KANSREKENING

DOOR

DR. F. SCHUH,
HOOGLEERAAR AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT.

P. NOORDHOFF — 1922 — GRONINGEN

RECHTSTREEKSCHE KANSBEPALING.

§ 1. Bepaling van kans. Van ***kans*** of ***waarschijnlijkheid*** spreekt men, als men omtrent het zullen plaats vinden (soms ook het plaats gevonden hebben) van een gebeurtenis in het onzekere verkeert. Het kan dan voorkomen, dat het zin heeft de ***abstracte waarschijnlijkheid,*** die in het meerdere of mindere onzekerheidsgevoel bestaat, uit te drukken door een getal, de ***wiskundige waarschijnlijkheid.*** Inzonderheid is dit zoo, als men een zeker aantal ***mogelijke gevallen*** kan onderscheiden, waarvan er zich steeds één en slechts één voordoet (zooals b.v. het boven komen van een der getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6 bij het werpen met een dobbelsteen); van die gevallen nemen we dus aan, *dat ze elkaar uitsluiten en alle mogelijkheden vertegenwoordigen.* De M mogelijke gevallen verdeelen we in G ***gunstige*** en $M—G$ ***ongunstige gevallen,*** waarbij we aannemen, *dat de gebeurtenis, waarvan sprake is, in het werkelijkheid worden van een der* G *gunstige gevallen bestaat.* Onder de wiskundige waarschijnlijkheid (kortweg ***waarschijnlijkheid*** of ***kans*** genoemd), dat de gebeurtenis zal plaats vinden, verstaat men nu het quotiënt $G : M$, dus ***het aantal gunstige gevallen gedeeld door het aantal mogelijke gevallen.*** Zoo is b.v. de kans, dat men met een dobbelsteen een door 3 deelbaar getal werpt, $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; van de 6 mogelijke gevallen (het werpen van 1, 2, 3, 4, 5, 6) vertegenwoordigen de worpen 3 en 6 de gunstige gevallen.

We merken nog op, dat men voor $G = M$ ***zekerheid*** heeft, dat de gebeurtenis plaats vindt; ***de kans is dan 1.***

Voor $G = 0$ is er ***onmogelijkheid; de kans is dan 0.***

Verder is het duidelijk, dat $\frac{M - G}{M} = 1 - \frac{M}{G}$ de kans is, dat de gebeurtenis niet plaats vindt. *De kansen k en 1 — k op het wel en niet plaats vinden van een gebeurtenis*, noemen we **complementaire kansen,** terwijl we ook spreken van **kans** en **tegenkans;** in het bijzonder vormen zekerheid en onmogelijkheid zulke complementaire kansen.

Gelijkwaardige gevallen. In het voorgaande moet omtrent de mogelijke gevallen nog ondersteld worden, dat ze **gelijkwaardig** of **even waarschijnlijk** zijn, waarom men ze ook wel **gevallen van gelijke kans** noemt. Met gelijkwaardigheid is bedoeld, dat we geen enkele reden hebben om het intreden (werkelijkheid worden) van een dier gevallen eerder te verwachten dan van een ander dier gevallen en ons ook niet kunnen voorstellen, dat daarvoor redenen zouden zijn aan te voeren. Bij het werpen met een zuiveren dobbelsteen vormen de 6 mogelijke worpen ten duidelijkste gelijkwaardige gevallen; men zal iemand, die daar anders over denkt, van bijgeloovigheid betichten; evenwel zal het bezwaarlijk gelukken iemand, die b.v. meent, dat 6 een grootere kans heeft als in langen tijd geen 6 geworpen is [1]), van de voortdurende gelijkwaardigheid der 6 gevallen (onafhankelijkheid van de voorafgaande worpen) te overtuigen, evenmin als men iemand gemakkelijk van het idee zal kunnen afbrengen, dat bij een loterij nummers met staartcijfers meer kans bieden dan andere. Bij dergelijke quaesties, die op het spel betrekking hebben, is het, zooals LAPLACE zegt, het gezonde verstand,

---

1) Dat dergelijk bijgeloof maar al te veel voorkomt, blijkt wel daaruit, dat de meeste geregelde spelers te Monte-Carlo aanteekening houden van de uitgekomen nummers en hierop berekeningen baseeren omtrent de te verwachten nummers. Hiervoor zijn gedrukte lijstjes verkrijgbaar, die het houden dier aanteekeningen vergemakkelijken.

dat omtrent de gelijkwaardigheid der verschillende gevallen moet beslissen.

Eenvoudige voorbeelden. Trekt men blindelings een dominosteen uit een spel van 28 steenen, dan vertegenwoordigen (3, 3) en (2, 4) gelijkwaardige gevallen. Bij het werpen met twee dobbelsteenen zijn echter de worpen (3, 3) en (2, 4) niet gelijkwaardig, daar (3, 3) op slechts één manier en (2, 4) op twee manieren kan geworpen worden (nl. de eene steen 2 en de andere 4 of omgekeerd). In het geval van de twee dobbelsteenen krijgt men $6^2 = 36$ gelijkwaardige gevallen, doordat ieder der 6 worpen van den eenen dobbelsteen gecombineerd kan voorkomen met ieder der 6 worpen van den anderen. De kans op een worp (2, 4) (die 2 dier 36 gevallen in beslag neemt) is $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Daarentegen is bij het dominospel de kans op het trekken van (2, 4) gelijk aan $\frac{1}{28}$. *De kans, met twee dobbelsteenen te zamen 8 te werpen, is* $\frac{5}{36}$; de gunstige gevallen zijn (2, 6) en (3, 5), ieder tweemaal, en (4, 4). *De kans, uit het dominospel een steen met te zamen 8 oogen te trekken, is* $\frac{3}{28}$; de gunstige gevallen zijn (2, 6), (3, 5) en (4, 4). *Bij het werpen met n dobbelsteenen* (of, wat op hetzelfde neerkomt, het n-maal na elkaar werpen met één dobbelsteen) heeft men 6^n gelijkwaardige gevallen, *zoodat b.v.* $\frac{1}{6^n}$ *de kans is te zamen 6n te gooien* (daar dan ieder der dobbelsteenen 6 moet aanwijzen) *en* $\frac{n}{6^n}$ *de kans te zamen 6n — 1 te gooien* (daar dan alle dobbelsteenen 6 moeten aanwijzen, op den eersten na, die 5 geeft, of op den tweeden na, die 5 geeft, enz., zoodat er n gunstige gevallen zijn).

Iets gecompliceerder voorbeelden zijn de volgende:

Men werpt twee keer achtereen met twee dobbelsteenen. Hoe groot is de kans beide malen hetzelfde aantal oogen te gooien?

Bij iederen worp heeft men 36 gelijkwaardige gevallen, ziet men hieruit, *dat de gelijkwaardigheid soms min of meer een quaestie van afspraak is.*

Meetkundige waarschijnlijkheid.

Dat in het opstellen der gelijkwaardige gevallen een zekere willekeur zijn kan, blijkt vooral duidelijk bij vraagstukken van zoogenaamde ***meetkundige waarschijnlijkheid***, zooals b.v. het volgende:

Uit een spel van 28 dominosteenen trekt men 2 steenen. Hoe groot is de kans, dat het aantal oogen van den eenen steen het dubbel is van dat van den anderen steen?

Men heeft $\frac{28 \cdot 27}{2} = 378$ gelijkwaardige gevallen. Hieronder zijn 1×2 trekkingen (1, 2), 2×3 trekkingen (2, 4), 2×4 trekkingen (3, 6), 3×3 trekkingen (4, 8), 3×2 trekkingen (5, 10) en 4×1 trekkingen (6, 12), zoodat er $2 + 6 + 8 + 9 + 6 + 4 = 35$ gunstige gevallen zijn. *De gevraagde kans is dus* $\frac{35}{378} = \frac{5}{54}$.

Verkeerde beoordeeling der gelijkwaardigheid.

Dat men zich bij het beoordeelen der gelijkwaardigheid, ook in eenvoudige gevallen, gemakkelijk vergissen kan [1]), doet het volgende bekende voorbeeld zien:

Drie kasten bevatten ieder twee laden. In beide laden van kast A zit een goudstuk, in beide laden van kast B een zilverstuk, terwijl van kast C de eene lade een goudstuk, de andere een zilverstuk bevat. Iemand, die dit weet, maar niet weet, welke de kast met de twee goudstukken is enz., opent een lade en vindt daarin een zilverstuk. Hoe groot is de kans, dat de andere lade van dezelfde kast een goudstuk bevat?

Kast *B* of kast *C* is geopend en men is nu geneigd beide

1) Zelfs de encyclopaedist JEAN LE ROND D'ALEMBERT (1717—1783) stelde de kans, bij tweemaal werpen met een muntstuk minstens éénmaal kruis te werpen, op $\frac{2}{3}$ (in plaats van op $\frac{3}{4}$). Wordt de eerste keer kruis geworpen, zoo redeneerde hij, dan heeft geen tweede worp plaats, zoodat men 3 gevallen te onderscheiden heeft: kruis, munt-kruis, munt-munt. Van deze 3 gevallen zijn er 2 gunstig.

A_1B_1 een koorde loodrecht op CD, die juist de lengte r heeft, en E het snijpunt van A_1B_1 en CD, dan is $ME = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$. Is F het punt van CD, waarvoor $EM = MF$ is (zoodat $EF = r\sqrt{3}$ is), dan is de koorde langer dan r, als S tusschen E en F ligt; de kans daarop is dus $\frac{1}{2}\sqrt{3}$, *zoodat de kans op een koorde, die* $< r$ *is,* $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ *bedraagt* (welke kans aanmerkelijk kleiner is dan de in de vorige onderstelling gevondene). Algemeener vindt men zoo voor de *kans op een koorde, die* $< a$ $(a \leqq 2r)$ *is,* $1 - \sqrt{1 - \frac{a^2}{4r^2}}$.

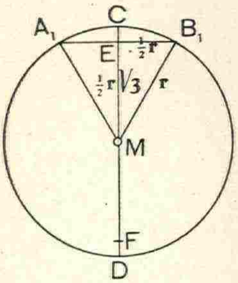

Fig. 2.

Het blijkt dus, *dat bij een dergelijk vraagstuk uitdrukkelijk de gevallen van gelijke kans gegeven moeten worden* of in elk geval iets, waaruit die gevallen zijn af te leiden.

Het quotiënt G : M als maat voor de kans. We hebben op blz. 3 de kans gedefiniëerd als het *quotiënt* $G : M$. Dit is daardoor gerechtvaardigd, *dat ons gevoel van onzekerheid uitsluitend van dit quotiënt afhangt.* Kan men ieder der M mogelijke gevallen in j gelijkwaardige gevallen onderverdeelen, dan ontstaan in het geheel jM gevallen, die ten duidelijkste ook alle gelijkwaardig zijn; van deze gevallen zijn er jG gunstig, zoodat de verhouding van het aantal gunstige gevallen tot het totale aantal gevallen nog steeds $G : M$ is. Heeft men een bak met p witte en q zwarte ballen, dan is, als men daaruit blindelings een bal trekt, de kans op wit $\frac{p}{p+q}$, daar de $p + q$ ballen de gelijkwaardige gevallen vertegenwoordigen; bij een tweeden bak met jp witte en jq zwarte ballen is de kans op wit $\frac{jp}{jp+jq}$, dus eveneens $\frac{p}{p+q}$, terwijl ook inderdaad in beide gevallen de abstracte waarschijnlijkheid dezelfde is; door toch de $j(p + q)$ ballen in $p + q$ groepen ieder van j gelijkkleurige ballen te verdeelen en de ballen van een zelfde groep door dunne draden aan elkaar te verbinden, verandert de abstracte waarschijnlijkheid niet, terwijl men zoo het geval van een bak met $p + q$ dingen (zulk een groep van onderling verbonden ballen als één ding beschouwend) verkrijgt.

Het is echter niet bepaald noodig juist het quotiënt $G : M$ als maat der waarschijnlijkheid te kiezen; iedere stijgende functie van $G : M$, zooals b.v. $\left(\frac{G}{M}\right)^2$, kan daar even goed voor dienen; daarbij nemen we de functie stijgend aan om te verkrijgen, dat een grootere waarschijnlijkheid door een grooter getal wordt voorgesteld. In vroeger jaren werd de kans meestal aangegeven door de verhouding $\frac{G}{M - G}$ van het aantal der gunstige tot dat der ongunstige gevallen, dus door $\frac{G/M}{1 - G/M}$; dit leeft nog voort in uitdrukkingen als: „ik wed 10 tegen 1, dat dit of dat gebeurt", hetgeen we nu door een kans $\frac{10}{11}$ aangeven. Het quotiënt $\frac{G}{M - G}$ is bij onmogelijkheid 0 en bij zekerheid $+ \infty$. Al zou echter ook de mathematische kans op meerdere manieren gedefiniëerd kunnen worden, zoo is toch de keus $G : M$ de meest doelmatige, daar deze zich het best tot kansberekeningen leent en de verschillende regels der kansrekening daarbij den eenvoudigsten vorm aannemen (zie b.v. de Opgaven 13 en 14 van blz. 41).

Kansen met een som 1. Een onmiddellijk gevolg der definitie $G : M$ van kans is: *De som der kansen van alle elkaar uitsluitende gebeurtenissen, die het gevolg van een zekere handeling kunnen zijn, is gelijk aan 1.*

Zijn nl. van de M gelijkwaardige gevallen er G_1 gunstig voor de eerste gebeurtenis, G_2 gunstig voor de tweede gebeurtenis enz., dan is $G_1 + G_2 + \ldots = M$, dus:

$$\frac{G_1}{M} + \frac{G_2}{M} + \ldots = 1.$$

Dat twee complementaire kansen te zamen 1 zijn, is van het voorgaande een bijzonder geval.

Een ander voorbeeld heeft men, als eenige personen een spel spelen, waarbij één der spelers wint. De som der winstkansen van alle spelers te zamen is dan 1.

Bij het toepassen der eigenschap moet er steeds op gelet worden, dat ze niet meer geldt, *als de beschouwde gevolgen der handeling elkaar niet uitsluiten*, in welk geval de som der kansen grooter dan 1 is. Zoo is b.v. bij het werpen met twee dobbelsteenen de kans te zamen een even getal te gooien $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, de kans te zamen een door 3 deelbaar getal te gooien $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ en de kans te zamen een priemgetal te gooien $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. Een dier drie gebeurtenissen doet zich stellig voor. Toch is de som der drie kansen > 1, nl. $\frac{45}{36} = 1\frac{9}{36} = 1\frac{1}{4}$. Dit is het gevolg daarvan, dat telkens twee der gebeurtenissen zich tegelijk kunnen voordoen en dus sommige (en wel 9) der 36 gevallen dubbel geteld worden; er zijn nl. 6 gevallen, waarbij het aantal oogen zoowel door 2 als door 3 deelbaar is, 1 geval, waarbij het aantal oogen priem en even is, en 2 gevallen, waarbij dit priem en door 3 deelbaar is.

§ 2. OPGAVEN.

1. Als men een kans aangeeft door de verhouding van het aantal gunstige tot dat der ongunstige gevallen, wat is dan te zeggen van getallen, die complementaire kansen aanwijzen?
2. Uit een dominospel met 28 steenen trekt men blindelings een steen, mengt die weer onder de andere en trekt opnieuw een steen. Hoe groot is de kans, dat beide steenen evenveel oogen hebben?
3. Men doet twee worpen telkens met twee dobbelsteenen. Hoe groot is de kans, dat de beide geworpen aantallen 1 verschillen? Hoe groot de kans, dat het eene aantal het dubbel van het andere is?
4. Wat is de kans met drie dobbelsteenen meer dan 12 te gooien?

5. Uit een spel van 28 dominosteenen trekt men twee steenen. Hoe groot is de kans, dat die aan elkaar passen?
6. Men werpt n-maal kruis of munt. Wat is de kans op n-maal munt of op een bepaald aangewezen afwisseling van kruis en munt?
7. Wat is de kans met een dobbelsteen in n worpen minstens éénmaal 6 te gooien?
   Men berekene de tegenkans.
8. In een bak zitten p witte en q zwarte ballen. Hoeveel trekkingen (waarbij telkens de getrokken bal teruggeworpen en onder de andere geschud wordt) moet men doen, opdat er een kans k is, dat minstens éénmaal wit getrokken is?
9. Binnen een cirkel neemt men willekeurig een punt P aan, zoodanig, dat bij verdeeling van het oppervlak in gelijke deelen ieder dezer deelen een even groote kans heeft het punt P te bevatten. Hoe groot is de kans, dat door P een koorde mogelijk is, die kleiner is dan de straal van den cirkel?
10. Binnen een vierkant neemt men willekeurig een punt P aan (gelijke oppervlakken gelijke kansen als bij de vorige opgave). Hoe groot is de kans, dat P van twee hoekpunten op een afstand grooter dan de zijde verwijderd is? Hoe groot is de kans, dat de afstand van P tot slechts één der hoekpunten grooter dan de zijde is?
11. Op een lijnsegment AB neemt men willekeurig een punt P aan (gelijke lengten gelijke kansen) en daarna een punt Q zoodanig, dat $AP = QB$ is. Hoe groot is de kans, dat de drie stukken, waarin zoo het lijnsegment verdeeld is, de drie zijden van een driehoek kunnen vormen?
12. Binnen een cirkel met straal r neemt men willekeurig twee punten P en Q aan (zoo, dat gelijke oppervlakken gelijke kansen hebben om P te bevatten en evenzoo voor Q). Wat is bij benadering de kans, dat $PQ < a$ is, waarin a een gegeven lengte is, die zeer klein is ten opzichte van r.

---

§ 3 *Ontbreken der gelijkwaardige gevallen.*

Het is niet steeds mogelijk bij een vraagstuk van kansrekening gelijkwaardige gevallen aan te geven, zonder het vraagstuk min of meer te wijzigen. Heeft men b.v. een *bak A met 3 witte en 5 zwarte ballen en een bak B met*

5 witte en 7 zwarte ballen, dan kan men vragen naar de *kans op wit, als men uit een dier bakken (naar keuze) een bal moet trekken en wel den inhoud der bakken kent, maar niet weet welke de bak met de 8 ballen en welke de bak met de 12 ballen is.* De 20 ballen uit beide bakken te zamen vertegenwoordigen nu geen gelijkwaardige gevallen. Men verandert echter de abstracte waarschijnlijkheid niet door A te vervangen door een bak met 9 witte en 15 zwarte ballen (dus door iederen bal door 3 ballen van dezelfde kleur te vervangen) en B door een bak met 10 witte en 14 zwarte ballen. Ieder der beide bakken bevat dan 24 ballen, zoodat de 48 ballen nu gelijkwaardige gevallen vertegenwoordigen. Hiervan zijn er 19 gunstig, *zoodat de gevraagde kans op wit* $\frac{19}{48}$ *is.*

Oneindig veel gelijkwaardige gevallen. Het kan voorkomen, *dat het aantal gelijkwaardige gevallen oneindig groot wordt,* waarbij dan de kans voor den dag komt als de limiet van een quotiënt (waarvan deeltal en deeler beide onbepaald toenemen). Zoo iets doet zich als regel bij vraagstukken van meetkundige waarschijnlijkheid voor. Bij de eerste behandeling van het vraagstuk van blz. 8 (kans op $AB < r$) kon met het invoeren van 6 gelijkwaardige gevallen worden volstaan [1]), doordat de boog 6-1-2 met den geheelen cirkelomtrek onderling meetbaar is (zie fig. 1). Dit is niet meer mogelijk bij de tweede opvatting omtrent gelijkwaardige gevallen, doordat EF onderling onmeetbaar is met de middellijn CD (zie fig. 2). Wel kan men nu, door de middellijn in een zeer groot aantal deelen te verdeelen, de kans tusschen twee willekeurig weinig van elkaar verschillende meetbare getallen insluiten, waarna men door een limietovergang voor de gevraagde kans $\frac{CE}{r} = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ vindt.

We merken nog op, dat bij dergelijke vraagstukken een

---

[1]) Dit aantal kan nog tot 3 beperkt worden door de bogen 6-1-2, 2-3-4 en 4-5-6 (zie fig. 1) de mogelijke gevallen te laten vormen.

kans 0 niet meer absolute onmogelijkheid en een kans 1 niet meer absolute zekerheid beteekent. Zoo is er een kans 0, dat AB juist gelijk is aan r, en een kans 1, dat $AB \neq r$ is, terwijl toch de mogelijkheid van $AB = r$ bestaat.

Ook bij quaesties, die op het spel betrekking hebben, kan het gebeuren, dat het aantal te onderscheiden gevallen oneindig groot wordt, doordat het onbepaald lang duren kan voor de beslissing valt. De volgende voorbeelden lichten dit toe:

1. *Twee personen A en B trekken om de beurt een bal uit een bak met p witte en q zwarte ballen, telkens den getrokken bal terugwerpend en onder de andere schuddend; als A begint, welke kans heeft hij dan het eerst een witten bal te trekken?*

Wordt in het geheel $(2n+1)$-maal een bal getrokken, ook al komt reeds eerder wit uit, dan zijn er $(p+q)^{2n+1}$ gelijkwaardige gevallen, daar men bij iedere trekking afzonderlijk $p+q$ gevallen te onderscheiden heeft. Onder deze gevallen zijn er $p(p+q)^{2n}$, waarbij A reeds bij de eerste trekking wit trekt en wint; verder zijn er $pq^2(p+q)^{2n-2}$ gevallen, waarbij A bij de derde trekking wint (doordat de opvolging zwart-zwart-wit is), enz. In het geheel geeft dit

$$p(p+q)^{2n} + pq^2(p+q)^{2n-2} + pq^4(p+q)^{2n-4} + \ldots +$$
$$+ pq^{2n-2}(p+q)^2 + pq^{2n} = p\frac{(p+q)^{2n+2} - q^{2n+2}}{(p+q)^2 - q^2} =$$
$$= \frac{(p+q)^{2n+2} - q^{2n+2}}{p+2q}$$

gunstige gevallen. De kans, dat bij $2n+1$ trekkingen (of eerder) het spel beslist is en A wint, bedraagt dus:

$$\frac{p+q}{p+2q} - \frac{q}{p+2q}\left(\frac{q}{p+q}\right)^{2n+1}.$$

Door n onbepaald te laten toenemen, vindt men (door een limietovergang), *dat de gevraagde kans* $\frac{p+q}{p+2q}$ *is. De kans, dat B wint, is* $\frac{q}{p+2q}$. De kans $\left(\frac{q}{p+q}\right)^{2n+1}$, dat na

$2n+1$ trekkingen het spel nog niet beslist is, nadert onbepaald tot 0, als n onbepaald toeneemt.

2. *Uit een bak met p witte en q zwarte ballen wordt telkens een bal getrokken en teruggeworpen. Daarmede wordt doorgegaan totdat na elkaar twee witte of twee zwarte ballen getrokken zijn. Wat is de kans, dat het eerst twee witte ballen getrokken worden?*

We denken, dat $2n+1$ trekkingen plaats vinden, waarbij men $(p+q)^{2n+1}$ gelijkwaardige gevallen kan onderscheiden. Daaronder zijn er $p^2(p+q)^{2n-1}$, waarbij reeds bij de tweede trekking de beslissing ten gunste van wit valt, $p^2q(p+q)^{2n-2}$ gevallen zoodanig, dat bij de derde trekking de beslissing ten gunste van wit valt (zwart-wit-wit), $p^3q(p+q)^{2n-3}$ gevallen, waarbij dit bij de vierde trekking gebeurt (wit-zwart-wit-wit), enz. Dit geeft in het geheel

$$p^2(p+q)^{2n-1}+p^2q(p+q)^{2n-2}+p^3q(p+q)^{2n-3}+$$
$$+p^3q^2(p+q)^{2n-4}+\ldots+p^nq^{n-1}(p+q)^2+p^{n+1}q^{n-1}(p+q)+$$
$$+p^{n+1}q^n=p^2(p+2q)\{(p+q)^{2n-2}+pq(p+q)^{2n-4}+\ldots+$$
$$+p^{n-2}q^{n-2}(p+q)^2+p^{n-1}q^{n-1}\}=$$
$$=p^2(p+2q)\frac{(p+q)^{2n}-p^nq^n}{(p+q)^2-pq}=p^2(p+2q)\frac{(p+q)^{2n}-p^nq^n}{p^2+pq+q^2}$$

gunstige gevallen. De kans, dat bij $2n+1$ trekkingen (of eerder) de beslissing gevallen is, en wel ten gunste van wit, bedraagt dus:

$$\frac{p^2(p+2q)}{(p+q)(p^2+pq+q^2)}\left\{1-\left[\frac{pq}{(p+q)^2}\right]^n\right\}.$$

Daar $\frac{pq}{(p+q)^2}<1$ is, neemt $\left[\frac{pq}{(p+q)^2}\right]^n$ onbepaald af, als n toeneemt, *zoodat de gevraagde kans gelijk is aan*

$$\frac{p^2(p+2q)}{(p+q)(p^2+pq+q^2)}.$$

De kans, dat het eerst tweemaal achtereen zwart getrokken wordt, vindt men hieruit door p en q te verwisselen; *die kans is dus* $\frac{q^2(2p+q)}{(p+q)(p^2+pq+q^2)}$. Naar behooren is de som van deze twee complementaire kansen gelijk aan 1.

Toepassing der combinaties. In vele gevallen voert het uittellen van het aantal M der mogelijke en het aantal G der gunstige gevallen tot combinaties, zooals de volgende voorbeelden doen zien.

3. *Uit een bak met p witte en q zwarte ballen wordt blindelings een greep van a ballen gedaan ($a \leqq p$). Hoe groot is de kans, dat die ballen alle wit zijn?*

De verschillende a-tallen, die men uit de $p + q$ ballen vormen kan, vertegenwoordigen de mogelijke gevallen; dus is $M = C^a_{p+q}$. De gunstige gevallen zijn de a-tallen, die uit de p witte ballen gevormd kunnen worden, zoodat $G = C^a_p$ is. *Voor de gevraagde kans vindt men dus:*

$$\frac{C^a_p}{C^a_{p+q}} = \frac{p!\,(p+q-a)!}{(p-a)!\,(p+q)!} =$$

$$= \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-a+1)}{(p+q)(p+q-1)(p+q-2)\ldots(p+q-a+1)} =$$

$$= \frac{(p-a+1)(p-a+2)(p-a+3)\ldots(p-a+q)}{(p+1)(p+2)(p+3)\ldots(p+q)} =$$

$$= \frac{C^q_{p+q-a}}{C^q_{p+q}}.$$

In den laatsten vorm kan men de kans rechtstreeks voor den dag brengen door het vraagstuk aldus in te kleeden: *A doet uit een bak met n ballen een greep van a ballen, die vervolgens weer in den bak gedaan worden. Evenzoo doet B uit dien bak een greep van b ballen ($a + b \leqq n$). Hoe groot is de kans, dat geen enkele bal zoowel door A als door B getrokken is?*

Hieruit ontstaat de vorige formuleering door de door B getrokken ballen zwart te noemen en $n - b = p$ en $b = q$ te stellen.

Heeft A een greep gedaan, dan zijn er ten aanzien van de greep, die B kan doen, C^b_n mogelijke gevallen, waaronder C^b_{n-a} gunstige, nl. die, waarbij de b ballen gekozen worden uit de $n - a$ ballen, die door A niet getrokken zijn. Heeft eerst B een greep gedaan, dan voert een greep van A tot C^a_n mogelijke gevallen, waaronder C^a_{n-b} gunstige.

De eerste oplossing geeft de kans in den vorm $C_{n-a}^{b} : C_{n}^{b}$, de tweede oplossing in den vorm $C_{n-b}^{a} : C_{n}^{a}$.

De beide oplossingsmethoden berusten op een verschillende indeeling in gelijkwaardige gevallen. De gevallen der eene methode ontstaan echter niet door die der andere methode onder te verdeelen. Wel ontstaan de gelijkwaardige gevallen van beide methoden door die van een derde methode onder te verdeelen. Bij die derde methode zijn de gelijkwaardige gevallen de $C_n^a\, C_n^b$ manieren, waarop door A en B resp. a en b der n ballen kunnen worden aangewezen. Door samenvoeging tot één enkel geval van telkens C_n^a (of C_n^b) gevallen, die slechts in de door A (of B) aangewezen ballen verschillen, krijgt men de gelijkwaardige gevallen der eerste (of tweede) methode.

4. *Uit een bak met p witte en q zwarte ballen doet men een greep van $a + b$ ballen. Hoe groot is de kans, dat daarvan a wit en b zwart zijn ($a \leqq p$ en $b \leqq q$)?*

Het aantal mogelijke trekkingen is C_{p+q}^{a+b}, waaronder $C_p^a C_q^b$ gunstige. *De gevraagde kans is dus:*

$$\frac{C_p^a C_q^b}{C_{p+q}^{a+b}} = \frac{p!\, q!\, (a+b)!\, (p+q-a-b)!}{(p+q)!\, a!\, b!\, (p-a)!\, (q-b)!} = \frac{C_{a+b}^{a} C_{p+q-a-b}^{p-a}}{C_{p+q}^{p}}.$$

Tot de laatste uitdrukking voor de kans geraakt men rechtstreeks door eerst na de trekking p der ballen wit en de overige q zwart te verven. Dit kan op C_{p+q}^{p} manieren geschieden (aantal mogelijke gevallen). De gunstige gevallen krijgt men door a der $a + b$ getrokken ballen en $p - a$ der $p + q - a - b$ niet getrokken ballen wit te verven, hetgeen op $C_{a+b}^{a} C_{p+q-a-b}^{p-a}$ manieren geschieden kan.

Van dit vraagstuk is het voorafgaande een bijzonder geval, nl. het geval $b = 0$.

In de beide vorige vraagstukken is het berekenen der kans vrij bewerkelijk, als de daarbij optredende getallen eenigszins groot zijn. Een benaderde waarde voor de gevraagde kans is echter spoediger te verkrijgen door gebruik

Benadering van Stirling. te maken van de volgende ***formule van Stirling*** (waarin $n \geqq 1$ ondersteld wordt):

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n \left(1 + \frac{2}{24n - \Theta}\right),$$

waarvan we het bewijs hier niet kunnen leveren (zie hiervoor SCHUH, Oneindige Producten, blz. 77—82 of SCHUH en RUTGERS, Compendium der Hoogere Wiskunde III, blz. 114—115 en 207—208). In de formule is ***e=2,718281828459045****....* (grondtal van het natuurlijke of Neperiaansche logarithmenstelsel), *terwijl θ een tusschen 0 en 1 gelegen getal is, dat voor niet te kleine waarden van n dicht bij 1 gelegen is.* Voor groote waarden van n is $\sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$ een (te kleine) benaderde waarde voor $n!$; een veel betere benaderde waarde (die eveneens te klein is) levert $\sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n \left(1 + \frac{1}{12n}\right)$, terwijl nog beter is $\sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n \left(1 + \frac{2}{24n - 1}\right)$ (te groot). In vele gevallen zal men met de benadering $\sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$ (die zich goed leent voor berekening met logarithmen) kunnen volstaan.

Het volgende overzicht geeft een denkbeeld van de nauwkeurigheid der verschillende benaderingen.

n	$\frac{n!}{A_n}$	$\frac{n!}{A_n\left(1 + \frac{1}{12n}\right)}$	$\frac{n!}{A_n\left(1 + \frac{2}{24n - 1}\right)}$
1	1,08444	1,00102	1 — 0,00232
2	1,04221	1,00052	1 — 0.00033
3	1,02806	1,000279	1 — 0,000101
4	1,02101	1,000171	1 — 0,000044
5	1,01678	1,000115	1 — 0,0000223
6	1,01397	1.000083	1 — 0,0000130
7	1,01197	1,000062	1 — 0,0000082
8	1,01047	1,0000484	1 — 0.0000056
9	1,00930	1,0000388	1 — 0,00000386
10	1,00837	1,0000318	1 — 0.00000282
15	1,00557	1,0000146	1 — 0,00000084
20	1,00418	1.0000083	1 — 0,000000353
30	1,00278	1,00000375	1 — 0,000000105
50	1.00167	1,00000137	1 — 0,0000000226
100	1,00083	1,00000034	1 — 0,00000000283

Hierin is A_n een afkorting voor $\sqrt{2\pi n}\, e^{-n} n^n$.

We merken nog op, dat de relatieve nauwkeurigheid (d. w. z. de nauwkeurigheid percentsgewijs) met n toeneemt, maar de absolute nauwkeurigheid afneemt (dus het verschil tusschen $n!$ en de benaderde uitdrukking daarvoor toeneemt). Het komt echter op de relatieve en niet op de absolute nauwkeurigheid aan.

Door op het vraagstuk 3 van blz. 16 de benadering $n! = \sqrt{2\pi n}\, e^{-n}\, n^n$ toe te passen, *vindt men bij benadering voor de kans*

$$\frac{p^{p+\frac{1}{2}}\,(p+q-a)^{p+q-a+\frac{1}{2}}}{(p-a)^{p-a+\frac{1}{2}}\,(p+q)^{p+q+\frac{1}{2}}},$$

een uitdrukking, die zeer geschikt is voor logarithmische berekening.

Een bijzonder eenvoudige uitkomst geeft de benadering van Stirling in het volgende vraagstuk, dat een bijzonder geval is van vraagstuk 4 van blz. 17:

5. *Uit een bak met ja witte en jb zwarte ballen grijpt men a + b ballen. Wat is de kans op a witte en b zwarte ballen?*

De kans is

$$\frac{C^a_{ja}\, C^b_{jb}}{C^{a+b}_{j(a+b)}} = \frac{(ja)!\ (jb)!\ (a+b)!\ [(j-1)(a+b)]!}{[j(a+b)]!\ a!\ [(j-1)a]!\ b!\ [(j-1)b]!},$$

hetgeen bij benadering gelijk is aan:

$$\sqrt{\frac{j(a+b)}{2\pi(j-1)ab}}.$$

Deze uitkomst is niet alleen zeer geschikt voor de becijfering der kans, maar doet ook duidelijk zien hoe de kans van de getallen j, a en b afhangt. Zoo blijkt b.v., *dat de kans $\sqrt{m}$-maal zoo klein wordt, als men a en b beide m-maal zoo groot neemt, j onveranderd latend (dus als men alle in de opgave genoemde aantallen m-maal zoo groot neemt).*

Een betere benadering voor de gevraagde kans krijgt men door de genoemde uitdrukking te vermenigvuldigen met

$$\frac{\left(1+\frac{1}{12ja}\right)\left(1+\frac{1}{12jb}\right)\left(1+\frac{1}{12(a+b)}\right)\left(1+\frac{1}{12(j-1)(a+b)}\right)}{\left(1+\frac{1}{12j(a+b)}\right)\left(1+\frac{1}{12a}\right)\left(1+\frac{1}{12(j-1)a}\right)\left(1+\frac{1}{12b}\right)\left(1+\frac{1}{12(j-1)b}\right)},$$

hetgeen bij benadering gelijk is aan

$$1+\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{ja}+\frac{1}{jb}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{(j-1)(a+b)}-\frac{1}{j(a+b)}-\frac{1}{a}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(j-1)a}-\frac{1}{b}-\frac{1}{(j-1)b}\right\}=1-\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{j-1}-\frac{1}{j}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right)=1-\frac{1}{12}\left(1+\frac{1}{j(j-1)}\right)\frac{a^2+ab+b^2}{ab(a+b)}.$$

§ 4. OPGAVEN.

1. Bereken de kans van vraagstuk 1 blz. 14 door een even aantal trekkingen te beschouwen.
2. Hetzelfde voor de kans van vraagstuk 2 blz. 15.
3. Uit een bak met p witte en q zwarte ballen wordt telkens een bal getrokken en teruggeworpen totdat òf drie witte ballen òf na elkaar twee zwarte ballen getrokken zijn. Wat is de kans, dat het eerst het eene, en wat de kans, dat het eerst het andere gebeurt?
   Men merke op, dat het spel na 6 trekkingen zeker beslist is.
4. A en B werpen om de beurt kruis of munt, terwijl diegene wint, die het eerst denzelfden worp doet als de laatste worp van zijn medespeler. Zoo A begint, wat zijn dan de kansen van A en B?
5. A en B werpen om de beurt kruis of munt, terwijl diegene wint, die het eerst denzelfden worp doet als dien hij het laatst gedaan heeft. Zoo A begint, wat zijn dan de kansen van A en B?
6. Wat is bij het whisten (waarbij een spel van 52 kaarten onder 4 personen verdeeld wordt) voor een bepaalden speler de kans minstens drie azen te krijgen? Wat is de kans, dat een der vier spelers (onverschillig welke) minstens drie azen krijgt?
7. Wat is bij het whisten de kans, dat ieder der vier spelers een aas krijgt?

8. Wat is bij het whisten voor een bepaalden speler de kans minstens één aas te krijgen?
Men berekene de tegenkans.
9. Wat is bij het whisten voor een bepaalden speler de kans direct een renonce (ontbrekende kleur) te krijgen.
10. Wat is bij het whisten voor een bepaalden speler de kans in minstens één kleur twee honneurs vijfde (vijf kaarten van dezelfde kleur, waaronder twee honneurs, d.w.z. twee der kaarten tien, boer, vrouw, heer, aas), en geen andere kaarten van die kleur, te krijgen.
11. Wat is bij het whisten voor een bepaalden speler de kans in minstens één kleur minstens twee honneurs vijfde te krijgen.
12. Bereken de kans uit een bak met n ballen een even aantal te grijpen, als minstens één bal gegrepen wordt en overigens alle grepen (twee grepen alleen dan als dezelfde beschouwend, als ze uit dezelfde ballen bestaan) even waarschijnlijk zijn.
13. Uit een bak met n genummerde ballen worden er m getrokken. Er worden a der nummers $1, 2, \ldots, n$ genoemd. Hoe groot is de kans, dat er minstens één nummer geraden is? Hoe groot de kans, dat er minstens twee of minstens drie nummers geraden zijn?
Men berekene de tegenkans.

---

§ 5. We laten nu eenige vraagstukken volgen, waarbij het uittellen van het aantal gunstige gevallen meerdere moeilijkheid oplevert.

Spel van de Montmort. 1. *Een bak met n genummerde ballen wordt geledigd door er telkens een bal uit te trekken (die niet teruggeworpen wordt), daarbij van 1 tot n tellend. Hoe groot is de kans op minstens één ontmoeting, zoo onder een ontmoeting verstaan wordt, dat op den* j^{den} *tel de bal met het nummer j getrokken wordt?* ***(ontmoetingsspel,*** of ***jeu de rencontre,*** van ***de Montmort).***

De vraag is in wezen blijkbaar dezelfde als de volgende: *Men heeft n brieven geschreven met bijbehoorende couverten en doet op willekeurige wijze de brieven in de couverten. Wat is de kans, dat minstens één brief in het bijbehoorende couvert komt?*

We houden ons aan de eerste inkleeding. Het aantal M der mogelijke gevallen is $n!$, het aantal permutaties der n ballen. Er zijn $(n-1)!$ gevallen, waarbij bal 1 een ontmoeting geeft, dus $n!-(n-1)!$ gevallen, waarbij 1 geen ontmoeting geeft. Evenzoo vindt men $(n-1)!-(n-2)!$ gevallen, waarbij bal 2 een ontmoeting geeft, maar bal 1 niet. Er blijven dus

$$n!-(n-1)!-[(n-1)!-(n-2)!]=n!-2.(n-1)!+(n-2)!$$

gevallen over, waarbij 1 noch 2 een ontmoeting geeft. Daaruit volgt, dat het aantal gevallen, waarbij 3 een ontmoeting geeft, maar 1 en 2 niet, gelijk is aan $(n-1)!-2.(n-2)!+(n-3)!$, waaruit men voor het aantal gevallen, waarbij 1 noch 2 noch 3 een ontmoeting geeft, vindt:

$$n!-2.(n-1)!+(n-2)!-[(n-1)!-2.(n-2)!+(n-3)!]=$$
$$=n!-3.(n-1)!+3.(n-2)!-(n-3)!.$$

Evenzoo vindt men voor het aantal gevallen, waarbij geen der ballen 1, 2, 3, 4 een ontmoeting geeft:

$$n!-4(n-1)!+6(n-2)!-4(n-3)!+(n-4)!,$$

waarbij de coëfficiënten 1, 4, 6, 4, 1 ontstaan door telkens twee opvolgende der coëfficiënten 1, 3, 3, 1 op te tellen. Daar dit ook juist de vormingswijze der binomiaalcoëfficiënten is, vindt men in het algemeen voor het aantal gevallen, waarbij k bepaald aangewezen ballen geen ontmoeting geven:

$$n!-C_k^1(n-1)!+C_k^2(n-2)!-C_k^3(n-3)!+\ldots+$$
$$+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}(n-k+1)!+(-1)^k(n-k)!.$$

een uitkomst, die men nog door volledige inductie nader zou kunnen bevestigen.

Door $k=n$ te nemen, vindt men voor het aantal gevallen, waarbij er geen enkele ontmoeting is:

$$n!\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right).$$

De kans op geen enkele ontmoeting is dus:

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{n!}.$$

Neemt n toe, dan wordt deze kans afwisselend kleiner en grooter om zeer snel tot de limietwaarde $\frac{1}{e} = 0{,}36787944$ te naderen. Voor $n = 2, 3, \ldots, 10$ is die kans nl.:

	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$
kans	$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{3} = 0{,}33333333$	$\frac{3}{8} = 0{,}375$	$\frac{11}{30} = 0{,}36666667$	$\frac{53}{144} = 0{,}36805556$

	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
kans	$\frac{103}{280} = 0{,}36785714$	$\frac{2119}{5760} = 0{,}36788194$	$\frac{16687}{45360} = 0{,}36787919$	$0{,}36787946$

Voor de kans op minstens één ontmoeting vindt men verder:

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!},$$

of bij benadering $1 - \frac{1}{e} = 0{,}63212056$.

2. *Wat is bij het ontmoetingsspel de kans op juist één ontmoeting en wat de kans op juist j ontmoetingen?*

Het aantal gevallen, waarbij alleen bal 1 een ontmoeting geeft, bedraagt:

$$(n-1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}\right),$$

Evenveel gevallen zijn er, waarbij alleen bal 2 een ontmoeting geeft, enz., zoodat er

$$n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

gevallen met één ontmoeting zijn. *De kans op juist één ontmoeting is dus:*

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!},$$

dus voor niet te kleine waarden van n nagenoeg even groot als de kans op geen enkele ontmoeting.

Het aantal gevallen, waarbij j bepaalde ballen (en geen andere) een ontmoeting geven, bedraagt:

$$(n-j)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \ldots + (-1)^{n-j} \frac{1}{(n-j)!}\right);$$

het aantal gevallen, waarbij er j en niet meer ontmoetingen zijn, is C_n^j-maal zoo groot, waaruit men voor de *kans op j (en niet meer) ontmoetingen* vindt:

$$\frac{1}{j!}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\ldots+(-1)^{n-j}\frac{1}{(n-j)!}\right).$$

Voor $j = n - 1$ en $j = n$ vindt men naar behooren een kans 0 resp. $\frac{1}{n!}$, zooals blijkt door de kans in den vorm

$$\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{n-j}(-1)^i\frac{1}{i!}$$

te schrijven.

Verwant vraagstuk. 3. *Uit een bak met n genummerde ballen wordt a-maal een bal getrokken, die telkens teruggeworpen en onder de andere geschud wordt. Wat is de kans, dat m bepaald aangewezen ballen alle minstens éénmaal getrokken zijn* $(m \leqq a)$?

Het totale aantal gevallen bedraagt n^a.

Het aantal gevallen, waarin bal 1 niet getrokken is, bedraagt $(n-1)^a$, zoodat het aantal gevallen, waarbij 1 wel getrokken is, gelijk is aan $n^a - (n-1)^a$. Evenzoo vindt men voor het aantal gevallen, waarbij 1 wel, maar 2 niet getrokken is, $(n-1)^a - (n-2)_a$, dus voor het aantal gevallen, waarbij 1 en 2 beide getrokken zijn:

$$n^a-(n-1)^a-[(n-1)^a-(n-2)^a]=n^a-2(n-1)^a+(n-2)^a.$$

Daaruit vindt men voor het aantal gevallen, waarbij 1, 2 en 3 alle getrokken zijn:

$$n^a-2(n-1)^a+(n-2)^a-[(n-1)^a-2(n-2)^a+(n-3)^a]=$$
$$=n^a-3(n-1)^a+3(n-2)^a-(n-3)^a.$$

Men ziet weer binomiaalcoëfficiënten verschijnen. Het aantal gevallen, waarbij m bepaald aangewezen ballen alle getrokken zijn, wordt dus:

$$n^a-C_m^1(n-1)^a+C_m^2(n-2)^a-C_m^3(n-3)^a+\ldots+$$
$$+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}(n-m+1)^a+(-1)^m(n-m)^a,$$

waaruit men voor de *gevraagde kans* vindt:

$$1 - C_m^1\left(1-\frac{1}{n}\right)^a + C_m^2\left(1-\frac{2}{n}\right)^a - C_m^3\left(1-\frac{3}{n}\right)^a + \ldots + $$
$$+ (-1)^{m-1} C_m^{m-1}\left(1-\frac{m-1}{n}\right)^a + (-1)^m\left(1-\frac{m}{n}\right).$$

In het geval $m = n$ kan voor die kans ook geschreven worden:

$$1 - C_{n-1}^1\left(\frac{n-1}{n}\right)^{a-1} + C_{n-1}^2\left(\frac{n-2}{n}\right)^{a-1} - C_{n-1}^3\left(\frac{n-3}{3}\right)^{a-1} + \ldots +$$
$$+ (-1)^{n-3} C_{n-1}^{n-3}\left(\frac{3}{n}\right)^{a-1} + (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2}\left(\frac{2}{n}\right)^{a-1} + (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{a-1}.$$

Bij de voorgaande afleiding is niet uitdrukkelijk van $m \leqq a$ gebruik gemaakt. De formule gaat dus door voor $a < m$, in welk geval de gevraagde kans 0 is. Dit voert tot de *identiteit:*

$$n^a - C_m^1 (n-1)^a + C_m^2 (n-2)^a - \ldots +$$
$$+ (-1)^{m-1} C_m^{m-1} (n-m+1)^a + (-1)^m (n-m)^a = 0 \; (a < m).$$

Is $a = m$, *dan is* het aantal gunstige gevallen $m!$ (het aantal permutaties der m aangewezen ballen), dus *de gevraagde kans* $\frac{m!}{n^a}$. Dit voert tot de *identiteit:*

$$n^m - C_m^1 (n-1)^m + C_m^2 (n-2)^m - \ldots + (-1)^m (n-m)^m = m!.$$

Deze identiteiten gelden niet alleen voor geheele waarden van n, die $\geqq m$ zijn (dus voor waarden van n, zooals die bij het kansvraagstuk optreden), maar *voor iedere waarde van n.*

4. *Wat is in het vorige vraagstuk de kans, dat er onder de a getrokken ballen juist m verschillende voorkomen?*

Wijst men m bepaalde ballen aan, dan wordt het aantal gevallen, waarbij deze alle getrokken zijn, maar geen der overige ballen getrokken is, gevonden uit het aantal gunstige gevallen van het vorige vraagstuk door daarin n door m te vervangen, zoodat dit aantal gevallen gelijk is aan:

$$m^a - C_m^1 (m-1)^a + C_m^2 (m-2)^a - \ldots +$$
$$+ (-1)^{m-2} C_m^{m-2} 2^a + (-1)^{m-1} C_m^{m-1}.$$

Het aantal gevallen, waarbij juist m niet nader aangewezen ballen getrokken zijn, is C_n^m-maal zoo groot, waaruit men voor de *gevraagde kans* vindt:

$$\left(\frac{m}{n}\right)^a C_n^m \left\{1 - C_m^1\left(1-\frac{1}{m}\right)^a + C_m^2\left(1-\frac{2}{m}\right)^a - \ldots . + \right.$$

$$\left. + (-1)^{m-2} C_m^{m-2}\left(\frac{2}{m}\right)^a + (-1)^{m-1} C_m^{m-1}\left(\frac{1}{m}\right)^a\right\} =$$

$$= C_{n-1}^{m-1}\left\{\left(\frac{m}{n}\right)^{a-1} - C_{m-1}^1\left(\frac{m-1}{n}\right)^{a-1} + C_{m-1}^2\left(\frac{m-2}{n}\right)^{a-1} - \ldots . + \right.$$

$$\left. + (-1)^{m-2} C_{m-1}^{m-2}\left(\frac{2}{n}\right)^{a-1} + (-1)^{m-1}\left(\frac{1}{n}\right)^{a-1}\right\}.$$

Probleem van de Moivre.

5. *Men doet een worp met n dobbelsteenen, ieder met a zijvlakken, waarop de getallen $1, 2, \ldots ., a$ zijn aangebracht. Hoe groot is de kans, dat door de dobbelsteenen te zamen p geworpen wordt?* **(probleem van de Moivre).**

Het totale aantal gevallen is a^n, daar bij ieder der n dobbelsteenen ieder der a zijvlakken kan boven komen. Die gevallen correspondeeren met de termen in de ontwikkeling van

$$(x + x^2 + x^3 + \ldots . + x^a)^n,$$

als men dit uitwerkt zonder de commutatieve eigenschap der vermenigvuldiging te gebruiken; het aantal factoren x in zulk een term komt overeen met het aantal oogen van den bijbehoorenden worp. Bijgevolg is het aantal gunstige gevallen gelijk aan den coëfficiënt van x^{p-n} in de ontwikkeling van

$$(1 + x + x^2 + \ldots . + x^{a-1})^n = (1 - x^a)^n (1 - x)^{-n} =$$

$$= \left(1 - nx^a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{2a} - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{3a} + \ldots .\right) \times$$

$$\times \left(1 + nx + \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3 + \ldots .\right).$$

Hieruit vindt men voor de *gevraagde kans:*

$$\frac{1}{a^n}\left\{C_{p-1}^{n-1} - C_n^1 C_{p-a-1}^{n-1} + C_n^2 C_{p-2a-1}^{n-1} - C_n^3 C_{p-3a-1}^{n-1} + \ldots .\right\} =$$

$$= \frac{n}{a^n}\left\{\frac{(p-1)!}{n!\,(p-n)!} - \frac{(p-a-1)!}{(n-1)!\,(p-a-n)!} + \right.$$

$$\left. + \frac{(p-2a-1)!}{2!\,(n-2)!\,(p-2a-n)!} - \frac{(p-3a-1)!}{3!\,(n-3)!\,(p-3a-n)!} + \ldots\right\}.$$

waarbij de sommeering moet worden voortgezet zoolang de getallen tusschen haakjes niet negatief zijn.

De gevraagde kans verandert niet, als men p door $n(a+1)-p$ vervangt. Vervangt men nl. op ieder zijvlak het daarop aangebrachte getal door zijn aanvulling tot $a+1$, dan gaat een worp p in een worp $n(a+1)-p$ over. Bij gewone dobbelsteenen (waarbij het aantal oogen op twee overstaande zijvlakken te zamen steeds 7 is) komt dit daarop neer, dat een worp p door het omdraaien van alle dobbelsteenen in $7n-p$ overgaat. Het vervangen van p door $n(a+1)-p$ is voordeelig, zoo laatstgenoemd getal kleiner is.

Als voorbeeld vragen we naar de *kans met 10 gewone dobbelsteenen 43 te werpen* ($n=10$, $a=6$, $p=43$). Met voordeel kan men 43 door $70-43=27$ vervangen, waardoor men voor de *gevraagde kans* vindt:

$$\frac{1}{6^{10}}(C_{26}^{9}-C_{10}^{1}C_{20}^{9}+C_{10}^{2}C_{14}^{9})=\frac{13}{6^{10}}(240350-129200+6930)=$$

$$=\frac{13\times 118080}{6^{10}}=\frac{13\times 205}{2^4 3^8}=\frac{2665}{104976}=0{,}025387.$$

Had men 43 niet eerst tot 27 verkleind, dan had men voor de kans gevonden:

$$\frac{1}{6^{10}}(C_{42}^{9}-C_{10}^{1}C_{36}^{9}+C_{10}^{2}C_{30}^{9}-C_{10}^{3}C_{24}^{9}+C_{10}^{4}C_{18}^{9}-C_{10}^{5}C_{12}^{9});$$

de becijfering was dan veel bewerkelijker geweest.

§ 6. OPGAVEN.

1. Bereken bij het ontmoetingsspel (zie blz. 21) de kans op minstens twee ontmoetingen.
2. Bewijs, dat bij het ontmoetingsspel de kans op minstens j ontmoetingen gelijk is aan

$$\frac{1}{(j-1)!}\left\{\frac{1}{j}-\frac{1}{1!(j+1)}+\frac{1}{2!(j+2)}-\frac{1}{3!(j+3)}+\right.$$
$$\left.+\ldots+(-1)^{n-j}\frac{1}{(n-j)!\,n}\right\}.$$

Men passe volledige inductie toe en wel zoodanig, dat men de juistheid voor minstens $j+1$ ontmoetingen aanneemt en daaruit de juistheid voor minstens j ontmoetingen afleidt.

3. Bij het ontmoetingsspel wordt niet de geheele bak geledigd, maar worden m ballen getrokken (daarbij van 1 tot m tellend). Bewijs, dat de kans op minstens één ontmoeting gelijk is aan

$$\frac{m!}{n!}\left\{\frac{(n-1)!}{1!(m-1)!}-\frac{(n-2)!}{2!(m-2)!}+\frac{(n-3)!}{3!(m-3)!}-\ldots\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{m-1}\frac{(n-m)!}{m!}\right\}$$

en de kans op juist één ontmoeting gelijk aan

$$\frac{m!}{n!}\left\{\frac{(n-1)!}{(m-1)!}-\frac{(n-2)!}{1!(m-2)!}+\frac{(n-3)!}{2!(m-3)!}-\ldots\ldots+\right.$$
$$\left.+(-1)^{m-1}\frac{(n-m)!}{(m-1)!}\right\}.$$

4. Bij het spel van vraagstuk 3, blz. 24 worden b nummers genoemd. Bewijs, dat de kans, dat onder die b nummers juist m getrokken nummers voorkomen, gelijk is aan

$$C_b^m\left\{\left(1-\frac{b-m}{n}\right)^a-C_m^1\left(1-\frac{b-m+1}{n}\right)^a+\right.$$
$$+C_m^2\left(1-\frac{b-m+2}{n}\right)^a-C_m^3\left(1-\frac{b-m+3}{n}\right)^a+\ldots\ldots+$$
$$\left.+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}\left(1-\frac{b-1}{n}\right)^a+(-1)^m\left(1-\frac{b}{n}\right)^a\right\}.$$

Voor $b=n$ is dit het vraagstuk 4 van blz. 25.

5. Bereken de kans met 20 dobbelsteenen te zamen 80 te werpen.

6. Bereken de kans met 5 dobbelsteenen minstens 19 te werpen.

REGELS TER BEPALING VAN KANSEN.

§ 7. Het berekenen van kansen wordt in vele gevallen zeer vereenvoudigd door eenige regels, tot de bespreking waarvan we nu overgaan.

Totale waarschijnlijkheid. *De kans eener gebeurtenis, die op verschillende elkaar uitsluitende manieren tot stand kan komen, is gelijk aan de som der kansen op het tot stand komen van die gebeurtenis volgens elk dier manieren afzonderlijk.*

Dit is ook aldus te formuleeren:

I. Zijn k_1, k_2, enz. resp. de kansen op de elkaar uitsluitende gebeurtenissen A_1, A_2, enz., dan is $k_1 + k_2 + \ldots$ de kans, dat een dier gebeurtenissen tot stand komt.

Men noemt dit den ***regel der totale waarschijnlijkheid*** (waarschijnlijkheid van het ***òf dit òf dat***).

Het bewijs is eenvoudig. Is M het aantal mogelijke gevallen, waarvan er G_1 gunstig zijn voor A_1, G_2 gunstig voor A_2 enz., dan is het aantal gunstige gevallen voor het tot stand komen van een der gebeurtenissen A_1, A_2, enz. gelijk aan $G_1 + G_2 + \ldots$. De kans op een dier gebeurtenissen is dus:

$$\frac{G_1 + G_2 + \ldots}{M} = \frac{G_1}{M} + \frac{G_2}{M} + \ldots = k_1 + k_2 + \ldots$$

Bij het toepassen van den regel der totale waarschijnlijkheid heeft men vooral op het elkaar uitsluiten der afzonderlijke gebeurtenissen te letten, daar men anders sommige gunstige gevallen meerdere malen telt en dus een te groot bedrag voor de gevraagde kans vindt. Zoo is de *kans uit een spel van 52 kaarten een harten of een prentje* (boer, vrouw, heer of aas) te trekken niet gelijk aan $\frac{1}{4}$ (kans op harten) + $\frac{4}{13}$ (kans op een prentje), maar gelijk aan $\frac{25}{52}$, d.i. $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ (kans op hartenprentje) kleiner dan genoemde som; dit is het gevolg daarvan, dat de 4 gevallen, waarbij de getrokken kaart zoowel een harten als een prentje is, dubbel geteld zijn. Een juiste toepassing van den regel der totale waarschijnlijkheid krijgt men door voor de gevraagde kans te schrijven: $\frac{1}{4}$ (kans op harten) + $\frac{1}{13}$ (kans op ruitenprentje) + $\frac{1}{13}$ (kans op klaverenprentje) + $\frac{1}{13}$ (kans op schoppenprentje), of door voor die kans te schrijven $\frac{4}{13}$ (kans op een prentje) + $\frac{9}{52}$ (kans op harten, maar geen prentje).

De eigenschap, dat twee complementaire kansen te zamen 1 zijn, is een bijzonder geval van den regel der totale waarschijnlijkheid. De kans, dat een gebeurtenis tot stand komt of niet tot stand komt (hetgeen elkaar uitsluit), is nl. 1. Ook de eigenschap van blz. 10, betreffende meerdere kansen met een som 1, is een bijzonder geval van genoemden regel.

We laten hier nog een voorbeeld volgen:

A en B hebben ieder een spel van 52 kaarten. A trekt uit zijn spel een kaart; deze is schoppen 5, terwijl ruiten troef is. Hoe groot is de kans, dat B uit zijn spel een kaart trekkende wint, d.w.z. een troef trekt of een hoogere schoppenkaart?

De kans, dat B een troef trekt, is $\frac{1}{4}$, de kans op een hoogere schoppenkaart $\frac{9}{52}$. De winstkans van B is derhalve $\frac{1}{4} + \frac{9}{52} = \frac{13}{52} + \frac{9}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$.

Op zich zelf biedt de regel der totale waarschijnlijkheid weinig voordeel, daar het vrijwel op hetzelfde neerkomt of men het aantal gunstige gevallen telt door dit als $G_1 + G_2 + \ldots$ te bepalen, dan wel de gevraagde kans als $\frac{G_1}{M} + \frac{G_2}{M} + \ldots$ voor den dag brengt. Zoo kan men in het laatste voorbeeld de kans van B ook vinden door op te merken, dat hij wint, als hij een der 13 troeven of een der 9 hoogere schoppen trekt, zoodat zijn kans $\frac{13+9}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$ is, welke oplossing niet noemenswaard van de boven gegevene verschilt. Wel geeft de regel der totale waarschijnlijkheid groot voordeel in combinatie met den volgenden regel:

Samengestelde waarschijnlijkheid.

II. De kans op een gebeurtenis, die in het tot stand komen van meerdere onafhankelijke gebeurtenissen A_1, A_2, enz. resp. met kansen k_1, k_2, enz. bestaat, is gelijk aan het product $k_1 k_2 \ldots$.

Dit heet de regel der ***samengestelde waarschijnlijkheid*** (waarschijnlijkheid van het ***zoowel dit als dat***).

Het bewijs is aldus. Heeft men bij de gebeurtenis A_1 te onderscheiden M_1 gelijkwaardige gevallen, waaronder G_1 gunstige, terwijl bij A_2 het aantal gevallen M_2 bedraagt met G_2 gunstige, enz., dan heeft men bij de gebeurtenis, die in het tot stand komen van ieder der gebeurtenissen A_1, A_2, enz. bestaat, $M_1 M_2 \ldots$ gelijkwaardige gevallen (waarvan ieder een combinatie is van een der M_1 gevallen met een der M_2 gevallen, enz.), waaronder $G_1 G_2 \ldots$ gunstige. Dit geeft een kans

$$\frac{G_1 G_2 \ldots}{M_1 M_2 \ldots} = \frac{G_1}{M_1} \cdot \frac{G_2}{M_2} \ldots = k_1 k_2 \ldots$$

Bij den regel der samengestelde waarschijnlijkheid worden de afzonderlijke gebeurtenissen ***van elkaar onafhankelijk*** gedacht, hetgeen zeggen wil, *dat de kans op een dier gebeurtenissen niet afhangt van het al of niet tot stand komen der andere gebeurtenissen.* Door hierop niet te letten kan men onjuiste uitkomsten verkrijgen. Trekt men b.v. een bal uit een bak met 15 genummerde ballen (van 1 tot 15), dan is de kans op een even nummer $\frac{7}{15}$ en de kans op een 3-voud $\frac{1}{3}$. Doet zich zoowel het eene als het andere voor, dan krijgt men een door 6 deelbaar nummer. De kans daarop is echter niet $\frac{7}{15} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{45}$, maar $\frac{2}{15}$. Dit komt doordat de kans op een 3-voud voor de even nummers niet dezelfde is als voor de oneven nummers.

Herhaalde proefnemingen.

Een veel voorkomende toepassing van den regel der samengestelde waarschijnlijkheid levert een *gebeurtenis, die* *in het eenige malen achtereen tot stand komen van een andere gebeurtenis bestaat.* Bij het werpen met een dobbelsteen is de kans op 6 gelijk aan $\frac{1}{6}$; *de kans om n-maal achtereen 6 te werpen is dus* $(\frac{1}{6})^n$.

Bij n worpen met een dobbelsteen is de kans op juist a zessen, en wel bij worpen met vooraf aangegeven rangnummers, gelijk aan $(\frac{1}{6})^a (\frac{5}{6})^{n-a}$, daar de gebeurtenis bestaat in het tot stand komen van n gebeurtenissen, waarvan er a een kans $\frac{1}{6}$ en $n - a$ een kans $\frac{5}{6}$ hebben. *De kans op juist a zessen, onverschillig bij welke der n worpen, is dus*

$$C_n^a \left(\frac{1}{6}\right)^a \left(\frac{5}{6}\right)^{n-a},$$

daar de gebeurtenis op C_n^a elkaar uitsluitende manieren (de verschillende a-tallen uit de n worpen te vormen) kan tot stand komen en ieder dier manieren een kans $(\frac{1}{6})^a(\frac{5}{6})^{n-a}$ biedt.

Doet men algemeener n proefnemingen, die ieder met een kans k een zeker resultaat opleveren, dan wordt de kans K_a, *dat dit resultaat zich juist a-maal vertoont, door*

$$K_a = C_n^a\, k^a(1-k)^{n-a} = \frac{n!}{a!\,(n-a)!}\, k^a\,(1-k)^{n-a}$$

voorgesteld. Blijkens

$$\frac{K_a}{K_{a-1}} = \left(\frac{n+1}{a} - 1\right)\frac{k}{1-k}, \quad \frac{K_{a+1}}{K_a} = \left(\frac{n+1}{a+1} - 1\right)\frac{k}{1-k}$$

neemt de verhouding $K_{a+1} : K_a$ af, als a toeneemt, om met $\frac{nk}{1-k}$ te beginnen ($a = 0$) en met $\frac{k}{n(1-k)}$ te eindigen ($a = n - 1$). Men heeft $K_{a+1} = K_a$, als $a = k(n+1) - 1$ is, hetgeen zich alleen kan voordoen, als $k(n+1)$ een geheel getal is; in dat geval zijn de kansen op $k(n+1)$ en op $k(n+1) - 1$ resultaten gelijk en grooter dan de kansen op een ander aantal resultaten. Is $k(n+1)$ niet geheel, dan is er één waarde van a, waarvoor K_a het grootst is, nl. het kleinste getal a, waarvoor voldaan is aan

$$\left(\frac{n+1}{a+1} - 1\right)\frac{k}{1-k} < 1,$$

dus aan $a + 1 > k(n + 1)$; dit getal a wordt bepaald door

$$k(n + 1) - 1 < a < k(n + 1).$$

Bijgevolg *is het waarschijnlijkste aantal resultaten het tusschen $k(n + 1) - 1$ en $k(n + 1)$ gelegen geheele getal;* zijn deze grenzen toevallig geheel, dan zijn er twee waarschijnlijkste aantallen (nl. deze grenzen). Het waarschijnlijkste aantal is 0 als $k < \frac{1}{n+1}$ is, terwijl voor $k = \frac{1}{n+1}$ de aantallen 0 en 1 even waarschijnlijk zijn. Het waarschijnlijkste aantal is n, als $k > \frac{n}{n+1}$ is, terwijl voor $k = \frac{n}{n+1}$ de aantallen n en $n - 1$ even waarschijnlijk zijn. *Het waarschijnlijkste aantal resultaten (eventueel ieder der twee waarschijnlijkste aantallen) verschilt minder dan 1 van kn. Evenzoo verschilt het waarschijnlijkste aantal malen, dat het bedoelde resultaat niet opgeleverd wordt, minder dan 1 van $(1 - k)n$. Is n groot, dan verhouden beide waarschijnlijkste aantallen zich dus nagenoeg als de bijbehoorende kansen k en $1 - k$.* Intusschen is dan toch de kans, dat de waargenomen aantallen precies met de waarschijnlijkste aantallen overeenstemmen, zeer gering. Aangetoond kan echter worden, dat de kans, dat de verhouding der waargenomen aantallen belangrijk van die der waarschijnlijkste aantallen afwijkt, des te kleiner wordt naarmate het aantal n der proefnemingen grooter genomen wordt. Zoo zullen bij een steeds grooter aantal worpen met een dobbelsteen de verhoudingen der aantallen malen, dat 1, 2, 3, 4, 5, 6 geworpen is, onbepaald tot 1 naderen.

Samentreffen van afhankelijke gebeurtenissen.

In gewijzigden vorm is de regel der samengestelde waarschijnlijkheid ook van toepassing op het samentreffen van onderling afhankelijke gebeurtenissen. Men moet den regel dan aldus uitspreken:

III. De kans op een gebeurtenis, die in het na elkaar plaats vinden der gebeurtenissen A_1 en A_2 bestaat, is gelijk aan k_1k_2, waarin k_1 de kans op de

gebeurtenis A_1 is en k_2 de kans op de gebeurtenis A_2, zooals die is, nadat A_1 plaats gevonden heeft.

Is k_2 onafhankelijk van het al of niet plaats vinden van A_1, dan zijn beide gebeurtenissen onafhankelijk en heeft men den vorigen regel.

Het bewijs is weer zeer eenvoudig. Zij M het totale aantal gelijkwaardige gevallen bij de uit A_1 en A_2 samengestelde gebeurtenis. Laten daarvan G_1 gunstig zijn voor A_1 en van deze G_1 gevallen weer G_2 gunstig voor A_2. De kans op de uit A_1 en A_2 samengestelde gebeurtenis is dan:

$$\frac{G_2}{M} = \frac{G_1}{M} \cdot \frac{G_2}{G_1} = k_1 k_2.$$

Het is duidelijk, *dat de regel tot meerdere gebeurtenissen is uit te breiden. Zoo is de kans op het na elkaar plaats vinden der gebeurtenissen A_1, A_2 en A_3 gelijk aan $k_1 k_2 k_3$, waarin k_1 de kans op A_1 is, k_2 de kans op A_2, nadat A_1 plaats gevonden heeft, en k_3 de kans op A_3, nadat A_1 en A_2 plaats gevonden hebben*, zooals door tweemalige toepassing van regel III blijkt. De kans toch op (A_1, A_2), d.i. op de gebeurtenis, die in het samentreffen van de gebeurtenissen A_1 en A_2 bestaat, is $k_1 k_2$, dus de kans op het samentreffen van A_1, A_2 en A_3, dus van (A_1, A_2) en A_3, gelijk aan $(k_1 k_2) k_3$. Ook kan men laatstgenoemde kans voor den dag brengen als

$$\frac{G_3}{M} = \frac{G_1}{M} \cdot \frac{G_2}{G_1} \cdot \frac{G_3}{G_2} = k_1 k_2 k_3,$$

waarin M het totale aantal gelijkwaardige gevallen is, waarvan er G_1 gunstig zijn voor A_1, van welke er weer G_2 gunstig zijn voor A_2, terwijl ten slotte G_3 dezer G_2 gevallen ook gunstig zijn voor A_3.

Verschillende vraagstukken, die bij rechtstreeksche behandeling de theorie der combinaties vorderen, kunnen zonder deze theorie met behulp van den regel III worden opgelost. Als voorbeeld nemen we vraagstuk 3 van blz. 16, de *kans uit een bak met p witte en q zwarte ballen een greep van a witte ballen te doen.* Men wijzigt die kans niet, als men zich voorstelt, dat de a ballen na elkaar getrokken worden. De kans, dat de eerste wit is, bedraagt $\frac{p}{p+q}$. Is de eerste getrokken bal wit, dan bevat de bak nog $p-1$ witte en q zwarte ballen, zoodat dan de kans, dat de tweede bal ook wit is, $\frac{p-1}{p+q-1}$ bedraagt. Is deze wit, dan wordt de kans, dat de derde bal weer wit is, $\frac{p-2}{p+q-2}$, enz. Zijn ten slotte $a-1$ witte ballen getrokken, dan is de kans, dat de a^{de} bal wit is, $\frac{p-a+1}{p+q-a+1}$, daar de bak dan nog $p-(a-1)$ witte en q zwarte ballen bevat. *De kans op a witte ballen is dus:*

$$\frac{p}{p+q}\cdot\frac{p-1}{p+q-1}\cdot\frac{p-2}{p+q-2}\cdots\cdots\frac{p-a+1}{p+q-a+1}.$$

We laten hier enkele gecompliceerdere voorbeelden volgen:

Voorbeelden. 1. *Uit een bak met n genummerde ballen wordt a-maal een bal getrokken en teruggeworpen. Hoe groot is de kans, dat het hoogste getrokken nummer p is?*

Eerste oplossing. De kans, dat het hoogste getrokken nummer hoogstens p is, bedraagt $\left(\frac{p}{n}\right)^a$. Weet men, dat geen hooger nummer dan p getrokken is, dan is de kans, dat het nummer p niet getrokken is, $\left(\frac{p-1}{p}\right)^a$, dus de kans, dat dit nummer wel getrokken is, $1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^a$. De gevraagde kans is dus:

$$\left(\frac{p}{n}\right)^a\left\{1-\left(\frac{p-1}{p}\right)^a\right\}=\left(\frac{p}{n}\right)^a-\left(\frac{p-1}{n}\right)^a.$$

Tweede opl. De kans, dat het hoogst uitgekomen nummer p of meer bedraagt, is $1-\left(\frac{p-1}{n}\right)^a$. Die kans is echter ook gelijk aan de som van de gevraagde kans x en de kans

$1 - \left(\frac{p}{n}\right)^a$, dat het hoogst uitgekomen nummer meer dan p bedraagt. Hieruit volgt:

$$x = 1 - \left(\frac{p-1}{n}\right)^a - \left\{1 - \left(\frac{p}{n}\right)^a\right\} = \left(\frac{p}{n}\right)^a - \left(\frac{p-1}{n}\right)^a.$$

2. *Uit een bak met p witte en q zwarte ballen wordt door n spelers $A_1, A_2, \ldots, A_n$ om de beurt (beginnend met A_1, terwijl op A_n weer A_1 volgt) een bal getrokken en teruggeworpen, totdat een witte bal getrokken is. Wat is de winstkans van ieder der spelers?*

Zij k_i de winstkans van den speler A_i. Wil A_i winnen $(i > 1)$, dan moeten $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}$ ieder een zwarten bal trekken (waarvoor de kans $\left(\frac{q}{p+q}\right)^{i-1}$ is), waarna zijn kans dan k_1 is. Men heeft dus:

$$k_i = \left(\frac{q}{p+q}\right)^{i-1} k_1.$$

Daar een der spelers zeker wint, is

$$k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_n = 1,$$

dus:

$$k_1\left\{1 + \frac{q}{p+q} + \left(\frac{q}{p+q}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{q}{p+q}\right)^{n-1}\right\} = 1.$$

Hieruit volgt:

$$k_1 = \frac{p(p+q)^{n-1}}{(p+q)^n - q^n}, \quad k_i = \frac{pq^{i-1}(p+q)^{n-i}}{(p+q)^n - q^n}.$$

Voor $n = 2$ krijgt men het vraagstuk 1 van blz. 14.

Dit voorbeeld doet zien, dat de regel III soms met voordeel kan worden toegepast in vraagstukken, waarbij het aantal gelijkwaardige gevallen oneindig groot is en dus een rechtstreeksche oplossing een limietovergang zou vorderen. In een zoodanig geval berust de geldigheid van den gebruikten regel op een limietovergang. Hierdoor komt het, dat het toepassen van den regel het overgaan tot de limiet overbodig maakt. Die overgang wordt, om zoo te zeggen, automatisch door het toepassen van den regel volbracht.

Combinatie der verschillende regels.

De regel III komt eerst goed tot zijn recht in combinatie met den regel I der totale waarschijnlijkheid. Men krijgt dan:

IV. Is voor het tot stand komen van een zekere gebeurtenis noodig (maar niet voldoende) het tot stand komen van een der elkaar uitsluitende gebeurtenissen A_1, A_2, enz. resp. met kansen k_1, k_2, enz., terwijl de kans op de bedoelde gebeurtenis, nadat een der gebeurtenissen A_1, A_2, enz. tot stand gekomen is, resp. in l_1, l_2, enz., is overgegaan, dan is aanvankelijk de kans op die gebeurtenis:

$$k_1l_1 + k_2l_2 + \dots .$$

Men drukt dit ook zoo uit, *dat de gebeurtenis door verschillende elkaar uitsluitende* **oorzaken** *A_1, A_2, ... kan tot stand komen*, waarbij aan het woord „oorzaak" niet de gewone beteekenis gehecht moet worden; *k_1, k_2, enz. zijn resp. de kansen, dat de oorzaken A_1, A_2, enz. werkzaa zijn, terwijl l_1, l_2, enz. resp. de kansen voorstellen, dat oorzaken, zoo ze werkzaam zijn, de beschouwde gebeurte ten gevolge hebben.*

De kans, dat de gebeurtenis door de oorzaak A_1 tot stand komt, is volgens regel III gelijk aan k_1l_1, de kans dat de gebeurtenis door de oorzaak A_2 tot stand komt, is k_2l_2, enz. Volgens regel I is dus de kans op de gebeurtenis gelijk aan $k_1l_1 + k_2l_2 + \dots .$

Het vraagstuk met de twee bakken van blz. 12—13, waarbij zonder meer geen splitsing in gelijkwaardige gevallen mogelijk is, levert bij toepassing van regel IV geen enkele moeilijkheid meer. Het trekken van een witten bal kan door twee oorzaken tot stand komen, nl. het trekken van een bal uit bak A en het trekken van een bal uit bak B; van ieder dier oorzaken is de kans werkzaam te zijn $\frac{1}{2}$. De kans, dat de oorzaak A, zoo ze werkt, de gebeurtenis ten gevolge heeft (dus de kans op wit, als men uit bak A een bal trekt), is $\frac{3}{8}$, de kans, dat de oorzaak B het trekken van wit tengevolge heeft, is $\frac{5}{12}$. Aanvankelijk is dus de kans op wit:

$$\tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{5}{12} = \tfrac{3}{16} + \tfrac{5}{24} = \tfrac{19}{48}.$$

Men zou kunnen tegenwerpen, dat in het beschouwde geval de (op een splitsing in gelijkwaardige gevallen berustende) afleiding van regel IV niet doorgaat. De mogelijkheid het vraagstuk zoo te wijzigen, dat de abstracte waarschijnlijkheid onveranderd blijft en een splitsing in gelijkwaardige gevallen mogelijk wordt, is echter voldoende om te doen zien, dat de regel IV van toepassing gebleven is. In plaats van die wijziging geheel door te voeren (iets, dat in gecompliceerde gevallen zeer bewerkelijk worden kan), heeft men zich slechts van de mogelijkheid van zulk een wijziging te overtuigen; het uitvoeren dier wijziging geschiedt dan als het ware automatisch door toepassing van den regel IV.

Voorbeelden. De volgende voorbeelden dienen ter toelichting van het gebruik, dat van regel IV gemaakt kan worden:

3. *Men heeft een bak A met p witte en q zwarte ballen en een bak B met r witte en s zwarte ballen. Uit bak A trekt men blindelings a ballen, die in bak B geworpen worden. Daarna trekt men uit bak B een bal. Hoe groot is de kans, dat die wit is?*

Eerste oplossing. De gevraagde kans is $k_0 l_0 + k_1 l_1 + \dots +$ $+ k_a l_a$, waarin k_i de kans is, dat van de a uit A getrokken ballen i wit zijn, en l_i de kans, dat dan uit B wit getrokken wordt. Nu is (ook als $i > p$ of $a - i > q$ is):

$$k_i = \frac{C_p^i C_q^{a-i}}{C_{p+q}^a}, \quad l_i = \frac{r+i}{r+s+a},$$

dus de *gevraagde kans:*

$$\frac{\sum_{i=0}^{a}(r+i)\,C_p^i C_q^{a-i}}{(r+s+a)\,C_{p+q}^a} = \frac{r\sum_{i=0}^{a} C_p^i C_q^{a-i} + p\sum_{i=1}^{a} C_{p-1}^{i-1} C_q^{a-i}}{(r+s+a)C_{p+q}^a} =$$

$$= \frac{rC_{p+q}^a + pC_{p+q-1}^{a-1}}{(r+s+a)C_{p+q}^a} = \frac{r(p+q)+ap}{(r+s+a)(p+q)}.$$

De kans op zwart wordt gevonden door p met q en r met s te verwisselen en is dus $\dfrac{s(p+q)+aq}{(r+s+a)(p+q)}$. Naar behooren is de som dezer twee complementaire kansen 1.

Tweede oplossing. De gevraagde kans wordt eenvoudiger gevonden door op te merken, dat de uit B getrokken bal òf van den aanvang af in B zat (kans $\frac{r+s}{r+s+a}$), òf een der a uit A afkomstige ballen is (kans $\frac{a}{r+s+a}$). Dit geeft voor de gevraagde kans:

$$\frac{r+s}{r+s+a}\cdot\frac{r}{r+s}+\frac{a}{r+s+a}\cdot\frac{p}{p+q}=\frac{r(p+q)+ap}{(r+s+a)(p+q)}.$$

4. *Twee spelers spelen bij herhaling een spel, waarbij A een winstkans k en B een winstkans $1-k=l$ heeft. Telkens wordt voor den winner een punt aangestreept, terwijl de speler, die het eerst een voorgeschreven aantal punten bereikt, het totaalspel wint. Wat zijn de winstkansen van A en B op een oogenblik, dat A nog p en B nog q winstpunten maken moet?* (**puntenprobleem**).

Eerste oplossing. Na $p+q-1$ partijen is het spel zeker beslist, terwijl dan niet beide spelers het hun ontbrekende aantal punten gemaakt kunnen hebben. We denken nu $p+q-1$ partijen gespeeld, ook al is de beslissing eerder gevallen. De speler A wint, als hij van deze $p+q-1$ partijen er minstens p wint (hetgeen q manieren geeft om te winnen, nl. $p+q-1$, $p+q-2$, ..., p gewonnen partijen). *De winstkans van A is dus:*

$$k^p(k^{q-1}+C^1_{p+q-1}k^{q-2}l+C^2_{p+q-1}k^{q-3}l^2+\ldots.+C^{q-1}_{p+q-1}l^{q-1}).$$

De *winstkans van B* vindt men hieruit door k met l en p met q te verwisselen; deze is dus:

$$l^q(l^{p-1}+C^1_{p+q-1}l^{p-2}k+C^2_{p+q-1}l^{p-3}k^2+\ldots.+C^{p-1}_{p+q-1}k^{p-1}).$$

De som der kansen van A en B (ontwikkeling van $(k+l)^{p+q-1}$) is naar behooren 1.

Tweede oplossing. De speler A kan op q manieren winnen, nl. na p, $p+1$, ..., $p+q-1$ partijen. Dit geeft voor de *kans van A:*

$$k^p(1+C^1_p l+C^2_{p+1}l^2+C^3_{p+2}l^3+\ldots.+C^{q-1}_{p+q-2}l^{q-1})$$

en evenzoo voor de *kans van B:*

$$l^q(1+C^1_q k+C^2_{q+1}k^2+C^3_{q+2}k^3+\ldots.+C^{p-1}_{p+q-2}k^{p-1}).$$

Men zal de kans van A of van B berekenen, al naar gelang $q < p$ of $p < q$ is (daar dan de som het kleinste aantal termen heeft).

§ 8. **OPGAVEN.**

1. Hoe groot is de kans bij drie worpen met twee dobbelsteenen minstens één keer 5 en minstens één keer 7 te werpen?
2. Hoe groot is de kans, dat bij twee getallen van n cijfers het kleinste van het grootste kan worden afgetrokken zonder te leenen?
3. Hoe groot is de kans, dat een getal van n cijfers van een getal van meer dan n cijfers kan worden afgetrokken zonder te leenen?
4. Hoe groot zijn bij het puntenprobleem de kansen van A en B, als A nog 10 en B nog 4 punten maken moet en A bij de afzonderlijke partijen een kans $\frac{1}{3}$ heeft?
5. Een bak A bevat p witte en q zwarte ballen, een bak B bevat r witte en s zwarte ballen. Men doet a ballen blindelings van bak A in bak B en trekt daarna twee ballen uit B. Hoe groot is de kans, dat die beide wit zijn, en hoe groot de kans, dat de eene bal wit en de andere zwart is?
6. Een overlevering wordt door n personen van mond tot mond overgebracht. Hoe groot is de kans, dat deze geheel juist over komt, als iedere persoon een kans k heeft een onjuistheid te begaan en uitgesloten is, dat twee onjuistheden elkaar opheffen?
7. Een mondelinge overlevering, die in „ja" of „neen" bestaat, gaat over n personen. Voor iedere persoon is k de kans, dat hij zich vergist, en l de kans, dat hij opzettelijk liegt (dus het juist anders overbrengt dan hij het zich meent te herinneren). Hoe groot is de kans, dat de overlevering juist over komt?
8. Een beschuldigde moet door een rechtbank van 7 personen (waarbij de meerderheid beslist) gevonnist worden. Indien er een kans k is, dat de beschuldigde schuldig is, en voor ieder der rechters een kans l, dat hij een juist vonnis uitspreekt, hoe groot is dan de kans, dat de beschuldigde veroordeeld wordt, en hoe groot de kans, dat het vonnis juist is?

9. A en B spelen met twee dobbelsteenen. A gooit tweemaal achtereen en wint indien hij in beide gevallen hetzelfde aantal oogen gooit. Zijn die aantallen verschillend, dan gooit A door totdat hij hetzelfde aantal oogen gooit als bij den 1sten of bij den 2den worp; in het eerste geval wint hij, in het tweede geval verliest hij. Wat is de winstkans van A?

10. Uit een spel van 28 dominosteenen trekt men twee steenen. Hoe groot is de kans, dat beide steenen hetzelfde aantal oogen aanwijzen? Op te lossen door zich voor te stellen, dat beide steenen na elkaar getrokken worden.

11. Men heeft drie gelijke bakken. In den eenen bak bevinden zich 5 witte en 7 zwarte ballen, in den tweeden bak 6 witte en 7 zwarte ballen en in den derden bak 7 witte en 11 zwarte ballen. Hoe groot is de kans een witten bal te trekken, als men een dier bakken uitkiest en daaruit een bal trekt?

12. Men doet n proefnemingen, waarvan ieder met een kans k een zeker resultaat ten gevolge heeft, terwijl kn geheel is. Bewijs, dat voor groote waarden van n de kans op juist kn (het waarschijnlijkste aantal) resultaten bij benadering gelijk is aan $\frac{1}{\sqrt{2\pi k(1-k)n}}$ en dat een betere benadering voor die kans is:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi k(1-k)n}}\left(1+\frac{1-k(1-k)}{12k(1-k)n}\right).$$

13. Stelt een kans de verhouding $G:(M-G)$ voor van het aantal gunstige tot het aantal ongunstige gevallen, dan gaat de regel der totale waarschijnlijkheid over in:
Hebben de elkaar uitsluitende gebeurtenissen A en B resp. de kansen k en l, dan is de kans op het tot stand komen van een dier gebeurtenissen $\frac{k+l+2kl}{1-kl}$
Bewijs dit.

14. Waarin gaat de regel der samengestelde waarschijnlijkheid voor twee gebeurtenissen over, als een kans op dezelfde wijze gedefiniëerd wordt als in de vorige opgave?

15. Een gebeurtenis kan op twee elkaar niet uitsluitende manieren tot stand komen. Er is een kans k, dat de gebeurtenis o.a. op de eerste manier tot stand komt, een kans l, dat ze o.a. op de tweede manier tot stand komt, en een kans m, dat ze op beide manieren tegelijk tot stand komt. Bewijs, dat de kans op die gebeurtenis $k + l - m$ is. Waarin gaat dit over, als de gebeurtenis op meerdere manieren, maar niet tegelijkertijd op meer dan twee dier manieren kan tot stand komen?

16. Bij het werpen met een zeker aantal dobbelsteenen heeft de worp A een kans k en de worp B een kans l. Hoe groot is de kans in n worpen minstens éénmaal een worp A en minstens éénmaal een worp B gedaan te hebben? Opgave 1 is hiervan een bijzonder geval.

17. Hoe groot is de kans, dat bij het whisten minstens één der vier spelers 13 kaarten krijgt, waarbij zich geen enkel prentje (boer, vrouw, heer of aas) bevindt?

18. Bewijs de volgende uitbreiding van den regel der totale waarschijnlijkheid:

De kans eener gebeurtenis, die bestaat in het tot stand komen van minstens één der (elkaar niet uitsluitende) gebeurtenissen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ is gelijk aan

$$S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^n S_{n-1} + (-1)^{n+1} S_n.$$

Hierin is:

$$S_1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_n.$$
$$S_2 = p_{12} + p_{13} + \ldots + p_{1n} + p_{23} + \ldots + p_{n-1,\,n},$$
$$S_3 = p_{123} + p_{124} + \ldots + p_{n-2,\,n-1,\,n},$$

enz., zoodat $S_n = p_{12\ldots n}$ is. Verder zijn $p_1, p_2, \ldots, p_n$ resp. de kansen op $A_1, A_2, \ldots, A_n$, terwijl p_{12} de kans is op het samentreffen van A_1 en A_2, p_{123} de kans op het samentreffen van A_1, A_2 en A_3, enz.

19. Waarin gaat de eigenschap van de vorige opgave over, als de p's met een zelfde aantal indices alle gelijk zijn?

20. Bepaal met behulp van de beide vorige opgaven de kans op minstens één ontmoeting bij het spel van DE MONTMORT, ook voor het geval, dat de bak niet geheel geledigd wordt (zie Opgave 3, blz. 28).

21. Bepaal met behulp van de Opgaven 18 en 19 de kans voorkomend in vraagstuk 3, blz. 24.

Men bepale de tegenkans.

22. Uit een bak met n genummerde ballen wordt a-maal achtereen een bal getrokken en teruggeworpen. Hoe groot is de kans, dat de nummers $1, 2, \ldots, b$ minstens éénmaal in de natuurlijke volgorde verschenen zijn? Becijfer die kans voor het geval $n = 6$, $a = 100$, $b = 6$ (kans om bij 100 worpen met een dobbelsteen minstens éénmaal de serie 1, 2, 3, 4, 5, 6 te gooien).

23. Dezelfde onderstellingen en notaties als in Opgave 18. Bewijs, dat de kans, dat er juist j der gebeurtenissen A_1, $A_2, \ldots, A_n$ plaats vinden, gelijk is aan

$$S_j - C_{j+1}^1 S_{j+1} + C_{j+2}^2 S_{j+2} - \ldots + (-1)^{n-j} C_n^{n-j} S^n$$

en de kans, dat j of meer dier gebeurtenissen plaats vinden, gelijk aan

$$S_j - C_j^1 S_{j+1} + C_{j+1}^2 S_{j+2} - \ldots + (-1)^{n-j} C_{n-1}^{n-j} S_n.$$

24. Waarin gaan de kansen van de vorige opgave over, als alle p's met een zelfde aantal indices gelijk zijn?

25. Bepaal de in vraagstuk 2 van blz. 23 en Opgave 2 van blz. 27 gevraagde kansen met behulp van de beide vorige opgaven.

26. Bewijs, dat bij vraagstuk 3 van blz. 24 de kans, dat er m of meer verschillende nummers getrokken zijn, gelijk is aan

$$1 - (n - m + 1) C_n^{m-1} \left\{ \frac{1}{n - m + 1} \left(\frac{m-1}{n} \right)^a - \right.$$

$$- \frac{C_{m-1}^1}{n - m + 2} \left(\frac{m-2}{n} \right)^a + \frac{C_{m-1}^2}{n - m + 3} \left(\frac{m-3}{n} \right)^a - \ldots +$$

$$\left. + (-1)^{m-1} \frac{C_{m-1}^{m-3}}{n-2} \left(\frac{2}{n} \right)^a + (-1)^m \frac{C_{m-1}^{m-2}}{n-1} \left(\frac{1}{n} \right)^a \right\}.$$

27. Is bij het puntenprobleem (zie blz. 359) $f(p, q)$ de kans van den speler A, dan is:

$$f(p, q) = kf(p-1, q) + lf(p, q-1).$$

Bewijs dit.

28. Is bij het puntenprobleem $k = l = \frac{1}{2}$, dan is (met de notatie der vorige opgave) $f(p, q) + f(q, p) = 1$ en

$$f(p, p+1) - f(p+1, p) = \frac{1}{4^p} C_{2p}^p.$$

Bewijs dit.

29. Hebben A en B bij de afzonderlijke partijen gelijke kans, terwijl A nog p en B nog $p + 1$ winstpunten te maken heeft, dan is de winstkans van A gelijk aan

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2p+1}} C_{2p}^p$$

en voor een groote waarde van p bij benadering gelijk aan

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\pi p}}\right).$$

Bewijs dit.

30. Bewijs, dat de winstkans van A, als hij nog $p - 1$ punten en B nog $p + 1$ punten maken moet, terwijl de kansen bij de afzonderlijke partijen gelijk zijn, door

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^{2p}}C_{2p}^{p}, \text{ of } \frac{1}{2}+\frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots . (2p-1)}{2 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 8 \ldots . (2p)},$$

wordt voorgesteld.

31. Bereken bij het puntenprobleem de winstkans van A, als hij nog $p-1$ punten en B nog $p+2$ punten maken moet.

32. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ spelen bij herhaling een spel, waarbij één der spelers wint en de spelers resp. de winstkansen k_1, $k_2, \ldots, k_n$ hebben ($k_1+k_2+\ldots+k_n=1$). Telkens wordt voor den winner een punt aangeteekend, terwijl bij het bereiken van een voorgeschreven aantal punten het totaalspel gewonnen is. Bewijs, dat de winstkans van A_1 gelijk is aan

$$k_1^{p_1}\sum\frac{(p_1+j_2+j_3+\ldots+j_n-1)!}{(p_1-1)!\,j_2!\,j_3!\ldots j_n!}k_2^{j_2}k_3^{j_3}\ldots k_n^{j_n},$$

als $p_1, p_2, \ldots, p_n$ resp. de aantallen nog ontbrekende punten voorstellen en de sommeering wordt uitgestrekt over alle geheele niet-negatieve waarden van $j_2, j_3, \ldots$, j_n, die resp. kleiner zijn dan $p_2, p_3, \ldots, p_n$.

33. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ en B spelen een spel, waarbij één der $n+1$ spelers verliest en afvalt. De overblijvende spelers spelen daarna met elkaar, waarbij weer een der spelers verliest en afvalt, enz. De laatst overblijvende speler wint het totaalspel. De spelers $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hebben bij de afzonderlijke partijen gelijke verlieskans, terwijl die verlieskans tot de verlieskans van B staat als $1 : b$ (onverschillig hoeveel spelers nog over zijn). Wat zijn de kansen der verschillende spelers om het totaalspel te winnen?

---

§ 9. *Toepassing op vraagstukken met oneindig veel gevallen.*

Bij op het spel betrekking hebbende vraagstukken, waarbij het aantal gelijkwaardige gevallen oneindig groot is (doordat de beslissing onbepaald lang kan uitblijven), kan de oplossing vaak zeer eenvoudig met behulp van den regel IV van blz. 37 gegeven worden (zooals ook uit Opgave 9 van blz. 41 kan blijken) en wel doordat die regel de gevraagde kans in den vorm van een oneindig voortloopende reeks levert of doordat de regel tot een of meer vergelijkingen voert, waaruit de onbekende kansen kunnen worden opgelost.

Als voorbeeld nemen we het vraagstuk 1 van blz. 14.

De speler A kan op oneindig veel manieren winnen, nl. bij de 1ste trekking, bij de 3de trekking, bij de 5de trekking, enz. Zijn kans is dus:

$$\frac{p}{p+q} + \frac{pq^2}{(p+q)^3} + \frac{pq^4}{(p+q)^5} + \frac{pq^6}{(p+q)^7} + \ldots . = \frac{p+q}{p+2q}\ ^{1)}.$$

Ook kan men de kans x van A bepalen door op merken, dat hij door 2 oorzaken kan winnen, nl. doordat hij direct wit trekt (kans, dat de oorzaak werkt, $\frac{p}{p+q}$; kans, dat de oorzaak de gebeurtenis, het winnen van A, ten gevolge heeft, 1), of doordat hij zwart trekt (kans der oorzaak $\frac{q}{p+q}$); in het laatste geval komt B in dezelfde positie, als waarin A bij het begin van het spel is, en heeft dus een winstkans x; de kans, dat de tweede oorzaak de gebeurtenis ten gevolge heeft (winstkans van A nadat hij zwart getrokken heeft), is dus $1 - x$, zoodat men volgens regel IV heeft:

$$x = \frac{p}{p+q} + \frac{q}{p+q}(1-x),$$

waaruit $x = \frac{p+q}{p+2q}$ gevonden wordt.

Op soortgelijke wijze behandelt men de volgende uitbreiding van het vraagstuk (die verschilt van de in vraagstuk 2 van blz. 36 behandelde uitbreiding):

1. *Uit een bak met p witte en q zwarte ballen wordt door A en B beurtelings een bal getrokken, die teruggeworpen wordt, met dien verstande, dat iemand, die wit trekt, direct nog eens trekken mag. Degeen, die het eerst achter elkaar a witte ballen trekt, wint. Zoo A begint, wat is dan zijn winstkans?*

---

1) Het bepalen van een kans als oneindig voortloopende reeks wijkt nog betrekkelijk weinig van de rechtstreeksche oplossing af. Zulk een rechtstreeksche oplossing is er dan ook steeds gemakkelijk uit af te leiden.

A kan winnen bij zijn eerste beurt of bij zijn tweede beurt, enz., waaruit voor zijn kans gevonden wordt, zoo men $\frac{p}{p+q} = k$ (de kans op wit bij iedere trekking) stelt:

$$k^a + (1 - k^a)^2 k^a + (1 - k^a)^4 k^a + \ldots . = \frac{1}{2 - k^a}.$$

Ook kan de winstkans x van A gevonden worden door op te merken, dat hij een kans k^a heeft om bij de eerste beurt te winnen en een kans $(1 - k^a)(1 - x)$ om te winnen, maar niet bij de eerste beurt. Dit voert tot:

$$x = k^a + (1 - k^a)(1 - x),$$

$$x = \frac{1}{2 - k^a}.$$

De *winstkans x_i van den speler, die aan trek is en reeds i witte ballen getrokken heeft*, wordt gevonden uit:

$$x_i = k^{a-i} + (1 - k^{a-i})(1 - x_0) = k^{a-i} + (1 - k^{a-i})\frac{1 - k^a}{2 - k^a} =$$

$$= \frac{1 + k^{a-i} - k^a}{2 - k^a}.$$

Deze resultaten zijn natuurlijk ook gemakkelijk in p en q uit te drukken. Zooals te verwachten was is

$$1 - x_0 < x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{a-1}.$$

Ten einde het vraagstuk 2 van blz. 15 met den regel IV te behandelen, stellen we de daar gevraagde kans x en noemen y en z de kansen voor wit, als het spel reeds aan den gang is en de laatst getrokken bal wit resp. zwart is.

Is weer $k = \frac{p}{p+q}$, dan is:

$$x = ky + (1 - k)z,$$

$$y = k + (1 - k)z,$$

$$z = ky,$$

waaruit volgt:

$$y = \frac{k}{1 - k + k^2}, \quad z = \frac{k^2}{1 - k + k^2}, \quad x = \frac{k^2(2 - k)}{1 - k + k^2}.$$

Het vraagstuk kan aldus worden uitgebreid:

2. *Uit een bak met p witte en q zwarte ballen wordt*

telkens een bal getrokken en teruggeworpen totdat een serie van a witte of a zwarte ballen getrokken is. Wat is de kans, dat die serie wit is?

Zij x de kans op winst van wit en y de kans op winst van zwart, als de eerste bal getrokken is en deze wit resp. zwart is. Men heeft dan, $\frac{p}{p+q} = k$ en $\frac{q}{p+q} = l$ stellend:

$$x = k^{a-1} + (1 - k^{a-1})(1 - y),$$
$$y = l^{a-1} + (1 - l^{a-1})(1 - x).$$

Hieruit x en y oplossend, vindt men:

$$x = \frac{k^{a-1}}{k^{a-1} + l^{a-1} - k^{a-1}l^{a-1}}, \quad y = \frac{l^{a-1}}{k^{a-1} + l^{a-1} - k^{a-1}l^{a-1}}.$$

Voor de *gevraagde kans* vindt men nu:

$$kx + l(1 - y) = \frac{k^{a-1}(1 - l^a)}{k^{a-1} + l^{a-1} - k^{a-1}l^{a-1}} =$$
$$= \frac{p^{a-1}}{p+q} \cdot \frac{(p+q)^a - q^a}{(p+q)^{a-1}(p^{a-1} + q^{a-1}) - p^{a-1}q^{a-1}}.$$

Nog grooter voordeel levert de regel IV in de volgende voorbeelden, waarbij een rechtstreeksche oplossing (bepaling van gelijkwaardige gevallen en limietovergang) zeer bezwaarlijk wordt:

Vraagstuk der spelers. 3. *Twee spelers A en B spelen bij herhaling een spel, waarbij beide spelers een winstkans $\frac{1}{2}$ hebben. Daarbij betaalt de verliezer aan den winner een vast bedrag, dat we inzet noemen, terwijl doorgespeeld wordt totdat een der spelers alles verloren heeft. Wat is de kans van A om te winnen, als A en B aanvankelijk a resp. inzetten bezitten?*

Zij k_x de kans van A om te winnen zoo hij nog x inzetten bezit (en dus B nog $a + b - x$ inzetten heeft), zoodat $k_0 = 0$ en $k_{a+b} = 1$ is. Wint A de eerstvolgende partij, dan wordt zijn kans om het totaalspel te winnen k_{x+1}; verliest hij de eerstvolgende partij, dan daalt zijn kans tot k_{x-1}. Men heeft dus:

$$k_x = \tfrac{1}{2}k_{x+1} + \tfrac{1}{2}k_{x-1} \quad (1 \leqq x \leqq a + b - 1).$$

De getallen k_0, k_1, k_2, ..., k_{a+b} vormen dus een rekenkundige reeks, waaruit in verband met $k_0 = 0$, $k_{a+b} = 1$ volgt:

$$k_x = \frac{x}{a+b}.$$

De winstkans van A is dus aanvankelijk $\frac{a}{a+b}$, *terwijl* $\frac{b}{a+b}$ *de winstkans van B is.* De winstkansen verhouden zich dus als de kapitalen van beide spelers.

4. *Hetzelfde vraagstuk als het voorgaande, met dit verschil, dat A een kans k en B een kans 1 — k heeft om de afzonderlijke partijen te winnen.*

Men heeft nu (als weer k_x de winstkans van A is op een oogenblik, dat hij nog x inzetten bezit):

$$k_x = kk_{x+1} + (1-k)k_{x-1} \quad (1 \leqq x \leqq a+b-1),$$

of:

$$k_{x+1} - k_x = \frac{1-k}{k}(k_x - k_{x-1}).$$

Door hierin aan x de waarden $1, 2, \ldots, j$ toe te kennen en de overeenkomstige leden dier j vergelijkingen te vermenigvuldigen, vindt men (in verband met $k_0 = 0$):

$$k_{j+1} - k_j = \left(\frac{1-k}{k}\right)^j k_1.$$

Door hierin aan j de waarden $0, 1, 2, \ldots, p-1$ toe te kennen en de overeenkomstige leden op te tellen, vindt men (als $k \neq \frac{1}{2}$, dus $\frac{1-k}{k} \neq 1$ is):

$$k_p = \frac{\left(\frac{1-k}{k}\right)^p - 1}{\frac{1-k}{k} - 1} k_1 = \frac{(1-k)^p - k^p}{k^{p-1}(1-2k)} k_1.$$

Door hierin $p = a + b$ te nemen, vindt men in verband met $k_{a+b} = 1$:

$$k_1 = \frac{k^{a+b-1}(1-2k)}{(1-k)^{a+b} - k^{a+b}}, \quad k_p = k^{a+b-p}\frac{(1-k)^p - k^p}{(1-k)^{a+b} - k^{a+b}}.$$

Door $p = a$ te nemen vindt men hieruit voor de *winstkans van A bij het begin van het spel:*

$$k^b \frac{(1-k)^a - k^a}{(1-k)^{a+b} - k^{a+b}} = \frac{\left(\frac{1-k}{k}\right)^a - 1}{\left(\frac{1-k}{k}\right)^{a+b} - 1}.$$

Verwisseling van k met $1 - k$ en van a met b geeft voor de *winstkans van B:*

$$(1-k)^a \frac{(1-k)^b - k^b}{(1-k)^{a+b} - k^{a+b}} = \frac{\left(\frac{k}{1-k}\right)^b - 1}{\left(\frac{k}{1-k}\right)^{a+b} - 1}.$$

Ter contrôle kan dienen, dat de som van deze twee kansen gelijk aan 1 is.

Voor de kans van A kan men schrijven:

$$\frac{k^a - (1-k)^a}{k^a - (1-k)^a \left(\frac{1-k}{k}\right)^b}.$$

Is $k > \frac{1}{2}$, dus $\frac{1-k}{k} < 1$, dan is $\lim\limits_{b=\infty} \left(\frac{1-k}{k}\right)^b = 0$, *zoodat dan de kans van A voor* $b = \infty$ *overgaat in:*

$$1 - \left(\frac{1-k}{k}\right)^a.$$

Spelen te Monte-Carlo. Dit geval doet zich voor, als men voor A neemt de speelbank te Monte-Carlo en voor B het gezamenlijke spelende publiek (waarvan het gezamenlijke kapitaal zeer groot ten opzichte van dat van de bank is). Gemakshalve nemen we daarbij alle inzetten even groot aan. Bij het spel rouge ou noir op de roulette [1]) is de kans $1 - k$ van een speler bij iederen zet ongeveer gelijk aan $\frac{71}{144}$ (zie hiervoor

---

1) Voor de beschrijving hiervan zie blz. 52 en volg. Men kan ook rouge ou noir spelen bij het gecompliceerdere spel trente-et-quarante, dat ongeveer dezelfde winstkans biedt; dit spel vindt men beschreven in Opgave 12 van blz. 61.

vraagstuk 5, blz. 52—54). *De kans van de bank tegenover het geheele spelende publiek is dus:*

$$1-\left(\frac{71}{73}\right)^a,$$

waarin a aangeeft hoeveel maal een inzet op het kapitaal van de bank begrepen is.

De kans van de bank is dus $\frac{1}{2}$ voor:

$$\left(\frac{71}{73}\right)^a=\tfrac{1}{2},$$

dus voor:

$$a=\frac{\log 2}{\log 73-\log 71}=\frac{0{,}30103}{0{,}01206}=25 \text{ (naar boven afgerond).}$$

Om de kans van de bank $1-\frac{1}{10^m}$ te doen zijn, moet a gelijk zijn aan $\frac{m}{0{,}01206}=82{,}9\ m$. Is dus b.v. $a=829$, dan is de winstkans van de bank $1-\frac{1}{10^{10}}$, zoodat dan reeds de bank met zoo goed als absolute zekerheid het van het gezamenlijke publiek wint. Dit kan de bank dus bereiken door den inzet te limiteeren; bij het rouge ou noir heeft de bank den maximalen inzet op 6000 francs gesteld. Wanneer het kapitaal van de bank 1000-maal of 10000-maal de maximale inzet bedraagt, is de winstkans van de bank $1-9\,.\,10^{-13}$ resp. $1-2\,.\,10^{-121}$ (gesteld, dat slechts om maximale inzetten gespeeld wordt, zoodat in werkelijkheid de kans van de bank nog veel dichter bij 1 ligt).

Uit het voorgaande blijkt, dat het zeer gering lijkende verschil in winstkans van bank en publiek bij de afzonderlijke spelen voldoende is om te maken, dat de bank met zekerheid het publiek ruïneert. Men kan daaruit de leering trekken niet te Monte-Carlo te spelen. Wil men dat echter toch doen en om de een of andere reden b.v. *f* 1000 wagen in de hoop *f* 3000 te winnen, dus met de bedoeling door te spelen totdat men *f* 1000 verloren of *f* 3000 gewonnen heeft, dan doet men het best de inzetten zoo groot mogelijk te nemen, om daardoor het aantal afzonderlijke spelen, en daarmede het voordeel, dat de bank van de ongelijkheid der kansen heeft, zoo klein mogelijk te doen zijn. Wordt rouge ou noir gespeeld, telkens met gelijke inzetten, die a-maal op f 1000 begrepen zijn, dan is de kans van den speler (wiens kapitaal a inzetten bedraagt en die geacht kan worden te spelen tegen een ander met een kapitaal van $3a$ inzetten):

$$\frac{\left(\frac{73}{71}\right)^a - 1}{\left(\frac{73}{71}\right)^{4a} - 1} = \frac{1}{\left(\frac{73}{71}\right)^{3a} + \left(\frac{73}{71}\right)^{2a} + \left(\frac{73}{71}\right)^a + 1}.$$

Deze kans is kleiner dan $\left(\frac{71}{73}\right)^{3a}$ en daarvan voor groote waarden van a (b.v. $a > 100$) weinig verschillend. De kans van den speler is des te kleiner naarmate hij a grooter, dus naarmate hij zijn inzetten kleiner kiest. Het volgende geeft een overzicht over de kansen van den speler bij verschillende inzetten:

inzet:	f 1	f 10	f 20	f 50	f 100	f 250	f 500	f 1000
a:	1000	100	50	20	10	4	2	1
kans:	$65 \cdot 10^{-38}$	0,000226	0,01169	0,09031	0,15714	0,21000	0,22957	0,23968

Bij inzetten van f 50 of minder is dus zijn kans zeer klein. De beste kans heeft de speler nog, als hij direct zijn f 1000 inzet en in geval van winst laat staan (dus zijn inzet verdubbelt). In dat geval is zijn winstkans $\left(\frac{71}{144}\right)^2 = 0{,}24310$; deze is dus slechts weinig kleiner dan de kans $\frac{1}{4} = 0{,}25$, die de speler hebben zou, als bank en publiek bij iederen zet gelijke kansen hadden. We merken nog op, dat de speler zijn kans op het winnen van f 3000 niet kan vergrooten door een bepaald speelsysteem te volgen, waarbij de inzetten op de een of andere manier van de voorafgaande resultaten afhankelijk worden gemaakt; ieder zoodanig systeem (zooals b.v. het verdubbelen van den inzet bij verlies) komt uit een verkeerd inzicht in de beginselen der kansrekening voort.

Winstkans bij rouge ou noir.

5. *Hoe groot is bij het rouge ou noir op de roulette, van welk spel de beschrijving hieronder volgt, de winstkans van den speler bij de afzonderlijke zetten?*

Op de speeltafel zijn 37 velden aangebracht, gemerkt van 0 tot 36, aldus:

0	*3*	6	*9*	*12*	15	*18*	*21*	24	*27*	*30*	33	*36*
	2	*5*	8	11	*14*	17	20	*23*	26	29	*32*	35
	1	4	*7*	10	13	*16*	*19*	22	*25*	28	31	*34*

De 18 gecursiveerde nummers zijn rood, de overige zwart. Door de roulette (waarin, na in beweging gezet te zijn, een ivoren balletje rondloopt om ten slotte in een der 37 genummerde hokjes te vallen) wordt een bepaald nummer aangewezen, dat wint. De speler heeft zijn inzet op een der 37 velden geplaatst; hij verliest dien inzet, als een ander nummer op de roulette uitkomt, en ontvangt bij winst (boven zijn inzet, dien hij terug kan nemen) een bedrag van 35 inzetten. Dit is voordeelig voor de bank, daar de speler 36 inzetten zou moeten ontvangen, als de bank geen voordeel had; in dat geval toch zou een speler noch winnen noch verliezen, indien hij op ieder der 37 velden een zelfden inzet plaatst (waarvan hij er met zekerheid 36 verliest).

De speler kan ook op bepaalde wijze op 2, 3, 4, 6, 12 of 24 nummers tegelijk spelen, waarbij hij wint, als een dier nummers uitkomt, en dan, behalve zijn inzet, resp. 17-, 11-, 8-, 5-, 2- en $\frac{1}{2}$-maal zijn inzet ontvangt (hetgeen een gelijk spel zou zijn, als tafel en roulette 36 in plaats van 37 nummers droegen).

Ook kan de speler inzetten op rood of zwart [1]), waar-

[1]) Behalve „rouge ou noir" kan hij met geheel dezelfde kansen spelen „pair ou impair" (even of oneven) en „passe ou manque"; in het laatste geval wint de speler, die op passe (manque) speelt, als een der nummers 19, 20, 21, 22, ..., 36 (een der nummers 1, 2, 3, 4, ..., 18) uitkomt.

bij hij wint, en dan, behalve zijn inzet, een gelijk bedrag van de bank ontvangt, als het uitgekomen nummer de kleur heeft, waarop hij heeft ingezet. Komt 0 uit de roulette te voorschijn, dan wint noch rood noch zwart. Verloren is de inzet dan echter ook nog niet, maar deze komt zoogenaamd in de ***gevangenis***; verliest de speler het volgende spel, dan vervalt zijn inzet aan de bank; wint hij het volgende spel, dan is zijn inzet weer vrij en kan hij dien terugnemen (zonder dan dus gewonnen of verloren te hebben), terwijl hij natuurlijk ook zijn inzet kan laten staan, d. w. z. met dien inzet verder spelen. Komt 0 voor de tweede maal uit, dan is de inzet tweemaal gevangen en moet de speler tweemaal winnen om zijn inzet te bevrijden, enz. *Telkens als 0 uitkomt wordt het aantal malen, dat de inzet gevangen is, met één vermeerderd, telkens als de speler wint met één verminderd,* waarbij ten slotte òf de inzet vrij komt, òf voor dien tijd aan de bank vervalt doordat de speler verliest.

We nemen nu aan, *dat de speler op rood of zwart inzet met de bedoeling door te spelen totdat hij zijn inzet gewonnen of verloren heeft, dus met de bedoeling den inzet te laten staan, als deze gevangen genomen en weer vrijgekomen is*, en vragen naar de *winstkans van den speler.*

Oplossing. Zij k_x de winstkans van den speler, als zijn inzet x-maal gevangen is, zoodat k_0 de gevraagde kans is. De speler, wiens inzet éénmaal gevangen is, moet, om te winnen, vooreerst de positie bereiken, waarbij zijn inzet vrij is. De kans, dat zijn inzet vrij komt, is k_0, daar hetzelfde spelverloop, dat een éénmaal gevangen inzet vrij maakt, een vrijen inzet doet winnen. Is de inzet vrij gekomen, dan is de winstkans van den speler k_0 geworden, waaruit volgens regel III, blz. 33 volgt:

$$k_1 = k_0^2.$$

Volgens regel IV van blz. 357 heeft men ook:

$$k_0 = \tfrac{18}{37} + \tfrac{1}{37} k_1;$$

immers bij het begin van het spel is er een kans $\frac{18}{37}$, dat de speler bij den eersten zet wint, en een kans $\frac{1}{37}$, dat zijn winstkans van k_0 tot k_1 daalt. Door in de gevonden betrekking $k_1 = k_0^2$ te stellen, vindt men:

$$k_0^2 = 37k_0 - 18.$$

Hieruit volgt:

$$k_0 = \frac{37}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1297} = 0{,}4930569.$$

In een kettingbreuk ontwikkeld is dit:

$$\{0,\ 2,\ \overline{35,\ 1,\ 1}\},$$

waarvan de naderende breuken zijn $\frac{1}{2}$, $\frac{35}{71}$, $\frac{36}{73}$, $\frac{71}{144}$, $\frac{2521}{5113}$, enz. De benadering $\frac{71}{144} = 0{,}4930\overline{5}$ volgt ook uit:

$$k_0 = \frac{37}{2} - 18\sqrt{1 + \frac{1}{36^2}} = (\text{bij ben.})\ \frac{37}{2} - 18\left(1 + \frac{1}{2 \, . \, 36^2}\right) = \frac{71}{144}.$$

De speler, wiens inzet x-maal gevangen is, moet, om te winnen, vooreerst de positie bereiken, waarbij zijn inzet $(x - 1)$-maal gevangen is. De kans, dat hem dit gelukt, is k_0, terwijl zijn winstkans dan k_{x-1} geworden is. Men heeft dus:

$$k_x = k_0 k_{x-1} = k_0^2 k_{x-2} = \ldots . = k_0^{x-1} k_1 = k_0^{x+1},$$

dus:

$$k_x = \left(\frac{37 - \sqrt{1297}}{2}\right)^{x+1}.$$

Spel van Waldegrave.

6. *Drie spelers A, B en C spelen bij herhaling twee aan twee een spel, dat aan beide spelers gelijke winstkansen biedt. Na afloop speelt de winner met den derden speler, vervolgens de winner daarvan met den speler, die stil gezeten heeft, enz. Er wordt gespeeld totdat een der spelers zijn beide tegenstanders na elkaar verslagen heeft. Als A en B beginnen, wat zijn dan de winstkansen van A, B en C?* (**spel van Waldegrave** of **jeu de poule**).

Eerste oplossing. De speler C kan winnen na afloop van het 3de spel, doordat A, C, C (of B, C, C) achtereenvolgens winnen; de kans daarop is $\frac{1}{2^2}$. Ook kan C na afloop van het 6de spel winnen doordat A, C, B, A, C, C (of B, C, A,

B, C, C) achtereenvolgens winnen; de kans daarop is $\frac{1}{2^5}$. Ook na afloop van het 9[de] spel kan C winnen, waarvoor de kans $\frac{1}{2^8}$ is, enz. De totale *kans van C* is dus:

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{2^{11}}+\ldots = \frac{2}{7}.$$

De kansen van A en B te zamen zijn dus $1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$. Daar de kansen van A en B ten duidelijkste gelijk zijn, *heeft zoowel A als B een winstkans* $\frac{5}{14}$.

Tot de kans van A geraakt men ook door op te merken, dat zijn kans om zoowel het eerste spel als het totaalspel te winnen $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^8}+\ldots = \frac{2}{7}$ bedraagt en zijn kans om het eerste spel te verliezen en het totaalspel te winnen $\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^{11}}+\ldots = \frac{1}{14}$. Zijn kans het totaalspel te winnen is dus $\frac{2}{7}+\frac{1}{14}=\frac{5}{14}$.

Tweede opl. Onderstel, dat A het eerste spel van B gewonnen heeft. De kansen van A, B en C noemen we dan resp. x, y en z. Hiertusschen bestaan de betrekkingen:

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}y, \quad y = \tfrac{1}{2}z, \quad z = \tfrac{1}{2}x,$$

waaruit volgt $x = \frac{4}{7}$, $y = \frac{1}{7}$, $z = \frac{2}{7}$ (waardoor tevens aan de niet gebruikte betrekking $x + y + z = 1$ voldaan is). Vóór den aanvang van het spel is de kans van A, en evenzoo die van B:

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{4}{7} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{7} = \tfrac{5}{14},$$

terwijl dan de kans van C gelijk is aan $z = \frac{2}{7}$.

7. *Door n spelers $A_1, A_2, \ldots, A_n$ wordt telkens twee aan twee een spel gespeeld, dat aan beide spelers gelijke kansen biedt. A_1 en A_2 beginnen te spelen, de winner speelt daarna met A_3, de winner van dat spel met A_4, enz. De speler, die een spel verliest, komt achteraan in de rij. Er wordt doorgespeeld totdat een der spelers al zijn tegenstanders achtereen verslagen heeft. Wat zijn de winstkansen*

der verschillende spelers? **(spel van Waldegrave met n spelers).**

Zij x_i de winstkans van den speler, die op de i^{de} plaats in de rij staat op een oogenblik, waarop de speler, die het laatst gewonnen heeft (en die als n⁰. 1 van de rij beschouwd wordt en een winstkans x_1 heeft) op één winstpunt staat [1]). Er zijn nu $n - 1$ gevallen mogelijk, nl. dat de gewonnen hebbende speler zijn eerste partij verliest (kans $\frac{1}{2}$), dat hij de eerste partij wint en de tweede verliest (kans $\frac{1}{4}$), dat hij de eerste twee partijen wint en de 3^{de} verliest (kans $\frac{1}{8}$), enz. en eindelijk, dat hij de volgende $n - 2$ partijen alle wint $\left(\text{kans } \frac{1}{2^{n-2}}\right)$ en daarmede ook het totaalspel. De winstkans x_i wordt in die gevallen resp. veranderd in

$$x_{i-1},\ x_{i-2},\ \ldots,\ x_1,\ x_{n-1},\ x_{n-2},\ \ldots,\ x_{i+1},\ 0$$

(tenminste als $i > 1$ is). Dit geeft de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2^2}x_{n-1} + \frac{1}{2^3}x_{n-2} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-3}}x_4 + \frac{1}{2^{n-2}}x_3,\\
x_3 &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2^2}x_1 + \frac{1}{2^3}x_{n-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-3}}x_5 + \frac{1}{2^{n-2}}x_4,\\
x_4 &= \frac{1}{2}x_3 + \frac{1}{2^2}x_2 + \frac{1}{2^3}x_1 + \ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-3}}x_6 + \frac{1}{2^{n-2}}x_5,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{n-2} &= \frac{1}{2}x_{n-3} + \frac{1}{2^2}x_{n-4} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-3}}x_1 + \frac{1}{2^{n-2}}x_{n-1},\\
x_{n-1} &= \frac{1}{2}x_{n-2} + \frac{1}{2^2}x_{n-3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-3}}x_2 + \frac{1}{2^{n-2}}x_1,\\
x_n &= \frac{1}{2}x_{n-1} + \frac{1}{2^2}x_{n-2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{n-3}}x_3 + \frac{1}{2^{n-2}}x_2.
\end{aligned}\right\}\ (\alpha)$$

Uit de eerste twee dezer vergelijkingen leidt men af:

$$x_3 - \frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2^{n-1}}x_3,$$

---

[1]) Dit is dus een oogenblik, waarop òf nog slechts één partij gespeeld is, òf door den winner van de voorafgaande partij verloren is.

of:

$$x_2 = qx_3, \text{ waarin } q = 1 + \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (\beta)$$

Evenzoo vindt men:

$$x_3 = qx_4,\ x_4 = qx_5, \ldots, x_{n-2} = qx_{n-1} \qquad (\gamma)$$

en verder uit de eerste en de laatste der vergelijkingen (α):

$$x_2 - \frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2^{n-1}}x_2,$$

of:

$$x_1 + x_n = 2qx_2.$$

Uit (β) en (γ) volgt:

$$x_2 = q^{n-3}x_{n-1},\ x_3 = q^{n-4}x_{n-1}, \ldots, x_{n-3} = q^2 x_{n-1},$$

$$x_{n-2} = qx_{n-1},\ x_1 + x_n = 2q^{n-2}x_{n-1},$$

waaruit in verband met $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$ volgt:

$$(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-3} + 2q^{n-2})x_{n-1} = 1,$$

$$x_{n-1} = \frac{q-1}{2q^{n-1} - q^{n-2} - 1},$$

dus:

$$x_i = \frac{q^{n-i-1}(q-1)}{2q^{n-1} - q^{n-2} - 1} \ (2 \leqq i \leqq n-1),$$

$$\frac{x_1 + x_n}{2} = \frac{q^{n-2}(q-1)}{2q^{n-1} - q^{n-2} - 1}.$$

Hiermede zijn tevens de kansen der verschillende spelers bij het begin van het spel gevonden. Van A_1 en A_2 zijn nl. de kansen $\frac{1}{2}(x_1 + x_n)$, terwijl van $A_3, A_4, \ldots, A_n$ de kansen resp. $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$ zijn, *zoodat de kans van A_i $(i = 2, 3, \ldots, n)$ gelijk is aan:*

$$\frac{q^{n-i}(q-1)}{2q^{n-1} - q^{n-2} - 1}. \qquad (\delta)$$

Hierin is:

$$q^{n-i} = \left(1 + \frac{1}{2^{n-1}}\right)^{n-i} = 1 + \frac{n-i}{2^{n-1}} + \frac{(n-i)(n-i-1)}{2^{2n-1}} + \ldots,$$

Door bij den derden term af te breken vindt men, als n groot is, voor den noemer van (δ) bij benadering:

$$2 + \frac{n-1}{2^{n-2}} + \frac{(n-1)(n-2)}{2^{2n-2}} - 1 - \frac{n-2}{2^{n-1}} -$$

$$- \frac{(n-2)(n-3)}{2^{2n-1}} - 1 = \frac{n}{2^{n-1}} + \frac{(n+1)(n-2)}{2^{2n-1}},$$

waardoor (δ) bij benadering overgaat in:

$$\frac{\left(1+\frac{n-i}{2^{n-1}}\right)\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{(n+1)(n-2)}{2^{2n-1}}}=\frac{1}{n}\,\frac{1+\frac{n-i}{2^{n-1}}}{1+\frac{(n+1)(n-2)}{n2^n}},$$

waarvoor weer bij benadering kan geschreven worden:

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{n-i}{2^{n-1}}\right)\left(1-\frac{(n+1)(n-2)}{n2^n}\right),$$

of:

$$\frac{1}{n}+\frac{n^2-(2i-1)n+2}{n^2 2^n}.$$

Ook bij deze benadering (waarbij de kansen der spelers een rekenkundige reeks vormen, terwijl ze in werkelijkheid een meetkundige reeks vormen) is de som der kansen gelijk aan 1. Zelfs bij kleine waarden van n is de benadering reeds vrij goed. Zoo heeft men voor $n = 6$:

	juiste kans	benaderde kans
A_1 en A_2	0,17525	0,17535
A_3	0,16994	0,17014
A_4	0,16479	0,16493
A_5	0,15980	0,15972
A_6	0,15496	0,15451

Ook op vraagstukken van meetkundige waarschijnlijkheid kunnen de gevonden regels vaak met voordeel worden toegepast. Als voorbeeld nemen we het volgende vraagstuk:

Naald-probleem.

8. *Op een vloer zijn evenwijdige strepen getrokken op gelijke onderlinge afstanden d. Een naald ter lengte l (waarin $l \leqq d$ is) wordt op willekeurige wijze op den vloer geworpen. Hoe groot is de kans, dat de naald op een der strepen valt, als d ondersteld wordt klein te zijn ten opzichte van lengte en breedte van den vloer?* ***(naaldprobleem van Buffon).***

Zij α de scherpe hoek, dien de naald met de strepen maakt (uitgedrukt in straalhoeken of radialen). De kans, dat α gelegen is tusschen $\frac{\pi(i-1)}{2n}$ en $\frac{\pi i}{2n}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$,) is van i onafhankelijk (daar het verschil $\frac{\pi}{2n}$ dier hoeken van i onafhankelijk is), dus gelijk aan $\frac{1}{n}$. We nemen n zoo groot, dat alle tusschen $\frac{\pi(i-1)}{2n}$ en $\frac{\pi i}{2n}$ gelegen hoeken door het gemiddelde $\frac{\pi(2i-1)}{4n}$ dier grenzen kunnen worden vervangen.

Is $\alpha = \frac{\pi(2i-1)}{4n}$, dan komt de naald op een streep te liggen, als het midden van de naald op een afstand kleiner dan $\frac{1}{2}l \sin \frac{\pi(2i-1)}{4n}$ van een streep ligt, dus als dit midden gelegen is in een der banden ter breedte $l \sin \frac{\pi(2i-1)}{4n}$, die men om de strepen kan aanbrengen (zie fig. 3). Wegens $l \leqq d$ grijpen de banden voor geen enkele waarde van i over elkaar heen, hetgeen beteekent, dat de naald niet op twee strepen tegelijk kan vallen. De verhouding $\frac{l}{d} \sin \frac{\pi(2i-1)}{4n}$ van het gezamenlijke oppervlak der banden tot het oppervlak van den geheelen vloer is de kans, dat het midden van de naald in een der banden valt, dus dat de naald op een streep valt (steeds als de naald de beschouwde richting heeft).

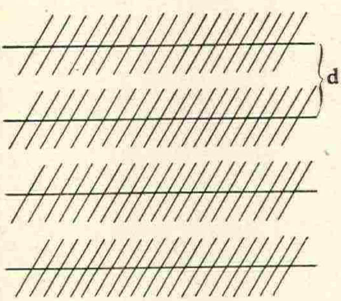

Fig. 3.

Door de n gelijke deelen, waarin de rechte hoek verdeeld is (welke deelen door de verschillende waarden van i worden aangewezen), als oorzaken (ieder met een kans $1 : n$) in den zin van blz. 37 op te vatten, vindt men volgens den regel IV voor de gevraagde kans:

$$\frac{l}{d} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi(2i-1)}{4n}.$$

Daar $\frac{1}{n}$ klein is, kan $\frac{1}{n}$ door $\frac{4}{\pi}\sin\frac{\pi}{4n}$ worden vervangen (daar de verhouding van $\sin\frac{\pi}{4n}$ en $\frac{\pi}{4n}$ weinig van 1 verschilt), waardoor de uitdrukking voor de kans overgaat in:

$$\frac{2l}{\pi d}\sum_{i=1}^{n} 2\sin\frac{\pi}{4n}\sin\frac{\pi(2i-1)}{4n}.$$

Volgens de formule $2\sin p \sin q = \cos(p-q) - \cos(p+q)$ kan hiervoor geschreven worden:

$$\frac{2l}{\pi d}\sum_{i=1}^{n}\left\{\cos\frac{\pi(i-1)}{2n} - \cos\frac{\pi i}{2n}\right\} = \frac{2l}{\pi d}(\cos 0 - \cos\tfrac{1}{2}\pi) = \frac{2l}{\pi d}.$$

De gevraagde kans is dus:

$$\frac{2l}{\pi d}.$$

§ 10. **OPGAVEN.**

1. Twee spelers A en B spelen bij herhaling een spel, waarbij A een winstkans k een B en winstkans l heeft, terwijl er een kans $1-k-l$ op remise is. Ze spelen door totdat een partij beslist is. Hoe groot zijn de winstkansen van A en van B?
2. De spelers van de vorige opgave spelen door totdat een hunner n winstpunten verkregen heeft (waarbij telkens voor den winner een winstpunt wordt aangeteekend, maar voor geen van beide iets wordt aangeteekend bij remise). Wat zijn de kansen van ieder hunner de match te winnen?
3. Bereken de kans van vraagstuk 2, blz. 46—47 als oneindig voortloopende reeks.
4. Bereken bij genoemd vraagstuk de winstkans van wit op een oogenblik, dat reeds j witte ballen achtereen getrokken zijn.
5. Bereken bij genoemd vraagstuk de kansen voor wit en zwart, als doorgespeeld wordt totdat òf na elkaar a witte ballen, òf na elkaar b zwarte ballen getrokken zijn.
6. Twee spelers A en B spelen bij herhaling een spel, waarbij A een winstkans k en B een winstkans l heeft, terwijl $k+l<1$ is (en dus de mogelijkheid op remise bestaat).

Ze spelen door totdat A achter elkaar a of B achter elkaar b partijen gewonnen heeft (zoodat een remise-partij als door beide spelers verloren beschouwd wordt). Wat zijn de kansen van A en B om het totaalspel te winnen?

7. Vijf spelers werpen in cyclische volgorde kruis of munt. Een speler, die kruis werpt valt af, terwijl de laatst overblijvende speler gewonnen heeft. Welke zijn de winstkansen dier vijf spelers?

8. Dezelfde vraag met dit verschil, dat een speler afvalt, die denzelfden worp doet als de aan hem voorafgaande speler (zoodat bij den eersten worp nog geen afvallen mogelijk is).

9. Dezelfde vraag met dit verschil, dat een speler, die denzelfden worp doet als zijn voorganger, dien voorganger doet afvallen (in plaats van zelf af te vallen).

10. Leid de kans van vraagstuk 3, blz. 47 door een limietovergang af uit de kans van vraagstuk 4, blz. 48.

11. Bereken de kans van vraagstuk 5, blz. 52, als de kans op het uitkomen van 0 (gevangen nemen van den inzet) q genoemd wordt (zoodat de speler een kans $\frac{1}{2}(1 - q)$ heeft om direct te winnen en een kans $\frac{1}{2}(1 - q)$ om direct te verliezen).

12. Het rouge ou noir bij het „trente-et-quarante" te Monte-Carlo wordt aldus gespeeld: 6 spelen van 52 kaarten worden dooreen gemengd. De bankhouder legt daarmede een reeks kaarten uit totdat een aantal punten > 30 bereikt is, daarbij een aas voor 1, een boer, vrouw of heer voor 10 en de overige kaarten naar het daarop aangewezen aantal tellend (zoodat hoogstens 40 bereikt wordt). Daarna wordt een tweede reeks uitgelegd totdat deze een aantal punten > 30 aanwijst. Rood of zwart wint, al naar gelang het aantal punten van de tweede of van de eerste reeks het kleinst is. Slagen, waarbij beide reeksen hetzelfde aantal punten hebben, vormen een „refait". Zulk een slag wordt geannuleerd, d.w.z. bij zulk een slag heeft de speler noch gewonnen noch verloren en beslist de volgende slag; uitgezonderd is echter een refait van 31 punten, in welk geval de inzet in de gevangenis komt met dezelfde bepalingen als bij het uitkomen van nul op de roulette (zie blz. 53). Met de overblijvende kaarten worden opnieuw 2 reeksen ieder van minstens 31 punten gevormd, enz. Bereken tot in 5 decimalen nauwkeurig de kans op een refait van 31 punten bij den eersten slag, die met de 312 kaarten gevorm wordt; hierbij wordt een slag beschouwd te zijn voltooid, als òf twee verschillende aantallen > 30 verkregen zijn, òf een refait van 31 punten ontstaan is (dus niet bij een refait van meer dan 31 punten).

13. Bereken bij het spel van WALDEGRAVE met n spelers de winstkansen der verschillende spelers op een oogenblik, dat een der spelers j partijen achtereen gewonnen heeft.

14. Op een recht lijnsegment neemt men willekeurig twee punten aan. Hoe groot is de kans, dat het lijnsegment daardoor in drie stukken verdeeld wordt, die de zijden van een driehoek kunnen vormen?

15. Op een cirkelomtrek neemt men willekeurig drie punten aan. Hoe groot is de kans, dat die punten de hoekpunten van een scherphoekigen driehoek zijn?

16. Een vloer is door 2 stelsels evenwijdige lijnen in vierkanten met zijde a verdeeld. Men werpt op den vloer een cirkelvormige schijf. Hoe groot moet de straal van die schijf zijn, opdat de kansen, dat de schijf al of niet op een streep valt, gelijk zijn? De schijf is klein ten opzichte van den vloer te beschouwen.

KANSEN VAN OORZAKEN.

§ 11. Onderstel, dat men n bakken $A_1, A_2, \ldots, A_n$ met witte en zwarte ballen heeft, bij ieder dier bakken in een bepaalde verhouding zoodanig, dat de kans, dat een daaruit getrokken bal wit is, voor die bakken resp. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ is. De kans op wit, als men uit die bakken er één willekeurig uitkiest en daaruit een bal trekt, is dan:

$$\frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \ldots + k_n).$$

Heeft men een bal getrokken en is die wit, dan kan men (als men geen nadere aanwijzing heeft over den bak, waaruit getrokken is) vragen naar de *kans* q_i, *dat de bal uit den bak* A_i *getrokken is.* Volgens den regel der samengestelde waarschijnlijkheid is, alvorens de trekking heeft plaats gevonden,

$$\frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)q_i$$

de kans, dat wit getrokken wordt en dat dit uit bak A_i geschiedt. De kans, bak A_i te kiezen en daaruit een witten bal te trekken, kan echter ook door $\frac{1}{n} k_i$ worden voorgesteld, zoodat men heeft:

$$\frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)\, q_i = \frac{1}{n} k_i,$$

$$q_i = \frac{k_i}{k_1 + k_2 + \ldots + k_n}.$$

Kans a posteriori. Deze kans q_i noemt men de **waarschijnlijkheid a posteriori** (achteraf), dat uit bak A_i getrokken is, in tegenstelling met de **waarschijnlijkheid a priori** (vooraf), dat bak A_i gekozen wordt, d. i. de kans daarop voordat de trekking heeft plaats gevonden (of voordat men van het resultaat der trekking heeft kennis genomen); die kans a priori is gelijk aan $1 : n$.

De gestelde vraag kan aldus meer algemeen geformuleerd worden:

Een zekere gebeurtenis kan door verschillende elkaar uitsluitende oorzaken $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tot stand komen. De kansen, dat die oorzaken werken, zijn resp. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ en de kansen, dat die oorzaken, zoo ze werken, de gebeurtenis ten gevolge hebben, $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Onderstel nu, dat de gebeurtenis heeft plaats gevonden, zonder dat iets nader over de werkzaam geweest zijnde oorzaak bekend is. Hoe groot is dan de kans, dat de oorzaak A_i werkzaam geweest is?

We stellen deze **kans a posterio van de oorzaak A_i** (waarvan k_i de kans a priori is) door q_i voor. De kans, dat de gebeurtenis door de oorzaak A_i tot stand komt, is $k_i l_i$. Die kans is echter volgens regel III ook gelijk aan $(k_1 l_1 + k_2 l_2 + \ldots + k_n l_n) q_i$, daar de eerste factor de kans voorstelt, dat de gebeurtenis tot stand komt. Door gelijkstelling van beide uitdrukkingen vindt men voor de *gevraagde kans a posterio:*

$$\frac{k_i l_i}{k_1 l_1 + k_2 l_2 + \ldots + k_n l_n}.$$

Regel van Bayes. Derhalve ***is de waarschijnlijkheid a posterio van een bepaalde oorzaak gelijk aan de kans, dat de gebeurtenis door die oorzaak tot stand komt, gedeeld door de totale kans, dat de gebeurtenis tot stand komt (regel van Bayes)*** [1]).

Men kan dezen regel ook aldus aantoonen. Onderstel,

[1]) Deze in het midden der 18^{de} eeuw door THOMAS BAYES voor een bijzonder geval opgestelde regel is door PIERRE SIMON MARQUIS DE LAPLACE (1749—1827) in meer algemeenen vorm afgeleid.

dat men M gelijkwaardige gevallen heeft, waarvan er M_i onder de oorzaak A_i vallen (zoodat $M_1 + M_2 + \ldots + M_n = M$ is). Onderstel verder, dat er van die M_i gevallen G_i gunstig zijn voor de beschouwde gebeurtenis, zoodat $G_1 + G_2 + + \ldots + G_n = G$ het totale aantal gunstige gevallen voorstelt. Heeft nu de gebeurtenis plaats gevonden, dan zijn deze G gevallen nog steeds gelijkwaardig; ze vertegenwoordigen dan echter alle mogelijke gevallen. Van die gevallen zijn er G_i gunstig voor de oorzaak A_i, zoodat de kans a posteriori op de oorzaak A_i gelijk is aan $G_i : G$, dus aan

$$\frac{G_i : M}{G : M}.$$

Hierin stelt $G_i : M$ de kans a priori voor, dat de gebeurtenis door de oorzaak A_i tot stand komt, en $G : M$ de totale kans, dat de gebeurtenis tot stand komt.

Het op blz. 6 genoemde voorbeeld van de drie kasten met de twee laden is een vraagstuk van waarschijnlijkheid a posteriori. De drie kasten vertegenwoordigen de oorzaken, waardoor de gebeurtenis (het aantreffen van een zilverstuk in de eerst geopende lade) tot stand kan komen; de kansen a priori dier oorzaken zijn $\frac{1}{3}$. De kansen, dat de oorzaken de gebeurtenis ten gevolge hebben, zijn voor de kasten A, B en C resp. 0, 1 en $\frac{1}{2}$. De kans a posterio op C (dus de kans, dat de andere lade der gekozen kast een goudstuk bevat) is dus:

$$\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Voorbeelden. We laten hier nog enkele voorbeelden volgen.

1. *Twee schutters A en B hebben trefkansen k en l. Ieder schiet n-maal op een schijf. Zonder dat men weet welke schoten geraakt hebben, ziet men na afloop, dat er w gaatjes in de schijf zitten. Hoe groot is de kans, dat u schoten van A en $w - u$ schoten van B raak geweest zijn?*

De kans a priori, dat A u-maal raak en $(n - u)$-maal mis geschoten heeft, is $C_n^u k^u (1 - k)^{n-u}$ en evenzoo de kans, dat B $(w - u)$-maal raak en $(n - w + u)$-maal mis geschoten heeft, $C_n^{w-u} l^{w-u}(1 - l)^{n-w+u}$. De *kans a priori van u treffers van A en w — u treffers van B* is dus:

$$C_n^u C_n^{w-u} k^u (1 - k)^{n-u} l^{w-u} (1 - l)^{n-w+u}.$$

De *kans a posterio daarop* is dus:

$$\frac{C_n^u C_n^{w-u} k^u (1 - k)^{n-u} l^{w-u} (1 - l)^{n-w+u}}{\sum_{u=0}^{w} C_n^u C_n^{w-u} k^u (1 - k)^{n-u} l^{w-u} (1 - l)^{n-w+u}}.$$

Van de som in den noemer zijn $2(w - n)$ termen nul, als $w > n$ is. Om geen termen nul te krijgen, moet men u laten loopen van het grootste der getallen 0 en $w - n$ tot het kleinste der getallen w en n (dus van 0 tot w, als $w \leqq n$ is, en van $w - n$ tot n, als $w \geqq n$ is).

2. *Men heeft een bak met n ballen, die gedeeltelijk wit, gedeeltelijk zwart (mogelijk ook alle wit of alle zwart) zijn. Alle samenstellingen, dus (0 wit, n zw.), (1 wit, n — 1 zw.), ..., (n wit, 0 zw.), hebben a priori dezelfde kans. Men trekt tegelijk a ballen, die alle wit blijken te zijn. Wat zijn a posteriori de kansen op de verschillende samenstellingen?*

De kans a priori, dat de bak j witte en $n - j$ zwarte ballen bevat, is $\frac{1}{n+1}$. De kans, dat bij die samenstelling de a getrokken ballen alle wit zijn, is $C_j^a : C_n^a$. De *kans, dat de a getrokken ballen alle wit zijn*, is dus:

$$\frac{\sum_{j=a}^{n} C_j^a}{(n+1)C_n^a} = \frac{C_{n+1}^{a+1}}{(n+1)C_n^a} = \frac{1}{a+1}.$$

Hieruit vindt men voor de *kans a posteriori op de samenstelling j wit en n — j zwart:*

$$\frac{(a+1)C_j^a}{(n+1)C_n^a} = \frac{C_j^a}{C_{n+1}^{a+1}}.$$

3. *In het vorige vraagstuk wordt, nadat de a witte ballen getrokken en niet teruggeworpen zijn, weer een bal getrokken. Hoe groot is de kans, dat die wit is?*

Eerste oplossing. Zijn er aanvankelijk j witte ballen in den bak, dan is, als a witte ballen getrokken zijn, de kans, dat de $(a+1)^{de}$ bal ook wit is, $\frac{j-a}{n-a}$ ($j \geqq a$ ondersteld). De kans, dat de $(a+1)^{de}$ bal wit is, bedraagt dus in het geheel:

$$\frac{\sum\limits_{j=a}^{n}(j-a)C_j^a}{(n-a)\,C_{n+1}^{a+1}} = \frac{a+1}{n-a}\cdot\frac{\sum\limits_{j=a+1}^{n} C_j^{a+1}}{C_{n+1}^{a+1}} = \frac{a+1}{n-a}\cdot\frac{C_{n+1}^{a+2}}{C_{n+2}^{a+1}} = \frac{a+1}{a+2}.$$

De kans, dat de volgende bal weer wit is, is dus $1 - \frac{1}{a+2}$, dus onafhankelijk van n en des te grooter naarmate a grooter is.

Tweede opl. Wordt uit den bak met n ballen een bal getrokken, dan hebben bij de $n-1$ overige ballen alle samenstellingen dezelfde kans. Een samenstelling j wit, $n-1-j$ zwart kan nl. ontstaan doordat er aanvankelijk $j+1$ witte ballen waren en wit getrokken is of doordat er aanvankelijk j witte ballen waren en zwart getrokken is; de kans op j wit, $n-1-j$ zwart is dus:

$$\frac{1}{n+1}\left\{\frac{j+1}{n} + \frac{n-j}{n}\right\} = \frac{1}{n}.$$

Trekt men nog een bal, dan blijven bij de overblijvende ballen weer de kansen voor alle samenstellingen gelijk, enz. Hieruit besluit men, *dat, als a ballen getrokken worden (zonder dat naar de kleur dier ballen gekeken wordt), alle samenstellingen der overblijvende n — a ballen gelijke kans hebben.* Daar men de getrokken ballen en de overblijvende ballen kan verwisselen, *hebben ook bij de a getrokken ballen alle samenstellingen gelijke kans* (waaruit onmiddellijk de in vraagstuk 2 gevonden kans $\frac{1}{a+1}$ volgt).

We denken nu, dat de $(a+1)^{de}$ bal getrokken wordt voordat naar de kleur der ballen van het eerst getrokken a-tal gekeken is. Dit is dan zoo op te vatten, dat een greep van $a+1$ ballen gedaan is, waarbij iedere samenstelling een kans $\frac{1}{a+2}$ heeft. Uit die $a+1$ ballen neemt men er a, die wit blijken te zijn. De kans, dat de $a+1$ ballen alle wit zijn, is dus a posterio:

$$\frac{\frac{1}{a+2}}{\frac{1}{a+1}} = \frac{a+1}{a+2}.$$

4. *Uit een bak met n witte of zwarte ballen, waarbij alle samenstellingen dezelfde kans hebben, wordt een bal getrokken, die wit blijkt te zijn. Deze bal wordt teruggeworpen en daarop opnieuw een bal getrokken. Wat is de kans, dat die ook wit is?*

Eerste oplossing. De kans a posterio op de samenstelling j wit $n-j$ zwart is

$$\frac{C_j^1}{C_{n+1}^2} = \frac{2j}{n(n+1)},$$

waartoe men, onafhankelijk van de bij vraagstuk 2 verkregen uitkomst, ook geraakt door op te merken, dat de totale kans op het trekken van een witten bal $\frac{1}{2}$ is. De *kans, dat de tweede getrokken bal wit is* (zoo de eerste bal teruggeworpen is), bedraagt:

$$\frac{2}{n^2(n+1)}\sum_1^n j^2 = \frac{2}{n^2(n+1)} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{2n+1}{3n}.$$

Tweede opl. De kans, dat de tweede getrokken bal dezelfde is als de eerste, is $\frac{1}{n}$. De kans, dat een andere bal getrokken is, bedraagt $\frac{n-1}{n}$; volgens vraagstuk 3 is dan de kans, dat die wit is, gelijk aan $\frac{2}{3}$. Voor de kans, dat de tweede bal wit is, wordt dus gevonden:

$$\frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{n-1}{n} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2n+1}{3n}.$$

Nog iets eenvoudiger verkrijgt men dit resultaat door de kans op zwart te berekenen. Voor het trekken van zwart is nl. noodig, dat een andere bal getrokken wordt als de eerst getrokkene $\left(\text{kans } \frac{n-1}{n}\right)$ en dat die andere bal zwart is (kans $\frac{1}{3}$). De kans, dat de tweede bal zwart is, is dus $\frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{3} = \frac{n-1}{3n}$, dus de kans op wit $1 - \frac{n-1}{3n} = \frac{2n+1}{3n}$.

Is n groot, dan is de kans, dat de tweede bal wit is, weinig verschillend van $\frac{2}{3}$, de kans voor het geval, dat de eerste bal niet teruggeworpen wordt (zie vraagstuk 3, blz. 66), een overigens van zelf sprekend resultaat. Wordt a-maal achtereen een bal getrokken en teruggeworpen, dan is de kans op wit, als opnieuw getrokken wordt, voor groote waarden van n (waarden van n, die groot zijn ten opzichte van a) bij benadering gelijk aan de in vraagstuk 3 gevonden kans, dus aan $\frac{a+1}{a+2}$.

Men heeft hiervan wel toepassingen gemaakt als de volgende: Naar zijn werk gaande komt men a dagen achtereen een zelfde persoon tegen. Wat is de kans, dat men, een volgenden dag naar zijn werk gaande, die persoon weer zal tegenkomen? Het blijft echter de vraag of de onderstellingen, die tot de kans $\frac{a+1}{a+2}$ gevoerd hebben, hier eenigermate vervuld zijn.

Kans op opkomen van de zon. Nog twijfelachtiger is de toepassing, die wel eens gemaakt is, op de vraag naar de kans, dat morgen de zon zal opkomen, wetende dat a dagen achtereen de zon is opgekomen. Daar men wel kan zeggen, dat de zon een paar duizend jaar lang dag aan dag is opgekomen (daar een zoo opvallende gebeurtenis als het niet opkomen van de zon wel zou zijn overgeleverd), is a zeer groot en is dus $\frac{a+1}{a+2}$ dicht bij 1 gelegen is. In werkelijkheid is echter de kans op het opkomen van de zon nog veel grooter, daar dit geen gebeurtenis is, die van het toeval afhangt, maar een verschijnsel, dat volgens vaste, geheel bekende, wetten verloopt. Een reiziger, die den poolstreek bezoekt, en waarneemt, dat de zon iederen volgenden dag lager boven den horizon komt, zal op een dag, waarop de zon juist even zichtbaar geweest is, de kans, dat hij de zon den volgenden dag zal zien, op veel minder dan $\frac{a+1}{a+2}$ stellen, waarin a het aantal opvolgende dagen is, waarop hij de zon aan den poolstreek heeft zien opkomen. Hier wordt regelmaat waargenomen en heeft het geen zin formules toe te passen, die ontleend zijn aan gevallen, waarbij een zoodanige regelmaat ontbreekt en alles van het toeval afhangt.

Toeval of vaste wet? Het geval kan zich ook voordoen, dat men niet weet of een verschijnsel door het toeval of door een vaste wet (opzet) beheerscht wordt, en dat men na het tot stand komen van het verschijnsel vraagt naar de kans, dat er opzet in het spel is. Volgens den regel van BAYES is a posterio de kans op opzet gelijk aan

$$\frac{kl}{kl + (1 - k)m},$$

waarin k voorstelt de kans a priori van opzet (dus $1 - k$ de kans a priori van zuiver toeval), terwijl l en m de kansen zijn, dat opzet resp. zuiver toeval het verschijnsel tot stand brengt [1]). Het toepassen dezer formule wordt daardoor bemoeilijkt, dat men de kansen k en l slechts ruw schatten kan, terwijl alleen m voor een nauwkeurige wiskundige berekening vatbaar is. Is m veel kleiner dan de waarde, waarop men l schat, dan zal dit overeenkomstig de formule aan opzet doen denken (tenzij de kans a priori

---

1) De kans l behoeft niet 1 te zijn. Is b.v. het verschijnsel het bovenkomen van 6 bij het werpen met een dobbelsteen, dan behoeft het opzet niet met zekerheid het verschijnsel ten gevolge te hebben, maar dit opzet kan ook bestaan in het vergrooten van de kans op het werpen van 6 (b.v. doordat het overstaande zijvlak met lood bezwaard is).

van opzet zeer klein is), of in elk geval de kans op opzet vergrooten. Komt in een speelhuis, waarvan men niet de zekerheid heeft, dat er alles eerlijk toegaat, bij rouge ou noir 20-maal achtereen rouge uit, dan doet dit aan opzet denken, daar de kans, dat toevallig 20-maal achtereen rouge uitkomt, zeer klein is (nl. $\frac{1}{2^{20}} = 0{,}00000095$, zoo bij iederen slag de kans op rouge $\frac{1}{2}$ is), terwijl de kans, dat dit gebeurt, zoo opzet in het spel is, veel grooter is (vooral als de bank bij het uitkomen van rouge belang heeft). Neemt men de opvolging *r, n, r, r, n, r, n, n, r, r, r, n, r, n, n, n, n, r, n, n* waar, dan is de kans, dat dit door toeval gebeurt, eveneens $\frac{1}{2^{20}}$; de kans, dat deze opvolging verschijnt, zoo opzet in het spel is, is echter nog kleiner, zoodat nu de kans a posterio op opzet kleiner is dan die a priori, d. w. z. dat het vertrouwen in de eerlijkheid van het spel vergroot is.

Een soortgelijke vraag is de volgende:

Optische of physische dubbelsterren?

Aan de noordelijke helft van den hemel heeft men ongeveer 50000 sterren tusschen de 1ste en de 8ste grootte. Daaronder zijn er 50 paar, die op een afstand van elkaar staan minder dan 1''. Is dit toevallig te achten?

Deze vraag komt hier op neer of de sterren van zulk een paar toevallig in nagenoeg dezelfde richting staan, zonder verder iets met elkaar te maken te hebben (optische dubbelsterren), dan wel of die sterren ook in de ruimte betrekkelijk dicht bij elkaar staan (physische dubbelsterren).

A priori zijn hier de kansen op toeval (optische dubbelsterren) en vaste wet (physische dubbelsterren) geen van beide klein, terwijl de kans, dat de vaste wet het verschijnsel tot stand brengt, gelijk aan 1 gesteld kan worden (of in elk geval niet klein is). Blijkt nu (zooals inderdaad het geval is), dat de kans, dat die 50 paren toevallig zoo dicht bij elkaar staan, uiterst klein is, dan wordt het daardoor zeer waarschijnlijk, dat men met physische dubbelsterren te doen heeft. Deze waarschijnlijkheid wordt nog veel grooter doordat men waarneemt, dat de sterren van een zelfde paar ten opzichte van elkaar ellipsen beschrijven, waaruit blijkt, dat ze onder elkaars aantrekkende werking staan en dus bij elkaar behooren.

Om bij benadering de kans te berekenen, dat de 50 paren door het toeval ontstaan zijn, brengen we op den hemelbol, waarvan we den straal 1 stellen, om ieder der 50000 sterren een cirkeltje met een straal van 1″ aan. Zulk een cirkeltje is bij benadering te beschouwen als een vlak cirkeltje met een straal $\frac{\pi}{180 \times 3600}$, dus met een oppervlak $\frac{\pi^3}{180^2 \times 3600^2}$. Het gezamenlijke oppervlak dier 50000 cirkeltjes is dus (als deze niet over elkaar grijpen) $\frac{\pi^3}{36^4 \times 5}$, hetgeen zeer klein is ten opzichte van het oppervlak 2π van den halven hemelbol. Dit is op zich zelf reeds voldoende om in te zien, dat de kans zeer klein is, dat het toeval het verschijnsel tot stand brengt.

Hoe uiterst klein die kans wel is, doet de volgende berekening zien (waarbij de kans slechts ruw benaderd wordt, voldoende echter om het klein zijn daarvan aan te toonen). De kans α, dat een bepaalde ster toevallig op een afstand $< 1''$ van een bepaalde andere ster staat [1]), is ongeveer

$$\frac{\frac{\pi^3}{180^2 \times 3600^2}}{2\pi} = \frac{\pi^2}{8 \,.\, 18^4 \,.\, 10^6} = 12 \,.\, 10^{-12}.$$

De kans, dat 50 bepaald aangewezen paren een onderlingen afstand $< 1''$ vertoonen, is dus $(12 \times 10^{-12})^{50}$. Voor

[1]) Dit is zoo op te vatten, dat men zich de sterren op een bepaalde wijze genummerd denkt, terwijl men het toeval twee der 50000 nummers laat aanwijzen. Men kan dan vragen naar de kans, dat de door die nummers aangewezen sterren een onderlingen afstand $< 1''$ vertoonen.

het aantal N der manieren, waarop men uit 50000 sterren 50 paren kan aanwijzen, vindt men:

$$N = \frac{50000!}{2^{50} \times 49900! \times 50!} = \text{ongeveer } \frac{50000^{100}}{2^{50} \times 50!} = \frac{1250000000^{50}}{50!}.$$

De kans, dat er 50 niet nader aangewezen paren sterren met een onderlingen afstand $< 1''$ zijn, is dus bij benadering:

$$N(12 \times 10^{-12})^{50} = \frac{0{,}015^{50}}{50!}.$$

Hierbij is geen rekening gehouden met de omstandigheid, dat de N manieren, waarop het verschijnsel tot stand kan komen, elkaar niet uitsluiten. Bij benadering is dit geoorloofd doordat de kans, dat twee of meer manieren gelijktijdig aanwezig zijn, weer klein is ten opzichte van de kans, dat minstens één der manieren om 50 dubbelsterren te krijgen aanwezig is. Maar ook al was de benadering niet geoorloofd, de omstandigheid, dat de N manieren elkaar niet uitsluiten, maakt, dat in werkelijkheid de kans nog kleiner is dan het gevonden bedrag $\frac{0{,}015^{50}}{50!}$, zoodat de kans, dat het toeval het verschijnsel tot stand brengt, in elk geval zoo buitengewoon klein is, dat het reeds daarom uitgesloten geacht zou kunnen worden, dat hier toeval in het spel is, ook al waren bij de dubbelsterren niet de boven vermelde bewegingen ten opzichte van elkaar waargenomen.

§ 12. OPGAVEN.

1. Uit een bak met n witte of zwarte ballen, waarbij alle samenstellingen gelijke kans hebben, wordt een greep van a ballen gedaan, die alle wit blijken te zijn. Zoo die a ballen teruggeworpen worden en daarna een bal getrokken wordt, hoe groot is dan de kans, dat die wit is?

2. Dezelfde vraag met dit verschil, dat na het terugwerpen der a ballen een greep van 2 ballen gedaan wordt en gevraagd wordt naar de kans, dat die beide wit zijn, en naar de kans, dat ze beide zwart zijn.

3. Uit een bak met n witte of zwarte ballen, waarbij alle samenstellingen even waarschijnlijk zijn, wordt een greep van b ballen gedaan, waarvan er a wit en $b - a$ zwart blijken te zijn. Wat zijn a posteriori de kansen op de verschillende samenstellingen?

4. Nadat de a witte en $b - a$ zwarte ballen der vorige opgave getrokken zijn, wordt nog een bal getrokken. Wat is de kans, dat deze wit is, als de b ballen niet eerst teruggeworpen zijn, en wat de kans op wit, als die b ballen wel teruggeworpen zijn?

5. Uit een bak met n witte of zwarte ballen, waarbij alle samenstellingen gelijke kans hebben, wordt a-maal achtereen een bal getrokken en teruggeworpen; al deze ballen blijken wit te zijn. Wat zijn a posteriori de kansen op de verschillende samenstellingen en wat is de kans op wit als nog eens een bal getrokken wordt? Beschouw in het bijzonder de gevallen $a = 2, 3, 4$.

6. Dezelfde vragen voor het geval $a = 3$, met dit verschil, dat slechts één der drie eerst getrokken ballen wit is.

7. Uit den bak der vorige opgaven wordt tweemaal achtereen een bal getrokken en teruggeworpen. Zoo beide keeren een witte bal getrokken is, hoe groot is dan de kans, dat dit in beide gevallen dezelfde bal geweest is? Zoo opnieuw getrokken wordt en wit verschijnt, hoe groot is dan de de kans, dat die bal bij geen der twee vorige trekkingen getrokken is?

8. In een bak bevinden zich $2n + 1$ witte of zwarte ballen, waarbij alle samenstellingen even waarschijnlijk zijn. Er wordt een bal getrokken, die wit is. Hoe groot is de kans, dat de meerderheid der ballen wit is?

9. Dezelfde vraag, als twee ballen tegelijk getrokken worden en deze wit blijken te zijn.

10. Dezelfde vraag, als een bal getrokken en teruggeworpen en daarna opnieuw een bal getrokken wordt, en beide keeren de bal wit blijkt te zijn.

11. Zoo bij vraagstuk 3 van blz. 38 de getrokken bal wit blijkt te zijn, hoe groot is dan de kans, dat die bal tot de a ballen behoort, die van bak A naar bak B zijn overgebracht?

12. Bij Opgave 7, blz. 40 blijkt de overlevering „ja" juist te zijn overgebracht. Wat is de kans, dat ieder der n personen de overlevering als „ja" heeft overgebracht, en wat de kans, dat geen dier personen opzettelijk gelogen heeft?

13. Zoo de beschuldigde van Opgave 8, blz. 40 veroordeeld is, hoe groot is dan de kans, dat hij schuldig is?

14. Men werpt geblinddoekt met 4 dobbelsteenen en krijgt de mededeeling, dat 13 gegooid is. Hoe groot is de kans, dat 3, 3, 3, 4, en hoe groot de kans, dat 1, 2, 4, 6 gegooid is?

15. Men werpt geblinddoekt met een rooden, witten, blauwen en groenen dobbelsteen en krijgt de mededeeling, dat te zamen 14 gegooid is. Welke zijn de kansen voor de verschillende worpen van den rooden dobbelsteen?

16. Een bak met n ballen is gevuld door n-maal kruis of munt te werpen en telkens bij een worp kruis een witten bal en bij een worp munt een zwarten bal in den bak te doen. Uit dien bak grijpt men a ballen. Hoe groot is de kans, dat die alle wit zijn?

17. Zoo bij de vorige opgave de a getrokken ballen alle wit blijken te zijn, wat zijn dan a posteriori de kansen op de verschillende samenstellingen van den bak? Zoo nog een bal getrokken wordt, wat is dan de kans op wit, als de a ballen niet teruggeworpen zijn, en wat de kans op wit, als die ballen wel teruggeworpen zijn?

18. Hoe groot is bij Opgave 16 de kans, dat c der a getrokken ballen wit en de overige zwart zijn?

19. Dezelfde vragen als bij Opgave 17 met dit verschil, dat c der a getrokken ballen wit en de overige zwart blijken te zijn.

20. Een bak is op de in Opgave 16 aangegeven wijze met $2n + 1$ witte of zwarte ballen gevuld. Men doet daaruit een greep van a ballen, die alle wit blijken te zijn. Hoe groot is de kans, dat de meerderheid der ballen wit is? Neem in het bijzonder $a = 1, 2, 3$.

Voor de antwoorden der Opgaven zie het antwoordenboekje er Middel-Algebra van Wijdenes en Schuh.