

I R 897-I



waterloopkundig laboratorium

berekening van stroming in een getijrivier

keuze van de differentiëmethode

AFGEHANDELD

verslag wiskundig onderzoek

---

R 897 deel I

maart 1975

16 JULI 1975

---

berekening van stroming in een getijrivier

keuze van de differentiëmethode

verslag wiskundig onderzoek

---

R 897 deel I

maart 1975

## INHOUD

### NOTATIE

	blz.
<u>1</u> <u>Inleiding</u> .....	1
<u>2</u> <u>Probleemstelling</u> .....	2
2.1 De ondiepwater benadering .....	2
2.2 Koppeling aan de diffusie vergelijking .....	5
2.3 De randvoorwaarden .....	6
<u>3</u> <u>Differentiemethoden</u> .....	7
3.1 Eigenschappen van differentiemethoden .....	7
3.2 Overzicht van de verschillende differentie schema's voor de transportvergelijking, met de resultaten van een aantal afleidingen ...	10
<u>4</u> <u>Conclusies</u> .....	<del>20</del> 22
4.1 Praktisch voorbeeld .....	<del>20</del> 22
4.2 Conclusies naar aanleiding van het praktische voorbeeld .....	25

### LITERATUUR

### APPENDIX

- A Afleiding van de afbreekfouten
- B Stabiliteitsanalyse
- C Afleiding van de numerieke diffusie

## NOTATIE

$c$	concentratie
$D_{nx}$	numerieke diffusie-coëfficiënt in de x-richting
$E$	afbreekfout
$F$	getal van Froude (betrokken op $u$ )
$F_x, F_z$	turbulente zout flux in de x-, resp. in de z-richting
$g$	versnelling van de zwaartekracht
$H$	karakteristieke hoogte
$h$	stapgrootte in de x-richting
$h_s$	positie van het vrije oppervlak
$K$	diffusie coëfficiënt
$k$	stapgrootte in de z-richting
$L$	karakteristieke lengte
$\vec{n}$	normaal
$O(\dots)$	orde symbool van Landau
$p$	druk
$\bar{p}, p'$	gemiddelde, resp. fluctuatie van $p$
$r$	turbulente intensiteit
$T$	tijdschaal
$t$	tijd
$u$	snelheid in de x-richting
$\bar{u}, u'$	gemiddelde, resp. fluctuatie van $u$
$U$	karakteristieke snelheid in de x-richting
$w$	snelheid in de z-richting
$\bar{w}, w'$	gemiddelde, resp. fluctuatie van $w$
$x$	lengte coördinaat
$z$	hoogte coördinaat
$\epsilon_x, \epsilon_z$	turbulente viscositeit in de x-, resp. in de z-richting
$\epsilon_{\sigma x}, \epsilon_{\sigma z}$	turbulente diffusiecoëfficiënt in de x-, resp. in de z-richting
$\theta$	middelingsoperator
$\nu$	kinematische viscositeit
$\rho$	dichtheid
$\tau_{xz}$	schuifspanning in de z-richting, in een vlak loodrecht op de x-richting
$\tau_{xx}, \tau_{zz}$	normaalspanning in de x-, resp. de z-richting
$\tau$	stapgrootte in de tijd
$\sigma$	dichtheidsverschil
$\bar{\sigma}, \sigma'$	gemiddelde, resp. fluctuatie van $\sigma$

## BEREKENING DICHTHEIDSTROOM

### 1 Inleiding

Dit rapport maakt deel uit van de ontwikkeling van een 2-dimensionaal rekenmodel voor gelaagde stroming. In het kader van deze ontwikkeling zijn al twee onderdelen afgerond, te weten, diffusie in twee dimensies bij een gegeven snelheidsveld [13] en een literatuur onderzoek betreffende de rekenmethoden voor 2-dimensionale homogene stroming [11]. In aansluiting op het tweede onderdeel geeft dit rapport een overzicht van een aantal in [11] aangestipte mogelijkheden, waar nu uitvoeriger op in wordt gegaan.

Op basis van een aantal numerieke aspecten wordt dan de meest economische methode geselecteerd, dat wil zeggen een methode die snel rekent, maar nog wel fysisch betrouwbare resultaten levert.

Teneinde de problemen en de oorzaken van de problemen zo goed mogelijk te lokaliseren wordt met een sterk vereenvoudigd model begonnen. Dit houdt in een vertikaal, 2-dimensionaal model, waarbij over de breedte gemiddeld wordt. Verder wordt er gerekend op een rechthoekig gebied met eenvoudige randvoorwaarden. De koppeling aan de diffusie vergelijking wordt voorlopig achterwege gelaten.

Op dit betrekkelijk eenvoudige basismodel worden systematisch allerlei variaties aangebracht om tenslotte tot een zo natuurgetrouw mogelijke voorstelling van het prototype te komen. De toepasbaarheid van het uiteindelijke model zal geheel afhangen van de mate waarin het prototype kan worden benaderd en de benodigde rekentijd.

Uit de tot nu toe bekende literatuur [2], [6] zijn alleen enkele voorbeelden bekend die kwalitatief wel redelijk lijken.

Dit rapport werd samengesteld door ir. P.A.J. Perrels, die tevens het verdere numerieke onderzoek zal uitvoeren.

## 2 Probleem stelling

### 2.1 De ondiepwater benadering [11]

Algemeen kan men stellen dat het snelheidsveld beschreven wordt door de Navier-Stokes vergelijkingen gekoppeld met de continuïteits vergelijking.

Voor een vertikaal 2-dimensionaal model en een onsamendrukbare vloeistof worden deze vergelijkingen:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial wu}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} + \frac{\partial w^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g - \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.3)$$

Splitsing van de variabelen in een gemiddelde waarde plus een fluctuatie geeft:

$$u = \bar{u} + u'$$

$$p = \bar{p} + p'$$

enz.

Substitutie in (2.1), (2.2) en (2.3) levert:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{met: } \frac{\tau_{xx}}{\rho} = 2 \nu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \overline{u'^2}$$

$$\frac{\tau_{xz}}{\rho} = \nu \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \overline{u' w'}$$

$$\frac{\tau_{zz}}{\rho} = 2 \nu \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) - \overline{w'^2}$$

Voor het geval dat de verticale versnellingen verwaarloosbaar zijn t.o.v. de zwaartekracht, kunnen bovenstaande vergelijkingen nog aanzienlijk vereenvoudigd worden.

Dit is het geval, als de lengteschaal L veel groter is dan de diepte H. Uit de continuïteits vergelijking volgt dan:

$$\bar{w} \sim \frac{H}{L} \bar{u}$$

De termen van (2.5) kunnen nu vergeleken worden met de versnelling t.g.v. de zwaartekracht g. Als verondersteld wordt dat de variaties in de tijd worden gekarakteriseerd door de tijdschaal T, volgt:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \sim \frac{\bar{w}}{gT} \sim \frac{1}{g} \frac{H}{L} \frac{U}{T} = \left( \frac{H}{L} \right)^2 \frac{L}{\sqrt{gH} T} F$$

waarbij U typerend is voor de grootte van  $\bar{u}$  en F het getal van Froude aangeeft, dat meestal vrij klein is ( $\sim 10^{-1}$ ). Bij een regelmatig verloop van de bodem kan L gelijk genomen worden aan de golflengte en T gelijk aan de golfperiode, zodat:

$$\frac{L}{\sqrt{gH} T} = 0 \quad (1)$$

Bij een onregelmatige bodem wordt L gelijk aan de obstakel lengte. In dat geval geldt:

$$\frac{L}{\sqrt{gH} T} < 1,$$

zodat algemeen mag worden aangenomen:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \leq \left(\frac{H}{L}\right)^2$$

Voor de convectieve termen volgt hieruit:

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial x} \sim \frac{1}{g} \frac{\partial \bar{w}^2}{\partial z} \sim \left(\frac{H}{L}\right)^2 \frac{U^2}{gH} = \left(\frac{H}{L}\right)^2 F^2 \leq \left(\frac{H}{L}\right)^2$$

Voor de schuifspanningen levert het turbulente gedeelte de voornaamste bijdrage, bovendien domineren de verticale afgeleiden door het verschil in lengteschaal. Bij elkaar levert dit:

$$\frac{1}{\rho g} \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \sim \frac{\rho r^2 U^2}{\rho g H} = r^2 F^2$$

waarbij  $r$  de relatieve turbulente intensiteit is. ( $r \sim 10^{-1}$ ). Hoewel de schuifspanningstermen in (2.5) dus niet van de orde  $\left(\frac{H}{L}\right)^2$  zijn, mogen ze toch worden verwaarloosd.

Voor het geval van ondiep water ( $H \ll L$ ) kan dan de benadering worden gemaakt, dat de drukverdeling hydrostatisch is.

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho g \tag{2.7}$$

In vergelijking (2.4) blijkt de term  $\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x}$  eveneens verwaarloosbaar t.o.v.  $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$ . Uit de stabiliteitsanalyse zal echter blijken dat het in bepaalde gevallen toch wel zin heeft om deze term mee te nemen.

Als tenslotte voor de schuifspanningen de klassieke "eddy viscosity" benadering wordt gesubstitueerd, wordt het stelsel vergelijkingen:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} = -\rho g \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \tag{2.10}$$



## 2.2 Koppeling aan de diffusie vergelijking

De diffusie vergelijking in zijn algemene 2-dimensionale vorm luidt:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial uc}{\partial x} + \frac{\partial wc}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial c}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial c}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.11)$$

Als voor de concentratie  $c$  het dichtheidsverschil  $\sigma$  wordt gekozen, waarbij

$$\sigma = \rho - \rho_{\text{ref}}$$

$$\rho_{\text{ref}} = \rho_{\text{gedestilleerd water}}$$

volgt:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u\sigma}{\partial x} + \frac{\partial w\sigma}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( K \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.12)$$

$$\text{Substitutie van } u = \bar{u} + u'$$

$$\sigma = \bar{\sigma} + \sigma'$$

enz.

levert:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}\bar{\sigma}}{\partial z} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 \quad (2.13)$$

$$\text{waarbij: } F_x = \overline{\sigma' u'} - K \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}$$

$$F_z = \overline{\sigma' w'} - K \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z}$$

Als voor  $F$  een analoge benadering wordt gebruikt als voor  $\tau$ , waarbij eveneens de moleculaire bijdrage verwaarloosd wordt t.o.v. de turbulente, volgt:

$$F_x = - \epsilon_{\sigma x} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x}$$

$$F_z = - \epsilon_{\sigma z} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z}$$

Substitutie in (2.13) geeft:

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}\bar{\sigma}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}\bar{\sigma}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_{\sigma x} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_{\sigma z} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.14)$$

Voor het gemak wordt de streep als notatie voor het gemiddelde voortaan wegge-  
laten. Het totale stelsel vergelijkingen komt er dan als volgt uit te zien:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = - \rho g \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\partial u\sigma}{\partial x} + \frac{\partial w\sigma}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_{\sigma x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_{\sigma z} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.18)$$

### 2.3 De randvoorwaarden

De randvoorwaarden aan de bodem zijn:

$$u = 0$$

$$w = 0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial n} = 0$$

$\bar{n}$  = de normaal

De randvoorwaarden aan het oppervlak zijn:

De kinematische voorwaarde: geen deeltjes verlaten het oppervlak  $z = h_s$ :

$$\frac{\partial h_s}{\partial t} + u \frac{\partial h_s}{\partial x} - w = 0$$

en indien geen windinvloeden worden meegenomen

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

verder is er geen stof transport door het oppervlak, m.a.w.

$$- F_x \frac{\partial h_s}{\partial x} + F_z = 0$$

en tenslotte geldt

$$p = 0$$

Voor de bovenstroomse rand moeten snelheidsprofielen worden opgegeven.

$$u = f_1(t, z)$$

$$w = g_1(t, z)$$

Verder wordt verondersteld dat de bovenstroomse rand zover weg ligt, dat geldt:

$$\sigma = 0$$

Op de benedenstroomse rand moet behalve de snelheidsverdeling ook een dichtheidsverdeling opgelegd worden.

$$u = f_2(t, z)$$

$$w = g_2(t, z)$$

$$\sigma = h_2(t, z)$$

### 3 Differentie methoden

#### 3.1 Eigenschappen van differentie methoden

Om de verschillende differentie methoden goed te kunnen vergelijken worden een aantal definities en begrippen ingevoerd. Deze zijn niet alle even exakt. Voor de exakte formuleringen wordt verwezen naar [8].

- Afbreekfout : Als voor de verschillende termen van de differentie vergelijking Taylorreeks ontwikkelingen worden gesubstitueerd, wordt de afbreekfout gegeven door het verschil van de differentie vergelijking en de differentiaal vergelijking.
- Orde van de afbreekfout : De orde van de laagste orde term is de orde van de afbreekfout.
- Consistentie : Een differentie vergelijking heet consistent met een differentiaal vergelijking als de afbreekfout naar nul gaat, wanneer  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  enz. naar nul gaan, m.a.w. als de orde van de afbreekfout positief is.

- Discretisatiefout : De discretisatiefout wordt gegeven door het verschil tussen de oplossing van de differentiaal vergelijking en de oplossing van de differentie vergelijking.
- Convergentie : Een differentie vergelijking levert een convergerende oplossing als de discretisatiefout naar nul gaat, wanneer  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  enz. naar nul gaan.
- Stabiliteit : Een differentie vergelijking is stabiel als eventuele verstoringen niet onbeperkt aan kunnen groeien.
- Numerieke diffusie : Indien in de afbreekfout termen van de vorm  $D_{nx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  voorkomen, leveren deze een bijdrage tot de diffusie, in dit geval in de x-richting.  $D_{nx}$  heet de numerieke diffusie coëfficiënt in de x-richting.
- Conservatief : Bij het opstellen van een differentiaal vergelijking wordt vaak gebruik gemaakt van de behoudswetten. Als deze wetten voor de differentie vergelijking behouden blijven heet de differentie vergelijking conservatief.
- Invloed van de randvoorwaarden: De afbreekfout aan de randen is vaak van een lagere orde dan in de rest van het gebied. Dit kan relatief grote fouten opleveren, die de oplossing over het hele gebied sterk kunnen beïnvloeden. Een nauwkeurige kwantitatieve schatting van deze invloed is meestal niet, dan wel moeilijk te geven.
- Begrensdheid : Stel  $L$  is een lineaire differentiaal operator, dan heet  $L$  uniform begrensd als er een reëel getal  $K$  bestaat zodanig dat:  
 $|L u| \leq K |u|$  voor elke willekeurig  $u$ .

- Lineair : Een differentiaal operator  $L$  heet lineair als  $L(\lambda u + v) = \lambda L u + L v$  voor willekeurige  $u$  en  $v$ , en  $\lambda$  een willekeurige konstante.
- Stabiliteitsanalyse : Voor de stabiliteitsanalyse van lineaire partiële differentiaal vergelijkingen wordt veelal gebruik gemaakt van de methode van Von Neumann [9]. Voor niet-lineaire problemen, en het huidige probleem hoort daar ook toe, is deze methode niet toepasbaar. In dat geval wordt de energiemethode gebruikt, maar daartoe wordt eerst een iets andere definitie van stabiliteit ingevoerd. Deze luidt:
- Een systeem heeft stabiel, als het tweede moment van het systeem begrensd blijft.
- Uit de differentiaal vergelijking is af te leiden dat de energie van het oorspronkelijke systeem begrensd is. Daarna moet aangetoond worden, dat dit ook voor de differentie vergelijking geldt, zij het onder bepaalde voorwaarden. [4], [7], [10].
- Oscillatie : Als m.b.v. de energiemethode stabiliteit is verzekerd, worden nog steeds slingeringen toegestaan, mits begrensd, die toch niet fysisch reëel zijn, z.g.n. oscillaties.
- Heuristische stabiliteit : Als de som van de fysische en de numerieke diffusie coëfficiënten kleiner dan nul is, geeft dit een negatieve totale diffusie coëfficiënt, wat fysisch onjuist is en oscillaties tot gevolg kan hebben. Het heuristische stabiliteitscriterium eist nu dat dat deze totale diffusie coëfficiënt positief blijft. [3].

Equivalentie stelling van Lax : Voor een consistent differentieschema is stabiliteit een nodig en voldoende voorwaarde voor convergentie.

N.B. Deze stelling geldt alleen voor lineaire problemen. Voor niet-lineaire problemen moet convergentie apart bewezen worden, b.v. met behulp van de energiemethode.

De minimum eisen waaraan een goed differentieschema moet voldoen zijn:

- 1 consistentie
- 2 stabiliteit
- 3 convergentie

Andere eigenschappen waarop gelet kan worden zijn:

- 4 orde van de afbreekfout
- 5 numerieke diffusie
- 6 conservatief zijn
- 7 invloed van de randvoorwaarden

Omdat de vergelijking die bekeken zal worden niet-lineair is, zou punt 3 apart bekeken moeten worden. Uit de literatuur blijkt echter dat convergentie aangetoond kan worden m.b.v. de energie methode en dat dit geen extra voorwaarden oplevert [7]. Wat punt 6 betreft kan opgemerkt worden, dat deze eigenschap de lokale ophoping van fouten tegengaat. Aan de hand van de punten 1, 2, 4 en 5 wordt nu een vergelijking gemaakt tussen diverse differentie vergelijkingen.

3.2 Overzicht van de verschillende differentieschema's voor de transport vergelijking, met de resultaten van een aantal afleidingen [9].

### 3.2.1 Algemene aanpak

Vanwege het niet-lineaire karakter ligt het in de lijn der verwachting dat de transportvergelijking

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.1)$$

de meeste moeilijkheden zal geven, bij het zoeken naar een geschikt differentie-schema. Daarbij worden  $\epsilon_x$  en  $\epsilon_z$  nog constant gehouden, zodat alleen de convectieve termen een niet-lineair karakter tonen.

Bovendien zullen de strengste restricties, wat betreft tijdstap en dergelijke, ook van deze vergelijking afkomstig zijn. Zodoende heeft het onderzoek zich in de eerste plaats gericht op deze vergelijking.

De algehele aanpak van het probleem is dan verder als volgt:

uit de snelheden in de x-richting kunnen met behulp van de continuïteitsvergelijking de snelheden in de z-richting uitgerekend worden. Vervolgens kan de diffusie vergelijking opgelost worden. Bijvoorbeeld met de reeds in [12] ontwikkelde methode. Met behulp van de nieuwe dichtheidsverdeling kunnen dan de nieuwe drukken uitgerekend worden, waarna de cyclus herhaald wordt.

### 3.2.2 Expliciete schema's

A: Het eerste differentieschema is een niet-conservatief schema. Hierbij wordt uitgegaan van de niet-conservatieve vorm van de transportvergelijking.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.2)$$

Voorwaartse differenties in tijd en centrale in plaats leveren het volgende differentieschema:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} \right\} + u_{i,j}^n \left\{ \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2h} \right\} + w_{i,j}^n \left\{ \frac{u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n}{2k} \right\} \\ & - \epsilon_x \left\{ \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} \right\} - \epsilon_z \left\{ \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{k^2} \right\} = \\ & = - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2h} \right\} \end{aligned} \quad (3.3)$$

waarbij  $u_{i,j}^n = u(n\tau, ih, jk)$

met  $\tau =$  tijdstap

$h =$  stapgrootte in de x-richting

$k =$  stapgrootte in de z-richting

De afbreekfout E wordt gegeven door (zie appendix A):

$$E = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{6} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{k^2}{6} w \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{h^2}{12} \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{k^2}{12} \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{h^2}{6} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} +$$

$$+ O(\tau^2, h^4, k^4)$$

De numerieke diffusie wordt gegeven door (zie appendix C):

$$D_{nx} = -\frac{\tau}{2} \left\{ u^2 - 4\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$$

$$D_{nz} = -\frac{\tau}{2} \left\{ w^2 - 2\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} - 2\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\}$$

Het stabiliteitscriterium wordt gegeven door (zie appendix B):

$$\tau \leq \frac{2 \bar{\epsilon}}{\left[ |u|_{L\infty} + 2 \left\{ \frac{\epsilon_x^2}{h^2} + \frac{\epsilon_z^2}{k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2}$$

B: Het tweede schema is een conservatief schema. Uitgegaan wordt van de conservatieve vorm van de transport vergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial wu}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Voor de convectieve termen wordt de z.g.n. upstream differencing toegepast [9], verder voorwaarts in tijd en centraal in plaats.

Het differentieschema wordt dan:

$$\left\{ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} \right\} + \left\{ \frac{\left( \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \right) u_{R1}^n - \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2} \right) u_{L1}^n}{h} \right\} +$$

$$+ \left\{ \frac{\left( \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n}{2} \right) u_{R2}^n - \left( \frac{w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{2} \right) u_{L2}^n}{k} \right\} +$$



$$\begin{aligned}
 & - \epsilon_x \left\{ \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} \right\} - \epsilon_z \left\{ \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{k^2} \right\} = \\
 & = - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2h} \right\}
 \end{aligned}$$

waarbij  $u_{R_1}^n = u_{i,j}^n$  als  $u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n \geq 0$

$u_{R_1}^n = u_{i+1,j}^n$  als  $u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n < 0$

$u_{L_1}^n = u_{i-1,j}^n$  als  $u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n \geq 0$

$u_{L_1}^n = u_{i,j}^n$  als  $u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n < 0$

analoog voor  $u_{R_2}^n$  en  $u_{L_2}^n$

De afbreekfout E wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
 E = & - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \frac{h^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} - \frac{k^2}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} + \\
 & - \frac{h^2}{6} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{k^2}{6} u \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \frac{h^2}{12} \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{k^2}{12} \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{h^2}{6} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + 0 \quad (\tau^2, h^4, k^4)
 \end{aligned}$$

De numerieke diffusie wordt gegeven door:

$$D_{nx} = - \frac{\tau}{2} \left\{ 4u^2 - 8\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} - 2\epsilon_x \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{h}{2} u - \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$D_{nz} = - \frac{\tau}{2} \left\{ w^2 - 4\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} - 4\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{k}{2} w - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Het stabiliteitscriterium wordt gegeven door:

$$\tau < \frac{1}{\left[ 4 \left( \frac{\epsilon_x^2}{h^2} + \frac{\epsilon_z^2}{k^2} \right) + 4|u|_{L^\infty} \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}$$

N.B. Zowel voor schema B als voor schema E geldt dat,

$$\text{als } (u_{i+1,j} + u_{i,j}) (u_{i,j} + u_{i-1,j}) < 0$$

$$\text{of als } (w_{i,j+1} + w_{i,j}) (w_{i,j} + w_{i,j-1}) < 0$$

de stapgrootte aangepast moet worden, omdat het differentie schema anders niet consistent is met de differentiaal vergelijking. (zie appendix A)

C: Het derde schema is eveneens conservatief. Uitgegaan wordt van vergelijking (3.1), voorwaartse differenties in tijd en centrale in plaats leveren:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} \right\} + \left\{ \frac{(u_{i+1,j}^n)^2 - (u_{i-1,j}^n)^2}{2h} \right\} + \left\{ \frac{w_{i+1,j}^n u_{i+1,j}^n - w_{i-1,j}^n u_{i-1,j}^n}{2k} \right\} + \\ & - \epsilon_x \left\{ \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} \right\} - \epsilon_z \left\{ \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{k^2} \right\} = \\ & = - \left\{ \frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2h} \right\} \end{aligned}$$

De afbreekfout E wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} E = & - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \\ & + \epsilon_x \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \epsilon_z \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{1}{\rho} \frac{h^2}{5} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + O(\tau^2, h^4, k^4) \end{aligned}$$

De numerieke diffusie  $D_n$  wordt gegeven door:

$$D_{nx} = - \frac{\tau}{2} \{ 4u^2 - 8\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} - 2\epsilon_x \frac{\partial w}{\partial z} \} - h^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$D_{nz} = - \frac{\tau}{2} \{ w^2 - 4\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} - 4\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Het stabiliteitscriterium wordt gegeven door:

$$\tau \leq \frac{2 \bar{\epsilon}}{\left[ |u|_{L^\infty} + 2 \left\{ \frac{\epsilon_x}{h^2} + \frac{\epsilon_z}{k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2}$$

D: Het vierde schema komt overeen met het derde schema, maar dan voor de gesplitste vergelijking. Na splitsing ontstaat het volgende stelsel differentiaal vergelijkingen:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.4)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.5)$$

Voorwaartse differenties in tijd en centrale in plaats leveren het volgende stelsel differentie vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\frac{1}{2}\tau} \right\} + \left\{ \frac{(u_{i+1,j}^n)^2 - (u_{i-1,j}^n)^2}{2h} \right\} - \epsilon_x \left\{ \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} \right\} &= \\ &= - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2h} \right\} \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}\tau} \right\} + \left\{ \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} w_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} w_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{2k} \right\} + \\ - \epsilon_z \left\{ \frac{u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{k^2} \right\} &= 0 \end{aligned}$$

De afbreekfouten zijn:

$$E_x = - \frac{\tau}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - h^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon_x \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{h^2}{6} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + 0 \quad (\tau^2, h^4)$$

$$E_z = - \frac{\tau}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} + \epsilon_z \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 0 \quad (\tau^2, k^4)$$

De numerieke diffusie coëfficiënten zijn:

$$D_{nx} = - \frac{\tau}{8} \{ 16u^2 - 32\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \} - h^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$D_{nz} = - \frac{\tau}{8} \{ 4w^2 - 16\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z}$$

De stabiliteitscriteria zijn:

$$\tau \leq \frac{2\epsilon_x}{\left[ |u|_{L^\infty} + 2 \frac{\epsilon_x}{h} \right]^2}$$

$$\tau \leq \frac{2\epsilon_z}{\left[ |w|_{L^\infty} + 2 \frac{\epsilon_z}{k} \right]^2}$$

D<sup>1</sup>: Dit schema ontstaat door de vergelijkingen van schema D nogmaals te splitsen. Er ontstaat dan het volgende stelsel differentiaal vergelijkingen.

$$\frac{1}{4} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} = - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{1}{2\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial z} = 0$$

$$\frac{1}{4} \frac{\partial u}{\partial t} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Voor een expliciet schema wordt de stabiliteitsvoorwaarde

$$\tau \leq \min. \left\{ \frac{h}{|u|}, \frac{k}{|w|}, \frac{h^2}{2\epsilon_x}, \frac{k^2}{2\epsilon_z} \right\}$$

Voor de convectieve stukken zijn de afbreekfouten van de 4<sup>e</sup> orde, door de diffusieve stukken zijn de afbreekfouten van de 1<sup>e</sup> orde in tijd en van de 2<sup>e</sup> orde in plaats.

Voor een uitgebreidere beschouwing wordt verwezen naar [14].

### 3.2.3 Impliciete schema's

E: Het eerste impliciete schema is de impliciete versie van schema A. Uitgaande van vergelijking (3.2)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.6)$$

Voorwaartse differenties in tijd en centrale in plaats, bovendien impliciet met middelingsoperator  $\Theta$ , leveren:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + u_{i,j}^n \left\{ \Theta \frac{(u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1})}{2h} + (1-\Theta) \frac{(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n)}{2h} \right\} + \\ & \quad + w_{i,j}^n \left\{ \Theta \frac{(u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1})}{2k} + (1-\Theta) \frac{(u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n)}{2k} \right\} + \\ & - \epsilon_x \left\{ \Theta \frac{(u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1})}{h^2} + (1-\Theta) \frac{(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)}{h^2} \right\} + \\ & - \epsilon_z \left\{ \Theta \frac{(u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1})}{k^2} + (1-\Theta) \frac{(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n)}{k^2} \right\} = \\ & = - \frac{1}{\rho} \left\{ \Theta \frac{(p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1})}{2h} + (1-\Theta) \frac{(p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n)}{2h} \right\} \end{aligned}$$

De afbreekfout E wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} E = & (1-2\Theta) \frac{\tau}{2} \left\{ u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} \right\} \\ & - \Theta \frac{\tau^2}{2} \left\{ u \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + w \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial x} \right\} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{h^2}{6} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{k^2}{6} w \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \epsilon_x \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \epsilon_z \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{1}{\rho} \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \\
 & + \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + 0 \quad (\tau^2, \tau h^2, h^4, \tau k^2, k^4)
 \end{aligned}$$

De numerieke diffusie coëfficiënten worden gegeven door:

$$\begin{aligned}
 D_{nx} &= \frac{\tau}{2} \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} + (1-2\theta) \frac{\tau}{2} \left\{ -u^2 + 3\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \\
 & + \theta \frac{\tau^2}{2} \left\{ -6u \frac{\partial u}{\partial x} - 4uw \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon_x \left[ 12 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \right] + 2\epsilon_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} \\
 D_{nz} &= \frac{\tau}{2} \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} + (1-2\theta) \frac{\tau}{2} \left\{ -w^2 + \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} + 2\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \\
 & + \theta \frac{\tau^2}{2} \left\{ -4uw \frac{\partial w}{\partial x} - 2w^2 \frac{\partial u}{\partial x} - 4w^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \epsilon_z \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + 6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + 6 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Schema E is onvoorwaardelijk stabiel mits  $\theta \geq \frac{1}{2}$ .

F: Het tweede impliciete schema is de impliciete versie van schema B. Daarbij is tevens splitsing toegepast omdat de differentie schema's anderste ingewikkeld worden om nog handelbaar te zijn. Uitgaande van (3.1) volgt na splitsing:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (3.8)$$

Om een conservatief differentieschema te krijgen wordt voor de convectieve termen weer de zgn. upstream differencing toegepast, verder voorwaarts in tijd en centraal in plaats. Het differentieschema in de x-richting wordt dan:

$$\frac{u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n}{\tau} + \theta \left\{ \frac{(u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n)}{2} u_{R1}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{(u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)}{2} u_{L1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} +$$

$$\begin{aligned}
 & + (1-\theta) \left\{ \frac{\left( \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_1}^n - \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2} \right) u_{L_1}^n}{h} \right\} + \\
 - \epsilon_x & \left\{ \theta \frac{\left( u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} \right)}{h^2} + (1-\theta) \frac{\left( u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n \right)}{h^2} \right\} = \\
 = - \frac{1}{\rho} & \left\{ \frac{\left( p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n \right)}{2h} \right\}
 \end{aligned}$$

en in de z-richting:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} & + \theta \left\{ \frac{\left( \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_1}^{n+1} - \left( \frac{w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{2} \right) u_{L_1}^{n+1}}{k} \right\} + \\
 & + (1-\theta) \left\{ \frac{\left( \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_1}^{n+\frac{1}{2}} - \left( \frac{w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{2} \right) u_{L_1}^{n+\frac{1}{2}}}{k} \right\} + \\
 - \epsilon_z & \left\{ \theta \frac{\left( u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} \right)}{k^2} + (1-\theta) \frac{\left( u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \right)}{k^2} \right\} = 0
 \end{aligned}$$

De afbreekfouten zijn:

$$\begin{aligned}
 E_x = & \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right\} + \theta \frac{\tau h}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right\} - \theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial t^2} \right) \right\} + \\
 & + \theta \frac{\tau^2 h}{16} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right) \right\} - \theta \frac{\tau h^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right\} - \theta \frac{\tau^2 h^2}{32} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right) \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \Theta \frac{\tau h^3}{16} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right\} + \Theta \frac{\tau^2 h^3}{64} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \right\} + \Theta \epsilon_x \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \\
 & + \frac{h}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} - \frac{h^2}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} + \frac{h^3}{8} \left\{ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \epsilon_x \left\{ \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\} + \\
 & - \frac{h^2}{6} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + 0 (\tau^2, h^4, k^4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_z & = \left( \frac{1}{2} - \Theta \right) \frac{\tau}{2} \left\{ w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} - \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \right\} + \frac{\tau}{4} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} \right\} - \Theta \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial t} \right\} + \\
 & + \Theta \frac{\tau k}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \right) \right\} - \Theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial^2 u}{\partial t} \right) \right\} + \Theta \frac{\tau^2 k}{16} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z} \right) \right\} + \\
 & - \Theta \frac{\tau k^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \right) \right\} - \Theta \frac{\tau^2 k^2}{32} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z} \right) \right\} + \Theta \frac{\tau k^3}{16} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \right\} + \\
 & + \Theta \frac{\tau^2 h^2}{64} \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} + \Theta \epsilon_z \frac{\tau^2}{8} \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial z^2} \right\} + \epsilon_z \frac{k^2}{12} \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right\} + \frac{k}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} + \\
 & - \frac{k^2}{4} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} + \frac{k^3}{8} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 0 (\tau^2, h^4, k^4)
 \end{aligned}$$

De numerieke diffusie coëfficiënten zijn:

$$\begin{aligned}
 D_{nx} & = \frac{h}{2} u - \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{1}{2} - \Theta \right) \frac{\tau}{2} \left\{ -4u^2 - 10\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \Theta \frac{\tau h}{4} \left\{ -16u \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \\
 & - \Theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ -32\epsilon_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 96u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} + \Theta \frac{\tau^2 h}{16} \left\{ 288u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\
 & - \Theta \frac{\tau h^2}{8} \left\{ -16 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} - \Theta \frac{\tau^2 h^2}{32} \left\{ 224 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right\} \\
 D_{nz} & = \frac{k}{2} w - \frac{k^2}{4} \frac{\partial w}{\partial z} + \left( \frac{1}{2} - \Theta \right) \frac{\tau}{2} \left\{ -2w^2 + 6\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \Theta \frac{\tau}{2} \left\{ 2\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} +
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 & + \Theta \frac{\tau k}{4} \left\{ -8w \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \Theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ 32w^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \Theta \frac{\tau^2 k}{16} \left\{ 60w \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \\
 & - \Theta \frac{\tau k^2}{8} \left\{ -6 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} - \Theta \frac{\tau^2 k^2}{32} \left\{ 28w \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \Theta \epsilon_z \frac{\tau^2}{8} \left\{ 28w \frac{\partial w}{\partial z} \right\}
 \end{aligned}$$

Schema F is onvoorwaardelijk stabiel mits  $\Theta \geq \frac{1}{2}$ .

N.B. Zie opmerking bij schema B.

### 3.2.4 Leapfrog schema's

G: Schema G is een zgn. 3-level schema en staat ook wel bekend als de Dufort-Frankel Leapfrog methode. Dit schema wordt ondermeer gebruikt in [5].

Uitgaande van (3.1) wordt het differentieschema:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\tau} &= - \left\{ \frac{\left( \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \right)^2 - \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2} \right)^2}{h} \right\} + \\
 & - \left\{ \frac{\left( \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n}{2} \right) \left( \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n}{2} \right) - \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{2} \right) \left( \frac{w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{2} \right)}{k} \right\} + \\
 & + \epsilon_x \left\{ \frac{u_{i+1,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^{n-1}}{h^2} \right\} + \epsilon_z \left\{ \frac{u_{i,j+1}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i,j-1}^{n-1}}{k^2} \right\} + \\
 & - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2h} \right\} \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

De afbreekfout E wordt gegeven door

$$\begin{aligned}
 E &= - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{k^2}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \tau \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \tau \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} + \\
 & + 0 (\tau^2, h^4) k^4)
 \end{aligned}$$

Het stabiliteits criterium wordt gegeven door:

$$\tau \leq 2 \frac{\left(\frac{\epsilon_x}{h^2} + \frac{\epsilon_z}{k^2}\right)}{\left(\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k}\right)^2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k}\right)^2}{4 \left(\frac{\epsilon_x}{h^2} + \frac{\epsilon_z}{k^2}\right)^2}} - 1 \right\}$$

De numerieke diffusie wordt gegeven door:

$$D_{nx} = \left\{ -h^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \epsilon_x \left( 6 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\}$$

$$D_{nz} = \left\{ -\frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \tau \epsilon_z \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\}$$

#### 4 Conclusies

##### 4.1 Praktisch voorbeeld

Teneinde tot een definitieve keuze te komen, wordt aan de hand van een praktisch voorbeeld vergeleken wat de restricties, verbonden aan het gebruik van bepaalde methoden, inhouden.

Daartoe is het volgende voorbeeld gekozen:

Gegeven zij een estuarium:

$$\begin{aligned} L &= 20.000 \text{ m} \\ H &= 20 \text{ m} \\ u \text{ max} &= 1 \text{ ms}^{-1} \\ w \text{ max} &= 0,001 \text{ ms}^{-1} \text{ (volgt uit de continuïteits vergelijking)} \\ h &= 1.000 \text{ m} \\ k &= 1 \text{ m} \\ \epsilon_x &= 200 \text{ ms}^{-2} \text{ (zie opmerking)} \\ \epsilon_z &= 0,05 \text{ ms}^{-2} \end{aligned}$$

Opmerking: De term  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  is verwaarloosbaar t.o.v.  $\frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  en zou dus weggelaten mogen worden. Uit stabiliteits overwegingen volgt echter dat het ivm. de maximale tijdstap gunstiger is deze term mee te nemen,

en dan liefst met een zo groot mogelijke  $\epsilon_x$ .  
 De vraag is nu, hoe groot mag  $\epsilon_x$  gekozen worden?  
 Uit [12] volgt dat:

$$\frac{\overline{u'^2}}{u' w'} \sim 3 \quad \text{zonder gelaagdheid}$$

$$\sim 10 \quad \text{met gelaagdheid}$$

Uit dimensie overwegingen volgt dan:

$$\frac{\tau_{xx}}{\tau_{xz}} \sim \frac{\overline{u'^2}}{u' w'} \sim \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} \frac{(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x})}{(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x})}$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} = \frac{\overline{u'^2}}{u' w'} \frac{(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x})}{(2 \frac{\partial \bar{u}}{\partial x})} \sim (3 \text{ à } 10) \frac{(\frac{1}{H} + \frac{10^{-3}}{L})}{(2 \frac{1}{L})}$$

$$\Rightarrow \frac{\epsilon_x}{\epsilon_z} \sim 1500 \text{ à } 5000$$

Bij deze verhouding van  $\epsilon_x$  en  $\epsilon_z$  blijft  $\epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  verwaarloosbaar t.o.v.

$$\epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Schema A: Het stabiliteitscriterium wordt gegeven door:

$$\tau \leq \frac{2\bar{\epsilon}}{\left[ |u|_{L^\infty} + 2 \left\{ \frac{\epsilon_x}{h^2} + \frac{\epsilon_z}{k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2}$$

$$\Rightarrow \tau \leq 0,071 \text{ s}$$

Het heuristische stabiliteitscriterium wordt gegeven door:

$$\epsilon_x - \frac{\tau}{2} \{u^2 - 4\epsilon_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\} > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 384 \text{ s}$$

$$\epsilon_z - \frac{\tau}{2} \{w^2 - 2\epsilon_z \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - 2\epsilon_z \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)\} > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 9000 \text{ s}$$

Schema B: Het stabiliteitscriterium wordt gegeven door:

$$\tau < \frac{1}{\left[ 4 \left( \frac{\epsilon_x^2}{h^2} + \frac{\epsilon_z^2}{k^2} \right) + 4 |u|_{L^\infty} \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]}$$

$$\Rightarrow \tau < 0.24 \text{ s}$$

Het heuristische criterium wordt gegeven door:

$$\epsilon_x - \frac{\tau}{2} \{4u^2 - 8\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} - 2\epsilon_x \frac{\partial w}{\partial z}\} + \frac{h}{2} u - \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} > 0$$

$$\Rightarrow \text{geen oplossing als } u < -0.4 \text{ ms}^{-1}$$

$$\epsilon_z - \frac{\tau}{2} \{w^2 - 4\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} - 4\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z}\} + \frac{k}{2} w - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 5000 \text{ s}$$

Schema C: Het stabiliteitscriterium wordt gegeven door:

$$\tau \leq \frac{2\bar{\epsilon}}{\left[ |u|_{L^\infty} + 2 \left\{ \frac{\epsilon_x}{h^2} + \frac{\epsilon_z}{k^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]^2}$$

$$\Rightarrow \tau \leq 0.071 \text{ s}$$

Het heuristische stabiliteitscriterium wordt gegeven door:

$$\epsilon_x - \frac{\tau}{2} \left\{ 4u^2 - 8\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} - 2\epsilon_x \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - h^2 \frac{\partial u}{\partial x} > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 75 \text{ s}$$

$$\epsilon_z - \frac{\tau}{2} \left\{ w^2 - 4\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} - 4\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 5000 \text{ s}$$

Schema D: De stabiliteitscriteria worden gegeven door:

$$\tau \leq \frac{2\epsilon_x}{\left[ |u|_{L^\infty} + 2 \frac{\epsilon_x}{h} \right]^2}$$

$$\Rightarrow \tau \leq 200 \text{ s}$$

$$\tau \leq \frac{2\epsilon_x}{\left[ |w|_{L^\infty} + 2 \frac{\epsilon_z}{k} \right]^2}$$

$$\Rightarrow \tau \leq 10 \text{ s}$$

Het heuristische stabiliteitscriterium wordt gegeven door:

$$\epsilon_x - \frac{\tau}{8} \left\{ 16u^2 - 32\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - h^2 \frac{\partial u}{\partial x} > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 75 \text{ s}$$

$$\epsilon_z - \frac{\tau}{8} \left\{ 4w^2 - 16\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 10.000 \text{ s}$$

Schema D<sup>1</sup>: De stabiliteitscriteria worden gegeven door:

$$\tau \leq \frac{h}{|u|_{L^\infty}}$$

$$\Rightarrow \tau \leq 1000 \text{ s}$$

$$\tau \leq \frac{k}{|w|_{L^\infty}}$$

$$\Rightarrow \tau \leq 1000 \text{ s}$$

$$\tau \leq \frac{h^2}{2\varepsilon_x}$$

$$\Rightarrow \tau \leq 2000 \text{ s}$$

$$\tau \leq \frac{k^2}{2\varepsilon_z}$$

$$\Rightarrow \tau \leq 10 \text{ s}$$

Het heuristische stabiliteitscriterium wordt hier niet bekeken, maar levert vanwege de hoge orde van de afbreekfout geen extra beperkingen op.

Schema E: Schema E is onvoorwaardelijk stabiel mits  $\Theta \geq \frac{1}{2}$ .

Het heuristische stabiliteitscriterium wordt voor  $\Theta = \frac{1}{2}$  gegeven door:

$$\varepsilon_x + \frac{\tau}{2} \varepsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\tau^2}{4} \left\{ -6u \frac{\partial u}{\partial x} - 4uw \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon_x \left[ 12 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 6 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \right. \\ \left. + 2\varepsilon_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 1300 \text{ s}$$

$$\varepsilon_z + \frac{\tau}{2} \varepsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\tau^2}{4} \left\{ -4uw \frac{\partial w}{\partial x} - 2w^2 \frac{\partial u}{\partial x} - 4w^2 \frac{\partial w}{\partial z} + 2\varepsilon_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \varepsilon_z \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) + 6 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 6 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \right\} > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 3000 \text{ s}$$

Schema F: Het schema is onvoorwaardelijk stabiel mits  $\Theta \geq \frac{1}{2}$ .

Het heuristische stabiliteitscriterium voor  $\Theta = \frac{1}{2}$  is:

$$\begin{aligned} \epsilon_x + \frac{h}{2} u - \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\tau h}{8} \{-16u (\frac{\partial u}{\partial x})\} - \frac{\tau^2}{16} \{-32\epsilon_x (\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 96u^2 \frac{\partial u}{\partial x}\} + \\ + \frac{\tau^2 h}{32} \{288u (\frac{\partial u}{\partial x})^2\} - \frac{\tau h^2}{16} \{-16 (\frac{\partial u}{\partial x})^2\} - \frac{\tau^2 h^2}{64} \{224 (\frac{\partial u}{\partial x})^3\} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{geen oplossing als } |u| > 0,4 \text{ ms}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_z + \frac{k}{2} w - \frac{k^2}{4} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\tau}{4} \{2\epsilon_z (\frac{\partial w}{\partial z})\} + \frac{\tau k}{8} \{-8w (\frac{\partial w}{\partial z})\} - \frac{\tau^2}{16} \{32w^2 (\frac{\partial w}{\partial z})\} + \\ + \frac{\tau^2 k}{32} \{60w (\frac{\partial w}{\partial z})^2\} - \frac{\tau k^2}{16} \{-6 (\frac{\partial w}{\partial z})^2\} - \frac{\tau^2 k^2}{64} \{28w (\frac{\partial w}{\partial z})^2\} + \\ + \epsilon_z \frac{\tau^2}{16} \{28w \frac{\partial w}{\partial z}\} > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tau < 2500 \text{ s}$$

Schema G: Het stabiliteitscriterium luidt:

$$\tau \leq 2 \frac{\left(\frac{\epsilon_x}{h^2} + \frac{\epsilon_z}{k^2}\right)}{\left(\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k}\right)^2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k}\right)^2}{4 \left(\frac{\epsilon_x}{h^2} + \frac{\epsilon_z}{k^2}\right)^2}} - 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \tau \leq 5 \text{ s}$$

Het heuristisch criterium luidt:

$$\epsilon_x - h^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \epsilon_x \left(6 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 700 \text{ s}$$

$$\varepsilon_z - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \tau \varepsilon_z \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) > 0$$

$$\Rightarrow \tau < 4000 \text{ s}$$

#### 4.2 Conclusies naar aanleiding van het praktische voorbeeld

Blijkens de resultaten van het praktische voorbeeld komen vier schema's in aanmerking voor het oplossen van dit probleem, te weten de schema's D, D<sup>1</sup>, E en G. Van deze schema's hebben D, D<sup>1</sup> en G het voordeel dat ze expliciet zijn, dus makkelijk hanteerbaar bij het programmeren. Bovendien zijn de schema's D en G conservatief, wat gunstig is in verband met de lokale opeenhoping van fouten [1]. Het stabiliteitscriterium geeft voor de schema's D, D<sup>1</sup> en G een vrij stringente beperking, zodat voor het doorrekenen van langere perioden vrij veel tijdstapjes nodig zijn, zeker als zou blijken dat met een nog fijner netwerk gerekend moet worden dan in het praktische voorbeeld. Wellicht is deze beperking bij de schema's D en D<sup>1</sup> echter te omzeilen door één impliciete stap te doen in de z-richting, en de overige stappen expliciet, waarbij de grootte van de fout voor de impliciestap van de zelfde orde zou moeten zijn als voor het expliciete deel. Schema E is impliciet en daardoor onbeperkt stabiel mits  $\Theta \geq \frac{1}{2}$ . Hier geeft het heuristische stabiliteitscriterium wel een beperking, maar als wordt geeist dat de numerieke diffusie niet meer dan 10% van de fysische diffusie mag zijn, worden nog altijd tijdstappen toegestaan die een factor 10 groter zijn dan voor schema D of D<sup>1</sup>. Verder is het wellicht aan te raden ook dit schema te splitsen. Dit introduceert weliswaar extra moeilijkheden voor de randen, maar het oplossen van een aantal tridiagonale matrices gaat veel makkelijker en ook sneller dan het oplossen van één grote penta diagonale matrix.

Rekening houdend met het extra werk dat verricht moet worden om het impliciete stelsel op te lossen, is schema E ongeveer een factor 3 sneller dan de schema's D, D<sup>1</sup> en G wat een betrekkelijk klein verschil is.

Indien voor de schema's D en D<sup>1</sup> met één impliciete tijdstap wordt gewerkt, worden de schema's D, D<sup>1</sup> en E ongeveer even snel.

In dat geval moeten punten als nauwkeurigheid, conservatief zijn en aanpassing aan de randvoorwaarden uitwijzen welk schema het geschikste is. A priori is over deze punten echter geen uitsluitsel te geven, zodat bij de eigenlijke numerieke berekeningen pas een definitieve keuze gemaakt kan worden.



## LITERATUUR

- 1 Cheng, S.I., A critical review of the numerical solution of Navier-Stokes equations. Progress in numerical fluid dynamics, Von Karmen Institute for fluid dynamics, lecture series 63, februari 1974.
- 2 Hamilton, J.E., A numerical model of the vertical circulation of tidal estuaries and its application to the Rotterdam Waterway. Seattle, Univ. of Washington. Dept. of Oceanography, 1973.
- 3 Hirt, C.W., Heuristic stability theory for finite difference equations. Journal of Comp. Phys., deel 2, no. 4, pp. 339-355, juni 1968.
- 4 Jamet, P., Lascaux, P., Raviart, P.A., Une methode de resolution numerique des equations de Navier-Stokes. Numer. Math. 16, pp. 93-114, 1970, Springer - Verlag.
- 5 Leendertse, J.J., Alexander, R.C., Liu, S., A three-dimensional model for estuaries and coastal seas: volume I, principles of computation. Rond, Santa Monica, R-1417-OWRR, december 1973.
- 6 Overland, J.E., A model of salt intrusion in a partially mixed estuary. New York, Institute of Ocean Resources, Tech. Report 73-1, 1973.
- 7 Raviart, P.A., Sur l'approximation des certaines equations d'evolution linéaires et non-linéaire. Journ. de math. pures et appl., 46, pp 11-107, 1967.
- 8 Richtmyer, R.D., Morton, K.W., Difference methods for initial value problems. New York, Interscience Publishers, 1967.
- 9 Roache, P.J., Computational fluid dynamics. Albuquerque, Hermosa Publishers, 1972.
- 10 Teman, R., Une methode d'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes. Parijs, Bul. de la soc. math. de France, 96, pp 115-152, 1968.
- 11 Waterloopkundig Laboratorium Delft, Computational methods for the vertical distribution of flow in shallow water. Literatuurstudie. W 152, augustus, 1973.

- 12 Waterloopkundig Laboratorium Delft, R 880, december 1974.
- 13 Verboom, G.K., Een numerieke methode voor het oplossen van de twee-dimensionale advectie-dispersie vergelijking. Waterloopkundig Laboratorium Delft, Speurwerkverslag, S 132 - IV, december 1973.
- 14 Verboom, G.K., Numerical methods for the two-dimensional advection-dispersion equation; a comparative study. Delft Hydraulics Laboratory, S 132 - IVV, Delft verschijnt 1975,

appendix

APPENDIX

Inleiding

In deze appendix worden de afleidingen gegeven van de resultaten vermeld in hoofdstuk 3.2.

In A worden de afbreekfouten afgeleid, in B volgt een stabiliteitsanalyse m.b.v. de energiemethode en in C volgt een heuristische stabiliteitsanalyse.

A: Afbreekfout [9]

Schema A: De differentiaal vergelijking is:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Het differentieschema is:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + u_{i,j}^n \frac{(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n)}{2h} + w_{i,j}^n \frac{(u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n)}{2k} + \\ & - \epsilon_x \frac{(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)}{h^2} - \epsilon_z \frac{(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n)}{k^2} = \\ & = - \frac{1}{\rho} \frac{(p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n)}{2h} \end{aligned}$$

Substitutie van  $u_{i+1,j+1}^{n+1} = e^{\tau D_t} e^{hD_x} e^{kD_z} u_{i,j}^n$  enz. geeft:

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{e^{\tau D_t} - 1}{\tau} u_{i,j}^n \right\} + u_{i,j}^n \left\{ \frac{e^{hD_x} - e^{-hD_x}}{2h} \right\} + w_{i,j}^n \left\{ \frac{e^{kD_z} - e^{-kD_z}}{2k} \right\} u_{i,j}^n + \\ & - \epsilon_x \left\{ \frac{e^{hD_x} - 2 + e^{-hD_x}}{h^2} \right\} u_{i,j}^n - \epsilon_z \left\{ \frac{e^{kD_z} - 2 + e^{-kD_z}}{k^2} \right\} u_{i,j}^n = \\ & = - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{e^{hD_x} - e^{-hD_x}}{2h} \right\} p_{i,j}^n \end{aligned}$$

A2

Substitutie van  $e^{\tau D_t} = 1 + \tau D_t + \frac{\tau^2}{2} D_t^2$  enz. geeft:

$$\begin{aligned} & (D_t + \frac{\tau}{2} D_t^2) u_{i,j}^n + u_{i,j}^n \{ (D_x + \frac{h^2}{6} D_x^3) u_{i,j}^n \} + \\ & + w_{i,j}^n \{ (D_z + \frac{k^2}{6} D_z^3) u_{i,j}^n \} - \epsilon_x \{ (D_x^2 + \frac{h^2}{12} D_x^4) u_{i,j}^n \} + \\ & - \epsilon_z \{ (D_z^2 + \frac{k^2}{12} D_z^4) u_{i,j}^n \} = - \frac{1}{\rho} \{ (D_x + \frac{h^2}{6} D_x^3) p_{i,j}^n \} + \end{aligned}$$

Uitwerking levert:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + E$$

waarbij de afbreekfout E gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} E = & - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{6} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{k^2}{6} w \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{h^2}{12} \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{k^2}{12} \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \\ & - \frac{h^2}{6} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + 0 (\tau^2, h^4, k^4) \end{aligned}$$

Schema B: De differentiaal vergelijking is:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

het differentieschema is:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + \left\{ \frac{(u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n)}{2} u_{R1}^n - \frac{(u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)}{2} u_{L1}^n \right\} + \\ & + \left\{ \frac{(w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n)}{2} u_{R2}^n - \frac{(w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n)}{2} u_{L2}^n \right\} + \\ & - \epsilon_x \left\{ \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} \right\} - \epsilon_z \left\{ \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{k^2} \right\} = \end{aligned}$$

-A3-

$$= -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2h} \right\}$$

waarbij  $u_{R_1}^n = u_{i,j}^n$  als  $u_{i+1,j} + u_{i,j} \geq 0$

$u_{R_1}^n = u_{i+1,j}^n$  als  $u_{i+1,j} + u_{i,j} < 0$

$u_{L_1}^n = u_{i-1,j}^n$  als  $u_{i,j} + u_{i-1,j} \geq 0$

$u_{L_1}^n = u_{i,j}^n$  als  $u_{i,j} + u_{i-1,j} < 0$

analoog voor  $u_{R_2}$  en  $u_{L_2}$

Stel  $u_{i+1,j} + u_{i,j}$ ,  $u_{i,j} + u_{i-1,j}$ ,  $w_{i,j+1} + w_{i,j}$  en  $w_{i,j} + w_{i,j-1} > 0$ , dan volgt:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + \left\{ \frac{\left(\frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2}\right) u_{i,j}^n - \left(\frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2}\right) u_{i-1,j}^n}{h} \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\left(\frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n}{2}\right) u_{i,j}^n - \left(\frac{w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{2}\right) u_{i,j-1}^n}{k} \right\} + \\ & - \epsilon_x \left\{ \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} \right\} - \epsilon_z \left\{ \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{k^2} \right\} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2h} \right\} \end{aligned}$$

Substitutie van  $u_{i+1,j+1}^{n+1} = e^{\tau D_t} e^{h D_x} e^{k D_z} u_{i,j}^n$  enz. geeft:

$$\frac{(e^{\tau D_t} - 1)}{\tau} u_{i,j}^n =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \frac{\{(e^{hD_x} + 1) u_{i,j}^n\} u_{i,j}^n - \{(1 + e^{-hD_x}) u_{i,j}^n\} \{(e^{-hD_x}) u_{i,j}^n\}}{2h} + \\
 & - \frac{\{(e^{kD_z} + 1) w_{i,j}^n\} u_{i,j}^n - \{(1 + e^{-kD_z}) w_{i,j}^n\} \{(e^{-kD_z}) u_{i,j}^n\}}{2k} + \\
 & + \epsilon_x \left\{ \frac{(e^{hD_x} - 2 + e^{-hD_x})}{h^2} u_{i,j}^n \right\} + \epsilon_z \left\{ \frac{(e^{kD_z} - 2 + e^{-kD_z})}{k^2} u_{i,j}^n \right\} + \\
 & - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{(e^{hD_x} - e^{-hD_x})}{2h} p_{i,j}^n \right\}
 \end{aligned}$$

Substitueer  $e^{\tau D_t} = 1 + \tau D_t + \frac{\tau^2}{2} D_t^2$  enz., volgt:

$$\begin{aligned}
 (D_t + \frac{\tau}{2} D_t^2) u_{i,j}^n &= - \left\{ \frac{(1 + \frac{h}{2} D_x + \frac{h^2}{4} D_x^2)}{h} u_{i,j}^n \right\} u_{i,j}^n + \\
 & + \left\{ \frac{(1 - \frac{h}{2} D_x + \frac{h^2}{4} D_x^2)}{h} u_{i,j}^n \right\} \{(1 - hD_x + \frac{h^2}{2} D_x^2) u_{i,j}^n\} + \\
 & - \left\{ \frac{(1 + \frac{k}{2} D_z + \frac{k^2}{4} D_z^2)}{k} w_{i,j}^n \right\} u_{i,j}^n + \\
 & + \left\{ \frac{(1 - \frac{k}{2} D_z + \frac{k^2}{4} D_z^2)}{k} w_{i,j}^n \right\} \{(1 - kD_z + \frac{k^2}{2} D_z^2) u_{i,j}^n\} + \\
 & + \epsilon_x \{(D_x^2 + \frac{h^2}{12} D_x^4) u_{i,j}^n\} + \epsilon_z \{(D_z^2 + \frac{k^2}{12} D_z^4) u_{i,j}^n\} + \\
 & - \frac{1}{\rho} \{(D_x + \frac{h^2}{6} D_x^3) p_{i,j}^n\}
 \end{aligned}$$

Uitwerking levert:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial wu}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + E$$

waarbij de afbreekfout E gegeven wordt door:

$$\begin{aligned}
 E = & -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} + \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ w \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} - \frac{h^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\
 & - \frac{k^2}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} - \frac{h^2}{6} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{k^2}{6} u \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \frac{h^2}{12} \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \\
 & + \frac{k^2}{12} \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{h^2}{6} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + 0 \quad (\tau^2, h^4, k^4)
 \end{aligned}$$

Opmerking: Indien  $u_{i+1,j} + u_{i,j} > 0 \Rightarrow u_{R_1}^n = u_{i,j}^n$   
 en  $u_{i,j} + u_{i-1,j} < 0 \Rightarrow u_{L_1}^n = u_{i,j}^n$

De term  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  uit de differentiaal vergelijking wordt dan in de differentie vergelijking benaderd door:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{(u_{i+1,j} + u_{i,j})}{2} u_{i,j} - \frac{(u_{i,j} + u_{i-1,j})}{2} u_{i,j} \right\} = \\
 & = \left( \frac{u_{i+1,j} + u_{i,j} - u_{i,j} - u_{i-1,j}}{2h} \right) u_{i,j} = \\
 & = u_{i,j} \left( \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} \right)
 \end{aligned}$$

en deze term is niet consistent met  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Dergelijke situaties ontstaan als

$$(u_{i+1,j} + u_{i,j}) (u_{i,j} + u_{i-1,j}) < 0 \text{ of als}$$

$$(w_{i,j+1} + w_{i,j}) (w_{i,j} + w_{i,j-1}) < 0.$$

In die gevallen moet de stapgrootte dus aangepast worden.



Schema C: De differentiaal vergelijking is:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

het differentieschema is:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + \frac{(u_{i+1,j}^n)^2 - (u_{i-1,j}^n)^2}{2h} + \frac{w_{i,j+1}^n u_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n u_{i,j-1}^n}{2k} \\ & - \epsilon_x \frac{(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)}{h^2} - \epsilon_z \frac{(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n)}{k^2} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2h} \end{aligned}$$

Substitutie van  $u_{i-1,j+1}^{n+1} = e^{\tau D_t} e^{hD_x} e^{kD_z} u_{i,j}^n$  enz. geeft:

$$\begin{aligned} & \frac{(e^{\tau D_t} - 1)}{\tau} u_{i,j}^n + \\ & + \left[ \frac{\{(e^{hD_x} u_{i,j}^n)\} \{(e^{hD_x} u_{i,j}^n)\} - \{(e^{-hD_x} u_{i,j}^n)\} \{(e^{-hD_x} u_{i,j}^n)\}}{2h} \right] + \\ & + \left[ \frac{\{(e^{kD_z} w_{i,j}^n)\} \{(e^{kD_z} u_{i,j}^n)\} - \{(e^{-kD_z} w_{i,j}^n)\} \{(e^{-kD_z} u_{i,j}^n)\}}{2k} \right] + \\ & - \epsilon_x \left\{ \frac{(e^{hD_x} - 2 + e^{-hD_x})}{h^2} u_{i,j}^n \right\} - \epsilon_z \left\{ \frac{(e^{kD_z} - 2 + e^{-kD_z})}{k^2} u_{i,j}^n \right\} = \\ & = -\frac{1}{\rho} \left\{ \frac{(e^{hD_x} - e^{-hD_x})}{2h} p_{i,j}^n \right\} \end{aligned}$$

-A7-

Substitutie van  $e^{\tau D_t} = 1 + \tau D_t + \frac{\tau^2}{2} D_t^2$  enz. geeft:

$$\begin{aligned}
 & (D_t + \frac{\tau}{2} D_t^2) u_{i,j}^n + \\
 & + \left[ \frac{\{(1 + hD_x + \frac{h^2}{2} D_x^2) u_{i,j}^n\}^2 - \{(1 - hD_x + \frac{h^2}{2} D_x^2) u_{i,j}^n\}^2}{2h} \right] + \\
 & + \left[ \frac{\{(1 + kD_z + \frac{k^2}{2} D_z^2) w_{i,j}^n\} \{(1 + kD_z + \frac{h^2}{2} D_z^2) u_{i,j}^n\} - \{(1 - kD_z + \frac{k^2}{2} D_z^2) w_{i,j}^n\} \{(1 - kD_z + \frac{k^2}{2} D_z^2) u_{i,j}^n\}}{2h} \right] + \\
 & - \epsilon_x \{(D_x^2 + \frac{h^2}{12} D_x^4) u_{i,j}^n\} - \epsilon_z \{(D_z^2 + \frac{k^2}{12} D_z^4) u_{i,j}^n\} = \\
 & = - \frac{1}{\rho} \{(D_x + \frac{h^2}{6} D_x^3) p_{i,j}^n\}
 \end{aligned}$$

Uitwerking levert:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + E$$

waarbij E gegeven wordt door:

$$E = - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} +$$

-A8-

$$+ \epsilon_x \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \epsilon_z \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{1}{\rho} \frac{h^2}{5} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + 0 \quad (\tau^2, h^4, k^4)$$

Schema D: De differentiaal vergelijking in gesplitste vorm is:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Het differentieschema in de x-richting is:

$$\frac{1}{2} \frac{(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n)}{\frac{1}{2}\tau} + \frac{(u_{i+1,j}^n)^2 - (u_{i-1,j}^n)^2}{2h} +$$

$$- \epsilon_x \frac{(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)}{h^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{(p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n)}{2h}$$

Substitutie van  $u_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\tau D_t} e^{hD_x} u_{i,j}^n$  enz. geeft:

$$\frac{1}{2} \frac{(e^{\frac{1}{2}\tau D_t} - 1)}{\frac{1}{2}\tau} u_{i,j}^n + \left\{ \frac{(e^{hD_x} u_{i,j}^n)^2 - (e^{-hD_x} u_{i,j}^n)^2}{2h} \right\} +$$

$$- \epsilon_x \frac{(e^{hD_x} - 2 + e^{-hD_x})}{h^2} u_{i,j}^n = - \frac{1}{\rho} \frac{(e^{hD_x} - e^{-hD_x})}{2h} p_{i,j}^n$$

Substitutie van  $e^{\frac{1}{2}\tau D_t} = 1 + \frac{1}{2}\tau D_t + (\frac{1}{2}\tau)^2 D_t^2$  enz. geeft:

$$\frac{1}{2} (D_t + \frac{\tau}{4} D_t^2) u_{i,j}^n +$$

$$+ \left[ \frac{\{(1 + hD_x + \frac{h^2}{2} D_x^2) u_{i,j}^n\}^2 - \{(1 - hD_x + \frac{h^2}{2} D_x^2) u_{i,j}^n\}^2}{2h} \right] +$$

$$- \epsilon_x \left\{ (D_x^2 + \frac{h^2}{12} D_x^4) u_{i,j}^n \right\} = - \frac{1}{\rho} (D_x + \frac{h^2}{6} D_x^3) p_{i,j}^n$$

Uitwerking levert:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + E_x$$

waarbij  $E_x$  gegeven wordt door:

$$E_x = - \frac{\tau}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - h^2 \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + \epsilon_x \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{1}{\rho} \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + 0 (\tau^2, h^4)$$

Analoog volgt voor de z-richting:

$$E_z = - \frac{\tau}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} + \epsilon_z \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 0 (\tau^2, k^4)$$

Schema E: De differentiaal vergelijking is:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Het differentie schema is:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + u_{i,j}^n \left\{ \theta \frac{(u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1})}{2h} + (1-\theta) \frac{(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n)}{2h} \right\} + \\ & \quad + w_{i,j}^n \left\{ \theta \frac{(u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1})}{2k} + (1-\theta) \frac{(u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n)}{2k} \right\} + \\ & - \epsilon_x \left\{ \theta \frac{(u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1})}{h^2} + (1-\theta) \frac{(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)}{h^2} \right\} \\ & - \epsilon_z \left\{ \theta \frac{(u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1})}{k^2} + (1-\theta) \frac{(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n)}{k^2} \right\} = \end{aligned}$$

-A10-

$$= -\frac{1}{\rho} \left\{ \theta \frac{(p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1})}{2h} - (1-\theta) \frac{(p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n)}{2h} \right\}$$

Substitutie van  $u_{i+1,j+1}^{n+1} = e^{\tau D_t} e^{hD_x} e^{kD_z}$  enz. geeft:

$$\begin{aligned} & \frac{(e^{\tau D_t} - 1)}{\tau} u_{i,j}^n + \\ & + u_{i,j}^n \left[ \theta \left\{ e^{\tau D_t} \frac{(e^{hD_x} - e^{-hD_x})}{2h} u_{i,j}^n \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{(e^{hD_x} - e^{-hD_x})}{2h} u_{i,j}^n \right\} \right] + \\ & + w_{i,j}^n \left[ \theta \left\{ e^{\tau D_t} \frac{(e^{kD_z} - e^{-kD_z})}{2k} u_{i,j}^n \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{(e^{kD_z} - e^{-kD_z})}{2k} u_{i,j}^n \right\} \right] + \\ & - \epsilon_x \left[ \theta \left\{ e^{\tau D_t} \frac{(e^{hD_x} - 2 + e^{-hD_x})}{h^2} u_{i,j}^n \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{(e^{hD_x} - 2 + e^{-hD_x})}{h^2} u_{i,j}^n \right\} \right] + \\ & - \epsilon_z \left[ \theta \left\{ e^{\tau D_t} \frac{(e^{kD_z} - 2 + e^{-kD_z})}{k^2} u_{i,j}^n \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{(e^{kD_z} - 2 + e^{-kD_z})}{k^2} u_{i,j}^n \right\} \right] = \\ & = -\frac{1}{\rho} \left[ \theta \left\{ e^{\tau D_t} \frac{(e^{hD_x} - e^{-hD_x})}{2h} p_{i,j}^n \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{(e^{hD_x} - e^{-hD_x})}{2h} p_{i,j}^n \right\} \right] \end{aligned}$$

-A11-

Substitutie van  $e^{\tau D_t} = 1 + \tau D_t + \frac{\tau^2}{2} D_t^2$  enz. geeft:

$$\begin{aligned}
 & (D_t + \frac{\tau}{2} D_t^2) u_{i,j}^n + \\
 & + u_{i,j}^n \{ (1 + \tau D_t + \theta \frac{\tau^2}{2} D_t^2) (D_x + \frac{h^2}{6} D_x^3) \} + \\
 & + w_{i,j}^n \{ (1 + \tau D_t + \theta \frac{\tau^2}{2} D_t^2) (D_z + \frac{k^2}{6} D_z^3) \} + \\
 & - \epsilon_x \{ (1 + \tau D_t + \theta \frac{\tau^2}{2} D_t^2) (D_x^2 + \frac{h^2}{12} D_x^4) \} + \\
 & - \epsilon_z \{ (1 + \tau D_t + \theta \frac{\tau^2}{2} D_t^2) (D_z^2 + \frac{k^2}{12} D_z^4) \} = \\
 & = - \frac{1}{\rho} \{ (1 + \tau D_t + \theta \frac{\tau^2}{2} D_t^2) (D_x + \frac{h^2}{6} D_x^3) p_{i,j}^n \}
 \end{aligned}$$

Uitwerking levert:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + E$$

waarbij E gegeven wordt door:

$$\begin{aligned}
 E = & (1 - 2\theta) \frac{\tau}{2} \left\{ u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} \right\} + \\
 & - \theta \frac{\tau^2}{2} \left\{ u \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + w \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial t^2 \partial x} \right\} +
 \end{aligned}$$

-A12-

$$\begin{aligned}
& -\frac{h^2}{6} u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{k^2}{6} w \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \epsilon_x \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \epsilon_z \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{1}{\rho} \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + \\
& + \frac{\tau}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} + 0 (\tau^2, \tau h^2, h^4, \tau k^2, k^4)
\end{aligned}$$

Schema F: Het stelsel differentiaal vergelijkingen is:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial x} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

Het differentieschema in de x-richting is:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{(u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i,j}^n)}{\frac{1}{2}\tau} + \\
& + \theta \left[ \frac{\left\{ \left( \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_1}^{n+\frac{1}{2}} \right\} - \left\{ \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2} \right) u_{L_1}^{n+\frac{1}{2}} \right\}}{h} \right] + \\
& + (1-\theta) \left[ \frac{\left\{ \left( \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_1}^n \right\} - \left\{ \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2} \right) u_{L_1}^n \right\}}{h} \right] + \\
& - \epsilon_x \left[ \theta \left\{ \frac{(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)}{h^2} \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)}{h^2} \right\} \right] = \\
& = -\frac{1}{\rho} \frac{(p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n)}{2h}
\end{aligned}$$

Evenals bij B wordt verondersteld dat  $(u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n) > 0$  en

$$(u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n) > 0, \text{ m.a.w. } u_{R_1} = u_{i,j} \text{ en } u_{L_1} = u_{i-1,j}.$$

Substitutie van  $u_{i+1,j+1}^{n+1} = e^{\tau D_t} e^{hD_x} e^{kD_z}$  enz. levert dan:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{e^{\tau D_t} - 1}{\tau} u_{i,j}^n \right\} + \\
 & + \theta \left[ \frac{\left( \frac{e^{hD_x} + 1}{2} \right) u_{i,j}^n \left\{ \left( e^{\frac{\tau}{2} D_t} \right) u_{i,j}^n \right\} - \left( \frac{e^{hD_x} + 1}{2} \right) u_{i,j}^n \left\{ \left( e^{\frac{\tau}{2} D_t} e^{-hD_x} \right) u_{i,j}^n \right\}}{h} \right] + \\
 & + (1-\theta) \left[ \frac{\left\{ \left( \frac{e^{hD_x} + 1}{2} \right) u_{i,j}^n \right\} \left\{ u_{i,j}^n \right\} - \left\{ \left( \frac{1 + e^{-hD_x}}{2} \right) u_{i,j}^n \right\} \left\{ \left( e^{-hD_x} \right) u_{i,j}^n \right\}}{h} \right] + \\
 & - \epsilon_x \left[ \theta \left\{ e^{\frac{k}{2} D_t} \frac{e^{hD_x} - 2 + e^{-hD_x}}{h^2} u_{i,j}^n \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{e^{hD_x} - 2 + e^{-hD_x}}{h^2} u_{i,j}^n \right\} \right] = \\
 & - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{e^{hD_x} - e^{-hD_x}}{2h} p_{i,j}^n \right\}
 \end{aligned}$$

Substitutie van  $e^{\tau D_t} = 1 + \tau D_t + \frac{\tau^2}{2} D_t^2$  enz. geeft:

$$\begin{aligned}
 & \left( \frac{D_t}{2} + \frac{\tau}{8} D_t^2 \right) u_{i,j}^n + \\
 & + \frac{\theta}{h} \left[ \left\{ \left( 1 + \frac{h}{2} D_x + \frac{h^2}{4} D_x^2 \right) u_{i,j}^n \right\} \left\{ \left( 1 + \frac{\tau}{2} D_t + \frac{\tau^2}{8} D_t^2 \right) u_{i,j}^n \right\} - \right. \\
 & \left. - \left\{ \left( 1 - \frac{h}{2} D_x + \frac{h^2}{4} D_x^2 \right) u_{i,j}^n \right\} \left\{ \left( 1 + \frac{\tau}{2} D_t + \frac{\tau^2}{8} D_t^2 \right) \left( 1 - hD_x + \frac{h^2}{2} D_x^2 \right) u_{i,j}^n \right\} \right] + \\
 & + \frac{(1-\theta)}{h} \left[ \left\{ \left( 1 + \frac{h}{2} D_x + \frac{h^2}{4} D_x^2 \right) u_{i,j}^n \right\} \left\{ u_{i,j}^n \right\} + \right. \\
 & \left. - \left\{ \left( 1 - \frac{h}{2} D_x + \frac{h^2}{4} D_x^2 \right) u_{i,j}^n \right\} \left\{ \left( 1 - hD_x + \frac{h^2}{2} D_x^2 \right) u_{i,j}^n \right\} \right] +
 \end{aligned}$$



-A14-

$$\begin{aligned}
& - \epsilon_x \left[ \theta \left\{ \left( 1 + \frac{\tau}{2} D_t + \frac{\tau^2}{8} D_t^2 \right) \left( D_x^2 + \frac{h^2}{12} D_x^4 \right) u_{i,j}^n \right\} + \right. \\
& \quad \left. + (1-\theta) \left\{ \left( D_x^2 + \frac{h^2}{12} D_x^4 \right) u_{i,j}^n \right\} \right] = \\
& = - \frac{1}{\rho} \left\{ \left( D_x + \frac{h^2}{6} D_x^3 \right) p_{i,j}^n \right\}
\end{aligned}$$

Uitwerking geeft:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + E_x$$

waarbij  $E_x$  gegeven wordt door:

$$\begin{aligned}
E_x = & \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right\} + \theta \frac{\tau h}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right\} + \\
& - \theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right\} + \theta \frac{\tau^2 h}{16} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right) \right\} + \\
& - \frac{\theta \tau^2 h}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right\} + \theta \frac{\tau^2 h^2}{32} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right) \right\} + \\
& + \theta \frac{\tau h^3}{16} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right\} + \theta \frac{\tau^2 h^3}{64} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \right\} + \theta \epsilon_x \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} + \\
& + \frac{h}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} - \frac{h^2}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} + \frac{h^3}{8} \left\{ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 \right\} + \epsilon_x \frac{h^2}{12} \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right\} + \\
& - \frac{h^2}{6} \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} + 0 \left( \tau^2, h^4, k^4 \right)
\end{aligned}$$

Het differentieschema in de z-richting is:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} + \theta \left\{ \frac{\left( \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_1}^{n+1} - \left( \frac{w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{2} \right) u_{L_1}^{n+1}}{k} \right\} + \\ & + (1-\theta) \left\{ \frac{\left( \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_1}^{n+\frac{1}{2}} - \left( \frac{w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{2} \right) u_{L_1}^{n+\frac{1}{2}}}{k} \right\} + \\ & - \epsilon_z \left\{ \theta \frac{(u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1})}{k^2} + (1-\theta) \frac{(u_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}})}{k^2} \right\} = 0 \end{aligned}$$

Op analoge wijze als voor de x-richting volgt:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 + E_z$$

waarbij  $E_z$  gegeven wordt door:

$$\begin{aligned} E_z = & (\frac{1}{2}-\theta) \frac{\tau}{2} \left\{ w \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \right) - \epsilon_z \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \right) \right\} + \frac{\tau}{4} \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \theta \frac{\tau}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + \\ & + \theta \frac{\tau k}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \right) \right\} - \theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right\} + \\ & + \theta \frac{\tau^2 k}{16} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z} \right) \right\} - \theta \frac{\tau k^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \right) \right\} + \\ & - \theta \frac{\tau^2 k^2}{32} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z} \right) \right\} + \theta \frac{\tau k^3}{16} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \right\} + \end{aligned}$$

-A16-

$$\begin{aligned}
& + \frac{\tau^2 h^3}{64} \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right\} + \Theta \epsilon_z \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial z^2} + \epsilon_z \frac{k^2}{12} \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} \right\} + \frac{k}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} + \\
& - \frac{k^2}{4} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} + \frac{k^3}{8} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 0 (\tau^2, h^4, k^4)
\end{aligned}$$

chema G: De differentiaal vergelijking is:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uw}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

Het differentieschema wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1}}{2\tau} &= - \left\{ \frac{\left( \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \right)^2 - \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2} \right)^2}{h} \right\} + \\
& - \left\{ \frac{\left( \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j}^n}{2} \right) \left( \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n}{2} \right) - \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{2} \right) \left( \frac{w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{2} \right)}{k} \right\} + \\
& + \epsilon_x \left\{ \frac{u_{i+1,j}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^{n-1}}{h^2} \right\} + \epsilon_z \left\{ \frac{u_{i,j+1}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i,j-1}^{n-1}}{k^2} \right\} + \\
& - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{p_{i+1}^n - p_{i-1}^n}{2h} \right\}
\end{aligned}$$

Substitutie van  $u_{i+1,j+1}^{n+1} = e^{\tau D_t} e^{hD_x} e^{kD_z} u_{i,j}^n$  geeft:

$$\begin{aligned}
\frac{(e^{\tau D_t} - e^{-\tau D_t})}{2\tau} u_{i,j}^n &= - \left\{ \frac{(e^{hD_x} + 2 + e^{-hD_x})}{2} u_i^n \frac{(e^{hD_x} - e^{-hD_x})}{2h} u_i^n \right\} + \\
& - \left\{ \frac{(e^{hD_x+1})}{2} u_{i,j}^n \frac{(e^{hD_x+1})}{2} w_{i,j}^n - \frac{(1+e^{-hD_z})}{2} u_{i,j}^n \frac{(1+e^{-hD_x})}{2} w_{i,j}^n \right\} +
\end{aligned}$$

-A17-

$$\begin{aligned}
& + \epsilon_x \left\{ \frac{e^{hD_x} - 2 + e^{-hD_x}}{h^2} (e^{-\tau D_t}) u_{i,j}^n \right\} + \\
& + \epsilon_z \left\{ \frac{e^{hD_x} - 2 + e^{-kD_x}}{k^2} (e^{-\tau D_t}) u_{i,j}^n \right\} + \\
& - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{e^{hD_x} - e^{-hD_x}}{2h} p_i^n \right\}
\end{aligned}$$

Substitutie van  $e^{\tau D_t} = 1 + \tau D_t + \frac{\tau^2}{2} D_t^2 + \dots$  enz. geeft:

$$\begin{aligned}
(D_t + \frac{\tau^2}{6} D_t^3) u_i^n &= - \left\{ (2 + \frac{h^2}{2} D_x^2) u_i^n (D_x + \frac{h^2}{6} D_x^3) u_i^n \right\} + \\
& - \left\{ (1 + \frac{k^2}{2} D_z^2) u_i^n (D_z) w_i^n + (1 + \frac{k^2}{2} D_z^2) w_i^n (D_z) u_i^n \right\} + \\
& + \epsilon_x \left\{ (D_x^2 + \frac{h^2}{12} D_x^4) (1 - \tau D_t + \frac{\tau^2}{2} D_t^2) u_{i,j}^n \right\} + \\
& + \epsilon_z \left\{ (D_z^2 + \frac{h^2}{12} D_z^4) (1 - \tau D_t + \frac{\tau^2}{2} D_t^2) u_{i,j}^n \right\} + \\
& - \frac{1}{\rho} (D_x + \frac{h^2}{6} D_x^3) p_i^n
\end{aligned}$$

Uitwerking levert:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial u w}{\partial x} + \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + E$$

waarbij E gegeven wordt door:

$$\begin{aligned}
E &= - \frac{\tau^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} - \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} + \\
& + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \tau \left\{ \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t z^2} \right\} + 0 (\tau^2, h^4, k^4)
\end{aligned}$$

## B Stabiliteitsanalyse [4], [7], [10]

### B.1 Definities en begrippen

Vanwege het niet-lineaire karakter van de differentiaal vergelijking wordt bij de stabiliteitsanalyse gebruik gemaakt van de energiemethode. Daartoe worden eerst de volgende ruimtes en begrippen gedefiniëerd.

Zij  $\Omega$  een open begrensde gebied in  $\mathbb{R}^m$ , met rand  $\Gamma$ , zodanig dat de stelling van Green geldt. Beschouw slechts functies met reële waarden en noem  $H^1(\Omega)$  de Sobolevruimte van de eerste orde.  $H^1_0(\Omega)$  is de deelruimte van  $H^1(\Omega)$  waarvan de functies nul zijn op de rand  $\Gamma$  van  $\Omega$ .

$$\text{Definities: } L_2(\Omega) = \{f \mid \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega < \infty\}$$

$$H^1(\Omega) = \{u \mid u \in L_2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega), i = 1, 2, \dots, m\}$$

$$H^1_0(\Omega) = \{u \mid u \in H^1(\Omega), u|_{\Gamma} = 0\}$$

$L_2(\Omega)$  en  $H^1_0(\Omega)$  zijn Hilbert ruimten, indien de volgende inwendige producten, respectievelijk normen gedefiniëerd worden:

$$\text{In } L_2(\Omega): \quad (f, g) = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx$$

$$\|f\|_{L_2} = (f, f)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{In } H^1_0(\Omega): \quad ((u, v)) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^m \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} d\mathbf{x}$$

$$\|u\|_{H^1_0} = ((u, u))^{\frac{1}{2}}$$

Verder bestaat er een constante  $E(\Omega)$ , zodanig dat

$$\|u\|_{L_2} \leq E(\Omega) \|u\|_{H^1_0} \text{ voor elke } u \in H^1_0(\Omega)$$

-B2-

Definitie: Zij  $b: (H^1_0)^3 \rightarrow \mathbb{R}^m$  een continue lineaire afbeelding.

Deze wordt gedefiniëerd door:

$$(u, v, w) \rightarrow b(u, v, w) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} u_i \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} w - v \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) dx$$

Opmerking: 1<sup>o</sup> Als  $v = w$ , dan geldt  $b(u, v, w) = 0$

$$2^o \quad b(u, v, w) = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} w dx, \text{ mits } \operatorname{div} u = 0.$$

Als  $\chi$  een Banachruimte is, dan noemt met  $C(0, T; \chi)$ , voor willekeurige  $T > 0$ , de ruimte van continue functies op  $[0, T]$  met functiewaarden in  $\chi$ ;  $L_p(0, T; \chi)$  ( $p \geq 1$ ) is de ruimte van functies, die  $L_p$  integreerbaar zijn op  $[0, T]$ , met waarden in  $\chi$ , m.a.w.

$$C(0, T; \chi) = \{u \mid \|u\|_{\chi} < \infty, \|u\|_{\chi} \text{ continue in } t, t \in [0, T]\}$$

$$L_p(0, T; \chi) = \{u \mid \int_0^T \|u(t)\|_{\chi}^p dt < \infty\}$$

Opmerking: Als  $p = \infty$  geldt:

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; \chi)} = \sup_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_{\chi}$$

Stelling van Cauchy - Schwartz (voor normen):

$$2\|u\| \|v\| \leq k \|u\|^2 + \frac{1}{k} \|v\|^2 \quad k > 0, \text{ willekeurig.}$$

## B.2 Probleemstelling

Er wordt gezocht naar een oplossing  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$ , van de vergelijking:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \epsilon_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} = f(x, t) \quad (1B)$$

met beginvoorwaarde:  $u(x, 0) = u_0, x \in \Omega$

-B3-

randvoorwaarden:  $u(x, t) = 0$  voor  $x \in \Gamma_1, t \in [0, T]$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial n} = 0 \quad x \in \Gamma_2, t \in [0, T]$$

Het probleem wordt nu als volgt beschreven:

Tracht voor gegeven  $u_0 \in L_2(\Omega), f \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$  een oplossing  $u$  te vinden met  $u \in L_2(0, T; H'_0(\Omega)) \cap L_\infty(0, T; L_2(\Omega))$  die voldoet aan:

$$\begin{aligned} \int_0^T \{- (u(t), \varphi'(t)) + ((\epsilon u(t), \varphi(t))) + b(u, u, \varphi)\} dt = \\ = \int_0^T (f(t), \varphi(t)) dt + (u_0, \varphi_0) \end{aligned} \quad (2B)$$

voor iedere  $\varphi$ , met  $\varphi \in C(0, T; H'_0(\Omega))$

$$\varphi' \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$$

$$\text{en } \varphi(T) = 0$$

- Opmerking: a Er kunnen nu ook discontinue functies toegelaten worden.  
 b (2B) kan verkregen worden uit (1B) door deze laatste met een functie  $\varphi$  te vermenigvuldigen en te integreren over het tijdsinterval  $[0, T]$  en het gebied  $\Omega$ .  
 c Een oplossing van (2B) wordt wel een zwakke oplossing van de partiële differentiaal vergelijking genoemd.

Van de vergelijking (2B) kan nu aangetoond worden, dat hij tenminste één oplossing  $u$  bezit en dat deze oplossing  $u$  voldoet aan de volgende energie ongelijkheid:

$$\|u\|_{L_\infty(0, T; L_2(\Omega))} + |E|_{L_\infty} \|u\|_{L_2(0, T; H'_0(\Omega))} \leq L(\epsilon, T, u_0, f) \quad (3B)$$

waarbij  $L$  gegeven wordt door:

$$L = 2 \|u_0\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{2 E^2(\Omega)}{|\epsilon|_{L^\infty}} \int_0^T \|f(t)\|_{L_2(\Omega)}^2 dt$$

De bedoeling van de energiemethode is nu om voor de gediscretiseerde ruimte ook een dergelijke energie ongelijkheid op te stellen, waarbij dan al of niet een aantal restricties volgen voor bepaalde discretisaties.

B.3 Benadering door eindige differenties

Stel  $h = (h_1, \dots, h_m)$  is de stapgrootte in de verschillende richtingen ( $h_i > 0$ ).

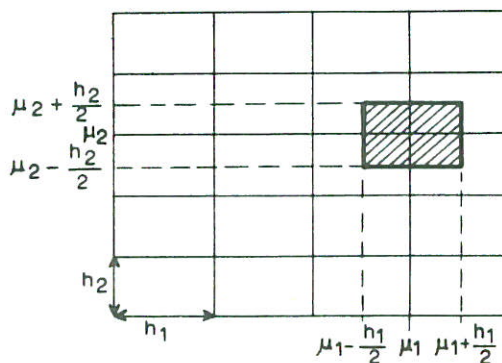
Er volgen nu enige definities:

$$R_h = \{x = (x_1, \dots, x_m) \in R^m \mid x_i = jh_i, \text{ met } j \text{ geheel}\}$$

$$\text{De tegel } \tau_h(M, o) = \prod_{j=1}^m \left(\mu_j - \frac{h_j}{2}, \mu_j + \frac{h_j}{2}\right)$$

$$\text{met } M = (\mu_1, \dots, \mu_m)$$

b.v. in de 2-dimensionale ruimte



$W_{hm}(x)$  is de karakteristieke functie van de tegel  $\tau_h(M, o)$

$$W_{hm}(x) = \begin{cases} 1 & \text{als } x \in \tau_h(M) \\ 0 & \text{als } x \notin \tau_h(M) \end{cases}$$

$\nabla_i$   $i = 1, 2, \dots, m$  is de eindige differentieoperator

$$\nabla_i \varphi(x) = \frac{\varphi(x + \vec{h}_i) - \varphi(x)}{h_i} \text{ met } \vec{h}_i = (0, 0, \dots, h_i, \dots, 0)$$



De verzameling  $\Omega_h$  wordt gedefiniëerd door:

$$\Omega_h = \{M \mid M \in R_h; \tau_h(M, o) \in \Omega\}$$

m.a.w. de verzameling van de middelpunten van die tegels die geheel binnen  $\Omega$  liggen.

$V_h$  is de verzameling van alle stapfuncties, constant op een tegel.

Zij  $\rho_h: L_2 \rightarrow V_h$  gedefiniëerd door  $\rho_h: u \rightarrow u_h$

$$\rho_h u(x) = u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_h} \frac{1}{\pi h_i^m} \int_{\tau_h(M, o)} u(x') dx' W_{hm}(x)$$

Op  $V_h$  worden de volgende scalaire produkten gedefiniëerd:

$$(u_h, v_h)_h = \int_{\Omega_h} u_h(x) v_h(x) dx$$

$$\text{met } |u_h|_h = (u_h, u_h)_h^{\frac{1}{2}}$$

$$((u_h, v_h))_h = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_h} (\nabla_i u_h(x)) (\nabla_i v_h(x)) dx$$

$$\text{met } ||u_h||_h = ((u_h, u_h))_h^{\frac{1}{2}}$$

Deze produkten definiëren een Hilbert ruimte. Daar  $V_h$  een eindige dimensie heeft, zijn de normen  $|u_h|_h$  en  $||u_h||_h$  equivalent. Men heeft dan de ongelijkheden

$$|u_h|_h \leq E_0 ||u_h||_h \quad \text{voor elke } u_h \in V_h \quad (E_0 \text{ is de diameter van } \Omega_h)$$

$$||u_h||_h \leq S(h) |u_h|_h$$

Opmerking:  $||u_h||_h^2 = \sum_i \int_{\Omega} \left\{ \frac{u(x + \vec{h}_i) - \bar{u}(x)}{h_i} \right\}^2 dx$

-B6-

$$\leq \sum_i \frac{1}{h_i^2} \int_{\Omega} \{2 u^2(x + \vec{h}_i) + 2 u^2(x)\} dx$$

$$\leq \sum_i \frac{4}{h_i^2} \int_{\Omega} u^2(x) dx = S^2(h) |u_h|_h^2$$

$$\text{met } S(h) = 2 \left\{ \sum_i \frac{1}{h_i^2} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$((\varepsilon u_h, v_h))_h = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_h} \varepsilon_i (\nabla_i u_h(x)) (\nabla_i v_h(x)) dx$$

$$((\varepsilon u_h, v_h))_h = \bar{\varepsilon} ((u_h, v_h))$$

Makkelijk valt in te zien dat:  $\min_i |\varepsilon_i| \leq |\bar{\varepsilon}| \leq \max_i |\varepsilon_i|$

Tenslotte wordt de tri-lineaire vorm gedefiniëerd:

$$b_h(u_h, v_h, w_h) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_h} \{ u_{ih} (\nabla_i v_h) w_h - v_h (\nabla_i w_h) \} d\Omega$$

$$\text{met } b_h(u_h, v_h, v_h) = 0$$

m.b.v. Gauss divergentie theorema volgt, mits  $\text{div } u_h = 0$

$$b_h(u_h, v_h, w_h) = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_h} u_{ih} \nabla_i v_h w_h dx$$

$$f_h^n = \frac{1}{\tau} \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} (\rho_n f)(s) ds \quad \text{met } n = 1, 2, \dots, N$$

$$\text{en } \tau = \frac{T}{N}$$

$$u_h^0 = \rho_h u_0$$

#### B.4 Stabiliteitsanalyse voor niet-conservatieve schema's

Achtereenvolgens zullen nu een aantal stabiliteitsbeschouwingen worden gegeven voor de verschillende differentieschema's, te beginnen met de schema's A en E, waarbij A als bijzonder geval van E wordt behandeld, nl. het geval:  $\theta = 0$ .

De differentie vergelijking wordt gegeven door:

$$\begin{aligned}
 & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + u_{i,j}^n \left\{ \theta \frac{(u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1})}{2h} + (1-\theta) \frac{(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n)}{2h} \right\} + \\
 & \quad + w_{i,j}^n \left\{ \theta \frac{(u_{i,j+1}^{n+1} - u_{i,j-1}^{n+1})}{2k} + (1-\theta) \frac{(w_{i,j+1}^n - w_{i,j-1}^n)}{2k} \right\} + \\
 & - \varepsilon_x \left\{ \theta \frac{(u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1})}{h^2} + (1-\theta) \frac{(u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n)}{h^2} \right\} \\
 & - \varepsilon_z \left\{ \theta \frac{(u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1})}{k^2} + (1-\theta) \frac{(u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n)}{k^2} \right\} = \\
 & = - \frac{1}{\rho} \left\{ \theta \frac{(p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1})}{2h} + (1-\theta) \frac{(p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n)}{2h} \right\}
 \end{aligned}$$

Vermenigvuldiging van de differentie vergelijking met een willekeurige functie  $v_h$  en integratie over het tijdsinterval  $[0, T]$  en het gebied  $\Omega_h$  geeft, mits bij homogene randvoorwaarden, na vervanging van  $u_{i,j}^n$  door  $u_h^n$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} (u_h^n - u_h^{n-1}, v_h)_h + ((\varepsilon (1-\theta) u_h^{n-1}, v_h))_h + ((\varepsilon \theta u_h^n, v_h))_h + \\ & + b_h (u_h^{n-1}, \theta u_h^n, v_h) + b_h (u_h^{n-1}, (1-\theta) u_h^{n-1}, v_h) = (f_h^n, v_h)_h \end{aligned} \quad (4B)$$

Vanwege de lineariteit van  $((\dots))_h$  en  $b_h(\dots)$  mag (4B) ook geschreven worden als:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} (u_h^{n-1} - u_h^n, v_h)_h + ((\varepsilon [\theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}], v_h))_h + \\ & + b_h (u_h^{n-1}, \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}, v_h) = (f_h^n, v_h)_h \end{aligned} \quad (5B)$$

Substitueer nu  $v_h = \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}$ , dan volgt met

$$b_h (u_h^{n-1}, \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}, \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}) = 0:$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} (u_h^n - u_h^{n-1}, (1-\theta) u_h^{n-1} + \theta u_h^n)_h + \bar{\varepsilon} \|\theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}\|_h^2 = \\ & = (f_h^n, \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1})_h \end{aligned} \quad (6B)$$

Algemeen geldt:  $2 (u_h^n, u_h^{n-1})_h = |u_h^n|_h^2 + |u_h^{n-1}|_h^2 - |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2$  waaruit volgt

$$\begin{aligned} 2 (u_h^n - u_h^{n-1}, (1-\theta) u_h^{n-1} + \theta u_h^n)_h &= 2 (u_h^n - u_h^{n-1}, \theta (u_h^n - u_h^{n-1}) + u_h^{n-1}) = \\ &= 2 \theta |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 + 2 (u_h^n, u_h^{n-1})_h + \\ & - 2 |u_h^{n-1}|_h^2 = \\ &= |u_h^n|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2 + (2\theta-1) |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 \end{aligned}$$

Substitutie in vergelijking (6B) geeft na vermenigvuldiging met  $2\tau$ :

$$|u_h^n|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2 + (2\theta-1) |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 + 2\tau \bar{\varepsilon} \|\theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}\|_h^2 =$$

-B9-

$$= 2\tau (f_h^n, \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1})_h \quad (7B)$$

De berekening valt nu uiteen in de volgende twee gevallen:

$$\underline{1^{\circ} \quad 2\theta - 1 \geq 0 \quad \text{m.a.w.} \quad \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1}$$

(4B) kan nu gemajoreerd worden door:

$$\begin{aligned} |u_h^n|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2 + 2\tau \bar{\varepsilon} \left| \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1} \right|_h^2 &\leq 2\tau |f_h^n|_h \left| \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1} \right|_h \\ &\leq 2\tau \theta |f_h^n|_h |u_h^n|_h + \\ &\quad + 2\tau (1-\theta) |f_h^n|_h |u_h^{n-1}|_h \end{aligned}$$

geeft na toepassing van Cauchy-Schwartz:

$$\begin{aligned} &\leq k_o \tau (1-\theta) |f_h^n|_h^2 + \\ &\quad + \frac{\tau}{k_o} (1-\theta) |u_h^{n-1}|_h^2 + \\ &\quad + k_o \tau \theta |f_h^n|_h^2 + \frac{\tau}{k_o} \theta |u_h^n|_h^2 \\ &\quad (k_o > 0, \text{ willekeurig}) \end{aligned}$$

volgt:

$$\begin{aligned} |u_h^n|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2 + 2\tau \bar{\varepsilon} \left| \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1} \right|_h^2 &\leq k_o \tau |f_h^n|_h^2 + \frac{\tau (1-\theta)}{k_o} |u_h^{n-1}|_h^2 + \\ &\quad + \frac{\theta \tau}{k_o} |u_h^n|_h^2 \quad (8B) \end{aligned}$$

Als (8B) gesommeerd wordt over  $n$ , lopend van 1 tot  $N$ , volgt:

$$\begin{aligned} |u_h^N|_h^2 + 2\tau \bar{\varepsilon} \sum_{n=1}^N \left| \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1} \right|_h^2 &\leq |u_h^0|_h^2 + k_o \tau \sum_{n=1}^N |f_h^n|_h^2 + \\ &\quad + \frac{\tau (1-\theta)}{k_o} \sum_{n=1}^N |u_h^{n-1}|_h^2 + \frac{\tau \theta}{k_o} \sum_{n=1}^N |u_h^n|_h^2 = \end{aligned}$$

-B10-

$$= |u_h^o|_h^2 + k_o \tau \sum_{n=1}^N |f_h^n|_h^2 + \frac{(1-\theta)}{k_o} \tau |u_h^o|_h^2 + \frac{\tau}{k_o} \sum_{n=1}^N |u_h^n|_h^2 - \frac{(1-\theta)}{k_o} \tau |u_h^N|_h^2$$

Verdere uitwerking geeft:

$$\begin{aligned} & |u_h^N|_h^2 + 2\tau \bar{\varepsilon} \sum_{n=1}^N \left| \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1} \right|_h^2 \leq \\ & \leq \left\{ 1 + \frac{(1-\theta)\tau}{k_o} \right\} |u_h^o|_h^2 + k_o \tau \sum_{n=1}^N |f_h^n|_h^2 + \frac{\tau}{k_o} \sum_{n=1}^N |u_h^n|_h^2 \end{aligned} \quad (9B)$$

(vgl. (3B) blz. B3)

Nu geldt volgens [4] de stelling van Gronwell:

Stelling: Zij  $\varphi_s$  een rij getallen met  $\varphi_s \geq 0$  en  $\varphi_0 < c_1$ , en geldt verder:

$$\varphi_s + \alpha_s \leq c + \delta \tau \sum_{r=0}^{s-1} \varphi_r \quad 0 \leq \tau s \leq T$$

met  $c > 0$ ,  $\delta > 0$  en  $\alpha_s \geq 0$ , dan volgt hieruit:

$$\varphi_s + \alpha_s \leq c \exp. (\delta \tau s) \leq c \exp. (\delta T)$$

Met dit resultaat kan de volgende stelling worden afgeleid:

Stelling: Zij  $\varphi_s$  en rij getallen met  $\varphi_s \geq 0$  en  $\varphi_0 < c_1$  en geldt verder:

$$\varphi_s + \beta_s \leq c + \delta \tau \sum_{r=1}^s \varphi_r \quad 0 \leq \tau s \leq T$$

met  $c > 0$ ,  $\delta > 0$  en  $\beta_s \geq 0$ , dan volgt hieruit:

$$\varphi_s + \beta_s \leq c \exp. (\delta \tau s) \leq c \exp. (\delta T) \quad (\tau < \frac{1}{\delta})$$

Als deze stelling wordt toegepast op (9B), dan volgt voor  $\tau < k_o$ :

$$|u_h^N|_h^2 + 2\tau \bar{\varepsilon} \sum_{n=1}^N \left| \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1} \right|_h^2 \leq c \exp. \left( \frac{T}{k_o} \right)$$

waarbij  $c$  gegeven wordt door:  $c = \{1 + \frac{(1-\theta) \tau}{k_0}\} |u_h^0|_h^2 + k_0 \tau \sum_{n=1}^N |f_h^n|_h^2$

Deze ongelijkheid levert de volgende afschattingen:

$$|u_h^n|_h^2 \leq c_2^2 \leq c \exp. \left(\frac{T}{k_0}\right) \quad , \quad c_2 = \text{constante} > 0 \quad (9B_2)$$

$$\tau \sum_{n=1}^N \left| \left[ \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1} \right] \right|_h^2 \leq c_2^2 \leq c \exp. \left(\frac{T}{k_0}\right) \quad , \quad c_2 = \text{constante} > 0 \quad (9B_3)$$

$$\underline{2^0 \quad 0 \leq \theta < \frac{1}{2}}$$

De koëfficiënt van  $|u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2$  in (7B) wordt nu negatief. In dit geval moet  $|u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2$  worden gemajoreerd. Daartoe wordt uitgegaan van vergelijking (5B). Substitutie van  $v_h = u_h^n - u_h^{n-1}$  geeft:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 + ((\varepsilon \left[ \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1} \right], u_h^n - u_h^{n-1}))_h + \\ & + b_h(u_h^{n-1}, \theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}, u_h^n - u_h^{n-1}) = (f_h^n, u_h^n - u_h^{n-1})_h \end{aligned} \quad (10B)$$

Algemeen geldt:

$$\begin{aligned} b_h(u_h, v_h, w_h) + ((\varepsilon v_h, w_h))_h &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega_h} u_{ih} \nabla_i v_h w_h \, dx + \\ &+ \int_{\Omega_h} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \tau_i v_h \tau_i w_h \, dx \end{aligned}$$

dus er volgt:

$$\begin{aligned} |b_h(u_h, v_h, w_h) + ((\varepsilon v_h, w_h))_h| &\leq \left[ \sum_{i=1}^m |u|_{L^\infty} \left\{ \int_{\Omega_h} |\tau_i v_h|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon_i}{h_i} \left\{ \int_{\Omega_h} |\tau_i v_h|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} \right] |w_h|_h \leq \end{aligned}$$

-B12-

$$\leq \left[ 2 \left\{ \sum_{i=1}^m \left( \frac{\varepsilon_i}{h_i} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + |u|_{L^\infty} \right] \|v_h\|_h \|w_h\|_h$$

$$\text{Stel } N(h) = 2 \left\{ \sum_{i=1}^m \left( \frac{\varepsilon_i}{h_i} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + |u|_{L^\infty}$$

Dan volgt

$$|b_h(u_h, v_h, w_h) + ((\varepsilon v_h, w_h))| \leq N(h) \|v_h\|_h \|w_h\|_h \quad (11B)$$

Door (11B) toe te passen op (10B) volgt:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tau} |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 &\leq 2 N(h) \|\theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}\|_h |u_h^n - u_h^{n-1}|_h + \\ &\quad + 2 |f_h^n|_h |u_h^n - u_h^{n-1}|_h \\ &\leq N^2(h) \alpha \|\theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}\|_h^2 + \frac{1}{\alpha} |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 + \\ &\quad + \eta |f_h^n|_h^2 + \frac{1}{\eta} |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 \quad \alpha, \eta > 0, \end{aligned}$$

Uitwerking geeft:

$$\left( \frac{2}{\tau} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\eta} \right) |u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 \leq \alpha N^2(h) \|\theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}\|_h^2 + \eta |f_h^n|_h^2$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Stel: } \alpha &= (1 + \delta) \\ \eta &= (1 + \frac{1}{\delta}) \end{aligned} \right\} \delta > 0, \text{ willekeurig}$$

$$\text{dan volgt: } \frac{2}{\tau} - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\tau}$$

Substitutie levert:

$$|u_h^n - u_h^{n-1}|_h^2 \leq \tau^2 N^2(h) (1+\delta) \|\theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}\|_h^2 + \tau^2 (1 + \frac{1}{\delta}) |f_h^n|_h^2$$

Vergelijking (7B) kan nu geschreven worden als:

$$\begin{aligned} |u_h^n|_h^2 - |u_h^{n-1}|_h^2 + \left[ 2 \bar{\varepsilon} \tau + \tau^2 N^2(h) (1+\delta) (2\theta-1) \right] \|\theta u_h^n + (1-\theta) u_h^{n-1}\|_h^2 &\leq \\ &\leq \tau \left[ k_0 + \tau (1 + \frac{1}{\delta}) \right] |f_h^n|_h^2 + \left( \frac{1-\theta}{k_0} \right) |u_h^{n-1}|_h^2 + \frac{\theta}{k_0} |u_h^n|_h^2 \end{aligned} \quad (12B)$$



Na sommatie van (12B) over  $n$ , lopend van 1 tot  $N$ , kan de stelling van Gronwell weer toegepast worden, er volgt:

$$|u_h^N|_h^2 + \tau \{2\bar{\varepsilon} + \tau N^2(h) (1+\delta) (2\theta-1)\} \sum_{i=1}^N \|\theta u_h^i + (1-\theta) u_h^{i-1}\|_h^2 \leq L \quad (13B)$$

waarbij  $L$  een constante is.

Om een energie ongelijkheid te krijgen, zodanig dat:

$$|u_h^N|_h^2 \leq c_3^2 \leq L, \quad c_3 = \text{constante} > 0 \quad (14B)$$

$$\text{en: } \tau \sum_{i=1}^N \|\theta u_h^i + (1-\theta) u_h^{i-1}\|_h^2 \leq c_3^2 \leq L, \quad c_3 = \text{constante} > 0 \quad (15B)$$

dan moet gelden:  $2\bar{\varepsilon} + \tau N^2(h) (1+\delta) (2\theta-1) \geq 0$

$$\text{waaruit volgt: } \tau \leq \frac{2\bar{\varepsilon}}{N^2(h)} \frac{(1-\delta)}{(1-2\theta)}$$

### B.5 Resultaat van de stabiliteitsanalyse

Definitie:  $u_h$  is de stapfunctie gedefiniëerd op  $0, T$  met waarden in  $v_h$ , waarvan de waarde gegeven wordt door:

$$u_h(t) = u_h^n \text{ voor } t \in (n\tau, (n+1)\tau), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

Stel  $F$  is de Hilbertruimte  $(L_2(\Omega))^{m+1}$  ( $m$  is de dimensie)

$p_h, p_h \in L(v_h, F)$ , is de lineaire afbeelding, gedefiniëerd door:

$$u_h \rightarrow p_h u_h = (u_h, \nabla_1 u_h, \dots, \nabla_m u_h)$$

$q_h, q_h \in L(v_h, L_2(\Omega))$ , is de lineaire afbeelding, gedefiniëerd door:

$$u_h \rightarrow q_h u_h = u_h$$

-B14-

Definitie:  $u_h$  heet  $L_p (0, T; \chi)$  stabiel met betrekking tot  $s_h$  als geldt:

$$|s_h u_h|_{L_p (0, T; \chi)} < A, \text{ onafhankelijk van } h \text{ en } \tau$$

$$\text{met } s_h: v_h \rightarrow \chi$$

Voor  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$  volgt uit vergelijking (9B<sub>2</sub>) dat

$$|u_h^N|_h \leq c_2$$

dus is  $u_h$   $L^\infty (0, T; L_2)$  stabiel m.b.t.  $q_h$

Uit vergelijking (9B<sub>3</sub>) volgt dat:

$$\tau \sum_{n=1}^N ||u_h^n||^2 \leq c_2^2$$

dus is  $u_h$   $L_2 (0, T; L_2)$  stabiel m.b.t.  $p_h$

Evenzo volgt deze stabiliteit voor  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  uit de vergelijkingen (14B) en (15B). Dit is echter een voorwaardelijke stabiliteit met als voorwaarde:

$$\tau \{ \bar{\varepsilon} s(h) + |u|_{L^\infty} \}^2 \leq \frac{2\bar{\varepsilon}}{(1-2\theta)} (1-\delta) \quad (16B)$$

$$\text{of wel: } \tau \leq \frac{2\bar{\varepsilon}}{\{ |u|_{L^\infty} + \bar{\varepsilon} s(h) \}^2} \frac{(1-\delta)}{(1-2\theta)}$$

### B.6 Stabiliteitsanalyse voor niet-opwaartse, conservatieve schema's

Voor de conservatieve schema's C en D wordt een iets andere  $b_h (u_h, v_h, w_h)$  gedefiniëerd:

$$b_h (u_h, v_h, w_h) = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_h} \nabla_i (u_{ih} v_h) w_h dx$$

-B15-

waarna de differentie vergelijking in dezelfde vorm als (4B) is te schrijven.

Verder kan m.b.v.  $\text{div}_h u_h = 0$  aangetoond worden dat:

$$b'_h(u_h, v_h, w_h) = b_h(u_h, v_h, w_h)$$

waardoor de stabiliteitsbeschouwing voor de schema's A en E ook geldt voor de schema's C en D.

### B.7 Stabiliteitsanalyse voor upstream differencing schema's [3]

De differentie vergelijking wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\tau} + \theta \left[ \frac{\left\{ \left( \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_1}^{n+1} \right\} - \left\{ \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2} \right) u_{L_1}^{n+1} \right\}}{h} \right] + \\ & + (1-\theta) \left[ \frac{\left\{ \left( \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_1}^n \right\} - \left\{ \left( \frac{u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{2} \right) u_{L_1}^n \right\}}{h} \right] + \\ & + \theta \left[ \frac{\left\{ \left( \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_2}^{n+1} \right\} - \left\{ \left( \frac{w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{2} \right) u_{L_1}^{n+1} \right\}}{k} \right] + \\ & + (1-\theta) \left[ \frac{\left\{ \left( \frac{w_{i,j+1}^n + w_{i,j}^n}{2} \right) u_{R_1}^n \right\} - \left\{ \left( \frac{w_{i,j}^n + w_{i,j-1}^n}{2} \right) u_{L_1}^n \right\}}{k} \right] + \\ & - \epsilon_x \left[ \theta \left\{ \frac{u_{i+1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1}}{h^2} \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{h^2} \right\} \right] + \\ & - \epsilon_z \left[ \theta \left\{ \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{k^2} \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{u_{i,j+1}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i,j-1}^n}{k^2} \right\} \right] = \end{aligned}$$

-B16-

$$= -\frac{1}{\rho} \left[ \theta \left\{ \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{2h} \right\} + (1-\theta) \left\{ \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i-1,j}^n}{2h} \right\} \right]$$

Vanwege de conservatieve vorm wordt hier gebruik gemaakt van de trilineaire vorm gedefiniëerd door:

$$b_h = \sum_{i=1}^m \int_{\Omega_h} \nabla_i (u_{ih} v_h) w_h dx \quad (m \text{ is de dimensie van } \Omega_h)$$

Vermenigvuldiging van de differentie vergelijking met een willekeurige functie  $\phi_h$  en integratie over het tijdsinterval  $[0, T]$  en het gebied  $\Omega_h$  geeft, mits bij homogene randvoorwaarden, na vervanging van  $u_{i,j}^n$  door  $u_h^n$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} (u_h^{n+1} - u_h^n, \phi_h)_h + ((\varepsilon [\theta u_h^{n+1} + (1-\theta) u_h^n], \phi_h))_h + \\ & + b_h (u_h^n, \theta u_h^{n+1} + (1-\theta) u_h^n, \phi_h) = (f_h^n, \phi_h)_h \end{aligned} \quad (17B)$$

Substitueer  $\phi_h = \theta u_h^{n+1} + (1-\theta) u_h^n$  in (17B), dit geeft:

$$\begin{aligned} & |u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^n|_h^2 + (2\theta-1) |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 + 2\tau ((\varepsilon \phi_h, \phi_h)) + \\ & + 2\tau b_h (u_h^n, \phi_h \phi_h) = 2\tau (f_h^n, \phi_h) \end{aligned} \quad (18B)$$

De berekening valt wederom uiteen in twee delen, te weten:

$$\underline{1^\circ} \quad (2\theta-1) \geq 0, \text{ m.a.w. } \frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$$

Algemeen kan de volgende stelling afgeleid worden:

-B17-

$$\begin{aligned} \text{Stelling: } b_h(u_h, \phi_h, \phi_h) &= \frac{h}{2} \sum_{i,j} \{ |u_{R_1}| |\phi_{i+1,j} - \phi_{i,j}|^2 \} + \\ &+ \frac{k}{2} \sum_{i,j} \{ |u_{L_1}| |\phi_{i,j+1} - \phi_{i,j}|^2 \} \end{aligned}$$

Voor het bewijs wordt verwezen naar [4].

Omdat altijd geldt:  $b_h(u_h, \phi_h, \phi_h) \geq 0$ , kan (18B) afgeschat worden tot:

$$|u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^n|_h^2 + (2\theta - 1) |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 + 2\tau ((\varepsilon \phi_h, \phi_h)) \leq 2\tau (f_h^n, \phi_h) \quad (19B)$$

Deze vorm kan analoog aan (7B) behandeld worden, waaruit volgt dat de differentie vergelijking voor  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$  onvoorwaardelijk stabiel is.

2°  $(2\theta - 1) < 0$ , m.a.w.  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$

Nu moet  $|u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2$  afgeschat worden. Dit dan door in (17B)  $\phi_h = u_h^{n+1} - u_h^n$  te substitueren, er volgt:

$$|u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 = -\tau \{ b_h(u_h^n, \phi_h, p_h) + ((\varepsilon \phi_h, p_h))_h \} + \tau (f_h^n, p_h)_h \quad (20B)$$

Algemeen gelden de volgende eigenschappen:

$$|b_h(u_h, u_h, \phi_h)| \leq N_1(h, k, u) \{ b_h(u_h, u_k, u_h) \}^{\frac{1}{2}} |\phi_h|_h$$

$$\text{met } N_1(h, k, u) = 2 \{ |u|_{L^\infty} \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} \}^{\frac{1}{2}}$$

$$||u_h||_h \leq N_2(h, k) |u_h|_h$$

$$\text{met } N_2(h, k) = 2 \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$((\varepsilon u_h, \phi_h))_h \leq N_2'(h, k) ||u||_h |\phi_h|_h$$

-B18-

$$\text{met } N_2' (h, k) = 2 \left( \frac{\varepsilon_x}{h^2} + \frac{\varepsilon_z}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Voor de bewijzen wordt verwezen naar [4].

Met behulp van deze eigenschappen is (20B) te majoreren tot

$$|u_h^{n+1} - u_h^n|^2 \leq \tau \{N_1 b_h (u_h, \phi_h, \phi_h)\}^{\frac{1}{2}} + N_2' \{|\phi_h|_h + |f_h^n|_h\} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h$$

Verdere uitwerking geeft:

$$|u_h^{n+1} - u_h^n|_h \leq \tau \{N_1 b_h (u_h, \phi_h, \phi_h)\}^{\frac{1}{2}} + N_2' \{|\phi_h|_h + |f_h^n|_h\} \quad (21B)$$

Algemeen geldt:

$$(a + b + c)^{\frac{1}{2}} \leq (1 + \alpha + \eta) a^2 + (1 + \alpha + \frac{1}{\eta}) b^2 + (1 + \frac{2}{\alpha}) c^2$$

(21B) kwadrateren en deze regel toepassen levert:

$$\begin{aligned} |u_h^{n+1} - u_h^n|_h^2 &\leq (1 + \alpha + \eta) \tau^2 N_1^2 b_h (u_h, \phi_h, \phi_h) + (1 + \alpha + \frac{1}{\eta}) \{|\phi_h|_h\}^2 \\ &\quad + (1 + \frac{2}{\alpha}) \tau^2 |f_h^n|_h^2 \end{aligned} \quad (22B)$$

Substitutie van (22B) in (18B) levert:

$$\begin{aligned} |u_h^{n+1}|_h^2 - |u_h^n|_h^2 + \tau \{2 - (1 + \alpha + \eta) (1-2\theta) \tau N_1^2\} b_h (u_h, \phi_h, \phi_h) + \\ + \tau \{2 \bar{\varepsilon} - (1 + \alpha + \frac{1}{\eta}) (1-2\theta) \tau N_2'^2\} \{|\phi_h^n|_h\}^2 \leq 2\tau |f_h^n|_h |\phi_h|_h + (1-2\theta) |f_h^n|_h^2 (1 + \frac{2}{\alpha}) \leq \end{aligned} \quad (23B)$$

Substitutie van  $\phi_h = u_h^{n+1} - u_h^n$  geeft:

$$\begin{aligned} &\leq (1-2\theta) |f_h^n|_h^2 (1 + \frac{2}{\alpha}) + 2\tau (1-\theta) |f_h^n|_h |u_h^n|_h + 2\tau \theta |f_h^n|_h |u_h^{n+1}|_h \leq \\ &\leq (1-2\theta) |f_h^n|_h^2 (1 + \frac{2}{\alpha}) + k_o \tau (1-\theta) |f_h^n|_h^2 + \frac{\tau}{k_o} (1-\theta) |u_h^n|_h^2 + k_o \tau \theta |f_h^n|_h^2 + \frac{\theta \tau}{k_o} |u_h^{n+1}|_h^2 \leq \end{aligned}$$

$$\leq (1-2\theta) |f_h^n|_h^2 \left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) + k_0 \tau |f_h^n|_h^2 + \frac{\tau(1-\theta)}{k_0} |u_h^n|_h^2 + \frac{\tau\theta}{k_0} |u_h^{n+1}|_h^2 \quad (24B)$$

$$\text{Stel } 4\tau \left(\frac{\varepsilon_x^2}{h^2} + \frac{\varepsilon_z^2}{k^2}\right) + 4|u|_{L^\infty} \tau \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}} \leq \frac{1-\delta}{1-2\theta}$$

kies  $\alpha = \frac{\delta}{2}$

$$\eta = \frac{1}{|u|_{L^\infty}} \frac{\left(\frac{\varepsilon_x^2}{h^2} + \frac{\varepsilon_z^2}{k^2}\right)}{\sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}}}$$

dan geldt:

$$4\tau \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}} |u|_{L^\infty} (\eta+1) < \frac{1-\delta}{1-2\theta} < \frac{1-\alpha}{1-2\theta} < \frac{1}{1+\alpha} \frac{1}{1-2\theta}$$

$$(1+\alpha+\eta) 4\tau \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}} |u|_{L^\infty} (\eta+1) < (1+\alpha) 4\tau \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}} |u|_{L^\infty} (\eta+1) < \frac{1}{1-2\theta}$$

$$\Rightarrow 2 - (1+\alpha+\eta) \tau N_1^2 = 2 \left[ 1 - (1+\alpha+\eta) 4\tau \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}} |u|_{L^\infty} (\eta+1) \right] > 0$$

$$\Rightarrow 2 - (1+\alpha+\eta) (1-2\theta) \tau N_1^2 > 0$$

analoog volgt:

$$2\bar{\varepsilon} - (1+\alpha+\eta) (1-2\theta) \tau N_2^2 > \delta$$

Substitutie van dit resultaat in (24B) geeft na sommatie van (24B) over n van 1 tot N:

Als

$$4\tau \left(\frac{\varepsilon_x^2}{h^2} + \frac{\varepsilon_z^2}{k^2}\right) + 4|u|_{L^\infty} \tau \sqrt{\frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2}} \leq \frac{1-\delta}{1-2\theta} \text{ met } 0 < \delta < 1 \quad 0 \leq n \leq N = \frac{T}{\tau}$$

dan geldt:

$$|u_h^N|_h^2 + \delta \bar{\varepsilon} \tau \sum_{n=0}^N \left[ \theta |u_h^{n+1}|_h^2 + (1-\theta) |u_h^n|_h^2 \right] \leq$$

-B20-

$$\leq \left\{ 1 + \frac{(1-\theta)\tau}{k_o} \right\} |u_h^o|_h^2 + k_o \tau \sum_{n=1}^N |f_h^u|_h^2 + \frac{\tau}{k_o} \sum_{n=1}^N |u_h^n|_h^2 \quad (25B)$$

Deze vorm is vrijwel gelijk aan (9B). Toepassing van de stelling van Gronwell levert dan dat de oplossing stabiel is mits aan onderstaande voorwaarde voldaan is.

$$4 \tau \left( \frac{\varepsilon_x^2}{h^2} + \frac{\varepsilon_z^2}{k^2} \right) + 4 |u|_{L^\infty} \tau \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right)^{\frac{1}{2}} < \frac{1-\delta}{1-2\theta} \quad \begin{array}{l} 0 < \delta < 1 \\ 0 \leq \theta < \frac{1}{2} \end{array}$$



B8 Stabiliteitsanalyse voor 3-level schema's

Omdat bij deze methode van Fourier transformatie gebruik wordt gemaakt, wordt uitgegaan van de gelineariseerde vergelijking (3.2). De differentie vergelijking wordt dan:

$$\begin{aligned} \frac{(u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n-1})}{2\tau} = & -u_{i,j}^n \frac{(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n)}{2h} - w_{i,j}^n \frac{(u_{i,j+1}^n - u_{i,j-1}^n)}{2k} + \\ & + \epsilon_x \frac{(u_{i+1,j}^{n-1} - u_{i,j}^{n-1} + u_{i-1,j}^{n-1})}{h^2} + \epsilon_z \frac{(u_{i,j+1}^{n-1} - 2u_{i,j}^{n-1} + u_{i,j-1}^{n-1})}{k^2} + \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{(p_{i+1}^n - p_{i-1}^n)}{2h} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Als de differentie vergelijking in de volgende algemene vorm wordt geschreven

$$\underline{u}^{n+1} = G \underline{u}^n$$

waarbij  $\underline{u}^{n+1} = \begin{pmatrix} u_{i,j}^{n+1} \\ u_{i,j}^{n+1} \end{pmatrix}$

dan volgt uit de differentie vergelijking (3.9) dat de amplificatie matrix G gegeven wordt door:

$$G = \begin{pmatrix} -2i \left\{ \frac{\tau}{h} u_{i,j}^n \sin \theta + \frac{\tau}{k} w_{i,j}^n \sin \varphi \right\} & 1 + 4\tau \left\{ \frac{\epsilon_x \cos \theta}{h^2} + \frac{\epsilon_z \cos \varphi}{k^2} \right\} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

met :  $\theta = m h$

$\varphi = n k$

Voor stabiliteit moet gelden :  $|\lambda| \leq 1 + O(\tau)$

De eigen waarden volgen uit:

$$-\lambda \left\{ -\lambda - 2i\tau \left( \frac{u_{i,j}^n \sin \theta}{h} + \frac{w_{i,j}^n \sin \varphi}{k} \right) \right\} - \left\{ 1 + 4\tau \left( \frac{\epsilon_x \cos \theta}{h^2} + \frac{\epsilon_z \cos \varphi}{k^2} \right) \right\} = 0$$

-B22-

$$\lambda^2 + i \left\{ 2\tau \left( \frac{u_{i,j}^n \sin \theta}{h} + \frac{u_{i,j}^n \sin \varphi}{k} \right) \right\} \lambda - \left\{ 1 + 4\tau \left( \frac{\epsilon_x}{h^2} \cos \theta + \frac{\epsilon_z}{k^2} \cos \varphi \right) \right\} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -i \left\{ 2\tau \left( \frac{u_{i,j}^n \sin \theta}{h} + \frac{w_{i,j}^n \sin \varphi}{k} \right) \right\} \frac{\sqrt{D}}{2}$$

$$\text{met } D = -4\tau^2 \left( \frac{u_{i,j}^n \sin \theta}{h} + \frac{w_{i,j}^n \sin \varphi}{k} \right)^2 + 4 \left\{ 1 + 4\tau \left( \frac{\epsilon_x}{h^2} \cos \theta + \frac{\epsilon_z}{k^2} \cos \varphi \right) \right\} > 0$$

$$|\lambda| = \frac{1}{2} \sqrt{4\tau^2 \left( \frac{u_{i,j}^n \sin \theta}{h} + \frac{w_{i,j}^n \sin \varphi}{k} \right)^2 + D}$$

$$|\lambda| = \sqrt{1 + 4\tau \left( \frac{\epsilon_x}{h^2} \cos \theta + \frac{\epsilon_z}{k^2} \cos \varphi \right)}$$

$$|\lambda| < 1 + 2\tau \left( \frac{\epsilon_x}{h^2} + \frac{\epsilon_z}{k^2} \right) = 1 + 0 (\tau)$$

M.a.w. het schema is stabiel mits  $D > 0$ .

Een nadeel is echter dat de amplificatie factor iets groter is dan 1 zodat bij langdurige berekeningen steeds grotere fouten geïntroduceerd worden.

$D \geq 0 \Rightarrow$

$$-4\tau^2 \left( \frac{u_{i,j}^n \sin \theta}{h} + \frac{w_{i,j}^n \sin \varphi}{k} \right)^2 + 4 \left\{ 1 + 4\tau \left( \frac{\epsilon_x}{h^2} \cos \theta + \frac{\epsilon_z}{k^2} \cos \varphi \right) \right\} \geq 0$$

In het meest ongunstige geval met  $\sin \theta = \sin \varphi = 1$

$$\cos \theta = \cos \varphi = -1$$

$$\bar{u} = \max (u_{i,j})$$

$$\bar{w} = \max (w_{i,j})$$

levert dit:

$$-4\tau^2 \left( \frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k} \right)^2 + 4 \left\{ 1 - 4\tau \left( \frac{\epsilon_x}{h^2} + \frac{\epsilon_z}{k^2} \right) \right\} \geq 0$$

$$\tau^2 + 4 \frac{\left( \frac{\epsilon_x}{h^2} + \frac{\epsilon_z}{k^2} \right)}{\left( \frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k} \right)^2} \tau - \frac{1}{\left( \frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k} \right)^2} \leq 0$$

rekeninghoudend met  $\tau \geq 0$ , volgt hieruit:

$$\tau < -2 \frac{\frac{\varepsilon_x}{h^2} + \frac{\varepsilon_z}{k^2}}{\left(\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k}\right)^2} + \frac{1}{2} \sqrt{16 \frac{\left(\frac{\varepsilon_x}{h^2} + \frac{\varepsilon_z}{k^2}\right)^2}{\left(\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k}\right)^4} + \frac{4}{\left(\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k}\right)^2}}$$

$$\tau < 2 \frac{\frac{\varepsilon_x}{h^2} + \frac{\varepsilon_z}{k^2}}{\left(\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k}\right)} \left\{ \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\bar{u}}{h} + \frac{\bar{w}}{k}\right)^2}{4 \left(\frac{\varepsilon_x}{h^2} + \frac{\varepsilon_z}{k^2}\right)}} - 1 \right\}$$

C Numerieke diffusie [3], [9]

Omdat de energiemethode alleen een bovengrens garandeert en nog wel begrensde oscillaties toestaat, die fysisch toch onjuist zijn, wordt in deze appendix nog een z.g.n. heuristische stabiliteitsanalyse toegepast, een methode afkomstig van Hirt [3], waarbij geëist wordt dat de som van de fysische en de numerieke diffusiecoëfficiënt positief is.

Schema A: Voor schema A levert alleen de term  $-\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  een bijdrage tot de numerieke diffusie. Omwerking levert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left( -u \frac{\partial u}{\partial x} - w \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ &= - \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) - u \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) - \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) - w \left( \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \right) + \epsilon_x \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \right) + \\ &\quad + \epsilon_z \left( \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} \end{aligned}$$

Hierin is:  $-\frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + w \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x}$

$$-u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + uw \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - u \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} +$$

$$-u \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$-\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} = u \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$-w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} = w \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + uw \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + w \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - w \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} +$$

$$-w \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{w}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z}$$

$$\epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} = -\epsilon_z \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + w \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} - \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x \partial z^2} \right\}$$

-C2-

$$\begin{aligned} \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = & - \epsilon_x \left\{ 3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial u}{\partial z} + 2 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} w + \right. \\ & \left. - \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right\} \end{aligned}$$

Voor de numerieke diffusie worden alleen de termen met  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  en  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  meegenomen, waaruit volgt:

$$D_{nx} = - \frac{\tau}{2} \left\{ u^2 - 4 \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$$

$$D_{nz} = - \frac{\tau}{2} \left\{ w^2 - 2 \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\}$$

De stabiliteitsvoorwaarden van Hirt worden dan:

$$\epsilon_x - \frac{\tau}{2} \left\{ u^2 - 4 \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\} > 0$$

$$\epsilon_z - \frac{\tau}{2} \left\{ w^2 - 2 \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} > 0$$

Schema B: Voor schema B leveren de termen  $-\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ,  $\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} \right\}$ ,  $\frac{k}{z} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ w \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$ ,

$-\frac{h^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}$  en  $-\frac{k^2}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right\}$  van de afbreekfout E een bijdrage

tot de numerieke diffusie  $D_n$ . Omwerking levert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = & \frac{\partial}{\partial t} \left( - \frac{\partial u^2}{\partial x} - \frac{\partial uw}{\partial z} + \epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) \\ = & - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} - u \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} - w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} - \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} + \\ & + \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x} \end{aligned}$$

Hierin is:  $- 2 u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 4 u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + 2 u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + 2 u \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} +$   
 $+ 2 uw \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2 \epsilon_x u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 2 \epsilon_z u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} + \frac{2}{\rho} u \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$

-C3-

$$- 2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = 4 u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + 2 w \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} - 2 \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} +$$

$$- 2 \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$- u \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} = u \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial x} + u^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + u \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial x} + uw \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2 u \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 +$$

$$+ 2 uw \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - u \epsilon_x \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} - u \epsilon_z \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \frac{u}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$$

$$- w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} = 2 w \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + 2 uw \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2 w \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + uw \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} +$$

$$- \epsilon_x w \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} - \epsilon_z w \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{w}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial z}$$

$$- \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial z} = 2 u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + u \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + w \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$- \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} = u \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + 2w \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} - \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$+ \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = + \epsilon_x \left\{ - 6 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{w}{z} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + \right.$$

$$\left. - \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - u \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial z} - w \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3} \right\}$$

$$\epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} = \epsilon_z \left\{ - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - 2 u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2} - 3 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \right.$$

$$\left. - 3 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - u \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - w \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x \partial z^2} \right\}$$

$$\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} \right\} = \frac{h}{2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}$$

-C4-

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ w \frac{\partial u}{\partial z} \right\} &= \frac{k}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} + w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \\ - \frac{h^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} &= - \frac{h^2}{2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \\ - \frac{k^2}{4} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right\} &= - \frac{k^2}{4} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \end{aligned}$$

Als alleen de termen met  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  en  $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$  worden meegenomen, volgt voor

de numerieke diffusie:

$$\begin{aligned} D_{nx} &= - \frac{\tau}{2} \left\{ 4u^2 - 8\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} - 2\epsilon_x \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{h}{2} u - \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \\ D_{nz} &= - \frac{\tau}{2} \left\{ w^2 - 4\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} - 4\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{k}{2} w - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

De stabiliteitsvoorwaarden van Hirt worden dan:

$$\begin{aligned} \epsilon_x - \frac{\tau}{2} \left\{ 4u^2 - 8\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} - 2\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{h}{2} u - \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} &> 0 \\ \epsilon_z - \frac{\tau}{2} \left\{ w^2 - 4\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} - 4\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \frac{k}{2} w - \frac{k^2}{4} \frac{\partial w}{\partial z} &> 0 \end{aligned}$$

Schema C: De termen van E die een bijdrage aan de numerieke diffusie leveren

$$\text{ren zijn: } - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, - \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}, - \frac{k^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} \right\}$$

Voor de omrekening van de verschillende termen wordt verwezen naar schema B. Volgt voor de numerieke diffusie

$$\begin{aligned} D_{nx} &= - \frac{\tau}{2} \left\{ 4u^2 - 8\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} - 2\epsilon_x \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - h^2 \frac{\partial u}{\partial x} \\ D_{nz} &= - \frac{\tau}{2} \left\{ w^2 - 4\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} - 4\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}$$

De stabiliteitsvoorwaarden van Hirt worden:

-C5-

$$\epsilon_x - \frac{\tau}{2} \left\{ 4u^2 - 8\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} - 2\epsilon_x \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - h^2 \frac{\partial u}{\partial x} > 0$$

$$\epsilon_z - \frac{\tau}{2} \left\{ w^2 - 4\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} - 4\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} > 0$$

Schema D: De termen van  $E_x$  die een bijdrage leveren aan de numerieke diffusie zijn:  $-\frac{\tau}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  en  $-h^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ . Omwerking levert:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -2 \frac{\partial u^2}{\partial x} + 2\epsilon_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \right) =$$

$$= -4 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} - 4u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + 2\epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial t \partial x}$$

$$-4 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} = 16u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 8\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{8}{\rho} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$-4u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = 16u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 16u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{8}{\rho} u \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$

$$2\epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = -24\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 8\epsilon_x u \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 4\epsilon_x^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - \frac{4\epsilon_x}{\rho} \frac{\partial^3 p}{\partial x^3}$$

De numerieke diffusie in de x-richting wordt dus gegeven door:

$$D_{nx} = -\frac{\tau}{8} \left\{ 16u^2 - 32\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - h^2 \frac{\partial u}{\partial x}$$

De termen van  $E_z$  die een bijdrage leveren aan de numerieke diffusie

zijn:  $-\frac{\tau}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  en  $-\frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ . Omwerking levert:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -2u \frac{\partial w}{\partial z} - 2w \frac{\partial u}{\partial z} + 2\epsilon_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) =$$

$$= -2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial z} - 2u \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} - 2 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} - 2w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} + 2\epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2}$$



-C6-

$$\begin{aligned}
\text{Hierin is: } -2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial w}{\partial z} &= 4u \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 4w \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - 4\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\
-2u \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z^2} &= 8u \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 8uw \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 4\epsilon_z u \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} \\
-2 \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial z} &= 8w \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} - 4\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \\
-2w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z^2} &= 8w \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial z} + 4uw \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + 4w^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 4\epsilon_z w \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \\
2\epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} &= -12\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 12\epsilon_z \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - 4\epsilon_z u \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} - 4\epsilon_z w \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \\
&\quad + 4\epsilon_z^2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4}
\end{aligned}$$

Volgt voor de numerieke diffusie in de z-richting:

$$D_{nz} = -\frac{\tau}{8} \left\{ 4w^2 - 16\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z}$$

De stabiliteitsvoorwaarden van Hirt zijn:

$$\epsilon_x - \frac{\tau}{8} \left\{ 16u^2 - 32\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\} - h^2 \frac{\partial u}{\partial x} > 0$$

$$\epsilon_z - \frac{\tau}{8} \left\{ 4w^2 - 16\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} > 0$$

Schema E: Vanwege het grote aantal termen worden alleen die termen gegeven die een bijdrage leveren, en dan alleen die bijdragen bestaande uit termen bevattende de eerste afgeleide en lager.

$$\frac{\tau}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \sim \frac{\tau}{2} \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{\tau}{2} \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

$$(1-2\theta) \frac{\tau}{2} u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \sim (1-2\theta) \frac{\tau}{2} u \left\{ -u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\}$$

$$(1-2\theta) \frac{\tau}{2} w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \sim (1-2\theta) \frac{\tau}{2} w \left\{ -w \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}$$

-C7-

$$\begin{aligned}
& - (1-2\theta) \frac{\tau}{2} \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \sim - (1-2\theta) \frac{\tau}{2} \epsilon_x \left\{ -3 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \\
& - (1-2\theta) \frac{\tau}{2} \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \sim - (1-2\theta) \frac{\tau}{2} \epsilon_z \left\{ \left( -\frac{\partial u}{\partial x} - 2 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \\
& - \theta \frac{\tau^2}{2} u \frac{\partial^3 u}{t^2 x} \sim - \theta \frac{\tau^2}{2} u \left\{ \left( 6u \frac{\partial u}{\partial x} + 2w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( 2w \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \\
& - \theta \frac{\tau^2}{2} w \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \sim - \theta \frac{\tau^2}{2} w \left\{ \left( 2u \frac{\partial u}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left( 2u \frac{\partial w}{\partial x} + 2w \frac{\partial u}{\partial x} + 4w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \\
& \theta \frac{\tau^2}{2} \epsilon_x \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} \sim \theta \frac{\tau^2}{2} \epsilon_x \left\{ 12 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\} \\
& \theta \frac{\tau^2}{2} \epsilon_z \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial z^2} \sim \theta \frac{\tau^2}{2} \epsilon_z \left\{ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[ 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. + 6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + 6 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}
\end{aligned}$$

Volgt voor de numerieke diffusie:

$$\begin{aligned}
D_{nx} &= \frac{\tau}{2} \epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} + (1-2\theta) \frac{\tau}{2} \left\{ -u^2 + 3\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \\
& + \theta \frac{\tau^2}{2} \left\{ -6u \frac{\partial u}{\partial x} - 4uw \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon_x 12 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + 2\epsilon_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{nz} &= \frac{\tau}{2} \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} + (1-2\theta) \frac{\tau}{2} \left\{ -w^2 + \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} + 2\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \\
& + \theta \frac{\tau^2}{2} \left\{ -4uw \frac{\partial w}{\partial x} - 2w^3 \frac{\partial u}{\partial x} - 4w^2 \frac{\partial w}{\partial z} - 2\epsilon_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. + \epsilon_z 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + u \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + 6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + 6 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\}
\end{aligned}$$

-C8-

De stabiliteitsvoorwaarden van Hirt zijn:

$$\begin{aligned}
& \epsilon_x + \frac{\tau}{2} E_x \frac{\partial u}{\partial x} + (1-2\theta) \frac{\tau}{2} \left\{ -u^2 + 3\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \\
& + \theta \frac{\tau^2}{2} \left\{ -6u \frac{\partial u}{\partial x} - 4uw \frac{\partial u}{\partial z} + \epsilon_x 12 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + 2\epsilon_z \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} > 0 \\
& \epsilon_z + \frac{\tau}{2} E_z \frac{\partial u}{\partial x} + (1-2\theta) \frac{\tau}{2} \left\{ -w^2 + \epsilon_z \frac{\partial u}{\partial x} + 2\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} + \\
& + \theta \frac{\tau^2}{2} \left\{ -4uw \frac{\partial w}{\partial x} - 2w^2 \frac{\partial u}{\partial x} - 4w^2 \frac{\partial w}{\partial z} + 2\epsilon_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
& \left. + \epsilon_z 2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 4 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + 6 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} + 6 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} > 0
\end{aligned}$$

Schema F: Evenals bij schema E worden alleen die termen meegenomen die bijdragen van de eerste afgeleiden en lager bevatten.

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \sim \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\tau}{2} \left\{ 2\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} - 4u^2 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\tau}{2} \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \sim \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\tau}{2} \epsilon_x \left\{ -12 \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& \theta \frac{\tau h}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right\} \sim \theta \frac{\tau h}{4} \left\{ -16u \frac{\partial u}{\partial x} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& - \theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial t^2} \right) \right\} \sim - \theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ -32\epsilon_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 96u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& \theta \frac{\tau^2 h}{16} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right) \right\} \sim \theta \frac{\tau^2 h}{16} \left\{ 96u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 192u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& - \frac{\theta \tau h^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right\} \sim - \frac{\theta \tau h^2}{8} \left\{ -16 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& - \theta \frac{\tau^2 h^2}{32} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} \right) \right\} \sim - \theta \frac{\tau^2 h^2}{32} \left\{ 32 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 + 192 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
& \theta \epsilon_x \frac{\tau^2}{8} \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial x^2} = \theta \epsilon_x \frac{\tau^2}{8} 192 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

de overige termen die een bijdrage leveren zijn:

$$\frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} \right), - \frac{h^2}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$$

Volgt voor de numerieke diffusie in de x-richting:

$$\begin{aligned} D_{nx} = & \frac{h}{2} u - \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\tau}{2} \left\{ -4u^2 + 10\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \theta \frac{\tau h}{4} \left\{ -16u \frac{\partial u}{\partial x} \right\} + \\ & - \theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ -32\epsilon_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 96u^2 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} + \theta \tau^2 h \left\{ 288u \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} + \\ & - \theta \frac{\tau h^2}{8} \left\{ -16 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right\} - \theta \frac{\tau^2 h^2}{32} \left\{ 224 \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^3 \right\} \end{aligned}$$

Voor de z-richting volgt:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\tau}{2} \left\{ w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} - \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \right\} & \sim \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \frac{\tau}{2} \left\{ -2w^2 + 6\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ - \theta \frac{\tau}{2} \left\{ \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial t} \right\} & \sim - \theta \frac{\tau}{2} \left\{ 2\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \theta \frac{\tau k}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \right) \right\} & \sim \theta \frac{\tau k}{4} \left\{ -8w \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ - \theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \right\} & \sim - \theta \frac{\tau^2}{8} \left\{ 32w^2 \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \theta \frac{\tau^2 k}{16} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z} \right) \right\} & \sim \theta \frac{\tau^2 k}{16} \left\{ 60w \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ - \theta \frac{\tau k^2}{8} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial z} \right) \right\} & \sim - \theta \frac{\tau k^2}{8} \left\{ -6 \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ - \theta \frac{\tau^2 k^2}{32} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial z} \right) \right\} & \sim - \theta \frac{\tau^2 k^2}{32} \left\{ 28w \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ \theta \epsilon_z \frac{\tau^2}{8} \left\{ \frac{\partial^4 u}{\partial t^2 \partial z^2} \right\} & \sim \theta \epsilon_z \frac{\tau^2}{8} \left\{ 28w \frac{\partial w}{\partial z} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned}$$

De overige termen die een bijdrage leveren zijn:  $\frac{k}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left( w \frac{\partial u}{\partial z} \right)$  en  $-\frac{k^2}{4} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ .

Volgt voor de numerieke diffusie in de z-richting:

$$\begin{aligned}
 D_{nz} = & \frac{k}{2} w - \frac{k^2}{4} \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{1}{2}-\theta\right) \frac{\tau}{2} \{-2w^2 + 6\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z}\} + \\
 & - \theta \frac{\tau}{2} \{2\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z}\} + \frac{\theta \tau k}{4} \{-8w \frac{\partial w}{\partial z}\} - \theta \frac{\tau^2}{8} \{32w^2 \frac{\partial w}{\partial z}\} + \\
 & + \theta \frac{\tau^2 k}{16} \{60w \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\} - \theta \frac{\tau k^2}{8} \{-6 \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\} - \theta \frac{\tau^2 k^2}{32} \{28w \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\} + \\
 & + \theta \epsilon_z \frac{\tau^2}{8} \{28w \frac{\partial w}{\partial z}\}
 \end{aligned}$$

De stabiliteitsvoorwaarden volgens Hirt zijn:

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x + \frac{h}{2} u - \frac{h^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{1}{2}-\theta\right) \frac{\tau}{2} \{-4u^2 + 10\epsilon_x \frac{\partial u}{\partial x}\} + \theta \frac{\tau h}{4} \{-16u \frac{\partial u}{\partial x}\} + \\
 - \theta \frac{\tau^2}{8} \{-32\epsilon_x \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 96u^2 \frac{\partial u}{\partial x}\} + \theta \tau^2 h \{288u \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \\
 - \theta \frac{\tau h^2}{8} \{-16 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\} - \theta \frac{\tau^2 h^2}{32} \{224 \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3\} > 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \epsilon_z + \frac{k}{2} w - \frac{k^2}{4} \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{1}{2}-\theta\right) \frac{\tau}{2} \{-2w^2 + 6\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z}\} - \theta \frac{\tau}{2} \{2\epsilon_z \frac{\partial w}{\partial z}\} + \\
 + \theta \frac{\tau k}{4} \{-8w \frac{\partial w}{\partial z}\} - \theta \frac{\tau^2}{8} \{32w^2 \frac{\partial w}{\partial z}\} + \theta \frac{\tau^2 k}{16} \{60w \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\} + \\
 - \theta \frac{\tau k^2}{8} \{-6 \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\} - \theta \frac{\tau^2 k^2}{32} \{28w \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\} + \theta \epsilon_z \frac{\tau^2}{8} \{28w \frac{\partial w}{\partial z}\} > 0
 \end{aligned}$$

Schema G: De termen van de afbreekfout E, die de belangrijkste bijdragen tot de numerieke diffusie geven zijn:

$$- \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \right\} - \frac{k^2}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \right\} - \tau \epsilon_x \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}, - \tau \epsilon_z \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2}$$

M.b.v. de uitwerking bij schema B volgt voor de bijdrage van de verschillende termen

-C11-

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} \sim -6 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t \partial z^2} \sim -2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 3 \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

De numerieke diffusie wordt dan gegeven door:

$$D_{nx} = \left\{ -h^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \epsilon_x \left( 6 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$D_{nz} = \left\{ -\frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \tau \epsilon_z \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

De stabiliteitsvoorwaarden van Hirt zijn:

$$\epsilon_x - h^2 \frac{\partial u}{\partial x} + \tau \epsilon_x \left( 6 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) > 0$$

$$\epsilon_z - \frac{k^2}{2} \frac{\partial w}{\partial z} + \tau \epsilon_z \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) > 0$$

waterloopkundig laboratorium postbus 177 delft