Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Het inverteerbaar maken van matrices

(Engelse titel: Restricted invertibility)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute for Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

MICHAEL EDWIN WILDEBOER

Delft, Nederland
Augustus 2011

BSc verslag TECHNISCHE WISKUNDE

"Het inverteerbaar maken van matrices"
(Engelse titel: "Restricted invertibility")

Michael Edwin Wildeboer

Technische Universiteit Delft

Begeleiders

Dr. M.C. Veraar
Dr. F. Vallentin

Overige commissieleden

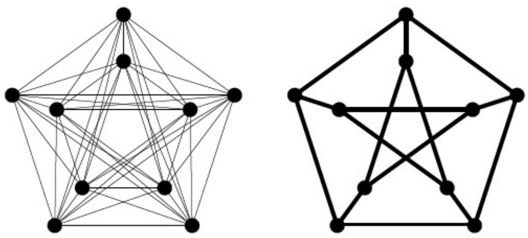
Dr. J.G. Spandaw

Augustus, 2011 Delft

Samenvatting

Zoals blijkt uit de titel van dit verslag, gaan de komende pagina's over het vinden van inverteerbare matrices. Matrices zijn objecten die vrij centraal staan in de studie der wiskunde. Ze worden gebruikt om data te representeren, zoals grafen en stelsels van lineaire vergelijkingen. Soms kan het handig zijn om zo'n willekeurige matrix te kunnen benaderen met een 'schaarse' of 'gestructureerde' matrix. Nadruk ligt hierbij op het feit dat de benadering zinvol moet zijn en er dus extra eisen aan deze benadering worden gesteld. De meest zinvolle benadering hiervoor is in 2010 gegeven door Daniel Spielman en Nikhil Srivastava in [1], onder andere toegepast op grafen.

In grafentheorie komt dit resultaat min of meer overeen met het vinden van een filter voor een graaf. Dit kan van pas komen om berekeningen op een lastige graaf te kunnen benaderen met berekeningen op een gefilterde graaf. Een voorbeeld van zo'n graaf en zijn gefilterde vorm is hieronder weergegeven:



Figuur 1: Een graaf en zijn gefilterde vorm

Met dit voorbeeld kunnen we grafisch duidelijk maken wat we bedoelen met een zinvolle benadering. In dit geval is de benadering zinvol, omdat we de structuur van de graaf bewaren, wat direct te zien is in figuur 1. Dit zorgt ervoor dat de graaf dus in zekere zin lijkt op de oorspronkelijke graaf.

In dit verslag wordt uitgelegd hoe Spielman en Srivastava een zinvolle benadering van zo'n matrix vonden. Daarnaast wordt er een computeralgortime gepresenteerd die als output die zinvolle matrix heeft. Als laatste wordt dit algoritme toegepast op een aantal matrices ter demonstratie.

Voorwoord

Op dit moment leest u een verslag van mijn bacheloreindproject, uitgevoerd als student Technische Wiskunde aan de Technische Universiteit te Delft. In zo'n bacheloreindproject, worden de in de bachelorfase verworven kennis en vaardigheden gebruikt om een wiskundige theorie te begrijpen en uit te leggen. In mijn geval gaat het om de artikelen [1] en [2].

Dit verslag is de schriftelijke raportage van mijn bevindingen inzake deze artikelen. Graag wil ik Frank Vallentin en Mark Veraar bedanken voor de begeleiding van dit project. Ik heb mijn te beperkte kennis van lineaire algebra kunnen uitbreiden en heb veel geleerd bij het bestuderen van de artikelen en het praten hierover met mijn begeleiders. In deze gesprekken heb ik een beter begrip gekregen van vele zaken uit de lineaire algebra, maar ook mijn kennis vergroot over het ontwerpen van een computerprogramma en het uitleggen van mijn bevindingen in een mondelinge presentatie. Tevens wil ik hen bedanken voor het geduld bij de uitleg en de vrijheid die ik kreeg bij het uitvoeren van het project. Al met al was het een erg leerzame ervaring.

Verder wil ik de heren Spandaw en Ridderbos bedanken voor de vele leerzame bijeenkomsten van het studentencolloquium. Een waardevolle aanvulling op het eindproject, waarbij de student leert hoe hij een wiskundig probleem zodanig kan presenteren, dat het begrijpelijk is voor zijn publiek. Verder dank voor de soepele omgang met mijn afwezigheid voor een aantal weken, wat er voor heeft gezorgd dat ik mijn gehele bachelorproject alsnog dit jaar heb kunnen afronden. Specifiek wil ik de heer Spandaw bedanken voor zijn zitting in de beoordelingscommissie.

Ten slotte wens ik u veel leesplezier bij het lezen van dit verslag.

Michael Edwin Wildeboer,
Auteur

Inhoudsopgave

HOOFDSTUK 1

Inleiding

Dit hoofdstuk geeft een inleiding in het bachelorproject. In dit hoofdstuk zullen ten eerste de achtergrond en geschiedenis van het probleem geschetst worden, waarmee het onderwerp een plaats krijgt in het vakgebied. Dit gebeurt tegelijk met het behandelen van eerdere literatuur over het probleem. Hieruit rolt in zekere zin de exacte probleemstelling, met de daarbij horende deelproblemen. Tot slot wordt de indeling van het verslag gegeven, zodat de lezer weet wat in welk hoofdstuk te vinden is.

1.1 Achtergrond en geschiedenis

Al sinds 1959 bestaat er een open probleem in de Wiskunde, namelijk de Kadison-Singer conjecture, geformuleerd door R. Kadison en I. Singer in [3]. Dit probleem vindt zijn oorsprong in een vraag die hier niet verder behandeld zal worden. Al 52 jaar lang proberen de meeste getalenteerde wiskundigen een antwoord te geven op deze vraag. Dit heeft geresulteerd in stapels en stapels aan literatuur, maar nog geen antwoord. De focus in deze literatuur is op dit moment tweezijdig. Enerzijds wordt de equivalentie tussen de Kadison-Singer conjecture en vele andere open problemen binnen verschillende takken van de wiskunde bewezen. Anderzijds houdt men zich bezig met het bewijzen van afgezwakte vormen van deze conjecture.

In 1979 heeft J. Anderson een significante bijdrage geleverd om dichter bij een antwoord te komen. Hij bewees in [4] dat de KS-conjecture equivalent is met de Paving conjecture. Dit resulteerde in een nieuwe aanpak voor het vinden van een antwoord op de vraag die Kadison en Singer stelden, wat de interesse wekte van andere wiskundigen. Andere equivalenties werden bewezen, waaronder vele door Casazza in onder andere [5].

Een tweede groep hield zich bezig met het vinden van bewijzen voor afgezwakte vormen van Kadison-Singer. Hierbij was het overigens niet altijd van te voren duidelijk dat dit zo'n afgezwakte vorm was. Soms gebeurde het dat ze zich bezig hielden met een andere vraag, welke later equivalent bleek te zijn met zo'n afgezwakte Kadison-Singer. Onder andere J. Bourgain en L. Tzafriri bekeken zo'n afgezwakte vorm. In deze specifieke vorm staat de volgende vraag centraal:

Gegeven een matrix, kunnen wij deze dan op een zinvolle manier benaderen met een andere 'schaarse' of 'gestructureerde' matrix, die inverteerbaar is?

Vragen die hierbij een rol spelen zijn dus:

1. Wanneer is zo'n schaarse matrix een zinvolle benadering van de originele matrix?
2. Voor welke matrices kunnen we zo'n benadering vinden?
3. Kunnen we de schaarse, inverteerbare matrix ook daadwerkelijk construeren en zo ja, hoe?

Het antwoord op zowel de eerste als de tweede vraag is in 1987 voor het eerst gegeven door Bourgain en Tzafriri in [6]. Zij stelden dat ze op constantes na zo'n zinvolle benadering konden vinden voor vierkante matrices. Het bewijs hiervoor maakte gebruik van technieken uit de functionaal-analyse, was 87 pagina's lang en niet-constructief. Ze gaven dus geen antwoord op de derde vraag.

In de loop der tijd is het gelukt om dichter bij de meest zinvolle benadering te komen, zoals te lezen valt in [7] en [8]. Sinds kort is het Daniel Spielman en Nikhil Srivastava gelukt om in [1] een bewijs te geven met de meest zinvolle benadering tot nu toe, gebruik makend van elementaire lineaire algebra. Dit bewijs is maar 7 pagina's lang en geeft een algoritme voor het vinden van die benadering (en daarmee een antwoord op de derde vraag).

Gek genoeg kwam dit bewijs voort uit hun werk bij het zoeken naar filters voor grafen, zoals te lezen valt in [2]. De bewijsstrategie, gebruikt voor deze filters, komt zeer sterk overeen met de bewijsstrategie voor het vinden van een zinvolle benadering van een matrix. Hier wordt dus ook direct de toepasbaarheid van hun benadering duidelijk. Verder maken zij duidelijk dat de manier om deze beide bewijzen (die voor grafen en die voor matrices) aan elkaar te koppelen is, precies gegeven wordt door de Kadison-Singer conjecture, waarbij ook deze artikelen hun werk doen bij de minstens 50-jarige zoektocht naar een antwoord op een vraag gesteld in 1959.

Sinds kort is er ook door Assaf Naor, een wereldbekende wiskundige, gekeken naar het bewijs van D. Spielman en N. Srivastava [11]. Daarin is vooral motivatie voor de stelling en wat meer over toepassingen te vinden.

In dit verslag zal enkel en alleen worden ingegaan op de twee artikelen van D. Spielman en N. Srivastava. Om tot deze behandeling te komen zullen we eerst in moeten gaan op de exacte probleemstelling in deze artikelen, met de daarbij horende deelproblemen.

1.2 Probleemstelling

In [6] wordt een afgezwakte vorm van Kadison-Singer bewezen, welke Bourgain en Tzafriri de Restricted Invertibility Theorem noemen. In woorden zegt deze stelling het volgende:

> **Restricted Invertibility Theorem:** *Gegeven een vierkante matrix, dan kunnen we een deelverzameling van de kolommen van deze matrix vinden, die de matrix zinvol representeren.*

Hierin komt naar voren dat we een selectie van kolommen gaan maken, die tezamen de representatie vormen. Hoe zinvol deze representatie is, hangt af van twee constantes in de stelling. Hoe groter deze constantes, hoe zinvoller de representatie. Dat is precies wat Spielman en Srivastava in [1] is gelukt, om de constantes groter te maken en dus de meest stricte vorm van dit bewijs te leveren. Zij waren dus in zekere zin in staat het woord zinvol in de hierboven gestelde vraag te vervangen door zinvoller. Hun stelling kan daardoor worden gezien als een generalisatie van het bewijs van Bourgain en Tzafriri, wat wordt bewezen in Appendix C.

In mijn project is het mijn voornaamste doel het bewijs in [1] te begrijpen en te bestuderen. Bij de behandeling van dit probleem komt een aantal deelproblemen naar boven, die deels nodig zijn om de stelling te kunnen bestuderen en deels bij mijzelf naar voren kwamen toen ik de artikelen aan het lezen was.

1.2.1 Deelproblemen

Bij de beschrijving van de probleemstelling en het lezen van de artikelen komen veel vragen naar boven. Tijdens dit bachelorproject is er getracht een antwoord te vinden op onderstaande vragen.

1. Wanneer noemen we een matrix S een zinvolle benadering van de matrix A?
2. Voor welke matrices is het mogelijk zo'n benadering te vinden?
3. Hoe bewijzen we dat die benadering bestaat?
4. Hoe construeren we die benadering?
5. Kunnen we dit door de computer in een programma laten doen?
6. Wat bereiken we met het vinden van zo'n benadering?

In het bachelorproject is er getracht antwoord te vinden op deze vragen en deze deelproblemen zullen de rode draad door dit verslag vormen.

1.3.1 Voorkennis

Dit verslag is geschreven voor medestudenten Technische Wiskunde van het derde jaar, wat betekent dat het doel is dat dit verslag te begrijpen zou moeten zijn voor die studenten. Er wordt verondersteld dat zij beschikken over de kennis voortkomende uit de vakken Lineaire Algebra 1 en 2 aan de TU Delft of Leiden. In mijn geval was dit de kennis vergaard uit [9] en [10]. Het is belangrijk, dat de lezer bekend is met de begrippen vector, vectornorm, matrix, matrixnorm, eigenwaarde, eigenvector, singuliere waarde en spoor. Voor lagere jaars studenten en andere geïnterreseerden, is er in Appendix A een opsomming gegeven van de benodigde voorkennis. Hierbij is getracht de notatie door het gehele verslag uniform te houden.

Het is daarnaast mijn bedoeling geweest de trend te doorbreken, waarbij het zo is dat er in verslagen van deze soort veel wordt gesmeten met moeilijke wiskunde, zonder daar echte uitleg bij te geven. Er zal veel tekst tussen de stukken staan om aan te geven wat er gebeurt en wat de lezer zich erbij moet voorstellen. Hier heb ik voor gekozen om het geheel leesbaarder te maken en zelfs misschien toegankelijk te houden voor mensen die amper ervaring met dit soort wiskunde hebben. Zij zouden door de wiskunde heen alsnog de rode draad moeten kunnen begrijpen. Het moet niet het doel zijn om te laten zien wat voor lastige formules en bewijzen ik tevoorschijn kan toveren, zonder dat iemand daar wat van begrijpt.

Om hoofdstuk 5 te kunnen lezen, zal men moeten beschikken over voorkennis uit de grafentheorie. Voor de doelgroep van dit verslag is deze voorkennis minimaal en daarom zijn de benodigde begrippen met betrekking tot grafen uitgebreider behandeld in Appendix B.

1.3.2 Indeling verslag

Het verslag is opgedeeld in de volgende hoofdstukken:

Hoofdstuk 1 geeft een inleiding tot het verslag, de achtergrond en geschiedenis van het probleem in zijn vakgebied en een opsomming van de inhoud van het verslag.

Hoofdstuk 2 In dit hoofdstuk wordt er een uitgebreide introductie van het probleem gegeven. Daarna wordt naar een oplossing toegewerkt, waarbij we laten zien dat deze oplossing instabiel genoemd kan worden. Vervolgens introduceren we het begrip stabiele rang en staan we stil bij het begrip kleinste singuliere waarde. Aan de hand van deze begrippen wordt de stelling 'beperkte inverteerbaarheid' geponeerd, welke wel een stabiele oplossing van het probleem biedt.

Hoofdstuk 3 laat zien dat het inderdaad mogelijk is die benadering te vinden voor een vierkante matrix. In dit hoofdstuk zal de belangrijkste stelling van het verslag gegeven en bewezen worden. Hierin wordt geprobeerd de lezer intuïtief mee te nemen in het bewijzen van de stelling.

Hoofdstuk 4 introduceert het bijbehorende algoritme. Verder worden voorbeelden met verschillende matrices uitgewerkt, ter illustratie van dit algoritme. Als laatste worden er een aantal conclusies getrokken uit deze voorbeelden.

Hoofdstuk 5 bespreekt in een discussie de resultaten van het bachelorproject. Het geeft aan waar mogelijke verbeteringen van het algoritme mogelijk zijn en hoe het project voor mij als student is ervaren.

In de appendix zal onder andere de voorkennis behandeld worden. Verder zijn de computerprogramma's hierin terug te vinden. De gebruikte literatuur is te vinden in de bibliografie aan het einde van het verslag.

1.3.3 Leesvolgorde

Dit verslag kan het beste worden gelezen in de volgorde waarin hij geschreven is. In het geval dat men bekend is met het begrip stabiele rang, kan hoofdstuk 2 overgeslagen worden. Om de stelling te begrijpen kan men dan volstaan met het lezen van hoofdstuk 3 en 4. In geval men niet geïnteresseerd is in de toepassing op het gebied van grafen, kan hoofdstuk 6 worden overgeslagen.

HOOFDSTUK 2

Het inverteren van een matrix

In dit hoofdstuk wordt er een uitgebreide introductie van het probleem gegeven. Daarna wordt naar een oplossing toegewerkt, waarbij we laten zien dat deze oplossing instabiel genoemd kan worden. Aan de hand van deze begrippen stabiele rang en kleinste singuliere waarde wordt de stelling 'beperkte inverteerbaarheid' geponeerd, welke wel een stabiele oplossing van het probleem biedt.

2.1 Introductie

Er wordt een willekeurige matrix A van $m \times n$ bekeken. Zoals bekend kunnen we deze matrix zien als een lineaire transformatie van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$. Om het gedrag van zo'n matrix A te bepalen, kunnen we ons verschillende vragen stellen over die matrix. In het geval van de situatie waarbij $m = n$ is een belangrijke vraag eigenlijk altijd of de matrix inverteerbaar is.

Het is duidelijk dat er zowel matrices bestaan die inverteerbaar zijn, als matrices die niet inverteerbaar zijn. We vragen ons af of we de niet inverteerbare matrices A kunnen respresenteren door een deelmatrix S, die wel inverteerbaar is n lijkt op de oorspronkelijke matrix A. Het begrip deelmatrix geeft hierbij aan dat de matrix S uit sommige elementen van A bestaat en mogelijk dus ook gelijk is aan A.

Uit [9] weten we dat de vraag of een matrix inverteerbaar is, overeenkomt met de vraag of de kolommen van de matrix B lineair onafhankelijk zijn. Hierdoor kun je aan sommige matrices vrij snel zien of ze inverteerbaar zijn.

VOORBEELD 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wel inverteerbaar
De drie bovenstaande kolommen zijn allemaal lineair onafhankelijk

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Niet inverteerbaar
Kolom 3 is te vormen door kolom 1 en 2 op te tellen, ze zijn dus lineair afhankelijk

Dit verband geeft ook direct een antwoord op de hierboven gestelde vraag. We kunnen de rechtermatrix namelijk inverteerbaar maken met een simpel algoritme. Verwijder eerst de lineair afhankelijke kolommen, waarna vervolgens de lineair afhankelijke rijen worden verwijderd. Omdat van een willekeurige matrix geldt dat zijn lineair onafhankelijke rijen en kolommen beiden gelijk zijn aan de rang van die matrix, is de gevonden matrix vierkant. We vinden dan een deelmatrix S, bestaande uit vier van de elementen van de oorspronkelijke matrix A, die wel inverteerbaar is. Dit gegeven kunnen we als volgt omschrijven:

Feit 1 *Elke matrix $A\backslash\{0\}$ heeft een vierkante deelmatrix S, die inverteerbaar is. Deze is te vinden door allereerst de lineair afhankelijke kolommen en vervolgens de lineair afhankelijke rijen te verwijderen. De dimensie van deze matrix is gelijk aan de rang van de matrix A, gegeven door het aantal lineair onafhankelijke kolommen/rijen.*

Dit komt ook weer overeen met het hierboven gegeven voorbeeld 1. De rang van de linkermatrix is 3, dus de matrix zelf is inverteerbaar. De rang van de rechtermatrix is 2, dus we vinden een deelmatrix van grootte 2×2, die inverteerbaar is.

2.2 Instabiel

Bovenstaande wijze is een manier om een matrix te benaderen met een deelmatrix, maar helaas voldoet deze manier in vele gevallen niet. De begrippen rang en inverteerbaarheid hebben namelijk het nadeel instabiel te zijn in het geval van ruis. Een voorbeeld waarbij dit soort ruis optreed is bij meetgegevens met een meetonnauwkeurigheid.

VOORBEELD 2

Stel we hebben de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Het is duidelijk dat $rang(A) = 1$ en de matrix **niet** inverteerbaar is.

Vervolgens bekijken we de volgende matrix, waarbij ϵ een matrix is met op elke locatie een willekeurig klein beetje ruis.

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \epsilon$$

Hier zien we in dat $rang(A') = 3$ en de matrix **wel** inverteerbaar is.

Overigens zijn er situaties waarbij verschillende elementen dezelfde ruis kennen en dit argument niet opgaat, maar deze komen zeer weinig voor. Dit voorbeeld laat daarom zien dat het nuttiger kan zijn stabielere begrippen te introduceren.

2.3.1 Kleinste singuliere waarde

Allereest introduceren we het begrip kleinste singuliere waarde. Het algemene begrip singuliere waarden is terug te vinden in de Appendix bij definitie 34.

Definitie 2 *Laat A een $m \times n$ matrix. We definiëren de* **kleinste singuliere waarde** *van de matrix A als volgt:*

$$\sigma_{min}(A) = \sqrt{\lambda_{min}(A^T A)}$$

Deze kleinste singuliere waarde geeft aan hoe goed een matrix inverteerbaar is, maar alvorens dit aan te tonen, hebben we eerst een Lemma nodig:

Lemma 3 *Laat A een $m \times n$ matrix. De matrix $A^T A$ is inverteerbaar dan en slechts dan als A lineair onafhankelijke kolommen heeft.*

Bewijs. Merk op dat $A^T A$ een vierkante matrix is. Er geldt dat een matrix inverteerbaar is dan en slechts dan als zijn nulruimte alleen de nulvector bevat. Als we aantonen dat $A^T A$ en A dezelfde nulruimte hebben, volgt uit het feit dat A lineair onafhankelijke kolommen heeft, dat zijn nulruimte enkel de nulvector bevat, dus ook zo voor $A^T A$, welke dan dus inverteerbaar is. Analoog volgt dan uit het feit dat $A^T A$ inverteerbaar is, dat zijn nulruimte enkel de nulvector bevat en dus dat dit ook zo is voor A en dus heeft A lineair onafhankelijke kolommen.

Laat A een willekeurige matrix. Als de vector v in zijn nulruimte zit, dan geldt dat $Av = 0$. Vermenigvuldig dit met A^T en dan volgt $A^T Av = 0$ en dus zit v ook in de nulruimte van $A^T A$.

Nu andersom. Laat nu gelden dat $A^T Av = 0$, we kunnen niet vermenigvuldigen met $(A^T)^{-1}$, omdat deze in het algemeen niet bestaat. Vermenigvuldigen met v^T geeft echter dat $v^T A^T Av = (Av)^T (Av) = ||Av||^2 = 0$ en dus dat $Av = 0$. Dus v zit in de nulruimte van A, zodra hij in die van $A^T A$ zit. We hebben nu aangetoond dat A en $A^T A$ dezelfde nulruimte hebben. Met de uitleg hierboven volgt nu het Lemma. □

Allereerst geven we met onderstaande stelling het bewijs dat de kleinste singuliere waarde inderdaad iets zegt over de inverteerbaarheid van een matrix:

Stelling 4 *Laat A een $n \times n$ matrix. Deze matrix is inverteerbaar dan en slechts dan als geldt dat $\sigma_{min}(A) > 0$.*

Bewijs. We tonen beide kanten van de stelling aan. Merk op dat A een vierkante matrix is. Laat A inverteerbaar zijn, dan geldt dat hij lineair onafhankelijke kolommen heeft. Uit lemma 3 volgt nu dat $A^T A$ dan inverteerbaar is. We weten uit [9] dat dan moet gelden dat $\lambda_{min}(A^T A) \neq 0$. Hieruit volgt uit definitie 2 dat $\sigma_{min}(A) \neq 0$. Daarnaast volgt met behulp van definitie 34 in Appendix A dat $\sigma_{min}(A) \geq 0$ en dit tesamen geeft nu: als A inverteerbaar, dan $\sigma_{min}(A) > 0$.

Nu andersom. Laat $\sigma_{min}(A) > 0$, dan volgt uit definitie 2 dat $\lambda_{min}(A^T A) > 0$. Dit betekent dat $A^T A$ inverteerbaar is. Uit lemma 3 volgt nu dat A lineair onafhankelijke kolommen heeft. Omdat A vierkant is, volgt direct daaruit dat A inverteerbaar is. Dit geeft ons dat als $\sigma_{min}(A) > 0$, dan is de matrix A inverteerbaar. □

We hebben nu dus twee situaties die zich voor kunnen doen bij een matrix, te weten:

- $\sigma_{min}(A) = 0$, dan A niet inverteerbaar.
- $\sigma_{min}(A) > 0$, dan A inverteerbaar.

VOORBEELD 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wel inverteerbaar

$\sigma_{min} \approx 0.618$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Niet inverteerbaar

$\sigma_{min} = 0$

Het is zelfs zo dat we de kleinste singuliere waarde een kwantitatieve notie van inverteerbaarheid kunnen noemen. Hij geeft namelijk aan hoe sterk die matrix A een vector kan laten krimpen in het ergste geval. Hoe groter de kleinste singuliere waarde, hoe beter inverteerbaar we de matrix noemen. Dit geeft een motivatie voor de volgende belangrijke definitie:

Definitie 5 *Laat A een $n \times n$ matrix. We noemen deze matrix* **goed inverteerbaar** *met constante c als geldt dat $\sigma_{min}(A) > c$ voor een constante $c >> 0$.*

Let op dat we in deze definitie de constante c vrij laten. Later, bij het bewijzen van de hoofdstelling van dit verslag, zal deze constante verder gedefiniëerd worden. We kunnen het nu zo opvatten dat we een matrix goed inverteerbaar noemen als zijn kleinste singuliere waarde ver van 0 ligt.

2.3.2 Stabiele rang

Nu we de instabiliteit van inverteerbaarheid opgelost hebben met het begrip goed inverteerbaar, willen we ook graag een stabieler begrip voor de rang van een matrix. Dit om het probleem dat ontstaat bij ruis, namelijk dat een niet inverteerbare matrix ineens van volle rang wordt en dus inverteerbaar is, op te lossen. We zullen dit begrip stabiele rang noemen en noteren met $srang(A)$ als we de stabiele rang van een matrix A berekenen. We willen nu dus, dat $srang(A) \approx srang(A+\epsilon)$, zodat we deze nieuwe rang met recht stabiel kunnen noemen.

Het blijkt dat we dit als volgt kunnen definiëren [1]:

Definitie 6 *Laat A een $m \times n$ matrix. We definiëren de stabiele rang van deze matrix A als volgt:*

$$srang(A) = \frac{||A||_F^2}{||A||_2^2} = \frac{\sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2}}{\sigma_{max}(A)} = \frac{\sqrt{tr(A^TA)}}{\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}}$$

Waarbij geldt dat $||A||_F$ de Frobenius norm voorstelt, gegeven in definitie 38 en $||A||_2$ de operator norm gegeven in definitie 39.
We laten nu intuitief zijn waarom deze stabiele rang inderdaad stabieler is. Laat A een $m \times n$ matrix, dan geldt dat als ϵ een matrix voorstelt met wat ruis of onnauwkeurigheid op elk element, dat $srang(A) \approx srang(A+\epsilon)$
We weten dat

$$srang(A+\epsilon) = \frac{||A+\epsilon||_F^2}{||A+\epsilon||_2^2} = \frac{\sqrt{tr((A+\epsilon)^T(A+\epsilon))}}{\sqrt{\lambda_{max}((A+\epsilon)^T(A+\epsilon))}}$$

We zien dat geldt dat:

$$(A+\epsilon)^T(A+\epsilon) \approx A^TA$$

Dit is makkelijk zelf na te gaan. Hieruit volgt dat

$$srang(A+\epsilon) = \frac{\sqrt{tr((A+\epsilon)^T(A+\epsilon))}}{\sqrt{\lambda_{max}((A+\epsilon)^T(A+\epsilon))}} \approx \frac{\sqrt{tr(A^TA)}}{\sqrt{\lambda_{max}(A^TA)}} = srang(A)$$

We zien hierdoor dat het begrip stabiele rang veel stabieler onder de invloed van ruis is ten opzichte van de normale rang. Hij is overigens niet volledig hetzelfde onder invloed van ruis, gezien het $\approx$ teken wat voorkomt in het bewijs. Overigens is het nuttig om op te merken dat geldt dat $srang(A) \leq rang(A) \leq \min(m,n)$, wat illustreert dat dit inderdaad een goed alternatief voor het begrip rang is. Door mij is er overigens geen verband geconstateerd tussen de waarde van de stabiele rang en de inverteerbaarheid van de matrix.

VOORBEELD 4

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Inverteerbaar	**Niet inverteerbaar**	**Niet inverteerbaar**
$rang = 3$	$rang = 2$	$rang = 1$
$srang \approx 1.24$	$srang = 1$	$srang \approx 1.13$

2.4 Beperkte inverteerbaarheid

Met de termen stabiele rang en kleinste singuliere waarde zijn we nu klaar om de stelling te poneren die door Bourgain en Tzafriri is bewezen. Zoals eerder genoemd is deze opnieuw bewezen door Srivastava en Spielman. Er zal de formulering in [1] aangehouden worden.

We weten uit feit 1 dat er voor elke matrix A van $(m \times n)$ met $m \geq n$ een deelmatrix S van $(n \times n)$ bestaat die inverteerbaar is. Deze matrix heeft echter vaak niet de eigenschappen die we willen. Het kan bijvoorbeeld voorkomen dat hij zeer klein is, omdat de dimensie gelijk is aan de rang van de oorspronkelijke matrix. De grootte van de deelmatrix is dus zeer instabiel, omdat het begrip rang instabiel is. We willen een analoge stelling formuleren, waarbij we de dimensie van de deelmatrix proportioneel laten zijn aan zijn stabiele rang. Dit zorgt ervoor dat de matrix die ontstaat een goede minimale grootte heeft en deze stabiel is voor ruis.

Voor inverteerbaarheid van deelmatrix S, weten we dat er moet gelden dat $\sigma_{min}(S) > 0$. We gaan echter zelfs eisen dat hij 'goed' inverteerbaar is, zoals gedefiniëerd in definitie 5. Dit betekent dat moet gelden dat $\sigma_{min}(S) > c$ voor een constante $c >> 0$.

In [1] is bewezen dat dit kan voor een vierkante matrix A, op constante factoren na, als we nemen dat:

$$c = \sqrt{\frac{||A||_F^2}{n}}$$

We zijn er nu aan toe om de stelling te poneren:

Stelling 7 (Beperkte inverteerbaarheid) *Gegeven een matrix A van grootte $n \times n$ en een $0 < \epsilon < 1$. Er bestaat een deelmatrix S, gevormd door r kolommen van A, zodanig dat deze kolommen lineair onafhankelijk zijn. Voor deze matrix S geldt dat de grootte proportioneel is aan de stabiele rang: $|r| \geq (1-\epsilon)^2 srang(A)$. Daarnaast is deze matrix goed inverteerbaar, omdat geldt dat:*

$$\sigma_{min}^2(S) \geq \epsilon^2 \frac{||A||_F^2}{n}$$

In deze stelling komt duidelijk het feit naar voren dat we het alleen waar kunnen maken op constante factoren na. Dit betekent dat de nieuwe matrix een benadering is van de oude matrix en dat we aan de hand van ϵ iets kunnen kiezen. We maken de keuze tussen hoe dicht de stabiele rang bij de oorspronkelijke matrix ligt (dus hoe veel de benadering op het origineel lijkt) en hoe goed de nieuwe matrix inverteerbaar is. Met een 'grote' ϵ is de nieuwe matrix beter inverteerbaar, maar een minder goede benadering. Met een 'kleine' ϵ is de nieuwe matrix minder goed inverteerbaar, maar een betere benadering. Het bewijs van deze stelling, in een iets andere formulatie, zal geschieden in hoofdstuk 3.

HOOFDSTUK 3

Het bewijs

Dit hoofdstuk laat zien dat het inderdaad mogelijk is die deelmatrix S te vinden voor een vierkante matrix. In dit hoofdstuk zal de belangrijkste stelling van het verslag gegeven en bewezen worden. Hierin wordt geprobeerd de lezer intuïtief mee te nemen in het bewijzen van de stelling. Daarvoor wordt eerst een schets van het bewijs gegeven, vervolgens bewijzen we de benodigde lemma's, om als laatste over te gaan tot het daadwerkelijke bewijs.

3.1 Restricted Invertibility

Om het bewijs te kunnen schetsen, zullen we eerst de stelling geven in de hoedanigheid zoals we hem in dit hoofdstuk gaan behandelen. Er zijn wat kleine veranderingen ten opzichte van stelling 7, om er wat makkelijker en precieser mee te kunnen werken. In plaats van de oorspronkelijke matrix A, zoals eerder telkens beschreven, nemen we nu zijn bijbehorende lineaire operator L, zoals gedefiniëerd in definitie 28. Deze loop dan van l_2^n naar l_2^n, wat overeenkomt met een matrix van $n \times n$. Verder noemen we nu niet het aantal kolommen r, maar hebben we het over de grootte van de deelmatrix S, gegeven door $|\beta|$. Vervolgens kiezen we de kolommen, door te vermenigvuldigen met vectoren v_1 tot en met v_m. Daarnaast vullen we de definities in, maar dit wordt snel duidelijk als je er even naar kijkt. We gaan dus de volgende stelling bewijzen:

Stelling 8 (Restricted Invertibility) *Stel* $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, $\sum_i v_i v_i^t = I$ *en* $0 < \epsilon < 1$. *Laat* $L : l_2^n \to l_2^n$ *een lineaire operator zijn. Dan is er een deelverzameling* $\beta \subset [m]$ *met grootte* $|\beta| \geq \lfloor \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \rfloor$ *waarvoor geldt dat* $\{Lv_i\}_{i \in \beta}$ *lineair onafhankelijk is en dat:*

$$\lambda_{min}\Big(\sum_{i\in\beta}(Lv_i)(Lv_i)^T\Big) \geq \frac{(1-\epsilon)^2||L||_F^2}{m}$$

waarbij λ_{min} *berekend wordt op span*$\{Lv_i\}_{i\in\beta}$.

We hebben hierin dus de definitie van de kleinste singuliere waarde en stabiele rang ingevuld. Overigens kunnen we het kiezen van kolommen exact verkrijgen door voor de $v_1,\dots,v_m$, de standaard basisvectoren $e_1,\dots,e_n$ te nemen. Op die manier krijg je bij het vermenigvuldigen met e_j precies de j-de kolom. We zijn nu klaar om een schets van het bewijs te geven.

3.2 Schets van het bewijs

We willen dus een selectie maken uit de $v_1,...v_m$, genaamd β. Aan deze selectie zit een aantal eisen waar we aan willen voldoen. We gaan de selectie iteratief opbouwen. Dit houdt in dat we elke keer één van de v_i kiezen, die ervoor zorgt dat we nog steeds 'goed inverteerbaar' volgens de stelling zijn. Als we vervolgens helemaal aan het eind, na een hoop v_i's te heben geselecteerd, de benodigde grootte van β hebben bereikt, voldoen we aan alle eisen van de stelling en is daarmee de stelling direct bewezen.

Om te controleren dat we goed inverteerbaar zijn, moeten we na elke stap weten dat:

$$\lambda_{min}\Big(\sum_{i\in\beta}(Lv_i)(Lv_i)^T\Big) \geq \frac{(1-\epsilon)^2||L||_F^2}{m}$$

We zijn dus constant op zoek naar de λ_{min} van de matrix $R = \sum_{i\in\beta}(Lv_i)(Lv_i)^T$. Zodra we die hebben, kunnen we nagaan of we voldoen aan de ongelijkheid en de volgende vector selecteren om toe te voegen. Omdat we geen zin hebben om elke keer deze λ_{min} helemaal opnieuw te berekenen, willen we wat kunnen zeggen over hoe deze λ_{min} verandert als we een nieuwe vector toevoegen aan de selectie. Gelukkig weten we daar wat over, wat we gaan laten zien in stelling 11. Deze kennis gebruiken we om te blijven voldoen aan de ongelijkheid.

Het zal blijken dat we dit vaak genoeg kunnen doen om uiteindelijk te voldoen aan de benodigde grootte en zo de stelling te bewijzen. Het preciese bewijs zit nog net iets ingewikkelder in elkaar, maar dit is een goede schets van hoe het bewijs gaat lopen.

3.3 Benodigde elementen voor het bewijs

Voordat we het daadwerkelijke bewijs kunnen geven, moeten we eerst nog wat benodigde stellingen bewijzen. Ook introduceren we een potentiaalfunctie die ons helpt een goede vector te selecteren.

3.3.1 Rang 1 updates

We gaan telkens wat aan de matrix $R = \sum_{i\in\beta}(Lv_i)(Lv_i)^T$ toevoegen, door een nieuwe v_i, namelijk v_t te selecteren. Als we de matrix R van de vorige selectie al hebben, wordt de matrix R_{nieuw} gevormd door er één extra vermenigvuldiging van $(Lv_t)(Lv_t)^T$ bij op te tellen. Omdat dit nogal lang is om telkens te gebruiken, definiëren we dat $w = Lv_t$, wat ervoor zorgt dat ww^T dus hetgeen is wat er bij R opgeteld wordt. We kunnen nu zeggen dat:

$$R_{nieuw} = R + ww^T$$

Van deze $R + ww^T$ moeten we elke keer de minimale eigenwaarde controleren. Het zou dus fijn zijn om iets te kunnen zeggen over de eigenwaarden van zo'n som. We merken op dat de matrix ww^T van grootte $n \times n$ is, dit is snel te controleren. Verder is hij positief semi-definiet volgens stelling 33 en er volgt direct dat $rang(ww^T) = 1$ als $w \neq 0$. We verduidelijken dit met een voorbeeld:

VOORBEELD 5

We bekijken $ww^T = (Lv_t)(Lv_t)^T$, waarbij v_t de geselecteerde vector is. Laat dit als volgt gegeven:

$$v_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Dan volgt dat

$$(Lv_t)(Lv_t)^T = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Hierin zien we direct dat alle rijen lineair onafhankelijk zijn en dus dat $rang(ww^T) = 1$.

We weten nu dat we constant een matrix aan het updaten zijn door er een matrix van rang 1 bij op te tellen. Dit noemen we een rang 1 update. Over dit soort rang 1 updates zijn een aantal stellingen geformuleerd:

Stelling 9 (Matrix Determinant Lemma) *Laat R een willekeurige reële $n \times n$ matrix zijn die inverteerbaar is. Laat w een willekeurige vector uit $\mathbb{R}^n$. Dan geldt dat:*

$$\det(R + ww^T) = (1 + w^T R^{-1} w) \det(R)$$

Bewijs. Merk op dat de volgende gelijkheid geldt:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} I & 0 \\ w^T R^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + ww^T & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -w^T & 1 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} R + ww^T & w \\ w^T R^{-1} R + w^T R^{-1} w w^T & 1 + w^T R^{-1} w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -w^T & 1 \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} R + ww^T - ww^T & w \\ w^T + w^T R^{-1} w w^T - w^T - w^T R^{-1} w w^T & 1 + w^T R^{-1} w \end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix} R & w \\ 0 & 1 + w^T R^{-1} w \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Omdat geldt dat:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ w^T R^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + ww^T & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -w^T & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & w \\ 0 & 1 + w^T R^{-1} w \end{pmatrix}$$

moet ook gelden dat:

$$\det\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ w^T R^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + ww^T & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -w^T & 1 \end{pmatrix} \right) = \det \begin{pmatrix} R & w \\ 0 & 1 + w^T R^{-1} w \end{pmatrix}$$

De rechterdeterminant kunnen we opsplitsen in een vermenigvuldiging van drie aparte determinanten, waarbij geldt dat:

$$\det \begin{pmatrix} I & 0 \\ w^T R^{-1} & 1 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ -w^T & 1 \end{pmatrix} = 1$$

We kunnen dus nu geven dat:

$$\begin{aligned} \det\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ w^T R^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R + ww^T & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ -w^T & 1 \end{pmatrix} \right) &= 1 \times \det \begin{pmatrix} R + ww^T & w \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times 1 \\ &= \det(R + ww^T) \end{aligned}$$

De linkerdeterminant wordt gegeven door:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} R & w \\ 0 & 1 + w^T R^{-1} w \end{pmatrix} &= \det(R) \det(1 + w^T R^{-1} w) \\ &= (1 + w^T R^{-1} w) \det(R) \end{aligned}$$

Omdat we al wisten dat deze rechter en linker determinant gelijk aan elkaar moesten zijn, volgt nu dat:

$$\det(R + ww^T) = (1 + w^T R^{-1} w) \det(R)$$

$\square$

VOORBEELD 6

Laat gegeven zijn dat:

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Er is direct te zien dat geldt dat $\det(R) = -1$. We berekenen nu dat:

$$\begin{aligned} \det(R + ww^T) =& (1 + w^T R^{-1} w) \det(R) \\ =& \left(1 + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \det(R) \\ =& (1+1) \det(R) = 2 \times -1 = -2 \end{aligned}$$

We controleren dat dit klopt:

$$R + ww^T = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

We zien direct dat hiervoor inderdaad geldt dat $\det(R + ww^T) = -2$.

Stelling 10 (Sherman Morrisson) *Laat R een willekeurige reële $n \times n$ matrix zijn die inverteerbaar is. Laat w een willekeurige vector uit $\mathbb{R}^n$. Stel verder dat $1 + w^T R^{-1} w \neq 0$. Dan geldt dat $R + wwT$ inverteerbaar is en in het bijzonder dat zijn inverse gegeven wordt door:*

$$(R + ww^T)^{-1} = R^{-1} - \frac{R^{-1} w w^T R^{-1}}{1 + w^T R^{-1} w} \tag{3.1}$$

Bewijs. We beginnen bij het eerste onderdeel van de stelling, namelijk dat $R + ww^T$ inverteerbaar is dan en slechts dan als $1 + w^T R^{-1} w \neq 0$. We weten dat $R + ww^T$ inverteerbaar is, dan en slechts dan als $det(R + ww^T) \neq 0$. Uit stelling 9 weten we nu dat dit zo is, dan en slechts dan als $(1 + w^T R^{-1} w) det(R) \neq 0$. We weten dat R inverteerbaar is en dus dat $det(R) \neq 0$. Hieruit volgt nu dat dan moet gelden dat $1 + w^T R^{-1} w \neq 0$.

In het bijzonder laten we zien dat geldt dat:

$$(R + ww^T)^{-1} = R^{-1} - \frac{R^{-1} w w^T R^{-1}}{1 + w^T R^{-1} w}$$

door linker en rechterkant met elkaar te vermenigvuldigen:

$$
\begin{aligned}
(R+ww^T)\left(R^{-1}-\frac{R^{-1}ww^TR^{-1}}{1+w^TR^{-1}w}\right)& \\
&= RR^{-1}+ww^TR^{-1}-\frac{RR^{-1}ww^TR^{-1}+ww^TR^{-1}ww^TR^{-1}}{1+w^TR^{-1}w} \\
&= I+ww^TR^{-1}-\frac{ww^TR^{-1}+ww^TR^{-1}ww^TR^{-1}}{1+w^TR^{-1}w} \\
&= I+ww^TR^{-1}-\frac{(1+w^TR^{-1}w)ww^TR^{-1}}{1+w^TR^{-1}w} \\
&= I+ww^TR^{-1}-ww^TR^{-1} \\
&= I
\end{aligned}
$$

We mogen de derde stap doen omdat $w^TR^{-1}w$ een scalar is en we die dus buiten haakjes mogen halen. We zien nu dat inderdaad de inverse gegeven wordt door formule (3.1).

$\square$

VOORBEELD 7

We houden dezelfde matrices aan als bij het vorige voorbeeld:

$$
w=\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\qquad R=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\qquad R^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}
$$

We willen nu berekenen wat $(R+ww^T)^{-1}$ is, uit de stelling volgt dat:

$$
\begin{aligned}
(R+ww^T)^{-1} =& R^{-1}-\frac{R^{-1}ww^TR^{-1}}{1+w^TR^{-1}w} \\
=& \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}-\frac{\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}}{1+\begin{pmatrix}3&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}} \\
=& \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0.5&1.5\\0&1.5&4.5\end{pmatrix} \\
=& \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0.5&-1.5\\1&-1.5&-5.5\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Stelling 11 (Afwisselende eigenwaarden) *Laat R een $n \times n$ symmetrische matrix zijn met als $k < n$ nietnul eigenwaarden $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$. Laat ww^T een $n \times n$ matrix zijn van rang 1, zodanig dat w niet een vector is die al in R gekozen is. Dus $w \neq v_i$. Laat $R_{nieuw} = R + ww^T$. Dan heeft R_{nieuw} precies $k+1$ nietnul eigenwaarden, gegeven door $\lambda'_1 \geq \ldots \geq \lambda'_{k+1}$. Verder geldt dat de eigenwaarden elkaar afwisselen op de volgende manier:*

$$\lambda'_1 \geq \lambda_1 \geq \lambda'_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq \lambda'_{k+1}$$

Bewijs. We weten per definitie dat geldt dat de eigenwaarden zich bevinden op de punten x waar het karakteristieke polynoom $P(x)$ een nulpunt heeft zitten. We weten dus uit de stelling dat geldt voor $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$ dat $P_R(\lambda_i) = 0$. We bekijken het karakteristieke polynoom van de matrix $R + ww^T$. Hiervoor geldt:

$$P_{R+ww^T}(x) = det\big(xI - (R + ww^T)\big)$$

Hierop passen we stelling 9 toe, dit geeft, na uitschrijven van deze uitdrukking dat:

$$\begin{aligned} P_{R+ww^T}(x) &= det(xI - R)(1 - w^T(xI - R)^{-1}w) \\ &= P_R(x)(1 - w^T(xI - QDQ^T)^{-1}w^T) \end{aligned}$$

We hebben de matrix R gediagonaliseerd met in D zijn eigenwaarden op de diagonaal en in Q de bijbehorende eigenvectoren. Vervolgens werken we dit verder uit:

$$\begin{aligned} P_{R+ww^T}(x) &= P_R(x)\Big(1 - w^T\big(Q(xI - D)Q^T\big)^{-1}w^T\Big) \\ &= P_R(x)\Big(1 - w^TQ(xI - D)^{-1}Q^Tw^T\Big) \\ &= P_R(x)\Big(1 - w^TQ\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x - \lambda_j}Q^Tw\Big) \\ &= P_R(x)\Big(1 - \sum_j \frac{< w, v_j >^2}{x - \lambda_j}\Big) \end{aligned}$$

Hierin zijn v_j de eigenvectoren. We zien dus dat de nieuwe polynoom gevormd wordt door de oude polynoom keer een functie. We zien ook direct dat dit nieuwe polynoom $k+1$ nulpunten heeft ongelijk aan 0. We willen weten voor welke x de functie P_{R+ww^T} een nulpunt heeft en bekijken dus waar geldt dat:

$$P_R(x)\Big(1 - \sum_j \frac{< w, v_j >^2}{x - \lambda_j}\Big) = 0$$

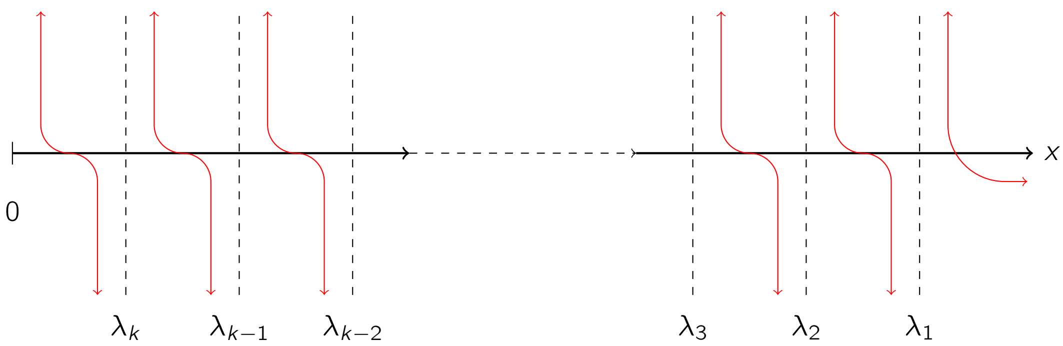
Dit geldt alleen als we in een van de volgende situaties zitten:

1. $P_R(x) = 0$. In dit geval bevindt het betreffende nulpunt van het nieuwe polynoom zich op dezelfde plek als die van het oude polynoom en dus geldt dat $\lambda_i = \lambda_i'$. Dit gebeurt in de situatie dat de nieuwe vector w orthogonaal op de bijbehorende v_i staat. In dat geval bewegen die betreffende eigenwaarden niet onder de toevoeging van een nieuwe vector w.

2. $\left(\sum_j \frac{<w,v_j>^2}{x-\lambda_j} - 1\right) = 0$. In dit geval zijn we op zoek naar de nulpunten van betreffende functie. Omdat we uit de stelling weten dat $k < n$, hebben we naast de k nietnuleigenwaarden, nog $n-k$ eigenwaarden met waarde nul. We weten verder dat de situatie dat we een w kiezen gelijk aan een v_i niet voorkomt. We kunnen de functie dus uitsplitsen in:

$$f(x) = \Big(\sum_{j=1}^{k} \frac{< w, v_j >^2}{x - \lambda_j} + \sum_{s=k+1}^{k} \frac{< w, v_s >^2}{x - 0} - 1\Big) = 0$$

Hierbij geeft de linkersom de som voor de eigenwaarden ongelijk aan nul en de rechtersom die voor eigenwaarden gelijk aan 0. Het gedrag van deze functie is makkelijk te bepalen. We laten x van boven dalen naar een nietnul eigenwaarde λ_i van $P_R(x)$. In dat geval zien we dat de functie $f(x)$ stijgt naar ∞. Verder zien we dat als we x van onder laten stijgen naar de volgende nietnul eigenwaarde, dat de functie $f(x)$ daalt naar $-\infty$. Dit gedrag herhaalt zich voor elke nietnuleigenwaarde. In de buurt van de nuleigenwaarden hoeven we alleen te kijken wat er gebeurt als we de functie laten dalen naar 0. In dat geval zien we dat de functie $f(x)$ stijgt naar ∞. Verder kijken we wat er rechts van de grootste eigenwaarde gebeurt. Als we x laten toenemen naar ∞ zien we dat $f(x)$ negatief wordt met als limiet -1. Concluderend uit deze gegevens kunnen we het volgende plaatje maken:



De punten waar de rode lijn de x-as snijdt, liggen de nieuwe nulpunten en dus de nieuwe eigenwaarden. In dit geval ligt elke nieuwe eigenwaarde dus tussen twee eigenwaarden in. Het is dus of zo dat de nieuwe eigenwaarde boven de oude ligt, maar onder de volgende, of dat hij gelijk is aan de oude eigenwaarde als we in situatie 1 zijn. Conclusie is dus:

$$\lambda_1' \geq \lambda_1 \geq \lambda_2' \geq \ldots \geq \lambda_k \geq \lambda_{k+1}'$$

$\square$

3.3.2 Potentiaalfunctie

Het belangrijkste element wat we bij moeten houden tijdens de iteraties van het proces, zijn de eigenwaarden van de matrix R en de matrix R_{nieuw}, gevormd door $R + ww^T$. We introduceren een functie die iets zegt over alle eigenwaarden van zo'n matrix:

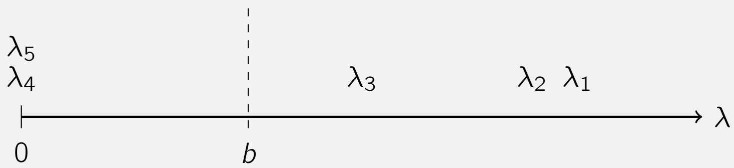
Definitie 12 (Potentiaal) *Laat* $R = \sum_{i \in \beta}(Lv_i)(Lv_i)^T$ *de gevormde matrix zijn na een aantal stappen. We definiëren zijn potentiaal als:*

$$\Phi_b(R) = \sum_i (Lv_i)^T (R - bI)^{-1} (Lv_i)$$

Deze functie geeft in één waarde aan hoe ver alle eigenwaarden van de matrix R van een bepaalde barrière b liggen. Deze b is een gekozen waarde, welke we de barrière noemen. Bepaalde eigenwaarden van de matrix R zullen voor deze b liggen, andere zullen erna liggen. We weten dat we na k stappen in het proces, precies k eigenwaarden hebben in R ongelijk aan 0. De dimensie van R is altijd, na elke stap $n \times n$. Dit zorgt ervoor dat we dus ook nog $n - k$ eigenwaarden hebben gelijk aan 0. Een voorbeeld van hoe zo'n barrière werkt:

VOORBEELD 8

Stel we hebben een voorbeeld waarbij $n = 5$ en $k = 3$. We hebben nu dus 3 vectoren gekozen in de iteratie en dus drie stappen in de iteratie gedaan. Er zijn dan drie eigenwaarden ongelijk aan 0 en twee eigenwaarden gelijk aan 0. Deze kunnen er bijvoorbeeld zo uitzien:



De waarde van $\Phi_b(R)$ hangt dus af van de locatie van b.

Deze barrière kunnen we gaan gebruiken om ervoor te zorgen dat alle eigenwaarden boven een bepaalde waarde uitkomen en we dus voldoen aan de eis van goed inverteerbaar zijn.

Maar voordat we daar aan toe zijn, moeten we eerst onderzoeken hoe de functie $\Phi(R)_b$ zich gedraagt. Deze functie ziet er nogal moeilijk uit. We hebben het 'geluk' dat we in stelling 8 een bepaalde eis hebben staan, namelijk dat $\sum_i v_i v_i^T = I$. Dit gegeven kunnen we gebruiken voor de volgende stelling:

Stelling 13 *Laat* $R = \sum_{i\in\beta}(Lv_i)(Lv_i)^T$ *en* $\Phi_b(R) = \sum_i(Lv_i)^T(R-bI)^{-1}(Lv_i)$. *Als er geldt dat* $\sum_i v_i v_i^T = I$, *dan geldt dat:*

$$\begin{aligned}\Phi_b(R) =& \sum_i (Lv_i)^T(R-bI)^{-1}(Lv_i)\\ =& Tr[L^T(R-bI)^{-1}L]\end{aligned}$$

Bewijs. Er volgt met behulp van stelling 36 dat

$$\begin{aligned}\Phi_b(R) =& \sum_i (v_i)^T(A-bI)^{-1}(Lv_i)\\ =& \sum_i v_i^T\Big(L^T(R-sI)^{-1}L\Big)v_i\\ =& \sum_i Tr[(v_i)(v_i)^T L^T(R-bI)^{-1}L]\\ =& Tr\Big[\sum_i (v_i)(v_i)^T L^T(R-bI)^{-1}L\Big]\\ =& Tr[L^T(R-bI)^{-1}L]\end{aligned}$$

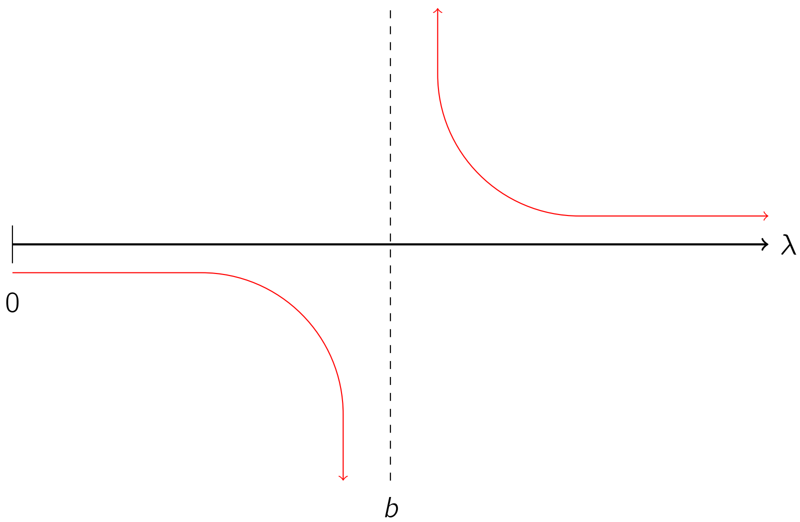
□

We kunnen nu dus in de rest van het verslag verder werken met deze uitdrukking voor het potentiaal en zullen dat ook doen. Er is echter nog een andere uitdrukking die nog iets beter duidelijk maakt wat dit potentiaal precies inhoudt. Als we de symmetrische matrix R en de eenheidsmatrix I diagonaliseren, met behulp van zijn eigenvectoren u_i en eigenwaarden λ_i krijgen we de volgende uitdrukking:

$$\begin{aligned}\Phi(R) =& Tr[L^T(R-bI)^{-1}L]\\ =& \sum_i \frac{u_i^T LL^T u_i}{\lambda_i - b}\end{aligned}$$

Deze uitdrukking kunnen we gebruiken om iets te zeggen over de grootte van het potentiaal. We bekijken de elementen van deze som. De teller van de som is de projectie van de matrix L in de richting van een van zijn eigenvectoren. De waarde van de teller is dus altijd groter dan 0. De noemer van de som is de afstand tussen de bijbehorende eigenwaarde en de gekozen barrière b. Dit betekent dat zodra λ_i boven b ligt, de waarde hiervan positief en dus de waarde van $\Phi_b(R)$ ook. Hoe dichter we naar b toe komen, hoe kleiner dit verschil wordt en omdat we door deze kleine positieve waarde delen, zal $\Phi_b(R)$ dus juist groter worden. Analoog kunnen we redeneren dat als λ_i onder of voor b ligt, de waarde van $\Phi_b(R)$ negatief is en steeds negatiever wordt naarmate we dichter bij b komen. We kunnen dus concluderen dat deze functie zich asymptotisch gedraagt rond b. Daarnaast kunnen we zeggen dat als we verder van b afzitten, zowel boven als onder b, de waarde uiteindelijk richting 0 zal dalen. We merken verder op dat we nooit onder nul kunnen komen met de waarde van de eigenvectoren en dus het gedrag van $\Phi_b(R)$ daar niet relevant is.

Dit kunnen we samenvatten in het volgende plaatje:



We willen iets kunnen zeggen over de waarde van het potentiaal als we een extra vector toevoegen en iets over de plek van de eigenwaarden van de matrix R_{nieuw}. Als het potentiaal klein is, betekent dat dat er veel eigenwaarden erg ver van b af liggen naar rechts, tenslotte hebben we links van b alleen maar eigenwaarden met waarde 0. Omdat ze erg ver van b af liggen, is het misschien wel mogelijk een nieuwe vector uit te kiezen die een λ_j toevoegd waarvoor geldt dat $\lambda_i > b$. We vragen ons af wat er dan gebeurt met het potentiaal als we zo'n vector toevoegen.

Het is direct duidelijk uit het plaatje dat als we één eigenwaarde van waarde 0 vervangen voor een eigenwaarde groter dan b, dat het potentiaal zal toenemen, we kunnen dus zeggen:

$$\Phi_b(R_{nieuw}) \geq \Phi_b(R)$$

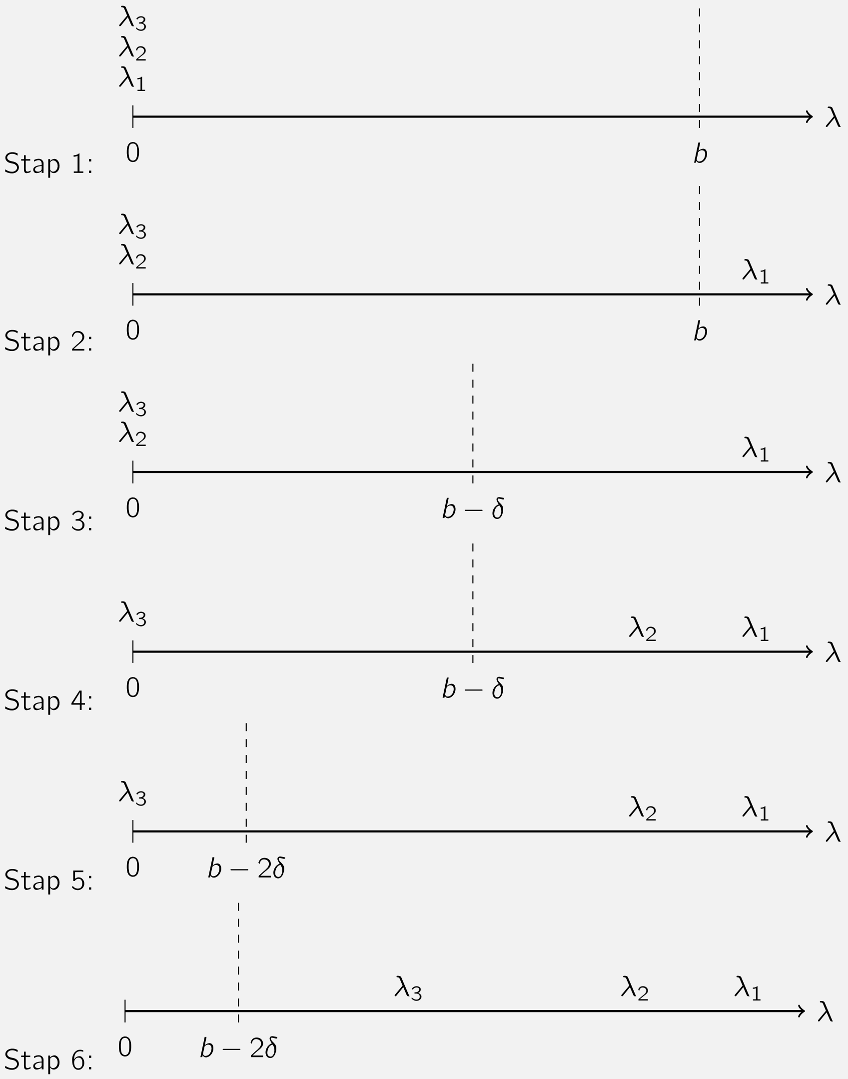
Eerder hebben we gesteld dat we het potentiaal graag klein willen hebben, zodat er een nieuwe vector kan worden toegevoegd. Helaas neemt het potentiaal juist toe en is er dus de kans dat we op een gegeven moment vast komen te zitten en geen vector meer kunnen toevoegen zodanig dat de nieuwe eigenwaarde de eigenschap heeft dat $\lambda_j > b$. We willen daarom handmatig het potentiaal beïnvloeden, door de barrière iets op te schuiven naar links. Uit het plaatje is dan direct te zien dat de positieve waarde van de eigenwaarden rechts van b afneemt en we dus een lager potentiaal hebben. We gaan de barrière naar links opschuiven met waarde δ, zodanig dat:

$$\Phi_{b-\delta}(R_{nieuw}) \leq \Phi_b(R)$$

Dit zorgt ervoor dat we het potentiaal klein houden en we dus altijd een vector toe kunnen voegen. Tenminste, dat vermoeden we nu. We kunnen nu illustratief duidelijk maken hoe het bewijs gaat lopen:

VOORBEELD 9

Stel we nemen dat n=3. We zullen de iteratiestappen illustratief toelichten:



We gaan dus afwisselend de barrière verlagen en op zoek naar een nieuwe vector die boven die barrière uitkomt, zodanig dat de barrière uiteindelijk uitkomt op:

$$b = \frac{(1-\epsilon)^2 ||L||_F^2}{m}$$

Omdat alle eigenwaarden van de matrix R dan boven b liggen, kunnen we concluderen dat ook zijn minimale eigenwaarde erboven ligt en dus dat:

$$\lambda_{min}(R) \geq \frac{(1-\epsilon)^2||L||_F^2}{m}$$

Wat precies het resultaat is waar we naar op zoek zijn. Er staan nu nog drie vragen open om het bewijs te vervolledigen, namelijk:

1. Hoe vinden we een vector met bijbehorende eigenwaarde, zodanig dat de kleinste eigenwaarde van de nieuwe verzameling eigenwaarden de eigenschap heeft dat $\lambda_{k+1} > b - \delta$?
2. Hoe groot moet het potentiaal zijn, zodanig dat we telkens door kunnen gaan en die vector dus altijd bestaat?
3. Hoe moeten we b en δ kiezen, om na t iteratiestappen te voldoen aan de stelling?

De komende drie secties geven elk antwoord op één van deze vragen.

3.4 Zoektocht naar een vector

In deze sectie bewijzen we een stelling die aangeeft welke eis we moeten stellen aa een vector w om hem toe te kunnen voegen aan de verzameling met goede vectoren. We willen dat er voor de bijbehorende nieuwe verzameling van eigenwaarden geldt dat elke nieuwe eigenwaarde boven de nieuwe barrière $s = b - \delta$ uitkomt. Als we tot nu toe k eigenwaarden hebben behorende bij de matrix R met de eigenschap dat alle eigenwaarde boven b uitkomen, weten we uit stelling 11 dat de matrix R_{nieuw} precies $k+1$ eigenwaarden heeft met de eigenschap dat:

$$\lambda'_1 \geq \lambda_1 \geq \lambda'_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq \lambda'_{k+1}$$

.

Dit zorgt ervoor dat we direct zien dat voor $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_k$ geldt dat deze ook boven b uitkomen en dus ook boven $s = b - \delta$. We moeten er nu alleen nog voor zorgen dat de kleinste eigenwaarde van de nieuwe verzameling ook boven s uitkomt. Het is dus ons doel de vectoren te identificeren waarvoor dit geldt. Deze vectoren identificeren we met de volgende stelling, waarbij we met de notatie $A \geq 0$ bedoelen dat A positief semi-definiet is, zoals gedefinieerd in de appendix bij definitie 31.

Stelling 14 *Stel $R \geq 0$ heeft precies k eigenwaarden ongelijk aan 0, allemaal groter dan $s = 0$. Als $w \neq 0$ en*

$$w^T(R - sI)^{-1}w < -1$$

dan heeft $R + ww^T$ precies $k + 1$ eigenwaarden groter dan s.

Bewijs. Laat $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k$ de k nietnul eigenwaarden van A zijn. Laat $\lambda'_1 \geq \ldots \geq \lambda'_{k+1}$ de $k+1$ grootste eigenwaarden van $A+ww^T$ zijn. Eerder hebben we in stelling 11 aangetoond dat er dan geldt dat:

$$\lambda'_1 \geq \lambda_1 \geq \lambda'_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq \lambda'_{k+1}$$

Hieruit volgt direct dat we inderdaad $k+1$ eigenwaarden hebben voor $R+ww^T$. Daarnaast volgt hieruit dat voor de k grootste eigenwaarden geldt dat:

$$\lambda'_i \geq \lambda_i \geq s$$

We hoeven dus alleen nog aan te tonen dat $\lambda'_{k+1} \geq s$.

We bekijken de waarden van de twee sporen van de volgende matrices en passen hierbij eerst stelling 37 toe, om daarna de eigenwaarden op te splitsen in nuleigenwaarden en nietnuleigenwaarden. :

$$Tr\left[(R - sI)^{-1}\right] = \sum_i^k \frac{1}{\lambda_i - s} = \sum_{i \leq k} \frac{1}{\lambda_i - s} + \sum_{i > k} \frac{1}{0 - s}$$

$$Tr\left[(R + ww^T - sI)^{-1}\right] = \sum_i^{k+1} \frac{1}{\lambda'_i - s} = \sum_{i \leq k+1} \frac{1}{\lambda'_i - s} + \sum_{i > k+1} \frac{1}{0 - s}$$

We bekijken nu het verschil tussen beide sporen:

$$\begin{aligned}
&Tr\left[(R + ww^T - sI)^{-1}\right] - Tr\left[(R - sI)^{-1}\right] = \\
&= \sum_{i \leq k+1} \frac{1}{\lambda'_i - s} + \sum_{i > k+1} \frac{1}{-s} - \sum_{i \leq k} \frac{1}{\lambda_i - s} - \sum_{i > k} \frac{1}{-s} \\
&= \sum_{i \leq k} \frac{1}{\lambda'_i - s} + \frac{1}{\lambda'_{k+1} - s} + \sum_{i > k+1} \frac{1}{-s} - \sum_{i \leq k} \frac{1}{\lambda_i - s} - \sum_{i > k} \frac{1}{-s} \\
&= \sum_{i \leq k} \left(\frac{1}{\lambda'_i - s} - \frac{1}{\lambda_i - s} \right) + \left(\sum_{i > k+1} \frac{1}{-s} - \sum_{i > k} \frac{1}{-s} \right) + \frac{1}{\lambda'_{k+1} - s} \\
&= \sum_{i \leq k} \left(\frac{1}{\lambda'_i - s} - \frac{1}{\lambda_i - s} \right) - \frac{1}{-s} + \frac{1}{\lambda'_{k+1} - s}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda'_{k+1} - s} + \sum_{i \leq k} \left(\frac{1}{\lambda'_i - s} - \frac{1}{\lambda_i - s} \right) \\
&\leq \frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda'_{k+1} - s}
\end{aligned}
$$

Deze laatste stap geldt, doordat uit stelling 11 volgt dat $\lambda'_i \geq \lambda_i$ en dus geldt $\frac{1}{\lambda'_i - s} - \frac{1}{\lambda_i - s} \leq 0$ voor alle i. Daaruit volgt dat $\sum_{i \leq k} \left(\frac{1}{\lambda'_i - s} - \frac{1}{\lambda_i - s} \right) \leq 0$. Samenvattend vinden we dus dat:

$$
Tr\left[(R + ww^T - sI)^{-1}\right] - Tr\left[(R - sI)^{-1}\right] \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda'_{k+1} - s} \tag{3.2}
$$

We kunnen dit verschil ook op een andere manier bekijken, met behulp van stelling 10:

$$
Tr\left[(R + ww^T - sI)^{-1}\right] = Tr\left[(R - sI)^{-1} - \frac{(R - sI)^{-1} ww^T (R - sI)^{-1}}{1 + w^T (R - sI)^{-1} w}\right]
$$

Met behulp van stelling 36 (i) geldt dat:

$$
\begin{aligned}
&Tr\left[(R - sI)^{-1} - \frac{(R - sI)^{-1} ww^T (R - sI)^{-1}}{1 + w^T (R - sI)^{-1} w}\right] \\
&\quad = -Tr\left[\frac{(R - sI)^{-1} ww^T (R - sI)^{-1}}{1 + w^T (R - sI)^{-1} w}\right] + Tr\left[(R - sI)^{-1}\right]
\end{aligned}
$$

Dit invullen levert:

$$
\begin{aligned}
&Tr\left[(R + ww^T - sI)^{-1}\right] - Tr\left[(R - sI)^{-1}\right] = \\
&= -Tr\left[\frac{(R - sI)^{-1} ww^T (R - sI)^{-1}}{1 + w^T (R - sI)^{-1} w}\right] + Tr\left[(R - sI)^{-1}\right] - Tr\left[(R - sI)^{-1}\right] \\
&= -Tr\left[\frac{(R - sI)^{-1} ww^T (R - sI)^{-1}}{1 + w^T (R - sI)^{-1} w}\right]
\end{aligned}
$$

Met behulp van stelling 36 (iii) geldt dat:

$$
-Tr\left[\frac{(R - sI)^{-1} ww^T (R - sI)^{-1}}{1 + w^T (R - sI)^{-1} w}\right] = -Tr\left[\frac{w^T (R - sI)^{-1} (R - sI)^{-1} w}{1 + w^T (R - sI)^{-1} w}\right] \tag{3.3}
$$

$$
= -Tr\left[\frac{w^T (R - sI)^{-2} w}{1 + w^T (R - sI)^{-1} w}\right] \tag{3.4}
$$

$$
= -\frac{w^T (R - sI)^{-2} w}{1 + w^T (R - sI)^{-1} w} \tag{3.5}
$$

Deze laatste stap geldt omdat zowel noemer als teller een 1×1 matrix vormen. Dit kan gezien worden door de dimensies van de vermenigvuldigden te bekijken. Het is evident dat de som van diagonaalelementen van een 1×1 matrix gelijk is aan de inhoud van die matrix.

Omdat geldt dat $w^T(R-sI)^{-2}w = \|(R-sI)^{-1}w\|^2$, volgt dat de teller van (3.5) positief is. Uit het feit dat we eerder stelden dat $w^T(R-sI)^{-1}w < -1$, volgt dat de noemer van (3.5) negatief is. Hieruit volgt dat de waarde van de uitdrukking 3.5 postief is. Samenvattend geeft dit dat:

$$Tr\left[(A + ww^T - sI)^{-1}\right] - Tr\left[(A - sI)^{-1}\right] > 0 \tag{3.6}$$

Het combineren van 3.2 en 3.6 levert:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda'_{k+1} - s} &> 0 \\
\frac{\lambda'_{k+1} - s}{s(\lambda'_{k+1} - s)} + \frac{s}{s(\lambda'_{k+1} - s)} &> 0 \\
\frac{\lambda'_{k+1}}{s\lambda'_{k+1} - s^2} &> 0
\end{aligned}$$

Omdat we weten dat $\lambda'_{k+1} \geq 0$, volgt nu dat moet gelden dat:

$$\lambda'_{k+1} > s$$

$\square$

Samenvattend zijn van de vectoren w die nog niet in de goede verzameling zitten, degene die voldoen aan $w^T(R-sI)^{-1}w < -1$, vectoren die we kunnen toevoegen. Voor hen geldt namelijk dat hun eigenwaarden allemaal boven de nieuwe barrière uitkomen. We weten echter nog niet of zo'n vector altijd bestaat.

3.5 Existentie

In deze sectie bewijzen we dat we altijd een vector kunnen vinden die voldoet aan de eis uit stelling 14, als we een bepaalde eis opleggen aan het potentiaal. Verder willen we ook voldoen aan de eerdere eis dat:

$$\Phi_s(R_{nieuw}) \leq \Phi_b(R) \tag{3.7}$$

waarbij $s = b - \delta$ gelijk is aan de nieuwe barrière. We gaan daarom eerst onderzoeken of we iets kunnen zeggen over dit potentiaal van de nieuwe vector, gebruikmakend van stelling 13:

$$\Phi_s(R_{nieuw}) = \Phi_s(R + ww^T) = Tr[L^T(R - sI + ww^T)^{-1}L]$$

Vervolgens volgt met behulp van stelling 10 en stelling 36 (iii) dat:

$$\begin{aligned}
Tr[L^T(R-sI+ww^T)^{-1}L] =& Tr[L^T(R-sI)^{-1}L] - \frac{Tr[L^T(R-sI)^{-1}ww^T(R-sI)^{-1}L]}{1+w^T(R-sI)^{-1}w} \\
=& \Phi_s(R) - \frac{Tr[w^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}w]}{1+w^T(R-sI)^{-1}w} \\
=& \Phi_s(R) - \frac{w^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}w}{1+w^T(R-sI)^{-1}w}
\end{aligned}$$

In combinatie met de eis bij (3.7), levert dit de volgende eis op om ervoor te zorgen dat het potentiaal in iedere geval niet stijgt:

$$\Phi_s(R) - \frac{w^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}w}{1+w^T(R-sI)^{-1}w} \leq \Phi_b(R) \tag{3.8}$$

Daarnaast blijkt uit stelling 14 dat we moeten voldoen aan de volgende ongelijkheid om een goede vector te selecteren:

$$w^T(R-sI)^{-1}w < -1 \tag{3.9}$$

We zijn dus op zoek naar vectoren die voldoen aan (3.8) en (3.9), om ervoor te zorgen dat de vector bestaat én dat hij een goede vector is.

Stelling 15 *De vectoren w die voldoen aan $w^T(R-sI)^{-1}w < -1$ en*

$$\Phi_s(R) - \frac{w^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}w}{1+w^T(R-sI)^{-1}w} \leq \Phi_b(R)$$

zijn de vectoren waarvoor geldt dat:

$$w^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}w \leq (\Phi_b(R)-\Phi_s(R)) \cdot (-1-w^T(R-sI)^{-1}w)$$

Bewijs. We laten zien dat uit deze ongelijkheid, de beide andere ongelijkheden volgen:

We willen $-1-w^T(R-sI)^{-1}w$ naar de andere kant halen om ongelijkheid (3.8) eruit te krijgen, maar zonder dat het teken omdraait. Hiervoor moet dus gelden dat:

$$\begin{aligned}
-1-w^T(R-sI)^{-1}w &> 0 \\
1+w^T(R-sI)^{-1}w &< 0 \\
w^T(R-sI)^{-1}w &< -1
\end{aligned}$$

Waarmee dus direct ongelijkheid (3.9) volgt. Als we daaraan voldoen, mogen we het volgende doen:

$$
\begin{aligned}
w^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}w &\leq (\Phi_b(R)-\Phi_s(R))\cdot(-1-w^T(R-sI)^{-1}w) \\
\Leftrightarrow \frac{w^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}w}{-1-w^T(R-sI)^{-1}w} &\leq \Phi_b(R)-\Phi_s(R) \\
\Leftrightarrow \Phi_s(R)+\frac{w^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}w}{-1-w^T(R-sI)^{-1}w} &\leq \Phi_b(R) \\
\Leftrightarrow \Phi_s(R)-\frac{w^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}w}{1+w^T(R-sI)^{-1}w} &\leq \Phi_b(R)
\end{aligned}
$$

Wat precies gelijk is aan ongelijkheid (3.8) □

We hebben er nu voor gezorgd dat we beide eisen samen hebben gevoegd tot één eis. We zijn dus op zoek naar vectoren w met de eigenschap dat:

$$w^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}w \leq (\Phi_b(R)-\Phi_s(R))\cdot(-1-w^T(R-sI)^{-1}w)$$

De vraag is echter nog steeds of die vectoren wel bestaan. We gaan aantonen dat dit inderdaad zo is, maar voordat we dat doen, hebben we eerst een lemma nodig.

Lemma 16 *Stel de matrix R is zoals hierboven. Laat P de projectie zijn op het beeld van R en Q de projectie op de kern van R. Verder zijn $(R-sI)^{-1}$ en $(R-sI)^{-2}$ zoals hierboven. Dan geldt dat deze matrices onderling diagonaliseerbaar zijn.*

Bewijs. We moeten bewijzen dat v_i een eigenvector van R is met eigenwaarde λ_i dan en slechts dan als hij ook een eigenvector van P, Q, $(R-sI)^{-1}$ en $(R-sI)^{-2}$ is, met eventueel een andere eigenwaarde

Laat v_i de eigenvectoren zijn van R met bijbehorende eigenwaarden λ_i. Dan geldt per definitie:

$$Rv_i = \lambda_i v_i$$

We tonen aan dat P over dezelfde eigenvectoren beschikt:

Als $v_i \in im(R)$, dan geldt dat $Pv_i = 1 \cdot v_i$ en dus dat v_i een eigenvector van P is met eigenwaarde 1. Als $v_i \in ker(R)$, dan geldt dat $Pv_i = 0 \cdot v_i$ en dus dat v_i een eigenvector van P is met eigenwaarde 0. We hebben nu alle eigenvectoren gehad, dus we kunnen concluderen dat alle v_i een eigenvector van P zijn.

We tonen aan dat Q over dezelfde eigenvectoren beschikt:

Als $v_i \in im(R)$, dan geldt dat $Qv_i = 0 \cdot v_i$ en dus dat v_i een eigenvector van Q is met eigenwaarde 0. Als $v_i \in ker(R)$, dan geldt dat $Qv_i = 1 \cdot v_i$ en dus dat v_i een eigenvector van Q is met eigenwaarde 1. We hebben nu alle eigenvectoren gehad, dus we kunnen concluderen dat alle v_i een eigenvector van Q zijn.

We tonen aan dat $(R - sI)^{-1}$ over dezelfde eigenwaarden beschikt:

Stel v_j is een eigenvector van $(R - sI)^{-1}$ met eigenwaarde λ_j, dan geldt dat:

$$\begin{aligned}
(R - sI)^{-1}u_j = \lambda_j u_j &\Leftrightarrow (R - sI)(R - sI)^{-1}u_j = (R - sI)\lambda_j u_j \\
&\Leftrightarrow u_j = R\lambda_j u_j - s\lambda_j u_j \\
&\Leftrightarrow R\lambda_j u_j = u_j + s\lambda_j u_j \\
&\Leftrightarrow Ru_j = \frac{1 + s\lambda_j}{\lambda_j} u_j
\end{aligned}$$

En dus zien we dat als v_j een eigenvector is van $(R - sI)^{-1}$ met eigenwaarde λ_j, dat hij dan ook een eigenvector is van R met eigenwaarde $\frac{1+s\lambda_j}{\lambda_j}$.

We tonen aan dat $(R - sI)^{-2}$ over dezelfde eigenwaarden beschikt:

Stel v_k is een eigenvector van $(R - sI)^{-2}$ met eigenwaarde λ_k, dan geldt dat:

$$\begin{aligned}
(R - sI)^{-2}u_k = \lambda_k u_k &\Leftrightarrow (R - sI)^2(R - sI)^{-2}u_k = (R - sI)^2\lambda_k u_k \\
&\Leftrightarrow u_k = R^2\lambda_k u_k - 2Rs\lambda_k u_k + s^2\lambda_k u_k \\
&\Leftrightarrow 2Rs\lambda_k u_k = s^2\lambda_k u_k + R^2\lambda_k u_k - u_k \\
&\Leftrightarrow Ru_k = \frac{s^2\lambda_k + R^2\lambda_k - 1}{2s\lambda_k} u_k
\end{aligned}$$

En dus zien we dat als v_k een eigenvector is van $(R-sI)^{-2}$ met eigenwaarde λ_k, dat hij dan ook een eigenvector is van R met eigenwaarde $\frac{s^2\lambda_k+R^2\lambda_k-1}{2s\lambda_k}$. We hebben nu aangetoond dat R, P, Q, $(R - sI)^{-1}$ en $(R - sI)^{-2}$ onderling diagonaliseerbaar zijn.

$\square$

We gaan nu verder met het aantonen dat een vector w bestaat met de eigenschap dat

$$w^T(R - sI)^{-1}LL^T(R - sI)^{-1} \leq (\Phi_b(R) - \Phi_s(R)) \cdot (-1 - w^T(R - sI)^{-1}w)$$

Dit tonen we aan met de volgende stelling:

Stelling 17 *Stel dat matrix R de eigenschap heeft k nietnul eigenwaarden te hebben, welke allemaal groter zijn dan b. Laat Q de orthogonale projectie op de kern van R zijn. Als geldt dat:*

$$\Phi_b(R) \leq -m - \frac{||L||_2^2}{\delta} \tag{3.10}$$

en dat:

$$0 < \delta < b \leq \delta \frac{||QL||_F^2}{||L||_2^2} \tag{3.11}$$

dan is er een vector $w \in \{Lv_i\}_{1 \leq i \leq m}$ waarvoor $R + ww^T$ precies $k+1$ nietnul eigenwaarden heeft groter dan dan $s = b - \delta$ en dat in het bijzonder $\Phi_s(R + ww^T) \leq \Phi_b(R)$.

Bewijs. Merk op dat in deze stelling ook het resultaat van stelling 14 in is meegenomen, namelijk het feit dat $R + ww^T$ precies $k + 1$ eigenwaarden heeft, groter dan s. Verder zit er eis (3.7) ook in meegenomen. Uit stelling 15 weten we dat de vectoren die voldoen aan stelling 14 en eis (3.7) precies de vectoren zijn waarvoor geldt dat:

$$w^T(R - sI)^{-1}LL^T(R - sI)^{-1}w \leq (\Phi_b(R) - \Phi_s(R)) \cdot (-1 - w^T(R - sI)^{-1}w) \tag{3.12}$$

We hoeven dus nu alleen nog te laten zien dat zo'n vector w bestaat. Dit doen we door de som over deze ongelijkheid (3.12) te nemen en aan te tonen dat de ongelijkheid geldt in de som. Als dat het geval is, dan moet er minstens één w zijn waarvoor de ongelijkheid ook geldt. We nemen dus de som over alle $w \in \{Lv_i\}_{1 \leq i \leq m}$ van (3.12), wetende dat $\sum_i v_i v_i^T = I$:

$$Tr[L^T(R - sI)^{-1}LL^T(R - sI)^{-1}L] \leq (\Phi_b(R) - \Phi_s(R)) \cdot (-m - Tr[L^T(R - sI)^{-1}L])$$

en gaan kijken wat we nodig hebben voor deze ongelijkheid om te gelden. Voor notatiegemak nemen we de rest van dit bewijs dat:

$$\Delta_{bs} = \Phi_b(R) - \Phi_s(R)$$

Het idee is dat we de rechter en linkerkant gaan afschatten, totdat we de conclusie kunnen trekken dat de ongelijkheid geldt, dan en slechts dan als (3.11) geldt. We kijken eerst naar $Tr[L^T(R - sI)^{-1}L]$ aan de rechterkant van de ongelijkheid. Per definitie geldt dat:

$$Tr[L^T(R - sI)^{-1}L] = \Phi_s(R) = \Phi_b(R) - \Big(\Phi_b(R) - \Phi_s(R)\Big) = \Phi_b(R) - \Delta_{bs}$$

In combinatie met de aanname (3.10) dat $\Phi_b(R) \leq -m - \frac{||L||_2^2}{\delta}$ volgt nu dat:

$$Tr[L^T(R - sI)^{-1}L] = \Phi_b(R) - \Delta_{bs} \leq -m - \frac{||L||_2^2}{\delta} - \Delta_{bs}$$

Door deze afschatting te gebruiken en in te vullen in de sommatie, kunnen we zeggen dat de ongelijkheid in de som geldt als:

$$Tr[L^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}L] \leq \Delta_{bs} \cdot (\frac{||L||_2^2}{\delta} + \Delta_{bs}) \tag{3.13}$$

Ten eerste merken we op dat LL^T een symmetrische vierkante matrix is en dat hij dus diagonaliseerbaar is, dus $LL^T = EDE^T$ met in D de λ_i op de diagonaal en in E de eigenvectoren. We merken vervolgens op dat $LL^T \leq ||L||_2^2 I$, want:

$$\begin{aligned}
LL^T \leq ||L||_2^2 I &\Leftrightarrow ||L||_2^2 I - LL^T \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\lambda_{max}(LL^T)}^2 I - LL^T \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda_{max}(LL^T)I - EDE^T \geq 0 \\
&\Leftrightarrow E\Big((\lambda_{max}(LL^T)I - D\Big)E^T \geq 0
\end{aligned}$$

We zien direct dat dit waar is dan en slechts dan als de $\lambda_{max}(LL^T) \geq \lambda_i(LL^T)$ voor alle i en dat is per definitie zo, dus inderdaad geldt dat $LL^T \leq ||L||_2^2 I$. We gaan dit gebruiken om de rechterkant van (3.13) af te schatten:

$$Tr[L^T(R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}L] = Tr\Big[LL^T\big((R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}\big)\Big]$$

We weten dat als een matrix gevormd wordt door een vermenigvuldiging met zijn getransponeerde, hij positief semidefiniet is en dus volgt dat $\big((R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}\big) \geq 0$. Daarnaast hebben we hierboven gezien dat $||L||_2^2 I - LL^T \geq 0$. Verder weten we dat als A en B positief semi definiet zijn, dat dan geldt dat $Tr[AB] \geq 0$. We passen dit toe op $A = ||L||_2^2 I - LL^T$ en $B = \big((R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1}\big)$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
&Tr[\big(||L||_2^2 I - LL^T\big)\big((R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1})] \geq 0 \\
&\qquad Tr[LL^T((R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1})] \leq Tr[||L||_2^2 I((R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1})] \\
&\qquad Tr[LL^T((R-sI)^{-1}LL^T(R-sI)^{-1})] \leq ||L||_2^2 I Tr[L^T(R-sI)^{-2}L]
\end{aligned}$$

We kunnen nu zeggen dat (3.13) geldt als:

$$||L||_2^2 Tr[L^T(R-sI)^{-2}L] \leq \Delta_{bs} \cdot (\frac{||L||_2^2}{\delta} + \Delta_{bs}) \tag{3.14}$$

Laat P de projectie zijn op het beeld van R en Q de projectie op de kern van R. Laat $\Phi_s^P(R)$ en $\Phi_s^Q(R)$ de potentialen berekend op deze deelruimten. We gebruiken de volgende notatie: $L^T P(R-sI)^{-1}PL = P'$ en $L^T Q(R-sI)^{-1}QL = Q'$. Omdat we in lemma 16 hebben aangetoond dat R, P, Q, $(R-sI)^{-1}$ en $(R-sI)^{-2}$ onderling diagonaliseerbaar zijn, kunnen we schrijven dat:

$$\begin{aligned} I &= P + Q \\ \Phi_s(R) &= \Phi_s^P(R) + \Phi_s^Q(R) \\ \Delta_{bs} &= \Delta_{bs}^P + \Delta_{bs}^Q \\ Tr[L^T(R-sI)^{-1}L] &= Tr[P'] + Tr[Q'] \end{aligned}$$

We kunnen dit invullen in (3.14), waardoor we nu aan moeten tonen dat:

$$||L||_2^2\Big(Tr[P'] + Tr[Q']\Big) \le (\Delta_{bs}^P + \Delta_{bs}^Q) \cdot \Big(\frac{||L||_2^2}{\delta} + \Delta_{bs}\Big) \tag{3.15}$$

We bekijken $||L||_2^2 Tr[P']$. We zien direct dat geldt dat $P(R-sI)^{-1}P \ge 0$ en $P(R-bI)^{-1}P \ge 0$, waaruit volgt dat:

$$(b-s)P(R-sI)^{-2}P \le P(R-bI)^{-1}P - P(R-sI)^{-1}P$$

Door notatie te vervangen en de trace te nemen volgt hieruit dat:

$$\delta Tr[P'] \le \Phi_b^P(R) - \Phi_s^P(R) = \Delta_{bs}^P$$

Waardoor we kunnen zien dat:

$$||L||_2^2 Tr[P'] \le \Delta_{bs}^P \frac{||L||_2^2}{\delta}$$

Voor (3.15) is het voldoende aan te tonen dat:

$$||L||_2^2 Tr[Q'] \le (\Delta_{bs}^P + \Delta_{bs}^Q) \cdot \Big(\frac{||L||_2^2}{\delta} + \Delta_{bs}\Big) - \Delta_{bs}^P \frac{||L||_2^2}{\delta} \tag{3.16}$$

Als we (3.16) uitschrijven en opmerken dat Δ_b^P, $\Delta_b^Q \ge 0$, komt dit overeen met aantonen dat:

$$||L||_2^2 Tr[Q'] \le \Delta_{bs}^Q \cdot \Big(\frac{||L||_2^2}{\delta} + \Delta_{bs}^Q\Big) \tag{3.17}$$

We zien dat:

$$Tr[Q'] = Tr[L^T Q(R-sI)^{-2}QL] = \frac{||QL||_F^2}{s^2}$$

en

$$\Delta_{bs}^{Q} = Tr[L^T Q((R-bI)^{-1} - (R-sI)^{-1})QL] = \delta \frac{||QL||_F^2}{bs}$$

We vullen dit beiden in bij (3.17), waaruit we krijgen dat:

$$||L||_2^2 \frac{||QL||_F^2}{s^2} \leq \delta \frac{||QL||_F^2}{bs} \cdot \Big(\frac{||L||_2^2}{\delta} + \delta \frac{||QL||_F^2}{bs} \Big) \tag{3.18}$$

Hieruit volgt direct de implicatie over b, maar we laten even zien hoe we deze kunnen verkrijgen. We zien na haakjes uitwerken dat:

$$||L||_2^2 \frac{||QL||_F^2}{s^2} \leq \frac{||L||_2^2}{b} \cdot \frac{||QL||_F^2}{s} + \delta^2 \frac{||QL||_F^2}{b^2 s} \cdot \frac{||QL||_F^2}{s}$$

Vervolgens delen we door $\frac{||QL||_F^2}{s}$:

$$||L||_2^2 \frac{1}{s} \leq \frac{||L||_2^2}{b} + \delta^2 \frac{||QL||_F^2}{b^2 s}$$

Waarna we vermenigvuldigen met bs:

$$b||L||_2^2 \leq s||L||_2^2 + (b-s)^2 \frac{||QL||_F^2}{b}$$

Herordenen geeft:

$$(b-s)||L||_2^2 \leq (b-s)(b-s) \frac{||QL||_F^2}{b}$$

Delen door $b-s$ geeft:

$$||L||_2^2 \leq \frac{\delta ||QL||_F^2}{b}$$

Wat overeenkomt met:

$$b \leq \frac{\delta ||QL||_F^2}{||L||_2^2} \tag{3.19}$$

In de stelling wordt onder andere (3.19) geëist bij (3.11), dus we hebben inderdaad aangetoond dat die vector w met de gewenste eigenschappen bestaat, onder de voorwaarde dat:

$$b \leq \frac{\delta ||QL||_F^2}{||L||_2^2}$$

Daarnaast merken we op dat moet gelden dat $b \geq \delta$, anders zou de nieuwe barrière $s = b - \delta$ onder 0 komen te liggen, wat niet kan. Verder moet gelden dat $\delta > 0$, anders zou de nieuwe barrière $s = b - \delta > b$ zijn en dan zouden we de verkeerde kant op schuiven.

Samenvattend volgt hieruit dus dat moet gelden dat:

$$0 < \delta < b \leq \delta \frac{||QL||_F^2}{||L||_2^2} \tag{3.20}$$

Wat precies gelijk is aan de eis in de stelling bij (3.11). Hiermee is de stelling bewezen. □

Concluderend weten we nu dus dat er een vector w blijft bestaan met onze gewenste eigenschappen, zolang we aan voorwaarde (3.10) en (3.11) voldoen. We hoeven nu alleen nog aan te tonen dat we inderdaad waardes voor b en δ kunnen kiezen, die hieraan voldoen en dat we het proces vaak genoeg kunnen herhalen, zodat we de gewenste minimale grootte van de matrix krijgen. Dit tonen we aan in de volgende sectie.

3.6 Het bewijs

We zijn op zoek naar een b_0 om het iteratieve proces mee te starten en een δ die telkens de barrière iets verder naar het nulpunt brengt, zodanig dat we voldoen aan de eisen van stelling 17 voldoen. Als we bij elke stap blijven voldoen aan deze eisen, heeft de matrix na elke stap telkens de gewenste eigenschap met betrekking tot zijn singuliere waarde. Als we genoeg stappen, met het aantal stappen gelijk aan t in het proces kunnen nemen, heeft de matrix uiteindelijk de gewenste minimale grootte. We herhalen de stelling 9 en bewijzen hem:

Stelling 18 (Restricted Invertibility) *Stel* $v_1,\ldots,v_m \in \mathbb{R}^n$, $\sum_i v_i v_i^t = I$ *en* $0 < \epsilon < 1$. *Laat* $L : l_2^n \to l_2^n$ *een lineaire operator zijn. Dan is er een deelverzameling* $\beta \subset [m]$ *met grootte* $|\beta| \geq \lfloor \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \rfloor$ *waarvoor geldt dat* $\{Lv_i\}_{i\in\beta}$ *lineair onafhankelijk is en dat:*

$$\lambda_{min}\Big(\sum_{i\in\beta}(Lv_i)(Lv_i)^T\Big) \geq \frac{(1-\epsilon)^2||L||_F^2}{m}$$

waarbij λ_{min} *berekend wordt op* $span\{Lv_i\}_{i\in\beta}$.

Bewijs. Laat

$$b_0 = \frac{(1-\epsilon)||L||_F^2}{m}$$

$$\delta = \frac{(1-\epsilon)||L||_2^2}{\epsilon m}$$

Merk op dat we mogen aannemen dat $L \neq 0$. Merk op dat we beginnen met $R = 0$. We laten zien dat we voldoen aan de eisen (3.10) en (3.11) van stelling 17 bij de eerste stap van het proces:

Ten eerste eis (3.10) die zegt dat er moet gelden dat:

$$\Phi_b(R) \leq -m - \frac{||L||_2^2}{\delta}$$

Er geldt nu dat:

$$\Phi_{b_0}(0) = Tr[L^T(0 - b_0 I)^{-1}L] = -\frac{||L||_F^2}{b_0} = -m - \frac{||L||_2^2}{\delta} \leq -m - \frac{||L||_2^2}{\delta}$$

Dus we voldoen aan eis (3.10). Daarnaast moeten we voldoen aan eis (3.11), dat:

$$0 < \delta < b \leq \delta\frac{||QL||_F^2}{||L||_2^2}$$

Merk op dat stelling 18 sowieso waar is als geldt dat $\epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} < 1$, omdat er dan geldt dat $\lfloor \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \rfloor = 0$ en we dus een 0×0 matrix zouden zoeken, we vinden dan de lege matrix.

We kunnen dus aannemen dat $\epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \geq 1$. Verder weten we dat $\epsilon < 1$ uit de stelling. Hieruit volgt dat:

$$\frac{||L||_2^2}{\epsilon} < ||L||_F^2$$

Verder zien we dat:

$$\delta < b \Leftrightarrow \frac{||L||_2^2}{\epsilon} < ||L||_F^2$$

en dus kunnen we concluderen dat $\delta < b$. Verder moet nog gelden dat:

$$b_0 \leq \delta \frac{||QL||_F^2}{||L||_2^2}$$

Q is de projectie op de kern van R is en $R = 0$, dus volgt dat $Q = I$. Hieruit volgt dat moet gelden dat:

$$\frac{(1-\epsilon)||L||_F^2}{m} \leq \frac{(1-\epsilon)||L||_2^2}{\epsilon m} \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2}$$

Wat na herordenen neerkomt op:

$$\frac{(1-\epsilon)||L||_F^2}{m} \leq \frac{(1-\epsilon)||L||_F^2}{\epsilon m}$$

En omdat we weten dat $0 < \epsilon < 1$ volgt dat dit inderdaad geldt. We voldoen dus in de eerste stap aan alle eisen van stelling 17 en kunnen dus concluderen dat er een vector $w \in \{Lv_i\}_{1 \leq i \leq m}$ bestaat om toe te voegen aan β, zodanig dat we 1 eigenwaarde in de matrix $R + ww^T$ hebben, met waarde boven $s = b_0 - \delta$. Daarnaast geldt uit stelling 18 dat $\Phi_s(R) \leq \Phi_{b_0}(R)$ en dus blijven we ook na stap 1 voldoen aan voorwaarde (3.10).

Zolang we in de situatie blijven dat (3.11) geldt, geldt dus telkens dat het potentiaal in ieder geval niet stijgt en dat we dus ook automatisch blijven voldoen aan voorwaarde (3.10). We willen dus weten hoe groot we t kunnen kiezen, dus hoeveel stappen we kunnen nemen, voordat we niet meer voldoen aan (3.11). De linkerkant van deze ongelijkheid, namelijk dat $\delta < b$ blijven we aan voldoen na $t - 1$ stappen (dan kunnen we daarna nog 1 stap nemen), als geldt dat:

$$\delta < b = b_0 - (t-1)\delta \Leftrightarrow t\delta < b_0$$

We voldoen hieraan zolang $t \leq \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2}$, want:

$$\epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \delta = \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \frac{(1-\epsilon)||L||_2^2}{\epsilon m} = \frac{\epsilon(1-\epsilon)||L||_F^2}{m} \leq b_0$$

We weten dus nu dat we in ieder geval $t \leq \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2}$ stappen kunnen nemen. Met elke stap voegen we precies één vector toe aan β en dus kunnen we door $t = \lfloor \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \rfloor$ stappen te nemen, ervoor zorgen dat $|\beta| \geq \lfloor \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \rfloor$. We hebben nu bewezen dat we een verzameling van voldoende minimale grootte kunnen maken. Daarnaast wilden we dat:

$$\lambda_{min}\Big(\sum_{i\in\beta}(Lv_i)(Lv_i)^T\Big) \geq \frac{(1-\epsilon)^2||L||_F^2}{m}$$

Omdat we steeds voldoen aan stelling 17 krijgen we steeds een verzameling eigenwaarden van de matrix $R = \sum_{i\in\beta}(Lv_i)(Lv_i)^T$ die zich boven de barrière s bevinden. Na $t = \lfloor \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \rfloor$ stappen bevindt deze barrière zich op:

$$\begin{aligned}
s = b_0 - \delta t &= \frac{(1-\epsilon)||L||_F^2}{m} - \frac{(1-\epsilon)||L||_2^2}{\epsilon m}\lfloor \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \rfloor \\
&= \frac{(1-\epsilon)||L||_F^2}{m} - \epsilon^2(1-\epsilon)\frac{||L||_F^2}{\epsilon m} \\
&= \frac{(1-\epsilon)||L||_F^2}{m} - (\epsilon-\epsilon^2)\frac{||L||_F^2}{m} \\
&= (\epsilon^2 - 2\epsilon + 1)\frac{||L||_F^2}{m} \\
&= \frac{(1-\epsilon)^2||L||_F^2}{m}
\end{aligned}$$

Dus na $t = \lfloor \epsilon^2 \frac{||L||_F^2}{||L||_2^2} \rfloor$ stappen bevinden alle eigenwaarden zich boven de waarde $\frac{(1-\epsilon)^2||L||_F^2}{m}$ en dus geldt ook dat de minimale eigenwaarde zich boven deze grens bevindt en dus geldt inderdaad dat:

$$\lambda_{min}\Big(\sum_{i\in\beta}(Lv_i)(Lv_i)^T\Big) \geq \frac{(1-\epsilon)^2||L||_F^2}{m}$$

Hiermee is de stelling bewezen. $\square$

HOOFDSTUK 4

Algoritme

Dit hoofdstuk introduceert het algoritme behorende bij de stelling. Omdat het bewijs uit hoofdstuk 3 constructief is, kunnen we daar direct een algoritme uit afleiden. Verder worden een aantal voorbeelden uitgewerkt met behulp van een computerprogramma, ten einde het algoritme beter te begrijpen.

4.1 Het algoritme

Algorithm 1 Het goed inverteerbaar maken van een matrix L

Require: L matrix van $n \times n$, $v_1 \dots v_m \in \mathbb{R}^n$ met $\sum_i v_i v_i^T = I$, $0 < \epsilon < 1$

$R \leftarrow 0$

$c \leftarrow 0 \quad (n \times 1)$

$b \leftarrow \frac{(1-\epsilon)||L||_F^2}{m}$

$\delta \leftarrow \frac{(1-\epsilon)||L||_2^2}{\epsilon m}$

$s \leftarrow b - \delta$

$rs \leftarrow \frac{(1-\epsilon)^2 2||L||_F^2}{m}$

for $k = 1$ to m **do**

  $w_k \leftarrow Lv_k$

end for

$j \leftarrow 1$

$t \leftarrow 1$

while $t \leq rs$ **do**

  if $j \leq m$ **then**

    $A \leftarrow w_j^T (R - sI)^{-1} LL^T (R - sI)^{-1} w_j$

    $B \leftarrow \Big(\Phi_b(R) - \Phi_s(R)\Big) \cdot (-1 - w_j^T (R - sI)^{-1} w_j)$

    if $A \leq B$ **then**

      if $c(j, 1) == 0$ **then**

        $c(j, 1) \leftarrow 1$

        $R \leftarrow \sum_{i \in \sigma} (Lv_i)(Lv_i)^T$

        $b \leftarrow s$

        $s \leftarrow b - \delta$

        $j \leftarrow 1$

      else

        $j \leftarrow j + 1$

      end if

    else

      $j \leftarrow j + 1$

    end if

  end if

end while

return c vector met j-de element 1 als w_j geselecteerd en 0 als w_j niet geselecteerd

4.2 Het algoritme toegepast

Om het algoritme beter te begrijpen en te controleren is hij in de computer geprogrammeerd. Er is gekozen om een functie te maken in MATLAB die met input zoals in het hierboven gegeven algorithm 1 (dus L, v en ϵ) werkt. Zodra deze functie wordt aangeroepen, geeft hij als output:

- rs: de vereiste grootte van de deelverzameling (dus hoeveel elementen van c zouden op 1 moeten staan)
- fs: de gevonden grootte van de deelverzameling (dus hoeveel elementen van c staan op 1)
- rl: de vereiste mininmale grootte van $\lambda_{min}(\sum_{i\in\beta}(Lv_i)(L_v i)^T)$
- fl: de gevonden grootte van $\lambda_{min}(\sum_{i\in\beta}(Lv_i)(L_v i)^T)$

De code van deze functie Invertible is weergegeven in Appendix B.

Vervolgens is deze functie gebruikt om het algoritme te testen voor twee verschillende groepen matrices, te weten de Laplaciaan van een graaf en positief semi definiete matrices. Daarna is er nog getest wat de looptijd van het programma is voor de Laplaciaanse matrices.

4.2.1 Toegepast op Laplaciaan van grafen

Hieronder zijn de resultaten van de functie Invertible gegeven voor Laplacianen van grafen. Er is ervoor gekozen verschillende matrices te genereren. Hierbij is $\frac{p}{10}$ de kans dat er een tak tussen twee knopen is. Verder testen we bij verschillende waarden voor ϵ. De code van het gebruikte programma is te vinden in Appendix C.

We vinden hiermee:

$\epsilon = 0.25$				
p	Gewenste grootte	Gevonden grootte	Gewenste λ_{min}	Gevonden λ_{min}
1	1	1	67.3	182.0
2	2	2	252.2	458.0
3	2	2	530.7	736.5
4	3	3	881.8	1046.6
5	3	3	1424.5	2155.6
6	4	4	2086.5	2950.0
7	4	4	2820.9	4633.2
8	4	4	3573.4	5530.8
9	5	5	4496.3	7378.8
10	6	6	5568.7	9400.0

We zien in deze tabel dat we telkens exact de grootte krijgen die we willen. Verder zien we dat de waardes voor λ_{min} ruim boven de gewenste waardes zitten. Het verwachte gedrag van de gewenste grootte en de gewenste λ_{min} bij toename van p komt overeen met het gevonden gedrag. We zien namelijk dat beide waarden stijgen als p stijgt. We laten nu ϵ toenemen:

$\epsilon = 0.50$				
p	Gewenste grootte	Gevonden grootte	Gewenste λ_{min}	Gevonden λ_{min}
1	5	5	30.0	71.9
2	8	8	99.5	237.9
3	10	10	224.1	484.9
4	13	13	425.6	861.7
5	15	15	618.4	1405.0
6	16	16	913.5	2320.7
7	17	17	1194.5	3571.1
8	18	18	1570.2	4471.1
9	21	21	2013.3	6268.0
10	24	24	2475.0	7600.0

Ook nu zien we dat alle gevonden waarden voor λ_{min} inderdaad boven de gewenste waarde liggen en dat de groottes exact overeenkomen. Verder klopt het gedrag ten opzichte van de vorige tabel als we ϵ laten toenemen. Het zou zo moeten zijn, zoals in hoofdstuk 2 en 3 al opgemerkt, dat als ϵ toeneemt, we een grotere selectie wensen met een kleinere minimale waarde voor λ. Om het gedrag nog verder te testen geven we hieronder nog een gereduceerde tabel voor een nog hogere waarde van ϵ:

$\epsilon = 0.75$				
p	Gewenste grootte	Gevonden grootte	Gewenste λ_{min}	Gevonden λ_{min}
1	17	17	7.2	34.0
5	33	33	157.5	1485.2
10	55	55	618.8	4500.0

Ook hierbij komen de waardes overeen met wat we verwachten. Er wordt voldaan aan beide wensen, we zien dat de grootte is toegenomen en de gewenste minimale waarde voor λ is afgenomen. We kunnen concluderen dat het programma goed werkt voor deze soorten matrices.

4.2.2 Toegepast op positief semi definiete matrices

Hieronder zijn de resultaten van de functie Invertible gegeven voor een groep semi definiete matrices. Er is ervoor gekozen verschillende matrices te genereren. Dit gebeurt aan de hand van de waarde k, die ervoor zorgt dat de rang van de matrices toeneemt, zodra k stijgt. De code van het gebruikte programma is te vinden in Appendix D.

We hebben ervoor gekozen niet alle waarden van k weer te geven, omdat dit weinig toevoegt:

$\epsilon = 0.25$				
k	Gewenste grootte	Gevonden grootte	Gewenste λ_{min}	Gevonden λ_{min}
1	0	0	lege matrix	lege matrix
5	0	0	lege matrix	lege matrix
10	0	0	lege matrix	lege matrix

Bij $\epsilon = 0.25$ zien we dat de gewenste grootte 0 is. We zouden dus verwachten dat we een lege matrix vinden, want we maken geen selectie. Dit komt overeen met de output van het programma.

$\epsilon = 0.50$				
k	Gewenste grootte	Gevonden grootte	Gewenste λ_{min}	Gevonden λ_{min}
1	1	1	246.9	695.1
5	2	2	1987.5	6317.6
10	3	3	4830.4	11904.0

Ook bij deze tabel vinden we wat we verwachten te vinden. We leiden hieruit het vermoeden af dat de afstand tussen de gewenste waarde voor λ_{min} en de gevonden waarde voor λ_{min} toeneemt op het moment dat ϵ toeneemt.

$\epsilon = 0.75$				
k	Gewenste grootte	Gevonden grootte	Gewenste λ_{min}	Gevonden λ_{min}
1	2	2	64.2	302.9
5	5	5	491.5	4316.3
10	7	7	1256.8	10766.0

Hierin wordt het vermoeden nogmaals gewekt dat de afstand tussen de gewenste waarde voor λ_{min} en de gevonden waarde voor λ_{min} toeneemt op het moment dat ϵ toeneemt. Verder kunnen we concluderen dat het programma ook voor deze soort matrices goed werkt. Verder lijkt het erop dat de ruimte ten opzichte van de gewenste waardes niet veel verschilt tussen beide groepen matrices. Het programma werkt dus ongeveer even goed voor beide groepen.

4.2.3 Looptijd bekeken

In deze sectie bekijken we de looptijd van het programma als we n laten toenemen. We voeren hem dus steeds met grotere matrices uit. We vinden deze resultaten:

$\epsilon = 0.50$ en $p = 5$	
n	Looptijd in seconden
50	0.8208
100	1.2390
150	6.4056
200	20.1936
250	57.5619

In het artikel [1] wordt beweerd dat het algoritme een looptijd heeft van $\mathcal{O}((1-\epsilon)^2 mn^3)$. In ons geval geldt in het programma $n = m$ en $\epsilon = 0.5$. Hieruit volgt dat nu er een looptijd zou moeten zijn van $\mathcal{O}(0.25n^4)$. We zien deze orde terug als we de looptijd bij 100 en 200 seconden vergelijken. Hier zit ongeveer een factor 16 tussen, wat overeenkomt met deze orde.

Samenvattend kunnen we concluderen dat in alle hierboven getestte gevallen, de funtie Invertible precies voldoet aan de verwachtingen en dus inderdaad een correcte implementatie van het bewijs/algoritme is.

HOOFDSTUK 5

Conclusie en discussie

Het is mogelijk van een willekeurige matrix een selectie te maken, waarbij de selectie goed inverteerbaar is. Dit gebeurt aan de hand van de begrippen stabiele rang en kleinste singuliere waarde. Dat dit mogelijk is, is te bewijzen met een constructief bewijs. Hierdoor is er een algoritme te maken, welke deze selectie maakt. Dit algoritme blijkt zeer goed te werken voor verschillende soorten matrices.

Verder lijkt het erop dat er nog verbetering aan het algoritme (en dus het bewijs) mogelijk is. Er wordt namelijk ruim voldaan aan de gewenste eigenschappen van de resulterende selectie. Verder kan het gegeven algoritme nog sneller gemaakt worden. Daarnaast zou er gekeken kunnen worden of er bij bepaalde groepen matrices speciale dingen gebeuren en of bij die groepen matrices bewezen zou kunnen worden dat het mogelijk is de stelling toe te passen met een hogere constante, waardoor deze groepen nog beter inverteerbaar te maken zouden zijn.

Het bachelorproject heb ik als een leuk project ervaren. Ik heb veel geleerd, waaronder een pittige bewijsstrategie die ik nu beheers. Daarnaast is mijn kennis over lineaire algebra erg vergroot en heb ik geleerd hoe ik een goede wiskundige presentatie kan geven. Nogmaals dank hiervoor aan mijn begeleiders.

Michael Edwin Wildeboer

Appendix

Appendix A: Voorkennis Lineaire Algebra

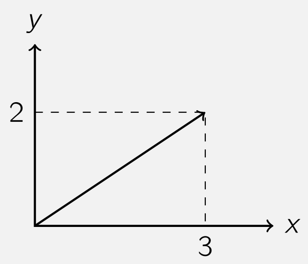
In deze appendix zal de voorkennis lineaire algebra die nodig is worden gegeven. Er is geprobeert er van uit te gaan dat men over amper voorkennis beschikt, zodat dit verslag ook gelezen kan worden door niet-wiskundigen. Let hierbij op dat wiskundige notatie niet allemaal uitgelegd is en dit nageslagen kan worden in de boeken [9] en [10], die hierbij als referentie zijn gebruikt.

Vectoren

Een vector v kunnen we definiëren als een rij getallen die aangeeft waar we ons in een ruimte bevinden. We kunnen dit dus opvatten als een rij coördinaten. Afhankelijk van de dimensie van de ruimte waar we over spreken, hebben we meer of minder getallen nodig om dit aan te geven. Dus in 2D hebben we twee getallen nodig om aan te geven waar we zijn, in 3D drie en zo verder. In het algemeen kunnen we dus zeggen dat een vector uit n getallen bestaat in een ruimte van dimensie n.

VOORBEELD 10

De vector $v = (3, 2)$ geeft aan dat we ons op coördinaat $(3, 2)$ bevinden in een ruimte met dimensie 2. We kunnen ons dit grafisch voorstellen als:



Het is mogelijk vectoren bij elkaar op te tellen, ze te vermenigvuldigen met een getal en met elkaar. Daarnaast kan men van een vector ook de lengre uitrekenen, dit wordt de vectornorm genoemd.

Vectornormen

Definitie 19 (1-norm) *Zij $v \in \mathbb{R}^n$. Dan definiëren we de 1-norm als:*

$$||v||_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i|$$

Dit komt overeen met het optellen van de elementen uit de vector.

Definitie 20 (Euclidische vectornorm) *Zij $v \in \mathbb{R}^n$. Dan definiëren we de Euclidische vectornorm of 2-norm als:*

$$||v||_2 = \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2}$$

Dit komt overeen met het kwadrateren van alle elementen uit de vector, die kwadraten op te tellen en vervolgens de wortel van dit getal te nemen.

Definitie 21 (Max vectornorm) *Zij $v \in \mathbb{R}^n$. Dan definiëren we de Max vectornorm als:*

$$||v||_\infty = \max_i |v_i|$$

Dit komt overeen met het nemen van het grootste element uit de vector.

VOORBEELD 11

In het geval van de vector $v = (3, 2)$, worden de lengtes dus gegeven door:

$$\begin{aligned} ||v||_1 &= \sum_{i=1}^{n} |v_i| = 3 + 2 = 5 \\ ||v||_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |v_i|^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13} \\ ||v||_\infty &= \max_i |v_i| = 3 \end{aligned}$$

Per definitie hebben de vectornormen van de vectoren $v, w \in \mathbb{R}^n$ altijd de volgende eigenschappen:

$$||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$||cv|| = |c| \; ||v||$$

$||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ (driehoeksongelijkheid)

In het geval van de Euclidische vectornorm geldt nog de volgende eigenschap, welke een zeer belangrijke stelling binnen de lineaire algebra is:

Stelling 22 (Cauchy-Schwarz ongelijkheid) *Zij $v, w \in \mathbb{R}^n$, met $\mathbb{R}^n$ een inproductruimte, dan geldt dat:*

$$|v \cdot w| \leq ||v|| \, ||w||$$

Vectornormen vergelijken

Verschillende soorten vectornormen kunnen we met elkaar vergelijken. Daaruit blijken de volgende eigenschappen:

Stelling 23 *Zij $x \in \mathbb{R}^n$, dan geldt dat:*

$$||x||_\infty \overset{(1)}{\leq} ||x||_2 \overset{(2)}{\leq} \sqrt{n}||x||_\infty$$

$$||x||_2 \overset{(3)}{\leq} ||x||_1 \overset{(4)}{\leq} \sqrt{n}||x||_2$$

Bewijs. (1) We willen bewijzen dat geldt:

$$||x||_\infty \leq ||x||_2$$

Laat $x = (x_i, ..., x_n)$, dan volgt dat $||x||_\infty = \max_i |x_i|$ gelijk is aan het grootste element uit die vector. We noemen dit element x_k. Er geldt dus: $||x||_\infty = \max_i |x_i| = x_k$. Dan geldt dat:

$$\begin{aligned} ||X||_\infty = x_k &= \sqrt{|x_k|^2} \\ &\leq \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_k|^2 + \ldots + |x_n|^2} \\ &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = ||X||_2 \end{aligned}$$

Waarmee we dus bewezen hebben dat $||x||_\infty \leq ||x||_2$, met gelijkheid als alle elementen ongelijk aan x_k gelijk aan 0 zijn.

(2) We willen bewijzen dat geldt:

$$||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

Laat $x = (x_i, ..., x_n)$, net als daarnet nemen we $||x||_\infty = \max_i |x_i| = x_k$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
||x||_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \\
&= x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq x_k^2 + \ldots + x_k^2 \\
&= nx_k^2 = n||x||_\infty^2
\end{aligned}$$

We vinden dus:

$$||x||_2^2 \leq n||x||_\infty^2 \Rightarrow ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

waarbij gelijkheid geldt dan en slecht dan als $x_i = x_k$ voor $i = 1 \ldots n$.

(3) We willen bewijzen dat geldt:

$$||x||_2 \leq ||x||_1$$

Laat $x = (x_i, ..., x_n)$, dan geldt:

$$||x||_2^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = (|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2) \leq (|x_1| + \ldots + |x_n|)^2 = ||x||_1^2$$

De bovenstaande ongelijkheid geldt, omdat het altijd zo is dat de som van kwadraten kleiner is dan of gelijk is aan het kwadraat van de som. We vinden dus:

$$||x||_2^2 \leq ||x||_1^2 \Rightarrow ||x||_2 \leq ||x||_1$$

(4) We willen bewijzen dat geldt:

$$||x||_1 \leq \sqrt{n}\, ||x||_2$$

We gaan dit doen met behulp van stelling 22. Laat $x = (x_i, \ldots, x_n)$, $v = (|x_i|, \ldots, |x_n|)$ en $w = (w_1, \ldots, w_n)$ met $w_i = 1$ voor $i = 1 \ldots n$. We passen stelling 22 toe op de vectoren v en w:

$$\begin{aligned}
|v \cdot w| &\leq ||w||\, ||v|| \\
|x_i| \cdot 1 + \ldots + |x_n| \cdot 1 &\leq \sqrt{1^2 + \ldots + 1^2}\sqrt{|x_i|^2 + \ldots + |x_n|^2} \\
|x_i| + \ldots |x_n| &\leq \sqrt{n}\sqrt{|x_i|^2 + \ldots + |x_n|^2} \\
||x||_1 &\leq \sqrt{n}\, ||x||_2
\end{aligned}$$

$\square$

Matrix

We kunnen de notie van een vector uitbreiden naar een matrix. Dit is een element, waarin we meerdere gegevens kunnen verwerken. Dus bijvoorbeeld meerdere locaties in een ruimte. Stel we willen m locaties uitdrukken in een ruimte van dimensie n, dan hebben we een $m \times n$ matrix nodig. De matrix heeft dan m rijen en n kolommen.

VOORBEELD 12

Stel we willen de locaties $(3, 2, 1)$, $(-1, 6, 2)$, $(2, -6, -2)$ uitdrukken in $\mathbb{R}^3$, dan komt dat overeen met de onderstaande matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

In voorbeeld 12 kiezen we er ervoor de vectoren als rijen in de matrix te zetten, maar we kunnen net zo goed de kolommen van de matrix hiervoor gebruiken. Hierdoor zie je direct dat het maar net is hoe een matrix wordt gedefiniëerd. Naast het voorbeeld van meerdere locaties, kan een matrix ook gebruikt worden voor het uitdrukken van een rij lineaire vergelijkingen, een graaf of andere gegevens. Het is puur een handig opschrijfmiddel.

Net als bij vectoren is het mogelijk matrices op te tellen, te vermenigvuldigen met een getal en met elkaar. Hoe dit wordt gedaan is na te lezen in [9]. Merk op dat als $n = m$ we de matrix vierkant noemen. We kunnen op een matrix een aantal bewerkingen doen. Zo kunnen we de getransponeerde matrix nemen.

Definitie 24 *Laat A een $m \times n$ matrix zijn, dan wordt A^T gevonden door van de kolommen rijen te maken en van de rijen kolommen. Dus als een getal eerst op locatie (i, j) staat, zal hij nu staan op locatie (j, i).*

VOORBEELD 13

De getransponeerde van de matrix uit voorbeeld 12 wordt gegeven door:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Symmetrische matrix

Definitie 25 *Een symmetrische matrix is een matrix, waarvoor geldt dat* $A = A^T$

VOORBEELD 14

Een voorbeeld van een symmetrische matrix wordt gegeven door:

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 6 & -6 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

Basis en basistransformatie

Definitie 26 *Een verzameling lineair onafhankelijke vectoren* $\{v_i\} \in V$ *die een gehele ruimte* V *opspannen, noemen we een basis van die ruimte* V*. Dit betekent dat deze vectoren in een lineaire combinatie elke vector in die ruimte moeten kunnen vormen. De basis van een ruimte is verre van uniek en afhankelijk van de basis zien lineaire transformaties er ook anders uit. In het bijzonder noemen we een basis orthonormaal als geldt dat:*

$$< v_i, v_j >= 1 : i = j$$
$$< v_i, v_j >= 0 : i \neq j$$

VOORBEELD 15

De vectoren $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ en $(0, 0, 1)$ spannen de ruimte $\mathbb{R}^3$ op en zijn daarvoor dus een basis. In het bijzonder betreft het in dit geval ook een orthogonale basis, dit is makkelijk na te gaan.

Stelling 27 *De matrix van een lineaire transformatie hangt af van de gekozen basis. Als we van basis veranderen, verandert de matrix ook mee. Zijn* A *de matrix die* L_A *representeert t.o.v. de basis* $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$*. We veranderen naar de basis* $w = \{w_1, \ldots, w_n\}$*. Omdat we twee keer een basis hebben, bestaat er een matrix* B *met de eigenschap dat:*

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

De matrix A' die L_A representeert t.o.v. de basis w wordt nu gegeven door:

$$A' = (B^T)^{-1} A B^T$$

De geïnterreseerde lezer kan een bewijs van deze stelling vinden in [9]

Lineaire operator

Definitie 28 *Laat A een $n \times n$ matrix zijn en $v, w \in \mathbb{R}^n$ en $c \in \mathbb{R}$. Dan definieren we de lineaire operator die bij A hoort als:*

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$L_A(v) = Av$$

Per definitie heeft deze lineaire operator de volgende eigenschappen:

- $L(v + w) = L(v) + L(w)$
- $L(cv) = cL(v)$

VOORBEELD 16

Laat $v = (3, 2, 1)$ en A de matrix uit voorbeeld 12, dan geldt dat $L_A(v)$ gegeven wordt door:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Analoog kunnen we van een lineaire operator ook altijd een matrix opstellen. Voor die matrix moet dan simpelweg het eerder genoemde verband gelden. Deze matrix kan je opstellen door van alle elementen uit de basis de operatie uit te voeren en die vervolgens in een matrix te zetten. Het hangt dus van de basis af wat deze matrix zal zijn.

Eigenwaarden en eigenvectoren

Definitie 29 *Laat A een $n \times n$ matrix zijn en $v, w \in V$, met de lineaire operator gedefinieëerd als $A : V \to V$. Zo'n vector $v \in V \setminus \{0\}$ noemen we een eigenvector van A als geldt dat er een getal $\lambda \in \mathbb{C}$ bestaat, zodanig dat:*

$$Av = \lambda v$$

Dit getal λ noemen we dan de eigenwaarde van A.

VOORBEELD 17

Vind de eigenvectoren en eigenwaarden van de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

In dit geval worden de eigenvectoren gegeven door:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

met de bijbehorende eigenwaarden $\lambda_1 = 5$ en $\lambda_2 = -1$.

Rang van een matrix

Definitie 30 *Laat A een $m \times n$ matrix zijn, zijn rang wordt gedefiniëerd als de dimensie van de ruimte opgespannen door de kolommen of rijen. De kolomruimte en rijruimte hebben altijd dezelfde dimensie, welke gelijk is aan het aantal lineair onafhankelijke kolommen of rijen.*

VOORBEELD 18

Vind de rang van de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 2 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

We zien dat de tweede en derde kolom lineair afhankelijk zijn. Er geldt tenslotte dat $3A_3 = A_2$. We zien vervolgens dat de andere eerste en tweede kolom wel lineair onafhankelijk zijn. De rang van deze matrix is dus 2.

Positief semi definiete matrices

Definitie 31 *Laat A een symmetrische $n \times n$ matrix zijn. We noemen deze matrix positief semi definiet als geldt dat $v^T Av \geq 0$ voor alle $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. We noemen hem positief definiet als geldt dat $vTAv > 0$ voor alle $v \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.*

Stelling 32 *Laat A een symmetrische $n \times n$ matrix zijn. Deze matrix is positief semi definiet dan en slechts dan als alle eigenwaarden van A niet negatief zijn. Hij is positief definiet dan en slechts dan als alle eigenwaarden van A positief zijn. In het bijzonder is een positief definiete matrix altijd inverteerbaar.*

Bewijs. Uit de tekst in hoofdstuk 2 blijkt dat we van een symmetrische matrix A zijn spectraaldecompositie kunnen maken, wat we hier gebruiken. We spiltsen de matrix op de volgende manier uit. Als $\{v_1, \ldots, v_n\}$ een orthonormale basis van eigenvectoren van A is en $\lambda_1, \ldots \lambda_2$ de eigenwaarden, dan geldt dat:

$$\begin{aligned} x^T Ax &= \lambda_1(x^T v_1 v_1^T x) + \lambda_2(x^T v_2 v_2^T x) + \ldots + \lambda_n(x^T v_n v_n^T x) \\ &= \lambda_1| < x, v_1 > |^2 + \lambda_2| < x, v_2 > |^2 + \ldots + \lambda_n| < x, v_n > |^2 \end{aligned}$$

Hieruit volgt direct dat alleen kan gelden dat $x^T Ax \geq 0$ voor alle $x \in \mathbb{R}^n$ als geldt dat $\lambda_i \geq 0$ voor $i = 1 \ldots n$. Verder volgt hieruit direct dat als een matrix positief definiet is, hij een determinant heeft ongelijk aan 0 en dus inverteerbaar is. ☐

VOORBEELD 19

De matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

heeft enkel positieve eigenwaarden (reken dit zelf na) en dus volgt dat hij positief semi definiet is.

Stelling 33 *Laat A een symmetrische $n \times n$ matrix zijn. Deze matrix is positief semi definiet dan en slechts dan als er een B bestaat zodanig dat:*

$$A = B^T B.$$

Dit betekent dat een matrix gevormd door zo'n vermenigvuldiging, altijd positief semi definiet is.

Bewijs. We bewijzen twee kanten op. Als we ervan uitgaan dat die matrix B bestaat, dan volgt dat

$$x^T B^T Bx =< Bx, Bx >= ||Bx||^2 \geq 0$$

en dus volgt dat A positief semi definiet is.

Als A positief semi-definiet is, kunnen we de matrix op de volgende manier uitsplitsen, zoals in stelling 32 . Als $\{v_1, \ldots, v_n\}$ een orthonormale basis van eigenvectoren van A is en $\lambda_1, \ldots \lambda_2$ de eigenwaarden, dan geldt dat:

$$A = \lambda_1(v_1 v_1^T) + \lambda_2(v_2 v_2^T) + \ldots + \lambda_n(v_n v_n^T)$$

We nemen nu

$$B = \sqrt{\lambda_1}(v_1 v_1^T) + \sqrt{\lambda_2}(v_2 v_2^T) + \ldots + \sqrt{\lambda_n}(v_n v_n^T)$$

Er volgt nu direct dat $B = B^T$ en dat $A = B^2 = B^T B$. □

Singuliere waarden

Definitie 34 *Laat A een $m \times n$ matrix. We weten dat de matrix $A^T A$ een symmetrische, vierkante matrix is en dus uit stelling 33 dat deze matrix positief semi definiet is. Uit stelling 32 blijkt nu dat alle eigenwaarden van $A^T A$ niet-negatief (en natuurlijk reëel) zijn. Hieruit blijkt dat we de wortel van deze eigenwaarden kunnen nemen. Daarom kunnen we de singuliere waarden van de matrix A als volgt definiëren:*

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)}$$

waarbij het de conventie is om de σ's zo te nummeren dat ze een afnemende rij vormen.

VOORBEELD 20

Vind de singuliere waarden van de matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

We vinden deze via de matrix:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 10 & 3 \\ 6 & 6 & 17 & 4 \\ 10 & 17 & 62 & 13 \\ 3 & 4 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

Merk op dat deze matrix inderdaad symmetrisch is. Deze matrix heeft eigenwaarden $\lambda_1 = 71.764$, $\lambda_2 = 9.893$, $\lambda_3 = 0.270$ en $\lambda_4 = 0.073$ waaruit volgt dat de singuliere waarden van A gegeven worden door $\sigma_1 = \sqrt{71.764}$, $\sigma_2 = \sqrt{9.893}$, $\sigma_3 = \sqrt{0.270}$ en $\sigma_4 = \sqrt{0.073}$.

Spoor van een matrix

Definitie 35 *We definiëren de trace van een matrix $A(n \times n)$ als de som van de diagonaal-elementen:*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Verder geldt dat de trace van gelijkvormige matrices gelijk is. Dus zodra een matrix gelijkvormig is met een andere matrix, hebben ze dezelfde trace. Belangrijk is om op te merken dat het spoor van een operator eenduidig te definieren is, omdat alle representatiematrices gelijkvormig zijn en dus hun trace gelijk is.

Stelling 36 *Laat A, B, C en D een $m \times n$ matrix zijn. Dan volgt:*

(i) $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$

(ii) $Tr(AB) = Tr(BA)$

Bewijs. Deze eigenschappen volgen allen rechtstreeks uit de eigenschappen van sommatie en matrixvermenigvuldiging. □

Merk op dat in het bijzonder niet altijd geldt dat $Tr(ABC) = Tr(ACB)$.

Stelling 37 *Stel dat de matrix A diagonaliseerbaar is, dan $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$*

Bewijs. Stel de matrix A is diagonaliseerbaar. Dan geldt dat we zijn diagonaalmatrix kunnen schrijven als:

$$D = V^{-1}AV$$

met de eigenvectoren van A in de kolommen van V. De matrix D heeft dan de eigenschap dat hij de eigenwaarden λ_i van de matrix A op de diagonaal heeft staan. Nu volgt:

$$\begin{aligned} Tr(A) &= Tr(IA) = Tr((V^{-1}V)A) \\ &= Tr(V^{-1}(VA)) = Tr(V^{-1}(AV)) \\ &= Tr(D) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \end{aligned}$$

We maken hierbij gebruik van de eigenschap dat $Tr(AB) = Tr(BA)$ □

Matrixnormen

Een matrixnorm is een operatie die aan elke $n \times n$ matrix A een getal $||A||$ toekent, genaamd de norm van A. Deze norm heeft de volgende eigenschappen:

- $||A|| \geq 0$ en $||A|| = 0$ dan en slechts dan als $A = 0$
- $||cA|| = |c|\ ||A||$
- $||A + B|| \leq ||A|| + ||B||$
- $||AB|| \leq ||A||\ ||B||$

Definitie 38 *Zij A een $n \times n$ matrix, dan definieren we de Frobenius norm als volgt:*

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_r^2} = \sqrt{tr(A^T A)}$$

VOORBEELD 21

Laat A gegeven worden door de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan geldt dat

$$||A||_F = \sqrt{3^2 + 2^2 + (5)^2 + +6^2 + 8} = \sqrt{82}$$

Analoog kunnen we dit ook via de singuliere waarden doen:

$$||A||_F = \sqrt{71.764 + 9.893 + 0.270 + 0.073} = \sqrt{82}$$

Of via de trace van $A^T A$:

$$A^T A = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 10 & 3 \\ 6 & 6 & 17 & 4 \\ 10 & 17 & 62 & 13 \\ 3 & 4 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{tr(A^T A)} = \sqrt{11 + 6 + 62 + 3} = \sqrt{82}$$

Definitie 39 *Een matrix norm $||A||$ noemen we de operator norm als hij geinduceerd wordt door de vectornorm $||x||$. Er volgt nu dat:*

$$||A||_2 = \max_{|x|_2=1} ||Ax||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} = \sigma_{max}(A)$$

VOORBEELD 22

Laat A gegeven worden door de volgende matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 10 & 3 \\ 6 & 6 & 17 & 4 \\ 10 & 17 & 62 & 13 \\ 3 & 4 & 13 & 3 \end{pmatrix}$$

Dan geldt dat

$$||A||_2 = \sqrt{\lambda_{max}(A^T A)} = \sqrt{71.764} = \sigma_{max}(A)$$

Stelling 40 *Laat A een willekeurige $m \times n$ matrix zijn, dan volgt dat:*

$$||A||_2 \leq ||A||_F$$

Bewijs. Analoog aan het bewijs bij de vectornormen, geldt dat:

$$||A||_2 = \sigma_{max}(A) = \sqrt{\sigma_{max}(A)^2} \leq \sqrt{\sigma_1(A)^2 + \ldots + \sigma_n(A)^2} = ||A||_F$$

□

Appendix B: De functie Invertible

Hieronder is de MATLAB-code weergegeven van de functie Invertible. Het commentaar legt uit wat de functie doet.

```
function [rs, fs, rl, fl] = Invertible(L, v, e)
%INVERTIBLE Function that makes any matrix L good invertible by the use of
%v and e. Input is a matrix L, that you want to make good invertible, a
%matrix v with column vectors containing the selection vectors and a
%constant e, which gives choice between a big outputmatrix with low
%smallest eigenvalue (e near 1) and a smaller outputmatrix with larger
%smallest eigenvalue (e near 0). Output gives the rs (required size), fs
%(found size), rl (required smallest lambda) and fl (found smallest
%lambda). For good usage, e must be between and not equal to 0 and 1.


% Declarations

m = size(v,2);                          % Amount of selection vectors
c = zeros(m,1);                         % Which v are used 1 or unused 0
I = eye(m);                             % The unitvector

% Constant values

LT = transpose(L);                      % Transpose of L
LF = norm(L,'fro');                     % Frobenius norm of L
LO = norm(L,2);                         % Operator or 2 norm of L
w  = L*v;                               % Image of v under L

% Requirements of theorem

rs = floor(e^2*(LF^2/LO^2))             % Required size of outputmatrix
rl = ((1-e)^2*LF^2)/m;                  % Required smallest eigenvalue

% Starting values algorithm

j = 1;                                  % Counter, which v we check
t = 1;                                  % Counter, how many steps?
R = zeros(m,m);                         % Matrix made by Lvi*Lvi^T
b = ((1-e)*LF^2)/m;                     % Barrier
d = ((1-e)*LO^2)/(e*m);                 % Delta value
```

```
% Algorithm

while t <= rs                               % Then we need to check more
    if j <= m
        s = b - d;                          % Value new barrier
        Phib = trace(LT*inv(R-b*I)*L);      % Potential with old barrier
        Phis = trace(LT*inv(R-s*I)*L);      % Potential with new barrier

        A = w(:,j).'*inv(R-s*I)*L*LT*inv(R-s*I)*w(:,j);    % First check value
        B = (Phib - Phis)*(-1-w(:,j).'*inv(R-s*I)*w(:,j)); % Second check value

        if A <= B                           % Then vector is good
            if c(j,1) == 0                  % Then vector is not already used
                c(j,1) = 1;                 % Vector will now be used
                R = R + (L*v(:,j))*((L*v(:,j)).');         % R is updated
                b = s;                      % New barrier becomes old
                j = 1;                      % j is reset
                t = t+1                     % We took an extra step
            else
                j = j+1;                    % We need to look for unused
            end
        else
            j = j+1;                        % We need to look for usable
        end
    end
end

% Making of output

fs = sum(c);
fl = min(eigs(R,fs));

return
```

Appendix C: Testprogramma voor Laplaciaanse matrices

Hieronder is de MATLAB-code weergegeven van het testprogramma voor Laplaciaanse matrices. Het commentaar legt uit wat het programma doet.

```
% This program generates ten Laplacian matrices of random graphs with n nodes
% where p determines the probability that between any two vertices
% there is an edge, namely with probability p/10 there is an edge.
% This is related to the G(n,p) random graph model of Erdoes and Renyi.

clear all
clc

n = 100;

v = eye(n);
e = 0.75;

for p = 10,
 M = zeros(n);
 for i = 1:n,
   for j = i+1:n,
     r = rand;
     if r < p/10
       M(i,j) = -1;
       M(j,i) = -1;
     end
   end
 end
 for i = 1:n,
   c = 0;
   for j = 1:n,
     if M(i,j) == -1
       c = c + 1;
     end
   end
   M(i,i) = c;
 end
 M;
end

[rs, fs, rl, fl] = Invertible(M, v, e)
```

Appendix D: Testprogramma voor matrices met toenemende rang

Hieronder is de MATLAB-code weergegeven van het testprogramma voor positief semi definiete matrices met toenemende rang. Het commentaar legt uit wat het programma doet.

```
% This program generates ten random positive semidefinite matrices with
% increasing rank. The matrices are sampled from the Wishart distribution.


clear all
clc

n = 100;

v = eye(n);
e = 0.5;

for k = 5,
 K = randn(n,floor(k/10*n));
 M = K*transpose(K);
end

[rs, fs, rl, fl] = Invertible(M, v, e)
```

Bibliografie

[1] Spielman, D.A. en Srivastava, N. *An Elementary Proof of the Restricted Invertibility Theorem* arXiv (2010) 1-7

[2] Spielman, D.A., Batson, J. en Srivastava, N. *Twice-Ramujan Sparsifiers* arXiv (2009) 1-21

[3] Kadison, R. and Singer, I. *Extensions of pure states* Amer. J. Math. 81 (1959) 547-564

[4] Anderson, J. *Extensions, restrictions and representations of states on C*-algebras* Trans. Amer. Math. Soc. 249 (1979) 303-329.

[5] Casazza, P. and Tremain, J.C. *The Kadison-Singer problem in mathematics and engineering* Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 103 (7) (2006) 2032-2039

[6] Bourgain, J. en Tzafriri, L. *Invertibility of large submatrices with applications to the geometry of Banach spaces and harmonic analysis* Israel Journal of Mathematics 57 (1987) 137 - 224

[7] Bourgain, J., en Tzafriri, L. *On a problem of Kadison and Singer* J. Reine Angew. Math. 420 (1991) 1-43.

[8] Tropp, J. A. *Column subset selection, matrix factorization, and eigenvalue optimization.* Proceedings of the Nineteenth Annual ACM -SIAM Symposium on Discrete Algorithms (2009) 978-986.

[9] Lang, S. *Introduction to Lineair Algebra* Second Edition

[10] Kooman, R.J. en de Smit, B. *Syllabus Lineaire Algebra 2* Universiteit Leiden najaar 2008

[11] Naor, A. *Sparse quadratic forms and their geometric applications* arXiv 2010 1-30