

wb1303

# Dynamica 3-A

1997

Prof.dr.ir. P. Meijers

---

# **Dynamica 3-A, wb1303**

Prof.dr.ir. P. Meijers

1997



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Continue Systemen</b>	<b>1</b>
1.1	Trilling van een snaar . . . . .	1
1.2	Longitudinale en torsietrillingen in uniforme staven . . . . .	9
1.3	Buigtrillingen in balken met uniforme doorsnede . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Dynamica van Zuigermachines</b>	<b>25</b>
2.1	Kinematica van het kruk-drijfstaang mechanisme . . . . .	25
2.2	De vrije krachten en momenten in de eencilinder-motor . . . . .	28
2.3	Vrije krachten en momenten in meercilinder-motoren . . . . .	32
2.4	Torsietrillingen . . . . .	38
2.5	Vliegwielerberekening . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Niet-Lineaire Systemen</b>	<b>45</b>
3.1	Verschijselen en oplosmethoden voor eenvoudige systemen . . . . .	45
3.1.1	Vrije ongedempte trillingen . . . . .	45
3.1.2	Gedwongen niet-lineaire trillingen . . . . .	49
3.1.3	Subharmonische trillingen . . . . .	53
3.2	Stabiliteitstheorie van Liapounov . . . . .	56
3.3	Zichzelf-instandhoudende trillingen . . . . .	62
3.4	Inleiding in de chaos . . . . .	69
3.4.1	Chaotisch gedrag van een Duffing-systeem . . . . .	69
3.4.2	Chaotisch gedrag van een botsend systeem . . . . .	74
<b>4</b>	<b>Kinematica en Dynamica van Multi-Body Systemen</b>	<b>81</b>
4.1	Inleiding . . . . .	81
4.2	Numerieke behandeling van de kinematica . . . . .	82
4.3	Numerieke behandeling van de dynamica . . . . .	86
4.4	Elementtypen . . . . .	91
4.5	Inverse kinematica en dynamica . . . . .	95
4.6	Voorbeelden . . . . .	97

<b>5</b>	<b>Oefenvraagstukken</b>	<b>107</b>
5.1	Oefenvraagstukken behorende bij hfdst 1 . . . . .	107
5.2	Oefenvraagstukken behorende bij hfdst 3 . . . . .	120
5.3	Antwoorden . . . . .	122

# Hoofdstuk 1

## Continue Systemen

### 1.1 Trilling van een snaar

In Hoofdstuk 3 van het collegedictaat Dynamica 2-B hebben we de eventueel continue systemen vervangen door discrete systemen met als vrijheidsgraden de verplaatsingen en/of verdraaiingen in een eindig aantal discrete punten. Als het aantal vrijheidsgraden  $n$  is, leidt dit tot een stelsel van  $n$  gewone tweede orde differentiaalvergelijkingen.

Nu zullen voor enkele eenvoudige gevallen de partiële differentiaalvergelijkingen worden afgeleid en met de gegeven rand- en beginvoorwaarden worden geïntegreerd. Omdat het systeem dan oneindig veel vrijheidsgraden heeft, zullen we ook oneindig veel eigenfrequenties en orthogonale trilvormen vinden.

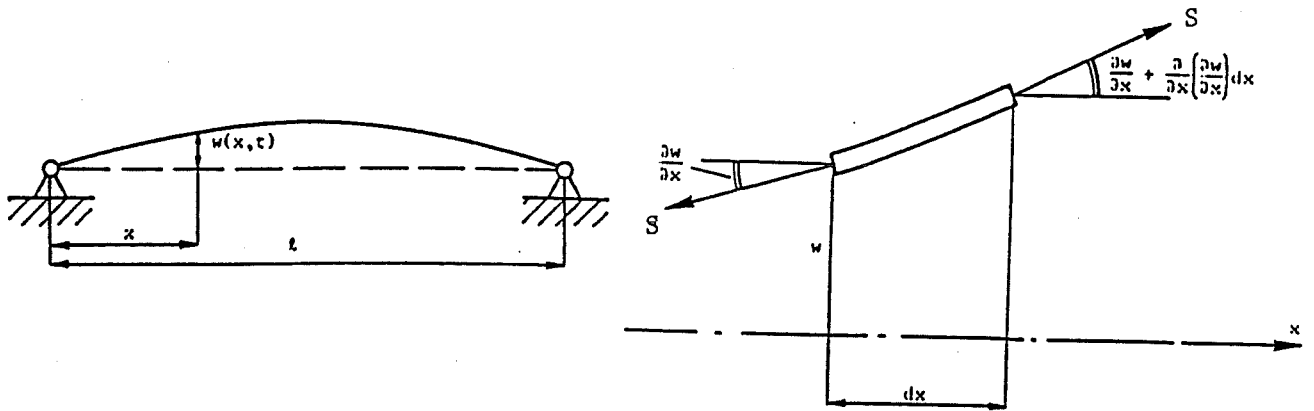
Worden in de discrete beschrijving steeds meer vrijheidsgraden gekozen dan moet de oplossing convergeren naar de hier te behandelen oplossing van het corresponderende continue systeem.

Eerst zullen de trillingen van een voorgespannen snaar behandeld worden. Van een snaar is per definitie de buigstijfheid verwaarloosbaar t.o.v. de rekstijfheid. De initiële rek t.g.v. een voorspankracht  $S$  bedraagt

$$\varepsilon^0 = \frac{S}{EA}$$

We beschouwen een homogene prismatische snaar met lengte  $\ell$  en soortelijke massa  $\rho$  (Fig 1.1). Verondersteld wordt dat bij de trilling de voorspanning constant is. Door de uitwijking  $w$  neemt de lengte van de snaar toe en daarmee ook de trekkracht in de snaar. De verlenging bedraagt

$$\Delta\ell_w = \int_0^\ell \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2} dx - \ell \approx \frac{1}{2} \int_0^\ell \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx \quad (1.1)$$



Figuur 1.1: Trillende snaar en infinitesimaal snaarelement

Deze verlenging is evenredig met de hellingshoek in het kwadraat en veroorzaakt daarom zeker een niet-lineariteit in de vergelijkingen. De linearisering waarbij de voorspankracht constant verondersteld wordt zal dus alleen toelaatbaar zijn als de uitwijkingen zo klein zijn dat geldt

$$\Delta l_w \ll \Delta l_s \quad (1.2)$$

Hierin is  $\Delta l_s$  de verlenging van de snaar nodig om de voorspankracht op te wekken dus

$$\Delta l_s = \frac{S l}{EA} \quad (1.3)$$

De eis die opgelegd wordt aan  $w$  heeft ook tot gevolg dat de axiale verplaatsing verwaarloosbaar is t.o.v. de uitwijking  $w$ . Toepassing van de wet van Newton op de verticale vrije trilling van het infinitesimale snaarelement  $dx$  geeft

$$\rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$$

en hieruit volgt de partiële differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.4)$$

waarin

$$c = \sqrt{\frac{S}{\rho A}} \quad (1.5)$$

Hebben we in het algemeen een partiële vergelijking van de vorm

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = D \quad (1.6)$$

dan is deze

**elliptisch** voor  $B^2 - AC < 0$ ,

**parabolisch** voor  $B^2 - AC = 0$ ,

**hyperbolisch** voor  $B^2 - AC > 0$ .

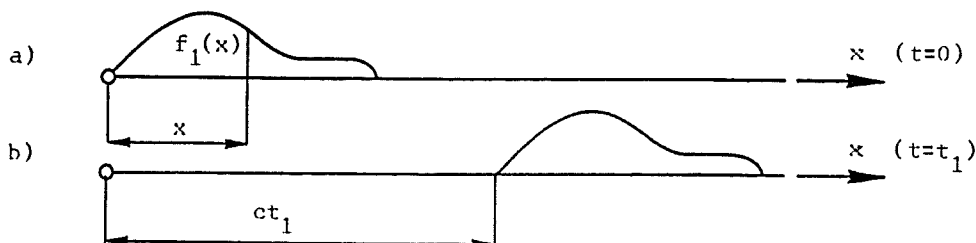
De trilling van de snaar wordt dus beschreven door een vergelijking van het *hyperbolische* type.

De algemene oplossing is te geven in de vorm

$$w = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (1.7)$$

waarin  $f_1$  en  $f_2$  *willekeurige* functies zijn van de argumenten  $(x - ct)$  en resp.  $(x + ct)$ .

Beschouwen we eerst  $f_1(x - ct)$  dan is duidelijk dat de oplossing voor  $t = t_1$  verkregen wordt door de oplossing voor  $t = 0$  te verschuiven over de afstand  $ct_1$  langs de x-as (Fig 1.2). We hebben hier te maken met een *z.g. lopende golf* die zich met een snelheid  $c$  voortplant naar rechts. De vorm van



Figuur 1.2: Naar rechts lopende golf

de golf blijft dezelfde, daarom spreken we van een golfvoortplanting zonder *dispersie*. In de fysische werkelijkheid zal er zeker enige dispersie optreden want we hebben in de analyse benaderingen ingevoerd (geen demping, geen buigstijfheid).

De functie  $f_2(x + ct)$  stelt een naar links lopende golf voor met dezelfde voortplantingssnelheid  $c$ .

De soort golf die precies ontstaat volgt uit de beginvoorwaarden  $w(x, 0)$ ,  $\dot{w}(x, 0)$  en de randvoorwaarden. Beschouwen we een naar rechts lopende golf die op het tijdstip  $t = \bar{t}$  het bevestigingspunt A bereikt (Fig. 1.3). Denken we de



snaar verlengd voorbij het punt A en nemen we een t.o.v. A gespiegelde golf aan die naar links loopt (zie Fig1.3) dan raken de golven elkaar op tijdstip  $t = \bar{t}$  in A. Voor  $t > \bar{t}$  treedt bij het passeren een superpositie op als aangegeven. Gedurende het gehele proces blijft de doorbuiging in punt A gelijk aan nul. Kijken we nu alleen naar het deel links van punt A dan zien we dat we de oplossing hebben gevonden met  $w = 0$  in het punt A. M.a.w., we zien in de linker helft van Fig. 1.3 hoe een lopende golf gereflecteerd wordt ter plaatse van een bevestigingspunt.

Naast de oplossing in de vorm van twee *lopende golven* beschouwen we ook oplossingen in de vorm van zg. *staande golven*. Verondersteld wordt dat de snaar harmonisch trilt in een eigenfrequentie, dus:

$$w(x, t) = \hat{w}(x) \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.8)$$

Substitutie in 1.4 transformeert de partiële differentiaalvergelijking voor  $w(x, t)$  in de gewone differentiaalvergelijking voor  $\hat{w}(x)$ :

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} + \omega^2 \frac{\rho A}{S} \hat{w} = 0 \quad (1.9)$$

waarvan de algemene oplossing luidt

$$\hat{w} = C_1 \sin \omega \sqrt{\left(\frac{\rho A}{S}\right)} x + C_2 \cos \omega \sqrt{\left(\frac{\rho A}{S}\right)} x \quad (1.10)$$

De integratieconstanten volgen uit de randvoorwaarden voor de ondersteuningspunten

$$\hat{w}(0) = 0; \hat{w}(\ell) = 0$$

Een van nul verschillende oplossing is alleen mogelijk als

$$\sin \omega \sqrt{\frac{\rho A}{S}} \ell = 0 \quad (1.11)$$

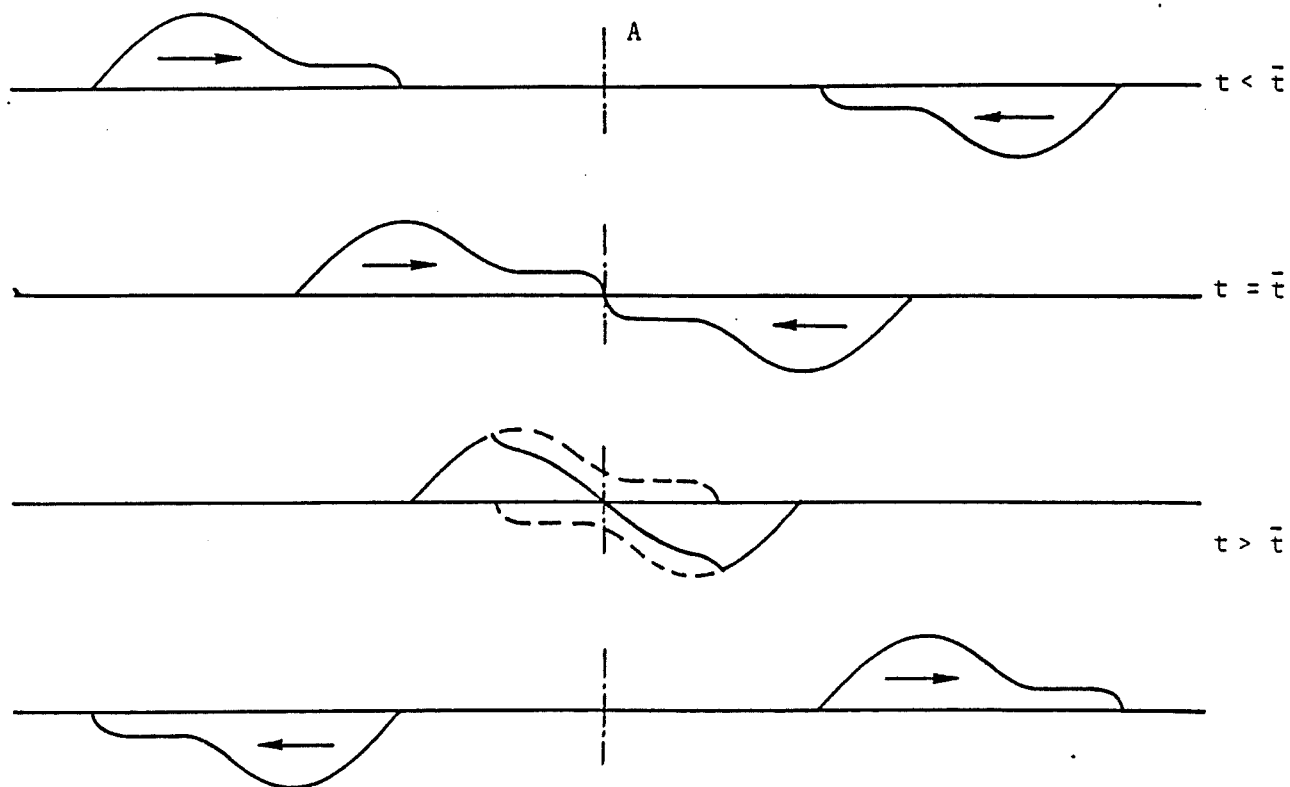
Hieruit volgen de eigenfrequenties

$$\omega_k = k \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho A}} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.12)$$

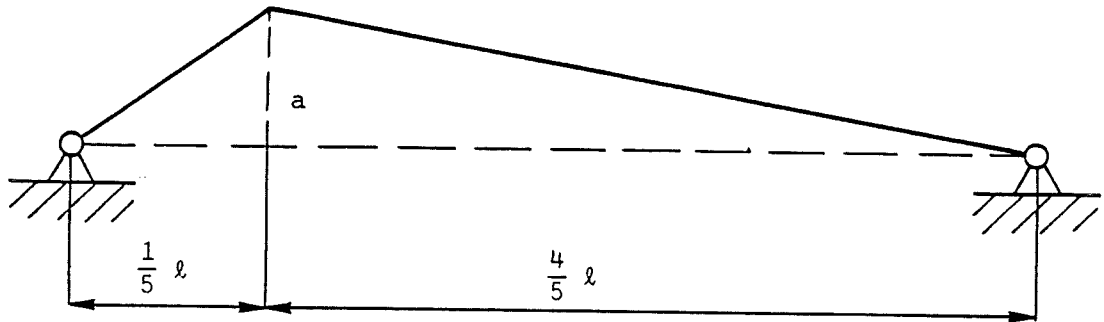
en de bijbehorende trilvormen, de zgn. *eigenfuncties*

$$\hat{w}^k = C_1^{(k)} \sin(k\pi x/\ell) \quad (k = 1, 2, \dots)$$

De eigenfuncties zijn orthogonaal omdat



Figuur 1.3: Reflectie van een golf in een ondersteuningspunt



Figuur 1.4

$$\int_0^{\ell} \sin k\pi \frac{x}{\ell} \sin m\pi \frac{x}{\ell} dx = \frac{1}{2} \ell \delta_{km} \quad (1.13)$$

Wordt de snaar een uitwijking gegeven in één van de eigenfuncties en daarna losgelaten, dan treedt een trilling op met de periodetijd van de betreffende eigenfrequentie.

Als de snaar een initiële verplaatsing wordt gegeven in een andere vorm dan een eigenfunctie, dan kan de vorm beschouwd worden als een superpositie van eigenfuncties. De bijdragen aan de verschillende eigenfuncties zullen dan gaan trillen met hun eigenfrequentie. De oorspronkelijke vorm blijft dus niet gehandhaafd gedurende de beweging. Alleen na een volledige periode in de grondfrequentie is de buigingsvorm weer dezelfde.

Als voorbeeld kiezen we een initiële uitwijking (Fig1.4)

$$\hat{w} = 5a \frac{x}{\ell} \quad 0 \leq \frac{x}{\ell} \leq \frac{1}{5}; \quad \hat{w} = \frac{5}{4}a \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad \frac{1}{5} \leq \frac{x}{\ell} \leq 1 \quad (1.14)$$

Deze uitwijking zal in de volgende Fourier-reeks ontwikkeld kunnen worden

$$\hat{w} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\pi \frac{x}{\ell} \quad (1.15)$$

en de standaardprocedure voor de berekening van de coëfficiënten  $b_k$  geeft

$$\int_0^{\ell} \hat{w} \sin m\pi \frac{x}{\ell} dx = \frac{1}{2} \ell b_m$$

waaruit volgt:

$$b_m = \frac{2}{\ell} \left[ \int_0^{\ell/5} 5a \frac{x}{\ell} \sin m\pi \frac{x}{\ell} dx + \int_{\ell/5}^{\ell} \frac{5}{4}a \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \sin m\pi \frac{x}{\ell} dx \right]$$

of

$$b_m = \frac{25}{2m^2\pi^2} a \sin \frac{m\pi}{5} \quad (1.16)$$

De totale oplossing wordt dan

$$w = \frac{25}{2\pi^2} a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin k \frac{\pi}{5} \sin k\pi \frac{x}{\ell} \cos \left( \frac{k\pi}{\ell} \sqrt{\left(\frac{S}{\rho A}\right)} t + \varphi_k \right) \quad (1.17)$$

Elke term gaat dus trillen met zijn eigenfrequentie. De laagste is hier het sterkst vertegenwoordigd, de frequentie daarvan is

$$\omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho A}} \quad (1.18)$$

en wordt de *grondtoon* genoemd. Alle andere frequenties  $2\omega_1$ ,  $3\omega_1$ , etc. zijn *boventonen*.

De eigenfrequenties worden verlaagd door vergroting van de lengte en vergroting van massa per lengte-eenheid ( $\rho A$ ). De tonen worden verhoogd door verhoging van de voorspankracht  $S$ . Uitschrijven van (1.17) geeft (aangenomen dat de beginvoorwaarden zo gekozen worden dat  $\varphi_k = 0$  [ $k = 0, 1, 2, \dots$ ]):

$$\begin{aligned} w(x, t) = & a[0,744 \sin \frac{\pi x}{\ell} \cos \omega_1 t + 0,301 \sin \frac{2\pi x}{\ell} \cos 2\omega_1 t + \\ & 0,134 \sin \frac{3\pi x}{\ell} \cos 3\omega_1 t + 0,047 \sin \frac{4\pi x}{\ell} \cos 4\omega_1 t \\ & - 0,021 \sin \frac{6\pi x}{\ell} \cos 6\omega_1 t - 0,025 \sin \frac{7\pi x}{\ell} \cos 7\omega_1 t + \dots] \end{aligned} \quad (1.19)$$

We zien dus dat bij deze begintoestand de frequentie  $\omega_5 = 5\omega_1$  niet wordt aangestoten. Ook zien we dat de hoge tonen  $\omega_6$ ,  $\omega_7$ , ... niet sterk vertegenwoordigd zijn. Bovendien zullen die door altijd aanwezige demping relatief snel uitdempen.

We hebben gesteld dat (1.7) de algemene oplossing is, dit betekent dat we de staande golf ook moeten kunnen uitdrukken m.b.v. de lopende golven. Dit is eenvoudig aan te tonen immers

$$\sin k\pi \frac{x}{\ell} \cos \omega t = \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{\ell} \left( x - \frac{\omega \ell}{k\pi} t \right) + \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi}{\ell} \left( x + \frac{\omega \ell}{k\pi} t \right) \quad (1.20)$$

Ter illustratie van de methode van Rayleigh geven we nog een benadering van de laagste eigenfrequentie met deze methode.

De verlenging van een lijnelementje van de trillende snaar in volledig uitgebogen toestand is

$$\sqrt{\left[1 + \left(\frac{d\hat{w}}{dx}\right)^2\right]} dx - dx \approx \frac{1}{2} \left(\frac{d\hat{w}}{dx}\right)^2 dx \quad (1.21)$$

De maximale toename van de potentiële energie t.o.v. de middenstand wordt dan voor de prismatische snaar

$$P_{max} = \frac{1}{2} S \int_0^\ell \left(\frac{d\hat{w}}{dx}\right)^2 dx \quad (1.22)$$

De maximale kinetische energie bij trilling op de frequentie  $\omega$  is voor een dergelijke snaar

$$K_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 \rho A \int_0^\ell \hat{w}^2 dx \quad (1.23)$$

Volgens Rayleigh geldt dan voor de laagste eigenfrequentie bij benadering

$$\omega_1^2 = \frac{P_{max}}{K_{max}(\omega = 1)} = \frac{S \int_0^\ell \left(\frac{d\hat{w}}{dx}\right)^2 dx}{\rho A \int_0^\ell \hat{w}^2 dx} \quad (1.24)$$

Passen we dit toe voor het werkelijke verplaatsingsveld in de eerste trilvorm dan krijgen we de exacte oplossing. Kiezen we in plaats van een sinusvormig verloop voor de amplitude  $\hat{w}$  het parabolische verloop

$$\hat{w} = 4\hat{w}_0 \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \quad 0 \leq \frac{x}{\ell} \leq 1 \quad (1.25)$$

dan wordt de maximale potentiële energietoename

$$P_{max} = \frac{8}{3} S \frac{\hat{w}_0^2}{\ell}$$

en de maximale kinetische energie

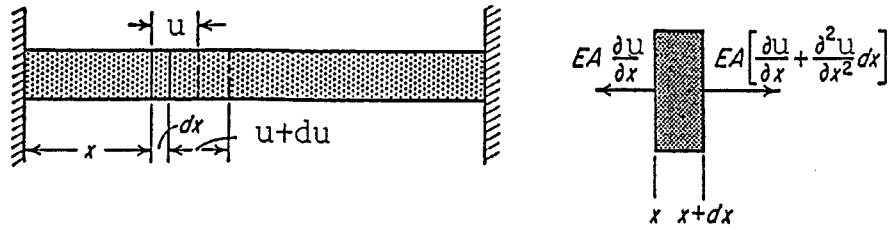
$$K_{max} = \frac{4}{15} \rho A \omega^2 \ell \hat{w}_0^2$$

Dit leidt tot de laagste eigenfrequentie

$$\omega_1 = \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{10S}{\rho A}} \quad (1.26)$$

en deze is slechts 0.7% hoger dan de exacte oplossing (1.18)

## 1.2. LONGITUDINALE EN TORSIETRILLINGEN IN UNIFORME STAVEN



Figuur 1.5: Longitudinale trillingen in een staaf

## 1.2 Longitudinale en torsietrillingen in uniforme staven

Het probleem van de longitudinale trillingen in een staaf vertoont grote overeenkomst met het probleem van de trillende snaar en is een limietgeval van in serie geschakelde massa-veer systemen waarbij we steeds meer en kleinere massa's en veren kiezen. De kracht in een doorsnede van de balk bedraagt

$$S = EA\epsilon_x = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (1.27)$$

De bewegingsvergelijking voor het infinitesimale balkelement  $dx$  is (Fig. 1.5)

$$\rho A dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$$

of

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (1.28)$$

waarin

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.29)$$

De partiële differentiaalvergelijking is gelijk aan die voor de snaar. De voortplantingssnelheid is nu  $c = \sqrt{(E/\rho)}$ . Is het materiaal staal ( $E = 2,1 \cdot 10^{11} N/m^2$ ;  $\rho = 8 \cdot 10^3 kg/m^3$ ) dan is de voortplantingssnelheid ruim  $5000 m/s$ . De voortplantingssnelheid in een snaar is  $c = \sqrt{(\sigma/\rho)}$  waarin  $\sigma$  de voorspanning is. Bij een voorspanning van  $100 N/mm^2 = 10^8 N/m^2$  is de voortplantingssnelheid van de golf in de snaar slechts  $112 m/s = 402 km/h$ .

De algemene oplossing kan weer geschreven worden als de som van twee lopende golven

$$u = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (1.30)$$

waarvan de eerste naar rechts en de tweede naar links loopt.

Een golf kan bijvoorbeeld opgewekt worden door een kortdurende belasting op het uiteinde van de staaf (denk bijvoorbeeld aan een klap op een heipaal). Is de belasting gedurende  $\Delta t$  seconden constant en vervolgens weer nul dan is de staaf na  $\Delta t$  seconden over een lengte  $c\Delta t$  vanaf het belaste eind samengedrukt (drukspanning  $N/A$ ). Deze zg. drukgolf plant zich zonder dispersie voort met een snelheid  $c$ . De situatie is dus analoog aan die bij de snaar.

We zullen nu nog nagaan wat er gebeurt als de drukgolf een ingeklemd of een vrij eind bereikt. Aan het ingeklemd eind geldt de randvoorwaarde  $u = 0$  en aan het vrije eind  $S = 0$  en dus  $\partial u / \partial x = 0$ .

Loopt er een drukgolf naar rechts (zie Fig. 1.6) en een t.o.v. punt A gespiegelde drukgolf naar links dan worden de golven bij het passeren gesuperponeerd terwijl in punt A waar de golven elkaar treffen de verplaatsing  $u$  steeds nul blijft. De oplossing links van het punt A geeft dus de reflectie van een drukgolf t.p.v. een inklemming. Beschouwen we een *druk*golf in een oneindig lange staaf die naar rechts loopt en een gespiegelde *trek*golf die naar links loopt (Fig.1.7). In het punt waar de golven elkaar ontmoeten zal de spanning nul blijven, dus de oplossing links van dat punt geeft aan hoe een reflectie optreedt aan een vrij eind. De drukgolf reflecteert als trek golf.

Naast de oplossing in de vorm van lopende golven hebben we ook weer oplossingen in de vorm van staande golven van het type

$$u(x, t) = \left[ C_1 \sin \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega x + C_2 \cos \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega x \right] \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.31)$$

Aan een ingeklemd eind geldt  $u = 0$  en aan een vrij eind  $\partial u / \partial x = 0$ . Voor een balk ingeklemd ter plaatse  $x = 0$  en vrij voor  $x = \ell$  vinden we dan

$$C_2 = 0$$

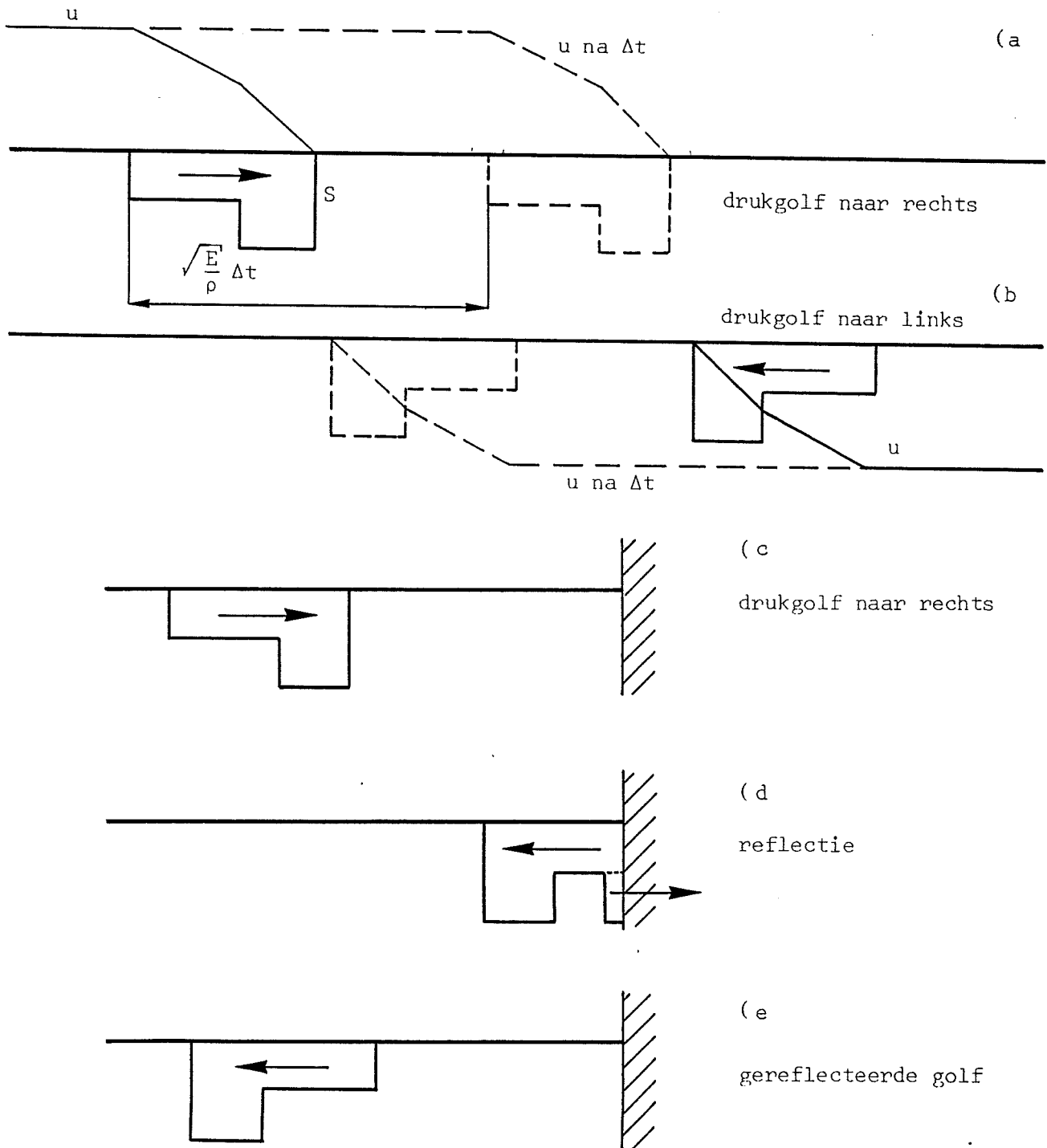
$$C_1 \cos \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega \ell = 0$$

Een van nul verschillende oplossing voor  $C_1$  is alleen mogelijk als voor  $\omega$  geldt

$$\sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega \ell = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

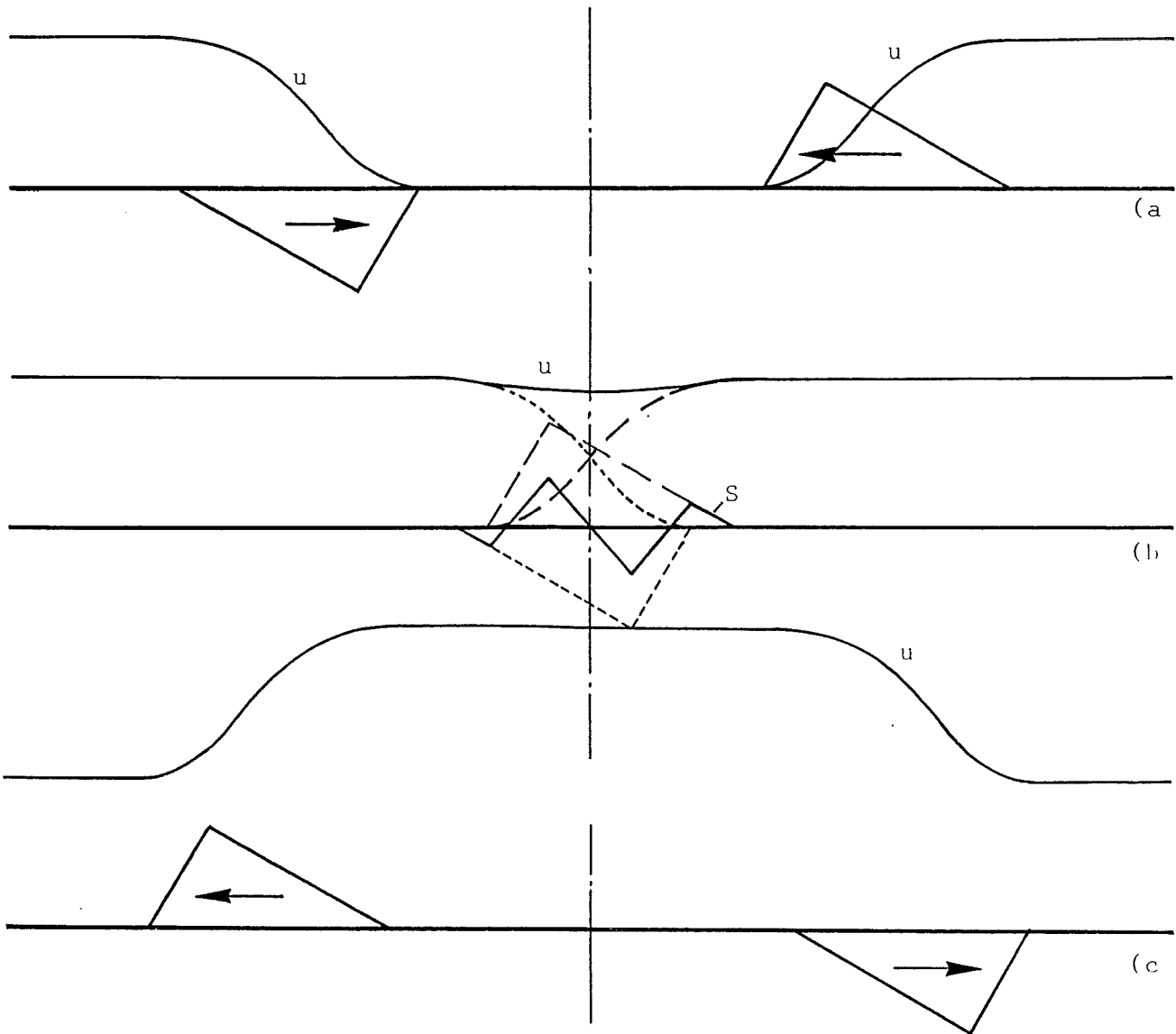
De eigenfrequenties zijn dan

1.2. LONGITUDINALE EN TORSIETRILLINGEN IN UNIFORME STAVEN11



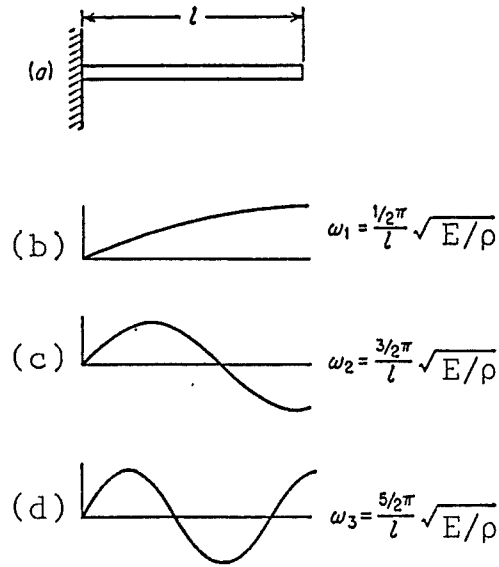
Figuur 1.6: Reflectie van een drukgolf aan een ingeklemd einde



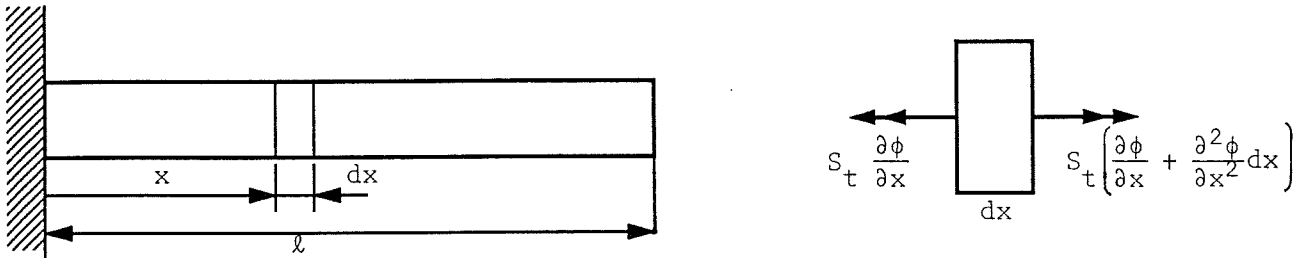


Figuur 1.7: Reflectie van een drukgolf bij een vrij einde

1.2. LONGITUDINALE EN TORSIETRILLINGEN IN UNIFORME STAVEN 13



Figuur 1.8: Longitudinale trillingen van een staaf aan één kant ingeklemd en aan de andere kant vrij



Figuur 1.9

$$\omega_k = \left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.32)$$

en de eigenfuncties

$$\hat{u}^k = C_1^{(k)} \sin\left(\frac{1}{2} + k\right) \pi \frac{x}{\ell} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.33)$$

Fig. 1.8 geeft de eerste drie eigenfrequenties en eigenfuncties

Tenslotte beschouwen we de vrije torsietrillingen van een uniforme as met een constante massa-tragheid per lengte-eenheid  $i$ . Het torsiemoment in een doorsnede  $x$  bedraagt

$$T = S_t \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (1.34)$$

waarin  $S_t$  de torsiestijfheid is en  $\varphi$  de wringhoek. Voor een as met cirkelvormige dwarsdoorsnede is  $S_t$  de glijdingsmodulus maal het polaire traagheidsmoment van de doorsnede. Met de wet van Newton toegepast op de rotatie van het balkelement  $dx$  volgt

$$i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = S_t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

of

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{S_t}{i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.35)$$

Dit is weer dezelfde vergelijking als voor de voorgaande gevallen. Na substitutie van

$$\varphi = \hat{\varphi} \cos(\omega t + \theta) \quad (1.36)$$

ontstaat de gewone differentiaalvergelijking

$$\frac{d^2 \hat{\varphi}}{dx^2} + \frac{i\omega^2}{S_t} \hat{\varphi} = 0 \quad (1.37)$$

met de algemene oplossing

$$\hat{\varphi} = C_1 \sin \sqrt{\frac{i}{S_t}} \omega x + C_2 \cos \sqrt{\frac{i}{S_t}} \omega x \quad (1.38)$$

Voor de randvoorwaarden

$$x = 0 : \hat{\varphi} = 0 \quad (\text{ingeklemd}) \quad ; \quad x = \ell : T = 0 \rightarrow \frac{d\hat{\varphi}}{dx} = 0 \quad (\text{vrij})$$

volgt

$$C_2 = 0; C_1 \cos \sqrt{\left(\frac{i}{S_t}\right)} \omega \ell = 0$$

Dit levert de eigenfrequenties

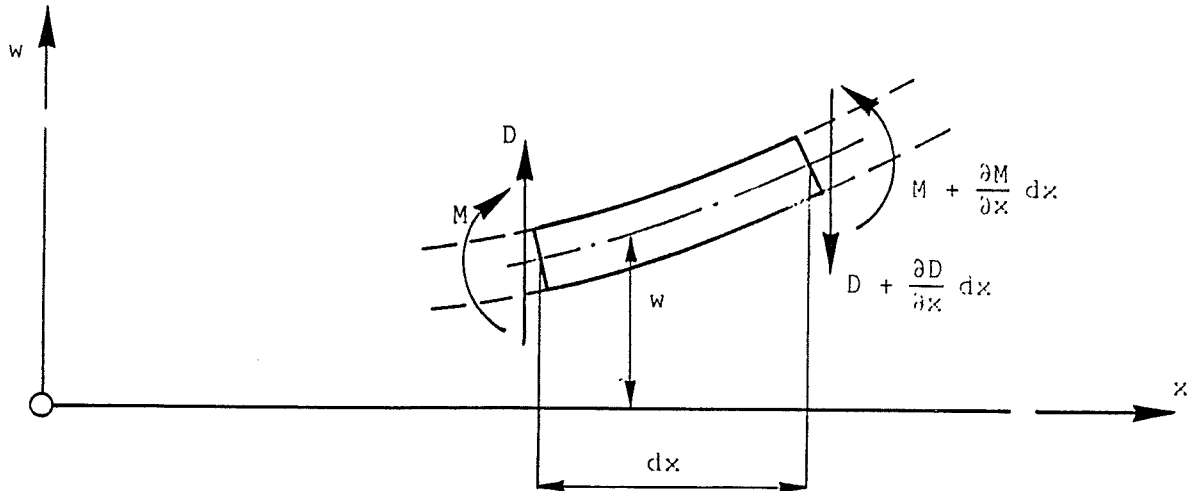
$$\omega_k = \left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S_t}{i}} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.39)$$

en eigenfuncties

$$\hat{\varphi}_k = C_1^{(k)} \sin \left(\frac{1}{2} + k\right) \pi \frac{x}{\ell} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.40)$$

Het resultaat is dus analoog aan dat voor longitudinale trillingen:  $\sqrt{(E/\rho)}$  in (1.32) is vervangen door  $\sqrt{(S_t/i)}$  in (1.39).

### 1.3. BUIGTRILLINGEN IN BALKEN MET UNIFORME DOORSNEDE 15



Figuur 1.10: Balkelement

### 1.3 Buigtrillingen in balken met uniforme doorsnede

Het verband tussen moment en kromming in een balk is

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.41)$$

bovendien volgt uit het evenwicht (Fig. 1.10)

$$D = \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.42)$$

Als er geen voorspanning in de balk aanwezig is, dan wordt de bewegingsvergelijking voor een infinitesimaal element

$$\rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial D}{\partial x} dx = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx$$

Hieruit volgt voor een prismatische balk de differentiaalvergelijking

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.43)$$

Zoeken we een oplossing in de vorm

$$w = \hat{w} \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.44)$$

dan gaat de partiële differentiaalvergelijking over in de gewone differentiaalvergelijking

$$\frac{d^4 \hat{w}}{dx^4} - \mu^4 \hat{w} = 0 \quad (1.45)$$

waarin

$$\mu = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}} \quad (1.46)$$

De algemene oplossing kan geschreven worden als

$$\hat{w}(x) = C_1 \cosh \mu x + C_2 \sinh \mu x + C_3 \cos \mu x + C_4 \sin \mu x \quad (1.47)$$

of als

$$\hat{w}(x) = \bar{C}_1 e^{\mu x} + \bar{C}_2 e^{-\mu x} + \bar{C}_3 \cos \mu x + \bar{C}_4 \sin \mu x \quad (1.48)$$

De vier integratieconstanten zijn bepaald door de randvoorwaarden.

- Voor een ondersteund eind:  $\hat{w} = 0$  ;  $M = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} = 0$
- Voor een vrij eind:  $M = 0 \Rightarrow \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} = 0$  ;  $D = 0 \Rightarrow \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3} = 0$
- Voor een ingeklemd eind:  $\hat{w} = 0$  ;  $\frac{d\hat{w}}{dx} = 0$

De vier randvoorwaarden leveren vier homogene vergelijkingen op voor de integratieconstanten. Het nul stellen van de determinant van het systeem geeft de frequentievergelijking.

Een aan beide einden opgelegde balk geeft (1.47):

$$\begin{aligned} C_1 &= 0; & C_3 &= 0 \\ C_2 \sinh \mu l + C_4 \sin \mu l &= 0 \\ C_2 \sinh \mu l - C_4 \sin \mu l &= 0 \end{aligned}$$

De frequentievergelijking wordt dan

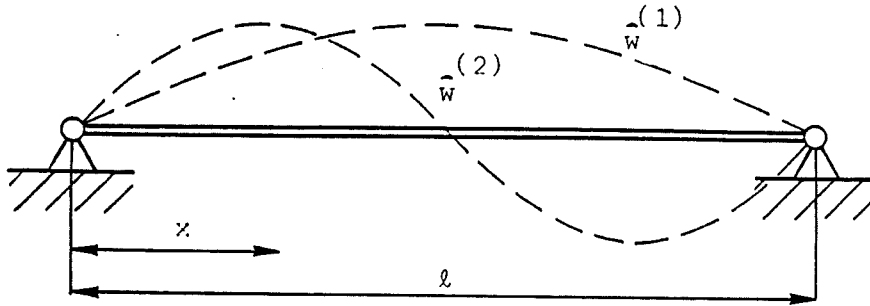
$$\sin \mu l = 0 \quad (1.49)$$

en hieruit volgt voor de eigenfrequenties

$$\mu l = k\pi \Rightarrow \omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (1.50)$$

De bijbehorende eigenfuncties zijn

### 1.3. BUIGTRILLINGEN IN BALKEN MET UNIFORME DOORSNEDE17



Figuur 1.11: Trilvormen bij de 2 laagste eigenfrequenties van de opgelegde balk

$$\hat{w}^{(k)} = C_4^{(k)} \sin k\pi \frac{x}{\ell} \quad (1.51)$$

De eerste twee eigenfuncties of trilvormen zijn gegeven in Fig. 1.11

Voor de balk *ingeklemd* in  $x = 0$  en *vrij* in  $x = \ell$  wordt de karakteristieke vergelijking

$$\cos \mu \ell = -\frac{1}{\cosh \mu \ell} \quad (1.52)$$

Hieruit volgt

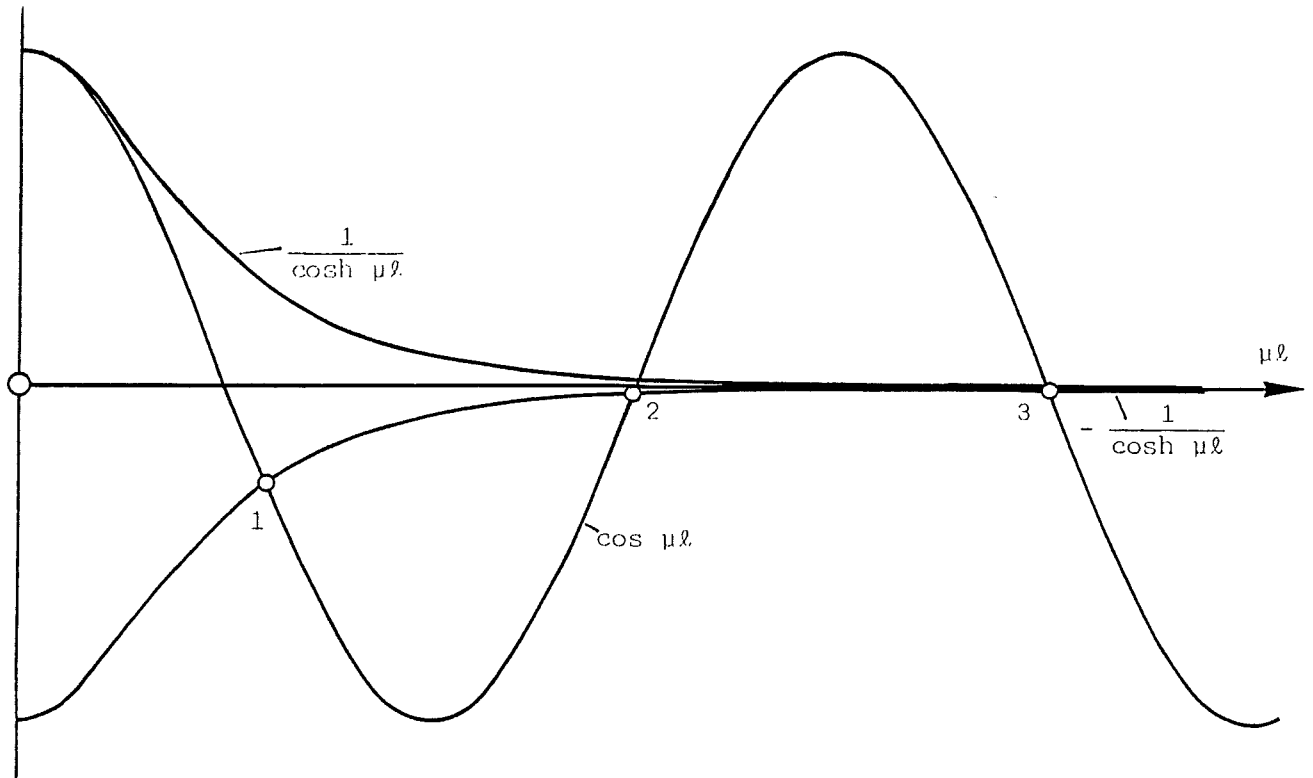
$$\begin{aligned} (\mu \ell)_1 &= 1,875 \Rightarrow \omega_1 = 3,516 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} \\ (\mu \ell)_2 &= \frac{3}{2}\pi - 0,0183 \Rightarrow \omega_2 \approx \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} \\ (\mu \ell)_{k(k>2)} &\approx \left(k - \frac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow \omega_{k(k>2)} \approx \left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} \end{aligned}$$

Fig. 1.12 geeft grafisch de oplossing van de karakteristieke vergelijking (1.52) en Fig. 1.13 geeft de trilvormen bij de twee laagste eigenfrequenties. Op dezelfde wijze volgt voor de vrij zwevende balk de frequentievergelijking

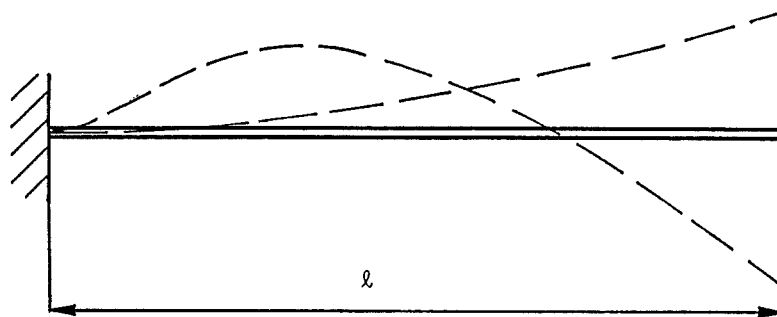
$$\cos \mu \ell = \frac{1}{\cosh \mu \ell} \quad (1.53)$$

met als oplossingen

$$(\mu \ell)_1 = \frac{3}{2}\pi + 0,0177 \Rightarrow \omega_1 \approx \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}}$$

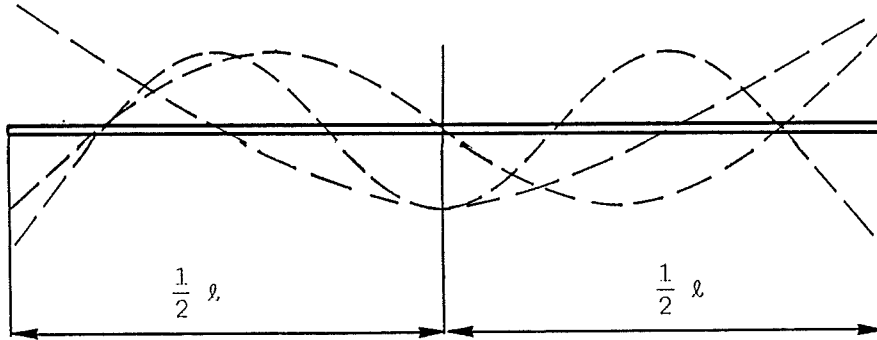


Figuur 1.12: Wortels van de karakteristieke vergelijkingen (1.52) en (1.53)



Figuur 1.13: Trilvormen bij de laagste twee eigenfrequenties

### 1.3. BUIGTRILLINGEN IN BALKEN MET UNIFORME DOORSNEDE 19



Figuur 1.14: Twee-, drie-, en vierknoopstrilling van de vrije balk

$$(\mu\ell)_{k_{k>1}} \approx (k + \frac{1}{2})\pi \Rightarrow \omega_{k_{k>1}} \approx (k + \frac{1}{2})^2 \pi^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}}$$

Fig. 1.14 geeft de eerste drie trilvormen. De eerste trilvorm is symmetrisch t.o.v. het midden van de balk, de tweede keersymmetrisch, etc.

In eerste benadering wordt een scheepsromp geschematiseerd als een vrij trillende balk. De balk is zeker niet prismatisch. Ook de massaverdeling is niet uniform. Bovendien moet het effect van het water op het trillingsgedrag meegenomen worden als een significante extra zgn. toegevoegde massa.

Voor de tweeknoopstrilling is met een balkmodel met verlopende doorsnede numeriek nog wel een redelijk nauwkeurige benadering te geven. Bij de hogere trilvormen worden afschuiving en lokale vervorming zodanig belangrijk dat het nodig is het schip te analyseren als een plaatconstructie die met een eindige-elementen methode kan worden doorgerekend. Bij het schip moeten we zien te voorkomen dat de eigenfrequenties sterk geëxciteerd worden door de motor of de schroef.

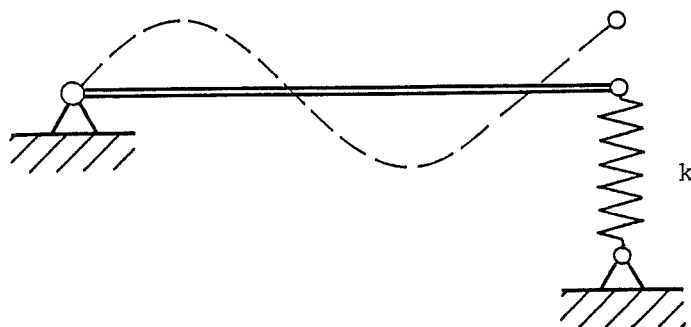
Fig. 1.15 geeft nog een voorbeeld met iets gecompliceerdere randvoorwaarden namelijk één rand opgelegd en één rand verend ondersteund op een veer met stijfheid  $k$ . De randvoorwaarden zijn

$$\begin{aligned} x = 0 : \hat{w} &= 0; & \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} &= 0 \\ x = \ell : \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} &= 0; & EI \frac{d^3 \hat{w}}{dx^3} &= k \hat{w} \end{aligned}$$

#### Beginwaardeprobleem

Tot nu toe werden slechts de eigenfrequenties en trilvormen van de vrije trillingen bepaald en werden de beginvoorwaarden buiten beschouwing gelaten.





Figuur 1.15

De volledige oplossing van (1.43) kunnen we schrijven als

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{w}^k \cos(\omega_k t + \varphi_k) \quad (1.54)$$

Voor de balk met opgelegde randen betekent dit

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin k\pi \frac{x}{\ell} \left[ A^k \cos \omega_k t + B^k \sin \omega_k t \right] \quad (1.55)$$

waarin de integratieconstanten  $A^k$  en  $B^k$  bepaald zijn uit de beginvoorwaarden. Zijn de beginverplaatsingen en de beginsnelheden voor  $t = 0$ :

$$w(x, 0) = w_0(x); \quad \dot{w}(x, 0) = v_0(x) \quad (1.56)$$

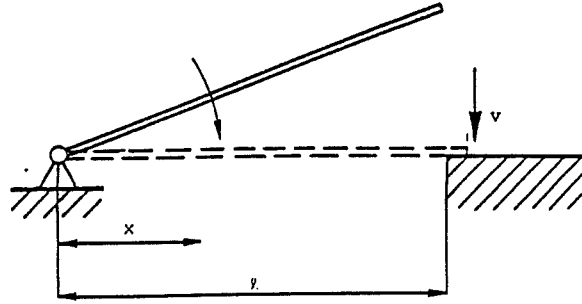
dan moeten de constanten  $A^k$  en  $B^k$  voldoen aan de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} A^k \sin k\pi \frac{x}{\ell} &= w_0(x) \\ \sum_{k=1}^{\infty} B^k \omega_k \sin k\pi \frac{x}{\ell} &= v_0(x) \end{aligned} \quad (1.57)$$

De linkerleden in (1.57) geven de Fourier-reeksen van de rechterleden. Met de standaardprocedure voor de bepaling van de coëfficiënten van een Fourierreeks volgt

$$\begin{aligned} A^k &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} w_0(x) \sin k\pi \frac{x}{\ell} dx \\ B^k &= \frac{2}{\ell \omega_k} \int_0^{\ell} v_0(x) \sin k\pi \frac{x}{\ell} dx \end{aligned} \quad (1.58)$$

### 1.3. BUIGTRILLINGEN IN BALKEN MET UNIFORME DOORSNEDE21



Figuur 1.16: Neervallende balk

We kiezen nu het speciale geval dat voor  $t = 0$ :

$$w_0(x) = 0; \quad v_0(x) = -\frac{x}{\ell}v \quad (1.59)$$

Fig. 1.16 geeft het fysische probleem dat op deze wijze wordt opgelost. Het is het probleem van de balk die aan één eind scharnierend is en aan het andere eind vrij en uit een bepaalde positie neervalt op een eind-ondersteuning. Het eindpunt heeft op dat moment de neerwaarts gerichte snelheid  $v$ . We veronderstellen dat bij het trillen van de balk het eindpunt niet meer loskomt van de fundatie.

Met de beginvoorwaarden (1.59) worden de constanten

$$A^k = 0; \quad B^k = -\frac{2}{\ell\omega_k} \int_0^\ell \frac{x}{\ell}v \sin k\pi \frac{x}{\ell} dx = (-1)^k \frac{2v}{k\pi\omega_k} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.60)$$

Voor de verplaatsing  $w(x, t)$  volgt dan

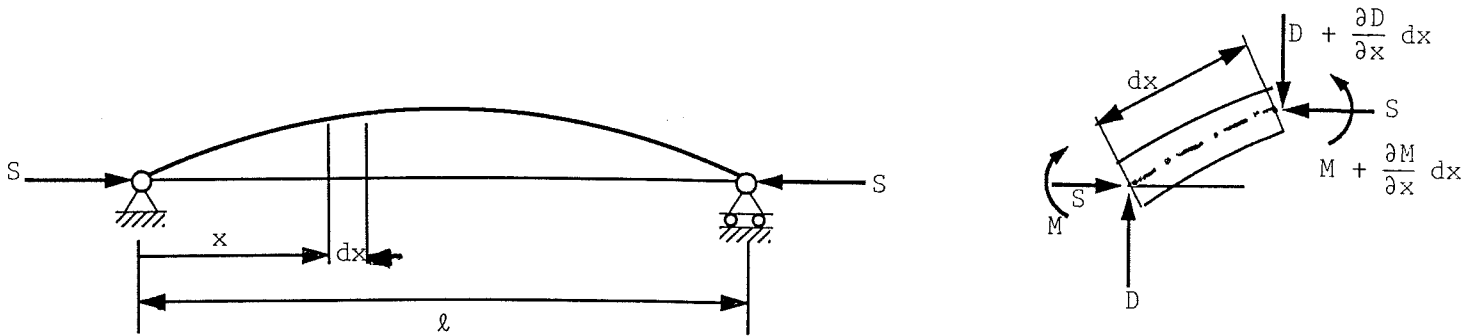
$$w(x, t) = 2v \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k\pi\omega_k} \sin k\pi \frac{x}{\ell} \sin \omega_k t \quad (1.61)$$

waarin volgens (1.50)

$$\omega_k = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

#### Het effect van een axiale kracht op de buigtrillingen

Als een trillende balk belast wordt door een axiale drukkracht, dan worden de eigenfrequenties gereduceerd, terwijl omgekeerd een trekkracht een verhoging van de eigenfrequenties veroorzaakt. De wet van Newton toegepast op de verticale beweging van een infinitesimaal balkelement (Fig. 1.17) luidt:



Figuur 1.17

$$\rho A dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial D}{\partial x} dx$$

of

$$\rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial D}{\partial x} \quad (1.62)$$

Met het verband tussen moment en kromming

$$M = EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

en de momentenevenwichtsvergelijking

$$D = \frac{\partial M}{\partial x} + S \frac{\partial w}{\partial x} \quad (1.63)$$

volgt voor de prismatische balk

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1.64)$$

Als we weer een oplossing zoeken in de vorm

$$w = \hat{w} \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.65)$$

dan wordt de differentiaalvergelijking voor  $\hat{w}$ :

$$EI \frac{d^4 \hat{w}}{dx^4} + S \frac{d^2 \hat{w}}{dx^2} - \rho A \omega^2 \hat{w} = 0 \quad (1.66)$$

Voor een aan beide einden opgelegde balk zal de oplossing te schrijven zijn als

### 1.3. BUIGTRILLINGEN IN BALKEN MET UNIFORME DOORSNEDE23

$$\hat{w} = \sum_{k=1}^{\infty} C^k \sin k\pi \frac{x}{\ell} \quad (1.67)$$

Substitutie van

$$\hat{w}^k = C^k \sin k\pi \frac{x}{\ell} \quad (1.68)$$

in (1.65) geeft alleen een van nul verschillende oplossing voor  $C^k$  als de frequentie  $\omega$  voldoet aan

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\left(1 - \frac{S \ell^2}{k^2 \pi^2 EI}\right)} \quad (1.69)$$

De waarde van de eigenfrequentie  $\omega_k$  is door de drukkracht  $S$  inderdaad lager. De factor die hier een rol speelt is de verhouding tussen de axiale kracht  $S$  en de Euler-kniklast  $\pi^2 EI / \ell^2$ . Als

$$\frac{S \ell^2}{\pi^2 EI} = 1$$

dan is de frequentie van de laagste trilvorm 0 en treedt knik op.

Als de axiale kracht een *trekkracht*  $S$  is dan vinden we

$$\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \sqrt{\left(1 + \frac{S \ell^2}{k^2 \pi^2 EI}\right)} \quad (1.70)$$

voor

$$\frac{S \ell^2}{\pi^2 EI} = 1$$

is de laagste eigenfrequentie met een factor  $\sqrt{2}$  verhoogd.

Als

$$\frac{S \ell^2}{\pi^2 EI} \gg 1 \quad (1.71)$$

dan wordt de eigenfrequentie  $\omega_k$  bij benadering

$$\omega_k \approx \frac{k\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho A}} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.72)$$

en dit is de oplossing voor de gespannen snaar (1.12).



## Hoofdstuk 2

# Dynamica van Zuigermachines

### 2.1 Kinematica van het kruk-drijfstang mechanisme

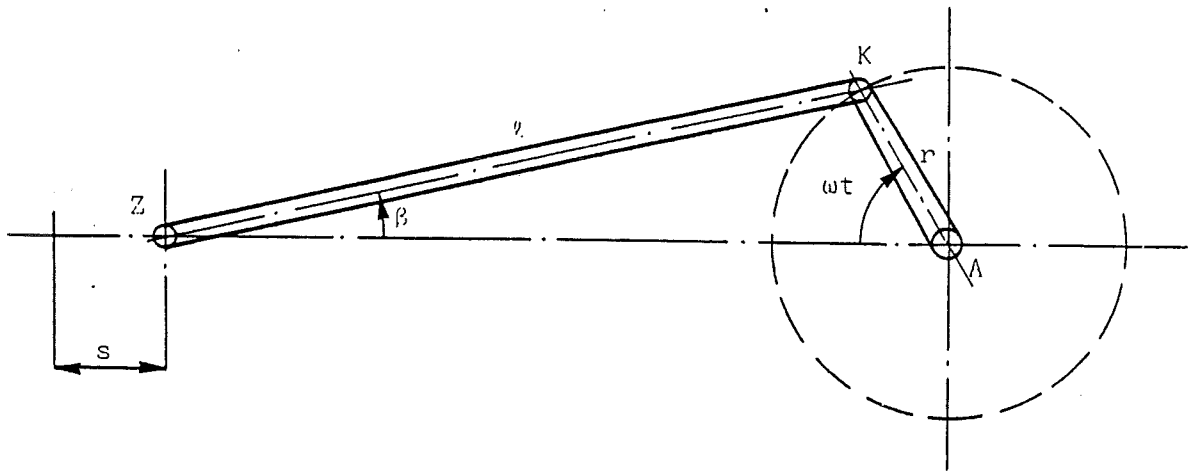
Bij de zuigermotoren, -pompen en -compressoren speelt een drietal belangrijke dynamicaproblemen.

1. De berekening van de reactiekrachten en -momenten die door de bewegende delen op het machineframe worden uitgeoefend en de reductie van dergelijke vrije krachten en momenten.

2. Het ongelijkmatige koppel van de cilinderdruk-variaties en de traagheidseffecten van de zuigers veroorzaken een ongelijkmatige hoeksnelheid van de krukas en de daarmee verbonden assystemen. De variaties in de hoeksnelheid kunnen door een vliegwiel tot het toelaatbare niveau worden vermindert.

3. Doordat bepaalde Fourier-termen in het aandrijf-koppel de torsie-eigenfrequenties van het assysteem (bijv. krukas, vliegwiel en generatoras) exciteren, kunnen ontoelaatbare trillingen en krukas-breuk ontstaan. Er moeten dus torsietrillingsberekeningen worden uitgevoerd en eventueel maatregelen worden genomen om het trillingsniveau te reduceren.

In dit hoofdstuk worden bovengenoemde specifieke dynamicaproblemen behandeld, terwijl in Hoofdstuk 4 speciaal aandacht wordt gevraagd voor de numerieke behandeling van de kinematica en dynamica van mechanismen die ook voor een meer verfijnde behandeling van de dynamicaproblemen bij zuigermachines zeer belangrijk is. Fig. 2.1 geeft een schets van een kruk-drijfstangmechanisme. We zullen nu eerst de formules afleiden voor de kinematica van één enkel kruk-drijfstangmechanisme. Als de straal van de kruk  $r$  is en de lengte van de drijfstang  $l$ , dan definiëren we  $\lambda = r/l$ . Voor toepassingen is  $\lambda$  meestal in de buurt van 0,25. De zuigerverplaatsing  $s$ , de



Figuur 2.1: Schema van een kruk-drijfstaangmechanisme

zuigersnelheid  $\dot{s}$  en de zuigerversnelling  $\ddot{s}$  moeten nu uitgedrukt worden in de hoeksnelheid  $\omega t$ . Uit figuur 2.1 volgt het verband tussen  $\omega t$  en de hulphoek  $\beta$ :

$$\sin \beta = \lambda \sin \omega t \quad (2.1)$$

en

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t} = 1 - \frac{\lambda^2}{2} \sin^2 \omega t - \frac{\lambda^4}{8} \sin^4 \omega t + \dots \\ &= 1 - \frac{\lambda^2}{4} + \dots + \left( \frac{\lambda^2}{4} + \dots \right) \cos 2\omega t + \left( -\frac{\lambda^4}{64} + \dots \right) \cos 4\omega t + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

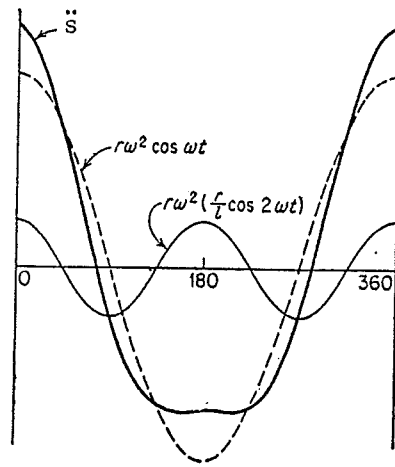
De verplaatsing van de zuiger vanuit de uiterste stand is gelijk aan

$$s = r(1 - \cos \omega t) + l(1 - \cos \beta)$$

of

$$\begin{aligned} s = r \left[ 1 + \frac{\lambda}{4} + \dots - \cos \omega t + \left( -\frac{\lambda}{4} + \dots \right) \cos 2\omega t + \right. \\ \left. + \left( \frac{\lambda^3}{64} + \dots \right) \cos 4\omega t + \dots \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

Dikwijls kan men zich, zoals we ook hier zullen doen, beperken tot de eerste correctie op de oplossing voor de oneindig lange drijfstaang. Dit betekent



Figuur 2.2: De zuigerversnelling als functie van de krukhoek;  $\lambda = 0,25$

$$s \approx r \left[ 1 + \frac{\lambda}{4} - \cos \omega t - \frac{\lambda}{4} \cos 2\omega t \right] \quad (2.4)$$

De benaderde snelheid en versnelling van de zuiger worden dan

$$\dot{s} = \omega r \left[ \sin \omega t + \frac{1}{2} \lambda \sin 2\omega t \right] \quad (2.5)$$

$$\ddot{s} = \omega^2 r \left[ \cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t \right] \quad (2.6)$$

We zien in (2.5) en (2.6) een *primaire* term met frequentie  $\omega$  en een *secundaire* term met frequentie  $2\omega$ .

Fig. 2.2 geeft de versnellingscomponenten en de totale versnelling voor  $\lambda = 0,25$ . De versnelling wijkt belangrijk af van de sinusvorm.

Tenslotte berekenen we ook nog de hoeksnelheid  $\dot{\beta}$  en de hoekversnelling  $\ddot{\beta}$  van de drijfstang. Met (2.1) volgt

$$\dot{\beta} = \frac{1}{\cos \beta} \omega \lambda \cos \omega t$$

en met

$$\frac{1}{\cos \beta} = \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \omega t}} = 1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \omega t + \frac{3}{8} \lambda^4 \sin^4 \omega t + \dots$$

vinden we voor de hoeksnelheid



$$\dot{\beta} = \omega\lambda \left[ \cos \omega t + \frac{1}{2}\lambda^2 \cos \omega t \sin^2 \omega t + \dots \right]$$

of

$$\dot{\beta} = \omega\lambda \left[ \left(1 + \frac{\lambda^2}{8}\right) \cos \omega t - \frac{\lambda^2}{8} \cos 3\omega t + \dots \right] \quad (2.7)$$

De hoekversnelling wordt dan

$$\ddot{\beta} = \omega^2\lambda \left[ -\left(1 + \frac{\lambda^2}{8}\right) \sin \omega t + \frac{3\lambda^2}{8} \sin 3\omega t + \dots \right] \quad (2.8)$$

## 2.2 De vrije krachten en momenten in de een-cilinder-motor

We beschouwen nu de vrije of traagheidskrachten en momenten t.g.v. de bewegende delen van een éencilinder-motor. De effecten van de gasdruk laten we hier buiten beschouwing. Met name willen we de kracht  $Q$  die op de cilindervoering wordt uitgeoefend (Fig. 2.3) en de krachten uitgeoefend op de hoofdlaters ( $H, V$ ) berekenen. Het uitwendige torsiekoppel op de krukas wordt voor deze berekeningen geacht zodanig te variëren dat het toerental constant blijft. De modellering van de drie bewegende delen nl. de krukpen, de drijfstang en de zuiger worden nu afzonderlijk behandeld.

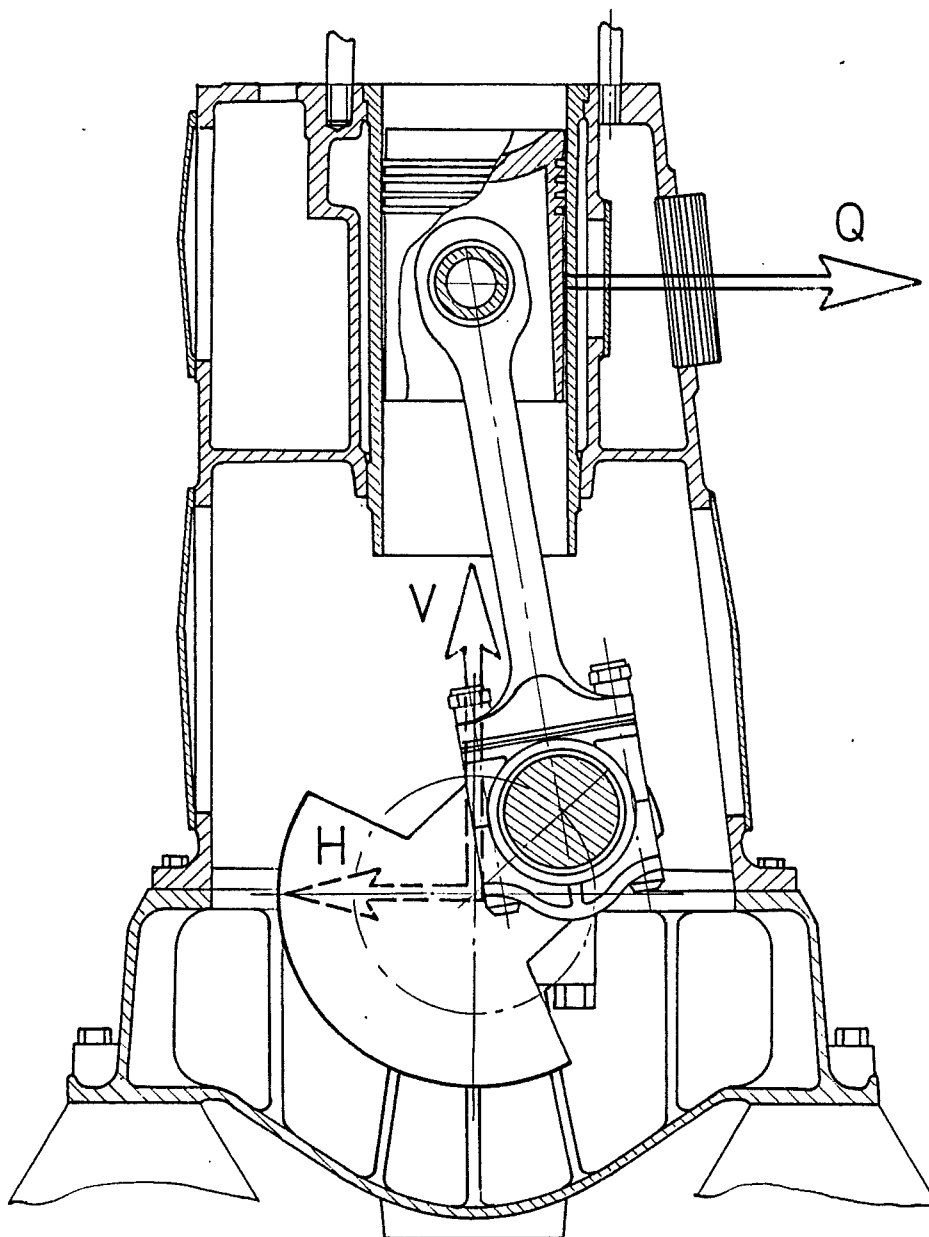
### De kruk

Als het toerental constant is, speelt de rotatietraagheid van de kruk geen rol en mogen we de kruk vervangen door een puntmassa in het zwaartepunt van de kruk (Fig. 2.4). De centrifugaalkracht  $m_k\omega^2z$  geeft op de lagers een horizontale en een verticale kracht die hetzelfde zijn als voor een massa  $m_0 = m_k z/r$  ter plaatse van de kruktaf. Op deze wijze wordt de kruk dus vervangen door één enkele puntmassa  $m_0$  op de kruktaf. De bijdrage van de kruk aan de lagerkrachten is

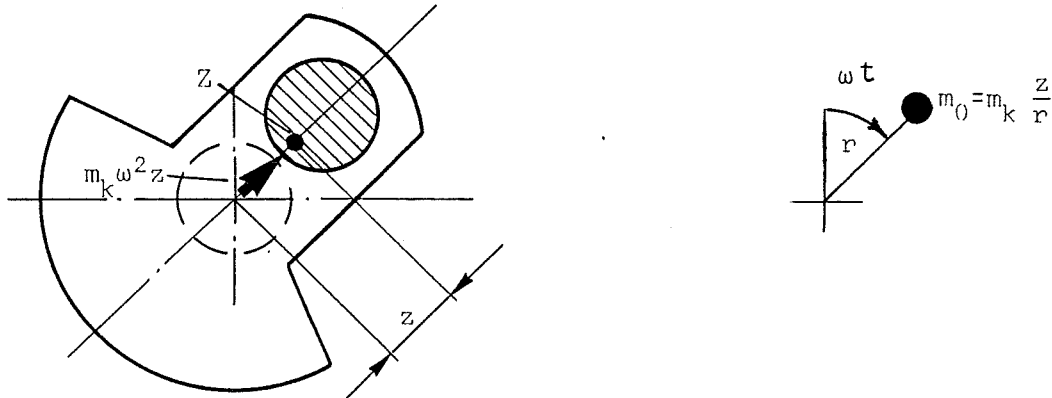
$$H = -m_0\omega^2r \sin \omega t; V = +m_0\omega^2r \cos \omega t \quad (2.9)$$

Door het aanbrengen van een massa tegenover de kruktaf (Fig. 2.4-a) kan  $z$  verminderd of eventueel nul gemaakt worden. In het laatste geval is de kruk volledig gebalanceerd.

## 2.2. DE VRIJE KRACHTEN EN MOMENTEN IN DE EENCILINDER-MOTOR<sup>29</sup>



Figuur 2.3: Eencilindermotor.  $Q$ -vrije kracht op de cilindervoering.  $V, H$ -vrije krachten op de hoofdlaters



Figuur 2.4: De kruk en het vervangend model

### De drijfstang

Voor een willekeurig punt van de drijfstang is de beweging vrij gecompliceerd, maar we zullen de massa ( $m_d$ ) altijd kunnen concentreren in de twee eindpunten en het zwaartepunt (Fig. 2.5-b). De vergelijkingen voor de drie puntmassa's zijn

$$\left. \begin{aligned} m_1 + m_2 + m_3 &= m_d \\ m_1(l - a) &= m_3 a \\ m_1(l - a)^2 + m_3 a^2 &= I_d \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

waarin  $I_d$  het massatraagheidsmoment van de drijfstang is om het zwaartepunt. Het nadeel van dit model is dat het punt 2 een nogal gecompliceerde baan beschrijft, daarom is het gebruikelijk een benaderingsoplossing te kiezen met een massa  $m_1$  ter plaatse van de kruktaf en een massa  $m_2$  bij de zuigerpen. De grootte daarvan volgt uit

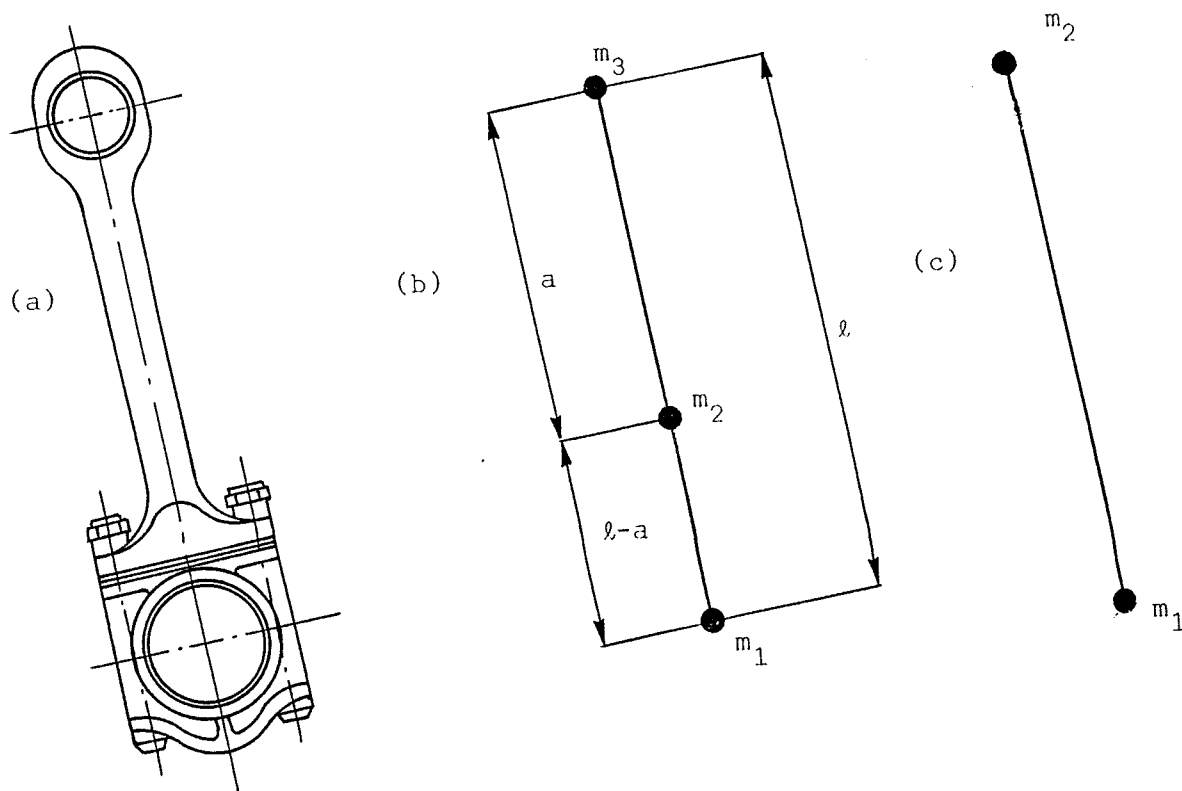
$$\left. \begin{aligned} m_1 + m_2 &= m_d \\ m_1(l - a) &= m_2 a \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

De massatraagheid om het zwaartepunt zal dan in het algemeen niet nauwkeurig benaderd worden omdat

$$m_2 a^2 + m_1(l - a)^2 \neq I_d \quad (2.12)$$

Alleen als de drijfstang zo geconstrueerd wordt dat het gelijkteken in (2.12) geldt dan is de beschrijving nauwkeurig en anders slechts een benadering. De massa  $m_1$  ter plaatse van de kruktaf geeft de volgende bijdrage aan de lagerkrachten

## 2.2. DE VRIJE KRACHTEN EN MOMENTEN IN DE EENCILINDER-MOTOR31



Figuur 2.5: De drijfstang met vervangingsmodellen

$$H = -m_1\omega^2 r \sin \omega t; V = m_1\omega^2 r \cos \omega t \quad (2.13)$$

en  $m_2$  voegen we toe aan de massa van de zuiger.

### De zuiger

De zuigermassa  $m_z$  en de bijdrage van de drijfstang  $m_2$  beschrijven een rechte baan en kunnen daarom vervangen worden door de puntmassa  $(m_z + m_2)$ . Door de leibaan en de drijfstang moet de resulterende kracht

$$P = (m_z + m_2)\ddot{s} = (m_z + m_2)\omega^2 r [\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t] \quad (2.14)$$

geleverd worden. De door de leibaan uitgeoefende kracht is  $P \tan \beta$  (Fig. 2.6) en de trekkracht door de drijfstang uitgeoefend op de zuiger  $P / \cos \beta$ . De kracht  $P / \cos \beta$  wordt doorgeleid naar de lagers. De verschillende krachtscomponenten uitgeoefend op de fundatie zijn voor dit geval

$$H = P \tan \beta; V = P; Q = P \tan \beta \quad (2.15)$$

De gelijke en tegengestelde krachten  $P \tan \beta$  vormen het zgn. *kipmoment*  $M_k$  op de fundatie dat gelijk is aan

$$M_k = P \tan \beta [l \cos \beta + r \cos \omega t] \quad (2.16)$$

of met (2.14)

$$\begin{aligned} M_k &= (m_z + m_2) \omega^2 r [\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t] [l \sin \beta + r \tan \beta \cos \omega t] \\ &= (m_z + m_2) \omega^2 r^2 \sin \omega t [\cos \omega t + \lambda \cos 2\omega t] [1 + \lambda \cos \omega t + O(\lambda^3)] \\ &\approx (m_z + m_2) \omega^2 r^2 \sin \omega t [\cos \omega t + \lambda \cos^2 \omega t + \lambda \cos 2\omega t] \end{aligned}$$

Hierin zijn weer termen  $O(\lambda^2)$  verwaarloosd t.o.v. de eenheid. De uitdrukking is ook te schrijven als

$$M_k = \frac{1}{4} (m_z + m_2) \omega^2 r^2 [-\lambda \sin \omega t + 2 \sin 2\omega t + 3\lambda \sin 3\omega t] \quad (2.17)$$

Dit is het koppel dat t.g.v. de traagheidskrachten uitgeoefend wordt op de fundatie, het is gelijk en tegengesteld aan het koppel dat in de draairichting aan de krukas wordt afgegeven. Dit laatste koppel correspondeert met het koppel van de gasdruk maar de gaskracht is nu vervangen door een massa-kracht volgens d'Alembert  $-(m_z + m_2)\ddot{s}$ .

De term met  $\sin 2\omega t$  is de primaire term in het kipmoment. Naast het kipmoment hebben we de resulterende vrije kracht in horizontale richting

$$H = -(m_0 + m_1) \omega^2 r \sin \omega t \quad (2.18)$$

en de resulterende vrije verticale kracht die te splitsen is in de *primaire* kracht

$$V_{pr} = [m_0 + m_1 + m_2 + m_z] \omega^2 r \cos \omega t \quad (2.19)$$

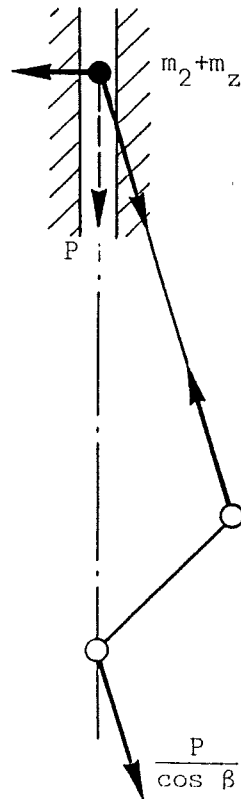
en de *secundaire* kracht

$$V_{sec} = \lambda [m_z + m_2] \omega^2 r \cos 2\omega t \quad (2.20)$$

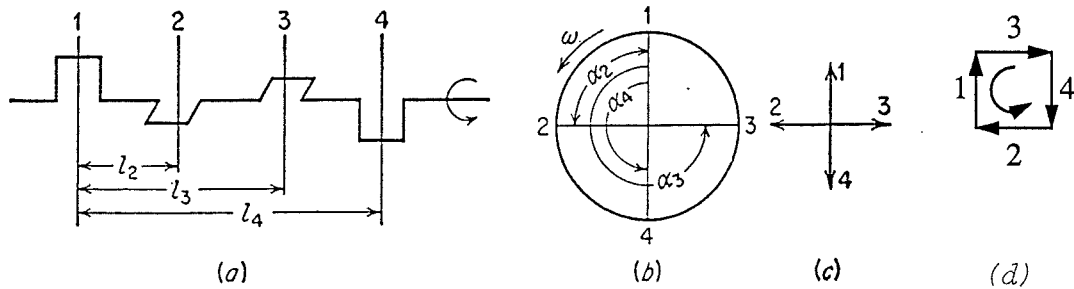
### 2.3 Vrije krachten en momenten in meercilindermotoren

Zoals we in het voorgaande hebben gezien kunnen de horizontale krachten door contra-massa's op de krukken gebalanceerd worden. Het is echter niet mogelijk de verticale krachten t.g.v. de heen- en weergaande beweging van

2.3. VRIJE KRACHTEN EN MOMENTEN IN MEERCILINDER-MOTOREN33



Figuur 2.6: Krachtenspel t.g.v. massakrachten op de zuiger



Figuur 2.7: Primaire krachten op een 4-cilinder tweetaktmotor

de zuiger op eenvoudige manier te balanceren. De één-cilinder zal dus niet volledig gebalanceerd zijn.

Meestal worden zuigermotoren dan ook uitgevoerd met meerdere cilinders. Deze kunnen op verschillende manieren gerangschikt zijn, bijv. in V-vorm, in stervorm (vliegtuigmotoren) of achter elkaar (lijnmotor). We zullen hier alleen nagaan wat de vrije verticale krachten zijn in een lijnmotor en de daaruit voortvloeiende momenten.

Zowel 2- als 4-taktmotoren zijn mogelijk. Bij een 4-cilinder tweetakt motor zijn er per omwenteling van de krukas 4 ontstekingen en dus om de  $90^\circ$ . De krukken zullen dan hoeken van  $90^\circ$  met elkaar maken. Bij een 4-cilinder viertakt motor is de ontsteking om de  $180^\circ$ .

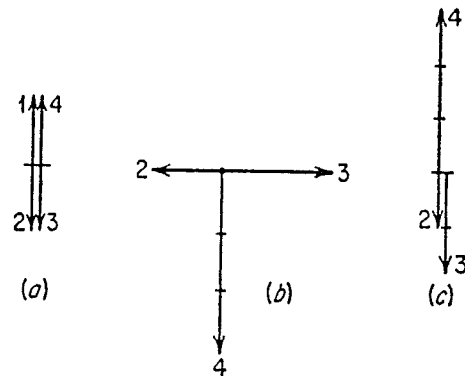
Eerst zal een beschrijving gegeven worden voor het algemeen geval van een motor met meerdere cilinders. De afstand tussen de eerste en de  $n$ -de cilinder geven we aan met  $l_n$  en de hoek tussen de eerste en de  $n$ -de kruk met  $\alpha_n$ , zie figuur 2.7. In deze figuur is de kruk no.1 verticaal aangenomen. De primaire verticale kracht is dan voor deze cilinder maximaal. De tweede kruk loop  $\alpha_2$  radialen vóór op de eerste en het maximum is dus  $\alpha_2/\omega$  seconden eerder geweest. Is de primaire kracht voor de eerste cilinder

$$V_{pr} = K_1 \cos \omega t$$

dan is de resultante voor de meercilinder-motor

$$V_{respr} = K_1 \sum_n \cos(\omega t + \alpha_n) \quad (2.21)$$

Voor de 4-cilinder in Fig. 2.7 is dit de projectie op de verticale as van de resultante van de getekende krachtvectoren in Fig. 2.7-c. De resultante is in dit geval nul, d.w.z. voor deze motor zijn de primaire verticale krachten gebalanceerd. De krachtvectoren kunnen ook uitgezet worden als in Fig. 2.7-



Figuur 2.8: Secundaire krachten (a), primaire momenten (b) en secundaire momenten (c) voor de 4-cilindermotor in Fig. 2.7

d. Is de krachtfiguur gesloten dan zijn de betreffende krachten gebalanceerd. Voor de secundaire verticale kracht op een cilinder geldt

$$V_{sec} = K_2 \cos 2\omega t$$

d.w.z. de krachtvector roteert tweemaal zo snel als de krukas. Loopt de kruk 2 een hoek  $\alpha_2$  vóór op kruk 1 dan is de secundaire krachtvector  $2\alpha_2$  gedraaid t.o.v. de secundaire krachtvector van kruk 1. In het krachtendiagram staan dan de krachten onder de hoeken  $2\alpha_2, 2\alpha_3, \dots$ . Voor de motor in Fig. 2.7 geeft Fig. 2.8-a het krachtendiagram. De resulterende verticale secundaire kracht is

$$V_{ressec} = K_2 \sum_n \cos(2\omega t + 2\alpha_n) \quad (2.22)$$

De primaire krachtvectoren geven koppels om een as loodrecht op het vlak van de betreffende kruk van  $K_1 l_n$ . In Fig. 2.7 is voor  $l_n$  de afstand tot het vlak door het hart van cilinder 1 gekozen, maar we hadden bijvoorbeeld ook het vlak loodrecht op het midden van de krukas kunnen kiezen zoals in Fig. 2.9. De primaire momenten d.w.z. de momenten t.g.v. de primaire verticale krachten hebben als resultante

$$M_{respr} = K_1 \sum_n l_n \cos(\omega t + \alpha_n) \quad (2.23)$$

We kunnen dus weer vectoren uitzetten in de richting van de krukken met lengte  $K_1 l_n$  en daarvan de resultante bepalen, zie Fig. 2.8 voor het voorbeeld uit Fig. 2.7. Ook kunnen we vectorfiguren tekenen zoals in Fig. 2.7-d.

Op dezelfde wijze vinden we voor de secundaire momenten d.w.z. de momenten t.g.v. de verticale secundaire krachten



$$M_{ressec} = K_2 \sum_n l_n \cos(2\omega t + 2\alpha_n) \quad (2.24)$$

Fig. 2.8-c geeft op het vectordiagram voor de krukas uit Fig. 2.7.

Men kan op eenvoudige wijze aangeven wanneer de krachten en momenten gebalanceerd zijn. Zijn de primaire krachten gebalanceerd dan is de resulterende vector nul d.w.z. de horizontale en verticale ontbondene van deze vector zijn nul. Uit 2.21 volgen dan de voorwaarden

$$\sum_n \sin \alpha_n = 0 \quad ; \quad \sum_n \cos \alpha_n = 0 \quad (2.25)$$

Balancerings van de secundaire krachten betekent overeenkomstig

$$\sum_n \sin 2\alpha_n = 0 \quad ; \quad \sum_n \cos 2\alpha_n = 0 \quad (2.26)$$

Voor de primaire momenten zijn de voorwaarden:

$$\sum_n l_n \sin \alpha_n = 0 \quad ; \quad \sum_n l_n \cos \alpha_n = 0 \quad (2.27)$$

en voor de secundaire momenten

$$\sum_n l_n \sin 2\alpha_n = 0 \quad ; \quad \sum_n l_n \cos 2\alpha_n = 0 \quad (2.28)$$

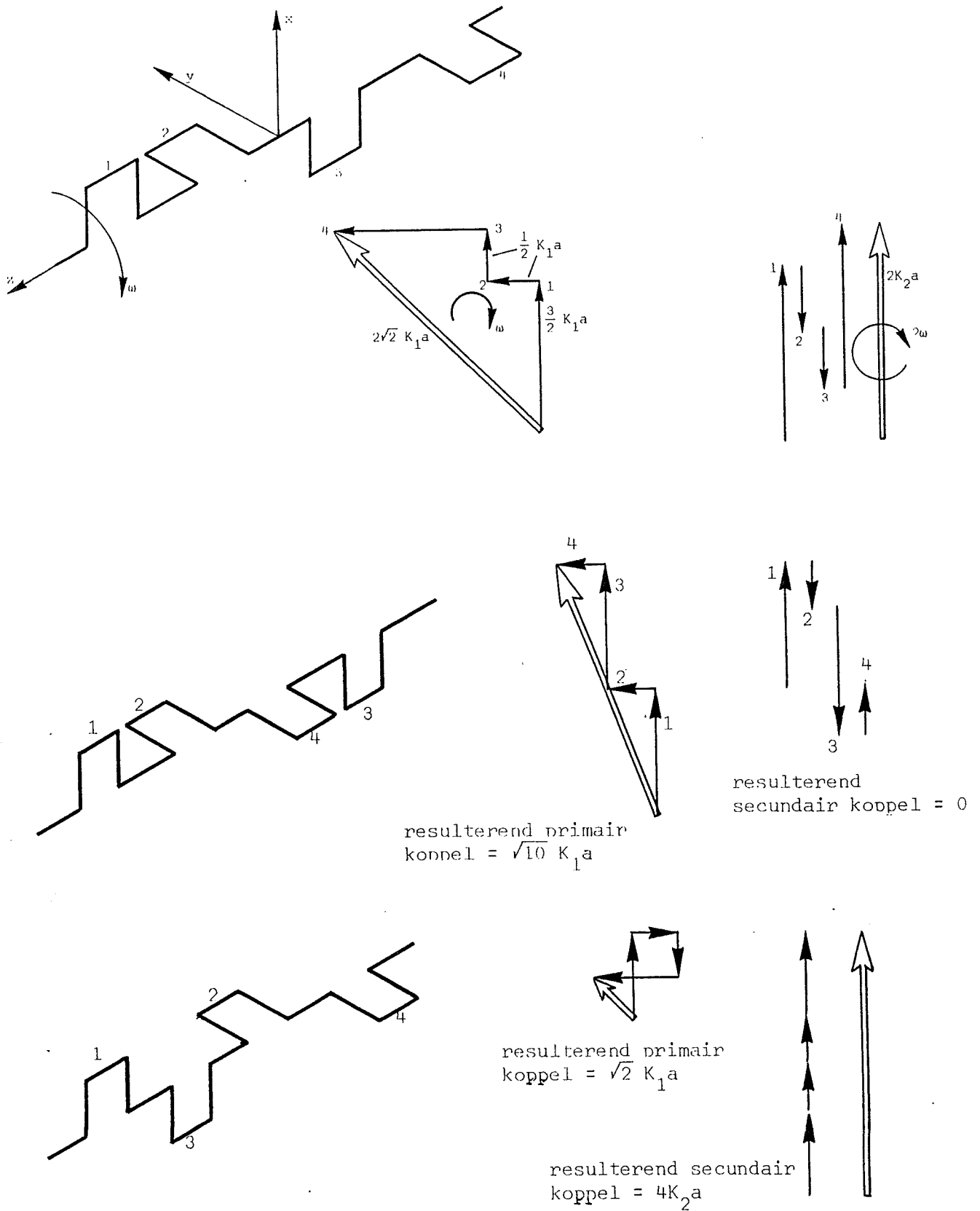
Hierbij is steeds aangenomen dat de zuigers en drijfstangen voor alle cilinders hetzelfde zijn. Fig. 2.9 geeft voor drie verschillende krukvolgorden de resulterende primaire en secundaire momenten gekozen t.o.v. het midden van de krukas. De nummering geeft hierbij de ontstekingsvolgorde. Voor al deze gevallen zijn de resulterende krachten gelijk aan die voor Fig. 2.7 en dus nul.

Fig. 2.10 geeft de krukas van een 4-cilinder viertakt motor; de primaire krachten en de primaire en secundaire momenten zijn nul. De secundaire krachten versterken elkaar.

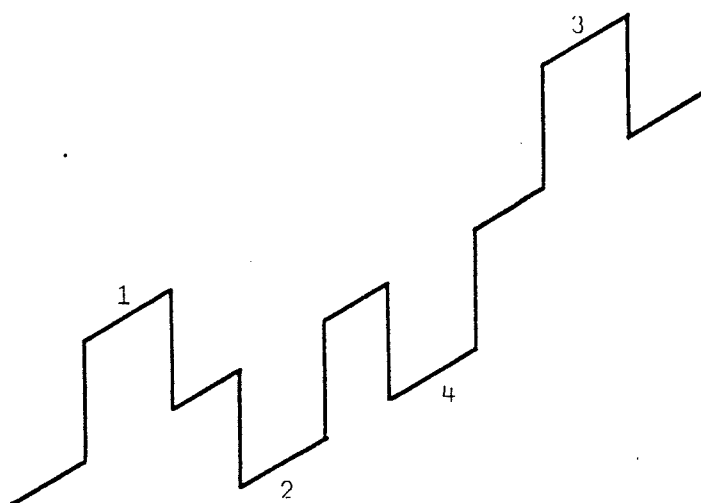
We hebben nu gezien hoe de excitatiekrachten en momenten van een motor bepaald kunnen worden. De vraag is dan hoe dergelijke excitaties gebalanceerd of althans gereduceerd kunnen worden. Een veel toegepaste methode is het aanbrengen van extra balanceermassa's op de krukken. Hiermee kan bijvoorbeeld een extra koppel worden opgewekt.

Lukt het niet door extra massa's de excitatie voldoende te onderdrukken dan kan eventueel een excitator worden ingebouwd. Fig. 2.11 geeft het principe daarvan. Twee schijven met onbalans-massa draaien tegen elkaar in. De verticale kracht in Fig. 2.11 is  $2m\omega^2 r \cos \omega t$  en de horizontale kracht nul.

2.3. VRIJE KRACHTEN EN MOMENTEN IN MEERCILINDER-MOTOREN<sup>37</sup>



Figuur 2.9: Krukvolgorden en momentdiagrammen



Figuur 2.10: Krukas van een viertakt zuigermotor

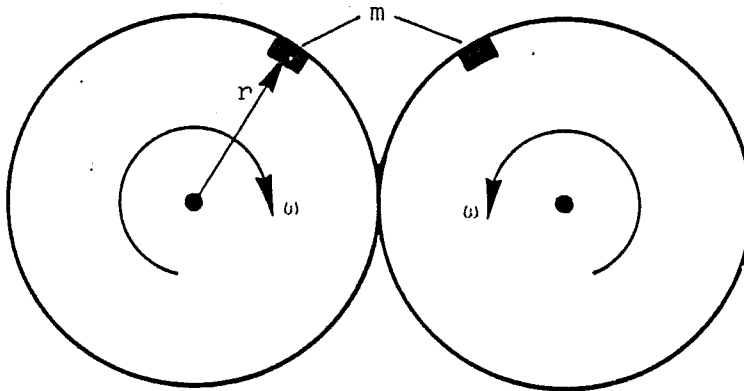
Door de schijven te draaien met een hoeksnelheid  $2\omega$  kunnen ook secundaire krachten gebalanceerd worden.

## 2.4 Torsietrillingen

De krukas met zuigers, vliegwiel en aangedreven machine is zo gecompliceerd dat alleen met de moderne numerieke hulpmiddelen een nauwkeurige en gedetailleerde analyse van het torsietrillingsgedrag mogelijk is. In een ontwerpstadium zal men echter met beperkte hulpmiddelen een benaderingsoplossing van de torsiefrequenties van het systeem willen bepalen.

Allereerst is het dan gebruikelijk de rotatietraagheid van een kruk met de daaraan gekoppelde zuiger te vervangen door een equivalente schijf met gemiddeld over een periode ongeveer dezelfde massatraagheid. Vervolgens moet de kruk vervangen worden door een equivalent as-element dat dezelfde torsiestijfheid heeft. Dit laatste probleem is vrij eenvoudig op te lossen met een detail eindige-elementenberekening voor een sectie uit de krukas.

Voor de bijdrage van de zuiver roterende delen aan de equivalente rotatietraagheid zijn er geen problemen en we geven ze aan met  $I_{rot}$ , maar de moeilijkheden ontstaan met de heen- en weergaande delen. Fig. 2.12 toont twee posities van de kruk. In stand a) zullen de heen- en weergaande massa's geen effect hebben op kleine torsietrillingen van de krukas om deze evenwichtsstand. Staat de kruk echter in stand b) dan zal bij kleine torsietrillingen om deze stand de zuiger bijna dezelfde beweging uitvoeren als



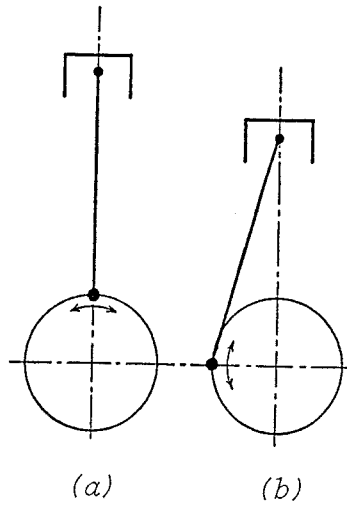
Figuur 2.11: Principe van een excitator

de kruktaf. Geven we de heen- en weergaande massa aan met  $m_{rec}$  dan is de bijdrage aan de massa-traagheid in stand b) ongeveer  $m_{rec}r^2$ . Terwijl de krukas ronddraait zal de rotatie-traagheid liggen tussen de extreme waarden  $I_{rot}$  en  $I_{rot} + m_{rec}r^2$ . Het gemiddelde hiervan is een benadering voor het equivalente, constante massa-traagheidsmoment, dus

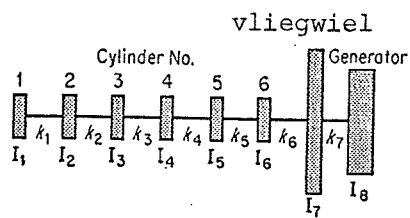
$$I_{eq} = I_{rot} + \frac{1}{2}m_{rec}r^2 \quad (2.29)$$

Na de berekening van  $I_{eq}$  en  $k_{eq}$  voor de krukken, waarin  $k_{eq}$  de equivalente stijfheid van de torsieveer is, krijgen we bijvoorbeeld voor een zescilinder dieselmotor met vliegwiel en elektrische generator een geïdealiseerd systeem als in Fig. 2.13 aangegeven. Met de standaardmethoden besproken in Dynamica IIB kunnen we dan de belangrijkste torsiefrequenties uitrekenen.

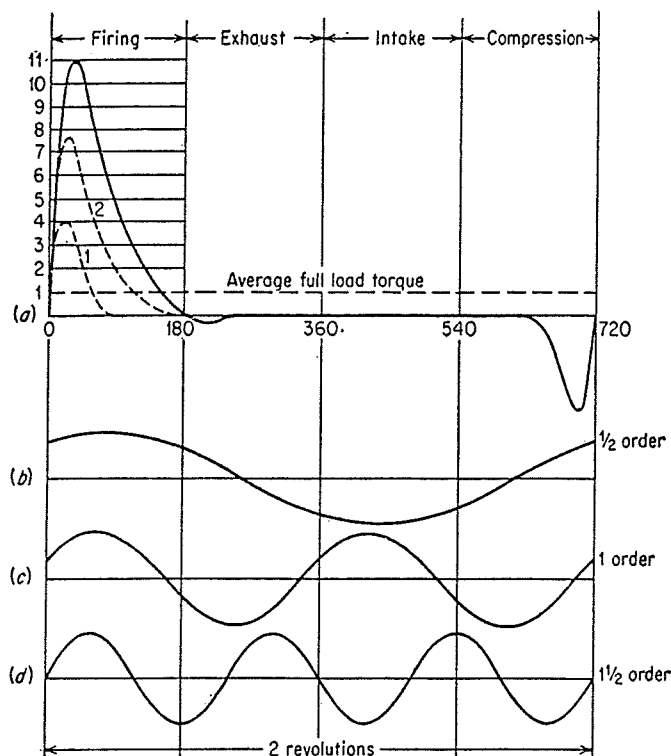
Omdat torsietrillingen in de krukas geëxciteerd worden door wisseling in het aandrijfkoppel willen we dit koppel verder onderzoeken. Het is opgebouwd uit een bijdrage van de gasdruk en een bijdrage van de massakrachten. In Fig. 2.14 is het koppel t.g.v. de gasdruk voor een 1-cilinder viertakt dieselmotor gegeven als functie van de krukhoek. In vier posities gedurende één periode van  $720^\circ$ , namelijk als de kruk en drijfstang in elkaars verlengde liggen is het koppel nul. Als de motor niet op vollast draait dan verandert de koppelkromme slechts in de expansieslag. De lijn 2 geldt bijvoorbeeld voor halfvast en 1 voor nullast. In het laatste geval is het verloop in de expansieperiode hetzelfde als in de compressieperiode. We zien ook dat het gemiddelde slechts een fractie is van het maximale koppel. Dit is een nadeel van zuigermotoren t.o.v. turbines. Het periodieke koppel met periode  $720^\circ$  kan ontwikkeld worden in een Fourier-reeks. Om tot een nauwkeurige bena-



Figuur 2.12: Het effect van de zuiger op het equivalent traagheidsmoment varieert met de krukstand



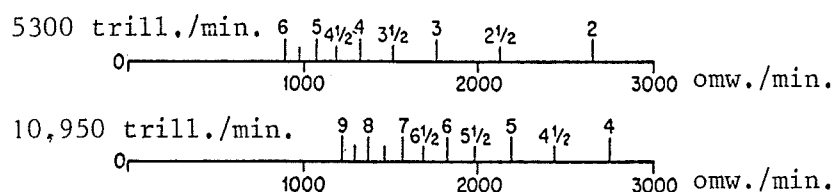
Figuur 2.13: Geïdealiseerd systeem voor de berekening van torsietrillingen



Figuur 2.14: Het koppel t.g.v. de gasdruk voor een 1-cilinderdiesel en de eerste 3 termen van de Fourier-reeks

dering te komen zijn er ongeveer 15 termen nodig. Fig. 2.14 geeft de eerste drie termen. Deze worden wel genoemd de harmonische componenten van de orde  $\frac{1}{2}$ , 1 en  $1\frac{1}{2}$ , omdat er resp. een halve, een hele en anderhalve sinusgolf optreden per omwenteling van de motor. Om het totale koppel te krijgen moeten we hierbij het effect van de massakrachten optellen.

We veronderstellen nu dat de krukas torsietrillingen uitvoert gesuperponeerd op de hoofdrotatie. Elk van de harmonische componenten van het motorkoppel zal een gedwongen torsietrilling introduceren met zijn frequentie. Zijn de frequenties voldoende ver verwijderd van de eigenfrequenties dan blijven de trillingsamplituden erg klein. Als echter één van de frequenties in het koppel samenvalt met een eigenfrequentie dan kan de amplitude groot worden. Door de vele significante harmonische componenten in het motorkoppel zijn er veel toerentallen die kritiek kunnen zijn met het oog op de torsietrillingen. Voor een realistische diesel-generatorcombinatie werden als laagste kritieke torsiefrequenties gevonden  $\omega_1 = 552s^{-1}$  (5300 trillingen per minuut) en  $\omega_2 = 1145s^{-1}$  (10950 trillingen per minuut). Hebben we te maken met een viertakt motor dan zal op een toerental van 10600 omw/min



Figuur 2.15: Kritieke toerentallen voor de excitatie van de torsiefrequenties  $\omega_1 = 552s^{-1}$  en  $\omega_2 = 1145s^{-1}$

de harmonische component van de orde  $\frac{1}{2}$  de frequentie  $\omega_0$  exciteren. I.h.a. zal de  $n$ de orde harmonische component de laagste torsiefrequentie exciteren als het toerental  $5300/n$  is. De tweede torsiefrequentie wordt dan geëxciteerd door de  $n$ de harmonische component bij een toerental van  $10950/n$ . Fig. 2.15 geeft de verschillende kritieke toerentallen voor het bovengenoemde geval.

Als er een significante excitatie is van één van de laagste torsietrillingen en er is geen demping aanwezig behalve de constructiedemping dan kunnen de amplituden zo groot worden dat breuk van de krukas optreedt. Om dat te voorkomen kunnen we één van de volgende remedies toepassen.

Voor machines die altijd op eenzelfde toerental draaien kan de stijfheidsverdeling van de as of de massatraagheid zo gewijzigd worden dat we voldoende ver van een kritiek toerental blijven.

Soms kunnen we ook als de toerentallen in een nauwe band liggen de ontstekingsvolgorde wijzigen. Moet de installatie echter werken over een breed toereengebied (bijv. een diesellocomotief) dan is het haast niet te vermijden dat we kritieke torsiefrequenties aanstoten en moet een of andere kunstmatige demping toegepast worden, bijv. een Lanchester-wrijvingsdemper (Hoofdstuk 2 Dynamica II-B).

## 2.5 Vliegwielerberekening

Fig. 2.16 geeft een voorbeeld van een koppel dat door een viertakt motor geleverd wordt  $T_m$  en het weerstandskoppel  $T_w$ , beide als functie van de krukhoek  $\psi$ . Gemiddeld over een periode (bij een viertaktmotor  $4\pi$ ) is de toegevoerde en benodigde arbeid in een stationaire toestand met elkaar in overeenstemming. De gearceerde oppervlakken geven als ze boven de behoeftelijijn liggen de extra toegevoerde arbeid en als ze eronder liggen het tekort aan arbeid. Bij het ontwerp van een motor zal aangegeven worden hoe de ongelijkmatigheid van de hoeksnelheid maximaal mag zijn t.g.v. het verschil in  $T_m$  en  $T_w$ . Dit wordt gedefinieerd als

$$\epsilon = \frac{(\omega_{max} - \omega_{min})}{\omega_g} \quad (2.30)$$

waarin  $\omega_g$  de gemiddelde hoeksnelheid is. Voor toepassingen moeten we denken aan

$$\frac{1}{40} \leq \epsilon \leq \frac{1}{300}$$

Als de snijpunten van de lijnen aangegeven worden met  $\psi_i$  dan is de extra energie die wordt toegevoerd over het traject  $\psi_i \Rightarrow \psi_{i+1}$  en die wordt omgezet in kinetische energie

$$F_{i,i+1} = \int_{\psi_i}^{\psi_{i+1}} [T_m - T_w] d\psi = \frac{1}{2} I [\omega_{i+1}^2 - \omega_i^2] \quad (2.31)$$

waarin  $I$  de massatraagheid is van het vliegwiel en de andere roterende massa's. We voeren de volgende definitie in

$$F_{1k} = F_{12} + F_{23} + \dots + F_{k-1,k} \quad (2.32)$$

Met een eenvoudige numerieke integratie kunnen we het maximale overschot aan arbeid  $F_{1k} = F_{max}$  gedurende de cyclus bepalen en ook het grootste tekort  $F_{1\ell} = F_{min}$ . Het benodigde traagheidsmoment  $I$  volgt dan uit

$$F_{max} - F_{min} = \frac{1}{2} I [\omega_{max}^2 - \omega_{min}^2] = I \omega_g^2 \epsilon$$

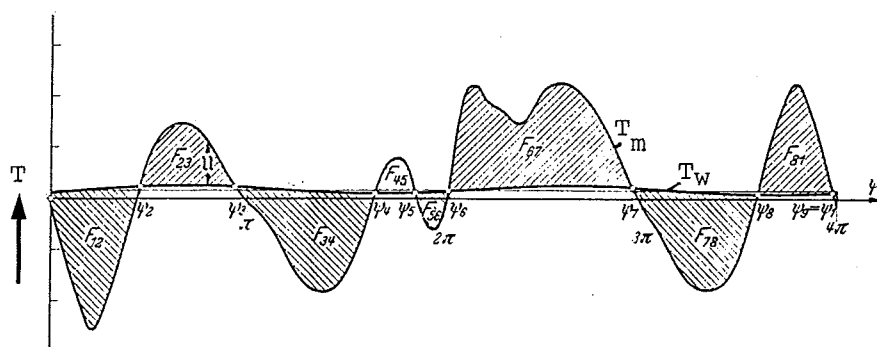
of

$$I = \frac{F_{max} - F_{min}}{\omega_g^2 \epsilon} \quad (2.33)$$

Hiermee is een bovengrens voor het traagheidsmoment van het vliegwiel bepaald. Is het traagheidsmoment t.g.v. de andere ronddraaiende massa's inclusief het effect van de zuigers minimaal  $I^*$ , dan moet het traagheidsmoment van het vliegwiel zijn

$$I_{vl} = I - I^* \quad (2.34)$$





Figuur 2.16: Het verschil tussen motorkoppel en afgenomen koppel

# Hoofdstuk 3

## Niet-Lineaire Systemen

### 3.1 Verschijnselen en oplosmethoden voor eenvoudige systemen

#### 3.1.1 Vrije ongedempte trillingen

Systemen gedragen zich slechts binnen bepaalde grenzen als lineair. Als voorbeeld kunnen we denken aan een gedempt massa-veersysteem. Het verband tussen verlenging of verkorting van de veer en de uitgeoefende kracht zal voor grote verplaatsingsamplituden niet meer lineair zijn. Ook zal de dempingskracht voor grote trillingsamplituden een niet-lineaire functie van de snelheid en de amplitude zijn.

De behandeling van niet-lineaire systemen is gecompliceerder dan van lineaire systemen omdat met name geen superpositie meer is toegestaan.

In dit hoofdstuk zullen we allerlei niet-lineaire verschijnselen bespreken aan de hand van zeer eenvoudige systemen. Is op deze wijze het gedrag kwalitatief vastgelegd dan kan vervolgens voor bepaalde parametercombinaties een nauwkeurig resultaat worden bepaald door numerieke simulatie.

De oplossing van problemen met zwakke niet-lineariteiten zullen we eerst toelichten aan de hand van de ongedempte, mathematische slinger (Fig.3.1). De differentiaalvergelijking is

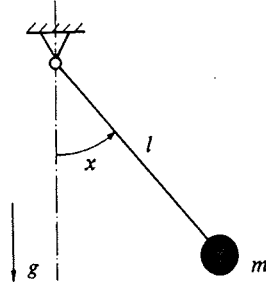
$$ml\ddot{x} + mg \sin x = 0 \quad (3.1)$$

of

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0 \quad (3.2)$$

waarin

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l}$$



Figuur 3.1: Mathematische slinger

Voor  $x \ll 1$  geldt als eerste benadering de lineaire differentiaalvergelijking

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.3)$$

met de beginvoorwaarden

$$t = 0 : x = x_0 \quad ; \quad \dot{x} = \dot{x}_0 \quad (3.4)$$

wordt de oplossing

$$x = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t + x_0 \cos \omega_0 t$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 \cos \omega_0 t - x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \quad (3.5)$$

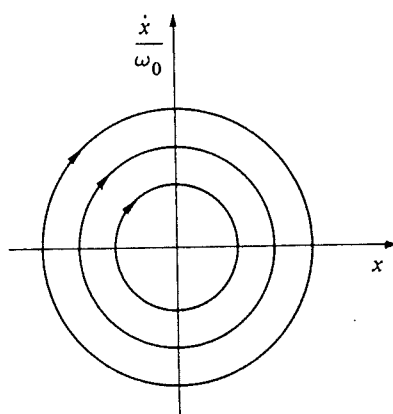
Na elimineren van  $t$  volgt het verband tussen de hoek  $x$  en de hoeksnelheid  $\dot{x}$ :

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{\omega_0^2} = x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega_0^2} \quad (3.6)$$

Zetten we dit verband voor een aantal beginvoorwaarden uit in een zogenaamd fase-diagram dan ontstaat Fig. 3.2

Alle cirkels in Fig. 3.2 worden in *dezelfde tijd*, namelijk  $T = \pi/\omega_0$  rechtsonder doorlopen. Voor grote waarden van de hoek  $x$  zal de oplossing natuurlijk niet nauwkeurig zijn want we hebben termen  $O(x^2)$  verwaarloosd t.o.v. termen  $O(1)$ . Dit heeft ook tot gevolg dat alleen de evenwichtsstand  $x = 0$  wordt gevonden en niet de (instabiele) evenwichtsstand  $x = \pi$ . Het is te verwachten dat een nauwkeurigere beschrijving wordt gevonden als we een extra term in de ontwikkeling van  $\sin x$  meenemen, dus

$$\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 \quad (3.7)$$



Figuur 3.2: Fasediagram van de lineaire slinger

De bewegingsvergelijking wordt dan

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \frac{1}{6} \omega_0^2 x^3 = 0 \quad (3.8)$$

en dat is een speciaal geval van de Duffing-vergelijking

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = 0 \quad (3.9)$$

Dit is de vergelijking van een massa-veersysteem met een niet-lineaire veer en omdat dit praktisch de meest elementaire niet-lineaire bewegingsvergelijking is, is ze zeer geschikt om niet-lineaire verschijnselen te bestuderen.

### Oplossingsmethode met storingsrekening (perturbatiemethode)

Verondersteld wordt dat  $\mu$  in (3.9) een kleine parameter is. Het is te verwachten dat in het niet-lineaire geval de eigenfrequentie ( $\omega$ ) en de amplitude ( $x$ ) afhangen van deze kleine parameter, daarom zoeken we een oplossing in de vorm

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \mu e_1 + \mu^2 e_2 + \dots \quad (3.10)$$

en

$$x = x_0 + \mu x_1 + \mu^2 x_2 + \dots \quad (3.11)$$

Substitutie van (3.10) en (3.11) in (3.9) geeft, als we achtereenvolgens de bijdrage van de termen van de nulde orde en die van de eerste orde in  $\mu$  nul stellen:

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = 0 \quad (3.12-a)$$

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = e_1 x_0 - x_0^3 \quad (3.12-b)$$

De oplossing van de eerste vergelijking in 3.12 is te schrijven als

$$x_0 = C \cos(\omega t + \gamma)$$

waarin  $C$  en  $\gamma$  bepaald zijn door de beginvoorwaarden. Kiezen we de beginuitwijking  $x(0) = C$  en de beginsnelheid  $\dot{x}(0) = 0$  dan wordt de oplossing

$$x_0 = C \cos \omega t \quad (3.13)$$

Substitutie van deze nulde orde benadering in 3.12-b geeft

$$\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = \left(-\frac{3}{4}C^3 + e_1 C\right) \cos \omega t - \frac{1}{4}C^3 \cos 3\omega t \quad (3.14)$$

N.B.  $\cos^3 \theta = \frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 3\theta$

Een periodieke oplossing voor  $x_1$  is alleen mogelijk als er geen excitatie is in de eigenfrequentie  $\omega$ , dus als

$$e_1 = \frac{3}{4}C^2$$

De oplossing van 3.14 wordt dan

$$x_1 = +\frac{1}{32} \frac{C^3}{\omega^2} \cos 3\omega t + C_1 \cos(\omega t + \gamma_1) \quad (3.15)$$

Voldoet 3.13 aan de beginvoorwaarden dan geldt  $C_1 = -\frac{1}{32} \frac{C^3}{\omega^2}$  en  $\gamma_1 = 0$ . Dit resulteert in de volgende benadering voor de frequentie en de (gegeneraliseerde) verplaatsing

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{3}{4} \mu C^2 + O(\mu^2) \quad (3.16)$$

en

$$x = C \left(1 - \frac{1}{32} \mu \frac{C^2}{\omega^2}\right) \cos \omega t + \frac{1}{32} \mu \frac{C^3}{\omega^2} \cos 3\omega t + O(\mu^2) \quad (3.17)$$

Op de aangegeven wijze kunnen ook eventueel nog de termen  $O(\mu^2)$  berekend worden, maar het is niet aan te raden het proces nog verder voort te zetten. Voor het onderzoek naar de niet-lineaire verschijnselen kan zeker worden volstaan met de termen die kwadratisch zijn in de kleine parameter  $\mu$ .

Toegepast op de slinger vinden we met in acht name van de eerste correctie op de lineaire oplossing

$$\omega^2 = \omega_0^2 \left[ 1 - \frac{1}{8} C^2 \right] \quad (3.18)$$

De trillingstijd is niet meer onafhankelijk van de amplitude en wordt vergroot als de amplitude toeneemt.

### 3.1.2 Gedwongen niet-lineaire trillingen

#### Ongedempt systeem

De Duffing-vergelijking met harmonische excitatie wordt

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = f \sin \Omega t \quad (3.19)$$

en voor de mathematische slinger geldt

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \quad ; \quad \mu = -\frac{1}{6} \frac{g}{l} \quad ; \quad f = \frac{F}{ml}$$

waarin  $F$  de amplitude van de excitatie is.

Het is voor de hand liggend dat we eerst een stationaire oplossing zoeken die periodiek is met de frequentie van de uitwendige belasting. De eerste benadering is dan

$$x_1 = C \sin \Omega t \quad (3.20)$$

waarin  $C$  constant is. Ingevuld in het rechterlid van de vergelijking

$$\ddot{x} = -\omega_0^2 x - \mu x^3 + f \sin \Omega t$$

geeft dit

$$\ddot{x}_2 = \left( f - \omega_0^2 C - \frac{3}{4} \mu C^3 \right) \sin \Omega t + \frac{1}{4} \mu C^3 \sin 3\Omega t \quad (3.21)$$

en na integratie wordt de tweede benadering

$$x_2 = \frac{1}{\Omega^2} \left[ \omega_0^2 + \frac{3}{4} \mu C^2 - \frac{f}{C} \right] C \sin \Omega t - \frac{1}{36} \frac{\mu}{\Omega^2} C^3 \sin 3\Omega t \quad (3.22)$$

Voor het bepalen van de onbekende constante  $C$  gaan we in navolging van Duffing als volgt te werk. Verondersteld wordt dat de eerste benadering van de amplitude van de term met  $\sin \Omega t$  juist is, dan is de tweede benadering van deze amplitude weer  $C$ . De niet-lineaire vergelijking voor de amplitude  $C$  wordt

$$\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{f}{\omega_0^2 C} + \frac{3}{4} \frac{\mu}{\omega_0^2} C^2 \quad (3.23)$$

De tweede benadering voor de oplossing 3.22 is dan ook te schrijven als:

$$x_2(t) = C \sin \Omega t - \frac{1}{36} \frac{\mu}{\left(\omega_0^2 - \frac{f}{C}\right)} C^3 \sin 3\Omega t \quad (3.24)$$

Wordt de amplitude  $C$  geschaald met de statische amplitude  $C_0 = f/\omega_0^2$  dan zien we in Fig. 3.3 het verloop als functie van  $(\Omega/\omega_0)^2$  voor  $\mu > 0$  (met de amplitude neemt de veerstijfheid toe),  $\mu < 0$  (met de amplitude neemt de veerstijfheid af) en  $\mu = 0$  (lineaire veer).

Voor het lineaire probleem is er bij elke waarde van  $\Omega$  slechts één oplossing, maar in het niet-lineaire geval zijn er soms drie oplossingen. Een ander onderscheid is dat  $C$  nu voor alle waarden van  $\Omega$  eindig blijft, terwijl in het lineaire geval voor  $\Omega = \omega_0$  de amplitude oneindig wordt. Bij het onderzoek van een niet of licht gedempt systeem in de omgeving van resonantie moeten dus in elk geval de niet-lineaire termen meegenomen worden bij de bepaling van de amplitude.

### Effect van damping

In het geval van lineaire damping wordt de bewegingsvergelijking

$$\ddot{x} + 2\kappa\dot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = f_1 \sin \Omega t + f_2 \cos \Omega t \quad (3.25)$$

en

$$f^2 = f_1^2 + f_2^2 \quad , \quad \kappa > 0$$

De eerste benadering wordt gezocht in de vorm

$$x_1 = C \sin \Omega t \quad (3.26)$$

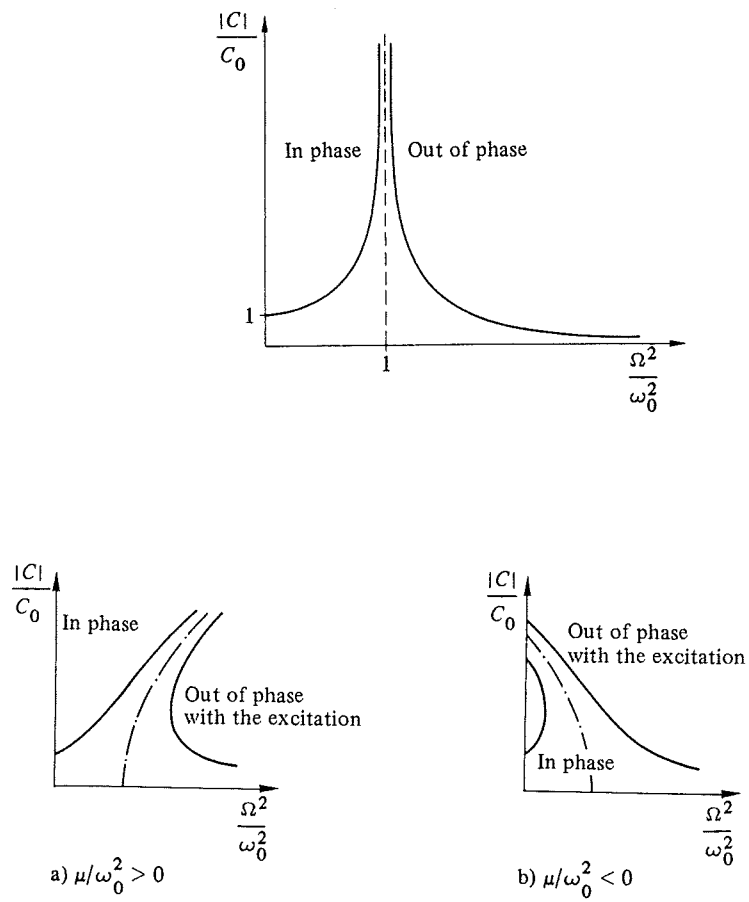
Na substitutie in 3.25 en na verwaarlozing van de termen met  $\sin 3\Omega t$  volgt

$$(\omega_0^2 - \Omega^2)C + \frac{3}{4}\mu C^3 = f_1 \quad ; \quad 2\kappa\Omega C = f_2$$

of

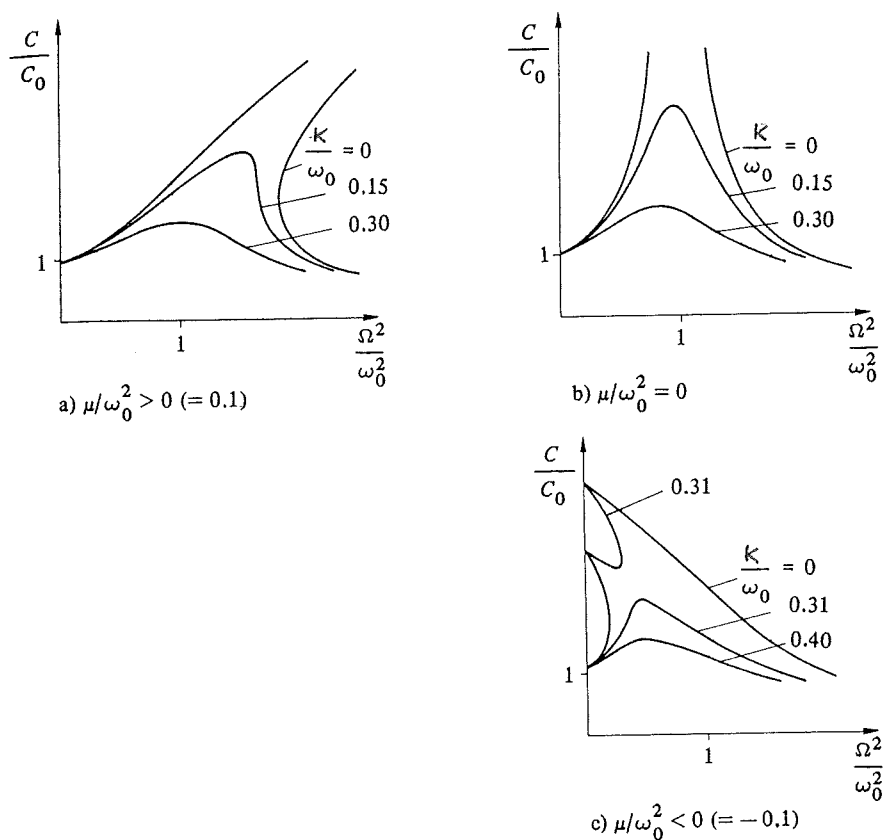
$$\left[ (\omega_0^2 - \Omega^2)C + \frac{3}{4}\mu C^3 \right]^2 + 4\kappa^2\Omega^2 C^2 = f^2 \quad (3.27)$$

Hieruit volgt voor de frequentie-responsiekromme



Figuur 3.3: Resonantiekrommen voor een niet-lineair massa-veersysteem





Figuur 3.4: Frequentie-responsiekrommen voor  $f/\omega_0^2 = 1$

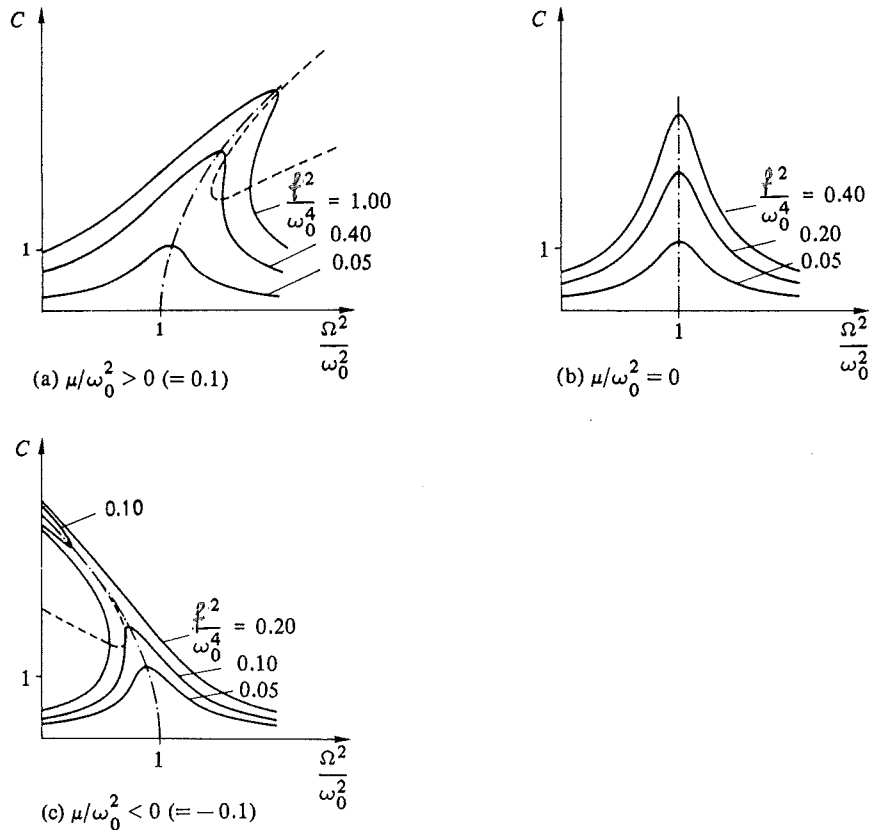
$$\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 1 - 2\frac{\kappa^2}{\omega_0^2} + \frac{3}{4}\frac{\mu}{\omega_0^2}C^2 \pm \frac{1}{\omega_0^2} \sqrt{\frac{f^2}{C^2} + 4\kappa^2 \left( \kappa^2 - \omega_0^2 + \frac{3}{4}\mu C^2 \right)} \quad (3.28)$$

en de fasehoek ( $\gamma$ ) tussen belasting en responsie is bepaald door

$$\tan \gamma = \frac{f_2}{f_1} = \frac{2\kappa\Omega C}{(\omega_0^2 - \Omega^2)C + \frac{3}{4}\mu C^3} \quad (3.29)$$

Fig. 3.4 geeft de frequentie-responsiekrommen voor een vaste waarde van de belastingamplitude  $f$  en verschillende waarden van de dempingscoëfficiënt  $\kappa$ . Fig. 3.5 geeft de oplossing voor een vaste waarde van  $\kappa$  en verschillende waarden van  $f$ . Evenals in het voorgaande is geschaald met de statische amplitude  $C_0 = f/\omega_0^2$ .

Wat gebeurt er nu als bij gegeven belastingamplitude  $f$  de frequentie  $\Omega$  verandert? Dit wordt toegelicht voor het geval  $\mu > 0$  (stijver wordende veer) in Fig. 3.6. Als vanuit het punt A de frequentie gereduceerd wordt tot het punt  $B_1$  is bereikt, dan treden er bij een iets verdere reductie van  $\Omega$



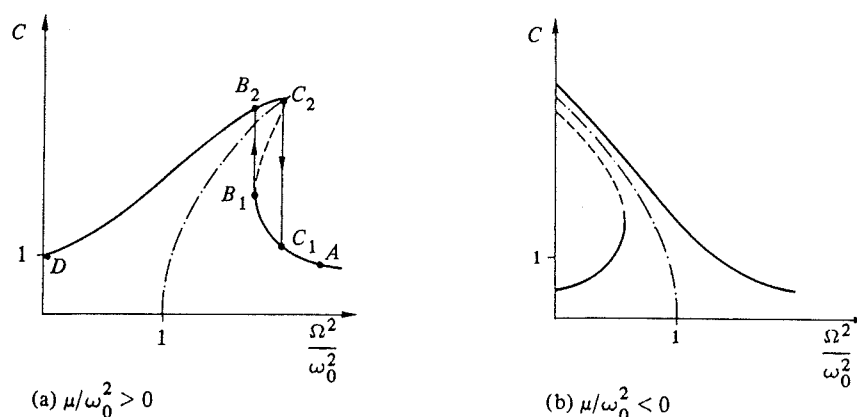
Figuur 3.5: Frequentie-responsiekrommen voor  $\kappa/\omega_0 = 0, 1$

plotseling sterke, instationaire trillingen op. Na uitdempen hiervan krijgen we een stationaire trilling met een amplitude aangegeven door punt  $B_2$ . Nog verdere reductie van  $\Omega$  geeft een verloop langs  $B_2D$ . Als  $\Omega$  toeneemt vanuit punt  $D$  dan zal overspringen van  $C_2$  naar  $C_1$  plaatsvinden. Het deel van de kromme  $B_1 - C_2$  geeft wel een stationaire oplossing aan maar die is instabiel, daarom is ze door altijd aanwezige storingen niet te realiseren.

Voor  $\mu < 0$  treden overeenkomstige situaties op. Grenspunten van de instabiele gebieden zijn punten waar de resonantiekrommen een verticale raaklijn bezitten. In Fig. 3.5 is met een streeplijn de meetkundige plaats van deze grenspunten aangegeven.

### 3.1.3 Subharmonische trillingen

Een wezenlijk verschil tussen de gedwongen trillingen van lineaire en niet-lineaire systemen bestaat hierin dat bij niet-lineaire systemen niet alleen periodieke bewegingen met de frequentie ( $\Omega$ ) mogelijk zijn, maar dat ook nog periodieke bewegingen met andere frequenties kunnen optreden, bijvoorbeeld



Figuur 3.6: Sprongfenomenen bij gedwongen trillingen (Duffing-systeem)

$\Omega/2, \Omega/3, \dots$  Trillingen met frequenties lager dan de excitatiefrequentie worden *subharmonische trillingen* genoemd. De belangrijkste subharmonische trilling bij een Duffing-systeem is die met de frequentie  $\Omega/3$ . We beschouwen nu weer de Duffing-vergelijking zonder demping:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \mu x^3 = f \sin \Omega t \quad (3.30)$$

en zoeken een oplossing die ook een bijdrage bevat in  $\Omega/3$ . Als eerste benadering betekent dit een oplossing van de vorm

$$x = C_{1/3} \sin \frac{1}{3} \Omega t + C_1 \sin \Omega t \quad (3.31)$$

Substitutie in de bewegingsvergelijking geeft, als we eisen dat de coëfficiënten van  $\sin \Omega t/3$  resp.  $\sin \Omega t$  in het linker- en rechterlid hetzelfde zijn:

$$\left( \omega_0^2 - \frac{1}{9} \Omega^2 \right) C_{1/3} + \frac{3}{4} \mu \left( C_{1/3}^3 - C_{1/3}^2 C_1 + 2 C_{1/3} C_1^2 \right) = 0 \quad (3.32)$$

en

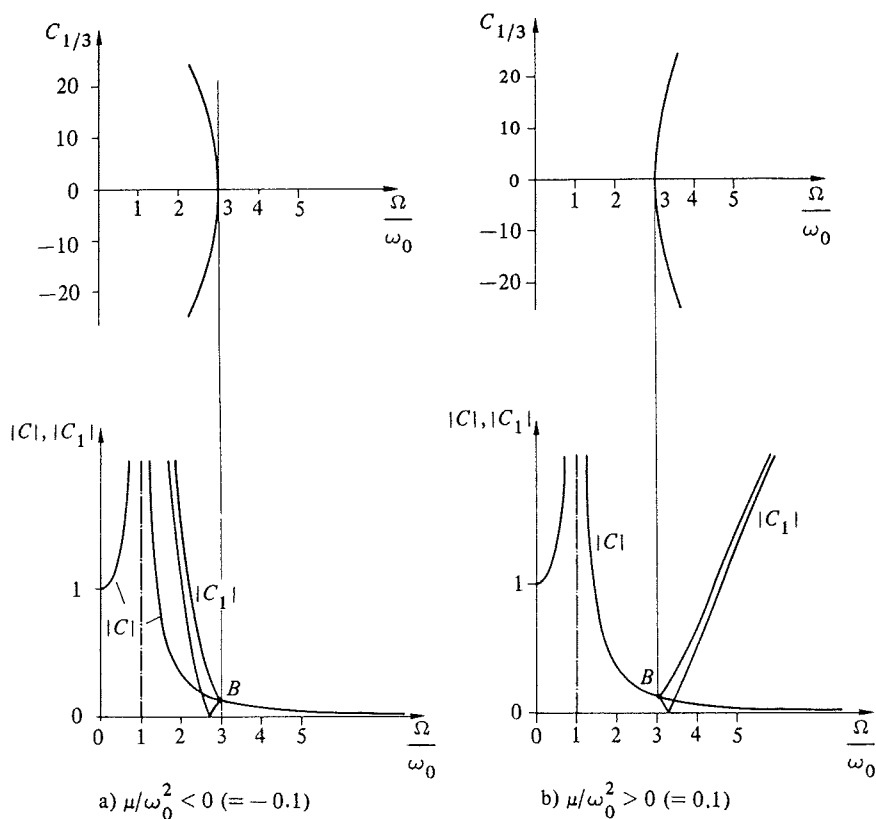
$$\left( \omega_0^2 - \Omega^2 \right) C_1 + \frac{1}{4} \mu \left( -C_{1/3}^3 + 6 C_{1/3}^2 C_1 + 3 C_1^3 \right) = f \quad (3.33)$$

Uit 3.32 volgt voor  $C_{1/3} \neq 0$ :

$$\frac{27}{4} \mu \left( C_{1/3}^2 - C_{1/3} C_1 + 2 C_1^2 \right) + 9 \omega_0^2 = \Omega^2 \quad (3.34)$$

De niet-lineaire algebraïsche vergelijkingen 3.33 en 3.34 voor  $C_{1/3}$  en  $C_1$  kunnen met beschikbare computerprogramma's eenvoudig worden opgelost. Ook kan een iteratieve oplossing voor kleine waarden van  $\mu$  worden bepaald. Fig.

### 3.1. VERSCHIJNSELEN EN OPLOSMETHODEN VOOR EENVOUDIGE SYSTEMEN 55



Figuur 3.7: Frequentie-responsiekrommen voor  $C_{1/3}$ ,  $C_1$  en  $C$

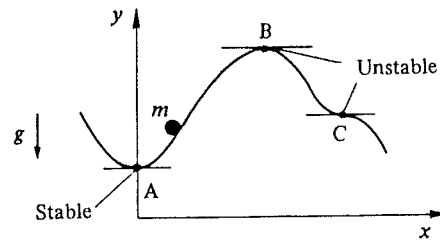
3.7 geeft  $|C_1|$  en  $C_{1/3}$  als functie van  $\Omega/\omega_0$ . Ook is de oplossing  $|C|$  gegeven voor  $C_{1/3} = 0$ .

Het blijkt dat subharmonische trillingen,  $C_{1/3} \neq 0$ , niet voor alle frequenties  $\Omega$  mogelijk zijn. Voor  $\mu > 0$  (stijver wordende veer) kan een subharmonische trilling alleen optreden voor  $\Omega/\omega_0 > \approx 3$ , terwijl voor  $\mu < 0$  (slapper wordende veer) het bestaan van een subharmonische trilling alleen mogelijk is voor  $\Omega/\omega_0 < \approx 3$ .

In Fig. 3.7 zien we dat een subharmonische bijdrage ontstaat bij de vertakking van de harmonische trilling in het punt  $B$  waar

$$C_1 = C = \frac{f}{8\omega_0^2} \left( \frac{51}{32} \mu \frac{f^2}{8^2 \omega_0^6} - 1 \right) \quad (3.35)$$

Het is niet zeker dat de subharmonische beweging ook altijd stabiel is.



Figuur 3.8: Stabiliteit van een evenwichtsstand

### 3.2 Stabiliteitstheorie van Liapounov

We weten dat voor *evenwichtsstanden* van een conservatief systeem de *potentiële energie* een *stationaire waarde* heeft. D.w.z. bij wrijvingsloos contact zijn de punten  $A$ ,  $B$  en  $C$  in Fig. 3.8 evenwichtsstanden van het massapunt  $m$ . Een evenwichtsstand is *stabiel* als de *stationaire waarde* een *locaal minimum* is en dit geldt dus alleen voor het punt  $A$ . Punt  $B$  geeft een maximum aan en punt  $C$  een buigpunt met horizontale raaklijn; beide zijn instabiele evenwichtsstanden.

We zullen nu de stabiliteit van een beweging onderzoeken en daarvoor zal een beroep gedaan worden op de stabiliteitstheorie van Liapounov. Om een algemene behandeling te geven voor een stelsel eerste orde differentiaalvergelijkingen gaan we uit van

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (3.36)$$

waarin

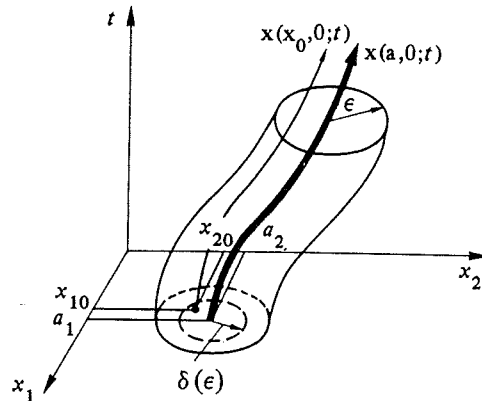
$$x^T = | x_1 x_2 \dots x_n | \quad ; \quad f^T = | f_1 f_2 \dots f_n |$$

We veronderstellen dat een oplossing van 3.36 bestaat voor  $t > t_0$  en dat ze eenduidig is. De oplossing wordt met de beginvoorwaarden  $x_0$  op het tijdstip  $t_0$  eenduidig vastgelegd en wordt aangegeven met  $x(x_0; t)$ . Wordt een oplossing  $x(a; t)$  beschouwd dan is deze stabiel volgens Liapounov als voor iedere (willekeurig kleine)  $\varepsilon > 0$  er een  $\delta(\varepsilon) > 0$  bestaat zodat

$$| x_0 - a | < \delta(\varepsilon) \rightarrow | x(x_0; t) - x(a; t) | < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 \quad (3.37)$$

De oplossing  $x(x_0; t)$  blijft dus voor alle tijden  $t$  in een willekeurig nauwe 'buis' om  $x(a; t)$  in de bewegingsruimte  $R^{n+1}$ , als het beginpunt  $x_0$  voldoende dicht bij  $a$  wordt gekozen (Fig. 3.9). De verticale strepen betekenen bijvoorbeeld de Euclidische norm

$$| x | = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2)}$$



Figuur 3.9: Stabiliteitsdefinitie van Liapounov

of

$$|x| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

In een eindig dimensionale ruimte zijn al dit soort normen equivalent d.w.z. klein t.o.v. de ene norm is ook klein t.o.v. een andere norm.

Een oplossing is instabiel volgens Liapounov als niet aan de stabiliteitsvoorwaarde is voldaan. We onderzoeken nu de stabiliteit van verschillende oplossingen van de differentiaalvergelijking van de mathematische slinger

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \sin x = 0 \quad (3.38)$$

Met de substitutie

$$x = x_1 \quad ; \quad \dot{x} = \omega_0 x_2$$

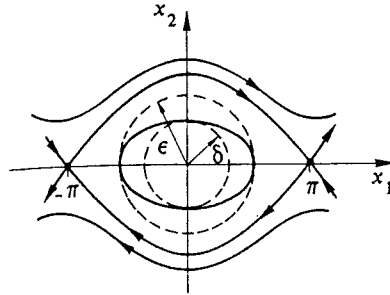
wordt (3.38) omgezet in het eerste orde stelsel

$$\dot{x}_1 = \omega_0 x_2$$

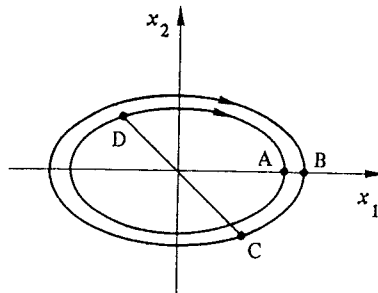
$$\dot{x}_2 = -\omega_0 \sin x_1 \quad (3.39)$$

De oplossing  $x = 0$  (onderste *evenwichtsstand*) is stabiel, zoals direct volgt uit het fase-diagram (Fig. 3.10).

Nemen we  $\epsilon$  aan dan kan een  $\delta(\epsilon)$  zodanig gekozen worden dat een beginpunt binnen de straal  $\delta$  nooit een beweging geeft die buiten de cirkel met straal  $\epsilon$  komt. Het is ook zonder meer duidelijk dat de oplossing  $x = \pi$  instabiel is. Voor elk willekeurig klein gebied met straal  $\delta(\epsilon)$  om dit punt zijn er steeds oplossingen te geven die buiten het gebied met straal  $\epsilon$  komen.



Figuur 3.10: Stabiliteit van het statisch evenwicht van de slinger



Figuur 3.11: Stabiliteit van de periodieke oplossingen van 3.39

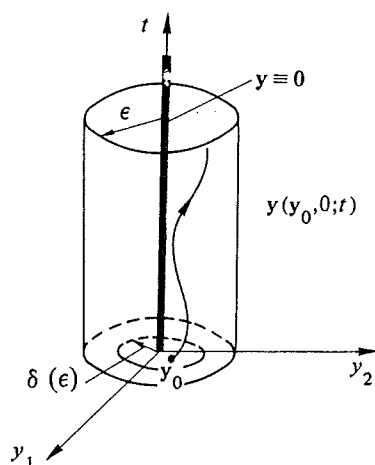
Hoe zit het met de stabiliteit van een *periodieke* oplossing? Voor de slinger (3.39) geldt dat alle periodieke oplossingen *instabiel* zijn volgens Liapounov. Wordt de oplossing beschouwd in Fig. 3.11, die op het tijdstip  $t = 0$  door het punt  $S$  gaat en ook de oplossing met enigszins gewijzigde beginvoorwaarden die door punt  $B$  gaat, dan verschilt de amplitude van de trillingen iets en daarmee ook de omlooptijd. De oplossing door  $B$  gaat langzamer en dat betekent dat op een bepaald moment de afstand  $|CD|$  wordt. Het lukt niet deze afstand willekeurig klein te maken door  $B$  voldoende dicht bij  $A$  te kiezen. Volgens Liapounov zijn de periodieke oplossingen daarom instabiel terwijl de banen toch dicht bij elkaar blijven. Het is zinvol ook het begrip *baanstabiel* in te voeren.

Een oplossing  $x(a; t)$  heet baanstabiel als er voor iedere (willekeurig kleine)  $\varepsilon > 0$  een  $\delta(\varepsilon) > 0$  en een tijd  $t_1(t)$  bestaan, zodat

$$|x_0 - a| < \delta \rightarrow |x(x_0; t) - x(a; t_1(t))| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.40)$$

De periodieke trillingen van de mathematische slinger zijn dus baanstabiel. Is verder een oplossing *stabiel* en geldt bovendien

$$|x_0 - a| < \varepsilon \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} |x(x_0; t) - x(a; t)| = 0 \quad (3.41)$$



Figuur 3.12: De stabiliteit van de triviale oplossing van 3.43

dan wordt de oplossing *asymptotisch stabiel* genoemd. Voor het onderzoek naar de stabiliteit van de oplossing  $x(a; t)$  is het doelmatig de transformatie

$$y = x - x(a; t) \quad (3.42)$$

in te voeren. We krijgen dan een vergelijking van de vorm

$$\dot{y} = g(y, t) \quad (3.43)$$

en de oplossing  $y = 0$  correspondeert met de oplossing  $x(a; t)$ . De triviale oplossing,  $y = 0$ , is stabiel als bij iedere  $\varepsilon > 0$  er een  $\delta(\varepsilon) > 0$  bestaat waarvoor geldt

$$|y_0| < \delta(\varepsilon) \rightarrow |y(y_0; t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.44)$$

Fig. 3.12 geeft de situatie grafisch weer en correspondeert met Fig. 3.9.

Het stabiliteitsgedrag van een willekeurige oplossing van 3.36 of 3.43 kan zonder meer bepaald worden als de algemene oplossing bekend is, maar voor niet-lineaire differentiaalvergelijkingen is dit bijna nooit het geval. Het is daarom nodig naar middelen te zoeken om het stabiliteitsgedrag vast te stellen zonder de differentiaalvergelijkingen op te lossen. Een algemene methode om dat probleem aan te pakken is de eerste methode van Liapounov, hierbij wordt de stabiliteit in eerste benadering bepaald. Deze methode zal in het kort besproken worden voor *autonome* systemen (de tijd komt niet expliciet in de vergelijkingen voor).

Met de eerste methode van Liapounov wordt getracht een uitspraak te doen over de stabiliteit van de triviale oplossing van



$$\dot{x} = Ax + h(x, t) \quad (3.45)$$

aan de hand van de gelineariseerde vergelijking

$$\dot{x} = Ax \quad (3.46)$$

Hierin is  $A$  een reële matrix en we veronderstellen dat er zodanige getallen  $\beta > 1$  en  $\alpha \geq 0$  bestaan, dat voor het niet-lineaire deel  $h(x, t)$  geldt

$$|h(x, t)| \leq \alpha |x|^\beta \quad (3.47)$$

in de omgeving van  $x = 0$ . Eerst zal de stabiliteit onderzocht worden van 3.46 en daarna zal getracht worden een uitspraak te doen over oplossingen van 3.45. We zoeken oplossingen van 3.46 in de vorm

$$x = ae^{\lambda t} \quad (3.48)$$

Substitutie geeft de karakteristieke vergelijking

$$\det |A - \lambda I| = 0 \quad (3.49)$$

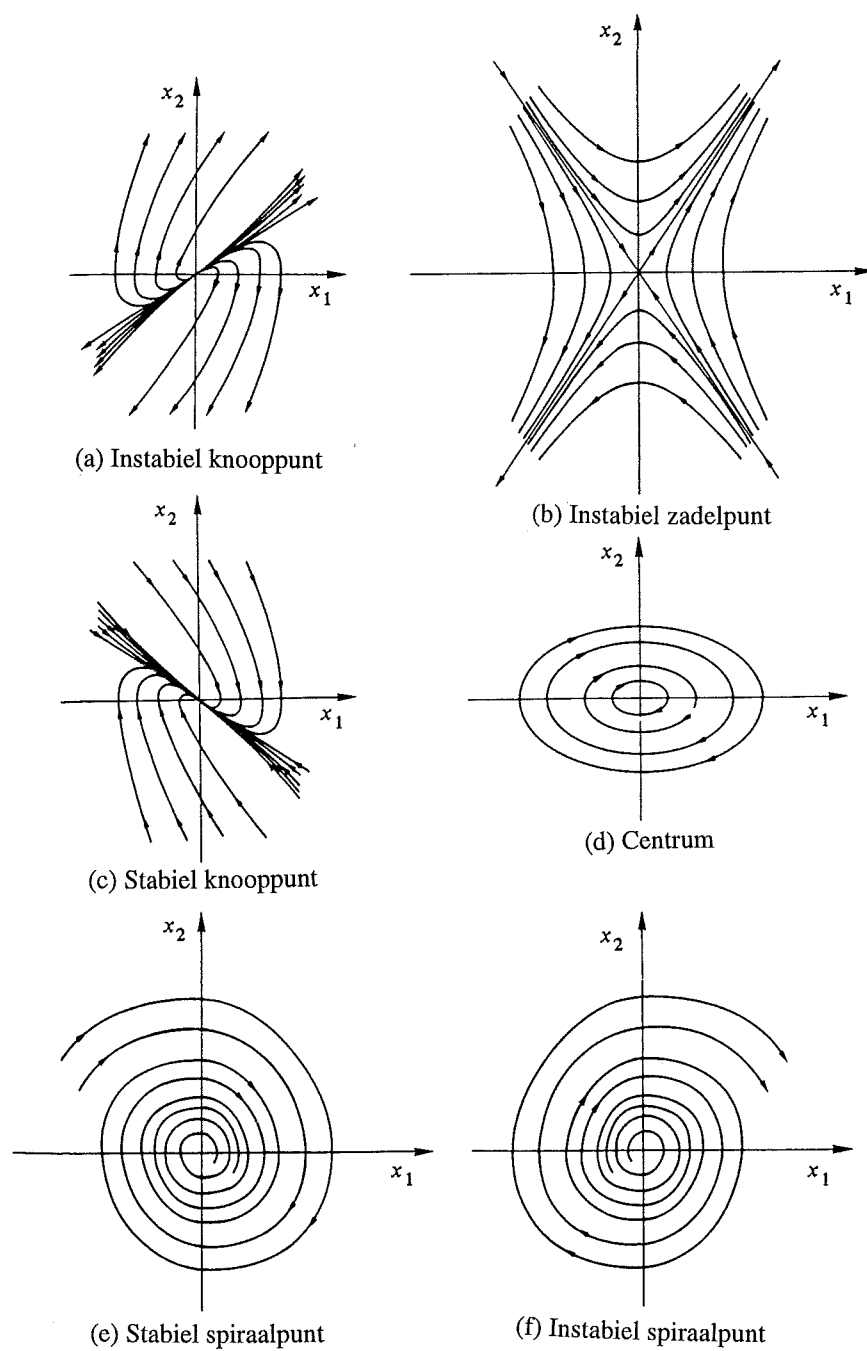
en hieruit volgen de eigenwaarden  $\lambda_i$ . Voor het geval we te maken hebben met twee graden van vrijheid kunnen we voor de verschillende combinaties van eigenwaarden  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  de fase-diagrammen eenvoudig tekenen.

De volgende gevallen zijn daarbij te onderscheiden:

- a)  $\lambda_1, \lambda_2$  reëel met  $\lambda_1 > 0$  en  $\lambda_2 > 0$ : instabiel knooppunt (Fig. 3.13-a)
- b)  $\lambda_1, \lambda_2$  reëel met  $\lambda_1 > 0$  en  $\lambda_2 < 0$ : instabiel zadelpunt (Fig. 3.13-b)
- c)  $\lambda_1, \lambda_2$  reëel met  $\lambda_1 < 0$  en  $\lambda_2 < 0$ : stabiel knooppunt (Fig. 3.13-c)
- d)  $\lambda_1, \lambda_2$  imaginair met  $\lambda_1 = -\lambda_2$ : centrum (Fig. 3.13-d)
- e)  $\lambda_1, \lambda_2$  complex ( $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ ) met negatief reëel deel: stabiel spiraalpunt (Fig. 3.13-e)
- f)  $\lambda_1, \lambda_2$  complex ( $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ ) met positief reëel deel: instabiel spiraalpunt (Fig. 3.13-f)

In het algemeen geldt voor de oplossingen van 3.46:

- alle eigenwaarden hebben een negatief reëel deel: de nuloplossing is *asymptotische stabiel*
- minstens één eigenwaarde heeft een positief reëel deel: de oplossing is instabiel
- geen eigenwaarden met positief reëel deel echter wel eigenwaarden met reëel deel nul en alleen enkelvoudige eigenwaarden: stabiel (echter niet asymptotisch stabiel)
- geen eigenwaarden met positief reëel deel echter wel eigenwaarden met reëel deel nul, waaronder meervoudige eigenwaarden: instabiliteit



Figuur 3.13: Fasediagrammen van een autonoom systeem met twee vrijheidsgraden

Nu moet nog nagegaan worden in hoeverre een uitspraak over de *stabiliteit* van het *niet-lineaire systeem* gedaan kan worden op basis van de stabiliteit van het corresponderende lineaire systeem. Als de niet-lineaire termen voldoen aan 3.47 dan kunnen we de volgende conclusies trekken:

- alle eigenwaarden van  $A$  hebben een negatief reëel deel: de triviale oplossing van het niet-lineaire systeem is *asymptotisch stabiel*. Dit volgt direct door afschatting van de niet-lineaire termen

- minstens één eigenwaarde heeft een positief reëel deel: de triviale oplossing van het niet-lineaire systeem is *instabiel*

- geen eigenwaarde met positief reëel deel, doch minstens één eigenwaarde met verdwijnend reëel deel: de niet-lineaire termen bepalen stabiliteit of instabiliteit (kritieke geval)

### 3.3 Zichzelf-instandhoudende trillingen

De toelichting hiervan wordt gegeven aan de hand van een autonoom systeem met één vrijheidsgraad. Is de bewegingsvergelijking van het volgende type

$$\ddot{x} + h(x)\dot{x} + f(x) = 0 \quad (3.50)$$

met  $h(x) \geq 0$  dan is  $h(x)\dot{x}$  de dempingskracht en

$$-\frac{d}{dt} [T_{kin} + U_{pot}] = h(x)\dot{x}^2 \quad (3.51)$$

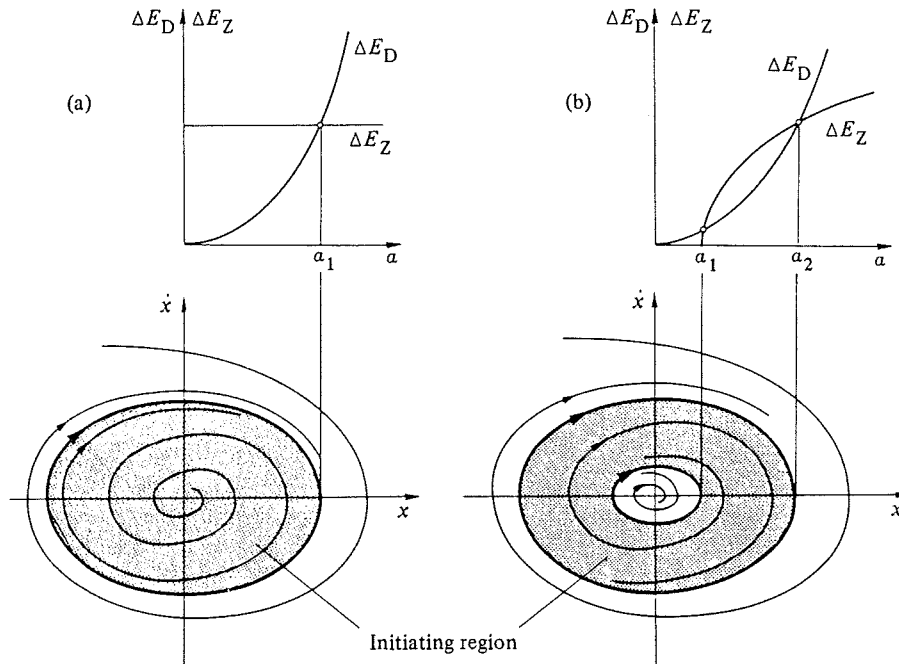
het gedissipeerde vermogen. De energie neemt monotoon af tot een stabiele evenwichtsstand is bereikt.

Er zijn echter ook systemen waarbij  $h(x)$  zowel positief als negatief kan zijn. De trillingsenergie neemt dan niet noodzakelijkerwijs monotoon af, maar kan ook aangroeien. In het bijzonder kan onder bepaalde omstandigheden een geïsoleerde periodieke oplossing in de faseruimte bestaan; deze wordt een *grenskringloop* (limit cycle) genoemd.

Een goed inzicht in het trillingsgedrag wordt verkregen door te veronderstellen dat de trillingen quasi-harmonisch zijn, d.w.z. dat ze beschreven worden door

$$x = a \sin(\omega t + \psi)$$

waarin  $\omega$  constant is en zowel de amplitude  $a(t)$  als de fasehoek  $\psi(t)$  langzaam veranderen. Ook wordt voorlopig even verondersteld dat de dissipatieterm en de term die voor energietoevoer zorgt te scheiden zijn. Zowel de door demping verloren gegane energie als de toegevoerde energie per cyclus kunnen



Figuur 3.14: Fasediagrammen van zichzelf-instandhoudende trillingen

dan berekend worden als functie van de amplitude  $a$ . Is  $T$  de periodetijd dan kunnen we schrijven:

$$\int_0^T h(x)\dot{x}^2 dt = \Delta E_D - \Delta E_Z \quad (3.52)$$

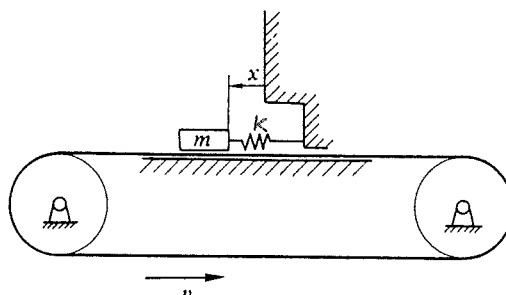
waarin  $\Delta E_D$  de per periode gedissipeerde energie geeft en  $\Delta E_Z$  de toegevoerde energie. Voor een grenskringloop moet gelden:

$$\Delta E_D(a) = \Delta E_Z(a) \quad (3.53)$$

Deze voorwaarde legt de amplitude  $a$  vast. Fig. 3.14 geeft de situatie kwalitatief aan. De amplitude neemt toe als  $\Delta E_Z > \Delta E_D$  en af als  $\Delta E_D > \Delta E_Z$ . Voor lineaire demping geldt:

$$\Delta E_D = \int_0^T 2\kappa\dot{x}^2 dt = 2\pi\kappa a^2\omega \quad (3.54)$$

zodat  $\Delta E_D(a)$  een parabool is. In Fig. 3.14-a is  $\Delta E_Z$  constant per periode. Er treedt dan slechts één grenskringloop op en deze is *baanstabiel*. Men spreekt dan van een *stabiele grenskringloop*. Omdat er slechts een geringe excitatie nodig is om de grenskringloop te bereiken spreken we van zwakke zelfexcitatie. Voor het geval in Fig. 3.14-b zijn er twee grenskringlopen,



Figuur 3.15: Wrijvingslinger

de buitenste is stabiel en de binnenste instabiel. Met een zwakke excitatie eindigt de beweging in de evenwichtsstand  $a = 0$ . Wordt een sterke excitatie gegeven zodat de amplitude  $a$  groter wordt dan  $a_1$  dan groeit de amplitude aan tot de stabiele grenskringloop met amplitude  $a_2$  is bereikt. We spreken dan van harde zelfexcitatie.

### Voorbeeld van een mechanisch systeem

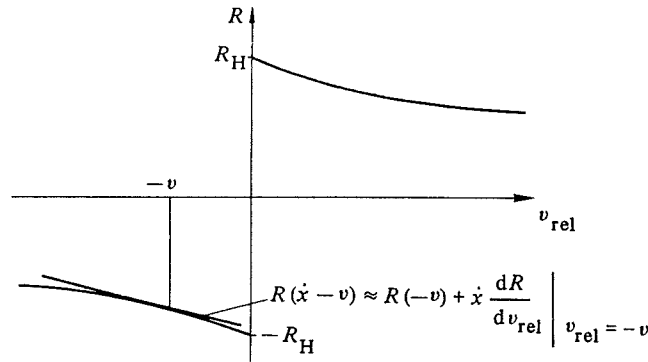
De wrijvingslinger in Fig. 3.15 is een voorbeeld van een mechanisch systeem waarin een zichzelf-instandhoudende trilling kan ontstaan. Het blokje met massa  $m$  rust op een transportband die met constante snelheid beweegt. De positie van het blokje wordt aangegeven met  $x$  en deze coördinaat is zo gekozen dat voor  $x = 0$  de veer juist spanningsvrij is. De horizontale krachten die op het blokje werken zijn de veerkracht  $kx$  en de wrijvingskracht  $R$  die een functie zal zijn van de relatieve snelheid  $v_{rel} = \dot{x} - v$  tussen het blokje en de transportband. De bewegingsvergelijking is

$$m\ddot{x} + kx + R = 0 \quad \text{met} \quad R = R(v_{rel}) = R(\dot{x} - v) \quad (3.55)$$

Verondersteld wordt dat het verloop van de wrijvingskracht als functie van de relatieve snelheid kwalitatief is als aangegeven is in Fig. 3.16 d.w.z. gedurende een periode van hechten is de wrijvingscoëfficiënt hoger dan tijdens slip maar de overgang is geleidelijk. We zullen nu nagaan of de evenwichtstoestand

$$\dot{x} = 0 \quad ; \quad x = -\frac{R(-v)}{k}$$

een stabiele of een instabiele stand is. Lineariseren rond het punt  $v_{rel} = -v$  geeft



Figuur 3.16: Wrijvingskracht als functie van  $v_{rel}$

$$R(\dot{x} - v) = R(-v) + \left( \frac{dR}{dv_{rel}} \right)_{v_{rel}=-v} \dot{x} \quad (3.56)$$

Met de substitutie

$$x = -\frac{R(-v)}{k} + \bar{x} \quad ; \quad \left( \frac{dR}{dv_{rel}} \right)_{v_{rel}=-v} = -r \quad r > 0 \quad (3.57)$$

wordt de bewegingsvergelijking

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} - \frac{r}{m} \frac{d\bar{x}}{dt} + \omega^2 \bar{x} = 0 \quad \left( \omega^2 = \frac{k}{m} \right) \quad (3.58)$$

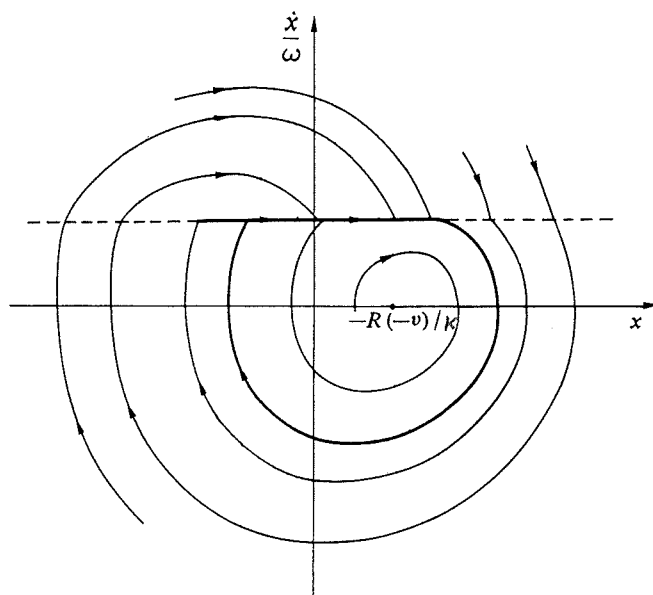
Hieruit volgt dat een oplossing in de omgeving  $\bar{x} = 0$  instabiel is.

Een detailuitwerking, die hier niet wordt besproken, geeft aan dat er een stabiele grenskringloop bestaat waarbij gedurende een deel van de periode hechten optreedt. Bewegingen met startpunten binnen en buiten de grenskringloop worden als het ware aangetrokken door de grenskringloop (Fig. 3.17, men spreekt daarom ook wel van een periodieke attractor).

### Grenskringloop van de Van der Pol vergelijking

Tenslotte zullen we een benaderingsmethode bespreken voor de berekening van grenskringlopen en die toepassen voor een zeer eenvoudig systeem waarbij zowel positieve als negatieve demping kan optreden, namelijk de Van der Pol vergelijking. De benaderingsmethode staat bekend als de methode van de langzaam veranderende fase en amplitude.

De algemene bewegingsvergelijking voor een niet-lineair tweede orde systeem schrijven we als



Figuur 3.17: Fasediagram van de wrijvingslinger met  $R(v_{rel})$  als in Fig. 3.16

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(x, \dot{x}) \quad (3.59)$$

Met de transformatie

$$x = a \sin(\omega_0 t + \psi) \quad ; \quad \dot{x} = a \omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi) \quad (3.60)$$

gaan we over naar de variabelen  $a(t)$  en  $\psi(t)$ .

Differentiatie van de eerste vergelijking in 3.60 en gelijkstellen met de tweede vergelijking geeft

$$\dot{a} \sin(\omega_0 t + \psi) + a \dot{\psi} \cos(\omega_0 t + \psi) = 0 \quad (3.61)$$

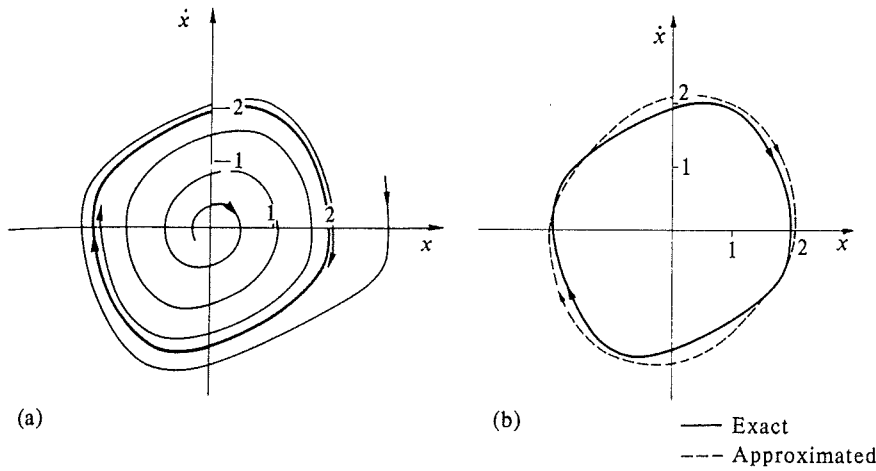
Door de tweede vergelijking in 3.60 te differentiëren en te substitueren in 3.59 ontstaat de tweede eerste orde vergelijking in  $a(t)$  en  $\psi(t)$ :

$$\dot{a} \omega_0 \cos(\omega_0 t + \psi) - a \dot{\psi} \omega_0 \sin(\omega_0 t + \psi) = f(x(a, \psi), \dot{x}(a, \psi)) \quad (3.62)$$

De vergelijkingen 3.61 en 3.62 zijn eenvoudig te herleiden tot

$$\dot{a} = \frac{1}{\omega_0} f \cos(\omega_0 t + \psi) \quad ; \quad \dot{\psi} = -\frac{1}{\omega_0 a} f \sin(\omega_0 t + \psi) \quad (3.63)$$

We veronderstellen nu dat de amplitude  $a(t)$  en de fasehoek  $\psi(t)$  langzaam variëren d.w.z. dat ze over een periode  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  weinig veranderen. Omdat de vergelijkingen 3.63 meestal niet eenvoudig exact zijn te integreren



Figuur 3.18: Fasediagram en grenskringloop voor Van der Polvergelijking met  $\mu = 0,3$  en  $\omega_0 = 1$

vervangen we de rechterleden in 3.63 door hun gemiddelden over een periode  $T_0$  en houden bij dit middelen  $a(t)$  en  $\psi(t)$  constant. De benaderde eerste orde vergelijkingen worden dan

$$\dot{a} = \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} f \cos(\theta + \psi) d\theta \quad ; \quad \dot{\psi} = -\frac{1}{2\pi a\omega_0} \int_0^{2\pi} f \sin(\theta + \psi) d\theta \quad (3.64)$$

Toegepast op de Van der Pol vergelijking

$$\ddot{x} + \mu\omega_0^2(x^2 - 1)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (3.65)$$

waarin dus

$$f(x, \dot{x}) = -\mu\omega_0(x^2 - 1)\dot{x}$$

vinden we

$$\dot{a} = \frac{1}{2}\mu a \left(1 - \frac{1}{4}a^2\right) \quad ; \quad \dot{\psi} = 0 \quad (3.66)$$

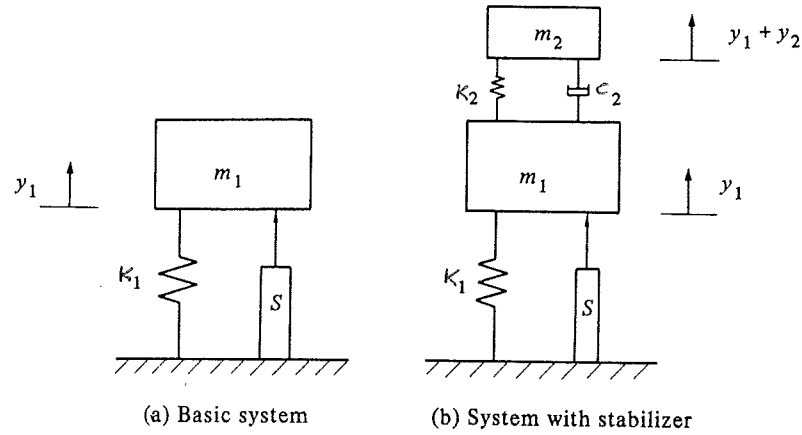
De stationaire oplossing ( $\dot{a} = 0$ ) wordt

$$a = a_{stat} = 2$$

De grenskringloop is stabiel voor  $\mu > 0$ . Fig. 3.18 geeft voor  $\mu = 0,3$  en  $\omega_0 = 1$  een wat nauwkeuriger benadering verkregen met een perturbatiemethode en ook de exacte oplossing bepaald met numerieke simulatie.

Vaak ontstaan zichzelf-instandhoudende trillingen t.g.v. een niet-lineair verband tussen de wrijvingskracht en de relatieve snelheid zoals bij de wrijvingslinger. Voorbeelden van zelf-excitatie zijn:





Figuur 3.19: Systeem met zelf-excitatie en stabilisator

- Shimmy van de auto
- Zijdelingse trillingen van het spoorwegvoertuig (vetergang)
- Piepen van remmen
- Door de wind geëxciteerde hoogspanningsleidingen

Heeft men met eenvoudige analytische methoden inzicht verkregen dan kunnen ad hoc problemen nauwkeurig worden opgelost met numerieke integratie.

Een systeem met zelf-excitatie kan vaak met een hulpmassa-veer-demper systeem gestabiliseerd worden in analogie met de dynamische trillingsdemper (Fig. 3.19). Veronderstel dat het basissysteem met zelfexcitatie beschreven kan worden met de vergelijking

$$m_1 \ddot{y}_1 - a \dot{y}_1 + e y_1^2 \dot{y}_1 + k_1 y_1 = 0 \quad (3.67)$$

waarin  $a$ ,  $e$  en  $k_1$  positieve constanten zijn. Het excitatie mechanisme  $S$  veroorzaakt een kracht  $(+a\dot{y}_1 - e y_1^2 \dot{y}_1)$  waardoor de triviale oplossing  $y_1 = 0$  instabiel is. Met de stabilisator wordt het systeem:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{y}_1 - a \dot{y}_1 + e y_1^2 \dot{y}_1 + k_1 y_1 - c_2 \dot{y}_2 - k_2 y_2 &= 0 \\ m_2 (\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2) + c_2 \dot{y}_2 + k_2 y_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.68)$$

Als alleen de stabiliteit van de triviale oplossing  $y_1 = 0$  onderzocht moet worden dan kunnen we ons beperken tot het lineaire systeem en de parameters van de stabilisator  $(m_2, k_2, c_2)$  zo kiezen dat stabiliteit optreedt voor een zo groot mogelijke range van de excitatie parameter  $a$ .

## 3.4 Inleiding in de chaos

### 3.4.1 Chaotisch gedrag van een Duffing-systeem

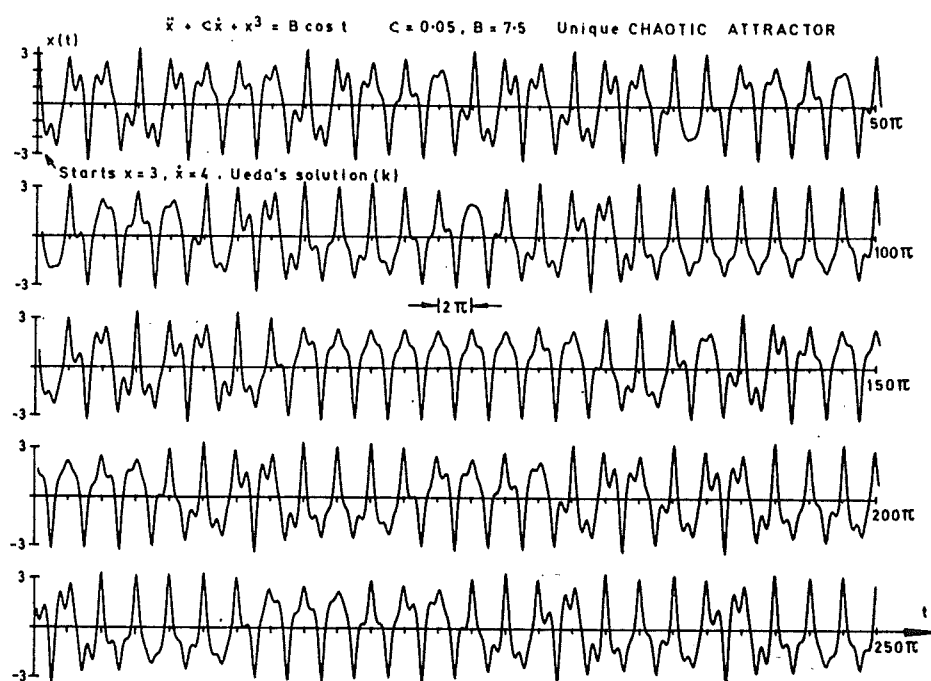
We beschouwen de Duffing-vergelijking

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x^3 = B \cos t \quad (3.69)$$

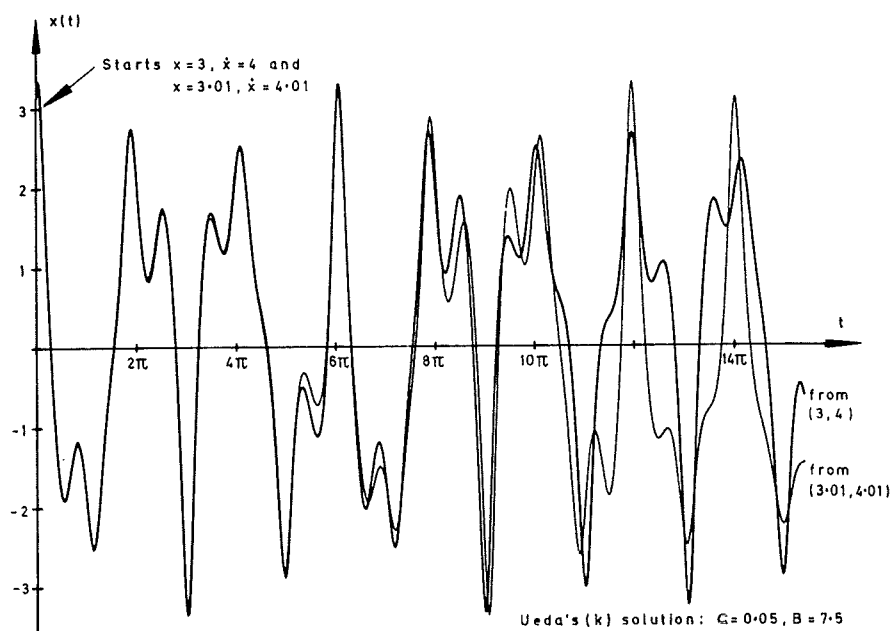
met  $c = 0,05$  en  $B = 7,5$ . Als toepassing kan gedacht worden aan een starre constructie op rubber veren die t.g.v. de harmonische excitatie grote verplaatsingen ondergaat. Tot nu toe is gekeken naar verstoringen in de omgeving van de eigenfrequenties en naar subharmonische resonantie, maar hier zijn de amplituden van de dempingskracht en de excitatiekracht zodanig dat we in een gebied van zg. chaotische responsie terecht komen. Fig. 3.20 geeft een typische responsie als functie van de tijd. In deze beweging is geen periodiciteit te bespeuren hoewel de excitatie harmonisch is. Als twee identieke systemen onder bijna identieke voorwaarden gestart worden divergeren de bewegingen exponentieel. Omdat er in fysische systemen altijd een afwijking is in beginvoorwaarden, kan divergentie in het *chaotisch regime* niet voorkomen worden (Fig. 3.21). De grote gevoeligheid voor beginvoorwaarden is ook goed te zien in het fasevlak (Fig. 3.22). Na verloop van tijd zijn de bewegingen ongecorrleerd. Om te zien of er toch nog een zekere orde in de chaos aanwezig is, is het geschikt om een zg. *Poincaré-afbeelding* te maken. Een Poincaré-doorsnijding of -afbeelding geeft in de faseruimte de oplossing voor  $t = 2\pi i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). Is de beweging periodiek met de periode van de excitatie dan vallen al de punten samen. In het geval van subharmonische trillingen van de orde  $n$  geeft de Poincaré-afbeelding  $n$  punten die steeds in dezelfde volgorde doorlopen worden. Voor een niet-periodieke beweging zoals de chaotische responsie verkregen met de gegeven vergelijking en parametercombinatie is er geen repeteren van de punten. Er is echter voor een dissipatief systeem wel een zeker patroon aanwezig. Zo liggen bijvoorbeeld alle punten behorend bij de stationaire toestand (d.w.z. na een groot aantal perioden van de excitatie) in het positieve halfvlak ( $x > 0$ ). Tekenend we een groot aantal punten van de 'stationaire' chaotische toestand dan ontstaat een zekere structuur afhankelijk van de combinatie  $c$  en  $B$  (zie Fig. 3.23 en Fig. 3.24). De Poincaré-afbeelding kan eenvoudiger of ingewikkelder zijn afhankelijk van het parametergebied en de resolutie.

Naast het stationaire, chaotische gedrag moet ook nog gekeken worden naar het inschakelverschijnsel voor willekeurige beginvoorwaarden. Fig. 3.25 geeft het inschakelverschijnsel voor de beginvoorwaarden:

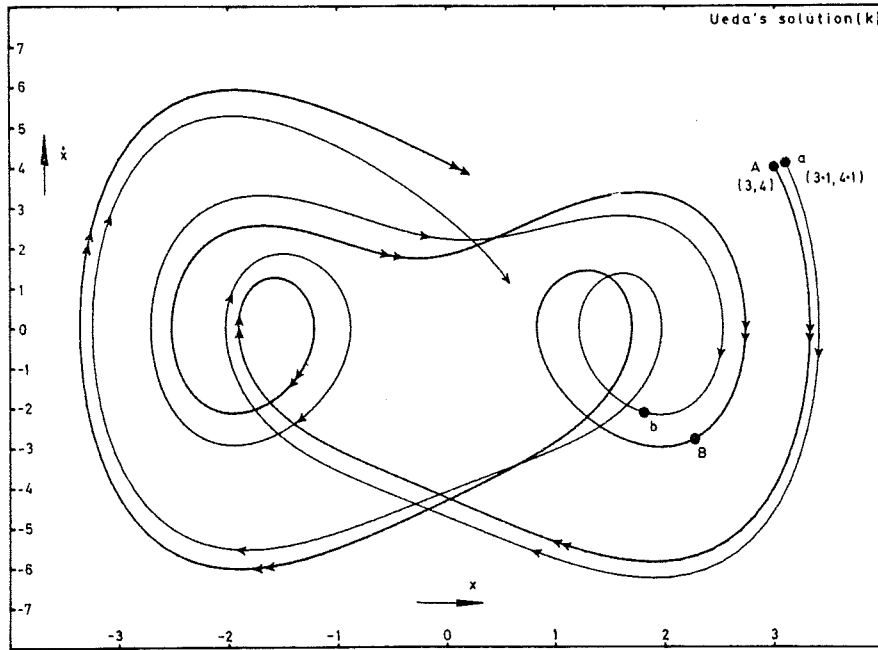
$$x(0) = 0 \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0$$



Figuur 3.20: Stationaire chaotische responsie



Figuur 3.21: Divergentie bij naburige startpunten



Figuur 3.22: Divergentie bij naburige startpunten

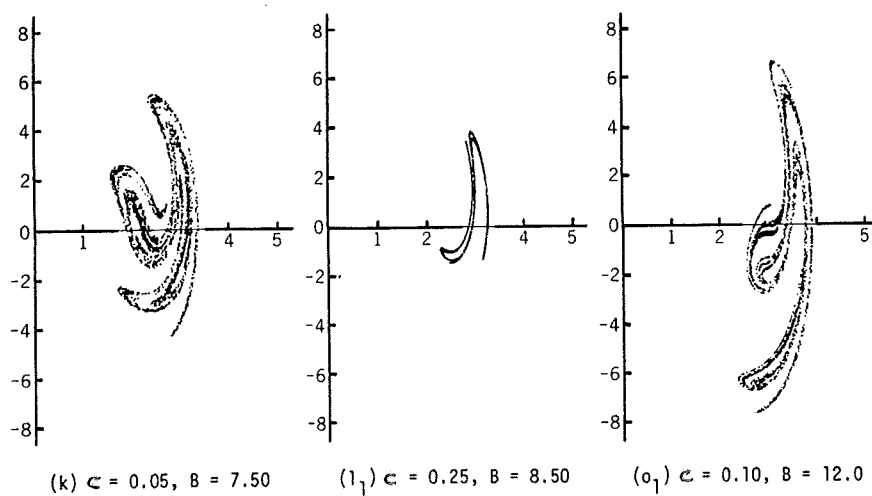
en ook voor

$$x(0) = -5 \quad ; \quad \dot{x}(0) = 0$$

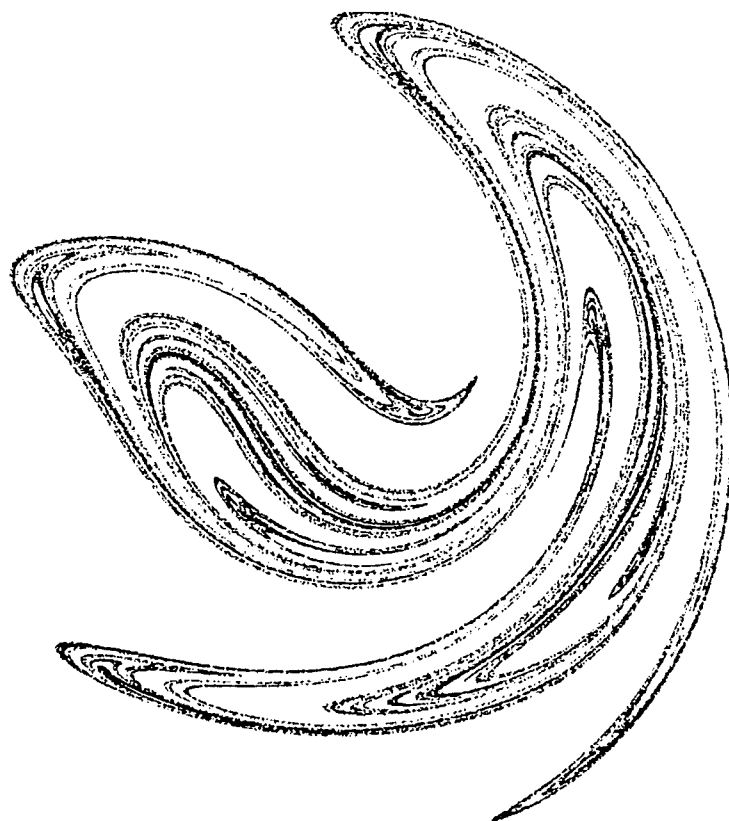
Als het inschakelverschijnsel buiten beschouwing wordt gelaten wordt voor beide gevallen weer het stationaire, chaotische gedrag gevonden als aangegeven met de Poincaré-afbeelding in Fig. 3.24. Omdat de beweging naar een goed gedefinieerd eindgedrag toegaat spreken we van een (chaotische) attractor. De chaotische attractor kan men definiëren als een *stabiele structuur van trajectorieën in een begrensd gebied van de faseruimte*.

### Attractoren en vertakking

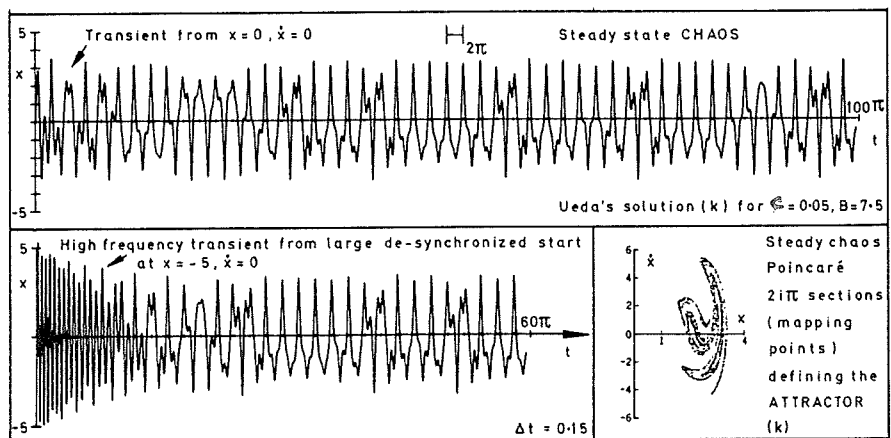
Hoewel het bestaan van chaotische attractoren relatief kort geleden is onderkend is het gedrag van 'transients' in een dissipatief systeem reeds lang bekend. Voor vrije trillingen van de Duffing-vergelijking is het gedrag als aangegeven in Fig. 3.26. Het stabiele evenwichtspunt  $x = 0$  ;  $\dot{x} = 0$  is een *puntattractor*. Op dezelfde wijze trekken ook stabiele periodieke bewegingen naburige trajectorieën in de faseruimte aan. Fig. 3.27 geeft vijf periodieke bewegingen voor één bepaalde parametercombinatie  $c$  en  $B$  (transients zijn weggelaten). De Poincaré-afbeeldingen geven één punt (1ste en 2de geval), twee punten (3de en 4de geval) of drie punten (5de geval).



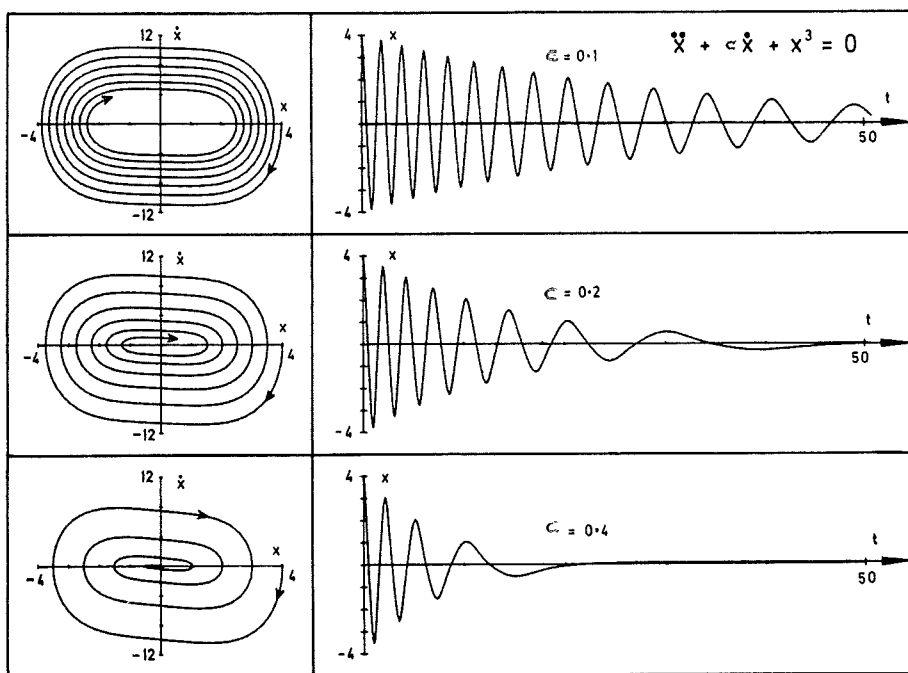
Figuur 3.23: Poincaré-afbeeldingen voor drie chaotische attractoren (Ueda 1980)



Figuur 3.24: Poincaré-afbeelding met hoge resolutie ( $c = 0,05; B = 7,50$ )



Figuur 3.25: Overgang van transient naar stationaire chaos



Figuur 3.26: Inschakelverschijnsel bij vrije trillingen van een Duffing-systeem

Er zijn dus drie soorten attractoren: *puntattractoren* (evenwichtspunten), *periodieke attractoren* (grenskringlopen) en *chaotische* of *vreemde attractoren*. Dit zijn de meest voorkomende stationaire situaties in dissipatieve systemen.

Voor ieder willekeurig systeem zoals het geëxciteerde Duffing-systeem begint een kwalitatieve beschrijving van het dynamisch gedrag met de identificatie van alle mogelijke attractoren in de faseruimte. In niet-lineaire systemen kunnen periodieke en chaotische attractoren naast elkaar bestaan. Zijn de attractoren bekend dan is het interessant voor elke attractor te weten welk gebied van beginvoorwaarden daarbij behoort. Dit wordt het attractiegebied genoemd. Samen vormen de attractiegebieden de totale faseruimte. De attractiegebieden kunnen met een groot aantal startpunten vastgelegd worden, maar hiervoor zijn ook efficiëntere gereedschappen ontwikkeld.

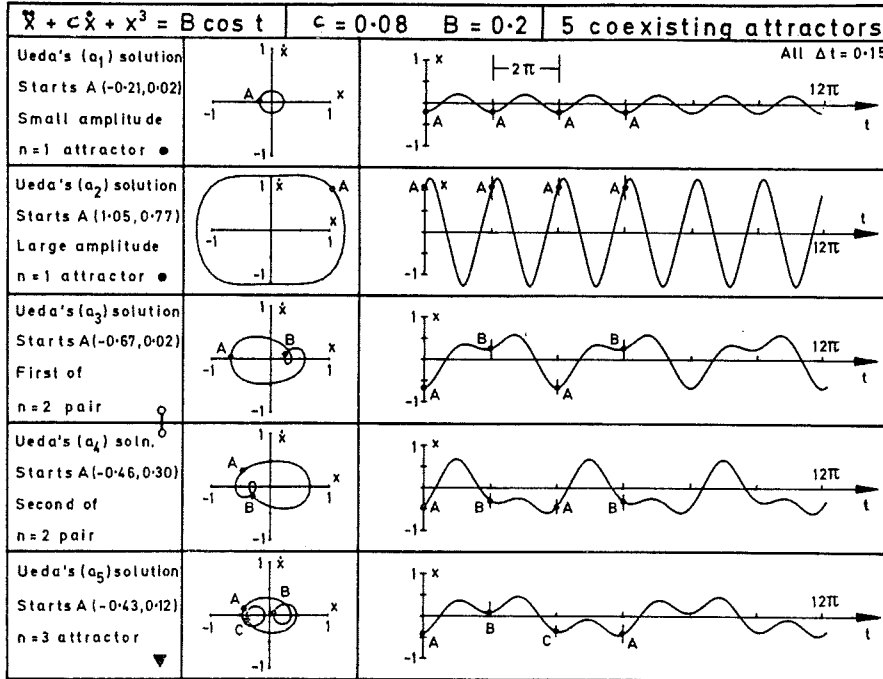
Zijn de attractoren en attractiegebieden bekend voor een bepaalde combinatie van systeemparameters, dan kunnen soortgelijke diagrammen getekend worden voor andere systeemparameters. Ueda heeft het Duffing-systeem in kaart gebracht. Fig. 3.28 geeft in het  $B - c$ -vlak de gebieden met verschillende attractoren. Uit de figuur blijkt dat er een relatief groot gebied is waar chaos optreedt of waar een chaotische attractor naast een andere attractor mogelijk is. De gebieden in de parameter ruimte worden begrensd door lijnen. Op deze lijnen treedt een kwalitatieve verandering van het gedrag of een bifurcatie (vertakking) op. Het is van groot belang de aard van deze bifurcaties te onderzoeken.

Ruwweg kunnen we zeggen dat we te maken hebben met twee soorten bifurcaties. Bij de eerste soort zijn de eigenwaarden van het lokaal gelineariseerde systeem reëel en passeert een reële eigenwaarde de imaginaire as bij verandering van een systeemparameter. Dit heeft te maken met stijfheidsverandering. Bij de tweede soort bifurcaties (Hopf bifurcaties) passeren twee toegevoegde complexe eigenwaarden de imaginaire as. Dit heeft te maken met een overgang van positieve naar negatieve demping.

### 3.4.2 Chaotisch gedrag van een botsend systeem

Als voorbeeld wordt het limietgeval van een massa-veer-dempersysteem met een bilineaire veer karakteristiek beschouwd (Fig. 3.29). Voor  $x < 0$  is de veerstijfheid oneindig d.w.z. er treedt een elastische botsing op telkens als  $x$  nul wordt.

Subharmonische resonantie en chaotisch gedrag kunnen daarbij optreden door *discontinuïteit in stijfheid*. Men kan o.a. denken aan schepen die zijn afgemeerd in de haven en aanstoten tegen stijve stootblokken. De stijfheid van het afmeersysteem is meestal zo laag dat de verhouding tussen de stijf-



Figuur 3.27: Periodieke attractoren van de Duffing-vergelijking. Co-existentie van periodieke attractoren

heid van de blokken en de stijfheid van het afmeersysteem als oneindig te beschouwen is.

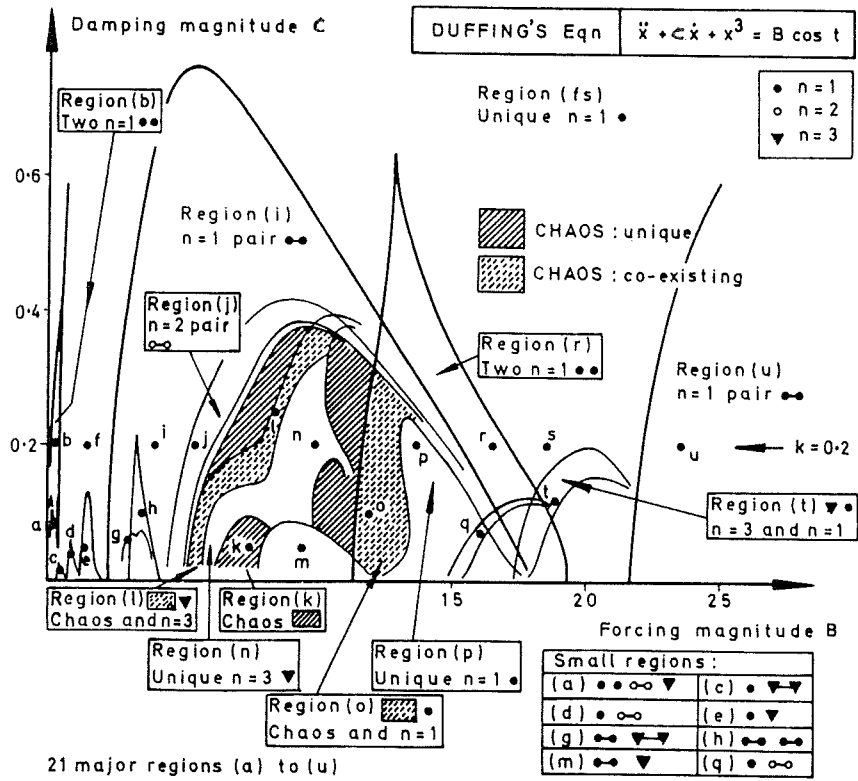
Het gedrag van de impact-slinger is gecompliceerd. Het is mogelijk dat subharmonische resonantie optreedt en ook kan een cascade van periode verdubbelingen de route naar chaos aangeven. De dimensieloze vergelijking voor de impact-slinger kan als volgt worden geschreven:

$$\ddot{x} + \frac{2\zeta}{\eta}\dot{x} + \frac{1}{4\eta^2}x = \frac{1}{\eta^2} \sin \tau \quad (x > 0) \quad (3.70)$$

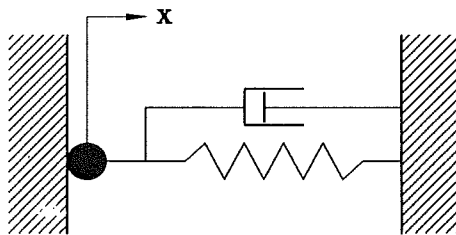
De resonantiekrommen hiervan zijn numeriek onderzocht (Thompson en Ghafari) en weergegeven in Fig. 3.30. Telkens als  $x$  nul wordt keert de snelheid om.

Fig. 3.30 geeft het resultaat voor  $\zeta = +0,1$ . In het gebied  $\eta > 1$  zijn de subharmonische pieken gegeven. Tussen  $\eta = 4$  en  $\eta = 5$  blijkt in een strook chaos op te treden. De stationaire Poincaré-afbeelding geeft Fig. 3.31 voor een serie waarden van de controle parameter  $\eta$ . Fig. 3.32 geeft een serie periodeverdubbelingen van  $n = 4$  tot  $n = 128$ . De serie vertakkingen past precies in het zg. Feigenbaum-scenario voor de route naar chaos en ook de constante van Feigenbaum wordt goed benaderd ( $\eta_{32}/\eta_{64} = 4,64$  ;

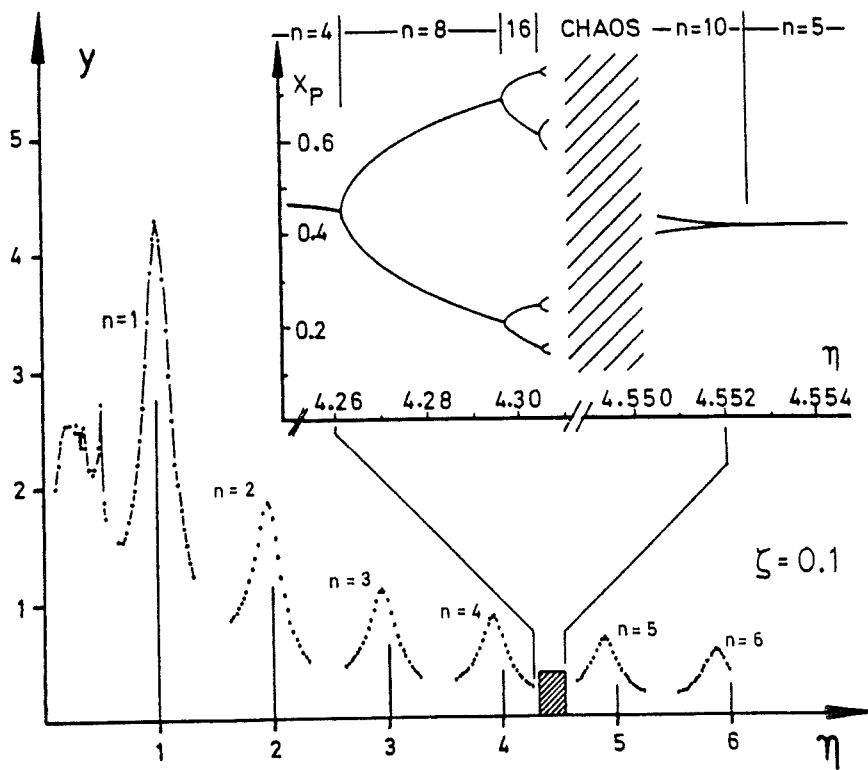




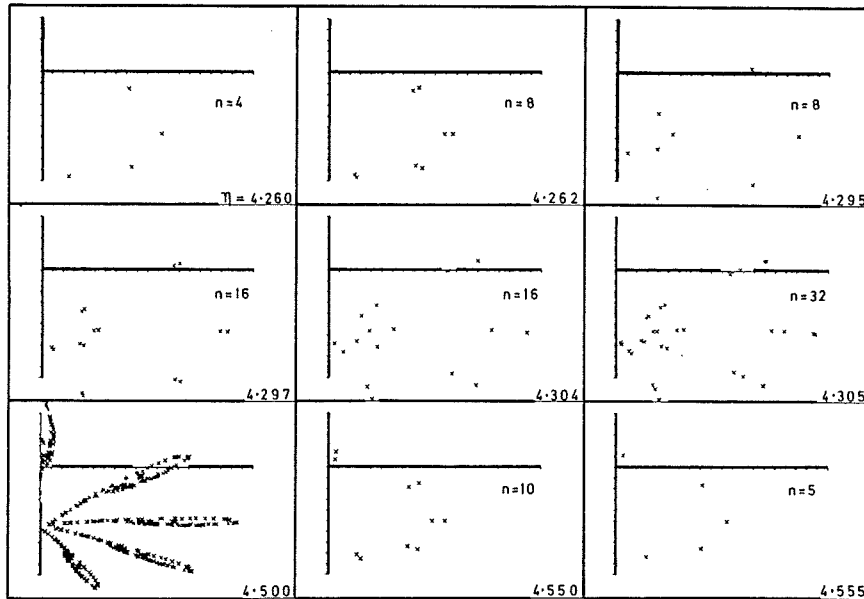
Figuur 3.28: Gebieden van de verschillende attractoren van de Duffing-vergelijking als functie van  $B$  en  $c$ . (Ueda 1980)



Figuur 3.29: Slinger met aanslag (Impact-slinger)

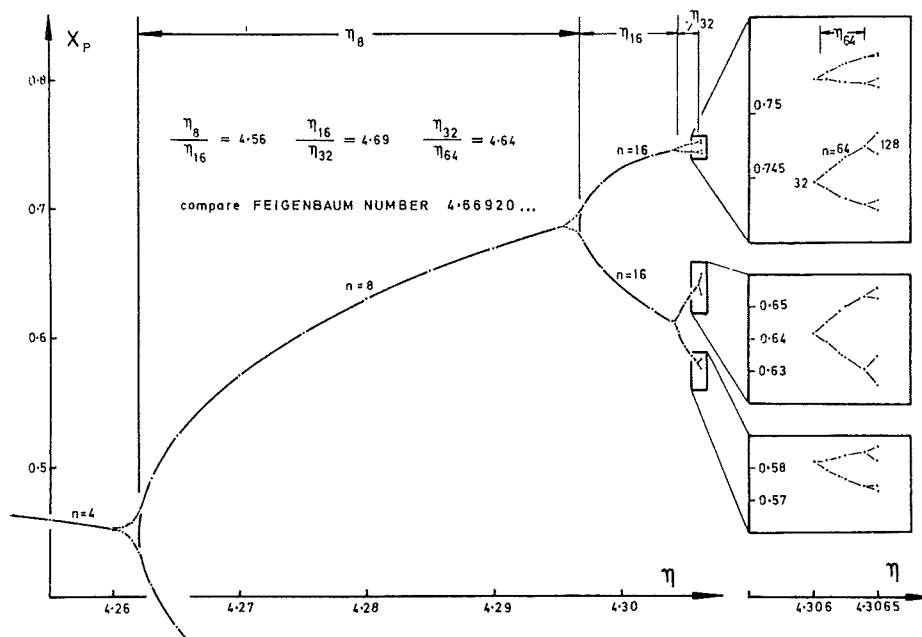


Figuur 3.30: Resonantiekrommen voor de impactslinger met een chaotisch gebied

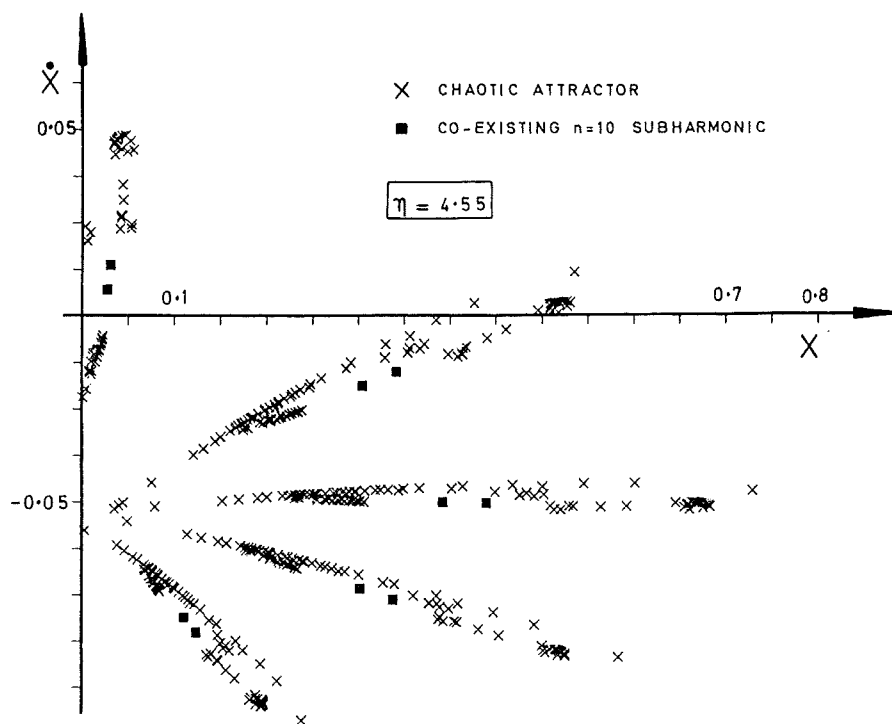


Figuur 3.31: Een serie stationaire Poincaré-afbeeldingen met periode verdubbelingen die naar chaos leiden voor  $\eta = 4, 5$  ( $\zeta = 0, 1$ )

Feigenbaumgetal: 4,66920). Met deze vaste verhouding bereikt de cascade een accumulatiepunt ( $n = \infty$ ) waar chaos optreedt. De Poincaré-afbeelding voor  $\eta = 4, 5$  blijkt inderdaad een chaotische attractor te zijn in de vorm van een handvormige figuur. Om er zeker van te zijn dat we te maken hebben met een stationaire toestand zijn de eerste 1000 cycli niet opgetekend. Wordt  $\eta$  verminderd vanuit het gebied van de 5de subharmonische  $\eta = 5$  dan treedt er slechts één verdubbeling op naar  $\eta = 10$ . Schijnbaar wordt het chaotisch regime van boven begrensd door een andere structuur dan de eenvoudige perioden-verdubbelingscascade die waargenomen wordt bij toename van  $\eta$ . Het blijkt dat de chaotische beweging en de subharmonische beweging met  $\eta = 10$  gelijktijdig kunnen bestaan (zie ook Fig. 3.33).



Figuur 3.32: Periode verdubbelingen die naar chaos leiden



Figuur 3.33: Coexistentie van een chaotische attractor en een subharmonische oplossing. De beginvoorwaarden bepalen de oplossing



# Hoofdstuk 4

## Kinematica en Dynamica van Multi-Body Systemen

### 4.1 Inleiding

De klassieke behandeling van de kinematica en de dynamica van mechanismen werd ontwikkeld voor starre lichamen of starre schakels. Bepaalde verbindingen tussen de schakels worden dan aangegeven met nevenvoorwaarden. In een eindige elementen beschrijving kunnen de schakels vervormbaar zijn. Een verbinding wordt dan verkregen door te stellen dat de schakels/elementen gezamenlijke knooppunten bezitten waarin bepaalde vrijheidsgraden voor beide elementen hetzelfde zijn. Tijdens een beweging stellen we in de eindige-elementen beschrijving eisen aan de vervormingsmogelijkheden die bepaald zijn door in de vrijheidsgraden van elk element de starre bewegingen te elimineren. Het limietgeval dat alle lichamen star zijn wordt verkregen door alle vervormingsparameters nul te stellen.

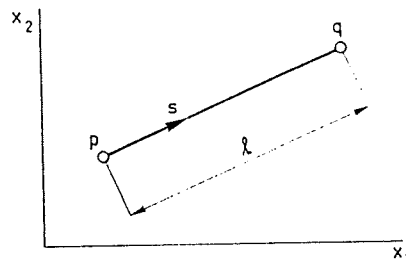
De vervormingsparameters  $\varepsilon_i$  zullen in de discrete beschrijving niet-lineaire functies zijn van de knooppuntscoördinaten  $x_j$ :

$$\varepsilon_i = D_i(x_j) \quad (4.1)$$

Hieruit volgt

$$\dot{\varepsilon}_i = D_{i,j} \dot{x}_j \quad (4.2)$$

d.w.z. de ruimte van de vervormingssnelheden is een lineaire afbeelding van de ruimte van de snelheidscomponenten. De nulruimte van de afbeelding bepaalt op elk moment de ruimte van vrijheidsgraden van het mechanisme met starre schakels. Omdat uitgegaan wordt van vervormingen die niet-lineaire functies zijn van de knooppuntscoördinaten kan de uitbreiding van starre



Figuur 4.1: Staaf tussen twee scharnieren

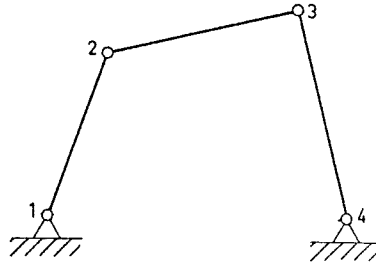
naar vervormbare schakels op een zeer natuurlijke manier verkregen worden. We moeten dan wel aangeven hoe de constitutieve vergelijkingen zijn die het verband geven tussen vervormings- en spanningsparameters. Het kan zijn dat de vervormingen lineair elastisch zijn maar met de constitutieve vergelijkingen kunnen we ook visceuze dempers en actuatoren of andere actieve elementen in een mechanisme modelleren.

De bewegingsvergelijkingen voor het meer-lichamensysteem zullen zoals gebruikelijk bij een eindige elementenformulering worden afgeleid met het beginsel van virtuele arbeid of met het equivalente beginsel van virtueel vermogen. Als we de vrijheidsgraden van het mechanisme met starre schakels (die we de gegeneraliseerde verplaatsingen zullen noemen) samen met eventuele vervormingsparameters als de systeemp parameters kiezen, dan krijgen we een niet-lineair systeem van gewone differentiaalvergelijkingen van de tweede orde. Met gegeven beginvoorwaarden kunnen deze bewegingsvergelijkingen met een predictor-correctormethode worden geïntegreerd. In de volgende paragrafen komen we hierop in detail terug. De programmapakketten PLANAR (voor vlakke mechanismen) en SPACAR (voor ruimtelijke mechanismen) zijn op deze methode gebaseerd.

## 4.2 Numerieke behandeling van de kinematica

We beschouwen eerst de eenvoudigste schakel in een vlak mechanisme nl. een staaf tussen twee wrijvingsloze scharnieren (Fig. 4.1). Met een aangenomen lineair verplaatsingsveld tussen de knooppunten bepalen de vier coördinaten van de eindpunten van de schakel zowel de positie als de lengte van het element.

Als vervormingsparameter voor een willekeurige schakel tussen de punten  $p$  en  $q$  wordt gekozen



Figuur 4.2: Vierstangenmechanisme

$$\varepsilon = \frac{l^2 - l_o^2}{2l_o^2} = \frac{1}{2l_o^2} \left[ (x_1^q - x_1^p)^2 + (x_2^q - x_2^p)^2 - l_o^2 \right] \quad (4.3)$$

Met deze keuze bestaan er slechts eerste en tweede afgeleiden naar de knooppuntscoördinaten. In een mechanisme met starre schakels geldt voor elk element de nevenvoorwaarde  $\varepsilon = 0$ . Voor het eenvoudige, vlakke mechanisme met drie staven in Fig. 4.2 zijn de knooppuntscoördinaten elementen van een 8-dimensionale ruimte. Het is de directe som van de ruimte van vrijheidsgraden  $x_k^c$  en de ruimte van vaste coördinaten  $x_\ell^o$ .

Met de drie staven hebben we drie vervormingsparameters die niet-lineaire functies zijn van de betreffende knooppuntscoördinaten (4.3) dus

$$\varepsilon_i = D_i(x_k^c, x_\ell^o) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.4)$$

De vectoren  $x^c$  en  $x^o$  zijn in dit voorbeeld

$$x^{cT} = [x_1^2 \quad x_2^2 \quad x_1^3 \quad x_2^3] \quad ; \quad x^{oT} = [x_1^1 \quad x_2^1 \quad x_1^4 \quad x_2^4] \quad (4.5)$$

Uit (4.4) volgt dat op elk moment geldt

$$\dot{\varepsilon}_i = D_{i,k}^c \dot{x}_k^c \quad (4.6)$$

en voor onvervormbare schakels

$$D_{i,k}^c \dot{x}_k^c = 0 \quad (4.7)$$

Vergelijking (4.6) geeft de lineaire afbeelding van de ruimte van de snelheidscomponenten  $\dot{x}_k^c$ , op de ruimte van de vervormingssnelheden. Voor onvervormbare schakels geldt dat de snelheidscomponenten moeten liggen in de nulruimte van de lineaire afbeelding.

Als de rang van  $D^c = [D_{i,j}^c]$  gelijk is aan het aantal vervormingscomponenten, dan kunnen we voor (4.6) schrijven



$$[D^{cc} D^{cm}] \dot{x}^c = \dot{\varepsilon} \rightarrow [I \quad B^*] \dot{x}^c = (D^{cc})^{-1} \dot{\varepsilon} \quad (4.8)$$

waarin

$$B^* = (D^{cc})^{-1} D^{cm} \quad (4.9)$$

De algemene oplossing van (4.8) is dan te schrijven als

$$\dot{x}_k^c = \Sigma_{ki}^o \dot{\varepsilon}_i + Z_{kj}^* \dot{x}_j^m \quad (4.10)$$

met

$$\Sigma^o = \begin{bmatrix} (D^{cc})^{-1} \\ O \end{bmatrix}, \quad Z^* = \begin{bmatrix} -B^* \\ I \end{bmatrix}$$

De vector  $Z_{kj}^* \dot{x}_j^m$  is de algemene oplossing van het stelsel homogene vergelijkingen. Dit zijn dus snelheden zonder vervorming. De kolommen van  $Z^*$  vormen in de ruimte van de snelheden  $\dot{x}^c$  een basis voor de nulruimte van de lineaire afbeelding. Is  $i$  het aantal vervormingscomponenten en  $k$  het aantal componenten van  $x^c$  dan worden op deze wijze de laatste  $k - i$  componenten van  $x^c$  gekozen als de gegeneraliseerde coördinaten ( $x^m$ ) die de beweging met starre schakels volledig beschrijven. In het voorbeeld van Fig. 4.2 hebben we dus één gegeneraliseerde coördinaat en zijn de componenten gekozen in de volgorde aangegeven in (4.5) dan is in de boven aangegeven behandeling  $x_2^3$  deze gegeneraliseerde coördinaat.

Is de rang van de matrix  $D^c$  lager dan het aantal vervormingsparameters dan is het aantal onafhankelijke vergelijkingen in (4.6) minder. Volgens de lineaire algebra theorie kan door lineaire transformaties en verwisseling van rijen en kolommen het stelsel vergelijkingen (4.6) altijd teruggebracht worden tot

$$\begin{bmatrix} I & B^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{x}^c = \begin{bmatrix} (D^{cc})^{-1} & 0 \\ -B^T & I \end{bmatrix} \dot{\varepsilon} \quad (4.11)$$

Schrijven we formeel weer de oplossing als (4.10)

$$\dot{x}_k^c = \Sigma_{ki}^o \dot{\varepsilon}_i + Z_{kj}^* \dot{x}_j^m$$

dan geldt nu

$$\Sigma^o = \begin{bmatrix} (D^{cc})^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Z^* = \begin{bmatrix} -B^* \\ I \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

In het geval de schakels vervormbaar zijn dan moeten volgens (4.11) de vervormingssnelheden voldoen aan de continuïteitsvoorwaarde

$$Z\dot{\varepsilon} = 0 \quad (4.13)$$

met

$$Z = \begin{bmatrix} -B^T & I \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Het aantal vergelijkingen in (4.13) is gelijk aan het aantal statisch onbepaalden in de constructie. Dit is direct in te zien door de evenwichtsvergelijkingen

$$D^{cT}\sigma = f^c \quad (4.15)$$

te beschouwen. Is de rang van  $D^c$  kleiner dan het aantal spanningscomponenten dan is de constructie statisch onbepaald en is het aantal extra benodigde vergelijkingen gelijk aan het aantal statisch onbepaalden.

De tweede orde kinematica van een mechanisme volgt uit (4.6) door differentiatie, dus

$$\ddot{\varepsilon}_i = D_{i,k}^c \ddot{x}_k^c + D_{i,kl}^c \dot{x}_k^c \dot{x}_l^c$$

of

$$D_{i,k}^c \ddot{x}_k^c = \ddot{\varepsilon}_i - D_{i,kl}^c \dot{x}_k^c \dot{x}_l^c \quad (4.16)$$

Omdat hier weer dezelfde lineaire afbeelding een rol speelt, kunnen we (4.16) ook schrijven in de vorm

$$\begin{bmatrix} I & B^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ddot{x}^c = \begin{bmatrix} (D^{cc})^{-1} & 0 \\ -B^T & I \end{bmatrix} (\ddot{\varepsilon} - D_{,kl}^c \dot{x}_k^c \dot{x}_l^c) \quad (4.17)$$

De algemene oplossing wordt dan

$$\ddot{x}_k^c = \Sigma_{ki}^o (\ddot{\varepsilon}_i - D_{i,lm}^c \dot{x}_l^c \dot{x}_m^c) + Z_{kj}^* \ddot{x}_j^m \quad (4.18)$$

Voor de bepaling van de nulde orde kinematica van mechanismen met starre schakels ( $\varepsilon = 0, \dot{\varepsilon} = 0$ ) moeten uit (4.10) en (4.18) de snelheden  $\dot{x}_k^c$  en de versnellingen  $\ddot{x}_k^c$  bepaald worden. De tweede orde benadering voor de positie van het mechanisme na een tijdsincrement  $\Delta t$  volgt dan uit

$$x_k^c(t + \Delta t) = x_k^c(t) + \dot{x}_k^c(t)(\Delta t) + \frac{1}{2} \ddot{x}_k^c(t)(\Delta t)^2 \quad (4.19)$$

Met deze benadering vinden we (4.4)

$$\Delta \varepsilon_i^r = D_i(x_k^c, x_l^o) \neq 0$$

Er is dus een restvervorming  $\Delta \varepsilon_i^r$  aanwezig die in de volgende iteratiestap gecorrigeerd moet worden. Dit geeft als we ons nu beperken tot de eerste orde correctie

$$\Delta x_k^c = -\Sigma_{ki}^o \Delta \varepsilon_i^r \quad (4.20)$$

Deze correctieprocedure wordt herhaald tot de residuele vervormingen voldoende klein zijn. Fig. 4.3 geeft het stroomschema hiervoor. In dit proces moet natuurlijk  $\Sigma_{ki}^o$  voor elke stap aangepast worden. Gezien het feit dat bij de eerste benadering reeds voldaan is aan de eerste en tweede orde termen mag verwacht worden dat het iteratieproces snel convergeert.

Voor een staafelement  $k$  als in Fig. 4.1 vinden we met (4.3)

$$[D_{,i}^k] = \frac{1}{l_o^2} [-(x_1^q - x_1^p) \quad -(x_2^q - x_2^p) \quad (x_1^q - x_1^p) \quad (x_2^q - x_2^p)] \quad (4.21)$$

$$[D_{,ij}^k] = \frac{1}{l_o^2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

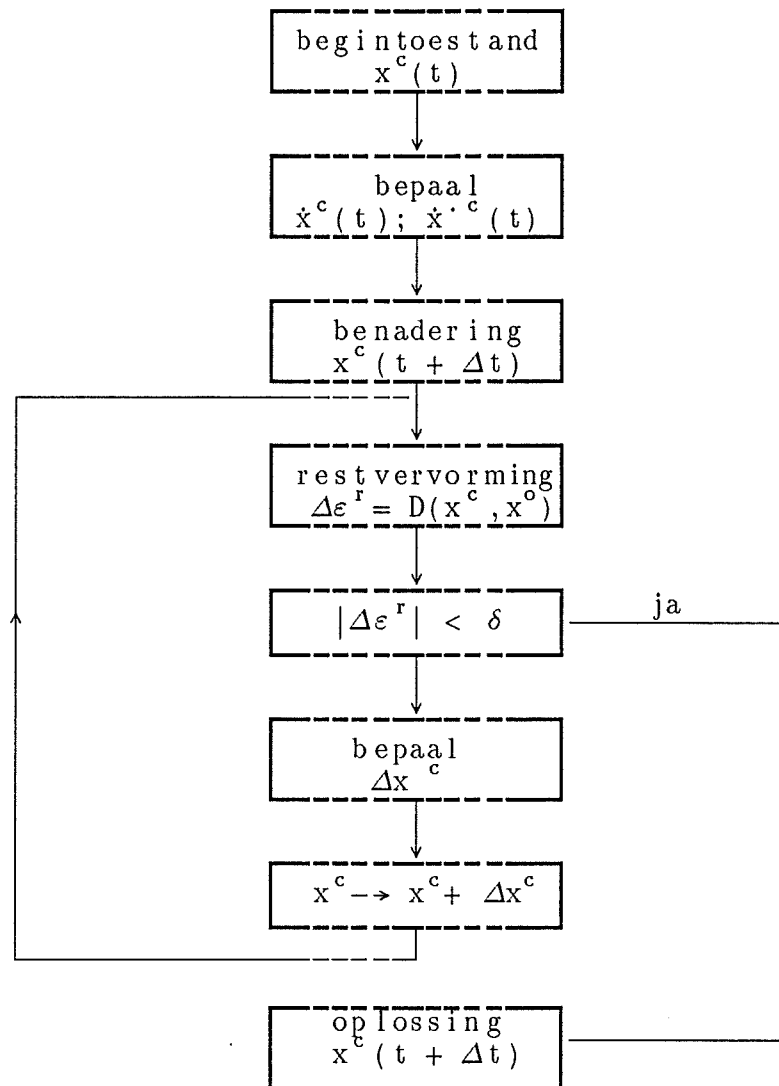
### 4.3 Numerieke behandeling van de dynamica

Ook hier zal de procedure toegelicht worden aan de hand van het eenvoudigste element in een vlak mechanisme, namelijk de staaf tussen twee scharnieren. We veronderstellen dat de buigvervorming door de massakrachten verwaarloosbaar is, zodat er voor elk element één vervormingsparameter is als aangegeven in (4.3).

Tussen de eindpunten wordt zoals gebruikelijk een lineaire verplaatsingsverdeling verondersteld, dus

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^p & x_1^q \\ x_2^p & x_2^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 - s/l \\ s/l \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Volgens het beginsel van virtuele arbeid is de arbeid van krachten op het mechanisme nul voor alle virtuele verplaatsingen zonder vervorming. De knooppuntskrachten zijn elementen in de ruimte die dual is met de ruimte van de virtuele knooppuntcoördinaten. Voor de dynamicaproblemen moeten we niet alleen de virtuele arbeid van de uitwendige belastingen beschouwen maar ook die van de massakrachten volgens d'Alembert. Met de lineaire verdeling van de virtuele verplaatsingen vinden we voor de bijdrage van één willekeurige schakel  $p - q$ :



Figuur 4.3: Stroomschema voor de kinematica met starre schakels

$$\begin{aligned}
& - \int_0^l m [\delta x_1 \delta x_2] \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} ds \\
& = - \frac{ml}{6} [\delta x_1^p \delta x_2^p \delta x_1^q \delta x_2^q] \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1^p \\ \ddot{x}_2^p \\ \ddot{x}_1^q \\ \ddot{x}_2^q \end{bmatrix} \\
& = -\delta x^T M \ddot{x}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Hierin is de massa per lengte-eenheid  $m$  constant verondersteld. De matrix  $M$  wordt de consistente massa-matrix van het element genoemd d.w.z. de massamatrix behorend bij de verplaatsingsverdeling als in (4.23). Voor een volledig mechanisme, zoals bijvoorbeeld in Fig. 4.2 gegeven, wordt de virtuele arbeidsvergelijking

$$\delta x_k^c [f_k^c - M_{kl} \ddot{x}_l^c] = 0 \quad \forall \quad \delta x_k^c \in \{ \delta x_k^c \mid D_{i,k}^c \delta x_k^c = 0 \} \tag{4.25}$$

De nevenvoorwaarde wordt met een vector van multiplicatoren van Lagrange ( $\sigma$ ) toegevoegd aan (4.25), dus

$$\delta x_k^c (f_k^c - M_{kl} \ddot{x}_l^c) - \sigma_l D_{\ell,k}^c \delta x_k^c = 0 \quad \forall \quad \delta x_k^c \tag{4.26}$$

of

$$D_{\ell,k}^c \sigma_\ell = f_k^c - M_{k\ell} \ddot{x}_\ell^c \tag{4.27}$$

De multiplicatoren  $\sigma_i$  kunnen we interpreteren als gegeneraliseerde spanningen die dual zijn met de gekozen gegeneraliseerde vervormingsparameters. Het is eenvoudig in te zien dat voor het statische geval ( $\ddot{x}_i^c = 0$ ) en staafelementen tussen scharnieren (Fig. 4.2) deze spanningsparameters gelijk zijn aan de normaalkrachten in de staven vermenigvuldigd met de lengte.

Vergelijking (4.27) geeft een lineaire afbeelding van de ruimte van de spanningen op de krachtenruimte. De matrix die de afbeelding bewerkstelligt is de getransponeerde van de matrix in (4.6). Via dezelfde procedure als in de vorige paragraaf reduceren we het stelsel vergelijkingen tot

$$\begin{bmatrix} I & \bar{B} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sigma = \begin{bmatrix} (D^{ccT})^{-1} & 0 \\ -\bar{B}^{*T} & I \end{bmatrix} (f^c - M \ddot{x}^c) \tag{4.28}$$

of

$$\sigma_i = \Sigma_{ki}^o (f_k^c - M_{kl} \ddot{x}_l^c) + \bar{Z}_{ji} \sigma_j^r \tag{4.29}$$

$$\bar{Z}_{kj}^* (f_k^c - M_{kl}\ddot{x}_l^c) = 0 \quad (4.30)$$

waarin

$$\bar{Z}^T = \begin{bmatrix} -\bar{B} \\ I \end{bmatrix} ; \quad \bar{Z}^* = \begin{bmatrix} -\bar{B}^* \\ I \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

De term  $\bar{Z}_{ji}\sigma_j^r$  geeft de algemene oplossing van de homogene vergelijking d.w.z. alle mogelijke spanningstoestanden zonder uitwendige belasting. De kolommen van  $\bar{Z}^T$  vormen een basis van de nulruimte van de lineaire afbeelding in de ruimte van de spanningen. Het aantal componenten van  $\sigma^r$  geeft het aantal statisch onbepaalden aan. Omdat  $\bar{Z}_{ji}\sigma_j^r$  voor willekeurige  $\sigma^r$  een spanningstoestand geeft zonder uitwendige belasting geldt met de virtuele arbeidsvergelijking

$$\dot{\varepsilon}_i \bar{Z}_{ji}\sigma_j^r = 0 \quad \forall \quad \sigma^r \quad (4.32)$$

D.w.z. de kern van de afbeelding  $D^{cT}$  ( $\text{Ker } D^{cT}$ ) is orthogonaal met de beeldruimte van  $D^c$  ( $\text{Im } D^c$ ) en hieruit volgt

$$\bar{Z}_{ji}\dot{\varepsilon}_i = 0 \quad (4.33)$$

Dit stelsel is identiek met (4.13) zodat  $\bar{B} = B$  en  $\bar{Z} = Z$ . Door (4.25) toe te passen voor virtuele verplaatsingen

$$\delta x_k^c = Z_{kj}^* \delta x_j^m \quad (4.34)$$

waarin  $\delta x^m$  willekeurig is, volgt dat ook  $\text{Ker } D^c$  en  $\text{Im } D^{cT}$  orthogonaal zijn en dus

$$Z_{kj}^* (f_k^c - M_{kl}\ddot{x}_l^c) = 0 \quad (4.35)$$

Met (4.30) concluderen we dat ook  $\bar{B}^* = B^*$  en  $\bar{Z}^* = Z^*$ . De vergelijkingen (4.29) en (4.30) worden dus resp.

$$\sigma_i = \Sigma_{ki}^o (f_k^c - M_{kl}\ddot{x}_l^c) + Z_{ji}\sigma_j^r \quad (4.36)$$

en

$$Z_{kj}^* (f_k^c - M_{kl}\ddot{x}_l^c) = 0 \quad (4.37)$$

In het geval van *onvervormbare schakels* ( $\varepsilon = o$ ) en een *statisch bepaalde constructie* ( $Z_{ji} = 0$ ) kunnen we door substitutie van (4.10) en (4.18) in (4.37) vinden

$$Z^{*T} M Z^* \ddot{x}^m = Z^{*T} (f^c - M \Sigma^o g) \quad (4.38)$$

waarin

$$g_i = -D_{i,mn}^c \dot{x}_m^c \dot{x}_n^c \quad ; \quad \dot{x}_m^c = Z_{mj}^* \dot{x}_j^m \quad (4.39)$$

We moeten bedenken dat de elementen van de matrices  $Z^*$  en  $\Sigma^o$  niet-lineaire functies zijn van de knooppuntscoördinaten. Hebben we niet te maken met een staafelement dan kan het zijn dat ook  $D_{i,mn}$  en de termen van de massamatrix afhankelijk zijn van de knooppuntscoördinaten. De numerieke integratie van (4.38) moet daarom na elke stap gepaard gaan met een aanpassing van de coördinaten net als in de vorige paragraaf. Als de constructie zoals nu wordt verondersteld statisch bepaald is dan kunnen ook de gegeneraliseerde spanningen na elke stap in het iteratieproces bepaald worden.

Zodra de gegeneraliseerde coördinaten  $x^m$  bekend zijn uit het onderzoek van de afbeelding (4.6) dan zijn ook de beginvoorwaarden voor  $x_j^m$  en  $\dot{x}_j^m$  uit te drukken in de gegeven beginvoorwaarden van de knooppuntscoördinaten.

Nu beschouwen we weer het algemene geval waarbij een aantal vervormingsparameters niet nul gesteld kan worden. De bewegingsvergelijkingen (4.37) en de vergelijkingen voor de gegeneraliseerde spanningen (4.36) zijn dan direct gekoppeld door de vervormingen zoals volgt uit (4.18), tenzij de vervormingen voorgeschreven functies van de tijd zijn. Dit laatste komt niet voor bij mechanismen met eenvoudige staafelementen. De rol van actuatoren in mechanismen kunnen echter beschreven worden door elementen met voorgeschreven vervormingen zoals we later zullen zien.

We veronderstellen een uniek verband tussen de vervormingen en de gegeneraliseerde spanningen aangegeven door

$$\sigma_i = S_{ij} \varepsilon_j \quad (4.40)$$

Substitutie van (4.10), (4.18) en (4.40) in (4.36) en (4.37) geeft

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} Z^{*T} M Z^* & Z^{*T} M \Sigma^o \\ \Sigma^{oT} M Z^* & \Sigma^{oT} M \Sigma^o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}^m \\ \ddot{\varepsilon} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^m \\ \varepsilon \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} Z^{*T} \\ \Sigma^{oT} \end{bmatrix} (f^c - M \Sigma^o g) - \begin{bmatrix} 0 \\ Z^T S^r D^r \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.41)$$

met

$$g_i = -D_{i,mn}^c \dot{x}_m^c \dot{x}_n^c \quad ; \quad \dot{x}_n^c = \Sigma_{ni}^o \dot{\varepsilon}_i + Z_{kj}^* \dot{x}_j^m \quad (4.42)$$

De analyse van de lineaire afbeelding (4.6) bepaalt de gegeneraliseerde coördinaten  $x_i^m$  en de duale afbeelding (4.27) bepaalt of er statisch onbepaalde delen in de constructie zijn. Als dit het geval is dan bepaalt (4.36) de spanningsparameters die beschouwd worden als de statisch onbepaalde spanningen  $\sigma^r$ .

Voor elastische schakels worden deze spanningen volledig bepaald door de corresponderende vervormingen  $D^r(x_k^c, x_k^o)$ . In (4.41) is dit verband aangegeven met

$$\sigma_i^r = S_{ij}^r D_j^r \quad (4.43)$$

De matrix  $S^r$  kan worden afgeleid uit (4.40). In het geval een element zich visceus gedraagt dan is er in plaats van (4.40) een vast verband tussen de spanningsparameters en de vervormingssnelheden.

Voor de numerieke integratie van (4.41) is het noodzakelijk dat een integratieroutine gebruikt wordt die automatisch de tijdstap van de integratie kan aanpassen. De maximale tijdstap wordt in het geval een expliciete integratieroutine gebruikt wordt, bepaald door de hoogste eigenfrequentie in het systeem. Voor elastische maar wel stijve schakels kan de hoogste eigenfrequentie zeer hoog zijn en moet de tijdstap dus zeer klein zijn met het oog op de stabiliteit van het proces.

## 4.4 Elementtypen

### Staafelement

In het voorgaande is een toelichting gegeven aan de hand van een vlakmechanisme met staafelementen tussen wrijvingsloze scharnieren. In het algemene geval hebben we echter te maken met mechanismen in de drie-dimensionale ruimte. De positie van een ruimtelijk staafelement  $k$  tussen de wrijvingsloze bolscharnieren is ook bepaald door de coördinaten van de eindpunten.

De vector van knooppuntscóördinaten is voor zo'n element

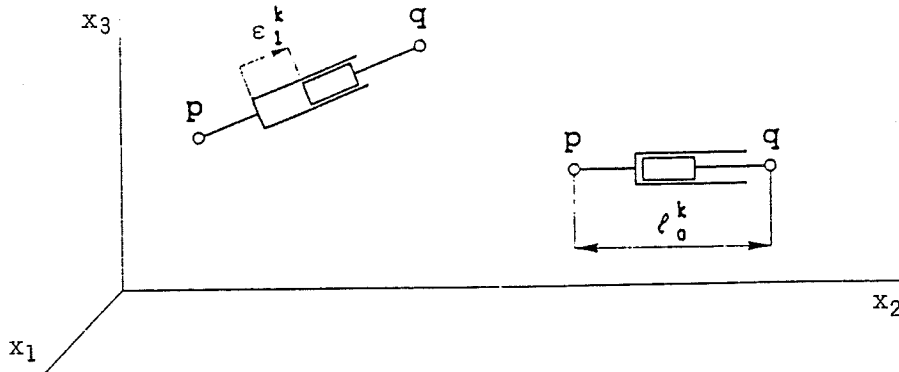
$$x^{kT} = [x^{pT} x^{qT}]^k = [x_1^p \quad x_2^p \quad x_3^p \quad x_1^q \quad x_2^q \quad x_3^q]^k \quad (4.44)$$

De rotatie om de as wordt niet bepaald door de zes coördinaten. Het aantal vrijheidsgraden als star lichaam dat vastgelegd wordt is dan vijf, zodat er één vervormingsmogelijkheid overblijft. Hiervoor kiezen we net als in paragraaf 4.2:

$$\varepsilon_1^k = D_1^k(u^k) = \frac{(l^k)^2 - (l_o^k)^2}{2(l_o^k)^2} \quad (4.45)$$

waarin  $l^k$  de momentane lengte van het element is die bepaald is door





Figuur 4.4: Staafelement in de referentietoestand en de vervormde toestand

$$(l^k)^2 = (x_1^q - x_1^p)^2 + (x_2^q - x_2^p)^2 + (x_3^q - x_3^p)^2 \quad (4.46)$$

terwijl  $l_0^k$  de referentielengte is die meestal gelijk is aan de lengte in de onvervormde toestand.

Uit (4.46) kunnen we  $D_{1,i}^k$  en  $D_{1,ij}^k$  bepalen. Zijn verder de massaverdeling, de relatie tussen spanning  $\sigma_1^k$  en vervorming  $\varepsilon_1^k$  en ook de voorgeschreven belasting bekend, dan kunnen we een analyse uitvoeren voor een ruimtelijk mechanisme opgebouwd uit dergelijke elementen.

### Balkelement

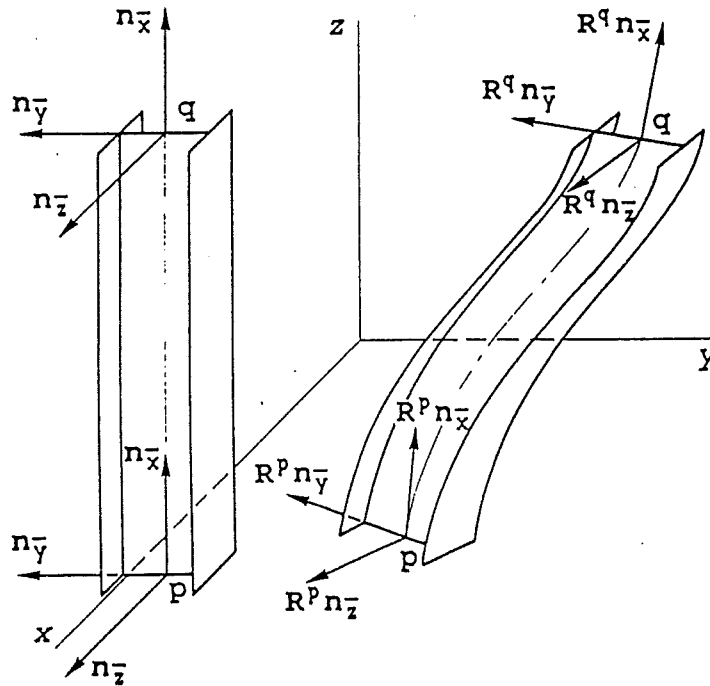
Fig. 4.5 geeft een balkelement in een 3-dimensionale ruimte. De positie van zo'n element  $k$  is bepaald door de vectoren  $x^p$  en  $x^q$  van de eindpunten en door de oriëntatie van de orthogonale drietanden die aan de eindpunten zijn bevestigd en in de begintoestand samenvallen met de lokale coördinaatrichtingen  $n_{\bar{x}}$ ,  $n_{\bar{y}}$  en  $n_{\bar{z}}$ .

De rotaties van de drietanden zijn bepaald door orthogonale transformaties  $R^p$  en  $R^q$ . De beste beschrijving wordt verkregen door de rotaties uit te drukken met zg. Euler-parameters

$$\lambda^T = [\lambda_0 \quad \lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \lambda_3] \quad (4.47)$$

Worden de richtingscosinussen van een vector aangegeven met  $\cos \alpha$ ,  $\cos \beta$  en  $\cos \gamma$ , en de rotatiehoek om de vector met  $\mu$  dan zijn de Euler-parameters gedefinieerd door

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \cos \frac{1}{2}\mu; & \lambda_1 &= \cos \alpha \sin \frac{1}{2}\mu \\ \lambda_2 &= \cos \beta \sin \frac{1}{2}\mu; & \lambda_3 &= \cos \gamma \sin \frac{1}{2}\mu \end{aligned} \quad (4.48)$$



Figuur 4.5: Balkelement, begintoestand en vervormde toestand

Het zal duidelijk zijn dat de vier parameters niet alle vrij te kiezen zijn immers in een beschrijving met Euler-hoeken zijn er slechts drie hoeken. Het is eenvoudig na te gaan dat voldaan moet zijn aan de nevenvoorwaarde

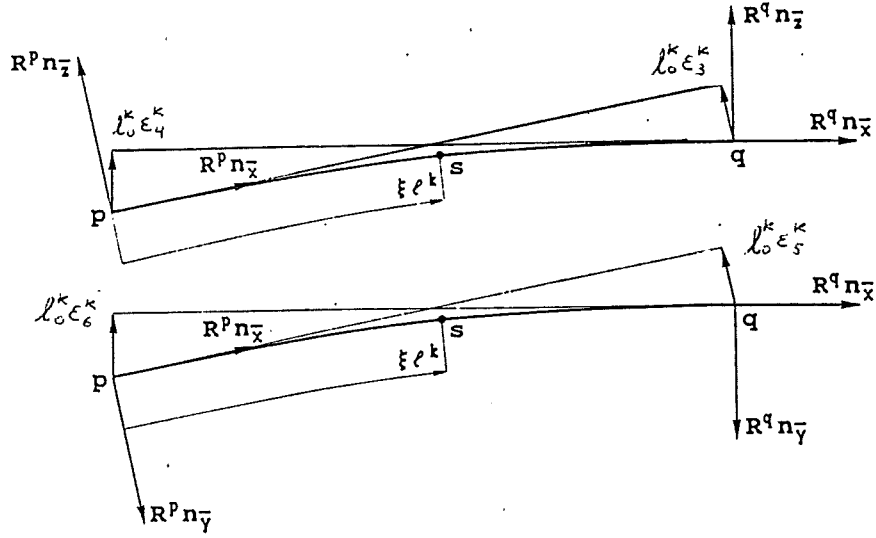
$$\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1 \quad \text{of} \quad \lambda^T \lambda = 1 \quad (4.49)$$

Een belangrijk voordeel van de Euler-parameters is dat er geen singulariteiten optreden zoals bij de Euler-hoeken mogelijk is. Als vector van gegeneraliseerde knooppuntscoördinaten kiezen we

$$\begin{aligned} x^{kT} &= [x^{pT} x^{qT} \lambda^{pT} \lambda^{qT}]^k \\ &= [x_1^p \quad x_2^p \quad x_3^p \quad x_1^q \quad x_2^q \quad x_3^q \quad \lambda_0^p \quad \lambda_1^p \quad \lambda_2^p \quad \lambda_3^p \quad \lambda_0^q \quad \lambda_1^q \quad \lambda_2^q \quad \lambda_3^q]^k \end{aligned} \quad (4.50)$$

Een detailuitwerking leert dat de orthogonale transformatie die de rotatie van een drietand bepaalt als volgt uit te drukken is in de Euler-parameters:

$$R = \begin{bmatrix} \lambda_0^2 + \lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_1 \lambda_2 - \lambda_0 \lambda_3) & 2(\lambda_1 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_2) \\ 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_0 \lambda_3) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \lambda_3^2 & 2(\lambda_2 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_1) \\ 2(\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_0 \lambda_2) & 2(\lambda_2 \lambda_3 + \lambda_0 \lambda_1) & \lambda_0^2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.51)$$



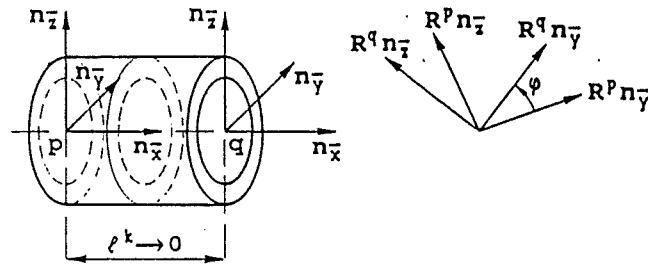
Figuur 4.6: Vervormingsparameters voor de balk

De balk heeft zes vervormingsparameters en hiervoor kiezen we:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1^k &= D_1^k(x^k) = \frac{(l^k)^2 - (l_0^k)^2}{2(l_0^k)^2} + \frac{1}{30} \left[ 2(\varepsilon_3^k)^2 + \varepsilon_3^k \varepsilon_4^k + \right. \\
 & 2(\varepsilon_4^k)^2 + 2(\varepsilon_5^k)^2 + \varepsilon_5^k \varepsilon_6^k + 2(\varepsilon_6^k)^2 \left. \right] \text{ (rek van de staafas)} \\
 \varepsilon_2^k &= D_2^k(x^k) = \frac{1}{2} [(R^p n_{\bar{z}} \cdot R^q n_{\bar{y}}) - (R^p n_{\bar{y}} \cdot R^q n_{\bar{z}})] \text{ (torsie)} \\
 \varepsilon_3^k &= D_3^k(x^k) = -\frac{1}{l_0^k} (R^p n_{\bar{z}} \cdot l^k) \\
 \varepsilon_4^k &= D_4^k(x^k) = \frac{1}{l_0^k} (R^q n_{\bar{z}} \cdot l^k) \\
 \varepsilon_5^k &= D_5^k(x^k) = \frac{1}{l_0^k} (R^p n_{\bar{y}} \cdot l^k) \\
 \varepsilon_6^k &= D_6^k(x^k) = -\frac{1}{l_0^k} (R^q n_{\bar{y}} \cdot l^k)
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

De fysische betekenis van de buigparameters is aangegeven in Fig. 4.6. In  $\varepsilon_1^k$  is ook de axiale vervorming t.g.v. buiging in rekening gebracht. Al deze parameters gaan in het geval van kleine rotaties en kleine verplaatsingen over in de gebruikelijke definities voor het verband tussen de vervormingsparameters en de gegeneraliseerde knooppuntsverplaatsingen.

Eventueel kunnen we de nevenvoorwaarden voor de Euler-parameters als extra vervormingscomponenten meenemen, dus



Figuur 4.7: Scharnierelement

$$\begin{aligned}\varepsilon_7^k &= \lambda^{pT} \lambda^p - 1 = 0 \\ \varepsilon_8^k &= \lambda^{qT} \lambda^q - 1 = 0\end{aligned}\quad (4.53)$$

Voor de matrices  $D_{i,j}^c$  en  $D_{i,j,k}^c$  van dit balkelement verwijzen we naar [13].

Het scharnierelement is in wezen een limietgeval van een balkelement waarvoor de lengte  $l^k \rightarrow 0$ . de generaliseerde coördinaten zijn

$$x^{kT} = [\lambda^{pT} \lambda^{qT}]^k = [\lambda_0^p \quad \lambda_1^p \quad \lambda_2^p \quad \lambda_3^p \quad \lambda_0^q \quad \lambda_1^q \quad \lambda_2^q \quad \lambda_3^q]^k \quad (4.54)$$

Als vervormingsmogelijkheden hebben we de relatieve torsie en de buiging om twee assen.

Dit element wordt vooral toegepast om een 'torsiever' te beschrijven; de twee parameters van de buigvervorming zijn dan nul.

De drie bovengenoemde elementen zijn o.a. in het SPACAR programma beschikbaar.

## 4.5 Inverse kinematica en dynamica

Stel dat een manipulator mechanisme met *starre* schakels gegeven is en dat de beweging (coördinaten en rotaties) van het eindpunt als functie van de tijd is voorgeschreven. Door het aantal actuators gelijk te kiezen aan het aantal vereiste kinematische vrijheidsgraden van het eindpunt kan het systeem kinematisch bepaald worden gemaakt en liggen de coördinaten, snelheden en versnellingen volledig vast.

In het inverse kinematica probleem wordt nu gevraagd de actuatorvervormingen ( $\varepsilon_i^m$ ) of de aangedreven relatieve coördinaten en de bijbehorende relatieve snelheden ( $\dot{\varepsilon}_i^m$ ) en versnellingen ( $\ddot{\varepsilon}_i^m$ ) uit te drukken in de voorgeschreven beweging en ook de beweging van de overige schakels van het systeem te bepalen.

Zijn er  $n$  gegeneraliseerde coördinaten ( $x_i^p$ ) in het eindpunt voorgeschreven dan zullen we dus in staat zijn met  $n$  vervormingsparameters van de actuatoren ( $\varepsilon_j^m$ ) deze beweging te genereren, d.w.z.

$$x_i^p = F_i(\varepsilon_j^m) \quad i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n \quad (4.55)$$

en hieruit volgt

$$\dot{x}_i^p = F_{i,j} \dot{\varepsilon}_j^m \quad (4.56)$$

De matrix  $F = [F_{i,j}]$  wordt de Jacobi-matrix van de manipulator genoemd en is te bepalen uit (4.10).

Omdat er geen verplaatsingen zonder vervorming mogen zijn geldt in (4.10) dat  $\dot{x}^m = 0$ .

Voor de versnellingen geldt

$$\ddot{x}_i^p = F_{i,j} \ddot{\varepsilon}_j^m + F_{i,jk} \dot{\varepsilon}_j^m \dot{\varepsilon}_k^m \quad (4.57)$$

In de inverse kinematica gaat het, zoals gesteld, om de inverse transformaties die  $\dot{\varepsilon}_i^m$  en  $\ddot{\varepsilon}_i^m$  uitdrukken in de voorgeschreven snelheden ( $\dot{x}_i^p$ ) en versnellingen ( $\ddot{x}_i^p$ ). Hiervoor vinden we

$$\dot{\varepsilon}^m = F^{-1} \dot{x}^p \quad (4.58)$$

en

$$\ddot{\varepsilon}^m = F^{-1} [\ddot{x}^p - \dot{h}^p] \quad (4.59)$$

waarin

$$h_i^p = F_{i,jk} \dot{\varepsilon}_j^m \dot{\varepsilon}_k^m \quad (4.60)$$

Zijn  $\dot{\varepsilon}^m$  en  $\ddot{\varepsilon}^m$  bekend dan volgen daaruit met (4.10) en (4.18) de snelheden en de versnellingen van alle gegeneraliseerde coördinaten  $x^c$ :

$$\dot{x}_k^c = \sum_{ki}^0 \dot{\varepsilon}_i^m \quad (4.61)$$

$$\ddot{x}_k^c = \sum_{ki}^0 [\ddot{\varepsilon}_i^m - D_{i,lm} \dot{x}_l^c \dot{x}_m^c] \quad (4.62)$$

In veel gevallen zullen er op de manipulator bepaalde krachten en koppels uitgeoefend worden t.g.v. de manipulatoortaak. Omdat de beweging beschreven is door de voorgeschreven tipbeweging van de manipulator is het ook mogelijk de vereiste krachten en/of koppels in de actuatoren en eventuele elastische elementen te berekenen met (4.36)

$$\sigma_i = \sum_{ki}^0 [f_k^c - M_{kl}\ddot{x}_l^c] + Z_{ji}\sigma_j^r$$

De spanningsparameters zijn altijd zo te rangschikken dat

$$\sigma^m = [\sigma_1 \dots \sigma_n]^T \quad (4.63)$$

De statisch onbepaalden  $\sigma_i^r$  volgen met de wet van Hooke uit de vervormingen (4.43). Zijn er geen statisch onbepaalde delen ( $Z_{ji} = 0$ ) en de schakels alle als star te beschouwen dan zijn de enige spanningsparameters de duale grootheden van  $\varepsilon_i^m$  waarvoor geldt

$$\sigma_i^m = \sum_{ki}^0 [f_k^c - M_{kl}\ddot{x}_l^c] \quad (4.64)$$

De vergelijkingen voor de spanningsparameters  $\sigma_i^m$  zijn de basisvergelijkingen voor de inverse dynamica en omdat de beweging en dus ook  $\ddot{x}_i^c$  bekend is, zijn het algebraïsche vergelijkingen. Fig. 4.8 geeft het schema van de inverse kinematica en dynamica.

## 4.6 Voorbeelden

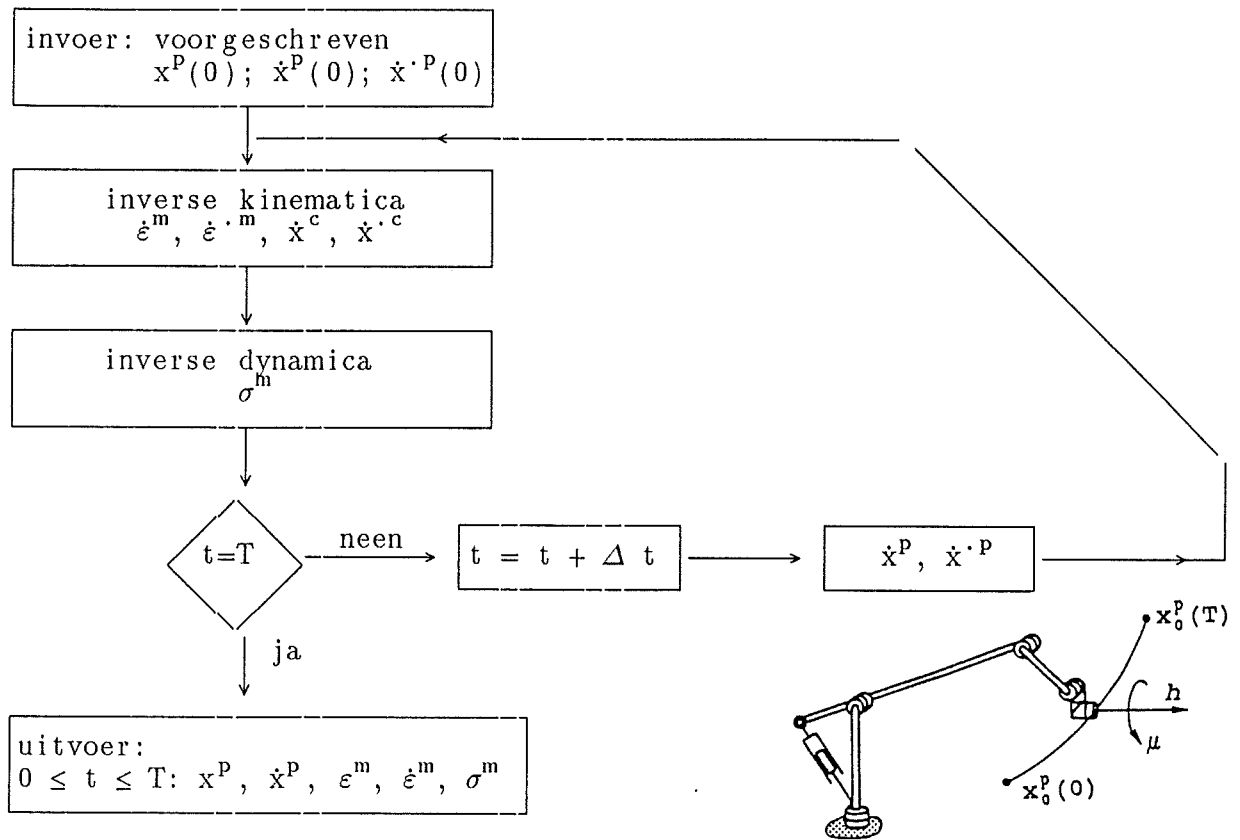
### Kinematica van het kruk-drijfstang mechanisme

Het kruk-drijfstangmechanisme is één van de meest toegepaste subsystemen in het ontwerp van een mechanisch systeem. Het wordt o.a. toegepast in verbrandingsmotoren, compressoren en regulateurs.

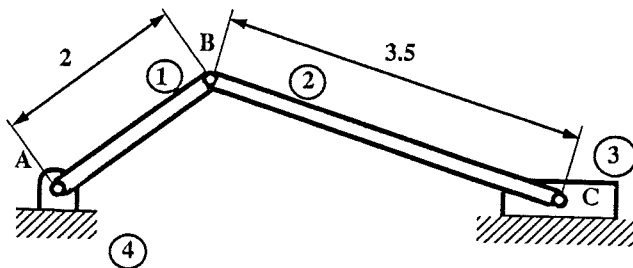
We zullen nu een analyse geven van de kinematica van het kruk-drijfstangmechanisme en ook het effect van ontwerpparameters laten zien. We hebben hier een vlak-mechanisme met drie elementen, namelijk een (aangedreven) torsiescharnier en twee staafelementen. We hebben geen aangedreven coördinaten, dus  $x^m = \{0\}$ . De aangedreven actuator (relatieve coördinaat) is  $\varepsilon_T^1 = (\phi - \phi_0)$  en de staven  $AB$  en  $BC$  ondergaan geen verlenging zodat  $\varepsilon_1^2 = \varepsilon_1^3 = 0$ .

Fig. 4.10 geeft de x-coördinaat van de zuiger en ook de snelheid en versnelling als functie van  $t$ , zowel voor de hoeksnelheid  $\omega_1 = 2\pi[s^{-1}]$  als voor  $\omega_2 = 4\pi[s^{-1}]$  d.w.z. één en resp. twee omwentelingen per seconde. Fig. 4.11 geeft het effect van de drijfstanglengte op de versnelling.

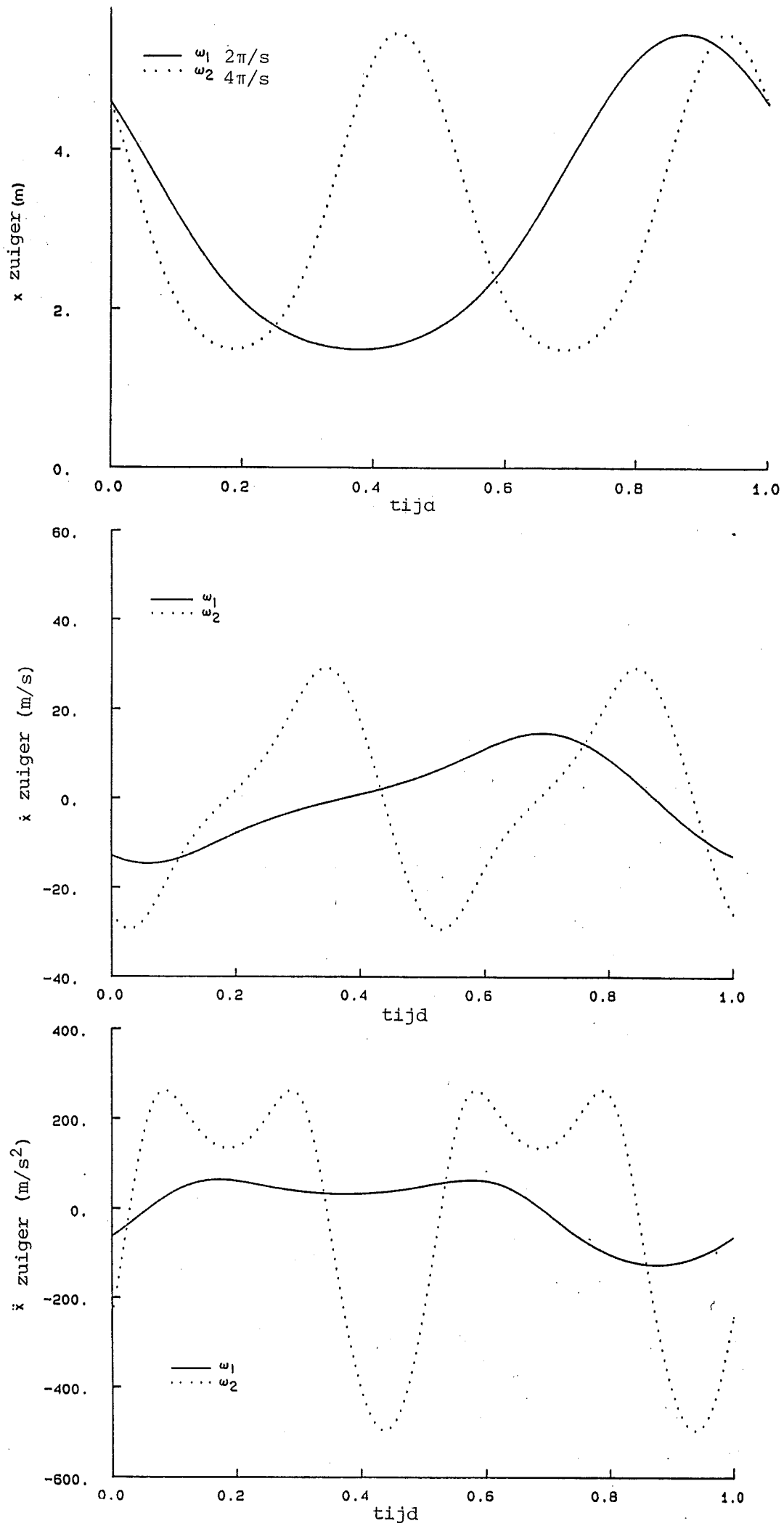
We zien dus dat een verhoging van de hoeksnelheid  $\omega$  met een factor 2 een zeer sterke verhoging van de zuigerversnelling en dus van de lagerkrachten geeft. Als we het effect van de drijfstanglengte beschouwen is het duidelijk dat in de extreme standen van de zuiger de versnellingen sterk toenemen als de drijfstanglengte nadert tot de lengte van de kruk (2m).



Figuur 4.8: Flowschema voor inverse kinematica en dynamica

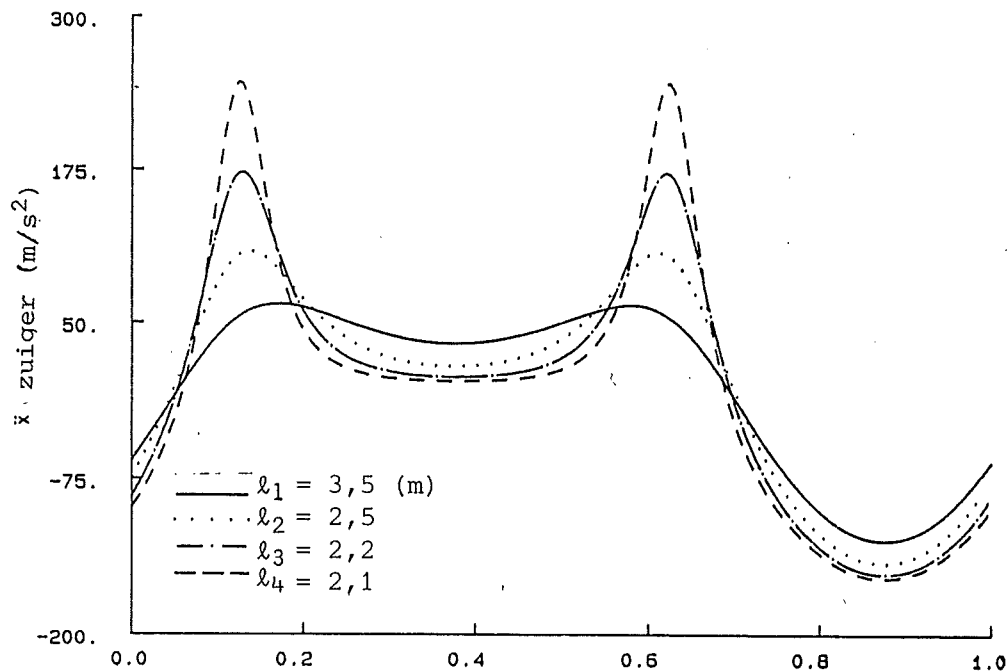


Figuur 4.9: Kruk-drijfstaangmechanisme



Figuur 4.10:  $x$ ,  $\dot{x}$  en  $\ddot{x}$  van de zuiger als functie van de tijd





Figuur 4.11: Het effect van de drijfstaanglengte op de zuigerversnelling

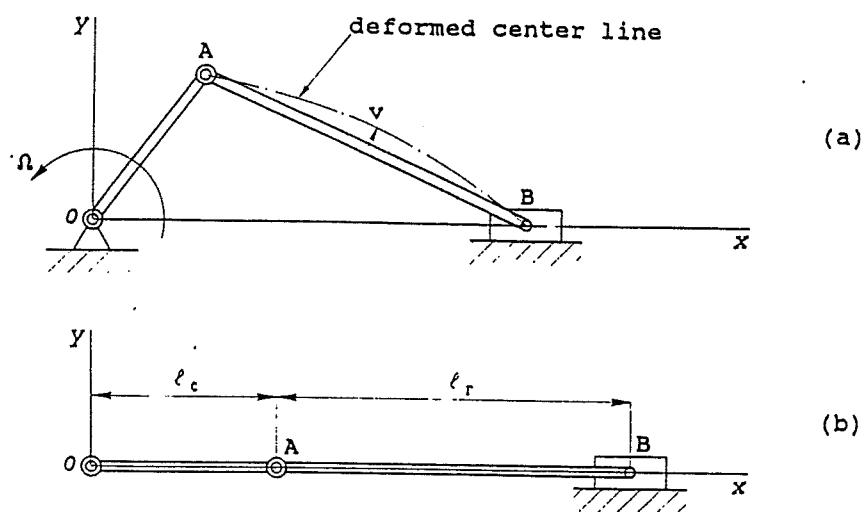
### Kruk-drijfstaangmechanisme met een flexibele drijfstaang

Fig. 4.12 geeft een kruk-drijfstaangmechanisme waarvoor een dynamicaberekening werd uitgevoerd. De drijfstaang is daarbij flexibel verondersteld. Hij is benaderd door twee balkelementen met elk twee vervormingsparameters en een consistente massa-matrix. De axiale rek van de staafas is nul verondersteld.

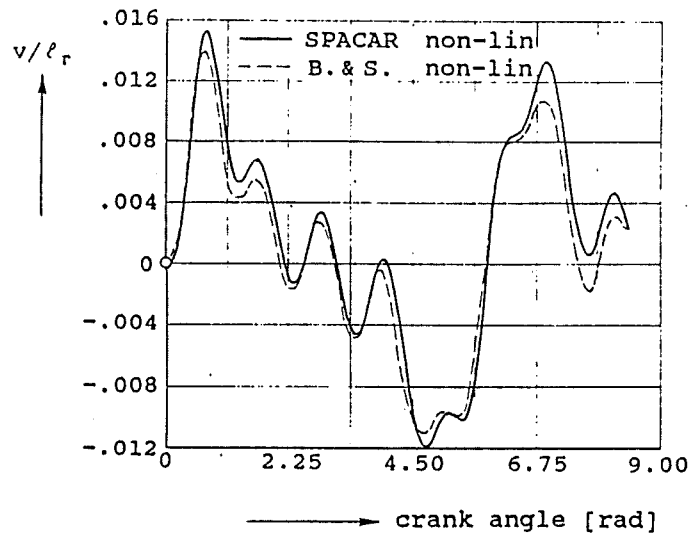
De lengte van de starre kruk is  $0,15m$ , de drijfstaanglengte  $0,30m$ . De drijfstaang heeft een cirkelvormige doorsnede met een diameter van  $6mm$ . De soortelijke massa  $\rho = 7,87 \cdot 10^3 kg/m^3$  en de elasticiteitsmodulus  $E = 2 \cdot 10^{11} N/m^2$ . Het glijblok  $B$  heeft een massa die de helft is van de massa van de drijfstaang. De kruk wordt aangedreven met een constante hoeksnelheid  $\omega = 150 rad/s$ . Fig. 4.12-b geeft de beginstand, in deze stand is de drijfstaang aan beide einden ondersteund en is de laagste eigenfrequentie  $832,5 rad/s$ .

In de berekening is speciaal gekeken naar de doorbuiging in het midden van de drijfstaang ( $v$ ).

Fig. 4.13 geeft  $v$  als functie van de krukhoek. De figuur geeft ook een vergelijking met resultaten uit de literatuur die met een geheel andere numerieke methode werden bepaald.



Figuur 4.12: (a) Kruk-drijfslagmechanisme met een flexibele drijfslag (b) Begintoestand



Figuur 4.13: Doorbuiging van de drijfslag als functie van de krukhoek

### Inverse kinematica en dynamica van een manipulator

Fig. 4.14 geeft een voorbeeld van een manipulator. In dit geval is de voorgeschreven tipbeweging aan te geven door de drie coördinatoren  $x^4$ ,  $y^4$  en  $z^4$  als functie van de tijd voor te schrijven. Deze beweging is te realiseren met drie scharnieren namelijk de scharnierelementen 3, 5 en 7. De beweging in het vlak van de elementen 6 en 8 wordt aangedreven door lineaire actuatoren 1 en 2, terwijl de beweging loodrecht op dat vlak mogelijk is door het scharnier 3 dat aangedreven wordt door een torsiemotor.

Voor de simulatie van de beweging van de geregelde manipulator werden 6 en 8 als elastische elementen beschouwd. Als de normaalkrachtstijfheid van deze elementen oneindig groot verondersteld mag worden dan is het totale aantal vervormingsparameters

$$\varepsilon = [\varepsilon^1 \quad \varepsilon^2 \quad \varepsilon^3 \quad \varepsilon_2^6 \quad \varepsilon_3^6 \quad \varepsilon_4^6 \quad \varepsilon_5^6 \quad \varepsilon_6^6 \quad \varepsilon_3^8 \quad \varepsilon_4^8 \quad \varepsilon_5^8 \quad \varepsilon_6^8]^T$$

De vervormingsparameters  $\varepsilon_3^6, \varepsilon_4^6$  en  $\varepsilon_3^8, \varepsilon_4^8$  beschrijven de buiging in het vlak door 6 en 8, terwijl de parameters  $\varepsilon_2^6$  (torsie),  $\varepsilon_5^6, \varepsilon_6^6$  en  $\varepsilon_5^8, \varepsilon_6^8$  betrekking hebben op de beweging loodrecht op dat vlak. Voor de nominale beweging waartoe we ons hier zullen beperken worden alle schakels als star beschouwd en geldt

$$\varepsilon^m = [\varepsilon^1 \varepsilon^2 \varepsilon^3]^T$$

De benodigde gegevens van de elementen zijn verzameld in Tabel 1.

De geconcentreerde massa's in de punten 3 en 4 zijn resp.  $m^3 = 10kg$  en  $m^4 = 30kg$ . Het effect van de zwaartekracht wordt in rekening gebracht door uitwendige krachten ter grootte  $m^i g$  aan te brengen in de negatieve z-richting.

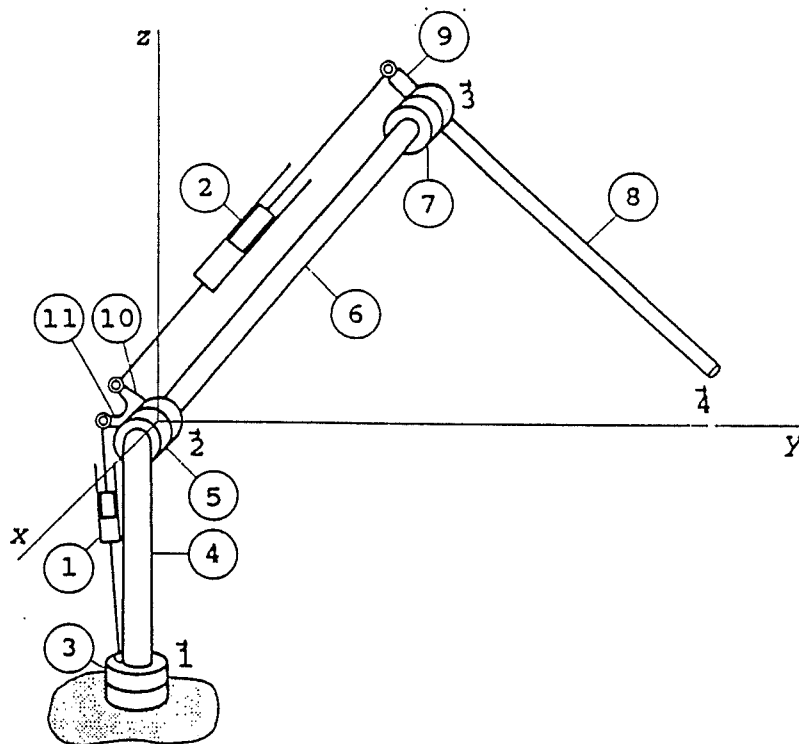
Als manipulatoretaak wordt gegeven het doorlopen van de rechte lijn  $AB$  in Fig. 4.15 met een snelheidsverloop als eveneens aangegeven.

Dit geeft verplaatsingen en snelheden in de coördinaatrichtingen als aangegeven in Fig. 4.16.

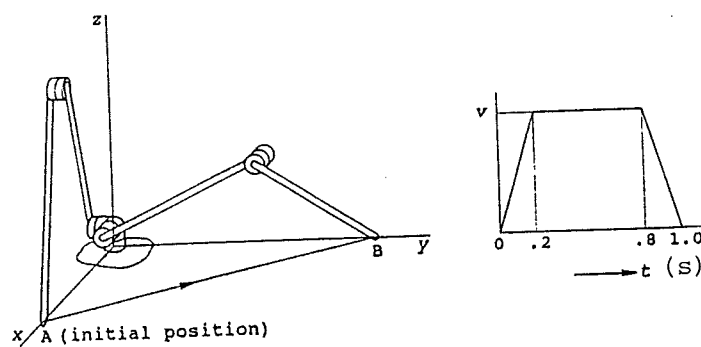
De inverse kinematicaberekeningen met (4.58) en (4.59) geven voor dit geval het verloop van de relatieve coördinaten  $(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1^2, \varepsilon_1^3)$  en de bijbehorende snelheden  $(\dot{\varepsilon}_1^1, \dot{\varepsilon}_1^2, \dot{\varepsilon}_1^3)$  als functie van de tijd (Fig. 4.17). Vervolgens vinden we met de inverse dynamicavergelijking (4.64) ook de benodigde krachten in de actuatoren.

element no.	4	6	8	9	10	11
lengte $\ell^k$ [m]	0,4	0,7	0,7	0,1	0,1	0,1
massa per lengte-eenheid [kg/m]	0	4	2	0	0	0

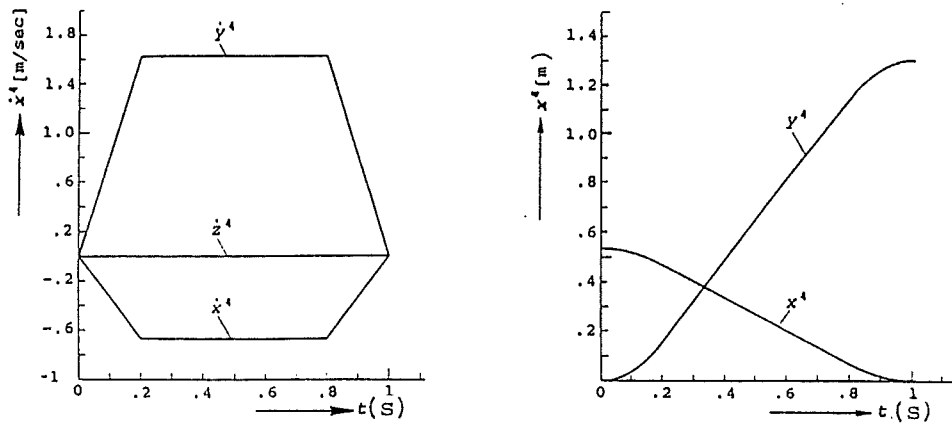
Tabel 1



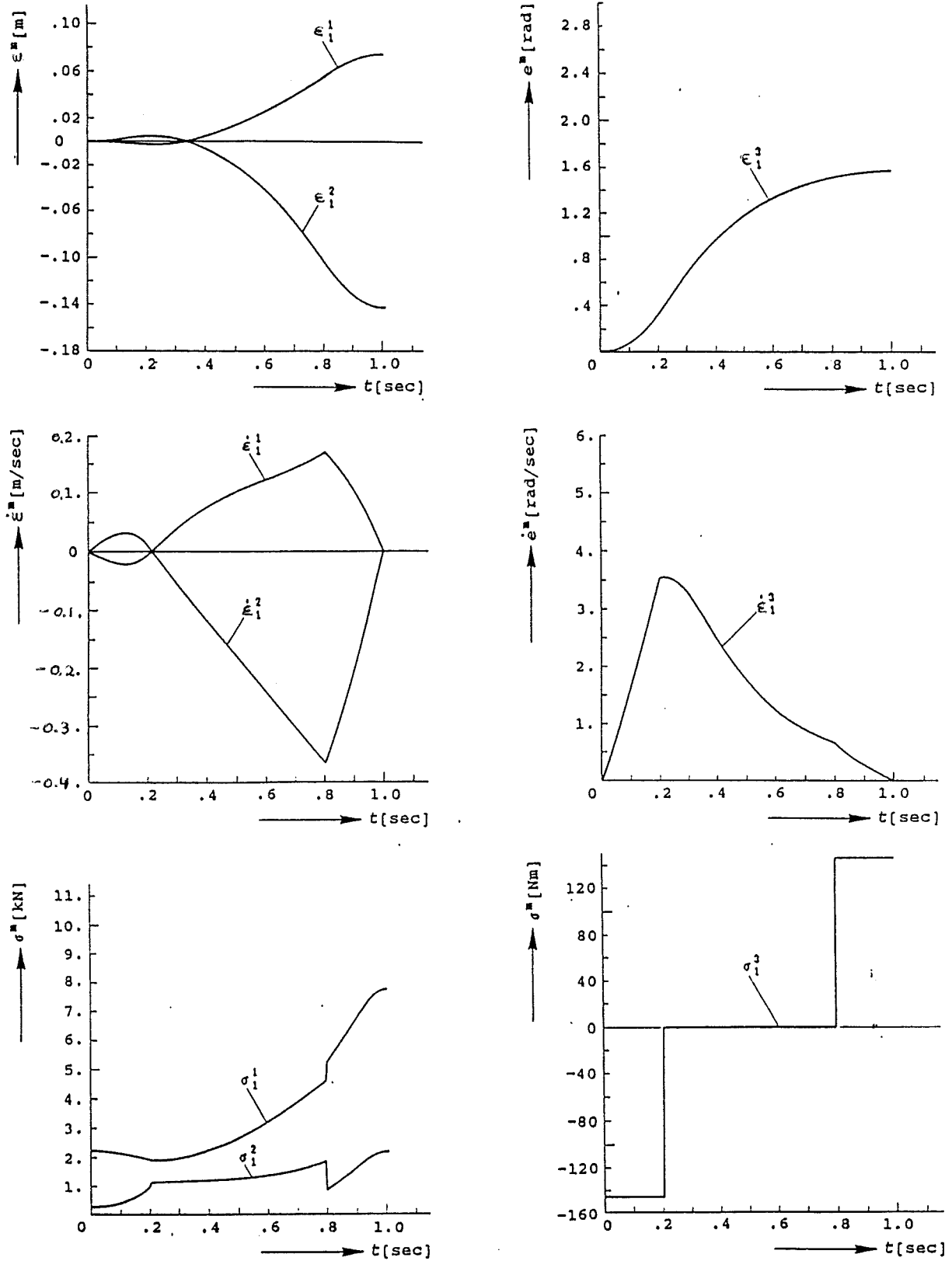
Figuur 4.14: Eindige-elementen schematisering van de manipulator



Figuur 4.15: Beweging en snelheidsprofiel van de manipulator-tip  $A(0, 536; 0; 0); B(0; 1, 3; 0); v = 1,76m/s$



Figuur 4.16: Nominale tip posities en snelheden in het xyz-systeem



Figuur 4.17: Nominale actuatorposities, snelheden en krachten benodigd voor de beweging in Fig. 4.15



# Hoofdstuk 5

## Oefenvraagstukken

### 5.1 Oefenvraagstukken behorende bij hfdst 1

#### Opgave 1.1

De snaar  $ABC$  met voorspankracht  $S$  draagt een massa  $m$  per lengte eenheid. In het midden is een geconcentreerde massa  $M = ml$  aangebracht.

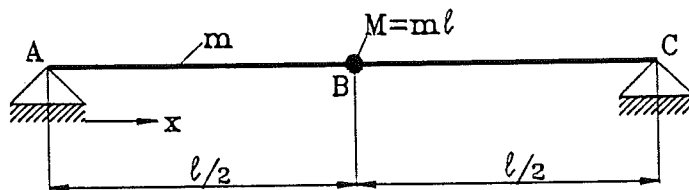
GEVRAAGD:

1. Toon aan dat de volgende partiële differentiaalvergelijking geldt voor de trilling van een snaar met massa  $m$  per lengte-eenheid

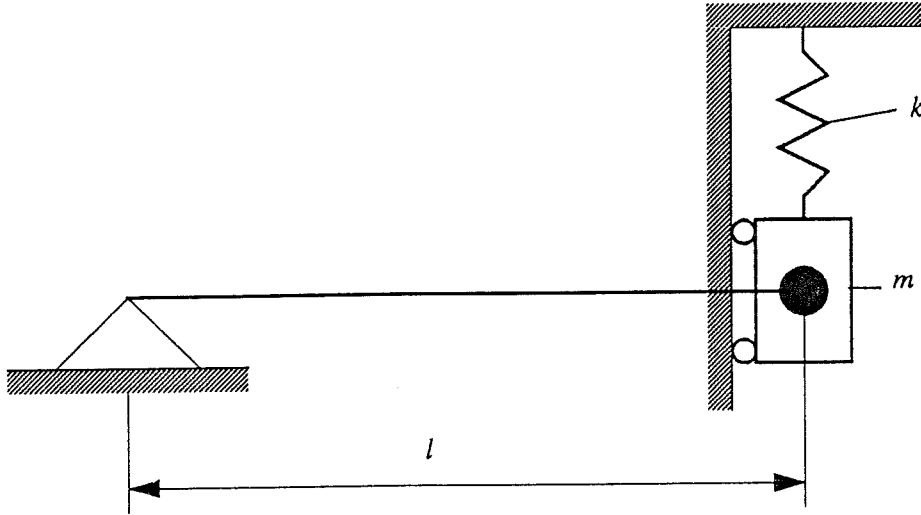
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$c = \sqrt{\frac{S}{m}}$$

2. Bepaal naar keuze exact of benaderd met de methode van Rayleigh de laagste eigenfrequentie voor de snaar  $ABC$ .





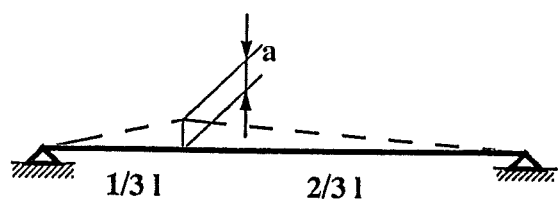


### Opgave 1.2

Een snaar met lengte  $l$ , oppervlaktedwarsdoorsnede  $A$  en soortelijke massa  $\rho$  staat onder een voorspankracht  $S$ . Het linker eind is bevestigd aan een vast punt en het rechter eind is bevestigd aan een massa-veer-systeem (zie figuur).

GEVRAAGD:

1. Bepaal de frequentievergelijking voor kleine trillingen om de evenwichtsstand.
2. Bepaal de laagste eigenfrequentie (op enkele procenten nauwkeurig) voor  $\frac{S}{kl} = 1$  en  $\frac{\omega_0 l}{c} = \pi$  waarin  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .



### Opgave 1.3

De differentiaalvergelijking voor de trillende snaar is:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

waarin

$$c = \sqrt{\frac{S}{\rho A}}$$

$S$  = voorspankracht

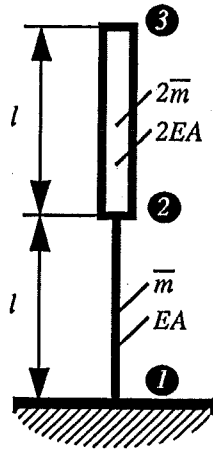
$\rho$  = soortelijke massa

$A$  = oppervlak dwarsdoorsnede

Geef de afleiding van deze partiële differentiaalvergelijking.

GEVRAAGD:

1. Bepaal de eigenfrequenties en de bijbehorende eigenfuncties van de vrij trillende snaar die aan de enden scharnierend is bevestigd.
2. Wordt de initiële uitwijking van de snaar op  $t = 0$  gekozen als in bijbehorende figuur, wat is dan de oplossing voor de vrije trilling met deze beginvoorwaarde?



### Opgave 1.4

Een kolom bestaat uit twee primatische staven met dezelfde lengte maar verschillende eigenschappen (zie figuur). Staaf 1 - 2 draagt een massa  $m$  per eenheid van lengte en staaf 2 - 3 een massa  $2m$  per lengte-eenheid. De normaalkrachtstijfheid van 2 - 3 is tweemaal zo hoog als van 1 - 2.

GEVRAAGD: De differentiaalvergelijking voor vrije axiale trillingen van een balk is

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

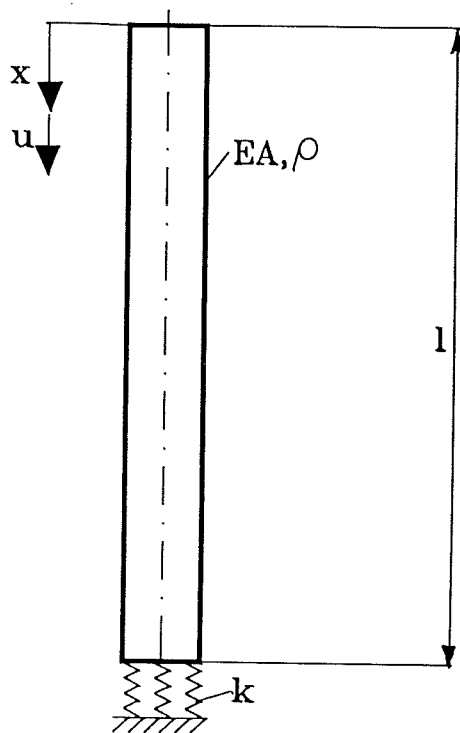
Zoek oplossingen hiervan in de vorm

$$u = \hat{u}(x) \cos \omega t$$

Geef de vier randvoorwaarden om de constanten in de oplossingen voor de axiale trillingen te bepalen.

Geef de frequentievergelijkingen voor de axiale trillingen en bepaal de laagste eigenfrequentie met trilvorm.

Schets ook het verplaatsingsverloop.



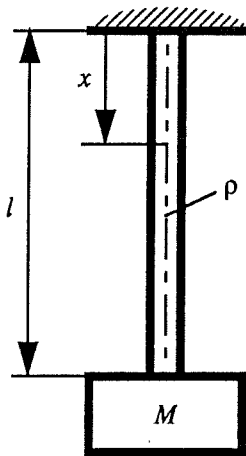
### Opgave 1.5

Bovenstaande figuur geeft sterk geschematiseerd een gebouw op een verende fundatie. De veerstijfheid van de fundatie is  $k$ . Het gebouw wordt geschematiseerd door een balk met doorsnede  $A$ , soortelijke massa  $\rho$  en elasticiteitsmodulus  $E$ .

GEVRAAGD:

1. Bepaal de karakteristieke vergelijking voor de longitudinale trillingen van bovenstaande constructie.
2. Bepaal de eerste eigenfrequentie voor:

$$\mu = \frac{kl}{EA} = 0 \quad ; \quad 1 \quad \text{en} \quad \infty$$



$\rho$  - soortelijke massa  
 $A$  - oppervlak doorsnede  
 $E$  - elasticiteitsmodulus

N.B.

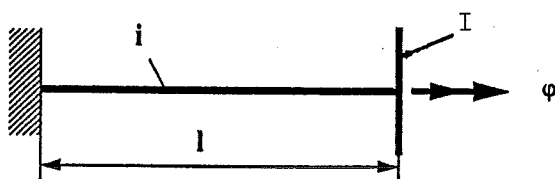
$$\tan \varepsilon = \varepsilon + \frac{1}{3} \varepsilon^3 + \dots$$

$$\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon - \frac{1}{8} \varepsilon^2$$

### Opgave 1.6

GEVRAAGD:

1. Bepaal voor de staaf die aan één zijde is ingeklemd en aan de andere zijde verbonden is aan een geconcentreerde massa de frequentievergelijking voor vrije trillingen.
2. Geef de laagste eigenfrequentie en de bijbehorende eigenfunctie als  $\rho A l / M \rightarrow 0$ ;  $\rho A l / M = 1$  en  $\rho A l / M \rightarrow \infty$ .
3. Als de staafmassa klein is t.o.v. de massa  $M$  dan kan de laagste eigenfrequentie berekend worden door  $1/3$  van de staafmassa toe te voegen aan  $M$  en de staaf massaloos te beschouwen. Toon dit aan.



## Opgave 1.7

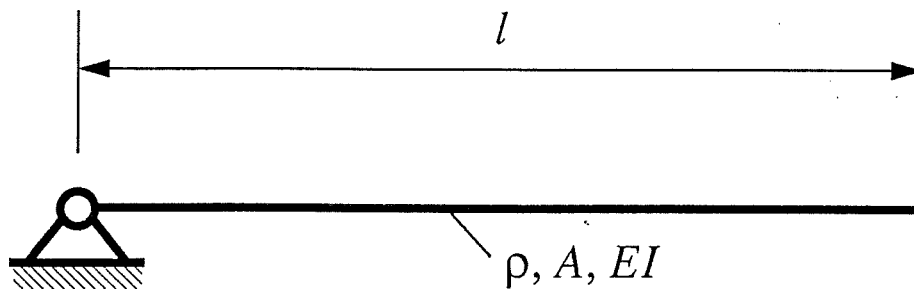
GEVRAAGD:

1. Laat zien dat de bewegingsvergelijking voor vrije torsietrillingen van een as is:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{S_t}{i} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

waarin  $i$  = massatraagheidsmoment per lengte-eenheid van de as;  $S_t$  = torsiestijfheid = torsiemoment gedeeld door de specifieke wringhoek.

2. Een torsiebalk met massatraagheid  $i$  per lengte-eenheid is aan één eind ingeklemd en aan het andere eind is een vlieg wiel met massatraagheidsmoment  $I$  bevestigd. Bepaal de frequentievergelijking voor vrije torsietrillingen.
3. Bepaal de oplossingen voor de limietgevallen  $I = 0$ ,  $i = 0$  (eigenfrequenties en eigenfuncties).
4. Bepaal de laagste eigenfrequentie en de bijbehorende eigenfunctie als  $I = il$ .



### Opgave 1.8

GEVRAAGD:

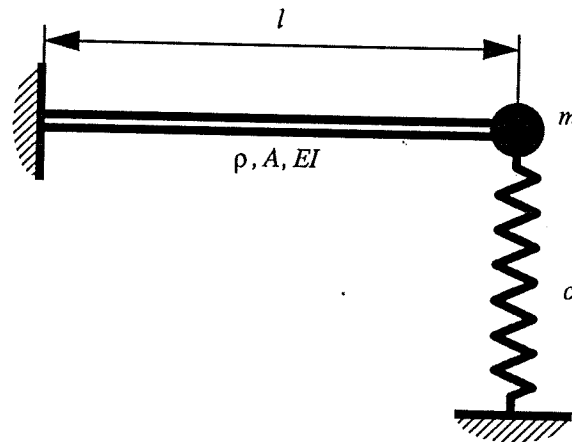
1. De differentiaalvergelijking voor de trilling van een prismatische balk is

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\rho A}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

waarin  $\rho$  de soortelijke massa is,  $A$  de oppervlakte van de dwarsdoorsnede en  $EI$  de buigstijfheid. Geef de afleiding voor deze differentiaalvergelijking.

2. Indien de balk aan één zijde scharnierend is ondersteund en aan de andere zijde vrij, wat is dan de laagste eigenfrequentie van de buigtrillingen. Bepaal en schets ook de trilvorm.

N.B.: De laagste eigenfrequentie van deze instabiele constructie is nul; gevraagd wordt de laagste van nul verschillende waarde.



### Opgave 1.9

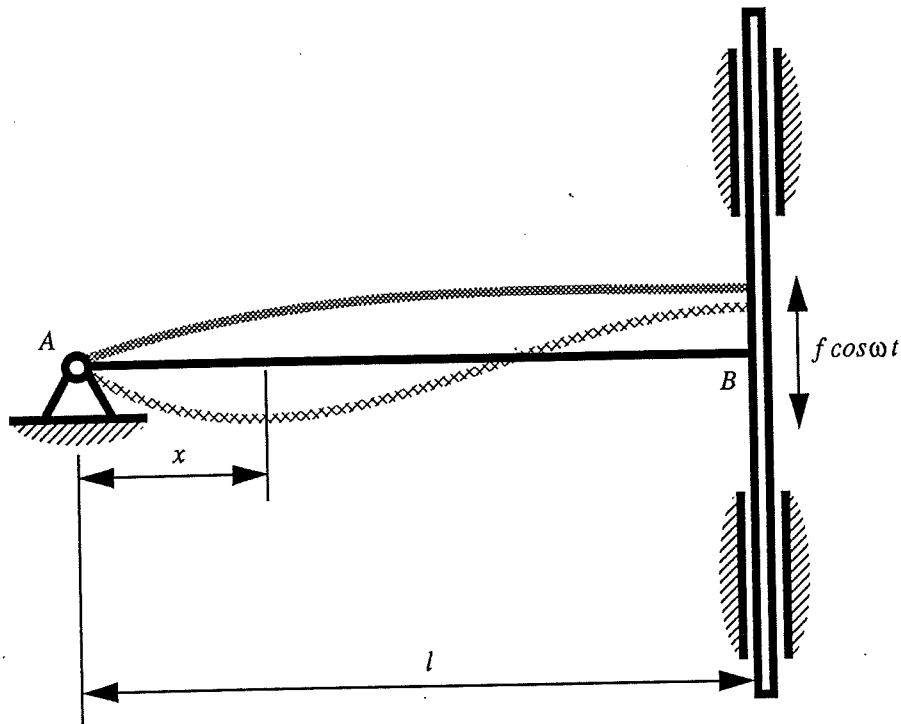
Gegeven is een rechte prismatische balk (lengte  $l$ , soortelijke massa  $\rho$ , oppervlakte doorsnede  $A$ , buigstijfheid  $EI$ ) die in een uiteinde vast is ingeklemd en in het andere uiteinde een puntmassa  $m$  draagt en aldaar is ondersteund door een veer (stijfheid  $k$ ) die ontspannen is als de balk onvervormd is.

Als gegeven is:  $k = \frac{\beta EI}{l^3}$  en  $m = \rho Al$  (dus gelijk aan de totale massa van de balk) dan wordt

GEVRAAGD:

1. De *frequentievergelijking* voor kleine trillingen, daarbij gebruik makend van de grootte  $\mu = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}$  waarin  $\omega$  de radiaalfrequentie.
2. Aan te geven hoe de waarde kan worden bepaald die de dimensieloze factor  $\beta$  moet bezitten opdat de laagste frequentie van het systeem dezelfde is als wanneer het massapunt  $m$  en de veer zouden ontbreken.
3. Bereken ook met een eindige elementen methode de laagste eigenfrequentie voor  $\beta = 12$  en  $\beta = 13$  (kies slechts één balkelement).





### Opgave 1.10

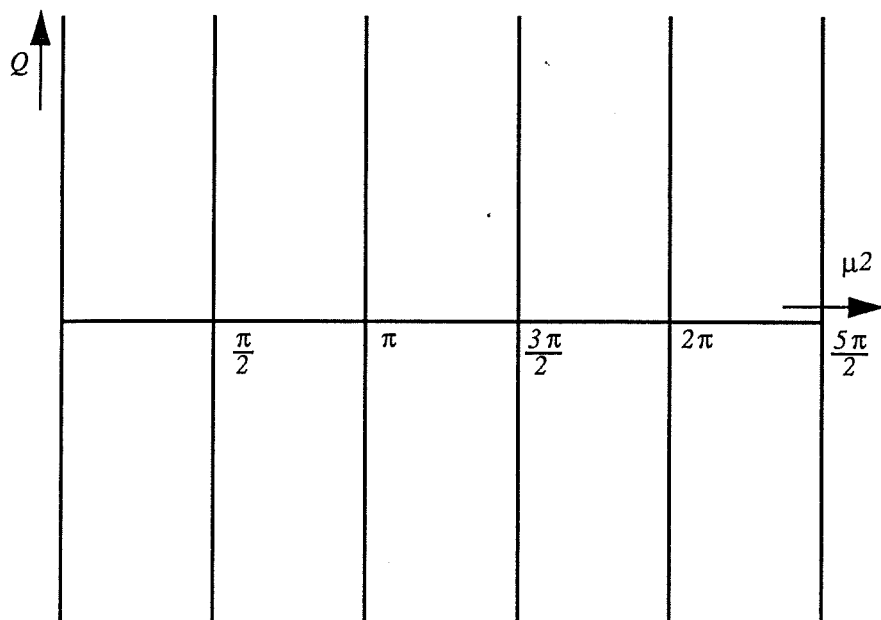
Gegeven is een homogene rechte prismatische balk  $AB$  (lengte  $l$ , soortelijke massa  $\rho$ , oppervlakte doorsnede  $A$ , buigstijfheid  $EI$ ).

Van deze balk is het uiteinde  $A$  scharnierend bevestigd aan een vast punt. Door een starre verbinding (onder een rechte hoek) aan een onvervormbare dwarsbalk is hoekverdraaiing in het uiteinde  $B$  verhinderd.

Vanuit een middenpositie waarbij de balk  $AB$  onvervormd is wordt de dwarsbalk in zijn langsrichting harmonisch op en neer bewogen met een amplitude  $f$  en een radiaalfrequentie  $\omega$  ( $f \cos \omega t$ ). Een tweetal mogelijke uitwijkingen van de balk  $AB$  zijn gestippeld in de figuur aangegeven.

GEVRAAGD:

1. De uitwijking die  $AB$  vertoont, als functie van de langscoördinaat  $x$  en de tijd  $t$ ,  $w(x, t)$ , onder gebruikmaking van de hulpgrootheid  $\mu = \sqrt[4]{\frac{\rho A \omega^2}{EI}}$ .



2. In een diagram als hierboven is aangegeven op een zelf te kiezen schaal in te tekenen de amplitude  $Q$  van de in de balk  $AB$  in het uiteinde  $B$  heersende dwarskracht  $Q \cos \omega t$ , als functie van  $\mu l$ .

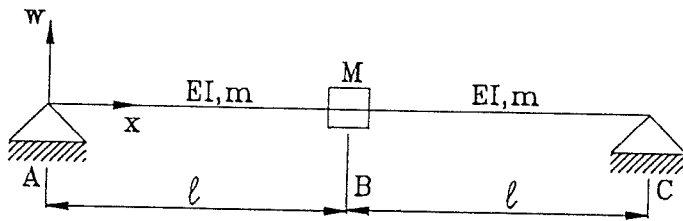
**Opgave 1.11**

1. Bepaal de eigenfrequenties en de eigenfuncties van een trillende balk als de einden  $x = 0$  en  $x = l$  zijn opgelegd.

2. Als voor  $t = 0$  de doorbuiging is:

$$w_0 = 4a \left[ \frac{x}{l} - \left( \frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad 0 \leq \frac{x}{l} \leq 1$$

Wat is dan de responsie  $w(x, t)$ .



### Opgave 1.12

De prismatische balk  $ABC$  is in  $A$  en  $C$  star ondersteund. De buigstijfheid is  $EI$  en de massa per lengte-eenheid  $m$ . In het midden van de balk is een geconcentreerde massa  $M$  bevestigd ( $M = 2\beta ml$ ).

GEVRAAGD:

1. Geef de frequentievergelijking voor de symmetrische trillingen van de balk  $ABC$  (symmetrisch t.o.v. het midden van de balk).
2. Bepaal de laagste eigenfrequentie en de eigenfunctie voor  $\beta = 1$ .
3. Geef ook de laagste eigenfrequentie voor  $\beta = 0$  en  $\beta \rightarrow \infty$ .

N.B.  $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \dots$

$\tanh x = x - \frac{1}{3}x^3 + \dots$

## 5.2 Oefenvraagstukken behorende bij hfdst 3

### Opgave 3.1

Beschouw de vrije trillingen van een massa-veer-systeem met een niet-lineaire veer beschreven door de bewegingsvergelijking

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u + \mu u^2 = 0$$

De beginvoorwaarden zijn  $t = 0$ :  $u = 1$ ;  $\dot{u} = 0$ . In bovenstaande vergelijking is  $\mu$  een kleine parameter ( $\mu \ll 1$ ) en de eigenfrequentie van het gelineariseerde systeem  $\omega_0 = 1$ .

a) Bereken de eerste drie benaderingen van de oplossing met de perturbatiemethode van Lindstedt.

b) Hoe verandert de cirkelfrequentie als functie van de amplitude?

### Opgave 3.2

Voor een massa-veer-systeem met harmonische excitatie geldt de bewegingsvergelijking

$$\ddot{u} + u + \mu u^2 = \cos \Omega t$$

Bepaal met de storingsrekening buiten resonantiegebieden een nulde en een eerste benadering van de stationaire oplossing. Voor de parameter  $\mu$  geldt weer  $\mu \ll 1$ .

### Opgave 3.3

Voor een niet-lineair massa-veer-systeem met harmonische excitatie geldt de vergelijking

$$\eta^2 \ddot{u} + u + \mu u^2 = f \cos t$$

Bepaal met storingsrekening in het resonantiegebied  $\eta \approx 1$  een nulde en een eerste orde benadering van de stationaire oplossing waarbij verondersteld wordt dat  $f = \mu f_0$ . (De parameter  $\mu$  is een kleine parameter). Ontwikkel daarbij zowel  $u$  als  $\eta$  naar de kleine parameter  $\mu$ . Hoe ziet de benaderde frequentieresponsie eruit voor  $f = 0, 1$  en  $\mu = 0, 1$ ?

### Opgave 3.4

Bepaal een subharmonische oplossing met frequentie  $\omega/2$  voor het massa-veer-systeem met niet-lineaire veer dat harmonisch wordt geëxciteerd

$$\ddot{u} + \omega_0^2[u + \mu u^2] = f \cos \omega t$$

Probeer een oplossing van de vorm

$$u = q_0 + A \cos \frac{\omega}{2} t$$

Aan welke vergelijking moet de parametercombinatie  $\omega_0$ ,  $\omega$ ,  $\mu$  en  $f$  voldoen opdat een exacte oplossing wordt verkregen?

### Opgave 3.5

Onderzoek de stabiliteit van de triviale oplossing  $x_1 = x_2 = 0$  volgens de eerste methode van Liapounov voor de volgende systemen:

a)  $\dot{x}_1 = -(x_1 - 3x_2)(1 - 2x_1^2 - 4x_2^2)$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 + x_2)(1 - 2x_1^2 - 4x_2^2)$$

b)  $\dot{x}_1 = x_1^2 + x_2$

$$\dot{x}_2 = x_1 + x_2^2$$

### Opgave 3.6

Voor de differentiaalvergelijking:

$$\ddot{u} - \left( \frac{1}{10} - \frac{10}{3} \dot{u}^2 \right) \dot{u} + u - u^3 = 0$$

die het gedrag geeft van een massa-veer-systeem met een niet-lineaire demper en een niet-lineaire veer, wordt gevraagd de stabiliteit te onderzoeken van de evenwichtsstanden.

### Opgave 3.7

Bepaal de grenskringloop van het systeem

$$\ddot{u} + (1 - |u|)\dot{u} + u = 0$$

met de methode van de langzaam variërende fase en amplitude en onderzoek de stabiliteit van de grenskringloop.

### 5.3 Antwoorden

#### Opg 1.1

2) exact:  $\omega_1 = 1,72\sqrt{\frac{S}{M\ell}}$ ; benaderd (lineair verloop):  $\omega_1 = 1,73\sqrt{\frac{S}{M\ell}}$

#### Opg 1.2

1)  $\tan \frac{\omega\ell}{c} = -\frac{S}{k\ell} \cdot \frac{\omega\ell}{c} \cdot \frac{1}{1-\omega^2/\omega_0^2}$ ;  $\omega_0^2 = k/m$       2)  $\omega = 1,895\frac{c}{\ell}$

#### Opg 1.3

1)  $\omega_k = \frac{k\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho A}}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ ;  $\hat{w}_k = C_1^{(k)} \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots$   
 2)  $w(t) = \frac{9}{\pi^2} a \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin k\frac{\pi}{3} \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \frac{k\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S}{\rho A}} t$

#### Opg 1.4

1 - 2 :  $\hat{u} = A \cos \mu x + B \sin \mu x$ ;  $0 < x < 1$

3 - 4 :  $\hat{u} = C \cos \mu y + D \sin \mu y$ ;  $0 < y < 1$

$$\mu^2 = \frac{\omega^2 \bar{m}}{EA}$$

$\hat{u}(x=0) = 0$ ;  $\hat{u}(x=1) = \hat{u}(y=0)$ ;  $\hat{u}'(x=1) = 2\hat{u}'(y=0)$ ;  $\hat{u}'(y=1) = 0$

$\tan^2 \mu\ell = \frac{1}{2} \rightarrow \omega_1 = 0,615\sqrt{\frac{EA}{m\ell^2}}$ ;

1 - 2 :  $\hat{u} = B \sin\left(0,615\frac{x}{\ell}\right)$

2 : 3 :  $\hat{u} = B \left[0,577 \cos\left(0,615\frac{y}{\ell}\right) + 0,408 \sin\left(0,615\frac{y}{\ell}\right)\right]$

#### Opg 1.5

1)  $\tan \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega\ell = \frac{k\ell}{EA} \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega\ell}$

2)  $\mu \rightarrow 0$  :  $\omega = \sqrt{\frac{k}{\rho A \ell}}$

$\mu = 1$  :  $\omega_1 = 0,86\frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

$\mu = \infty$  :  $\omega_1 = \frac{\pi}{2\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

### Opg 1.6

- 1)  $\beta \tan \beta = \mu$ ;  $\beta = \sqrt{\frac{\rho}{E}} \omega \ell$ ;  $\mu = \frac{A \ell \rho}{M}$
- 2)  $\mu = 0$ :  $\omega_1 = \sqrt{\frac{EA}{M \ell}}$ ;  $u^{(1)} = A^* \frac{x}{\ell} \sin \sqrt{\frac{EA}{M \ell}} t$   
 $\mu = 1$ :  $\omega_1 = \frac{0,86}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ;  $u^{(1)} = A^* \sin \left(0,86 \frac{x}{\ell}\right) \sin \left(0,86 \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t\right)$   
 $\mu = \infty$ :  $\omega_1 = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ ;  $u^{(1)} = A^* \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{x}{\ell}\right) \sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{E}{\rho}} t\right)$
- 3)  $\beta^2 \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2\right) = \mu \rightarrow \beta^4 + 3\beta^2 - 3\mu = 0$   
 $\beta \approx \mu \left(1 - \frac{1}{3} \mu\right) \rightarrow \omega_1 \approx \sqrt{\frac{EA}{M \ell \left(1 + \frac{1}{3} \mu\right)}}$

### Opg 1.7

- 1)  $\tan \sqrt{\frac{i}{S_i}} \omega \ell = \frac{S_i}{I} \sqrt{\frac{i}{S_i}} \frac{1}{\omega}$
- 2)  $I = 0$ :  $\omega_k = \left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{S_i}{i}}$ ;  $\varphi_k(x, t) = C_{1k} \sin \left(\frac{1}{2} + k\right) \frac{\pi x}{\ell} \cos(\omega_k t + \theta_k)$   
 $i = 0$ :  $\omega_1 = \sqrt{\frac{S_i}{I \ell}}$ ;  $\varphi_1(x, t) = C_1 \frac{x}{\ell} \cos(\omega_1 t + \theta)$
- 3)  $\omega_1 = 0,86 \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{S_i}{i}}$ ;  $\varphi_1(x, t) = C_1 \sin 0,86 \frac{x}{\ell} \cos(\omega_1 t + \theta_1)$

### Opg 1.8

- 1) Frequentievergelijking:  $\tanh \mu \ell = \tan \mu \ell$ ,  $\mu^4 = \frac{\rho A \omega^2}{EI}$
- 2)  $\omega_c = 15,42 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}}$   
 $\hat{w} = B \left[ \sinh \frac{5}{4} \pi \frac{x}{\ell} - \sqrt{2} \sinh \frac{5}{4} \pi \sin \frac{5}{4} \pi \frac{x}{\ell} \right]$   
 $x = 0$ :  $\frac{\hat{w}}{B} = 0$ ;  $x = \frac{1}{5} \ell$ :  $\frac{\hat{w}}{B} = -24,5$ ;  $x = \frac{2}{5} \ell$ :  $\frac{\hat{w}}{B} = -33,6$   
 $x = \frac{3}{5} \ell$ :  $\frac{\hat{w}}{B} = -20,2$ ;  $x = \frac{4}{5} \ell$ :  $\frac{\hat{w}}{B} = 11,5$ ;  $x = \ell$ :  $\frac{\hat{w}}{B} = 50,8$

### Opg 1.9

- 1)  $\cos \mu \ell \cosh \mu \ell + 1 + \left[ \mu \ell - \frac{\beta}{(\mu \ell)^3} \right] [\cos \mu \ell \sinh \mu \ell - \sin \mu \ell \cosh \mu \ell] = 0$
- 2)  $\beta = 12,36$
- 3)  $\beta = 12$ ;  $\omega_1 = 3,478 \sqrt{\frac{EI}{m \ell^3}}$ ;  $\beta = 13$ ;  $\omega_1 = 3,591 \sqrt{\frac{EI}{m \ell^3}}$



**Opg 1.10**

- 1)  $w(x, t) = \frac{f}{[\tanh \mu \ell - \tan \mu \ell]} \left[ \frac{\sinh \mu x}{\cosh \mu \ell} - \frac{\sin \mu x}{\cos \mu \ell} \right] \cos \omega t$
- 2)  $Q(\ell) = 2\mu^3 EI \frac{f}{[\tanh \mu \ell - \tan \mu \ell]}$
- 3)  $\mu \ell = 0; Q(\ell) = -\frac{3EI f}{\ell^3}; \mu \ell = \frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}; 5\frac{\pi}{2} : Q(\ell) = 0$   
 $\mu \ell = \frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}; \frac{13\pi}{4} : Q(\ell) = \infty$

**Opg 1.11**

- 1)  $\omega_k = \left(\frac{k\pi}{\ell}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}; \hat{w}_k = B_k \sin \frac{k\pi x}{\ell}$
- 2)  $w(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{16}{(\pi k)^3} [1 - (-1)^k] a \sin \frac{k\pi x}{\ell} \cos \omega_k t$

**Opg 1.12**

- 1)  $\tan \mu \ell = \tanh \mu \ell + \frac{2}{\mu \ell}; \mu^4 = \frac{m}{EI} \omega^2$
- 2)  $\beta = 1 : \omega_1 = 1, 42 \sqrt{\frac{EI}{m \ell^4}}; y_1(x) = B \left[ \sinh \left(1, 19 \frac{x}{\ell}\right) - 2, 69 \sin \left(1, 19 \frac{x}{\ell}\right) \right]$
- 3)  $\beta \rightarrow \infty : \omega_1 = \sqrt{\frac{6EI}{M \ell^3}}; \beta = 0 : \omega_1 = \frac{\pi^2}{4} \sqrt{\frac{EI}{m \ell^4}}$

**Opg 3.1**

$$u = -\mu \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\mu\right) + \left(1 + \frac{1}{3}\mu + \frac{29}{144}\mu^2\right) \cos \omega t + \mu \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\mu\right) \cos 2\omega t + \frac{1}{48}\mu^2 \cos 3\omega t$$

$$\omega = 1 - \frac{5}{12}\mu^2$$

**Opg 3.2**

$$u = \frac{1}{(1-\Omega^2)} \left[ -\frac{1}{2(1-\Omega^2)} \mu + \cos \Omega t - \frac{1}{2(1-\Omega^2)(1-4\Omega^2)} \mu \cos 2\Omega t \right]$$

**Opg 3.3**

$$\eta = 1 - \frac{f}{2A_0} \left(1 + \frac{f}{4A_0}\right) - \mu^2 \frac{5}{12} A_0^2 + O(\mu^3)$$

$$u(t) = A_0 \cos t + \mu \left[-\frac{1}{2} A_0^2 + \frac{1}{6} A_0^2 \cos 2t\right] + O(\mu^2)$$

**Opg 3.4**

$$u = q_0 + A \cos \frac{\omega}{2} t$$

$$A = \sqrt{\frac{2f}{\mu\omega_0^2}}; q_0 = -\frac{1}{2\mu} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\mu^2} - \frac{4f}{\mu\omega_0^2}}$$

Verband parameters:  $\frac{\omega}{\omega_0} = 2\sqrt{1 - \frac{4\mu f}{\omega_0^2}}$  en  $4\mu f > \omega_0^2$

Algemene benadering:  $u = q_0 + A \cos \frac{\omega}{2} t + B \cos \omega t$  waarin  $q_0$ ,  $A$  en  $B$  bepaald worden door de harmonische balans methode toe te passen.

**Opg 3.5**

- a) asymptotisch stabiel
- b) instabiel

**Opg 3.6**

- $u = 0$  instabiel (focus)
- $u = 1$  instabiel (zadelpunt)
- $u = -1$  instabiel (zadelpunt)

**Opg 3.7**

- $a = \frac{3}{4}\pi$ ;  $\psi = 0$  grenskringloop is stabiel
- $x = \frac{3\pi}{4} \sin t$ ;  $\dot{x} = \frac{3\pi}{4} \cos t$  (benaderingsoplossing)



# LITERATUUR

- [1] Hagedorn, P., Non-linear Oscillations, 2nd edition,  
Oxford Engineering Science, Series 10, Clarendon Press, Oxford, 1988.
- [2] Hayashi, C., Non-linear Oscillations in Physical Systems,  
McGraw Hill, New York, 1964.
- [3] Moon, F.C., Chaotic Vibrations, John Wiley & Sons, New York, 1987.
- [4] Nayfeh, A.H. and Mook, D.T., Non-Linear Oscillations,  
John Wiley & Sons, New York, 1979.
- [5] Stoker, J.J., Non-Linear Vibrations in Mechanical and Electric Systems,  
Interscience Publ., New York, 1950.
- [6] Thompson, J.M.T. and Stewart, H.B., Non-Linear Dynamics and Chaos,  
John Wiley & Sons, Chichester, 1986.
- [7] Verhulst, F., Niet-Lineaire Differentiaalvergelijkingen en Dynamische Systemen,  
Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1985.
- [8] Broer, H.W. en Verhulst, F., Dynamische Systemen en Chaos,  
Epsilon Uitgaven, Utrecht, 1990.





\*084WB1303\*

