

**ZUM NICHTLINEAREN PROBLEM
EINES VERTIKAL SCHWINGENDEN
ZYLINDRISCHEN KÖRPERS
BELIEBIGER FORM**

DIPL.-ING. APOSTOLOS PAPANIKOLAOU

Vom Fachbereich für Verkehrswesen
der Technischen Universität Berlin
zur Verleihung des akademischen Grades
Doktor-Ingenieur
genehmigte Dissertation

BERLIN 1977

D 83

ZUM NICHT LINEAREN PROBLEM
EINER VERTIKAL SCHWINGENDE
ZWEI MASSEN KÖRPER
BEWEGUNG FORM

Dr. H. Nowacki

Dr. E. Wolf

Berichter: Professor Dr.-Ing. H. Nowacki
Professor Dr.-Ing. E. Wolf

Tag der mündlichen Prüfung: 27. Juni 1977

Gesamtherstellung: aku-Fotodruck GmbH, 8600 Bamberg

ÜBERSICHT

Das Problem eines an oder nahe der freien Wasseroberfläche mit endlicher Amplitude vertikal schwingenden zylindrischen Körpers beliebiger Querschnittsform wird als nichtlineares zeitabhängiges Randwertproblem gemischter Art unter den Voraussetzungen der Potentialtheorie zweidimensional beschrieben.

Die nach Behandlung der Randbedingungen mit Hilfe der Störungsmethode bis zur zweiten Ordnung bezüglich des Entwicklungsparameters erhaltenen linearen Randwertprobleme werden unter Berücksichtigung der Greenschen Sätze auf Fredholm'sche Integralgleichungen zweiter Art zurückgeführt. Danach werden Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von Lösungen untersucht.

Eine verbesserte Lösungsdarstellung durch eine Integralgleichungsmethode, die sowohl das innere als auch das äußere Problem berücksichtigt, sichert auch für die Eigenfrequenzen des inneren Problems physikalisch vertretbare Lösungen.

Durch Singularitätenanordnung entlang der getauchten Körperkontur werden das Geschwindigkeitspotential und die damit verbundenen Bewegungsgrößen bis zur zweiten Ordnung bezüglich des Entwicklungsparameters für den Fall unendlicher Wassertiefe ermittelt und die Ergebnisse für verschiedene Spantformen graphisch aufgetragen.

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

	Seite
ÜBERSICHT	I
INHALTSVERZEICHNIS	II
NOMENKLATUR	IV
VEREINBARUNGEN	IX
DIMENSIONSLOSE FAKTOREN	X
EINLEITUNG	1
1. PROBLEMFÖRMULIERUNG	8
1.1 Annahmen	8
1.2 Geometrie	9
1.3 Randbedingungen	11
1.4 Störungsrechnung	13
1.5 Randwertprobleme	17
2. PROBLEMLÖSUNG	22
2.1 Integralgleichungen	22
2.2 Lösungsverfahren	28
2.3 Potential erster Ordnung	33
2.4 Potential zweiter Ordnung	38
2.5 Physikalische Größen	47
3. NUMERISCHE ERGEBNISSE	63
3.1 Rechengang	63
3.2 Irregularitätenproblem	67
3.3 Physikalische Kenngrößen	72
4. ZUSAMMENFASSUNG	79
DANKWORT	82

	Seite
ANHÄNGE	83
A <u>Behandlung der Randbedingungen mit Hilfe der Störungs-</u> <u>methode</u>	84
A.1 Randbedingungen an der freien Oberfläche	84
A.2 Randbedingungen an der Körperoberfläche	87
A.3 Vereinfachung der Störungsansätze	89
A.4 Vergleich der Randbedingungen für $\phi_k^{(n)}$ mit anderen Autoren	90
B <u>Behandlung der Randwertprobleme mit Hilfe der GREEN-</u> <u>schen Sätze der Potentialtheorie</u>	93
B.1 Formulierung der Randwertprobleme	94
B.2 Zurückführung der Randwertprobleme auf Integralgleichungen	98
B.3 Lösung der Randwertprobleme durch verschiedene Integralgleichungen	104
B.4 Existenz- und Eindeutigkeitsfragen	109
B.5 Verbesserte Lösungsdarstellung durch eine kombinierte Integralgleichungsmethode	114
B.6 Irregularitätenproblem eines vertikal schwingenden Rechteckprofils	118
C <u>Bestimmung geeigneter GREENScher Funktionen</u>	123
C.1 GREENsche Funktion der Ebene bei endlicher Wassertiefe	123
C.2 GREENsche Funktion der Ebene bei unendlicher Wassertiefe	130
C.3 Vergleich der GREENschen Funktionen $G^{(h)}(P,Q)$ bzw. $G(P,Q)$ mit anderen Autoren	131
D <u>Auswertung von Integralausdrücken</u>	134
D.1 Berechnung von Integralen der Form $Re_j \left\{ \int F(z, \tau) ds \right\}$	136
D.2 Berechnung von Integralen der Form $Re_j \left\{ \int (\vec{n}\nabla) F(z, \tau) ds \right\}$	143
D.3 Auswertung von CAUCHYSchen Hauptwertintegralen	151
LITERATURVERZEICHNIS	159
UNTERSUCHTE SPANTFORMEN	171
DIAGRAMME	173

NOMENKLATUR

<u>Symbol</u>	<u>Dimension</u>	<u>Bezeichnung</u>
a	L	Erreger- und Bewegungsamplitude
A_0	L^2	Spantfläche
b	L	Maximale Halbbreite
B	L	Spantbreite in der Ruhewasserlinie
D	L^2	Flüssigkeitsbereich im Ruhezustand (Abb. B.1)
D'	L^2	Definitionsbereich des inneren Potentialproblems; entspricht dem Komplement von D in der unteren Halbebene (Abb. B.1)
$E_1(z)$	-	Exponentialintegral für eine komplexe Zahl z
$f_{Vc}^{(n)}$	MT^{-2}	Zeitrealteil von $F_V^{(n)}$
$f_{Vs}^{(n)}$	MT^{-2}	Zeitimaginärteil von $F_V^{(n)}$
$F^{(n)}$	LT^{-1}	Inhomogenitätskoeffizient entlang S_0 für die Integralgleichung n-ter Ordnung; Gl. (54), (62), (63)
$F_{oV}^{(2)}$	MT^{-2}	Zeitkonstante Vertikalkraft zweiter Ordnung pro Längeneinheit
F_V	MT^{-2}	Hydrodynamische Gesamtkraft in Vertikalrichtung pro Längeneinheit
$F_V^{(n)}$	MT^{-2}	Hydrodynamische Vertikalkraft n-ter Ordnung pro Längeneinheit
$F_{VA}^{(n)}$	MT^{-2}	Hydrodynamische Kraftamplitude n-ter Ordnung pro Längeneinheit
g	LT^{-2}	Erdbeschleunigung
$G^{(n)}$	-	GREENSche Funktion n-ter Ordnung bei unendlicher Wassertiefe
$G_c^{(n)}$	-	Zeitrealteil von $G^{(n)}$
$G_s^{(n)}$	-	Zeitimaginärteil von $G^{(n)}$
$G^{(h)}$	-	GREENSche Funktion bei endlicher Wassertiefe
h	L	Wassertiefe

$h_w^{(n)}$	L	Wellenprofilamplitude n-ter Ordnung im Unendlichen
$i = \sqrt{-1}$	-	Imaginäre Einheit im Zusammenhang mit Ortsvariablen
\vec{i}	-	Einheitsvektor in x-Richtung
$I_{ij}^{(n)}$	-	Einflußkoeffizient n-ter Ordnung im Aufpunkt i infolge eines Quellpunktes j; entspricht dem diskretisierten Ausdruck $(\bar{n}v) G_c^{(n)}$; Gl. (76), (86)
$\text{Im}_i\{ \}$		Imaginärteil einer ortskomplexen Größe
$\text{Im}_j\{ \}$		Imaginärteil einer zeitkomplexen Größe
$j = \sqrt{-1}$	-	Imaginäre Einheit im Zusammenhang mit Zeitvariablen
\vec{j}	-	Einheitsvektor in y-Richtung
$J_{ij}^{(n)}$	-	Einflußkoeffizient n-ter Ordnung im Aufpunkt i infolge eines Quellpunktes j; entspricht dem diskretisierten Ausdruck $(\bar{n}v) G_s^{(n)}$; Gl. (77), (87)
$K_{ij}^{(n)}$	-	Entspricht dem diskretisierten Ausdruck $G_c^{(n)}$; Gl. (78), (88)
$L_{ij}^{(n)}$	-	Entspricht dem diskretisierten Ausdruck $G_s^{(n)}$; Gl. (79), (89)
L	L	Halbe Länge von S_0
$M^{(2)}$	LT^{-1}	Inhomogenitätskoeffizient entlang S_F für die Integralgleichung zweiter Ordnung; Gl. (64), (65)
\vec{n}	-	Äußere Einheitsnormale von S_0 , vom Körper in die Flüssigkeit weisend
$o - x - y$		Ortsfestes kartesisches Rechtssystem
$\bar{o} - \bar{x} - \bar{y}$		Mitbewegtes kartesisches Rechtssystem
$O ()$		LANDAUSches Symbol
$p_c^{(n)}$	$L^{-1}MT^{-2}$	Zeitrealteil von $p^{(n)}$
$p_s^{(n)}$	$L^{-1}MT^{-2}$	Zeitimaginärteil von $p^{(n)}$
P	$L^{-1}MT^{-2}$	Gesamtdruck relativ zum atmosphärischen Druck

VI

$P^{(n)}$	$L^{-1}MT^{-2}$	Hydrodynamischer Druck n-ter Ordnung
$P_A^{(n)}$	$L^{-1}MT^{-2}$	Hydrodynamische Druckamplitude n-ter Ordnung
$P_o^{(2)}$	$L^{-1}MT^{-2}$	Zeitkonstanter Druck zweiter Ordnung
$P_c^{(2)}, P_s^{(2)}$	-	Inhomogenitätskoeffizienten entlang S_F für $\phi_c^{(2)}$; Gl. (90), (91)
$Q_c^{(2)}, Q_s^{(2)}$	-	Inhomogenitätskoeffizienten entlang S_F für $\phi_s^{(2)}$; Gl. (94), (95)
R	-	Abstand zwischen Aufpunkt und Quellpunkt; Gl. (46), Abb. C.1
R_1	-	Abstand zwischen Aufpunkt und einem bezüglich des Flüssigkeitsbodens gespiegelten Quellpunktes; Gl. (46), Abb. C.1
$Re_i\{ \}$		Realteil einer ortskomplexen Größe
$Re_j\{ \}$		Realteil einer zeitkomplexen Größe
s	L	Bogenlänge entlang S_o ; gezählt von der Symmetrieachse positiv im Uhrzeigersinn
s_j	L	Länge der Sehne des j-ten Segments
S	L	Augenblicklich getauchte Körperkontur
S_B	L	Horizontale Bodenlinie, $y = -h$
S_F	L	Ruhewasserlinie, $y = 0$
S_G	L	Rand des Flüssigkeitsbereichs D
S_L	L	Linker Vertikalrand, $x \rightarrow -\infty$
S_o	L	Getauchte Körperkontur im Gleichgewicht
S_R	L	Rechter Vertikalrand, $x \rightarrow +\infty$
t	T	Zeitvariable
u, v	LT^{-1}	Geschwindigkeitskomponenten in x- bzw. y- Richtung
x, y	L	Kartesische Inertialsystem-Koordinaten
\bar{x}, \bar{y}	L	Kartesische körperfeste Koordinaten, insbesondere Koordinaten der Körperkontur
Y	L	Wellenerhebung über $y = 0$

$Y_k^{(n)}$	L	Wellenprofilgrößen n-ter Ordnung
$z = x + iy$	-	Ortskomplexe Variable (Aufpunkt)
$z_i = x_i + iy_i$	-	Ortskomplexe Variable für den Aufpunkt P_i
α_j, α_j	-	Neigungswinkel der Sehne des j-ten Segments gegenüber der positiven x-Achse, positiv entgegen dem Uhrzeigersinn gezählt
γ, γ	-	EULERSche Konstante, $\gamma = 0,577\ 215\ 665$
$\delta_F^{(n)}, \delta_F^{(n)}$	-	Phasenwinkel der hydrodynamischen Vertikalkraft n-ter Ordnung, bezogen auf die Erregerfunktion
$\delta_P^{(n)}, \delta_P^{(n)}$	-	Phasenwinkel des hydrodynamischen Druckes n-ter Ordnung, bezogen auf die Erregerfunktion
$\delta_W^{(n)}, \delta_W^{(n)}$	-	Phasenwinkel des Wellenprofils n-ter Ordnung im Unendlichen, bezogen auf die Erregerfunktion
$\epsilon = \frac{a}{b}, \epsilon$	-	Störungsparameter
$\zeta = \xi + in, \zeta$	-	Ortskomplexe Variable (Quellpunkt)
$\zeta_j = \xi_j + in_j$	-	Ortskomplexe Variable für den Quellpunkt Q_j
y_0	L	Erregerfunktion
λ, λ	$L^{-1}MT^{-1}$	Hydrodynamischer Dämpfungskoeffizient pro Längeneinheit
μ, μ	$L^{-1}M$	Hydrodynamischer Massenkoeffizient pro Längeneinheit
$\nu = \frac{\omega^2}{g}, \nu$	L^{-1}	Wellenzahl der Erregung
ν_0	L^{-1}	Wellenzahl für die abgestrahlten Wellen im Unendlichen bei endlicher Wassertiefe, Gl. (25)
$\xi_b = \nu b, \xi_b$	-	Frequenzparameter
π, π	-	Kreiszahl, = 3,141 592 653
ρ, ρ	ML^{-3}	Flüssigkeitsdichte
σ, σ	LT^{-1}	Quellstärke entlang S_0
\vec{t}, \vec{t}	-	Tangentialer Einheitsvektor entlang S_0 , positiv in Richtung s

$\phi_k^{(n)}(x,y)$, $\bar{\varphi}_k^{(n)}$	$L^2 T^{-1}$	Potentialausdruck n-ter Ordnung nach Zeitelimination
$\phi_{kC}^{(n)}(x,y)$, $\bar{\varphi}_{kC}^{(n)}$	$L^2 T^{-1}$	Zeitrealteil von $\phi_k^{(n)}$
$\phi_{kS}^{(n)}(x,y)$, $\bar{\varphi}_{kS}^{(n)}$	$L^2 T^{-1}$	Zeitimaginärteil von $\phi_k^{(n)}$
$\phi(x,y;t)$, Φ	$L^2 T^{-1}$	Geschwindigkeitspotential
$\phi^{(n)}(x,y;t)$, $\Phi^{(n)}$	$L^2 T^{-1}$	Geschwindigkeitspotential n-ter Ordnung
ω , ω	T^{-1}	Erregerkreisfrequenz
$\frac{\partial(\)}{\partial n_P}$	L^{-1}	Äußere Normalableitung nach den Aufpunktkoordinaten; Gl. (D.2.2)
$\frac{\partial(\)}{\partial n_Q}$	L^{-1}	Innere Normalableitung nach den Quellpunktkoordinaten; Gl. (D.2.2)'
$\Delta(\) \equiv \frac{\partial(\)}{\partial x^2} + \frac{\partial(\)}{\partial y^2}$	L^{-2}	LAPLACEScher Operator
$\nabla(\) \equiv \frac{\partial(\)}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial(\)}{\partial y} \hat{j}$	L^{-1}	HAMILTONScher Operator
$\mathcal{B}\{ \} \equiv \frac{\partial \bar{y}}{\partial s} \frac{\partial(\)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} \frac{\partial(\)}{\partial y} \Big _{(x,y) \in S_0}$	L^{-1}	Körperoberflächen-Differentialoperator
$\mathcal{F}(v)\{ \} \equiv \frac{\partial(\)}{\partial y} - v(\) \Big _{(x,y) \in S_F}$	L^{-1}	Freie-Oberflächen-Differentialoperator
$\mathcal{R}(v_0)\{ \} \equiv \text{Re}_j \left\{ \frac{\partial(\)}{\partial x} \mp j v_0(\) \right\} \Big _{(x,y) \in \{S_L^R\}}$	L^{-1}	Ausstrahlungs-Differentialoperator
$C^{(k)}$		Klasse von Funktionen, die selbst und alle ihre Ableitungen bis zur k-ten Ordnung einschließlich stetig sind ($k = 0, 1, \dots$)
log		Natürlicher Logarithmus
sgn		Signum Funktion
sh		Hyperbelsinus
ch		Hyperbelkosinus
th		Hyperbeltangens
cth		Hyperbelkotangens

VEREINBARUNGEN

- a) Die Dimensionen wurden im Physikalischen Maßsystem mit den Grundgrößen Länge (L), Zeit (T) und Masse (M) angegeben.
- b) Obere Indizes in runden Klammern zeigen die Ordnung der indizierten Größe bezüglich des Entwicklungsparameters ϵ an.
- c) Die Größe k ($0, 1, \dots, N$) als unterer Index zeigt die k -fache zeitharmonische Abhängigkeit der indizierten Größe an. Unter "k-fache zeitharmonische" Abhängigkeit wird die zeitharmonische Oscillation der indizierten Größe mit der k -fachen Erregerkreisfrequenz verstanden.
- d) Die Größen c bzw. s als untere Indizes zeigen den Zeitreal- bzw. Zeitimaginärteil der indizierten Größe an.
- e) Die Größen x , y , n und t als untere Indizes bedeuten eine partielle Differentiation der indizierten Größe bezüglich der jeweiligen Indizes. Wenn jedoch gleichzeitig untere Indizes nach c) und d) vorkommen, sind die partiellen Ableitungszeichen $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial n}$ und $\frac{\partial}{\partial t}$ verwendet worden, um Mißverständnisse zu vermeiden.
- f) Bei komplizierten Formelausdrücken werden die Argumente der dort vorkommenden Funktionen nur beim deren ersten Auftreten ausführlich angegeben und sonst in der Gleichung nicht mehr.
- g) Die Einführung von dimensionslosen Größen (vgl. S. X) erfolgt im Abschnitt 2 (Problemlösung).
- h) Bei der Multiplikation zweier Größen, die beide als Realteil von komplexen Produkten definiert sind, mit $a = \text{Re}_j \{ a_A e^{-j\alpha} \}$ bzw. $b = \text{Re}_j \{ b_A e^{-j\beta} \}$ und $a_A = a_c + j a_s$ bzw. $b_A = b_c + j b_s$, ist der physikalisch interessante Realteil des Produkts nach folgender Regel zu ermitteln:

$$a \cdot b = \frac{1}{2} \text{Re}_j \{ a_A b_A e^{-j(\alpha+\beta)} \} + \frac{1}{2} \text{Re}_j \{ a_A \bar{b}_A e^{-j(\alpha-\beta)} \} .$$

DIMENSIONSLOSE FAKTOREN

<u>Größe</u>	x	<u>Faktor</u>	=	<u>Dimensionslose Größe</u>
a		b^{-1}		ε
b		b^{-1}		1
B		b^{-1}		B
$f_{Vc}^{(n)}, f_{Vs}^{(n)}$		$(2\rho gb^2)^{-1}$		$\bar{f}_{Vc}^{(n)}, \bar{f}_{Vs}^{(n)}$
$F^{(n)}$		$(\omega b)^{-1}$		$\bar{F}^{(n)}$
$F_{oV}^{(2)}, F_V^{(n)}, F_{VA}^{(n)}$		$(2\rho gb^2)^{-1}$		$\bar{F}_{oV}^{(2)}, \bar{F}_V^{(n)}, \bar{F}_{VA}^{(n)}$
h		b^{-1}		h
$h_w^{(n)}$		b^{-1}		$\bar{h}_w^{(n)}$
L		b^{-1}		L
$M^{(2)}$		$(\omega b)^{-1}$		$\bar{M}^{(2)}$
$p_c^{(n)}, p_s^{(n)}$		$(\rho gb)^{-1}$		$\bar{p}_c^{(n)}, \bar{p}_s^{(n)}$
$p, p^{(n)}, p_A^{(n)}, p_o^{(n)}$		$(\rho gb)^{-1}$		$\bar{p}, \bar{p}^{(n)}, \bar{p}_A^{(n)}, \bar{p}_o^{(n)}$
s		b^{-1}		s
t		ω^1		$\omega \cdot t$
x, y, \bar{x}, \bar{y}		b^{-1}		x, y, \bar{x}, \bar{y}
$Y, Y_k^{(n)}$		b^{-1}		$\bar{Y}, \bar{Y}_k^{(n)}$
λ		$(\frac{1}{2}\rho\omega\pi b^2)^{-1}$		$\bar{\lambda}$
μ		$(\frac{1}{2}\rho\pi b^2)^{-1}$		$\bar{\mu}$
v		b^1		ξ_b
σ		$(\omega b)^{-1}$		σ
ω		ω^{-1}		1
$\phi_k^{(n)}, \phi_{kc}^{(n)}, \phi_{ks}^{(n)}$		$(\omega b^2)^{-1}$		$\bar{\phi}_k^{(n)}, \bar{\phi}_{kc}^{(n)}, \bar{\phi}_{ks}^{(n)}$

EINLEITUNG

Untersuchungen über die Hydrodynamik von zylindrischen Körpern, die an oder nahe der freien Oberfläche infolge einer äußeren Erregung schwingen, sind für die Behandlung der praktisch wichtigen Schiffsschwingungen durch Seegang von grundsätzlicher Bedeutung. Die in den letzten drei Jahrzehnten intensiv betriebene Forschung auf diesem Gebiet hatte vorwiegend *l i n e a r e* Schwingungsvorgänge zum Gegenstand, wobei die Bewegungsamplitude relativ zur betrachteten Körperbreite als verschwindend klein angenommen wurde. Ebenso wurde zumeist eine unendlich große Wassertiefe betrachtet. Das unter diesen Annahmen mathematisch formulierte potentialtheoretische Randwertproblem wurde von mehreren Autoren gründlich untersucht und nach verschiedenen Methoden mit zumeist sehr gutem Erfolg gelöst.

Durch die wachsenden Schiffsgrößen war es zunächst notwendig geworden, den Einfluß der endlich großen Wassertiefe auf das Bewegungsverhalten von Schiffen genauer zu untersuchen. Ebenso zeigte der Vergleich von experimentell ermittelten Ergebnissen mit solchen nach einer linearen Theorie, daß beim Vorhandensein einer endlich großen Bewegungsamplitude der Einfluß der bislang vernachlässigten nichtlinearen Glieder erheblich sein kann.

Letzteres wurde häufig bei Schwingungsvorgängen von meerestechnischen Konstruktionen festgestellt und mit halbempirischen Formeln relativ ungenau erfaßt. Ähnliches ist bei der Untersuchung des Bewegungsverhaltens von kleinen Wasserfahrzeugen zu berücksichtigen, wenn die Wellenhöhe des erregenden Seegangs relativ zur betrachteten Schiffsbreite nicht als verschwindend klein angenommen werden kann. Das gleiche gilt insbesondere für die Behandlung der Rollschwingungen von Schiffen mit "normalen" Abmessungen, wo neben den hydrostatischen auch die hydrodynamischen nichtlinearen Glieder erfaßt werden müssen, wenn die Rollamplitude nicht als verschwindend betrachtet werden kann.

In der vorliegenden Arbeit wird versucht, einerseits das hydrodynamische Problem eines an oder nahe der freien Wasseroberfläche einfach harmonisch und mit endlicher Amplitude vertikal schwingenden zylindrischen - zweidimensionalen - Körpers beliebiger Querschnittsform für den Fall endlicher Wassertiefe potentialtheoretisch zu lösen und darüber hinaus für den Fall unendlicher Wassertiefe numerische Ergebnisse der in Frage kommenden physikalischen Größen anzugeben.

Obwohl die Behandlung der restlichen zwei Freiheitsgrade in der Ebene, nämlich der Roll- und Querbewegungen, methodisch ähnlich verlaufen würde, wird im Rahmen dieser Arbeit darauf nicht eingegangen, da der Einfluß der Singularität im Schnittpunkt der Körperkontur mit der freien Oberfläche bei diesen Freiheitsgraden, insbesondere bei einer nichtlinearen Theorie, einige besondere Probleme aufwirft, die den beschriebenen Rahmen der Arbeit sprengen würden.

Die hier behandelte nichtlineare Glatzwasserschwingung eines zweidimensionalen Körpers infolge einer äußeren, einfach harmonischen Erregerkraft ist die Grundlage für die Berechnung der Bewegungen und Belastungen von schwingenden Körpern in schwerem Seegang. Zwar dürfte das bisher in diesem Zusammenhang zugrundegelegte Prinzip der linearen Superposition von Grundpotentialen ohne die gleichzeitige Definition eines neuen Übertragungsmodells nicht mehr haltbar sein. Liegt jedoch ein solches Übertragungsmodell vor, so lassen sich Parallelen zum linearen Fall ziehen.

Die moderne Entwicklung der Forschung auf dem Gebiet der linearen Schiffsschwingungen beginnt mit der potentialtheoretischen Arbeit von F. U r s e l l (1949), der das Problem des an der freien Oberfläche vertikal schwingenden Kreiszylinders bei unendlicher Wassertiefe nach der sog. M u l t i p o l m e t h o d e löste, indem er das Geschwindigkeitspotential als Summe der Wirkung unendlich vieler, am Kreismittelpunkt angeordneter, sog. M u l t i p o l e ansetzte; durch die Erfüllung der kinematischen Körperarrandbedingung in einer bestimmten Anzahl von Punkten entlang des Körpers hat er schließlich die unbekanntenen Koeffizienten des Reihenansatzes bestimmt.

Eine Weiterentwicklung der Methode von F. U r s e l l hat zunächst O. G r i m (1953) benutzt, um das gleiche Problem durch konforme Abbildung von zweiparametrischen L e w i s - Spanten auf den Kreis allgemeiner zu lösen. Später konnte die M u l t i p o l m e t h o d e , die die gleichzeitige Anwendung der Methode der konformen Abbildung voraussetzt, durch die Verwendung einer allgemeiner gültigen Transformationsformel, nämlich der T h e o d o r s e n - Transformation, weiter verfeinert werden. Obwohl die Behandlung bestimmter Spantformen, wie von Wulstspanten, Spanten mit Ecken, oder Schlingerkielen, oder Flossen, eine erhebliche Anzahl von Gliedern in der Theodorsen Transfor-

mationsformel-wenn überhaupt möglich-erfordert, so hat die M u l t i p o l m e t h o d e heute noch sehr viele Anhänger.

Eine Auswahl aus einer Vielzahl von Arbeiten auf dem Gebiet der linearen Schwingungen von Zylindern bei unendlicher Wassertiefe ist im Literaturverzeichnis - Gruppe I aufgeführt.

Nach der gleichen Methode haben zunächst Y. Y u und F. U r s e l l (1961) versucht, den Einfluß der endlichen Wassertiefe zu erfassen; deren numerische Ergebnisse waren jedoch für kleine Frequenzen falsch, wie H. K e i l (1974) nachgewiesen hat. Inzwischen liegen jedoch gesicherte Ergebnisse über den Einfluß der endlichen Wassertiefe vor; die interessantesten Arbeiten auf diesem Gebiet sind dem Literaturverzeichnis - Gruppe II zu entnehmen.

Ungeachtet der Erfolge der M u l t i p o l m e t h o d e , die eine i n d i r e k t e Problemlösung für b e s t i m m t e Spantformen liefert, hat die rasche Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung eine neue Methodengeneration eingeleitet, die d i r e k t e Problemlösungen für v o r g e g e b e n e Spantformen (fast) beliebiger Form gestatten.

Dazu gehören insbesondere die F i n i t e - E l e m e n t e - M e t h o d e n , wie sie etwa von K. B a i und R. Y e u n g (1974) praktisch vorgeführt wurden, und die sog. C l o s e - F i t - Methode, auf die im folgenden näher eingegangen wird.

Die im Zusammenhang mit Schiffsschwingungsproblemen zunächst von J. L e b r e t o n - A. M a r g n a c (1966) für endliche Wassertiefe und W. F r a n k (1967) für unendliche Wassertiefe praktisch angewandte C l o s e - F i t - Methode sieht eine Singularitätenbelegung der getauchten Zylinderoberfläche mit Quellen unbekannter Stärke vor; ähnlich wie bei der M u l t i p o l m e t h o d e wird die Singularitätenstärke nach der Erfüllung der kinematischen Körperparrandbedingung in bestimmten Körperrandmaßpunkten festgelegt; dazu muß eine F r e d h o l m s c h e Integralgleichung zweiter Art gelöst werden.

Die nach der C l o s e - F i t - Methode erzielten Ergebnisse waren bei einer genügenden Anzahl von entlang der Körperkontur angelegten Quellen im Vergleich zu denen nach der M u l t i p o l m e t h o d e zumindest genau so gut; für die der konformen Abbildung nur schwerlich zugänglichen Spantfor-

men, was etwa für wulstähnliche Spanten gilt, ergaben sich zum ersten Mal gesicherte theoretische Ergebnisse.

Ein Nachteil der bisher bekannten C l o s e - F i t - Methoden besteht jedoch darin, daß für gewisse, als Eigenfrequenzen des adjungierten inneren Problems erkannte Frequenzen, die Lösungsdarstellung nach den üblichen Integralgleichungsmethoden, wie etwa die E i n f a c h s c h i c h t - Potentialdarstellung, versagt. Obwohl F. J o h n (1950) dieses Problem erkannt hat und W. F r a n k (1967) für ein Rechteckprofil diese Eigenfrequenzen angegeben hat, ist bis heute kein theoretisch fundierter Ausweg bekannt geworden, der diesen Mißstand ändert. Man hat sich vor allem insofern zufrieden gegeben, als die erwähnten Irregularitäten zumeist jenseits des interessanten Anwendungsbereichs für Schiffsschwingungen liegen. Bei einem ähnlichen Diffraktionsproblem der Akustik hat jedoch H. S c h e n k (1968) eine befriedigende Lösung gefunden.

Nicht unerwähnt sollte eine von H. S ö d i n g (1973) praktisch ausgewertete Methode bleiben, die Singularitäten sowohl in der Körperachse als auch Multipole entlang der Körperkontur im Innern des Körpers vorsieht, wodurch auch Wulstspanten erfaßt werden können.

Nachdem das lineare Schiffsschwingungsproblem sowohl für unendliche als auch endliche Wassertiefe gründlich erforscht worden war, begann -in den letzten Jahren verstärkt- eine neue Phase der Forschung auf diesem Gebiet mit einigen Arbeiten über nichtlineare Schiffs-Wellenprobleme, die sowohl die Theorie des nichtlinearen Wellenwiderstandes, als auch die im Rahmen dieser Arbeit interessierenden nichtlinearen Schwingungen.

Die dabei angewandte Lösungstechnik beinhaltet eine S t ö - r u n g s r e c h n u n g , wodurch das formulierte nichtlineare Randwertproblem auf mehrere lineare Randwertprobleme zurückgeführt wird, deren Anzahl von der Ordnung der angewandten nichtlinearen Theorie abhängt und deren Lösung grundsätzlich nach den oben dargestellten Methoden der linearen Theorie möglich ist.

Diese neue Forschungsphase auf dem Gebiet der Schwingungen begann anscheinend mit der Arbeit von P. F o n t a n n e t (1961) über eine nichtlineare Wellentheorie von Wellenerzeugern, obwohl die Behandlung der Randbedingungen mit Hilfe der S t ö - r u n g s m e t h o d e schon viel früher durch die Arbeiten

von F. J o h n (1950) und J. S t o k e r (1957) bekannt wurde. Erst die Arbeit von F. O g i l v i e (1963) über das nichtlineare Wellenproblem eines nahe der freien Wasseroberfläche schwingenden Kreiszyinders nach der Störungsmethode in Verbindung mit Multipolentwicklungen gibt jedoch erste konkrete Hinweise über die nichtlinearen Effekte von endlichen Bewegungsamplituden an; dabei wurden nur die anfallenden zeitunabhängigen Potentialterme zweiter Ordnung ermittelt, die sich direkt durch die Potentialterme erster Ordnung ohne Lösung des Randwertproblems zweiter Ordnung angeben lassen.

Es folgten zwei Arbeiten von E. T u c k (1965) und N. S a l v e s e n (1966) über die nichtlinearen Freien-Oberflächen-Effekte durch die gleichförmige Umströmung von nahe der Wasseroberfläche getauchten Kreiszyindern bzw. tragflügelähnlichen Körpern.

Mit dem gleichzeitigen Erscheinen der Arbeiten von C. M. L e e (1966) und G. P a r i s s i s (1966) über nichtlineare Wellentheorien zweiter Ordnung für an der freien Oberfläche vertikal schwingenden Lewis- bzw. Kreisspanten wurden erstmalig ziemlich vollständige Entwicklungen in der Theorie, sowie numerische Ergebnisse für den nichtlinearen Fall von schwimmenden Spanten bei unendlicher Wassertiefe präsentiert.

Die von C. M. L e e angewandte Methode enthält eine Behandlung der Randbedingungen mit Hilfe der S t ö r u n g s - m e t h o d e und Lösung der sich ergebenden linearen Randwertprobleme nach der M u l t i p o l m e t h o d e. Dabei wird das sich ergebende lineare Randwertproblem für die zweite Ordnung durch eine einfache Modifizierung des zu bestimmenden Potentials zweiter Ordnung auf den gründlich erforschten Typ des linearen Randwertproblems erster Ordnung zurückgeführt. Einige der aufgestellten Randbedingungen von C. M. L e e (1968), nach Elimination der Zeit aus dem Geschwindigkeitspotential, sowie manche der numerischen Ergebnisse für Größen zweiter Ordnung waren falsch, sind aber z.T. bereits korrigiert worden. Die von C. M. L e e (1971) nach dem gleichen Verfahren durchgeführte Arbeit über ein ähnliches nichtlineare Wellenproblem infolge einer nicht einfach harmonischen Erregung zeigt unter anderem, daß die Einschränkung der hier vorliegenden Arbeit auf einfach harmonische Erregerfunktionen für

die angewandte Lösungstechnik der Störungsmethode entfallen kann.

Obwohl die Arbeit von G. P a r i s s i s (1966) auf Kreiszy-
linder beschränkt ist und die angewandte Methode der von
C. M. L e e ähnelt, da sie ebenfalls eine S t ö r u n g s -
r e c h n u n g und M u l t i p o l entwicklungen vorsieht,
so ist sie jedoch in bezug auf die Bestimmung des Potentials
zweiter Ordnung von der obigen Methode verschieden.

G. P a r i s s i s benutzt hierfür die Methode der G r e e n -
schen Funktionen und erhält das gesuchte Potential mit Hilfe
der G r e e n schen Sätze durch Integration längs der Problem-
berandung. Die hierbei anfallende F r e d h o l m sche Inte-
gralgleichung wird durch M u l t i p o l - Reihenentwicklungen
für den Kreiszyylinder näherungsweise gelöst.

Eine von C. H. K i m (1967) veröffentlichte Arbeit über den
Einfluß nichtlinearer Effekte auf die hydrodynamischen Kräfte
bei erzwungenen Tauchbewegungen prismatischer Körper, die etwa
gleichzeitig zu den obigen Arbeiten entstand, greift auf die
Multipolentwicklungen von O. G r i m zurück und liefert nur
für Dreieckspanten konkrete Ergebnisse; die dabei verwendeten
Potentialausdrücke sind jedoch nicht allgemeingültig.

Das hier vorliegende Problem bei unendlicher Wassertiefe wur-
de ebenfalls von R. P o t a s h (1970) untersucht, und zwar
erstmalig mit Hilfe einer C l o s e - F i t - Methode neben
einer Störungsrechnung, d.h. für - fast - beliebige Spantfor-
men und alle drei Freiheitsgrade der Ebene, also Tauch-, Roll-
und Querbewegungen einschließlich deren gegenseitiger Kopplung.
Die Ermittlung der Potentiale erster und zweiter Ordnung er-
folgt direkt durch numerische Lösung von mit Hilfe der
G r e e n schen Sätze aufgestellten inhomogenen F r e d h o l m -
schen Integralgleichungen zweiter Art. Die in dieser Arbeit ge-
lieferten numerischen Ergebnisse sind jedoch infolge des ver-
stärkten Einflusses der schon erwähnten I r r e g u l a r i -
t ä t e n zweifelhaft. Ebenso scheint die nach Elimination der
Zeit aus dem Geschwindigkeitspotential aufgestellte Freie-Ober-
flächen-Randbedingung nicht richtig zu sein.

Schließlich wurde in einem kurzen Bericht von H. S ö d i n g
(1976) eine Möglichkeit aufgezeigt, wonach sich relativ ein-
fach auf der Grundlage der G r e e n schen Sätze die g e -
s a m t e n hydrodynamischen Kraftwirkungen zweiter Ordnung
für alle drei Freiheitsgrade der Ebene und beliebige Spant-

formen berechnen lassen. Der Körper wird dabei durch eine ankommende Welle zum Schwingen gebracht. Der dort vorgenommene Vergleich der numerischen Ergebnisse bezüglich der Werte der hydrodynamischen Gesamtkraft eines tauchenden Kreiszyllinders mit den oben erwähnten Autoren offenbart eine gewisse Unsicherheit des derzeitigen Standes der Forschung auf diesem Gebiet, obwohl die Tendenzen von verschiedenen nichtlinearen Effekten klar erkennbar sind.

Sie bestehen hauptsächlich darin, daß ein zeitunabhängiger Druckterm zweiter Ordnung die Bewegung beeinflusst, was z.B. bei Tauchbewegungen ein Absinken der Schwingungsmittellage des Körpers zur Folge hat; ferner treten sämtliche nichtlinearen Effekte mit wachsender Schwingungsfrequenz verstärkt in Erscheinung. Beide Effekte sind aus der Modellversuchstechnik, wie etwa von J. V u g t s (1968) gezeigt wurde, wohlbekannte Phänomene. Im Literaturverzeichnis - Gruppe III - sind weitere interessante Arbeiten im Zusammenhang mit nichtlinearen Freie-Oberflächen-Problemen aufgeführt.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einige der erwähnten Unsicherheiten auf diesem Gebiet auszuräumen und den mathematischen Hintergrund richtig und ergänzend zu durchleuchten. Durch die Anwendung einer C l o s e - F i t - Methode bei der Lösung der anfallenden Randwertprobleme werden nahezu beliebig geformte Spanten erfaßt, was für die praktische Anwendung der vorliegenden Theorie von großer Bedeutung ist. Der Einfluß endlicher Wassertiefe wird theoretisch berücksichtigt. Das erstellte EDV-Rechenprogramm enthält jedoch zunächst nur den Fall unendlicher Wassertiefe. Einige der erzielten numerischen Ergebnisse sind graphisch dargestellt und werden mit bekannten Resultaten anderer Autoren verglichen.

Das beim Verfassen dieser Arbeit zugrundegelegte Konzept setzt die in den Anhängen aufgeführten Gedankengänge voraus. Diese wurden auf der Basis der Grundgleichungen der Potentialtheorie und der mathematischen Analysis als in sich selbständige Einheiten zusammengefaßt aufgeführt, um den Hauptteil dieser Arbeit zu entlasten. Deswegen wird im Laufe des folgenden Textes oft auf die Anhänge und die dort aufgestellten Formelausdrücke hingewiesen.

1.

PROBLEMFORMULIERUNG

1.1

A n n a h m e n

Es werden zylindrische Körper betrachtet, deren Spantform topologisch ein einfach zusammenhängendes Gebiet beschreibt und analytisch oder durch Aufmaßpunkte vorgegeben sein kann.

Bei den im Anhang B.4 angegebenen Existenzbeweisen von Lösungen wird darüber hinaus oft die stetige Differenzierbarkeit der Körperkontur vorausgesetzt. Ferner werden zunächst nur bezüglich der Vertikalachse symmetrische, also schiffsähnliche Spannten betrachtet, obwohl dies für das angewandte Lösungsverfahren nicht zwingend ist.

Der zu untersuchende Zylinder soll vertikal an oder dicht unter der freien Oberfläche einer vor der Störung in Ruhe befindlichen Flüssigkeit endlicher Wassertiefe schwingen. Die Körperbewegung soll einfach harmonisch und mit endlicher, jedoch relativ zur Körperbreite kleiner, Amplitude vor sich gehen. Es wird vorausgesetzt, daß die Bewegung genügend lang aufrechterhalten wurde, so daß die Anfangsstörungen der Flüssigkeit abgeklungen sind und eine stationäre Flüssigkeitsbewegung sich eingestellt hat, die durch beiderseits des Körpers bis zum Unendlichen abgehende fortschreitende Schwerewellen gekennzeichnet ist.

Das sich ergebende hydrodynamische Wellenproblem kann zweidimensional betrachtet werden, indem man sich auf einen beliebigen Schnitt senkrecht zur Erzeugenden des Zylinders beschränkt.

Unter der Voraussetzung, daß die Flüssigkeit als reibungsfrei betrachtet werden kann, was bei dem vorliegenden Schwingungsvorgang im Wasser annähernd angenommen werden darf, läßt sich die entstandene Strömung durch die E u l e r schen Bewegungsgleichungen beschreiben. Da die Flüssigkeit als inkompressibel, homogen und reibungsfrei behandelt werden darf und die Bewegung unter alleiniger Wirkung der Schwerkraft - neben der äußeren Erregerkraft - rotationsfrei stattfindet, besitzt die Bewegung unter Vernachlässigung von Oberflächenspannungseffekten ein sie beschreibendes Geschwindigkeitspotential Φ , das eine skalare Funktion des Ortes und der Zeit darstellt. Durch Einsetzen von $\Phi(x, y; t)$ in die Kontinuitätsgleichung ergibt

sich die im gesamten Flüssigkeitsbereich außerhalb des Zylinders gültige Potentialgleichung

$$\Delta \Phi(x, y; t) = 0, \quad (1)$$

wobei $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ den Laplace'schen Differentialoperator bedeutet.

Die hier getroffenen Annahmen betreffen die Formulierung des Randwertproblems und der daraus folgenden Integralgleichungen.

Bei der numerischen Lösung der in Frage kommenden Integralgleichungen sind zusätzliche Annahmen erforderlich.

1.2

G e o m e t r i e

Zur Beschreibung der sich unter den getroffenen Annahmen ergebenden Bewegung wird zusätzlich zum ortsfesten kartesischen Rechtssystem $o - x - y$ ein ihm ähnliches, jedoch mit dem einfach harmonisch schwingenden Körper mitbewegtes Koordinatensystem $\bar{o} - \bar{x} - \bar{y}$ eingeführt. Die x -Achse verläuft längs der ungestörten Ruhewasserlinie, die gleichzeitig als Schwingungsmittellage definiert wird; die y -Achse ist vertikal positiv nach oben gerichtet.

Die Körperkontur S_0 sei punktweise durch kartesische Koordinaten im schiffsfesten Koordinatensystem $\bar{o} - \bar{x} - \bar{y}$ vorgegeben. Die nach oben gerichtete \bar{y} -Achse bildet die Körpersymmetrieachse, während die horizontale \bar{x} -Achse durch den schiffsfesten Koordinatenursprung \bar{o} , der als Schnittpunkt der Körpersymmetrieachse mit der Schwimmwasserlinie im Ruhezustand definiert wird, verläuft.

Es sei B die Breite der Schwimmwasserlinie, T der entsprechende Tiefgang, S_0 die Bogenlänge der getauchten Körperkontur im Gleichgewichtszustand und S die entsprechende Länge der augenblicklich getauchten Kontur; ferner sei die entlang S_0 verlaufende Bogenlänge s , die nach außen gerichtete Einheitsnormale \vec{n} und die entsprechende Einheitstangente \vec{e} eingeführt. Schließlich wird in der Wassertiefe $y = -h$ ein fester, gerader Boden angenommen. (Abb. 1)

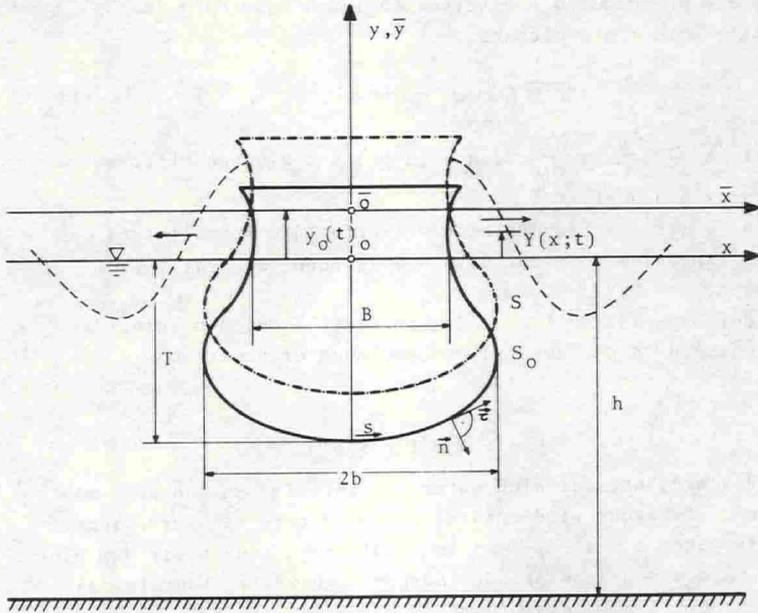


Abb. 1

Unter Berücksichtigung einer einfach harmonischen, erzwungenen Bewegung in Vertikalrichtung der Form

$$y_0(t) = a \sin \omega t, \quad (2)$$

die komplex als der negative Imaginärteil von (a reell)

$$y_0(t) = -\text{Im}_3 \{ a e^{-j\omega t} \} \hat{=} a e^{-j\omega t} \quad (2)'$$

geschrieben werden kann, wobei a die Schwingungsamplitude und ω die entsprechende Kreisfrequenz bedeuten, lassen sich folgende Beziehungen zwischen den Körperkoordinaten in beiden Koordinatensystemen aufstellen:

$$\begin{aligned} x(s; t) &= \bar{x}(s) \\ y(s; t) &= \bar{y}(s) + y_0(t), \end{aligned} \quad (3)$$

mit $(x, y) \in S, (\bar{x}, \bar{y}) \in S_0$.

Schließlich wird die Erhebung der infolge der Bewegung entstehenden Wellen über dem Ruhewasserspiegel außerhalb des Körpers

$$y = Y(x; t) \quad (4)$$

eingeführt.

Der Flüssigkeitsbereich wird damit offenbar durch folgende definierte Ränder begrenzt: die augenblicklich getauchte Körperkontur S , die freie Wasseroberfläche beiderseits des Körpers bis zum Unendlichen, mit $y = Y(x, t)$, außerhalb des Körpers, die feste Bodenlinie $y = -h$ sowie zwei vertikale Kontrolllinien im positiven und negativen Unendlichen. Dabei ist die freie Oberfläche (4) zunächst unbekannt und stellt einen sogenannten **f r e i e n** Rand dar.

1.3 R a n d b e d i n g u n g e n

Es sei

$$H(x, y; t) = y - Y(x; t) = 0 \quad (5)$$

die implizite Darstellung der freien Oberfläche.

Aus der physikalischen Forderung, daß kein Flüssigkeitsteilchen die freie Oberfläche verlassen darf, folgt mathematisch, daß das totale Differential von (5) gleich Null sein muß

$$\frac{dH}{dt} = H_t + H_x u + H_y v = 0,$$

oder unter Berücksichtigung des Geschwindigkeitspotentials Φ , mit den Geschwindigkeitskomponenten in x bzw. y Richtung

$$u = \Phi_x, \quad v = \Phi_y,$$

ergibt sich für $y = Y(x, t)$ außerhalb des Körpers:

$$Y_t(x; t) + \Phi_x(x, Y(x, t); t) Y_x - \Phi_y = 0. \quad (6)$$

Gleichung (6) stellt die von Φ zu erfüllende kinematische Randbedingung an der freien Oberfläche dar.

Unter der Annahme eines konstanten atmosphärischen Druckes, mit $p_a = 0$, ergibt sich durch Anwendung der **B e r n o u l l i**-schen Gleichung an der freien Oberfläche $y = Y(x, t)$ außerhalb des Körpers:

$$\Phi_t(x, Y(x, t); t) + g Y + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 = 0, \quad (7)$$

mit dem ∇ -Nablaoperator, die von Φ zu erfüllende dynamische Randbedingung an der freien Oberfläche.

Aus (6) und (7) ergibt sich durch Substitution des Wellenprofils folgende kombinierte Freie-Oberflächen-Randbedingung (vgl. (A. 1.10)):

$$\begin{aligned} \Phi_{tt}(x, Y(x;t), t) + g\Phi_y = -2(\Phi_x\Phi_{tx} + \Phi_y\Phi_{ty}) - \\ - \Phi_x^2\Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy} - \Phi_y^2\Phi_{yy}. \end{aligned} \quad (8)$$

Die kinematische Randbedingung entlang der Körperkontur S besagt, daß die Strömungsgeschwindigkeit normal zur festen Körperkontur gleich der Normalkomponente der Körpergeschwindigkeit V_n sein muß, oder für $(x, y) \in S$

$$\Phi_n \equiv (\vec{n} \cdot \nabla) \Phi(x, y, t) = V_n, \quad (9)$$

mit

$$V_n = -\dot{y}_0(t) \cdot \vec{x}', \quad (10)$$

wobei der Strich eine Differentiation nach der Bogengröße s , der Punkt eine entsprechende Differentiation nach der Zeit t und $(\vec{n} \cdot \nabla)$ die Ableitung in Richtung der äußeren Normale bedeuten (s. Abb. 1).

Bei einer Beschränkung der Untersuchung auf bezüglich der \bar{y} -Achse symmetrische Körper und Bewegungen ergibt sich für Φ noch folgende Symmetriebedingung:

$$\Phi(x, y, t) = \Phi(-x, y, t), \quad (11)$$

oder für die Geschwindigkeit in x -Richtung

$$\Phi_x(0, y, t) = 0. \quad (11)'$$

Da durch den geraden festen Boden nichts hindurchfließen kann, muß dort die vertikale Geschwindigkeitskomponente verschwinden, oder

$$\Phi_y(x, -h, t) = 0. \quad (12)$$

Schließlich muß im Unendlichen in x-Richtung beiderseits des Körpers die sog. S o m m e r f e l d sche Ausstrahlungsbedingung erfüllt werden, da es sich um einen bis zum Unendlichen reichenden Schwingungsvorgang infolge von im Endlichen sich befindenden Quellen handelt [78]. Das bedeutet physikalisch, daß im Unendlichen in x-Richtung beiderseits des Körpers abgehende, regelmäßige, ebene Schwerewellen die Strömung charakterisieren und mathematisch, daß die Eindeutigkeit des soeben beschriebenen Schwingungsproblems garantiert wird. (vgl. Anhang C.1).

1.4 S t ö r u n g s r e c h n u n g

Die Störungsrechnung nimmt ihren Ausgang von einer auf der Basis eines geeignet definierten kleinen Störungsparameters entwickelten Schar von Randwertaufgaben, die die zu lösende sogenannte g e s t ö r t e Aufgabe sowie die sogenannte u n g e s t ö r t e Aufgabe enthält, deren Lösung existiert und als schon bekannt vorausgesetzt wird. Sie ist ein unentbehrliches Linearisierungsverfahren für die Behandlung von nichtlinearen Randwertaufgaben, die nur in einigen wenigen Sonderfällen "exakt" lösbar sind [63], [79].

Das vorliegende zeitabhängige Randwertproblem, bestehend aus der Potentialgleichung (1) und den Randbedingungen (8) bis (12) einschließlich der S o m m e r f e l d schen Ausstrahlungsbedingung, enthält an der freien Oberfläche einen mathematisch f r e i e n Rand, der zusätzlich durch eine nichtlineare Randbedingung gekennzeichnet ist. Diese Schwierigkeit kann beim ähnlich gestellten Problem f r e i e r steilen Wellen nach einer von L e v i - C i v i t a eingeführten Methode durch konforme Abbildung behandelt werden [54]. Im folgenden wird jedoch die von A. P e t e r s und J. S t o k e r [55] geprägte S t ö r u n g s m e t h o d e angewendet.

Man nimmt zuerst an, daß die gesuchte Lösung nur wenig von der schon bekannten Lösung der u n g e s t ö r t e n Aufgabe, hier die Null-Lösung, abweicht. Mathematisch kann das wie folgt ausgedrückt werden:

Es sei $\Phi^{(0)}$ die bekannte und exakte Null-Lösung des Problems; Φ sei die gesuchte Problemlösung, die sich vom bekannten $\Phi^{(0)}$ durch einen kleinen Parameter ϵ unterscheidet.

Nun soll gelten:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(x, y, t; \varepsilon) = \Phi^{(0)}(x, y, t). \quad (13)$$

Bei einer geeigneten Wahl des kleinen Parameters ε muß berücksichtigt werden, daß es sich um einen dimensionslosen physikalischen Parameter handelt, mit der Eigenschaft, daß für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Störung der Grundlösung $\Phi^{(0)}$ nach (13) verschwindet. Er muß also den jeweiligen geometrischen Verhältnissen angepaßt werden.

Da bei dem vorliegenden Problem angenommen wurde, daß die Schwingungsamplitude relativ klein zur Körperbreite ist und alle abhängigen Variablen von diesen Größen abhängen, wird ε als das Verhältnis der Bewegungsamplitude a zur maximalen Halbbreite des Zylinders b

$$\varepsilon = \frac{a}{b} \quad (14)$$

angesetzt. Für $a \rightarrow 0$, d.h. für verschwindende Bewegung, ergibt sich $\varepsilon \rightarrow 0$, d.h. verschwindende Störung der Flüssigkeit, wie oben gefordert wurde.

Es läßt sich feststellen, daß der eben definierte kleine Parameter ε für das vorliegende Problem der einzig mögliche ist, da keine andere physikalische Größe die in (13) aufgestellte Bedingung erfüllt.

Damit wird im folgenden angenommen werden, daß das gesuchte Geschwindigkeitspotential Φ nach dem kleinen Parameter ε in Form eines Störungsansatzes entwickelt werden kann

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \Phi^{(n)}(x, y, t), \quad (15)$$

wobei $\Phi^{(0)} = 0$ vorausgesetzt wurde [57].

Ähnliche Ansätze lassen sich für alle in Frage kommenden abhängigen Größen, wie etwa für das Wellenprofil $Y(x; t)$ oder den Flüssigkeitsdruck $p(x, y, t)$, aufstellen, wie später gezeigt wird.

Die Konvergenzfrage von (15), im Zusammenhang mit (13), insbesondere die gleichmäßige Konvergenz, bleibt zunächst offen.

Es wird jedoch angenommen, daß bereits eine Theorie zweiter Ordnung ($N = 2$) eine brauchbare Näherungslösung für Φ liefert. Die Ergebnisse werden umso günstiger ausfallen, je benachbarter ungestörte und gestörte Aufgabe sind, d.h. je kleiner ε wird. Beim ähnlich gelagerten Wellenproblem der freien fortschreitenden Wellen sind Konvergenzbeweise von Levi-Civita angestellt und später durch Rechnungen von Theorien höherer Ordnungen (z.B. $N = 5$) von mehreren Autoren bestätigt worden [54].

Da die erzwungene Bewegung zeitlich einfach harmonisch vorausgesetzt wurde, kann im folgenden angenommen werden, daß die sich ergebende Störung der idealen Flüssigkeit und der entstandene Strömungszustand zeitlich periodisch sind. Aufgrund der zu berücksichtigenden Nichtlinearitäten des Problems sind sie jedoch i.allg. nicht einfach harmonisch. Die Verbindung zwischen Ursache und Wirkung soll durch das folgende nichtlineare Übertragungsmodell N -ter Ordnung beschrieben werden können

$$Z = \sum_{n=0}^N A_n X^n, \quad (16)$$

wobei X ein Input-Signal, Z das entsprechende Output-Signal und A_n konstante Faktoren bedeuten.

Unter Berücksichtigung von (16) in Verbindung mit einem einfach harmonischen Input-Zeitsignal und von Φ als das entsprechende Output-Signal ergibt sich aus (15)

$$\Phi(x, y, t; \varepsilon) = \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^k \varepsilon^n \varphi_k^{(n)}(x, y) e^{-i k \omega t}, \quad (17)$$

wobei die $\varphi_k^{(n)}$ zeitunabhängige Teilpotentiale in komplexer Form

$$\varphi_k^{(n)} = \varphi_{kc}^{(n)} + i \varphi_{ks}^{(n)}, \quad k \geq 1 \quad (18)$$

sind. Da das Geschwindigkeitspotential Φ in (17) eine reelle Größe ist, bedeutet das, daß nur die Realteile auf der rechten Seite von (17) einen physikalischen Sinn besitzen.

Im folgenden wird vereinbart, daß, sobald das Produkt von zwei sog. *zeit* komplexen Funktionen auftritt - im Unterschied zu den später eingeführten sog. *orts* komplexen Funktionen

mit $i = \sqrt{-1}$ - nur das Produkt der Realteile berücksichtigt wird (vgl. S. IX).

Entsprechend zum Ausdruck (17) für Φ ergibt sich unter Berücksichtigung des gleichen Übertragungsmodells (16) folgende Entwicklung für das Wellenprofil $Y(x;t)$

$$Y(x;t;\varepsilon) = \sum_{\ell=1}^L \sum_{m=0}^M \varepsilon^\ell Y_m^{(\ell)}(x;t) \quad (19)$$

mit

$$Y_m^{(\ell)}(x;t) = \gamma_m^{(\ell)}(x) e^{-j m \omega t}$$

und

$$\gamma_m^{(\ell)} = \gamma_{mc}^{(\ell)} + j \gamma_{ms}^{(\ell)}, \quad m \geq 1.$$

Mit Hilfe der Störungsansätze für Φ (17) bzw. Y (19) läßt sich das unter 1.3 im Zusammenhang mit der Laplace'schen Gleichung (1) aufgestellte nichtlineare Zeit-Randwertproblem mit z.T. freier Berandung linearisieren und in mehrere - für die Theorie zweiter Ordnung in drei - Randwertprobleme mit festem Rand umwandeln. Dabei werden beim Einsetzen von Φ (17) in die Randbedingungen der freien Oberfläche (8) und der Körperkontur (9) die Teilpotentiale $\varphi_k^{(n)}$ in Taylor-Reihen bezüglich der ungestörten und bekannten Lage dieser Ränder entwickelt, vorausgesetzt, daß sie sich dort analytisch verhalten, was aus der Erfüllung der Laplace'schen Gleichung folgt.

Durch Ordnen der sich ergebenden Ausdrücke nach der gleichen Ordnung bezüglich ε sowie der gleichen zeitharmonischen Abhängigkeit ergeben sich bei Berücksichtigung von Gliedern bis $O(\varepsilon^2)$ drei lineare Randwertprobleme, wie im Anhang A genauer gezeigt wird.

Gleichzeitig läßt sich nachweisen (vgl. Anhang A.3), daß die Potentialausdrücke $\varphi_k^{(n)}$ für $n \neq k \geq 0$, mit Ausnahme von $\varphi_0^{(2)}$ für die zweite Ordnung, nur triviale Lösungen liefern, weshalb sie auch vernachlässigt werden können. Damit vereinfacht sich der Störungsansatz (17) für Φ zu (vgl. A.3.6):

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t; \varepsilon) = & \varepsilon \varphi_1^{(1)}(x, y) e^{-j\omega t} + \\ & + \varepsilon^2 (\varphi_0^{(2)} + \varphi_2^{(2)} e^{-j2\omega t}) + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (20)$$

Entsprechendes gilt für alle in Frage kommenden Störungsansätze für die verschiedenen von Φ abhängigen Größen.

1.5 Randwertprobleme

Die nach der Störungsrechnung sich ergebenden linearen Randwertprobleme für die verschiedenen Teilpotentiale $\varphi_k^{(n)}$, die zur vollständigen Bestimmung von Φ (20) beitragen, werden im folgenden unter Berücksichtigung von im Anhang A abgeleiteten Formelausdrücken zusammengefaßt aufgestellt. Zur Abkürzung werden folgende Differentialoperatoren an den Rändern (Abb. B.1) verwendet:

Freie - Oberflächen - Differentialoperator

$$\mathcal{F}(v) \{F(x, y)\} \equiv (F_y - v F) \Big|_{(x, y) \in S_F}, \quad (21)$$

Körperoberflächen - Differentialoperator

$$\mathcal{B} \{F(x, y)\} \equiv (\bar{y}' F_x - \bar{x}' F_y) \Big|_{(x, y) \in S_0}, \quad (22)$$

Ausstrahlungs - Differentialoperator

$$\mathcal{R}(v_0) \{F(x, y)\} \equiv \operatorname{Re}_z \{F_x + j v_0 F\} \Big|_{(x, y) \in \begin{cases} S_R \\ S_L \end{cases}}, \quad (23)$$

mit der Wellenzahl der Erregerfunktion v

$$v = \frac{\omega^2}{g}, \quad (24)$$

und der Wellenzahl der abgestrahlten Wellen im Unendlichen v_0 , die sich aus

$$v_0 \operatorname{th}(v_0 h) = v \quad (25)$$

ergibt.

Beim Grenzübergang $h \rightarrow \infty$ ergibt sich:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \nu_0 = \nu. \quad (25)$$

LINEARES RANDWERTPROBLEM ERSTER ORDNUNG

$\varphi_1^{(1)}$ - Problem

$$\Delta \varphi_1^{(1)}(x, y) = 0 \quad (26)$$

für $(x, y) \in D$,

$$\mathcal{B}\{\varphi_1^{(1)}(x, y)\} = -\omega b \bar{x}' \quad (27)$$

für $(x, y) \in S_0$,

$$\mathcal{F}(\nu)\{\varphi_1^{(1)}(x, y)\} = 0 \quad (28)$$

für $(x, y) \in S_F$,

$$\varphi_{1,y}^{(1)}(x, y) = 0 \quad (29)$$

für $(x, y) \in S_B$,

$$\mathcal{R}(\nu_0)\{\varphi_1^{(1)}(x, y)\} = 0 \quad (30)$$

für $(x, y) \in \begin{cases} S_R \\ S_L \end{cases}$,

$$\varphi_1^{(1)}(x, y) = \varphi_1^{(1)}(-x, y) \quad (31)$$

(für symmetrische Spantformen).

LINEARE RANDWERTPROBLEME ZWEITER ORDNUNG

$\varphi_2^{(2)}$ - Problem

$$\Delta \varphi_2^{(2)}(x, y) = 0 \quad (32)$$

für $(x, y) \in D$,

$$B \{ \varphi_2^{(2)}(x, y) \} = -j \frac{b}{2} B \{ \varphi_{1y}^{(1)} \} \quad (33)$$

für $(x, y) \in S_0$,

$$\mathcal{F}(4v) \{ \varphi_2^{(2)}(x, y) \} = j \frac{\omega}{2g} [2 \{ \varphi_{1x}^{(2)} + \varphi_{1y}^{(2)} \} - \varphi_1^{(1)} \mathcal{F}(v) \{ \varphi_{1y}^{(1)} \}] \quad (34)$$

für $(x, y) \in S_F$,

$$\varphi_{2y}^{(2)}(x, y) = 0 \quad (35)$$

für $(x, y) \in S_B$,

$$R(4v_0) \{ \varphi_2^{(2)}(x, y) \} = 0 \quad (36)$$

für $(x, y) \in \begin{cases} S_R \\ S_L \end{cases}$,

$$\varphi_2^{(2)}(x, y) = \varphi_2^{(2)}(-x, y) \quad (37)$$

(für symmetrische Spantformen).

$\varphi_0^{(2)}$ - Problem

$$\Delta \varphi_0^{(2)}(x, y) = 0 \quad (38)$$

für $(x, y) \in D$,

$$B \{ \varphi_0^{(2)}(x, y) \} = j \frac{b}{2} B \{ \varphi_{1y}^{(1)} \} \quad (39)$$

für $(x, y) \in S_0$,

$$\varphi_{0y}^{(2)}(x, y) = \frac{\omega}{2g} \text{Im}_j \{ \varphi_1^{(1)} \mathcal{F}(v) \{ \bar{\varphi}_{1y}^{(1)} \} \} \quad (40)$$

für $(x, y) \in S_F$,

$$\varphi_{0y}^{(2)}(x, y) = 0 \quad (41)$$

für $(x, y) \in S_B$,

$$\varphi_0^{(2)}(x, y) = \varphi_0^{(2)}(-x, y) \quad (42)$$

(für symmetrische Spantformen),

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{-h}^0 \varphi_{0x}^{(2)}(x, y) dy = \text{konst} \quad (43)$$

Wie im Anhang A.3 dargelegt wurde, müssen im Unendlichen für die Potentialausdrücke $\varphi_0^{(n)}$, insbesondere für $\varphi_0^{(2)}$, die alle keine Potentiallösungen von Diffraktionsproblemen sind, besondere Randbedingungen formuliert werden. Für das bei der zweiten Ordnung nichttriviale $\varphi_0^{(2)}$ -Problem wird zunächst die Erfüllung einer allgemeinen Endlichkeitsbedingung im Unendlichen gefordert.

Nun tritt bei einer nichtlinearen - $N \geq 2$ - Wellentheorie von fortschreitenden Schwerewellen endlicher Amplitude, wie sie hier beiderseits des Körpers bis zum Unendlichen ausgestrahlt werden, das Phänomen eines in Wellenfortschrittsrichtung mit konstanter Geschwindigkeit stattfindenden Massentransports ein. Es läßt sich nachweisen [37], daß die Lösung des $\varphi_0^{(2)}$ -Problems eine Senkensingularität enthält, deren Stärke nach (43) zeitunabhängig ist und der durch die Wellen transportierten Flüssigkeitsmasse entspricht, so daß das Massenerhaltungsprinzip seine Gültigkeit behält. Auf die Berechnung des Massentransports wird nicht näher eingegangen, sondern auf eine frühere Arbeit des Autors [54] verwiesen.

Wie man leicht durch Einsetzen von \mathcal{P} (20) in die B e r n o u l l i s c h e Gleichung erkennen kann, ist der Einfluß von $\varphi_0^{(2)}$ auf die entsprechenden Drücke sowie auf das sich ergebende Wellenprofil von v i e r t e r Ordnung bezüglich ε . Da sich die vorliegende Arbeit auf die Theorie zweiter Ordnung beschränkt, wird im folgenden das $\varphi_0^{(2)}$ -Problem nicht näher betrachtet.

Die aufgestellten linearen Randwertprobleme für das $\varphi_1^{(1)}$ - (Gl.(26)-(31)) bzw. $\varphi_2^{(2)}$ - (Gl.(32)-(37)) Potential sind sog. R o b i n s c h e-Probleme, deren Randbedingungen auf Teilen des Randes durch inhomogene bzw. homogene N e u m a n n s c h e oder R o b i n s c h e (gemischte) Beziehungen charakterisiert sind. Ein Vergleich des $\varphi_1^{(1)}$ mit dem entsprechenden $\varphi_2^{(2)}$ -Problem zeigt, daß der zu lösende Randwerttyp genau der gleiche ist, mit Ausnahme der homogenen Freie-Oberflächen-Randbedingung (28) für das $\varphi_1^{(1)}$ -Problem im Vergleich zu der entsprechenden Bedingung (34) des $\varphi_2^{(2)}$ -Problems.

Insofern läßt sich das $\varphi_1^{(1)}$ -Problem als Spezialfall des $\varphi_2^{(2)}$ -Problems behandeln, wenn für das letztere ein Lösungsverfahren vorliegt. Umgekehrt kann durch eine leichte Modifizierung des $\varphi_2^{(2)}$ -Potentials das $\varphi_2^{(2)}$ -Problem auf den $\varphi_1^{(1)}$ -Typ und ein zusätzliches Randwertproblem zurückgeführt werden, wobei hierfür bewährte Lösungsmethoden vorliegen.

Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von Lösungen der $\varphi_1^{(1)}$ - bzw. $\varphi_2^{(2)}$ -Probleme, sowie verschiedene Möglichkeiten zur Lösung der Randwertprobleme durch Integralgleichungen sind im Anhang B unter Zuhilfenahme der G r e e n'schen Sätze der Potentialtheorie ausführlich behandelt worden.

2.

PROBLEMLÖSUNG

2.1 Integralgleichungen

Durch die Zurückführung der in 1.5 beschriebenen Randwertprobleme zur Bestimmung der $\varphi_1^{(1)}$ bzw. $\varphi_2^{(2)}$ Teilpotentiale mit Hilfe der Green'schen Sätze der Potentialtheorie auf Integralgleichungen lassen sich sowohl Existenz- und Eindeutigkeitsfragen der Lösungen behandeln, wie im Anhang B.4 gezeigt wird, als auch die gesuchten Potentiale durch Lösung der sich ergebenden Integralgleichungen bestimmen. Die Aufstellung der Integralgleichungen ist vom Auffinden geeigneter Green'scher Funktionen abhängig, die zu den Potentialrandwertproblemen äquivalente, jedoch einfachere Randwertprobleme erfüllen müssen, wie im Anhang B.1 gezeigt wird. Die Bestimmung der Green'schen Funktionen für unendliche und endliche Wassertiefe erfolgt im Anhang C.

Da es verschiedene Möglichkeiten für die Aufstellung von lösbaren Integralgleichungen gibt, wie im Anhang B.3 vorgeführt wird, werden im folgenden nur die später numerisch ausgewerteten Integralgleichungen angegeben. Im Anhang B.5 wird darüber hinaus eine sog. kombinierte Integralgleichungsmethode vorgestellt, deren Name einen Hinweis auf die gleichzeitige Berücksichtigung des inneren und äußeren Potentialproblems geben soll und die Eigenfrequenzen des adjungierten inneren Problems, in der Literatur als Irregularitäten bekannt, auszuschalten vermag. Ebenso ist im Anhang B.2 (vgl. Abb. B.3) eine Möglichkeit zur Zurückführung des $\varphi_2^{(2)}$ -Randwertproblems auf ein dem $\varphi_1^{(1)}$ -Problem ähnliches sowie ein weiteres mit bekannter Lösung aufgezeigt.

Die zu den in 1.5 dargestellten Randwertproblemen für $\varphi_1^{(1)}$ bzw. $\varphi_2^{(2)}$ passende Green'sche Funktion wird durch das komplexe Potential in $P(x,y)$ einer in der unteren Halbebene im Punkt $Q(\xi, \eta)$ pulsierenden Einheitsquelle ausgedrückt, wobei die Schwingungsfrequenz für das $\varphi_2^{(2)}$ -Problem doppelt so groß wie für das $\varphi_1^{(1)}$ -Problem ist; entsprechend ist bei der Green'schen Funktion erster Ordnung die Wellenzahl der Erregung ν bzw. der ausgestrahlten Wellen ν_0 durch 4ν bzw. $4\nu_0$ zu ersetzen, um die Green'sche Funktion zweiter

Ordnung zu erhalten (vgl. Anhang B.1)

Nach der im Anhang C abgeleiteten Formel (C.1.24) nimmt die Green'sche Funktion bei endlicher Wassertiefe h folgende Form an

$$G(x, y, \xi, \eta) = G_c^{(h)} + j G_s^{(h)}, \quad (44)$$

mit

$$G_c^{(h)} = \log R + \log R_1 - 2 \log h - 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{(k+v) e^{-kh} \operatorname{ch} k(\eta+h) \operatorname{ch} k(\eta+h) \cos k(x-\xi)}{k(k \operatorname{sh} kh - v \operatorname{ch} kh)} + \frac{e^{-kh}}{k} \right] dk \quad (45)$$

$$G_s^{(h)} = -2\pi \frac{(v+v_0) e^{-v_0 h} \operatorname{sh} v_0 h \operatorname{ch} v_0(\eta+h) \operatorname{ch} v_0(\eta+h) \cos v_0(x-\xi)}{v_0(vh + \operatorname{sh}^2 v_0 h)},$$

wobei die Radien (Abb. C.1)

$$R = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2} \\ R_1 = [(x-\xi)^2 + (y+\eta+2h)^2]^{1/2}, \quad (46)$$

und v bzw. v_0 in (24) bzw. (25) eingeführt wurden.

Der im Rahmen dieser Arbeit numerisch ausgewertete Ausdruck für die Green'sche Funktion bei unendlicher Wassertiefe ($h \rightarrow \infty$) ergibt sich nach (C.2.5) zu:

$$G(x, y, \xi, \eta) = G_c + j G_s, \quad (47)$$

mit

$$G_c = \log R - \int_0^{\infty} \left[\frac{(k+v)}{k(k-v)} e^{k(y+\eta)} \cos k(x-\xi) + \frac{e^{-k}}{k} \right] dk$$

$$G_s = -2\pi e^{v(y+\eta)} \cos v(x-\xi), \quad (48)$$

oder nach Einführung der Ortskomplexen Variablen (vgl. (C.2.9))

$$z = (x + iy)$$

$$\zeta = (\xi + i\eta), \bar{\zeta} = (\xi - i\eta), \quad (49)$$

$$G(z, \zeta) = \operatorname{Re}_1 \{ \log(z - \zeta) - \log(z - \bar{\zeta}) + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z - \bar{\zeta})}}{\nu - k} dk - j 2\pi e^{-i\nu(z - \bar{\zeta})} \} \quad (50)$$

Die Green'sche Funktion (50) wird als harmonische Funktion der Zeit im Zeit komplexen Raum wie folgt dargestellt:

$$G^*(z, \zeta; t) = \operatorname{Re}_3 \{ (G_c + j G_s) e^{-j\omega t} \}$$

$$= \operatorname{Re}_3 \{ G \cdot e^{-j\omega t} \}, \quad (51)$$

mit G_c bzw. G_s nach (48) und G nach (50).

Die vorstehenden Formeln für die Green'sche Funktion gelten für eine Quellsingularität in der unteren Halbebene ($\eta < 0$). Je nach deren Lage im dritten ($\xi < 0, \eta < 0$) oder vierten Quadranten ($\xi > 0, \eta < 0$) ergeben sich für die Integralausdrücke über G verschiedene Formeln, wie im Anhang D gezeigt wird.

Durch Anwendung der Green'schen Sätze der Potentialtheorie auf das $\varphi_1^{(1)}$ -Problem ergibt sich das folgende gekoppelte, lineare Fredholm'sche Integralgleichungspaar zweiter Art für $\varphi_{1c}^{(1)}$ bzw. $\varphi_{1s}^{(1)}$, mit $\varphi_1^{(1)} = \varphi_{1c}^{(1)} + j \varphi_{1s}^{(1)}$, nach (B.3.6) (dimensionslose Darstellung):

$$-\pi \varphi_{1c}^{(1)}(x, y) + \int_{-L}^{+L} [\varphi_{1c}^{(1)}(\xi(s), \eta(s)) \frac{\partial G_c^{(1)}(x, y, \xi, \eta)}{\partial n_a} - \varphi_{1s}^{(1)} \frac{\partial G_s^{(1)}}{\partial n_a}] ds = \int_{-L}^{+L} \bar{F}^{(1)}(\xi, \eta) G_c^{(1)} ds \quad (52)$$

$$-\pi \varphi_{1s}^{(1)}(x, y) + \int_{-L}^{+L} [\varphi_{1c}^{(1)} \frac{\partial G_s^{(1)}}{\partial n_a} + \varphi_{1s}^{(1)} \frac{\partial G_c^{(1)}}{\partial n_a}] ds = \int_{-L}^{+L} \bar{F}^{(1)} G_s^{(1)} ds, (x, y) \in S_0.$$

mit der dimensionslosen Halblänge der Körperkontur zum Zeitpunkt $t = 0$

$$L = \frac{1}{2} S_0, \quad (53)$$

und der dimensionslosen Inhomogenität entlang S_0

$$\bar{F}^{(1)} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} = \bar{x}', \quad (54)$$

nach Gl. (27), wobei für $P \rightarrow Q$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_\alpha} = - \frac{\partial}{\partial \eta_\rho} \quad (55)$$

(s. Gl. D.2.3) berücksichtigt wurde.

Durch Lösung des Integralgleichungspaars (52) lassen sich die Potentialausdrücke $\bar{\varphi}_{1c}^{(1)}$ bzw. $\bar{\varphi}_{1s}^{(1)}$ entlang der Körperkontur S_0 direkt ermitteln. Das Potential wird dabei durch entlang der getauchten Körperkontur angeordnete einfache Quellen und Dipole ausgedrückt, wie genauer im Anhang B.3.2 dargelegt wird.

Neben dieser Integralgleichungsmethode wurden numerische Ergebnisse für $\bar{\varphi}_{1c}^{(1)}$ bzw. $\bar{\varphi}_{1s}^{(1)}$ unter Verwendung einer Einfachschichtpotential-Darstellung (vgl. Anhang B.3.1) erzielt, wie sie von den meisten Autoren im Bereich der linearen Schiffsschwingungen (vgl. [5], [11], [29]) nach einer *Cloose-Fit* Methode angewendet wurde. Das Potential läßt sich als Linienpotential von entlang der Körperkontur mit der Belegungsichte $\sigma^{(1)}(\xi, \eta)$ angeordneten einfachen Quellen ausdrücken (vgl. B.3.4)):

$$\bar{\varphi}_1^{(1)}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{+L} \sigma^{(1)}(\xi(s), \eta(s)) G(x, y, \xi, \eta) ds, \quad (56)$$

wobei sich die unbekannte Quellstärke $\sigma^{(1)}(\xi, \eta)$ durch Lösung der folgenden linearen *Fredholm* schen Integralgleichung zweiter Art bestimmen läßt (vgl. (B.3.5.)):

$$\frac{1}{2} \sigma^{(1)}(x, y) - \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{+L} \sigma^{(1)}(\xi(s), \eta(s)) \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial \eta_\rho} ds = \bar{F}^{(1)}(x, y), \quad (x, y) \in S_0, \quad (57)$$

mit $\bar{F}^{(1)}$ nach Gl. (54) und L nach (53).

Mit

$$\sigma^{(1)} = \sigma_c^{(1)} + j \sigma_s^{(1)} \quad (58)$$

ergibt sich aus (56)

$$\begin{aligned} \varphi_{1c}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{+L} (\sigma_c^{(1)} G_c^{(1)} - \sigma_s^{(1)} G_s^{(1)}) ds \\ \varphi_{1s}^{(1)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{+L} (\sigma_c^{(1)} G_s^{(1)} + \sigma_s^{(1)} G_c^{(1)}) ds, \end{aligned} \quad (59)$$

und aus (57) das folgende zu lösende Integralgleichungspaar, vom Typ (52), zur Bestimmung von $\sigma_c^{(1)}(x,y)$ bzw. $\sigma_s^{(1)}(x,y)$, $(x,y) \in S_0$

$$\begin{aligned} -\pi \sigma_c^{(1)}(x,y) + \int_{-L}^{+L} [\sigma_c^{(1)}(\xi(s), \eta(s)) \frac{\partial G_c^{(1)}(x,y,\xi,\eta)}{\partial n_p} - \\ - \sigma_s^{(1)} \frac{\partial G_s^{(1)}}{\partial n_p}] ds = -2\pi \bar{F}^{(1)}(x,y) \end{aligned} \quad (60)$$

$$-\pi \sigma_s^{(1)}(x,y) + \int_{-L}^{+L} [\sigma_c^{(1)} \frac{\partial G_s^{(1)}}{\partial n_p} + \sigma_s^{(1)} \frac{\partial G_c^{(1)}}{\partial n_p}] ds = 0,$$

mit $\bar{F}^{(1)}$ nach Gl.(54). Die Bestimmung der Teilpotentiale $\varphi_{1c}^{(1)}$ bzw. $\varphi_{1s}^{(1)}$ erfolgt damit indirekt über Gl.(59) nach Lösung von (60).

Entsprechend läßt sich durch Anwendung der Green'schen Sätze auf das $\varphi_2^{(2)}$ -Problem das folgende Integralgleichungspaar, vom Typ (52), zur direkten Bestimmung von $\varphi_{2c}^{(2)}$ bzw. $\varphi_{2s}^{(2)}$, mit $\varphi_2^{(2)} = \varphi_{2c}^{(2)} + j \varphi_{2s}^{(2)}$, nach (B.3.6) aufstellen, wobei die Inhomogenität der Freie-Oberflächen-Randbedingung nach (33) berücksichtigt wurde:

$$\begin{aligned} -\pi \varphi_{2c}^{(2)}(x,y) + \int_{-L}^{+L} [\varphi_{2c}^{(2)}(\xi(s), \eta(s)) \frac{\partial G_c^{(2)}(x,y,\xi,\eta)}{\partial n_a} - \\ - \varphi_{2s}^{(2)} \frac{\partial G_s^{(2)}}{\partial n_a}] ds = \int_{-L}^{+L} [\bar{F}_c^{(2)}(\xi,\eta) G_c^{(2)} - \bar{F}_s^{(2)} G_s^{(2)}] ds + \\ + \int_{b'}^{-L} [\bar{M}_c^{(2)}(\xi) G_c^{(2)}(x,y,\xi,0) - \bar{M}_s^{(2)} G_s^{(2)}] d\xi, \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned}
 & -\pi \varphi_{25}^{(2)}(x, y) + \int_{-L}^{+L} \left[\varphi_{2c}^{(2)}(\xi(s), \eta(s)) \frac{\partial G_S^{(2)}(x, y; \xi, \eta)}{\partial n_a} + \right. \\
 & \left. + \varphi_{25}^{(2)} \frac{\partial G_C^{(2)}}{\partial n_a} \right] ds = \int_{-L}^{+L} \left[\bar{F}_C^{(2)}(\xi, \eta) G_S^{(2)} + \bar{F}_S^{(2)} G_C^{(2)} \right] ds + \\
 & + \int_0^\infty \left[\bar{M}_C^{(2)}(\xi) G_S^{(2)}(x, y; \xi, 0) + \bar{M}_S^{(2)} G_C^{(2)} \right] d\xi, \quad (61)
 \end{aligned}$$

mit $(x, y) \in S_0$.

Die dimensionslosen Inhomogenitäten $\bar{F}_C^{(2)}(x, y)$ bzw. $\bar{F}_S^{(2)}(x, y)$ entlang S_0

$$\bar{F}_C^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi_{15}^{(1)}(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} - \frac{\partial^2 \varphi_{15}^{(1)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial s} \right], \quad (62)$$

$$\bar{F}_S^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi_{1c}^{(1)}(x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial s} - \frac{\partial^2 \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} \right], \quad (63)$$

ergeben sich aus Gl. (33) unter Berücksichtigung von Gl. (55) und der dimensionslosen Faktoren(S. X).

Entsprechend ergeben sich die dimensionslosen Inhomogenitäten $\bar{M}_C^{(2)}(x, y)$ bzw. $\bar{M}_S^{(2)}(x, y)$ entlang S_F

$$\bar{M}_C^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2}(\nu b) \left[\varphi_{15}^{(1)}(x, 0) \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right) + \right. \quad (64)$$

$$\left. + \varphi_{1c}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{15}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \varphi_{15}^{(1)}}{\partial y} \right) - 4 \left(\frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{15}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{15}^{(1)}}{\partial y} \right) \right],$$

$$\bar{M}_S^{(2)}(x, y) = \frac{1}{2}(\nu b) \left[\varphi_{15}^{(1)}(x, 0) \left(\frac{\partial^2 \varphi_{15}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \varphi_{15}^{(1)}}{\partial y} \right) - \right. \quad (65)$$

$$\left. - \varphi_{1c}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right) + 2 \left(\left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{15}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{15}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 \right) \right],$$

nach Gl. (34).

Schließlich ist zu berücksichtigen, daß die untere Grenze der Integration entlang S_F ($y=0$)

$$|b'| = \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \left(\frac{B}{2} + \Delta \xi \right), \quad (66)$$

mit $b' = 0$ für vollgetauchte Zylinder, den singulären Punkt

$|\xi| = \frac{B}{2}$ ausschließt

Die Ermittlung der Teilpotentiale $\varphi_{2c}^{(2)}$ bzw. $\varphi_{2s}^{(2)}$ erfolgt damit durch direkte Lösung des gekoppelten Integralgleichungspaares (61), das ähnlich (52) vom Integralgleichungstyp Fredholm - zweiter Art ist. Die Inhomogenitäten in (61) erfordern die Kenntnis der Teilpotentiale erster Ordnung und ihrer Ableitungen entlang der Körperkontur bzw. der Ruhewasserlinie; diese werden nach einer vorangegangenen Lösung des Integralgleichungspaares (52) und anschließender Differentiation in der geforderten Richtung bestimmt.

Physikalisch läßt sich das Integralgleichungspaar (61) wie folgt deuten: Das gesuchte $\varphi_2^{(2)}$ Potential zweiter Ordnung setzt sich zusammen aus einem Doppelschichtpotential mit der noch zu bestimmenden Belegungsichte $\varphi_2^{(2)}(\xi, \eta)$ infolge von entlang S_0 angeordneten Dipolen, einem Einfachschichtpotential mit der bekannten Belegungsichte $-F^{(2)}(\xi, \eta)$ infolge von entlang S_0 angeordneten einfachen Quellen und schließlich einem weiteren Einfachschichtpotential mit der aus Potentialgrößen erster Ordnung gebildeten, bekannten Belegungsichte $L^{(2)}(\xi)$ von entlang der Ruhewasserlinie $y = 0$ angeordneten einfachen Quellen (vgl. Anhang B.2)

2.2 Lösungsverfahren

Die in 2.1 aufgestellten Integralgleichungen erster - (52) bzw. (60) - und zweiter Ordnung - (61) - sind alle inhomogene lineare Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art von folgender allgemeinen Form:

$$\varphi(s) - \lambda \int_{S_0} K(s,t) \varphi(t) dt = f(s), \quad (67)$$

wobei $\varphi(s)$ die gesuchte Funktion, $K(s,t)$ den sog. Kern, $f(s)$ die Störungsfunktion und λ einen Zahlenfaktor der Integralgleichung bedeuten.

Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von Lösungen der hier in Frage kommenden Integralgleichungen sind im Anhang B.4 ausführlich behandelt worden.

Aufgrund der speziellen Form des Integralkernes $K(s,t)$, der die komplizierte Green'sche Funktion (45) oder (48) enthält, als auch der Störungsfunktion $f(s)$, die insbesondere beim $\varphi_2^{(ca)}$ -Problem ein uneigentliches Integral enthält, ist eine geschlossene Lösung der vorliegenden Integralgleichungen für beliebige Spantformen nicht möglich.

Neben den Näherungsmethoden, die auf Entwicklungen des Integralkernes und der gesuchten Funktion nach Eigenfunktionen basieren und nur für bestimmte Spantformen möglich sind - vgl. auch Multipolmethode -, ergibt das hier angewandte Quadraturverfahren nach W. Frank [5], die sog. Close-Fit Methode, ausreichend gute Lösungen für fast beliebige Spantformen. Die Methode bildet eine konsequente Ausdehnung des von Hess und Smith [72] für die gleichförmige Umströmung von getauchten Körpern eingeführten Verfahrens. Es wird zunächst angenommen, daß die getauchte Körperkontur S_0 ausreichend genau durch einen aus N Strecken bestehenden Polygonzug approximiert werden kann, der durch eine endliche Anzahl von $N + 1$ Ecken definiert wird (Abb. 2).

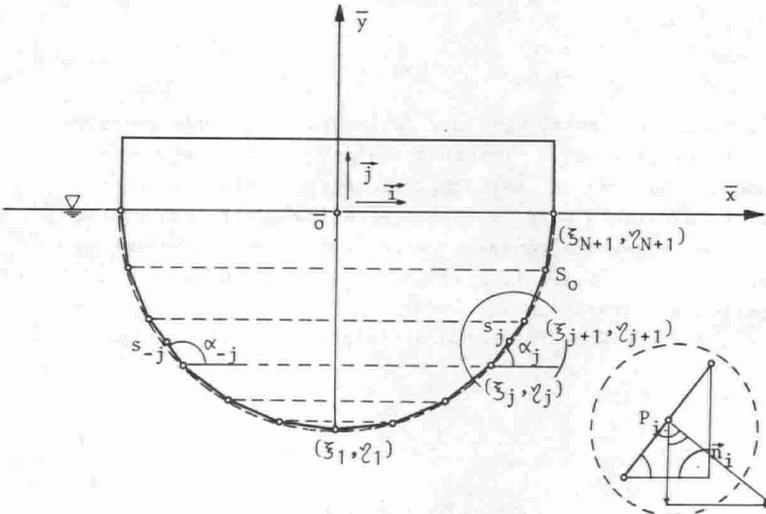


Abb. 2

Da sich die numerischen Untersuchungen auf die bezüglich der Vertikalachse symmetrischen Schiffsspannten beschränken, wird zunächst nur der vierte Quadrant betrachtet und die Symmetriebedingungen der geometrischen Größen sowie des Potentials ausgenutzt, um den Einfluß des dritten Quadranten zu erfassen.

Es werden $N+1$ Punkte entlang der im vierten Quadranten liegenden Körperkontur $\frac{1}{2}S_0$ so gewählt, daß der erste Punkt (ξ_1, η_1) auf der negativen \bar{y} -Achse und der entsprechende letzte

(ξ_{N+1}, η_{N+1}) für $t e i l$ getauchte Zylinder auf der positiven \bar{x} -Achse liegt, während für $v o l l$ getauchte Zylinder

$$\xi_{N+1} = \xi_1 \quad \text{und} \quad \eta_{N+1} < 0 \quad \text{gilt.}$$

Die mit den j -ten Segment zusammenhängenden geometrischen Größen sind durch den Index j gekennzeichnet, wobei die entsprechenden Größen des spiegelbildlich liegenden dritten Quadranten den Index $-j$ besitzen, so daß folgendes gilt:

$$\begin{aligned} \xi_{-j} &= -\xi_j, \\ \eta_{-j} &= \eta_j, \\ \alpha_{-j} &= \pi - \alpha_j, \end{aligned} \tag{68}$$

für

$$1 \leq j \leq N+1.$$

Das gesuchte Potential bzw. der daraus resultierende hydrodynamische Druck wird im Mittelpunkt eines jeden Segmentes berechnet, wobei von der tatsächlichen Körperkontur nur unerheblich abgewichen wird, wenn ein genügend großer Polygonzug angenommen wird. Die Genauigkeit der erzielten Ergebnisse wird jedenfalls nicht wesentlich verbessert, wenn die tatsächliche Körperkontur berücksichtigt wird.

Für die Aufpunktkoordinaten im Mittelpunkt des i -ten Segmentes gilt

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{2} (\xi_i + \xi_{i+1}) \\ y_i &= \frac{1}{2} (\eta_i + \eta_{i+1}), \end{aligned} \tag{69}$$

für

$$1 \leq i \leq N.$$

Die Länge der Sehne des i-ten Segments ist

$$|s_i| = [(\xi_{i+1} - \xi_i)^2 + (\eta_{i+1} - \eta_i)^2]^{1/2}, \quad (70)$$

und deren Neigungswinkel zur positiven \bar{x} -Achse, positiv entgegen dem Uhrzeigersinn gerechnet,

$$\alpha_i = \arctg \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}. \quad (71)$$

Schließlich gilt für die nach außen gerichtete Einheitsnormale in $P(x_i, y_i)$

$$\vec{n}_i = \vec{i} \sin \alpha_i - \vec{j} \cos \alpha_i, \quad (72)$$

mit den Einheitsvektoren \vec{i} bzw. \vec{j} in der positiven \bar{x} - bzw. \bar{y} -Richtung.

Es wird nun angenommen, daß die Quellstärke der entlang der Körperkontur S_0 angeordneten Singularitäten - dies gilt für alle in 2.1 aufgestellten Integralgleichungsmethoden - nur langsam entlang S_0 sich ändert, so daß sie entlang des zum i-ten Segment gehörenden Bogenstückes als konstant betrachtet werden darf. Dies erlaubt uns, die zu lösenden linearen Integralgleichungspaare (nach 2.1) in lineare algebraische Gleichungssysteme umzuwandeln in folgender Weise (vgl. (57)):

$$\begin{aligned} F^{(i)}(x_i, y_i) &= \int_{-L}^{+L} \sigma^{(i)}(\xi, \eta) \frac{\partial G^{(i)}(x_i, y_i; \xi, \eta)}{\partial n_p} ds \\ &\cong \frac{1}{2} \sigma^{(i)}(x_i, y_i) - \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{+L} \sigma^{(i)}(\xi, \eta) \frac{\partial G^{(i)}(x_i, y_i; \xi, \eta)}{\partial n_p} ds \\ &\cong \frac{1}{2} \sigma^{(i)}(x_i, y_i) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \int_{ds_j} \sigma^{(i)}(\xi_j, \eta_j) \frac{\partial G^{(i)}(x_i, y_i; \xi, \eta)}{\partial n_p} ds_j \\ &\cong \frac{1}{2} \sigma^{(i)}(x_i, y_i) - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \sigma^{(i)}(x_j, y_j) \int_{ds_j} \frac{\partial G^{(i)}(x_i, y_i; \xi, \eta)}{\partial n_p} ds_j, \end{aligned} \quad (73)$$

für $1 \leq i \leq N$.

Da jedoch die hier in Frage kommenden Integralterme

$$\int_{(S_3)} (\vec{n} \nabla) G(x_i, y_i; \xi, \eta) ds$$

bzw.

$$\int_{(S_3)} G(x_i, y_i; \xi, \eta) ds$$

für den Fall unendlicher Wassertiefe in geschlossener Form auswertbar sind (vgl. Anhang D), läßt sich das in (73) dargestellte Gleichungssystem zur Bestimmung der komplexen Funktion $\epsilon^{(1)}(x_i, y_i)$ nach einem geeigneten Lösungsverfahren bequem behandeln (s. 3.1).

Ähnlich lassen sich alle in Frage kommenden Integralgleichungspaare nach 2.1 vereinfachen, wie noch unter 2.3 bzw. 2.4 genau vorgeführt wird.

Ein Nachteil der hier dargestellten Methode besteht darin, daß für eine endliche Anzahl von Strecken - mit endlicher Länge - die gleiche Anzahl von mathematischen Unstetigkeiten im Funktionsverlauf der Quellstärke entlang S_0 auftritt. Dies wäre jedoch eine Verletzung einer der Hauptforderungen der Theorie über Oberflächenbelegungen, wonach die Quellstärke kontinuierlich entlang S_0 verlaufen soll [70]. Da jedoch die Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von Lösungen in einem früheren Stadium beantwortet wurden, ist nunmehr allein die Erzielung von Näherungsergebnissen von praktischer Bedeutung.

Nicht unerwähnt sollte eine von A. T r o e s c h [18] verfolgte Möglichkeit bleiben; er erhält einen kontinuierlichen Funktionsverlauf der Quellstärke dadurch, daß er einerseits Punkte auf Bogenelementen der tatsächlichen Körperkontur betrachtet und andererseits die oben erwähnten Integrale über die Green'schen Funktionen numerisch durch verschiedene Quadraturverfahren löst. Die Wahl eines geeigneten Quadraturverfahrens und der entsprechenden Gewichtsfunktion in Abhängigkeit von der jeweils vorliegenden Spantform und dem zu untersuchenden Schwingungsfall erfordert jedoch eine nur durch Rechenbeispiele zu gewinnende Erfahrung; dabei kann eine geschickte Wahl durch die geringere Anzahl von Eingabepunkten zur Beschreibung der Körperkontur einige Rechenzeit ersparen.

2.3 Potential erster Ordnung

Nach der Algebraisierung der zu lösenden Integralgleichungen und vor deren numerischen Auswertung ist es zweckmäßig, durchgehend dimensionslose Darstellungen zu verwenden. Damit vereinfachen sich einerseits die auszuwertenden Formelausdrücke und andererseits wird eine einfache qualitative Interpretation der Ergebnisse ermöglicht. Alle Längen werden auf die maximale Halbbreite bezogen, während die Zeitvariablen durch die Kreisfrequenz der Erregung dimensionslos gemacht werden. Ferner wird der in der Schiffshydrodynamik übliche dimensionslose Frequenzparameter

$$\xi_b = \nu b \quad (74)$$

eingeführt, obwohl im folgenden die Schreibweise (νb) vorgezogen wird.

Die zugrundegelegten dimensionslosen Faktoren und die Bezeichnungen der dimensionslosen Größen sind der entsprechenden Liste am Anfang dieser Arbeit (S. X) zu entnehmen. Es ist darauf zu achten, daß alle Feldgrößen (Koordinaten, Längen und Potentiale) a b P u n k t 2.1 o h n e Änderung ihrer Bezeichnung als dimensionslose Größen betrachtet werden sollen. Nur die in 2.5 abgeleiteten physikalischen Kenngrößen (Drücke, Kräfte, Wellenprofile) sind als dimensionslose Koeffizienten besonders gekennzeichnet.

Ebenso wird im folgenden der Rahmen dieser Arbeit auf das Problem u n e n d l i c h e r Wassertiefe beschränkt, wobei die anfallenden Integralausdrücke der G r e e n schen Funktionen fast ausschließlich analytisch ausgewertet werden können, wie im Anhang D gezeigt wird.

Unter Anwendung des in 2.2 beschriebenen Lösungsverfahrens auf das Integralgleichungspaar (52) ergibt sich das folgende lineare algebraische Gleichungssystem, bestehend aus $2N$ Gleichungen zur Bestimmung von $2N$ unbekanntem Potentialausdrücken $\varphi_{1C}^{(1)}(x_i, y_i)$ und $\varphi_{1S}^{(1)}(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ im Mittelpunkt der zu den N Segmenten gehörenden Sehnen entlang der Körperkontur S_0 :

$$-2\pi \varphi_{1C}^{(1)}(x_i, y_i) + \sum_{j=1}^N \varphi_{1C}^{(1)}(x_j, y_j) I_{ij}^{(1)}(x_i, y_i; x_j, y_j) - \sum_{j=1}^N \varphi_{1S}^{(1)}(x_j, y_j) \cdot \mathfrak{J}_{ij}^{(1)}(x_i, y_i; x_j, y_j) = \sum_{j=1}^N \mathbb{F}^{(1)}(x_j, y_j) K_{ij}^{(1)}(x_i, y_i; x_j, y_j), \quad (75)$$

$$-2\pi \varphi_{1S}^{(1)}(x_i, y_i) + \sum_{j=1}^N \varphi_{1C}^{(1)}(x_j, y_j) \mathfrak{J}_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^N \varphi_{1S}^{(1)}(x_j, y_j) I_{ij}^{(1)} = \sum_{j=1}^N \mathbb{F}^{(1)} L_{ij}^{(1)},$$

für $i = 1, 2, \dots, N$, mit $I_{ij}^{(1)} = \pi + \dots$, für $i=j$ nach (D.2.7).

In Matrixschreibweise läßt sich (75) vereinfacht wie folgt schreiben:

$$\{-2\pi [I] + [H^{(1)}]\} \cdot [\Phi^{(1)}] = [R^{(1)}] \quad (75)'$$

2N	
1	0
.	.
0	1
2N	

N		N	
I ₁₃ ⁽¹⁾	-J ₁₃ ⁽¹⁾	N	N
J ₁₃ ⁽¹⁾	I ₁₃ ⁽¹⁾	N	N
N		N	

1	
Φ ₁₃ ⁽¹⁾	N
Φ ₁₅ ⁽¹⁾	N
N	

1	
Σ _{s=1} ^N F ⁽¹⁾ K ₁₃ ⁽¹⁾	N
Σ _{s=1} ^N F ⁽¹⁾ L ₁₃ ⁽¹⁾	N
N	

mit der Einheitsmatrix [I], der sog. Einfluß-Koeffizientenmatrix erster Ordnung [H⁽¹⁾], der Störmatrix erster Ordnung [R⁽¹⁾] und schließlich der gesuchten Potentialmatrix [Φ⁽¹⁾].

Dabei gilt für den Einflußkoeffizienten erster Ordnung in Phase mit der Geschwindigkeit der Bewegung in Punkt P(x_i, y_i), infolge des j-ten Sementes (vgl. 2.1):

$$I_{13}^{(1)} = \text{Re}_i \left\{ \int_{(S_2)} (\vec{n}(z, \eta) \cdot \nabla) [\log(z_1 - \zeta) - \log(z_1 - \bar{\zeta}) + 2 \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_1 - \bar{\zeta})}}{(vb) - k} \alpha k] ds + \int_{(S_1)} (\vec{n}(z, \eta) \cdot \nabla) [\log(z_1 + \bar{\zeta}) - \log(z_1 + \zeta) + 2 \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_1 + \zeta)}}{(vb) - k} \alpha k] ds \right\} \quad (76)$$

Entsprechend gilt für den Einflußkoeffizienten erster Ordnung in Phase mit der Beschleunigung

$$J_{13}^{(1)} = -2\pi \text{Re}_i \left\{ \int_{(S_2)} (\vec{n}(z, \eta) \cdot \nabla) [e^{-i(vb)(z_1 - \bar{\zeta})}] ds + \int_{(S_1)} (\vec{n}(z, \eta) \cdot \nabla) [e^{-i(vb)(z_1 + \zeta)}] ds \right\} \quad (77)$$

Schließlich ergibt sich für die Störfunktionen:

$$\sum_{j=1}^N \bar{F}^{(4)}(x_j, y_j) K_{ij}^{(4)} =$$

$$\sum_{j=1}^N \cos \alpha_j \left[\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} \left[\log(z_i - \zeta) - \log(z_i - \bar{\zeta}) + \right. \right. \right. \quad (78)$$

$$+ 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta})}}{(v_b) - k} dk \left. \right] ds + \left. \int \left[\log(z_i + \bar{\zeta}) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - \log(z_i + \zeta) + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i + \zeta)}}{(v_b) - k} dk \right] ds \right\} \right],$$

$$- \sum_{j=1}^N \bar{F}^{(4)}(x_j, y_j) L_{ij}^{(4)} =$$

$$\sum_{j=1}^N \cos \alpha_j \left[2\pi \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} \left[e^{-i(v_b)(z_i - \bar{\zeta})} \right] ds + \right. \right. \quad (79)$$

$$\left. \left. + \int_{(s_{-j})} \left[e^{-i(v_b)(z_i + \zeta)} \right] ds \right\} \right].$$

Die in (76) bis (79) auftretenden Integralausdrücke sind im Anhang D auf analytischem Weg gelöst, wobei die Cauchy'schen Hauptwertintegrale zusätzlich numerisch behandelt wurden.

Wenn die Potentialausdrücke $\varphi_{ic}^{(4)}(x_j, y_j)$ bzw. $\varphi_{is}^{(4)}(x_j, y_j)$ entlang S_0 durch Lösung des Gleichungssystems (75) nach einem geeigneten Lösungsverfahren (z.B. Gaußscher Reduktionsalgorithmus, vgl. Punkt 3.1) ermittelt worden sind, lassen sich die gleichen Größen entlang der Ruhewasserslinie $\varphi_{ic}^{(4)}(x_i, 0)$ bzw. $\varphi_{is}^{(4)}(x_i, 0)$ aus folgenden algebraischen Gleichungen bestimmen:

$$\begin{aligned}
 -2\pi \varphi_{1C}^{(1)}(x_i, 0) &= -\sum_{j=1}^N \varphi_{1C}^{(1)}(x_j, y_j) I_{ij}^{(1)}(x_i, 0; x_j, y_j) + \\
 &+ \sum_{j=1}^N \varphi_{1S}^{(1)}(x_j, y_j) J_{ij}^{(1)}(x_i, 0; x_j, y_j) + \\
 &+ \sum_{j=1}^N \overline{F}^{(1)}(x_j, y_j) K_{ij}^{(1)}(x_i, 0; x_j, y_j), \quad (80)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2\pi \varphi_{1S}^{(1)}(x_i, 0) &= -\sum_{j=1}^N \varphi_{1C}^{(1)}(x_j, y_j) J_{ij}^{(1)}(x_i, 0; x_j, y_j) - \\
 &- \sum_{j=1}^N \varphi_{1S}^{(1)}(x_j, y_j) I_{ij}^{(1)}(x_i, 0; x_j, y_j) + \\
 &+ \sum_{j=1}^N \overline{F}^{(1)}(x_j, y_j) L_{ij}^{(1)}(x_i, 0; x_j, y_j),
 \end{aligned} \quad (81)$$

mit $x_i > \xi_{N+1}$.

Ähnlich läßt sich das $\varphi_1^{(1)}$ -Problem durch Lösung des Integralgleichungspaares (60) und Anwendung von Gl. (59) indirekt lösen. Unter Berücksichtigung von (75) ergibt sich aus (60) das folgende, lineare algebraische Gleichungssystem mit $2N$ Gleichungen für die $2N$ unbekanntenen Ausdrücke der Quellstärke $\sigma_C^{(1)}(s_i)$ und $\sigma_S^{(1)}(s_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ im Mittelpunkt der zu den N Segmenten gehörenden Sehnen entlang der getauchten Körperkontur S_0 :

$$\begin{aligned}
 -2\pi \sigma_C^{(1)}(s_i) + \sum_{j=1}^N \sigma_C^{(1)}(s_j) I_{ij}^{(1)} - \sum_{j=1}^N \sigma_S^{(1)}(s_j) J_{ij}^{(1)} &= \\
 = -2\pi \cos \alpha \quad (82)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -2\pi \sigma_S^{(1)}(s_i) + \sum_{j=1}^N \sigma_C^{(1)}(s_j) J_{ij}^{(1)} + \sum_{j=1}^N \sigma_S^{(1)}(s_j) I_{ij}^{(1)} &= \\
 = 0,
 \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, N$, mit $I_{ij}^{(1)} = \pi + \dots$ für $i = j$ nach (76), (D.2.7).

Für die Einflußkoeffizienten gelten die entsprechenden Formel-
ausdrücke (76) (77) im Zusammenhang mit einer Differentiation
in Richtung der äußeren Normale nach den Auf-
punkt koordinaten (vgl. Anhang D).

Das Gleichungssystem (82) läßt sich ähnlich dem in (75) nach
einem Reduktionsalgorithmus lösen (vgl. Punkt 3.1). Damit kön-
nen die Potentialausdrücke $\varphi_{1c}^{(1)}(x_i, y_i)$ bzw. $\varphi_{1s}^{(1)}(x_i, y_i)$
entlang S_0 und der Ruhewasserlinie S_F mit Hilfe von Gl. (59)
angegeben werden:

$$\begin{aligned} \varphi_{1c}^{(1)}(x_i, y_i) = & \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^N \sigma_c^{(1)}(s_j) \cdot \operatorname{Re}_i \left\{ \left[\int_{(s_j)} \log(z_i - \zeta) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \log(z_i - \bar{\zeta}) + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta})}}{(vb) - k} dk \right] ds + \right. \right. \quad (83) \\ & \left. \left. \left. + \int_{(s_{-j})} [\log(z_i + \bar{\zeta}) - \log(z_i + \zeta) + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i + \zeta)}}{(vb) - k} dk] ds \right\} + \right. \\ & \left. + 2\pi \sum_{j=1}^N \sigma_s^{(1)}(s_j) \cdot \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} [e^{-i(vb)(z_i - \bar{\zeta})}] ds + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \int_{(s_{-j})} [e^{-i(vb)(z_i + \zeta)}] ds \right\} \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1s}^{(1)}(x_i, y_i) = & \frac{1}{2\pi} \left[\sum_{j=1}^N \sigma_s^{(1)}(s_j) \operatorname{Re}_i \left\{ \left[\int_{(s_j)} \log(z_i - \zeta) - \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. - \log(z_i - \bar{\zeta}) + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta})}}{(vb) - k} dk \right] ds + \right. \right. \quad (84) \\ & \left. \left. \left. + \int_{(s_{-j})} [\log(z_i + \bar{\zeta}) - \log(z_i + \zeta) + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i + \zeta)}}{(vb) - k} dk] ds \right\} - \right. \\ & \left. - 2\pi \sum_{j=1}^N \sigma_c^{(1)}(s_j) \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} [e^{-i(vb)(z_i - \bar{\zeta})}] ds + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \int_{(s_{-j})} [e^{-i(vb)(z_i + \zeta)}] ds \right\} \right]. \end{aligned}$$

Aus den Potentialausdrücken $\varphi_{1c}^{(1)}$ bzw. $\varphi_{1s}^{(1)}$ am Rande des Flüssigkeitsbereichs, die hier nach (82) bzw. (83) und (84) ermittelt worden sind, lassen sich sowohl verschiedene in Frage kommende physikalische Größen erster Ordnung ermitteln, wie in Punkt 2.5 gezeigt wird, als auch die Störfunktionen der Integralgleichungen zweiter Ordnung erzeugen, wie im folgenden dargelegt wird.

2.4 Potential zweiter Ordnung

Durch Anwendung der in 2.2 dargestellten Lösungsmethode auf das Integralgleichungspaar (61) läßt sich das folgende lineare algebraische Gleichungssystem, bestehend aus $2N$ Gleichungen für die Bestimmung von $2N$ unbekanntem Potentialausdrücken $\varphi_{2c}^{(2)}(x_i, y_i)$ und $\varphi_{2s}^{(2)}(x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ im Mittelpunkt der zu den N Segmenten gehörenden Sehnen entlang der getauchten Körperkontur S_0 , aufstellen:

$$\begin{aligned}
 & -2\pi \varphi_{2c}^{(2)}(x_i, y_i) + \sum_{j=1}^N \varphi_{2c}^{(2)}(x_j, y_j) I_{ij}^{(2)}(x_i, y_i; x_j, y_j) - \\
 & - \sum_{j=1}^N \varphi_{2s}^{(2)}(x_j, y_j) J_{ij}^{(2)}(x_i, y_i; x_j, y_j) = \\
 & \sum_{j=1}^N \overline{F}_c^{(2)}(x_j, y_j) K_{ij}^{(2)}(x_i, y_i; x_j, y_j) - \sum_{j=1}^N \overline{F}_s^{(2)}(x_j, y_j) \cdot \\
 & \cdot L_{ij}^{(2)}(x_i, y_i; x_j, y_j) + P_c^{(2)}(x_i, y_i) - P_s^{(2)}(x_i, y_i), \tag{85}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2\pi \varphi_{2s}^{(2)}(x_i, y_i) + \sum_{j=1}^N \varphi_{2c}^{(2)} J_{ij}^{(2)} + \sum_{j=1}^N \varphi_{2s}^{(2)} I_{ij}^{(2)} = \\
 & \sum_{j=1}^N \overline{F}_c^{(2)} \cdot L_{ij}^{(2)} + \sum_{j=1}^N \overline{F}_s^{(2)} K_{ij}^{(2)} + Q_c^{(2)} + Q_s^{(2)},
 \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, N$, mit $I_{ij}^{(2)} = \pi + \dots$ für $i = j$ unter Berücksichtigung von (86) und (D.2.7)'.

In Matrizenform läßt sich (85) vereinfacht wie folgt schreiben:

$$\{-2\pi [I] + [H^{(2)}]\} \cdot [\Phi^{(2)}] = [R^{(2)}] \quad (85)'$$

$[I] = \begin{array}{|c|c|} \hline \overbrace{\quad\quad\quad}^{2N} & \\ \hline 1 & 0 \\ \hline & \\ \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$

$[H^{(2)}] = \begin{array}{|c|c|} \hline \overbrace{\quad\quad\quad}^N & \overbrace{\quad\quad\quad}^N \\ \hline I_{1,2}^{(2)} & -\Xi_{1,2}^{(2)} \\ \hline \Xi_{1,2}^{(2)} & I_{1,2}^{(2)} \\ \hline \underbrace{\quad\quad\quad}_N & \underbrace{\quad\quad\quad}_N \\ \hline \end{array}$

$[\Phi^{(2)}] = \begin{array}{|c|} \hline \overbrace{\quad\quad\quad}^1 \\ \hline \varphi_{2c}^{(2)} \\ \hline \varphi_{2s}^{(2)} \\ \hline \underbrace{\quad\quad\quad}_N \\ \hline \end{array}$

$[R^{(2)}] = \begin{array}{|c|} \hline \overbrace{\quad\quad\quad}^1 \\ \hline \sum_{j=1}^N \overline{F}_c^{(2)} X_{i,j}^{(2)} - \sum_{j=1}^N \overline{F}_s^{(2)} L_{i,j}^{(2)} + P_c^{(2)} - P_s^{(2)} \\ \hline \sum_{j=1}^N \overline{F}_c^{(2)} L_{i,j}^{(2)} + \sum_{j=1}^N \overline{F}_s^{(2)} X_{i,j}^{(2)} + Q_c^{(2)} + Q_s^{(2)} \\ \hline \underbrace{\quad\quad\quad}_N \\ \hline \end{array}$

mit der Einheitsmatrix [I], der Einfluß-Koeffizientenmatrix zweiter Ordnung [H⁽²⁾], der Störmatrix zweiter Ordnung [R⁽²⁾] und der gesuchten Potentialmatrix zweiter Ordnung [Φ⁽²⁾].
Für die Einflußkoeffizienten zweiter Ordnung gilt (vgl. 2.1):

$$I_{1,2}^{(2)} = \text{Re}_i \left\{ \int_{(S_2)} (\vec{n}(s, \eta) \cdot \nabla) [\log(z_i - \zeta) - \log(z_i - \bar{\zeta}) + 2 \int_0^\infty \frac{e^{ik(z_i - \bar{\zeta})}}{4(\nu b) - k} dk] ds + \int_{(S_-)} (\vec{n}(s, \eta) \cdot \nabla) \cdot \right. \quad (86)$$

$$\left. [\log(z_i + \bar{\zeta}) - \log(z_i + \zeta) + 2 \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i + \zeta)}}{4(\nu b) - k} dk] ds \right\},$$

$$\Xi_{1,2}^{(2)} = -2\pi \text{Re}_i \left\{ \int_{(S_2)} (\vec{n}(s, \eta) \cdot \nabla) [e^{-i4(\nu b)(z_i - \bar{\zeta})}] ds + \right. \quad (87)$$

$$\left. + \int_{(S_-)} (\vec{n}(s, \eta) \cdot \nabla) [e^{-i4(\nu b)(z_i + \zeta)}] ds \right\}.$$

Für die Störfunktionen zweiter Ordnung ergibt sich mit (62) bis (66):

$$\sum_{j=1}^N \bar{F}_c^{(2)}(x_j, y_j) K_{ij}^{(2)}(x_i, y_i; x_j, y_j) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1s}^{(1)}}{\partial y^2}(x_j, y_j) \cos \alpha_j - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1s}^{(1)}}{\partial x \partial y} \sin \alpha_j \right] \cdot$$

$$\cdot [\operatorname{Re}_i \{ \int_{(s_j)} [\log(z_i - \zeta) - \log(z_i - \bar{\zeta}) +$$

$$+ 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta})}}{4(\nu b) - k} dk] ds + \int [\log(z_i + \bar{\zeta}) -$$

$$- \log(z_i + \zeta) + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i + \zeta)}}{4(\nu b) - k} dk] ds \}], \quad (88)$$

$$-\sum_{j=1}^N \bar{F}_s^{(2)}(x_j, y_j) L_{ij}^{(2)}(x_i, y_i; x_j, y_j) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial x \partial y}(x_j, y_j) \sin \alpha_j - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial y^2} \cos \alpha_j \right] \cdot$$

$$\cdot [2\pi \operatorname{Re}_i \{ \int_{(s_j)} [e^{-i4(\nu b)(z_i - \bar{\zeta})}] ds +$$

$$+ \int_{(s_j)} [e^{-i4(\nu b)(z_i + \zeta)}] ds \}], \quad (89)$$

$$P_c^{(2)}(x_i, y_i) = (\nu b) \int_b^{\infty} \left\{ \left[\bar{\varphi}_{1s}^{(1)}(\zeta, 0) \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + \bar{\varphi}_{1c}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1s}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \bar{\varphi}_{1s}^{(1)}}{\partial y} \right) - 4 \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}_{1s}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\varphi}_{1s}^{(1)}}{\partial y} \right) \right] \cdot$$

$$+ \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{ky_i} \cos k(x_i - \bar{\zeta})}{4(\nu b) - k} dk + \right.$$

$$\left. \int_0^{\infty} \frac{e^{ky_i} \cos k(x_i + \bar{\zeta})}{4(\nu b) - k} dk \right] \} d\zeta, \quad (90)$$

$$\begin{aligned}
 -P_S^{(2)}(x_i, y_i) = & \pi(\nu b) e^{4(\nu b)y_i} \int_{b'}^{\infty} \left\{ \left[\varphi_{1s}^{(1)}(\xi, 0) \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial y} \right) - \right. \right. \\
 & - \varphi_{1c}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right) + 2 \left(\left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 + \right. \\
 & \left. \left. + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 \right) \right] \cdot [\cos 4(\nu b)(x_i - \xi) + \\
 & \left. + \cos 4(\nu b)(x_i + \xi)] \right\} d\xi, \tag{91}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \sum_{j=1}^N \bar{F}_c^{(2)}(x_j, y_j) L_{ij}^{(2)}(x_i, y_i; x_j, y_j) = & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial^2 \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial y^2}(x_j, y_j) \cos \alpha_j - \frac{\partial^2 \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x \partial y} \sin \alpha_j \right] \cdot \\
 & \cdot \left[2\pi \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} \left[e^{-i4(\nu b)(z_i - \bar{z}_j)} \right] ds + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \int_{(S_j)} \left[e^{-i4(\nu b)(z_i + \bar{z}_j)} \right] ds \right\} \right], \tag{92}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^N \bar{F}_s^{(2)}(x_j, y_j) K_{ij}^{(2)}(x_i, y_i; x_j, y_j) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial x \partial y}(x_j, y_j) \sin \alpha_j - \frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial y^2} \cos \alpha_j \right]$$

$$\cdot \left[\operatorname{Re}_i \left\{ \int \left[\log(z_i - \zeta) - \log(z_i - \bar{\zeta}) + \right. \right. \right. \quad (93)$$

$$\left. \left. \left. + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(z_i - \bar{\zeta})}}{4(\nu b) - k} dk \right] ds + \int \left[\log(z_i + \bar{\zeta}) - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. - \log(z_i + \zeta) + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i + \zeta)}}{4(\nu b) - k} dk \right] ds \right\} \right],$$

$$- Q_c^{(2)}(x_i, y_i) =$$

$$\pi(\nu b) e^{4(\nu b)y_i} \int_{b'}^{\infty} \left\{ \left[\bar{\varphi}_{1s}^{(1)}(\xi, 0) \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial y^2} - \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - (\nu b) \frac{\partial \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right) + \bar{\varphi}_{1c}^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \bar{\varphi}_{1s}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \bar{\varphi}_{1s}^{(1)}}{\partial y} \right) - \right.$$

$$\left. - 4 \left(\frac{\partial \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\varphi}_{1s}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\varphi}_{1c}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\varphi}_{1s}^{(1)}}{\partial y} \right) \right\} d\xi. \quad (94)$$

$$\cdot \left[\cos 4(\nu b)(x_i - \xi) + \cos 4(\nu b)(x_i + \xi) \right] d\xi,$$

$$\begin{aligned}
 Q_S^{(2)}(x_i, y_i) = & \\
 (\nu b) \int_{b'}^{\infty} & \left\{ \left[\varphi_{15}^{(1)}(\xi, 0) \left(\frac{\partial^2 \varphi_{15}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \varphi_{15}^{(1)}}{\partial y} \right) - \right. \right. \\
 - \varphi_{1c}^{(1)} & \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y^2} - (\nu b) \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right) + 2 \left(\left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 - \right. \\
 - \left. \left. \left\{ \frac{\partial \varphi_{15}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{15}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 \right] \right. & \quad (95) \\
 \left. \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{ky_i} \cos k(x_i - \xi)}{4(\nu b) - k} dk + \int_0^{\infty} \frac{e^{ky_i} \cos k(x_i + \xi)}{4(\nu b) - k} dk \right] \right\} d\xi. &
 \end{aligned}$$

Die in (86) bis (95) auszuwertenden Integralausdrücke sind z.T. im Anhang D behandelt worden, insbesondere diejenigen, die mit den Green'schen Funktionen des Problems zusammenhängen und analog zu denen erster Ordnung gelöst werden können.

Die Störfunktionen in (85) erfordern darüber hinaus die Kenntnis von Potentialgrößen erster Ordnung, in Zusammenhang mit den Ausdrücken $F_C^{(2)}$, $F_S^{(2)}$, $M_C^{(2)}$ und $M_S^{(2)}$ nach Gl.(62) bis (65), nämlich von:

$$\left\{ 1; \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} (\varphi_{1c}^{(1)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)); \varphi_{15}^{(1)}) \quad (96)$$

entlang der getauchten Körperkontur S_0 , und

$$\left\{ 1; \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} (\varphi_{1c}^{(1)}(\xi, 0); \varphi_{15}^{(1)}) \quad (97)$$

entlang der Ruhewasserlinie S_F .

Die erforderlichen Potentiale erster Ordnung entlang der Körperkontur werden durch die vorangehende Lösung des Gleichungssystems (75) bestimmt. Anschließend lassen sich die entsprechenden Werte entlang der Ruhewasserlinie nach Gl.(80) und (81) bestimmen.

Einige typische numerische Ergebnisse für einen tauchenden Halbkreiszylinder ($\varphi_{1c}^{(1)}$ bzw. $\varphi_{1s}^{(1)}$ entlang S_0 und S_F) sind in den Diagrammen Nr.1 und Nr.2 wiedergegeben.

Um die nach (96) bis. (97) erforderlichen partiellen Differentiationen, die numerisch durchgeführt werden, in möglichst wenigen numerischen Schritten zu erhalten, werden die Gleichungen (62) bis (65) umgeformt mit dem Ziel, möglichst wenige verschiedene Differentiationsausdrücke berechnen zu müssen. Man bedient sich hierzu insbesondere der L a p l a c e schen Gleichung, der B e r n o u l l i schen Gleichung entlang S_F und der Differentiationsmöglichkeit in Richtung s entlang S_0 .

Damit ergibt sich aus (62):

$$\begin{aligned} \bar{F}_c^{(2)} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial y^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} - \frac{\partial^2 \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial s} \right] \\ &= - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x^2} \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} + \frac{\partial^2 \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x \partial y} \frac{\partial \bar{y}}{\partial s} \right], \end{aligned}$$

oder

$$\bar{F}_c^{(2)} = - \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x \partial s} \quad . \quad (98)$$

Entsprechend bekommt man aus (63)

$$\bar{F}_s^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x \partial s} \quad . \quad (99)$$

Schließlich ergibt sich für die Ausdrücke $M_c^{(2)}$ bzw. $M_s^{(2)}$ entlang S_F in dimensionsloser Form nach Gl.(64) bzw. (65):

$$\begin{aligned} \bar{M}_c^{(2)} &= - \frac{1}{2} (\nu b) \left[\varphi_{1s}^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x^2} + 6(\nu b)^2 \varphi_{1c}^{(1)} \varphi_{1s}^{(1)} + \right. \\ &\quad \left. + \varphi_{1c}^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_S^{(2)} = \frac{1}{2} (\nu b) & \left[\varphi_{1c}^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x^2} + 3(\nu b)^2 (\{\varphi_{1c}^{(1)}\}^2 - \right. \\ & \left. - \{\varphi_{1s}^{(1)}\}^2) - \varphi_{1s}^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x^2} + 2 \left(\left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (101)$$

Damit reduzieren sich die erforderlichen partiellen Differentiationen entlang S_0 bzw. S_F auf:

$$\left\{ 1; \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial^2}{\partial x \partial s} \right\} (\varphi_{1c}^{(1)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)); \varphi_{1s}^{(1)}) \quad (102)$$

entlang S_0 und

$$\left\{ 1; \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right\} (\varphi_{1c}^{(1)}(\xi, 0); \varphi_{1s}^{(1)}) \quad (103)$$

entlang S_F .

Einige numerische Ergebnisse dieser Ausdrücke sind in den Diagrammen Nr.1 bzw. Nr.2 wiedergegeben. Die für die numerische Differentiation zugrundegelegten Verfahren werden noch unter 3.1 angesprochen ebenso wie die numerischen Quadraturverfahren zur Auswertung der theoretisch bis zum Unendlichen reichenden Integralausdrücke in $p_C^{(2)}$, $p_S^{(2)}$, $Q_C^{(2)}$ bzw. $Q_S^{(2)}$.

Nicht unerwähnt sollte der besondere Einfluß der Singularität im Schnittpunkt von S_0 mit S_F bleiben, insbesondere auf die zu bildenden Ableitungen nach (102) bzw. (103). J. K r a v t s c h e n k o hat gezeigt, daß die zweiten Potentialableitungen dort unendlich groß werden, während sie sonst kontinuierlich verlaufen. Obwohl dieses Problem numerisch umgehen läßt, erhält dieser Punkt bei der Behandlung der restlichen zwei Freiheitsgrade in der Ebene - der Roll- und Querbewegungen - eine zusätzliche Bedeutung, da die dort zu bildenden Ableitungen an dieser Stelle das Strömungsbild erheblich mehr als beim Tauchen beeinflussen.

Nach der Ermittlung der Potentialgrößen $\varphi_{2c}^{(2)}(x_j, y_j)$ bzw. $\varphi_{2s}^{(2)}(x_j, y_j)$ entlang S_0 durch Lösung des in (85) aufgestellten Gleichungssystems nach einem dem $\varphi_{1c}^{(1)}$ -Problem (75) ähnli-

chen Lösungsverfahren folgt die Berechnung der gleichen Größen entlang der Ruhewasserlinie S_F unter Berücksichtigung der folgenden algebraischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 -2\pi \varphi_{2c}^{(2)}(x_i, 0) = & - \sum_{j=1}^N \varphi_{2c}^{(2)}(x_j, y_j) I_{ij}^{(2)}(x_i, 0; x_j, y_j) + \\
 & + \sum_{j=1}^N \varphi_{2s}^{(2)}(x_j, y_j) J_{ij}^{(2)}(x_i, 0; x_j, y_j) + \\
 & + \sum_{j=1}^N F_c^{(2)}(x_j, y_j) K_{ij}^{(2)}(x_i, 0; x_j, y_j) - \sum_{j=1}^N F_s^{(2)}(x_j, y_j) \cdot \\
 & \cdot L_{ij}^{(2)}(x_i, 0; x_j, y_j) + P_c^{(2)}(x_i, 0) - P_s^{(2)}(x_i, 0),
 \end{aligned} \tag{104}$$

$$\begin{aligned}
 -2\pi \varphi_{2s}^{(2)}(x_i, 0) = & - \sum_{j=1}^N \varphi_{2c}^{(2)}(x_j, y_j) J_{ij}^{(2)}(x_i, 0; x_j, y_j) - \\
 & - \sum_{j=1}^N \varphi_{2s}^{(2)}(x_j, y_j) I_{ij}^{(2)}(x_i, 0; x_j, y_j) + \\
 & + \sum_{j=1}^N F_c^{(2)}(x_j, y_j) L_{ij}^{(2)}(x_i, 0; x_j, y_j) + \sum_{j=1}^N F_s^{(2)}(x_j, y_j) \cdot \\
 & \cdot K_{ij}^{(2)}(x_i, 0; x_j, y_j) + Q_c^{(2)}(x_i, 0) + Q_s^{(2)}(x_i, 0),
 \end{aligned} \tag{105}$$

mit $x_i > \xi_{N+1}$.

Damit sind die Potentiale zweiter Ordnung entlang der uns interessierenden Ränder S_0 und S_F ermittelt, so daß alle in Frage kommenden physikalischen Größen zweiter Ordnung, wie in Punkt 2.5 genau angegeben wird, bestimmt werden können.

2.5 P h y s i k a l i s c h e G r ö ß e n

GRUNDGLEICHUNGEN

Die hydrodynamische Druckverteilung relativ zum konstanten atmosphärischen Druck ergibt sich durch Anwendung der B e r - n o u l l i s c h e n Gleichung

$$P(x, y; t) = -\rho g y - \rho \Phi_t(x, y; t) - \frac{1}{2} \rho |\nabla \Phi|^2 \quad (106)$$

am jeweils interessierenden Ort als Funktion der Zeit. Insbesondere gilt für den hydrodynamischen Druck entlang der sich bewegendes Körperkontur S unter Berücksichtigung von (3)

$$P(x, y; t) = -\rho g (\bar{y}(s) + y_0(t)) - \rho \Phi_t(\bar{x}(s), \bar{y}(s) + y_0(t)) - \frac{1}{2} \rho |\nabla \Phi|^2. \quad (107)$$

Nun läßt sich $P(x, y; t)$ nach (107) in einer Taylor-Reihe bezüglich der "ungestörten" Ruhelage des Körpers, die durch die Kontur $S_0(\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ gekennzeichnet ist, entwickeln.

Unter Berücksichtigung des Störungsansatzes für Φ (20) und von $y_0(t)$ (2) ergibt sich für den Druck entlang S bis zur z w e i t e n Ordnung:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} P(\bar{x}(s), \bar{y}(s); t) &= g \bar{y}(s) + \\ &+ \varepsilon [g b \sin \omega t + \Phi_t^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}; t)] + \\ &+ \varepsilon^2 [b \sin \omega t \cdot \Phi_{ty}^{(1)} + \Phi_t^{(2)} + \frac{1}{2} (\Phi_x^{(1)2} + \Phi_y^{(1)2})] + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \quad (108)$$

Durch Integration des hydrodynamischen Druckes P nach (108) über die getauchte Körperkontur S ergibt sich die auf den Körper wirkende hydrodynamische Kraft pro Längeneinheit:

$$\vec{F}(t) = - \int_S P(\bar{x}(s), \bar{y}(s); t) \cdot \vec{n} \cdot ds, \quad (109)$$

wobei \vec{n} die nach außen gerichtete Einheitsnormale bedeutet.

Wenn L nach (53) die halbe Bogenlänge der Körperkontur S_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Körperruhelage bedeutet, so kann angenommen werden, daß für die entsprechende Kontur S zum Zeitpunkt t gilt [43]:

$$-L + \varepsilon e_e^{(1)} + \varepsilon^2 e_e^{(2)} + O(\varepsilon^3) \leq S \leq L + \varepsilon e_r^{(1)} + \varepsilon^2 e_r^{(2)} + O(\varepsilon^3),$$

mit

$$\begin{aligned} -e_e^{(1)} &= e_r^{(1)}, \\ -e_e^{(2)} &= e_r^{(2)}, \end{aligned} \tag{111}$$

für die bezüglich der \bar{y} -Achse symmetrischen Tauchbewegungen; S wird dabei durch die Schnittpunkte der freien Oberfläche mit der Körperkontur beiderseits der \bar{y} -Achse begrenzt.

Unter Anwendung der Regel von Leibniz [69] und einer Taylor-Entwicklung bezüglich ε läßt sich folgendes nachweisen:

$$\begin{aligned} F(L; \varepsilon) &= \int_{-L + \varepsilon e_e^{(1)} + \varepsilon^2 e_e^{(2)}}^{+L + \varepsilon e_r^{(1)} + \varepsilon^2 e_r^{(2)}} f(s) ds = \int_{-L}^{+L} f(s) ds + \\ &+ \varepsilon [e_r^{(1)} f(L) - e_e^{(1)} f(-L)] + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{112}$$

für beliebige Funktionen $f(s)$; dabei wurden die $e_{e,r}^{(2)}$ -Glieder vernachlässigt, da $f(s)$ mindestens von der Ordnung ε ist, so daß schon die Ausdrücke mit $e_{e,r}^{(1)}$ von zweiter Ordnung sind.

Unter Verwendung von (112) läßt sich das Druckintegral in (109) auf ein Integral über S_0 und einen von $e_{e,r}^{(1)}$ abhängigen Zusatzterm zurückführen. Für den Schnittpunkt der freien Oberfläche $Y(x;t)$ (4) und der Körperkontur $y(s;t)$ (3) gilt

$$y(s;t) = Y(x(s);t), \tag{113}$$

mit $|s| = \frac{S}{2}$. Durch Taylor-Entwicklung von (113) bezüglich der Lage $s = L$ und Gleichsetzung von Gliedern gleicher Ordnung bezüglich ϵ ergibt sich für $e^{(1)} = \begin{vmatrix} e^{(1)} \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{(1)} \\ r \end{vmatrix}$ nach (111)

$$e^{(1)} = \frac{Y^{(1)}(\bar{x}(L); t) - b \sin \omega t}{\partial \bar{y}(L) / \partial S}, \quad (114)$$

wobei der Störansatz (19) für $Y(x, t)$ berücksichtigt wurde.

Durch Einsetzen von $Y_1^{(1)}(x; t)$ (A.1.4) und $y_0(t)$ (2) in (114) ergibt sich für $e^{(1)}$ in dimensionsloser Form

$$e^{(1)} = \frac{[(\nu b) \varphi_{1,c}^{(1)}(\bar{x}(L), 0) - 1] \sin \omega t - (\nu b) \varphi_{1,s}^{(1)} \cos \omega t}{\partial \bar{y}(L) / \partial S} \quad (114)'$$

DRUCKGRÖSSEN

Entsprechend den unter 1.4 angestellten Überlegungen läßt sich $P(x, y; t)$, ähnlich dem Geschwindigkeitspotential $\Phi(x, y; t)$ (15), bezüglich ϵ folgendermaßen entwickeln:

$$P(x, y; t) = \sum_{n=0}^N \epsilon^n p^{(n)}(x, y; t). \quad (115)$$

Durch Entwicklung von (115) in einer Taylor-Reihe bezüglich der Ruhelage $S_0(\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ und Einsetzen in (108) ergeben sich unter Berücksichtigung von Φ (20) und nach Ordnen der anfallenden Glieder bis zur zweiten Ordnung bezüglich ϵ die Druckausdrücke $p^{(n)}$ entlang der Körperkontur, für $0 \leq n \leq 2$:

$$p^{(0)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = -\rho g \bar{y}(s), \quad (116)$$

$$p^{(1)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s); t) = \rho [\omega \varphi_{1,c}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) - g b] e^{-j\omega t}, \quad (117)$$

$$p^{(2)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s); t) + j b p_y^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}; t) e^{-j\omega t} =$$

$$\frac{\rho b \omega}{2} \varphi_{1y}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\rho}{4} (\varphi_{1x}^{(1)} \bar{\varphi}_{1x}^{(1)} + \varphi_{1y}^{(1)} \bar{\varphi}_{1y}^{(1)}) - \quad (118)$$

$$- \rho [-j 2\omega \varphi_2^{(2)} + \frac{\omega b}{2} \varphi_{1y}^{(1)} + \frac{1}{4} (\varphi_{1x}^{(1)2} + \varphi_{1y}^{(1)2})] e^{-j2\omega t}.$$

Der hydrostatische Druckterm $p^{(0)}$ wird im weiteren nicht mehr berücksichtigt.

Mit den Abkürzungen

$$P^{(1)} = p^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}; t),$$

$$P^{(2)} = p^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}; t) + j b p_y^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}; t) e^{-j\omega t}, \quad (119)$$

und nach Einführung von dimensionslosen Größen (siehe entsprechende Liste am Anfang dieser Arbeit) läßt sich der hydrodynamische Druck nach Gl.(115) bis (119) entlang der getauchten Körperkontur S folgendermaßen darstellen:

$$\bar{P}(\bar{x}(s), \bar{y}(s); t) = \frac{P}{\rho g b} = \varepsilon \bar{P}^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{P}^{(2)} + O(\varepsilon^3). \quad (120)$$

Unter Berücksichtigung der einfach harmonischen Sinus-Bewegungsfunktion (2), des nichtlinearen Übertragungsmodells (16), können die Druckglieder erster bzw. zweiter Ordnung wie folgt geschrieben werden.

Es ergibt sich für das hydrodynamische Druckglied erster Ordnung

$$\bar{P}^{(1)} = |\bar{P}_A^{(1)}| \sin(\omega t + \delta_p^{(1)}) \quad (121)$$

$$= \bar{p}_c^{(1)} \cos \omega t + \bar{p}_s^{(1)} \sin \omega t,$$

mit (117) in dimensionsloser Form

$$\begin{aligned}\bar{p}_c^{(1)} &= -(\nu b) \varphi_{1S}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}), \\ \bar{p}_s^{(1)} &= (\nu b) \varphi_{1C}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}) - 1.\end{aligned}\quad (122)$$

Die Druckamplitude $\bar{p}_A^{(1)}$ bzw. die Druckphase $\delta_p^{(1)}$ relativ zur Bewegungsfunktion ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}\bar{p}_A^{(1)} &= (\bar{p}_c^{(1)2} + \bar{p}_s^{(1)2})^{1/2}, \\ \delta_p^{(1)} &= \arctg \left\{ \frac{\bar{p}_c^{(1)}}{\bar{p}_s^{(1)}} \right\},\end{aligned}\quad (123)$$

mit $0 \leq \delta_p^{(1)} \leq 2\pi$.

Der Druckterm zweiter Ordnung $\bar{p}^{(2)}$ besteht aus einem zeitunabhängigen statischen Druckanteil, wie anhand der ersten zwei Glieder auf der rechten Seite von (118) erkennbar ist, und einem zeitabhängigen Druckanteil zweiter Ordnung, der mit der doppelten Erregerfrequenz schwingt. Dies entspricht auch der Form des Störungsansatzes für Φ (20). Das Vorhandensein eines zeitkonstanten Druckterms impliziert die Ausübung einer zusätzlichen Auftriebs- oder Sinkkraft auf den Körper, die bei der Theorie erster Ordnung nicht erfaßt wird.

Mit

$$\begin{aligned}\bar{p}^{(2)} &= \bar{p}_0^{(2)} + |\bar{p}_A^{(2)}| \sin(2\omega t + \delta_p^{(2)}) \\ &= \bar{p}_0^{(2)} + \bar{p}_c^{(2)} \cos 2\omega t + \bar{p}_s^{(2)} \sin 2\omega t,\end{aligned}\quad (124)$$

ergibt sich aus (118) in dimensionsloser Form für den zeitunabhängigen Druckterm zweiter Ordnung

$$\begin{aligned}\bar{p}_0^{(2)} &= \frac{1}{2} (\nu b) \left[\frac{\partial \varphi_{1C}^{(1)}}{\partial y}(\bar{x}, \bar{y}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\left\{ \frac{\partial \varphi_{1C}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1C}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1S}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1S}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 \right)].\end{aligned}\quad (125)$$

Man erkennt, daß zur Bestimmung von $\bar{p}_0^{(2)}$ die Lösung des linearen $\varphi_1^{(1)}$ -Problems ausreicht und nur die Kenntnis der Ableitungen des $\varphi_1^{(1)}$ -Potentials in x- und y-Richtung entlang der Körperkontur erforderlich sind.

Diese werden zweckmäßig über die Ableitungen in s- und \vec{n} -Richtung berechnet, da sonst bei vertikalen Spantformen numerische Schwierigkeiten auftreten würden.

Es gilt

$$\Phi_x^{(1)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = \Phi_s^{(1)} \cos \alpha + \Phi_n^{(1)} \sin \alpha, \quad (126)$$

$$\Phi_y^{(1)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = \Phi_s^{(1)} \sin \alpha - \Phi_n^{(1)} \cos \alpha,$$

wobei die Ableitung $\Phi_n^{(1)}$ in Richtung der äußeren Normale aufgrund der vorgegebenen Körperbewegung bekannt ist und nur $\Phi_s^{(1)}$ in Richtung der Bogenlänge s (Abb. 1) numerisch zu ermitteln verbleibt.

Schließlich bekommt man aus einer dimensionslosen Darstellung von (118) die folgenden Ausdrücke für den zeitabhängigen dynamischen Druckterm zweiter Ordnung nach (124):

$$\begin{aligned} \bar{p}_c^{(2)} = (\nu b) & \left[-2 \varphi_{25}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \left(\left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 \right) \right], \end{aligned} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} \bar{p}_s^{(2)} = (\nu b) & \left[2 \varphi_{2c}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial y} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (128)$$

Entsprechend den Größen erster Ordnung (122) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \bar{p}_A^{(2)} &= (\bar{p}_c^{(2)2} + \bar{p}_s^{(2)2})^{1/2}, \\ \delta_p^{(2)} &= \arctg \left\{ \frac{\bar{p}_c^{(2)}}{\bar{p}_s^{(2)}} \right\}. \end{aligned} \quad (129)$$

Die Berechnung des z e i t a b h ä n g i g e n dynamischen Druckterms zweiter Ordnung erfordert, wie nach (127) bzw. (128) ersichtlich, die Lösung sowohl des $\varphi_1^{(1)}$ - als auch des $\varphi_2^{(2)}$ -Problems.

Für verschiedene Spantformen und Erregerfrequenzen sind die hier dargestellten Druckausdrücke e r s t e r und z w e i - t e r Ordnung numerisch ermittelt und in den angehängten Diagrammen einige Beispiele davon graphisch wiedergegeben. Eine Diskussion der erhaltenen Ergebnisse wird unter Punkt 3.3 durchgeführt.

KRAFTGRÖSSEN

Unter Berücksichtigung von (109) bzw. (112) und (114) für die Auswertung des sich ergebenden Druckintegrals sowie des zu integrierenden hydrodynamischen Druckes \bar{P} (120) ergibt sich für die hydrodynamische Druckkraft in V e r t i k a l richtung \bar{F}_V in dimensionsloser Form folgende Darstellung:

$$\bar{F}_V(t) = \frac{F_V}{2\rho g b^2} = \varepsilon \bar{F}_V^{(1)} + \varepsilon^2 \bar{F}_V^{(2)} + O(\varepsilon^3). \quad (130)$$

Dabei gilt für die hydrodynamische Druckkraft e r s t e r Ordnung unter Berücksichtigung von (122)

$$\begin{aligned} \bar{F}_V^{(1)} &= |\bar{F}_{VA}^{(1)}| \sin(\omega t + \delta_F^{(1)}) \\ &= \bar{f}_{Vc}^{(1)} \cos \omega t + \bar{f}_{Vs}^{(1)} \sin \omega t, \end{aligned} \quad (131)$$

mit

$$\bar{f}_{Vc}^{(1)} = -(\nu b) \int_0^L \varphi_{1s}^{(1)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} ds, \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{Vs}^{(1)} &= (\nu b) \int_0^L \varphi_{1c}^{(1)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} ds - \\ &\quad - \bar{x}(L), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \bar{F}_{VA}^{(1)} &= (\bar{f}_{VC}^{(1)2} + \bar{f}_{VS}^{(1)2})^{1/2}, \\ \delta_F^{(1)} &= \arctg \left\{ \frac{\bar{f}_{VC}^{(1)}}{\bar{f}_{VS}^{(1)}} \right\}, \end{aligned} \quad (133)$$

wobei $\delta_F^{(1)}$ auf die Bewegungsfunktion bezogen wird, mit $0 \leq \delta_F^{(1)} \leq 2\pi$.

Der Kraftterm zweiter Ordnung $\bar{F}_V^{(2)}$ besteht, wie der entsprechende Druckterm (124), aus einem zeitunabhängigen statischen und einem zeitabhängigen dynamischen Anteil, mit

$$\begin{aligned} \bar{F}_V^{(2)} &= \bar{F}_{OV}^{(2)} + |\bar{F}_{VA}^{(2)}| \sin(2\omega t + \delta_F^{(2)}) \\ &= \bar{F}_{OV}^{(2)} + \bar{f}_{VC}^{(2)} \cos 2\omega t + \bar{f}_{VS}^{(2)} \sin 2\omega t. \end{aligned} \quad (134)$$

Unter Berücksichtigung von (125) und (112) mit (114)' ergibt sich für $\bar{F}_{OV}^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \bar{F}_{OV}^{(2)} &= \frac{1}{2}(\nu b) \int_0^L \left[\frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(\left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 \right) \right] \\ &\quad \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} ds + \frac{1}{4} \frac{(\partial \bar{x}(L)/\partial s)}{(\partial \bar{y}(L)/\partial s)}. \quad (135) \\ &\quad \cdot \left[\left\{ (\nu b) \varphi_{1s}^{(1)}(\bar{x}(L), 0) \right\}^2 + \left\{ (\nu b) \varphi_{1c}^{(1)}(\bar{x}(L), 0) - 1 \right\}^2 \right]. \end{aligned}$$

Schließlich bekommt man unter Anwendung von (127) und (128) und Berücksichtigung von (112) mit (114)' die folgenden Ausdrücke für die zeitabhängige dynamische Kraftgröße zweiter Ordnung nach (134):

$$\begin{aligned} \bar{f}_{vC}^{(2)} &= -2(\nu b) \int_0^L \varphi_{2S}^{(2)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} ds - \\ &- \frac{1}{2}(\nu b) \int_0^L \left[\frac{\partial \varphi_{1C}^{(1)}}{\partial y}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) + \frac{1}{2} \left(\left\{ \frac{\partial \varphi_{1C}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left\{ \frac{\partial \varphi_{1C}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{1S}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{1S}^{(1)}}{\partial y} \right\}^2 \right) \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} ds + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(\partial \bar{x}(L)/\partial s)}{(\partial \bar{y}(L)/\partial s)} \left[\left\{ (\nu b) \varphi_{1S}^{(1)}(\bar{x}(L), 0) \right\}^2 - \right. \\ &\left. - \left\{ (\nu b) \varphi_{1C}^{(1)}(\bar{x}(L), 0) - 1 \right\}^2 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_{vS}^{(2)} &= 2(\nu b) \int_0^L \varphi_{2C}^{(2)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} ds - \\ &- \frac{1}{2}(\nu b) \int_0^L \left[\frac{\partial \varphi_{1S}^{(1)}}{\partial y}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) + \right. \\ &+ \left. \frac{\partial \varphi_{1C}^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_{1S}^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{1C}^{(1)}}{\partial y} \frac{\partial \varphi_{1S}^{(1)}}{\partial y} \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} ds + \\ &+ \frac{1}{4} \frac{(\partial \bar{x}(L)/\partial s)}{(\partial \bar{y}(L)/\partial s)} \left[\left\{ (\nu b) \varphi_{1S}^{(1)}(\bar{x}(L), 0) \right\} \cdot \right. \\ &\left. \cdot \left\{ (\nu b) \varphi_{1C}^{(1)}(\bar{x}(L), 0) - 1 \right\} \right]. \end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich die dazugehörige Kraftamplitude und Phase bezüglich der Bewegung zu :

$$\overline{F}_{VA}^{(2)} = \left(\overline{F}_{VC}^{(2)2} + \overline{F}_{VS}^{(2)2} \right)^{1/2}, \quad (138)$$

$$\delta_F^{(2)} = \arctg \left\{ \frac{\overline{F}_{VC}^{(2)}}{\overline{F}_{VS}^{(2)}} \right\}.$$

Die hier aufgeführten Kraftgrößen erster und zweiter Ordnung sind für mehrere Spantformen und Erregerfrequenzen ähnlich den Druckgrößen numerisch ausgewertet und graphisch aufgetragen (vgl. 3.3) worden.

HYDRODYNAMISCHE MASSE

HYDRODYNAMISCHE DÄMPFUNG

Die in der Hydromechanik im Zusammenhang mit Schiffsschwingungsproblemen üblichen Begriffe der hydrodynamischen Masse und hydrodynamischen Dämpfung lassen sich nur dann sinnvoll definieren, wenn die erregende Bewegung und der sich ergebende hydrodynamische Druck mit der gleichen Frequenz harmonisch schwingen, d.h., wenn ein lineares Übertragungsmodell zugrundegelegt wird, was hier jedoch nach (16) nicht vorliegt.

Da die sich ergebenden hydrodynamischen Druckkräfte zweiter Ordnung diese Bedingung nicht erfüllen, werden im folgenden nur die linearen Ausdrücke betrachtet, obwohl der physikalische Ursprung der Druckkomponenten $\overline{F}_{VC}^{(2)}$ bzw. $\overline{F}_{VS}^{(2)}$, nämlich der aufgrund der Bewegung aufgebaute hydrodynamische Druck, zu vergleichbaren Begriffen führen könnte, wenn ein bekanntes Übertragungsmodell zur Verfügung steht.

Die Koeffizienten der hydrodynamischen Masse μ und der hydrodynamischen Dämpfung λ werden als diejenigen Kraftkoeffizienten der hydrodynamischen Druckkraft definiert, die phasengleich zu der Beschleunigung bzw. der Geschwindigkeit des schwingenden Körpers stehen. Unter Berücksichtigung der zugrundegelegten sinusförmigen Erregerfunktion $y_0(t)$ (2) lassen sich aus der hydrodynamischen Druckkraft erster Ordnung nach (131) und (132) mit

$$\varepsilon F_V^{(1)} = -\mu \gamma_0^\infty - \lambda \gamma_0,$$

die Größen der hydrodynamischen Masse bzw. hydrodynamischen Dämpfung in dimensionsloser Form folgendermaßen darstellen:

$$\bar{F} = \frac{\mu}{\frac{1}{2} \pi \rho b^2} = \frac{4}{\pi} \int_0^L \varphi_{1c}^{(1)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} ds, \quad (139)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\frac{1}{2} \pi \rho b^2 \omega} = \frac{4}{\pi} \int_0^L \varphi_{1s}^{(1)}(\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \frac{\partial \bar{x}}{\partial s} ds.$$

Die übliche physikalische Interpretation der hydrodynamischen Dämpfung als ein Maß für die in Form von Wellen abgestrahlte Energie ist hier nicht mehr haltbar, da die Amplitude der abgestrahlten Wellen ebenso von Termen zweiter Ordnung abhängt, wie im folgenden noch gezeigt wird. Für verschiedene Spantformen sind die Werte von \bar{F} bzw. $\bar{\lambda}$ nach verschiedenen Methoden ermittelt und in Diagrammen aufgetragen (s. 3.3) worden.

Für die praktische Auswertung der hier aufgestellten Druckintegrale wird angenommen, daß das nach einer C l o s e - F i t - Methode berechnete Potential bzw. der daraus abgeleitete hydrodynamische Druck im i -ten Mittelpunkt einen Mittelwert für das i -te Segment darstellt, so daß die Integration in eine Summation umgewandelt werden darf.

Dies angewendet auf Gl. (139) bedeutet:

$$\bar{F} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^N \varphi_{1c}^{(1)}(x_j, y_j) \cos \alpha_j |S_j|, \quad (140)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^N \varphi_{1s}^{(1)}(x_j, y_j) \cos \alpha_j |S_j|.$$

WELLENPROFILGRÖSSEN

Aus der B e r n o u l l i schen Gleichung an der freien Oberfläche (7) folgt für das Wellenprofil $y = Y(x;t)$ (implizit):

$$Y(x;t) = -\frac{1}{g} \left\{ \Phi_x(x, Y(x,t); t) + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right\}. \quad (141)$$

Durch Einsetzen der Störansätze für Φ (17) und Y (19) in (141) und nach Gleichsetzen von Gliedern gleicher Ordnung bezüglich des Entwicklungsparameters und gleicher harmonischer Zeitabhängigkeit ergibt sich für die nichttriviale n-Wellenprofilgrößen $Y_k^{(n)}(x;t)$ nach Anhang A.1:

$$Y(x;t) = \epsilon Y_1^{(1)}(x;t) + \epsilon^2 (Y_0^{(2)}(x) + Y_2^{(2)}(x;t)) + O(\epsilon^3), \quad (142)$$

mit

$$Y_1^{(1)}(x;t) = j \frac{\omega}{g} \bar{\varphi}_1^{(1)}(x,0) e^{-j\omega t}, \quad (143)$$

$$Y_0^{(2)}(x) = -\frac{1}{4g} [\bar{\varphi}_{1x}^{(1)}(x,0) \bar{\varphi}_{1x}^{(1)} + \bar{\varphi}_{1y}^{(1)} \bar{\varphi}_{1y}^{(1)}] + \frac{\omega^2}{2g^2} \bar{\varphi}_1^{(1)} \bar{\varphi}_{1y}^{(1)}, \quad (144)$$

$$Y_2^{(2)}(x;t) = \frac{1}{g} [j 2\omega \bar{\varphi}_2^{(2)}(x,0) - \frac{\omega^2}{2g} \bar{\varphi}_1^{(1)} \bar{\varphi}_{1y}^{(1)} - \frac{1}{4} (\bar{\varphi}_{1x}^{(1)2} + \bar{\varphi}_{1y}^{(1)2})] e^{-j2\omega t}. \quad (145)$$

Entsprechend der Form der Störungsansätze von Φ (20) und der bisher aus Φ abgeleiteten physikalischen Größen verhält sich das Wellenprofil nach (142) ähnlich. Neben zwei zeitabhängigen Wellenprofiltermen erster bzw. zweiter Ordnung tritt mit $Y_0^{(2)}(x)$ (144) ein zeitkonstantes Glied zweiter Ordnung auf, das eine zeitunabhängige Wirkung auf das Wellenprofil zur Folge hat, was die lineare Theorie nicht zu beschreiben vermag. Aus (144) ergibt sich die folgende dimensionslose Form für $Y_0^{(2)}$:

$$\begin{aligned} \overline{Y}_0^{(2)}(x) = & \frac{1}{4} (\nu b)^3 (\varphi_{1c}^{(1)2}(x,0) + \varphi_{1s}^{(1)2}) - \\ & - \frac{1}{4} (\nu b) \left(\left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 \right). \end{aligned} \quad (146)$$

Es läßt sich aus Beispielrechnungen von (146) erkennen, daß einerseits in der Nähe des Körpers, dessen Schwingungsmittellage durch die konstant wirkende $S \sin k$ kraft (135) aus der Ruhelage verschoben wurde, u.a. entsprechend die Schwingungsmittellage der abgehenden Wellen verändert wird, ein aus der nichtlinearen Theorie der freien Wellen wohlbekanntes Phänomen [54]. Andererseits ist das asymptotische Verhalten von (146) im Unendlichen

$$\overline{Y}_0^{(2)}(|x| \rightarrow \infty) \cong 0, \quad (147)$$

was aus der asymptotischen Form von $\varphi_{1c}^{(1)}$ bzw. $\varphi_{1s}^{(1)}$ resultiert, wie im folgenden noch gezeigt wird.

Nach Umschreiben der Wellenprofilgröße erster Ordnung $Y_1^{(1)}(x;t)$ (143) in reelle und dimensionslose Form

$$\begin{aligned} \overline{Y}_1^{(1)}(x;t) = & (\nu b) [\varphi_{1c}^{(1)}(x,0) \sin \omega t - \\ & - \varphi_{1s}^{(1)} \cos \omega t], \end{aligned} \quad (148)$$

soll deren asymptotisches Verhalten im Unendlichen durch Überprüfung der Sommerfeldschen Bedingung (30) untersucht werden.

Das asymptotische Verhalten der Potentialausdrücke

$\varphi_{1c}^{(1)}(|x| \rightarrow \infty, 0)$ bzw. $\varphi_{1s}^{(1)}$ ist dadurch gekennzeichnet, daß $\varphi_{1c}^{(1)}$ bzw. $\varphi_{1s}^{(1)}$ einfach harmonisch und mit konstanter Amplitude schwingen, wobei $\varphi_{1s}^{(1)}$ um 90° phasenverschoben der Größe $\varphi_{1c}^{(1)}$ vorausseilt, wie in Diagramm Nr. 1 und Nr. 2 gezeigt wird.

Daraus ergeben sich die folgenden asymptotischen Ausdrücke:

$$\begin{aligned} \varphi_{1c}^{(1)}(|x| \rightarrow \infty, 0) &\cong \frac{\bar{h}_w^{(1)}}{(\nu b)} \sin[(\nu b)x - \delta_w^{(1)}], \\ \varphi_{1s}^{(1)}(|x| \rightarrow \infty, 0) &\cong -\frac{\bar{h}_w^{(1)}}{(\nu b)} \cos[(\nu b)x - \delta_w^{(1)}], \end{aligned} \quad (149)$$

die die Sommerfeldsche Bedingung (30) erfüllen. Dabei bedeutet $\bar{h}_w^{(1)}$ die dimensionslose Wellenprofilamplitude erster Ordnung, mit

$$\bar{h}_w^{(1)} = (\nu b) \left[(\varphi_{1c}^{(1)})^2 + (\varphi_{1s}^{(1)})^2 \right]^{1/2}, \quad (150)$$

und $\delta_w^{(1)}$ die entsprechende Wellenprofilphase bezüglich der Bewegungsfunktion. Sie wird durch die Bestimmung eines Nulldurchganges von $\varphi_{1c}^{(1)}$ oder $\varphi_{1s}^{(1)}$ nach (149) für genügend große x -Werte ermittelt.

Bekanntlich läßt sich die Wellenamplitude erster Ordnung im Unendlichen durch den hydrodynamischen Dämpfungskoeffizienten $\bar{\lambda}$ (139), der ein Maß für die in Form von Wellen abgehende Energie bei der linearen Theorie darstellt, ausdrücken:

$$\bar{h}_w^{(1)} = (\nu b) \left[\frac{\eta}{2} \bar{\lambda} \right]^{1/2}. \quad (151)$$

Die in (151) aufgestellte Beziehung ist eine gute Kontrolle für das asymptotische Verhalten der Potentiale erster Ordnung für $y = 0$ und große x -Werte, da sie direkt mit (150) verglichen werden kann. Dies ist für die numerische Lösung des Problems zweiter Ordnung von großer Bedeutung, insbesondere für die Auswertung der in 2.4 dargestellten, bis zum Unendlichen reichenden, Störungs-Integrale.

Damit läßt sich die asymptotische Form von $\bar{Y}_1^{(1)}$ wie folgt darstellen:

$$\bar{Y}_1^{(1)}(|x| \rightarrow \infty; t) \cong \bar{h}_w^{(1)} \cos[(\nu b)x - \omega t - \delta_w^{(1)}]. \quad (152)$$

Entsprechend wird das asymptotische Verhalten im Unendlichen von $\bar{Y}_2^{(2)}(x,t)$ (145) untersucht, wobei sich in dimensionsloser reeller Form aus (145) ergibt:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_2^{(2)}(x,t) = & \frac{1}{4}(\nu b) [-8\varphi_{25}^{(2)}(x,0) - 3(\nu b)^2 \cdot \\ & \cdot (\varphi_{1c}^{(1)2} - \varphi_{1s}^{(1)2}) - (\left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2 - \left\{ \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x} \right\}^2)] \cdot \\ & \cdot \cos 2\omega t + \quad (153) \\ & + \frac{1}{4}(\nu b) [8\varphi_{2c}^{(2)} - 6(\nu b)^2 \varphi_{1c}^{(1)} \varphi_{1s}^{(1)} - \\ & - 2 \left\{ \frac{\partial \varphi_{1c}^{(1)}}{\partial x} \right\} \left\{ \frac{\partial \varphi_{1s}^{(1)}}{\partial x} \right\}] \sin 2\omega t. \end{aligned}$$

Ähnlich dem asymptotischen Verhalten von $\varphi_{1c}^{(1)}$ bzw. $\varphi_{1s}^{(1)}$ nach Gl. (149) ergibt sich für $\varphi_{2c}^{(2)}$ bzw. $\varphi_{2s}^{(2)}$ unter Berücksichtigung der zu erfüllenden Sommerfeldschen Bedingung (36) im Unendlichen

$$\begin{aligned} \varphi_{2c}^{(2)}(|x| \rightarrow \infty, 0) & \cong \frac{\bar{h}_w^{(2)}}{(\nu b)} \sin [4(\nu b)x - \delta_w^{(2)}], \\ \varphi_{2s}^{(2)}(|x| \rightarrow \infty, 0) & \cong -\frac{\bar{h}_w^{(2)}}{(\nu b)} \cos [4(\nu b)x - \delta_w^{(2)}], \end{aligned} \quad (154)$$

mit der dimensionslosen Wellenprofilamplitude zweiter Ordnung

$$\bar{h}_w^{(2)} = (\nu b) [(\varphi_{2c}^{(2)}(|x| \rightarrow \infty, 0))^2 + \varphi_{2s}^{(2)}(|x| \rightarrow \infty, 0)^2]^{1/2}, \quad (155)$$

und der Wellenprofilphase zweiter Ordnung $\delta_w^{(2)}$, die durch einen Nulldurchgang von $\varphi_{2c}^{(2)}$ oder $\varphi_{2s}^{(2)}$ bestimmt werden kann.

Durch Einsetzen von (154) in (153) und unter Berücksichtigung von (149) ergibt sich für $\bar{Y}_2^{(2)}$ das folgende asymptotische Verhalten im Unendlichen

$$\bar{\Sigma}_2^{(2)} (|x| \rightarrow \infty, 0) \cong \bar{h}_{w_1}^{(2)} \cos [4(\nu b)x - 2\omega t - \delta_w^{(2)}] + \quad (156)$$

$$+ \bar{h}_{w_2}^{(2)} \cos [2(\nu b)x - 2\omega t - 2\delta_w^{(1)}],$$

mit

$$\bar{h}_{w_1}^{(2)} = 2 \bar{h}_w^{(2)}, \quad (157)$$

$$\bar{h}_{w_2}^{(2)} = \frac{1}{2} (\nu b) \bar{h}_w^{(1)2}$$

Unter Berücksichtigung von (152) und (156) läßt sich für die nichtlineare Theorie zweiter Ordnung feststellen, daß das aufgrund einer e i n f a c h harmonischen Erregung entstehende Wellenprofil im Unendlichen durch die Superposition d r e i - e r Wellensysteme beschrieben wird; nämlich eines zeitlich e i n f a c h harmonischen Systems mit der Wellenzahl (νb) nach (152), eines zeitlich z w e i f a c h harmonischen Systems mit der d o p p e l t e n Wellenzahl und schließlich eines weiteren zeitlich z w e i f a c h harmonischen Systems mit der v i e r f a c h e n Wellenzahl nach (156).

Insofern läßt sich die abgeführte Energie in Form von bis zum Unendlichen reichenden Wellen durch e i n e n hydrodynamischen Koeffizienten nicht beschreiben, wie schon vorher festgestellt wurde. Es wäre deswegen unkorrekt, von hydrodynamischen Dämpfungskoeffizienten zweiter Ordnung im linearen Sinn zu sprechen.

3.

NUMERISCHE ERGEBNISSE

3.1

R e c h e n g a n g

Zur numerischen Auswertung der im vorigen Kapitel (2.3 bzw.2.4) aufgestellten Integralgleichungen bzw. der aus den Potentialgrößen abgeleiteten physikalischen Größen ist ein EDV-Rechenprogramm entwickelt und an der CDC-6600 Rechenanlage der Technischen Universität Berlin als Permanentfile installiert worden [82] .

Als Ausgangspunkt für die Entwicklung dieses Programms diente eine Arbeit von W. F r a n k und N. S a l v e s e n [7] über die Berechnung der l i n e a r e n Tauch- und Stampfbewegungen eines Schiffes im Seegang.

Da die bei der Auswertung der G r e e n schen Funktionen (50) anfallenden C a u c h y schen Hauptwertintegrale sehr viel Rechenzeit in Anspruch nehmen, war es zunächst notwendig, die von W. F r a n k zu deren Auswertung verwendeten Reihenentwicklungen, die für hohe Frequenzen und/oder relativ breite Spanten sowie für getauchte Zylinderformen sehr langsam konvergieren, durch schnellere Rechenverfahren zu ersetzen. Deswegen wurden mehrere numerische Lösungsmöglichkeiten gegenübergestellt, wobei eine Polynomapproximation hohen Grades die günstigsten Ergebnisse für beliebige Frequenzen und Spantformen lieferte (s. Anhang D.3).

Ferner war es notwendig, die in der Nähe der Eigenfrequenzen des Problems, der sog. I r r e g u l a r i t ä t e n , sich ergebenden Lösungen zu korrigieren, da dort die konventionelle C l o s e - F i t Methode versagt, wie ausführlich im Anhang B.4 bis B.6 dargelegt wird. Zur praktischen Abhilfe ist eine relativ einfache Korrekturmethode entwickelt worden, die im linearen und z.T. im nichtlinearen Fall sehr gute, sinnvolle Ergebnisse auch für die Eigenfrequenzen des inneren Problems liefert. Diese Methode mit einigen typischen Beispielrechnungen wird genauer unter 3.2 dargestellt.

Darüber hinaus wurde als Vorbereitung zur Lösung des Problems zweiter Ordnung neben der E i n f a c h s c h i c h t potentialdarstellung die E i n f a c h - und D o p p e l - s c h i c h t potentialdarstellung im linearen Fall behandelt, was insbesondere die Ableitung der G r e e n schen Funktion

nach den Quellpunktkoordinaten erfordert (vgl. Anhang D.2). Ausführliche Vergleiche dieser beiden Darstellungsarten im *l i n e a r e n* Fall findet man in einer Arbeit von P. C h a t a i g n i e r und K . P r y t z [1] .

Nach der Eingabe der Spantform durch eine vorgegebene Anzahl von $N+1$ Aufmaßpunkten und des zu untersuchenden Erregerfrequenzbereichs in Form von dimensionslosen Wellenzahlen lassen sich zunächst die frequenzunabhängigen logarithmischen Terme des Einflußkoeffizienten $I_{ij}^{(1)}$ und $K_{ij}^{(1)}$ mit Hilfe der im Anhang D.1 und D.2 aufgestellten Formeln ermitteln, nachdem die Spantform durch einen Polygonzug approximiert worden ist. Anschließend werden für die erste zu untersuchende Wellenzahl die restlichen, frequenzabhängigen Terme der Koeffizienten- und Störmatrix ermittelt, wobei für die Berechnung der C a u c h y schen Hauptwertintegrale die im Anhang D.3 angegebene Polynom - Approximationsformel verwendet wird. Das dadurch aufgestellte Gleichungssystem, bestehend aus $2N$ Gleichungen für $2N$ Unbekannte, kann mit Hilfe einer R e d u k t i o n s - methode, wie etwa durch einen A u s t a u s c h - Algorithmus mit P i v o t i s i e r u n g s strategie zur Verkleinerung von Rundungsfehlern [71], ohne besondere Probleme gelöst werden. Die gleiche Rechnung wird für alle in Frage kommenden Wellenzahlen wiederholt, es sei denn, diese liegen im Einflußbereich der schon vorher erkannten Eigenfrequenzen des inneren Problems. In diesem Fall werden die Ergebnisse durch eine S p l i n e - Interpolation zwischen brauchbaren Lösungen erzielt. Die Abschätzung der Größe und Lage des Einflußbereichs der Eigenfrequenzen kann entweder durch eine ständige Beobachtung der Determinantenwerte der Einflußmatrix erfolgen oder durch vorherige Rechnung näherungsweise im voraus bestimmt werden, wie genauer unter 3.2 gezeigt wird.

Nachdem einerseits im Falle einer E i n f a c h - und D o p p e l s c h i c h t potentialdarstellung die Potentialwerte e r s t e r Ordnung d i r e k t entlang der getauchten Körperkontur ermittelt worden sind und andererseits im Falle der E i n f a c h s c h i c h t potentialdarstellung die unbekanntenen Quellstärken und somit i n d i r e k t die gleichen Potentialwerte feststehen, lassen sich anhand der in 2.3 aufgestellten Integralbeziehungen die Potentialwerte e r s t e r Ordnung entlang der Ruhewasserlinie bis zur Einstellung eines

asymptotischen Verhaltens im Unendlichen berechnen. Praktisch wird dieser Zustand schon viel früher erreicht, so daß die Rechnung in einem Abstand von ca. $s e c h s$ Halbbreiten des Zylinders, für $(\nu b) > 0,1$, abgebrochen werden darf. Ein sehr gutes Kriterium für das praktische Erreichen des asymptotischen Zustandes der Potentiale ist die Größe des hydrodynamischen Dämpfungskoeffizienten, der sich, wie im vorigen Kapitel (2.5) gezeigt wurde, einerseits aus den Potentialwerten entlang der getauchten Körperkontur und andererseits aus der Wellenprofilamplitude $e r s t e r$ Ordnung im Unendlichen errechnen läßt, wobei die letztere aus den asymptotischen Potentialwerten gebildet wird.

Damit sind die Potentialwerte $e r s t e r$ Ordnung entlang der hier interessierenden Problemränder ermittelt, so daß alle in Frage kommenden hydrodynamischen Größen $e r s t e r$ Ordnung, wie die Druckverteilung entlang der getauchten Körperkontur und die daraus resultierende hydrodynamische Kraft sowie die Wellenprofilform bis zum Erreichen des asymptotischen Zustandes nach den in 2.5 aufgestellten Formeln berechnen lassen.

Andererseits werden die Potentialwerte entlang der getauchten Körperkontur und der freien Oberfläche numerisch in der gewünschten Richtung mit Hilfe von $S p l i n e$ -Funktionen oder von anderen Polynomverfahren differenziert und die Störungsmatrix zur Lösung des Problems $z w e i t e r$ Ordnung gebildet. Dabei wird die bis zum Unendlichen reichende Integration längs der Ruhewasserlinie nur bis zum praktischen Erreichen des asymptotischen Verhaltens der Potentialwerte $e r s t e r$ Ordnung, d.h. nur bis ca. $x \cong 6 \cdot b$, durchgeführt, da der Integrand entsprechend gegen Null strebt.

Es verbleibt die erneute Berechnung der frequenzabhängigen Integrale, diesmal für die $v i e r f a c h e$ Wellenzahl, während die frequenzunabhängigen Integralgrößen in der Koeffizientenmatrix sowie in der Störungsmatrix gleich wie in der $e r s t e n$ Ordnung bleiben, so daß sie erneut verwendet werden können. Dabei wird unterstellt, daß zur Lösung des Problems $z w e i t e r$ Ordnung die gleiche Anzahl von Segmenten die Körperkontur approximieren wie bei der $e r s t e n$ Ordnung.

Nach Aufstellung des in 2.4 dargestellten Gleichungssystems bekommt man durch dessen Lösung, nach dem gleichen Lösungsver-

fahren wie in der ersten Ordnung direkt die Potentialwerte zweiter Ordnung entlang der getauchten Körperkontur und über eine Integralbeziehung anhand dieser Werte, die entsprechenden Potentialgrößen entlang der Ruhewasserlinie. Dies wird für alle in Frage kommenden Wellenzahlen wiederholt, es sei denn, diese liegen im Einflußbereich der Eigenfrequenzen des Problems zweiter Ordnung und zusätzlich, falls dies nicht berücksichtigt wurde, des Problems erster Ordnung, welches "irreguläre" rechte Seiten geliefert hätte. Die Abschätzung der Lage und Größe des Einflußbereichs der Eigenfrequenzen zweiter Ordnung läßt sich ähnlich dem Vorgehen beim linearen Fall vornehmen, wie noch unter 3.2 dargestellt wird. Auf jeden Fall ist die Berücksichtigung der Lage der Eigenfrequenzen beim Problem zweiter Ordnung unerlässlich, da diese schon ca. viermal früher im Frequenzband auftreten als beim entsprechenden Problem erster Ordnung.

Anhand der Potentialwerte zweiter Ordnung und erster Ordnung entlang der hier interessierenden Ränder ergeben sich schließlich mit Hilfe der in 2.5 aufgestellten Formeln alle in Frage kommenden physikalischen Größen zweiter Ordnung.

Das an der CDC-6600 Rechenanlage der Technischen Universität Berlin installierte EDV-Rechenprogramm ist zunächst auf $N = 24$ Aufmaßpunkte zur Beschreibung der halben Spantform im vierten Quadranten begrenzt. Es erfordert zum Laden und Rechnen einen Speicherplatz von 136000 WORDS (Oktal) Einheiten. Die in Anspruch genommene Zentralrechnerzeit beträgt bei 24 Aufmaßpunkten und einem Frequenzfall ca. 12 sec. zur vollständigen Berechnung aller in Frage kommenden physikalischen Größen erster und zweiter Ordnung. Die Rechenzeit wächst etwa quadratisch mit zunehmender Anzahl von Aufmaßpunkten. Die Wahl der Anzahl und der Lage der die Körperkontur approximierenden Segmente wird noch im folgenden besprochen. Mehr Informationen über den Rechenablauf im verwendeten EDV-Programm sind in [82] zu finden.

3.2 Irregularitätenproblem

Im Zusammenhang mit den Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von Lösungen der aufgestellten Integralgleichungen erster und zweiter Ordnung ist im Anhang B.4 nachgewiesen worden, daß das Auftreten von sog. irregulären Wellenzahlen, bei denen die Lösungsdarstellung sowohl nach der Einfachschicht- als auch nach der Einfach- und Doppelschichtpotential - Close - Fit Methode versagt, direkt mit dem Vorhandensein von nichttrivialen Lösungen für die entsprechenden homogenen adjungierten Integralgleichungen zusammenhängt.

Durch die gleichzeitige Betrachtung des inneren und äußeren Problems (nach Anhang B.4.3) lassen sich jedoch eindeutige und für alle Wellenzahlen gültige Lösungen erzielen. Dies wird praktisch durch die Anwendung einer sog. kombinierten Integralgleichungsmethode ermöglicht, wie genau im Anhang B.5 dargelegt worden ist.

Da jedoch das dafür notwendige Lösungsschema einige umfangreiche organisatorische Umstellungen des Rechenprogramms erfordern würde, werden zunächst einige einfachere Behelfsmethoden zur erfolgreichen Behandlung der Irregularitäten untersucht.

Nachdem festgestellt worden ist, daß das Irregularitätenproblem praktisch einem Eigenwertproblem zugeordnet ist, d.h. keine typische Eigenschaft der Close - Fit Methode, sondern der zu lösenden Integralgleichung ist, ist es zunächst erforderlich, die Lage dieser Wellenzahlen auf dem Frequenzband auf einfachem Weg, ohne die vollständige Lösung eines Eigenwertproblems, abzuschätzen.

Ein guter Indikator für das Erreichen einer Irregularität auf dem Frequenzband ist der Determinantenwert der Koeffizientenmatrix, der von der Größenordnung 10^N , bei N Aufmaßpunkten, ist. Theoretisch würde dieser Wert, bei einer exakten Lösung der Integralgleichung, beim Vorhandensein einer Irregularität gleich Null werden.

Da jedoch die Integralgleichung durch ein algebraisches Gleichungssystem approximiert wurde, wird beim Vorliegen einer Irregularität einerseits der Determinantenwert zwar stark abnehmen, jedoch nie Null werden und andererseits beginnt dieses Abnehmen

schon vor der Irregularitätenlage; ebenso allmählich geht der Wiederanstieg des Determinantenwertes nach dem Irregularitätenpunkt auf etwa den ursprünglichen Wert vor sich. Währenddessen sind die gelieferten algebraischen Lösungen physikalisch nicht vertretbar, obwohl mathematisch vorhanden (s. Diagramm Nr.3).

Je genauer die Integralgleichung durch ein Gleichungssystem approximiert wird, d.h. je größer N angenommen wird, umso kleiner wird der Einflußbereich einer vorhandenen Irregularität ausfallen und umso plötzlicher wird der Determinantenwert der Koeffizientenmatrix abnehmen. Diese Aussage wird anhand der errechneten Werte der hydrodynamischen Masse für ein Rechteckprofil, das für verschiedene N untersucht wurde, im Diagramm Nr.4 graphisch wiedergegeben.

Eine genaue Antwort auf die Frage nach dem funktionellen Zusammenhang zwischen der Breite des Irregularitäten-Einflußbereichs und N kann für beliebige Spantformen nicht gegeben werden.

Aufgrund von mehreren Beispielrechnungen für schiffsähnliche Spantformen wurde folgender empirischer Zusammenhang zwischen dem Irregularitäten-Einflußbereich $(\Delta \xi_b)^*$ und der Segmentanzahl N aufgestellt:

$$(\Delta \xi_b)^* \approx \text{konst.} \cdot \pi \frac{B}{T} \frac{1}{N} \begin{cases} \text{konst.} \sim 0,8; N \leq 8, \\ \text{konst.} \sim 1,2; N > 9. \end{cases} \quad (158)$$

Dabei besitzt Gl. (158) alle im Zusammenhang mit dem Irregularitätenproblem wichtigen Informationen; insbesondere gilt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (\Delta \xi_b)^* = 0,$$

und

$$\lim_{B \rightarrow 0} (\Delta \xi_b)^* = 0.$$

Die Frage nach der ungefähren Lage der ersten Irregularität im linearen Fall sowie der ersten und der folgenden beim Problem zweiter Ordnung, da im letzteren Fall die Irregularitäten ca. viermal früher und dichter

zueinander bei wachsender Erregerfrequenz auftreten, kann praktisch auf zwei verschiedenen Wegen beantwortet werden.

Einerseits läßt sich durch ständiges Nachprüfen des Determinantenwertes der Koeffizientenmatrix sowohl im Fall *e r s t e r* als auch *z w e i t e r* Ordnung eine plötzliche Änderung, die umso klarer ist, je größer N wird, durch die noch größere Änderung der Differentialwerte des beobachteten Kurvenverlaufs erfassen, so daß der oben angegebene Einflußbereich (158) aus der folgenden Auswertung ausgespart bleibt. Dies wird anhand eines graphisch aufgetragenen Beispiels im Diagramm Nr. 3 demonstriert.

Andererseits können die *e r s t e n* Irregularitäten *e r s t e r* und *z w e i t e r* Ordnung anhand einfacher Formeln abgeschätzt werden, wie genau im Anhang B.6 gezeigt wird. Dabei wird die offensichtliche Abhängigkeit des Auftretens von Irregularitäten vom (B / T) - Verhältnis ausgenutzt, insbesondere die feststellbare Tatsache, daß für $B \rightarrow 0$, also für getauchte schwingende Spantformen, die erste Irregularität gegen Unendlich strebt, während für relativ breite Spanten, mit großem B / T , die erste Irregularität in entgegengesetzter Richtung gegen Null wandert. Insofern darf angenommen werden, daß für Spantformen, die nicht *e r h e b l i c h* von einem Rechteckprofil mit gleichem B / T Verhältnis abweichen - das gilt praktisch für die meisten schiffsähnlichen Spantformen - die erste Irregularität des "äquivalenten" Rechteckprofils (Ersatzrechteckprofil) eine zumeist sehr gute Abschätzung für die Lage der ersten Irregularität der zu untersuchenden Spantform ergibt.

Diese Erkenntnis reicht jedoch allein nicht, um das Problem *z w e i t e r* Ordnung analog zum entsprechenden Problem *e r s t e r* Ordnung zu behandeln, denn das *i n n e r e* Rechteckproblem *z w e i t e r* Ordnung ist komplizierter als das entsprechende *e r s t e r* Ordnung, bei welchem relativ einfach die Lage der Irregularitäten anzugeben sind. Durch Zurückführung des Problems *z w e i t e r* Ordnung auf ein dem Problem *e r s t e r* Ordnung ähnliches Problem und ein weiteres irregularitätenfreies Randwertproblem, wie im Anhang B.3 gezeigt wird, läßt sich jedoch zumindest die *e r s t e* Irregularität *z w e i t e r* Ordnung relativ genau angeben.

Nach Anhang B.6 gilt für die *e r s t e* Irregularität *e r s t e r* und *z w e i t e r* Ordnung:

$$(\nu'^{(n)}(\beta)) \cong \frac{\pi}{n^2} \cdot \operatorname{cth} \left(\frac{\pi}{\beta/T} \right), \quad (159)$$

mit

$n = 1$ für die e r s t e Ordnung,

$n = 2$ für die z w e i t e Ordnung.

Diese Beziehung ist im Diagramm Nr.5 für verschiedene (B/T) -Verhältnisse eines Ersatzrechteckprofils graphisch wiedergegeben. Nachdem die Lage der Irregularitäten und die Breite ihres Einflußbereichs abgeschätzt worden sind, lassen sich alle diejenigen Potentiallösungen, die im kritischen Frequenzbereich gefragt sind, dadurch ermitteln, daß durch die außerhalb dieses Bereichs beiderseits der Irregularität liegenden, sinnvollen Lösungswerte ein S p l i n e - Polynom dritten Grades gelegt wird, welches einen glatten Funktionsverlauf ergibt. Die Potentiallösungen im kritischen Bereich können dann durch Interpolation ermittelt werden. Ein typisches Beispiel ist anhand des hydrodynamischen Massekoeffizienten eines Rechteckprofils im Diagramm Nr. 6 aufgetragen.

Bevor jedoch die dadurch erhaltenen Potentiallösungen weiter verwendet werden können, muß sichergestellt werden, daß die oberhalb der e r s t e n Irregularität außerhalb des kritischen Bereichs liegenden Potentiallösungen nicht innerhalb des kritischen Bereichs der z w e i t e n Irregularität liegen, was den richtigen Verlauf des Interpolationspolynoms erheblich beeinflussen würde.

Dieses Überlappen der kritischen Bereiche von mehreren aufeinander folgenden Irregularitäten bedeutet praktisch das Ende einer s i n n v o l l e n Close - Fit - Rechnung. Obwohl diese Erscheinung beim Problem e r s t e r Ordnung praktisch keine Bedeutung besitzt, es sei denn, es liegen entweder sehr breite Spantformen oder sehr wenige Aufmaßpunkte vor (vgl. Gl. (158)), so ist sie jedoch beim Problem z w e i t e r Ordnung eine nicht zu unterschätzende Erscheinung, die bei der Interpretation der Ergebnisse z w e i t e r Ordnung u n b e d i n g t berücksichtigt werden muß. In diesem Zusammenhang sind manche von R. P o t a s h [43] gelieferten Ergebnisse z w e i t e r

Ordnung nach einer Close - Fit Methode ein markantes Beispiel nicht sinnvoller Lösungen.

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Vermeidung solcher Überlappungen ist entsprechend Gl. (158) die Erhöhung der die Körperkontur approximierenden Segmentanzahl und die verstärkte Verteilung dieser Segmente in Richtung Körperboden. Letzteres folgt aus der feststellbaren Tatsache, daß die in der Nähe der freien Oberfläche befindlichen Körperpunkte stärker von der Irregularitätenscheinung betroffen werden, als die restlichen Körperstellen. Da sie jedoch, insbesondere bei den Tauchschwingungen, physikalisch relativ wenig das Strömungsbild beeinflussen - entscheidend ist der Richtungskosinus an der betreffenden Stelle in Vertikalrichtung - dürfen sich auch mathematisch nicht mehr die Potentiallösungen entscheidend verändern. Diese Erscheinung ist aber bei den Roll- oder Querbewegungen nicht mehr so beeinflussbar, jedoch war dies nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit.

Die hier beschriebene Lösungstechnik zur praktischen Handhabung des Irregularitätenproblems ist zwar einerseits einfach im Auffinden der Lage und des Einflußbereichs der Irregularitäten, erfordert jedoch einen relativ komplizierten Kontrollmechanismus in einem EDV-Rechenprogramm, das automatisch alle vorangegangenen Schritte möglichst schnell und speicherplatzsparend erledigt.

Schließlich sollte nicht unerwähnt eine Lösungsmethode für das Irregularitätenproblem bleiben, die zwar bisher in der Theorie öffentlich nicht untermauert wurde, jedoch als Spezialfall der im Anhang B.5 dargelegten kombinierten Integralgleichungsmethode interpretiert werden könnte.

Entsprechend einer Arbeit von K. J o h a n n e s s e n [10], der wiederum einem Vorschlag von C.M. L e e (1971) nachgegangen ist, wird die Ausdehnung der freien Oberfläche bzw. der Ruhewasserlinie als innerhalb der Zylinderkörperkontur fortgesetzt gedacht. Unendlich nah unterhalb dieser Ausdehnung wird der Verlauf eines die Spantform abschließenden horizontalen Decks angenommen. Nun wird entlang dieser Deckskontur die Erfüllung einer der beiden Bedingungen gefordert:

- a) entweder $\mathcal{P}_n = 0$, was der kinematischen Randbedingung entlang der restlichen Körperkontur entsprechen würde,

b) oder $\Phi = 0$.

Die erste dieser Möglichkeiten wurde von K. J o h a n n e s - s e n systematisch untersucht mit dem Ergebnis, daß einerseits zwar die ersten Irregularitäten zu h ö h e r e n Frequenzwerten v e r s c h o b e n wurden, andererseits jedoch offenkundig die Ergebnisse im niedrigen Frequenzbereich von der zusätzlichen Bedingung nicht immer in der richtigen Richtung beeinflusst worden sind. Ähnliches ist bei der Erfüllung der zweiten Bedingung entlang der oben definierten Deckskontur zu erwarten.

Obwohl die Stoßrichtung dieser Lösungsmethode sicherlich nicht falsch ist - es geht hauptsächlich um eine g e s c h i c k - t e Wahl von i n n e r e n Punkten in einem Spezialfall der im Anhang B.5 dargestellten allgemeineren Methode - wurde diese Möglichkeit hier praktisch nicht berücksichtigt, da keine gesicherten Ergebnisse für niedrige Frequenzen erwartet werden konnten.

3.3 P h y s i k a l i s c h e K e n n g r ö ß e n

Aus einer Vielzahl von Rechenergebnissen, die die Potentialgrößen e r s t e r und z w e i t e r Ordnung sowie die daraus abgeleiteten physikalischen Größen betreffen, sollen im folgenden nur diejenigen herausgestellt und kommentiert werden, die ein abgeschlossenes Bild über die Qualität der numerischen Auswertung von im 2. Kapitel angegebenen Lösungen und der daraus zu ziehenden Folgerungen zu vermitteln vermögen.

Obwohl die hier vorliegende Theorie für - fast - beliebige und zunächst bezüglich der Vertikalachse symmetrische Spantformen gültig ist, wurden im Rahmen dieser Arbeit nur in der Literatur bekannte und sowohl theoretisch als auch meßtechnisch genügend untersuchte Spantformen für die Rechenbeispiele ausgewählt. Ein Verzeichnis der im Rahmen dieser Arbeit u.a. untersuchten Spantformen mit Aufmaßtabellen ist am Schluß dieser Arbeit (S. 171) angegeben.

Die zum Vergleich herangezogenen entsprechenden Ergebnisse stammen bei der e r s t e n Ordnung von F. U r s e l l [20], W. P o r t e r [15], W. F r a n k [5], F. O g i l v i e [41]

und für die erste und zweite Ordnung von C. M. Lee [37] [39], G. Paris [42], R. Potash [43] und in einem Fall von H. Söding [45]. Für manche der untersuchten Spantformen lagen darüberhinaus Meßergebnisse von W. Portner [15] und J. Vugts [23] zum Vergleich vor.

Bei den im folgenden angestellten Vergleichen, insbesondere bezüglich der Größen zweiter Ordnung, ist stets zu berücksichtigen, daß die relativen Unterschiede zwischen den verschiedenen Autoren absolut um ein Vielfaches kleiner sind, da sie mit der Größe ϵ^2 multipliziert werden müssen (s. 2.5), wobei ϵ genügend klein und von der Größenordnung des Verhältnisses der Schwingungsamplitude a zur maximalen Halbbreite b ist.

HYDRODYNAMISCHE DRUCKGRÖSSEN

Für drei verschiedene, jeweils angegebene Spantformen (Kreis-, Lewis - U - und Bugwulstspant), sind in den Diagrammen Nr. 7 bis Nr. 10 die in 2.5 definierten dimensionslosen Druckkenngrößen erster und zweiter Ordnung anhand der Amplitudenkenngrößen $\bar{P}_A^{(1)}$, $\bar{P}_A^{(2)}$, $\bar{P}_O^{(2)}$, sowie die dazugehörigen Druckphasen $\delta_p^{(1)}$, $\delta_p^{(2)}$ gegenüber der Erregerfunktion, über dem dimensionslosen Frequenzparameter ξ_b , mit $0 \leq \xi_b \leq 2.0$, graphisch aufgetragen. Die Auftragungen gelten für zwei ausgezeichnete Punkte der Körperkontur, einerseits in Kielnähe des Spantes und andererseits nahe der freien Oberfläche (erstes und letztes Segment).

Der dimensionsbehaftete Gesamtdruck an der jeweiligen Körperstelle läßt sich anhand dieser Diagramme für gleiche Spantformen nach folgender Formel berechnen (s. 2.5):

$$P(\bar{x}_i, \bar{y}_i; t) = -\rho g \bar{y}_i + \epsilon \rho g b \left\{ \bar{P}_A^{(1)}(\bar{x}_i, \bar{y}_i) \sin(\omega t + \delta_p^{(1)}) + \bar{P}_O^{(2)} + \bar{P}_A^{(2)} \sin(2\omega t + \delta_p^{(2)}) \right\}, \quad (160)$$

mit $\epsilon = \frac{a}{b}$.

Physikalisch lassen sich die erzielten Ergebnisse wie folgt interpretieren:

Bezogen auf den atmosphärischen Druck p_0 kommt zum hydrostatischen Überdruck $(-\rho g \bar{y}_i)$ nach der Theorie z w e i t e r Ordnung ein zusätzlicher z e i t u n a b h ä n g i g e r Druckterm $(\varepsilon^2 \rho g b \cdot \bar{p}_0^{(2)})$ hinzu, der ebenfalls s t a t i s c h wirkt, dessen Ursprung jedoch h y d r o d y n a m i s c h ist. Dieser Druckanteil wirkt z.T. in Bodennähe als Ü b e r d r u c k und i. allg. sonst entlang der restlichen Körperkontur bis zur freien Oberfläche als U n t e r d r u c k. Die daraus resultierende Kraftkomponente in Vertikalrichtung ist im allgemeinen eine S i n k - kraft, wie noch im weiteren gezeigt wird. Die Abhängigkeit dieses Druckterms von dem Frequenzparameter $\bar{\xi}_b$ ist f a s t linear, wie aus Gl. (125) ersichtlich wird; dabei muß jedoch berücksichtigt werden, daß der aus den Potentialgrößen e r s t e r Ordnung bestehende Proportionalitätsfaktor, je nach Stelle, mehr oder weniger schwach auch von $\bar{\xi}_b$ abhängig ist.

Zu diesen h y d r o s t a t i s c h e n Drucktermen kommen noch zwei h y d r o d y n a m i s c h e, mit der Zeit e i n - f a c h $(\varepsilon \rho g b \cdot |\bar{p}_A^{(1)}| \sin(\omega t + \delta_\rho^{(1)}))$ bzw. z w e i f a c h $(\varepsilon^2 \rho g b \cdot |\bar{p}_A^{(2)}| \sin(2\omega t + \delta_\rho^{(2)}))$ h a r m o n i s c h oszillierenden Druckgrößen, hinzu. Das Verhältnis der Amplitudengrößen, $\bar{p}_A^{(1)}$ zu $\bar{p}_A^{(2)}$, ist zwar etwa von der Größenordnung 0 (1). Es muß jedoch das tatsächliche A b s o l u t - Größenverhältnis $\varepsilon \bar{p}_A^{(1)}$ zu $\varepsilon^2 \bar{p}_A^{(2)}$ berücksichtigt werden, das von der Größenordnung 0 ($\frac{1}{\varepsilon}$) ist, um den Einfluß der Glieder z w e i t e r Ordnung nicht zu überschätzen.

Die Übereinstimmung der erzielten Rechenergebnisse mit denen der anderen Autoren ist relativ gut bis sehr gut. Naturgemäß ist die Übereinstimmung bei den Größen e r s t e r Ordnung $\bar{p}_A^{(1)}$ bzw. $\delta_\rho^{(1)}$ am besten, zumal diese Ergebnisse mehrfach von verschiedenen Autoren bestätigt worden sind. Eine sehr gute Übereinstimmung ist auch bei den z e i t u n a b h ä n g i g e n Größen z w e i t e r Ordnung $\bar{p}_0^{(2)}$ zu vermerken, weil hierfür die Lösungen des Problems e r s t e r Ordnung und die Bestimmungsformel (125) im Vergleich zu den angeführten Autoren ähnlich bzw. äquivalent gleich waren.

Beim Vergleich der hydrodynamischen Größen zweiter Ordnung ist zu bemerken, daß einerseits die Ausgangsgleichungen bei den verschiedenen Autoren nicht exakt die gleichen waren, wie genau

insbesondere im Angang A gezeigt wurde, und andererseits die Lösungsmethoden nicht gleich waren, mit Ausnahme der Arbeit von R. P o t a s h , der jedoch das Irregularitätenproblem nicht wie hier behandelt hat. Die Übereinstimmung der Ergebnisse ist trotzdem - mit einigen Abstrichen - relativ gut.

Die bereits korrigierten Ergebnisse von C. M. L e e [39] liefern für $\xi_b \rightarrow 0$ unendlich große Werte für $\bar{F}_A^{(2)}$, was physikalisch nicht sinnvoll ist, da für verschwindende Erregung der hydrodynamische Druck zum hydrostatischen Teil abklingen muß.

Die vergleichbaren Ergebnisse von R. P o t a s h sind unter Berücksichtigung der Irregularitäteneffekte, die dort nicht ausgeschaltet worden sind, zu interpretieren. Jedoch zeigen die Vergleichsergebnisse für den Bugwulstspant, dessen erste Irregularität relativ hoch liegt - da ein kleines B/F Verhältnis vorliegt - eine relativ gute Übereinstimmung.

Die nur für den Kreisspant gelieferten Vergleichsergebnisse von G. P a r i s s i s liegen im ganzen Frequenzbereich relativ gleich abweichend.

KRAFTGRÖSSEN

Für die gleichen Spantformen sind in den Diagrammen Nr. 11 bis Nr. 13 die in 2.5 definierten dimensionslosen Kraftkenngrößen in Vertikalrichtung erster und zweiter Ordnung graphisch aufgetragen, insbesondere die Amplitudenkenngrößen $\bar{F}_{VA}^{(1)}$, $\bar{F}_{VA}^{(2)}$, $\bar{F}_{OV}^{(2)}$, mit den entsprechenden Kraftphasen $\delta_F^{(1)}$, $\delta_F^{(2)}$ gegenüber der Erregerfunktion, über dem dimensionslosen Frequenzparameter ξ_b , mit $0 \leq \xi_b \leq 2.0$.

Die dimensionsbehaftete Gesamtkraft, die auf den Körper in Vertikalrichtung ausgeübt wird, läßt sich anhand dieser Diagramme für gleiche Spantformen nach folgender Formel ermitteln:

$$F_V(t) = \rho g A_0 + \varepsilon 2\rho g b^2 |\bar{F}_{VA}^{(1)}| \sin(\omega t + \delta_F^{(1)}) + \varepsilon^2 2\rho g b^2 \left\{ \bar{F}_{OV}^{(2)} + |\bar{F}_{VA}^{(2)}| \sin(2\omega t + \delta_F^{(2)}) \right\}, \quad (161)$$

mit $\epsilon = \frac{a}{b}$ und die Hauptspantfläche A_0 .

Zwei charakteristische Beispiele für die auf einen Kreiszyylinder pro Längeneinheit in Vertikalrichtung ausgeübte hydrodynamische Kraft als Funktion von (ω, t) , bei festem $\epsilon = 0,5$, sind in den Diagrammen Nr. 14 ($\nu b = 1,0$) bzw. Nr. 15 ($\nu b = 2,0$) aufgetragen.

Die physikalische Interpretation der errechneten Ergebnisse ist schon z.T. im vorigen Abschnitt bei der Erklärung der Druckkoeffizienten geliefert worden.

Zu der hydrostatischen Auftriebskraft ($\rho g A_0$) kommt nach der Theorie z w e i t e r Ordnung eine zusätzliche z e i t u n - a b h ä n g i g e Druckkraft ($\epsilon^2 2 \rho g b^2 \bar{F}_{0V}^{(2)}$) hinzu, infolge des Druckterms $\epsilon^2 p_0^{(2)}$, der im vorigen Abschnitt erklärt worden ist. Diese s t a t i s c h e Druckkraft wirkt im allgemeinen dem Auftrieb e n t g e g e n, d.h. sie s e n k t den Körper gegenüber der Schimmwasserlinie in der Ruhestellung ab. Sie hängt direkt von ξ_b , etwa wie $p_0^{(2)}$, ab. Die noch dazukommenden h y d r o d y n a m i s c h e n Druckkraftterme $\epsilon 2 \rho g b^2 |\bar{F}_{VA}^{(1)}| \sin(\omega t + \delta_F^{(1)})$ bzw. $\epsilon^2 2 \rho g b^2 \cdot |\bar{F}_{VA}^{(2)}| \sin(2\omega t + \delta_F^{(2)})$ oszillieren e i n f a c h bzw. d o p p e l t zeitharmonisch bezüglich der Erregerkreisfrequenz ω . Das A b s o l u t - Größtenverhältnis zwischen $\epsilon \bar{F}_{VA}^{(1)}$ zu $\epsilon^2 \bar{F}_{VA}^{(2)}$ ist etwa von der Größenordnung $0 \left(\frac{1}{\epsilon}\right)$. Die zum Vergleich herangezogenen Ergebnisse anderer Autoren sind z.T. im Rahmen des vorigen Abschnitts über die hydrodynamischen Druckkoeffizienten e r s t e r und z w e i t e r Ordnung kommentiert worden.

Insbesondere scheinen die von C.M.L e e gelieferten Ergebnisse für die hydrodynamischen Kraftgrößen z w e i t e r Ordnung $\bar{F}_{VA}^{(2)}$ für $\xi_b \rightarrow 0$ nicht richtig zu sein, da sie unendlich groß werden, während die Ergebnisse für $\xi_b > 0,4$ in relativ guter Übereinstimmung zu den hier erzielten Ergebnissen stehen.

Die vergleichbaren Ergebnisse von R. P o t a s h sind nach Ausschaltung der Irregularitäteneffekte z.T. relativ gut. Dort scheint jedoch die von ihm angegebene Kraftgröße e r s t e r Ordnung $\bar{F}_{VA}^{(1)}$ für einen Bugwulstspant nicht richtig zu sein.

Schließlich sind die von G. P a r i s s i s und H. S ö - d i n g [45] gelieferten Ergebnisse für einen Kreisspant bezüglich $\bar{F}_{VA}^{(2)}$ voneinander erheblich abweichend, obwohl tendenz-

mäßig ähnlich; jedoch sind die jeweils verwendeten Lösungsmethoden im analytischen und numerischen Teil gänzlich verschieden. Die entsprechenden Ergebnisse des Autors liegen dicht unterhalb der Werte von H. S ö d i n g (Diagramm Nr. 11).

HYDRODYNAMISCHE MASSE

HYDRODYNAMISCHE DÄMPFUNG

Die in der Hydrodynamik der linearen Schiffsschwingungen definierten Größen der hydrodynamischen Masse und hydrodynamischen Dämpfung sind in dimensionsloser Form für verschiedene, jeweils angegebene Spantformen über dem Frequenzparameter ξ_b in den Diagrammen Nr. 16 bis Nr. 20 graphisch aufgetragen. Diese ergeben ein gutes einfaches Maß für die Qualität der zur Auswertung der Theorie z w e i t e r Ordnung vorausgesetzten Größen e r s t e r Ordnung. Dabei sind sowohl an der freien Oberfläche s c h w i m m e n d e, als auch g e t a u c h t e Zylinderformen berücksichtigt. Die Übereinstimmung mit bekannten Ergebnissen der Literatur, insbesondere relativ zu F. U r s e l l, W. P o r t e r, W. F r a n k, F. O g i l v i e, ist sehr gut. Einige bekannte physikalische Phänomene im Zusammenhang mit vertikal an der Wasseroberfläche schwingenden Wulstspanten, wie das Verschwinden der hydrodynamischen Dämpfung bei gewissen Frequenzen [6], ebenso wie für schwingende getauchte Kreisspanten [41], konnten bestätigt werden (Diagramm Nr. 19 und 20).

Eine weitere physikalische Interpretation dieser Größen wurde bereits unter 2.5, soweit hier erforderlich erschien, gegeben.

Schließlich wurde im Rahmen dieser Arbeit auf eine Wiedergabe der Ergebnisse für die Wellenprofilgrößen im Unendlichen, die bereits unter 2.5 formelmäßig erfaßt und physikalisch interpretiert wurden, verzichtet, da die Potentialausdrücke z w e i t e r Ordnung an der f r e i e n O b e r f l ä c h e, die für die Berechnung von $\bar{h}_{w_1}^{(2)}$ (157) erforderlich sind, von den Irregularitäten am meisten beeinflusst werden (vgl. 3.2), so daß die erzielten Ergebnisse z w e i t e r Ordnung, wenn auch nicht schlechter als sonst, mehr zufällig erscheinen. Die von R. P o t a s h [43] gelieferten, sehr stark oszillierenden,

Ergebnisse für die Wellenkenngrößen z w e i t e r Ordnung sind ein Musterbeispiel für die Richtigkeit der oben angeführten Argumentation.

4.

ZUSAMMENFASSUNG

Das Problem eines an oder nahe der freien Oberfläche einer endlich tiefen Flüssigkeit mit endlicher Amplitude vertikal schwingenden zylindrischen Körpers beliebiger Form ist als nichtlineares Zeit-Randwertproblem gemischter Art potentialtheoretisch behandelt und für den Fall unendlicher Flüssigkeitstiefe für einige schiffsähnliche Spantformen numerisch ausgewertet worden.

Unter den üblichen Annahmen der Potentialtheorie und der Voraussetzung einer zeitlich fortlaufend wirkenden, einfach harmonischen Erregerfunktion ist das sich ergebende nichtlineare Zeit-Randwertproblem unter Zugrundelegung eines nichtlinearen Übertragungsmodells zweiter Ordnung mit Hilfe der Störungsmethode auf drei lineare Randwertprobleme gemischter Art zurückgeführt worden. Dabei ist eins der anfallenden linearen Probleme zweiter Ordnung nur diskutiert und von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen worden, da es keinen entscheidenden Beitrag für die Theorie zweiter Ordnung liefert.

Unter Anwendung der Green'schen Sätze der Potentialtheorie sind die sich ergebenden Randwertprobleme in lineare, inhomogene Fredholm'sche Integralgleichungen zweiter Art umgewandelt worden.

Auf der Grundlage der aufgestellten Integralgleichungen sind Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von Lösungen behandelt worden.

Nachdem mehrere Möglichkeiten zur Lösung der erhaltenen Randwertprobleme durch verschiedene Integralgleichungsmethoden vorgestellt worden sind, ist das sich ergebende lineare Randwertproblem erster Ordnung durch eine Einfachschicht- sowie eine Einfach- und Doppelschichtpotentialdarstellung gelöst worden, indem entlang der getauchten Körperkontur einerseits Quell- und andererseits Quell- und Dipolsingularitäten angenommen worden sind.

Das sich ergebende lineare Randwertproblem zweiter Ordnung ist - unter Berücksichtigung der Lösungen erster Ordnung - durch eine Einfach- und Doppelschichtpotentialdarstellung, nachdem entlang der getauchten Körperkontur Quell- und Dipolsingularitäten und entlang der Ruhewasserlinie Quellsingularitäten angenommen worden sind, gelöst worden.

Die für die Integralgleichungslösungen notwendigen Green'schen Funktionen sind für den Fall endlicher und unendlicher Wassertiefe abgeleitet und für den Fall unendlicher Wassertiefe analytisch-numerisch aufbereitet worden.

Die bei der Auswertung der aufgestellten Integralgleichungen angewandte, numerische Lösungsmethode (Close-Fit) ist dargestellt und einer ähnlichen Lösungstechnik gegenübergestellt worden.

Auf der Grundlage einer gleichzeitigen Betrachtung des inneren und äußeren Randwertproblems ist eine sog. kombinierte Integralgleichungsmethode vorgestellt worden, die auch für die Eigenfrequenzen des jeweiligen inneren Problems sinnvolle Lösungen ergibt.

Numerisch ist das sich ergebende sog. Irregularitätenproblem jedoch nur durch eine einfache praktische Lösungstechnik behandelt worden, die für schiffsähnliche Spantformen ausreichend gute Ergebnisse geliefert hat.

Die aus den erhaltenen Potentiallösungen abgeleiteten, verschiedenen physikalischen Kenngrößen erster und zweiter Ordnung sind in Diagrammen dargestellt, mit Ergebnissen anderer Autoren verglichen und diskutiert worden.

Das Ergebnis der vorliegenden Arbeit besteht einerseits in der Beantwortung einiger im Zusammenhang mit der Aufstellung und Lösung der sich ergebenden Randwertprobleme bisher nicht gründlich geklärten Fragen; andererseits bringen die hier erzielten Ergebnisse physikalischer Größen zweiter Ordnung die bei der Theorie der Schiffsschwingungen zugrundegelegten Übertragungsmodelle den entsprechenden Naturmechanismen einen Schritt näher.

Die nichtlinearen Effekte zweiter Ordnung, die direkt dem Quadrat des kleinen, jedoch endlichen Verhältnisses der Erregeramplitude zur Spant - Halbbreite proportional sind, nehmen mit wachsender Erregerfrequenz zu. Sie bestehen einerseits aus mehrfach zeitharmonisch oszillierenden Ausdrücken und andererseits aus zeitunabhängigen Termen, die insbesondere bei Tauchschwingungen ein Absinken des Körpers bewirken. Diese Phänomene entsprechen bekannten Versuchsmeßergebnissen.

Der konsequent folgende Schritt auf die hier untersuchte, erzwungene Glattwasserschwingung wäre - ähnlich dem linearen Fall - die Behandlung der nichtlinearen Bewegung eines einer Welle

endlicher Amplitude ausgesetzten, frei schwimmenden Körpers. Dieses Problem ist jedoch ohne eine Klärung der Frage nach den erregenden Wellenkräften zweiter Ordnung sowie der sich ergebenden Störströmung bei festgehaltenem Körper unter Zugrundelegung eines nichtlinearen Übertragungsmodells nicht lösbar.

DANKWORT

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr.-Ing. H. N o w a c k i für seine Unterstützung sowie zahlreiche richtungsweisende Hinweise bei der Durchführung dieser Arbeit bedanken.

Mein Dank gilt ebenso Herrn Prof. Dr.-Ing. E. W o l f für das gezeigte Interesse und seine Bereitschaft zur fachlichen Auseinandersetzung.

Für hilfreiche Hinweise danke ich Herrn Dr. C.M. L e e sowie Herrn Prof. F. O g i l v i e.

Schließlich gilt mein Dank Frau R. H u t t n e r und Frau B. S c h w a b e d a l für die schnelle und zuverlässige Anfertigung des vorliegenden Manuskripts.

A N H Ä N G E

ANHANG A

Behandlung der Randbedingungen mit Hilfe der Störungsmethode

Allgemeines

Durch Einsetzen der in Frage kommenden allgemeinen Störungssätze für das Geschwindigkeitspotential(17)

$$\begin{aligned} \Phi(x, y; t; \varepsilon) &= \sum_{n=1}^N \varepsilon^n \Phi^{(n)}(x, y; t) \\ &= \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^K \varepsilon^n \varphi_k^{(n)}(x, y) e^{-jk\omega t}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.})$$

und das Wellenprofil(19)

$$Y(x; t; \varepsilon) = \sum_{e=1}^L \sum_{m=0}^M \varepsilon^e Y_m^{(e)}(x; t), \quad (\text{A.2.})$$

in die Randbedingungen des vorliegenden Problems soll einerseits nachgewiesen werden, daß die Potentialausdrücke $\varphi_k^{(n)}$ für $n \neq k \geq 0$, mit Ausnahme von $\varphi_0^{(2)}$ für die zweite Ordnung, nur triviale Lösungen liefern, weshalb sie auch vernachlässigt werden können; andererseits sollen die Freie-Oberflächen-Randbedingung sowie die Körperperrandbedingung durch die $\varphi_k^{(n)}$ des äquivalenten "ungestörten" Problems dargestellt werden, wodurch die Lösung des vorliegenden nichtlinearen zeitabhängigen Randwertproblems auf die Lösung von linearen, nur ortsabhängigen, Randwertproblemen zurückgeführt wird.

A.1 Randbedingungen an der freien Oberfläche

Bei der Formulierung der Randbedingungen an der freien Oberfläche $y = Y(x; t)$ ist im Argument der $\varphi_k^{(n)}$ nach (A.1.) für $y \rightarrow Y(x; t; \varepsilon)$ einzusetzen, wodurch die $\varphi_k^{(n)}$ von der Zeit t und dem Entwicklungsparameter ε abhängig werden; dies würde die Lösung des Problems erschweren, ohne die Genauigkeit im Vergleich zu dem folgenden Ausweg zu erhöhen.

Unter der Annahme, daß die Wellenerhöhung klein, von der Größenordnung von ε ist, lassen sich die Potentialausdrücke $\varphi_k^{(n)}(x, Y(x; t; \varepsilon))$ in Taylor-Reihen bezüglich der Ruhelage $y = 0$

entwickeln (ungestörtes Problem):

$$\varphi_k^{(n)}(x, Y(x; t)) = \varphi_k^{(n)}(x, 0) + Y(x; t) \varphi_{ky}^{(n)} + O(Y^2),$$

oder für die zweite Ordnung bezüglich ε mit (A.2.)

$$\varphi_k^{(n)}(x, Y(x; t; \varepsilon)) = \varphi_k^{(n)}(x, 0) + \varepsilon \sum_{m=0}^2 Y_m^{(n)}(x; t) \cdot \varphi_{ky}^{(n)} + O(\varepsilon^2). \quad (\text{A.1.1})$$

Entsprechendes gilt für die Ableitungen von $\varphi_k^{(n)}$. Aus der Bernoullischen Gleichung für die freie Oberfläche (7)

$$Y(x; t) = -\frac{1}{g} \left\{ \Phi_t(x, Y(x; t); t) + \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 \right\} \quad (\text{A.1.2})$$

ergeben sich nach (A.1.), (A.2.), (A.1.1) und Ordnen der Glieder bezüglich $\varepsilon^n e^{-jk\omega t}$ ($1 \leq n \leq 2$, $0 \leq k \leq 2$) folgende Beziehungen zwischen den Wellenprofilgrößen $Y_k^{(n)}(x; t)$ und den Potentialgrößen $\varphi_k^{(n)}(x, 0)$:

$$n=1, k=0$$

$$Y_0^{(1)}(x) = 0, \quad (\text{A.1.3})$$

$$n=1, k=1$$

$$Y_1^{(1)}(x; t) = j \frac{\omega}{g} \varphi_1^{(1)} e^{-j\omega t}, \quad (\text{A.1.4})$$

$$n=1, k=2$$

$$Y_2^{(1)}(x; t) = j \frac{2\omega}{g} \varphi_2^{(1)} e^{-j2\omega t}, \quad (\text{A.1.5})$$

$$n=2, k=0$$

$$\begin{aligned} Y_0^{(2)}(x) = & -\frac{1}{4g} [\varphi_{1x}^{(1)} \bar{\varphi}_{1x}^{(1)} + \bar{\varphi}_{1y}^{(1)} \varphi_{1y}^{(1)}] + \\ & + \frac{\omega^2}{2g^2} \varphi_1^{(1)} \bar{\varphi}_{1y}^{(1)} - \frac{1}{4g} [\varphi_{2x}^{(1)} \bar{\varphi}_{2x}^{(1)} + \varphi_{2y}^{(1)} \bar{\varphi}_{2y}^{(1)}] + \\ & + \frac{2\omega^2}{g^2} \varphi_2^{(1)} \bar{\varphi}_{2y}^{(1)} - \frac{1}{2g} [\varphi_{0x}^{(1)2} + \varphi_{0y}^{(1)2}], \end{aligned} \quad (\text{A.1.6})$$

$$n=2, k=1$$

$$\begin{aligned} Y_1^{(2)}(x; t) = & \frac{1}{g} \left[j\omega \varphi_1^{(2)} + \frac{\omega^2}{g} (\bar{\varphi}_1^{(1)} \varphi_{2y}^{(1)} + \right. \\ & + \varphi_2^{(1)} \bar{\varphi}_{1y}^{(1)}) - \varphi_{0x}^{(1)} \varphi_{1x}^{(1)} - \varphi_{0y}^{(1)} \bar{\varphi}_{1y}^{(1)} - \\ & \left. - \frac{1}{2} (\bar{\varphi}_{1x}^{(1)} \varphi_{2x}^{(1)} + \bar{\varphi}_{1y}^{(1)} \varphi_{2y}^{(1)}) \right] e^{-j\omega t}, \end{aligned} \quad (\text{A.1.7})$$

$$n=2, k=2$$

$$\begin{aligned} Y_2^{(2)}(x;t) = & \frac{1}{g} \left[j 2\omega \varphi_2^{(2)} - \frac{\omega^2}{2g} \varphi_1^{(1)} \varphi_{1y}^{(1)} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} (\varphi_{1x}^{(1)2} + \varphi_{1y}^{(1)2}) - \varphi_{0x}^{(1)} \varphi_{2x}^{(1)} - \varphi_{0y}^{(1)} \varphi_{2y}^{(1)} \right] e^{-j2\omega t} \end{aligned} \quad (A.1.8)$$

Die substantielle Differentiation von (A.1.2) nach der Zeit liefert unter Berücksichtigung der kinematischen Randbedingung an der freien Oberfläche(6)

$$Y_t(x;t) + \Phi_x(x, Y(x;t); t) \cdot Y_x - \Phi_y = 0, \quad (A.1.9)$$

nach Substitution des Wellenprofils, die folgende kombinierte Freie-Oberflächen-Randbedingung:

$$\begin{aligned} \Phi_{tt}(x, Y(x;t); t) + g \Phi_y = & -2 (\Phi_x \Phi_{tx} + \Phi_y \Phi_{ty}) - \\ & - \Phi_x^2 \Phi_{xx} - 2 \Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} - \Phi_y^2 \Phi_{yy}. \end{aligned} \quad (A.1.10)$$

Unter Berücksichtigung von (A.1.), (A.1.1), (A.1.2) und Ordnen der Glieder bezüglich $e^n e^{-jk\omega t}$ ($1 \leq n \leq 2, 0 \leq k \leq 2$) ergeben sich für die Potentialgrößen $\varphi_k^{(n)}(x, 0)$ die folgenden Beziehungen:

$$n=1, k=0$$

$$\varphi_{0y}^{(1)}(x, 0) = 0, \quad (A.1.11)$$

$$n=1, k=1$$

$$\mathcal{F}(\nu) \{ \varphi_1^{(1)}(x, y) \} = 0, \quad (A.1.12)$$

$$n=1, k=2$$

$$\mathcal{F}(\nu) \{ \varphi_2^{(1)}(x, y) \} = 0, \quad (A.1.13)$$

$$n=2, k=0$$

$$\begin{aligned} \varphi_{0y}^{(2)}(x, 0) = & \frac{\omega}{2g} \text{Im}_j \{ \varphi_1^{(1)} \mathcal{F}(\nu) \{ \overline{\varphi_{1y}^{(1)}} \} \} \\ & + \frac{\omega}{g} \text{Im}_j \{ \varphi_2^{(1)} \mathcal{F}(\nu) \{ \overline{\varphi_{2y}^{(1)}} \} \}, \end{aligned} \quad (A.1.14)$$

$$n=2, k=1$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\nu) \{ \varphi_1^{(2)}(x, y) \} = & -j \frac{\omega}{g} \left[\varphi_1^{(1)} \varphi_{0yy}^{(1)} + \varphi_2^{(1)} \mathcal{F}(\nu) \{ \overline{\varphi_{1y}^{(1)}} \} \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \overline{\varphi_1^{(1)}} \mathcal{F}(\nu) \{ \varphi_{2y}^{(1)} \} - 2 \varphi_{1x}^{(1)} \varphi_{0x}^{(1)} - (\overline{\varphi_{1x}^{(1)}} \varphi_{2x}^{(1)} + \overline{\varphi_{1y}^{(1)}} \varphi_{2y}^{(1)}) \right], \end{aligned} \quad (A.1.15)$$

$$\begin{aligned} n=2, k=2 \quad \mathcal{L}(4\nu) \{ \varphi_2^{(2)}(x, y) \} &= j \frac{\omega}{2g} [2 \{ \varphi_{1x}^{(1)2} + \varphi_{1y}^{(1)2} \} - \\ &- \varphi_1^{(1)} \mathcal{L}(\nu) \{ \varphi_{1y}^{(1)} \} + 8 \bar{\varphi}_{2x}^{(1)} \bar{\varphi}_{0x}^{(1)} - 4 \varphi_2^{(1)} \bar{\varphi}_{0yy}^{(1)}], \end{aligned} \quad (\text{A.1.16})$$

mit der Wellenzahl der Erregerfunktion ν

$$\nu = \frac{\omega^2}{g}, \quad (\text{A.1.17})$$

und dem Freie-Oberflächen-Differentialoperator

$$\mathcal{L}(\nu) \{ F(x, y) \} \equiv \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \nu F \right) |. \quad (\text{A.1.18})$$

A.2 Randbedingungen an der Körperoberfläche $(x, y) \in S_F$

Unter der Annahme, daß die Bewegungsamplitude relativ klein zur Körperbreite b , d. h. von der Größenordnung von ϵ ist, lassen sich die Potentialgrößen $\varphi_k^{(n)}$ entlang der Körperoberfläche in Taylor-Reihen bezüglich der Körperruhelage (Mittellage) entwickeln; unter Berücksichtigung der vereinbarten Koordinatensysteme ($\alpha - x - y$ Inertialsystem, $\bar{\alpha} - \bar{x} - \bar{y}$ mitbewegtes System) und einer einfach harmonischen Erregung nach Gleichung (2) in Vertikalrichtung ergibt sich für die $\varphi_k^{(n)}$ an der Körperoberfläche:

$$\varphi_k^{(n)}(x, y(t)) = \varphi_k^{(n)}(\bar{x}, \bar{y}) + (y - \bar{y}) \varphi_{ky}^{(n)}(\bar{x}, \bar{y}) + \dots,$$

oder für die zweite Ordnung

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(n)}(x, y(t; \epsilon)) &= \varphi_k^{(n)}(\bar{x}, \bar{y}) + a \varphi_{ky}^{(1)} e^{-j\omega t} + O(\epsilon^2), \\ \text{mit } a &= \epsilon \cdot b. \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

Das gleiche Verfahren ist sinngemäß für die Ableitungen der $\varphi_k^{(n)}$ entlang der Körperoberfläche anzuwenden.

Aus der kinematischen Randbedingung für die Körperoberfläche

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y(t), t) = V_n, \quad (\text{A.2.2})$$

mit der Differentiation in Richtung der äußeren Normale

$$\frac{\partial}{\partial n} = \bar{y}' \frac{\partial}{\partial x} - \bar{x}' \frac{\partial}{\partial y}, \quad (\text{A.2.3})$$

und nach der Vereinbarung für V_n mit (2); (10)

$$V_n = -\text{Im}_j \{ j \epsilon b \omega e^{-j\omega t} \bar{x}' \}, \quad (\text{A.2.4})$$

ergeben sich unter Berücksichtigung von (A.1.) bzw. (A.2.1) und nach Ordnen der Glieder bezüglich $e^n e^{-j k \omega t}$ ($1 \leq n \leq 2$, $0 \leq k \leq 2$) folgende Randbeziehungen für die Potentialgrößen $\varphi_k^{(n)}(\bar{x}, \bar{y})$ entlang der Körperoberfläche:

$$n=1, k=0$$

$$\mathcal{B} \{ \varphi_0^{(1)}(x, y) \} = 0, \quad (\text{A.2.5})$$

$$n=1, k=1$$

$$\mathcal{B} \{ \varphi_1^{(1)}(x, y) \} = -b \omega \bar{x}', \quad (\text{A.2.6})$$

$$n=1, k=2$$

$$\mathcal{B} \{ \varphi_2^{(1)}(x, y) \} = 0, \quad (\text{A.2.7})$$

$$n=2, k=0$$

$$\mathcal{B} \{ \varphi_0^{(2)}(x, y) \} = j \frac{b}{2} \mathcal{B} \{ \varphi_{1y}^{(1)} \}, \quad (\text{A.2.8})$$

$$n=2, k=1$$

$$\mathcal{B} \{ \varphi_1^{(2)}(x, y) \} = -j b \mathcal{B} \{ \varphi_{0y}^{(1)} \}, \quad (\text{A.2.9})$$

$$n=2, k=2$$

$$\mathcal{B} \{ \varphi_2^{(2)}(x, y) \} = -j \frac{b}{2} \mathcal{B} \{ \varphi_{1y}^{(1)} \}, \quad (\text{A.2.10})$$

mit dem Körperoberflächen-Differentialoperator

$$\mathcal{B} \{ F(x, y) \} \equiv \left(\bar{y}' \frac{\partial F}{\partial x} - \bar{x}' \frac{\partial F}{\partial y} \right) \Big|_{(x, y) \in S_0}. \quad (\text{A.2.11})$$

A.3 Vereinfachung der Störungsansätze

Unter Berücksichtigung der erhaltenen Randbeziehungen für die $\varphi_k^{(n)}$ entlang der freien Oberfläche (A.1) und der Körperoberfläche (A.2) sowie der vom Potential Φ bzw. von den $\varphi_k^{(n)}$ zu erfüllenden Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen (Ausn.: für $k = 0$ sind andere Randbedingungen im Unendlichen zu erfüllen; s. (A.3.5) und (43) für $\varphi_0^{(2)}$):

$$\mathcal{R}(k^2 v_0) \{ \varphi_k^{(n)}(x, y) \} = 0, \quad k \neq 0 \quad (\text{A.3.1})$$

mit dem Ausstrahlungs-Differentialoperator

$$\mathcal{R}(v_0) \{ F(x, y) \} \equiv \text{Re}_3 \left(\frac{\partial F}{\partial x} + i v_0 F \right) \Big|_{x \rightarrow \pm \infty}, \quad (\text{A.3.2})$$

wobei die Wellenzahl der abgestrahlten Wellen v_0

$$v_0 \tanh(v_0 h) = v, \quad (\text{A.3.3})$$

mit

$$\lim_{h \rightarrow \infty} v_0 = v,$$

iterativ bestimmt werden kann, und schließlich der am Boden $y = -h$ zu erfüllenden kinematischen Randbedingung

$$\varphi_{xy}^{(n)}(x, y = -h) = 0, \quad (\text{A.3.4})$$

läßt sich der allgemeine Störungsansatz für Φ nach (A.1.) - und damit alle daraus folgenden Störungsansätze - vereinfachen, indem gezeigt werden kann, daß manche der Ausdrücke $\varphi_k^{(n)}$ nur auf die trivialen Lösungen führen, so daß sie unterdrückt werden.

Man bedient sich hierfür der Green'schen Sätze unter den üblichen Voraussetzungen der Potentialtheorie (s. Anhang B), wodurch die Potentialwerte aus den $\varphi_k^{(n)}$ an beliebigen Punkten des Flüssigkeitsbereiches durch die Randwerte der $\varphi_k^{(n)}$ auf der Bereichsbegrenzung ausgedrückt werden können. Es ergibt sich damit für $\varphi_0^{(n)}$ unter Berücksichtigung von (A.1.11), (A.2.5), (A.3.4) und der speziellen Bedingung im Unendlichen

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi_0^{(n)}(x, y) = 0, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (\text{A.3.5})$$

da das $\varphi_0^{(n)}$ -Randwertproblem kein Diffraktionsproblem darstellt,

daß das $\varphi_0^{(1)}$ -Randwertproblem nur die Trivillösung hat. Ebenfalls trivial ist die Lösung des $\varphi_2^{(1)}$ -Problems unter Berücksichtigung von (A.1.13), (A.2.7), (A.3.1) und (A.3.4); obwohl nach (A.3.1) im Unendlichen eine Wellenbewegung zu erwarten wäre, bleibt hierfür nach (A.2.7) die äußere Störung aus, was jedoch physikalisch erforderlich ist.

Nach Anwendung dieser Erkenntnisse über das $\varphi_0^{(1)}$ bzw. $\varphi_2^{(1)}$ -Problem auf die Formeln (A.1.15) und (A.2.9), deren rechte Seiten dadurch verschwinden, läßt sich Ähnliches über das $\varphi_1^{(2)}$ -Problem aussagen: auch dieses Randwertproblem hat nur die triviale Lösung (vgl. F. J o h n [51], S. 74).

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die restlichen Potentialausdrücke zumindest aufgrund der mathematischen Struktur der Randbeziehungen einen mathematisch nichttrivialen und physikalisch sinnvollen Charakter besitzen. Damit vereinfacht sich der Potentialansatz nach (A.1.) ($N = 2$) zu:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y; t; \varepsilon) = & \varepsilon \varphi_1^{(1)}(x, y) e^{-j\omega t} + & (A.3.6) \\ & + \varepsilon^2 (\varphi_0^{(2)} + \varphi_2^{(2)}) e^{-j2\omega t} + O(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Entsprechend sind sämtliche Störungsansätze für die verschiedenen physikalischen Größen, die sich aus dem Potential ableiten lassen, zu vereinfachen.

Ebensolches gilt für die Randbeziehungen der verbliebenen $\varphi_k^{(1)}$ nach (A.1) und (A.2).

A.4 Vergleich der Randbedingungen für $\varphi_k^{(1)}$ mit anderen Autoren

Während die formulierten Randbedingungen an der freien Oberfläche und Körperoberfläche vor der Elimination der Zeit aus dem Geschwindigkeitspotential Φ nach (A.1.10) bzw. (A.2.2) in der Literatur unumstritten sind, ist dies bei den entsprechenden Randbeziehungen für die $\varphi_k^{(1)}$ nicht mehr der Fall.

Zum direkten Vergleich der Gleichungen nach (A.1) bzw. (A.2) bietet sich einzig die erste Arbeit von C.M. L e e [37] über ein ähnliches Problem an. Diese Arbeit enthält in diesem Zusammenhang einige offensichtliche Druckfehler, aber auch eine Reihe von vermutlich sonstigen Fehlern in den aufgestellten Gleichungen. Die wesentlichen Unterschiede zu der vorliegenden

Arbeit sollten hier erwähnt werden:

a) S. 316 [37],

$$\mathcal{B}\{\varphi_0^{(2)}\} = -\frac{b}{2} \{ \text{Im}_3 \varphi_{1y}^{(1)} \}$$

sollte heißen:

(A.4.1)

$$\mathcal{B}\{\varphi_0^{(2)}\} = -\frac{b}{2} [\text{Im}_3 \mathcal{B}\{\varphi_{1y}^{(1)}\}]$$

(diese Gleichung läßt sich aus (A.2.8) entwickeln, wenn dieselbe Erregerfunktion wie bei C. M. L e e verwendet wird).

b) S. 316, Gl. (30) [37],

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(4v) \{ \varphi_2^{(2)} \} &= \frac{j\epsilon}{2g} [2 \{ \varphi_{1x}^{(1)2} + \varphi_{1y}^{(1)2} \} - \\ &- \varphi_1^{(1)} \mathcal{F}(v) \{ \varphi_{1y}^{(1)} \} - j \text{Im}_3 \{ \varphi_1^{(1)} \mathcal{F}(v) \{ \varphi_{1y}^{(1)} \} \}] \end{aligned}$$

sollte heißen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(4v) \{ \varphi_2^{(2)} \} &= \frac{j\epsilon}{2g} [2 \{ \varphi_{1x}^{(1)2} + \varphi_{1y}^{(1)2} \} - \\ &- \varphi_1^{(1)} \mathcal{F}(v) \{ \varphi_{1y}^{(1)} \}] \end{aligned} \quad (\text{A.4.2})$$

(vgl. mit (A.1.16) ohne Trivialterme).

c) S. 322 [37],

$$\Psi^{(1)}(x;t) = -j \frac{\epsilon}{g} \bar{\varphi}_1^{(1)}(x,0) e^{-j\omega t}$$

sollte heißen:

$$\Psi_1^{(1)}(x;t) = j \frac{\epsilon}{g} \varphi_1^{(1)} e^{-j\omega t} \quad (\text{A.4.3})$$

(vgl. mit (A.1.4)), mit $\bar{\varphi}_1^{(1)} = \varphi_{1c}^{(1)} - j \varphi_{1s}^{(1)}$.

d) S. 326, Gl. (52) [37],

In dieser Gleichung sind die $\epsilon^2 e^{-j2\omega t}$ -Glieder nicht vollständig (z.B.: $\epsilon^2 \varphi_2^{(2)} e^{-j2\omega t}$ u.s.w.).

Da auf die Berechnung von $\varphi_0^{(2)}$ im Rahmen einer Theorie zweiter Ordnung verzichtet wird (s. 1.5) und die physikalisch wichtigen Amplituden von (A.4.3) gleich sind, verbleiben die Differenzen in (A.4.2) von Bedeutung; diese Differenzen bestehen nur bezüglich der Imaginärteile der komplexen Gleichung (A.4.2), die jedoch die vollständige Bestimmung des Potentials zweiter Ordnung entscheidend beeinflussen können (s. 2.1). Zum indirekten Vergleich der betreffenden Gleichungen kann einerseits eine spätere Arbeit von C.M. L e e [38] und andererseits eine Arbeit von R.L. P o t a s h [43] herangezogen werden.

Die zweite Arbeit von C.M. L e e [38] behandelt zwar den Fall eines nichtlinearen Systems, dessen Erregung aus der Summe zweier harmonischen Funktionen besteht; jedoch lassen sich für den Grenzfall $\omega_1 = \omega_2$ äquivalente Gleichungen zu denen nach (A.1) und (A.2) ableiten. Dieser Widerspruch zwischen den beiden Arbeiten von C.M. L e e konnte nicht geklärt werden [39].

Schließlich wurde im Zusammenhang mit der Prüfung von Gleichung (A.4.2) die Arbeit von R.L. P o t a s h [43] untersucht; unter Berücksichtigung des dort gemachten vergleichbaren Potentialansatzes und der Beziehungen zwischen den hier benutzten Größen $\varphi_{c\kappa}^{(n)}$ bzw. $\varphi_{s\kappa}^{(n)}$ und den dort verwendeten $\Phi^{(n)}$ bzw.

$\varphi^{(n)}$ wurde festgestellt, daß die Imaginärteile von Gl.(A.4.2) übereinstimmen, jedoch nicht die Realteile (S. 299, Gl. (23) [43]), deren Form nach R.L. P o t a s h nicht gerechtfertigt erscheint.

Es muß deswegen an dieser Stelle betont werden, daß diese Diskrepanzen die Interpretation der Ergebnisse zweiter Ordnung nach den obigen Autoren erschweren, da schon die Randbeziehungen voneinander abweichen.

ANHANG B

Behandlung der Randwertprobleme mit Hilfe der Greenschen Sätze der Potentialtheorie

Allgemeines

Die mit Hilfe der Störungsmethode aus dem nichtlinearen Zeit-Randwertproblem entstandenen linearen Randwertprobleme werden im folgenden durch Anwendung der Greenschen Sätze auf Integralgleichungen zurückgeführt; deren Aufstellung ist jedoch von dem Auffinden geeigneter sog. Greenscher Funktionen (s. Anhang C) abhängig, die zu den Potentialrandwertproblemen äquivalente, jedoch einfachere Randwertprobleme erfüllen müssen.

Jede der hier vorliegenden Randwertaufgaben kann als inneres oder äußeres Problem von einfach zusammenhängenden beschränkten Gebieten des zweidimensionalen Raumes beschrieben werden.

Ebenso läßt sich das Zurückführen der Randwertaufgabe auf eine Integralgleichung zur Bestimmung des Potentials auf verschiedenen Wegen bewältigen, indem man z.B. das zu bestimmende Potential als Einfachschichtpotential ansetzt [11] [5] und damit die Berechnung der Potentialfunktion auf die einer Belegungsfunktion zurückführt; man kann aber auch das Potential als Wirkung von über die Begrenzung verteilten einfachen und Doppelquellen auffassen [43], wodurch der Wert des Potentials für einen beliebigen Flüssigkeitspunkt in Form einer Integralgleichung durch die Randwerte des Potentials und dessen Normalableitungen auf der Begrenzung ausgedrückt wird.

Die Existenz- und Eindeutigkeitsfragen der aufgestellten Randwertprobleme sind z. T. von F. J o h n [51] beantwortet worden. Sie lassen sich unter gewissen Voraussetzungen über das Grundgebiet sowie über dessen Rand und die Art der Randbedingungen auch für die vorliegenden gemischten (Robin'schen) Probleme allgemeiner durchführen (vgl. Sauer-Szabo, II, S. 369 ff. [75]).

B.1 Formulierung der Randwertprobleme

Mit Ausnahme der Homogenität der gemischten Randbedingung an der freien Oberfläche nach (A.1.12) im Vergleich zu (A.1.16) ist die Art der Randwertprobleme zur Bestimmung der Potentiale erster bzw. zweiter Ordnung $\varphi_1^{(1)}$ bzw. $\varphi_2^{(2)}$ grundsätzlich die gleiche: Es liegen Randwertaufgaben dritter Art (sog. Robin-Probleme) vor, deren Randbedingungen auf Teilen des Randes durch inhomogene bzw. homogene Neumannsche oder Robinische Beziehungen gekennzeichnet sind. Das Randwertproblem zur Bestimmung des Potentials erster Ordnung läßt sich als Spezialfall des linearen Randwertproblems zweiter Ordnung behandeln, indem man die rechte Seite der Randbedingung für das Potential an der freien Oberfläche gleich Null setzt (vgl. Gl. (26)-(37)). Die Geometrie der zu untersuchenden Randwertprobleme ist aus Abb. B.1 ersichtlich.

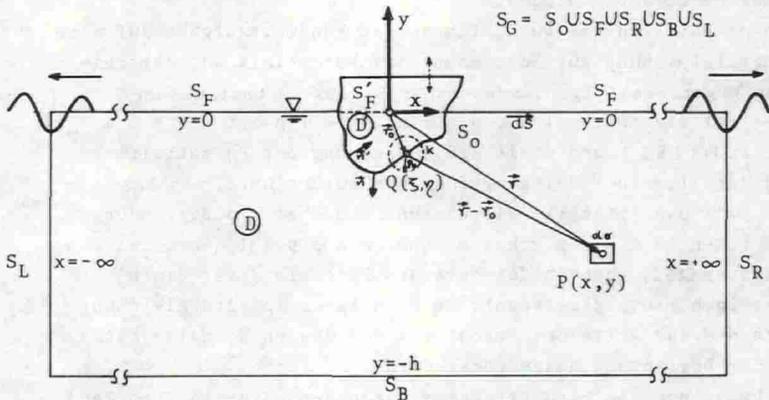


Abb. B.1

Bei den hier vorliegenden linearisierten Randwertproblemen werden Potentialfunktionen in einem einfach zusammenhängenden Gebiet D gesucht, dessen Ränder nicht von vornherein vollständig bekannt waren; jedoch ließ sich mit Hilfe der Störungsrechnung und von Grenzwertbetrachtungen für die Bedingungen im Unendlichen das Gebiet einschränken (s. Anhang A).

Dessen Berandung S_G besteht somit aus der Körperkontur des getauchten Körpers in seiner Ruhelage (oder einer Mittellage) S_O , der Ruhewasserlinie der freien Oberfläche außerhalb des Körpers (oder der mittleren Wasserlinie) S_F , der festen Bodenlinie S_B und zwei vertikalen Kontrolllinien im positiven und negativen Unendlichen. Mit D' wird das von der Körperkontur S_O in der unteren Halbebene eingeschlossene Gebiet bezeichnet. Es wird vereinbart, daß die Normalen des Randes des Grundgebietes von inneren Problemen stets in das Innere des entsprechenden Grundgebietes der äußeren Probleme gerichtet sein sollen.

Die von der Potentialfunktion zu erfüllenden Bedingungen sind neben der Potentialgleichung in D (26), (32)

$$\Delta \Phi^{(\kappa)}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (\text{B.1.1})$$

die kinematische Körperwandbedingung auf S_O (27), (33)

$$\Phi_n^{(\kappa)}(x, y) = F^{(\kappa)}(x, y), \quad (x, y) \in S_O, \quad (\text{B.1.2})$$

mit

$$\begin{aligned} k = 1, \quad F^{(1)} &= g_1(\bar{x}') \text{ für das } \varphi_1^{(1)}\text{-Problem,} \\ k = 2, \quad F^{(2)} &= g_2(\varphi_1^{(1)}) \text{ für das } \varphi_2^{(2)}\text{-Problem,} \end{aligned}$$

die kombinierte Freie-Oberflächen-Bedingung auf S_F (28), (34)

$$\Phi_y^{(\kappa)}(x, y) - k^2 y \Phi^{(\kappa)} = L^{(\kappa)}(x, 0), \quad (x, y) \in S_F, \quad (\text{B.1.3})$$

mit

$$\begin{aligned} k = 1, \quad L^{(1)} &= 0 \quad \text{für das } \varphi_1^{(1)}\text{-Problem,} \\ k = 2, \quad L^{(2)} &= f(\varphi_1^{(1)}, (x, 0)) \text{ für das } \varphi_2^{(2)}\text{-Problem,} \end{aligned}$$

die kinematische Bodenrandbedingung auf S_B (29), (35)

$$\Phi_y^{(\kappa)}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S_B, \quad (\text{B.1.4})$$

und schließlich die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen auf S_R bzw. S_L (30), (36)

$$\Phi_x^{(k)}(x, y) \mp j k^2 v_0 \Phi^{(k)} = 0, (x, y) \rightarrow \begin{cases} S_R \\ S_L \end{cases}, \quad (\text{B.1.5})$$

mit

$k = 1$, für das $\Phi_1^{(1)}$ -Problem,

$k = 2$, für das $\Phi_2^{(2)}$ -Problem,

und der Wellenzahl der abgestrahlten Wellen v_0 , die durch die transzendente Gleichung

$$v_0 \tanh(v_0 h) = \nu \quad (\text{B.1.6})$$

gegeben ist.

Das Zurückführen der soeben beschriebenen linearen Randwertprobleme (B.1.1) bis (B.1.6) für die Potentiale erster bzw. zweiter Ordnung auf Integralgleichungen erfordert die Kenntnis der zu diesen Randwertproblemen "passenden" Green'schen Funktionen, auch Grund-, Haupt- oder Elementarlösungen genannt; solche Lösungen sind Funktionen zweier Punkte $P(x, y)$ (Aufpunkt) und $Q(\xi, \eta)$ (Quellepunkt) in einem endlichen Gebiet der Ebene und haben die Eigenschaft, die Wirkung einer "Einheitsquelle" in $Q(\xi, \eta)$ auf $P(x, y)$ unter den speziellen Problemrandbedingungen beschreiben zu können. Mathematisch werden die hier gesuchten Green'schen Funktionen $G(P, Q)$ durch folgende Eigenschaften gekennzeichnet:

- a) $G(P, Q)$ ist als Funktion von $P(\vec{r})$ harmonisch (also Potentialfunktion) in dem untersuchten Gebiet, mit Ausnahme des Punktes $Q(\vec{r}_0)$; dort ist erst

$$g(P, Q) = G(P, Q) - \log |\vec{r} - \vec{r}_0|, \quad (\text{B.1.8})$$

mit $|\vec{r} - \vec{r}_0| = [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]^{1/2}$,
harmonisch.

- b) $G(P, Q)$ genügt am Rande des Gebiets den den Problemrandbe-

dingungen entsprechenden h o m o g e n e n Bedingungen, wobei jedoch das Verhalten von G entlang der mit Quellpunkten belegten Körperkontur S_0 durch Gl. (B.1.8) beschrieben wird.

Das Randwertproblem für die G r e e n schen Funktionen $G(x, y; \xi, \eta)$ sieht somit folgendermaßen aus (einschließlich (B.1.8)):

$$\Delta G^{(k)} = 0; \quad -h < y < 0, -h < \eta < 0, (x, y) \neq (\xi, \eta), \quad (\text{B.1.9})$$

$$G_y^{(k)} - k^2 y G^{(k)} = 0, \quad \text{für } y = 0, \quad (\text{B.1.10})$$

$$G_y^{(k)} = 0, \quad \text{für } y = -h, \quad (\text{B.1.11})$$

$$G_x^{(k)} \mp k^2 y_0 G^{(k)} = 0, \quad \text{für } x \rightarrow \pm \infty, \quad (\text{B.1.12})$$

mit

$$k = 1 \quad \text{für } G^{(1)} \quad \text{des } \Phi_1^{(1)} \text{ - Problems,}$$

$$k = 2 \quad \text{für } G^{(2)} \quad \text{des } \Phi_2^{(2)} \text{ - Problems,}$$

und y_0 nach (B.1.6).

In Abb. B.2 sind die Randwertprobleme für die Potential- und die entsprechenden G r e e n schen Funktionen erster und zweiter Ordnung schematisch gegenübergestellt.

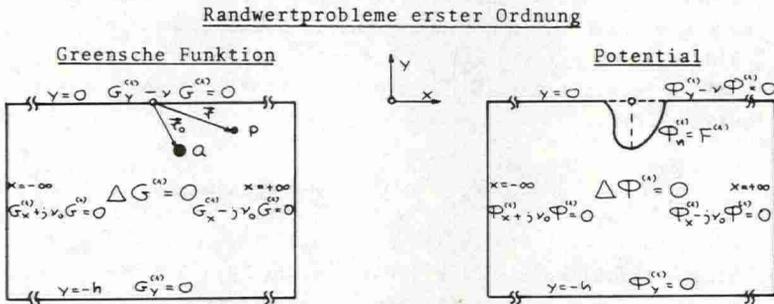


Abb. B.2

Randwertprobleme zweiter Ordnung

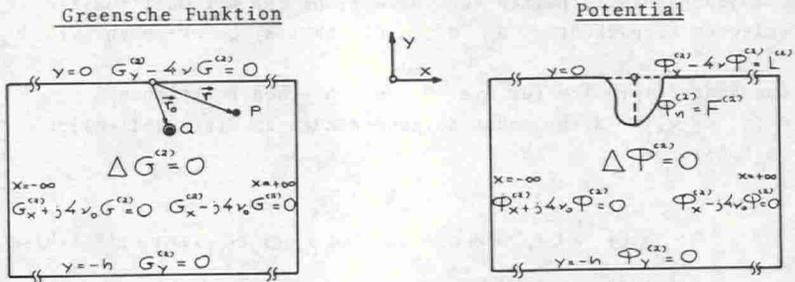


Abb. B.2

Die hier beschriebenen Robin'schen Randwertaufgaben sind sog. selbstadjungierte Randwertprobleme, da sowohl der Laplace'sche Differentialoperator als auch die Randbedingungen selbstadjungiert sind [75].

B.2 Zurückführung der Randwertprobleme auf Integralgleichungen

Die Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von Lösungen der in B.1 beschriebenen Randwertprobleme lassen sich, abgesehen von einer physikalischen Begründung, durch die Zurückführung der Randwertprobleme auf Integralgleichungen mit Hilfe der Green'schen Sätze behandeln.

Es sei B ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet der (x, y) - Ebene mit dem Rand Γ ; $u(x, y)$ und $v(x, y)$ gehören in B zur Klasse $C^{(2)}$ und auf Γ zur Klasse $C^{(1)}$. $d\Gamma$ sei das Bogenelement von Γ im Uhrzeigersinn; dB sei Flächenelement von B und \vec{n} die innere Normale von B . Es ergibt sich unter Anwendung des Integralsatzes von Gauß die sog. zweite Green'sche Formel (z. T. auch als erste - Green'sche Formel bekannt) der Potentialtheorie:

$$\iint_B (u \Delta v - v \Delta u) dB = - \int_{\Gamma} (u v_n - v u_n) d\Gamma. \quad (B.2.1)$$

Spätestens an dieser Stelle ist es erforderlich, die vorliegenden Randwertprobleme als innere oder äußere Probleme zu kennzeichnen, weil dies nicht eindeutig ist. Da das Grundgebiet des Problems D den unendlich fernen Punkt

enthält, wird vereinbart, daß die Probleme nach B.1 als äußere Robin'sche Probleme behandelt werden. Demnach ist das durch die getauchte Körperkontur S_0 in der unteren Halbebene beschränkte Gebiet D' das Grundgebiet der entsprechenden inneren Probleme. Mit Hilfe einer Transformation durch das Verfahren der reziproken Radien [75] lassen sich jedoch, unter gewissen Voraussetzungen, äußere Probleme auf innere zurückführen.

Nach Anwendung von (B.2.1) auf die Potentialfunktion Φ (B.1.1) und die äquivalente Green'sche Funktion G (B.1.9) in D läßt sich zunächst die linke Seite von (B.2.1) vereinfachen, da Φ über das Integrationsgebiet D die Laplacesche Gleichung erfüllt und $\Delta G(x, y; \xi, \eta)$ nach (B.1.8) dem Verhalten einer Dirac-Delta-Funktion folgt, mit $(\xi, \eta) \in S_0$, also am Rande von D .

Es ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$\iint_B F(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) d\Omega = F(\vec{r}_0), \quad (\text{B.2.2})$$

für beliebige Funktionen F (s. Kaplan, S. 520 [69]), folgender Ausdruck für die linke Seite von (B.2.1)

$$\iint_D (G \Delta \Phi - \Phi \Delta G) d\sigma = \begin{cases} 2\pi \Phi(x, y), & (x, y) \in D \\ \pi \Phi(x, y), & (x, y) \in S_0 \\ 0, & (x, y) \in D', \end{cases} \quad (\text{B.2.3})$$

wobei der Wert 2π mathematisch eine Vereinbarungssache ist und physikalisch als das innere Doppelschichtpotential eines Kreises mit Einheitsbelegung sich deuten läßt. Dieses Ergebnis bekommt man, wenn man bei der Integration über ds (s. Abb. B.1) im Gebiet D die Singularität beim Quellpunkt $Q(\xi, \eta)$ vom Integrationsgebiet ausschließt, indem man sie mit einem Kreis k von beliebig kleinem Radius ρ_0 umschließt. Die anschließende Integration zwischen S_G und k der linken Seite von (B.2.1) liefert den Wert Null, da $\Delta \Phi = 0, \Delta G = 0$ über das Integrationsgebiet gilt. Der Integralbeitrag der ausgeschlossenen Singularität ist im Innern von D gleich 2π . (s. § 57 Lamb [53])

Aus (B.2.1) ergibt sich unter Berücksichtigung von (B.2.3) die sog. dritte Green'sche Formel (z.T. als Helmholtz-

h o l t z s c h e Integralgleichung bekannt) für die Potentialtheorie, wobei die Integration entlang S und die Differentiation in Richtung der inneren Normale von D , \vec{n} , nach den Quellpunktkoordinaten (Index Q) erfolgt:

$$\int_{S_G} \left\{ \Phi(\xi, \eta) \frac{\partial G(x, y, \xi, \eta)}{\partial n_a} - G(x, y, \xi, \eta) \frac{\partial \Phi(\xi, \eta)}{\partial n_a} \right\} ds_a = \begin{cases} 2\pi \Phi(x, y), & (x, y) \in D \\ \pi \Phi(x, y), & (x, y) \in S_0 \\ 0, & (x, y) \in D' \end{cases} \quad (\text{B.2.4})$$

Diese Formel gibt den Wert von Φ für einen beliebigen Beobachterpunkt an, ausgedrückt durch die Randwerte von Φ und Φ_n auf der Begrenzung S bzw. als Summe eines Doppelschichtpotentials mit der Belegungsdichte Φ und eines Einfachschichtpotentials (auch Linienpotential genannt) mit der Dichte $-\Phi_n$ pro Belegungslängeneinheit.

Als nächstes werden die Randbedingungen für Φ und G nach B.1 entlang S berücksichtigt, wodurch (B.2.4) nach Elimination von Φ_n zu einer Integralgleichung für Φ allein umgewandelt wird. Dazu werden die Integrale auf der linken Seite von (B.2.4) nacheinander entlang S_0, S_F, S_R, S_L und S_B berechnet, unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n_a} &= -\frac{\partial}{\partial y} && \text{auf } S_F, S_B \\ \frac{\partial}{\partial n_a} &= -\frac{\partial}{\partial x} && \text{auf } S_R, S_L \end{aligned}$$

Auf S_0 gilt nach (B.1.2)

$$\int_{S_0} \left\{ \Phi \frac{\partial G}{\partial n_a} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n_a} \right\} ds_a = \int_{S_0} \left\{ \Phi \frac{\partial G}{\partial n_a} - G F^{(k)} \right\} ds_a \quad (\text{B.2.5})$$

An der freien Oberfläche S_F ergibt sich mit (B.1.3) und (B.1.10) und Elimination von $(k^2 y)$ der folgende Integralausdruck:

$$\int_{S_F} \left\{ \Phi \frac{\partial G}{\partial n_a} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n_a} \right\} ds_a = \int_{S_F} G L^{(k)} ds_a, \quad (\text{B.2.6})$$

mit $L^{(k)}$ nach (B.1.3).

Im Unendlichen, entlang S_R bzw. S_L , läßt sich unter Berücksichtigung von (B.1.5) und (B.1.12) und Elimination von $(k^2 \nu_0)$ das Verschwinden des entsprechenden Integralausdrucks nachweisen:

$$\int_{S_R, S_L} \left\{ \Phi \frac{\partial G}{\partial n_a} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n_a} \right\} ds_a = 0 \quad . \quad (B.2.7)$$

Das gleiche gilt am Boden, auf S_B , unter Berücksichtigung von (B.1.4) und (B.1.11):

$$\int_{S_B} \left\{ \Phi \frac{\partial G}{\partial n_a} - G \frac{\partial \Phi}{\partial n_a} \right\} ds_a = 0 \quad . \quad (B.2.8)$$

Somit ergibt sich aus (B.2.3) nach Anwendung von (B.2.4) bis (B.2.8) folgender Integralausdruck für $\Phi^{(k)}(x, y)$, mit $(x, y) \in D$:

$$2\pi \Phi^{(k)}(x, y) = \int_{S_0} \left\{ \Phi^{(k)}(\xi, \eta) \frac{\partial G^{(k)}(x, y, \xi, \eta)}{\partial n_a} - G^{(k)}(x, y, \xi, \eta) \cdot F^{(k)}(\xi, \eta) \right\} ds_a + \int_{S_F} G^{(k)}(x, y, \xi, 0) L^{(k)}(\xi) d\xi \quad (B.2.9)$$

mit

$k = 1$ für das $\Phi_1^{(1)}$ - Problem,

$k = 2$ für das $\Phi_2^{(2)}$ - Problem .

Für $P \rightarrow Q \in S_0$ muß die linke Seite von (B.2.9) entsprechend (B.2.4) abgeändert werden.

Der in (B.2.9) angegebene Integralausdruck zur Bestimmung von $\Phi^{(k)}(x, y)$ kann, entsprechend der Deutung von (B.2.4), physikalisch folgendermaßen erklärt werden: Das Potential $\Phi^{(k)}(x, y)$ setzt sich zusammen aus einem Doppelschichtpotential mit der unbekanntem Belegungsdichte $\Phi^{(k)}(\xi, \eta)$ infolge von entlang der Körperoberfläche S_0 angeordneten Dipolen, einem Einfachschichtpotential mit der bekannten Belegungsdichte $-F^{(k)}(\xi, \eta)$ in-

folge von auf S_0 angeordneten einfachen Quellen und schließlich, im Falle des Potentials zweiter Ordnung, einem weiteren *Einfachschichtpotential* mit der aus den Potentialgrößen erster Ordnung gebildeten Belegungsdichte $L^{(2)}(\xi)$ infolge von entlang der Ruhewasserlinie S_F angeordneten einfachen Quellen.

Infolge der inhomogenen Randbedingung für das $\Phi^{(2)}$ -Problem an der freien Oberfläche ($L^{(2)}(\xi) \neq 0$) lassen sich erprobte Lösungsmethoden für das $\Phi^{(1)}$ -Problem ($L^{(1)}(\xi) = 0$) nicht ohne weiteres auf das $\Phi^{(2)}$ -Problem anwenden. Mit Hilfe eines mathematischen Kniffs läßt sich jedoch das Lösungsschema vereinheitlichen.

Bekanntlich erlaubt die lineare Laplacesche Gleichung die Superposition mehrerer Potentiallösungen. Das beim $\Phi^{(2)}$ -Problem in (B.2.9) auftretende zusätzliche *Einfachschichtpotential* mit der Belegungsdichte $L^{(2)}(\xi)$ läßt sich als Lösung eines bekannten Randwertproblems (Handbuch der Physik, [58], § 21, b), S. 595ff) berechnen, das zu lösen wäre, wenn an der freien Oberfläche eine variable Druckverteilung $L^{(2)}(\xi)$ wirken würde, in Abwesenheit des Schiffes. Das sich ergebende Strömungsbild ließe sich dann durch das obengenannte Potential berechnen. Das zu lösende Randwertproblem für das im folgenden $\Phi_{22}^{(2)}$ genannte Potential sieht folgendermaßen aus:

$$\Delta \Phi_{22}^{(2)}(x, y) = 0, \quad y < 0, \quad (\text{B.2.10})$$

$$\Phi_{22y}^{(2)}(x, y) - \gamma \Phi_{22}^{(2)} = L^{(2)}(x, 0), \quad y = 0, \quad (\text{B.2.11})$$

$$\Phi_{22y}^{(2)}(x, y) = 0, \quad y = -h, \quad (\text{B.2.12})$$

$$\Phi_{22x}^{(2)}(x, y) \mp \gamma \Phi_{22}^{(2)} = 0, \quad x \rightarrow \pm \infty, \quad (\text{B.2.13})$$

mit γ_0 nach (B.1.6) und $L^{(2)}$ nach (A.1.16).

Die Lösung eines ähnlichen Problems ist nach *Wehausen-Laitone* (Handb. der Physik, S. 597, 21.23) bekannt.

Es verbleibt nun die Bestimmung der restlichen zwei Potentialausdrücke in (B.2.9), die als Lösung des folgenden modifizierten Randwertproblems zweiter Ordnung ermittelt werden können,

mit

$$\Phi_{12}^{(2)}(x, y) = \Phi_{12}^{(2)}(x, y) - \Phi_{22}^{(2)}(x, y), \quad (\text{B.2.14})$$

$$\Delta \Phi_{12}^{(2)}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (\text{B.2.15})$$

$$\mathcal{B}\{\Phi_{12}^{(2)}(x, y)\} = F_{12}^{(2)}(x, y) - \mathcal{B}\{\Phi_{22}^{(2)}(x, y)\}, \quad (\text{B.2.16})$$

$(x, y) \in S_0,$

$$\mathcal{F}(4\nu)\{\Phi_{12}^{(2)}(x, y)\} = 0, \quad (x, y) \in S_F, \quad (\text{B.2.17})$$

$$\Phi_{12\nu}^{(2)}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in S_B, \quad (\text{B.2.18})$$

$$\mathcal{R}(4\nu_0)\{\Phi_{12}^{(2)}(x, y)\} = 0, \quad (x, y) \in \begin{cases} S_R \\ S_L \end{cases}, \quad (\text{B.2.19})$$

mit $\mathcal{B}, \mathcal{F}, \mathcal{R}$ - Differentialoperatoren nach A.1, A.2, A.3 .

Wie man leicht erkennen kann, ist das $\Phi_{12}^{(2)}$ - Problem dem $\Phi^{(1)}$ - Problem ähnlich, was die Anwendung von ähnlichen Lösungsmethoden erlaubt. In Abb. B.3 sind die aus dem $\Phi^{(2)}(x, y)$ - Problem entstandenen Randwertprobleme für $\Phi_{22}^{(2)}$ bzw. $\Phi_{12}^{(2)}$ schematisch dargestellt.

Ergänzende Randwertprobleme zweiter Ordnung

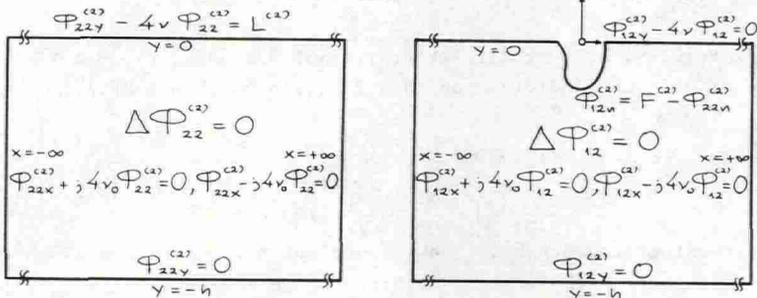


Abb. B.3

B.3 Lösung der Randwertprobleme durch verschiedene Integralgleichungen

Im folgenden werden verschiedene Möglichkeiten aufgezeigt, wonach der in (B.2.9) angegebene Integralausdruck zur Bestimmung von $\Phi^{(k)}(x, y)$ abgeändert und auf die Lösung von Integralgleichungen einfacher Oberflächenverteilungen zurückgeführt werden kann. Durch die Zurückführung des Randwertproblems zweiter Ordnung auf zwei weitere Randwertprobleme mit bekanntem bzw. dem $\Phi^{(1)}$ - Problem ähnlichen Verhalten (s. (B.2.10) - (B.2.19)) lassen sich alle Aussagen über die Integralgleichungen des $\Phi^{(1)}$ - Problems auch auf das $\Phi^{(2)}$ - Problem übertragen.

Es sei Φ des Geschwindigkeitspotential in dem uns interessierenden Gebiet D und Φ' das entsprechende innere Potential in dem von S_0 eingeschlossenen Gebiet D' . Ferner sei \vec{n} die innere Normale von D und \vec{n}' die innere Normale von D' (Abb. B.1), so daß

$$\frac{\partial}{\partial n'} = - \frac{\partial}{\partial n} \tag{B.3.1}$$

gilt. Für den Fall $P(x, y) \in D$ gilt für das innere Potential Φ' nach (B.2.4)

$$\int_{S_0} \left\{ \Phi'(\xi, \eta) \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial n'} - G \frac{\partial \Phi'}{\partial n'} \right\} ds = 0, P \in D. \tag{B.3.2}$$

Unter Berücksichtigung der Integralformel für $\Phi(x, y)$, $P \in D$ nach (B.2.4) und Addition von (B.3.2) ergibt sich mit (B.3.1):

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int (\Phi - \Phi') \frac{\partial G}{\partial n} ds - \int_{S_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \Phi'}{\partial n'} \right) G ds, P \in D. \tag{B.3.3}$$

Dieser Integralausdruck zur Bestimmung von $\Phi(x, y)$ vervollständigt jenen nach (B.2.4), da hier noch die Randwerte des inneren Problems berücksichtigt werden, das für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des entsprechenden äußeren Problems entscheidend ist. (s. Sobolev [77]).

B.3.1 Integralgleichung aus der Belegung der Körperkontur mit einfachen Quellen (Potential einer einfachen Schicht)

Unter der Voraussetzung, daß entlang der Körperkontur

$$\Phi(x, y) = \Phi'(x, y) \quad , \quad (x, y) \in S_0$$

angenommen werden kann - das nach der Potentialtheorie (s. Lamb, [53]) beim Durchtritt durch die Körperkontur stetige Tangentialkomponenten und unstetige Normalkomponenten der Geschwindigkeit zur Folge hat - läßt sich der recht komplizierte Integralausdruck (B.3.3) vereinfachen:

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} + \frac{\partial \Phi'}{\partial n'} \right) G \, ds ,$$

oder

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_0} \sigma(\xi, \eta) G(x, y; \xi, \eta) \, ds , \quad (B.3.4)$$

mit

$$\sigma(\xi, \eta) = - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n}(\xi, \eta) + \frac{\partial \Phi'}{\partial n'} \right) ,$$

d. h. $\Phi(x, y)$ läßt sich als Potential einer einfachen Schicht darstellen, infolge von entlang der Körperkontur mit der Belegungsdichte $\sigma(\xi, \eta)$ (Quellstärke) angeordneten einfachen Quellen (Linienpotential). Diese Integralgleichungsdarstellung benutzten mehrer Autoren, um ähnliche Schwingungsprobleme zu lösen (z.B. [11], [5], [29]). Sie hat den Vorteil, daß die Existenzfragen von Lösungen ähnlicher Integralgleichungen für das Neumannsche Problem ziemlich vollständig beantwortet worden sind. [73] [74].

Bei vorgegebener Verteilung der Normalkomponenten der Geschwindigkeit $F(\xi, \eta)$ entlang der Körperkontur (vgl. $\Phi^{(1)}$ bzw. $\Phi_{1,2}^{(2)}$ -Problem) läßt sich die unbekannte Quellstärke $\sigma(\xi, \eta)$ nach (B.3.4) durch Lösung folgender Integralgleichung bestimmen:

$$-\pi \sigma(x, y) + \int_{S_0} \sigma(\xi, \eta) \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial n_p} \, ds = 2\pi F(x, y) , \quad (B.3.5)$$

$(x, y) \in S_0 .$

Dabei rührt der Wert $\pi \mathfrak{G}(x, y)$ außerhalb des Integrals von der Singularität der Funktion $\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial n_a}$ im Punkt $P(x, y) = Q(\xi, \eta)$ her und wird, ähnlich den unter B.2 angestellten Überlegungen über ΔG , durch Umfahren beim Integrieren berücksichtigt. Die Differentiation erfolgt in Richtung der äußeren Normalen von S_0 nach den Aufpunktkoordinaten (x, y) .

B.3.2 Integralgleichung aus der Belegung der Körperkontur mit einfachen Quellen und Dipolen (Potential einer einfachen und Doppelschicht)

Diese Möglichkeit wurde in (B.2.9) aufgezeigt. Um das Potential $\Phi(x, y)$ für $(x, y) \in D$ angeben zu können, ist es erforderlich, sowohl die Randwerte $\Phi_n^{(k)}$ als auch $\Phi^{(k)}$ für $(x, y) \in S_0$ ($L^{(k)}(\xi)$ ist entweder aus der Lösung des $\Phi^{(1)}$ -Problems bekannt oder gleich Null) vorher zu kennen. Deren Ermittlung kann durch Lösung der folgenden Integralgleichung nach (B.2.9) erfolgen:

$$\pi \Phi^{(k)}(x, y) = \int_{S_0} \{ \Phi^{(k)}(\xi, \eta) \frac{\partial G^{(k)}(x, y, \xi, \eta)}{\partial n_a} - G^{(k)}(x, y, \xi, \eta) F^{(k)}(\xi, \eta) \} ds_a + \int_{S_F} G^{(k)}(x, y, \xi, 0) L^{(k)}(\xi) d\xi, \quad (B.3.6)$$

$(x, y) \in S_0$.

Diese Integralgleichungsdarstellung ist sowohl für das $\Phi^{(1)}$ und das dem $\Phi^{(1)}$ ähnlichen $\Phi_{12}^{(2)}$ -Problem anwendbar ($L^{(1)} = L_{12}^{(2)} = 0$), als auch für die direkte Lösung des $\Phi^{(2)}$ -Problems ($L^{(2)} \neq 0$). Sie bietet im Vergleich zu der nach B.3.1 dargestellten Möglichkeit den Vorteil, daß das gesuchte Potential am Körper direkt, ohne eine zusätzliche Integration wie in (B.3.4) erforderlich, erhalten wird. Dagegen sind die Existenzbeweise für die Lösungen solcher Integralgleichungen komplizierter. Sie lassen sich jedoch unter gewissen Voraussetzungen auf die von einfacheren Integralgleichungen nach (B.3.4) bzw. (B.3.5) zurückführen. Nur wenige Autoren benutzen diese Integralgleichungsdarstellung im Zusammenhang mit Schiffsschwingungsproblemen ([42], [43]).

Mehr Erfahrungen über ähnliche Integralgleichungen liegen aus dem Bereich der Hydroakustik vor ([56], [49], [50], [64]).

B.3.3 Integralbeziehung für die Randwerte von Φ aus der Betrachtung des inneren Problems

Da der in (B.2.9) angegebene Integralausdruck für $\Phi(x, y)$, mit $(x, y) \in D$, unabhängig davon ist, wie die erforderlichen Randwerte für $\Phi^{(k)}(x, y)$ auf S_0 ermittelt werden - diese könnten gegebenenfalls auch experimentell approximiert werden ([56]) - lassen sich diese Werte auch durch Annäherung des Randes von innen her, durch Betrachtung des inneren Problems, bestimmen. Dabei beschränken wir uns auf das Verhalten des inneren Problems des $\Phi^{(1)}$ bzw. $\Phi_{12}^{(2)}$ -Potentials ($L = 0$), da das $\Phi^{(2)}$ -Problem außer von S_0 noch von dem mit einfachen Quellen bekannter Stärke ($L^{(2)} = f(\Phi^{(1)})$) belegten S_F Rand beeinflusst wird, der zwar von innen her nicht angenähert werden kann, dessen Einfluß auf S_0 jedoch über das $\Phi_{12}^{(2)}$ -Problem demonstriert werden kann.

Unter Berücksichtigung von (B.2.4) ergibt sich bei Betrachtung des inneren Problems von $\Phi^{(k)}$:

$$\int_{S_0} \left\{ \Phi^{(k)}(\xi, \eta) \frac{\partial G^{(k)}(x, y, \xi, \eta)}{\partial n_a} - G^{(k)} F^{(k)}(\xi, \eta) \right\} ds_a = \quad (B.3.7)$$

$$= 0, \quad (x, y) \in D',$$

d. h. eine Integralbeziehung zur Bestimmung der Randwerte $\Phi^{(k)}(\xi, \eta)$ als Funktion von $F^{(k)}(\xi, \eta)$. Für $(x, y) \rightarrow S_0$ ergibt sich wieder die entsprechende Integralgleichung nach (B.3.6). Jedoch stellt (B.3.7) selbst keine Integralgleichung erster Art sondern eine Integral- oder Funktionalbeziehung zwischen $\Phi^{(k)}(\xi, \eta)$ und $F^{(k)}(\xi, \eta)$ anhand eines beliebigen inneren Aufpunktes $(x, y) \in D'$ dar.

Diese Methode wurde bisher im Zusammenhang mit Diffraktionsproblemen der Akustik ([49]) sowie Elastizitätsproblemen ([83]) angewandt. Im Bereich der Theorie der Schiffsbewegungen dürfte sich die von H. M a e d a eingeführte und von H. S ö - d i n g [16] verfolgte Methode auf einem ähnlichen physikalischen Hintergrund stützen. Für $(x, y) = (0, 0)$ lassen sich daraus die sog. M u l t i p o l m e t h o d e n ([17]) nach (B.3.7) entwickeln, die jedoch mit der Methode der k o n f o r m e n A b b i l d u n g und den ihr zugänglichen

Spantformen gekoppelt sind.

B.3.4 Sonstige Möglichkeiten für die Aufstellung von Integralgleichungen

Schließlich soll eine für lineare Robin'sche Probleme gültige Integralgleichungsmethode angegeben werden, die durch die lineare Kombination eines Einfachschichtpotentials mit dessen Normalableitung läßt (s. [75], S. 395).

Es sei folgende lineare gemischte Randbedingung am Rande S_G eines Gebiets D gegeben:

$$\alpha(x, y) \mathcal{P}(x, y) + \beta(x, y) \mathcal{P}_n(x, y) = \gamma(x, y), \quad (\text{B.3.8})$$

$$(x, y) \in S_G, \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Die Quellstärke $\sigma(\xi, \eta)$ eines Einfachschichtpotentials, ähnlich dem nach (B.3.4), läßt sich durch Lösung folgender Integralgleichung für ein äußeres Problem angeben:

$$\begin{aligned} \int_{S_G} \{ \beta(x, y) \sigma(\xi, \eta) - \alpha(x, y) \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial n} \} \sigma(\xi, \eta) dS = \gamma(x, y), \end{aligned} \quad (\text{B.3.9})$$

mit $(x, y) \in S_G$.

Unter Berücksichtigung der speziellen Randbedingungen der hier vorliegenden Randwertprobleme, insbesondere von

$$\alpha(x, y) = 0, \beta(x, y) = 1, \gamma(x, y) = F^{(k)}(x, y); (x, y) \in S_o,$$

$$\alpha(x, y) = -k^2 v, \beta(x, y) = 1, \gamma(x, y) = L^{(k)}(x, y); (x, y) \in S_f,$$

läßt sich (B.3.9) auf die Integralgleichung (B.3.5) zurückführen, wobei der Einfluß der im Falle des $\mathcal{P}^{(2)}$ -Problems mit einfachen Quellen belegten Ruhewasserlinie, getrennt als $\mathcal{P}_{22}^{(2)}$ -Problem behandelt wird.

Die in B.3 dargestellten Möglichkeiten für die Aufstellung von sinnvollen Integralgleichungen zur Lösung der vorliegenden Randwertprobleme sind unter dem Aspekt der praktischen und bequemen Handhabung ausgewählt worden. Theoretisch

existieren unendlich viele mögliche Oberflächenverteilungen von Quellen und entsprechend viele Integralgleichungsformen, welche alle denselben Wert von \mathcal{P} liefern (L a m b [53]).

B.4 Existenz- und Eindeutigkeitsfragen

Allgemeines

Die hier angesprochenen Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von Lösungen der in B.3 aus den Randwertproblemen erhaltenen Integralgleichungen sollen im Rahmen dieser Arbeit auf der Basis von Theoremen aus der Theorie der F r e d h o l m - schen Integralgleichungen diskutiert werden. Beweise für die hier verwendeten Theoreme findet man u.a. bei S a u e r - S z a b ó [75].

Die uns interessierenden Integralgleichungen nach (B.3.5) bzw. (B.3.6), entsprechend dem Potentialansatz als E i n - f a c h s c h i c h t - bzw. als E i n f a c h - und D o p p e l s c h i c h t p o t e n t i a l, sind i n h o - m o g e n e F r e d h o l m s c h e I n t e g r a l g l e i - c h u n g e n z w e i t e r A r t folgender allgemeinen Form:

$$\varphi(s) - \lambda \int_{S_0} K(s,t) \varphi(t) dt = f(s). \quad (\text{B.4.1})$$

Die zugehörige homogene Integralgleichung ist dann

$$\varphi_0(s) - \lambda \int_{S_0} K(s,t) \varphi_0(t) dt = 0. \quad (\text{B.4.2})$$

Jedes λ , für das die homogene Integralgleichung (B.4.2) durch eine nichttriviale stetige Lösung $\varphi_0(s)$ gelöst werden kann, heißt ein E i g e n w e r t des Kernes $K(s,t)$ und die zugehörigen Lösungsfunktionen $\varphi_0(s)$ sind die sog. E i - g e n f u n k t i o n e n.

Bevor die Existenz- und Eindeutigkeitsfragen der Integralgleichungslösungen behandelt werden können, ist es erforderlich, die Art der dort auftretenden Kerne festzustellen. Dies führt zu Existenzbeweisen für die G r e e n s c h e n Funktionen bzw. deren Normalableitungen, wie man durch Vergleich von (B.4.1) mit (B.3.5) und (B.3.6) erkennen kann.

Solche Existenzbeweise sind für die hier in Frage kommenden Green'schen Funktionen von F. J o h n [51] durchgeführt worden. Sie lassen sich ebenso nach S a u e r - S z a b ó (S. 368, [75]) unter gewissen Voraussetzungen nachvollziehen. Wenn das zu untersuchende Gebiet Ecken oder Kanten auf seinem Rand aufweist, was meist bei den Existenzbeweisen ausgeschlossen wird, kann man sich durch Grenzübergänge zu "abgerundeten" Gebieten helfen. (vgl. [75], § 13).

Die am Rande vorkommenden Singularitäten für G bzw. G_n (vgl. (B.1.8)) sind integrabel. Besonders berücksichtigt muß jedoch die Singularität beim Zusammentreffen von S_0 mit S_F werden, wenn der Winkel von S_0 mit S_F an dieser Stelle kein rechter ist ([51]).

Schließlich kann man feststellen, daß die hier in Frage kommenden Green'schen Funktionen existieren, es sei denn es liegt ein Eigenwertproblem vor [75].

Da die Resolvente - hier die Green'sche Funktion - einer selbstadjungierten Randwertaufgabe, die hier vorliegt, unter den gleichen Voraussetzungen wie für deren Existenz symmetrisch ist ([75], s. 368), folgt die Symmetrie der Integralkerne von (B.3.5) bzw. (B.3.6), oder

$$K(s, t) = K(t, s). \quad (\text{B.4.3})$$

Gleiches folgt aus der Symmetrie der Green'schen Funktionen nach F. J o h n ([51], S. 88) für die Normalableitung

$$\frac{\partial G(P(x, y), Q(z, \eta))}{\partial n_P} = \frac{\partial G(Q, P)}{\partial n_Q} \quad (\text{B.4.4})$$

Damit findet hier der sog. A l t e r n a t i v s a t z von F r e d h o l m für symmetrische Kerne eine Anwendung, wobei Integralgleichung und deren t r a n s p o n i e r t e (adjungierte) identisch sind. Dieser Satz besagt:

E n t w e d e r ist λ kein Eigenwert der homogenen Integralgleichung (B.4.2); dann ist die inhomogene Integralgleichung (B.4.1) und die damit verbundene Randwertaufgabe für jedes stetige $f(s)$ eindeutig lösbar.

Oder λ ist ein Eigenwert von (B.4.2); dann ist die inhomogene Integralgleichung genau dann lösbar, wenn die Störfunktion $f(s)$ zu allen Eigenfunktionen der homogenen Integralgleichung orthogonal ist, d. h. wenn

$$\int_{S_0} f(s) \varphi_{0j}(s) ds = 0 \quad (B.4.5)$$

$(j = 1, \dots, k)$

für k linear unabhängige Eigenlösungen erfüllt ist. Folgende Sätze über Fredholmsche Integralgleichungen mit symmetrischen Kernen sind noch von Bedeutung:

- a) Sämtliche Eigenwerte sind reell.
- b) Es existiert mindestens ein Eigenwert.
- c) Die Eigenwerte können sich im Endlichen nicht häufen.
- d) Zwei zu verschiedenen Eigenwerten λ und λ' gehörige Eigenfunktionen $\varphi_{0j}(s)$ und $\varphi_{0j'}(s)$ sind zueinander orthogonal.

Alle erwähnten Sätze über die Fredholmschen Integralgleichungen gelten unter der Voraussetzung, daß die Störfunktion $f(s)$ quadratisch integrabel ist, d. h. daß $\int f^2(s) ds$ über S_0 existiert, und ebensolches für den reellen Kern $K(s, t)$ über das Integrationsgebiet gilt. Das ist dann gegeben, wenn in einem endlichen Integrationsgebiet, das hier vorliegt, $f(s)$ und $K(s, t)$ beschränkt und stückweise stetig sind ([75]).

B.4.1 Anwendung der Fredholmschen Integralsätze auf die Integralgleichung des Einfachschichtpotentials

Durch den Vergleich von (B.3.5) mit (B.4.1) können wir folgende Identitäten feststellen:

$$\varphi(s) = \sigma(x, y); \quad K(s; t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta)}{\partial n_p};$$

$$\lambda = +1; \quad f(s) = \frac{1}{\pi} F(x, y),$$

(B.4.6)

mit $(x, y) \in S_0$.

Dabei muß berücksichtigt werden, daß der Kern $K(s, t)$ durch die Greenschen Funktionen eine Funktion der Wellenzahl

$\nu = \frac{\omega^2}{g}$ ist. Für jedes ν gibt es nach den vorangegangenen Sätzen mindestens einen Eigenwert λ . Jedes ν , das den Eigenwert $\lambda = +1$ für $K(s, t)$ beinhaltet, wird in Anlehnung an entsprechende angelsächsische Arbeiten [51], [56] charakteristische Wellenzahl oder Irregularität genannt und mit ν' bezeichnet. Für diese Wellenzahlen ν' gibt es keine Lösung von (B.3.5), es sei denn, daß folgende Bedingung nach (B.4.4) gilt:

$$\int_{S_0} F(\xi, \eta) \cdot \sigma_0(\xi, \eta) dS = 0 \quad (\text{B.4.7})$$

für alle nichttrivialen $\sigma_0(\xi, \eta)$ Lösungen der homogenen (identisch adjungierten) Integralgleichung

$$\pi \sigma_0(x, y) - \int_{S_0} \sigma_0(\xi, \eta) \frac{\partial G(\xi, \eta; x, y; \nu')}{\partial n_a} dS_a = 0, \quad (x, y) \in S_0. \quad (\text{B.4.8})$$

Im allgemeinen läßt sich jedoch die Bedingung (B.4.7) nicht erfüllen, es sei denn für spezielle Funktionen $F(\xi, \eta)$ bzw. spezielle vorgegebene Geschwindigkeitsverteilungen. Daraus kann man folgern, daß die Formulierung des Potentials als Einfachschichtpotential für die irreguläre Wellenzahlen versagt, ebenso die Lösung des entsprechenden Randwertproblems.

B.4.2 Anwendung der Fredholmschen Integralsätze auf die Integralgleichung des Einfach- und Doppelschichtpotentials

Durch Vergleich von (B.3.6) mit (B.4.1) ergeben sich folgende Beziehungen:

$$\varphi(s) = \Phi^{(k)}(x, y); \quad K(s, t) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial G^{(k)}(x, y; \xi, \eta)}{\partial n_a}; \quad (\text{B.4.9})$$

$$f(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{S_0} G^{(k)}(x, y; \xi, \eta) F^{(k)}(\xi, \eta) dS_a + \frac{1}{\pi} \int_{S_F} G^{(k)} L^{(k)}(\xi) d\xi;$$

$$(x, y) \in S_0.$$

Wir beschränken uns auf den Fall $L^{(k)} = 0$ ($\Phi^{(k)}$ -Problem), da sonst die Forderung nach Beschränktheit von $f(s)$ verletzt wäre. Erst nachträglich kann man feststellen, daß $L^{(k)}(\xi)$ mit wachsendem ξ schnell gegen Null geht, d.h., daß $f(s)$ auch für den Fall $L^{(k)} \neq 0$ beschränkt bleibt. Die Integralgleichung (B.3.6) hat eine eindeutige Lösung, es sei denn, daß $\nu = \nu'$ wird. Für diese charakteristische Wellenzahl ν' gibt es nur dann eine Lösung, wenn nach (B.4.5) gilt:

$$\int_{S_0} \Phi_{0j}(\xi, \eta) ds \int_{S_0} G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta) ds_a \quad (B.4.10) \\ = 0, \quad (x, y) \in S_0$$

für alle nichttrivialen $\Phi_{0j}(\xi, \eta)$ Lösungen der homogenen Integralgleichung

$$\pi \Phi_0(x, y) - \int_{S_0} \Phi(\xi, \eta) \frac{\partial G(x, y; \xi, \eta; \nu')}{\partial n_a} ds_a \quad (B.4.11) \\ = 0, \quad (x, y) \in S_0.$$

Im Unterschied zu der Quellstärke $\sigma(\xi, \eta)$ nach Punkt (B.4.2) hat das Potential $\Phi(\xi, \eta)$ eine physikalische Bedeutung, so daß Gl. (B.4.9) für beliebige vorgegebene Geschwindigkeitsverteilungen $F(\xi, \eta)$ erfüllt wird ([56], S. 56).

Jedoch genügt die Integralgleichung (B.3.6) allein nicht, um $\Phi(\xi, \eta)$ zu bestimmen, sondern versagt ebenso wie die Darstellung nach (B.3.5) für bestimmte, die oben erwähnten irregulären Wellenzahlen (s. [51], S. 85 ff.).

B.4.3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des inneren Problems

Schließlich wird die Integralbeziehung (B.3.7), die die Randwerte von $\Phi^{(k)}(\xi, \eta)$ als Funktion von $F^{(k)}(\xi, \eta)$ anhand eines beliebigen inneren Aufpunktes $(x, y) \in D'$ liefert, untersucht. Für $(x, y) \in D' \rightarrow S_0$ ergibt sich aus (B.3.7) die entsprechende Integralgleichung nach (B.3.6). Während jedoch für gewisse Wellenzahlen ν' die Integralgleichung (B.3.6) zur Bestimmung von $\Phi(\xi, \eta)$ versagt, liefert die

Integralbeziehung (B.3.7) für alle $(x, y) \in D'$ und alle ν eindeutige Lösungen für $\mathcal{P}(\xi, \zeta)$ ([511, S. 85]). Für den irregulären Fall $\nu' \neq \nu$ kann nachgewiesen werden ([56], Anhang B), daß von allen Lösungen, die (B.3.6) erfüllen, nur eine gleichzeitig die Integralbeziehung (B.3.7) des inneren Problems erfüllt. Damit läßt sich über die Integralbeziehung (B.3.7) auch die Eindeutigkeit von Lösungen der Integralgleichung (B.3.6) nachweisen.

Zusammenfassend läßt sich folgendes feststellen:

- a) Wenn die Wellenzahl ν von der charakteristischen Wellenzahl ν' verschieden ist, liefert sowohl die Einfachschichtpotential-Darstellung (B.3.5) als auch die Einfach- und Doppelschichtpotential-Darstellung (B.3.6) eindeutige Lösungen.
- b) Für den irregulären Fall $\nu' \neq \nu$ versagen beide Darstellungsmethoden, und zwar aufgrund der Äquivalenz von (B.4.8) mit (B.4.11) für gleiche irreguläre Wellenzahlen. Die Einfachschichtpotential-Darstellung liefert nur für spezielle vorgegebene Geschwindigkeitsverteilungen auf S_0 Lösungen, während die Darstellung (B.3.6) keine eindeutigen Lösungen liefert.
- c) Durch Betrachtung des inneren Problems nach (B.4.3) läßt sich jedoch eine eindeutige Lösung nach (B.3.6) erzielen.
- d) Vom Standpunkt der numerischen Auswertung der vorliegenden Integralgleichungen durch Diskretisierung läßt sich feststellen, daß während die Integralgleichungen selbst nur für $\nu = \nu'$ versagen, so wird das die Integralgleichung approximierende algebraische Gleichungssystem auch schon für ν in der Nähe von ν' stark beeinflusst.
- e) Da die hier vorliegenden Randwertprobleme aufgrund der komplizierten Berandung praktisch nur durch numerische Auswertung von Integralgleichungen gelöst werden können, gewinnen die entsprechenden Eigenwertprobleme als numerische Probleme für die Lösungsfindung erheblich an Bedeutung.

B.5 Verbesserte Lösungsdarstellung durch eine kombinierte Integralgleichungsmethode

Die unter B.4 dargestellten Schwierigkeiten bei den Existenz- und Eindeutigkeitsfragen von Lösungen der in Frage kommenden

Integralgleichungen (B.3.5) bzw. (B.3.6) sind seit längerer Zeit bekannt [51]. Jedoch erst in den letzten Jahren durch die Entwicklung von numerischen Methoden mit Hilfe der EDV wurden diese Fragen nochmals überprüft mit dem Ziel, numerische Lösungen für alle Wellenzahlen ν zu bekommen. Ein wichtiger Schritt in diese Richtung wurde zunächst von L. C o p l e y [50] und H. S c h e n k [56] für Diffraktionsprobleme der Akustik getan. Mehrere Arbeiten aus dem gleichen Gebiet entstanden in der Nachfolgezeit [61].

Im Rahmen dieser Arbeit wird ein von H. S c h e n k [56] eingeführtes und für Diffraktionsprobleme der Akustik erfolgreich geprüfetes numerisches Verfahren vorgestellt, das auch auf Diffraktionsprobleme der Schiffstheorie sinngemäß angewandt werden kann.

Die verbesserte Integralgleichungsmethode besteht hauptsächlich darin, praktische Wege für das Auffinden der Potentialwerte auf S_0 anzugeben, die sowohl (B.3.6) als auch (B.3.7) erfüllen; durch Einsetzen dieser Randwerte in die Integralformel (B.2.9) läßt sich anschließend das Potential in beliebigen Punkten von D bestimmen. Die Integralgleichung (B.3.6) ($L^{(k)} = 0$) wird mittels des Q u a d r a t u r v e r f a h r e n s diskretisiert, d. h. die Körperkontur S_0 wird durch einen aus N_S Segmenten bestehenden Polygonzug approximiert, wobei die Segmentgröße so klein sein sollte, daß der Wert des Potentials und dessen Normalableitung für jeden Punkt eines Segments durch dessen Wert im Mittelpunkt des Segments näherungsweise ausgedrückt werden kann. Diese Annahme erlaubt uns die folgende Vereinfachung von (B.3.6) (s. auch 2., Gl.(75)).

$$\begin{aligned} \Pi \Phi(x_i, y_i) - \sum_{j=1}^{N_S} \Phi(x_j, y_j) \int_{(S_j)} (\vec{n}(x_j, y_j) \cdot \nabla) G(x, y; x_j, y_j) ds \\ \cong - \sum_{j=1}^{N_S} F(x_j, y_j) \int_{(S_j)} G(x_i, y_i; x_j, y_j) ds; \quad (x_i, y_i) \in S_0, \\ i=1, \dots, N_S. \end{aligned} \quad (B.5.1)$$

Das ergibt ein lineares algebraisches Gleichungssystem von N_S Gleichungen für die N_S unbekannt Werte des Potentials in Bezug auf die Mittelpunkte der N_S Segmente.

Ebenso läßt sich die Integralbeziehung (B.3.7) diskretisieren, indem man die Körperkontur durch die gleiche Anzahl von Segmenten, was nicht zwingend ist, approximiert:

$$\sum_{j=1}^{N_S} \Phi(x_j, y_j) \int_{(S_j)} (\vec{n}(\xi, \eta) \cdot \nabla) G(x'_i, y'_i; \xi, \eta) ds \quad (B.5.2)$$

$$\cong \sum_{j=1}^{N_S} F(x_j, y_j) \int_{(S_j)} G(x'_i, y'_i; \xi, \eta) ds; \quad (x'_i, y'_i) \in D',$$

$$i = 1, \dots, N_I.$$

Das sind N_I lineare algebraische Gleichungen, die durch Anwendung von (B.3.7) in N_I ausgewählten, inneren Punkten von S_0 , zur Bestimmung von N_S unbekanntenen Werten von Φ auf S_0 entstanden sind.

Die Anzahl der inneren Punkte und die Wahl des Ortes im Innern von S_0 ist frei wählbar. Jedoch ist nach der Umwandlung von (B.3.7) zum numerischen Problem (B.5.2) bei der Wahl des Ortes das Verhalten und die Struktur der Koeffizientenmatrix zu berücksichtigen. Solche Probleme sind jedoch insbesondere von H. S ö d i n g [16] im Zusammenhang mit Multipolansordnungen in der Nähe und im Innern von S_0 ausführlich behandelt worden.

Mit den Abkürzungen:

$$I_{ij} \equiv \begin{cases} \pi \delta_{ij} - \int_{(S_j)} (\vec{n}(\xi, \eta) \cdot \nabla) G(x_i, y_i; \xi, \eta) ds, & i = 1, \dots, N_S, \\ - \int_{(S_j)} (\vec{n}(\xi, \eta) \cdot \nabla) G(x'_i, y'_i; \xi, \eta) ds, & i = (N_S+1), \dots, (N_S+N_I), \end{cases} \quad (B.5.3)$$

δ_{ij} : Kronecker - Symbol ,

$j = 1, \dots, N_S$,

$$K_{ij} \equiv \begin{cases} - \int_{(S_j)} G(x_i, y_i; \xi, \eta) ds, & i = 1, \dots, N_S, \\ - \int_{(S_j)} G(x'_i, y'_i; \xi, \eta) ds, & i = (N_S + 1), \dots, (N_S + N_I), \end{cases} \quad (\text{B.5.4})$$

$j = 1$ bis N_S ,

ergibt sich folgendes überbestimmtes Gleichungssystem für die N_S unbekanntes $\Phi(x_j, y_j)$:

$$I_{ij} \Phi_j = K_{ij} F_j, \quad (\text{B.5.5})$$

$i = 1, \dots, (N_S + N_I)$, $j = 1, \dots, N_S$,
mit

$$\Phi_j \equiv \Phi(x_j, y_j) \quad ; \quad F_j \equiv F(x_j, y_j).$$

Dieses Gleichungssystem kann man z.B. nach der sog. Fehlerquadratmethode [75] lösen. Nach dieser Methode läßt sich eine Lösung Φ_j finden, die für gegebene Geschwindigkeitsverteilung F_j den folgenden Fehler minimiert:

$$\varepsilon_i \equiv K_{i3} F_3 - I_{i3} \tilde{\Phi}_3. \quad (\text{B.5.6})$$

Wenn die Randwerte des Potentials Φ auf S_0 bestimmt sind, läßt sich über (B.2.9) der Potentialwert in jedem Aufpunkt aus D bestimmen. Die hier vorgeschlagene verbesserte Lösungsmethode, die auf der Basis einer Arbeit von H. S c h e n k über a k u s t i s c h e Diffraktionsprobleme entwickelt wurde, erinnert in manchen Punkten an die von H. S ö d i n g [16] verfolgte Methode. Während jedoch die Methode von H. S ö d i n g unter Berücksichtigung einer A c h s e n b e l e g u n g (z.B. nach G r i m) zusätzliche M u l t i p o l a n o r d n u n g e n im Innern des Körpers vorsieht, arbeitet die vorliegende Methode grundsätzlich auf der Basis einer O b e r f l ä c h e n b e l e g u n g und von zusätzlichen Betrachtungen in inneren Körperpunkten. Der numerische Aufwand und die damit verbundene Rechenzeit dürfte ähnlich hoch ausfallen; dagegen scheint in bezug auf die Anwendbarkeit der Lösungsmethoden auf beliebige Spantformen und beliebige Wellenzahlen die vorliegende Methode überlegen. Dafür bleibt jedoch der numerisch durchgeführte Nachweis im Rahmen dieser Arbeit noch aus.

B.6 Irregularitätenproblem eines vertikal schwingenden Rechteckprofils

Unabhängig von der Anwendung einer "verbesserten" und für alle Wellenzahlen gültigen Integralgleichungsmethode, wie sie z.B. in B.5 beschrieben wird, soll hier anhand eines einfachen Beispiels das Auftreten der bereits angesprochenen sog. "irregulären" Wellenzahlen demonstriert werden. Das im folgenden angegebene Beispiel des vertikal schwingenden Rechteckspants bietet einerseits den Vorteil, eine relativ einfache innere Potentiallösung zu besitzen; andererseits geben die für die Rechteckspantform gültigen irregulären Wellenzahlen ein gutes R i c h t m a ß für die entsprechenden Wellenzahlen ähnlicher Spantformen mit gleichem Breite- zu Tiefgang-Verhältnis an.

Gemäß den unter B.4.2 angestellten Überlegungen lassen sich die nichttrivialen Lösungen der homogenen Integralgleichungen von (B.3.5) bzw. (B.3.6) bzw. deren "charakteristischen" (irregulären) Wellenzahlen durch Betrachtung des adjungierten (hier

selbstadjungierten) inneren Problems ermitteln ([51], S.85 ff.).
 Gesucht wird das Potential Φ' in D' , also im Innern von S_0 ,
 das folgende Bedingungen erfüllen muß:

$$\Delta \Phi'^{(k)}(x,y) = 0, (x,y) \in D' \quad (\text{B.6.1})$$

$$\Phi'^{(k)}(x,y) = 0, (x,y) \in S_0 \quad (\text{B.6.2})$$

$$\Phi'_y{}'^{(k)}(x,y) - k^2 y' \Phi'^{(k)} = 0, (x,y) \in S'_F \quad (\text{B.6.3})$$

$$\Phi'^{(k)}(x,y) = \Phi'^{(k)}(-x,y), \quad (\text{B.6.4})$$

- mit S'_F : Komplement von S_F auf $y = 0$,
 entspricht der Spantbreite in der Schwimmwasserlinie;
 ν' : irreguläre Wellenzahl;
 \vec{n}' : innere Normale von S_0 ;
 $k = 1$ für das $\Phi^{(1)}$ - Problem,
 $= 2$ für das $\Phi_{12}^{(2)}$ - Problem;

Inneres Randwertproblem eines Rechteckprofils

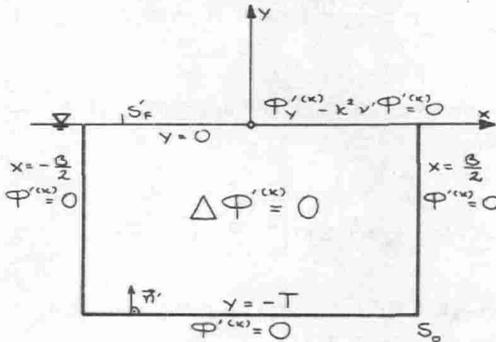


Abb. B.4

Dieses Potentialproblem läßt sich einfach durch Trennung
 der Variablen lösen. Durch Einsetzen von

$$\Phi'(x,y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (\text{B.6.5})$$

in (B.6.1) und Trennung der Variablen ergibt sich:

$$\frac{X''}{X} = - \frac{Y''}{Y} = - \lambda^2. \quad (\text{B.6.6})$$

Wegen (B.6.2) bzw. (B.6.4)

$$X(-\frac{B}{2}) = X(\frac{B}{2}) = 0$$

ergibt sich aus (B.6.6)

$$X = C_1 \cos \lambda x, \quad (\text{B.6.7})$$

mit

$$\lambda = \frac{(2n-1)\pi}{B}, \quad n=1, 2, \dots$$

Nun berücksichtigen wir das folgende partikuläre Integral für die Differentialgleichung (B.6.6)

$$Y'' - \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{B^2} Y = 0$$

$$Y = C_2 \operatorname{sh} \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{B} (y+T) \right\}, \quad n=1, 2, \dots, \quad (\text{B.6.8})$$

mit $Y(-T) = 0$ nach (B.6.2).

Unter Berücksichtigung von (B.6.7) und (B.6.8) ergibt sich für Φ' mit $C = C_1 \cdot C_2$

$$\Phi' = C \sin \left[\frac{(2n-1)\pi}{B} x \right] \operatorname{sh} \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{B} [y+T] \right\}. \quad (\text{B.6.9})$$

Durch Einsetzen von (B.6.9) in (B.6.3) lassen sich die irregulären Wellenzahlen ν' ermitteln:

$$\nu_n^{(\kappa)} = \frac{n' \pi}{k^2 B} \operatorname{cth} \left\{ \frac{n' \pi}{B} T \right\}, \quad (\text{B.6.10})$$

mit

$$n' = 1, 3, 5, \dots$$

$$k = 1 \quad \text{für das } \Phi^{(1)} \text{ - Problem,}$$

$$k = 2 \quad \text{für das } \Phi_{12}^{(2)} \text{ - Problem.}$$

Die für den Praktiker besonders interessante erste (n = 1) Irregularität ergibt sich zu:

$$\nu_1'^{(c1)} = \frac{\pi}{B} c \operatorname{th} \left\{ \frac{\pi}{B} T \right\}, \text{ für das } \mathcal{P}^{(c1)}\text{-Problem,} \quad (\text{B.6.11})$$

$$\nu_1'^{(c2)} = \frac{1}{4} \frac{\pi}{B} c \operatorname{th} \left\{ \frac{\pi}{B} T \right\}, \text{ für das } \mathcal{P}_{12}^{(c2)}\text{-Problem.}$$

Für $0 < \frac{T}{B} < 1$ läßt sich (B.6.11) in einer Potenzreihe entwickeln:

$$\nu_1'^{(c1)} \cong \frac{\pi}{B} \left[\frac{B}{\pi T} + \frac{1}{3} \frac{\pi T}{B} - \frac{1}{45} \left(\frac{\pi T}{B} \right)^3 \right] + O\left(\left(\frac{\pi T}{B} \right)^5 \right). \quad (\text{B.6.12})$$

Zusammenfassend läßt sich aufgrund von (B.6.12) und den übrigen Gleichungen folgendes feststellen:

- a) Die i r r e g u l ä r e n Wellenzahlen ν' sind unabhängig von der sonst das äußere Problem beeinflussenden Wassertiefe h und allein von der Körperkontur S_0 abhängig.
- b) Für die erste Irregularität $\nu_1'^{(c1)}$ gilt nach (B.6.12)

$$\nu_1'^{(c1)} \geq \frac{1}{T}, \quad (\text{B.6.13})$$

eine Beziehung, die F. J o h n ([51], S. 86) unter bestimmten Voraussetzungen für b e l i e b i g e Spantformen nachgewiesen hat (F r a n k [5]).

- c) Die Abhängigkeit der ersten Irregularität von B / T wird durch Gl. (B.6.11) (vgl. auch Diagramm Nr. 5) für ein Rechteckprofil beschrieben. Numerische Untersuchungen haben ergeben, daß offensichtlich eine ähnliche Abhängigkeit von B / T für v i e l e Spantformen, die sich nicht erheblich von einem Rechteckspant unterscheiden, besteht.
- d) Eine wichtige Erkenntnis für das $\mathcal{P}_{12}^{(c2)}$ -Problem - ebenso für das $\mathcal{P}^{(c2)}$ -Problem - ist, daß die Lösungen zweiter Ordnung schon erheblich f r ü h e r auf dem Frequenzband von den Irregularitäten beeinflusst werden und zwar bei

einer Wellenzahl von etwa 25 % der ersten Irregularität erster Ordnung.

- e) Für $B \rightarrow 0$ rückt die erste Irregularität gegen Unendlich, was dem Grenzfall des vollgetauchten Spantes entspricht.

ANHANG C

Bestimmung geeigneter G r e e n schen Funktionen

Allgemeines

Nachdem unter B.1 die die G r e e n schen Funktionen der vorliegenden Probleme kennzeichnenden Randwertaufgaben formuliert und unter B.4 Fragen über die Existenz solcher Grundlösungen besprochen wurden, soll nun deren Bestimmung erfolgen.

Dabei wird von dem allgemeineren Fall endlicher Wassertiefe ausgegangen; durch Grenzwertbetrachtungen wird anschließend der später numerisch ausgewertete Fall unendlicher Wassertiefe abgeleitet. Die von mehreren Autoren ([51], [17], [58], [29]) zum Vergleich angegebenen Endformeln haben oft verschiedenartige Form, weshalb sie auch durch Umformung überprüft werden sollen.

Im folgenden werden die G r e e n schen Funktionen für das $\mathcal{P}^{(4)}$ -Problem ermittelt. Aus der schematischen Darstellung der entsprechenden Randwertaufgaben erster bzw. zweiter Ordnung ist ersichtlich, daß die G r e e n schen Funktionen zweiter Ordnung die gleiche Form wie die der ersten Ordnung haben, mit dem einzigen Unterschied, daß die Schwingungsfrequenz der betrachteten "Einheitsquelle" doppelt so hoch ist (vgl. Abb. B.2).

C.1 G r e e n sche Funktion der Ebene bei endlicher Wassertiefe

Physikalisch wird das Potential in $P(x,y)$ einer im Punkt $Q(\xi, \eta)$ pulsierenden Einheitsquelle unter den speziellen Randbedingungen des jeweiligen Problems gesucht.

Mathematisch ausgedrückt ist dies die Lösung folgenden Randwertproblems:

$$\Delta G = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta), \quad (C.1.1)$$

$$G_y - \nu G = 0, \quad y = 0, \quad (C.1.2)$$

$$G_y = 0, \quad y = -h, \quad (C.1.3)$$

$$G_x - j \nu_0 G = 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (C.1.4)$$

mit

$$\nu = \frac{\omega^2}{g}; \quad \nu_0 = th(\nu_0 h) = \nu; \quad \delta: \text{Dirac-Funktion}$$

und

$$g(P, Q) = G - \log R,$$

$$\text{harmonisch, für } y < 0, R \rightarrow 0, \quad (C.1.5)$$

wobei

$$R = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2}$$

bedeutet.

Wir betrachten im folgenden nur den vierten Quadranten, wenn das vorliegende Problem in bezug auf die Vertikalachse symmetrisch ist. Die Ausstrahlungsbedingung (C.1.4) sichert die Eindeutigkeit der sich ergebenden Green'schen Funktionen, die dazu den Bedingungen (C.1.1) bis (C.1.3) unter Berücksichtigung von (C.1.5) genügen.

Die Funktion $g(P, Q)$ nach (C.1.5) ist harmonisch, regulär und endlich in der untersuchten unteren ($y < 0, x > 0$) Halbebene. Sie ist ebenso eine gerade Funktion von x und soll ferner eine Abnahme der Oberflächeneffekte mit zunehmender Tauchtiefe beschreiben können.

Da die sog. Dirichlet'schen Bedingungen ([69]) erfüllt sind, läßt sich $G(P, Q)$ durch eine Fouriersche Integraldarstellung bezüglich x ausdrücken, der Form [78]

$$G(P, Q) = \int_0^{\infty} \tilde{G}(k; y, \eta) \cos k|x-\xi| dk. \quad (C.1.6)$$

Dann ergeben sich durch Einsetzen von (C.1.6) in (C.1.1) bis (C.1.3) - (C.1.4) wird später berücksichtigt - folgende Bedingungen für die sog. Fourier-Transformierte $\tilde{G}(k; y, \eta)$:

$$\tilde{G}_{yy} - k^2 \tilde{G} = \delta(y-\eta), \quad (C.1.7)$$

$$\tilde{G}_y - \nu \tilde{G} = 0, \quad y = 0, \quad (C.1.8)$$

$$\tilde{G}_y = 0, \quad y = -h. \quad (C.1.9)$$

Dieses Differentialgleichungssystem läßt sich mit Hilfe folgender Ansätze lösen [29]:

$$\tilde{G}(k; y, \varrho) = \frac{\tilde{G}_1(k; y) \tilde{G}_2(k; \varrho)}{D(k; \varrho)}, \quad y > \varrho, \quad (\text{C.1.10})$$

$$\tilde{G}(k; y, \varrho) = \frac{\tilde{G}_1(k; \varrho) \tilde{G}_2(k; y)}{D(k; \varrho)}, \quad y < \varrho, \quad (\text{C.1.11})$$

$$D(k; \varrho) = \frac{1}{2} [\tilde{G}_{1, \varrho}(k; \varrho) \tilde{G}_2(k; \varrho) - \tilde{G}_1(k; \varrho) \tilde{G}_{2, \varrho}(k; \varrho)]. \quad (\text{C.1.12})$$

Dabei sind die Funktionen \tilde{G}_1 und \tilde{G}_2 zwei unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung (C.1.7); \tilde{G}_1 wird so gewählt, daß (C.1.8) erfüllt wird, während \tilde{G}_2 die Erfüllung von (C.1.9) sicherstellt.

Bekanntlich sind die Lösungen der homogenen Gleichung (C.1.7) **H y b e r b e l f u n k t i o n e n**. Man bekommt somit folgende Ausdrücke für \tilde{G}_1 , \tilde{G}_2 und D :

$$\tilde{G}_1(k; y) = k \operatorname{ch} k y + v \operatorname{sh} k y, \quad (\text{C.1.13})$$

$$\tilde{G}_2(k; y) = \operatorname{ch} k(y+h), \quad (\text{C.1.14})$$

$$D(k; \varrho) = k(v \operatorname{ch} k h - k \operatorname{sh} k h). \quad (\text{C.1.15})$$

Durch Einsetzen von (C.1.13) bis (C.1.15), unter Berücksichtigung von (C.1.10) bis (C.1.12), in (C.1.6) ergeben sich folgende Ausdrücke für die **G r e e n s c h e** Funktion:

$$G(P, Q) = 2 \int_0^{\infty} \frac{(k \operatorname{ch} k y + v \operatorname{sh} k y) \operatorname{ch} k(\varrho+h)}{k(v \operatorname{ch} k h - k \operatorname{sh} k h)} \cos k|x-\xi| dk, \quad (\text{C.1.16})$$

für $y > \varrho$,

und

$$G(P, Q) = 2 \int_0^{\infty} \frac{(k \operatorname{ch} k \varrho + v \operatorname{sh} k \varrho) \operatorname{ch} k(y+h)}{k(v \operatorname{ch} k h - k \operatorname{sh} k h)} \cos k|x-\xi| dk, \quad (\text{C.1.17})$$

für $y < \varrho$.

Unter Berücksichtigung folgender Identitäten:

$$\frac{(k \operatorname{ch} k y + v \operatorname{sh} k y)}{k(v \operatorname{ch} k h - k \operatorname{sh} k h)} = \frac{(k+v) \operatorname{ch} k(y+h) e^{-kh}}{k(v \operatorname{ch} k h - k \operatorname{sh} k h)} - \frac{e^{-kcy+h}}{k}, \quad (\text{C.1.18})$$

$$\frac{(k \operatorname{ch} k \varrho + v \operatorname{sh} k \varrho)}{k(v \operatorname{ch} k h - k \operatorname{sh} k h)} = \frac{(k+v) \operatorname{ch} k(\varrho+h) e^{-kh}}{k(v \operatorname{ch} k h - k \operatorname{sh} k h)} - \frac{e^{-k(\varrho+h)}}{k},$$

ferner nach [64]

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} dx = \log \frac{\beta}{\alpha} ; \quad \alpha, \beta > 0, \quad (\text{C.1.19})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} (1 - \cos \beta x)}{x} dx = \frac{1}{2} \log \left(1 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right); \quad \alpha > 0, \quad (\text{C.1.20})$$

bekommt man aus (C.1.16) bzw. (C.1.17) den folgenden Ausdruck für die Green'sche Funktion:

$$G(P, Q) = \log R + \log R_1 - 2 \log h - 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{(k+v) e^{-kh} \operatorname{ch} k(\varrho+h) \operatorname{ch} k(y+h) \cos k|x-\xi|}{k(k \operatorname{sh} k h - v \operatorname{ch} k h)} + \frac{e^{-kh}}{k} \right] dk, \quad (\text{C.1.21})$$

mit

$$R = [(x-\xi)^2 + (y-\varrho)^2]^{1/2},$$

$$R_1 = [(x-\xi)^2 + (y+\varrho+2h)^2]^{1/2}.$$

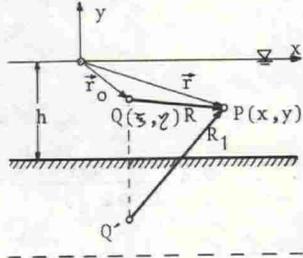


Abb. C.1

Einen ähnlichen Ausdruck findet man bei F. J o h n ([51]S. 99) der die G r e e n schen Funktionen durch das "S p i e g e l u n g s p r i n z i p" abgeleitet hat. Dort sind auch die mit (C.1.21) verbundenen Konvergenzfragen erörtert worden. Man erkennt, daß der Integrand in (C.1.21) für $k = \nu_0$, mit (B.1.6)

$$\nu_0 \notin h(\nu_0 h) = \nu \tag{C.1.22}$$

singulär wird; deswegen ist es erforderlich, diese Singularität (Pol) beim Integrieren längs der positiven reellen Achse zu umfahren und im folgenden den C a u c h y s c h e n Hauptwert des betreffenden Integrals einzuführen.

Gleichzeitig wird die Erfüllung der Bedingung im Unendlichen (C.1.4) erstrebt, die ein eindeutiges Verhalten von (C.1.21) durch die S o m m e r f e l d s c h e Ausstrahlungsbedingung festlegt.

Der Integrationsweg entlang der positiven reellen Achse wird so vereinbart, daß ein infinitesimaler Halbkreis um den Pol ν_0 herum in der unteren Halbebene ausgespart wird (Kennzeichnung: ). Diese Wahl des Integrationsweges ist zwingend, da sonst die Bedingung (C.1.4) nicht erfüllt wäre [29].

Mit Hilfe des R e s i d u e n s a t z e s [62] läßt sich das Integral in (C.1.21) dadurch auswerten, daß die Integration in der komplexen Ebene ausgeführt wird und der erhaltene Wert des R e s i d u u m s der Integrationsfunktion im einfachen Pol $k = \nu_0$ in die reelle Ebene zurücktransformiert wird. Dabei läßt sich das Residuum nach folgender einfacher Regel berechnen:

In der komplexen Zahlenebene sei $f(z)$ als Quotient zweier Funktionen P bzw. Q gegeben, die in der Umgebung von z_0 regulär sind. Ist z_0 eine einfache Nullstelle von Q mit $P(z_0) \neq 0$, so gilt:

$$\text{Res} (f(z), z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} . \tag{C.1.23}$$

Damit ergibt sich aus (C.1.21) folgender Ausdruck für G (vgl. auch Punkt D):

$$\begin{aligned}
 G^{(ch)}(P, Q) = & \left\{ \log R + \log R_1 - 2 \log h - \right. \\
 & - 2 \int_0^{\infty} \left[\frac{(k+\nu) e^{-k h} \operatorname{ch} k(\varrho+h) \operatorname{ch} k(\gamma+h) \cos k(x-\xi)}{k (\kappa \operatorname{sh} k h - \nu \operatorname{ch} k h)} + \right. \\
 & \left. \left. + \frac{e^{-k h}}{k} \right] dk \right\} - \\
 & - j \left\{ 2 \pi \frac{(\nu+\nu_0) e^{-\nu_0 h} \operatorname{sh} \nu_0 h \operatorname{ch} \nu_0(\varrho+h) \operatorname{ch} \nu_0(\gamma+h) \cos \nu_0(x-\xi)}{\nu_0 (\nu h + \operatorname{sh}^2 \nu_0 h)} \right\},
 \end{aligned}
 \tag{C.1.24}$$

mit R, R_1 nach (C.1.21).

Gl. (C.1.24) wird oft abgekürzt in folgender Form geschrieben:

$$G^{(ch)}(P, Q) = G_c^{(ch)} + j G_s^{(ch)} \tag{C.1.24}'$$

Die hier erhaltene Formel für die *G r e e n* sche Funktion stimmt mit einem entsprechenden Ausdruck nach [58] S. 483, (13.34) überein, mit Ausnahme des Vorzeichens von $\left(\frac{e^{-k h}}{k}\right)$ im Integralausdruck, der dort offensichtlich falsch gedruckt ist. Sonstige Vergleiche sind unter Punkt C.3 angestellt worden.

Die *G r e e n* sche Funktion nach (C.1.24) erfüllt die Bedingungen (C.1.1) bis (C.1.3); ebenso ist die Bedingung (C.1.5) offensichtlich erfüllt. Die Erfüllung der Ausstrahlungsbedingung im Unendlichen (C.1.4) wird unter Berücksichtigung einiger Theoreme aus der Theorie der *F o u r i e r* - Integrale im folgenden nachgewiesen.

Dafür wird zunächst die Bedingung (C.1.4) durch folgende ä q u i v a l e n t e, einfachere Gleichung ersetzt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} G = A \cdot e^{j \nu_0 |x|} \tag{C.1.25}$$

die offensichtlich (C.1.4) erfüllt. Unter Berücksichtigung folgender Theoreme nach [58], S. 477 :

$$\int_0^{\infty} f(k) \frac{\sin[(x-\xi)(k-\nu_0)]}{k-\nu_0} dk = \pi f(\nu_0) + O\left(\frac{1}{(x-\xi)}\right),$$

(C.1.26)

$$\int_0^{\infty} f(k) \frac{\cos[(x-\xi)(k-\nu_0)]}{k-\nu_0} dk = O\left(\frac{1}{(x-\xi)}\right),$$

ferner des folgenden Ausdrucks

$$\begin{aligned} \cos k(x-\xi) &= \cos \nu_0(x-\xi) \cos[(k-\nu_0)(x-\xi)] - \\ &\quad - \sin \nu_0(x-\xi) \sin[(k-\nu_0)(x-\xi)], \end{aligned} \quad (\text{C.1.27})$$

läßt sich der Grenzwert der G r e e n schen Funktion in der Form (C.1.6) in Verbindung mit (C.1.16) bis (C.1.18) im Unendlichen für $|x - \xi| \rightarrow \infty$ als der erstrebte Grenzwert (C.1.25) nachweisen.

Das Verhalten der G r e e n schen Funktion nach (C.1.24) entlang der uns interessierenden Ränder läßt sich wie folgt zusammenfassen [51]:

- $G(P(x, y), Q(\xi, \eta))$ ist eine reguläre Funktion mit Ausnahme des Punktes $P = Q$, der dem Wert $R = 0$ entspricht.
- $g(P, Q) = G - \log R$ ist auch für $P = Q$ regulär.
- Das gleiche Verhalten besitzen die in den Integralgleichungen erforderlichen Normalableitungen von G bzw. g .
- Die vorhandenen Singularitäten für $P = Q$ sind integrierbar.
- Der Kreuzungspunkt des Körperandes S_0 mit der freien Oberfläche S_F ($P \rightarrow Q; y, \eta \rightarrow 0$) liefert eine Singularität, die besonders schwierig zu behandeln ist. Es kann nachgewiesen werden, daß für den Fall senkrechten Einlaufs der Körperkontur zur freien Oberfläche diese Singularität sowohl für G als auch für deren Normalableitung integrierbar ist.

C.2 G r e e n s c h e F u n k t i o n d e r E b e n e b e i u n e n d l i c h e r W a s s e r t i e f e

Dieser relativ zu C.1 vereinfachte Fall, der später auch auf analytisch-numerischem Weg (s. Punkt D) ausgewertet wird, läßt sich aus (C.1.24) für den Grenzfall $h \rightarrow \infty$ ableiten. Dazu werden zunächst die Hilfsformeln (C.1.19) bzw. (C.1.20) benötigt. Es ergibt sich mit

$$2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-kh}}{k} dk = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-k}}{k} dk - 2 \log h, \quad (C.2.1)$$

$$\log R_1 = \int_0^{\infty} \frac{e^{-k}}{k} dk - \int_0^{\infty} \frac{e^{-k(y+z+2h)}}{k} \cos k(x-\xi) dk, \quad (C.2.2)$$

wobei $R_1 = [(x-\xi)^2 + (y+z+2h)^2]^{1/2}$ bedeutet, und den bekannten Entwicklungen der Hyperbelfunktionen in Form von Exponentialfunktionen folgender Grenzwert für den G_c -Teil nach (C.1.24) für $h \rightarrow \infty$ ($\nu \rightarrow \nu$):

$$\lim_{h \rightarrow \infty} G_c^{(h)} = \log R + \int_0^{\infty} \left\{ \frac{(k+\nu)}{k(\nu-k)} e^{k(y+z)} \cos k(x-\xi) - \frac{e^{-k}}{k} \right\} dk \equiv G_c, \quad (C.2.3)$$

wobei $R = [(x-\xi)^2 + (y-z)^2]^{1/2}$ bedeutet. Entsprechend läßt sich der Grenzwert von G_s nach (C.1.24) für $h \rightarrow \infty$ ableiten:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} G_s^{(h)} = -2\pi e^{\nu(y+z)} \cos \nu(x-\xi) \equiv G_s, \quad (C.2.4)$$

Zusammengefaßt sieht die G r e e n s c h e Funktion unendlicher Wassertiefe folgendermaßen aus:

$$G(P, Q) = \log R - \int_0^{\infty} \left\{ \frac{(k+\nu)}{k(\nu-k)} e^{k(y+z)} \cos k(x-\xi) + \frac{e^{-k}}{k} \right\} dk - 2\pi e^{\nu(y+z)} \cos \nu(x-\xi). \quad (C.2.5)$$

Nach Einführung der ortskomplexen Variablen

$$z = x + iy, \quad (C.2.6)$$

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta,$$

und von

$$R' = [(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2]^{1/2}, \quad (C.2.7)$$

ergibt sich mit (C.1.19), (C.1.20) und $(y+\eta) < 0$:

$$\log R' = \int_0^{\infty} \frac{e^{-k}}{k} dk - \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y+\eta)}}{k} \cos k(x-\xi) dk, \quad (C.2.8)$$

folgende in der Literatur bekannte Formel:

$$G(P, Q) = \operatorname{Re}_i \left\{ \log(z-\zeta) - \log(z-\bar{\zeta}) + \right. \\ \left. + 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z-\bar{\zeta})}}{\nu-k} dk - j 2\pi e^{-i\nu(z-\bar{\zeta})} \right\}. \quad (C.2.9)$$

C.3 Vergleich der Green'schen Funktionen $G^{(h)}(P, Q)$ bzw. $G(P, Q)$ mit anderen Autoren

Das Grundpotential einer pulsierenden Einheitsquelle unter den hier vorliegenden Randbedingungen eines Freie-Oberflächen-Wellenproblems wurde von mehreren Autoren auf verschiedenen Wegen ermittelt und in verschiedenen Formen angegeben.

Aus der Vielzahl der in der Literatur bekannten Endformeln wurden diejenigen zum Vergleich herangezogen, bei denen die Vorgehensweise bei der Ableitung ersichtlich war.

Zum direkten Vergleich in bezug auf $G_c^{(h)}$ bzw. G_c nach (C.1.24) bzw. (C.2.5) bietet sich die grundlegende Arbeit von F. J o h n [51] (S. 99 ff.) an, der ähnliche Ergebnisse auf einem

anderen Weg erzielt hat.

Dagegen ist die von J. L e b r e t o n - A. M a r g n a c [29] (s. 15, Gl. (16)) angegebene Endformel für $G_C^{(h)}$ aufgrund eines Druckfehlers (?) nicht ganz richtig, obwohl die Vorgehensweise bei der Ableitung richtig erscheint. Der entsprechende Ausdruck für $G_S^{(h)}$ steht in Übereinstimmung mit der in der vorliegenden Arbeit (C.1.24) angegebenen Darstellung.

Eine weitere Vergleichsmöglichkeit besteht durch die nach [58] Handb. der Physik (S. 475 ff.) veröffentlichten Formeln für die Grundpotentiale einer pulsierenden Quelle. Der entsprechende Ausdruck für $G_C^{(h)}$ ([58], S. 483, (13.34)) enthält einen offensichtlichen Vorzeichen - Druckfehler im Integranden. Ebenso wird auf S. 482 G_C nach F. J o h n (s. auch (C.2.5) mit verkehrtem Vorzeichen vor dem Integralausdruck zitiert. Die in (13.31) bzw. (13.33) angegebenen Formeln in komplexer Form entsprechen denen nach (C.2.9) bzw. (C.1.24).

Schließlich wurde ein Vergleich mit entsprechenden Formeln von R. T h o r n e [17] angestellt; dieser Vergleich erfordert einige z. T. mühevollere Umformungen, da die Formeln von R. T h o r n e anders abgeleitet und aufgebaut sind. Dabei läßt sich relativ einfach die Identität von $G_S^{(h)}$ nach (C.1.24) mit dem entsprechenden Ausdruck nach R. T h o r n e ([17] s. 714)

$$G_S^{(h)} = - \frac{2 \operatorname{ch} v_0 (y+h) \operatorname{ch} v_0 (z+h)}{2 v_0 h + \operatorname{sh} 2 v_0 h} \cos v_0 (x-\xi) \quad (C.3.1)$$

nachweisen. Ebenso kann man aus dem entsprechenden $G_C^{(h)}$ Ausdruck nach R. T h o r n e

$$G_C^{(h)} = \log \frac{R}{R'} - 2 \int_0^{\infty} \left\{ \frac{\operatorname{ch} k (y+h) \operatorname{ch} k (z+h)}{\operatorname{ch} k h (\operatorname{ch} k h - v \operatorname{ch} k h)} + \frac{e^{-kh} \operatorname{sh} k z \operatorname{sh} k y}{k \operatorname{ch} k h} \right\} \cos k (x-\xi) dk, \quad (C.3.2)$$

mit

$$R = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{1/2},$$

$$R' = [(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2]^{1/2},$$

relativ einfach den Grenzfall unendlicher Wassertiefe ($h \rightarrow \infty$, $\text{th}(kh) \rightarrow 1$) in der Form (C.2.9) ableiten. Da jedoch die Form (C.2.9) aus der entsprechenden Formel (C.2.5), die mit dem Fall unendlicher Wassertiefe nach F. J o h n (S. 100) identisch ist, abgeleitet wurde, erscheint dem Verfasser die Bemerkung von R. T h o r n e ([17](S. 715)), daß in den damaligen Formeln von F. J o h n ein Vorzeichenfehler vorlag, nicht richtig.

ANHANG D

Auswertung von Integralausdrücken

Allgemeines

Bei der Lösung der in Frage kommenden Integralgleichungen (s. Punkt 2.1) mittels eines Quadraturverfahrens und Diskretisierung von Größen entlang der Körperkontur fallen einige auf analytischem Weg auswertbare Integrale an, die im folgenden mit Hilfe der Theorie der komplexen Integrale behandelt werden.

Die wesentlichen Gedankengänge bei der Auswertung dieser Integrale gehen auf die Arbeit von W. Frank [5] zurück. Die Problemgeometrie nach der Diskretisierung ist aus Abb. D.1 ersichtlich (s. a. 2.2).

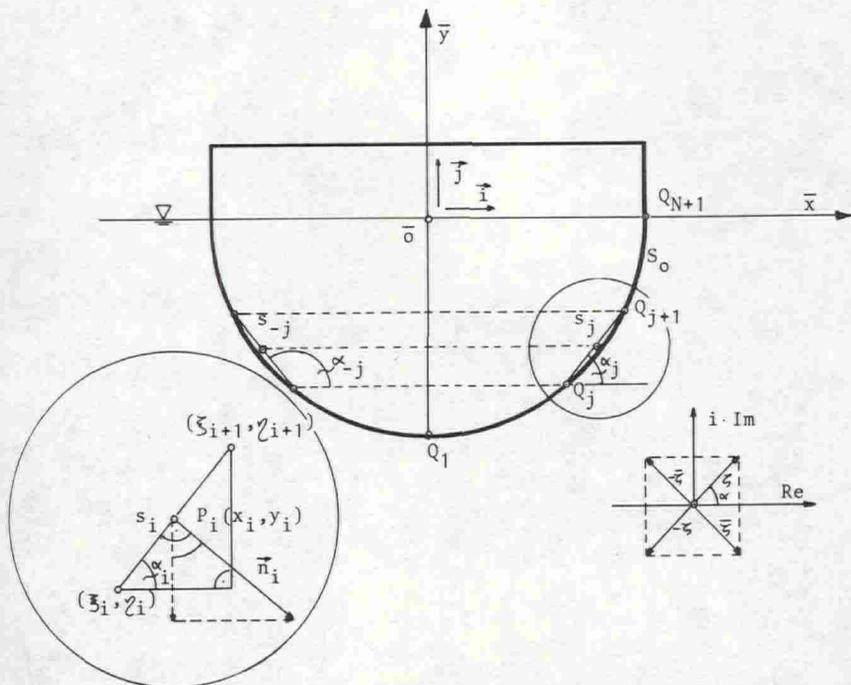


Abb. D.1

Bei vorausgesetzter Körpersymmetrie bezüglich der \bar{y} - Achse bestehen offenbar folgende geometrische Beziehungen, ausgedrückt durch die Quellpunktkoordinaten (ξ_j, η_j) , $1 \leq j \leq N + 1$ und die Aufpunktkoordinaten (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq N$, entlang der Körperkontur:

Für die Koordinaten und Winkel im dritten Quadranten:

$$\begin{aligned} \xi_{-j} &= -\xi_j, \\ \eta_{-j} &= \eta_j, \\ \alpha_{-j} &= \pi - \alpha_j. \end{aligned} \quad (\text{D.1.})$$

Für die Aufpunktkoordinaten, entsprechend den Annahmen für die Diskretisierung:

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{2} (\xi_i + \xi_{i+1}), \\ y_i &= \frac{1}{2} (\eta_i + \eta_{i+1}). \end{aligned} \quad (\text{D.2.})$$

Für die Länge der Sehne des i -ten Segmentes:

$$|s_i| = [(\xi_{i+1} - \xi_i)^2 + (\eta_{i+1} - \eta_i)^2]^{1/2}. \quad (\text{D.3.})$$

Für die Neigung des i -ten Segmentes relativ zur positiven \bar{x} - Achse:

$$\alpha_i = \arctg \frac{\eta_{i+1} - \eta_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}. \quad (\text{D.4.})$$

Für die nach außen gerichtete Normale im Punkt P_i (x_i, y_i) :

$$\vec{n}_i = \vec{i} \sin \alpha_i - \vec{j} \cos \alpha_i, \quad (\text{D.5.})$$

wobei \vec{i} , \vec{j} die Einheitsvektoren in Richtung der \bar{x} bzw. \bar{y} - Achse sind.

Die im folgenden ausgewerteten Integrale der Form (s. 2., Gl. (48))

$$\int_{(S_2)} G(x_i, y_i; \xi, \eta) ds \quad (D.6)$$

und

$$\int_{(S_2)} (\vec{n} \nabla) G(x_i, y_i; \xi, \eta) ds \quad (D.7.)$$

betreffen den Fall unendlicher Wassertiefe und bezüglich der \bar{y} - Achse symmetrischer Spantformen. Durch Anlegen des ersten Quellpunktes im Schnittpunkt der Körperkontur mit der Ruhewasserlinie im dritten Quadranten läßt sich nach der gleichen Methode der Fall asymmetrischer Spantformen behandeln. Letzterer würde praktisch bei Tauchschwingungen von gekrängten Schiffspannten vorliegen.

D.1 Berechnung von Integralen der Form $\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_2)} F(z, \zeta) ds \right\}$

Es sei $F(z, \zeta)$ die Green'sche Funktion in der Form (C.2.9), mit

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ \zeta &= \xi + i\eta, \quad \bar{\zeta} = \xi - i\eta. \end{aligned} \quad (D.1.1)$$

Daraus ergibt sich mit

$$\begin{aligned} d\zeta &= d\xi + i d\eta \cong ds (\cos \alpha_j + i \sin \alpha_j), \\ d\bar{\zeta} &= d\xi - i d\eta \cong ds (\cos \alpha_j - i \sin \alpha_j), \end{aligned} \quad (D.1.2)$$

$$ds = \operatorname{Re}_i \{ e^{-i\alpha_j} d\zeta \},$$

$$ds = \operatorname{Re}_i \{ e^{i\alpha_j} d\bar{\zeta} \}.$$

(D.1.2)

Damit werden die gesuchten Integrale auf solche der folgenden Form zurückgeführt:

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} e^{-i\alpha_j} F(z, \zeta) d\zeta \right\}.$$

(D.1.3)

Unter Berücksichtigung von (D.1.3) ergibt sich:

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} \log(z_i - \zeta) ds \right\} = \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} e^{-i\alpha_j} \log(z_i - \zeta) d\zeta \right\}$$

oder

$$\operatorname{Re}_i \left\{ (\cos \alpha_j - i \sin \alpha_j) \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} \log(z_i - \zeta) d\zeta \right\} =$$

$$\cos \alpha_j \left[(x_i - \xi_j) \log \sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2} + \xi_j - \xi_{j+1} - \right.$$

$$\left. - (x_i - \xi_{j+1}) \log \sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i - \eta_{j+1})^2} - \right.$$

$$\left. - (y_i - \eta_j) \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \eta_j)}{(x_i - \xi_j)} + (y_i - \eta_{j+1}) \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \eta_{j+1})}{(x_i - \xi_{j+1})} \right] +$$

$$+ \sin \alpha_j \left[(y_i - \eta_j) \log \sqrt{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2} + \eta_j - \eta_{j+1} - \right.$$

$$\left. - (y_i - \eta_{j+1}) \log \sqrt{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i - \eta_{j+1})^2} + \right.$$

$$\left. + (x_i - \xi_j) \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \eta_j)}{(x_i - \xi_j)} - (x_i - \xi_{j+1}) \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \eta_{j+1})}{(x_i - \xi_{j+1})} \right].$$

Entsprechend ergibt sich aus (D.1.4) unter Berücksichtigung der Unterschiede zwischen $\bar{\zeta}$ und ζ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} \log(z_i - \bar{\zeta}) ds \right\} = & \\ \cos \alpha_j [& (x_i - \zeta_j) \log \sqrt{(x_i - \zeta_j)^2 + (y_i + \varrho_j)^2} + \zeta_j - \zeta_{j+1} - \\ & - (x_i - \zeta_{j+1}) \log \sqrt{(x_i - \zeta_{j+1})^2 + (y_i + \varrho_{j+1})^2} - \\ & - (y_i + \varrho_j) \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \varrho_j)}{(x_i - \zeta_j)} + (y_i + \varrho_{j+1}) \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \varrho_{j+1})}{(x_i - \zeta_{j+1})}] + \\ + \sin \alpha_j [& - (y_i + \varrho_j) \log \sqrt{(x_i - \zeta_j)^2 + (y_i + \varrho_j)^2} + \varrho_j - \varrho_{j+1} + \\ & + (y_i + \varrho_{j+1}) \log \sqrt{(x_i - \zeta_{j+1})^2 + (y_i + \varrho_{j+1})^2} - \\ & - (x_i - \zeta_j) \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \varrho_j)}{(x_i - \zeta_j)} + (x_i - \zeta_{j+1}) \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \varrho_{j+1})}{(x_i - \zeta_{j+1})}]. \end{aligned} \quad (\text{D.1.5})$$

Die entsprechenden Integralausdrücke für den symmetrisch liegenden dritten Quadranten ergeben sich aus (D.1.4) bzw. (D.1.5) unter Berücksichtigung von (D.1.):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} \log(z_i + \bar{\zeta}) ds \right\} = & \\ \cos \alpha_j [& - (x_i + \zeta_j) \log \sqrt{(x_i + \zeta_j)^2 + (y_i - \varrho_j)^2} + \zeta_j - \zeta_{j+1} + \\ & + (x_i + \zeta_{j+1}) \log \sqrt{(x_i + \zeta_{j+1})^2 + (y_i - \varrho_{j+1})^2} + \\ & + (y_i - \varrho_j) \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \varrho_j)}{(x_i + \zeta_j)} - (y_i - \varrho_{j+1}) \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \varrho_{j+1})}{(x_i + \zeta_{j+1})} + \end{aligned}$$

+

...

$$\begin{aligned}
 & + \sin \alpha_3 [(y_i - \varrho_3) \log \sqrt{(x_i + \xi_3)^2 + (y_i - \varrho_3)^2} + \varrho_3 - \varrho_{3+1} - \\
 & \quad - (y_i - \varrho_{3+1}) \log \sqrt{(x_i + \xi_{3+1})^2 + (y_i - \varrho_{3+1})^2} + \\
 & + (x_i + \xi_3) \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \varrho_3)}{(x_i + \xi_3)} - (x_i + \xi_{3+1}) \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \varrho_{3+1})}{(x_i + \xi_{3+1})}],
 \end{aligned}$$

(D.1.6)

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_3)} \log(z_i + \zeta) ds \right\} = \\
 \cos \alpha_3 [-(x_i + \xi_3) \log \sqrt{(x_i + \xi_3)^2 + (y_i + \varrho_3)^2} + \xi_3 - \xi_{3+1} + \\
 + (x_i + \xi_{3+1}) \log \sqrt{(x_i + \xi_{3+1})^2 + (y_i + \varrho_{3+1})^2} + \\
 + (y_i + \varrho_3) \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \varrho_3)}{(x_i + \xi_3)} - (y_i + \varrho_{3+1}) \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \varrho_{3+1})}{(x_i + \xi_{3+1})}] + \\
 + \sin \alpha_3 [-(y_i + \varrho_3) \log \sqrt{(x_i + \xi_3)^2 + (y_i + \varrho_3)^2} + \varrho_3 - \varrho_{3+1} + \\
 + (y_i + \varrho_{3+1}) \log \sqrt{(x_i + \xi_{3+1})^2 + (y_i + \varrho_{3+1})^2} - \\
 - (x_i + \xi_3) \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \varrho_3)}{(x_i + \xi_3)} + (x_i + \xi_{3+1}) \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \varrho_{3+1})}{(x_i + \xi_{3+1})}].
 \end{aligned}$$

(D.1.7)

Ähnlich wird bei der Auswertung der Integralausdrücke verfahren, die ein Cauchy'sches Hauptwertintegral enthalten:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_3)} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z - \bar{\zeta})}}{\nu - k} dk \right] ds \right\} = \\
 \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{\xi_3}^{\xi_{3+1}} e^{i\alpha_3} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z - \bar{\zeta})}}{\nu - k} dk \right] d\bar{\zeta} \right\},
 \end{aligned}$$

oder nach einem Wechsel der Integrationsreihenfolge, die hier erlaubt ist, da der Hauptwert vom zweiten Integral genommen wird,

$$\operatorname{Re}_i \left\{ e^{i\alpha_j} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{\nu-k} dk \int_{\bar{z}_j}^{\bar{z}_{j+1}} e^{ik\bar{z}} d\bar{z} \right\} =$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ -ie^{i\alpha_j} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ikz}}{\nu-k} \frac{[e^{ik\bar{z}_{j+1}} - e^{ik\bar{z}_j}]}{k} dk \right\} =$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ -\frac{ie^{i\alpha_j}}{\nu} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-ikz} (e^{ik\bar{z}_{j+1}} - e^{ik\bar{z}_j})}{k} dk + \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z-\bar{z}_{j+1})}}{\nu-k} dk - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z-\bar{z}_j)}}{\nu-k} dk \right] \right\}.$$

Der letzte Integralausdruck ergab sich durch Partialbruchzerlegung des vorletzten Integranden. Das erste der nun erhaltenen Integrale läßt sich in geschlossener Form nach ([64], 313)

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{i\alpha x} - e^{i\beta x}}{x} dx = \log \frac{\beta}{\alpha}, \quad \alpha, \beta > 0,$$

lösen.

Auf die Lösung der übrig gebliebenen Hauptwertintegrale wird genauer unter Punkt D.3 eingegangen.

Es ergibt sich somit die folgende Integralbeziehung:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta}_j)} }{v-k} dk \right] ds \right\} = \\ \frac{1}{v} \left[\sin \alpha_j \left[\log \sqrt{\frac{(x_i - \zeta_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}{(x_i - \zeta_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}} \right] + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_{j+1})} \cos k(x_i - \zeta_{j+1})}{v-k} dk - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_j)} \cos k(x_i - \zeta_j)}{v-k} dk \right] + \\ + \cos \alpha_j \left[\arctg \frac{(y_i + \eta_j)}{(x_i - \zeta_j)} - \arctg \frac{(y_i + \eta_{j+1})}{(x_i - \zeta_{j+1})} \right] + \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_j)} \sin k(x_i - \zeta_j)}{v-k} dk - \right. \\ \left. \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_{j+1})} \sin k(x_i - \zeta_{j+1})}{v-k} dk \right] \quad (D.1.8) \end{aligned}$$

Der entsprechende Ausdruck für den dritten Quadranten ergibt sich einfach aus (D.1.8) unter Berücksichtigung der Unterschiede zwischen $\bar{\zeta}$ und ζ :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{-ik(z_i + \zeta)} }{v-k} dk \right] ds \right\} = \\ \frac{1}{v} \left[\sin \alpha_j \left[\log \sqrt{\frac{(x_i + \zeta_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}{(x_i + \zeta_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}} \right] + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_{j+1})} \cos k(x_i + \zeta_{j+1})}{v-k} dk - \right. \\ \left. - \int_0^{\infty} \frac{e^{k(y_i + \eta_j)} \cos k(x_i + \zeta_j)}{v-k} dk \right] + \\ + \cos \alpha_j \left[- \arctg \frac{(y_i + \eta_j)}{(x_i + \zeta_j)} + \arctg \frac{(y_i + \eta_{j+1})}{(x_i + \zeta_{j+1})} - \dots \right] \end{aligned}$$

$$- \left[\int_0^{\infty} \frac{e^{\nu(y_i + \eta_j)} \sin k(x_i + \xi_j)}{\nu - k} dk + \int_0^{\infty} \frac{e^{\nu(y_i + \eta_{j+1})} \sin k(x_i + \xi_{j+1})}{\nu - k} dk \right].$$

(D.1.9)

Schließlich bekommt man nach einfacher Rechnung auf der Grundlage von (D.1.3):

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} e^{i\nu(z - \bar{\zeta})} ds \right\} =$$

(D.1.10)

$$\frac{1}{\nu} \left[e^{\nu(y_i + \eta_j)} \sin [\nu(x_i - \xi_j) - \alpha_j] - e^{\nu(y_i + \eta_{j+1})} \sin [\nu(x_i - \xi_{j+1}) - \alpha_j] \right],$$

und für den entsprechenden Ausdruck des symmetrisch liegenden dritten Quadranten:

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_{-j})} e^{-i\nu(z_i + \zeta)} ds \right\} =$$

$$\frac{1}{\nu} \left[-e^{\nu(y_i + \eta_j)} \sin [\nu(x_i + \xi_j) + \alpha_j] + \right.$$

(D.1.11)

$$\left. + e^{\nu(y_i + \eta_{j+1})} \sin [\nu(x_i + \xi_{j+1}) + \alpha_j] \right].$$

D.2 Berechnung von Integralen der Form $\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_2)} (\vec{n} \cdot \nabla) F(z, \zeta) ds \right\}$

Es sei wieder $F(z, \zeta)$ die Green'sche Funktion in der Form (C.2.9). Der Nablaoperator ∇ kann durch die Aufpunktkoordinaten (x, y)

$$\nabla_z \equiv \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j}, \quad (\text{D.2.1})$$

oder die Quellpunktkoordinaten (ξ, η)

$$\nabla_\zeta \equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial \eta} \vec{j} \quad (\text{D.2.1})'$$

ausgedrückt werden. Entsprechendes gilt für den Normaloperator $(\vec{n} \cdot \nabla)$ mit \vec{n} nach (D.5):

$$(\vec{n} \cdot \nabla)_z = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial x} - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial n_p}, \quad (\text{D.2.2})$$

für $P \in S_0$,
oder

$$(\vec{n} \cdot \nabla)_\zeta = \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \xi} - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \eta} \equiv \frac{\partial}{\partial n_q}, \quad (\text{D.2.2})'$$

für $Q \in S_0$.

Je nach Integralgleichungsmethode (vgl. Punkt B.3) wird der Operator in der Form (D.2.2) bzw. (D.2.2)' angewandt. Für $P \rightarrow Q \in S_0$ geht jedoch der gesuchte Integralausdruck nach (D.2.2) in dem entsprechenden nach (D.2.2)' in folgender Form über (vgl. [74] S. 35):

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \int_{(S_2)} (\vec{n} \cdot \nabla)_z F(z, \zeta) ds = - \int_{(S_2)} (\vec{n} \cdot \nabla)_\zeta F(z, \zeta) ds. \quad (\text{D.2.3})$$

Im folgenden werden die Integralausdrücke nach beiden Darstellungsarten angegeben ([5],[43]). Dabei wird der Normalenoperator $(\vec{n} \nabla)_{\zeta}$ zum direkten Vergleich mit $(\vec{n} \nabla)_z$ entsprechend (D.2.3) in Richtung der inneren Körperrnormale angewandt, im Gegensatz zum Normalenoperator $(\vec{n} \nabla)_z$ in Richtung der äußeren Körperrnormale.

Über die Cauchy - Riemannschen Bedingungen ergibt sich:

$$\operatorname{Re}_i \{ (\vec{n} \nabla)_z F(z, \zeta) \} = \operatorname{Re}_i \left\{ -i e^{i\alpha} \frac{dF(z, \zeta)}{d\zeta} \right\}, \quad (\text{D.2.4})$$

$$\operatorname{Re}_i \{ (\vec{n} \nabla)_{\zeta} F(z, \zeta) \} = \operatorname{Re}_i \left\{ +i e^{i\alpha} \frac{dF(z, \zeta)}{d\zeta} \right\}. \quad (\text{D.2.4})'$$

Unter Berücksichtigung dieser Beziehungen lassen sich die gesuchten Integrale auf solche folgender Form zurückführen, wobei $F(z, \zeta)$ als von der Klasse $C^{(2)}$ angenommen wird:

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_3)} (\vec{n} \nabla)_z F(z, \zeta) ds \right\} = \quad (\text{D.2.5})$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{\zeta_3}^{\zeta_{3+1}} -i e^{i(\alpha_i - \alpha_3)} \frac{dF(z, \zeta)}{d\zeta} d\zeta \right\},$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_3)} (\vec{n} \nabla)_{\zeta} F(z, \zeta) ds \right\} =$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ +i \int_{\zeta_3}^{\zeta_{3+1}} dF(z, \zeta) \right\} =$$

$$\operatorname{Im}_i \{ F(z, \zeta_3) - F(z, \zeta_{3+1}) \}. \quad (\text{D.2.5})'$$

Damit ergeben sich folgende Integralausdrücke:

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} (\vec{n} \nabla)_z \log(z_i - \zeta) ds \right\} =$$

$$\sin(\alpha_i - \alpha_j) \log \sqrt{\frac{(x_i - \xi_j)^2 + (y_i - \eta_j)^2}{(x_i - \xi_{j+1})^2 + (y_i - \eta_{j+1})^2}} + \quad (\text{D.2.6})$$

$$+ \cos(\alpha_i - \alpha_j) \left[\operatorname{arctg} \frac{y_i - \eta_j}{x_i - \xi_j} - \operatorname{arctg} \frac{y_i - \eta_{j+1}}{x_i - \xi_{j+1}} \right], \quad i \neq j.$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} (\vec{n} \nabla)_\zeta \log(z_i - \zeta) ds \right\} =$$

$$\operatorname{arctg} \frac{(y_i - \eta_j)}{(x_i - \xi_j)} - \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \eta_{j+1})}{(x_i - \xi_{j+1})}, \quad i \neq j. \quad (\text{D.2.6})'$$

Für $i = j$ ($P \equiv Q$) wird der Integrand in (D.2.4) bzw. (D.2.4)' singular, so daß die Differentiation nach z bzw. ζ nicht direkt ausgeführt werden kann. In diesem Fall verfährt man wie folgt:

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} (\vec{n} \nabla)_z \log(z_j - \zeta) ds \right\} =$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ -i \frac{d}{dz} \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} \log(z_j - \zeta) d\zeta \right\} = \operatorname{Re}_i \left\{ i \frac{d}{d\zeta} \int_{z_j - \zeta_j}^{z_j - \zeta_{j+1}} \log \zeta' d\zeta' \right\} =$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ i \log \frac{(z_j - \zeta_{j+1})}{(z_j - \zeta_j)} \right\} = \operatorname{Im}_i \left\{ \log \frac{(z_j - \zeta_j)}{(z_j - \zeta_{j+1})} \right\},$$

wobei $\zeta' = z_j - \zeta$ eingeführt wurde.

Daraus ergibt sich:

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} (\vec{n} \nabla)_z \log(z_i - \zeta) ds \right\} = \pi, \quad i=j. \quad (\text{D.2.7})$$

Entsprechend:

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} (\vec{n} \nabla)_\zeta \log(z_i - \zeta) ds \right\} =$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ +i \frac{d}{d\zeta} \int_{\zeta_j}^{\zeta_{j+1}} \log(z_i - \zeta) d\zeta \right\} =$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ +i \frac{d}{d\zeta'} \int_{z_j - \zeta_j}^{z_j - \zeta_{j+1}} \log \zeta' d\zeta' \right\},$$

oder

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} (\vec{n} \nabla)_\zeta \log(z_i - \zeta) ds \right\} = \pi, \quad i=j. \quad (\text{D.2.7})'$$

Die Identität von (D.2.7) und (D.2.7)' stellt einen nachträglichen, jedoch eingeschränkten, Nachweis von (D.2.3) dar.

Entsprechend erhält man für die restlichen Integralausdrücke:

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_j)} (\vec{n} \nabla)_z \log(z_i - \bar{\zeta}) ds \right\} =$$

$$\sin(\alpha_i + \alpha_j) \log \sqrt{\frac{(x_i - \zeta_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}{(x_i - \zeta_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}} +$$

(D.2.8)

$$+ \cos(\alpha_i + \alpha_j) \left[\operatorname{arctg} \frac{(y_i + \eta_j)}{(x_i - \zeta_j)} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \eta_{j+1})}{(x_i - \zeta_{j+1})} \right],$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} (\vec{n} \nabla)_z \log(z, -\bar{\zeta}) ds \right\} =$$

$$\operatorname{arctg} \frac{(y_i + \varrho_{j+1})}{(x_i - \xi_{j+1})} - \quad (\text{D.2.8})'$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \varrho_j)}{(x_i - \xi_j)}.$$

Für den symmetrisch liegenden dritten Quadranten sehen die entsprechenden Integralausdrücke folgendermaßen aus:

$$- \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} (\vec{n} \nabla)_z \log(z, \bar{\zeta}) ds \right\} =$$

$$\sin(\alpha_i + \alpha_j) \log \sqrt{\frac{(x_i + \xi_j)^2 + (y_i - \varrho_j)^2}{(x_i + \xi_{j+1})^2 + (y_i - \varrho_{j+1})^2}} + (\text{D.2.9})$$

$$+ \cos(\alpha_i + \alpha_j) \left[\operatorname{arctg} \frac{(y_i - \varrho_j)}{(x_i + \xi_j)} - \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \varrho_{j+1})}{(x_i + \xi_{j+1})} \right],$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} (\vec{n} \nabla)_z \log(z, \bar{\zeta}) ds \right\} =$$

$$\operatorname{arctg} \frac{(y_i - \varrho_{j+1})}{(x_i + \xi_{j+1})} - \quad (\text{D.2.9})'$$

$$- \operatorname{arctg} \frac{(y_i - \varrho_j)}{(x_i + \xi_j)},$$

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_2)} (\vec{n} \nabla)_2 \log(z_i + \zeta) ds \right\} = \\
 & \sin(\alpha_i - \alpha_j) \log \sqrt{\frac{(x_i + \xi_j)^2 + (y_i + \eta_j)^2}{(x_i + \xi_{j+1})^2 + (y_i + \eta_{j+1})^2}} + \\
 & + \cos(\alpha_i - \alpha_j) \left[\operatorname{arctg} \frac{(y_i + \eta_j)}{(x_i + \xi_j)} - \right. \\
 & \left. - \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \eta_{j+1})}{(x_i + \xi_{j+1})} \right], \quad (\text{D.2.10})
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_2)} (\vec{n} \nabla)_2 \log(z_i + \zeta) ds \right\} =$$

$$\operatorname{arctg} \frac{(y_i + \eta_j)}{(x_i + \xi_j)} - \operatorname{arctg} \frac{(y_i + \eta_{j+1})}{(x_i + \xi_{j+1})}.$$

Entsprechend:

(D.2.10)'

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_2)} [(\vec{n} \nabla)_2 \oint_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\zeta})}}{v-k} dk] ds = \right. \\
 & \sin(\alpha_i + \alpha_j) \left[\oint_0^\infty \frac{e^{k(y_i + \eta_j)} \cos k(x_i - \xi_j)}{v-k} dk - \right. \\
 & \left. - \oint_0^\infty \frac{e^{k(y_i + \eta_{j+1})} \cos k(x_i - \xi_{j+1})}{v-k} dk \right] - \\
 & - \cos(\alpha_i + \alpha_j) \left[\oint_0^\infty \frac{e^{k(y_i + \eta_j)} \sin k(x_i - \xi_j)}{v-k} dk - \right. \\
 & \left. - \oint_0^\infty \frac{e^{k(y_i + \eta_{j+1})} \sin k(x_i - \xi_{j+1})}{v-k} dk \right], \quad (\text{D.2.11})
 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} (\vec{n} \cdot \nabla)_\xi \left[\int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i - \bar{\xi})}}{v-k} dk \right] ds = \right.$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{k(y_i + z_j)} \sin k(x_i - \xi_j)}{v-k} dk -$$

$$\left. - \int_0^\infty \frac{e^{k(y_i + z_{j+1})} \sin k(x_i - \xi_{j+1})}{v-k} dk, \quad (\text{D.2.11})' \right.$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} (\vec{n} \cdot \nabla)_z e^{-iv(z_i - \bar{\xi})} ds \right\} =$$

$$\sin(\alpha_i + \alpha_j) [e^{v(y_i + z_j)} \cos v(x_i - \xi_j) -$$

$$- e^{v(y_i + z_{j+1})} \cos v(x_i - \xi_{j+1})] - \quad (\text{D.2.12})'$$

$$- \cos(\alpha_i + \alpha_j) [e^{v(y_i + z_j)} \sin v(x_i - \xi_j) -$$

$$- e^{v(y_i + z_{j+1})} \sin v(x_i - \xi_{j+1})],$$

$$\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} (\vec{n} \cdot \nabla)_\xi e^{-iv(z_i - \bar{\xi})} ds \right\} =$$

$$e^{v(y_i + z_j)} \sin v(x_i - \xi_j) -$$

$$- e^{v(y_i + z_{j+1})} \sin v(x_i - \xi_{j+1}). \quad (\text{D.2.12})'$$

Schließlich ergeben sich für die zu (D.2.11) bis (D.2.12)' entsprechenden Ausdrücke des symmetrisch liegenden dritten Quadranten:

$$\begin{aligned}
 & - \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} [(\vec{n} \nabla)_z \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i + \zeta)}}{\nu - k} dk] ds \right\} = \\
 & \sin(\alpha_i - \alpha_j) \left[\int_0^\infty \frac{e^{k(y_i + \zeta_j)} \cos k(x_i + \xi_j)}{\nu - k} dk - \right. \\
 & \quad \left. - \int_0^\infty \frac{e^{k(y_i + \zeta_{j+1})} \cos k(x_i + \xi_{j+1})}{\nu - k} dk \right] - \\
 & - \cos(\alpha_i - \alpha_j) \left[\int_0^\infty \frac{e^{k(y_i + \zeta_j)} \sin k(x_i + \xi_j)}{\nu - k} dk \right. \quad (D.2.13) \\
 & \quad \left. - \int_0^\infty \frac{e^{k(y_i + \zeta_{j+1})} \sin k(x_i + \xi_{j+1})}{\nu - k} dk \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(s_j)} [(\vec{n} \nabla)_z \int_0^\infty \frac{e^{-ik(z_i + \zeta)}}{\nu - k} dk] ds \right\} = \\
 & - \int_0^\infty \frac{e^{k(y_i + \zeta_j)} \sin k(x_i + \xi_j)}{\nu - k} dk + \quad (D.2.13)' \\
 & + \int_0^\infty \frac{e^{k(y_i + \zeta_{j+1})} \sin k(x_i + \xi_{j+1})}{\nu - k} dk,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_{-j})} (\vec{n} \nabla)_z e^{-i\nu(z_i + \zeta)} ds \right\} = \\
 & \sin(\alpha_i - \alpha_j) \left[e^{\nu(y_i + \zeta_j)} \cos \nu(x_i + \xi_j) - \right. \\
 & \quad \left. - e^{\nu(y_i + \zeta_{j+1})} \cos \nu(x_i + \xi_{j+1}) \right] - \quad (\text{D.2.14}) \\
 & -\cos(\alpha_i - \alpha_j) \left[e^{\nu(y_i + \zeta_j)} \sin \nu(x_i + \xi_j) - \right. \\
 & \quad \left. - e^{\nu(y_i + \zeta_{j+1})} \sin \nu(x_i + \xi_{j+1}) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \operatorname{Re}_i \left\{ \int_{(S_{-j})} (\vec{n} \nabla)_\zeta e^{-i\nu(z_i + \zeta)} ds \right\} = \\
 & e^{\nu(y_i + \zeta_{j+1})} \sin \nu(x_i + \xi_{j+1}) - \\
 & \quad - e^{\nu(y_i + \zeta_j)} \sin \nu(x_i + \xi_j). \quad (\text{D.2.14})'
 \end{aligned}$$

D.3 Auswertung von Cauchy'schen - Hauptwertintegralen

In den vorangegangenen Punkten D.1 bzw. D.2 ist mehrfach der Real- und Imaginärteil des Hauptwertes von Integralausdrücken der folgenden allgemeinen Form benutzt worden:

$$I(\zeta') \equiv \oint_0^\infty \frac{e^{-k\zeta'}}{\nu - k} dk, \quad (\text{D.3.1})$$

mit

$$\zeta' = \alpha' + i\beta', \quad \alpha' > 0, \beta' \geq 0.$$

Im folgenden sollen diese Integralausdrücke analytisch so aufbereitet werden, daß sie numerisch bequem ausgewertet werden können. Nach einer Integration in der komplexen Ebene ergibt sich mit Hilfe des Residuensatzes und unter Berücksichtigung des Residuums des Integranden in der Polstelle $k = \nu$, die vom Integrationsweg ausgeschlossen wird, folgender Ausdruck für (D.3.1) [72]:

$$\oint_0^{\infty} \frac{e^{-k\zeta'}}{\nu-k} dk = \int_0^{\infty} \frac{e^{-k\zeta'}}{\nu-k} dk + (D.3.2)$$

$$+ (\operatorname{sgn} \gamma') i\pi e^{-i\nu\zeta'},$$

mit

$$\gamma' = \arctg \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Die Integrale auf der rechten Seite von (D.3.2) werden anschließend durch Substitution und unter der Voraussetzung, daß $\operatorname{Re}\{\zeta'\}$ positiv ist, auf die bekannten Exponentialintegrale zurückgeführt.

Mit

$$w = -(\nu-k)\zeta',$$

ergibt sich

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-k\zeta'}}{\nu-k} dk = -e^{-\nu\zeta'} \int_{-\nu\zeta'}^{\infty} \frac{e^{-w}}{w} dw$$

$$= -e^{-\nu\zeta'} E_1(-\nu\zeta'),$$

(D.3.3)

mit

$$|\arg(-v\zeta')| < \pi.$$

Für die Berechnung der Exponentialintegrale stehen verschiedene Tafelwerte und Approximationsformeln zur Verfügung.

Im folgenden werden einige erprobte Möglichkeiten für deren Auswertung aufgezeigt.

Mit [59]

(D.3.4)

$$E_1(-v\zeta') = -\gamma - \log(-v\zeta') - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (-v\zeta')^n}{n \cdot n!},$$

(γ bedeutet die Eulersche Konstante),
ferner mit

$$r = |-v\zeta'| = v \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}$$

(D.3.5)

$$\theta = \arg(-v\zeta') + \pi = \arctg \frac{\beta'}{\alpha'} + \pi,$$

ergibt sich aus (D.3.2):

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-k\zeta'}}{v-k} dk = e^{-v\alpha'} [\cos(v\beta') - i \sin(v\beta')].$$

$$\cdot \left\{ \gamma + \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos(n\theta)}{n \cdot n!} \right\} +$$

(D.3.6)

$$+ i \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin(n\theta)}{n \cdot n!} + \right.$$

$$\left. + \begin{cases} \theta & , \beta' > 0 \\ \theta - 2\pi & , \beta' < 0 \end{cases} \right\}.$$

G1. (D.3.6) läßt sich durch deren Real- und Imaginärteil ausdrücken:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-k\alpha'} \cos k\beta'}{\nu - k} dk = e^{-\nu\alpha'} [C'(r, \theta) \cos \nu\beta' + S'(r, \theta) \sin \nu\beta'], \quad (\text{D.3.7})$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-k\alpha'} \sin k\beta'}{\nu - k} dk = e^{-\nu\alpha'} [C'(r, \theta) \sin \nu\beta' - S'(r, \theta) \cos \nu\beta'],$$

mit den Abkürzungen:

$$C'(r, \theta) = \gamma + \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \cos(n\theta)}{n \cdot n!}, \quad (\text{D.3.8})$$

$$S'(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n \sin(n\theta)}{n \cdot n!} + \begin{cases} \theta & , \beta' > 0 \\ \theta - 2\pi & , \beta' < 0 \end{cases}.$$

Unter Berücksichtigung von (D.3.1) bis (D.3.8) ergeben sich die gesuchten Integralausdrücke von Punkt D.1 und D.2, durch Einsetzen von nacheinander

bzw.
$$\zeta' = i(2 - \bar{\zeta}),$$

$$\zeta' = i(2 + \zeta)$$

in die obigen Gleichungen, mit

$$\operatorname{Re} \{ \zeta' \} = -(\gamma + \varrho) > 0.$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{k(y+\eta)} \cos k(x+\xi)}{v-k} dk = e^{v(y+\eta)} [C(r,\theta) \cos v(x+\xi) + S(r,\theta) \sin v(x+\xi)], \quad (D.3.9)$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{k(y+\eta)} \sin k(x+\xi)}{v-k} dk = e^{v(y+\eta)} [C(r,\theta) \sin v(x+\xi) - S(r,\theta) \cos v(x+\xi)].$$

Dabei bedeuten

$$r = v \sqrt{(x+\xi)^2 + (y+\eta)^2}, \quad (D.3.10)$$

$$\theta = -\operatorname{arctg} \frac{(x+\xi)}{(y+\eta)} + \pi,$$

und $C(r,\theta)$, $S(r,\theta)$ die entsprechenden Ausdrücke zu (D.3.5) bzw. (D.3.8).

Bei den Formeln (D.3.9) und (D.3.10) gelten die oberen Vorzeichen jeweils für den Fall $\zeta' = i(z + \bar{\zeta})$ und die unteren für $\zeta' = i(z - \bar{\zeta})$.

Für die numerische Auswertung von (D.3.9), die die Berechnung der Reihenentwicklungen $C(r,\theta)$ und $S(r,\theta)$ nach (D.3.8) voraussetzt, sollte ein möglichst schnelles Rechenverfahren angewendet werden, da diese Rechnungen i. allg. für die verschiedenen Quellpunkte/Aufpunkte bei mehreren Frequenzen mehrmals durchgeführt werden müssen.

Deswegen wurden verschiedene Möglichkeiten anhand deren Rechengeschwindigkeit für das Erreichen einer gewünschten Genauigkeit miteinander verglichen.

Die sich anbietenden Möglichkeiten lassen sich in solche mit Reihenentwicklungen und in Quadraturverfahren zur Bestimmung der Exponentialintegrale unterscheiden.

Die Reihenentwicklungen in (D.3.8) konvergieren immer schlechter, je größer r wird, d.h. für entweder relativ breite Spalten oder hohe Frequenzen. Der Rechenaufwand zur Erzielung guter Ergebnisse ist erheblich.

Ebensoles gilt für die von O. Grimm [27] angegebenen Reihenentwicklungen, die für kleine r den Darstellungen (D.3.8) entsprechen und für $r > 6$ eine fünfgliedrige semikonvergente Reihe enthalten, die nicht immer genaue Werte liefert.

Besser ist eine von O. Faltsen [4] verfolgte Methode, der für große r folgende asymptotische Entwicklung [59] für $E_1(z)$ bzw. entsprechend für deren Real- und Imaginärteil verwendete:

$$E_1(z) \cong \frac{e^{-z}}{z} \left[1 - \frac{1}{2z} + \frac{1(1+1)}{2^2 z^2} - \frac{1(1+1)(1+2)}{2^3 z^3} + \dots \right],$$

(D.3.11)

$$n=1, \quad |\arg z| < \frac{3}{2}\pi.$$

Diese Reihenentwicklung konvergiert schnell, insbesondere für große r , und liefert genaue Ergebnisse.

Schließlich ist auf der Grundlage von (D.3.8) eine Polynomreihenentwicklung nach dem Unterprogramm DAVID [7] ausgetestet worden, die zwar genaue Ergebnisse liefert, jedoch für große Werte von r erhebliche Rechenzeit in Anspruch nimmt.

Die seit der intensiven Nutzung von schnellen EDV-Anlagen erheblich an Bedeutung gestiegenen Quadraturformeln, die die gesuchten Integrale durch geeignete Polynomausdrücke approximieren (z.B. Laguerre, Chebyshev - Polynome [67]), liefern bei Vorhandensein von großen Rechenanlagen mit einer großen Anzahl von gültigen Dezimalstellen auch ohne Verwendung von DOUBLE-PRECISION-Größen am schnellsten genaue Ergebnisse.

Für die Berechnung von Exponentialintegralen sowie des damit zusammenhängenden Integralsinus und Integralkosinus [59] stehen bei der CDC-6600 Rechenanlage der

T.U.-Berlin Standard-Unterprogramme (Programmpaket :
FREMDE ANWENDUNGS SOFTWARE) zu Verfügung, die eine L a g u -
e r r e - Quadraturformel berücksichtigen und sehr gute Resul-
tate ergeben.

Schließlich sollte eine von J. H e s s und A. S m i t h [72]
angegebene Möglichkeit Erwähnung finden, bei der der Integrand
zunächst in eine rationale Bruchfunktion entwickelt wird und
nach einer partiellen Integration folgende Approximationsfor-
mel erhalten wird:

$$e^z E_1(z) = \frac{M' + N'}{D'} + \epsilon'(z), \quad (D.5.12)$$

mit

$$M' = -(1 + m_1 z + m_2 z^2 + m_3 z^3 + m_4 z^4) \log z,$$

$$N' = -\gamma (0,99999207 + n_1 z + n_2 z^2 + n_3 z^3 + n_4 z^4 + n_5 z^5,$$

$$D' = 1 + d_1 z + d_2 z^2 + d_3 z^3 + d_4 z^4 + d_5 z^5 + d_6 z^6,$$

und

$$m_1 = 0,23721365,$$

$$n_1 = -1,49545886,$$

$$m_2 = 0,020654300,$$

$$n_2 = 0,041806426,$$

$$m_3 = 0,00076329700,$$

$$n_3 = -0,03000591,$$

$$m_4 = 0,0000097687007,$$

$$n_4 = 0,0019387339,$$

$$d_1 = -0,76273617,$$

$$n_5 = -0,00051801555,$$

$$d_2 = 0,28388363,$$

$$d_3 = -0,066786033,$$

$$\gamma = 0,5772156649,$$

$$d_4 = 0,012982719,$$

$$d_5 = -0,00087008610,$$

$$d_6 = 0,00029892040,$$

mit γ : Eulersche Konstante.

Die Approximationsformel (D.3.12) ist für $0 < |z| < \infty$ gültig, wobei der Approximationsfehler $|\epsilon'| \approx 7 \times 10^{-6}$ maximal beträgt; im uns interessierenden Bereich fällt er sogar noch kleiner aus.

Da Gleichung (D.3.12) ohne die Verwendung von DOUBLE-PRECISION-Größen bei der CDC-6600 programmiert werden kann, wurde diese Möglichkeit als die einfachste, schnellste und genaueste im endgültigen EDV-Programm vorgezogen.

LITERATURVERZEICHNIS

Gruppe I

(lineare Schwingungen, unendliche Wassertiefe)

- [1] P. Chataignier, K. Prytz:
Added Mass and Damping Calculation Method Issued from
Potash for Oscillating Cylinders,
Inst. de Rech. Constr. Navale, Paris, R-CI-76/3, 1976.
- [2] W. Dean:
"On the Reflexion of Surface Waves by a Submerged Circular Cylinder",
Proc. Cambr. Phil. Soc. 44, 1948, S. 483 - 491.
- [3] B. De Jong:
Computation of the Hydrodynamic Coefficients of Oscillating
Cylinders,
TNO Rep. No. 145 S, 1973.
- [4] O. Faltsen:
A Study of the Two-Dimensional Added-Mass and Damping
Coefficients by the Frank Close - Fit Method,
NV Rep. 69 - 10 - S, 1969.
- [5] W. Frank:
"On the Oscillation of Cylinders In or Below the Free
Surface of Deep Fluids",
NSRDC, Technical Note 69.
- [6] W. Frank:
"The Heave Damping Coefficients of Bulbous Cylinders,
Partially Immersed in Deep Water",
Journ. of Ship Res., 1967, S. 151 - 153.
- [7] W. Frank, N. Salvesen:
The Frank Close - Fit Ship - Motion Computer Program,
NSRDC, Rep. No. 3289, 1970.
- [8] O. Grim:
"Berechnung der durch Schwingungen eines Schiffskörpers
erzeugten hydrodynamischen Kräfte",
Jahrb. d. STG, 1953, S. 277 - 296.
- [9] O. Grim:
Die Schwingungen von schwimmenden, zweidimensionalen Körpern und
Berechnung der hydrodynamischen Kräfte,
HSVA Ber. Nr. 1090/1171, 1955/56/59.

- [10] K. J o h a n n e s s e n:
A Study of Two-Dimensional Added Mass and Damping,
NV Rep. 74 - 14 - S, 1974.
- [11] W. D. K i m:
"On the Harmonic Oscillations of a Rigid Body on a Free
Surface",
Journ. Fluid Mech., 1965, Vol. 21, S. 427 - 451.
- [12] L. L a n d w e b e r, M. d e M a c a g n o:
"Added Mass of Two-Dimensional Forms Oscillating in a Free
Surface",
Journ. of Ship Res., 1957, S. 20 - 30.
- [13] F. L e w i s:
"The Inertia of the Water Surrounding a Vibrating Ship",
SNAME, Vol. 37, 1929, S. 1 - 20.
- [14] F. O g i l v i e:
The Fundamental Assumptions in Ship-Motion Theory,
Univ. of Mich., Rep. No. 148, 1974.
- [15] W. P o r t e r:
Pressure Distributions, Added - Mass, and Damping Co-
efficients for Cylinders Oscillating in a Free Surface,
Univ. of Calif., Rep. No. 82 - 16, 1960.
- [16] H. S ö d i n g:
"The Flow Around Ship Sections in Waves",
Schiffstechnik, 1973, S. 9 - 15.
- [17] R. T h o r n e:
"Multipole Expansions in the Theory of Surface Waves",
Proc. Cambr. Phil. Soc. 49, 1953, S. 707 - 716.
- [18] A. T r o e s c h:
The Diffraction Potential for a Slender Ship Moving
Through Oblique Waves,
Univ. of Mich., Rep. No. 176, 1976.
- [19] A. T r o e s c h:
Computer Program That Solves a 2 - D Diffraction Problem
of Incident Waves on a Symmetric Body and Satisfying a
Helmholtz Equation,
Univ. of Mich., 1976.
- [20] F. U r s e l l:
"On the Heaving Motion of a Circular Cylinder on the
Surface of a Fluid",
Quart. Journ. Mech. and Appl. Math., Vol. 2, 1949, S. 218-231.

- [21] F. U r s e l l:
"Short Surface Waves Due to an Oscillating Immersed Body",
Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 220, 1953, S. 90 - 103.
- [22] F. U r s e l l:
"Water Waves Generated by Oscillating Bodies",
Quart. Journ. Mech. and Appl. Math., Vol. 7, 1954,
S. 427 - 437.
- [23] J. V u g t s:
The Hydrodynamic Coefficients for Swaying, Heaving and
Rolling Cylinders in a Free Surface,
TH Delft, Rep. No. 194, 1968.

Gruppe II

(lineare Schwingungen, endliche Wassertiefe)

- [24] K. B a i, R. Y e u n g:
"Numerical Solutions to Free-Surface Flow Problems",
10. Symp., Nav. Hydrodyn., Cambr., 1974.
- [25] R. B e c k, E. T u c k:
"Computation of Shallow Water Ship Motions",
9. Symp. Nav. Hydrodyn., Paris, 1972.
- [26] W. F r e a k e s, K. K e a y:
"Effects of Shallow Water on Ship Motion Parameters in
Pitch and Heave",
MIT, Rep. No. 66 - 7, 1966.
- [27] H. K e i l:
Die hydrodynamischen Kräfte bei der periodischen Bewegung
zweidimensionaler Körper an der Oberfläche flacher Ge-
wässer,
I f S Ber. Nr. 305, 1974.
- [28] C. H. K i m:
"Hydrodynamic Forces and Moments for Heaving, Swaying and
Rolling Cylinders on Water of Finite Depth",
Journ. of Ship Res., 1969, S. 137 - 167.
- [29] J. L e b r e t o n, A. M a r g n a c:
"Traitement sur Ordinateur de Quelques Problèmes concernant
l'Action de la Houle sur les Corps Flottants en Théorie
Bidimensionnelle",
Bulletin du Centre de Rech. et d'Essais de Chaton,
No. 18, 1966.
- [30] P. S a y e r, F. U r s e l l:
"On the Virtual Mass, at Long Wave Lengths, of a Half-
Immersed Circular Cylinder Heaving on Water of Finite Depth",
11. Symp. Nav. Hydrodyn., London, 1976.
- [31] E. T u c k:
"Ship Motions in Shallow Water",
Journ. of Ship Res., 1970, S. 317 - 328.
- [32] F. U r s e l l, R. D e a n, Y. Y u:
"Forced Small-Amplitude Water Waves:
A Comparison of Theory and Experiment",
Journ. Fluid Mech., 1959, S. 33 - 52.

- [33] S. W a n g:
"The Hydrodynamic Forces and Pressure Distributions for
an Oscillating Sphere in a Fluid of Finite Depth",
MIT, Diss., 1966.
- [34] S. Y u, F. U r s e l l:
"Surface Waves Generated by an Oscillating Circular Cy-
linder on Water of Finite Depth",
Journ. Fluid Mech., 1961, S. 529 - 551.

G r u p p e III

(nichtlineare Wellenprobleme, unendliche Wassertiefe)

- [35] P. F o n t a n n e t:
"Théorie de la Génération de la Houle Cylindrique par un
Batteur Plan",
La Houille Blanche, 1961, S. 3 - 31, 174 - 197.
- [36] C. H. K i m:
"Über den Einfluß nichtlinearer Effekte auf hydrodynamische
Kräfte bei erzwungenen Tauchbewegungen prismatischer
Körper",
I f S, 1965, Diss. und
Schiffstechnik, 1967, S. 79 - 91.
- [37] C. M. L e e:
"Second-Order Theory of Heaving Cylinders in a Free Surface",
Journ. of Ship Res., 1968, S. 313 - 327.
- [38] C. M. L e e:
Second-Order Theory for Nonsinusoidal Oscillations of a
Cylinder in a Free Surface,
NSRDC, Rep. No. 3665, 1971.
- [39] C. M. L e e:
"Private Kommunikation",
1976.
- [40] H. M a r u o:
A Note on the Higher Order Theory of Thin Ships,
Bull. of the Fac. of Eng., Yokohama, Vol. 15, 1966.
- [41] F. O g i l v i e:
"First- and Second-Order Forces on a Cylinder Submerged
under a Free Surface",
J. Fluid Mech., Vol. 16, 1963, S. 451 - 472.
- [42] G. P a r i s s i s:
"Second-Order Potentials and Forces for Oscillating
Cylinders on a Free Surface",
MIT, Rep. No. 66 - 10, 1966.
- [43] R. P o t a s h:
"Second-Order Theory of Oscillating Cylinders",
Univ. of Calif., Rep. No. NA 70 - 3, 1970 and
Journ. of Ship Res., 1971, S. 295 - 324.

- [44] N. S a l v e s e n:
"Second-Order Wave Theory for Submerged Two-Dimensional Bodies",
Univ. of Mich., Diss., 1966.
- [45] H. S ö d i n g:
"Second-Order Forces on Oscillating Cylinders in Waves",
Schiffstechnik, 1976, S. 205 - 209.
- [46] S. T a m i y a:
"Nonlinear Heaving of Ships",
Univ. of Tokyo, Dept. of Naval Arch., 1970.
- [47] E. T u c k:
"A Systematic Asymptotic Expansion Procedure for Slender Ships",
Journ. of Ship Res., 1964, S. 15 - 23.
- [48] E. T u c k:
"The Effect of Non-Linearity at the Free Surface on Flow Past a Submerged Cylinder",
Journ. of Fluid Mech., Vol. 22, 1965, S. 401 - 414.

G r u p p e IV
(allgemein, Schwingungen)

- [49] L. C o p l e y:
"Integral Equation Method for Radiation from Vibrating Bodies",
Journ. of the Acoust. Soc. Amer., Vol. 41, 1967,
S. 807 - 816.
- [50] L. C o p l e y:
"Fundamental Results Concerning Integral Representations
in Acoustic Radiation",
Journ. of the Acoust. Soc. Amer., Vol. 44, 1968
S. 28 - 32.
- [51] F. J o h n:
"On the Motion of Floating Bodies",
Teil I und II,
Comm. Pure and Appl. Math., Vol. 2 (1949), S. 13 - 57,
Vol. 3 (1950), S. 45 - 101.
- [52] J. K r a v t c h e n k o:
"Remarques sur le Calcul des Amplitudes de la Houle
Linéaire Engendrée par un Batteur",
Proc. Conf. on Coastal Engrg., 1954, S. 50 - 61.
- [53] H. L a m b:
Lehrbuch der Hydrodynamik,
Teubner Verlag, Leipzig-Berlin, 1931.
- [54] A. P a p a n i k o l a o u:
"Zur Lösung des nichtlinearen Problems von Wellen endlicher
Amplitude bei endlicher Wassertiefe nach der Störungsme-
thode",
Schiffstechnik, 1976, S. 63 - 84.
- [55] A. P e t e r s, J. S t o k e r:
"The Motion of a Ship, as a Floating Rigid Body, in a
Seaway",
Comm. Pure and Appl. Math., Vol. 10 (1957), S. 399 - 490.
- [56] H. S c h e n k:
"Improved Integral Formulations for Acoustic Radiation
Problems",
Journ. of the Acoust. Soc. Amer., Vol. 44, 1968, S. 41 - 58.

- [57] J. S t o k e r:
Water Waves,
Pure and Appl. Mathematics, Vol. 4,
Intersc. Publ., Inc., New York, 1957.
- [58] J. W e h a u s e n, E. L a i t o n e:
"Surface Waves",
Handbuch der Physik, Vol. IX, III,
Springer Verlag, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1960.

G r u p p e V

(allgemein, Potentialtheorie, Mathematik)

- [59] M. A b r a m o w i t z, I. S t e g u n (Hrsgb.):
Handbook of Mathematical Functions,
Dover Public., Inc., New York, 1965.
- [60] H. B r a k h a g e und P. W e r n e r:
"Über das Dirichletsche Außenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung",
Archiv der Mathematik, Vol. 16, 1965, S. 325 - 329.
- [61] A. B u r t o n, G. M i l l e r:
"The Application of Integral Equation Methods to the Numerical Solution of Some Exterior Boundary-Value Problems",
Proc. Roy. Soc. London, A 323, 1971, S. 201 - 210.
- [62] H. C a r t a n:
Elementare Theorie der analytischen Funktionen einer oder mehrerer komplexen Veränderlichen,
B-I Hochschultaschenbücher, 1966.
- [63] J. C o l e
Perturbation Methods in Applied Mathematics,
Blaisdell Publ. Comp., Massachusetts-Toronto-London, 1968.
- [64] L. D e l v e s, J. W a l s h (Hrsgb.):
Numerical Solution of Integral Equations,
Clarendon Press, Oxford, 1974.
- [65] N. G ü n t e r
Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik,
Teubner Verlag, Leipzig, 1957.
- [66] F. H i l d e b r a n d:
Methods of Applied Mathematics,
Prentice-Hall, Inc., 1965.
- [67] F. H i l d e b r a n d:
Introduction to Numerical Analysis,
Intern. Ser. in Pure and Appl. Mathehm.,
McGraw-Hill, Inc., 1974.
- [68] J a h n k e - E m d e - L ö s c h:
Tafeln höherer Funktionen,
Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1960.

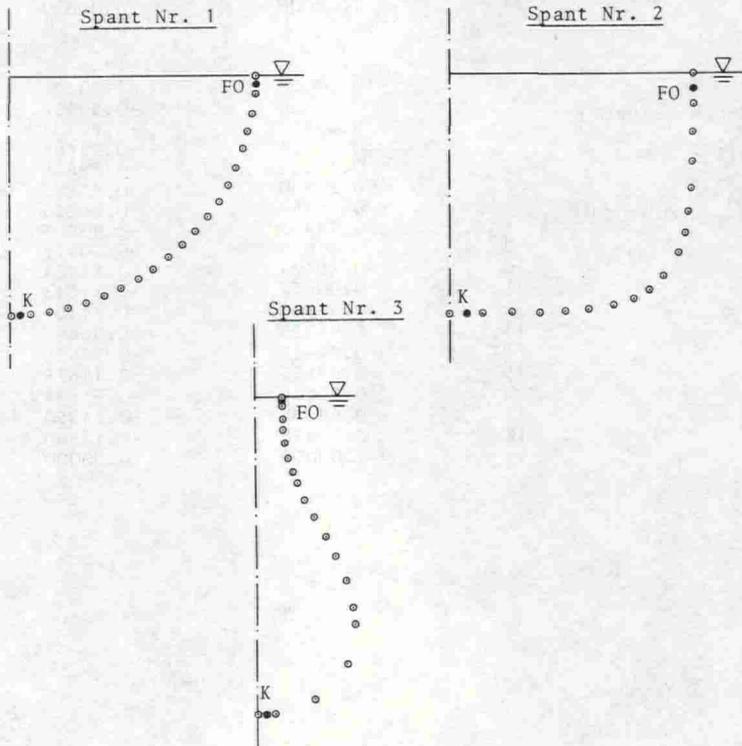
- [69] W. K a p l a n:
Advanced Calculus,
Addison-Wesley Publ. Co., Massachusetts, 1973.
- [70] J. K e l l o g g:
Foundations of Potential Theory,
Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1967.
- [71] H. K i e s e w e t t e r, G. M a e ß:
Elementare Methoden der numerischen Mathematik,
Springer Verlag, Wien - New York, 1974.
- [72] D. K ü c h e m a n n (Hrsgb.):
Progress in Aeronautical Sciences,
Vol. 8, Pergamon Press, 1967.
- [73] I. P e t r o w s k i:
Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen,
Teubner Verlag, Leipzig, 1955.
- [74] R. R o t h e, W. S c h m e i d l e r:
Höhere Mathematik, Teil 7,
Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 1956.
- [75] R. S a u e r, I. S z a b o (Hrsgb.):
Mathematische Hilfsmittel des Ingenieurs, Teil 2,
Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1969.
- [76] W. S c h m e i d l e r:
Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik,
Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1955.
- [77] S. S o b o l e v:
Partial Differential Equations of Mathematical Physics,
Intern. Ser. of Monogr. on Pure and Appl. Math.,
Vol. 56, 1964.
- [78] A. S o m m e r f e l d
Vorlesungen über theoretische Physik,
Band 6, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1948.
- [79] M. V a n D y k e:
Perturbation Methods in Fluid Mechanics,
Academic Press, New York - London, 1964.
- [80] C. v o n K e r c z e k, E. T u c k:
"The Representation of Ship Hulls by Conformal Mapping
Functions",
Journ. of Ship Res., 1969, S. 284 - 298.
- [81] E. W h i t t a k e r, G. W a t s o n:
A Course of Modern Analysis,
Univ. Press, Cambridge, 1952.

- [82] A. P a p a n i k o l a o u:
EDV-Rechenprogramm "NONLINEAR",
Berlin, 1977.
- [83] V. K u p r a d z e:
Potential Methods in the Theory of Elasticity,
Israel Program for Scient. Transl., Jerusalem, 1965.

UNTERSUCHTE SPANTFORMEN

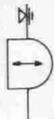
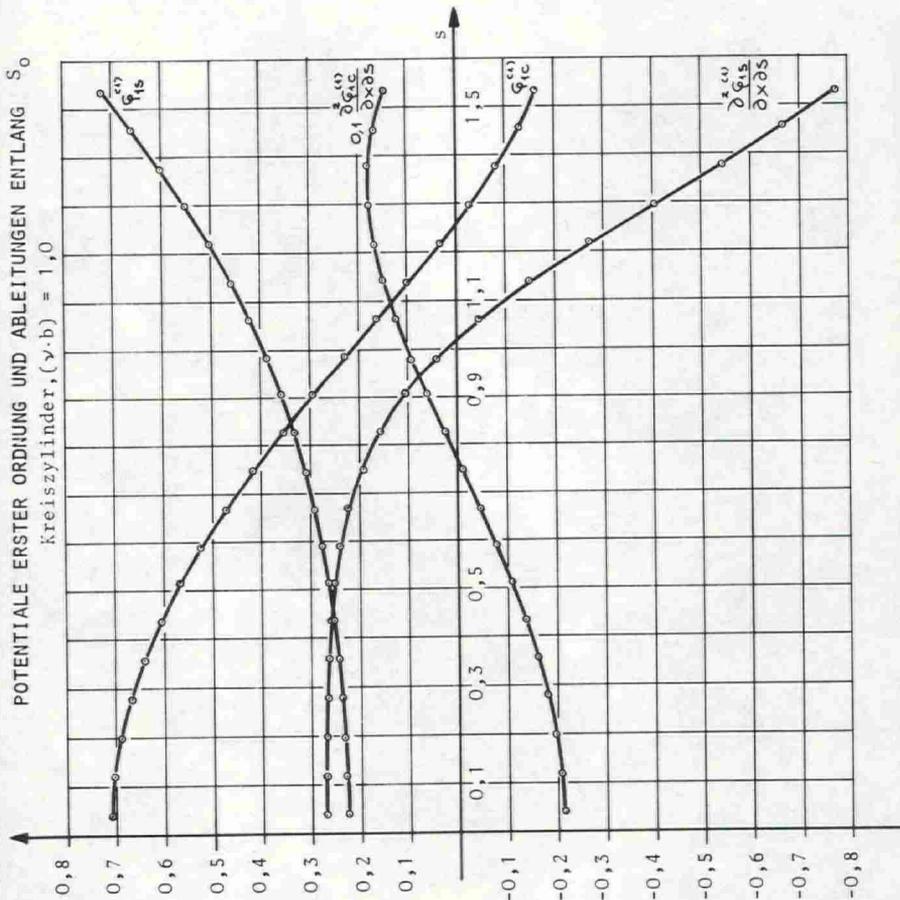
Spant-Nr.	Aufmaß- punkt-Nr.	\bar{x} -Koordinate	\bar{y} -Koordinate
1 (Halbkreis) (B/T) = 2 $\frac{A_o}{B \cdot T} = 0,78540$	1	0.00000	-1.00000
	2	0.07846	-0.99692
	3	0.15643	-0.98769
	4	0.23345	-0.97237
	5	0.30902	-0.95106
	6	0.38268	-0.92388
	7	0.45399	-0.89101
	8	0.52250	-0.85264
	9	0.58779	-0.80902
	10	0.64945	-0.76041
	11	0.70711	-0.70711
	12	0.76041	-0.64945
	13	0.80902	-0.58779
	14	0.85264	-0.52250
	15	0.89101	-0.45399
	16	0.92388	-0.38268
	17	0.95106	-0.30902
	18	0.97237	-0.23345
	19	0.98769	-0.15643
	20	0.99692	-0.07846
	21	1.00000	0.00000
2 (U-Lewis-Spant) (B/T) = 2 $\frac{A_o}{B \cdot T} = 0.94054$	1	0.00000	-1.00000
	2	0.12560	-0.99956
	3	0.24850	-0.99801
	4	0.36614	-0.99468
	5	0.47625	-0.98855
	6	0.57690	-0.97825
	7	0.66667	-0.96225
	8	0.74463	-0.93893
	9	0.81043	-0.90672
	10	0.86424	-0.86424
	11	0.90672	-0.81043
	12	0.93893	-0.74463
	13	0.96225	-0.66667
	14	0.97825	-0.57690
	15	0.98855	-0.47625
	16	0.99468	-0.36614
	17	0.99801	-0.24850
	18	0.99956	-0.12560
	19	1.00000	0.00000

Spant-Nr.	Aufmaßpunkt-Nr.	\bar{x} -Koordinate	\bar{y} -Koordinate	
3	1	0.00000	-3.22000	
	2	0.19000	-3.22000	
	(Bugwulstspant)	3	0.59000	-3.07000
	4	0.91000	-2.72000	
	(B/T) = 0,16149	5	1.00000	-2.32000
	6	0.98000	-2.15000	
	$\frac{A_0}{B \cdot T} = 2,52329$	7	0.91000	-1.88000
	8	0.80000	-1.63000	
	9	0.70000	-1.43000	
	10	0.58000	-1.23000	
	11	0.49000	-1.06000	
	12	0.41000	-0.88000	
	13	0.38000	-0.77000	
	14	0.34000	-0.63000	
	15	0.31000	-0.48000	
	16	0.29000	-0.34000	
	17	0.27000	-0.21000	
	18	0.26000	-0.08000	
	19	0.26000	0.00000	



POTENTIALE ERSTER ORDNUNG UND ABLEITUNGEN ENTLANG S_0

Kreiszyllinder, $(\nu \cdot b) = 1,0$



$N = 21$

POTENTIALE ERSTER ORDNUNG UND ABLEITUNGEN ENTLANG S_F

Kreiszyylinder, $(\nu \cdot b) = 1,0$



$N = 21$

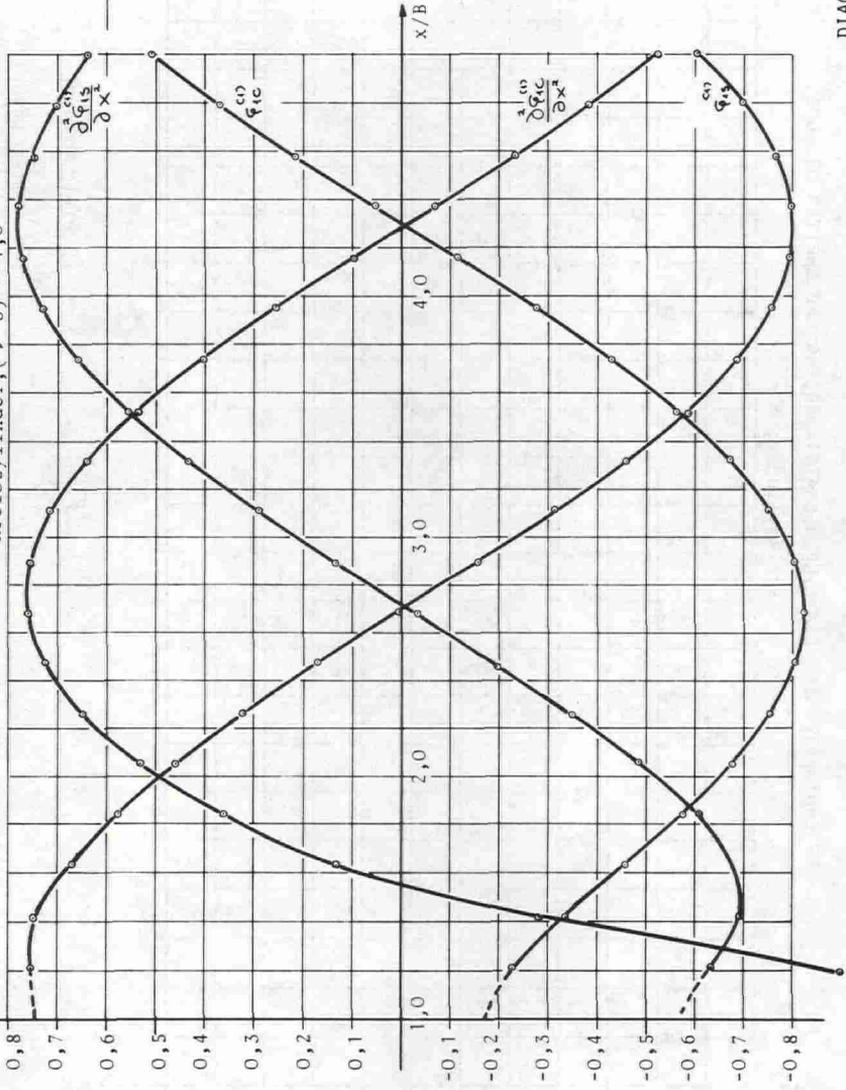
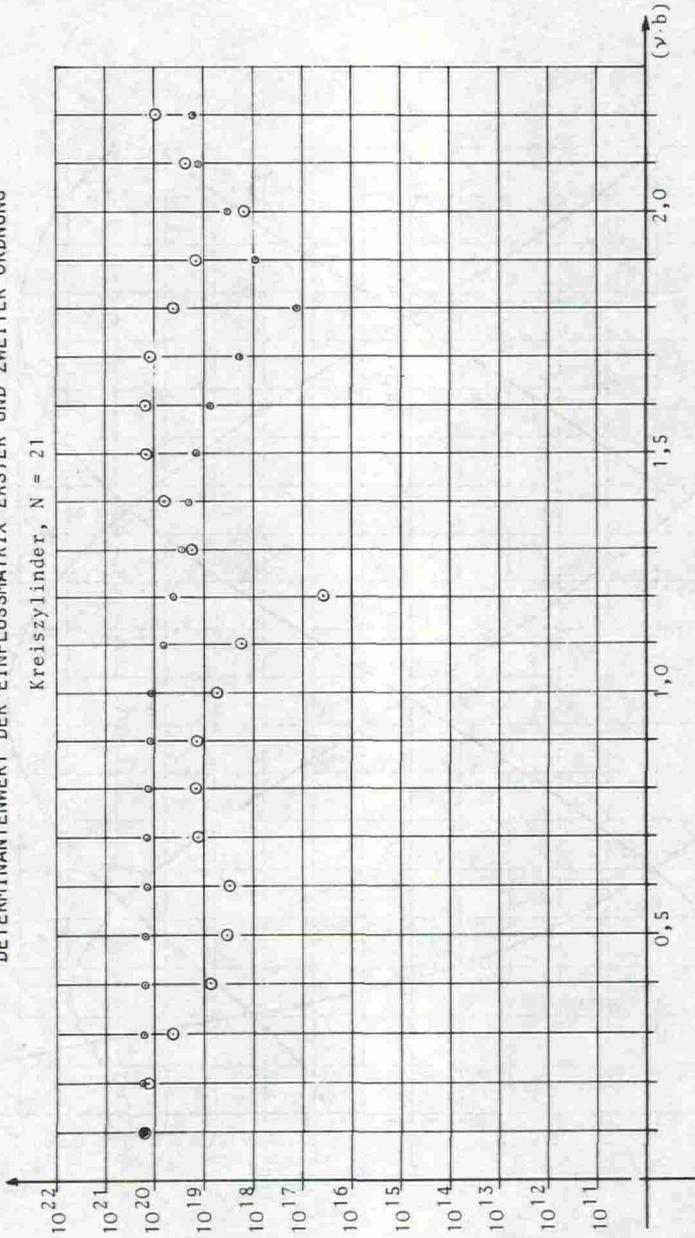


DIAGRAMM NR. 2

DETERMINANTENWERT DER EINFLUSSMATRIX ERSTER UND ZWEITER ORDNUNG

Kreiszylinder, N = 21

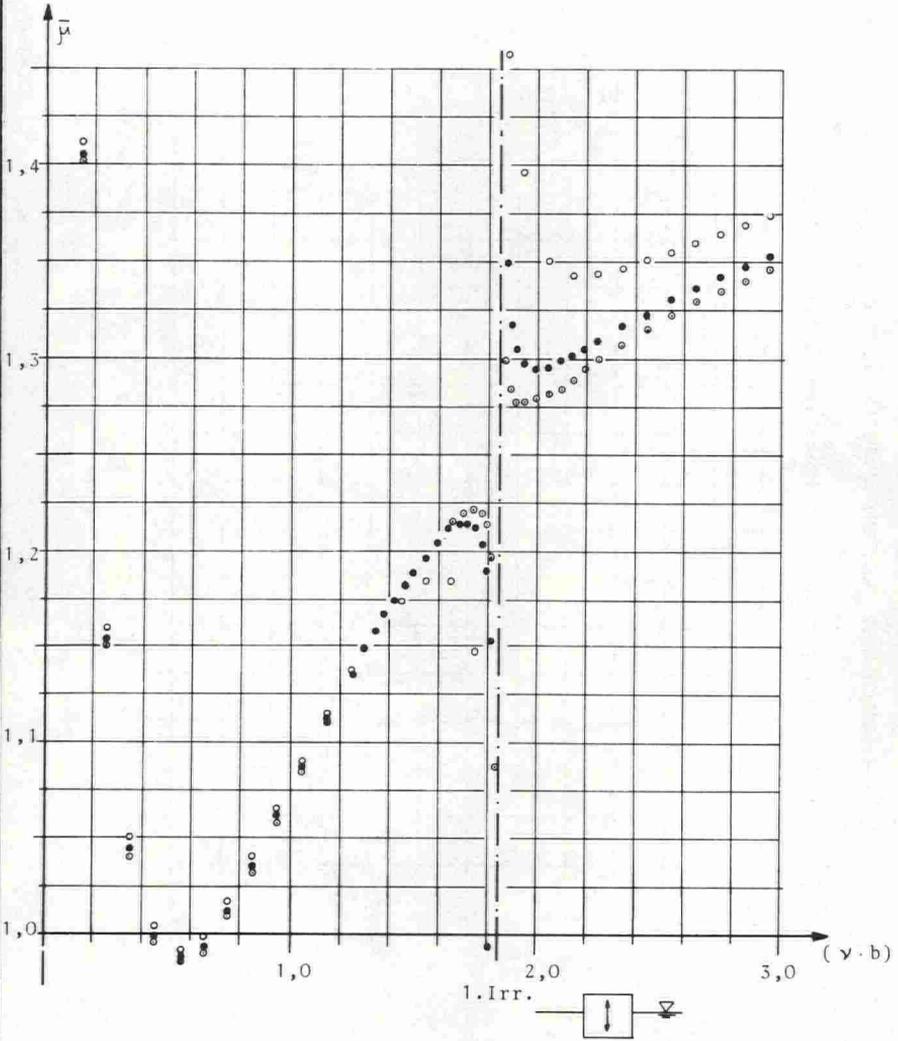


• erste Ordnung

○ zweite Ordnung

HYDRODYNAMISCHE MASSE - KOEFFIZIENT

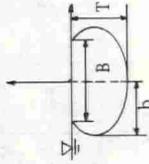
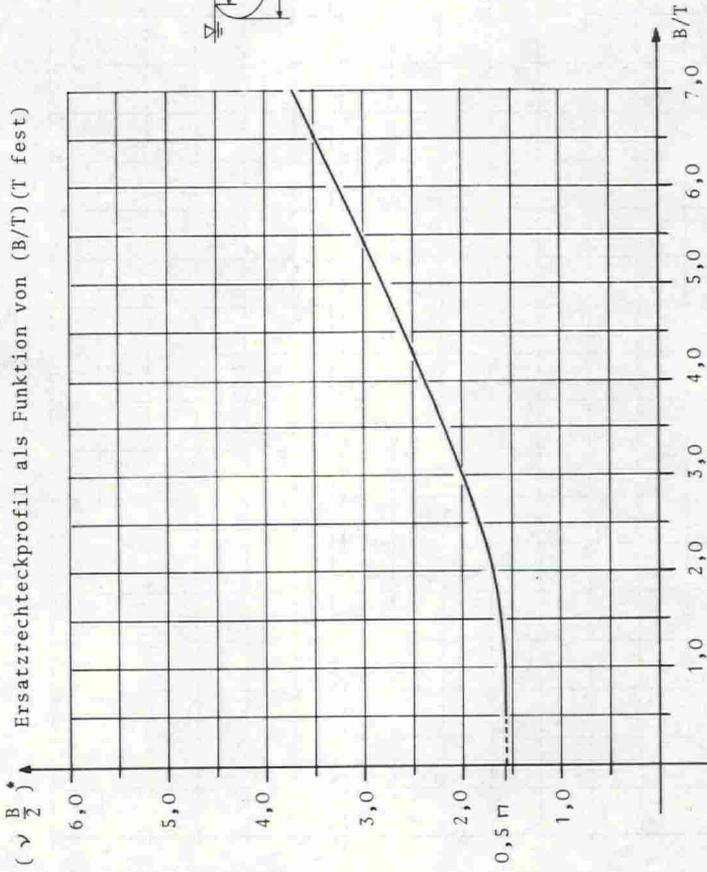
Rechteckprofil, (B / T) = 2,5



- N = 24
- N = 16
- N = 8

DIAGRAMM NR. 4

ERSTER IRREGULÄRER FREQUENZPARAMETER λ , ORD.
für ein
Ersatzrechteckprofil als Funktion von $(B/T)(T \text{ fest})$



HYDRODYNAMISCHE MASSE - KOEFFIZIENT

Rechteckprofil, (B / T) = 2,5
(Spline - Interpolation)



- N = 6 (dashed line)
- N = 8 (dash-dot line)
- N = 16 (solid line)
- N = 24 (thick solid line)

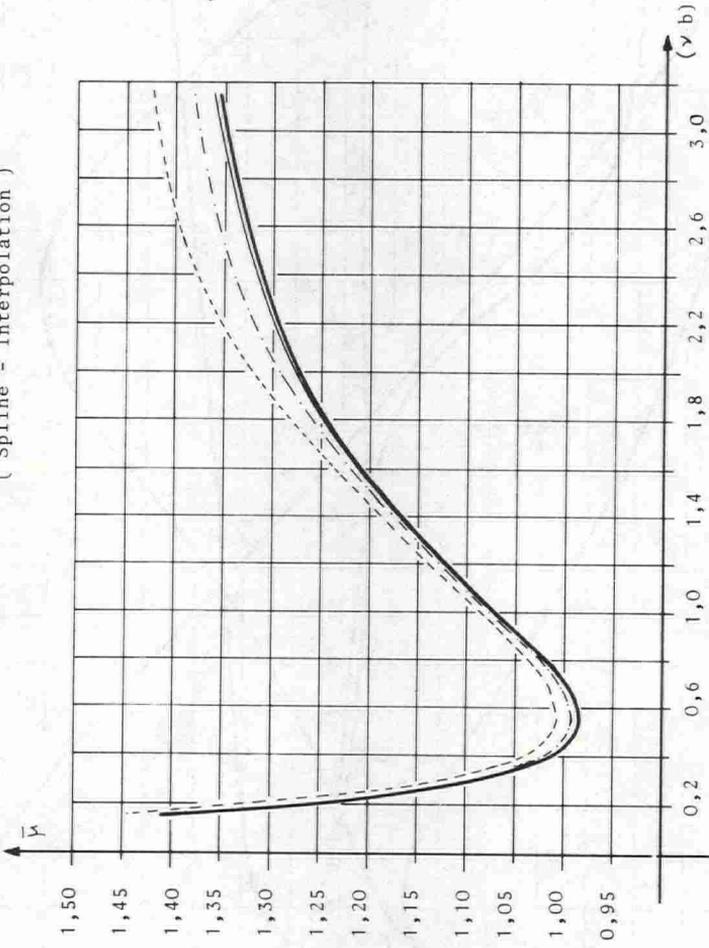


DIAGRAMM NR. 6

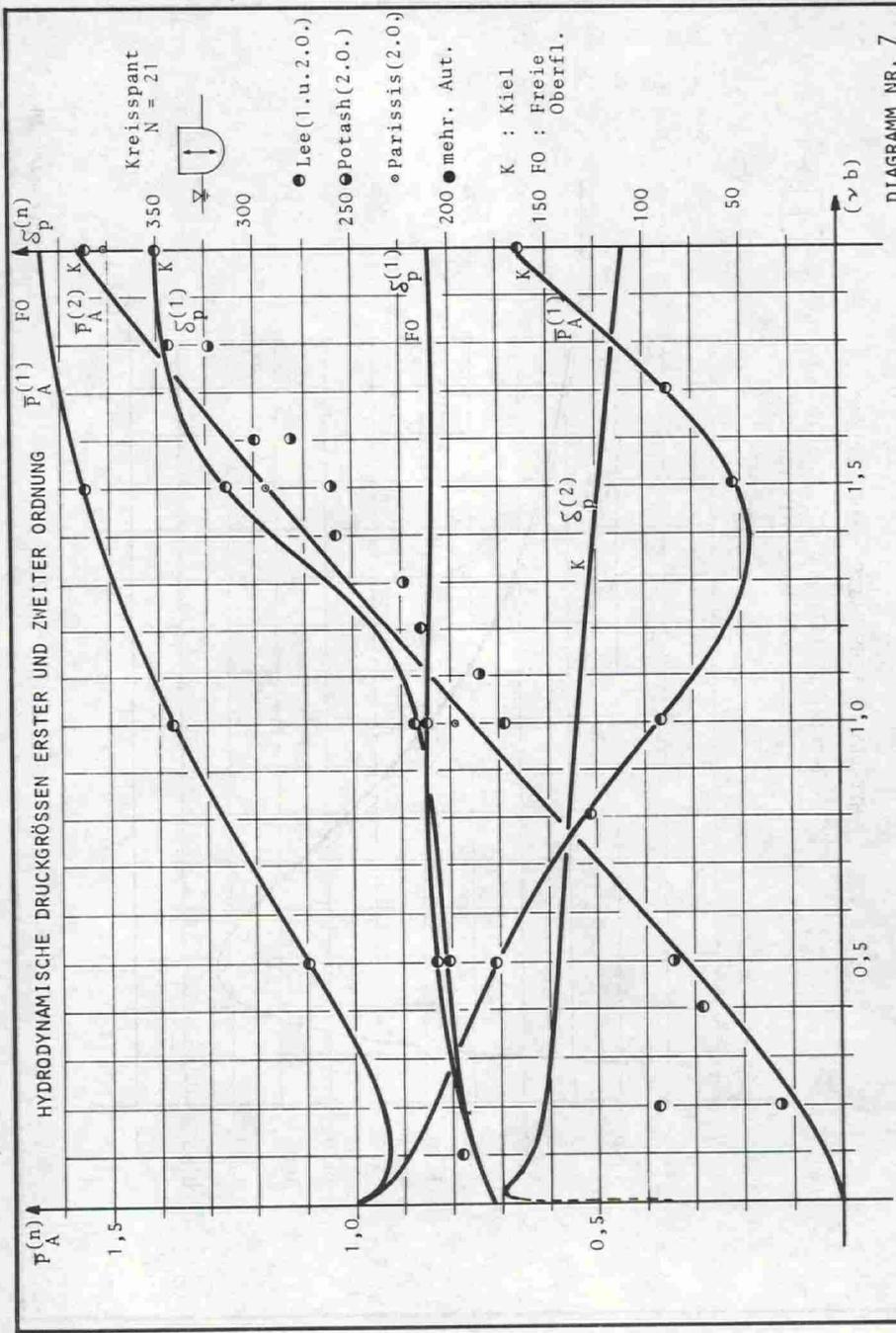


DIAGRAMM NR. 7

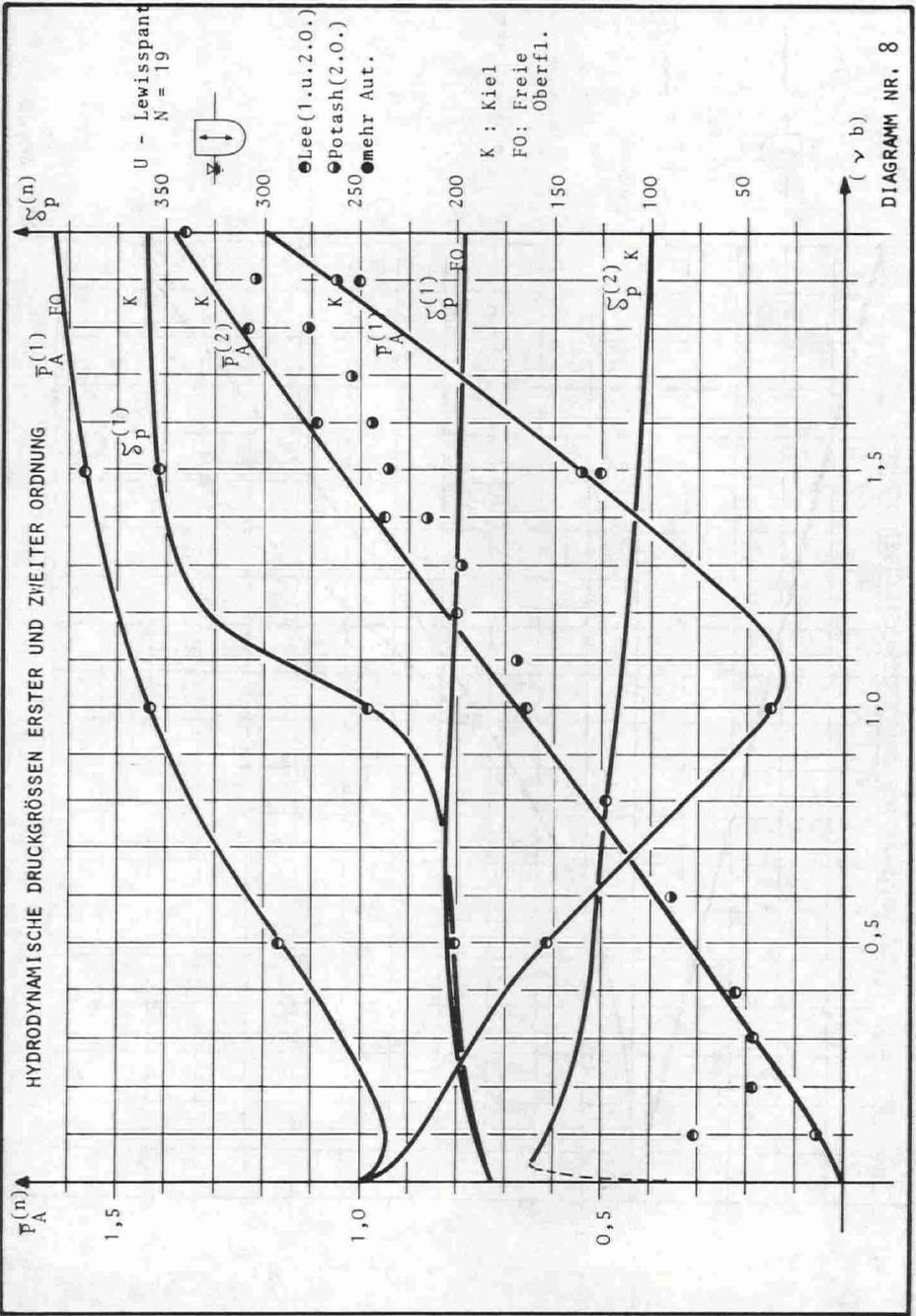


DIAGRAMM NR. 8

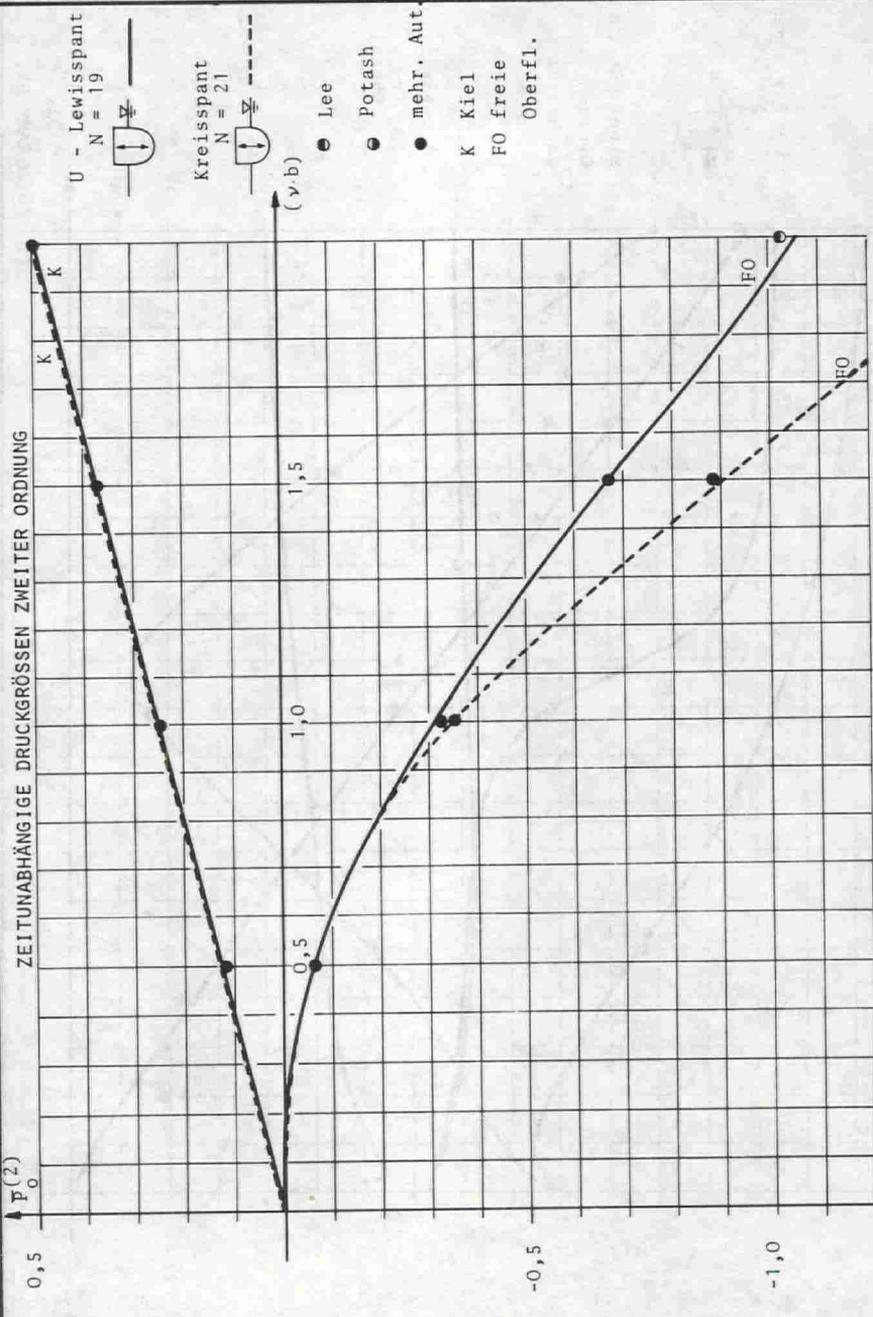


DIAGRAMM NR. 9

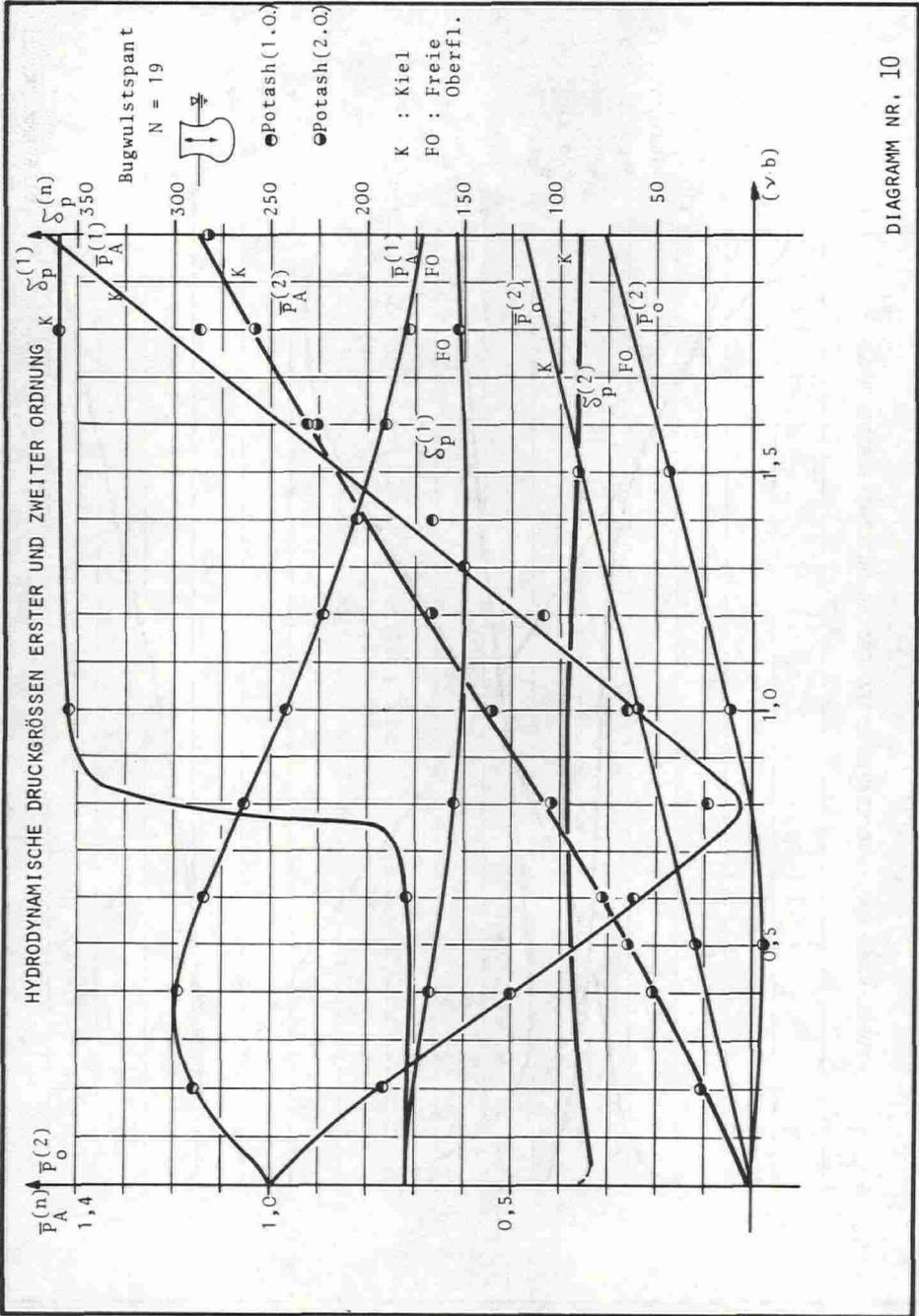


DIAGRAMM NR. 10

HYDRODYNAMISCHE DRUCKKRAFTGRÖSSEN ERSTER UND ZWEITER ORDNUNG

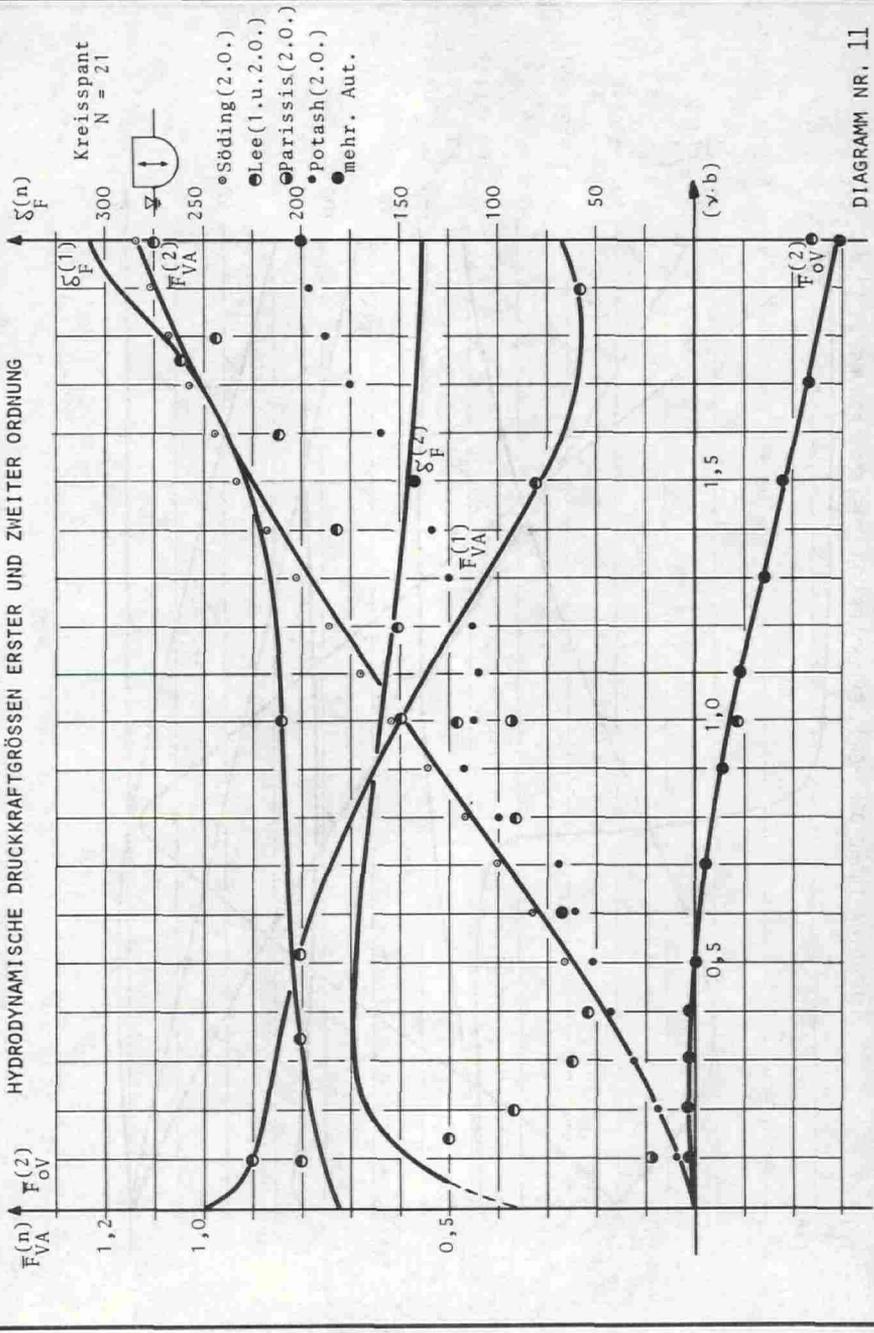
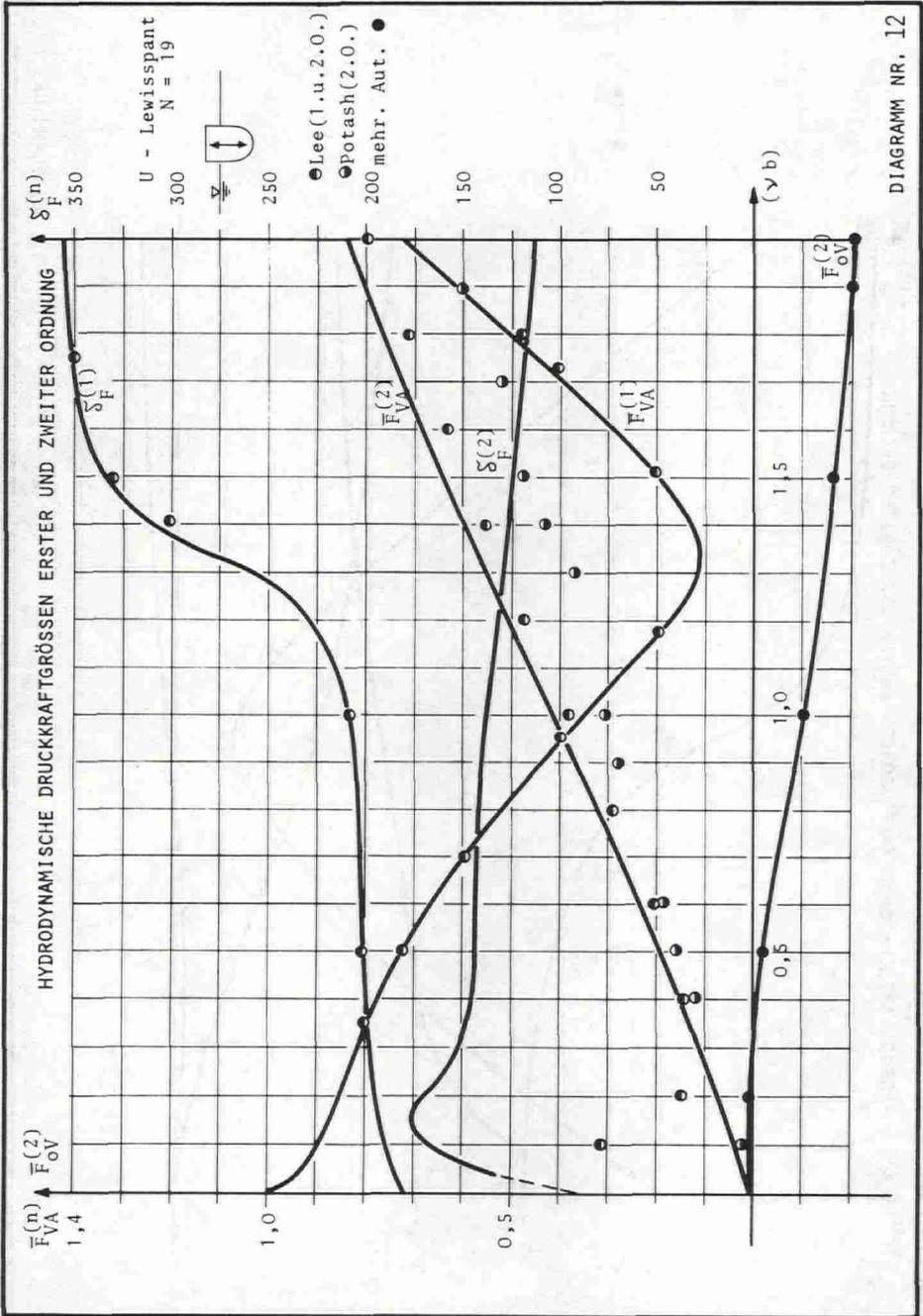


DIAGRAMM NR. 11



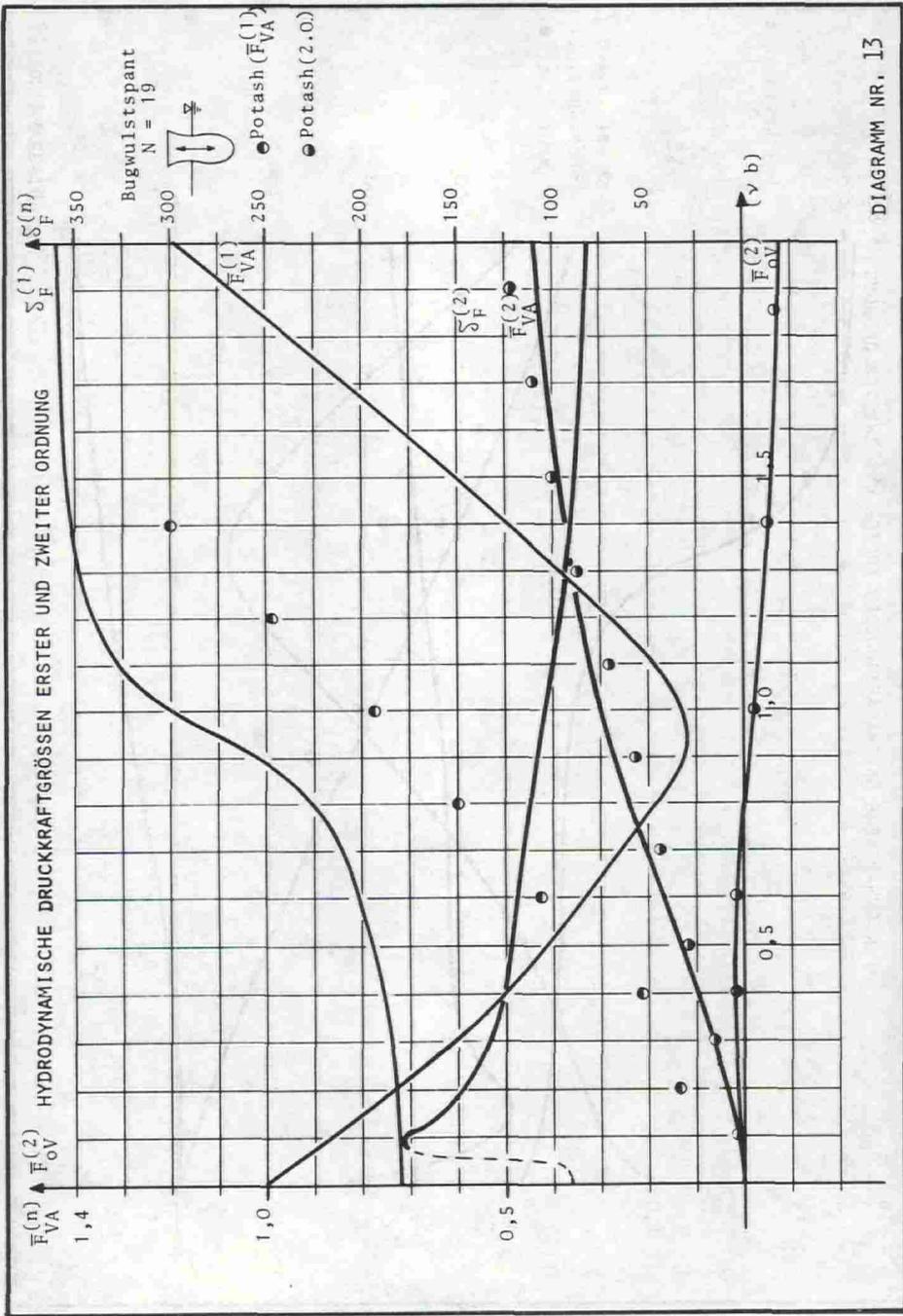


DIAGRAMM NR. 13

HYDRODYNAMISCHE GESAMTDRUCKKRAFT ZWEITER ORDNUNG

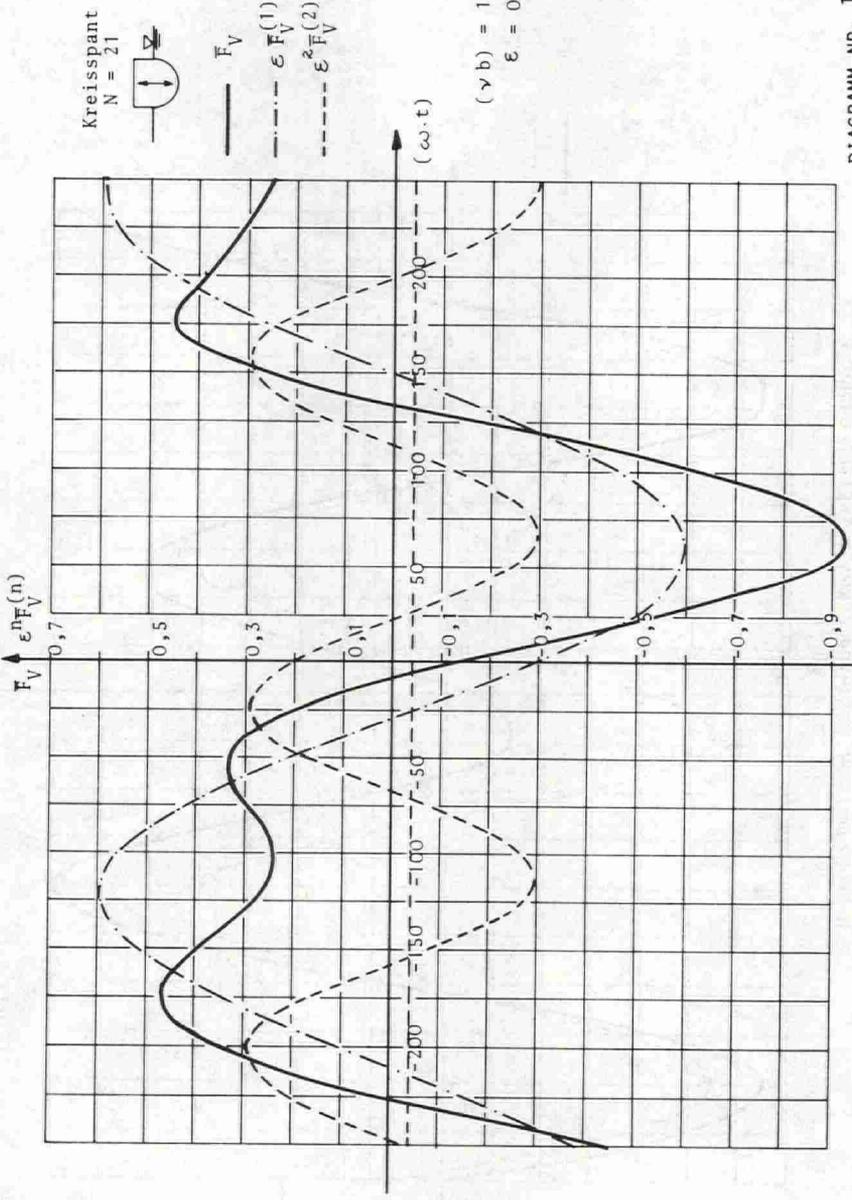


DIAGRAMM NR. 14

HYDRODYNAMISCHE GESAMTDRUCKKRAFT ZWEITER ORDNUNG

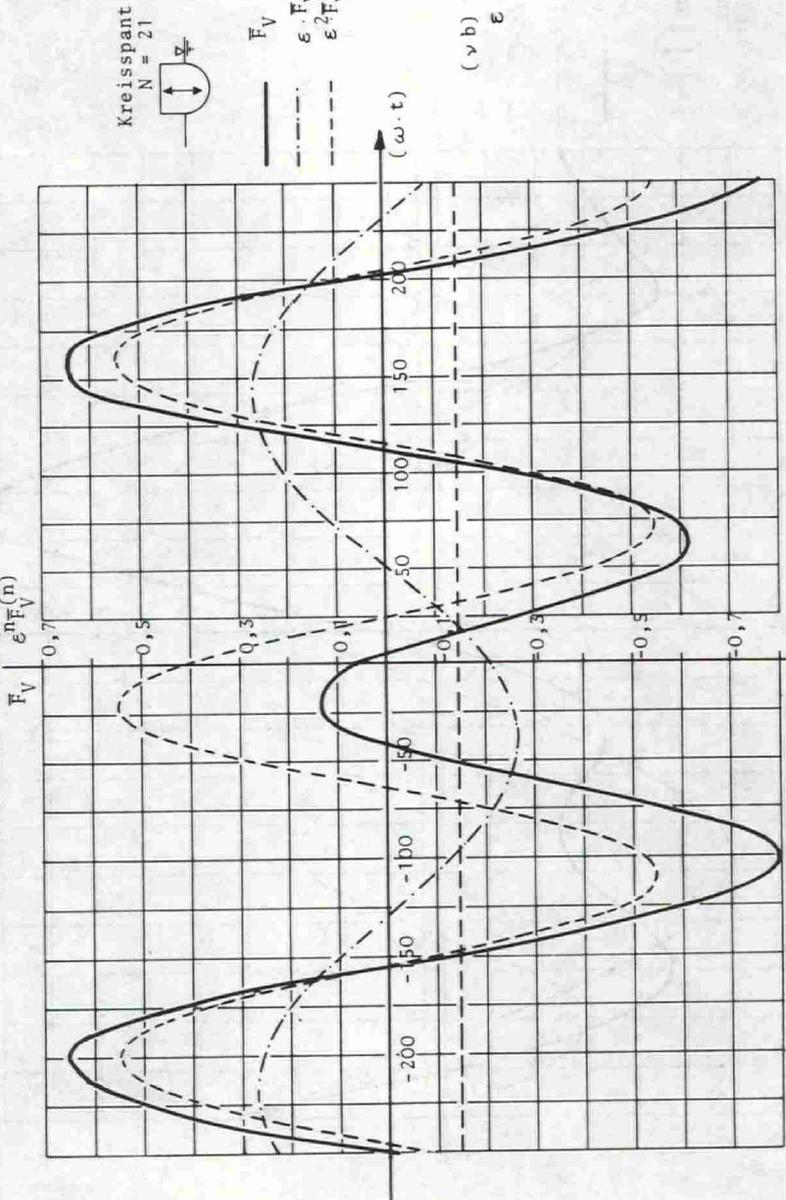


DIAGRAMM NR. 15

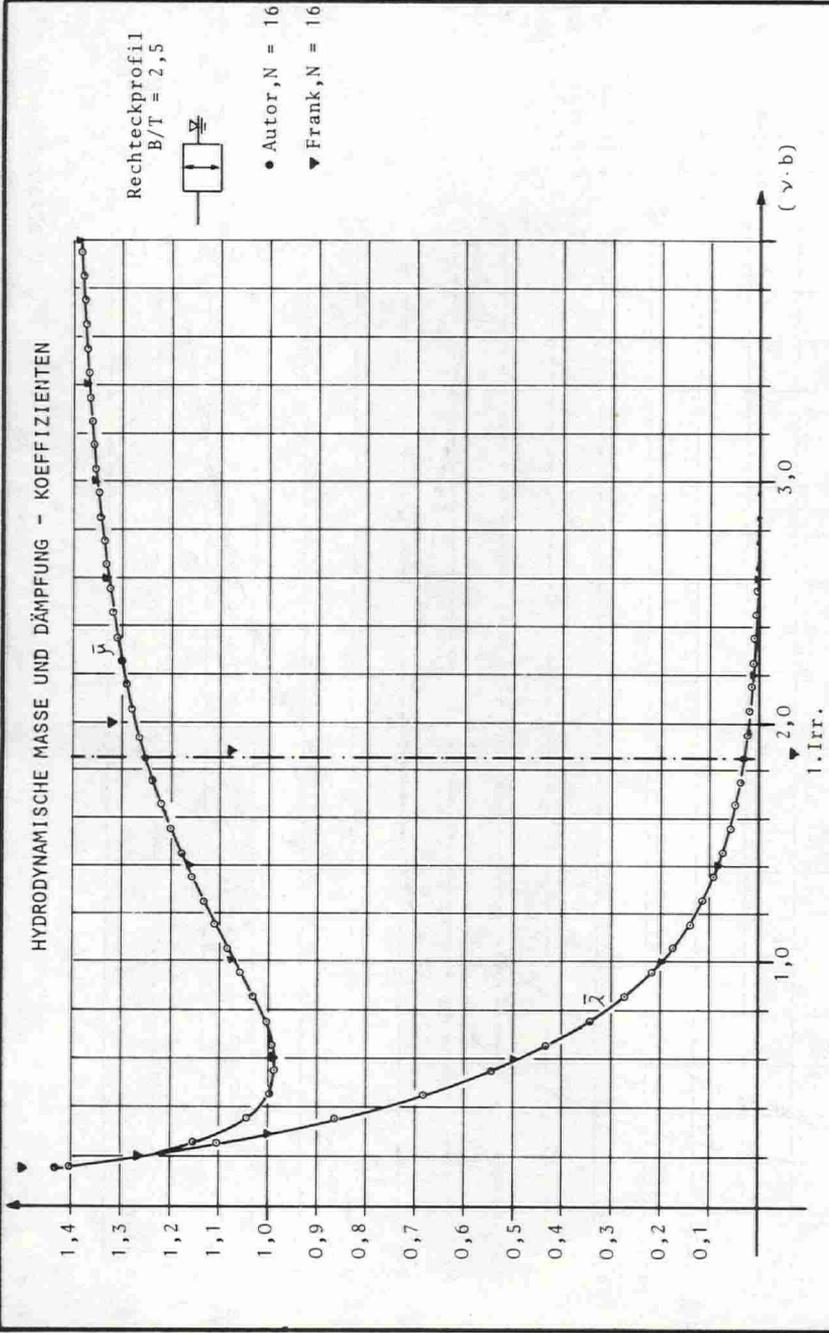
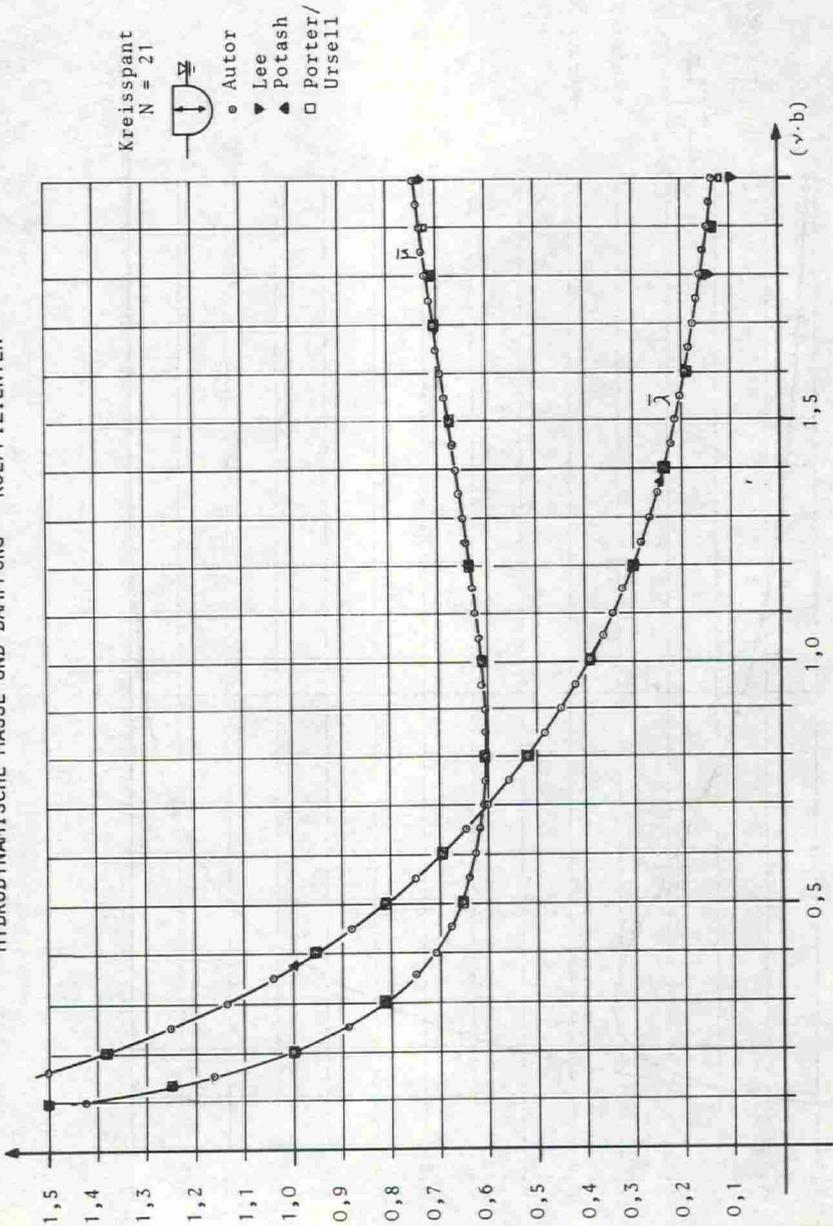


DIAGRAMM NR. 16

HYDRODYNAMISCHE MASSE UND DÄMPFUNG - KOEFFIZIENTEN

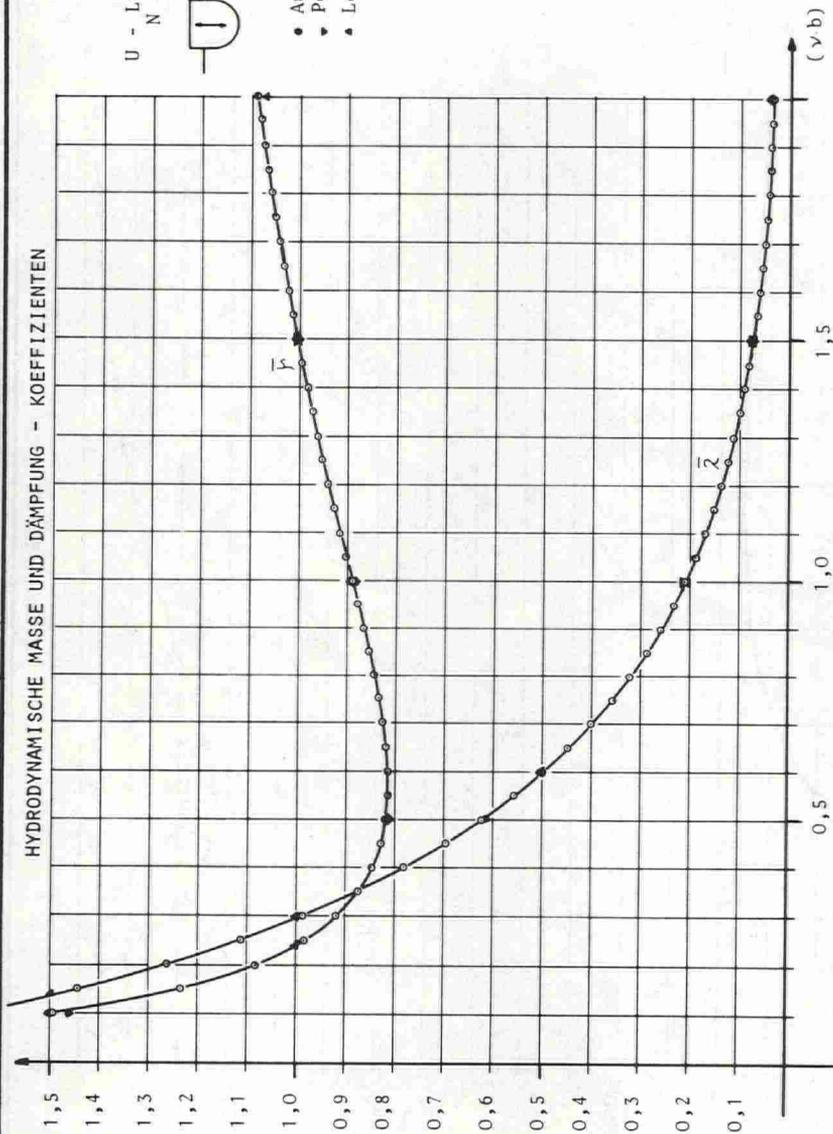


HYDRODYNAMISCHE MASSE UND DÄMPFUNG - KOEFFIZIENTEN

U - Lewisspant
N = 19



- Autor
- ▼ Potash
- ▲ Lee



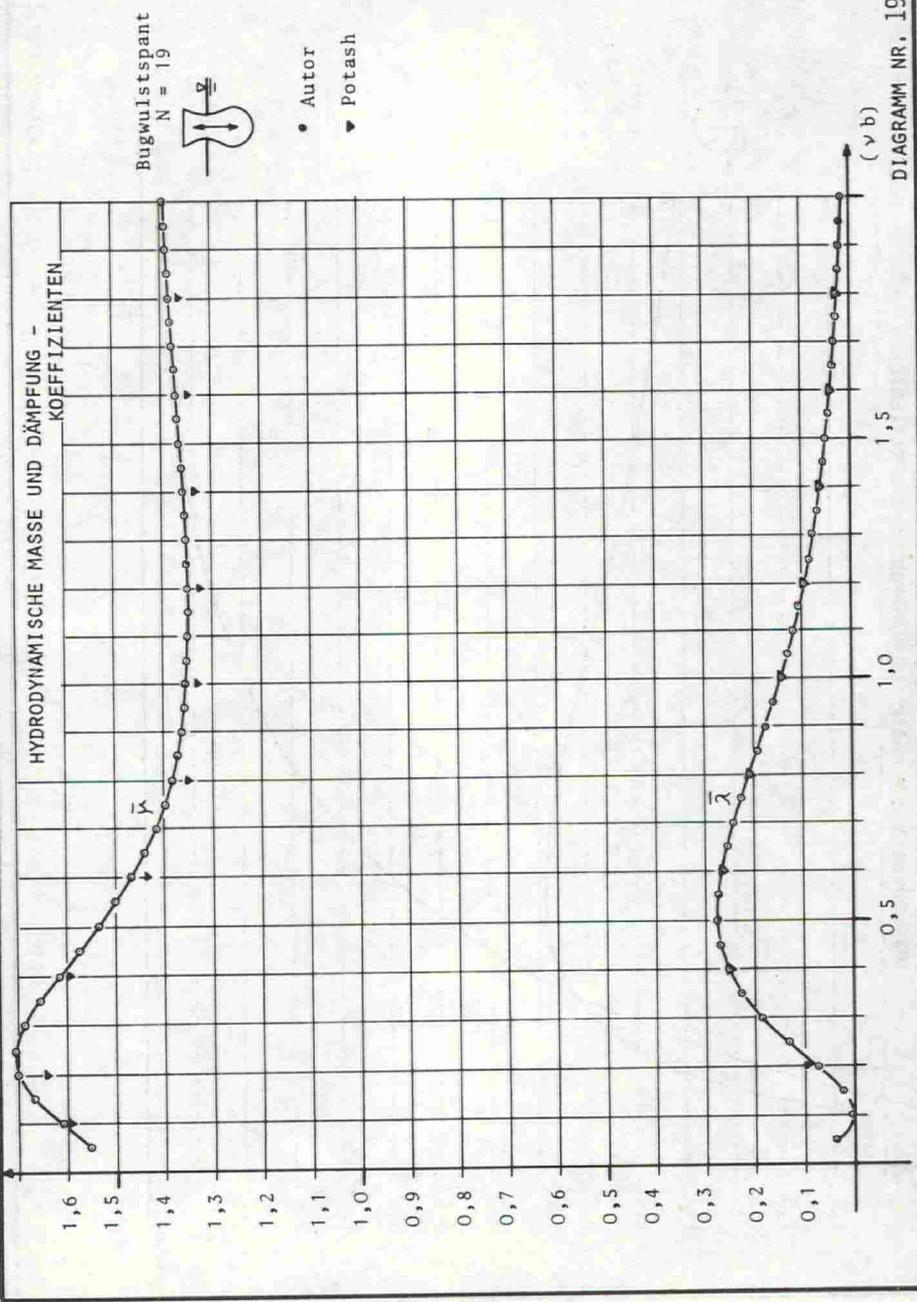


DIAGRAMM NR. 19

HYDRODYNAMISCHE MASSE UND DÄMPFUNG - KOEFFIZIENTEN

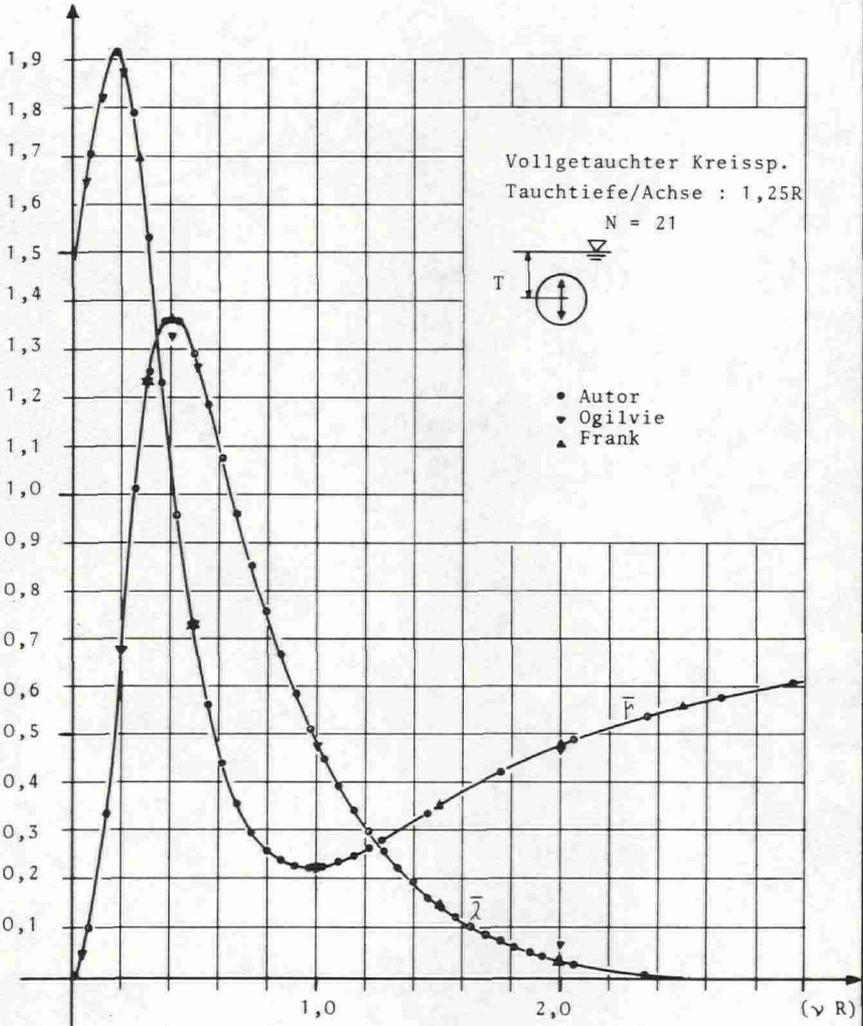


DIAGRAMM NR. 20

LEBENSLAUF

- 14.6.1949 Geboren in Athen/Griechenland als Sohn des Angestellten Dimitrios Papanikolaou und seiner Ehefrau Anastasia,geborene Griva, eine Schwester,Staatsangehörigkeit griechisch.
- 1955 Besuch der Volksschule in Athen.
- 1961 Aufnahmeprüfung für die Deutsche Schule Athen (Dörpfeld-Gymnasium).
- 1961 bis 1967 Besuch der Deutschen Schule Athen,naturwissenschaftlicher Zweig, Griechische Reifeprüfung in Verbindung mit deutschem Abitur am 1.7.1967, anschließend Zulassung zum Studium an der Technischen Universität Berlin, dreimonatiges Praktikum bei der Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau Berlin.
- 1967 bis 1973 Studium der Schiffstechnik an der Technischen Universität Berlin,Fachrichtung Schiffbau, Praktikantentätigkeit bei verschiedenen Werftbetrieben, Leistungsstipendium für ausländische Studenten des Berliner Senats, Diplomvorprüfung im April 1970, ab 1.4.1970 Tutor am ehem. Lehrstuhl für Theorie des Schiffes der Technischen Universität Berlin, Diplom-Hauptprüfung in der Fachrichtung Schiffbau am 15.2.1973.
- ab 15.2.1973 Wissenschaftlicher Assistent am Institut für Schiffstechnik,Fachgebiet Schiffsentwurf(ehem. Theorie des Schiffes),der Technischen Universität Berlin, Aufbaustudium an der Technischen Universität Berlin, seit dem 5.3.1973 verheiratet mit der Studienreferendarin Sylvia Papanikolaou,geborene Janke.