
Waterverplaatsing: $\frac{1}{3} \cdot (T/4) \cdot \text{som 1} = 10050.60 \text{ m}^3$ B in lengte X_B : $\text{som 2} / \text{som 1} = -1.59 \text{ m}$ B in hoogte K_B : $\text{som 3} / \text{som 1} = 4.00 \text{ m}$							

Het Carènediagram

Het carènediagram is een verzameling van een aantal grafische voorstellingen van uitkomsten van hydrostatische berekeningen voor het schip in rechte stand, zie bijlage 1A en 1B. De krommen worden gegeven als functie van de diepgang. In het diagram worden de vóór- en achterstevencntour aangegeven, de ordinaten en waterlijnen en de nodige hydrostatische krommen. Om nauwkeurig aflezen in het diagram mogelijk te maken wordt de diepgangsschaal afwijkend van de lengteschaal genomen; de lengte van het schip wordt verkleind t.o.v. de hoogte. De krommen voor het drukkingspunt in hoogte en lengte en het waterlijnzwaartepunt worden op dezelfde schaal als de diepgang uitgezet. Het carènediagram is de grondslag voor verdere berekeningen zoals lek-, stabiliteits-, tewaterlatingsberekeningen, enz.

Hierna worden de hydrostatische krommen besproken die een plaats vinden in het diagram.

De kromme van waterlijnoppervlakken



$$2 \int_{-x_T}^{x_T} y \, dx = A_z$$

Oppervlak:
$$\nabla = \int_0^{z_T} A_z \, dz$$

De oppervlakte coëfficiënt van de figuur omsloten door A_z , de lastlijn en de verticale as is een maat voor de verticale prismatische coëfficiënt, immers:

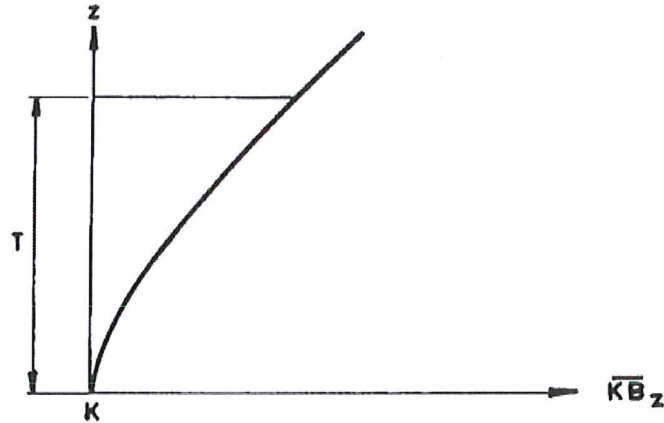
$$\frac{\int_0^{z_T} A_z \, dz}{A_w T} = \frac{\nabla}{L_{ord} \cdot B \cdot c_{wp} \cdot T} = c_{vp}$$

Het zwaartepunt van de figuur geeft de hoogteligging van het drukkingspunt boven de basis: KB.

In het carènediagram wordt vaak de kromme uitgezet, die het gewicht nodig voor één cm diepgangsverandering aangeeft, deze kromme loopt parallel aan de A_z -kromme.

De KB_z kromme

De hoogteligging van het drukingspunt boven de basis als functie van de diepgang.

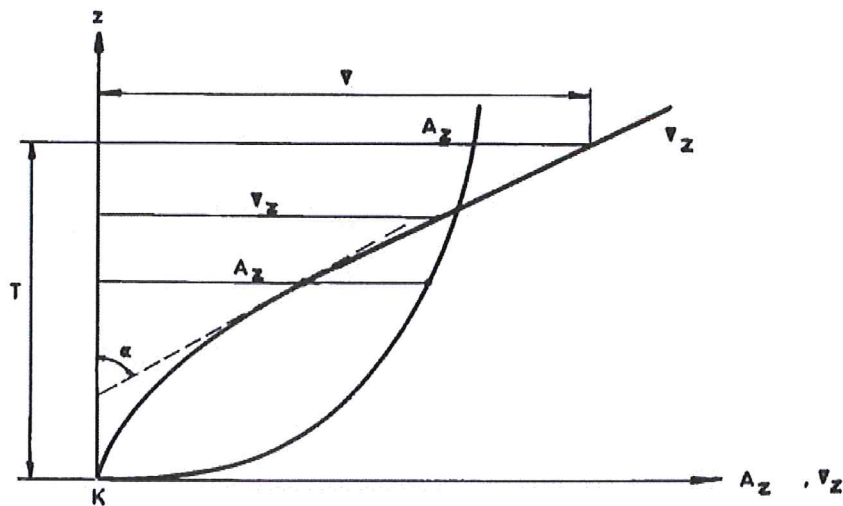


De kromme van waterverplaatsing ∇_z

Uitgezet wordt de inhoud van de carène als functie van de diepgang:

$$\nabla = \int_0^{z_T} A_z dz$$

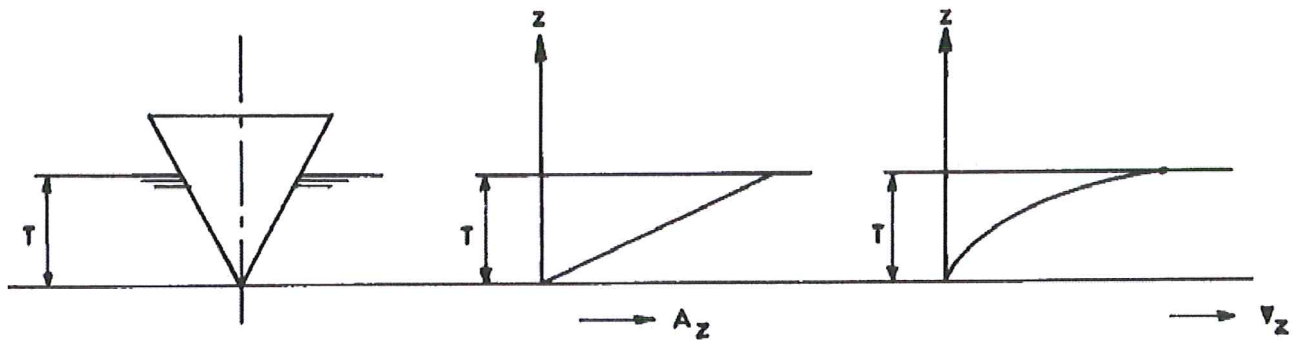
Blijkbaar is ∇_z de integraalkromme van A_z .



De raaklijn aan ∇_z maakt een hoek α met de verticaal. De tangens van deze hoek is een maat voor het waterlijnopervlak:

$$\tan \alpha = \frac{d\nabla_z}{dz} = \frac{d}{dz} \int_0^{z_T} A_z dz = A_z$$

Door een rechthoekige bak is de helling van ∇_z constant, ook A_z is constant; voor een balk met een driehoekige doorsnede is ∇_z een parabool.



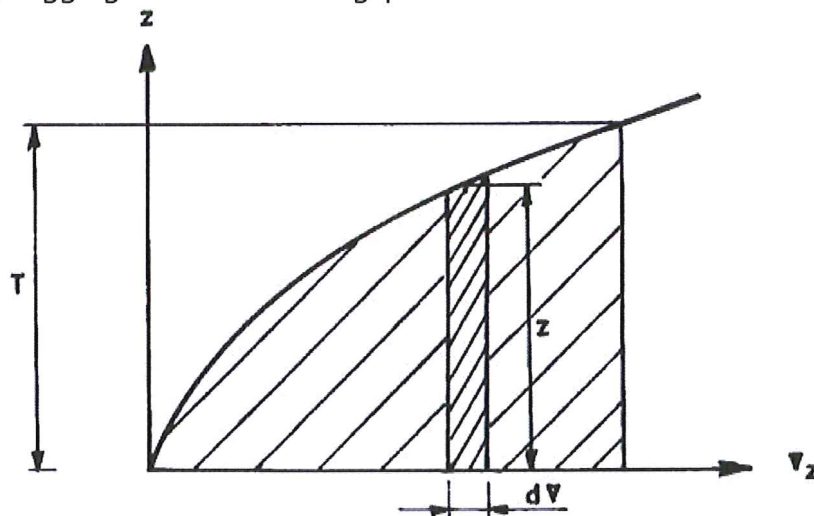
Het oppervlak ingesloten door ∇_z en de rechten T en $T = 0$ is een maat voor het statisch moment van de waterverplaatsing t.o.v. het basisvlak.

Het oppervlak van het gearceerde deel is:

$$A_{\nabla} = \int_0^{z_r} z d\nabla = \int_0^{z_r} z \cdot A_z dz$$

Dit is het statisch moment van ∇ t.o.v. het basisvlak, daarom is: $KB = \frac{A_{\nabla}}{\nabla}$

In principe kunnen met de kromme van waterverplaatsing de volgende grootheden worden bepaald: waterverplaatsing, waterlijncoëfficiënt, verticale prismatische coëfficiënt en de hoogteligging van het drukingspunt.



De kromme van waterverplaatsing met huid en aanhangsels

$\nabla_z = c\nabla$ $c =$ coëfficiënt voor huid en aanhangsels

$c = 1.004$ à 1.010

De kromme van displacement

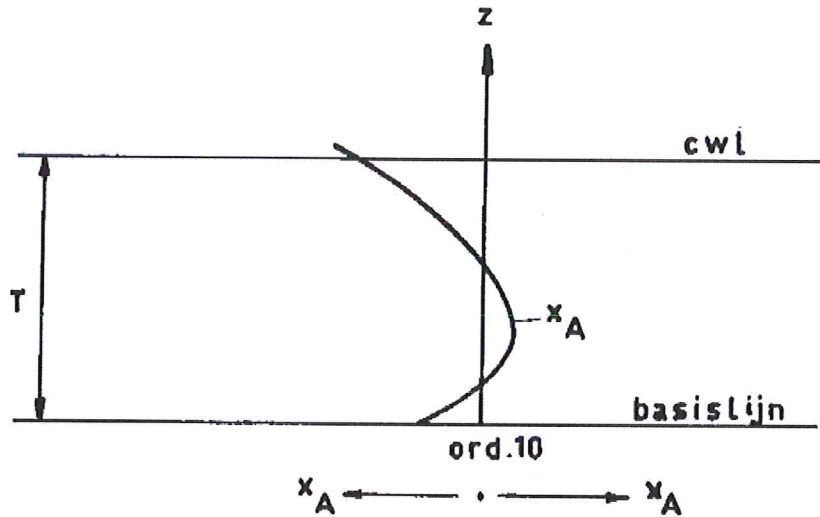
Δ_1 in zoet water, Δ_2 in zeewater

1 of 2: $\Delta_{1/2} = \rho c \nabla$ $\rho =$ soortelijk gewicht van de vloeistof (dit is voor Noordzeewater 1.025 t/m^3).

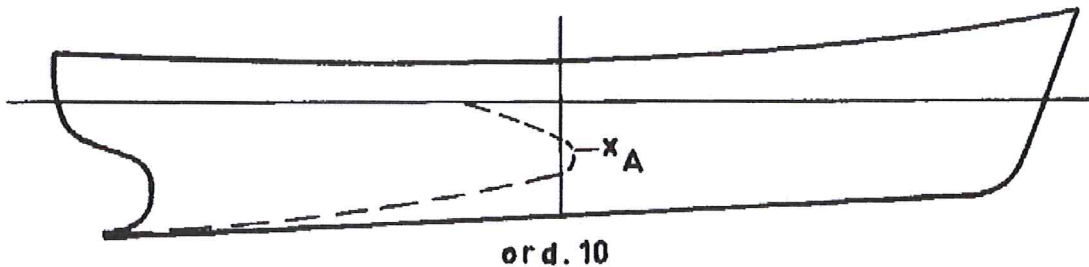
De kromme van waterlijnzwaartepunten: x_A

Voor een waterlijn z volgt x_A uit:

$$x_A = \frac{2 \int_{-x_T}^{x_T} xy \, dx}{A_z}$$



Meestal wordt x_A gerekend tot ord.10. Bij een gelijklastig schip met vlaktilling moet voor $z = 0$ voor x_A het midden van de kiellijn gekozen worden. Bij een schip met ontwerp stuurlast gaat de x_A -kromme door het laagste punt van de carène.

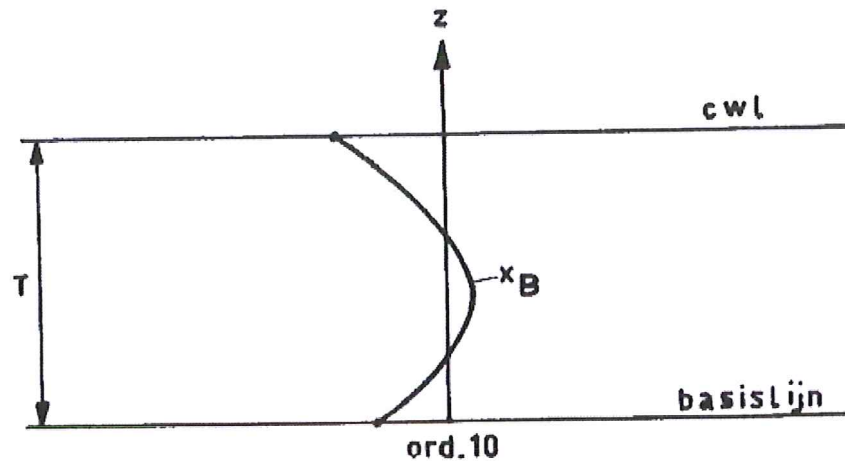


De kromme van drukingspunten in lengte: x_B

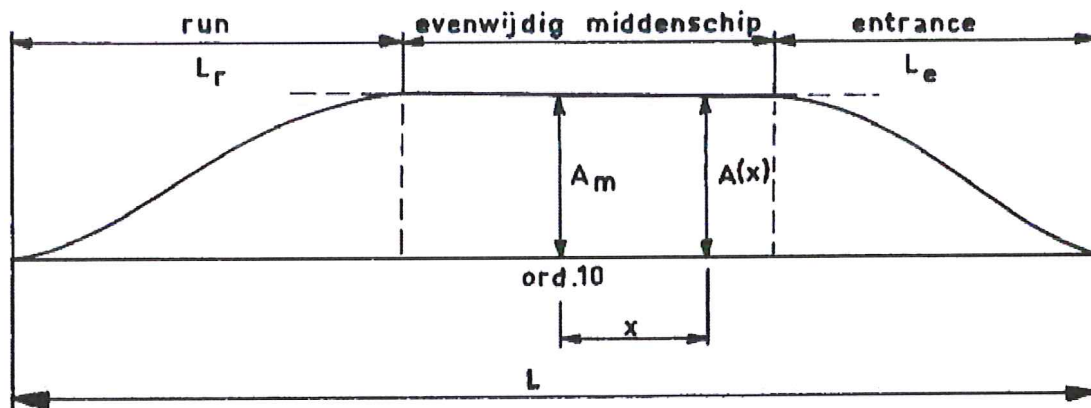
Uit het voorgaande is gebleken dat de plaats van B in lengte op twee manieren te bepalen is (zie blz. 3.4 en 3.5), namelijk:

$$x_B = \frac{\int_0^{z_T} 2 \int_{-x_T}^{x_T} xy \, dx \, dz}{\nabla} \quad \text{uitgaande van de waterlijnen}$$

$$x_B = \frac{\int_{-x_T}^{x_T} A_x \cdot x \, dx}{\nabla} \quad \text{uitgaande van de spantoppervlakken}$$



De kromme van spantoppervlakken
Dit is de Ax-kromme op basis van x.



Het oppervlak van de figuur omsloten door deze kromme en de basis is een maat voor de waterverplaatsing:

$$\nabla = \int_{-x_T}^{x_T} A_x dx$$

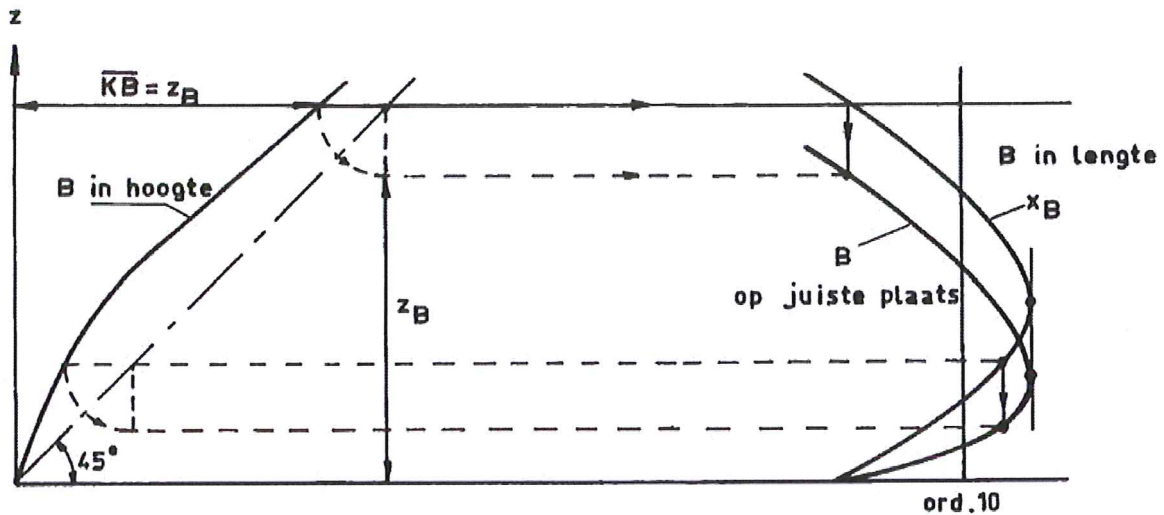
De oppervlakte coëfficiënt van de figuur is de prismatische coëfficiënt, immers:

$$\frac{\nabla}{A_m L_{ord}} = c_p$$

De oppervlakte coëfficiënt van het deel vóór ord.10 komt overeen met de prismatische coëfficiënt van het voorschip c_{pf} en van het deel achter ord.10 met de prismatische coëfficiënt van het achterschip c_{pa} .

De kromme van B op de juiste plaats

De coördinaten van B in lengte en hoogte, resp. x_B en KB , definiëren de kromme van B op de juiste plaats. De constructie volgt uit de volgende figuur.

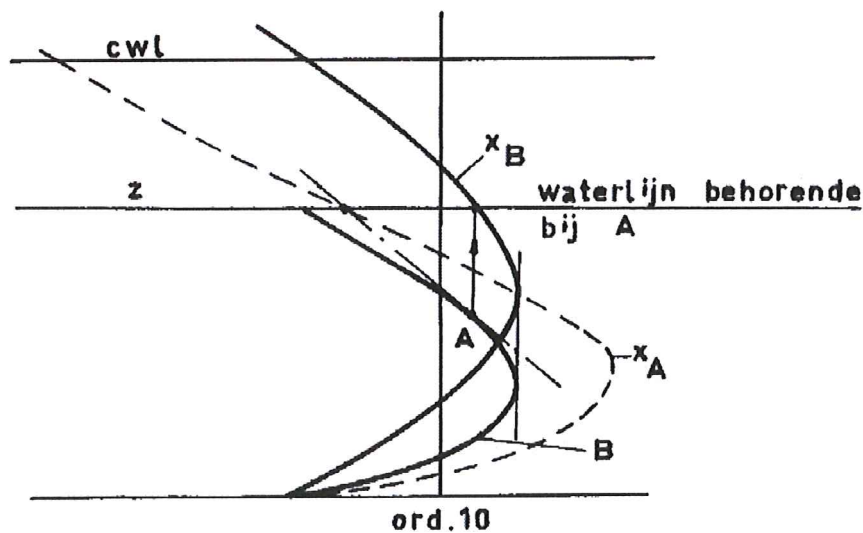


Er zijn nu drie krommen, namelijk x_B , KB en x_A , die op de diepgangsschaal uitgezet zijn en die een onderlinge controle op de juistheid van de berekeningen mogelijk maken.

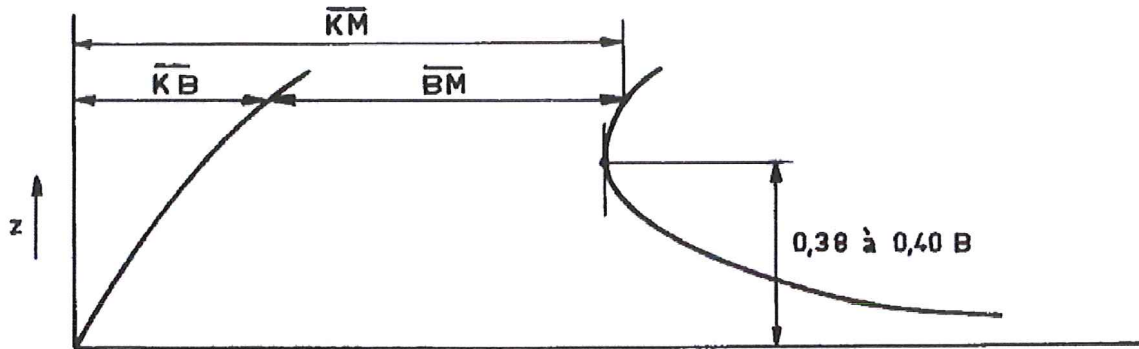
a. De krommen x_B en KB hebben een gemeenschappelijke verticale raaklijn indien een maximum of minimum in horizontale richting in x_B aanwezig is.

b. De raaklijn aan een willekeurig punt van de B -kromme bevat het zwaartepunt van de bijbehorende waterlijn.

- Indien de krommen B op de juiste plaats en x_B een gemeenschappelijke verticale raaklijn hebben, dan gaat deze raaklijn door het snijpunt van de x_A -kromme en de x_B -kromme.



De kromme van dwarsmetacenterhoogten
 Gewoonlijk ordt in het carènediagram uitgezet:



De kromme KM heeft in vele gevallen een minimum bij een diepgang $T = 0.38 \text{ à } 0.40 B$. Vaak wordt de kromme van het dwarstraagheidsmoment uitgezet.

De kromme van langsmetacenterhoogten

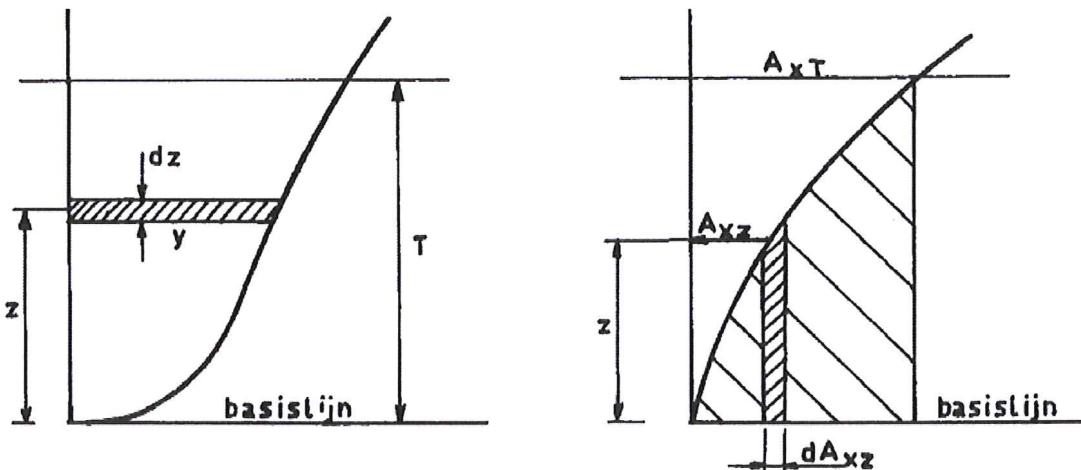
Het langsmetacenter is bepaald door $BM_L = I_L / \nabla$, waarin I_L het langstraagheidsmoment van

de waterlijn voorstelt t.o.v. een dwarsscheepse as door het waterlijnswaartepunt. BM_L is van de orde van grootte van de scheepslengte en daarom is het niet mogelijk om dezelfde schaal aan te houden als voor de KB-kromme. Vaak worden nog het dwars- en langstraagheidsmoment uitgezet evenals het moment dat nodig is voor één cm totale trimverandering.

Bonjeankrommen

Dit zijn de integraalkrommen van de spanten; als het spant gegeven is door $y = f(z)$, dan is het oppervlak tot aan de waterlijn z :

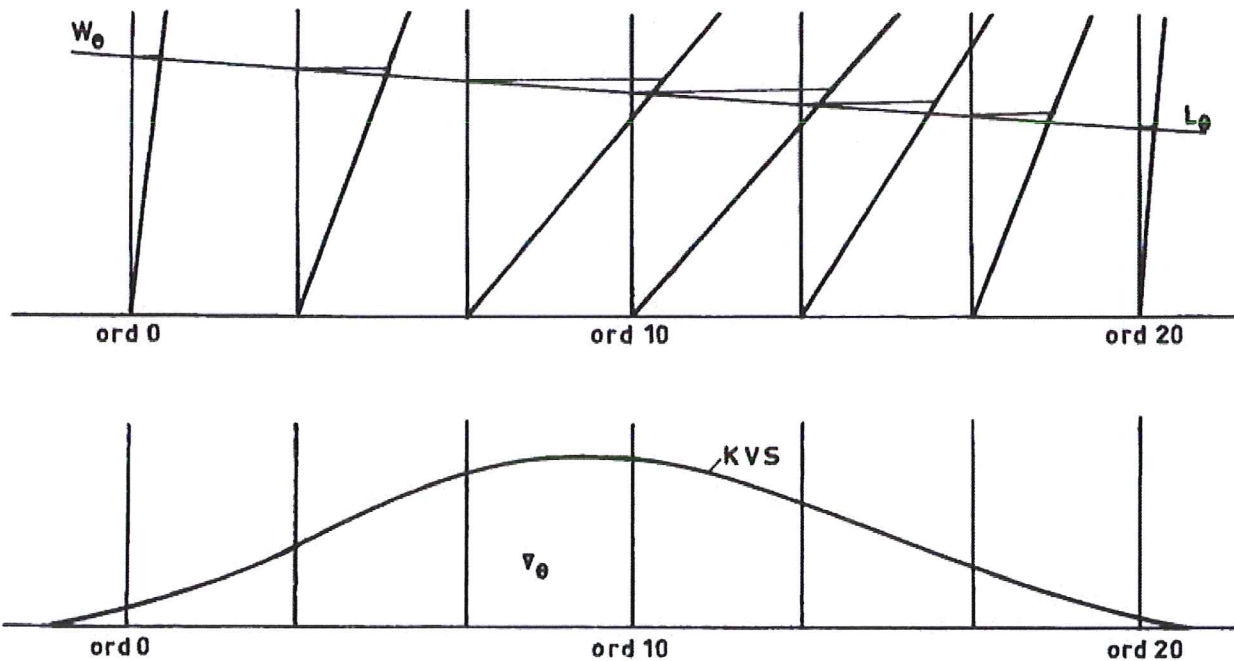
$$A_{xz} = 2 \int_0^z f_z dz$$



Het oppervlak van de figuur gevormd door de Bonjeankromme, de basis en de lijn A_{xT} is een maat voor het statisch moment van het spant t.o.v. de basis, immers het oppervlak is:

$$\int_0^T z dA_{xz} = 2 \int_0^T yz dz = S_{yx}$$

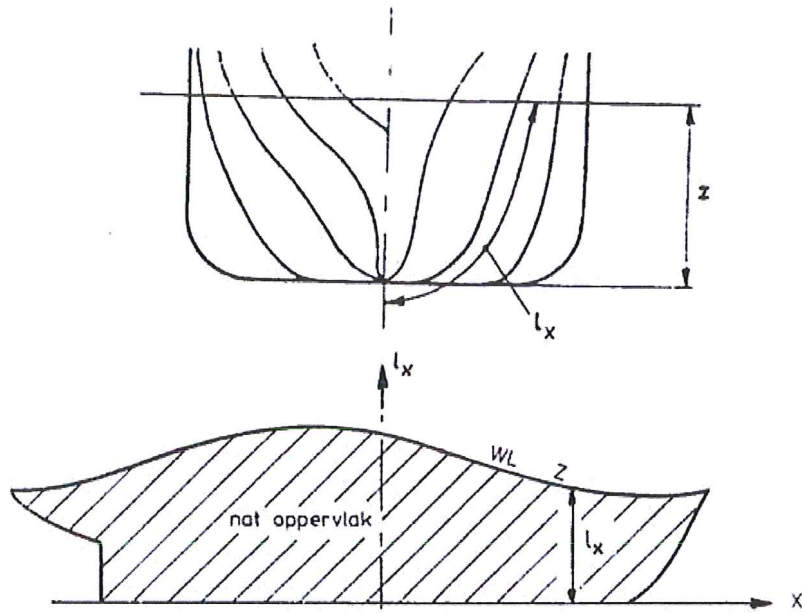
Uit de linkerfiguur blijkt dat dit het statisch moment is van A_{xT} t.o.v. de basis. De Bonjean-krommen worden gebruikt om de waterverplaatsing behorende bij een willekeurige waterlijn te berekenen. Zij worden daartoe op de bijbehorende ordinaat uitgezet.



Berekening "nat oppervlak"

Het zogenaamde nat oppervlak is van belang voor het berekenen van de wrijvingsweerstand van het schip; deze weerstandscomponent is namelijk recht evenredig met het nat oppervlak. Het nat oppervlak kan worden bepaald door per ordinaat de ontwikkelde lengte l_x te bepalen, uit te zetten over de lengte van het schip en daarna te integreren.

$$S_z = 2 \int_{-x_T}^{x_T} l_x dx$$



Er wordt geen rekening gehouden met de kromming van het schip in lengterichting. De fout in nat oppervlak die hierdoor ontstaat is voor de bepaling van de wrijvingsweerstand niet van belang.

Bijlage 1A

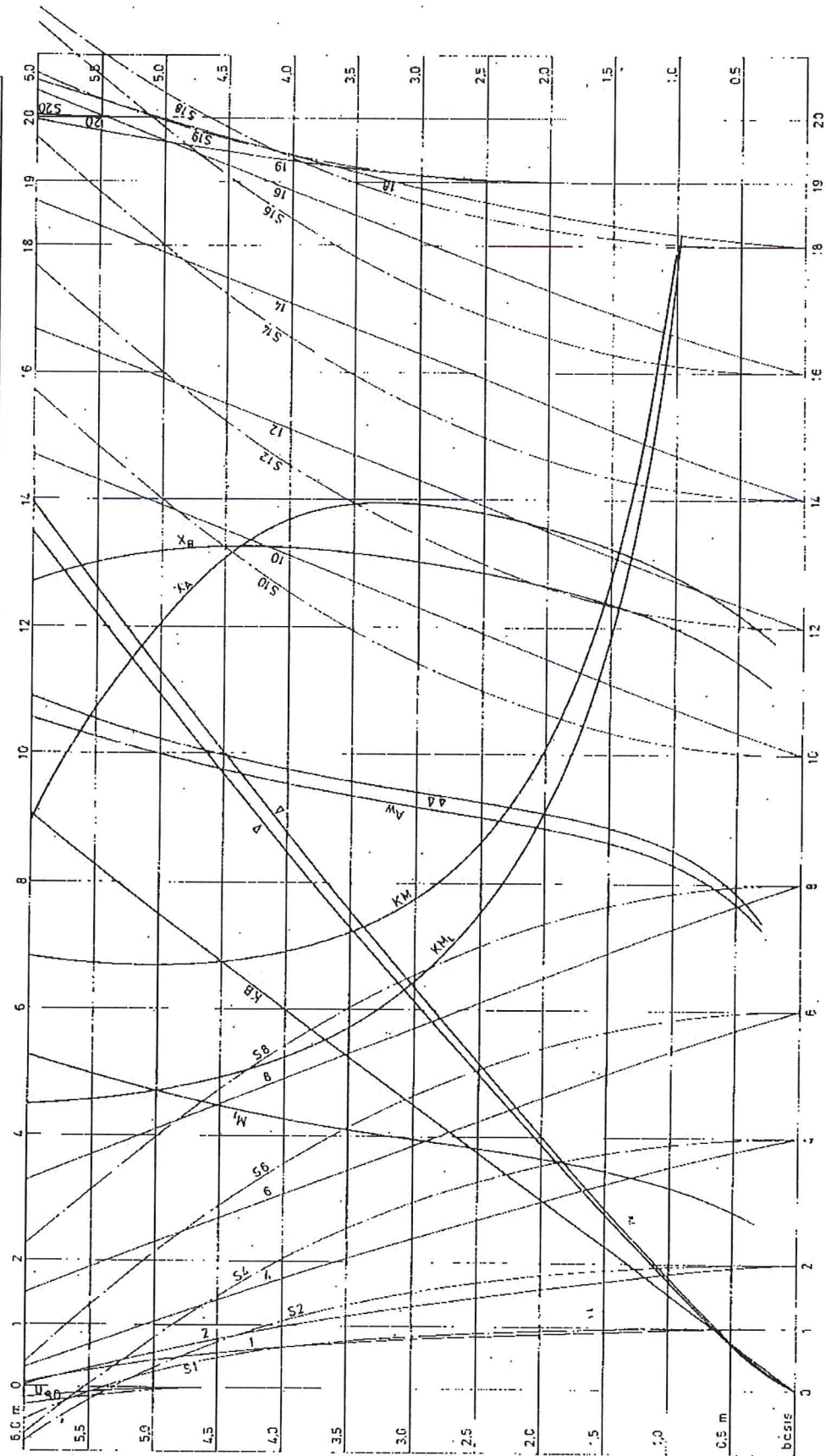
CARÉDIAGRAM

motorvrachtschip
 lengte fussen ord. 75,00 m
 breedte 14,00 m
 holte 5,20 m
 diepgang 5,11 m

GRAFISCHE VOORSTELLINGEN

benaming	cap. : cm komt deling	meten met/uit ord.
volume op binnenkant huid	V	200 m ³
displacement met huid en aansangels in zee	Δ	200 t
gek. nodig voor 1 cm diepgangsverandering	ΔΔ	35 t
moment nodig voor 1 cm totale trimverandering	M ₁	5 t m
spantoppervlakken (boonjeankrammen)	ord. nr.	10 m ²
spantmomentkrammen	S ord.nr.	25 m ³
oppervlak waterlijnen	AW	50 m ²

benaming	cap. : cm komt deling	meten met/uit ord.
drukingspunt boven basis	KB	0,20 m
drukingspunt in lengte	X _B	0,20 m
zwaartepunt waterlijnen	X _A	0,20 m
zwaartemomentrum boven basis	KM	0,50 m
langsmomentrum boven basis	KM _L	10 m



Bijlage 2A

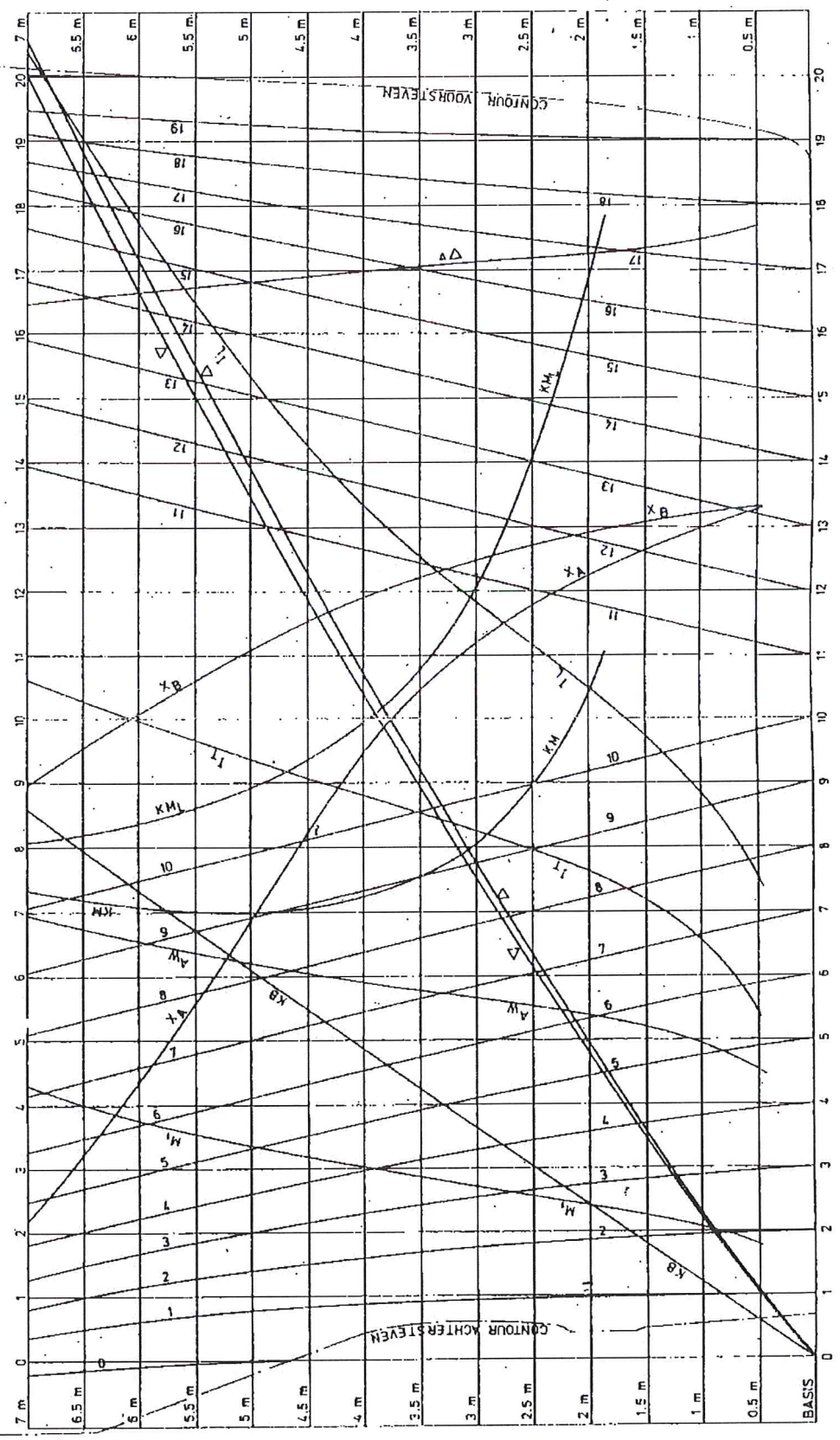
CARÈNE DIAGRAM I

LENGTE OVER ALLES 103.36 m
 LENGTE TUSSEN ORD. 94.00 m
 BREEDTE NAAR DE MAL 14.80 m
 HOLTE TOT HOOFDEK 8.30 m
 DIEPGANG 70.30 m

GRAFISCHE VOORSTELLINGEN

BENAMING	AAN- DUING	1 cm KOMT OVEREEN MET/UIT ORD.	METEN
VOLUME OP BINNENKANT HUID	∇	200 m ³	C
DEPLACEMENT MET HUID EN AANH. IN ZEEW.	Δ	200 t	0
GEW. NODIG VOOR 1 cm DIEPGANGSVERANDERING	ΔΔ	2 t	20
MOMENT NODIG VOOR 1 cm TOTALE TRIMVERANDERING	M ₁	10 tm	0
SPANTOPPERSYLLAKKEN (BONJEANKROMMEN):	OPD. NR.	20 m ²	NR.
OPPERVLAK WATERLIJNEN	AW	100 m ²	0
DRUKKINGSPUNT BOVEN BASIS	KB	0.25 m	0

BENAMING	AAN- DUING	1 cm KOMT OVEREEN MET/UIT ORD.	METEN
DRUKKINGSPUNT IN LENGTE	XB	0.25 m	10
ZWAARTEPUNT WATERLIJNEN	XA	0.25 m	10
DWARSTRAAGH.MOM. WATERLIJNEN	IT	1000 m ⁴	0
LANGS	IL	20000 m ⁴	0
DWARSMETACENTRUM BOVEN BASIS	KM	0.5 m	0
LANGS	KML	7.5 m	0



4. STABILITEIT

Met behulp van de voorgaande hoofdstukken zijn we in staat een oppervlak of volume te berekenen en het bijbehorende zwaartepunt.

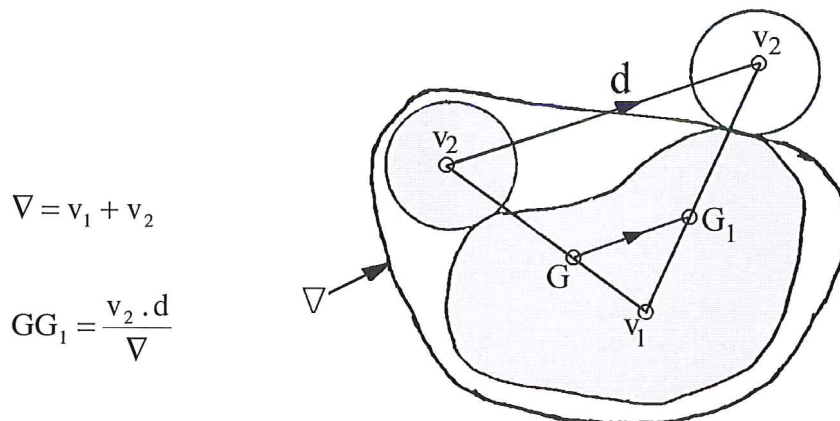
Eerst zullen we ons in de hierna volgende beschouwingen beperken tot het verticale evenwicht en de momenten om de langsscheepse as.

Dit betreft dus : **DWARSSCHEEPS EVENWICHT**

Bij de beschouwing van het dwarsscheeps evenwicht zal veel gebruik gemaakt worden van de zogenaamde **verschuivingswet**. Deze heeft betrekking op de plaatsverandering van het gemeenschappelijke zwaartepunt van twee (een stelsel) oppervlakken, volumina of massa's ten gevolge van een onderlinge positie verandering.

De wet luidt:

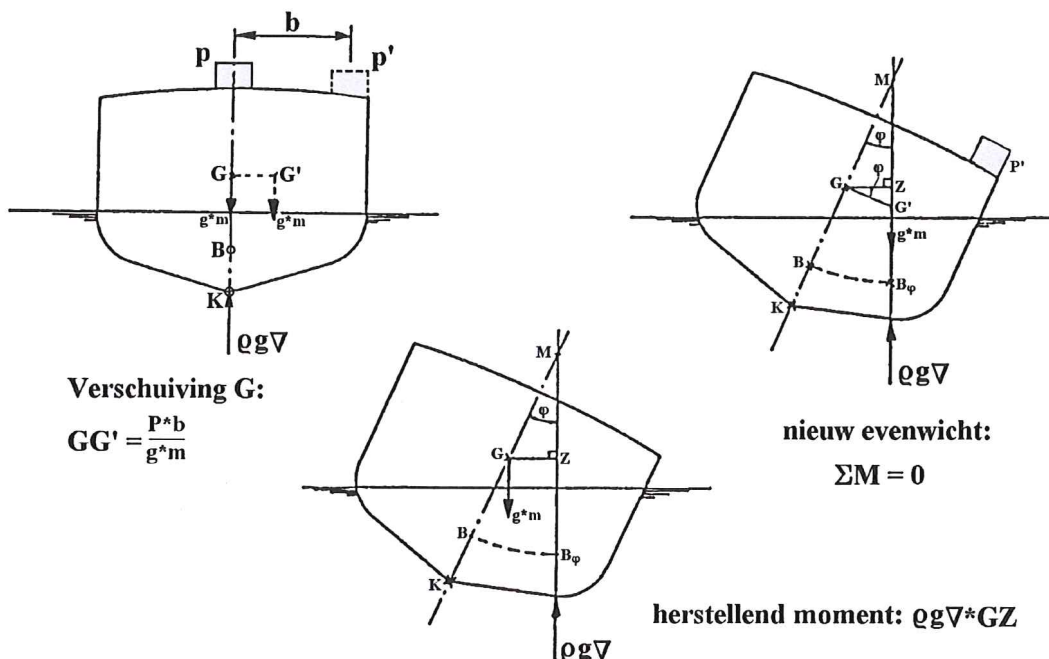
Als van een oppervlak, volume of massa ∇ een gedeelte v over een afstand d wordt verplaatst, dan verplaatst het zwaartepunt zich evenwijdig aan de verplaatsing van v over een afstand die gelijk is aan $v * d / \nabla$



$$\nabla = v_1 + v_2$$

$$GG_1 = \frac{v_2 \cdot d}{\nabla}$$

Bezien wij nu het evenwicht van een zich in rust verkerende maritieme constructie, bijvoorbeeld een schip. Op het dek van het schip bevindt zich een massa p .



Het totale zwaartepunt van het schip + de massa p (G) verplaatst zich, in overeenstemming met de verschuivingswet, evenwijdig aan b naar de positie G_1 over de afstand $GG_1 = p \cdot b / \nabla$.

Er is nu een verstoring van het oorspronkelijke evenwicht. De som van de verticale krachten blijft onveranderd gelijk aan nul, maar het gewicht met werklijn door G_1 en de oprijvende kracht met werklijn door B vormen nu samen een koppel onder invloed waarvan het schip rechtsom wil kantelen.

Er treedt een **kenterend moment** op. Dit veroorzaakt een hoekverdraaiing van het schip. De hieruit voortvloeiende asymmetrie van het onderwater volume van het schip resulteert in een verplaatsing van het drukkingspunt B naar rechts en wel zover totdat die situatie is ontstaan waarbij het gewicht en de oprijvende kracht weer dezelfde werklijn hebben.

Er wordt dan opnieuw aan de evenwichtsvoorwaarden voldaan.

Het zwaartepunt van het door de helling ontstane asymmetrische ondergedompelde volume noemt men B_φ , het drukkingspunt bij hellingshoek φ .

We kunnen ook stellen dat, als een drijvende constructie door één of andere oorzaak uit zijn evenwicht wordt gebracht en een hellingshoek aanneemt, dan ontstaat er een oprijvend koppel, het herstellende moment genoemd ter grootte van:

$$M_{ST} = \rho g \nabla \cdot GZ$$

$$M_{ST} = \rho g \nabla \cdot GM \sin \varphi$$

waarbij M het snijpunt is van de werklijnen van de oprijvende kracht met het middel-langsvlak bij hellingshoek nul en een zeer kleine hellingshoek.

M noemt men het **metacenter**.

Uit het feit dat het herstellend moment ontstaat uit de relatieve verschuiving van het drukkingspunt ten opzichte van het massazwaartepunt, valt te concluderen dat de grootte van dit moment in hoofdzaak bepaald wordt door de vorm van het drijvende object en wel in het bijzonder het ondergedompelde of onder te dompelen gedeelte en de mate waarin asymmetrie optreedt ten gevolge van helling.

Het blijkt dat deze relatieve verschuiving niet altijd aanleiding geeft tot het ontstaan van een stabiliteitsmoment dat het schip wil terug brengen naar zijn oorspronkelijke evenwichtssituatie.

Dit is slechts zo mits aan bepaalde voorwaarden wordt voldaan.

Hiermee introduceren we het begrip **STABILITEIT**, waarop we nu wat verder zullen ingaan.

Tot nu toe hebben we alleen gekeken of er in een bepaalde situatie sprake is van een evenwicht, ofwel of er in die situatie voldaan is aan de evenwichtsvoorwaarden.

Van belang is echter ook om te weten of de evenwichtssituatie **stabiel** is of niet.

Wat verstaat men onder stabiliteit van een evenwicht?

De stabiliteit van een star lichaam in evenwicht wordt als volgt omschreven:

DEFINITIE.

"Indien een star lichaam, als het, uitgaande van een evenwichtssituatie, onderworpen wordt aan een kleine verstoring, tendert terug te keren naar de oorspronkelijke evenwichtssituatie als deze verstoring wordt opgeheven, dan bezit dit lichaam in deze evenwichtssituatie een **positieve stabiliteit**. Indien na het opheffen van deze verstoring het lichaam in een nieuwe evenwichtssituatie terecht komt dan spreekt men van een **neutrale stabiliteit**. Als echter na het opheffen van de kleine verstoring het lichaam zich steeds verder van de oorspronkelijke evenwichtssituatie verwijderd dan spreekt men van een **negatieve stabiliteit**".

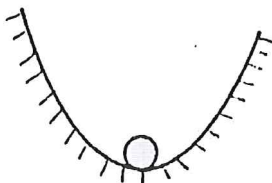
Het is niet goed mogelijk om een eenvoudig algemeen geldende regel op te stellen, waarmee bij iedere verplaatsing onmiddellijk kan worden uitgemaakt welke van de drie bovenstaande gevallen zich voordoet. Men dient dus voor iedere evenwichtssituatie na te gaan of bij een veronderstelde verstoring, belasting of verplaatsing in de nieuwe situatie, reacties ontstaan die met de op het lichaam werkende krachten ervoor zorgen dat het lichaam terug wil naar de oorspronkelijke evenwichtsstand.

Aan vele in evenwicht zijnde lichamen stelt men de eis dat zij geen blijvende uitwijking krijgen ten gevolge van een mogelijke wijziging van de op het lichaam werkende krachten. Wordt hieraan voldaan dan zegt men dat het lichaam stabiel is.

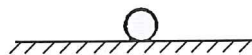
Door verandering van slechts een van de aanwezige krachten of door toevoeging van een nieuwe kracht wordt het evenwicht verstoord en moet er derhalve beweging ontstaan. Veelal zal een dergelijke wijziging ook verandering brengen in de reactiekrachten waardoor het evenwicht behouden blijft. Dit blijkt bijvoorbeeld uit de beschouwing van een horizontale balk welke aan de twee uiteinden ondersteund wordt en ergens tussen de steunpunten een last draagt. Vergroting van de last heeft een wijziging van de reacties tot gevolg waardoor de oorspronkelijke evenwichtstoestand behouden blijft. Stabiel evenwicht kan derhalve betekenen dat of de constructie in rust is en in rust blijft als er (binnen bepaalde grenzen) een verstoring van het evenwicht plaats vindt of dat een constructie onder invloed van de verstoring een nieuw evenwicht inneemt hetzij dat na het wegnemen van de verstoring de constructie naar de oorspronkelijke evenwichtssituatie terugkeert. Een stabiele constructie is derhalve instaat een bepaalde externe belasting te trotseren.

We zullen dit toelichten met een paar voorbeelden.

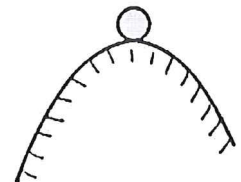
Voorbeeld 1



situatie 1



situatie 2



situatie 3

In de onderstaande figuur staat een kogeltje afgebeeld liggend op een vlak.

In situatie 1 bevindt het kogeltje zich in een "dal", in situatie 2 op een horizontaal vlak en in situatie 3 op een "heuvel".

In elk van de drie situaties is er sprake van een evenwicht.

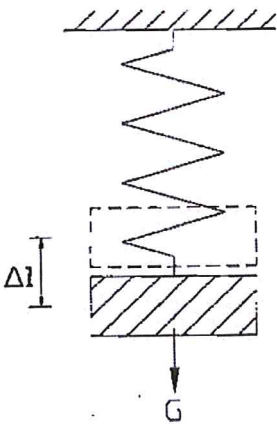
Ondervindt het kogeltje in situatie 1 een verstoring van zijn evenwicht welke even later weer verdwijnt dan rolt het kogeltje terug naar zijn oorspronkelijke evenwichtspositie: er is sprake van een stabiel evenwicht.

Gebeurt dat zelfde in situatie 2 dan rolt het kogeltje weg en blijft op een andere plek liggen: indifferent evenwicht.

In situatie 3 zal een kleine verstoring aanleiding zijn tot het weggrollen van het kogeltje van de heuvel af. Het kogeltje keert niet terug in de oorspronkelijke evenwichtssituatie maar verwijdt zich steeds verder. Er ontstaat geen nieuw evenwicht, er is sprake van instabiel of labiel evenwicht.

Een iets andere beschouwing van de drie situaties leert dat wanneer er een extra kracht wordt uitgeoefend op een in evenwicht verkerend lichaam en dit lichaam hierdoor in een andere evenwichtssituatie komt, doordat er een herstellende kracht ontstaat, er sprake is van een stabiel evenwicht. Ontstaat die tegenwerkende kracht niet dan is er sprake van indifferent evenwicht. Ontstaat er een kracht welke het evenwicht nog verder verstoort dan is er sprake van labiel evenwicht.

Voorbeeld 2



Er hangt een bekende massa aan een lineaire veer. Zoals eerder getoond is er sprake van een evenwicht. Wordt de massa door een externe kracht F^1 een klein stukje naar beneden bewogen over een afstand Δl dan ontstaat er een kracht $\Delta F = c * \Delta l$ omhoog op de massa, welke zorgt voor een nieuw evenwicht als $\Delta F = c * \Delta l = F^1$.

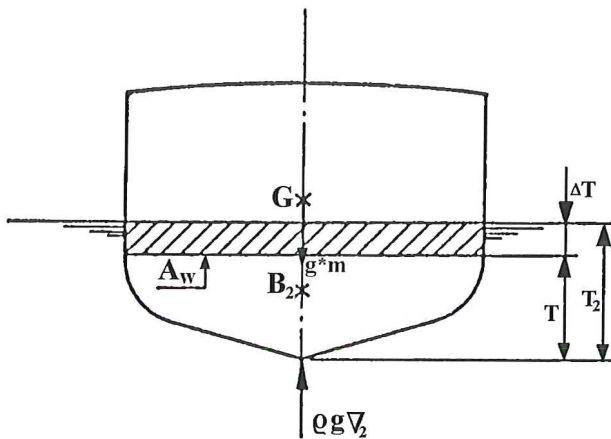
Verdwijnt de verstoring dan zorgt ΔF ervoor dat de massa terugkeert naar de oorspronkelijke evenwichtssituatie. Er is een stabiele evenwichtssituatie. Eenzelfde redenering geldt voor een verplaatsing omhoog van de massa.

Voorbeeld 3

Een analogie wordt gevonden bij het beschouwen van het verticale evenwicht van een drijvend lichaam. Drijft het lichaam rechtop liggend dan maakt het gewicht evenwicht met de waterverplaatsing. Wordt het lichaam over een kleine afstand naar beneden verplaatst dan ontstaat een extra opdrijvende kracht ter grootte van het gewicht van het extra ondergedompelde volume.

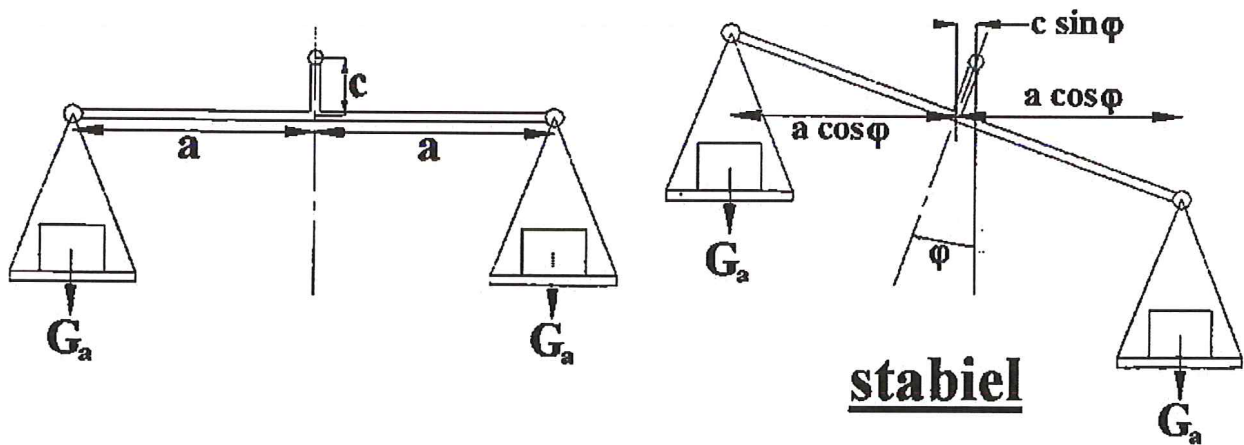
Dit is gelijk aan $\rho g A_w * \Delta T$, waarin A_w het waterlijnopervlak is. Verdwijnt de verstoring dan keert het lichaam terug in zijn oorspronkelijke evenwichtsstand. De term $\rho g A_w$ is te vergelijken met de veerterm in het eerdere voorbeeld.

Een analoge beschouwing geldt voor een verplaatsing omhoog.



Voorbeeld 4

In de onderstaande figuur is een schematische weergave gegeven van een waag:



Zoals bekend is de waag in evenwicht als de massa's aan beide zijden gelijk zijn. Dit wordt eenvoudig gevonden door de evenwichtsvoorwaarden toe te passen rond het scharnierpunt.

De vraag is nu of dit evenwicht ook stabiel is. Beschouwen wij daartoe een kleine verstoring van het evenwicht zoals gegeven in de rechter figuur. Het momenten evenwicht rond het scharnierpunt wordt nu:

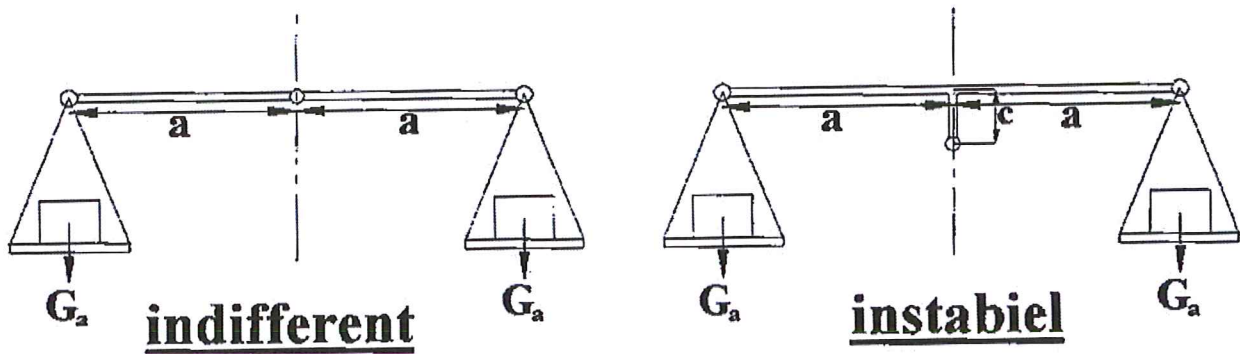
$$G_a \cdot (a \cos \varphi + c \sin \varphi) - G_a \cdot (a \cos \varphi - c \sin \varphi) = M_{ST}$$

waaruit blijkt dat na verwijdering van de verstoring de waag weer terug keert naar zijn oorspronkelijke evenwichtsstand.

De voorwaarde voor het evenwicht is klaarblijkelijk gelegen in de term:

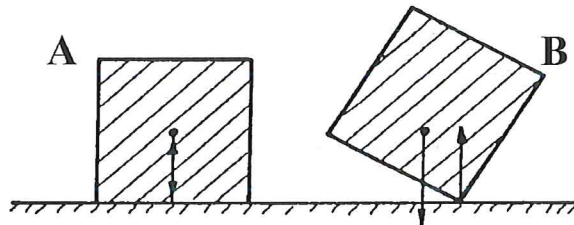
$$M_{ST} = 2G_a c \sin \varphi$$

hoe groter c , hoe groter het herstellende moment, hoe groter de stabiliteit. Omgekeerd geldt bij negatieve c een instabiel evenwicht. Zie onderstaande figuur.

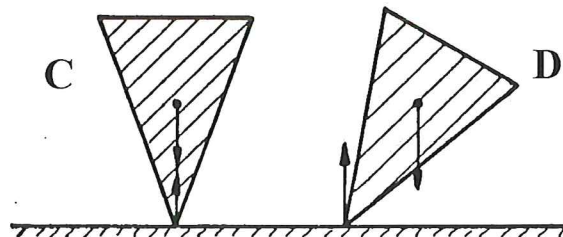


Voorbeeld 5

stabiel



**instabiel
(labiel)**



In de figuur A staat een blokje getekend staande op een plat vlak. De reactiekracht van het vlak op het blokje is even groot en tegengesteld met het gewicht van het blokje. Er is sprake van verticaal evenwicht.

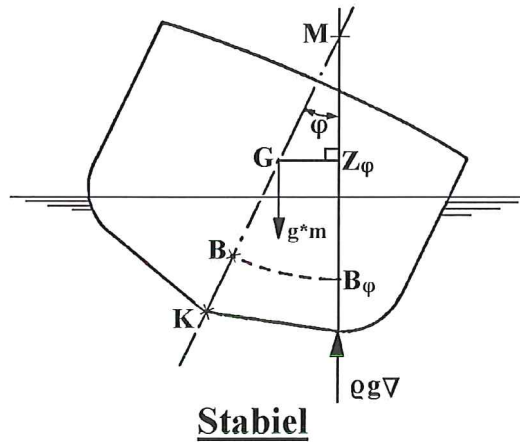
Verschuiven we het blokje over een kleine afstand dan blijft het daar staan als we onze handen ervan af halen. In dat opzicht is het evenwicht indifferent, mits het vlak horizontaal is.

Kantelen we het blokje over een klein hoekje $d\phi$ dan krijgen we de situatie zoals geschetst in de figuur B. De reactiekracht verschuift naar de uiterste hoek van het blokje. Er ontstaat met het gewicht een herstellend koppel dat het blokje wil doen terug kantelen naar zijn oorspronkelijke evenwichtsstand. Het evenwicht is stabiel. De stabiliteit hangt af van de arm van het herstellend koppel en dus van de hoogte - breedte verhouding van het blokje. Geheel anders is dat in de figuur C waarin een kegel op zijn top is getekend. Zuiver rechtopstaand is er sprake van een evenwichtsstand, maar het is zeker niet stabiel, zoals blijkt uit de figuur D waarin het kegeltje over een klein hoekje is verdraaid. Aangezien de reactiekracht nu niet van plaats verandert is er een moment ontstaan dat de helling kracht te vergroten: instabiel evenwicht.

Ook hier blijkt de verschuiving van de reactiekracht onder invloed van de verstoring maatgevend voor de stabiliteit.

Een zelfde situatie treffen we aan bij het dwarsscheepse evenwicht van drijvende maritieme constructies, bijvoorbeeld een schip.

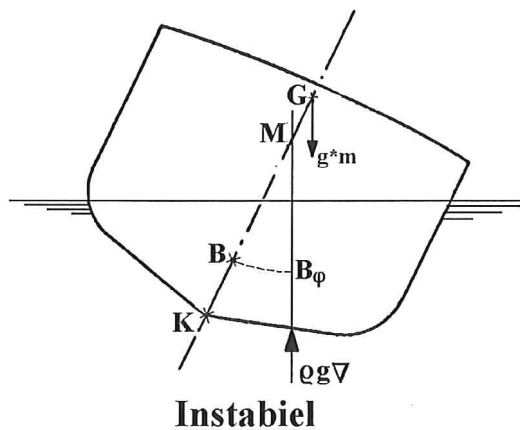
Voorbeeld 6



In de bovenstaande figuur is de dwarsdoorsnede van een schip getekend welke onder een kleine helling ligt. Het massa zwaartepunt van de constructie is G.

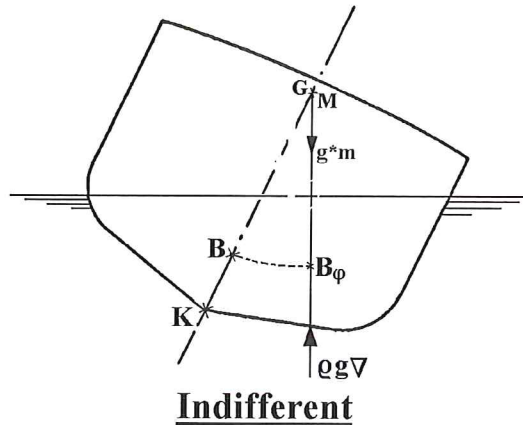
Het volume zwaartepunt van het verplaatste water is ten gevolge van de, door de helling ontstane, asymmetrie van de romp verplaatst van B naar B_φ . De werklijn van de oprijvende kracht snijdt het middenlangsvlak nu in M. Het gewicht G en de oprijvende kracht $\rho g \nabla$ vormen samen een koppel met als arm GZ. In het getekende geval is het koppel zodanig van teken dat het de ontstane hellingshoek wil verkleinen: er is daardoor sprake van een stabiel evenwicht rond het punt $\varphi = 0$. Dit is steeds het geval zolang M (het metacenter) **boven** ligt of wel **GM positief** is.

Ligt het snijpunt van de werklijn van de oprijvende kracht met het middenlangsvlak onder G (zie onderstaande figuur) dan is het resulterende koppel tussen oprijvende kracht en gewicht zodanig van richting dat de hellingshoek wordt vergroot: er is sprake van een labiel evenwicht en van een **negatieve GM** waarde.



Vallen G en M samen dan ontstaat er geen resulterend koppel tussen de beide krachten en is er sprake van een indifferent evenwicht en $GM = 0$.

Zoals gezegd is er ook hier sprake van een stabiel evenwicht "onder voorwaarden".



Van belang hiervoor zijn: de hoogteligging van G (de afstand KG) en de verschuiving van het punt B ten gevolge van helling. De hoogteligging van G wordt geheel en al bepaald door de uitvoering van de constructie en de belastingstoestand van het schip. De verschuiving van het punt B onder helling wordt bepaald door de vorm van het (onderwater)schip en de verandering hiervan ten gevolge van helling.

Om een indruk te krijgen van de stabiliteit van een drijvend object is het klaarblijkelijk essentieel om de verplaatsing van het punt B onder helling te kennen.

De hiervoor noodzakelijke hulpmiddelen staan ons inmiddels ter beschikking: door de onderwater vorm onder helling vast te leggen is het mogelijk om met behulp van numerieke integratie het volume en het zwaartepunt hiervan te bepalen. Dit is nauwkeurig maar nogal arbeidsintensief.

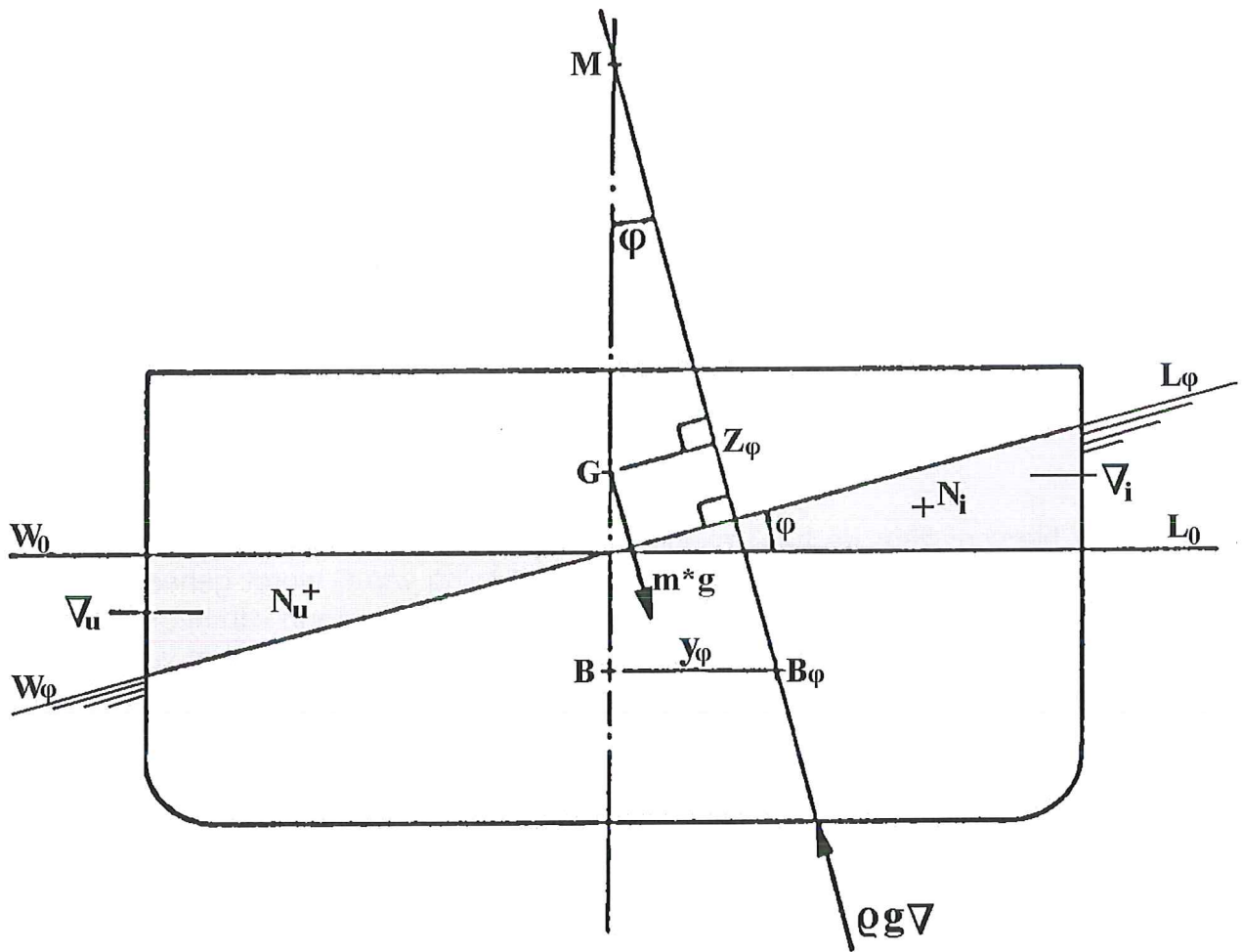
Derhalve zijn er methoden ontwikkeld om de verplaatsing van B te benaderen en daarmee de positie van M vast te leggen.

Wil men een inzicht in de stabiliteit van een drijvende constructie rechtop liggend rond $\varphi = 0$ dan valt een relatief eenvoudige formule af te leiden.

Door het meenemen van enkele beperkingen ten aanzien van de rompvorm is het mogelijk deze benadering uit te breiden voor grotere hellingshoeken. Daarboven is de bepaling van de stabiliteit slechts mogelijk door uitgebreide berekeningen te gebruiken.

Bekijken we nu eerst het evenwicht rond $\varphi = 0$ dus bij zeer kleine hellingshoeken. Zie de figuur.

Getekend is een dwarsdoorsnede van een schip. Het massa zwaartepunt is G. De waterlijn in de rechtop positie is $W_0 L_0$ en onder een kleine hellingshoek $W_\varphi L_\varphi$. De positie van het drukkingspunt bij $\varphi = 0$ is B_0 en bij een kleine hellingshoek φ : B_φ .



De afstand GM wordt geschreven als: $GM = KB + BM - KG$

waarin: KB - hoogteligging drukingspunt

BM - afstand drukingspunt tot het metacenter

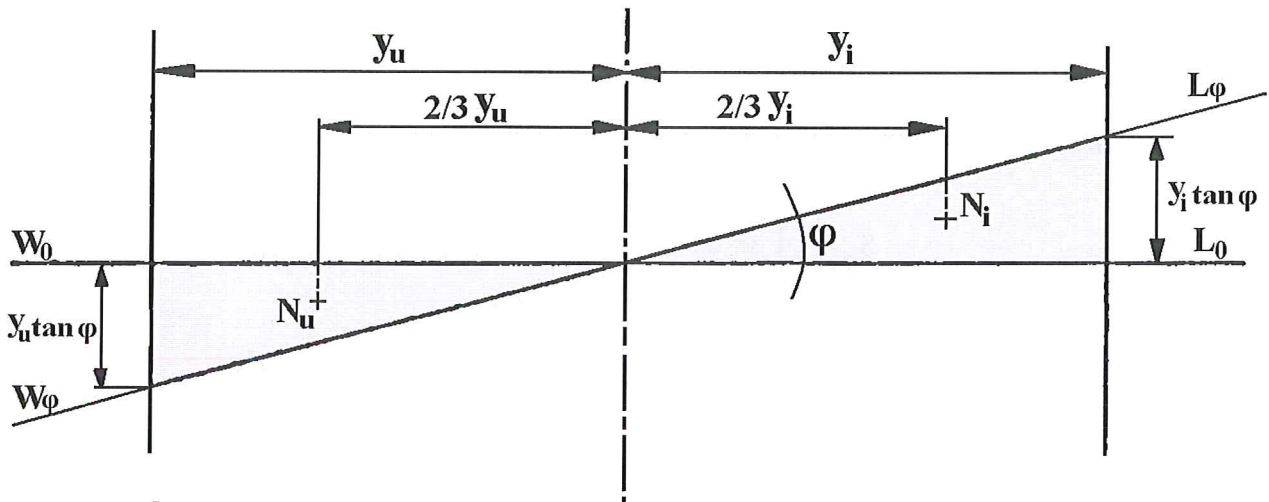
KG - hoogteligging van het zwaartepunt.

Deze kan voor elke beladingstoestand uitgerekend worden met behulp van momenten stelling en een bekend veronderstelde massa verdeling.

Verondersteld wordt nu dat KB en KG bekend zijn door de volume en zwaartepuntsbepaling van het lichaam bij helling nul. Rest een benadering voor BM.

Door de helling van het schip gaat aan de linkerzijde nu tussen $W_0 L_0$ en $W_\phi L_\phi$ een gedeelte van de waterverplaatsing verloren (de uittredende wig ∇_u) en aan de rechterzijde komt er waterverplaatsing bij (de intredende wig ∇_i). Aangezien het gewicht van het schip niet verandert moet de totale waterverplaatsing constant blijven en geldt er dus dat:

$$\nabla_u = \nabla_i$$



Ten gevolge van het verplaatsen van een gedeelte van de waterverplaatsing van ∇_u naar ∇_i verplaatst het drukingspunt zich van B_0 naar B_φ . Aangezien we de verplaatsing alleen willen weten bij zeer kleine hellingshoek is de verandering in hoogte ligging van het drukingspunt te verwaarlozen.

Met behulp van de eerder besproken verschuivingswet zullen we nu de verplaatsing y_φ van het drukingspunt uitrekenen.

Het volume van de uittredende wig is, uitgaande van loodrechte zijwanden over het zeer kleine stukje dat door de beide waterlijnen omvat wordt:

$$\nabla_u = \int_0^L \frac{1}{2} y_u y_u \tan \varphi \, dx$$

$$\nabla_u = \frac{1}{2} \tan \varphi \int_0^L y_u^2 \, dx$$

en het volume van de intredende wig is op analoge wijze:

$$\nabla_i = \int_0^L \frac{1}{2} y_i y_i \tan \varphi \, dx = \frac{1}{2} \tan \varphi \int_0^L y_i^2 \, dx$$

Aangezien $\nabla_u = \nabla_i$

geldt:
$$\frac{1}{2} \int_0^L y_u^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_0^L y_i^2 \, dx$$

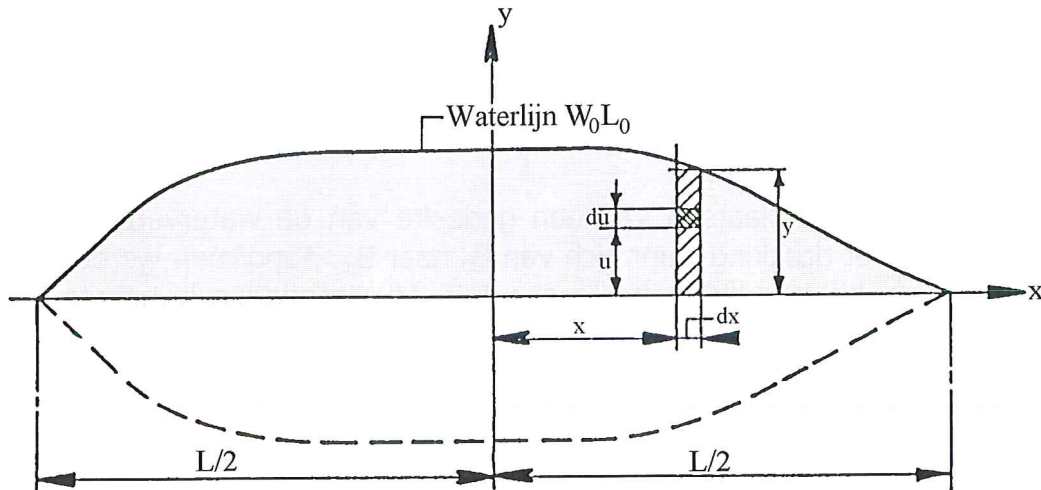
We zullen nu afleiden dat wat hier staat het statisch moment van de waterlijn is ten opzichte van de langsscheepse symmetrie as. Bezie daartoe de volgende figuur.

Het statische moment van de waterlijn $W_0 L_0$ t.o.v. het middenlangsvlak wordt gevonden door eerst voor een klein strookje met lengte dx deze te bepalen en vervolgens de som van de statische momenten van al deze strookjes te bepalen. We vinden voor het gearceerde strookje ten opzichte van de langsas:

$$dS_x = \int_0^y u \, du \, dx = \frac{1}{2} y^2 \, dx$$

en dus voor het hele waterlijn oppervlak:

$$S_x = \frac{1}{2} \int_0^L y^2 \, dx$$



Hieruit mag geconcludeerd worden:

- het statische moment van de intredende wig van $W_0 L_0$ en het uitredende wig zijn gelijk en dus
- de waterlijnen $W_0 L_0$ en $W_\varphi L_\varphi$ snijden elkaar volgens een langsscheepse lijn gaande door het zwaartepunt van $W_0 L_0$

Waaruit weer volgt:

- de waterlijnen $W_0 L_0$ en $W_\varphi L_\varphi$ snijden elkaar op de langsscheepse symmetrie lijn.

Passen we nu de verschuivingswet toe. Laten N_u en N_i de respectievelijke zwaartepunten zijn van de uit- en intredende wiggen, dan is:

$$BB_\varphi = \frac{\nabla_u \frac{4}{3} y}{\nabla}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \tan \varphi \int_0^L y^2 \frac{4}{3} y \, dx}{\nabla} = \frac{\frac{2}{3} \tan \varphi \int_0^L y^3 \, dx}{\nabla}$$

Uit de figuur blijkt bovendien dat:

$$BM = \frac{BB_\varphi}{\tan \varphi}$$

dus:

$$BM = \frac{\frac{2}{3} \int_0^L y^3 dx}{\nabla} = \frac{I_T}{\nabla}$$

waarin I_T gelijk is aan het dwarstraagheidsmoment van de waterlijn t.o.v. de langs-scheepse symmetrieas; want voor een klein strookje hiervan geldt:

$$dI_x = \int_0^y u^2 du dx = \frac{1}{3} y^3 dx$$

en dus voor de hele waterlijn (de factor 2 i.v.m. SB en BB helft):

$$I_T = \frac{2}{3} \int_0^L y^3 dx$$

dus

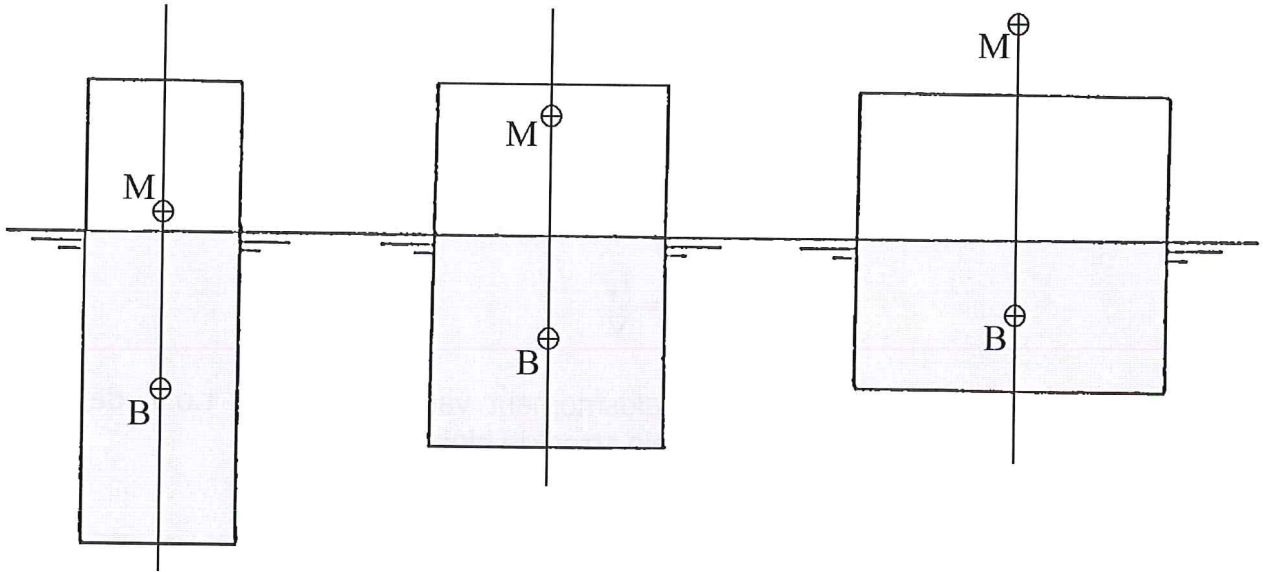
$$GM = KB + \frac{I_T}{\nabla} - KG$$

Uit de eerder gegeven figuur, waarin het herstellende moment staat uitgebeeld dat ontstaat ten gevolge van helling, blijkt dat de arm van dit moment gelijk is aan:

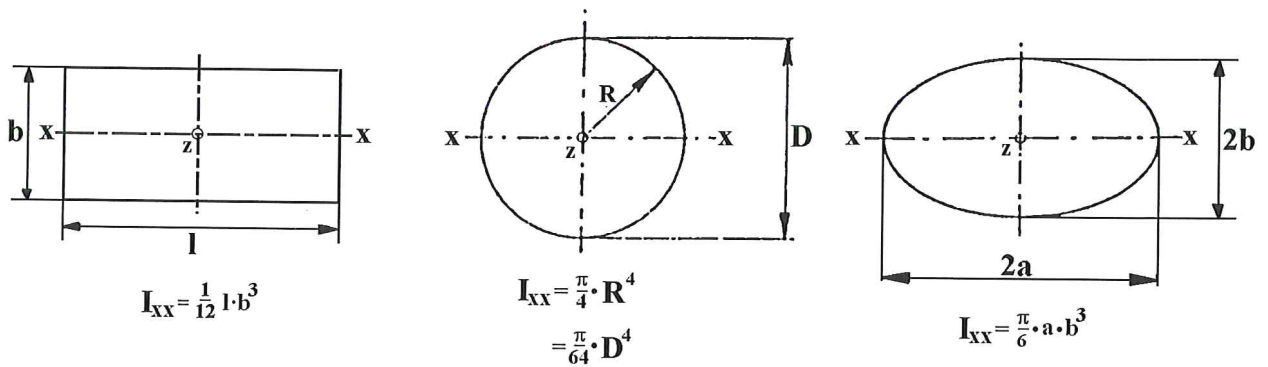
$$GZ_\varphi = GM \sin \varphi$$

Het herstellende moment is derhalve groot als GM groot is.
Een grote GM waarde wordt verkregen door:

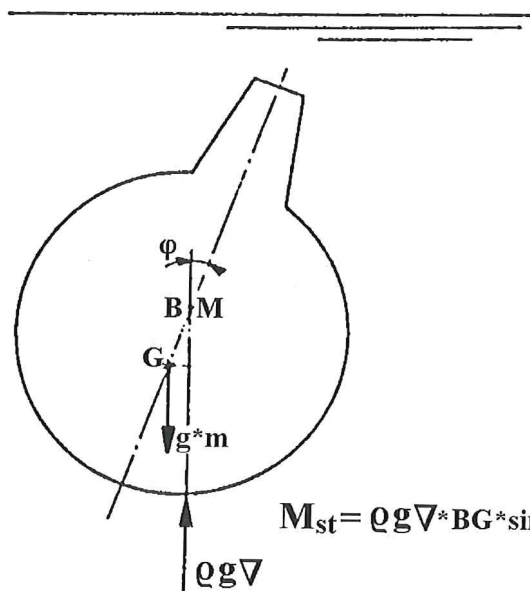
- een grote waarde van KB. Dit is meestal niet mogelijk zonder andere waarden eveneens te beïnvloeden;
- een grote waarde van I_T ;
Dit is te realiseren door een grote waarde te zoeken voor het dwarstraagheidsmoment van de waterlijn. Uit de formulering blijkt dat deze evenredig is met de breedte op de waterlijn tot de derde macht, zodat een grote waterlijn breedte bij gelijkblijvend displacement zorgt voor een grote stabiliteit.
- een kleine waarde voor KG; Hoe kleiner KG hoe lager het zwaartepunt ligt ten opzichte van de bodem hoe groter het stabiliserend moment. En omgekeerd.



Het dwarstraagheidsmoment van het waterlijn oppervlak speelt bij de bepaling van BM en dus voor de positie van M een grote rol. Vandaar dat in onderstaande figuur voor enkele eenvoudige doorsnedenvormen de grootte hiervan gegeven wordt.



Bestaat de constructie uit een volledig ondergedompeld volume, zoals het geval is bij een onderzeeboot, dan is er geen sprake van verandering van het ondergedompelde volume door helling en dus ook niet van enige verschuiving van het drukkingspunt. In de formule van BM komt dit tot uiting doordat het dwarstraagheidsmoment van de waterlijn gelijk is aan nul, aangezien er geen waterlijn is. B en M vallen daardoor samen.



Voor een stabiel

$$M_{st} = \rho g \nabla \cdot BG \cdot \sin \varphi$$

evenwicht is het hier

derhalve noodzakelijk dat G onder B gelegen is.

Merk op dat dit in alle andere gevallen van de beschouwde stabiliteit van drijvende constructies beslist niet vereist is!!!

Concluderend kan gesteld worden dat:

De stabiliteit van het evenwicht van een drijvende constructie rond $\varphi = 0$ kan goed beoordeeld worden door de grootte van de GM waarde van het drijvende lichaam te bepalen.

Voorbeeldsom:

Dit voorbeeld is een uitbreiding van het voorbeeld op blz. 3.11.

Hetzelfde schip als bij het vorige voorbeeld zal gebruikt worden.

Gegeven: Diepgang T: 7.20 m

KG: 8.00 m

Er worden nog twee kolommen aan de Simpsons tabel van de CWL toegevoegd. Met deze twee kolommen kan men het traagheidsmoment uitrekenen, dat we nodig hebben voor het bepalen van de GM waarde.

N.B.: Deze berekening hoeft alleen voor de CWL uitgerekend worden. De andere Simpson-tabellen van de andere waterlijnen blijven hetzelfde als in het voorbeeld op blz. 3.11.

CWL							
ord. nr.	1/2*br. = y (m)	s.f	y*s.f.	m.f.	y*s.f.*m.f.	y ³	s.f.* y ³
a	0	0.165	0	-5.331	0	0	0
b	0.888	0.661	0.59	-5.165	-3.03	0.70	0.46
0	1.625	1.165	1.89	-5	-9.47	4.29	5.00
1	6.525	4	26.10	-4	-104.40	277.81	1111.22
2	9.013	2	18.03	-3	-54.08	732.04	1464.08
3	9.800	4	39.20	-2	-78.40	941.19	3764.77
4	9.800	2	19.60	-1	-19.60	941.19	1882.38
5	9.800	4	39.20	0	0.00	941.19	3764.77
6	9.800	2	19.60	1	19.60	941.19	1882.38
7	8.238	4	32.95	2	65.90	558.97	2235.87
8	6.838	2	13.68	3	41.03	319.66	639.33
9	3.613	4	14.45	4	57.80	47.14	188.57
10	0	1	0	5	0	0	0
		SOM 1=	225.28	SOM 2=	-84.65	SOM 3=	16938.84
Aw:	Waterlijnoppervl.:	$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot \text{SOM 1} =$		1817.26 m ²			
Xa:	wl. zwaartepunt :	$h \cdot \text{SOM 2} / \text{SOM 1} =$		-4.55 m			
It:	Traagheidsmoment:	$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot \text{SOM 3} =$		45546.67 m ⁴			

Vervolgens worden er bij de Simpsons tabel van alle waterlijnen ook weer twee kolommen toegevoegd. Met deze twee kolommen wordt de KB waarde bepaald. Zodoende heeft men alle termen voor het bepalen van de GM waarde (zie formule op blz. 4.9).

Merk op dat de afstand tot de basis de afstand van de desbetreffende waterlijn tot het xy-vlak is (zie blz. 3.10)

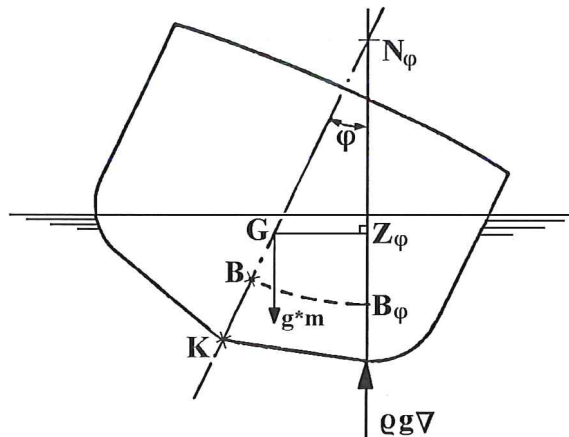
Waterlijn	Aw	s.f.	Aw*s.f.	Xa	Aw*s.f.*Xa	Afst.basis	Aw*s.f.*Afstbasis
Vlak	668.2	1	668.2	1.36	908.7	0.00	0.0
1/4-WL	1241.9	4	4967.7	-0.61	-3030.3	1.80	8941.9
1/2-WL	1452.3	2	2904.5	-1.12	-3253.0	3.60	10456.2
3/4-WL	1598.3	4	6393.4	-2.04	-13042.5	5.40	34524.1
CWL	1817.3	1	1817.3	-4.55	-8268.5	7.20	13084.3
		som 1=	16751.0	som 2=	-26685.6	som 3=	67006.5
<p>Waterverplaatsing: $1/3*(T/4)*\text{som 1} = 10050.6 \text{ m}^3$ Drukkingspunt Xb: $\text{som 2}/\text{som 1} = -1.59 \text{ m}$ KB = $\text{som 3}/\text{som 1} = 4.00 \text{ m}$ KG = 8.00 m It = 45546.67 m^4 BM = $\text{It} / \text{waterverpl.} = 4.53 \text{ m}$ GM = $\text{KB} + \text{BM} - \text{KG} = 0.53 \text{ m}$</p>							

Stabiliteitsmoment

Niet alleen de aard van het evenwicht bij $\varphi = 0$ is van belang, maar ook het vermogen van de drijvende constructie om kenterende momenten op te nemen. Dit kenterend moment kan zijn oorzaak vinden in bijvoorbeeld asymmetrie in de belading, het aan boord nemen van lasten, belasting door de wind en/of de golven etc. De resulterende hoeken waarbij het aldus belaste lichaam weer in evenwicht komt zullen niet altijd zeer klein zijn, zodat het van belang is het herstellende moment ook te kennen bij grotere hellingshoeken.

Beschouw daartoe de situatie in de onderstaande figuur. Het verschil met de situatie bij kleine hellingshoek is dat de werklijn van de opdrijvende kracht niet meer door M gaat maar het middenlangsvlak snijdt in het punt N_φ , het **vals metacenter**. Het **stabiliteitsmoment** wordt in formule gegeven door:

$$M_{ST} = \rho g \nabla GZ_\varphi = \rho g \nabla GN_\varphi \sin \varphi$$



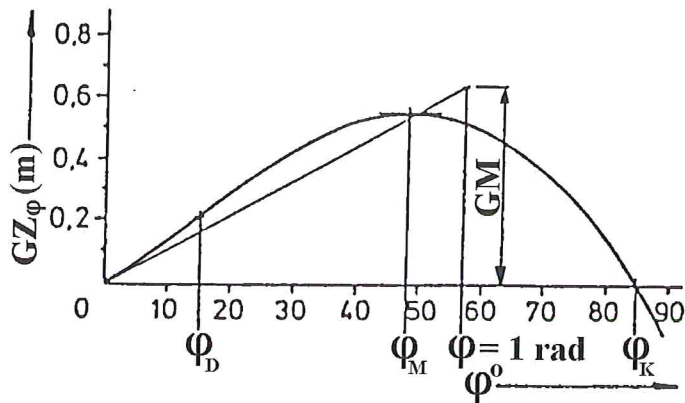
Bij een bekend displacement wordt de grootte van dit herstellende moment bepaald door de grootte van de arm van het stabiliteitsmoment: GZ_φ . De grootte van GZ_φ is voor elke hellingshoek anders en dient dus voor elke hellingshoek bepaald te worden. Om een beeld te geven van het verloop van de grootte van de stabiliteitsarm GZ_φ wordt deze veelal weergegeven in een figuur. Men noemt een dergelijke figuur de kromme van armen van statische stabiliteit.

Hierin staat de arm GZ_φ afgebeeld als functie van de hellingshoek. Het zal duidelijk zijn dat de vorm van de kromme sterk afhankelijk is van het beschouwde lichaam als ook van de specifieke toestand waarin het drijft (waterverplaatsing).

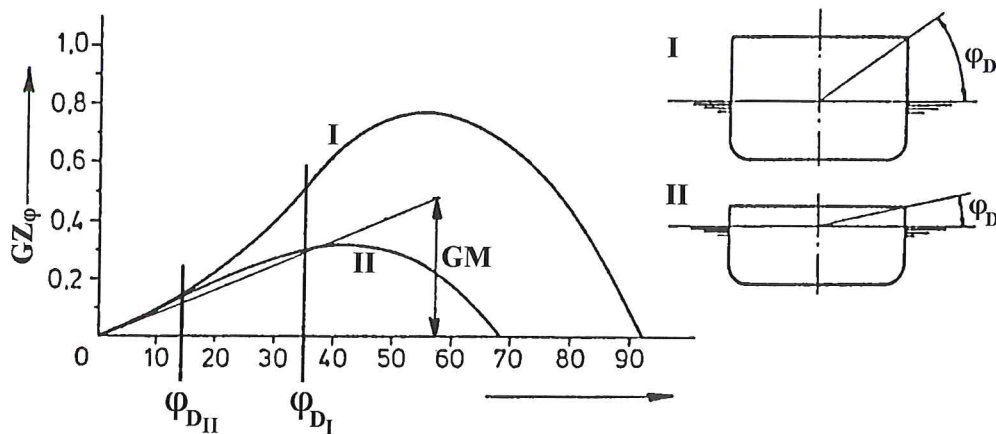
Enkele specifieke punten van de kromme zullen worden genoemd zonder al te ver in te gaan op het hoe en het waarom.

- De raaklijn aan de kromme in het punt $\varphi = 0$ snijdt de lijn $\varphi = 57.3^\circ = 1$ radiaal in een punt waarvan de ordinaat overeenkomt met de grootte van GM. Hoe groter GM, hoe steiler de kromme in de oorsprong, hoe groter het stabiliteitsmoment bij kleine hoeken.

- Voor een bepaalde waarde van de hellingshoek wordt de stabiliteitsarm maximaal, de hoek waarbij dit gebeurt heet φ_m .



- Er treedt een buigpunt op in de kromme bij die hoek waarbij het dek te water komt. Afhankelijk van de hoek waarbij het dek te water komt kunnen ook bij gelijke GM zeer verschillende krommen van armen ontstaan. In de regel geldt hoe groter φ_D hoe beter.



- Bij een bepaalde hellingshoek wordt de arm nul. Deze hoek wordt genoemd; **de kenterhoek**. Bij deze hoek heeft een zeer kleine verstoring van het evenwicht tot gevolg dat het schip doorkentert. De range van hoeken tussen $\varphi = 0$ en $\varphi = \varphi_K$ wordt de stabiliteitsomvang genoemd en is een belangrijke grootte bij het beoordelen van de stabiliteit van drijvende lichamen.

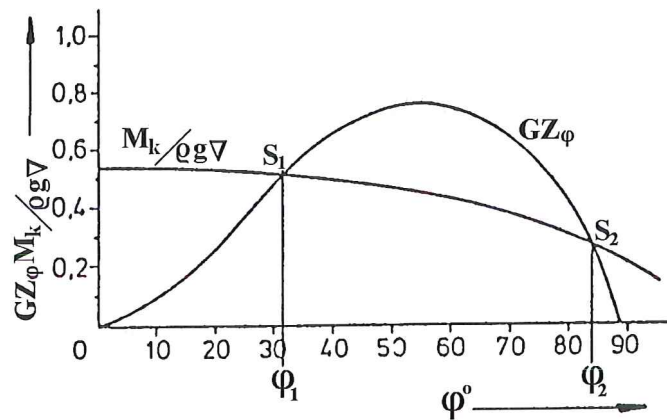
De slagzij die zal optreden ten gevolge van één of ander hellend moment M_K van een bekende grootte volgt uit de voorwaarde dat voor evenwicht moet gelden dat:

$$M_K = M_{ST}$$

In vele gevallen zal de hoek waarbij hieraan voldaan wordt alleen via een grafische methode bepaald kunnen worden.

Aangezien de grafiek van de kromme van armen niet het stabiliteitsmoment maar de arm daarvan weergeeft, geldt voor die figuur als evenwichtsvoorwaarde dat:

$$M_{K(\varphi)} = M_{ST(\varphi)} \quad \text{en daaruit:} \quad \frac{M_{K(\varphi)}}{\rho g \nabla} = GZ_{\varphi}$$



Uit de figuur blijkt dat er twee hellingshoeken zijn φ_1 en φ_2 waarvoor aan de evenwichtsvoorwaarden voldaan wordt. Bij de hoek φ_1 treedt een positief stabiele evenwichtsstand op. Uitgaande van deze evenwichtsstand levert een kleine vergroting van de hellingshoek een stabiliteitsmoment op dat groter is dan het kenterende moment, zodat bij verdwijnen van deze verstoring het lichaam terugkeert naar de evenwichtsstand. Bij een verkleining van de hellingshoek treedt een groter kenterend moment op dan het stabiliteitsmoment waardoor hetzelfde gebeurt.

Eenzelfde beschouwing voor de tweede evenwichtsstand bij φ_2 leert dat er hier sprake is van een negatieve stabiliteit of instabiel evenwicht.

5. WEERSTAND

In dit hoofdstuk zullen we de weerstand behandelen die een lichaam ondervindt als het zich met een relatieve snelheid verplaatst ten opzichte van een zich omringend medium, zoals een gas of een vloeistof. We zullen toepassingen hiervan bezien en nagaan in hoeverre de weerstand gezien in het licht van de toepassing is te optimaliseren. We zullen de weerstand beschouwen in zowel ideale als reële vloeistoffen en zowel geheel omstroomde lichamen als wel lichamen welke zich voortbewegen op het scheidingsvlak van twee verschillende media.

Eerst zullen nu enkele van belang zijnde begrippen uit de stromingsleer in vogelvlucht behandeld worden.

DEFINITIES

Over het algemeen zullen we hier kortheidshalve over vloeistoffen spreken, hoewel vloeistoffen en gassen bedoeld worden.

De beweging van vloeistoffen kan in twee gedeelten gesplitst worden, te weten:

de beweging van **ideale** vloeistoffen en die van **reële** of **viskeuze** vloeistoffen.

Bij de eerste groep wordt verondersteld dat de vloeistof onsamendrukbaar en wrijvingsloos is, bij de tweede groep veronderstelt men uitsluitend dat de vloeistof onsamendrukbaar is.

In de natuur komen geen ideale vloeistoffen voor, maar de bestudering van de eigenschappen van deze vloeistoffen is uiterst zinvol aangezien de hierop gebaseerde berekeningen in de aero- en hydromechanica het maken van gevolgtrekkingen toelaten, die betrekking hebben op verschijnselen in natuurlijke vloeistoffen voor zover die relatief weinig wrijving vertonen.

Bij water en lucht is dat bijvoorbeeld het geval in een groot aantal situaties.

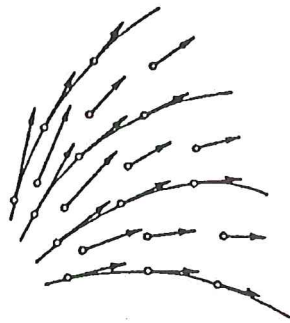
Teneinde iets te kunnen zeggen over de krachten die een stromende vloeistof op een lichaam uitoefent is het noodzakelijk de beweging van de vloeistofdeeltjes vast te leggen. Om de toestand van de stroming te kunnen beschrijven maken we gebruik van een aantal hulpmiddelen.

De toestand van een stromingsveld op een bepaald ogenblik kunnen we beschrijven met behulp van **stroomlijnen**. Dit zijn lijnen getrokken in het ruimtelijke stromingsveld waarvan de raaklijnen aan de kromme in een willekeurig punt de richting van de stroomvector daar ter plaatse geeft.

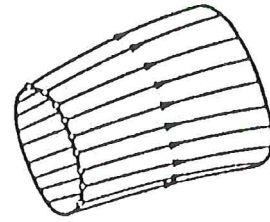
Dit beeld kan op elk tijdstip verschillend zijn. Alleen de richting van de snelheidsvector van een stroomdeeltje wordt vastgelegd door de stroomlijn en niet de grootte.

Stroombanen zijn de banen, die de vloeistofdeeltjes in de ruimtelijke stroming volgen. Bij een stromingsbeeld dat voortdurend in de tijd verandert wordt de stroombaan gevonden uit de in de tijd opeenvolgende beelden vastgelegd door de stroomlijnen.

Bij een stromingsbeeld dat in de tijd niet meer verandert, dat wil zeggen dat in een bepaald punt van de ruimte de snelheid niet meer met de tijd verandert en dus constant is, spreekt men van een **stationaire** stroming.



stroomlijnen



stroombanen

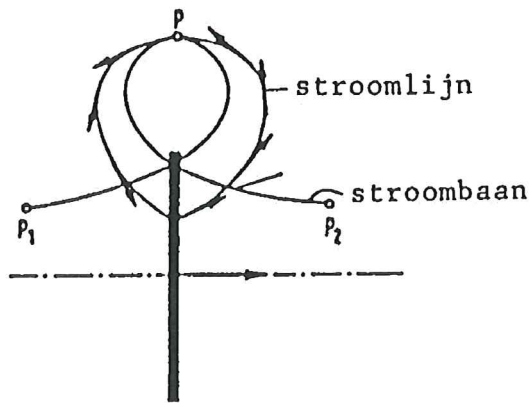
In dat zeer specifieke geval veranderen de stroomlijnen dus niet met de tijd en zijn derhalve de stroomlijnen en de stroombanen aan elkaar gelijk: een deeltje verwijderd zich nooit van de stroomlijn waarop het zich eenmaal bevindt (dit is namelijk de definitie van een stroomlijn).

In vele beschouwingen over de gevolgen van een stromende vloeistof rond een lichaam wordt uit gegaan van dit laatste type stroming, omdat het ons in staat stelt op relatief eenvoudige wijze een verband te leggen tussen het stromingsbeeld, de stroomsnelheid, de druk en dus de kracht op een omstroemd lichaam.

Het onderscheid tussen een stroomlijn en een stroombaant, alsmede hoe in vele gevallen tot een stationair beeld kan worden gekomen, kan aanschouwelijk gemaakt worden met het volgende voorbeeld:

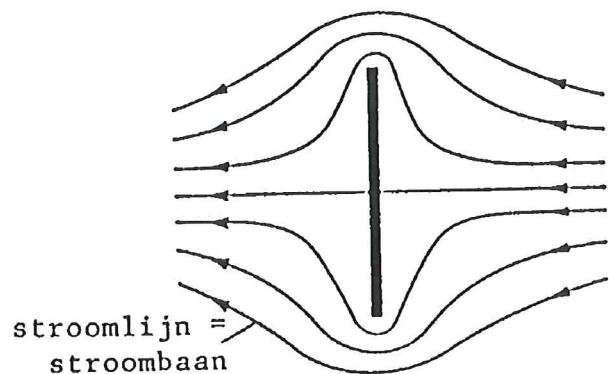
Een plaat wordt haaks op zijn vlak voortbewogen door de vloeistof, welke op grote afstand van de plaat in rust is.

In de figuur wordt een vloeistofdeeltje beschouwd, dat zich op het moment van beschouwing precies in het punt P bevindt.



vloeistof in rust

vloeistof beweegt



De kwalitatieve vorm van zijn stroombaant, dat is dus de baan die het deeltje doorloopt, volgt uit de constatering dat het deeltje bij de nadering van de plaat eerst vanuit P_1 naar rechts in beweging wordt gezet en terzelfder tijd omhoog om de plaat te ontwijken. Is de plaat het deeltje voorbij dan beweegt deze zich weer naar beneden en gelijktijdig achter de plaat weer naar voren naar zijn eindtoestand in P_2 . De in de figuur geschetste globale stroombaant volgt uit het beschreven stromingsbeeld.

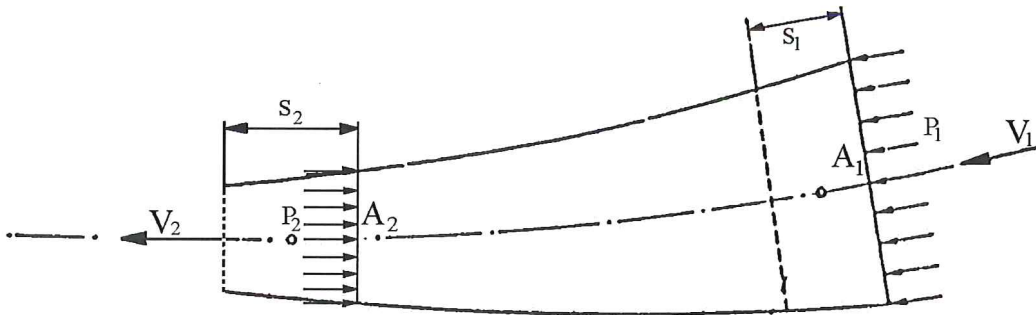
De stroming wordt stationair voor een waarnemer die zich met de plaat mee beweegt, immers dit beeld verandert dan schijnbaar voor hem niet meer met de tijd. De plaat staat nu ten opzichte van de waarnemer stil en de vloeistof stroomt van rechts naar links. Stroomlijnen en stroombanen vallen dus nu voor hem samen. Dit is een veel gebruikte methode om stromingstoestanden te visualiseren en te analyseren.

Stroombuizen worden gevormd door de omhulling met stroomlijnen van een willekeurig gesloten kromme in het stromingsveld. De vloeibare inhoud van een stroombuis noemt men een **stroomdraad**.

Bij stationaire stromingen hebben de stroombuizen een onveranderlijke gestalte. In het platte vlak wordt een "stroombuis" gevormd door de ruimte tussen twee opeenvolgende stroomlijnen. Met behulp van deze stroombuizen in een stationaire stroming kunnen we nu onze beschouwing uitbreiden waardoor er ook iets gezegd kan worden over de grootte van de snelheidsvector van de stroomsnelheid. Hulpmiddel hierbij is:

DE CONTINUÏTEITS VERGELIJKING

Veronderstellen we nu dat het oppervlak van een normale doorsnede van een stroomdraad in een willekeurig punt A gelijk is aan A_1 en de gemiddelde snelheid daar ter plaatse V_1 en dat voor diezelfde grootheden in het punt B de waarden gelden van A_2 en V_2 .



Als de beweging van de vloeistof stationair is en de vloeistof bovendien onsamendrukbaar dan geldt dat de hoeveelheid vloeistof in een stroombuis constant blijft of wel dat:

De massa die binnen komt is gelijk aan de massa die uitstroomt:

$$A_1 V_1 = A_2 V_2$$

Immers via de randen van de stroombuis kan geen vloeistof ontsnappen aangezien deze is samengesteld uit stroomlijnen.

Deze formulering staat bekend als de continuïteitsvergelijking en is een belangrijk gereedschap bij het analyseren van stationaire stromingsproblemen. Immers als het stromingsbeeld en de snelheid in een punt A_1 bekend zijn, dan kan hiermee de snelheid in een punt A_2 berekend worden.

Een andere belangrijke wet van de Hydrodynamica, welke met behulp van de **continuïteitsvergelijking** afgeleid kan worden, is de zogenaamde:

WET VAN BERNOUILLI

Deze wet geeft het verband tussen de snelheid V van de vloeistof de druk p en de hoogte h boven een gekozen horizontaal vlak voor een bepaald punt van een stroomdraad bij een stationaire stroming. In haar algemene gedaante luidt de wet:

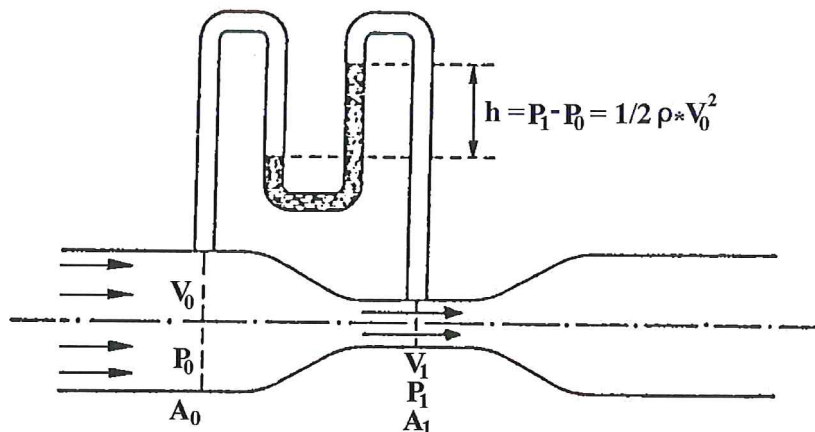
$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho gh = \text{constant}$$

In de meeste gevallen wordt een vlakke horizontale stroming verondersteld waardoor de term Δgh kan vervallen, er geldt dan:

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p = \text{constant}$$

Hieruit blijkt dat de som van de stuwdruk ($\frac{1}{2}\rho V^2$) en de statische druk (p) constant is voor elk punt van de stroomdraad bij een vlakke stationaire stroming.

Een toepassing van de wet van Bernouilli vinden we bijvoorbeeld in de buis van Venturi:



In principe bestaat een buis van Venturi uit een vernauwing van een stromingskanaal. Volgens de continuïteitsvergelijking is:

$$V_0 A_0 = V_1 A_1$$

Uit de Wet van Bernouilli volgt voor de doorsneden A_0 en A_1 het verband:

$$\frac{1}{2}\rho V_0^2 + p_0 = \frac{1}{2}\rho V_1^2 + p_1$$

Uit de combinatie van vergelijkingen volgt:

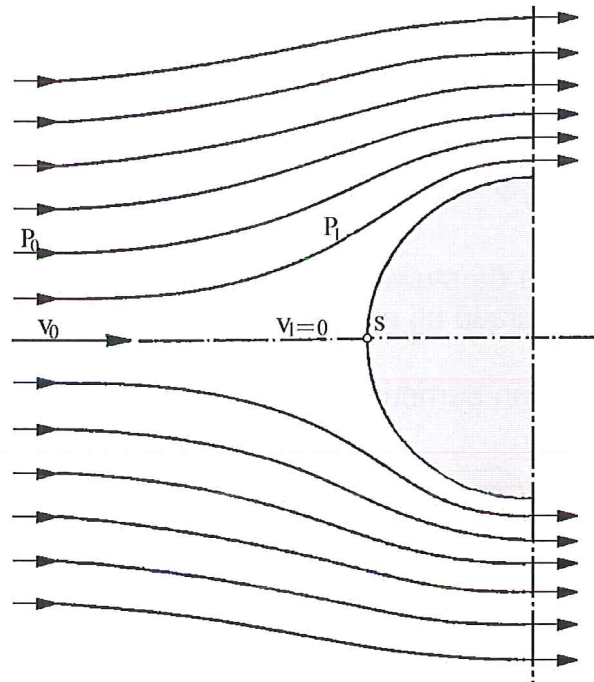
$$p_0 - p_1 = \frac{1}{2}\rho V_1^2 - \frac{1}{2}\rho V_0^2$$

zodat:

$$V_0 = A_1 \sqrt{\frac{2(p_0 - p_1)}{\rho(A_0^2 - A_1^2)}}$$

Hieruit is V_0 te bepalen bij overigens bekende grootheden, bijvoorbeeld uit meting.

Een andere toepassing vinden we bij de Stuwbuis van Prandtl of de Pitot buis. Plaatst men in een stationaire vloeistof stroming een "lichaam" of "hindernis" en nemen we aan dat ver voor de hindernis de snelheid van de vloeistof gelijk is aan V_0 en de druk aan p_0 ; zie de figuur.



Op het lichaam is een punt S waarvoor geldt dat de vloeistof tot rust komt: de snelheid van de vloeistof daar ter plaatse is gelijk aan nul. Dit punt noemen we het **stuwpunt** en de stroomlijn die hierin uitkomt de stuwpuntsstroomlijn.

Volgens de Wet van de Bernouilli is de druk in dit punt gelijk aan:

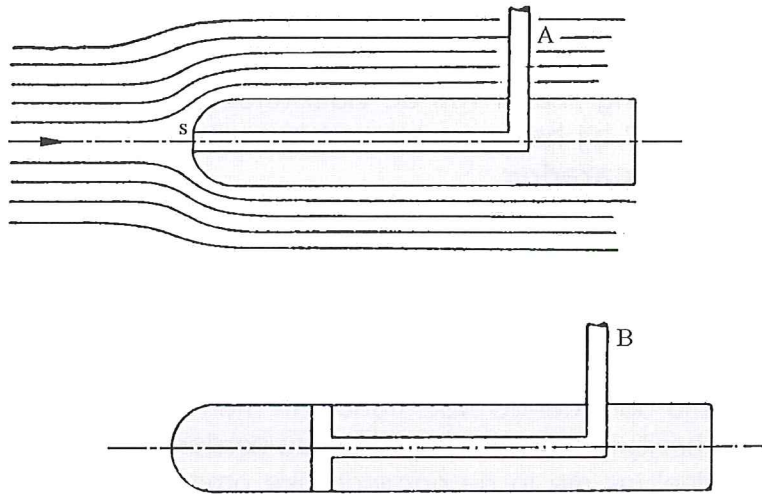
$$\frac{1}{2} \rho V_0^2 + p_0 = p_1$$

De druk P_1 is gelijk aan de som van de statische druk die in de oorspronkelijke vloeistof heerst en de druk die ontstaat door de stuwing ($\frac{1}{2}\rho V_0^2$) en wordt genoemd de **stuw-druk**.

Indien nu een lichaam van de in de figuur aangegeven vorm welk in de stroming wordt geplaatst op het punt S wordt voorzien van een klein gaatje dat door een kanaaltje met een manometer is verbonden, dan kan in deze stroming de totale druk worden gemeten. Het aldus uitgevoerde instrument noemt men een Pitot buis.

Is de ongestoorde druk p_0 op een of andere manier bekend dan is uit de stuwdruk de snelheid in dat punt van de vloeistof te bepalen. Een van de manieren om dit te meten is met een piëzometer, welke gebaseerd is op het feit dat de druk op de zijkant van het cilindervormige lichaam gelijk is aan de ongestoorde druk p_0 .

Door combinatie van de piëzometer met de pitotbuis ontstaat de stuwbuis van Prandtl, waarmee in elk punt van de vloeistof de snelheid te bepalen is, door het meten van een drukverschil.

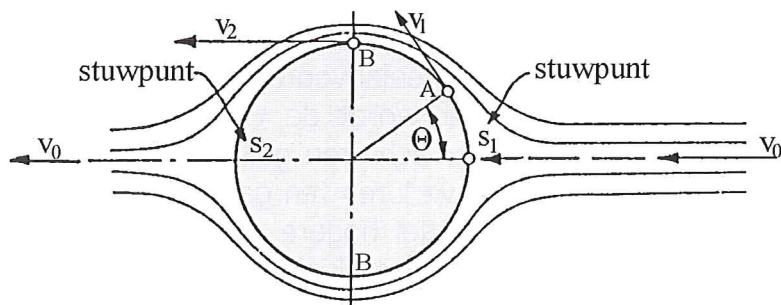


We hebben gezien dat een lichaam geplaatst in een homogene stationaire stroming een verandering teweeg brengt in de banen van de vloeistof deeltjes: de stroomlijnen verleggen zich.

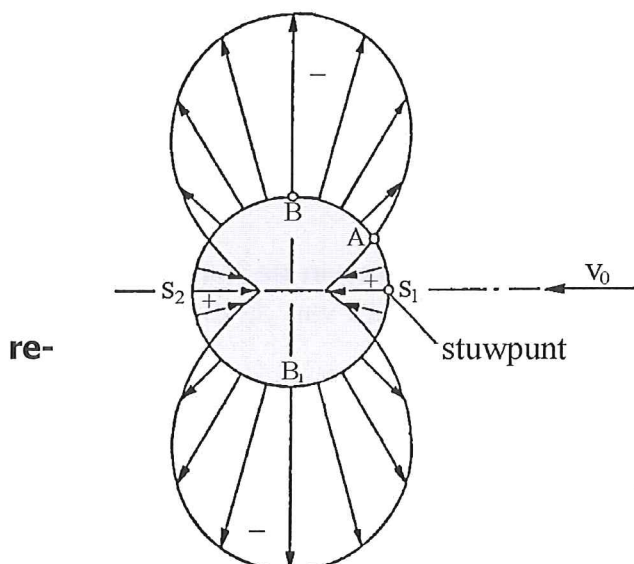
Mede uit de beschouwingen gebaseerd op de continuïteitsvergelijking ontstaan hierdoor snelheidsveranderingen welke door middel van beschouwingen gebaseerd op de wet van Bernoulli vertaald kunnen worden in drukveranderingen. Zoals bekend levert de integratie van de druk over een bepaald oppervlak een kracht op.

Lichamen geplaatst in ideale vloeistoffen ondervinden klaarblijkelijk krachten.

De snelheidsveranderingen en de daaruit volgende drukveranderingen zijn te berekenen met behulp van wat in het algemeen genoemd wordt de potentiaal theorie.



stroomlijnen **wrijvings-**
loze vloeistof



re-

drukverdeling **wrijvingsloze**
vloeistof:
symmetrisch, derhalve geen
sulterende kracht.

In ideale vloeistoffen leiden deze beschouwingen ertoe dat er geen **resulterende** kracht in de stromingsrichting op het lichaam wordt gevonden. Dit komt doordat door het ontbreken van wrijving de stroming symmetrisch is zoals in de figuur waar het stromingsbeeld is gegeven voor de vlakke plaat. De traagheidskrachten die ontstaan ten gevolge van het in beweging zetten van de vloeistofdeeltjes maken evenwicht met de krachten welke "vrijkomen" bij het weer tot rust brengen van die deeltjes. Men noemt dit de **hydrodynamische paradox**.

Met behulp van een bepaalde aanname kan er wel circulatie in de stroming gebracht worden waardoor er op het lichaam wel krachten loodrecht op de stromingsrichting ontstaan. Hierop komen we later terug in het hoofdstuk over lift en voortstuwing.

Dat er geen langskracht op een in een stroming geplaatst lichaam is klopt niet met onze experimentele waarnemingen.

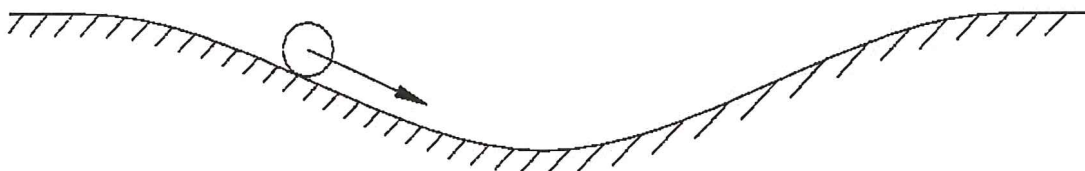
De in werkelijkheid altijd optredende weerstand kan men verklaren doordat de vloeistof altijd enige viscositeit bezit, in tegenstelling tot onze eerdere aanname.

Hierdoor hebben de deeltjes die in de onmiddellijke omgeving van de huid van het lichaam zitten een snelheid welke gelijk is aan die van het lichaam terwijl op enige afstand van het lichaam de snelheid van de vloeistofdeeltjes gelijk is aan die welke berekend kan worden met de potentiaal theorie voor wrijvingsloze vloeistoffen. In een relatief dunne laag langs de huid van het lichaam vindt dus de overgang plaats van de snelheid van de vloeistofdeeltjes vlak tegen de huid (relatief gelijk aan nul) naar die van de vloeistofdeeltjes in de vrije stroming.

Het is Prandtl geweest die voor het eerst inzicht heeft gegeven in de verschijnselen welke in deze zogenaamde **grenslaag** een rol spelen.

De fundamentele betekenis van deze zogenaamde grenslaagtheorie van Prandtl is de daarin vervatte verklaring van het verschijnsel **afscheiding** of **loslaten** van de stroming van het lichaam en de daarbij optredende wervelafscheiding.

Deze afscheiding treedt op in een zich langs de wand van het lichaam vertragende stroming, welke bijvoorbeeld kan worden veroorzaakt door het naderen van een zone met relatief hogere druk. We hebben gezien dat die zich veelal voordoet bij het naderen van de achterzijde van het omstroomde lichaam: hier wordt de vloeistof vertraagd waardoor de druk stijgt. De vloeistofdeeltjes in dit naar achteren gelegen deel van de grenslaag hebben reeds een gedeelte van hun energie verloren ten gevolge van de optredende wrijving. Bij het naderen van de zone van relatief hogere druk nu worden zij nog verder vertraagd. De kinetische energie van de grenslaagdeeltjes is nu op een gegeven moment niet meer voldoende om ze door te laten dringen in de zone van hoge druk. Vergelijk hierbij de analogie van het kogeltje in de volgende figuur:

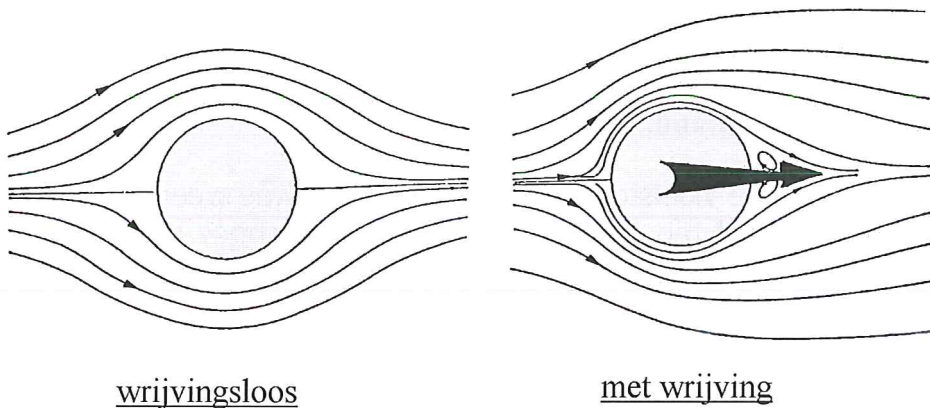


De energie die het kogeltje heeft gewonnen bij de afdaling in de kuil is niet voldoende om de weg omhoog te volbrengen aangezien een gedeelte van de energie vernietigd is door de wrijving.

Voor dat het kogeltje weer boven is keert de bewegingsrichting van het kogeltje zich om. Zo ontstaat er tussen de wand van het lichaam en de verder naar buiten gelegen

stroming welke niet gehinderd wordt door de wrijving, een retourstroming, welke door het aanwezig zijn van wrijving een steeds toenemend aantal nog aankomende vloeistofdeeltjes hun kinetische energie ontnemt en ze zodoende dwingt tot omkering van de bewegingsrichting.

De snel in dikte toenemende terugstromende laag scheidt de ongestoorde stroming van de wand af. Achter het afscheidingspunt is de stroming door wervels geheel verstoord en krijgt het hele stromingsbeeld een ander aanzien. Het afscheidings- of loslaatpunt stelt zich zover naar voren in de stromingsrichting in dat van de oorspronkelijke zone van oplopende druk weinig meer overblijft. De oorspronkelijke symmetrische drukverdeling over het lichaam wordt asymmetrisch. Er ontstaat dus een resulterende langskracht in de stromingsrichting: **weerstand!!!!**



**stromingsbeeld
rond een cilin-
der**

Op plaatsen waar grote versnellingen en vertragingen optreden, welke gepaard gaan met grote snelheidsveranderingen en dus met drukveranderingen, dat wil zeggen op plaatsen met grote vormveranderingen, stelt het loslaatpunt zich bij voorkeur in.

Bij het vormgeven van lichamen uit het oogpunt van het optimaliseren van de stroming speelt dat aspect dan ook altijd een belangrijke rol.

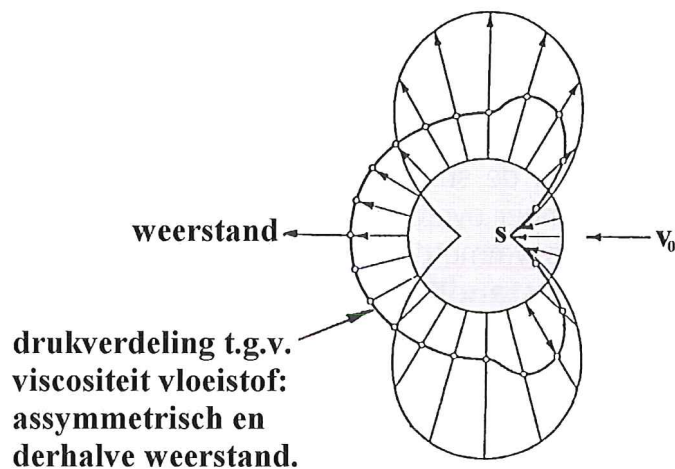
Opgemerkt zij dat de beschouwing volgens Prandtl wandwrijving en een zich vertragende stroming, dus een oplopende druk veronderstelt als voorwaarde voor loslating van de stroming.

Het verschijnsel wordt inderdaad nimmer waargenomen in gebieden waar de druk in de stromingsrichting afneemt.

Natuurlijke vloeistoffen met een (kleine) inwendige wrijving veroorzaken een snelheidsval tussen het buiten de grenslaag gelegen gebied met de potentiaal stroming en de deeltjes met relatieve snelheid nul vlak langs de wand. Dit snelheidsval veroorzaakt op elk oppervlakte elementje een tangentiaal werkende kracht: **schuifkracht**.

De sommatie van al deze schuifkrachtjes over alle oppervlakte elementjes van het lichaam, dus over het zogenaamde nat oppervlak van het lichaam, levert de **wrijvings-
weerstand**.

We zagen dat aan achterzijde van het lichaam ten gevolge van een zich afscheidende grenslaag een storing ontstaat in de potentiaal stroming waardoor de omzetting van snelheid in druk wordt tegengewerkt. De hieruit voortkomende langskracht noemt men de **druk- of wervelweerstand**.



De invloed van de viscositeit van de vloeistof uit zich kennelijk in twee weerstands componenten: de **wrijvingsweerstand** ten gevolge van de schuifkrachtjes langs de huid van het lichaam en de **drukweerstand** ten gevolge van de loslating van de stroming.

DE GROOTTE VAN DE WEERSTANDSKRACHT

We zagen dat alle lichamen, die zich met een relatieve snelheid bewegen t.o.v. een omringend medium hetzij lucht, water, olie of zoiets, een weerstandskracht ondervinden. Uit experimenten ondersteund door de theorie zoals we hiervoor gezien hebben, blijkt deze weerstandskracht evenredig te zijn met de soortelijke massa van het medium Δ en de gekwadrateerde relatieve snelheid V^2 en het doorsnede oppervlak van het lichaam loodrecht op de stroming A .

In het algemeen:

$$W = C_w * \frac{1}{2} \rho V^2 * A$$

waarin de stuwdruk $\frac{1}{2} \rho V^2$ herkend kan worden.

De evenredigheidsconstante C_w (of C_D) is afhankelijk van de vorm van het lichaam.

In de bijgaande tabel is de waarde van deze constante voor een aantal veel voorkomende lichamen gegeven voor het geval van een drie dimensionale stroming welke het lichaam geheel omgeeft.

De waarden zijn ontleend aan modelproeven.

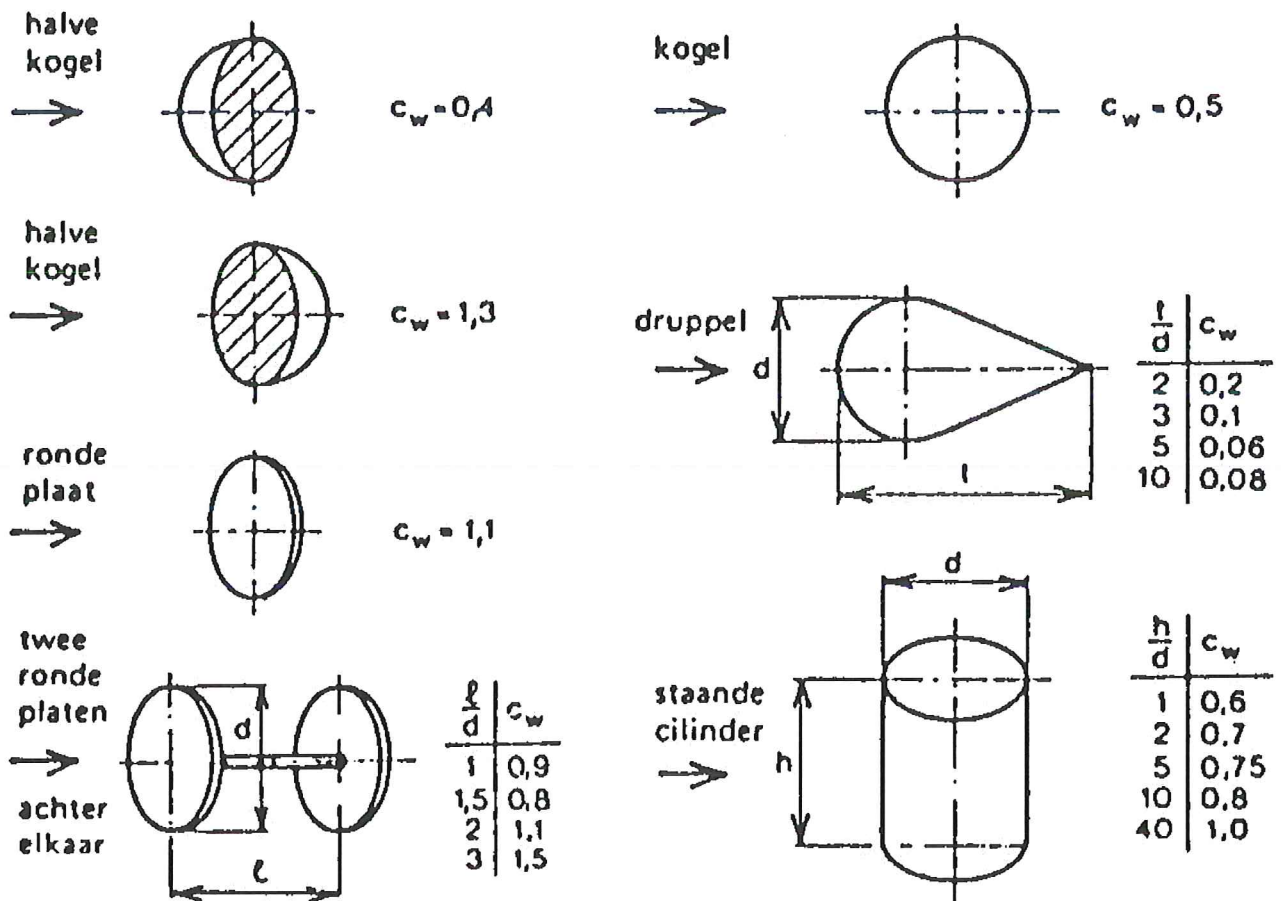
Uit deze tabel blijkt duidelijk dat met een aangepaste vormgeving van het lichaam een aanzienlijke reductie van de weerstandskracht te realiseren valt.

Het optimaliseren van de vormgeving heeft veelal te doen met het vertragen van de loslating over de lengte van het lichaam. Bij het vergelijken van de verschillende waarden van de coëfficiënt valt op dat deze voor alle vormen tamelijk hoog is.

Alleen de geprofileerde doorsneden hebben een aanzienlijk lagere weerstand, welke afneemt naarmate de lengte - dikte verhouding toeneemt. Hiermee wordt de zone van oplopende druk verlengd en daarmee de loslating vertraagd.

Vergelijken we de waarden van de geprofileerde druppelvorm met die van een kogel dan blijkt, bij een gelijk doorsnede oppervlak, hoezeer dit vertragen van de loslating een positief effect heeft op de weerstand.

In vele technische systemen is een vorm van weerstand aanwezig. Bij de ontleding van het systeem is het dus belangrijk de verschillende componenten te kunnen onderscheiden.



weerstandscoëfficiënten 3-D lichamen.























Weerstandscoëfficiënten van allerlei verschillende lichamen onder velerlei verschillende condities zijn in de literatuur te vinden. De meeste zijn ontleend aan modelproeven. Voor gelijke lichamen zijn deze te gebruiken als hiervan de weerstand bepaald moet worden. Soms is het ook mogelijk de weerstand te benaderen door het lichaam opgebouwd te denken uit een aantal componenten, waarvan van elk de C_w waarde bekend is.

Voor lange slanke lichamen wordt de weerstand ook veelal benaderd door de twee dimensionale weerstandscoëfficiënt behorende bij de doorsnede van het lichaam te gebruiken en deze te vermenigvuldigen met de lengte van het lichaam.

Te denken valt hierbij bijvoorbeeld aan vakwerken, masten etc. Hiervan staan er in de volgende tabel een aantal gegeven.

In vele praktische engineering situaties is het van belang de weerstand van een lichaam te verkleinen omdat in de meeste gevallen één of andere gewenste beweging hierdoor

tegengegaan wordt. In een enkel geval is echter het vergroten van de weerstand gewenst. Van beide type weerstandsoptimalisaties zullen hierna enkele voorbeelden gegeven worden.

3 - D		2 - D	
SHAPE	C_{D_0}	SHAPE	C_{D_0}
 STING SUPPORT	0.47 _g		1.17 _g
	0.38		1.20
	0.42		1.16
	0.59 _g		1.60 _g
 CUBE	0.80 _g		1.55
 60°	0.50		1.55
 SEPARATION	1.17	 VORTEX STREET	1.98
 v	1.17	 v	2.00
	1.42		2.30
	1.38		2.20
 CUBE	1.05 _g		2.05 _g

weerstandscoëfficiënten

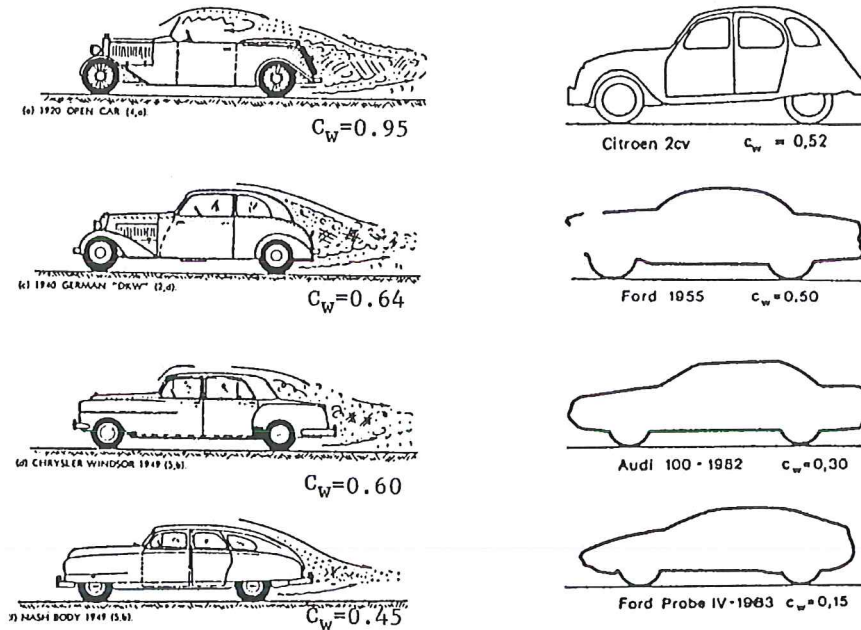
VERMINDEREN VAN DE WEERSTAND

Zoals uit de formulering van de weerstandskracht reeds blijkt is het verminderen van de weerstand in de praktijk slechts mogelijk door het product $C_w * A$ te verlagen.

Bij bijvoorbeeld auto's is het verminderen van het oppervlak van de dwarsdoorsnede slechts in beperkte mate mogelijk in verband met de eisen die er gesteld worden aan de binnenruimte van de auto. Bij het streven naar een zo laag mogelijke weerstand voor auto's is dit echter een aspect dat beslist niet uit het oog verloren mag worden!

Het zoeken naar een vorm voor auto's welke weerstandsverlagend werkt is zeker niet iets van de laatste jaren, ofschoon het de laatste decennia door de oliecrises wel bijzon-

der in de belangstelling is komen te staan. In de hierna volgende figuur staan de resultaten gegeven van experimenten met autovormgeving zoals uitgevoerd sinds de jaren vijftig.

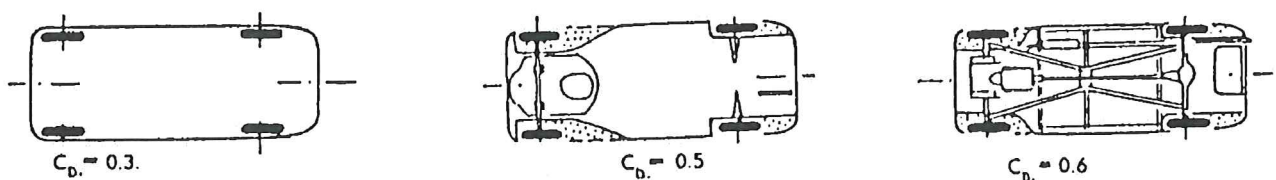


weerstandscoëfficiënten van personen auto's.

Uit de waarden gegeven in de figuur blijkt dat een reductie van ruimte $C_D = 0.95$ tot $C_D = 0.45$ al in de jaren vijftig bereikt was door het doen van onderzoek. Dit werd vooral bereikt door het loslaten van de stroming tegen te gaan, aangezien dit zoals we gezien hebben met grote verliezen gepaard gaat.

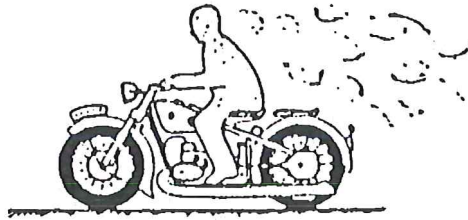
Echter ook het afronden van de voorkant en het vermijden van scherpe hoeken leidt tot een wezenlijke weerstandsvermindering. In recente jaren is een nog veel verder gaande reductie van de weerstand bereikt door een zeer stromingsbewuste vormgeving. Ook het vermijden of stroomlijnen van allerlei (uitstekende) details zoals deurknoppen, antennes, spiegels, strippen, bumpers, etc. leidt tot een aanzienlijke besparing van de overall weerstand.

Ook de vormgeving van de onderkant blijkt belangrijk te zijn zoals moge blijken uit de volgende figuur waarin een ruwe en een door een plaat glad afgewerkte onderkant van een auto met elkaar worden vergeleken.



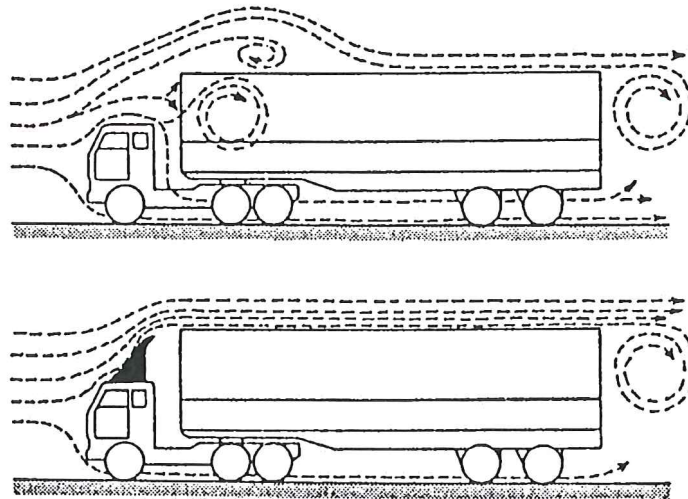
In het geval van een motorrijder wordt veelal het product $C_w * A$ als maat genomen voor de weerstandsverbetering, aangezien het aangestroomde oppervlak A hier een wezenlijk onderdeel uitmaakt van de veranderingen in de vormgeving welke gebruikt worden om de weerstand te verminderen.

In de onderstaande figuur met tabel blijkt hoezeer de weerstand verlaagd kan worden door het bukken van de motorrijder. Daarnaast blijkt hoeveel de weerstand vervolgens verlaagd kan worden door een eventuele stroomlijning van de combinatie motor + berijder door middel van een of andere fairing.



<u>weerstand motorrijder</u>	<u>$c_d \cdot A$</u>
motor zonder rijder	0.204
motor met berijder	0.565
motor met berijder in gebogen conditie	0.290

Ook zij in dit verband nog genoemd de invloed van spoilers zoals die tegenwoordig veel op vrachtwagens worden aangetroffen. Dit luchtgeleidende profiel zorgt voor een aanzienlijk schonere omstroming van de vrachtwagen combinatie met minder loslating en wervelvorming en dus tot een lagere luchtweerstand.

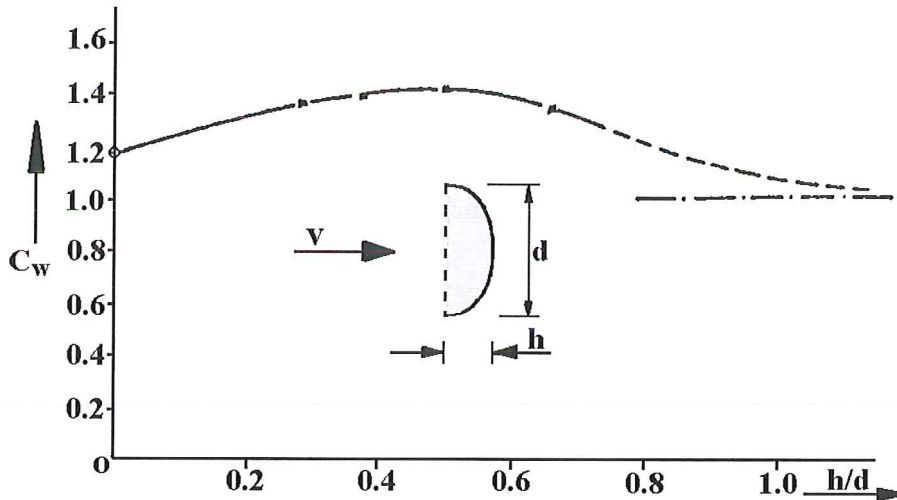


Offshore platforms van niet onaanzienlijke afmetingen worden tegenwoordig geplaatst op de zeebodem. Daarbij worden deze blootgesteld aan de invloed van stroom en golven. Beide verschijnselen gaan gepaard met stroomsnelheden, waardoor grote krachten op het platform kunnen ontstaan. Teneinde deze zo klein mogelijk te houden wordt de onderwater constructie gemaakt van ronde pijpen. Gestroomlijnde doorsneden komen hier niet in aanmerking omdat de richting van de stroming niet altijd dezelfde is. Ook het aantal pijpen en de diameter ervan wordt zo klein als mogelijk gehouden.

HET VERGROTEN VAN DE WEERSTAND

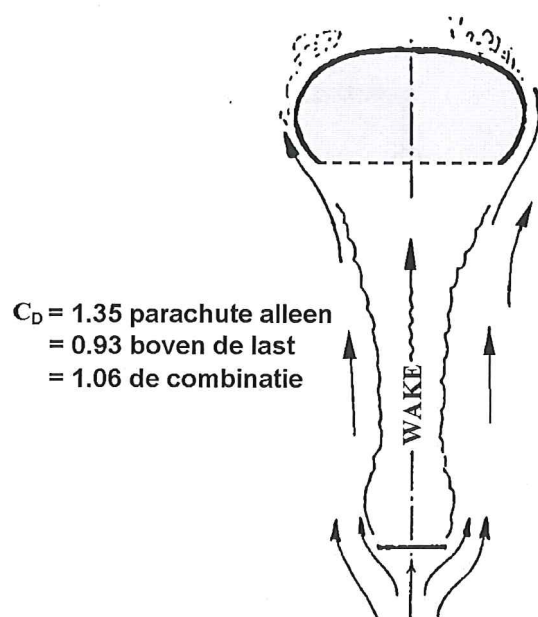
In een aantal gevallen is het uit gebruiksoogpunt gewenst de weerstand van iets te maximaliseren.

Dit is bijvoorbeeld het geval bij het ontwerpen van een parachute. Bij een maximale weerstand is de uiteindelijke snelheid waarmee het aan de parachute hangende voorwerp de grond raakt zo laag mogelijk. Uit de figuur blijkt dat de grootste weerstandscoefficiënt bij parachutes met gelijke doorsnede oppervlakte gevonden wordt bij een breedte - diepte verhouding van 2, dat wil zeggen bij een halve bol.

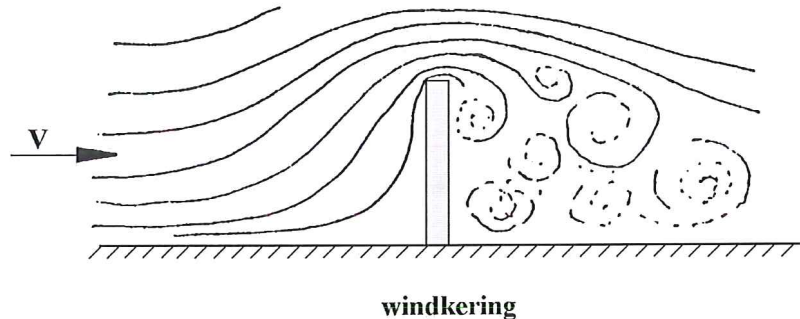


Weerstandscoefficiënt parachute als functie van de vorm

Het feit dat onder de parachute een last gehangen wordt van enige omvang heeft zijn invloed op de weerstand van de parachute zoals uit de onderstaande figuur blijkt. Bij de weerstand van de parachute moet nu echter de weerstand van het lichaam opgeteld worden. De weerstand van de combinatie last plus parachute is echter geringer dan de som van de weerstanden van de last en de parachute afzonderlijk.



Een ander voorbeeld waarbij het zo groot mogelijk maken van de weerstand of eigenlijk het maximaal verstoren van de stroming door het creëren van grote hoeveelheid loslating het oogmerk van het ontwerp is, vinden we bijvoorbeeld bij windschermen. Zoals bekend, worden deze veel toegepast op het strand, maar ook langs autosnelwegen, waterbouwkundige kunstwerken, etc.



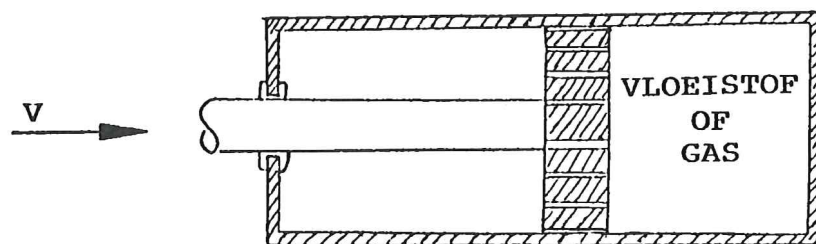
Door een platte plaat met, zoals uit de tabel bekend, een maximale weerstandscoefficient met een zo groot mogelijk oppervlakte haaks op de stroming te zetten, creëert men een zone van betrekkelijke rust direct achter het scherm.

Bij de uiteindelijke uitvoering van het scherm is het essentieel zich te realiseren dat de op het scherm werkende krachten gemaximaliseerd zijn en dat dit eisen stelt aan de constructie.

Een andere praktische toepassing vinden we bijvoorbeeld bij het ontwerp van een demper zoals die in veel werktuigbouwkundige constructies worden toegepast.

Een van de mogelijke uitvoeringen hiervan kan men zich denken opgebouwd te zijn uit een plunjer welke door een of ander medium geperst wordt en daarbij de nodige energie discipeert. De specifieke toepassing vereist een bepaalde hoeveelheid energie welke onder die omstandigheden vernietigd moet worden en dus hoe groot de weerstandskracht in die omstandigheden moet zijn.

Door de vormgeving van de plunjer moet die weerstand gerealiseerd worden.



Vloeistof demper

WEERSTAND VAN OPPERVLAKTE SCHEPEN

Tot nu toe is alleen de weerstand behandeld van geheel door vloeistof omgeven lichamen. Een speciaal geval doet zich echter voor bij lichamen die zich bevinden in of nabij het scheidingsvlak van twee media van sterk verschillende soortelijke massa. Dit is bij-

voorbeeld het geval bij schepen die zich voortbewegen in het scheidingsvlak van lucht en water.

Nadert een diep ondergedompeld lichaam met een voorwaartse snelheid het vloeistof oppervlak dan ontstaan er aan dit oppervlak golven. Met deze golven wordt energie afgevoerd welke er door het voortbewegend lichaam in wordt gebracht: voor het lichaam is dat een weerstand. De **golfmakende weerstand**.

Deze weerstandscomponent komt ook in ideale vloeistoffen voor. Bij schepen is het gebruikelijk de totale weerstand te splitsen in twee gedeelten te weten: de **wrijvingsweerstand** en de **restweerstand**.

Onder wrijvingsweerstand wordt verstaan die weerstandscomponent die zijn oorzaak vindt in de door de viscositeit opgewekte tangential werkende schuifkracht langs het ondergedompelde oppervlak van de scheepshuid: **het nat oppervlak**.

Onder de restweerstand verstaat men dat gedeelte van de totale weerstand dat overblijft na aftrek van de wrijvingsweerstand en dit bevat dus ondermeer de golfweerstand en de drukweerstand.

Als laatste component van de totale scheepsweerstand noemen wij hier nog de luchtweerstand op het bovenwaterschip.

In schema:

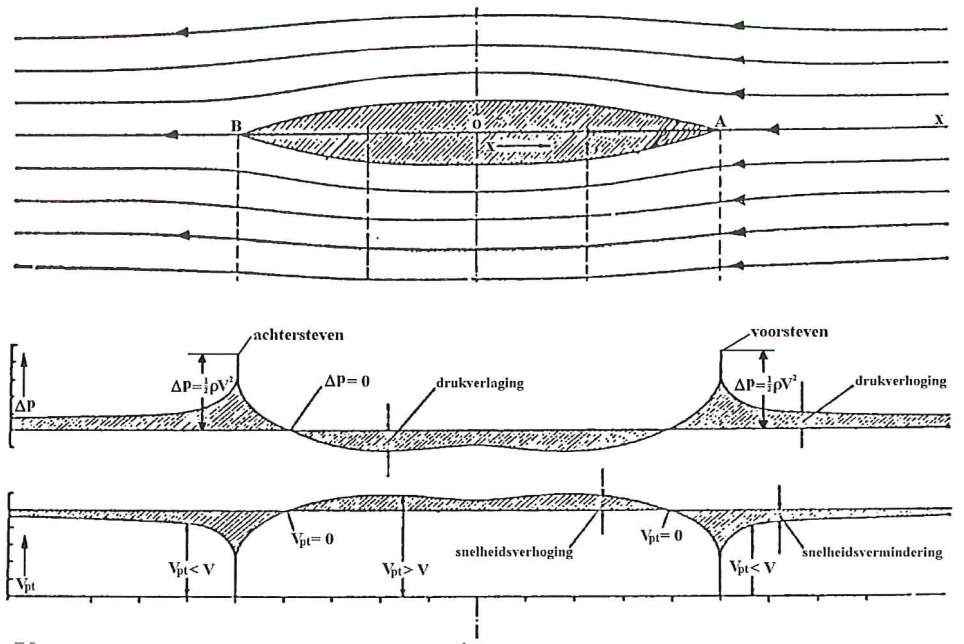
wrijvingsweerstand		onderwater
druk- of vormweerstand	restweerstand	
golfweerstand		
luchtweerstand		bovenwater

Principieel gezien is deze onderverdeling niet geheel gelukkig aangezien ook de drukweerstand zijn oorsprong vindt in de viscositeit van de reële vloeistof zoals wij eerder hebben gezien.

De wrijvingsweerstand wordt bepaald door de wrijvingscoëfficiënten te gebruiken zoals die experimenteel zijn bepaald met behulp van vlakke platen welke in lengterichting door water zijn gesleept.

Deze wrijvingscoëfficiënten blijken in sterke mate afhankelijk te zijn van de snelheid en de lengte van het schip, de ruwheid en de grootte van het nat oppervlak en de kinematische viscositeit van water, welke laatste ondermeer een functie is van de temperatuur. Dat de wrijvingsweerstand bepaald mag worden door gebruik te maken van coëfficiënten ontleend aan de weerstand van vlakke platen, waarbij zodoende de invloed van de driedimensionale vorm van het stromingsbeeld wordt verwaarloosd, is een veronderstelling die vandaag nog de basis vormt voor het voorspellen van de weerstand van schepen met behulp van modelproeven. Hierop zullen we later nog terug komen.

De drukverdeling, welke over het lichaam ontstaat doordat deze met een bepaalde snelheid door het water wordt voortbewogen zou men in een zeer elementaire presentatie kunnen weergeven zoals in de figuur.

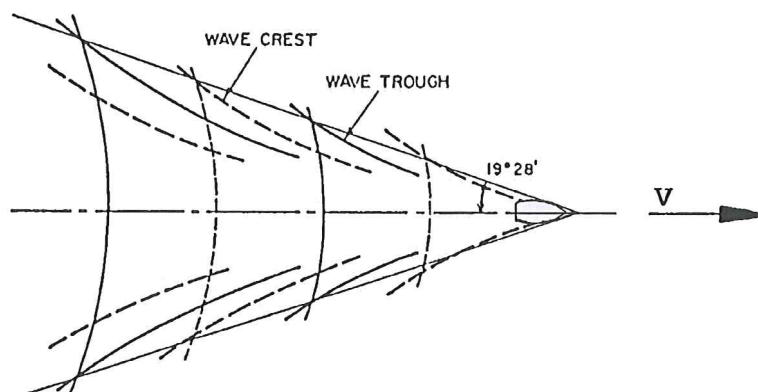


De veranderende druk rond het lichaam is er oorzaak van dat het vrije vloeistof oppervlak waarop de constante atmosferische druk heerst een niveau verandering ondergaat: er ontstaan golven.

Dit is in het bijzonder zo als het lichaam het wateroppervlak doorsnijdt. De drukveranderingen zijn afhankelijk van de voorwaartse snelheid en nemen sterk toe met het toenemen van de snelheid. Bij lage voorwaartse snelheid is er van enige golfvorming nauwelijks sprake en bestaat de weerstand van het schip hoofdzakelijk uit wrijvingsweerstand, bij hoge snelheid wordt de golfvorming steeds groter. In deze situatie kan de golfweerstand van het schip oplopen tot circa 50 procent van de totale weerstand van het schip en in uitzonderlijke situaties zelfs nog hoger.

Voor normale oppervlakte schepen loopt de golfweerstand bij toenemende snelheid op een gegeven moment zo hoog op dat een soort van barrière bereikt wordt welke slechts ten koste van oneconomische hoeveelheden te installeren vermogen te overschrijden is. Dit, uit het geschetste drukverloop volgens de potentiaalstroming langs de romp resulterende golfsysteem, noemt men het **primaire golfsysteem**.

Daarnaast is er ook een secundair golfsysteem. Dit manifesteert zich als een drukpunt zich verplaatst in een vrij vloeistof oppervlak. Er ontwikkelt zich dan een systeem van divergerende zwaartekrachtsgolven binnen een sector met een halve hoek van 19.5 graden, zie de figuur.

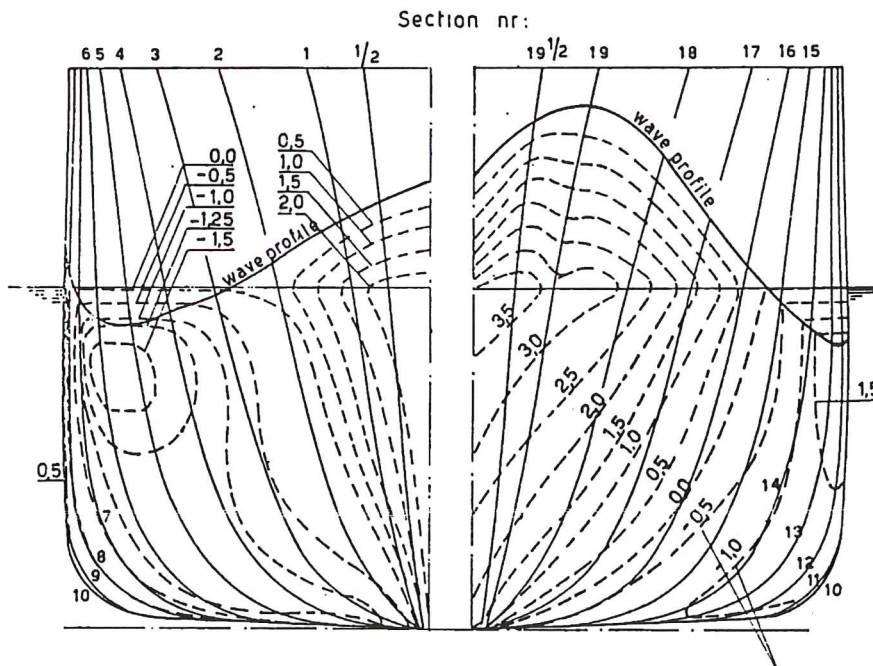


We hebben gezien dat als een schip vaart, met andere woorden als er een relatief snelheidsverschil is tussen het object (schip) en het omringende water, er een snelheidsfluctuatie rond het schip optreedt door de aanwezigheid van het schip. Deze snelheidsverschillen uiten zich in drukverschillen op en rond de romp. Op het vrije vloeistof oppervlak geeft dit aanleiding tot golven. De energie welke in deze golven wordt afgevoerd komt tot uiting in de golfmakende weerstand.

Kelvin was een van de eersten die zich rekenschap gaf van de wijze waarop deze golven gevormd worden. Door zich het schip voor te stellen als een geïsoleerd druk punt dat over het wateroppervlak gaat kwam hij tot het beeld van de golven, zoals dat eerder geschetst is in bovenstaande figuur, namelijk van een divergerend golfsysteem, dat wijder wordt aan beide zijden van het schip en het transversale golfsysteem, welke dwars achter het schip aanloopt.

We zagen echter dat als een schip door het water gaat de druk over de hele lengte van het schip zal variëren en het golfbeeld van een echt schip is dan ook gecompliceerder dan dat van een enkel drukpunt zoals bij Kelvin. De druk zal over het algemeen hoger zijn bij de boeg en de achter steven en lager in het midden van het schip. Zo ontstaan er separate golfsystemen welke hun eerste golftop of eerste golfdal vormen op enige afstand achter het punt van maximale (top) of minimale (dal) druk.

Dit werd ondermeer duidelijk geïllustreerd door de proeven welke Eggert uitvoerde in de sleeptank van Washington waarbij hij de drukverdeling over de einden van een scheepsmodel mat en deze vergeleek met het gemeten golfprofiel langs de romp.



Pressure distribution over the hull surface as measured by Eggert

Door van de gemeten drukken de componenten in de langs richting van het schip te nemen en deze over de lengte van het schip te integreren was hij in staat om aan te tonen dat de resulterende weerstand heel aardig overeen kwam met die gemeten aan het model als daar de wrijvingsweerstand vanaf getrokken was.

De golfweerstand welk een schip ondervindt kan dus ook beschouwd worden als de netto langsscheepse kracht welke het schip ondervindt tengevolge van de door de snelheid opgewekte drukverschillen over de lengte van de scheepshuid.

De golfmakende weerstand van een varend schip kan ook anders beschouwd worden namelijk dat zij gelijk is aan de energie in de door het schip gemaakte golven. Deze wordt van het schip afgevoerd en zij is door het schip geleverd. De golfmakende weerstand moet dan berekend kunnen worden door de totale energie uit te rekenen welke in het door het schip opgewekte golfveld achter het schip aanwezig is. Dit is voor het eerst aangetoond door Havelock. Hij bepaalde hiertoe de golven op enige afstand van het schip en met de inmiddels bekende fysica van de golf kon hij de energie in die golven uitrekenen en laten zien dat goed overeenkomt met de golfmakende weerstand zoals gemeten.

Tegenwoordig zijn er ook allerlei mathematische methoden beschikbaar om de golfmakende weerstand van een schip te voorspellen. Hierbij wordt de vloeistof geïdealiseerd, d.w.z. geen wrijving etc., en wordt vervolgens het stromingsbeeld rond het schip opgelost door een set algemene vergelijkingen op te lossen met gebruikmaking van een stel randvoorwaarden op de scheepshuid (alleen stroming langs de huid en niet loodrecht erop) en op het vrij vloeistof oppervlak (atmosferische druk en waterdeeltjes blijven in het oppervlak). Zo kan op de huid welke onderverdeeld is in een groot aantal vlakjes, de stromingsvector bepaald. Middels de inmiddels bekende weg van snelheid naar druk naar kracht kan dan de weerstand berekend worden. Deze methode kent ook zijn beperkingen in allerlei vereenvoudigingen welke opgelegd moeten worden om het probleem oplosbaar en hanteerbaar te houden. Daarnaast zijn deze methoden vaak relatief bewerkelijk (en dus kostbaar).

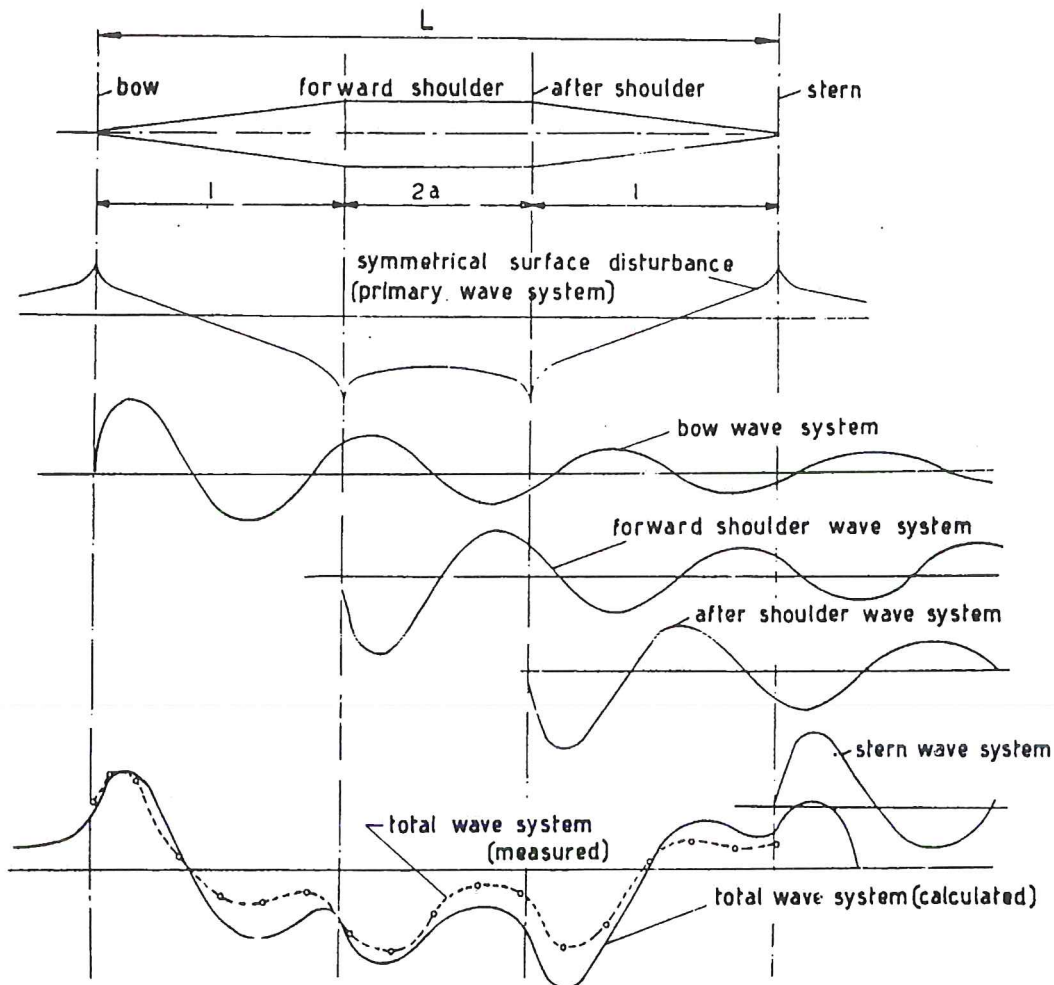
Ofschoon we nog steeds niet in staat zijn om de totale weerstand of alleen de golfmakende weerstand van een schip in zijn geheel te berekenen, is de kwalitatieve overeenkomst tussen deze berekeningen en de metingen wel zo goed dat zij gebruikt kan worden om een weerstandsschatting van het schip te maken. Afhankelijk van de behoefte (bijvoorbeeld concept ontwerp, voorontwerp, definitief ontwerp of romp optimalisatie) kan een van de methoden gebruikt worden.

Om een idee te krijgen wat er bij een schip allemaal een rol speelt kan het volgende gesimplificeerde voorbeeld gebruikt worden.

Beschouw een eenvoudige scheepsvorm (Wigley 1931) welke is opgebouwd uit een evenwijdig middengedeelte en twee wigvormige einden (voor- en achterschip) Wigley liet zien hoe de uitdrukking voor het golfprofiel langs het schip uiteindelijk uit 5 termen bestaat.

9. een symmetrische verstoring van het oppervlak welke naar voren en naar achteren snel verdwijnt en geen energie afvoert
10. een golfsysteem bij de boeg, beginnend met een golftop
11. een golfsysteem bij de voorschouder, beginnend met een golfdal
12. een golfsysteem bij de achter schouder, beginnend met een golfdal
13. een golfsysteem bij de achtersteven, beginnend met een golftop

Deze vijf systemen zijn getekend in de volgende figuur.

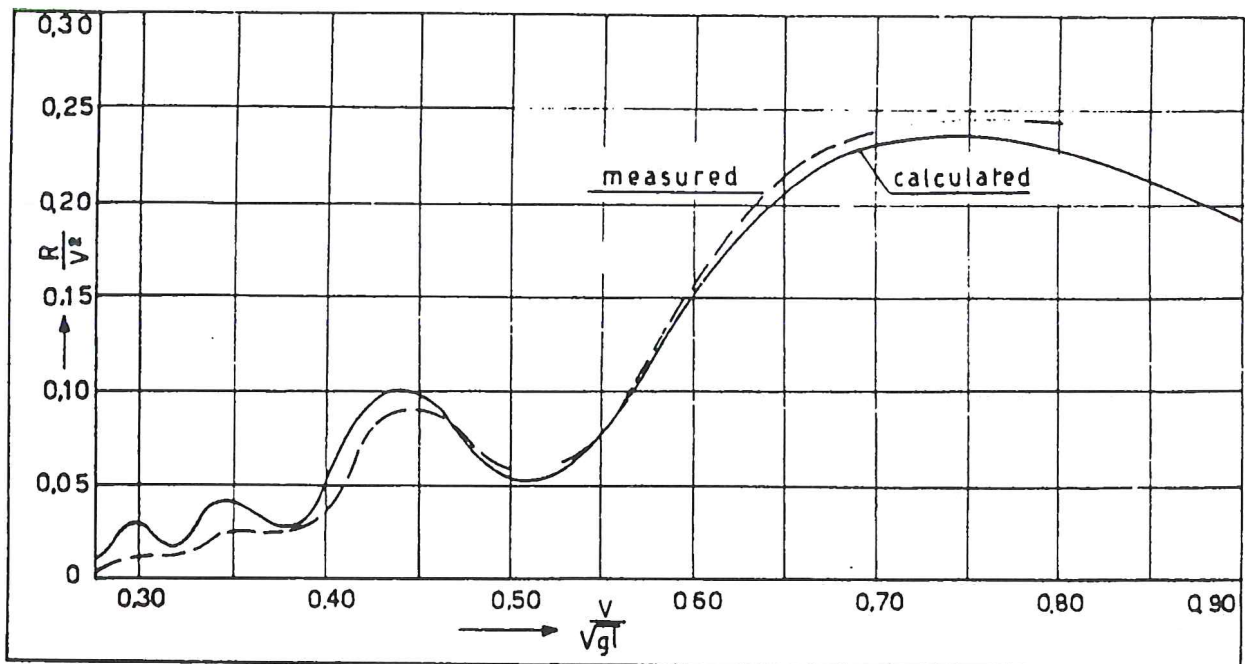


Op enige afstand achter het schip worden deze vier golfsystemen elk een soort sinus-kromme met afnemende amplitude en met een golflengte welke overeenkomt met die van een "vrije" oppervlakte golf voortbewegend met de snelheid van het schip. Deze golflengte wordt bereikt na ongeveer twee golven.

Het totale (resulterende) golfprofiel, zoals we dat zien langs de romp, zal opgebouwd zijn uit deze vier afzonderlijke componenten. Door superpositie van deze afzonderlijke golfcomponenten ontstaat dan het uiteindelijke totale golfprofiel. Dit betekent dat het totale golfprofiel dus afhankelijk is van de vorm (hoogte en lente) van de afzonderlijke componenten. En van hun onderlinge posities. Zo kunnen zij elkaar versterken of verzwakken en kan de resulterende golfhoogte dus groter of kleiner zijn dan de som der afzonderlijke golfhoogtes van elk van de componenten. Aangezien de in de golven afgevoerde energie en dus de weerstand die het schip voelt ongeveer evenredig is met de golfhoogte in het kwadraat, is dit een belangrijke maat voor de golfmakende weerstand. Het door Wigley gemeten en aldus berekende golfprofiel kwamen in belangrijke mate met elkaar overeen, alhoewel er wel enige significante verschillen gevonden werden bij het achterschip. Hier was de gemeten golfhoogte (in de sleeptank) kleiner dan de berekende. Dit werd verklaard door de invloed van de in werkelijkheid (bij het sleeptankmodel dus) altijd aanwezige viscositeit van het water, waardoor de snelheid van de water-

deeltjes langs het achterschip lager is dan in de wrijvingsloze berekening werd aangenomen.

Bij veranderende snelheid verandert de golflengte van de afzonderlijke golfsystemen. Bij hogere snelheid worden de golven langer en omgekeerd. De onderlinge positie van de golftoppen en dalen zal daardoor veranderen. Dus zal ook het totale golfprofiel langs en achter het schip veranderen bij veranderende snelheid, immers dit wordt verkregen door superpositie van de afzonderlijke systemen. Zo zal de onderlinge beïnvloeding aanleiding geven tot verschillen in weerstand. Dit geeft bij veranderende snelheid aanleiding tot "schommelingen" in de kromme van de golfmakende weerstand. Deze vertoont dan zoiets als bulten en deuken (humps and hollows). Een treffend voorbeeld hiervan is gegeven in de onderstaande figuur voor de Wigley vorm, waarin de weerstandscoefficient als functie van de snelheid (F_n) is gegeven.



De humps en hollows zijn duidelijk waarneembaar als functie van de voorwaartse snelheid. Voor echte scheepsvormen zijn deze in de weerstandskromme ook altijd waarneembaar al zijn ze vaak minder uitgesproken dan bij deze geïmplificeerde scheepsvorm van Wigley. Hierdoor is de "ontstaanspositie" van de verschillende golfsystemen niet zo duidelijk vastgelegd en bestaat bovendien nog de kans op nog meer (maar dan ook minder uitgesproken) golfsystemen welke ontstaan langs de lengte van de scheepsromp.

Bij de eenvoudige scheepsvorm zoals wij die nu beschouwen kunnen twee belangrijke vormen van interferentie tussen de golfsystemen optreden:

1. interferentie tussen twee systemen met eenzelfde teken, dat wil zeggen tussen de boeggolf en de hekgolf;
2. interferentie tussen twee systemen met een verschillend teken, dat wil zeggen tussen bijvoorbeeld de boeggolf en de voorschoudergolven.

Uit de praktijk blijkt dat deze tweede vorm van interferentie het belangrijkste is omdat deze twee systemen elkaar kunnen beïnvloeden zonder dat de viscositeit de kans heeft gekregen om de golfhoogte van het afzonderlijke golfsysteem te beïnvloeden. Zo zal de boeggolf pas kunnen interfereren met de hekgolf als de eerste reeds veel van zijn hoogte verloren heeft door de dempende werking van de viscositeit.

Bij onze eenvoudige scheepsvorm treedt deze tweede vorm van interferentie tegelijkertijd op tussen de golven van de boeg en de achterste schouder en tussen die van het hek en de voorste schouder, dit tengevolge van de symmetrie. De afstanden tussen deze golfsystemen is $(l + 2a)$ of laten we zeggen: $x \cdot L$; zie figuur blz 5.20.

De maxima in de weerstand treden nu op als de golfbergen van beide systemen samen vallen, dus als:

$$x \cdot L = \frac{1}{2} \lambda, \quad \frac{3}{2} \lambda \quad \text{of} \quad \frac{5}{2} \lambda$$

Op overeenkomstige wijze treden de golfminima op als de golfbergen van het ene systeem samenvallen met de golfdalen van het andere. Dit gebeurt als:

$$x \cdot L = \lambda, \quad 2\lambda \quad \text{of} \quad 3\lambda$$

Uit de golftheorie is bekend dat de snelheid van een vrijoppervlakte golf gelijk is aan:

$$C = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi/k}{2\pi/\omega} = \frac{\omega}{k} = \frac{\sqrt{kg}}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi}} = 1.25\sqrt{\lambda}$$

Hiermee zijn de golfsnelheid en zijn bijbehorende golflengte eenduidig aan elkaar gekoppeld. En aangezien de snelheid van een oppervlakte golf gelijk is aan de snelheid van het schip welke deze opwekt, volgt hieruit dat er voor specifieke waarden van het Froude getal sprake zal zijn van een hump of een hollow in de weerstandskromme van een schip.

Zo liggen de humps bij: $F_n = 0.365, 0.392, 0.426, 0.471, 0.534$
 en de hollows bij: $F_n = 0.333, 0.353, 0.378, 0.447, 0.500$

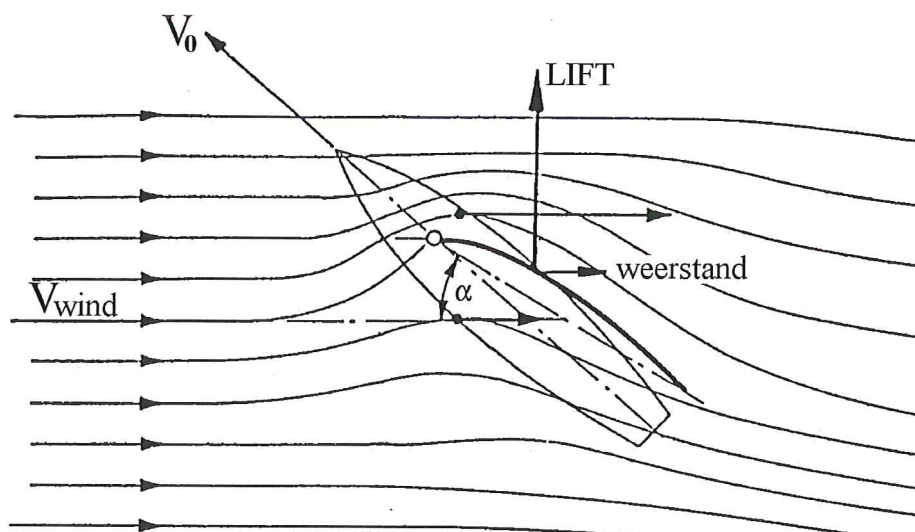
6. VOORTSTUWING

In een eerder hoofdstuk is de weerstand van lichamen in een uniforme stroming behandeld. Het is echter niet zo dat voorwerpen die zich ten opzichte van een omringend medium verplaatsen alleen maar een weerstand ondervinden.

Zoals aangetoond werken op een lichaam geplaatst in een uniforme stroming van een ideale vloeistof geen resulterende krachten in de richting van de stroming: er is geen weerstand. Dit geldt zolang het lichaam zich niet bevindt in de onmiddellijke nabijheid van een vrij vloeistof oppervlak. Het is echter mogelijk om in een ideale stroming krachten te vinden welke loodrecht op de stromingsrichting staan. Zo een kracht noemen we: **liftkracht**.

De eigenschap van speciaal gevormde lichamen om onder specifieke omstandigheden een liftkracht op te wekken is in de techniek van groot belang. Dit zal in het hierna staande worden toegelicht.

Beschouw de figuur hieronder waarin de stroming wordt weergegeven rond een in een ideale vloeistof geplaatste vleugel.



Het stromingsbeeld is twee dimensionaal. De vergelijking van Bernouilli kan worden gebruikt om het ontstaan van de lift te verklaren. De stroming wordt verondersteld stationair te zijn zodat de stroomlijnen zoals geschetst in de figuur de banen van de vloeistofdeeltjes weergeven.

De vloeistofstroom wordt door de aanwezigheid van het vleugelprofiel in twee gedeelten gesplitst: het ene gedeelte passeert de vleugel aan de bovenzijde het andere gedeelte aan de onderzijde.

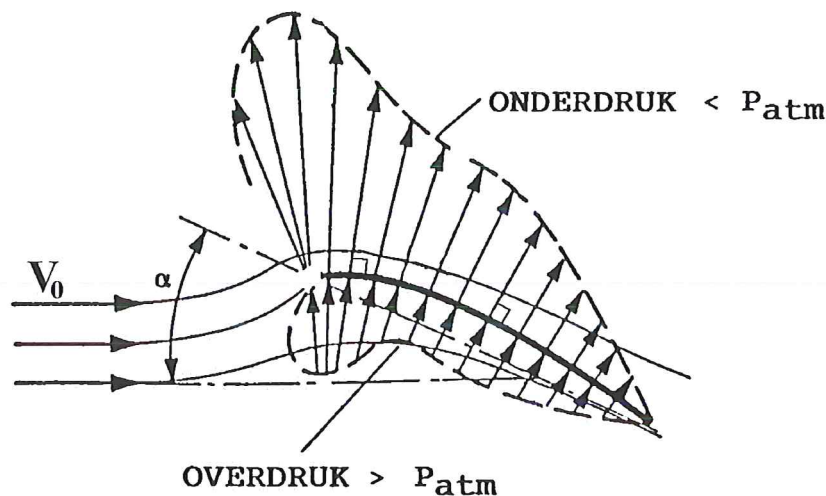
De getoonde stroomlijnen zijn gevonden door experimentele bepaling maar zijn overigens ook te berekenen uit potentiaal theoretische beschouwingen. Uit de tekening kunnen we aflezen dat de stroming aan de bovenkant in doorsnede beperkt wordt (daar waar de stroomlijnen convergeren).

Aangezien de vloeistof onsamendrukbaar wordt verondersteld geldt de continuïteitsbetrekking en dit impliceert dat de snelheid aan de bovenkant van de vleugel toeneemt en wel het meest daar waar de stroomlijnen het sterkst convergeren. De snelheid daar ter plaatse is dus groter dan in de vrije vloeistofstroming.

Volgens de Wet van Bernouilli moet dit betekenen dat de druk daar ter plaatse afneemt. De grootste onderdruk treedt op aan de voorkant van de vleugel. Naar achteren toe bouwt de druk zich langzaam weer op.

Beschouwen we het gedeelte aan de onderzijde van de vleugel dan vinden we dat het doorstromingsoppervlak hier groter wordt, de snelheid neemt derhalve af en de druk toe ten opzichte van de statische druk in de vrije stroming.

De drukverdeling over de vleugel ziet er ongeveer uit zoals in de onderstaande figuur.



De resulterende druk aan de bovenzijde is lager dan de statische druk en aan de onderzijde hoger. De integratie van de resulterende druk over het oppervlak van de vleugel levert een netto kracht omhoog: **de lift**.

In het geval van een oneindig lange vleugel in een ideale (dus wrijvingsloze) vloeistof staat deze resulterende kracht loodrecht op de aanstromende vloeistof richting. In werkelijkheid hebben we evenwel met ideale vloeistoffen nooit te maken en is er altijd een invloed van de viscositeit, hoewel soms gering. De aanwezigheid van enige vorm van viscositeit is zelfs voorwaarde om tot lift op een lichaam te komen. Hierop zal later iets verder worden ingegaan.

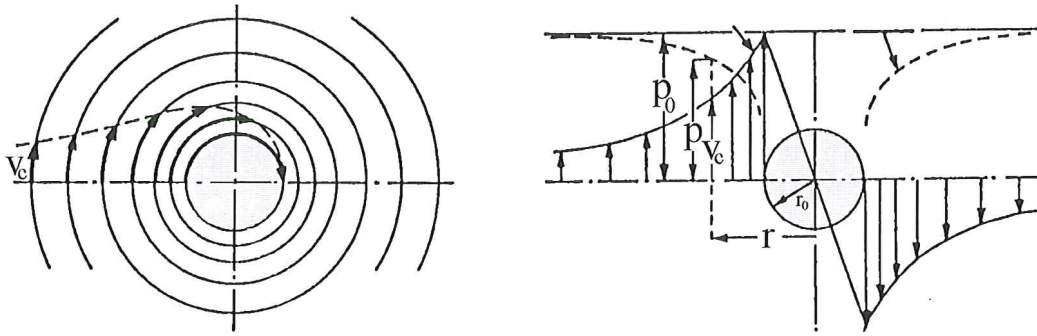
Een andere beschouwingwijze om tot de lift op een vleugel te komen wordt in de theoretische beschouwingen over vleugels veelvuldig gebruikt.

Hierbij wordt de resulterende stroming rond een vleugel beschouwd te zijn opgebouwd uit twee type stromingen: een homogeen aanstromende vloeistofstroom met uniforme constante snelheid, en een circulerende stroming rond de vleugel.

Deze circulerende stroming kan men zich voorstellen als een roterende stroming rond een denkbeeldig middelpunt waarvan de snelheid afneemt met de reciproque waarde van de afstand tot het middelpunt.

De stroming voldoet aan: $V_c = \frac{\text{constante}}{r}$, waarin r de afstand tot het middelpunt voorstelt.

Een circulerende stroming ziet er uit zoals geschetst in de volgende figuur.



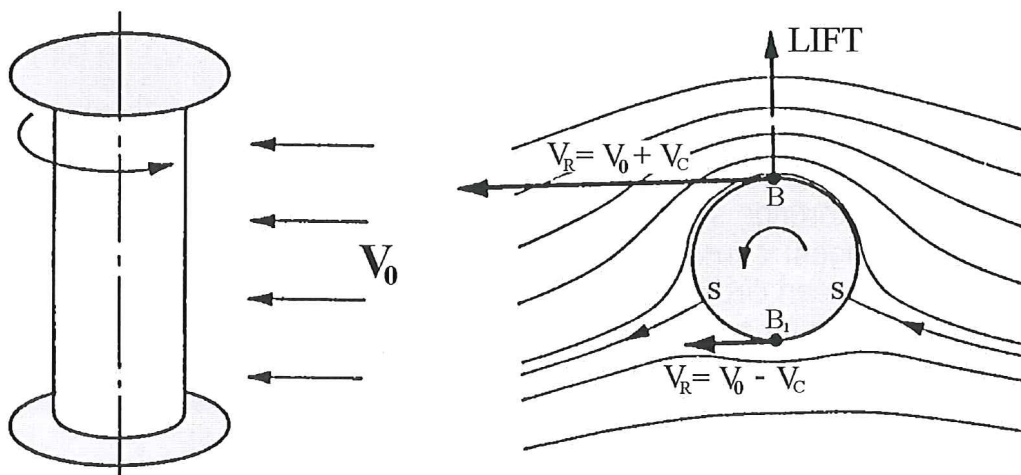
Naar de kern toe wordt de snelheid steeds hoger en in de kern theoretisch zelfs oneindig hoog. Volgens de wet van Bernouilli moet dit tevens gepaard gaan met een verlaging van de druk. Dit beeld vertoont veel gelijkenis met dat van een windhoos: de zeer hoge windsnelheid en de zeer lage druk worden ook in de kern van zo'n windhoos waargenomen. Ook depressies zijn in principe wervelsystemen en vertonen een vergelijkbaar karakter zoals uit de vele satellietfoto's inmiddels genoegzaam bekend is.

Wervels in een of andere gedaante komen in de natuur zeer vaak voor. De combinatie van deze beide geschetste stromingsbeelden, dus de uniforme stroming en de circulatie stroming, leidt tot hetzelfde stromingsbeeld zoals gegeven in de eerdere figuur. De stroomsnelheden en richtingen van beide stromingen worden in elk punt van de stroming bij elkaar opgeteld.

Door de circulatie wordt de resulterende stroming boven de vleugel versneld en onder de vleugel vertraagd. Deze beschrijving van het stromingsbeeld wordt in de theoretische beschouwingen veel gehanteerd, omdat beide stromingen wiskundig goed te manipuleren zijn.

Dat deze beschouwingwijze voor de stroming rond een vleugel niet uitsluitend een mathematische beschrijving van de werkelijkheid is, maar wel degelijk ook een fysische betekenis heeft, moge blijken uit de experimenten van Magnus.

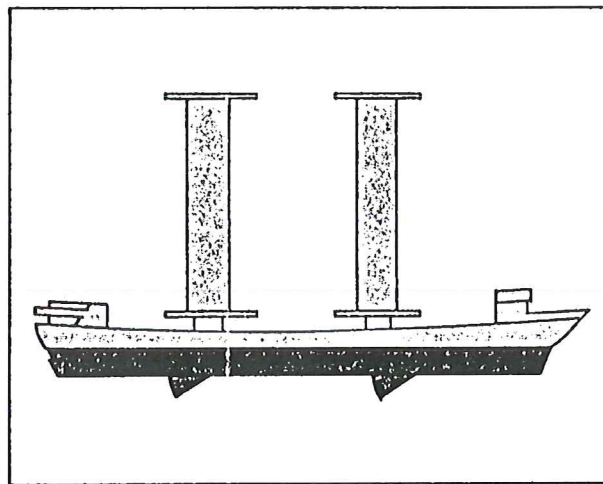
Deze toonde aan dat men zich een circulerende stroming kan denken te ontstaan rond een in een vloeistof roterende cilinder.



Wordt deze cilinder nu blootgesteld aan een uniforme stroming dan ontstaat er een liftkracht loodrecht op het vlak door de as van de cilinder en de richting van de aankomende stroming.

Dit verschijnsel wordt in de literatuur algemeen aangeduid met het Magnus effect.

Flettner construeerde indertijd een voortstuwingsinstallatie op een schip gebaseerd op dit Magnuseffect, waarbij een tweetal rotors gebruikt werden als voortstuwende elementen. Met de wind van opzij was de liftkracht op de rotors recht naar voren gericht en kon het schip hiermee voortgestuwd worden. Het schip vertoonde op deze manier gelijkenis met een zeilschip, met dien verstande dat de rotors effectiever waren dan de zeilen. Het idee bewees in de praktijk te werken maar was commercieel geen succes.



De grootte van de liftkracht wordt bepaald door de snelheid van de aankomende stroming en de snelheid van de circulerende stroming, kortweg aangeduid als de circulatie sterkte.

De sterkte van de circulatie blijkt afhankelijk te zijn van de precieze vormgeving van de vleugel, waaronder begrepen de eventuele asymmetrie van de doorsnede, het planvorm van de vleugel en de effectieve invalshoek van de stroming op de vleugel.

De circulatie kan geschreven worden als:

$$\Gamma = V_c \cdot 2\pi r_0$$

Combinatie van deze en de eerdere vergelijking levert:

$$\Gamma = 2\pi \cdot \text{constante}$$

dat wil zeggen dat de circulatie een constante waarde heeft voor elk gesloten pad rond de kern van de wervel. Voor de lift per eenheid van spanlengte (b) van de vleugel valt nu te schrijven:

$$\frac{L}{b} = \rho V_0 \Gamma$$

ofwel:

$$\frac{L}{b} = \rho V_0 (V_c 2\pi r_0)$$

De resulterende lift is inderdaad afhankelijk van de snelheid van de aanstromende vloeistof en de circulatie rond de vleugel. Hieruit valt eenvoudig te destilleren wat een goede manier is om vleugel eigenschappen met elkaar te vergelijken, immers de lift blijkt afhankelijk te zijn van een product van twee snelheden. Een dimensieloze presentatie van de liftkracht wordt derhalve gevonden door deze te delen door de stuwdruk en het oppervlak van de vleugel volgens:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$$

In het hoofdstuk over modelwetten hebben we gezien dat hier sprake is van Newtons modelwet voor lichamen in een uniforme stroming.

De coëfficiënt C_L bevat nu de specifieke lift producerende eigenschappen van de vleugel afhankelijk van vormgeving en invalshoek en andere van belang zijnde parameters. Door deze coëfficiënt bijvoorbeeld op modelschaal te meten kan voor elke andere vleugel met afwijkende afmetingen de lift bepaald worden.

De beschouwingen gelden in principe voor ideale vloeistoffen, dus zonder de invloed van de viscositeit. Echter om het ontstaan van circulatie te verklaren is het in de beschouwing betrekken van deze viscositeit onontbeerlijk gebleken. Volgens een hier niet te bewijzen theorema van Kelvin voor ideale vloeistoffen is de hoeveelheid circulatie in een vloeistof constant.

Dat betekent dat in een vloeistof waar geen circulatie is ook geen circulatie kan ontstaan of deze moet gecompenseerd worden door een even grote circulatie met tegengesteld teken.

Circulatie moet dus door een of ander mechanisme in de vloeistof gebracht worden. Bij de Magnus rotor geschiedt dit door het roteren van de cilinder en de viscositeit van de omringende vloeistof waardoor deze uiteindelijk een circulerend stromingsbeeld te zien geeft.

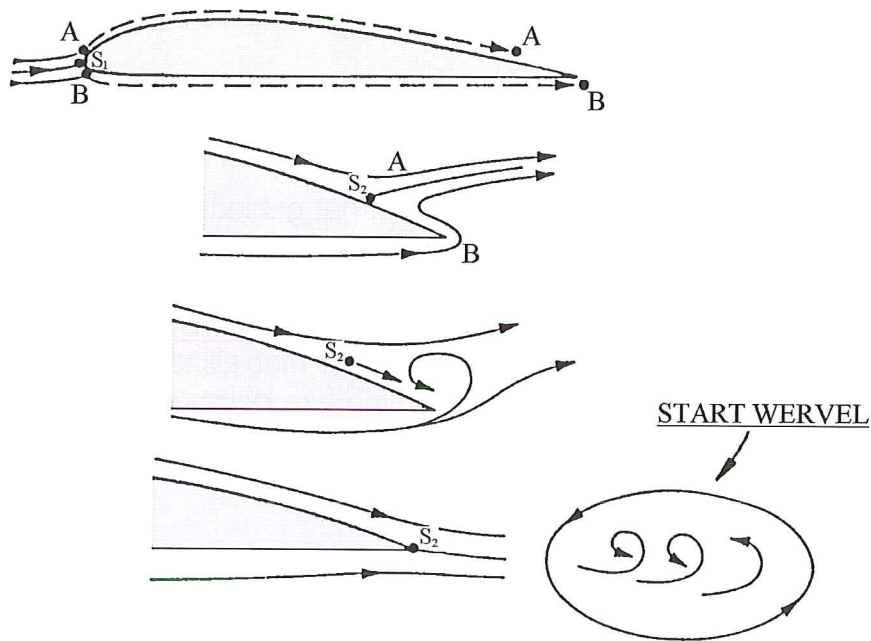
Bij een vleugel geschiedt dit op een andere manier. Beschouw daartoe een vleugel in rust in een stilstaande vloeistof. In deze situatie is er geen circulatie. Plotseling zet de vleugel zich in beweging. Het stromingsbeeld rond de vleugel ziet er dan in eerste instantie uit zoals gegeven in de bijgaande figuur.

Het stuwpunt aan de voorzijde ligt iets aan de onderkant het stuwpunt aan de achterzijde ligt iets aan de bovenzijde op de "rug" van de vleugel. Dit impliceert dat de vloeistofdeeltjes rond de scherpe achterrand van de vleugel moeten stromen en dat kan alleen met een relatief hoge snelheid (en versnelling).

Dit is het beeld dat zou ontstaan als we te maken hebben met een ideale wrijvingsloze vloeistof. In een viskeuze vloeistof echter is het onmogelijk om deze scherpe achterrand zo te omstromen, ten gevolge van de optredende schuifspanningen. De stroming breekt af bij de achterrand van de vleugel en daar ter plaatse ontstaat een wervel welke de circulatie in de stroming brengt.

Deze wervel wordt in de literatuur de **startwervel** genoemd, omdat zij gelet op het theorema van Kelvin het ontstaan van de circulatie rond de vleugel inluidt. De circulatie rond de vleugel ontstaat nu in tegengestelde richting t.o.v. de startwervel.

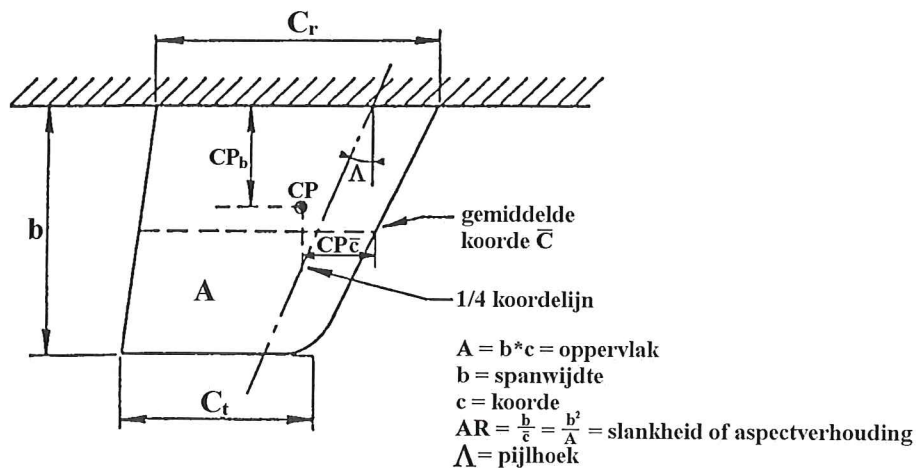
Het principe lijkt veel op de analogie in de mechanica waar een momentum in rotatie niet kan ontstaan zonder dat een tegengesteld momentum wordt opgewekt volgens het principe actie = reactie.



Bij elke verandering van de lift van een vleugel en dus van de circulatie ontstaat er opnieuw een startwervel. Het bestaan van de startwervel is door vele experimenten aangetoond en is dus niet slechts een theoretisch bedenkensel om het ontstaan van de circulatie te verklaren.

De viscositeit van de reële vloeistoffen veroorzaakt tevens een kleine weerstandskracht, zodat een oneindig lange vleugel in een twee dimensionale stroming toch een kleine weerstand ondervindt, deze is vele malen kleiner dan de liftkracht.

Tot hertoe is gesproken over twee dimensionale stromingen zoals we die uitsluitend aantreffen bij oneindig lange vleugels. In de praktijk is hiervan uiteraard nooit sprake, hoewel de zeer lange en slanke vleugels van bijvoorbeeld een zweefvliegtuig wel als zodanig beschouwd mogen worden. Voor vleugels met een eindige spanlengte geldt dat de stroming niet meer gelijkvormig is voor elk vlak in de aanstromingsrichting en loodrecht op de span van de vleugel, maar dat deze over de lengte van de span van de vleugel varieert: er ontstaan ook snelheidscomponenten langs de span van de vleugel. In dergelijke gevallen spreekt men van een drie dimensionale stroming.



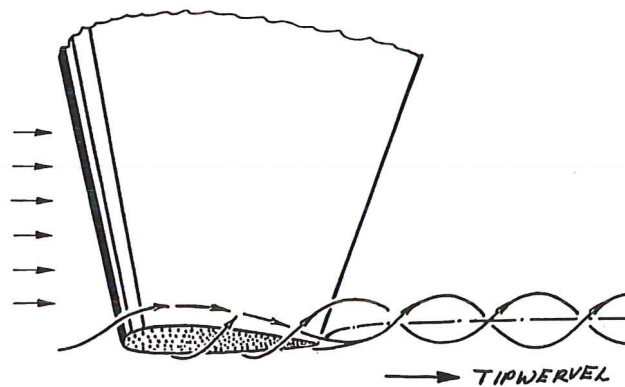
Voor het beschrijven van de geometrie van een vleugel wordt gebruik gemaakt van een standaard terminologie. Ter illustratie wordt verwezen naar de bovenstaande figuur.

Een belangrijk gevolg van de eindigheid van de span van de vleugel is het ontstaan van een extra weerstandscomponent en het verkleinen van de optredende circulatie bij een gegeven invalshoek.

Deze vindt zijn oorzaak in het stromingspatroon in het gebied rond de vleugeltip.

De hoge druk aan de onderzijde van de vleugel komt daarbij in contact met de lage druk zone aan de bovenzijde van de vleugel.

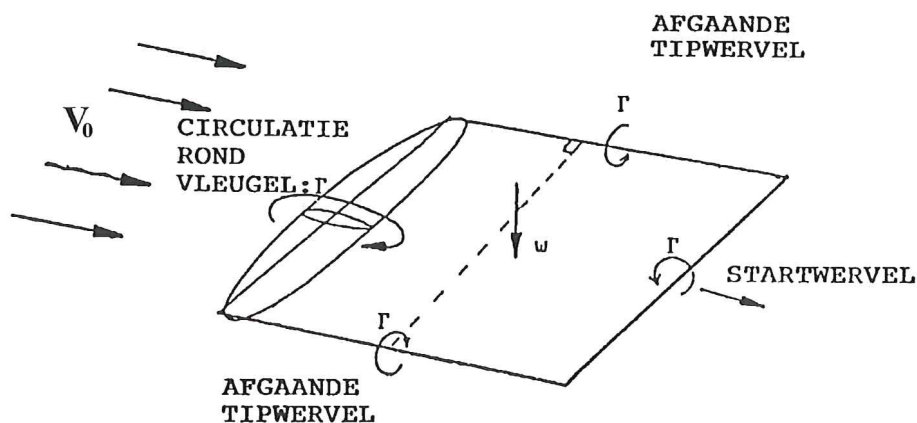
Doordat aan het einde van de vleugel er geen barrière meer is tussen beide drukgebieden staan deze als het ware in een open verbinding met elkaar. Het gevolg hiervan is een druk uitwisseling en een resulterende stroming van de hoge drukzijde naar de lage drukzijde. Gesuperponeerd over de uniform aanstromende vrije vloeistofstroming ontstaat hier een wervel welke **tipwervel** wordt genoemd.



In de mathematische beschrijving van de stroming rond de vleugel zijn deze tipwervels ook een essentieel onderdeel aangezien de circulatie rond de vleugel beschouwd als wervel niet zomaar in de vloeistof kan eindigen, zoals is aangetoond met het Theorema van Helmholtz.

De tipwervels nu voeren de circulatie van de vleugel af naar oneindig achter de vleugel zodat aan dit theorema wordt voldaan.

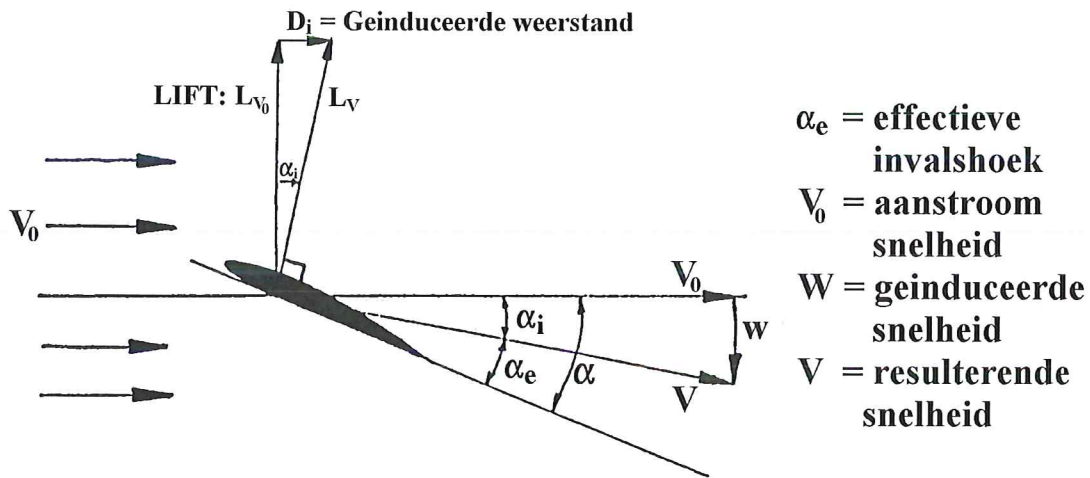
Ook hier weer blijkt de wervelbeschouwing van de vleugel geheel aan te sluiten bij het fysische beeld. Deze tipwervels kunnen in de praktijk worden waargenomen bij vliegtuigvleugels en ook bij schroefbladen.



Deze afgaande tipwervels nu induceren als vrije wervels snelheden in de vloeistof. Door hun oriëntatie als aflopende wervel induceren zij een verticaal naar beneden gerichte snelheidscomponent over het profiel, waardoor de effectieve invalshoek van de aankomende stroming wordt verkleind, zoals in onderstaande figuur staat weergegeven.

Hierdoor neemt de lift af en draait de liftkracht ten opzichte van de ongestoorde stromingsrichting van de vloeistof over een kleine hoek, waardoor een component van de lift in deze stromingsrichting ontstaat: **de geïnduceerde weerstand**.

Deze weerstandscomponent is dus ook aanwezig in een ideale vloeistof. De mate waarin de tipwervels de stroming beïnvloeden is afhankelijk van de sterkte van de circulatie rond de vleugel, want zij hebben de zelfde sterkte als de circulatie rond de vleugel en zijn dus afhankelijk van de grootte van de opgewekte lift en van de oppervlakte-span verhouding van de vleugel.



De verhouding tussen de koorde van de vleugel en de span van de vleugel noemen we de **aspectverhouding (AR)** van de vleugel.

Dit is een belangrijke parameter voor de bepaling van de vleugelkarakteristieken.

Samengevat blijkt een vleugel in een vloeistof zowel een liftkracht als ook een weerstandskracht te ontwikkelen. Deze laatste is opgebouwd uit een vormweerstandcomponent en een wrijvingsweerstandcomponent maar daarnaast in hoofdzaak uit een geïnduceerde weerstandscomponent, welke onlosmakelijk verbonden is met het genereren van de lift zelf, door vleugels met een eindige span. De afmetingen van de vleugel en de profieldoorsnede bepalen in hoge mate de lift en weerstandskarakteristieken.

Om vleugel- en profieldoorsneden onderling te kunnen vergelijken worden deze karakteristieken meestal gegeven in de volgende gedaante:

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho V^2 A} \quad C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho V^2 A}$$

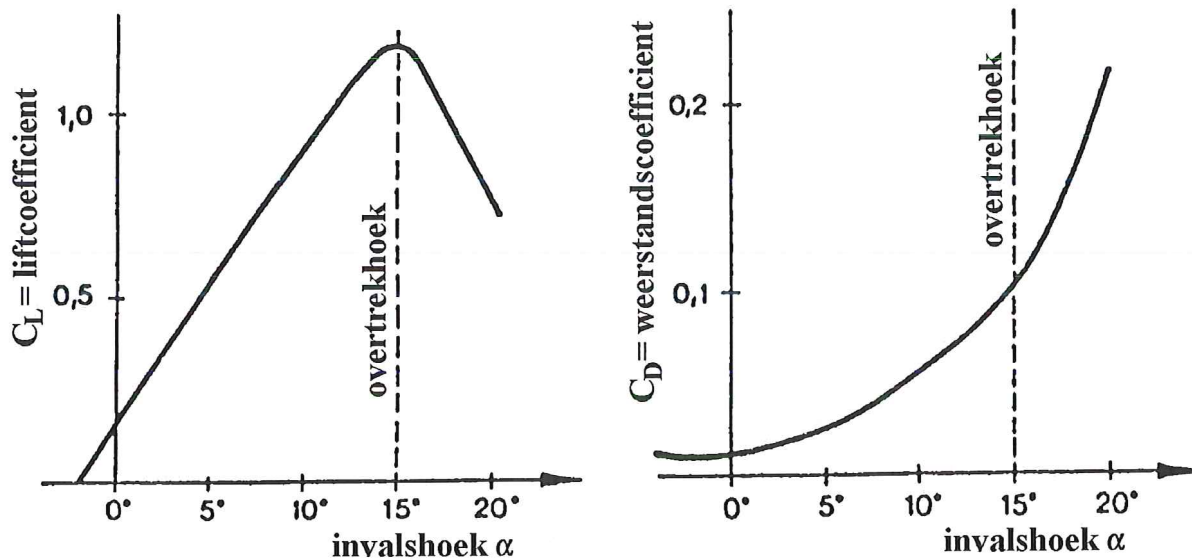
waarin: A = het vleugel oppervlak = span x koorde
 V = de aanstroomsnelheid
 Δ = de soortelijke massa van het medium

C_L en C_D zijn dan de lift- en weerstandscoefficienten van de onderzochte vleugel en zijn afhankelijk van de profiel doorsnede, de aspectverhouding en de invalshoek.

De karakteristieken van een vleugel worden veelal gegeven in de vorm van een aantal grafieken.

De eerste figuur geeft het verloop van de liftcoëfficiënt als functie van de invalshoek over de vleugel.

Het valt op dat de lift in eerste instantie lineair toeneemt met de invalshoek, totdat een maximum bereikt wordt, voor normale vleugels meestal gelegen tussen de 20 en de 30 graden. Daarna neemt de lift met het toenemen van de invalshoek snel af. Dit komt doordat de stroming het profiel niet meer kan volgen en er loslatingsverschijnselen ontstaan aan de lage drukzijde van de vleugel: de vleugel overtrekt.

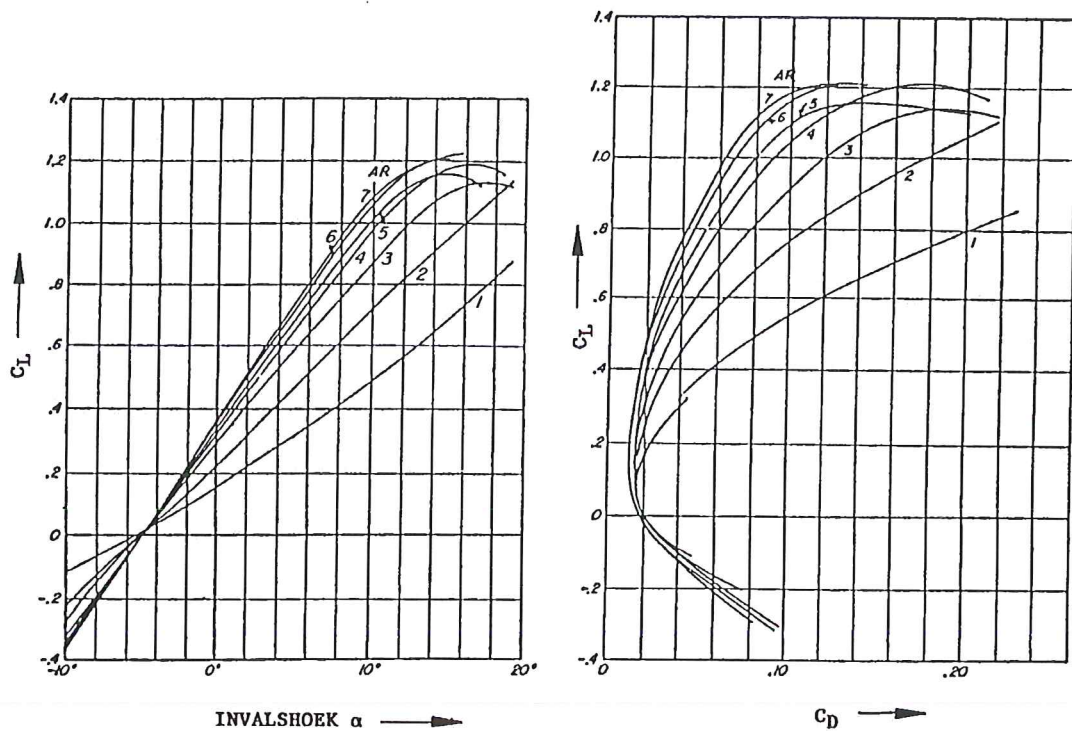


Terzelfder tijd neemt de weerstand van de vleugel echter sterk toe. Dit valt duidelijk waar de nemen uit de tweede figuur, waarin het verloop van de weerstandscoefficiënt gegeven staat als functie van dezelfde invalshoek van de stroming. Tot aan de hoek waarbij de stroming loslaat neemt de weerstand ruwweg toe met het kwadraat van de invalshoek (en dus met de lift welke lineair met de invalshoek toeneemt) volgens:

$$C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi AR}$$

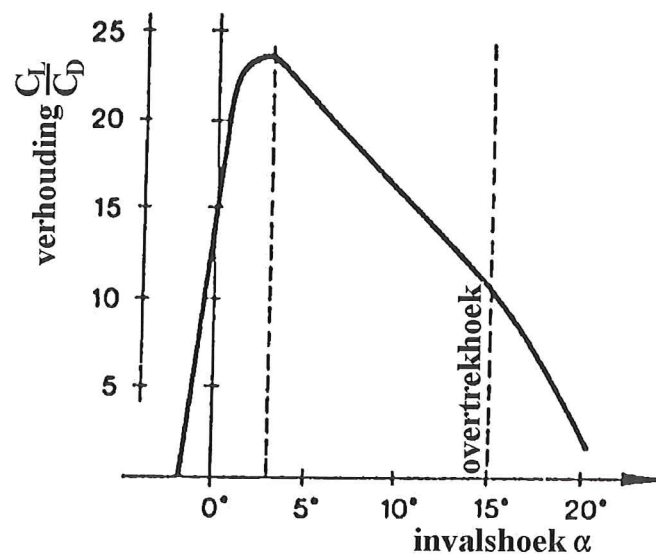
daarna neemt de weerstand aanzienlijk sterker toe. De weerstand die de vleugel ook bij die invalshoek waarbij geen lift geproduceerd wordt, ondervindt is de vorm- en wrijvingsweerstand van de vleugel.

De invloed van de eerder genoemde aspectverhouding op zowel de lift als de weerstand valt af te lezen uit de onderstaande figuur.



Invloed aspectverhouding (=AR) op C_L en C_D .

De toename van de lift en de afname van de geïnduceerde weerstand bij toenemend aspectverhouding zijn evident. Opvallend is echter dat de vleugel met hoge aspectverhouding bij veel kleinere invalshoek reeds overtrekt, een in vele technische toepassingen nadelige eigenschap. In vele technische toepassingen speelt de lift-weerstand verhouding van een vleugel een belangrijke rol: veelal wordt de lift gewenst om een of ander doel te bereiken en moet de weerstand daarbij overwonnen worden; er moet een zo groot mogelijke lift geproduceerd worden ten koste van zo weinig mogelijk weerstand. De verhouding C_L/C_D is dan belangrijk en deze kan gepresenteerd worden als functie van de invalshoek zoals in de onderstaande figuur.



In de meeste praktische toepassingen is rond het werkpunt van het systeem de lift vele malen groter dan de weerstand. Er zijn vele technische toepassingen waarbij gebruik gemaakt wordt van het vermogen van een vleugel om een kracht loodrecht op de stromingsrichting op te wekken.

Te denken valt hierbij aan:

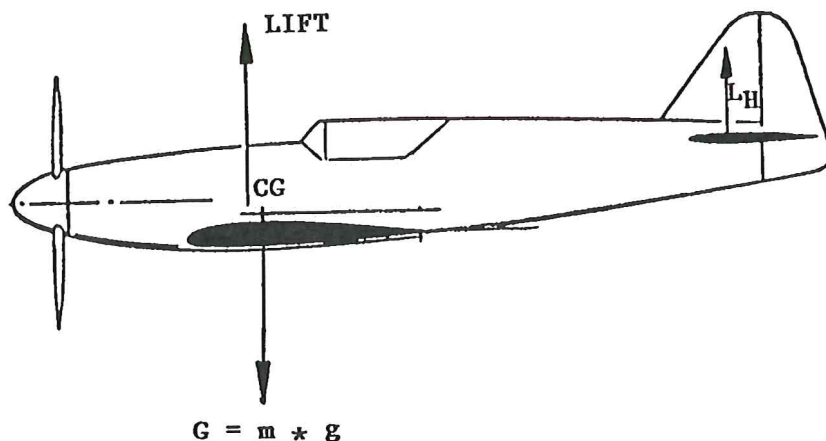
- vliegtuigen
- draagvleugelboten
- roeren van schepen
- propellers en schepsschroeven
- turbines
- windmolens
- zeilen op schepen etc. etc.

Een klein aantal van deze toepassingen zullen in het hierna volgende belicht worden.

Vliegtuigen

Het meest sprekende voorbeeld van een technische toepassing van een vleugel is bij een vliegtuig. Een principe schets van een doorsnee vliegtuig is gegeven in de onderstaande figuur.

Normaliter bestaat een vliegtuig uit een romp met een stel grote horizontale vleugels voor en een stel kleinere horizontale vleugels achter plus een verticaal staartvlak. Doordat de vleugels onder een hoek worden aangestroomd en bovendien meestal asymmetrisch van vorm zijn, ontwikkelen zij een grote liftkracht omhoog waarmee het gewicht van het toestel gedragen kan worden.



In het algemene geval dienen de vleugels vóór om het gewicht van het toestel te dragen en achter om de stabiliteit van het vliegtuig bij plotselinge veranderingen van de evenwichtssituatie ten gevolge van bijvoorbeeld windsnelheids- en richtingsveranderingen te garanderen.

Om een zo efficiënt mogelijk gebruik van het toestel te maken is het wenselijk dat een zo groot mogelijke last bij een zo klein mogelijke weerstand wordt gedragen.

Dit impliceert dat in de ontwerpconditie meestal wordt gestreefd naar een zo gunstig mogelijke lift weerstand verhouding. De hoge aspectverhouding van de vleugels welke het zwaarst belast worden is daaruit te verklaren, dit garandeert een hoge lift ten koste van geringe geïnduceerde weerstand.

Dat de vleugels niet oneindig lang worden vindt zijn oorzaak in ondermeer de constructieve beperkingen: een lange vleugel wordt zwaarder om het torsie en buigend moment op te vangen en in het feit dat geïnduceerde weerstand niet de enige weerstands component is. Tijdens het opstijgen als het gewicht van het toestel, ten gevolge van de volle tanks, het grootst is, moet, om het toestel van de grond omhoog te tillen, een lift ontwikkeld worden welke groter is dan het gewicht van het toestel. Bij de relatief lage snelheid waarmee dit gebeurt betekent dit dat de C_L waarde van de vleugels hoog moet zijn. Immers:

$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 A \cdot C_L$$

Om een zo groot mogelijke circulatie te verkrijgen wordt behalve een aanzienlijke invalshoek van de vleugels ook de profiel doorsnede hiervan verder geoptimaliseerd door het gebruik van flappen. De invalshoek, benodigd voor het opstijgen, wordt verkregen door de staart van het vliegtuig met het staartvlak naar beneden te drukken. Het staartvlak levert dus negatieve lift welke het gewicht van het toestel schijnbaar vergroot.

Het zal duidelijk zijn dat de stand die het toestel aanneemt ten opzichte van het horizontale vlak groter is dan de hoek die de uiteindelijke baan die het toestel aflegt daarmee maakt.

Tijdens het dalen moet de snelheid zodanig gereduceerd worden dat het toestel binnen de baanlengte tot stilstand kan worden gebracht. Het totaal gewicht van het toestel is over het algemeen lager en bovendien is de totale lift lager dan het gewicht zodat relatief minder hoge liftcoëfficiënten benodigd zijn dan bij het stijgen.

Het streven is echter om met een zo laag mogelijke snelheid aan de grond te komen. De combinatie van de relatief lage voorwaartse snelheid met de daalsnelheid maakt echter dat de invalshoeken over de vleugel hoge waarden kunnen bereiken. De weerstand speelt in deze situatie een meer ondergeschikte rol dan bij het opstijgen, aangezien het toestel toch vertraagd moet worden.

Bij het stijgen wordt het profiel van de vleugel dus zo aangepast met behulp van flappen dat een hoge lift bij geringe weerstand kan worden bereikt.

Bij het dalen wordt de geometrie door flappen zo aangepast dat naast een hoge liftcoëfficiënt ook een hoge overtrekhoek wordt gerealiseerd.

Bij het toenemen van de hoogte verandert ook ρ , de soortelijke massa van de lucht. Daar deze een wezenlijke bijdrage levert aan de weerstand is het mogelijk op grotere hoogte hogere snelheden te behalen. Om dezelfde liftkracht te genereren is dat dan ook nodig.

Roeren

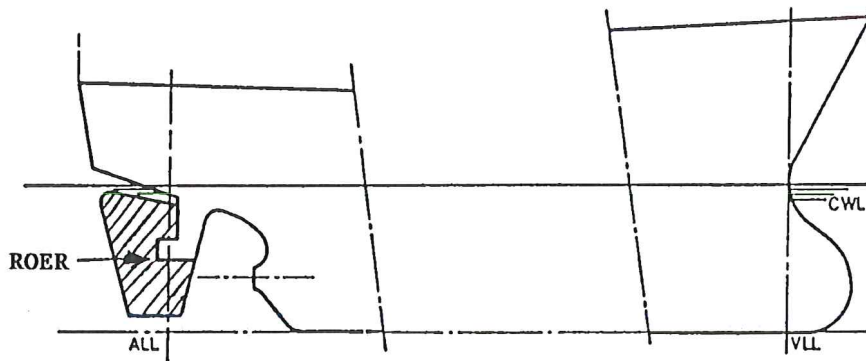
Om bijvoorbeeld schepen (maar ook vliegtuigen) van koers te doen veranderen is het noodzakelijk een moment in de gewenste richting op te wekken. Beperken we ons tot schepen.

Om dit moment op te wekken wordt gebruik gemaakt van een verticaal geplaatste vleugel op zo groot mogelijke afstand van het zwaartepunt van het schip, meestal aan de achterzijde.

Door de voorwaartse snelheid van het schip en de oriëntatie van de vleugel wordt bij het geven van een kleine roerhoek een grote dwarskracht en dus een moment ten opzichte van het zwaartepunt opgewekt, welke het schip van koers doet veranderen.

De extra weerstand die door het roergeven wordt veroorzaakt moet zo klein mogelijk zijn, vandaar dat indien mogelijk voor zo efficiënt mogelijke vormgeving van het roer wordt zorggedragen (grote aspectverhouding). Hieraan is echter een praktische grens aangezien ook met grote roerhoeken gewerkt moet kunnen worden om een gewenst moment op te wekken vooral als de voorwaartse snelheid van het schip gering is.

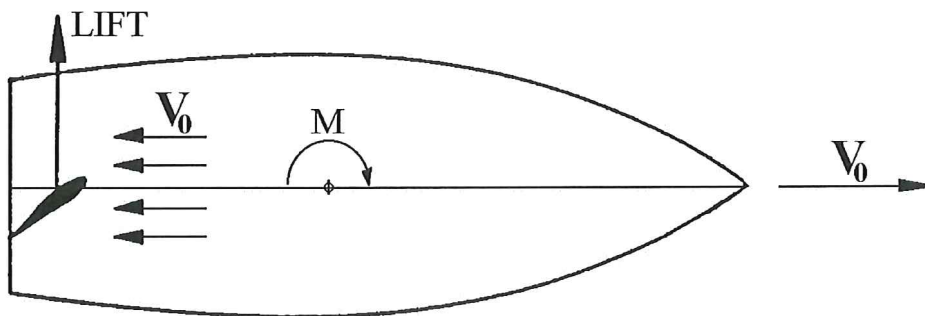
Derhalve mag het roer niet te snel overtrekken. Immers:
$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 A \cdot C_L$$



Een lage voorwaartse snelheid impliceert een hoge invalshoek om een bepaalde dwarskracht te kunnen opwekken. Uit een eerdere figuur ten aanzien van de invloed van het aspect getal op de lift karakteristiek bleek echter al dat een hoog aspect getal het risico van overtrekken vergroot.

Het haalbare moment bij lage snelheden blijft echter kleiner dan bij hoge snelheid en de manoeuvreerbaarheid van schepen is bij lage snelheden dan ook beduidend minder.

Voor het manoeuvreren in havens waarbij over het algemeen met lage snelheden gevaren wordt is dit een ernstige handicap. Veelal zal men trachten een minimale snelheid ook in die omstandigheden vol te houden i.v.m. de manoeuvreereigenschappen.



Het minimale roeroppervlak wordt dan ook onder andere bepaald uit deze overwegingen. Bij hoge snelheden kan dan volstaan worden met relatief kleine roeruitslagen. Zeer snel varende schepen kunnen volstaan met relatief kleine roeren.

Zeilen

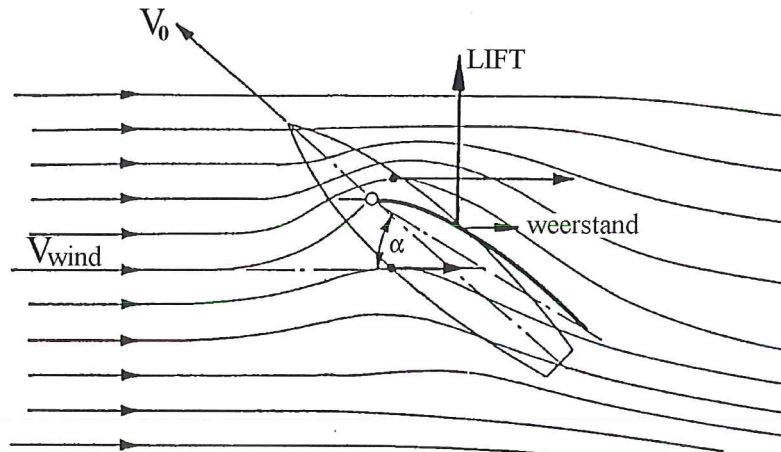
Een geheel andere toepassing van de eigenschappen van vleugels wordt gevonden bij het gebruik van zeilen op schepen om deze voort te stuwten.

Bij een zeil is er sprake van een asymmetrische vleugel met een zeer geringe dikte. Hierin onderscheidt het zich van de gangbare vliegtuig vleugel.

De krachten op een zeil in een homogene uniforme stroming vertonen veel gelijkenis met die op een vleugel.

In onderstaande figuur wordt het stromingsbeeld rond een zeil geplaatst onder een kleine hoek met de stroming weergegeven. De analogie met dat van de vleugel is evident. Ook hier wordt een relatief grote liftkracht geproduceerd en een relatief kleine weerstands-

kracht.



De lift- en weerstandskracht kunnen ontbonden worden in componenten in langsrichting van het schip en loodrecht daarop.

De som van de componenten in langsrichting levert de uiteindelijk beschikbare voortstuwende kracht aan het schip. Meerdere standen van het zeil ten opzichte van de langsas van het schip en dus tevens ten opzichte van de aankomende wind, geven in dit opzicht resultaat. Een specifieke stand levert echter de maximale voortstuwende kracht. De componenten in dwars richting zullen op de een of andere wijze gecompenseerd moeten worden. Hierover later meer.

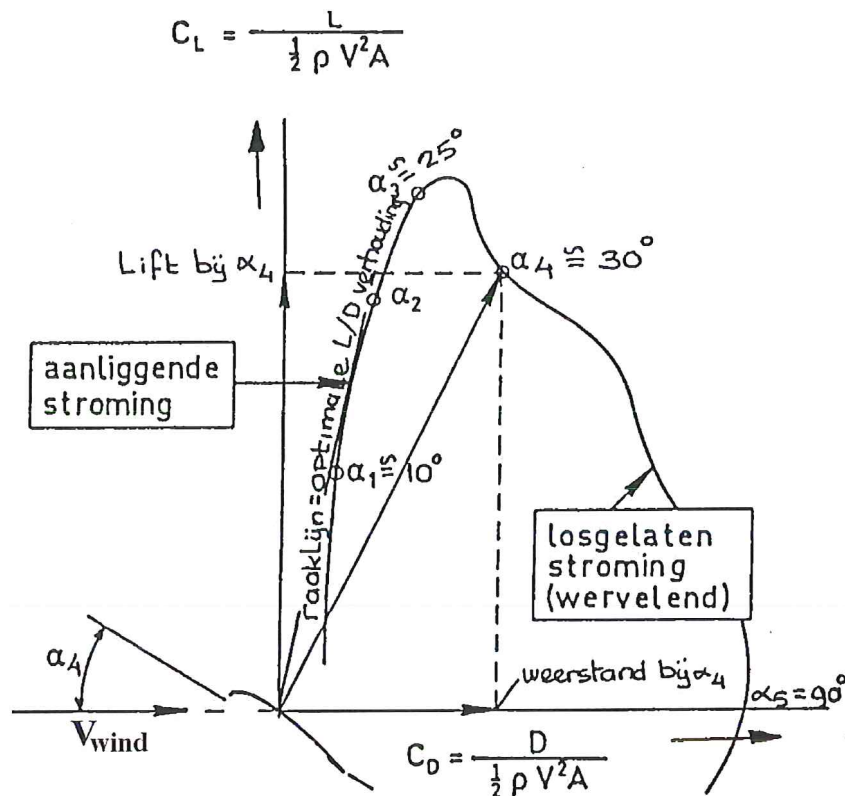
Een belangrijk verschil tussen een zeil en een vleugel komt voort uit het feit dat de meeste zeilen van doek worden gemaakt. Dit impliceert dat het zeil in vorm gehouden moet worden door de drukverdeling die het rondom zich zelf genereert. Is deze drukverdeling daartoe niet in staat, zoals bij zeer kleine invalshoeken verwacht mag worden, dan is de vorm van het zeil niet langer stabiel en wordt de vleugelwerking verstoord: bij een invalshoek kleiner dan 5 graden gaat het zeil over het algemeen klapperen, de liftproductie is dan gelijk aan nul.

Uit wat in het hierna staande besproken zal worden zal blijken dat, om een schip op alle denkbare koersen te kunnen voortstuwten, het onvermijdelijk is dat de range van invalshoeken over het zeil kan variëren tussen de 5 en 90 graden.

Het moet namelijk in alle mogelijke combinaties van vaarrichting van het schip en invalshoek van de wind in staat zijn om een optimale voortstuwende kracht te ontwikkelen. Later zal blijken dat dit evenwel niet mogelijk is.

Dat betekent dat voor het voortstuwten van schepen het eveneens van belang is de karakteristieken van het zeil te kennen bij invalshoeken waarbij de stroming reeds lang is losgelaten. Bij de meeste andere technische toepassingen is dit niet het geval.

De lift en weerstand van een zeil wordt dus meestal gegeven in de vorm van een polaire kromme. Een voorbeeld van een dergelijke kromme staat gegeven in de onderstaande figuur.



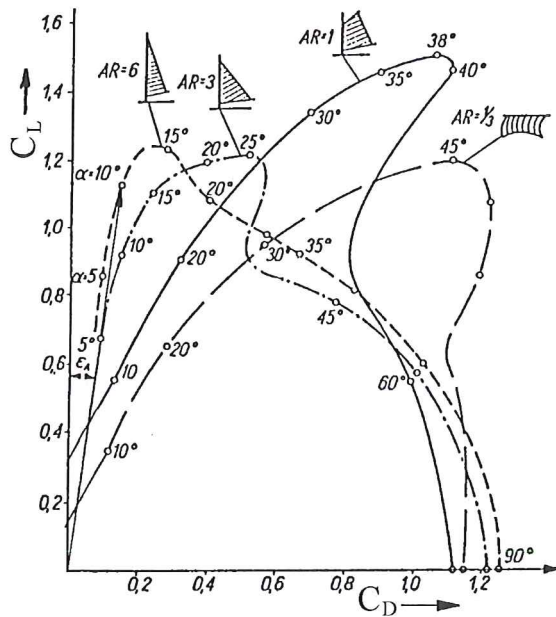
Hierin staan de lift- en weerstandscoefficient van een bepaald zeil gegeven als functie van de invalshoek van de wind in het zeil. Bij de kleine invalshoeken overheerst de lift tot bij circa 22 graden het profiel begint te overtrekken.

Bij toenemende invalshoek neemt de lift af en de weerstand snel toe. Bij een invalshoek van 90 graden is er van lift geen sprake meer en is er dus uitsluitend nog weerstand. Evenals bij een vleugel is ook de vorm van deze polaire kromme in sterke mate afhankelijk van de geometrie van de tuigage.

Twee belangrijke parameters hiervan zullen we kort behandelen. De eerste is de planvorm van het zeil. Deze is in de loop der eeuwen sterk veranderd door veranderende technische inzichten en praktische mogelijkheden. Zo is het geëvalueerd van een rechthoekig zeil tot een driehoekig zeil en van laag en breed tot hoog en smal.

Ook hierbij speelt de aspectverhouding van het zeil als vleugel een belangrijke rol, vooral in relatie tot de geïnduceerde weerstand van het zeil. Een complicatie ten aanzien van de optimalisatie van de planvorm is gelegen in het feit dat dit optimum duidelijk verschillend is voor verschillende invalshoeken waarmee het zeil gebruikt moet gaan worden. Deze zijn zoals later zal blijken weer afhankelijk van de koers van het schip. De invloed van de planvorm van het zeil staat weergegeven in de onderstaande figuur.

Als belangrijk verschil in karakteristiek tussen de verschillende planvormen valt te noemen de raaklijn aan de kromme vanuit de oorsprong voorstellende de optimale lift-weerstand verhouding welke onder specifieke omstandigheden van belang blijkt te zijn. Hierbij is het zeil met het hoge aspect getal in het voordeel, zoals verwacht, deze levert immers minder geïnduceerde weerstand. De maximaal haalbare lift van zo'n zeil is hoog maar het zeil overtrekt snel. ($\alpha = \pm 15^\circ$)



$\alpha = \text{invalshoek}$

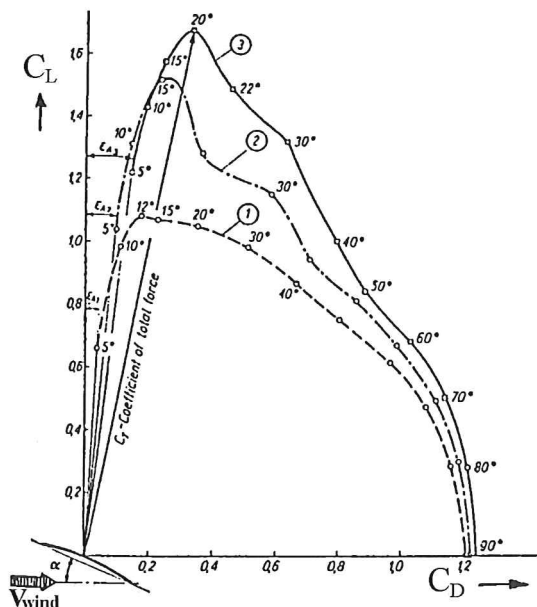
$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho V^2 A}$$

$AR = \text{aspectverhouding}$

Een laag aspect getal van het zeil heeft een aanzienlijk hogere overtrekhoek en is in dat opzicht in het voordeel. Het min of meer rechthoekige zeil produceert een duidelijk grotere totale kracht bij grote invalshoeken en het zal blijken dat dit op bepaalde koersen een voordeel is. ($\alpha = \pm 25^\circ$)

Een tweede belangrijke parameter is de bolling van het zeil. Deze wordt gedefinieerd door de verhouding tussen de maximale diepte van het profiel en de plaatselijke koorde. In de bolling van het zeil is eigenlijk zijn inherente asymmetrie als vleugel beschouwd. Een grotere bolling produceert meer lift. Echter ook de vormweerstand van het zeil neemt toe, zoals uit de figuur blijkt.



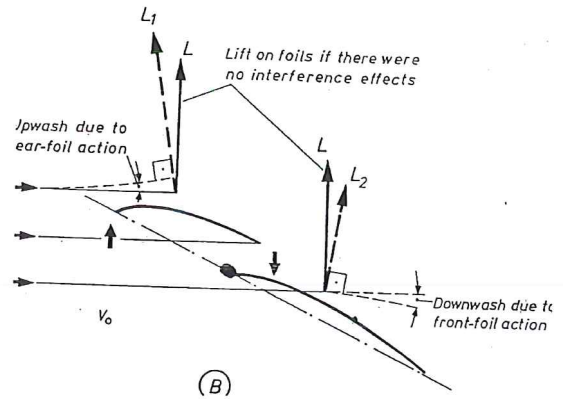
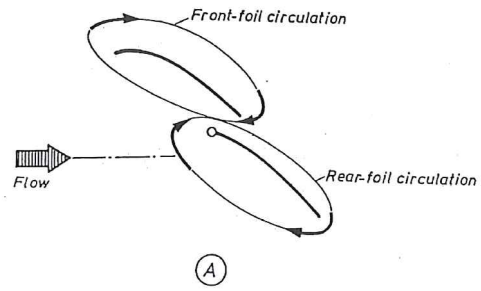
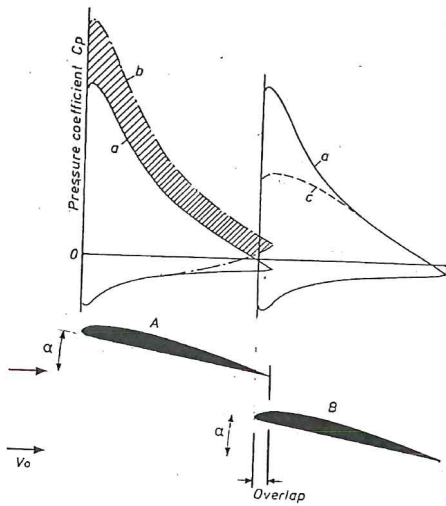
Profieldoorsneden

1 = bolling 5 %

2 = bolling 10 %

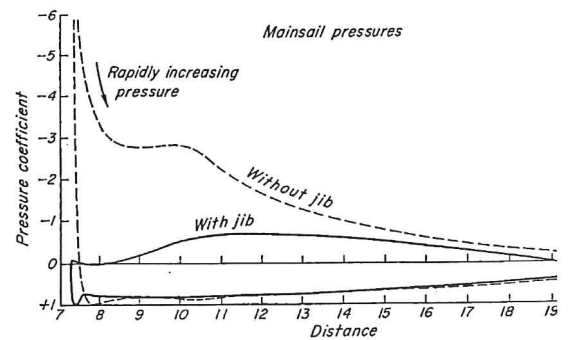
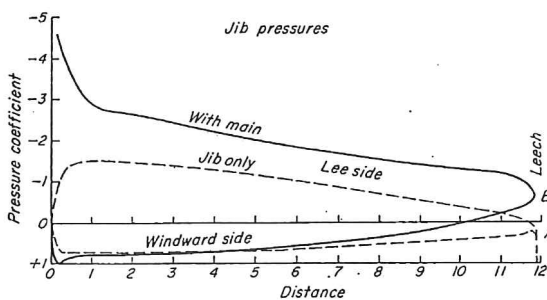
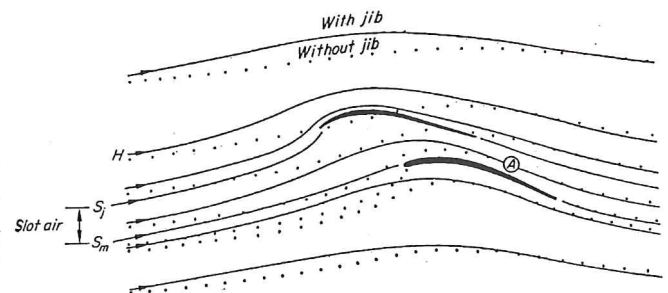
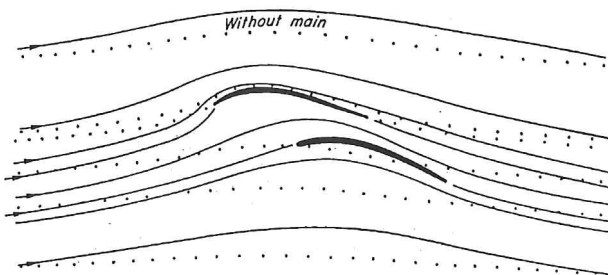
3 = bolling 15 %

In de praktijk wordt het zeiloppervlak van een zeilschip meestal verdeeld over meerdere zeilen. Dit wordt hoofdzakelijk veroorzaakt door de noodzaak de zeilen hanteerbaar te houden, alsmede door beperkingen in de mogelijke tuigage. Ook de stabiliteit van het schip speelt hierbij een belangrijke rol.



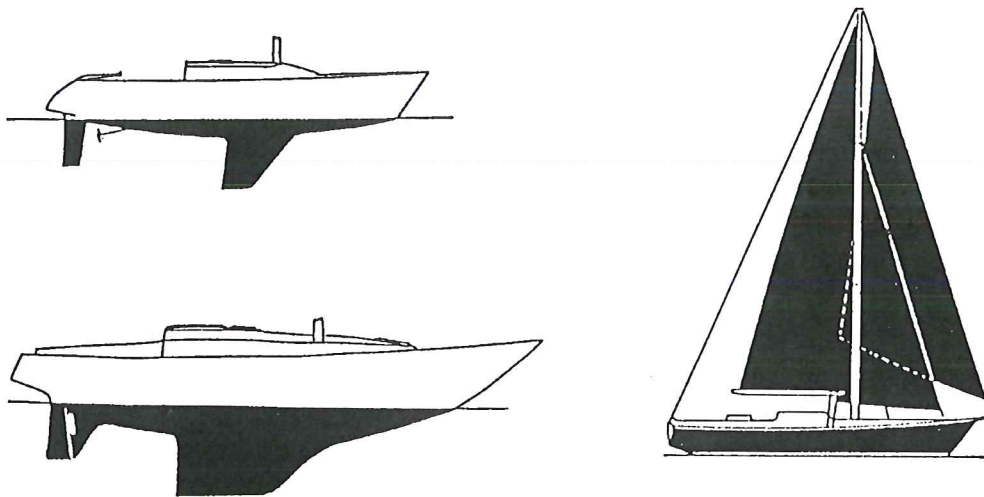
Door deze onderverdeling van de zeilen ontstaat het probleem van de onderlinge interactie van deze zeilen. Het ene zeil beïnvloedt de stroming rond het andere en omgekeerd.

The effect of the jib on flow pattern and mainsail pressure distribution. (Drawing by kind permission of A Gentry.)



De lift en weerstand van zo'n combinatie van twee of meer zeilen is van zeer veel factoren afhankelijk en het bespreken hiervan voert buiten de scope van dit college. Vermeld zij echter dat de polaire kromme van een combinatie van bijvoorbeeld twee zeilen een geheel ander aanzien kan hebben en zeer afhankelijk blijkt te zijn van de positie van beide zeilen ten opzichte van elkaar. Dit is een extra complicatie maar tevens een mogelijkheid om de uiteindelijk gewenste voortstuwende kracht te optimaliseren.

Beschrijven we nu de geometrie van een zeilboot in zijn meest algemene gedaante. In principe bestaat deze uit een romp van het schip welke door de krachten op de zeilen voortbewogen moet worden. Daartoe zijn op de romp een of meerdere masten geplaatst waaraan de zeilen bevestigd kunnen worden. Deze masten moeten star aan het schip bevestigd en overeind gehouden worden waarvoor meestal een stelsel van langscheepse en dwarscheepse draden gebruikt worden. Deze beperken tevens de mogelijkheid om de zeilen in elke gewenste stand ten opzichte van de wind te zetten.



Zoals reeds is gebleken hebben de op de zeilen werkende krachten ook componenten die niet aan de voortstuwing van het schip bijdragen en die derhalve gecompenseerd moeten worden.

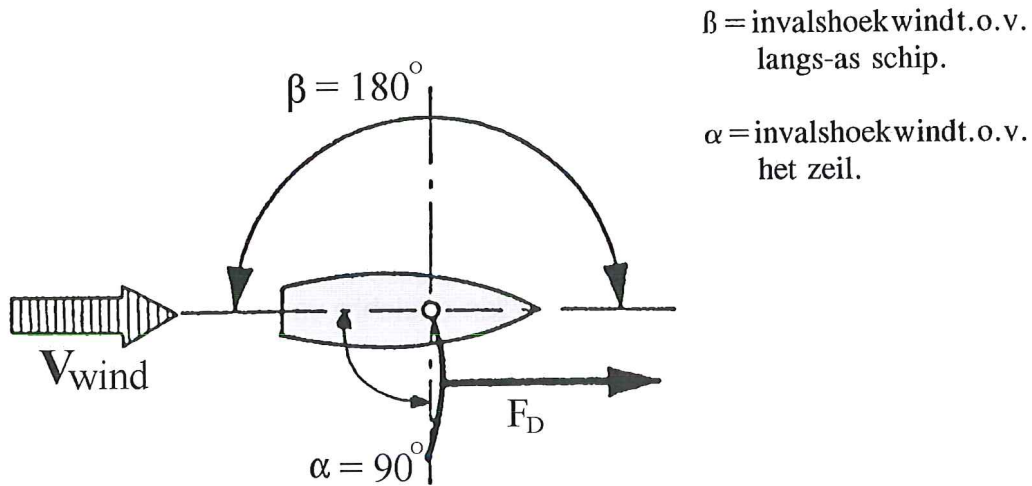
Hiertoe is het schip naast het gebruikelijke roer onderwater ook voorzien van een mid-scheeps geplaatste vleugel met de koorde in lengterichting en de span verticaal: **de kiel**.

Deze moet grote dwarskrachten kunnen leveren om die van het zeil te compenseren, maar dient tegelijkertijd ook voor het omlaag brengen van het zwaartepunt van het schip ter vergroting van de stabiliteit, om het kenterende moment van deze zelfde dwarskracht op te vangen.

Om een zeilschip als een geschikt vervoermiddel te kunnen gebruiken zou het in alle richtingen t.o.v. de wind moeten kunnen varen. Daarom is de range van invalshoeken van de wind t.o.v. het zeil veel groter dan bij de meer "normale" toepassingen van vleugels, bijvoorbeeld bij vliegtuigen en schroeven. Bezien we daartoe de op de verschillende koersen t.o.v. de wind in het spel zijnde invalshoeken en resulterende krachten op het zeil.

Beschouwen we nu eerst de situatie waarbij de wind ten opzichte van de langsas van het schip recht van achteren inkomt.

De hoek ∇ is in deze situatie gelijk aan 90 graden, omdat door de aanwezigheid van de dwarsscheeps staande tuigage welke de mast overeind houdt het niet mogelijk is het zeil verder uit te vieren. Aangezien de wind in de verplaatsingsrichting van het schip waait zijn we voor de voortstuwing niet geïnteresseerd in lift, deze zou slechts krachten leveren dwars op de gewenste verplaatsingsrichting.



Het zeil is maximaal dwars gezet zodat het op de wind geprojecteerde oppervlak zo groot mogelijk is. Het zeil fungeert volledig als weerstandsopwekker zoals uit de polaire kromme van het zeil blijkt. De geprojecteerde totaal kracht van het zeil op de gewenste verplaatsingsrichting is zo echter maximaal: de weerstand van het zeil komt geheel ten goede aan de stuwkracht. De ontwikkelde liftkracht is nul. Er zijn geen dwarsscheepse componenten van de totaal kracht.

Evenwicht wordt bereikt bij die snelheid waarbij de weerstand van de romp even groot is als de stuwkracht van het zeil. De eerste neemt met het toenemen van de snelheid toe. De laatste neemt met het toenemen van de snelheid van het schip af doordat de snelheid van het schip in mindering gebracht moet worden op de ware windsnelheid als het er om gaat te bepalen welke snelheid de wind heeft ten opzichte van het zeil: bij het berekenen van de lift (en weerstand) van het zeil speelt de relatieve snelheid tussen wind en (bewegend) zeil een rol.

Hiermee is het fenomeen **schijnbare wind** geïntroduceerd.

Dit is de vectoriele sommatie van de werkelijke windvector en de windvector die aangeeft welke wind het zeil zou ervaren als het in windstil weer met de snelheid van het schip voortbewogen zou worden.

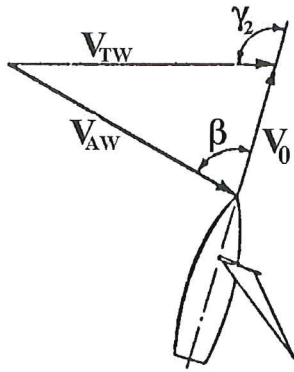
Deze laatste is daarom de negatieve versie van de sloopssnelheidsvector.

De som is de snelheid die het zeil ervaart.

Recht voor de wind varende is de schijnbare windsterkte dus kleiner dan de werkelijke windsnelheid. Zie de figuur.

Met schuin van voren inkomende wind wordt de schijnbare wind aanzienlijk groter dan de werkelijke windsnelheid, echter ook de invalshoek ten opzichte van hartschip wordt kleiner. Aangezien de lift kwadratisch toeneemt met de snelheid is er op deze koersen toch een aanzienlijk grotere liftkracht te verwachten.

Bij dwars inkomende wind worden deze verschillen kleiner.



schijnbare wind:

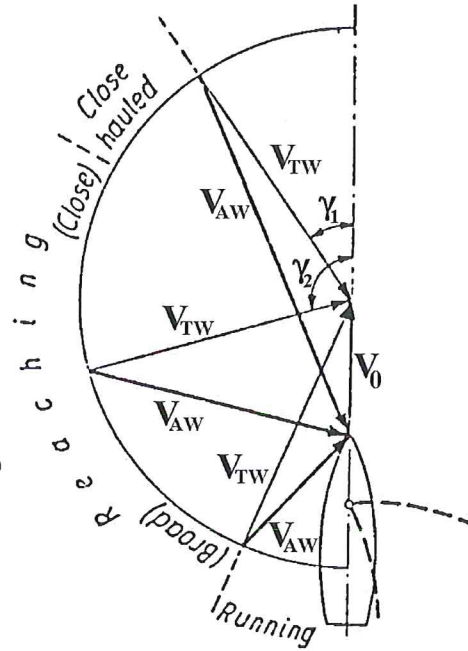
V_0 = voorwaardse snelheid schip

V_{TW} = ware windsnelheid

V_{AW} = schijnbare windsnelheid

γ = invalshoek ware wind

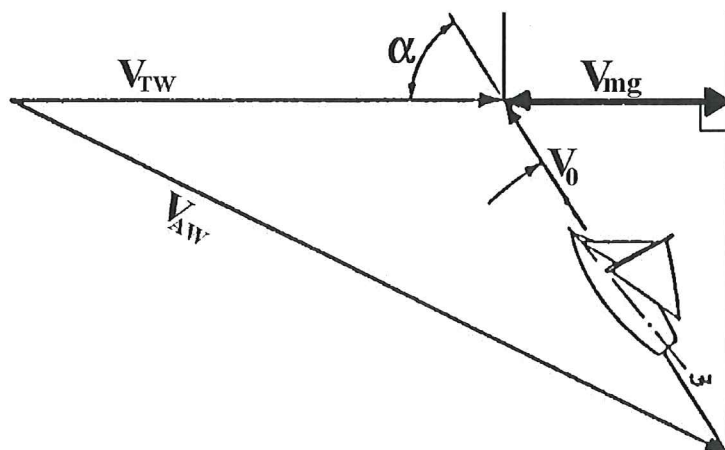
β = invalshoek schijnbare wind



De tweede koers waarbij we het krachten spel zullen beschouwen is die waarbij het schip zoveel mogelijk recht tegen de wind invaart.

Uit wat eerder gezegd is over de minimaal mogelijke invalshoek van de zeilen valt op te maken dat recht tegen de wind in geen lift gegenereerd wordt door het zeil. Zou dit wel mogelijk zijn geweest dan is het evengoed niet mogelijk om een component van de liftkracht als stuwkracht te laten werken. Met het zeil midscheeps zou de lift uitsluitend dwarsscheeps werken en de onvermijdelijke weerstand zelfs in tegengestelde richting ten opzichte van de gewenste verplaatsingsrichting: er is dus een negatieve voortstuwende kracht.

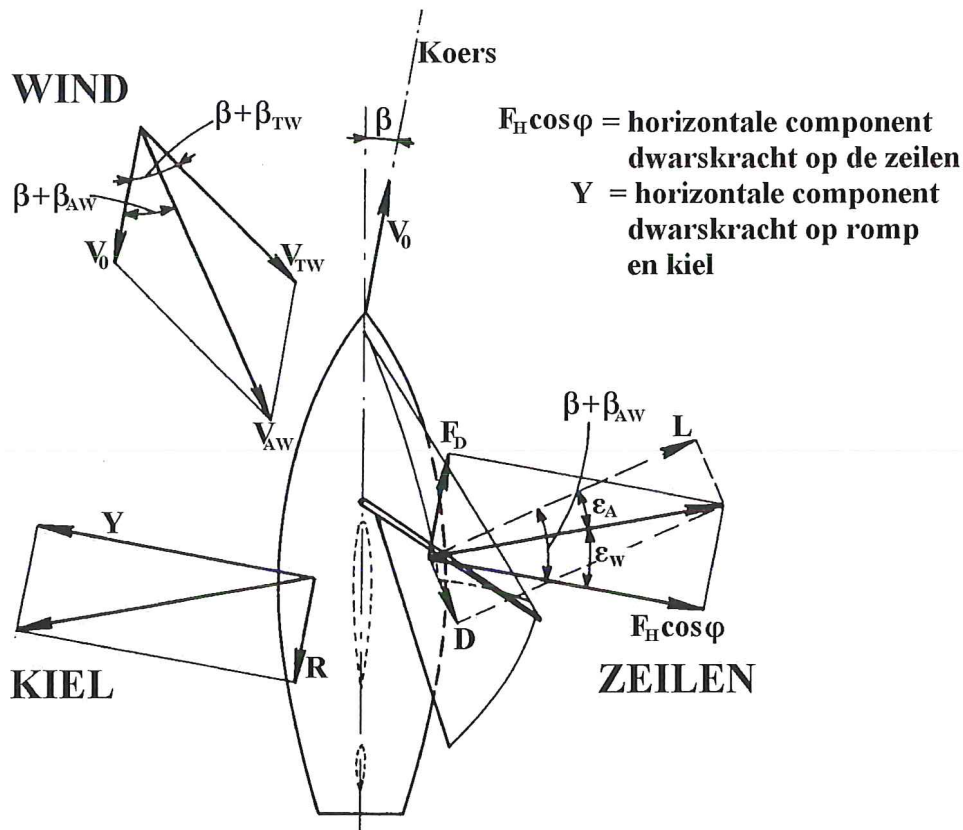
Naarmate het schip een toenemende hoek gaat aannemen met de werkelijke wind ontstaat echter een component van de lift welke wel als stuwkracht gebruikt kan worden. Zo rond een invalshoek van 40 tot 45 graden blijkt in de praktijk een voldoende grote stuwkrachtcomponent opgewekt te worden om met succes vooruit te komen. De hoek met de werkelijke wind verkleinen betekent dat de snelheid afneemt en deze hoek vergroten betekent dat de projectie van de snelheid van het schip in de windrichting kleiner wordt ondanks het feit dat de snelheid toeneemt. Deze geprojecteerde snelheidsvector op de werkelijke windvector noemen we de Speed Made Good (V_{mg}), zie de figuur.



Dit is uiteindelijk de snelheid waarmee recht tegen de wind wordt ingevaren en is als zodanig een belangrijke maat voor de prestaties van het schip.

Beschouwen we nu het krachtenevenwicht op het aan de wind varende schip, zoals deze bovengeschetste toestand genoemd wordt.

Evenwicht van waterkrachten en windkrachten



De figuur geeft de krachten in het horizontale vlak weer. Links de krachten op het onderwaterschip en rechts de krachten op de zeilen.

De schijnbare wind is samengesteld uit de werkelijke windvector en de tegengestelde vector van de scheepssnelheid. De schijnbare windsnelheid is in deze situatie groter van snelheid dan de werkelijke wind en de hoek die de schijnbare wind met de langsas van het schip maakt is kleiner.

Op het zeil werken onder invloed van deze schijnbare wind een lift- en een weerstandskracht, respectievelijk L en D in de figuur, welke zich door enige vectoriele manipulatie laten ontbinden in een component in de gewenste vaarrichting F_D en een component loodrecht daarop $F_H \cos \varphi$.

De component F_D is de stuwkracht van het zeil welke in staat is een zekere weerstand van het schip te overwinnen. Het schip vaart hierdoor vooruit.

De component $F_H \cos \varphi$ staat loodrecht op de vaarrichting van het schip en moet door het onderwaterschip efficiënt gecompenseerd worden wil vermeden worden dat het schip met grote snelheid dwars uit gaat.

Hiertoe dient de vleugel welke in langsscheepse richting onder het schip is geplaatst: de kiel.

Onder invloed van de dwarskracht gaat het schip met een zekere snelheid dwars uit. Deze kleine dwarsscheepse component levert vectoriëel gesommeerd op de voorwaartse snelheid van het schip een resulterende snelheid van het schip door het water op die een kleine hoek maakt met de langsas van het schip. Deze hoek noemt men de **drifthoek**. Doordat de snelheid van het water over de kiel hier precies omgekeerd aan is, ontwikkelt de kiel een grote dwarskracht aangezien zij nu onder een kleine hoek wordt aangestroomd, welke tegengesteld is aan de ontwikkelde dwarskracht op de zeilen. Tezelfdertijd wordt echter ook een niet onaanzienlijke weerstand ontwikkeld, zoals eerder verklaard.

In de evenwichtssituatie compenseert de dwarskracht op de kiel precies de dwarskracht op de zeilen.

Dit wordt gerealiseerd doordat de drifthoek bij gegeven snelheid net zo lang toeneemt totdat evenwicht is bereikt, dan pas heeft de dwarsscheepse snelheid een constante waarde bereikt.

De drifthoek moet zo klein mogelijk gehouden worden omdat zij een negatieve invloed heeft op de speed-made-good van het schip.

De weerstand, zijnde de som van vorm-, wrijvings- en geïnduceerde weerstand moet hierbij zo klein mogelijk gehouden worden door een zo gunstig mogelijke vormgeving van de kiel.

Aangezien:
$$L = \frac{1}{2} \rho V^2 A \frac{dC_L}{d\alpha} \alpha$$

en
$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 A C_D$$

met
$$\frac{dC_L}{d\alpha} = \frac{0.1AR}{1.8 + \cos \Lambda \sqrt{\frac{AR^2}{\cos^4 \Lambda + 4}}}$$

en
$$C_D = C_{D_0} + C_{D_i} = C_{D_0} + \frac{C_L^2}{\pi AR}$$

waarin:

- ρ = soortelijke massa (kg/m³)
- A = oppervlakte (m²)
- AR = aspectverhouding
- V = snelheid (m/s)
- α = invalshoek (rad.)
- Λ = pijlstelling van de kiel graden
- C_{D_0} = vormweerstandscoefficiënt
- C_{D_i} = geïnduceerde weerstandscoefficiënt.

Hieruit blijkt duidelijk dat een grote aspectverhouding een gunstige invloed heeft op zowel de gegenereerde lift als op de geïnduceerde weerstand.

Daarom kiest men het liefst voor diepstekende slanke kielen.

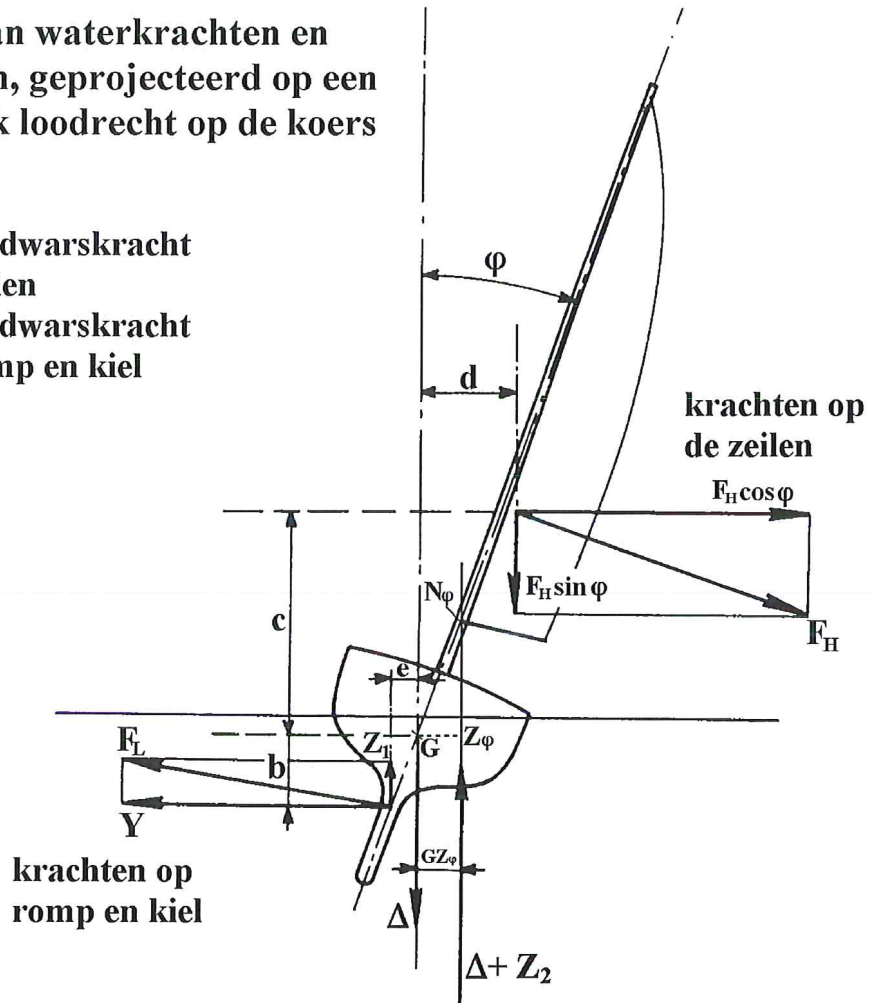
Diepgangsbependingen in verband met de waterdiepte stellen hier echter meestal een grens, zodat in vele gevallen naar een compromis gezocht moet worden.

De dwarskracht op de zeilen heeft nog een consequentie. Bezien we daartoe het krach-
tenevenwicht in het verticale vlak. Dit staat weergegeven in de onderstaande figuur.

**Evenwicht van waterkrachten en
windkrachten, geprojecteerd op een
verticaal vlak loodrecht op de koers**

F_H = totale dwarskracht
op zeilen

F_L = totale dwarskracht
op romp en kiel



$$Y = F_H \cos \varphi$$

$$Z_1 + Z_2 = F_H \sin \varphi$$

$$GZ_{\varphi} * (\Delta + Z_2) = b * Y + c * F_H \cos \varphi + d * F_H \sin \varphi + e * Z_1$$

De dwarskracht op het zeil en op de kiel vormen samen een koppel, welke het schip wil
doen kenteren. Dit hellende moment moet gecompenseerd worden door het stabili-
teitsmoment van het schip. Het schip zal een helling aannemen.

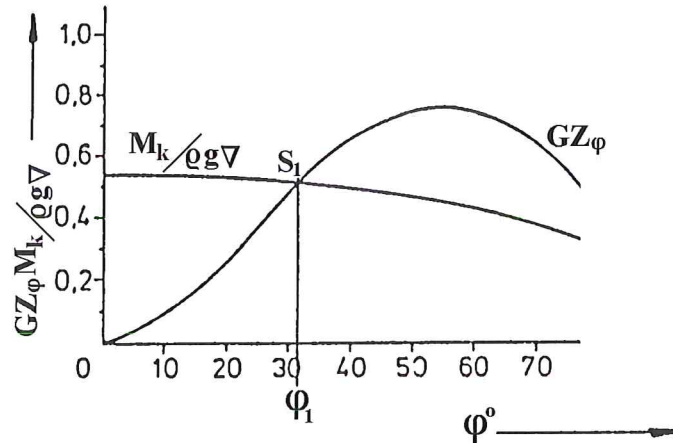
Hierdoor neemt de horizontale component van de liftkracht in de langsrichting van het
schip (de voortstuwende kracht) af.

Dit gaat ongeveer evenredig met de cosinus van de hellingshoek. Helling verkleint dus
de voortstuwing. Daarenboven neemt de weerstand van de romp door de helling toe.
Over het geheel genomen zal helling dus een verlaging van de uiteindelijk te behalen
snelheid bewerkstelligen bij overigens gelijkblijvende omstandigheden.

Bij toenemende helling neemt het stabiliteitsmoment van het schip toe (voordat het
maximum bij circa 60 graden bereikt wordt). Het hellende moment ten gevolge van de
dwarskracht op zeilen en kiel neemt bij toenemende helling af, aangezien het aan de
wind blootgestelde oppervlak afneemt.

Evenwicht wordt gevonden bij die hellingshoek waarbij het hellende en het herstellende moment aan elkaar gelijk zijn.

Voorwaarde voor het behalen van een goede snelheid is echter wel dat de hellingshoek zeker niet groter mag worden dan 30 graden.



Essentieel voor de maximaal toelaatbare dwarskracht (en dus voor de stuwkracht!!) is dat de stabiliteit van het schip zo groot mogelijk is. Niet alleen is het mogelijk hierdoor een grotere stuwkracht te genereren maar ook de weerstandstoename ten gevolge van de helling van het schip wordt zo klein mogelijk gehouden.

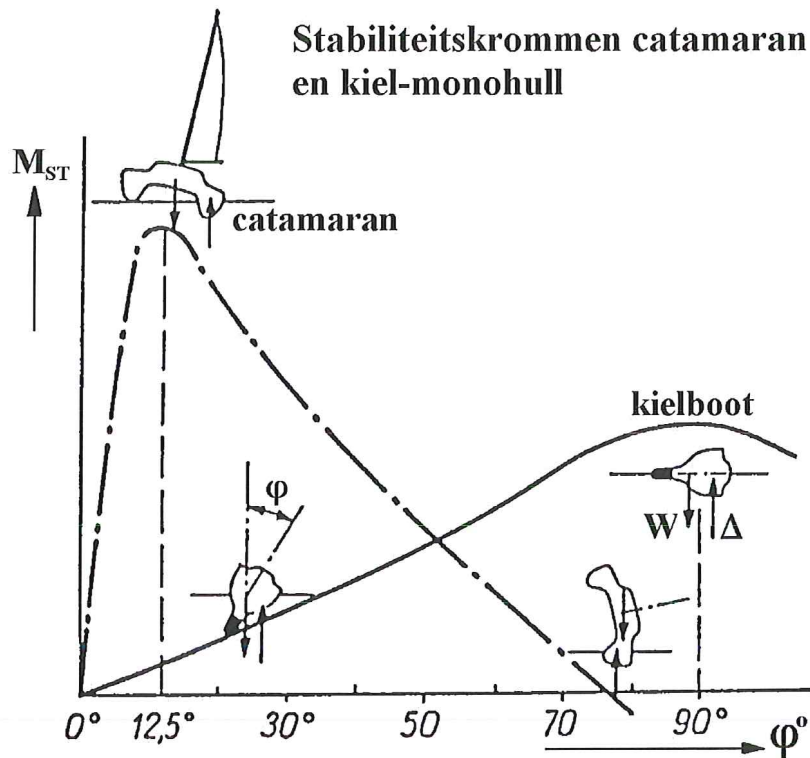
Hiertoe wordt de kiel welke onder aan het schip hangt meestal dan ook massief uitgevoerd in gietijzer of lood en bedraagt het gewicht van de kiel veelal de helft van het totale gewicht van het schip. Hierdoor tracht men een zo laag mogelijke ligging van het zwaartepunt te realiseren. Ook hier is een diepstekende kiel in het voordeel.

Nadeel van de hier geschetste methode van stabiliteitsvergroting is dat het totaal gewicht van het schip aanzienlijk vergroot wordt. Hierdoor neemt tevens de weerstand van het schip aanzienlijk toe. Alternatieve methoden om tot een zeer grote stabiliteit bij relatief kleine hellingshoeken te komen worden gevonden in de zogenaamde meerrompsschepen.

Hier wordt het zeer grote stabiliteitsmoment gerealiseerd door een zeer grote verschuiving van het drukingspunt ten gevolge van de helling en niet door een vergroting van het displacement.

Zie hiervoor de figuur op de volgende bladzijde.

Hierin staat de stabiliteitskromme van een catamaran vergeleken met die van een enkelrompsschip. Het verschil in karakter is evident: een catamaran levert bij kleine hellingshoeken een veel groter stabiliteitsmoment waardoor een veel grotere kracht op het zeil "verwerkt" kan worden. De voortstuwende kracht kan dan ook veel groter zijn.



Bij elke willekeurige invalshoek van de wind ten opzichte van de langsas van het schip kan nu die stand van het zeil gevonden worden waarbij de stuwkracht van het zeil zo groot mogelijk is.

In het geval van een invalshoek kleiner dan 90 graden zal met voordeel gebruik gemaakt worden van de lift van het zeil.

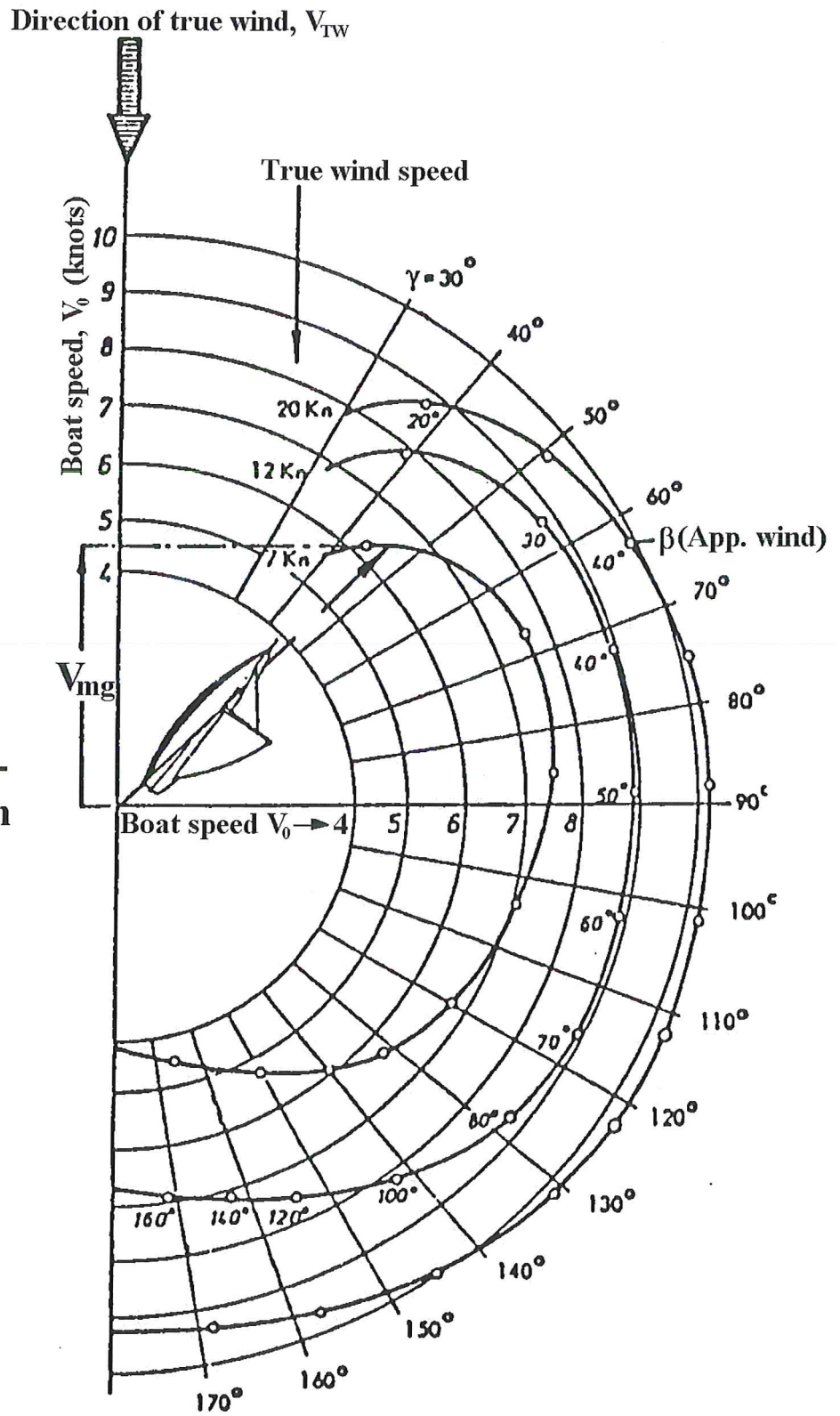
Bij grotere invalshoeken steeds meer van de weerstand van het zeil.

Door de voortstuwende kracht van de zeilen gegeven de windsnelheid en invalshoek te berekenen is de snelheid van het schip te bepalen waarbij evenwicht gemaakt wordt met de weerstandskrachten.

Door dit voor een groot aantal invalshoeken en windsnelheden te doen, kan een zogenaamd snelheidspolaire van het beschouwde schip geconstrueerd worden, waarin de te behalen snelheid als functie van de invalshoek gegeven wordt.

Een voorbeeld daarvan vindt U hier onder.

Polair snelheids-
diagram van een
zeiljacht



7. COMPAROLOGIE IN DE MARITIEME TECHNIEK

Experimenteel onderzoek kan worden gescheiden in twee typen onderzoek.

Het eerste is het zogenaamde directe onderzoek. Hierbij wordt het te onderzoeken probleem op het voorwerp zelf onderzocht. Te denken valt hierbij bijvoorbeeld aan een trekproef om de treksterkte van staal te bepalen of een meting aan de uitgaande as van een motor om de koppeltoeren karakteristiek vast te stellen. Nadeel is dat het te onderzoeken voorwerp of systeem in zijn uiteindelijke gedaante beschikbaar moet zijn voor de proef. In het ontwerpstadium van grote en of gecompliceerde systemen, waarbij optimalisaties vaak een belangrijke rol spelen, is dit een weinig gangbare methode.

Het tweede type onderzoek is het modelonderzoek. Hierbij wordt de werkelijke situatie door een model nagebootst. Door proefnemingen aan het model (op schaal) tracht men de eigenschappen van het prototype (ware grootte) te bepalen.

Ook modelonderzoek is weer onder te verdelen in een aantal typen, waarvan nu slechts genoemd worden modelonderzoek met behulp van mathematische rekenmodellen of modelonderzoek met fysische modellen.

In het geval van experimentele schaalproeven wordt gelijkvormigheid van model en het prototype nagestreefd. Dit is noodzakelijk om de extrapolatie van de model gegevens naar prototype mogelijk te maken. In de praktijk betekent dit dat aan een aantal modelwetten moet worden voldaan.

Bij een proef met een scheepsmodel bestaat het fysische model uit een combinatie van een geschaald scheepsmodel en water, welke laatste ten opzichte van het prototype niet geschaald is.

Dit geeft de nodige complicaties, waarop later teruggekomen wordt.

De gelijkvormigheid van model en prototype heeft betrekking op:

- de geometrische gelijkvormigheid
- de kinematische gelijkvormigheid
- de dynamische gelijkvormigheid

De geometrische gelijkvormigheid betekent dat er een evenredigheid bestaat tussen de afmetingen van model en prototype.

Er is een vaste verhouding tussen alle overeenkomstige maten van het model en het prototype. Dit noemt men de lineaire schaal.

Deze schaal wordt gebruikt voor alle lengte maten, inclusief waterdiepte, kanaalbreedte, golflengte etc. etc. voor zover van belang voor het te onderzoeken probleem.

De kinematische gelijkvormigheid betekent evenredigheid van de snelheidsvectoren en hun verschillende componenten in de overeenkomende punten van de stromingsvelden rond model en prototype.

De dynamische gelijkvormigheid betekent evenredigheid van de overeenkomende krachten en hun verschillende componenten.

De drukkrachten, de traagheidskrachten, de wrijvingskrachten en de krachten ten gevolge van oppervlakte spanningen moeten bij model en prototype in dezelfde verhouding optreden om de gelijkvormigheid te waarborgen.

Samengevat: alle plaats-, snelheid- en krachtvectoren moeten in overeenkomende punten van model en prototype dezelfde richting hebben (argument), terwijl de grootte (modulus) van de verschillende vectoren in een constante verhouding ten opzichte van elkaar moeten staan.

De vergelijkingswet van Newton

In deze beschouwing beperken we ons eerst tot een homogene, onsamendrukbare en wrijvingsloze vloeistof.

Er is geen vrij vloeistof oppervlak en er vindt geen afgifte plaats van damp of opgesloten gassen uit de vloeistof.

In dat specifieke geval heeft de absolute druk geen invloed op de vloeistofstroming: de stroming wordt slechts bepaald door het evenwicht tussen traagheidskrachten en drukkrachten.

Traagheidskrachten en drukkrachten hebben beide dezelfde schaalfactoren.

Stel nu dat de volgende schaalfactoren gelden van prototype naar model:

$$\text{lengte afmeting:} \quad \alpha_L \quad (L_p = \alpha_L L_m)$$

$$\text{snelheid:} \quad \alpha_V \quad (V_p = \alpha_V V_m)$$

$$\text{dichtheid:} \quad \alpha_\rho \quad (\rho_p = \alpha_\rho \rho_m)$$

De tijd in prototype moet dan gedeeld worden met:

$$\frac{\alpha_L}{\alpha_V} \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{m/s}} = \text{s}\right)$$

om de tijd in het model te vinden.

Versnellingen in het prototype moeten gedeeld worden met:

$$\frac{\alpha_V^2}{\alpha_L} \quad \left(\frac{\text{m}^2/\text{s}^2}{\text{m}} = \text{m}/\text{s}^2\right)$$

om de versnellingen in het model te vinden.

De traagheidskrachten en de resulterende drukkrachten hebben beide als schaalfactor:

$$\alpha_\rho \alpha_v^2 \alpha_L^2 \quad \left(\alpha_\rho \alpha_L^3 \frac{\alpha_v^2}{\alpha_L} \right)$$

Bedenk hierbij dat een traagheidskracht een massa maal een versnelling is. Ofwel een soortelijke massa maal een volume maal een versnelling. De dimensie van een drukkracht wordt gevonden uit de vergelijking van Bernouilli en blijkt daaraan uiteindelijk gelijk te zijn.

Derhalve is:
$$F_p = \alpha_\rho \alpha_v^2 \alpha_L^2 F_m$$

Of
$$\frac{F_p}{F_m} = \frac{\rho_p V_p^2 L_p^2}{\rho_m V_m^2 L_m^2} = \alpha_\rho \alpha_v^2 \alpha_L^2$$

En
$$F_p = \frac{F_m}{\rho_m V_m^2 L_m^2} * \rho_p V_p^2 L_p^2$$

Blijkbaar kan men hiervoor schrijven:

$$F_p = C \frac{1}{2} \rho_p V_p^2 L_p^2$$

$$F_m = C \frac{1}{2} \rho_m V_m^2 L_m^2$$

waarin C een constante is die voor het beschouwde geval (gelet op de eerder gedane aannamen betreffende de ideale vloeistof) niet van de schaal afhankelijk is.

Deze formules geven de algemene vergelijkingswet van Newton weer. We herkennen hierin de weerstandscoefficiënt van de onderzochte lichaamsvormen in het hoofdstuk over de weerstand.

Deze zijn, mits aan de schaalfactoren wordt voldaan, voor model en prototype gelijk zodat de modelcoëfficiënten gebruikt mogen worden om prototype krachten te berekenen.

Het betreft hier uitsluitend geheel omstroomde lichamen, zonder de aanwezigheid van het vrije vloeistofoppervlak.

Modelproeven om de weerstand van een schip te bepalen komen dadelijk aan de orde.

Modelregel van Reynolds.

In het geval dat in het model de viskeuze krachten niet verwaarloosd mogen worden blijkt de modelregel van Reynolds van belang.

Stel dat de schaalfactor α_η geldt voor de viscositeitscoëfficiënt.

Dan is de schaalfactor voor de schuifkrachten welke het resultaat zijn van de viscositeit van de vloeistof:

$$\alpha_\eta \alpha_v \frac{\alpha_L^2}{\alpha_L} = \alpha_\eta \alpha_v \alpha_L$$

pro memorie: $\tau dA = \frac{du}{dz} dA$ (dA = oppervlakte elementje)

De dynamische gelijkvormigheid vereist in dat geval dat:

schaal schuifkracht = schaal traagheidskracht

$$\alpha_\eta \alpha_v \alpha_L = \alpha_\rho \alpha_v^2 \alpha_L^2$$

ofwel: $\frac{\alpha_\rho \alpha_v \alpha_L}{\alpha_\eta} = 1$

Dit is de modelregel van Reynolds.

Blijkbaar geldt voor het model en het prototype het kengetal Re, bekend als het Reynoldsgetal waarbij:

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta}$$

waarin L de lengte van het omstroomde lichaam in stromingsrichting is.

Ook schrijft men: $\nu = \frac{\eta}{\rho}$

waarin: ν de kinematische viscositeitscoëfficiënt voorstelt.

Derhalve valt voor Re te schrijven:

$$Re = \frac{V L}{\nu}$$

Met:

V in m/s
L in m
 ν in m²/s

Als indicatie gelden de volgende waarden voor ν bij 20 graden Celsius:

zoetwater : $\nu = 1.00 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

zoutwater : $\nu = 1.05 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$

droge lucht: $\nu = 1.50 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$

Voor model en prototype dient het getal van Reynolds gelijk te zijn om tot een verantwoorde extrapolatie te komen. Dat wil zeggen dat als de lengte met een factor 10 ver-

kleind wordt om aan een model te komen, de snelheid van het langs stromende water met een factor 10 verhoogd zou moeten worden om hetzelfde Reynolds-getal te behouden.

Voorbeeld:

Een schip met een waterlijnlengthe van 100 meter heeft een snelheid van 20 knopen. Het Reynolds getal voor de stroming:

$$Re = \frac{100 \cdot 20 \cdot 0.5144}{1.05 \cdot 10^{-6}} = 0.98 \cdot 10^9$$

Een model van 1 meter van dit schip zou dus op modelschaal een snelheid van:

$$V_m = \frac{0.98 \cdot 10^9 \cdot 1.00 \cdot 10^{-6}}{1} = 980 \text{ m/s hebben. Dit is erg onpraktisch!}$$

Modelregel van Froude

Als de vloeistof in het te beschouwen probleem ook een vrij vloeistof oppervlak heeft, dan gaat ook de zwaartekracht een rol spelen, zoals gebleken is bij de beschouwing over de hydrostatische druk en de golven rond een varende schip.

De zwaartekracht op een vloeistofdeeltje ten gevolge van de zwaartekrachtsversnelling is:

$$F = ma$$

$$F = \rho d \nabla \cdot g$$

zodat met een schaalfactor α_g voor de versnelling van de zwaartekracht de schaalfactor voor de zwaartekrachten gelijk is aan:

$$\alpha_\rho \alpha_g \alpha_L^3 \quad (\alpha_{\text{volume}} \alpha_L^3)$$

De eerder geformuleerde eis ten aanzien van de dynamische gelijkvormigheid eist nu dat de schaalfactor voor de traagheidskrachten gelijk moet zijn aan de schaalfactor voor de zwaartekrachten. Voor de traagheidskrachten hadden we reeds eerder afgeleid dat de schaalfactor is:

$$\alpha_\rho \alpha_v^2 \alpha_L^2$$

zodat:

$$\alpha_\rho \alpha_g \alpha_L^3 = \alpha_\rho \alpha_v^2 \alpha_L^2$$

of:

$$\frac{\alpha_v^2}{\alpha_g \alpha_L} = 1$$

Hieruit volgt dan de uitdrukking:

$$Fn^2 = \frac{V^2}{g L}$$

voor model en prototype gelijk moet zijn om een dynamische gelijkvormigheid te waarborgen. In algemene vorm:

$$F_n = \frac{V_p}{\sqrt{g L_p}} = \frac{V_m}{\sqrt{g L_m}}$$

Dit is de modelregel van Froude.

Men noemt: $F_n = \frac{V}{\sqrt{g L}}$ het kengetal van Froude

Als aan deze modelregel ten aanzien van het gelijk zijn van het getal van Froude voor model en prototype is voldaan dan is het golfbeeld op modelschaal gelijk aan het golfbeeld in prototype. Derhalve mag verwacht worden dat ook de golfweerstand op modelschaal gelijk is.

Voor het geval van een schaalmodel van een schip dat 10 keer kleiner is dan het prototype en met behulp waarvan de weerstand van het schip bepaald moet worden, geldt dus dat de modelsnelheid de vierkantswortel uit 10 kleiner zal moeten zijn om hieraan te voldoen.

Voorbeeld:

Voor een schip met een waterlijn lengte van 100 m en snelheid van 20 knopen is :

$$F_n = \frac{10.3}{\sqrt{9.8 \cdot 100}} = 0.33$$

Bij het bepalen van de weerstand van een schip met behulp van modelproeven doet zich nu een probleem voor, dat hieronder zal worden toegelicht.

Zoals inmiddels bekend speelt bij de weerstand van een schip zowel de vorm-, druk- en golfweerstand als ook de wrijvingsweerstand een belangrijke rol.

Om een modelproef naar behoren te kunnen uitvoeren zou dan zowel aan de modelregel van Reynolds als ook aan die van Froude moeten worden voldaan, om zowel de zwaartekracht als de wrijvingskracht op de juiste schaal te brengen. Neem als voorbeeld weer het schip met een waterlijn lengte van 100 meter en een snelheid van 20 knopen. Hiervan wenst men de weerstand door middel van een modelproef te bepalen.

Stel nu dat de lineaire modelschaal α_L gelijk is aan 40, dus

$$\alpha_L = 40$$

Dan volgt voor de modelsnelheid bij een gelijke versnelling van de zwaartekracht in model en prototype, dwz : $\alpha_g = 1$

$$20 \cdot s \frac{0.514}{\sqrt{40}} = 1.627 \text{ m/s}$$

waarmee voldaan wordt aan de modelregel van Froude.

Het kengetal van Reynolds is in dit geval voor zoetwater van 20 graden Celsius:

$$\text{Re}_m = \frac{1.627 \cdot \frac{100}{40}}{10^{-6}} = 4.07 \cdot 10^6$$

Vergelijk dit met het eerder gevonden kengetal van Reynolds voor het schip op ware grootte, dan blijkt die te zijn:

$$\text{Re}_p = 0.98 \cdot 10^9$$

Om aan de modelregel van Reynolds te kunnen voldoen zijn er nu twee mogelijkheden: de viscositeit van de vloeistof waarin de modelproef wordt uitgevoerd moet circa 240 maal zo groot zijn als die van water. Zo een vloeistof is praktisch gesproken niet voor handen.

Ten tweede zou de snelheid circa 240 keer groter moeten zijn dan in prototype. Dit is strijdig met de snelheid gevonden door de modelwet van Froude. Voor een van de twee modelwetten zal nu gekozen moeten worden.

De golfvorming aan het oppervlak en daarmee de golfweerstand is van doorslaggevend belang bij de bepaling van de weerstand van oppervlakte schepen en is veel moeilijker te benaderen dan de wrijvingsweerstand. Bij schaalproeven met oppervlakte schepen wordt derhalve in het algemeen wel voldaan aan de modelregel van Froude maar niet aan de modelregel van Reynolds.

Dat het onmogelijk is aan beide wetten te voldoen is ook in te zien door de schaalfactoren voor de viscositeit, voor de zwaartekrachten en de traagheidskrachten aan elkaar gelijk te stellen:

$$\alpha_\eta \alpha_v \alpha_L = \alpha_\rho \alpha_g \alpha_L^3 = \alpha_\rho \alpha_v^2 \alpha_L^2$$

Hieruit is af te leiden dat bij $\alpha_g = 1$

$$\left(\frac{\alpha_\eta}{\alpha_\rho} \right)^2 = \alpha_L^3 = \alpha_v^6$$

De viscositeit bepaalt zowel de lineaire schaal als de snelheidsschaal.

Bij ongeveer gelijke kinematische viscositeit bij prototype en model ($\alpha_\eta/\alpha_\rho = 1$) moet dan $\alpha_v = \alpha_L = 1$ zijn: dus een modelproef is niet mogelijk.

Het niet voldoen aan de modelregel van Reynolds veroorzaakt het zo genaamde **schaaleffect**, waardoor de constante C in de algemene vergelijking van Newton voor model en prototype niet gelijk is.

Dit betekent dat de extrapolatie van de modelresultaten naar het prototype niet zonder meer kan geschieden. De extrapolatie van modelproef resultaten naar het prototype moet daarom voor oppervlakte schepen op een speciale manier uitgevoerd worden. Dit zullen we hierna bespreken.

Extrapolatie methode volgens Froude

Voor het bepalen van de weerstand van een schip wordt een modelproef gedaan met een schaalmodel van het schip. Het schaalmodel voldoet aan de eisen ten aanzien van

geometrische, kinematische en dynamische gelijkvormigheid met dien verstande dat bij de uitvoering van de proef wel voldaan wordt aan de modelwet van Froude maar niet aan de modelwet van Reynolds.

De snelheid in prototype en in model verhouden zich dus met de wortel uit de schaal.

De weerstand die nu voor het model gevonden wordt uit de modelproef als functie van de snelheid moet worden omgeschaald. Zoals gedemonstreerd voldoet door het niet aanhouden van de modelwet van Reynolds de wrijvingsweerstand niet aan de algemene modelwet van Newton. Deze kan dus niet zonder meer omgeschaald worden.

De golfmakende weerstand kan wel omgeschaald worden omdat wel aan de modelwet van Froude voldaan wordt. Het is dus noodzakelijk beide weerstandscomponenten van elkaar te scheiden zodat zij afzonderlijk omgeschaald kunnen worden. Daartoe wordt de wrijvingsweerstand van het model uitgerekend. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de weerstandscoefficiënt zoals die gevonden is voor vlakke platen, waarvan de golf- en drukweerstand gelijk aan nul verondersteld worden. De totale weerstand van deze platen wordt derhalve verondersteld wrijvingsweerstand te zijn. De resulterende wrijvingsweerstandscoefficiënt is dan uitsluitend nog een functie van het Reynolds getal van de stroming langs de plaat. Hierin zit de invloed van het laminaire of turbulente karakter van de stroming vervat. Alle Sleeptanks van de wereld hebben indertijd afgesproken om van alle beschikbare relaties tussen de wrijvingsweerstandscoefficiënt en het getal van Reynolds er één te kiezen, welke in formulevorm gegeven wordt door:

$$C_F = \frac{0.075}{(10 \log Re - 2)^2}$$

Voor het specifieke Reynoldsgetal geldend voor de stroming rond het model wordt de wrijvingsweerstand voor het model bepaald met behulp van:

$$R_{Fm} = \frac{1}{2} \rho \cdot V_m^2 \cdot A_m \cdot C_{Fm}$$

waarin: V_m modelsnelheid (m/s)
 A_m nat oppervlak romp (m²)
 C_{Fm} wrijvingscoëfficiënt model

De restweerstand van het model wordt gevonden door deze wrijvingsweerstand van de totale weerstand af te trekken, volgens

$$R_{Rm} = R_{Tm} - R_{Fm}$$

De prototype restweerstand wordt nu gevonden door de restweerstand om te schalen volgens

$$R_{Rp} = R_{Rm} \alpha_L^3$$

De wrijvingsweerstand voor het prototype wordt gevonden door met het daar geldende Reynolds getal de wrijvingscoëfficiënt in prototype omstandigheden uit te rekenen en met behulp daarvan de wrijvingsweerstand met de prototype snelheid en nat oppervlak.

$$R_{Fp} = \frac{1}{2} \rho \cdot V_p^2 \cdot A_p \cdot C_{Fp}$$

De totale weerstand van het schip op ware grootte is dan:

$$R_{Tp} = R_{Rp} + R_{Fp}$$

Behalve de weerstand van schepen worden ook vele andere eigenschappen van het uiteindelijk te bouwen schip bepaald met modelproeven. Te denken valt hierbij bijvoorbeeld aan het gedrag van het schip in zeegang. Zoals bekend verondersteld mag worden is het wateroppervlak op zee slechts zelden rustig.

In de meeste gevallen doet zich er in meer of mindere mate golfvorming voor: door de wind wordt het wateroppervlak verstoord en er ontstaan golven.

Het is tegenwoordig in vele gevallen belangrijk te weten hoe het schip zich in deze golven zal gedragen. Het schip gaat onder invloed van de golven bewegen en hierdoor kan de veiligheid van schip, bemanning en lading in het geding komen.

Om het gedrag van schepen in golven te bepalen wordt naast de beschikbare rekenmodellen, nog steeds veel gebruik gemaakt van modelproeven. Deze worden uitgevoerd in een sleeptank, net als de weerstandsproeven. Hierbij wordt het model van het schip in modelgolven gelegd en voortgesleept en de resulterende bewegingen bepaald. Hiertoe wordt de modelwet van Froude gebruikt omdat de oorzaak van de bewegingen gelegen is in de druk-, traagheids- en zwaartekracht. Viskeuze problemen spelen meestal geen rol.

Ook heel andere modelproeven met schepen zijn denkbaar. Veelal is het tegenwoordig van belang te weten hoe een bepaald schip zich gedraagt in de haven of in de aanloop naar een haven uit het oogpunt van navigatorische situaties die zich voor kunnen doen. Ook hiertoe worden modelproeven gebruikt waarbij aan schaalmodellen gemeten wordt om het stuurgedrag van het schip te voorspellen. Ook bij deze proeven wordt de modelwet van Froude gevolgd, ook al kunnen viskeuze invloeden hier een grotere rol spelen. De extrapolatie van al deze proefresultaten levert geen problemen op omdat door de modelwet van Froude aan de dynamische gelijkvormigheid is voldaan. Voor deze proeven gelden de volgende schaalfactoren, uitgaande van een gekozen lineaire schaal voor het model.

model → prototype

schaal lengte	m	α_L	(gekozen)
schaal oppervlakte	m^2	$\alpha_L \cdot \alpha_L = \alpha_L^2$	
schaal inhoud	m^3	$\alpha_L \cdot \alpha_L \cdot \alpha_L = \alpha_L^3$	
schaal snelheid	$\frac{m}{s}$	$\sqrt{\alpha_L}$	(modelwet van Froude)
schaal tijd	$s = \frac{s}{m} m$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha_L}} \alpha_L = \sqrt{\alpha_L}$	
schaal versnelling	$\frac{m}{s^2}$	$\frac{\alpha_L}{(\sqrt{\alpha_L})^2} = 1$	

schaal kracht

