



**TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT**  
**LUCHTVAART- EN RUIMTEVAARTTECHNIEK**

Rapport LR-325

**ENIGE KARAKTERISTIEKE GROOTHEDEN  
VAN HET EERSTE PROFIEL VAN MÜLLER**

door

**J.J.H. Blom**

**DELFT - NEDERLAND**

**Juni 1981**



**TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT**  
**LUCHTVAART- EN RUIMTEVAARTTECHNIEK**

Rapport LR-325

**ENIGE KARAKTERISTIEKE GROOTHEDEN  
VAN HET EERSTE PROFIEL VAN MÜLLER**

door

**J.J.H. Blom**

**DELFT - NEDERLAND**

**Juni 1981**

### Samenvatting

De conforme afbeelding voor een gegeven willekeurig profiel kan met de door Timman [6] ontworpen methode worden bepaald. Hierbij wordt gebruik gemaakt van een hulp- of uitgangsprofiel waarvan de transformatie bekend is en dat zo goed mogelijk overeenstemt met het gegeven willekeurige profiel.

Dit uitgangsprofiel wordt dan iteratief vervormd totdat de gewenste profielvorm is verkregen.

Tot nu toe is het uitgangsprofiel gekozen uit de von Kármán-Treffitz profielfamilie [7]. De afbeeldingsfunctie van deze profielen is echter hinderlijk ingewikkeld en niet op eenvoudige wijze in een reeks uit te schrijven.

De minder bekende profielfamilies van Müller [4], nauw verwant aan de von Kármán-Treffitz familie, hebben deze nadelen niet.

Van het eerste profiel van Müller zijn nu de karakteristieke grootheden die de profielvorm vastleggen, zoals: de grootte van de neusstraal, de maximale dikte en ligging van deze dikte, alsmede de helling van de staart en welving, bepaald als functie van de transformatievariabelen.

Met de in dit verslag gepresenteerde figuren en betrekkingen is een passende keuze van het benodigde uitgangsprofiel mogelijk.

Tenslotte wordt de vorm van het eerste profiel van Müller vergeleken met die van het overeenkomstige von Kármán-Treffitz profiel.

<u>Inhoud</u>	<u>blz</u>
1. Inleiding	1
2. Het eerste profiel van Müller	3
3. De helling aan de staart en welving	5
4. De koorde van het profiel	7
5. De straal van de profielneus	8
5.1. Symmetrische profielen	10
5.2. Gewelfde profielen	11
6. De profielvorm	13
7. De maximale profieldikte	14
7.1. Het symmetrische Joukowsky profiel	14
7.2. Het symmetrische eerste profiel van Müller	14
8. Vergelijking met het von Kármán-Treffitz profiel	16
9. Literatuur	17

## 1. Inleiding

Met de techniek van de conforme afbeelding is het mogelijk de drukverdeling om een vleugelprofiel af te leiden uit de eenvoudiger te bepalen drukverdeling om een cirkelvormige- of bijna cirkelvormige contour.

Joukowsky [1], von Kármán en Trefftz [2], von Mises [3] en Müller [4] gaan uit van een in het  $\zeta$ -vlak gelegen cirkelcontour die met de door hun ontworpen transformatie-functie wordt afgebeeld als een in het  $z$ -vlak gelegen profielcontour. Met de bekende stroming om de cirkel ( $\zeta$ ) en de afbeeldingsfunctie ( $z = f(\zeta)$ ) is de stroming om het profiel ( $z$ ) geheel bepaald.

Voor een overzicht van genoemde profielfamilies wordt verwezen naar [4] en [5].

Willekeurige profielvormen kunnen echter niet beschreven worden met de genoemde transformatie formules. De conforme afbeelding van een cirkel naar een gegeven willekeurig profiel is op grond van de afbeeldingsstelling van Riemann altijd mogelijk, doch niet in formulevorm te geven.

Een elegante methode waarmee de transformatie voor een willekeurige profielvorm langs numerieke weg iteratief kan worden gevonden is gegeven door Timman [6]. Hierbij wordt de conforme transformatie van het willekeurige profiel gevonden door uit te gaan van een hulp- of uitgangsprofiel waarvan de transformatie bekend is.

Het uitgangsprofiel moet dezelfde staarhoek hebben als het gegeven profiel en er verder zo goed mogelijk mee overeenstemmen (dezelfde neusstraal en/of dikte en welving). Vervolgens wordt het uitgangsprofiel iteratief vervormd totdat de gegeven profielvorm is verkregen [7], [8], [9].

In [6] wordt gesteld dat in principe elke z.g. klassieke profiel-familie waarin tenminste dikte, welving en staarhoek als profielparameter voorkomen, in aanmerking komt. Uit praktische overwegingen wordt nog verlangd dat zowel de profielcoördinaten als de reële functies  $\sigma$  en  $\tau$  ( $z = f(\zeta)$ ;  $\frac{dz}{d\zeta} = e^{\sigma+i\tau}$ ) in eenvoudige analytische betrekkingen zijn weer te geven.

De keuze van het uitgangsprofiel is tot nu toe beperkt gebleven tot de

von Kármán-Trefftz familie met dikte, welving en staarhoek als vrij te kiezen profielvariabelen [8], [9]. De betrekkingen voor de coördinaten alsmede die voor de functies  $\sigma$  en  $\tau$  zijn nogal gecompliceerd [10]. Bovendien laat de afbeeldingsfunctie zich niet op eenvoudige wijze in een reeks ontwikkelen.

Timman [6] suggereert zelf om in plaats van de von Kármán-Trefftz familie de door Zaat [11] ontworpen profielfamilie te nemen. Zaat gebruikt de eerste afbeeldingsfunctie van Müller om een ellips in een profiel te transformeren. De lange as van de af te beelden ellips is daarbij evenwijdig aan de reële as, terwijl de assenverhouding niet veel van één afwijkt. Met de vier ter beschikking staande parameters kunnen dikte, plaats van de grootste dikte, welving en staarhoek gekozen worden. Het grotere aanpassingsvermogen van deze profielfamilie gaat echter wel ten koste van de verlangde eenvoud.

De beide profielfamilies van Müller [4], nauw verwant aan de von Kármán-Trefftz familie met dezelfde drie variatiemogelijkheden (dikte, welving en staarhoek) hebben bovengenoemde nadelen niet. Het is daarom alleszins de moeite waard deze minder bekende profielfamilies aan een nader onderzoek te onderwerpen.

In dit rapport wordt een overzicht gegeven van de eerste profielfamilie van Müller. Vervolgens worden betrekkingen afgeleid waarmee de kenmerkende grootheden van deze profielen, zoals: de neusstraal, de grootste dike en de plaats van de grootste dikte, kunnen worden bepaald.

In een aantal figuren worden de genoemde grootheden gegeven als functie van de transformatievariabelen. Tenslotte wordt de vorm van het eerste profiel van Müller vergeleken met die van het overeenkomstige von Kármán-Trefftz profiel.

## 2. Het eerste profiel van Müller

De afbeeldingsfunctie van het eerste profiel van Müller [4], [5] luidt:

$$z = \zeta \left( 1 - \frac{b}{\zeta} \right)^k + kb \quad (2.1)$$

waarin b een reële constante is.

De waarde van k ligt met het kiezen van de staartheek  $\delta$ ,  $k = 2 - \frac{\delta}{\pi}$ , vast.

De afgeleide van deze afbeeldingsfunctie naar  $\zeta$  is:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \left( 1 - \frac{b}{\zeta} \right)^{k-1} \left( 1 + (k-1) \frac{b}{\zeta} \right) \quad (2.2)$$

Deze uitdrukking is ook te schrijven als:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{(\zeta - b)^{k-1} (\zeta + (k-1)b)}{\zeta^k} \quad (2.3)$$

Uit betrekking (2.3) volgt dat:  $\frac{dz}{d\zeta} = 0$  voor  $\zeta = +b$  en  $\zeta = -(k-1)b$ , de nulpunten van  $\frac{dz}{d\zeta}$ .

De afbeeldingsfunctie van het eerste profiel van Müller laat zich in een eenvoudige reeks ontwikkelen:

$$\begin{aligned} z = \zeta + & \frac{k(k-1)}{2!} \frac{b^2}{\zeta} - \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \frac{b^3}{\zeta^2} + \\ & \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{4!} \frac{b^4}{\zeta^3} - \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{5!} \frac{b^5}{\zeta^4} + \\ & \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)(k-5)}{6!} \frac{b^6}{\zeta^5} - \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

De afgeleide van uitdrukking (2.4) wordt dan:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\zeta} = 1 - & \frac{k(k-1)}{2} \left( \frac{b}{\zeta} \right)^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3} \left( \frac{b}{\zeta} \right)^3 - \\ & \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)}{8} \left( \frac{b}{\zeta} \right)^4 + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)(k-4)}{30} \left( \frac{b}{\zeta} \right)^5 - \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Voor  $\zeta \rightarrow \infty$  wordt  $\frac{dz}{d\zeta} = 1$ , m.a.w. op oneindig is het stromingsveld in het z-vlak identiek aan dat in het  $\zeta$ -vlak.

Op soortgelijke wijze als bij de von Kármán-Treffitz afbeelding wordt

cirkel  $C_1$  afgebeeld als een profiel. Het op de cirkelcontour gelegen nulpunt,  $\zeta = +b$ , gaat bij afbeelding over in de profielachterrand,  $z = +kb$  (zie fig. 2.1).

Het profielskelet wordt gevormd door twee krommen, die elkaar raken in het punt  $L'$ ,  $z = -kb \left( \left( \frac{k}{k-1} \right)^{k-1} - 1 \right)$  en een hoek  $\delta$  insluiten in het punt  $T'$ ,  $z = +kb$  (zie fig. 2.2). De punten  $L'$  en  $T'$  zijn de afbeeldingen van de beide nulpunten.

Het skelet ontstaat uit een cirkel  $C_0$  die in  $\zeta = +b$  raakt aan cirkel  $C_1$  en gaat door het andere nulpunt,  $\zeta = -(k-1)b$ .

Wordt voor de staarhoek  $\delta = 0$  ( $k = 2$ ) gekozen, dan gaan de afbeeldingsfunctie (2.4) en zijn afgeleide (2.5) over in die voor de Joukowsky profielen:

$$z = \zeta + \frac{b^2}{\zeta} \quad (2.6)$$

$$\frac{dz}{d\zeta} = 1 - \left( \frac{b}{\zeta} \right)^2 \quad (2.7)$$

Het skelet van het Joukowsky profiel bestaat uit een, tweemaal doorlopen, cirkelboog gelegen tussen de punten  $z = \pm 2b$ , de afbeeldingen in het  $z$ -vlak van de beide nulpunten  $\zeta = \pm b$  (zie fig. 2.3 en 2.4).

Ter vergelijking zijn in fig. 2.5 en 2.6 een von Kármán-Trefftz profiel en zijn skelet gegeven.

De contour van dit skelet bestaat uit twee cirkelbogen, die gelegen zijn tussen de afbeeldingen van de beide nulpunten,  $z = \pm kb$ , en in de uiteinden een hoek  $\delta$  insluiten [4].



### 3. De helling aan de staart en welving

In het vorige hoofdstuk is reeds opgemerkt dat cirkel  $C_0$  wordt afgebeeld als het skelet, een uit twee krommen bestaande contour, gelegen tussen de punten  $T'$ ,  $z = +kb$ , en  $L'$ ,  $z = -kb \left( \left( \frac{k}{k-1} \right)^{k-1} - 1 \right)$  (zie fig. 2.2).

De raaklijnen in het punt  $T'$  aan de beide krommen sluiten een hoek  $\delta$  in en maken met de reële as een hoek van resp.:

$$\gamma_1 = \beta \left( 2 - \frac{\delta}{\pi} \right) + \frac{\delta}{2} \quad (3.1)$$

$$\gamma_2 = \beta \left( 2 - \frac{\delta}{\pi} \right) - \frac{\delta}{2} \quad (3.2)$$

waarbij  $\beta$ , de hoek tussen de "eerste profielas" en de reële as (zie fig. 2.2), een maat is voor de welving van het profiel.

Uit de verg. (3.1) en (3.2) volgt nog:

$$\beta = \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2 \left( 2 - \frac{\delta}{\pi} \right)} \quad (3.3)$$

of ook:

$$\beta = \frac{\gamma}{2 - \frac{\delta}{\pi}} \quad (3.4)$$

waarbij  $\gamma$  de helling is van de bissectrice van de staarthoek  $\delta$ .

Het verband tussen de helling  $\gamma$  en de hoek  $\beta$  is gegeven in fig. 3.1.

Voor het geval de raaklijn aan de onderste kromme in het punt  $T'$  samenvalt met de reële as ( $\gamma_2 = 0$ ) wordt uitdrukking (3.3):

$$\beta = \frac{\delta}{2 \left( 2 - \frac{\delta}{\pi} \right)} \quad (3.5)$$

Het verloop van staarthoek  $\delta$  met welving  $\beta$ , volgens bovenstaande uitdrukking, is gegeven in fig. 3.2.

Fig. 3.3. en 3.4. tonen resp. een profiel en het bijbehorende skelet voor het geval  $\gamma_2 = 0$ .

De raaklijnen in het punt  $L'$  aan de beide krommen vallen samen en maken met de reële as (zie fig. 2.2) een hoek:

$$\gamma_3 = 2\beta \quad (3.6)$$

Uit het voorafgaande blijkt duidelijk dat het skelet van het eerste profiel van Müller (fig. 2.2) in het punt L' op het Joukowsky skelet (fig. 2.4) en in het punt T' en directe omgeving op het von Kármán-Treffitz skelet (fig. 2.6) lijkt.

#### 4. De koorde van het profiel

Voor het normeren van de profielcoördinaten wordt de koorde  $c$  ingevoerd. Het voorste punt van de koorde wordt geacht te zijn ontstaan uit het op de cirkelcontour  $C_1$  gelegen reële punt  $N$  (zie fig. 4.1).

Voor dit punt  $N$  geldt:

$$\zeta = b - 2 \cos \beta \quad (4.1)$$

voorgesteld dat cirkel  $C_1$  een straal  $R = 1$  heeft.

Substitutie in de afbeeldingsfunctie (2.1) geeft:

$$z = - \frac{(2 \cos \beta)^k}{(2 \cos \beta - b)^{k-1}} + kb \quad (4.2)$$

Het achterste punt van de koorde ontstaat uit het punt  $T$  waarvoor geldt:

$$\zeta = +b \quad (4.3)$$

Met de afbeeldingsfunctie (2.1) levert dit:

$$z = +kb \quad (4.4)$$

Uit de betrekkingen (4.2) en (4.4) volgt voor de grootte van de koorde:

$$c = \frac{(2 \cos \beta)^k}{(2 \cos \beta - b)^{k-1}} \quad (4.5)$$

Voor een symmetrisch profiel ( $\beta = 0$ ) kan nog geschreven worden:

$$c_{\text{symm}} = \frac{2^k}{(2 - b)^{k-1}} \quad (4.6)$$

Is de staarhoek  $\delta = 0$  ( $k = 2$ ) dan vereenvoudigt, zoals reeds opgemerkt, het eerste profiel van Müller tot een Joukowsky profiel.

De betrekkingen (4.5) en (4.6) worden dan resp.:

$$c_{\text{Joukowsky}} = \frac{4 \cos^2 \beta}{2 \cos \beta - b} \quad (4.7)$$

en

$$c_{\text{symm.Joukowsky}} = \frac{4}{2 - b} \quad (4.8)$$

5. De straal van de profielneus

Voor het opstellen van een uitdrukking voor de neusstraal wordt gebruik gemaakt van een door Timman [6] gegeven methode.

Worden twee reële functies  $\sigma$  en  $\tau$  gedefinieerd zodanig dat:

$$\frac{dz}{d\zeta} = e^{\sigma+i\tau} \quad (5.1)$$

dan is de kromtestraal van de profielomtrek te schrijven als:

$$r = \frac{e^{\sigma}}{1 + \frac{d\tau}{d\theta}} \quad (5.2)$$

waarbij  $\theta$  de overeenkomstige plaats op de cirkelcontour  $C_1$  aangeeft.

Om verdere uitwerking te vereenvoudigen worden de volgende relaties ingevoerd:

$$\zeta - b = r_1 e^{i\varphi_1} \quad (5.3)$$

$$\zeta + (k - 1) b = r_2 e^{i\varphi_2} \quad (5.4)$$

$$\zeta = r_{\zeta} e^{i\varphi_{\zeta}} \quad (5.5)$$

De meetkundige betekenis van  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_{\zeta}$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  en  $\varphi_{\zeta}$  volgt uit fig. 5.1.

Substitutie van (5.3), (5.4) en (5.5) in (2.3) geeft:

$$\frac{dz}{d\zeta} = \frac{(r_1 e^{i\varphi_1})^{k-1} r_2 e^{i\varphi_2}}{(r_{\zeta} e^{i\varphi_{\zeta}})^k} \quad (5.6)$$

Hieruit volgt voor:

$$e^{\sigma} = \left| \frac{dz}{d\zeta} \right| = \frac{r_1^{k-1} r_2}{r_{\zeta}^k} \quad (5.7)$$

$$\tau = \arg(dz) - \arg(d\zeta) = (k - 1) \varphi_1 + \varphi_2 - k\varphi_{\zeta} \quad (5.8)$$

en

$$\frac{d\tau}{d\theta} = (k - 1) \frac{d\varphi_1}{d\theta} + \frac{d\varphi_2}{d\theta} - k \frac{d\varphi_{\zeta}}{d\theta} \quad (5.9)$$

Uit fig. 5.1 volgt:

$$r_1 = 2 \sin \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.10)$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{2} (\pi + \theta) - \beta \quad (5.11)$$

$$r_2 = \sqrt{k^2 b^2 + 2 - 2 \cos \theta + 2 kb (\cos (\theta - \beta) - \cos \beta)} \quad (5.12)$$

$$\varphi_2 = \arctan \left( \frac{\sin \beta + \sin(\theta - \beta)}{kb - \cos \beta + \cos(\theta - \beta)} \right) \quad (5.13)$$

$$r_\zeta = \sqrt{b^2 + 2 - 2 \cos \theta + 2b(\cos(\theta - \beta) - \cos \beta)} \quad (5.14)$$

$$\varphi_\zeta = \arctan \left( \frac{\sin \beta + \sin(\theta - \beta)}{b - \cos \beta + \cos(\theta - \beta)} \right) \quad (5.15)$$

De afgeleiden van  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_\zeta$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  en  $\varphi_\zeta$  naar  $\theta$  zijn:

$$\frac{d}{d\theta} (r_1) = \cos \left( \frac{\theta}{2} \right) \quad (5.16)$$

$$\frac{d}{d\theta} (\varphi_1) = \frac{1}{2} \quad (5.17)$$

$$\frac{d}{d\theta} (r_2) = \frac{1}{r_2} (\sin \theta - kb \sin(\theta - \beta)) \quad (5.18)$$

$$\frac{d}{d\theta} (\varphi_2) = \frac{1}{r_2} (kb \cos(\theta - \beta) - \cos \theta + 1) \quad (5.19)$$

$$\frac{d}{d\theta} (r_\zeta) = \frac{1}{r_\zeta} (\sin \theta - b \sin(\theta - \beta)) \quad (5.20)$$

$$\frac{d}{d\theta} (\varphi_\zeta) = \frac{1}{r_\zeta} (b \cos(\theta - \beta) - \cos \theta + 1) \quad (5.21)$$

Door substitutie van (5.10), (5.12) en (5.14) in de uitdrukking voor  $e^\sigma$  (5.7) en van (5.17), (5.19) en (5.21) in die voor  $\frac{dr}{d\theta}$  (5.9) kan voor elke waarde van de variabele  $\theta$  op de cirkelcontour in het  $\zeta$ -vlak de kromtestraal van de profielomtrek in het  $z$ -vlak worden bepaald.

5.1. Symmetrische profielen

Voor een symmetrisch profiel ( $\beta = 0$ ) ontstaat de neus van het profiel uit het punt  $\theta = \pi$  van cirkelcontour  $C_1$  in het  $\zeta$ -vlak. De uitdrukkingen voor  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_\zeta$  en de afgeleiden naar  $\theta$  van  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  en  $\varphi_\zeta$  worden dan resp.

$$r_1 = 2 \quad (5.22)$$

$$r_2 = 2 - kb \quad (5.23)$$

$$r_\zeta = 2 - b \quad (5.24)$$

$$\frac{d}{d\theta} (\varphi_1) = \frac{1}{2} \quad (5.25)$$

$$\frac{d}{d\theta} (\varphi_2) = \frac{1}{2 - kb} \quad (5.26)$$

$$\frac{d}{d\theta} (\varphi_\zeta) = \frac{1}{2 - b} \quad (5.27)$$

Voor  $e^\sigma$  en  $\frac{d\tau}{d\theta}$  kan geschreven worden:

$$e^\sigma = \frac{2^{k-1} (2 - kb)}{(2 - b)^k} \quad (5.28)$$

$$\frac{d\tau}{d\theta} = \frac{(k - 1) kb^2}{2(2 - b)(2 - kb)} \quad (5.29)$$

en daarmee voor de straal van de profielneus:

$$r_{\text{symm}} = \frac{2^k (2 - kb)^2}{(2 - b)^{k-1}} \cdot \frac{1}{2(2 - b)(2 - kb) + (k - 1) kb^2} \quad (5.30)$$

of dimensieloos gemaakt met de uitdrukking voor de koorde (4.6):

$$\left(\frac{r}{c}\right)_{\text{symm}} = \frac{(2 - kb)^2}{2(2 - b)(2 - kb) + (k - 1) kb^2} \quad (5.31)$$

Voor een profiel met staartheek  $\delta = 0$  ( $k = 2$ ) vereenvoudigt uitdrukking (5.31) tot:

$$\left(\frac{r}{c}\right)_{\text{symm.Joukowsky}} = \frac{2(1 - b)^2}{1 + 3(1 - b)^2} \quad (5.32)$$

In fig. 5.2 is voor een reeks staartheuken het verband gegeven tussen de neusstraal van het symmetrische eerste profiel van Müller en de transformatie-variabele  $b$ .

Door de neusstraal te geven als functie van de transformatievariabele  $kb$  (zie fig. 5.3) wordt een overzichtelijker presentatie verkregen.

### 5.2. Gewelfde profielen

Voor gewelfde profielen ( $\beta \neq 0$ ) is niet direct duidelijk welk punt  $\theta$  van de cirkelcontour in het  $\zeta$ -vlak overgaat in de neus van het profiel in het  $z$ -vlak [11].

Volgens Betz en Keune [12] en Ginzel [13] wordt het op de cirkelcontour gelegen punt E bij afbeelding de profielneus (fig. 5.1).

In het  $\zeta$ -vlak is  $e$  de kortste afstand van de cirkelcontour tot het nulpunt  $\zeta = -(k - 1) b$ .

Is de  $\theta$  van het punt E bekend, dan kunnen de betrekkingen voor  $e^\sigma$  (5.7) en  $\frac{d\tau}{d\theta}$  (5.9) en daarmee de neusstraal van het gewelfde profiel berekend worden.

In de fig. 5.4 t/m 5.8 is voor een reeks staartheuken het verband gegeven tussen de neusstraal van het gewelfde eerste profiel van Müller en de transformatie-variabele  $kb$ .

Worden de fig. 5.3 t/m 5.8 over elkaar gelegd dan lijkt elke volgende figuur uit de voorafgaande te zijn ontstaan door een kleine verschuiving toe te passen (zie ook [10]).

Opgemerkt kan worden dat de krommen in fig. 5.4 t/m 5.8 allen samenkomen in het punt:  $kb = 2 \cos \beta$ ,  $\frac{r}{c} = 0$ .

In het geval van het symmetrische profiel ( $\beta = 0$ ) is dat het punt:  $kb = 2$ ,  $\frac{r}{c} = 0$  (fig. 5.3).

De verschuiving is dan:  $2(1 - \cos \beta)$ .

Blijkbaar kan worden volstaan met slechts één figuur, nl. fig. 5.3 of fig. 5.2 en de volgende eenvoudige betrekking:

$$(kb)_{\text{gewelfd}} = (kb)_{\text{symm}} - 2(1 - \cos \beta) \quad (5.33)$$

of ook

$$(b)_{\text{gewelfd}} = (b)_{\text{symm}} - \frac{2}{k}(1 - \cos \beta) \quad (5.34)$$

Uitdrukking (5.34) vereenvoudigt tot:

$$(b)_{\text{gewelfd}} = (b)_{\text{symm}} - (1 - \cos \beta) \quad (5.35)$$

indien voor de staartheek  $\delta = 0$  ( $k = 2$ ) wordt gekozen.

Zijn de neusstraal (in %c), de staartheek  $\delta$  en de welving  $\beta$  van het gegeven willekeurige profiel bekend, dan kan met fig. 5.2 en betrekking (5.34) de transformatie-variabele  $b$  bepaald worden.

Met de grootheden  $\delta$ ,  $\beta$  en  $b$  ligt het uitgangsprofiel voor de methode van Timman [6] vast.



### 6. De profielvorm

Uitdrukkingen voor de coördinaten van het eerste profiel van Müller kunnen op eenvoudige wijze worden afgeleid.

De afbeeldingsfunctie (2.1) laat zich herschrijven tot:

$$z = \frac{(\zeta - b)^k}{\zeta^{k-1}} + kb \quad (6.1)$$

Substitutie van (5.3) en (5.5) in uitdrukking (6.1) levert dan:

$$z = \frac{(r_1 e^{i\varphi_1})^k}{(r_\zeta e^{i\varphi_\zeta})^{k-1}} + kb \quad (6.2)$$

Na herleiding volgt:

$$z = \frac{r_1^k}{r_\zeta^{k-1}} \left( \cos(k\varphi_1 - (k-1)\varphi_\zeta) + i \sin(k\varphi_1 - (k-1)\varphi_\zeta) \right) + kb \quad (6.3)$$

Splitsing van  $z$  in een reëel- en imaginair deel geeft:

$$x = \operatorname{Re}(z) = \frac{r_1^k}{r_\zeta^{k-1}} \cos(k\varphi_1 - (k-1)\varphi_\zeta) + kb \quad (6.4)$$

$$y = \operatorname{Im}(z) = \frac{r_1^k}{r_\zeta^{k-1}} \sin(k\varphi_1 - (k-1)\varphi_\zeta) \quad (6.5)$$

Met gebruikmaking van de betrekkingen (5.10), (5.11), (5.14) en (5.15) kunnen voor elk punt  $\theta$  van de cirkelcontour in het  $\zeta$ -vlak de coördinaten  $x$  en  $y$  van het profiel in het  $z$ -vlak worden bepaald. Voor het normeren op de koorde  $c$  van het profiel worden de verg. (4.4) en (4.5) gebruikt.

### 7. De maximale profieldikte

De grootste dikte van een profiel kan gedefinieerd worden als de afstand tussen die raaklijnen aan de profielcontour die evenwijdig zijn met de reële as (zie fig. 7.1).

Het bepalen van de profieldikte komt dan neer op het vinden van de extreme waarden van  $y$ , m.a.w. het oplossen van de vergelijking:

$$\frac{d}{d\theta} (y) = 0$$

Differentiëren van uitdrukking (6.5) naar  $\theta$  geeft:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta} (y) = & \frac{r_1^k}{r_\zeta^{k-1}} \left\{ k \frac{d\varphi_1}{d\theta} - (k-1) \frac{d\varphi_\zeta}{d\theta} \right\} \cos(k\varphi_1 - (k-1)\varphi_\zeta) \\ & + \left\{ k \left( \frac{r_1}{r_\zeta} \right)^{k-1} \frac{dr_1}{d\theta} - (k-1) \left( \frac{r_1}{r_\zeta} \right)^k \frac{dr_\zeta}{d\theta} \right\} \sin(k\varphi_1 - (k-1)\varphi_\zeta) \end{aligned} \quad (7.1)$$

Met de uitdrukkingen (5.10), (5.11), (5.14) t/m (5.17), (5.20) en (5.21) kan nu voor elke waarde van de variabele  $\theta$  in het  $\zeta$ -vlak de  $\frac{d}{d\theta} (y)$  worden bepaald.

In het algemeen zijn er drie waarden van  $\theta$  waarvoor  $y$  een extreme waarde bereikt ( $\frac{d}{d\theta} (y) = 0$ , zie fig. 7.1).

De hierboven gehanteerde definitie is niet zo geschikt voor gewelfde profielen. Uit fig. 7.1 volgt nog dat bij deze definitie de plaats van de grootste dikte niet ondubbelzinnig kan worden aangegeven. In het volgende zal daarom alleen aandacht worden besteed aan symmetrische profielen ( $\beta = 0$ ).

#### 7.1. Het symmetrische Joukowski profiel

Voor de berekening van de maximale dikte (in %c) en de ligging van deze dikte voor dit profieltype wordt verwezen naar [10].

#### 7.2. Het symmetrische eerste profiel van Müller

De grootste profieldikte zal (zie fig. 7.2) optreden daar waar:

$$\theta + \frac{\pi}{2} + \tau = \pi \quad (7.2)$$

Substitutie van de uitdrukking voor  $\tau$  (5.8) in bovenstaande betrekking levert:

$$\theta + \frac{\pi}{2} + (k - 1) \varphi_1 + \varphi_2 - k\varphi_\zeta = \pi \quad (7.3)$$

waarbij:  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  en  $\varphi_\zeta$  functies zijn van  $\theta$  (zie de betrekkingen (5.11), (5.13) en (5.15)).

De  $\theta$  die voldoet aan de in (7.3) geformuleerde voorwaarde wordt gevonden door middel van een iteratie-proces.

Substitutie van de zo berekende  $\theta$  in uitdrukking (6.5) geeft de halve maximale profieldikte. Met verg. (6.4) volgt de ligging van de maximale dikte.

De fig. 7.3 en 7.4 geven voor een reeks staartheoeken de maximale profieldikte (in %c) en de ligging van de maximale dikte als functie van de transformatie-variabele  $b$ .

### 8. Vergelijking met het von Kármán-Treffitz profiel

Worden de resultaten van [10] vergeleken met die uit dit verslag dan blijkt dat het eerste profiel van Müller (fig. 8.1 t/m 8.3) een grotere profioldikte en een bollere neusvorm heeft dan het von Kármán-Treffitz profiel met dezelfde staarhoek  $\delta$ , welving  $\beta$  en dikteparameter  $b$ .

De grootste profioldikte ligt, vergeleken met het overeenkomstige von Kármán-Treffitz profiel, wat meer naar voren (fig. 8.1).

De fig. 8.1 t/m 8.3 geven aan dat vanaf halverwege de profielkooorde tot de profielachterrand het eerste profiel van Müller en het overeenkomstige von Kármán-Treffitz profiel nagenoeg gelijk van vorm zijn.

Uit het hier gegeven overzicht volgt dat, evenals in [10], de neusstraal, de grootste dikte en de ligging van de grootste dikte met elkaar verband houden en derhalve niet naar believen willekeurig gekozen kunnen worden.

9. Literatuur

1. Joukowsky, N.                   Über die Konturen der Tragflächen der Drachenflieger.  
Z.F.M. 1, blz. 281-284 (1910).  
Z.F.M. 3, blz. 81-86 (1912).
  
2. Kármán, Th. von               Potentialströmung um gegebene Tragflächenquerschnitte.  
Trefftz, E.                       Z.F.M. 9, blz. 111-116 (1918).
  
3. Mises, R. von                   Zur Theorie des Tragflächenauftriebes.  
Z.F.M. 8, blz. 157-163 (1917).  
Z.F.M. 11, blz. 68-73, blz. 87-89 (1920).
  
4. Müller, W.                     Zur Konstruktion von Tragflächenprofilen.  
Z.A.M.M. 4, blz. 213-231 (1924).
  
5. Blom, J.J.H.                   Beschrijving van een vijf parameter profielfamilie.  
Technische Hogeschool Delft, Afdeling der Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek, rapport LR-220 (1976).
  
6. Timman, R.                     The direct and inverse problem of aerofoil theory. A method to obtain numerical solutions.  
Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium, Amsterdam, report NLL-F16 (1951).
  
7. Timman, R.                     Numerieke berekening van profielen bij voorgeschreven drukverdeling.  
Deel 1, Symmetrische profielen, rapport F12 (1947).  
Deel 2, Asymmetrische profielen, rapport F13 (1948).  
Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium, Amsterdam.

8. Ingen, J.L. van                      Advanced computer technology in aerodynamics:  
a program for airfoil section design utilizing  
computer graphics.  
Lecture notes for Von Kármán Institute of  
Fluid Dynamics (1969), AGARD lecture series  
no. 37 "High Reynolds-number subsonic  
aerodynamics", blz. 8.1-8.33 (1970).
9. Ingen, J.L. van                      On the design of airfoil sections utilizing  
computer graphics.  
De Ingenieur, jrg. 81, nr. 43, blz. L110-  
L118 (1969).
10. Blom, J.J.H.                        Enige karakteristieke grootheden van von  
Kármán-Treffitz profielen.  
Technische Hogeschool Delft, Afdeling der  
Luchtvaart- en Ruimtevaarttechniek,  
rapport LR-323 (1981).
11. Zaat, J.A.                         Een klasse van profielen met eenvoudige  
analytische eigenschappen.  
Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium,  
Amsterdam, rapport NLL-F42 (1948).
12. Betz, A.  
Keune, F.                              Verallgemeinerte Kármán-Treffitz-Profile.  
Luftfahrtforschung, Bd. XIII, blz. 336-  
345 (1936).
13. Ginzler, I.                         Krümmungseigenschaften von Profilen.  
Luftfahrtforschung, Bd. XIV, blz. 573-576  
(1937).

# ZETA / Z-PLANE

DELTA=18.000 (DEGR)  
BETA =10.000 (DEGR)  
B/R =0.879

XCM =-0.106  
YCM =0.174

XL =-0.791  
YL =0.000

F/R =0.661  
GAMMA=0.000 (DEGR)

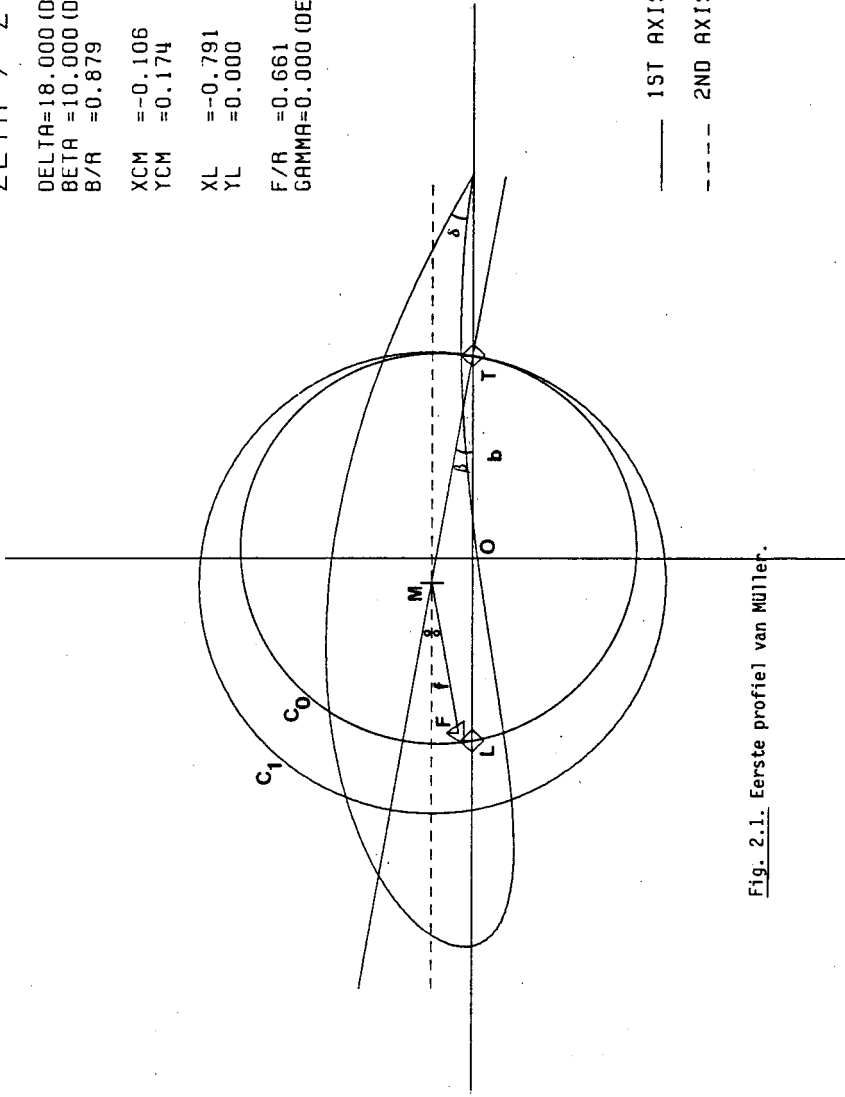


Fig. 2.1. Eerste profiel van MÜLLER.

# ZETA / Z-PLANE

DELTA=18.000 (DEGR)  
BETA =10.000 (DEGR)

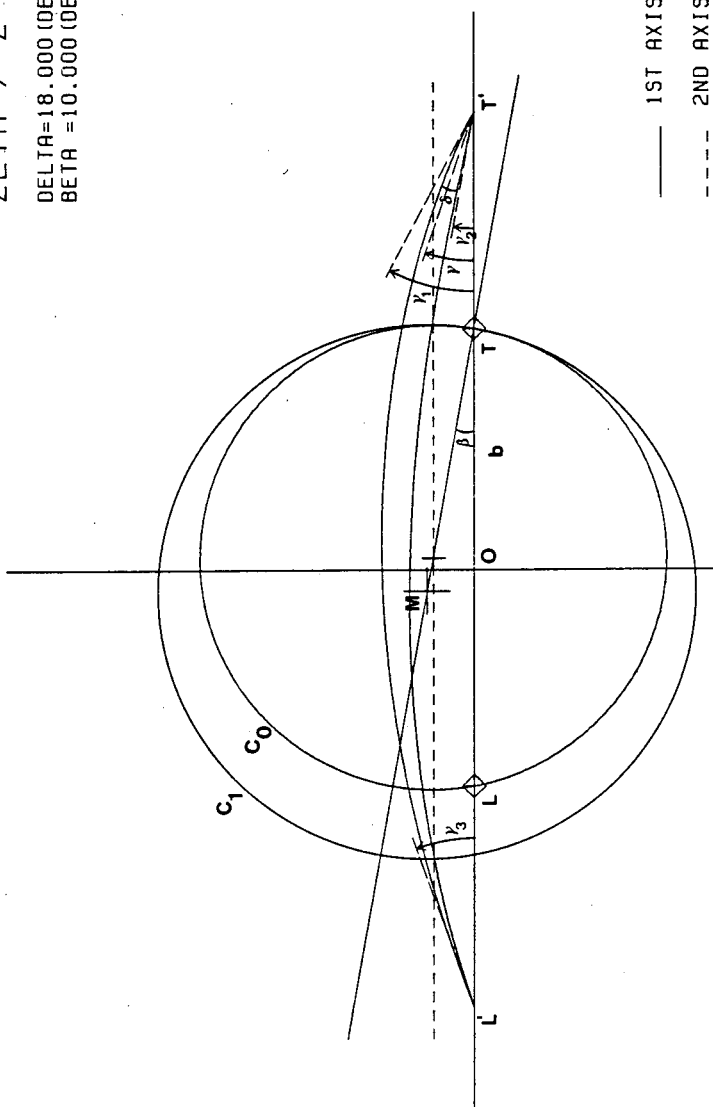


Fig. 2.2. Skelet van het eerste profiel van Muller.



# ZETA / Z-PLANE

DELTA=0.000 (DEGR)  
BETA =10.000 (DEGR)  
B/R =0.879

XCM =-0.106  
YCM =0.174

XL =-0.879  
YL =0.000

F/R =0.773  
GAMMA=0.000 (DEGR)

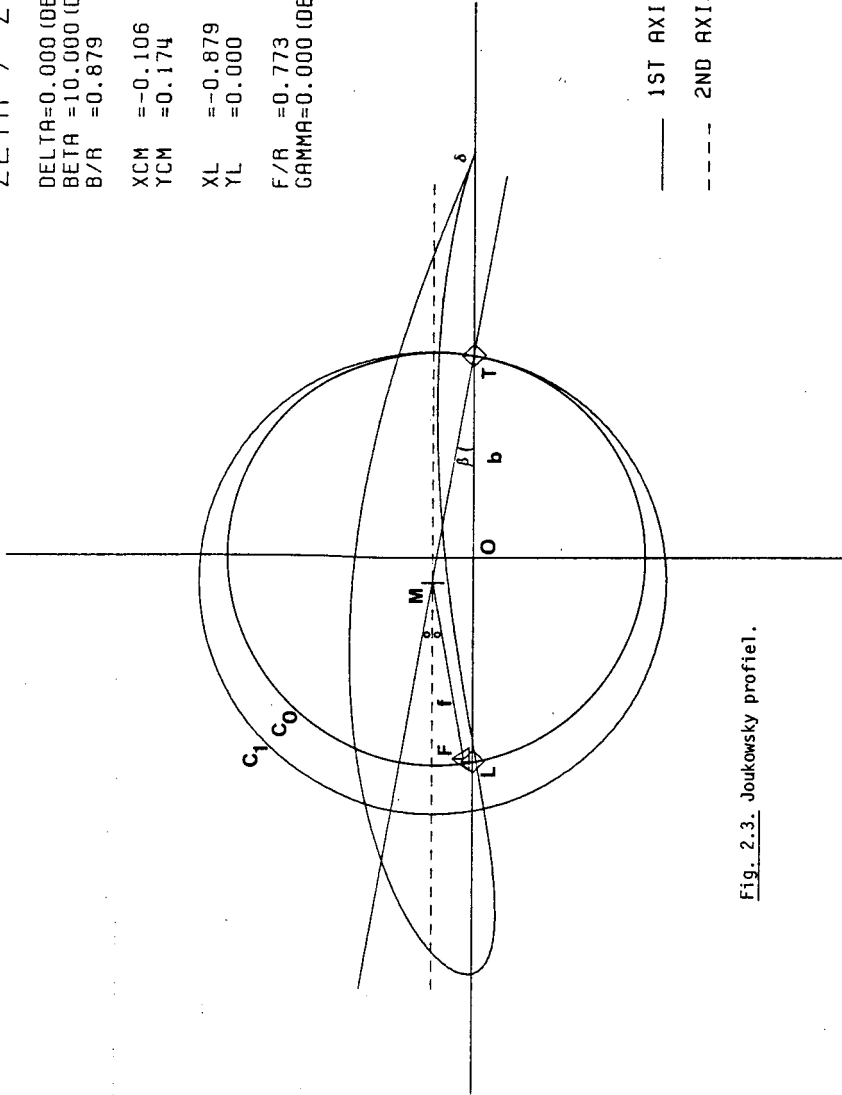


Fig. 2.3. Joukowski profil.

# ZETA / Z-PLANE

DELTA=0.000 (DEGR)  
BETA =10.000 (DEGR)

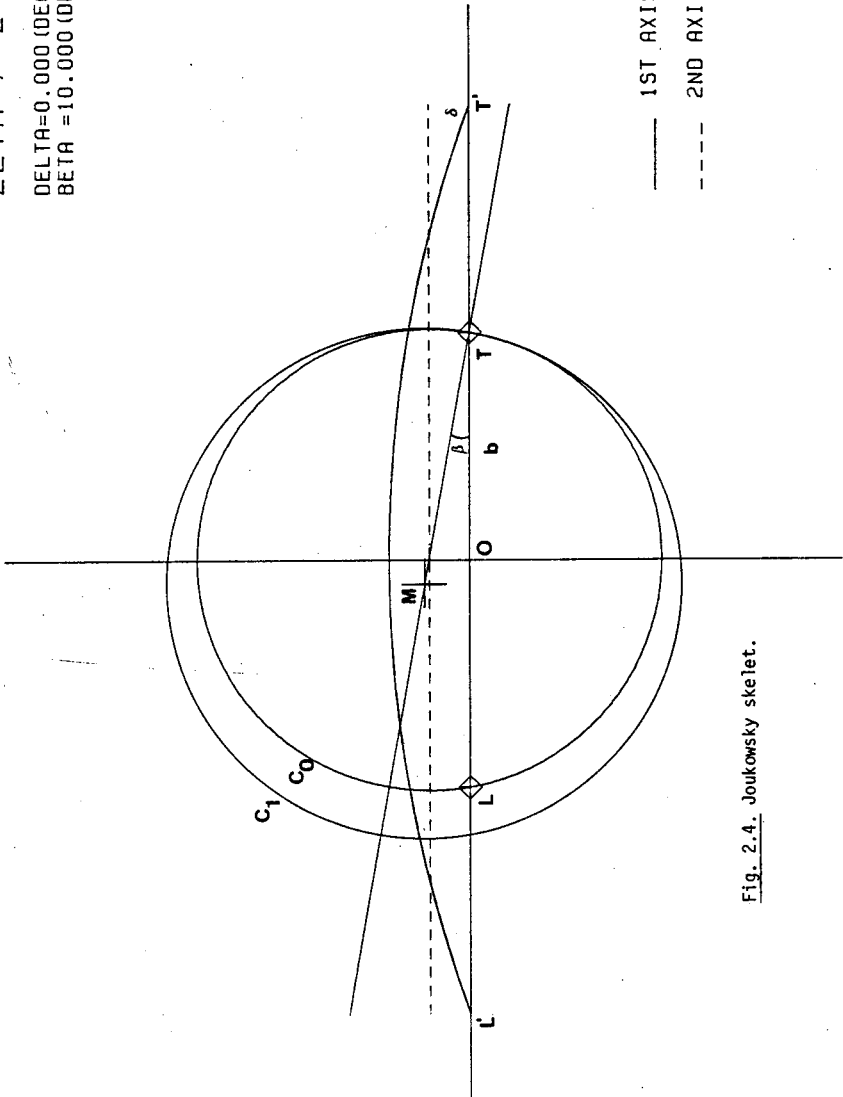


Fig. 2.4. Joukowski skelet.



ZETA / Z-PLANE

DELTA=18.000 (DEGR)  
BETA =10.000 (DEGR)

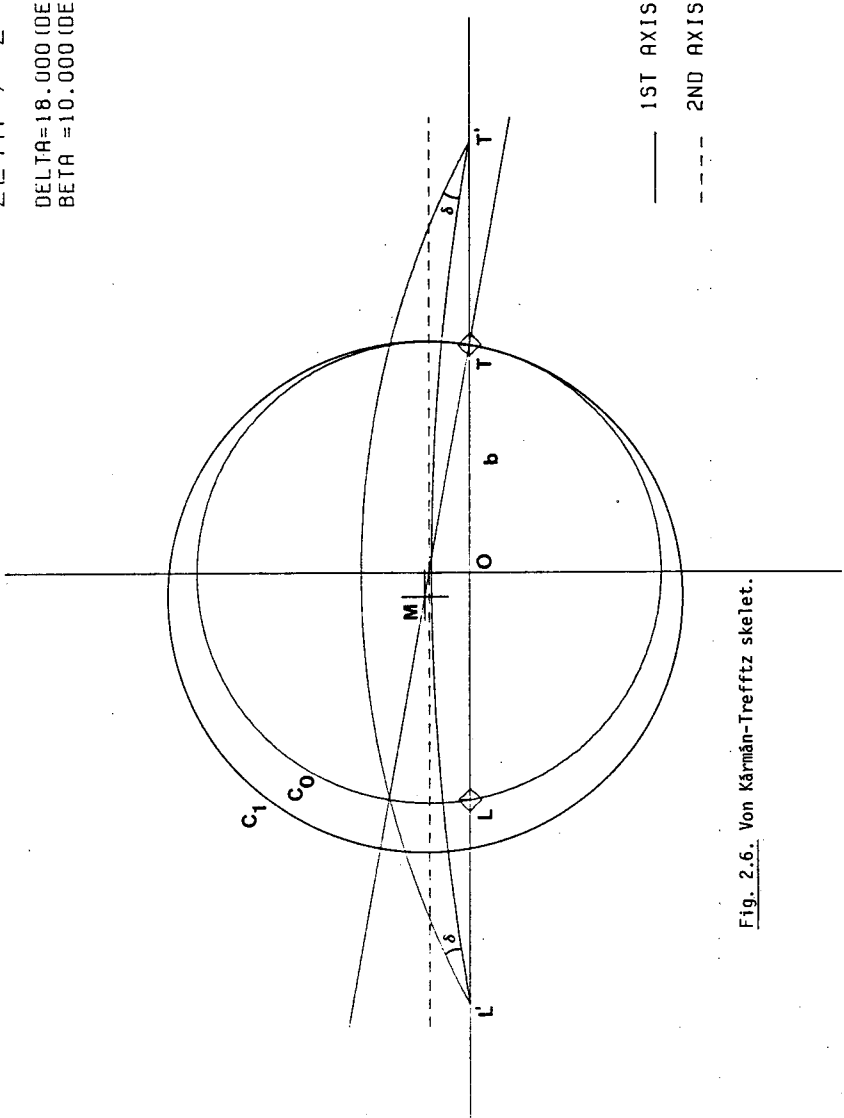


Fig. 2.6. Von Kármán-Treffitz skelet.

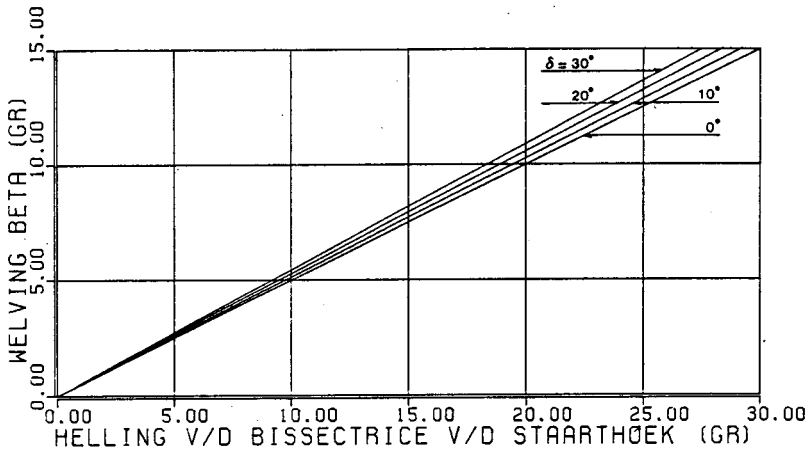


Fig. 3.1. Welving  $\beta$  als functie van de helling  $\gamma$  voor verschillende  $\delta$ .

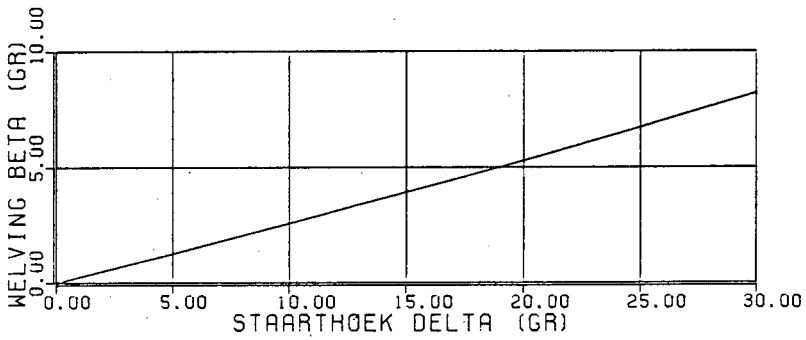


Fig. 3.2. Welving  $\beta$  als functie van de staarhoek  $\delta$  ( $\gamma_2 = 0$ ).









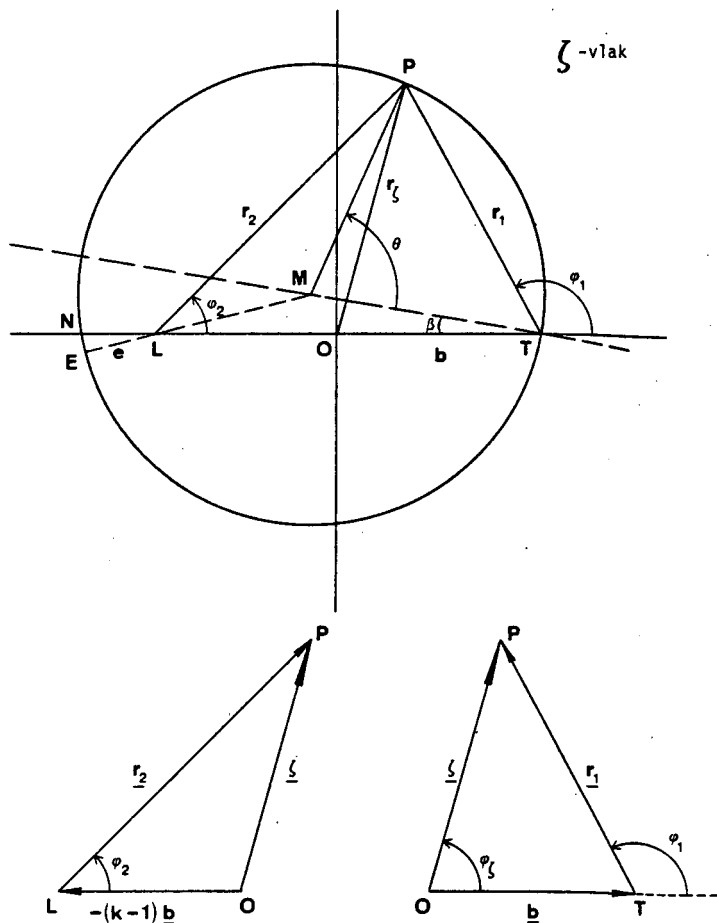


Fig. 5.1. Meetkundige betekenis van  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_\zeta$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  en  $\varphi_\zeta$ .

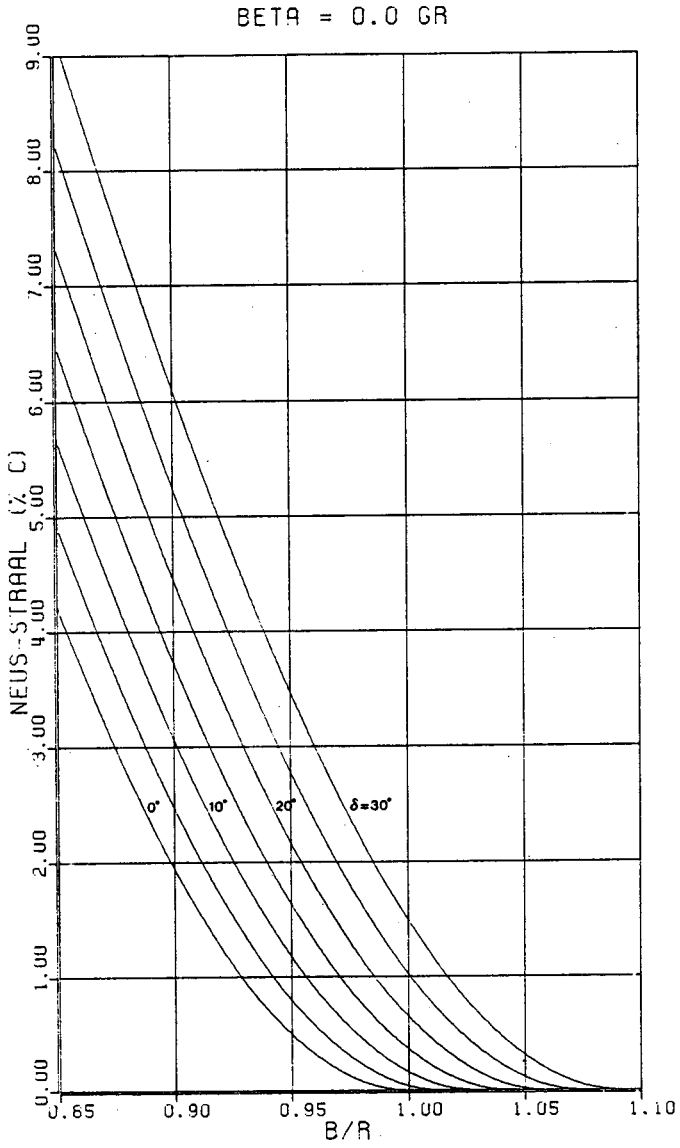


Fig. 5.2. Neusstraal r (%c) als functie van de transformatievariabele b ( $\beta = 0^\circ$ ).

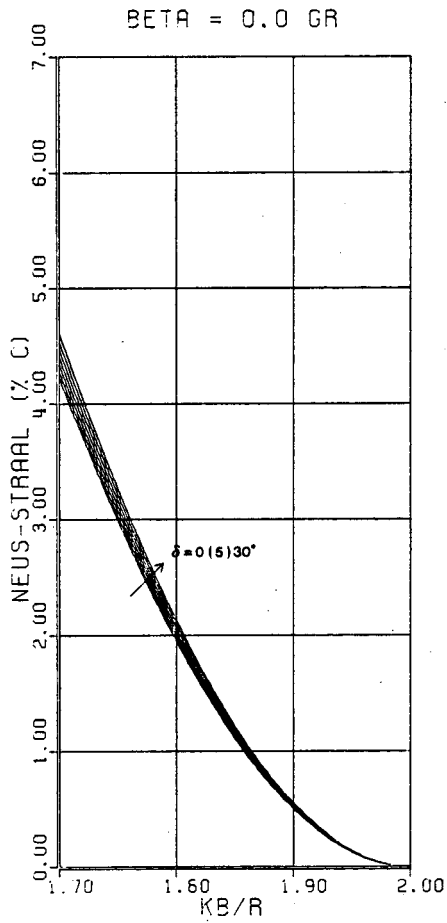


Fig. 5.3. Neusstraal r (%c) als functie van de transformatie-variabele kb ( $\beta = 0^\circ$ ).

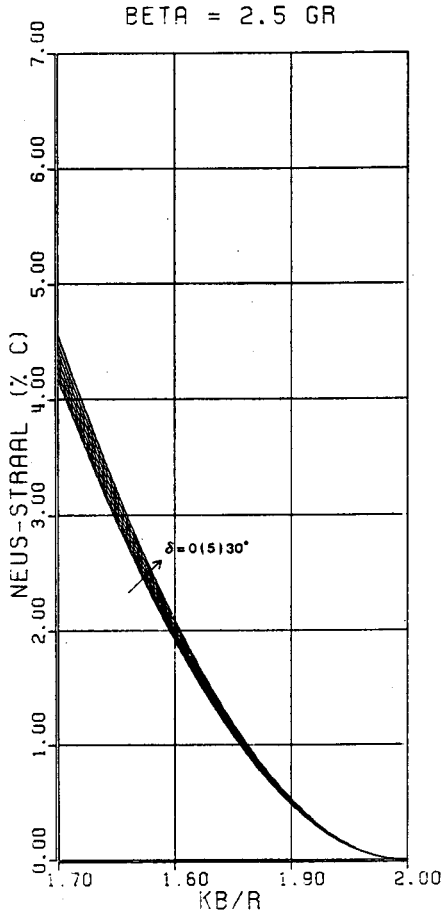


Fig. 5.4. Neusstraal r (%c) als functie van de transformatie-variabele kb ( $\beta = 2.5^\circ$ ).

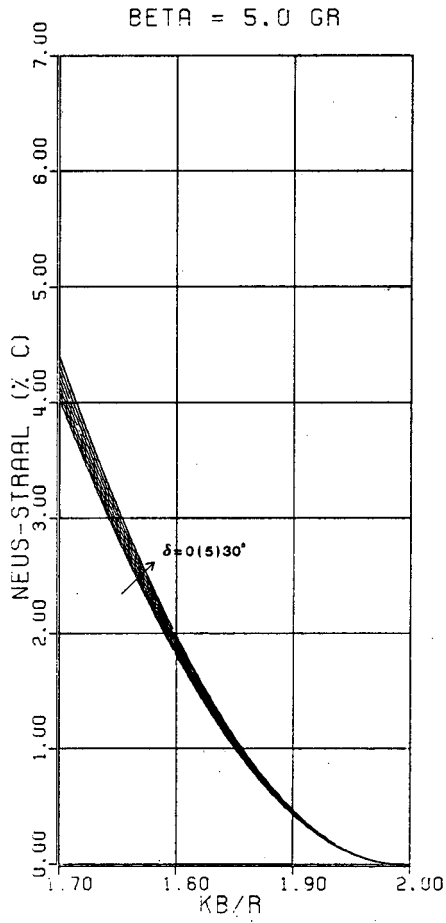


Fig. 5.5. Neusstraal  $r$  (%c) als functie van de transformatievariabele  $kb$  ( $\beta = 5^\circ$ ).

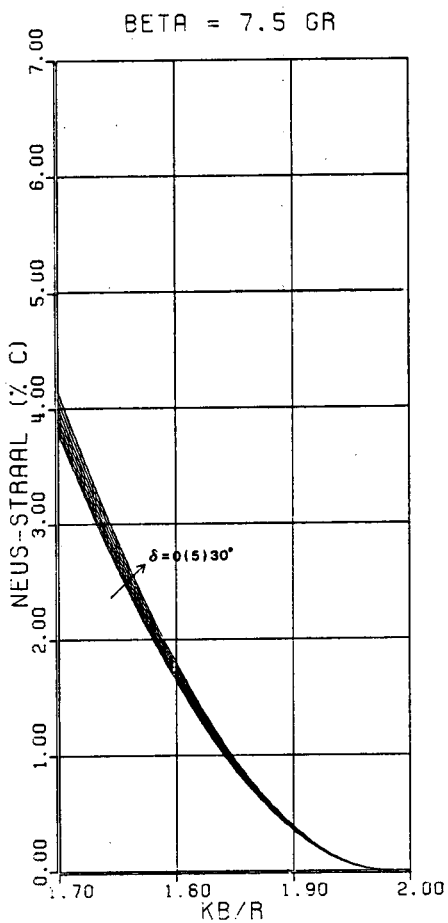


Fig. 5.6. Neusstraal  $r$  (%c) als functie van de transformatievariabele  $kb$  ( $\beta = 7.5^\circ$ ).

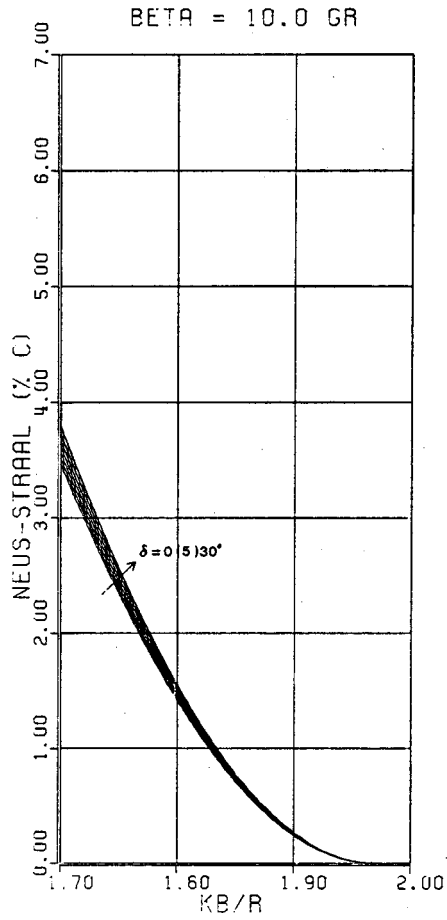


Fig. 5.7. Neusstraal  $r$  (%c) als functie van de transformatievariabele  $kb$  ( $\beta = 10^\circ$ ).

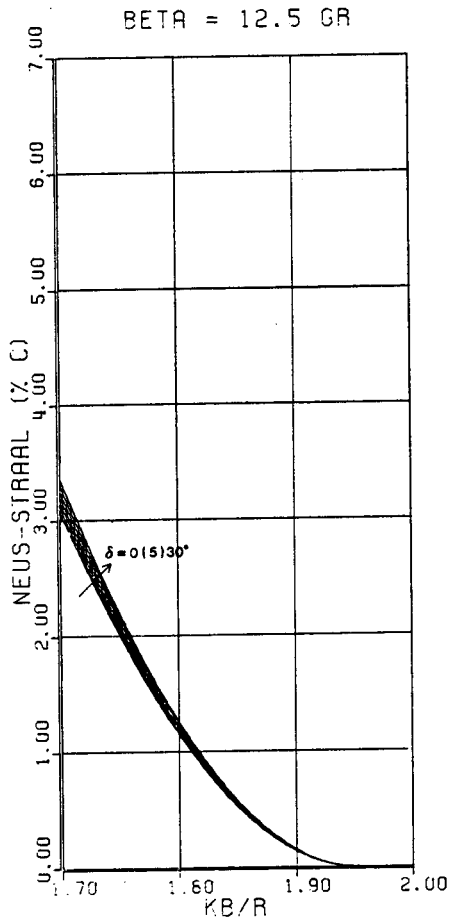


Fig. 5.8. Neusstraal r (%c) als functie van de transformatievariabele kb ( $\beta = 12.5^\circ$ ).



# ZETA / Z-PLANE

DELTA=9.000 (DEGR)  
BETA =12.000 (DEGR)  
B/R =-0.900

XCM =-0.078  
YCM =0.208

XL =-0.855  
YL =0.000

F/R =0.750  
GAMMA=0.000 (DEGR)

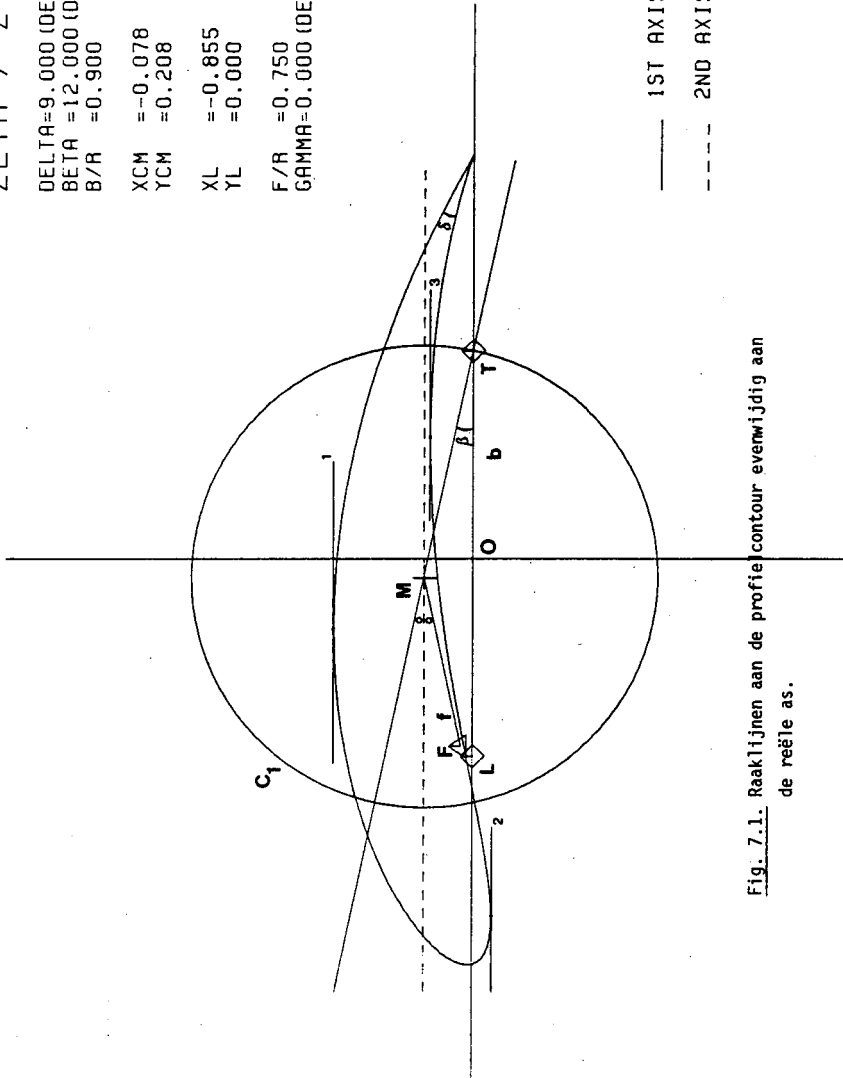


Fig. 7.1. Raaklijnen aan de profielcontour evenwijdig aan de reële as.

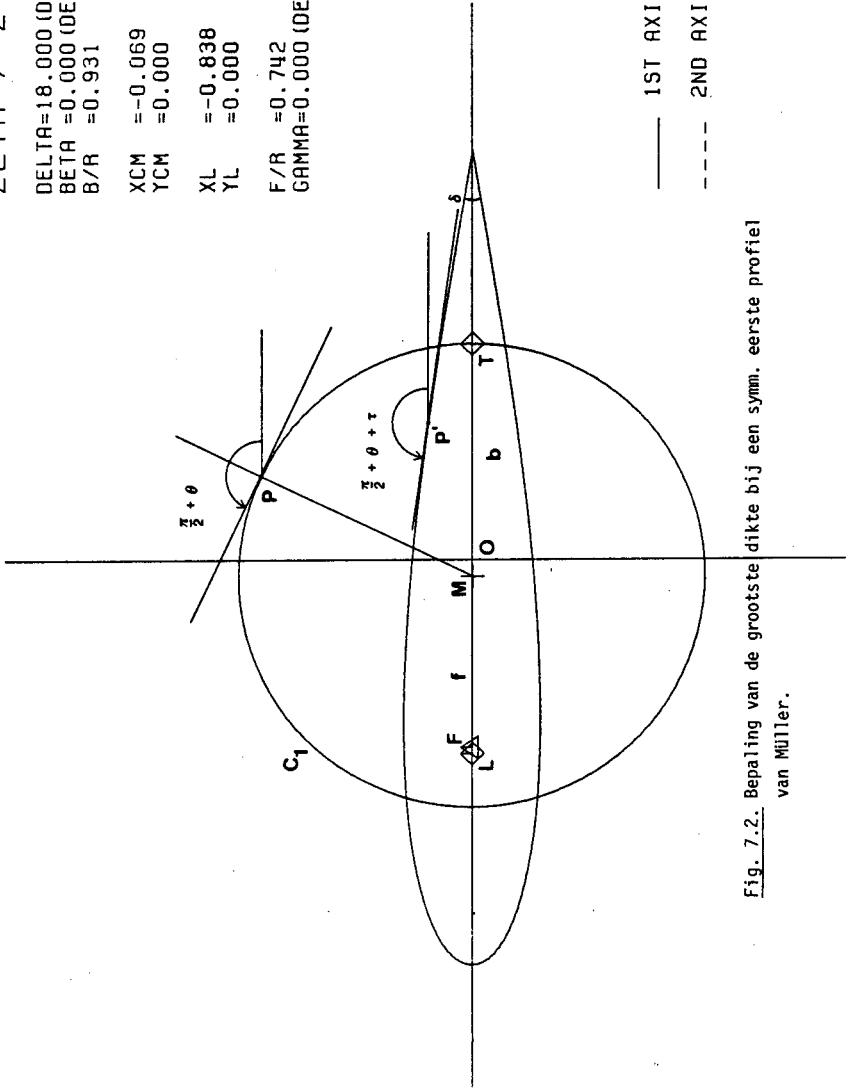
# ZETA / Z-PLANE

DELTA=18.000 (DEGR)  
 BETA =0.000 (DEGR)  
 B/R =0.931

XCM =-0.069  
 YCM =0.000

XL =-0.838  
 YL =0.000

F/R =0.742  
 GAMMA=0.000 (DEGR)



— 1ST AXIS  
 - - - 2ND AXIS

Fig. 7.2. Bepaling van de grootste dikte bij een symm. eerste profiel van MÜLLER.

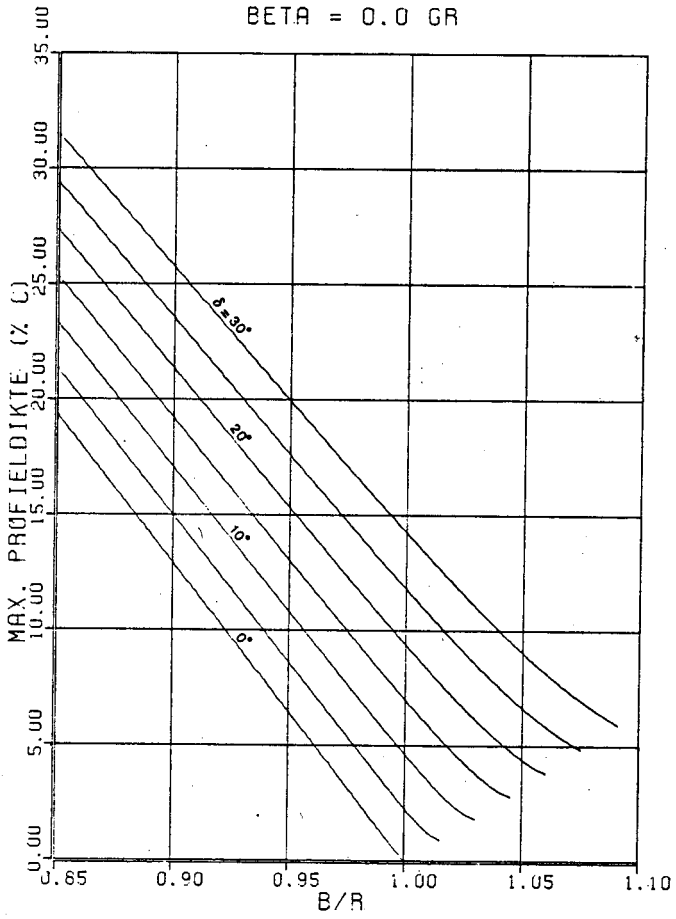


Fig. 7.3. Max. profieldikte (%c) als functie van de transformatievariabele b ( $\beta = 0^\circ$ ).

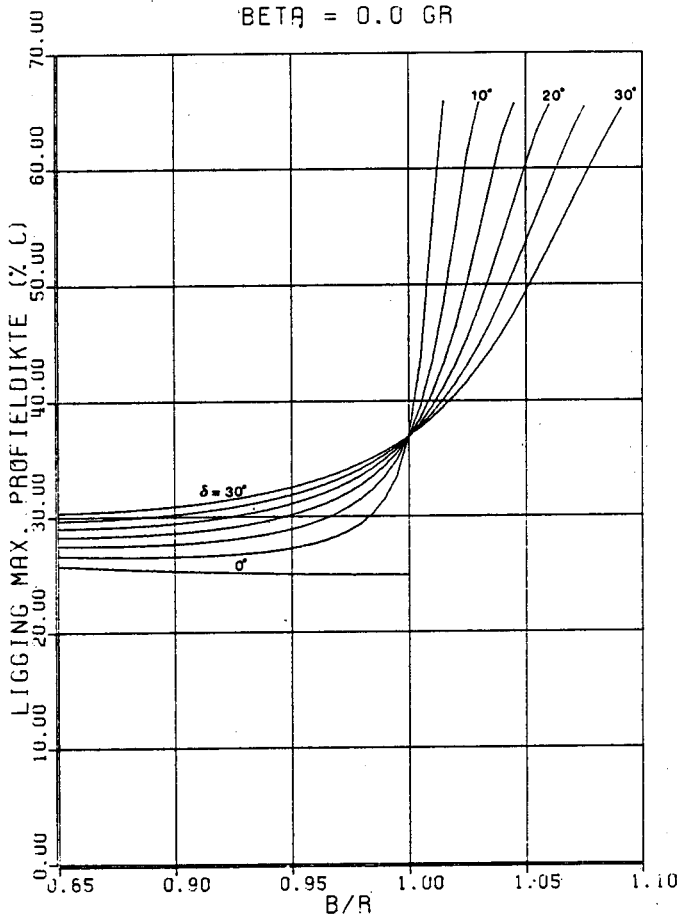


Fig. 7.4. Ligging van de max. profieldikte (%c) als functie van de transformatie-variabele b ( $\beta = 0^\circ$ ).

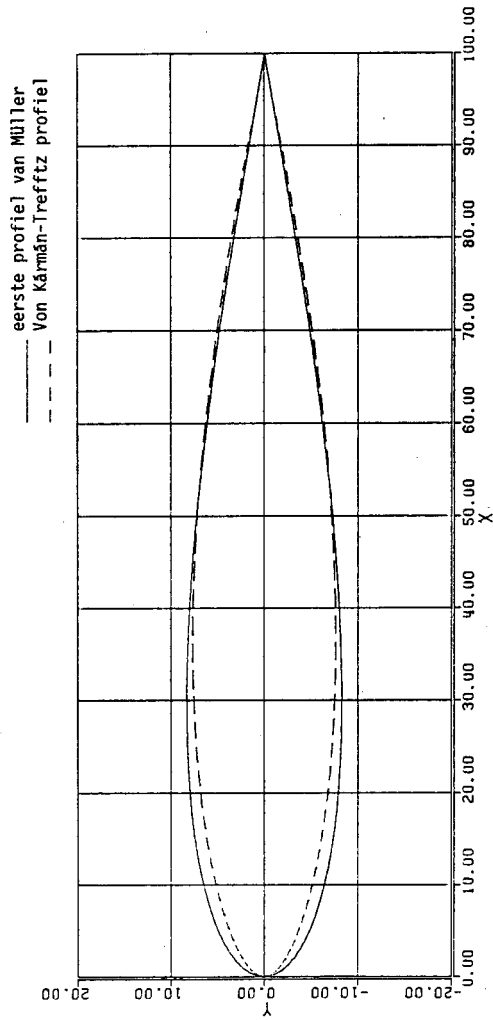


Fig. 8.1. Een symm. eerste profiel van Müller en een von Kármán-Trefftz profiel met dezelfde waarden voor  $\delta$ ,  $\beta$  en  $b$ .

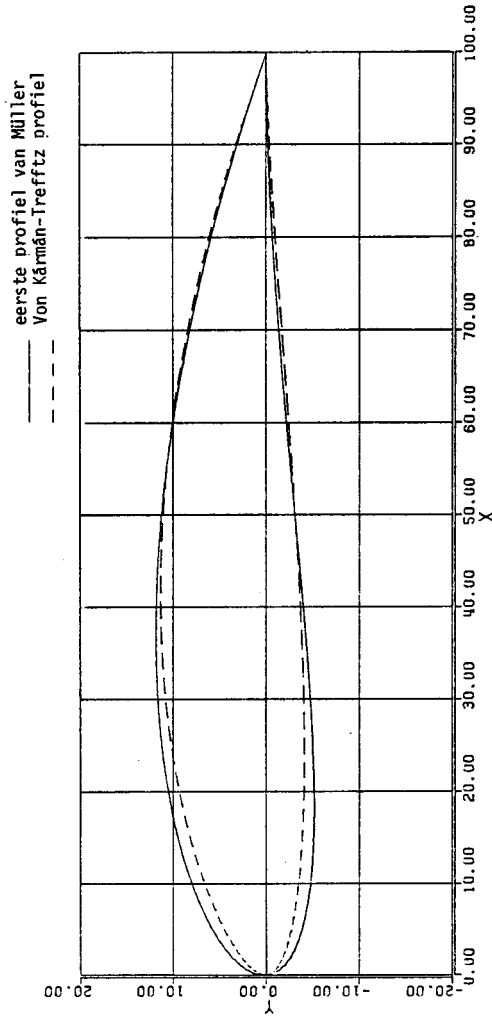


Fig. 8.2. Een gewelfd eerste profiel van MÜLLER en een von Kármán-Treffitz profiel met dezelfde waarden voor  $\delta$ ,  $\beta$  ( $\gamma_2 = 0$ ) en  $b$ .

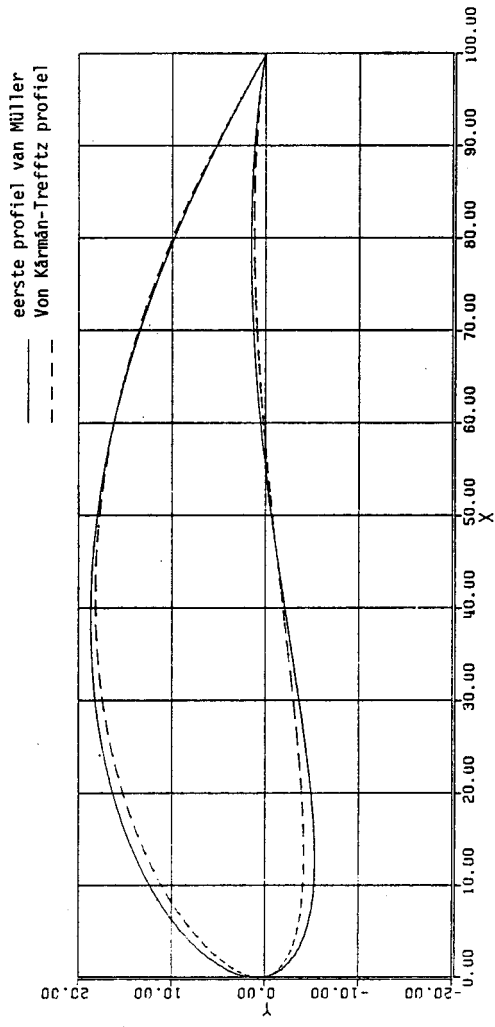


Fig. 8.3. Een sterk gewelfd eerste profiel van Müller en een von Kármán-Trefftz profiel met dezelfde waarden voor  $\delta$ ,  $\beta$  en  $b$ .

Rapport 325



60141010416

811489