

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT  
VLIEGTUIGBOUWKUNDE.

Memorandum M43

Het lineair regelen van een instabiel  
tweede orde systeem met een regelend  
element van de tweede orde.

door

ir. D. Zuidema.

DELFT - NEDERLAND.

juli 1960

## 1. Samenvatting.

Dit verslag behandelt het onderzoek naar de responsie op sprongvormige signalen van een lineair servosysteem, dat bestaat uit een instabiel te regelen element van de tweede orde en een regelend element van de tweede orde.

## 2. Inhoud.

	blz.
1. Samenvatting.	II
2. Inhoud.	III
3. Notaties.	IV
4. Inleiding.	1
5. Het regelende element.	2
6. Het te regelen element.	3
7. De regelkring.	4
7-1. De overdracht van de regelkring.	4
7-2. De stabiliteit van de regelkring.	5
8. De metingen.	10
9. Meetresultaten.	11
10. Conclusies.	14

### 3. Notaties.

$a_{0,1,2,3,4}$	coëfficiënten van de karakteristieke vergelijking.
$G_a$	frequentie afhankelijke deel van de overdracht van het te regelen element.
$G_s$	frequentie afhankelijke deel van de overdracht van het regelende element.
$K_a$	frequentie onafhankelijke deel van de overdracht van het te regelen element.
$K_s$	frequentie onafhankelijke deel van de overdracht van het regelende element.
$K_{x_u}$	versterkingsfaktor van de afgeleide van het uitgangssignaal $x_u$ .
$p$	operator van Laplace.
$S_{x_i}, S_{x_u}$	spanningschaalfactoren.
$S_1, S_2$	stroomschaalfactoren.
$T_a$	periodetijd van het te regelen element
$t_r(x_i)$	responsietijd voor $x_i$ als verstoring.
$t_r(y_i)$	responsietijd voor $y_i$ als verstoring.
$x_i$	ingangssignaal van de regelkring.
$x_u$	uitgangssignaal van de regelkring.
$y_i$	stoorsignaal op het te regelen element.
$\alpha_{1,2,3}$	coëfficiënten bij de stabiliteitsberekening.
$\delta$	uitgangssignaal van het regelende element.
$\varepsilon_x$	ingangssignaal van het regelende element.
$\zeta_a$	dempingsfaktor van het te regelen element. (Hier negatief t.o.v. de $\zeta_1$ uit Memorandum 27).
$\zeta_s$	dempingsfaktor van het regelende element.
$\pi$	3,14
$\omega_{oa}$	eigenfrequentie van het te regelen element.
$\omega_{os}$	eigenfrequentie van het regelende element.

#### 4. Inleiding.

Dit verslag vormt een onderdeel van het onderzoek naar het gedrag van lineaire en niet-lineaire regelkringen, welke bestaan uit een regelend element van de tweede orde en een te regelen element van de tweede orde of van de eerste orde.

Het regelend element is een nabootsing van een besturingsmechanisme, als massa-veer systeem met demping. Het te regelen element is een vliegtuig in een bepaalde vluchttoestand. Hier wordt het geval onderzocht waarbij het te regelen element beschouwd kan worden als een instabiel tweede orde systeem.

De regelkring wordt gevormd door bovengenoemde elementen, waarbij hetingangssignaal  $x_i$  wordt vergeleken met het uitgangssignaal  $x_u$ . Tevens wordt de snelheid van  $x_u$  terug gekoppeld met de faktor  $K_{x_u}$ .

Op het te regelen element werkt verder nog het stoorsignaal  $y_i$ . De instelling van het systeem is gunstig als het stoorsignaal de uitgang zo gering mogelijk beïnvloedt.

Na het beschrijven van de opbouw en overdracht van het systeem worden enkele voorwaarden afgeleid voor de stabiliteit.

Het gedrag van enkele systemen met een stabiele instelling wordt bij de metingen nader onderzocht. Hierbij wordt de responsie nagegaan voor sprongvormige verstoring door  $x_i$  of door  $y_i$ . Om deze responsies voor verschillende systemen te kunnen vergelijken is een responsiekriterium aangenomen. Dit bestaat uit een eerste overshoot in  $x_u$  van  $\frac{100}{3}$  % en een minimale eerste ondershoot. Dan kunnen de instellingen van de verschillende systemen hierbij vergeleken worden, zodat men aan de hand van de conclusies hieruit kan beoordelen hoe men de regelaar kan kiezen voor een gegeven instabiel tweede orde systeem.

### 5. Het regelende element.

Het regelende element heeft een tweede orde overdrachtfunctie als nabootsing van een massa-veer systeem met demping. Voor een uitvoerige behandeling hiervan wordt verwezen naar het memorandum M 27 (hoofdstuk 5; blz. 2-5).

Bij toepassen van de Laplace-transformatie op de overdracht verhouding volgt:

$$K_S G_S(p) = \frac{\omega_{OS}^2 K_S}{p^2 + 2\zeta_S \omega_{OS} p + \omega_{OS}^2} \quad (1)$$

In het regelsysteem is de frequentie-onafhankelijke overdracht van het regelende element  $K_S$  te kiezen:

Bij de metingen wordt voor de eigenfrequentie  $\omega_{OS}$  ende dempingsfaktor  $\zeta_S$  de volgende waarde genomen:

$$\omega_{OS} = 0,317$$

$$\zeta_S = 0,5$$

6. Het te regelen element.

De verstoring van het te regelen element wordt gevormd door de som van de uitgangsgrootheid  $\delta$  van het regelende element en de stoorfunctie  $y_i$ .

De vergelijking tussen de verstoring en het uitgangssignaal  $x_u$  van het te regelen element is gegeven door een tweede orde differentiaal vergelijking. De oplossing hiervan moet twee instabiele wortels hebben. Dit is het geval als de coëfficiënt van de dempingsterm negatief is.

Overeenkomstig met de overdracht van het regelende element in het p-vlak, volgens formule (1), is voor de overdracht van het te regelen element te schrijven:

$$\frac{x_u}{\delta + y_i} = K_a G_a(p) = \frac{\omega_{oa}^2 K_a}{p^2 - 2\zeta_a \omega_{oa} p + \omega_{oa}^2} \quad (2)$$

In vergelijking (2) zijn nu alle grootheden positief.

Bij de metingen wordt  $K_a = 1$  genomen. Voor  $\omega_{oa}$  en  $\zeta_a$  worden verschillende waarden gekozen.

## 7. De regelkring.

De regelkring bestaat uit de opeenvolging van het regelende element en het te regelen element en wordt gesloten door negatieve terugkoppeling van het uitgangssignaal  $x_u$  en het van de snelheid van  $x_u$  afhankelijke signaal  $K_{\dot{x}_u} \dot{x}_u$ .

Voor deze terugkoppeling is het p-vlak te schrijven:

$$(1 + K_{\dot{x}_u} p) x_u.$$

Een blokschema van het regelsysteem is afgebeeld in figuur 1. Vervolgens worden de overdracht en de stabiliteit van het gesloten systeem besproken. Een bepaald systeem wordt gekenmerkt door  $\zeta_s$ ,  $\zeta_a$ ,  $\omega_{oa}$  en  $\omega_{os}$ . Hierbij zijn dan  $(K_s K_a)$  en  $K_{\dot{x}_u}$  nog te kiezen. Steeds geldt:  $K_s K_a > 0$ ,  $K_{\dot{x}_u}$  kan positief of negatief zijn.

### -1. De overdracht van de regelkring.

Volgens de vergelijkingen (1) en (2), die weergegeven zijn in het blokschema van figuur 1, geldt:

voor de uitgang van het te regelen element:

$$x_u(p) = \frac{\omega_{oa}^2 K_a}{p^2 - 2\zeta_a \omega_{oa} p + \omega_{oa}^2} \left\{ \delta(p) + y_i(p) \right\} \quad (3)$$

voor de uitgang van het regelende element:

$$\delta(p) = \frac{\omega_{os}^2 K_s}{p^2 + 2\zeta_s \omega_{os} p + \omega_{os}^2} \varepsilon_x(p) \quad (4)$$

en voor het stuursignaal  $\varepsilon_x$ :

$$\varepsilon_x(p) = x_i(p) - \left\{ 1 + K_{\dot{x}_u} p \right\} x_u(p) \quad (5)$$

Deze drie vergelijkingen zijn, door  $\delta(p)$  en  $\varepsilon_x(p)$  te elimineren, te herleiden tot:

$$x_u(p) = \frac{\omega_{os}^2 \omega_{oa}^2 K_s K_a x_i(p) + \left\{ p^2 + 2\zeta_s \omega_{os} p + \omega_{os}^2 \right\} \omega_{oa}^2 K_a y_i(p)}{\left\{ p^2 + 2\zeta_s \omega_{os} p + \omega_{os}^2 \right\} \left\{ p^2 - 2\zeta_a \omega_{oa} p + \omega_{oa}^2 \right\} + \omega_{os}^2 \omega_{oa}^2 K_a K_s \left\{ 1 + K_{\dot{x}_u} p \right\}} \quad (6)$$



Vergelijking (6) geeft het gedrag aan de uitgang van het systeem weer als het verstoord wordt door  $x_i$  en  $y_i$ . Het polynoom in de noemer bepaalt de stabiliteit van het regelsysteem.

Bij de metingen worden twee gevallen beschouwd:

$$1) y_i = 0$$

De overdracht is dan:

$$\frac{x_u(p)}{x_i(p)} = \frac{\omega_{os}^2 \omega_{oa}^2 K_s K_a}{[\text{noemer polynoom}]} \quad (7)$$

$$2) x_i = 0$$

Hierbij is de overdracht:

$$\frac{x_u(p)}{y_i(p)} = \frac{\{p^2 + 2\zeta_s \omega_{os} p + \omega_{os}^2\} \omega_{oa}^2 K_a}{[\text{noemer polynoom}]} \quad (8)$$

Uit (7) en (8) blijkt dat de statische responsie op  $x_i$  of  $y_i$  verbetert naarmate  $K_s$  groter wordt ten opzichte van 1. Dan wordt de gevoeligheid voor  $x_i$  groter dan voor  $y_i$ .

## 2. De stabiliteit van de regelkring.

Als de noemer van (6) gelijk aan nul wordt voor een waarde van  $p$  met positief reëel deel, dan is het gesloten systeem instabiel. Het nul-stellen van het noemer-polynoom geeft de karakteristieke vergelijking. Deze heeft geen wortels met een positief reëel deel als de coëfficiënten voldoen aan de Hurwitz-voorwaarden.

Uitschrijven van de karakteristieke vergelijking geeft:

$$\begin{aligned} p^4 + (2\zeta_s \omega_{os} - 2\zeta_a \omega_{oa}) p^3 + (\omega_{os}^2 + \omega_{oa}^2 - 4\zeta_s \zeta_a \omega_{os} \omega_{oa}) p^2 + \\ + (2\zeta_s \omega_{os} \omega_{oa}^2 - 2\zeta_a \omega_{oa} \omega_{os}^2 + \omega_{os}^2 \omega_{oa}^2 K_s K_a K_{x_u}) p + \\ + \omega_{os}^2 \omega_{oa}^2 (K_s K_a + 1) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Daar hierin de coëfficiënt van  $p^4$  positief is, wordt de eerste H.-voorwaarde gevormd door:

$$2\zeta_s \omega_{os} - 2\zeta_a \omega_{oa} > 0$$

Dit is ook te schrijven als:

$$\zeta_s \omega_{os} > \zeta_a \omega_{oa} \quad \text{of} \quad \zeta_s \zeta_a < \zeta_s^2 \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} \quad (8)$$

Als (7) gelijk gesteld wordt met

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0 \quad (9)$$

dan is dus  $a_0 > 0$  en volgens (8):  $a_1 > 0$ .

De tweede voorwaarde wordt gevormd door:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \text{ of } a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0 \quad (10)$$

Substitutie van de coëfficiënten van (7) in (10) geeft:

$$\begin{aligned} & (2\zeta_s \omega_{os} - 2\zeta_a \omega_{oa}) (\omega_{os}^2 + \omega_{oa}^2 - 4\zeta_s \zeta_a \omega_{os} \omega_{oa}) + \\ & - (2\zeta_s \omega_{os} \omega_{oa}^2 - 2\zeta_a \omega_{oa} \omega_{os}^2 + \omega_{os}^2 \omega_{oa}^2 K_s K_a K_{x_u}) > 0 \\ \text{of } & 2 \left( \frac{\zeta_s}{\omega_{oa}} - \frac{\zeta_a}{\omega_{os}} \right) \left( \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} + \frac{\omega_{oa}}{\omega_{os}} - 4\zeta_s \zeta_a \right) + \\ & - 2 \left( \frac{\zeta_s}{\omega_{os}} - \frac{\zeta_a}{\omega_{oa}} \right) - K_s K_a K_{x_u} > 0 \quad (11) \end{aligned}$$

Hierin zijn alle grootheden positief, behalve  $K_{x_u}$ .

Daar deze zowel positief als negatief kan zijn, kan voor elk systeem aan (11) voldaan worden. Dit in tegenstelling tot voorwaarde (8), waardoor het aantal systemen dat mogelijk is, beperkt wordt.

Er rest nu nog een derde voorwaarde. Voor (9) luidt deze:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

$$\text{of: } a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 > 0 \quad (12)$$

Substitutie van de coëfficiënten van (7) in (12) geeft:

$$(2\zeta_s \omega_{os} \omega_{oa}^2 - 2\zeta_a \omega_{oa} \omega_{os}^2 + \omega_{os}^2 \omega_{oa}^2 K_s K_a K_{\dot{x}_u}) \cdot$$

$$\cdot \left\{ (2\zeta_s \omega_{os} - 2\zeta_a \omega_{oa}) (\omega_{os}^2 + \omega_{oa}^2 - 4\zeta_s \zeta_a \omega_{os} \omega_{oa}) + \right. \\ \left. - (2\zeta_s \omega_{os} \omega_{oa}^2 - 2\zeta_a \omega_{oa} \omega_{os}^2 + \omega_{os}^2 \omega_{oa}^2 K_s K_a K_{\dot{x}_u}) \right\} +$$

$$- \omega_{os}^2 \omega_{oa}^2 (1 + K_s K_a) (2\zeta_s \omega_{os} - 2\zeta_a \omega_{oa})^2 > 0$$

Dit is om te zetten tot:

$$K_s^2 K_a^2 K_{\dot{x}_u}^2 + \\ + \left[ 2 \left( \frac{2\zeta_s}{\omega_{os}} - \frac{2\zeta_a}{\omega_{oa}} \right) - \left( \frac{2\zeta_s}{\omega_{oa}} - \frac{2\zeta_a}{\omega_{os}} \right) \left( \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} + \frac{\omega_{oa}}{\omega_{os}} - 4\zeta_s \zeta_a \right) \right] K_s K_a K_{\dot{x}_u} + \\ + \left( \frac{2\zeta_s}{\omega_{os}} - \frac{2\zeta_a}{\omega_{oa}} \right)^2 - \left( \frac{2\zeta_s}{\omega_{os}} - \frac{2\zeta_a}{\omega_{oa}} \right) \left( \frac{2\zeta_s}{\omega_{oa}} - \frac{2\zeta_a}{\omega_{os}} \right) \left( \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} + \frac{\omega_{oa}}{\omega_{os}} - 4\zeta_s \zeta_a \right) + \\ + \left( \frac{2\zeta_s}{\omega_{oa}} - \frac{2\zeta_a}{\omega_{os}} \right)^2 (K_s K_a + 1) < 0 \quad (13)$$

Door te stellen:

$$\alpha_1 = \frac{2\zeta_s}{\omega_{os}} - \frac{2\zeta_a}{\omega_{oa}} \quad (14)$$

$$\alpha_2 = \frac{2\zeta_s}{\omega_{oa}} - \frac{2\zeta_a}{\omega_{os}} \quad (15)$$

$$\alpha_3 = \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} + \frac{\omega_{oa}}{\omega_{os}} - 4\zeta_s \zeta_a \quad (16)$$

Kan men (13) omzetten tot:

$$K_s^2 K_a^2 K_{\dot{x}_u}^2 + (2\alpha_1 - \alpha_2 \alpha_3) K_s K_a K_{\dot{x}_u} + \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2^2 (K_s K_a + 1) \\ \text{kleiner dan nul.} \quad (17)$$

Voor de stabiliteitsgrens die deze voorwaarde stelt kan (17) beschouwd worden als een tweede-graads vergelijking in  $K_{x_u}$ ; volgens:

$$K_{x_u}^2 + \frac{1}{K_s K_a} (2\alpha_1 - \alpha_2 \alpha_3) K_{x_u} + \frac{1}{K_s^2 K_a^2} \left\{ \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2^2 (K_s K_a + 1) \right\} = 0 \quad (18)$$

Als er reële waarden van  $K_{x_u}$  aan deze grens moeten voldoen, dan moet de discriminant van (18) groter zijn dan nul. Dus:

$$\frac{1}{K_s^2 K_a^2} \left( \alpha_1 - \frac{\alpha_2 \alpha_3}{2} \right)^2 - \frac{1}{K_s^2 K_a^2} \left\{ \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \alpha_2^2 (K_s K_a + 1) \right\} > 0$$

$$\text{of: } \alpha_1^2 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + \frac{\alpha_2^2 \alpha_3^2}{4} - \alpha_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - \alpha_2^2 (K_s K_a + 1) > 0$$

$$\text{dus: } \frac{\alpha_3^2}{4} - (K_s K_a + 1) > 0 \quad (19)$$

Met (16) volgt uit (19), als neven-voorwaarden van de stabiliteit volgens (13):

$$\left| \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} + \frac{\omega_{oa}}{\omega_{os}} - 4\zeta_s \zeta_a \right| > 2 \sqrt{K_s K_a + 1} \quad (20)$$

Omdat steeds  $K_s K_a > 0$  geldt, zijn slechts die systemen mogelijk waarvoor, volgens (20),

$$\left| \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} + \frac{\omega_{oa}}{\omega_{os}} - 4\zeta_s \zeta_a \right| > 2 \quad (21)$$

Systemen die niet aan deze voorwaarde voldoen hebben voor reële waarden van  $K_{x_u}$  en  $K_s K_a$  geen stabiele instelling.

Gaat men uit van een regelsysteem dat aan (21) voldoet, dan kan (20) opgevat worden als voorwaarde voor  $K_s K_a$ . Dit geeft een maximale waarde van  $K_s K_a$ , boven welke geen stabiliteit mogelijk is.

Het voorgaande resumerende kan gesteld worden:

- Het regelen van een instabiel 2<sup>e</sup>-orde systeem met een stabiel 2<sup>e</sup>-orde systeem is slechts mogelijk als de eigenfrequenties en de dempingsfactoren voldoen aan de voorwaarden (8) en (21).
- Heeft men een systeem dat aan deze voorwaarden voldoet, dan zijn  $K_x$  en  $K_s K_a$  nog gebonden aan de voorwaarden (11) en (13) om een stabiele instelling te verkrijgen.

De voorwaarden (8) en (21) zijn afgebeeld in figuur 2, door  $\xi_s \xi_a$  als functie van  $\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}}$  te nemen.

In figuur 3 is het linker stabiliteitsgebied uit figuur 2 ver-groot afgebeeld.

Systemen die een stabiele instelling kunnen hebben liggen beneden de getekende grenzen. De grens van voorwaarden (21) heeft een asymptoot:  $\xi_s \xi_a = 0,25 \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} - 0,5$ . Deze asymptoot loopt evenwijdig aan de grens van voorwaarde (8) bij  $\xi_s = 0,5$ . Als dus  $\xi_s$  kleiner wordt gekozen dan 0,5 verkleint ook het rechter stabiliteitsgebied, zoals afgebeeld is in figuur 3.

## 8. De metingen.

Bij de metingen wordt nagegaan hoe bij de mogelijke systemen de stabiliteitsgrenzen liggen en hoe hierbij het afzonderlijke gedrag is voor verstoring door hetingangssignaal of het stoor-sig-naal bij sprongvormige verandering.

Om het gedrag bij de verschillende systemen te kunnen verge-lijken, wordt gestreefd naar een optimale instelling van de responsie. Het criterium voor deze optimale instelling is het-zelfde dat gebruikt is bij het regelen van een stabiel tweede orde systeem. (zie Memorandum M 27). Dit criterium bestaat uit een responsie met een eerste overshoot van  $\frac{100}{3}\%$  en een minimale eerste ondershoot.

Bij de optimale instelling worden de responsietijden bepaald. De responsietijd is gedefinieerd als de tijd tussen het begin van de verstoring en het tijdstip waarop de kromme, die raakt aan de ondershoots en de ten opzichte van de eindwaarde van het uitgangs-sig-naal gespiegelde overshoots, minder dan  $\frac{10}{3}\%$  van de eindwaarde van het uitgangssig-naal verschilt.

De metingen zijn uitgevoerd met behulp van de analogonrekenmachine. Figuur 4 geeft het algemene instelschema voor het analogon van de differentiaalvergelijkingen die overeenkomen met de getransfor-meerde overdrachtsgrootheden in figuur 1. Voor vrijwel alle metingen werd het rekenproces 10-maal versneld door de instelstroom van de integratoren 10-maal groter te nemen.

Bij het instellen werd steeds genomen:  $K_a = 1$

$$\zeta_s = 0,5 \quad \omega_{os} = 0,317$$

## 9. Meetresultaten.

De systemen met een stabiele instelling, waar aan gemeten is, zijn:

$$\text{I. } \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 0,333 \quad \zeta_a = 0,05 \quad , \quad \zeta_a = 0,10$$

$$\text{II. } \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 3,33 \quad \zeta_a = 0,10 \quad , \quad \zeta_a = 0,50$$

$$\text{III. } \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 10,0 \quad \zeta_a = 0,10 \quad \zeta_a = 0,50 \quad \zeta_a = 1,0$$

Deze zijn met  $\zeta_s = 0,5$  afgebeeld in figuur 2.

De meetresultaten zijn weergegeven in tabel 1.

Voor enkele systemen is echter geen instelling gevonden welke voldoet aan het gestelde optimum.

Achtereenvolgens worden nu de verschillende systemen besproken:

$$\text{I. } \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 0,333 \quad \zeta_a = 0,05.$$

Het stabiliteitsgebied is getekend in figuur 5. Hier is dus  $K_{x_u}$  negatief. In het stabiele gebied zijn de overshoots groot en er wordt geen optimale instelling gevonden. Bij  $K_s = 0,20$  en  $K_{x_u} = -10,0$  zijn de eerste overshoots in  $x_u$  met  $x_i$ , respect  $y_i$ , als verstoring: 85% en 195%. De responsie vertoont zwevingen en heeft een minder vloeiend karakter.

$$\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 0,333 \quad \zeta_a = 0,10$$

Het stabiliteitsgebied is getekend in figuur 6. Tevens is hierin een lijn aangegeven, waarbij de eerste overshoot in  $x_u$ , als responsie op  $x_i$ , 33% bedraagt. In het stabiele gebied zijn de overshoots veel groter. Bij  $K_s = 0,20$  en  $K_{x_u} = -10,0$  zijn de eerste overshoots in  $x_u$  voor  $x_i$ , respect  $y_i$ : 92% en 248%. Ook hier vertoont de responsie een onregelmatig karakter en is slechter gedempt dan in het voorgaande geval bij  $\zeta_a = 0,05$ .

Voor een toename in  $K_s$  neemt de overshoot toe, n.l. bij  $K_s = 0,24$  en  $K_{x_u} = -10,0$  zijn de 1<sup>e</sup> overshoots in  $x_u$  voor  $x_i$ , respect  $y_i$ : 114% en 264%. Wel is de responsie als geheel beter gedempt.

$$\text{II} \quad \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 3,33 \quad \xi_a = 0,10$$

Het stabiliteitsgebied is getekend in figuur 7. Hier is  $K_{x_u}$  positief. Voor grotere  $K_{x_u}$  neemt de overshoot in  $x_u$  als responsie op  $x_i$  af. Op de lijn van 33% overshoot wordt een minimale eerste ondershoot gevonden. De optimale instelling voor de responsie op  $y_i$  ligt hier niet ver van verwijderd. In beide punten zijn de responsies voor  $x_i$  en  $y_i$  bepaald en weergegeven in tabel 1.

$$\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 3,33 \quad \xi_a = 0,50$$

Het stabiliteitsgebied is weergegeven in figuur 8.

Een optimale instelling wordt niet gevonden.

De responsietijden voor  $x_i$ , respect  $y_i$ , bij 33% eerste overshoot in de responsie naderen voor extreme waarden van  $K_s$  en  $K_{x_u}$  een tamelijk konstante waarde. N.l.: bij  $K_s \approx 2,5 \cdot 10^{-3}$  en  $K_{x_u} \approx 6,6 \cdot 10^{-3}$  zijn de responsie-tijden bij 33% overshoot voor  $x_i$  en  $y_i$  respect ongeveer 80 sec. en 50 sec.

$$\text{III} \quad \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 10,0 \quad \xi_a = 0,10$$

Het stabiliteitsgebied is afgebeeld in figuur 9.

Voor grote  $K_{x_u}$  blijft de eerste "over"shoot onder de eindwaarde, welke door de tweede opslingering gepasseerd wordt. Het is te verwachten dat er meer overshoots onder de eindwaarde komen te liggen naarmate  $K_{x_u}$  stijgt. Op de 33% lijn wordt weer een optimale instelling voor  $x_i$  gevonden. Het optimum voor  $y_i$  ligt hier dichtbij. De meetresultaten zijn opgenomen in tabel 1.

$$\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 10,0 \quad \xi_a = 0,50$$



Het stabiliteitsgebied is getekend in figuur 10.

Hier is het verloop van de meting als bij het vorige geval. Wel verkleint het stabiliteitsgebied voor toename van  $\xi_a$  en liggen de waarden alle iets hoger, afgezien van de maximale waarde van  $K_s$ .

$$\frac{\omega_{OS}}{\omega_{Ca}} = 10,0 \quad \xi_a = 1,00$$

Het stabiliteitsgebied is weergegeven in figuur 11.

Voor deze meting geldt hetzelfde als bij de voorgaande twee metingen

Bij de metingen is het moeilijk de optimale instellingen voor  $x_i$  en  $y_i$  exact te bepalen. Echter verandert het gedrag van een systeem rond deze punten niet erg veel. Ook is de bepaling van de responsietijden niet nauwkeurig, zodat een fout van ongeveer 5 sec. hierin mogelijk is.

10. Conclusies.

Naar aanleiding van de stabiliteitskriteria, zoals deze geresumeerd zijn aan het slot van hoofdstuk 7-2, kan men een oordeel vormen over de mogelijke regeling van een instabiel tweede orde systeem met behulp van een regelend element van de tweede orde.

Uit de stabiele gebieden in figuur 2 volgt welke keuze mogelijk is voor  $\zeta_s$  en  $\omega_{os}$  van het regelende element bij gegeven  $\zeta_a$  en  $\omega_{oa}$  van het te regelen element.

Het linker stabiliteitsgebied uit figuur 2 is echter ongunstig. Hier geldt  $\omega_{oa} > \omega_{os}$  en is dus het instabiele element sneller dan het stabiele regelende-element. Daardoor is de responsie van het systeem op een stoorsignaal  $y_i$  ontoelaatbaar door grote overshoot en onregelmatige beweging van  $x_u$ . Ook voor het ingangssignaal  $x_i$  is de overshoot in de responsie groot. Bovendien ligt voor de systemen met  $0,3 < \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} < 1$  de waarde van  $K_s$  in het stabiele gebied van het  $K_{x_u} - K_s K_a$  vlak tamelijk laag.

Als het regelsysteem gevoeliger voor  $x_i$  moet zijn dan voor  $y_i$ , is het noodzakelijk dat  $K_s \gg 1$ . Dit beperkt ook de mogelijke systemen in het rechter stabiliteitsgebied van figuur 2.

Algemeen kan gesteld worden dat een bepaald systeem niet te dicht bij de rechter stabiliteitsgrens in figuur 2 mag liggen. Met formule (20) kan een hulpregel afgeleid worden. Als bijv. geëist wordt dat  $K_s > 10$  voor een bepaalde instelling, dan kan men grof stellen dat hierbij  $K_{s \max}$  ongeveer 15 of meer zal zijn. Formule (20) reduceert dan tot de hulp voorwaarden:

$\left| \frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} - 4\zeta_a \zeta_s \right| \gg 8$ . Dit is in figuur 2 een lijn evenwijdig aan de asymptoot, welke de horizontale as snijdt in het punt  $\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 8$ . Punten rechts van deze lijn hebben dan  $K_s \approx 10$  in het stabiele gebied.

Bij een bepaalde waarde van  $\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}}$  is het moeilijker om een keuze te doen voor  $\zeta_s$ .

Een lage waarde van  $\xi_a \xi_s$  is gunstig doordat dan het stabiliteitsgebied in het  $K_s K_a - K_{\dot{x}_u}$  vlak ruim is en een aanvaardbaar instelpunt te vinden is bij niet te hoge waarde van  $K_{\dot{x}_u}$ .

Echter mag, bij gegeven  $\xi_a$ , de waarde van  $\xi_s$  niet te klein worden, daar dan het rechter stabiliteitsgebied van de mogelijke systemen verkleind wordt (zie figuur 3). Als men bij  $\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 10$  een goede stabiliteitsmarge wil hebben, dan moet  $\xi_s \geq 0,3$ .

Opmerking:

Als men  $\xi_s \geq 0,3$  combineert met de voorwaarde  $K_s \approx 10$ , dan is bij  $\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 10$  de waarde van  $\xi_s \xi_a \leq 0,5$  en is dus slechts een gunstige instelling mogelijk voor  $\xi_a \leq 1,6$ .

Naar aanleiding van de metingen kan betreffende de instelling van  $K_s$  en  $K_{\dot{x}_u}$  bij een bepaald systeem nog de conclusie getrokken worden dat de responsietijd voor  $y_i$  steeds kleiner is dan voor  $x_i$ , maar dat de responsietijden bij optimale instelling voor  $x_i$  kleiner zijn dan bij optimale instelling voor  $y_i$ .

Voor de optimale instellingen bij konstante  $\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}}$  en toenemende  $\xi_a \xi_s$  neemt  $K_s K_a$  af en stijgt  $K_{\dot{x}_u}$ .

Voor  $\omega_{oa} < \omega_{os}$  is de eerste overshoot in de responsie kleiner naarmate het instelpunt verder van de assen in het  $K_s K_a - K_{\dot{x}_u}$  vlak verwijderd ligt. Voor stabiele instellingen is  $K_{\dot{x}_u}$  positief.

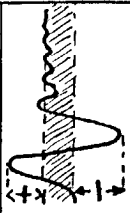
Als  $\omega_{oa} > \omega_{os}$  neemt de eerste overshoot toe naarmate het instelpunt verder van de assen af ligt. Voor stabiele instellingen is  $K_{\dot{x}_u}$  negatief.

Hoe dichter een instelpunt de stabiliteitsgrenzen in het  $K_s K_a - K_{\dot{x}_u}$  vlak nadert, hoe slechter is de demping van de responsie.

Op te merken valt nog dat gemeten waarden voor de stabiliteitsgrenzen redelijk overeenkomen met de vorm van formule (18). De gevonden waarden van  $K_s \max$  voldoen aan voorwaarde (20).

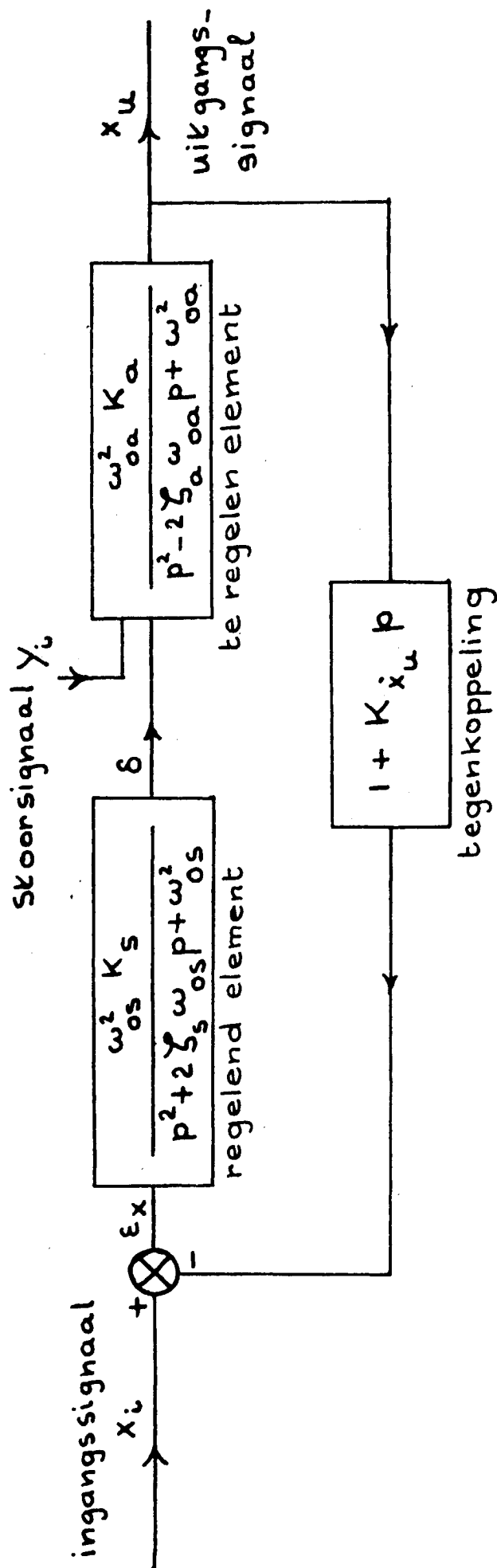
De stabiliteitsvoorwaarde volgens betrekking (11) blijkt geen rol te spelen in het  $K_a K_s - K_{\dot{x}_u}$  vlak. De stabiele gebieden volgens (13), respect.(18), liggen steeds beneden de hyperbool die de grens vormt volgens (11). Boven deze grens ligt het instabiele gebied voor  $K_s K_a K_{\dot{x}_u}$ , zodat in het  $K_s K_a - K_{\dot{x}_u}$  vlak de stabiliteit alleen door voorwaarde (13) bepaald wordt.

Optimaal voor $x_i$										
$\zeta_a$	$\frac{\omega_{OS}}{\omega_{oa}}$	$\omega_{oa}$	$T_a$	$K_s K_a$	$K \dot{x}_u$	$\omega_{oa} K \dot{x}_u$	$t_r(x_i)$	$t_r(y_i)$	$\frac{t_r(x_i)}{T_a}$	$\frac{t_r(y_i)}{T_a}$
0,10	3,33	0,0951	66,0	0,43	+28,0	2,56	56	47	0,85	0,71
										over-shoot op $x_i$
										25
										+ 47
										%
0,10	10,0	0,0317	198	11,5	+10,0	0,343	50	46	0,25	0,23
										over-shoot op $y_i$
										26,5
										+ 88
										%
0,50	10,0	0,0317	198	9,00	+14,1	0,445	57,5	53	0,29	0,27
										over-shoot op $x_i$
										27
										+ 115
										%
1,00	10,0	0,0317	198	7,50	+19,6	0,622	51	44	0,26	0,22
										over-shoot op $y_i$
										27,5
										+ 163
										%



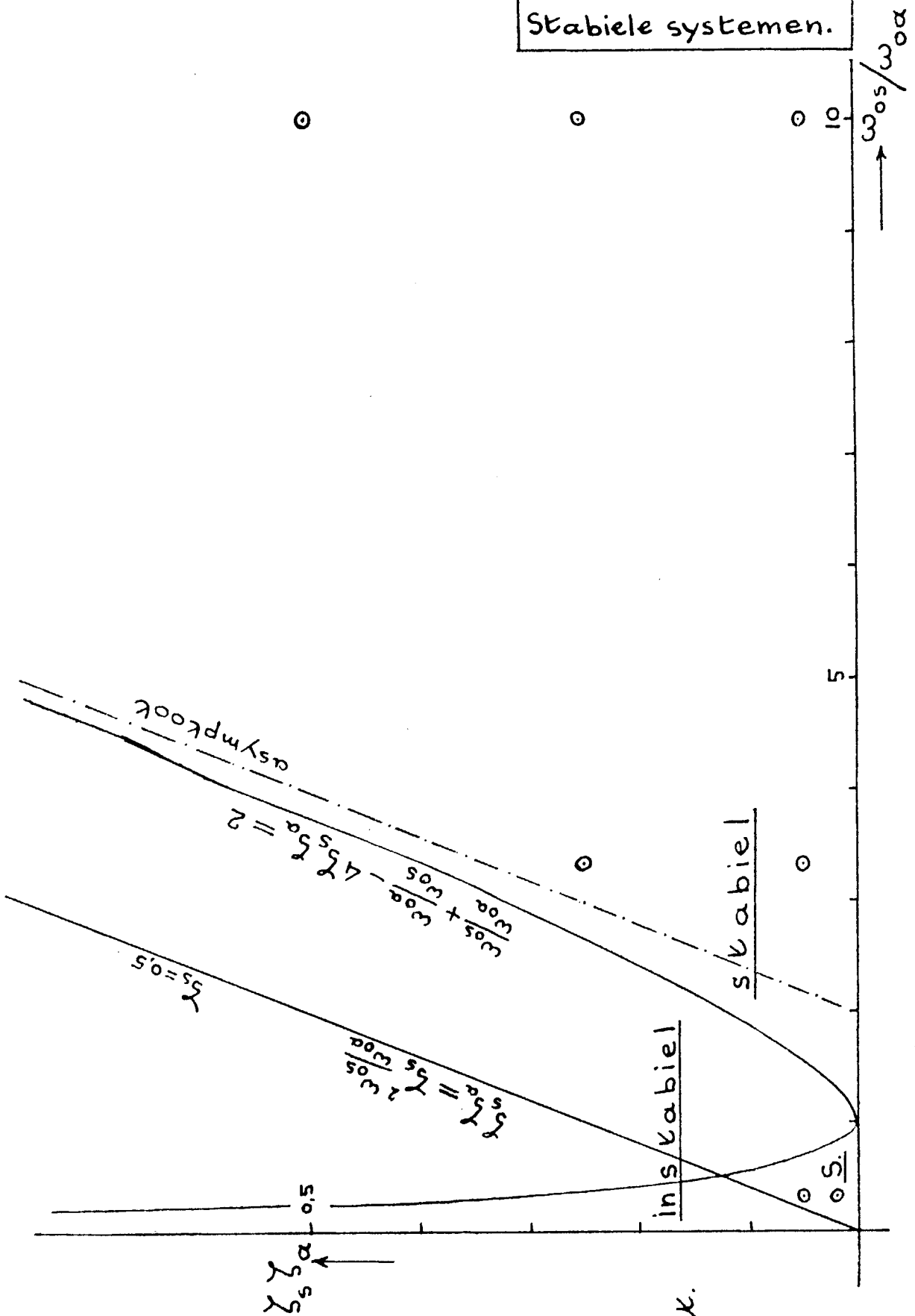
Optimaal voor $y_i$										
$\zeta_a$	$\frac{\omega_{OS}}{\omega_{oa}}$	$\omega_{oa}$	$T_a$	$K_s K_a$	$K \dot{x}_u$	$\omega_{oa} K \dot{x}_u$	$t_r(x_i)$	$t_r(y_i)$	$\frac{t_r(x_i)}{T_a}$	$\frac{t_r(y_i)}{T_a}$
0,10	3,33	0,0951	66,0	0,50	+23,5	2,68	59	53	0,89	0,80
										over-shoot op $x_i$
										40
										+ 50
										%
0,10	10,0	0,0317	198	11,0	+10,6	0,336	66	58	0,33	0,29
										over-shoot op $y_i$
										40
										+ 89
										%
0,50	10,0	0,0317	198	10,0	+12,9	0,410	61	55	0,31	0,28
										over-shoot op $x_i$
										40
										+ 120
										%
1,00	10,0	0,0317	198	7,00	+19,7	0,626	70	60	0,35	0,30
										over-shoot op $y_i$
										39
										+ 165
										%

Tabel I.  
Meetresultaten.



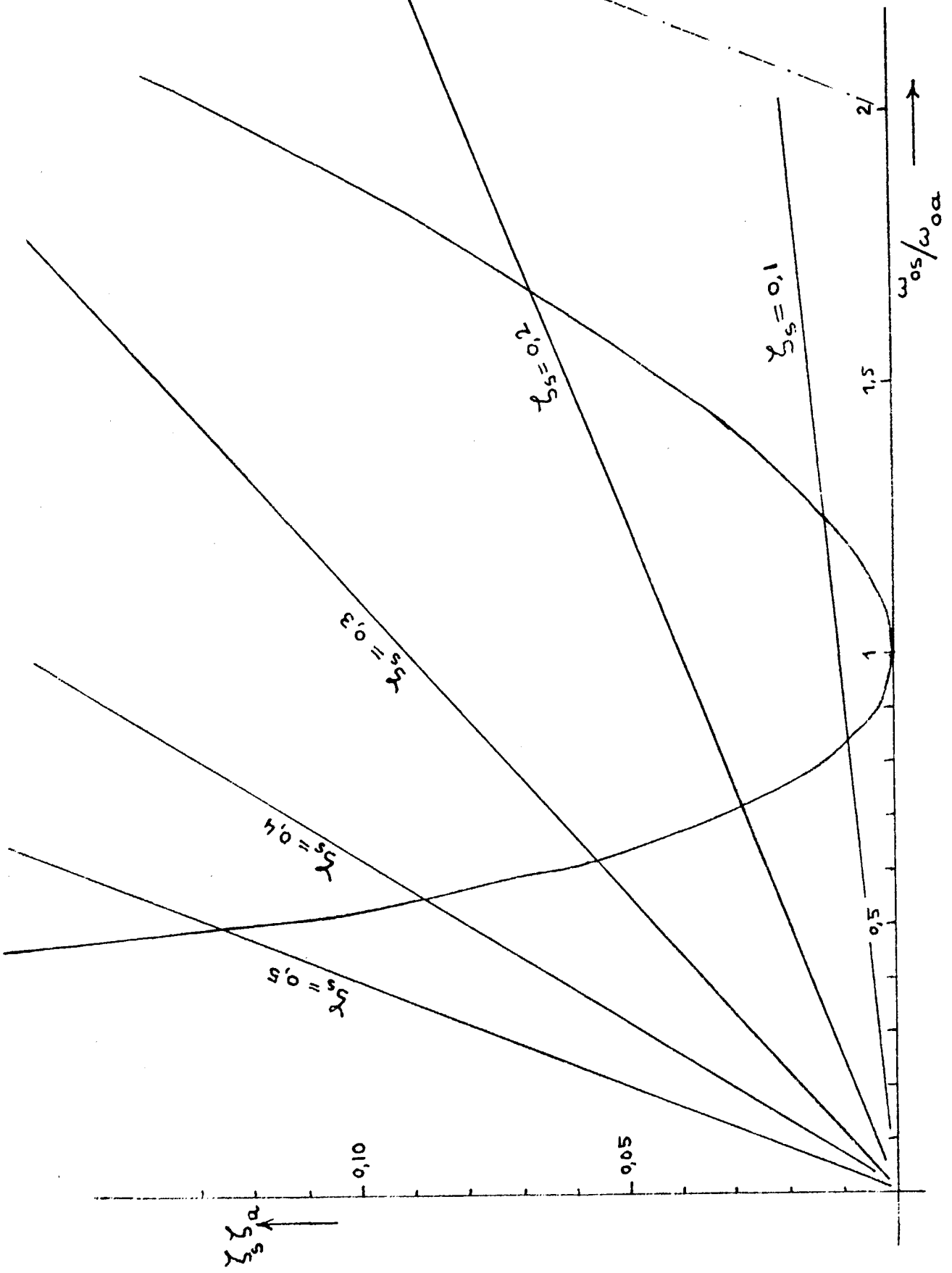
Figuur 1.  
 Blokschema van de regelkring.

Figuur 2.  
Stabiele systemen.

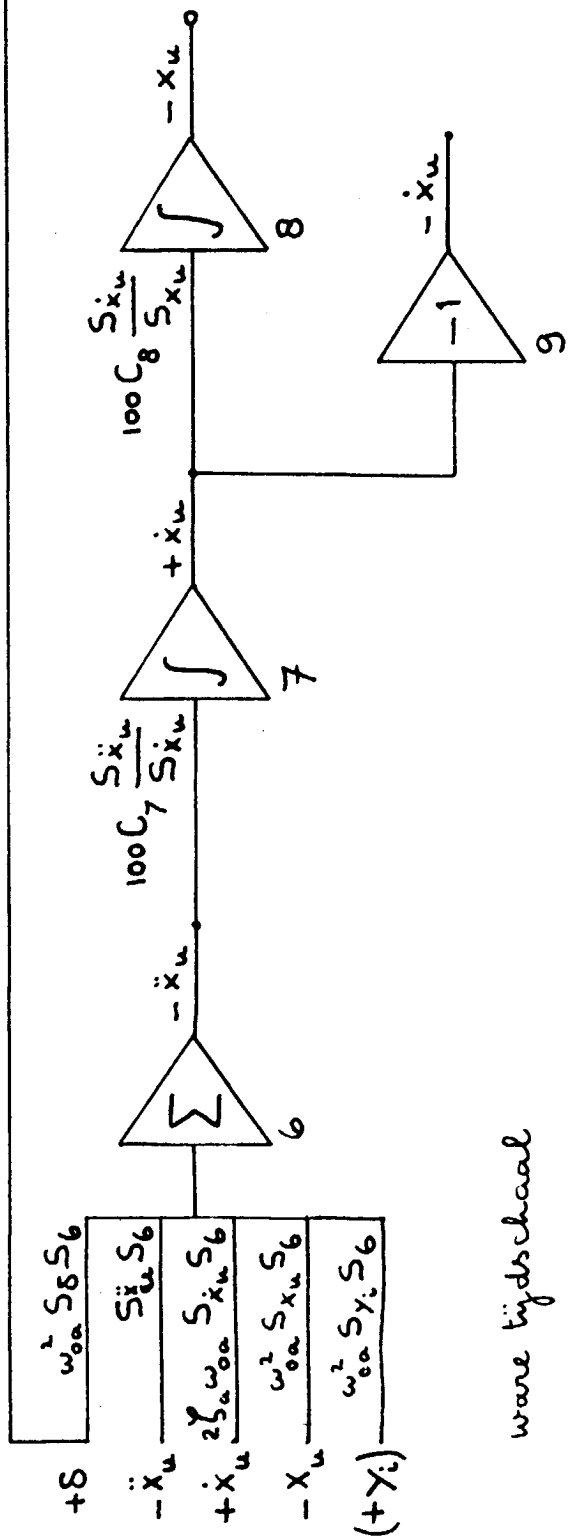
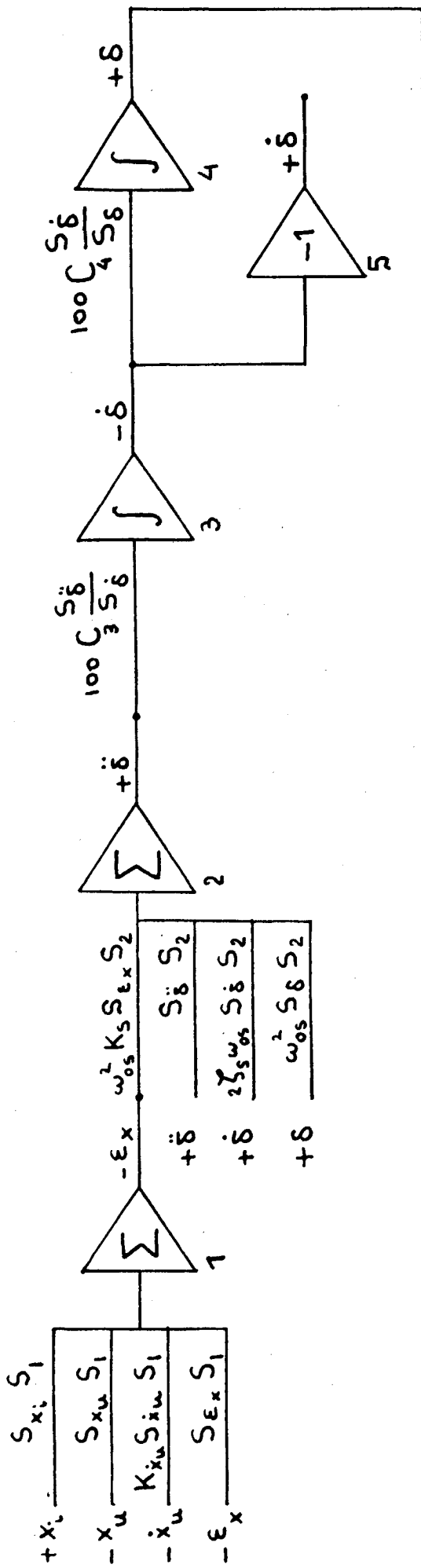


S = stabiel.  
○ = meekpunt.

Figuur 3.  
Stabiele systemen.



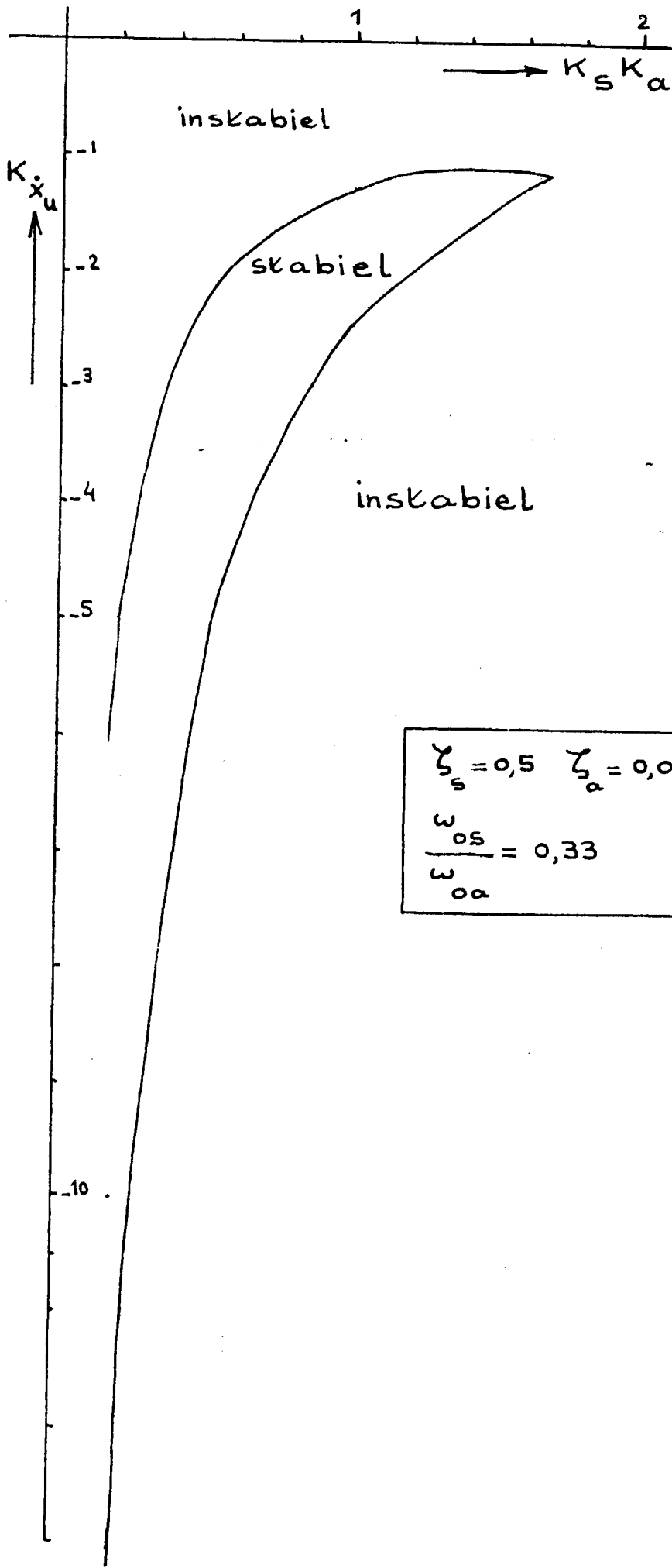




Figuur 4  
Algemeen instel-  
schema voor  
analogon.

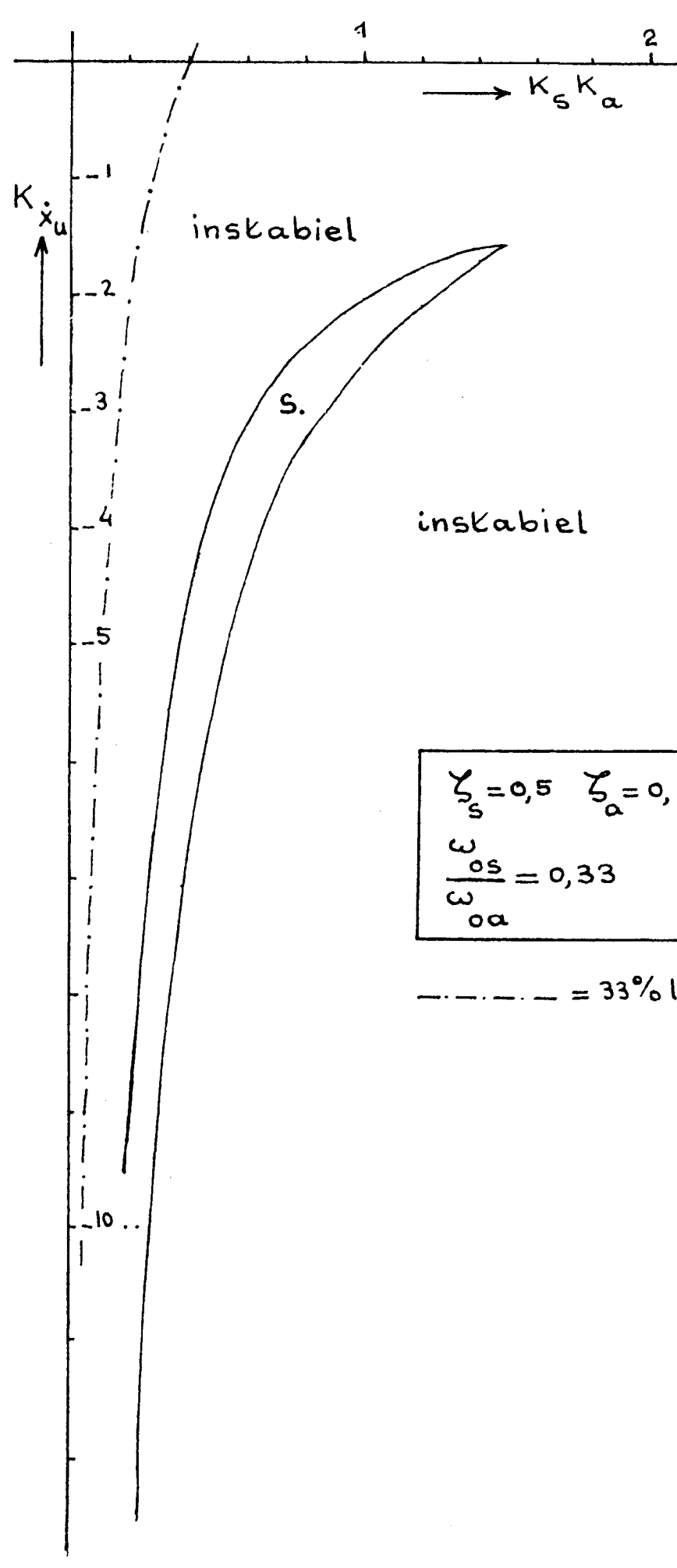
ware tijdschaal

Figuur 5



$$\zeta_s = 0,5 \quad \zeta_a = 0,05$$
$$\frac{\omega_{0s}}{\omega_{0a}} = 0,33$$

Figuur 6



$$\zeta_s = 0,5 \quad \zeta_a = 0,10$$
$$\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 0,33$$

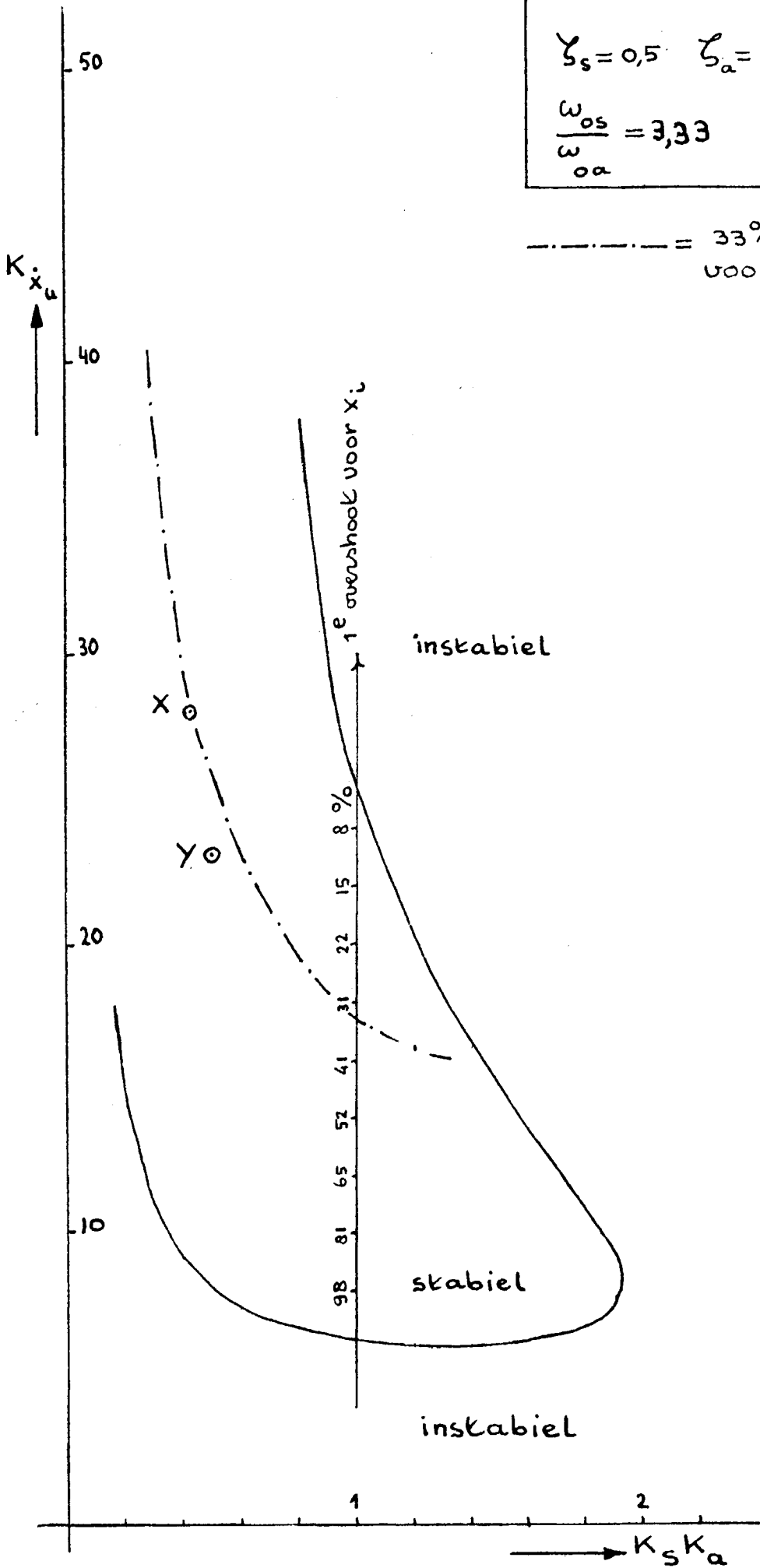
----- = 33% lijn voor  $x_i$

Figuur 7.

$$\zeta_s = 0,5 \quad \zeta_a = 0,1$$

$$\frac{\omega_{os}}{\omega_{oa}} = 3,33$$

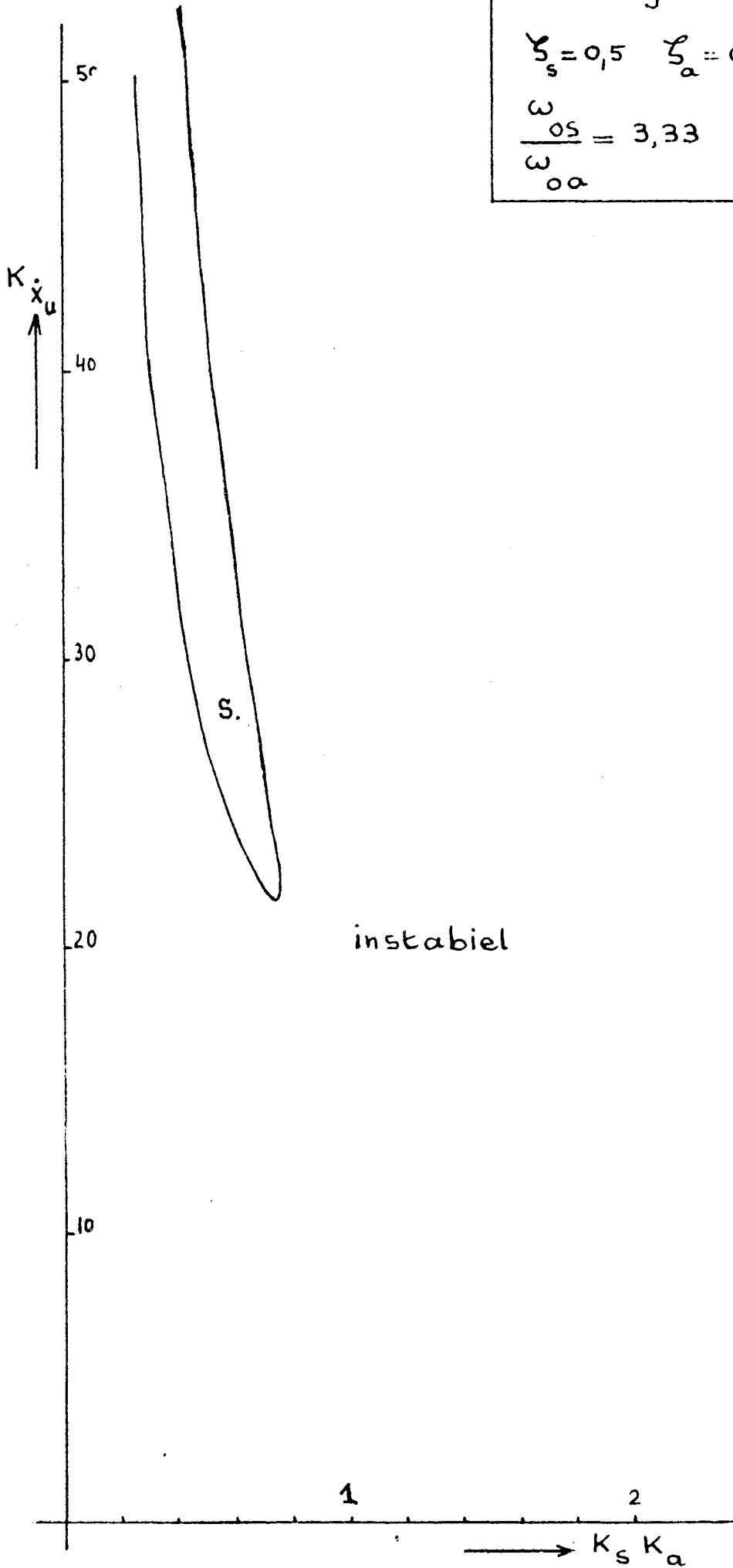
----- = 33%-lijn voor  $x_i$



Figuur 8.

$$\zeta_s = 0,5 \quad \zeta_a = 0,5$$

$$\frac{\omega_{0s}}{\omega_{0a}} = 3,33$$

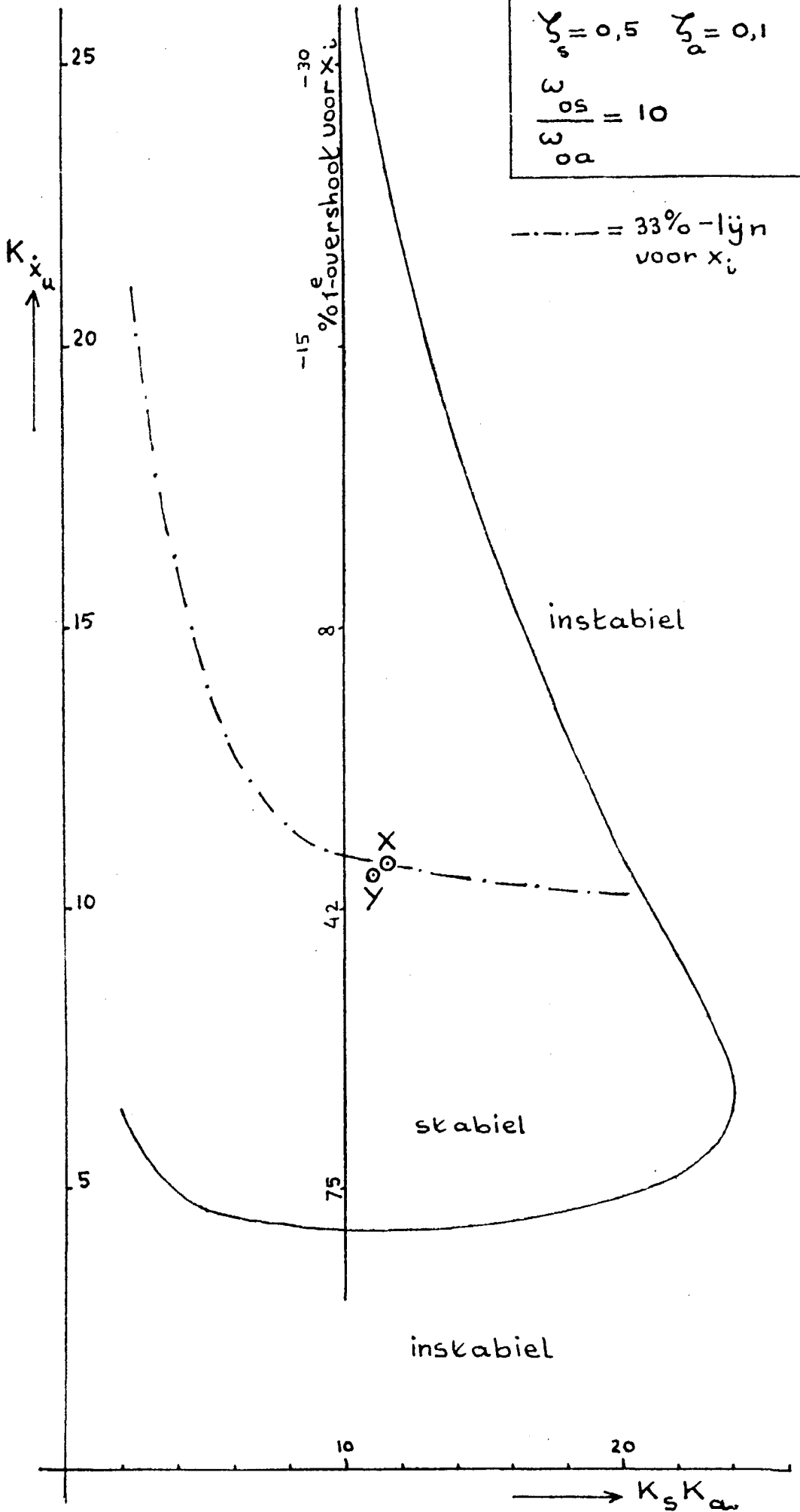


Figuur g.

$$\zeta_s = 0,5 \quad \zeta_a = 0,1$$

$$\frac{\omega_{0s}}{\omega_{0a}} = 10$$

--- = 33%-lijn voor  $x_i$

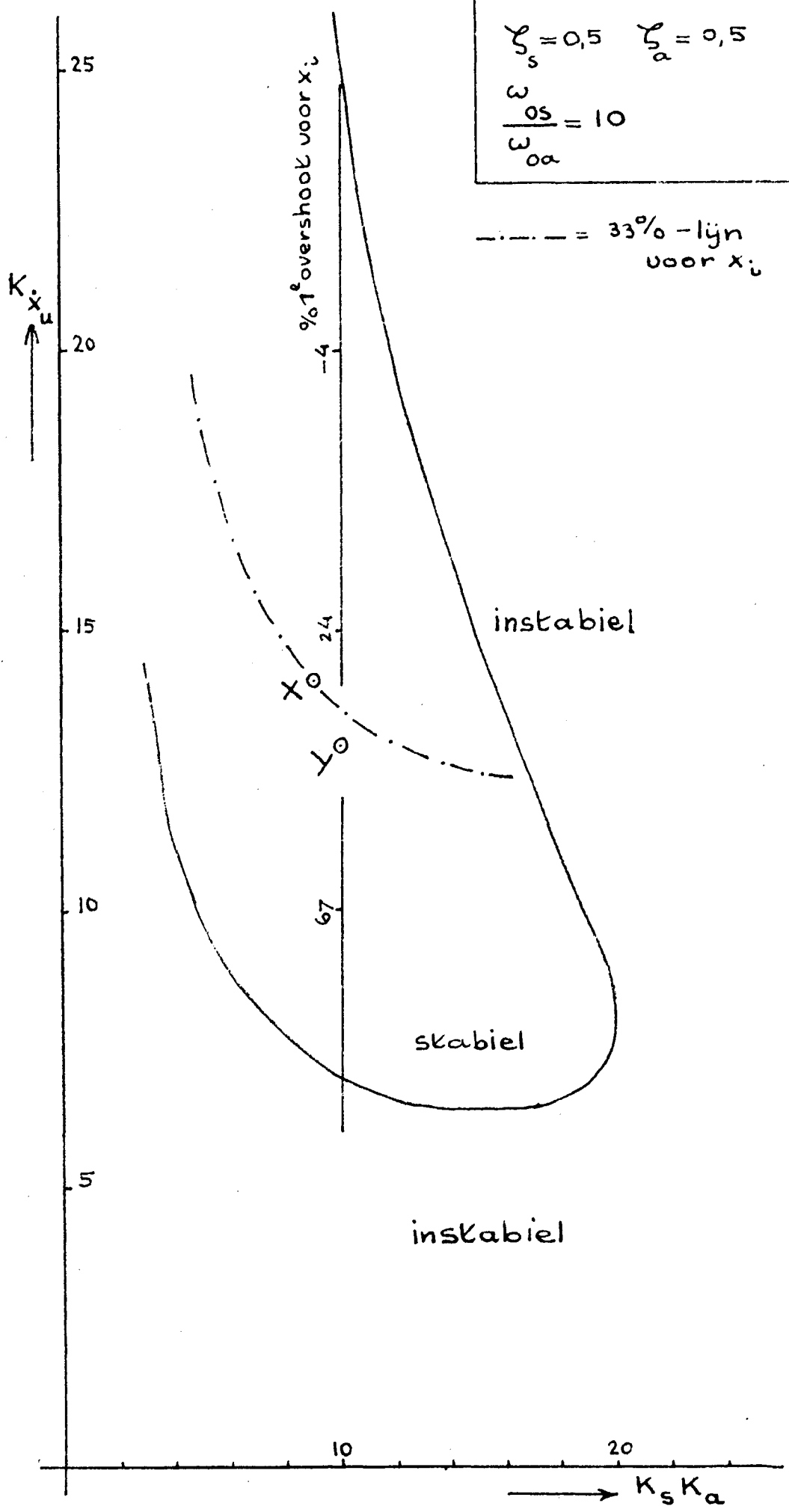


Figuur 10.

$$\zeta_s = 0,5 \quad \zeta_a = 0,5$$

$$\frac{\omega_{0s}}{\omega_{0a}} = 10$$

--- = 33% - lijn voor  $x_i$

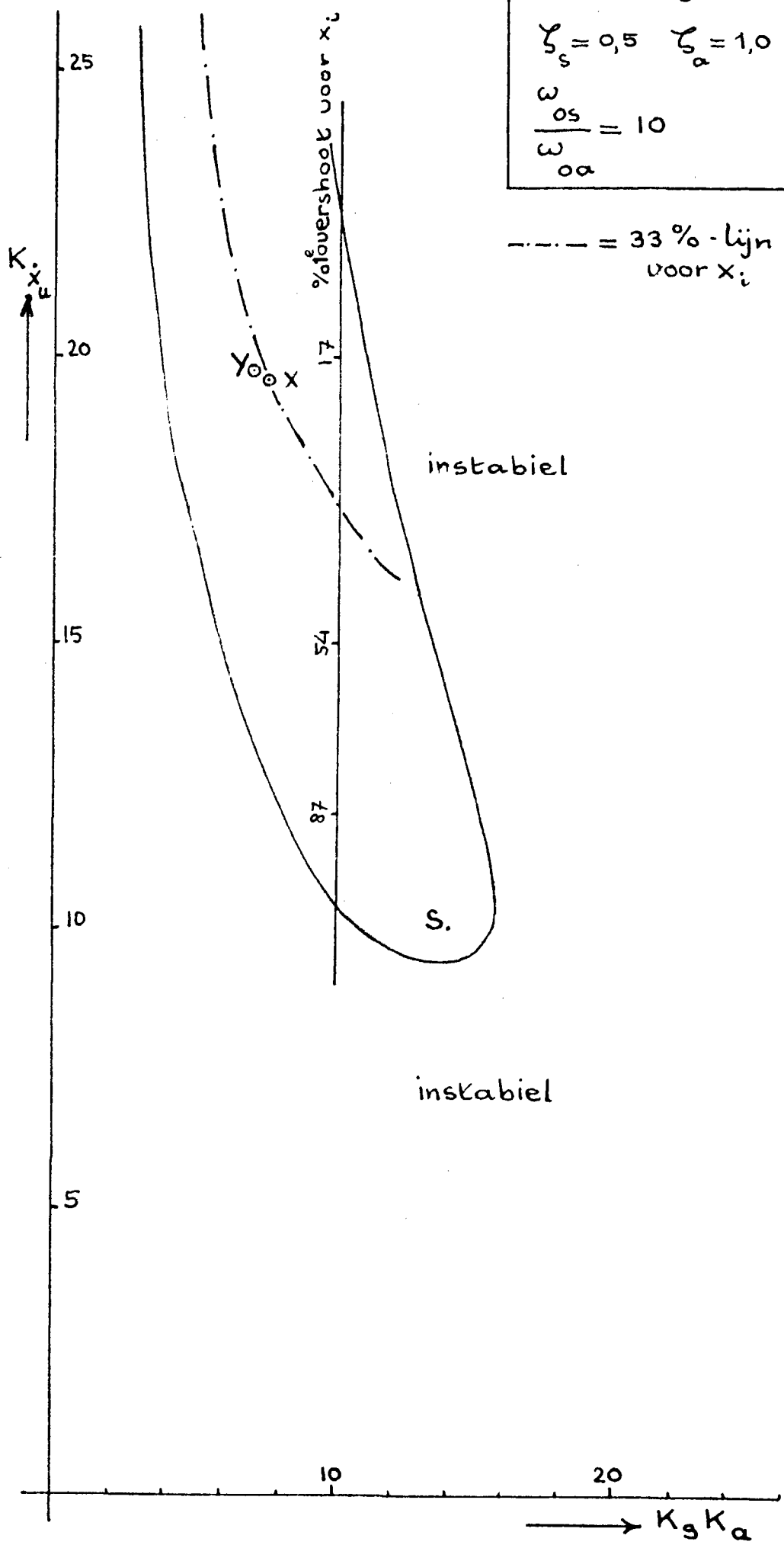


Figuur II.

$$\zeta_s = 0,5 \quad \zeta_a = 1,0$$

$$\frac{\omega_{0s}}{\omega_{0a}} = 10$$

--- = 33% - lijn voor  $X_i$





Memorandum 43



60142990895