

DE HARMONISCHE METHODE

Diktaat Vloeistofmechanica

Kollege b73A

CONCEPT

januari 1973

- 6.1. Inleiding.
- 6.2. Het lineariseren van de differentiaal-vergelijkingen.
- 6.3. Het oplossen van de lineaire D.V. volgens de enkelvoudige Harmonische Methode.
- 6.4. Toepassing van de enkelvoudige Harmonische Methode.
- 6.5. Het berekenen van de voortplanting van z.g. seiches in een haven-
bekken.
- 6.6. Het principe van de meervoudige Harmonische Methode.

Dit gedeelte zal t.z.t. worden opgenomen in het diktaat

LANGE GOLVEN IN LEIDINGEN

DEEL II

6.1 INLEIDING.

Het beste inzicht in een verschijnsel verkrijgt men gewoonlijk door een analytische oplossing van de differentiaal-vergelijkingen. Voor een handelbare analytische oplossing moeten de differentiaal-vergelijkingen echter aan bepaalde eisen voldoen.

Zo zijn bijvoorbeeld voor lineaire vergelijkingen met konstante coëfficiënten in een aantal gevallen gemakkelijk analytische oplossingen te vinden.

In dit hoofdstuk worden analytische oplossingen besproken, waarbij verondersteld wordt dat het op te lossen probleem een periodiek karakter heeft. Bij verschillende golf-problemen is dit het geval (getij-golven, seiches), doch er doen zich twee problemen voor:

- 1e de differentiaal-vergelijkingen zijn niet-lineair;
- 2e de op te lossen functies hebben niet de vorm van één enkele sinusvormige functie.

Verondersteld wordt nu eerst dat de differentiaal-vergelijkingen wél lineair zijn. Dat wil zeggen dat in de vergelijkingen bijvoorbeeld in h en Q , alle termen lineair zijn in:

$$h, Q, \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial Q}{\partial s} \text{ of } \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Als dat zo is dan kan men ook voor functies met een betrekkelijk willekeurig verloop oplossingen geven.

Omdat de vergelijkingen lineair zijn kan men nl. gebruik maken van het beginsel van superpositie. De functies h en Q (of h en v) worden opgevat als een som van sinusvormige functies. Men kan voor elk van deze sinusvormige componenten een oplossing vinden. Achteraf wordt de gezochte oplossing verkregen door de oplossingen voor alle componenten te superponeren.

Opm.: Om een indruk te krijgen van de mogelijkheden van een dergelijke aanpak kan men b.v. 2 harmonischen bij elkaar optellen. Zet b.v. achtereenvolgens op schaal uit:

$$\begin{aligned} h_1 &= \hat{h}_1 \sin \omega t & , \text{ met } \hat{h}_1 &= 0,50 \text{ m en } \omega = \frac{2\pi}{T} ; \\ h_2 &= \hat{h}_2 \sin (2\omega t - \kappa_2) & , \text{ met } \hat{h}_2 &= 0,20 \text{ m en } \kappa_2 = \frac{\pi}{2} ; \\ h &= h_1 + h_2 \end{aligned}$$

en

en

$$h_1 = \hat{h}_1 \sin \omega t \quad , \text{ zie boven}$$

$$h_3 = \hat{h}_3 \sin (3\omega t - \kappa_3) \quad \text{met } \hat{h}_3 = 0,30 \text{ m en } \kappa_3 = \frac{\pi}{2} ;$$

$$h = h_1 + h_3$$

In paragraaf 6.6 wordt het principe van een benadering, waarbij de functies worden opgevat als reeksen van harmonischeⁿ nader besproken.

Daarbij zal blijken dat het onder 1e genoemde feit een belangrijke beperking geeft bij het uitvoeren van dat principe, omdat de oplossingen voor de verschillende componenten elkaar beïnvloeden.

In 6.2 en 6.3 wordt eerst een oplossingsmethode besproken, waarbij verondersteld wordt dat de functies h en Q overal slechts één sinusvormige functie bevatten. Als deze veronderstelling wordt gemaakt spreekt men wel van de enkelvoudige Harmonische Methode.

In 6.2 werden eerst de differentiaal-vergelijkingen lineair gemaakt.

De in 6.3 besproken analytische oplossing wordt in paragraaf 6.4 toegepast. Daarbij wordt voor een concreet probleem een getallenvoorbeeld gegeven.

Een belangrijke toepassing heeft betrekking op de voortplanting van z.g. seiches in een havenbekken. Zoals in 6.5 zal blijken leent de Harmonische Methode zich bijzonder goed voor het onderzoek naar resonantie-verschijnselen. Daarbij kunnen in de praktijk zelfs vrij ingewikkelde systemen (met splitsingspunten e.d.) op overzichtelijke wijze worden berekend.

6.2. HET LINEARISEREN VAN DE DIFFERENTIAAL-VERGELIJKINGEN.

Zoals in hoofdstuk 2 (deel I) is afgeleid kan men de voortplanting van een lange golf in een open leiding beschrijven met een stelsel van twee simultane partiële differentiaal-vergelijkingen.

De continuïteits-vergelijking wordt vaak uitgedrukt in h en Q i.p.v. in h en v .

In dit hoofdstuk wordt voor de bewegingsvergelijking eveneens een vergelijking in h en Q gekozen. Gezocht wordt naar een oplossing voor het volgende stelsel D.V.n:

- de continuïteitsvergelijking (2-11) :

$$(6-1) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = -b \frac{\partial h}{\partial t} \quad \text{en}$$

- de bewegingsvergelijking (2-17), indien verondersteld wordt dat de bodemhelling I_b gelijk nul is:

$$(6-2) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = -\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{1}{C^2 A^2 R} Q|Q|$$

Indien wordt uitgegaan van de vergelijkingen (2-11) en (2-17) dan impliceert dat een aantal veronderstellingen, die in hoofdstuk 2 worden omschreven. Ter wille van de eenvoud wordt in het volgende gewerkt met de vergelijkingen (6-1) en (6-2).

Indien we de niet-analytische uitdrukking $Q|Q|$ even buiten beschouwing laten, zijn deze vergelijkingen reeds niet lineair, omdat de factoren b , $\frac{1}{gA}$ en $\frac{1}{C^2 A^2 R}$ variëren met de plaats en met de hoogte van de waterstand. Deze factoren zijn dus functies van s en t .

In het algemeen zal het dwarsprofiel van b.v. een rivier-arm in de s -richting vrij grillig variëren. Daaruit volgt dat de grootheden A , b , R (en in principe ook C) variëren in de s -richting.

In de praktijk overwint men deze moeilijkheden door een dergelijke rivier in een aantal (niet te grote) vakken te verdelen. Voor elk vak wordt een voor dat vak representatief dwarsprofiel vastgesteld. Nadat een z.g. schematisatie is uitgevoerd mag men de drie hierboven genoemde factoren (voor een bepaald vak) konstant stellen in de s -richting. Deze aanpak wordt ook bij andere oplossingsmethoden gevolgd.

Omdat de factoren nog wèl afhankelijk zijn van de waterhoogte zullen deze nog met de tijd variëren.

Bij het afleiden van bovenstaande vergelijkingen is reeds verondersteld dat de hoogte waarover de waterspiegel varieert klein is t.o.v. de gemiddelde waterdiepte. Uitgaande van deze veronderstelling is de volgende benadering mogelijk, waarbij voor elk van de factoren een gemiddelde waarde wordt bepaald.

Voor het representatief dwarsprofiel van een bepaald vak worden bij de gemiddelde waterstand de grootheden b , A en R bepaald.

De juiste bepaling van de coëfficiënt van de Chézy vormt in de praktijk een apart probleem. Het blijkt in veel gevallen noodzakelijk deze grootheid door "ijken" te bepalen (waarbij het verloop van het debiet Q moet worden gemeten!). Hierop wordt op deze plaats niet verder ingegaan.

We werken verder met de konstante factoren:

$$b(h) \rightarrow b_{\text{gem.}} \rightarrow b$$

$$\frac{1}{gA} \rightarrow \frac{1}{gA_{\text{gem.}}} \rightarrow m$$

$$\frac{1}{C^2 A^2 R} \rightarrow \left(\frac{1}{C^2 A^2 R} \right)_{\text{gem.}} \rightarrow w$$

De vergelijkingen (6-1) en (6-2) gaan dan over in het volgende stelsel:

$$(6-3) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = -m \frac{\partial Q}{\partial t} - w Q |Q|$$

$$(6-4) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = -b \frac{\partial h}{\partial t}$$

In de volgende paragraaf wordt een oplossing volgens de z.g. Enkelvoudige Harmonische Methode besproken. Dat is een ANALYTISCHE oplossingsmethode die alleen mogelijk is als de D.V.n LINEAIR zijn.

Dit wil zeggen dat elk van de termen lineair moet zijn in h , Q , $\frac{\partial h}{\partial s}$, $\frac{\partial h}{\partial t}$, $\frac{\partial Q}{\partial s}$ of $\frac{\partial Q}{\partial t}$.

Beschouwen we de vergelijkingen (6-3) en (6-4) dan zien we dat ná het voorgaande alleen de weerstandsterm nog een niet-lineaire term is.

De modulus-strepen geven aan dat de term van teken wisselt indien de functie Q van teken wisselt. Een analytische oplossing voor de hier beschouwde vergelijkingen wordt pas mogelijk indien men er in slaagt de weerstandsterm te vervangen door een lineaire term:

$$\boxed{-w Q |Q|} \rightarrow \boxed{-k Q}$$

De vraag is nu wat men het best voor de konstante k kan invoeren. Dit probleem is het eerst door prof. dr. H.A. Lorentz opgelost.

Voor periodieke problemen, waarbij de funktie Q mag worden opgevat als een enkelvoudige sinusvormige funktie:

$$Q = \hat{Q} \cos (\omega t - \phi)$$

wordt in het "Verslag Staatskommissie Zuiderzee" beschreven op welke wijze k kan worden bepaald (1926). Deze benaderingswijze wordt hierna in het kort beschreven, waarna enige aandacht wordt besteed aan de interpretatie van het resultaat.

De arbeidsvoorwaarde.

Het criterium dat door Prof. Lorentz werd gesteld kan als volgt worden geformuleerd:

"Bepaal k zodanig dat de arbeid, die gedurende een gehele periode verricht wordt, voor de beide termen gelijk is".

De weerstandsterm uit de bew. verg. (6-3) heeft de dimensie van een verhang, hetgeen kan worden opgevat als een VERVAL per eenheid van lengte s . Als we deze term met ρg vermenigvuldigen krijgen we een druk (d.w.z. een kracht per eenheid van oppervlakte) per eenheid van lengte:

$$\rho g \frac{1}{C^2 A^2 R} Q |Q| \quad \left[\frac{N/m^2}{m^1} = N/m^3 \right]$$

De arbeid, die gedurende een gehele periode wordt verricht, kan nu worden uitgedrukt als:

$$\int_0^T (\text{kracht})(\text{weg})$$

Volgens de arbeidsvoorwaarde moet gelden (indien we door ρg delen):

$$\int_0^T w Q |Q| ds = \int_0^T k Q ds$$

Indien voor Q gesubstitueerd wordt $Q = \hat{Q} \cos \omega t$ en omdat voor ds kan worden geschreven: $ds = v dt = \frac{Q}{A} dt$, vindt men achtereenvolgens:

$$\int_0^T \frac{w \hat{Q}^2 |Q|}{A} dt = \int_0^T k \frac{Q}{A} dt$$

Indien we stellen $A = A_{\text{gem}}$, dan valt deze grootheid eruit.

$$w \hat{Q}^3 \int_0^T \cos^2 \omega t |\cos \omega t| dt = k \hat{Q}^2 \int_0^T \cos^2 \omega t dt$$

We vinden dan voor k:

$$k = w \hat{Q} \frac{\int_0^{\pi} \cos^2 \omega t / \cos \omega t / dt}{\int_0^{\pi} \cos^2 \omega t dt} =$$

$$k = w \hat{Q} \frac{\int_0^{2\pi} / \cos \omega t / \cos^2 \omega t . d(\omega t)}{\int_0^{2\pi} \cos^2 \omega t . d(\omega t)} = w \hat{Q} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \omega t . d(\omega t)}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \omega t . d(\omega t)} =$$

$$k = w \hat{Q} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^3 \omega t + 3 \cos \omega t)}{4} d(\omega t)}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2 \omega t + 1)}{2} d(\omega t)} =$$

$$k = \frac{w \hat{Q}}{2} \frac{\left(\frac{1}{3} \sin 3\omega t + 3 \sin \omega t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}{\left(\frac{\sin 2\omega t}{2} + \omega t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}}$$

Voor k wordt na invoering van de integratiegrenzen gevonden:

$$k = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C^2 A^2 R} \right) \hat{Q} \frac{(-\frac{1}{3} + 3)}{\frac{\pi}{2}} \text{ gem.}$$

(6-5)

$$k = \frac{8}{3\pi} \left(\frac{1}{C^2 A^2 R} \right) \hat{Q} \text{ gem.}$$

De waarde $\frac{8}{3\pi} \approx 0,85$ wordt "het getal van Lorentz" genoemd.

We zien dat behalve dit getal in de uitdrukking voor k ook voorkomen:

- een gemiddelde waarde voor de faktor w in de weerstandsterm \hat{e}_n
- de amplitude van de functie $Q!$

Voor het bepalen van de faktor k dient men dan ook een goede indruk van de gezochte oplossing te hebben.

Dit feit maakt het noodzakelijk dat een berekening wordt uitgevoerd als een ITERATIE-PROCES.

Voor de eerste berekening zal men (voor elk van de verschillende vakken) de onbekende amplitude \hat{Q} zo goed mogelijk schatten.

Uit de resultaten van de eerste berekening kan men een betere schatting voor de grootheden \hat{Q} verkrijgen. De berekeningen kunnen nu opnieuw worden uitgevoerd. Indien nodig zal men daarna de berekeningen nog één (of twee) keer herhalen.

Het is mogelijk de hierboven beschreven benadering volgens Lorentz nader te interpreteren m.b.v. een figuur, die hieronder is weergegeven.

Voor de functie $Q|Q| \cos \omega t$ wordt geschreven $\hat{Q}^2 \cos \omega t | \cos \omega t |$.

In het voorgaande ging het er om het verloop in de tijd van de functie

(6-6)

$$\cos \omega t | \cos \omega t |$$

zo goed mogelijk te benaderen met een functie $K \cos \omega t$.

In fig. 6-1 is het verloop van de functie (6-6) uitgezet tegen de tijd (dikgetrokken lijn), terwijl ook het verloop van de functie $\cos \omega t$ is weergegeven.

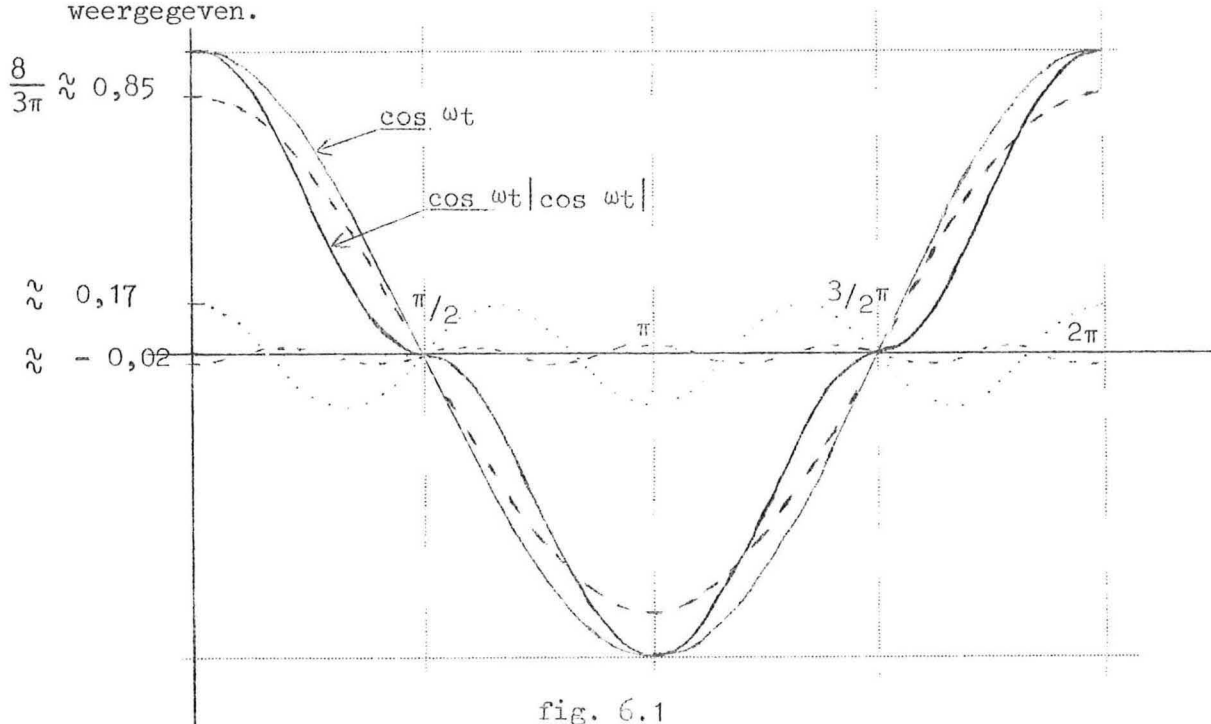


fig. 6.1

Het is mogelijk om de functie $\cos \omega t$ | $\cos \omega t$ | te benaderen met een reeks van Fourier:

$$\cos \omega t \text{ | } \cos \omega t \text{ |} = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \omega t + b_n \sin n \omega t)$$

Indien men deze reeks afbreekt bij de termen met $n = 5$, dan kan men de volgende coëfficiënten bepalen:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = \frac{8}{3\pi} \approx 0,85, \quad a_3 = \frac{8}{15\pi} \approx 0,17 \quad \text{en} \quad a_5 = -\frac{8}{105\pi} \approx -0,02$$

terwijl blijkt dat $a_2 = a_4 = 0$ en $b_1 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$.

In de figuur 6.1 zijn de componenten van de reeks van Fourier met stippellijnen weergegeven.

De benadering volgens Lorentz geeft dus een resultaat dat overeenkomt met de eerste cos-term van de bovenstaande reeks van Fourier.

Met behulp van figuur 6.1 krijgen we een goed beeld van de nauwkeurigheid van de linearisering volgens Lorentz.

Opmerkingen:

1. In deze paragraaf werd een open leiding beschouwd. Het is natuurlijk duidelijk dat ook bij een gesloten leiding het lineariseren van de weerstandsterm (noodzakelijk voor een analytische oplossing) op dezelfde wijze kan worden aangepakt.
2. In de kolleges b73B "Getij-berekeningen" wordt aan het lineariseren van de differentiaal-vergelijkingen nadere aandacht besteed. Teneinde enig inzicht mogelijk te maken in de invloed van het niet-lineaire karakter van de D.V.n wordt in dit hoofdstuk onder 6.4 het principe van de z.g. meervoudige Harmonische Methode besproken.

In de volgende paragraaf 6.3 wordt voor de gelineariseerde D.V.n:

$$(6-7) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = -m \frac{\partial Q}{\partial t} - k Q$$

$$(6-8) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = -b \frac{\partial h}{\partial t}$$

een analytische oplossing besproken.

6.3 HET OPLOSSEN VAN DE LINEAIRE D.V. n VOLGENS DE ENKELVOUDIGE HARMONISCHE METHODE.

In deze paragraaf wordt een analytische oplossing besproken voor het in 6.2 verkregen stelsel van twee lineaire differentiaal-vergelijkingen (6-7) en (6-8).

In zeer verschillende vakgebieden ontmoet men verschijnselen, die met lineaire differentiaal-vergelijkingen kunnen worden beschreven (zie b.v. de kolleges Alg. Mechanica I (b8) en Alg. Mechanica II(b9)).

Bij het oplossen van dergelijke D.V. is het gebruikelijk om met exponentiële functies te werken.

Zoals in het volgende zal blijken krijgt men te maken met uitdrukkingen, waarin complexe grootheden voorkomen. Het lijkt daarom zinvol om eerst nog enige aandacht te besteden aan de zin van het rekenen met complexe functies. Daarbij kunnen tevens enkele eigenschappen van complexe getallen worden genoemd.

Voor een meer volledige informatie t.a.v. complexe getallen wordt verwezen naar handboeken (Analyse) of het stencil "Complexe getallen" dat wordt verstrekt bij het kolleg b9 (verkrijgbaar bij de conciërge).

Beschouwd wordt even een gewone lineaire D.V.:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \theta^2 y = 0$$

waarin θ een reëel getal is.

Als we hierin substitueren $y = Ce^{\alpha x}$, vinden we de volgende karakteristieke vergelijking: $\alpha^2 + \theta^2 = 0$

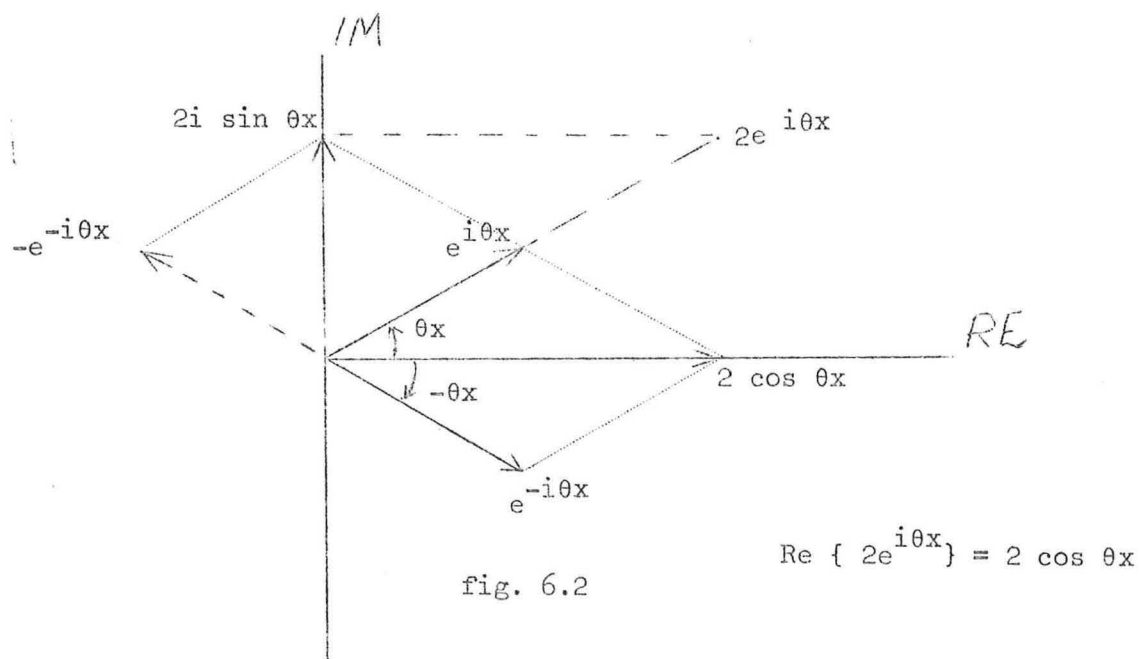
Hieruit volgt $\alpha = \pm i\theta$, waarbij $i = \sqrt{-1}$.

De algemene oplossing van de D.V. wordt dus:

$$y = C_1 e^{i\theta x} + C_2 e^{-i\theta x}$$

In deze algemene oplossing kunnen de konstanten C_1 en C_2 nog elke waarde hebben (ook complex). De gevonden oplossing is blijkbaar de som van twee complexe oplossingen.

Zoals ook uit fig. 6.2 blijkt is de som van twee complexe grootheden die elkaars complex toegevoegde zijn, een reële grootheid.



Men kan m.b.v. reeksontwikkeling aantonen dat de volgende vergelijkingen gelden:

$$e^{i\theta x} = \cos \theta x + i \sin \theta x$$

$$e^{-i\theta x} = \cos \theta x - i \sin \theta x$$

Uit deze betrekkingen volgt dat resp.:

$$\cos \theta x = \frac{e^{i\theta x} + e^{-i\theta x}}{2}$$

$$\sin \theta x = \frac{e^{i\theta x} - e^{-i\theta x}}{2i}$$

De oplossing voor y (zie terug) is dus reëel als $C_2 e^{-i\theta x}$ de complex toegevoegde is van $C_1 e^{i\theta x}$.

Men kan eenvoudig aantonen dat $\overline{ab} = \bar{a} \bar{b}$.

Omdat $\overline{e^{i\theta x}} = e^{-i\theta x}$ (zie fig. 6.2), moet dus gelden $C_2 = \bar{C}_1$.

Indien C_1 reëel is, dan moet C_2 gelijk zijn aan C_1 .

We kunnen de reële oplossing als volgt schrijven:

$$y = Ce^{i\theta x} + cc$$

Hierin staat cc voor de complex toegevoegde van $Ce^{i\theta x}$. Deze uitdrukking voor y willen we nog tot een meer gebruikelijke vorm herleiden.

Als C reëel is kunnen we schrijven (zie ook fig. 6.2)

$$y = C(e^{i\theta x} + cc)$$

$$y = 2C \cos \theta x$$

Als C complex is, b.v. $C = a + ib = |C|e^{i(\arg.C)}$, dan kunnen we de volgende uitdrukking afleiden:

$$y = 2|C| \cos \{\theta x + (\arg.C)\}$$

In de laatste uitdrukking kunnen we de faktor 2 met $|C|$ (de modulus-waarde van C) combineren.

Dit betekent dat we gebruik maken van de volgende gelijkheid:

$$Ce^{i\theta x} + cc = \operatorname{Re} \{2Ce^{i\theta x}\}$$

- Passen we dit in een bepaald geval toe, dan geeft dat aanleiding tot iets eenvoudiger uitdrukkingen. In het voorbeeld komt dit als volgt tot uiting. Nadat we voor een complexe oplossing vinden:

$y = C^{\#} e^{i\theta x}$, kunnen we ineens voor de reële oplossing schrijven:

$$y = \operatorname{Re} \{C^{\#} e^{i\theta x}\} = |C^{\#}| \cos \{\theta x + (\arg.C^{\#})\}$$

Vergeleken met het bovenstaande is $C^{\#}$ gelijk aan $2C$.

Na deze opmerkingen kunnen we het oplossen van het stelsel partiële

D.V.n (6-7) en (6-8) nog inleiden met de volgende opmerkingen.

Bekend is dat aan deze D.V. wordt voldaan door periodieke functies $h(s,t)$ en $Q(s,t)$, die op verschillende manieren kunnen worden uitgedrukt.

Bijvoorbeeld voor de functie $h(s,t)$ kunnen we drie uitdrukkingen onderscheiden:

(6-9)	$1e \quad h(s,t) = a(s) \cos \omega t + b(s) \sin \omega t$ $2e \quad h(s,t) = \hat{h}(s) \cos \{ \omega t - \kappa(s) \}, \text{ waarin } \hat{h} = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\text{en } \kappa = \text{arc tg } \frac{b}{a}$ $3e \quad h(s,t) = \text{Re} \{ h_c(s) e^{i\omega t} \}$ $h(s,t) = \text{Re} \{ \hat{h}(s) e^{-i\kappa(s)} e^{i\omega t} \}$
-------	--

In deze uitdrukking wordt met $h_c(s)$ een complexe functie h van s bedoeld, die een dubbele informatie bevat namelijk betreffende de amplitude $\hat{h}(s)$ en de fase-hoek $\kappa(s)$ van de functie $h(s,t)$.

We kunnen de complexe functie $h_c(s)$ nog als volgt uitdrukken:

(6-10)
$$h_c(s) = \hat{h}(s) \{ \cos \{-\kappa(s)\} + i \sin \{-\kappa(s)\} \}$$

Het verband, dat door de uitdrukkingen (6-9) onder 2e en 3e en (6-10) gegeven wordt, is een afspraak waar we ons in het volgende aan houden.

We stellen de oplossing in de vorm van e-machten, omdat dit eenvoudige bewerkingen geeft. We vinden dan complexe oplossingen, die zelf geen directe fysische betekenis hebben. Omdat we te maken hebben met lineaire D.V., geldt het beginsel van superpositie.

Aan dit beginsel ontleent het complex rekenen zijn waarde. We kunnen namelijk reële oplossingen vinden door superpositie van complexe oplossingen.

reële oplossingen

In het volgende wordt een analytische oplossing behandeld voor het volgende stelsel simultane partiële differentiaal-vergelijkingen:

$$\frac{\partial h}{\partial s} = -m \frac{\partial Q}{\partial t} - kQ \quad (6-7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = -b \frac{\partial h}{\partial t} \quad (6-8)$$

Hierin zijn zoals we in 6.2 gezien hebben m , k en b konstante factoren. De functies h en Q zijn functies van de onafhankelijk variabelen s en t : $h(s,t)$ en $Q(s,t)$.

Differentiëren we (6-7) naar s dan krijgen we:

$$(6-11) \quad \frac{\partial^2 h(s,t)}{\partial s^2} = -m \frac{\partial^2 Q(s,t)}{\partial t \partial s} - k \frac{\partial Q(s,t)}{\partial s}$$

Differentiëren we (6-8) naar t dan geeft dit

$$(6-12) \quad \frac{\partial^2 Q(s,t)}{\partial s \partial t} = -b \frac{\partial^2 h(s,t)}{\partial t^2}$$

Door uit (6-8) $\frac{\partial Q(s,t)}{\partial s}$ en uit (6-12) $\frac{\partial^2 Q(s,t)}{\partial s \partial t}$ te substitueren in vergelijking (6-11) krijgen we de z.g. "telegraaf-vergelijking".

$$(6-13) \quad \frac{\partial^2 h(s,t)}{\partial s^2} = mb \frac{\partial^2 h(s,t)}{\partial t^2} + kb \frac{\partial h(s,t)}{\partial t}$$

Opm.: Door $h(s,t)$ te elimineren in plaats van $Q(s,t)$ is een vergelijking in $Q(s,t)$ te verkrijgen van dezelfde gedaante. Een dergelijke vergelijking komt, zoals uit de naam blijkt, ook in de elektrotechniek voor.

Volgens het principe van scheiding der variabelen kunnen we in verg.

(6-13) substitueren:

$$(6-14) \quad \frac{h(s,t) = H(s) \cdot G(t)}{}$$

$$\text{We vinden dan: } G(t) \frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} = mb H(s) \frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} + kb H(s) \frac{\partial G(t)}{\partial t}$$

Als we nu beide leden van deze vergelijking delen door $H(s) \cdot G(t)$ dan geeft dit:

$$(6-15) \quad \frac{1}{H(s)} \frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} = \frac{mb}{G(t)} \frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} + \frac{kb}{G(t)} \frac{\partial G(t)}{\partial t}$$

Volgens verg. (6-15) moet het linker lid (een functie van s) voor alle waarden van s en t gelijk zijn aan het rechter lid (een functie van t). Dit is alleen het geval als beide leden gelijk zijn aan een konstante. We noemen deze konstante, die eventueel complex mag zijn, r^2 .

Opm.: We zullen later zien wat de fysische betekenis is van deze grootte r .

Uit verg. (6-15) volgen dan twee vergelijkingen, waaraan tegelijkertijd moet worden voldaan:

$$(6-16) \quad \frac{\partial^2 H(s)}{\partial s^2} - H(s)r^2 = 0$$

$$(6-17) \quad mb \frac{\partial^2 G(t)}{\partial t^2} + kb \frac{\partial G(t)}{\partial t} - G(t) r^2 = 0$$

- Een oplossing voor (6-16) is te vinden, door te substitueren $H(s) = Ce^{\alpha s}$. Dit geeft de volgende vergelijking waaruit α kan worden opgelost (indien $Ce^{\alpha s} \neq 0$):

$$\alpha^2 - r^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \alpha = \pm r$$

Dus twee gelijke wortels met tegengesteld teken.

De algemene oplossing voor (6-16) wordt:

$$(6-18) \quad H(s) = C_1 e^{rs} + C_2 e^{-rs}$$

- Voor de algemene oplossing van verg. (6-17) stellen we $G(t) = C_3 e^{i\omega t}$ en substitueren dit in deze vergelijking:

$$C_3 e^{i\omega t} (mb \omega^2 - kb \omega i + r^2) = 0$$

Omdat $C_3 e^{i\omega t} \neq 0$, volgt hieruit de volgende "karakteristieke vergelijking":

$$r^2 - kb \omega i + mb \omega^2 = 0$$

Hieruit kan r worden opgelost:

$$(6-19) \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{-mb\omega^2 + kb\omega i}$$

We hebben dus twee gelijke complexe wortels gevonden met verschillend teken:

$$r_1 = r \quad \text{en} \quad r_2 = -r$$

Met het bovenstaande is een complexe oplossing voor $h(s,t)$ gevonden:

$$h_c(s,t) = H(s) \cdot G(t) = (C_1 e^{rs} + C_2 e^{-rs}) C_3 e^{i\omega t}.$$

Als we stellen

$$(C_1 e^{rs} + C_2 e^{-rs}) C_3 = C_I e^{rs} + C_{II} e^{-rs}, \text{ dan gaat deze laatste uitdrukking over in:}$$

$$(6-20) \quad h_c(s,t) = \{C_I e^{rs} + C_{II} e^{-rs}\} e^{i\omega t}$$

$$\text{Uit verg. (6-20) volgt ook } \frac{\partial h_c(s,t)}{\partial t} = i\omega (C_I e^{rs} + C_{II} e^{-rs}) e^{i\omega t}$$

Als we deze uitdrukking in de vergelijking (6-8) substitueren, krijgen we:

$$\frac{\partial Q(s,t)}{\partial s} = -b \{i\omega (C_I e^{rs} + C_{II} e^{-rs}) e^{i\omega t}\}$$

Integreren we deze vergelijking naar s dan geeft dit:

$$Q(s,t) = -\frac{b\omega i}{r} (C_I e^{rs} - C_{II} e^{-rs}) e^{i\omega t} + f(t)$$

Omdat verondersteld wordt dat $Q(s,t)$ alleen bestaat uit een periodieke functie (met de frequentie ω), is hierin $f(t) = 0$.

Voor $Q(s,t)$ vinden we dus de volgende complexe uitdrukking:

$$(6-21) \quad Q_c(s,t) = -\frac{b\omega i}{r} \{C_I e^{rs} - C_{II} e^{-rs}\} e^{i\omega t}$$

De reële oplossingen, die worden gezocht kunnen we nu als volgt uitdrukken (zie (6-9)):

$$(6-22) \quad h(s,t) = \text{Re} \{h_c(s) e^{i\omega t}\}$$

$$(6-23) \quad Q(s,t) = \text{Re} \{Q_c(s) e^{i\omega t}\}$$

In deze uitdrukkingen komen complexe funkties van s voor, die zoals blijkt uit de oplossingen (6-20) en (6-21) voldoen aan de volgende vergelijkingen:

$$(6-24) \quad h_c(s) = C_I e^{rs} + C_{II} e^{-rs}$$

$$(6-25) \quad Q_c(s) = -\frac{b \omega i}{r} \{ C_I e^{rs} - C_{II} e^{-rs} \}$$

De faktor $e^{i\omega t}$, die de periodieke variatie in de tijd aangeeft, is zonder meer bekend. Deze faktor kan dus bij de berekeningen verder buiten beschouwing blijven, om later aan de complexe oplossing te worden toegevoegd.

Als de complexe funktie $h_c(s)$ en $Q_c(s)$ berekend worden m.b.v. de uitdrukkingen (6-24) resp. (6-25), dan zijn de gezochte reële funkties te verkrijgen door volgens (6-22) en (6-23) het reële deel te nemen van $h_c(s,t)$ resp. $Q_c(s,t)$.

Opm. De relatie tussen de reële funkties en de complexe funkties (zie afspraken (6-9) en (6-10)) zal vooral duidelijk worden, indien in 6.4 een toepassing wordt beschouwd.

Na het voorgaande gaat het ^{er} nu in de eerste plaats om de funkties $h_c(s)$ en $Q_c(s)$ te bepalen. De konstanten C_I en C_{II} in de uitdrukkingen (6-24) en (6-25) zijn in het algemeen complex en kunnen worden bepaald uit twee noodzakelijke randvoorwaarden.

Beschouwd wordt een gedeelte van een leiding:

een vak met een lengte $\Delta s = L$, waarvoor aan één zijde ($s=0$) zowel $h_c(o)$ als $Q_c(o)$ gegeven zijn (zie fig. 6.3).

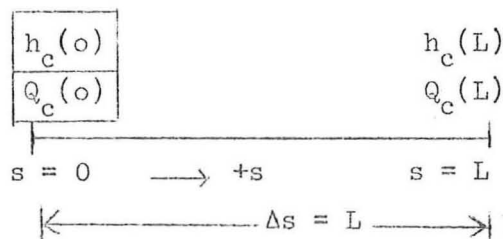


fig. 6.3.

Uit de vergelijkingen (6-24) en (6-25) volgt voor $s = 0$ resp.:

$$\begin{aligned} h_c(0) &= C_I + C_{II} \\ Q_c(0) &= -\frac{b \omega i}{r} \{ C_I - C_{II} \} \end{aligned}$$

Als we uit deze vergelijkingen C_I en C_{II} oplossen vinden we:

$$\begin{aligned} C_I &= \frac{1}{2} h_c(0) - \frac{1}{2} \frac{r}{b \omega i} Q_c(0) \\ C_{II} &= \frac{1}{2} h_c(0) + \frac{1}{2} \frac{r}{b \omega i} Q_c(0) \end{aligned}$$

Substitueren we deze beide uitdrukkingen in de uitdrukkingen (6-24) en (6-25) dan krijgen we:

$$(6-26) \quad h_c(s) = \left\{ \frac{1}{2} h_c(0) - \frac{1}{2} \frac{r}{b \omega i} Q_c(0) \right\} e^{rs} + \left\{ \frac{1}{2} h_c(0) + \frac{1}{2} \frac{r}{b \omega i} Q_c(0) \right\} e^{-rs}$$

$$(6-27) \quad Q_c(s) = -\frac{b \omega i}{r} \left[\left\{ \frac{1}{2} h_c(0) - \frac{1}{2} \frac{r}{b \omega i} Q_c(0) \right\} e^{rs} - \left\{ \frac{1}{2} h_c(0) + \frac{1}{2} \frac{r}{b \omega i} Q_c(0) \right\} e^{-rs} \right]$$

We kunnen deze vergelijkingen nog herleiden tot

$$(6-28) \quad h_c(s) = h_c(0) \cos h rs - \frac{r}{b \omega i} \sin h rs Q_c(0)$$

$$(6-29) \quad Q_c(s) = -h_c(0) \frac{b \omega i}{r} \sin h rs + \cos h rs Q_c(0)$$

De vergelijkingen (6-28) en (6-29) geven voor $s = L$ de volgende uitdrukkingen:

$$(6-30) \quad \begin{array}{l} h_c(L) = \cos h rL \quad h_c(0) - \frac{r}{b \omega i} \sin h rL Q_c(0) \\ Q_c(L) = \cos h rL \quad Q_c(0) - \frac{b \omega i}{r} \sin h rL h_c(0) \end{array}$$

Dit laatste stel vergelijkingen staat bekend als de "vierpool-vergelijkingen".

Ze leggen een verband tussen de $h_c(0)$ en $Q_c(0)$ aan de 'ingang' van een vak en de $h_c(L)$ en $Q_c(L)$ aan de 'uitgang' van dat vak.

Men schrijft het stelsel (6-30) en (6-31) wel in de vorm:

$$(6-32) \quad h_c(L) = L_v h_c(0) + M_v Q_c(0)$$

$$(6-33) \quad Q_c(L) = N_v h_c(0) + O_v Q_c(0)$$

waarbij dus gesteld is: $L_v = \cos h rL$

$$M_v = - \frac{r}{b \omega i} \sin h rL$$

$$N_v = - \frac{b \omega i}{r} \sin h rL$$

$$O_v = \cos h rL.$$

De hier gedefinieerde grootheden L_v , M_v , N_v en O_v worden de vakkonstanten genoemd.

De grootheid rL wordt de voortplantingskonstante van een vak genoemd.

De voortplantingskonstante per lengte-eenheid langs de s -as is r . Deze grootheid wordt nu wat nader beschouwd.

In het voorgaande was de uitdrukking (6-19) gevonden:

$$(6-19) \quad r_{1,2} = \pm \sqrt{-mb\omega^2 + kb\omega i}$$

Als we stellen

$r = p + iq$ dan kunnen we na kwadrateren schrijven:

$$p^2 - q^2 + 2pqi = -mb\omega^2 + kb\omega i$$

$$\text{Hieruit volgt:} \quad p^2 - q^2 = -mb\omega^2$$

$$pq = \frac{kb\omega}{2} \quad \text{of} \quad q = \frac{kb\omega}{2p}$$

Substitueren we q dan vinden we:

$$p^2 - \frac{k^2 b^2 \omega^2}{4p^2} + mb\omega^2 = 0$$

Als we dit verder uitwerken dan kunnen we p als volgt uitdrukken:

$$(6-33) \quad p = \pm \sqrt{\frac{-mb\omega^2 + \sqrt{m^2 b^2 \omega^4 + k^2 b^2 \omega^2}}{2}}$$

$$p = \pm \omega \sqrt{mb} \sqrt{\frac{1}{2} \left[-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{k}{\omega m}\right)^2} \right]}$$

Men vindt voor q vervolgens: $q = \frac{kb}{2p}$:

$$(6-34) \quad q = \pm \omega \sqrt{mb} \sqrt{\frac{1}{2} \left[+1 + \sqrt{1 + \left(\frac{k}{\omega m}\right)^2} \right]}$$

Zowel voor p als voor q vinden we afgezien van het \pm teken, een positieve reële grootheid.

Substitueren we in vergelijking (6-20) resp.:

$$(6-35) \quad r = p + iq \quad \text{en} \quad -r = -p - iq$$

dan gaat deze uitdrukking over in:

$$(6-36) \quad h_c(s,t) = \{ C_I e^{(p+iq)s} + C_{II} e^{(-p-iq)s} \} e^{i\omega t} \quad \text{of}$$

$$(6-37) \quad h_c(s,t) = C_I e^{ps} e^{iqs} e^{i\omega t} + C_{II} e^{-ps} e^{-iqs} e^{i\omega t}$$

De term $C_I e^{ps} e^{iqs} e^{i\omega t} = C_I e^{ps} e^{i(\omega t + qs)}$ beschrijft een golf, die zich voortplant in de negatieve s-richting. Als men de tijd t wat laat toenemen dan moet men een stukje in de negatieve s-richting verplaatsen om dezelfde waarde van $(qs + \omega t)$ en dus van $e^{i(qs + \omega t)}$ te vinden.

e^{iqs} geeft de fase-verschuiving weer als functie van s; q is de faktor voor de fase-verschuiving per eenheid van lengte langs s.

e^{ps} geeft de demping weer t.g.v. weerstand en berging; de golf loopt in de negatieve s-richting, dus deze term wordt inderdaad kleiner; p is de faktor voor de demping per eenheid van lengte langs s.

De term $C_{II} e^{-ps} e^{-iqs} e^{i\omega t} = C_{II} e^{-ps} e^{i(\omega t - qs)}$ beschrijft een golf, die zich voortplant in de positieve s-richting.

De oplossing volgens (6-36) bestaat dus in het algemeen steeds uit de som van twee lopende golven. De grootte van de beide golven wordt bepaald door de waarden C_I resp. C_{II} , die volgen uit de randvoorwaarden (zoals we hebben gezien in het voorgaande).

Opm.: Het is mogelijk dat één van beide konstanten nul is, dan is er slechts sprake van één lopende golf. In het algemeen is dit echter niet het geval, omdat (partiële) reflectie plaats vindt door een obstakel (b.v. stuw) of door profielwijziging.

Ook de uitdrukking (6-21) voor $Q_c(s,t)$ is met het in (6-35) gestelde te schrijven als de som van twee golven.

De waterbeweging op een bepaalde plaats (horizontaal $Q(s,t)$ en vertikaal $h(s,t)$), die we berekenen resp. in de natuur meten, is dan ook steeds de resultante van twee interfererende golven.

6.4. TOEPASSING VAN DE ENKELVOUDIGE HARMONISCHE METHODE.

Om de in 6.3 behandelde oplossingsmethode te illustreren wordt in deze paragraaf een eenvoudige berekening besproken. Gezien het bijzondere karakter van de methode betreft het een lange-golfprobleem, waarbij de functies h resp. Q (of v) in de tijd verlopen als één enkelvoudige sinusvormige functie.

Beschouwd wordt eerst een gedeelte van een open leiding, waarin zich een periodieke lange golf voortplant. Verondersteld wordt dat men te maken heeft met een prismatische bak, waarvan de lengte niet te groot is, zodat het gedeelte als één vak mag worden behandeld.

In 6.3 zijn voor een dergelijk vak de vierpoolvergelijkingen afgeleid, die onder de volgende figuur worden gegeven.

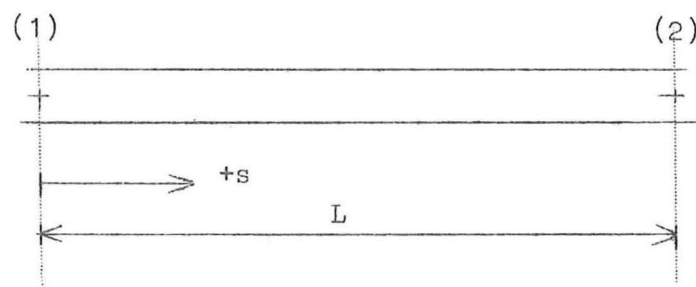


fig. 6.4

De positieve s -as is gekozen van (1) naar (2), de vergelijkingen (6-32) en (6-33) geven dan:

$$(6-38) \quad h_c(2) = L_v h_c(1) + M_v Q_c(1)$$

$$(6-39) \quad Q_c(2) = N_v h_c(1) + Q_v Q_c(1)$$

De verschillende mogelijke problemen kunnen gezien de vergelijkingen (6-38) en (6-39) worden onderscheiden in 3 gevallen:

1e $h(1)$ en $Q(1)$ bekend

2e $h(1)$ en $Q(2)$ "

3e $h(1)$ en $h(2)$ "

Hierna zal van het geval ad 3e een getallenvoorbeeld worden gegeven.

In de vergelijkingen (6-38) en (6-39) komen hyperbolische functies van een complex getal voor.

$$\cos h rL = \cos h (pL + iqL)$$

$$\sin h rL = \sin h (pL + iqL)$$

Deze funkties kunnen worden berekend, door splitsing van reële en imaginaire delen. Daarbij zijn de hierna volgende regels van belang.

$$(6-40) \quad \cos h (a + i b) = \cos h a \cos h i b + \sin h a \sin h i b$$

$$\cos h i b = \cos b \quad \text{en} \quad \sin h i b = i \sin b$$

Dus voor (6-40) kan men schrijven:

$$(6-41) \quad \cos h (a + i b) = \cos h a \cos b + i \sin h a \sin b.$$

$$(6-42) \quad \sin h (a + i b) = \sin h a \cos h i b + \cos h a \sin h i b$$

Voor (6-42) kan men schrijven:

$$(6-43) \quad \sin h (a + i b) = \sin h a \cos b + i \cos h a \sin b$$

Voorbeeld:

Stel dat bij een bepaald probleem van één vak alle noodzakelijke gegevens bekend zijn en dat de funkties $h(1,t)$ en $h(2,t)$ bekende periodieke funkties zijn.

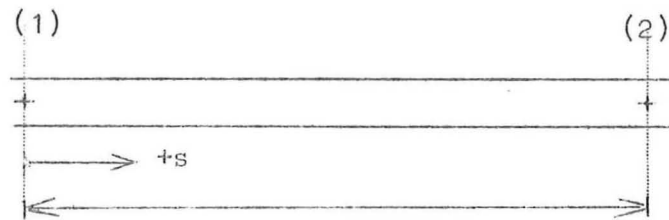


fig. 6.5

Het verloop van de waterstanden op de beide vakgrenzen is gegeven t.o.v. een referentie-vlak dat overeenkomt met de gemiddelde waterstand:

$$h(1,t) = 0,00 + \hat{h}(1) \cos \{\omega t - k(1)\}$$

$$h(2,t) = 0,00 + \hat{h}(2) \cos \{\omega t - k(2)\}$$

De hoek frekwentie ω , de amplituden $\hat{h}(1)$ en $\hat{h}(2)$ en de fasehoeken $k(1)$ en $k(2)$ zijn gegeven op bijlage 6.1 blz. 1.

De vakkonstanten van het vak kunnen worden berekend L_v , M_v , N_v en O_v .

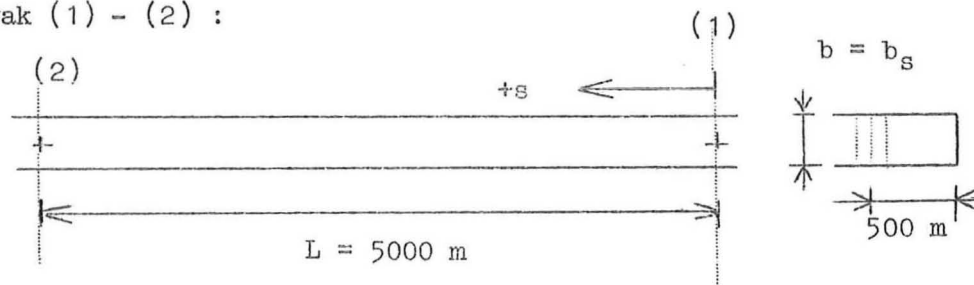
De funkties $h_c(1)$ en $h_c(2)$ worden bepaald.

Met (6-38) en (6-39) kunnen achtereenvolgens de grootheden $Q_c(1)$ en $Q_c(2)$ worden berekend.

De berekeningen zijn uitgevoerd op bijlage 6.1, terwijl de resultaten zijn verzameld op bijlage 6.2.

Voorbeeld toepassing Harmonische Methode.

Gegevens vak (1) - (2) :



Gemiddelde diepte t.o.v. de gem. waterstand	5.00 m;
Stroomvoerende breedte b_s = bergende breedte b =	300 m;
Vaklengte L	5000 m;
Coëfficiënt van de Chézy C_z	50 $m^{1/2} s^{-1}$

Van de genoemde randvoorwaarden $h(1,t)$ en $h(2,t)$ zijn gegeven:

$$\hat{h}(2) = 0,60 \text{ m}, \kappa(1) = 100^\circ \text{ en } \hat{h}(1) = 0,50 \text{ m}, \kappa(1) = 105^\circ.$$

De periode $T = 44700 \text{ s}$, zodat de frekwentie $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,405 \cdot 10^{-4} \text{ rad/s}$.

Geschatte waarde voor de amplitude van het debiet in het midden van het vak

$$\hat{Q}_{\text{gem}} = 800 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

Volgens (6-33) is:

$$p = \omega \sqrt{mb} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\omega m}\right)^2}} = 0,1862 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Voor } q \text{ vindt men dan } q = 0,2738 \cdot 10^{-4}$$

$$\text{Dus } rL = pL + iqL = 0,0931 + 0,1369 i \text{ en}$$

$$\cos h pL = 1,0043 \quad \cos qL = 0,9907$$

$$\sin h pL = 0,0932 \quad \sin qL = 0,1365$$

Bij het bepalen van de vakkonstanten wordt rekening gehouden met (6-41) en (6-43).

Men vindt achtereenvolgens:

$$L_v = \cos h rL = \cos h pL \cos qL + i \sin h pL \sin qL$$

$$= 0,9950 + 0,0127i$$

$$M_v = -\frac{r}{b\omega i} \sin h rL =$$

$$-(0,6495 - 0,4418 i) \cdot 10^{-3} (0,0924 + 0,1370 i) = \underline{\underline{(-0,1205 - 0,0482 i) \cdot 10^{-3}}}$$

$$N_v = - \frac{b \omega i}{r} \sin h rL = - (1,0526 + 0,7160) 10^3 (0,0924 + 0,1370 i) =$$

$$+ \underline{\underline{0,8900 - 0,2104 10^3 i}}$$

$$Q_v = L_v = \underline{\underline{0,9950 + 0,0127 i}}$$

Uit de gegeven randvoorwaarden volgt:

$$h_c(2) = 0,60 \{ \cos(-100^\circ) + i \sin(-100^\circ) \} =$$

$$= 0,60 \{ -0,17365 + i(-0,98481) \} = \underline{\underline{-0,1042 - 0,5909 i}}$$

$$h_c(1) = 0,50 \{ \cos(-105^\circ) + i \sin(-105^\circ) \} =$$

$$= 0,50 \{ -0,25882 + i(-0,96593) \} = \underline{\underline{-0,1294 - 0,4830 i}}$$

Uit (6-38) volgt nu dat:

$$Q_c(1) = \frac{\{ h_c(2) - L_v h_c(1) \}}{M_v}$$

$$Q_c(1) = \frac{\{ (-0,1042 - 0,5909 i) - (0,9950 + 0,0127 i)(-0,1294 - 0,4830 i) \}}{(-0,1205 - 0,0482 i) 10^{-3}}$$

$$= \frac{0,0184 - 0,1087 i}{-0,1205 - 0,0482 i} = \underline{\underline{(0,1792 + 0,8303 i) 10^3}}$$

Uit dit resultaat voor $Q_c(1)$ volgt: $\hat{Q}(1) \approx \underline{\underline{850 \text{ m}^3/\text{s}}}$ en $\phi(1) = 282^\circ 11'$

Uit (6-39) volgt:

$$Q_c(2) = N_v h_c(1) + Q_v Q_c(1) = (+ 0,8900 - 0,2104 10^3 i)(-0,1294 - 0,4830 i) +$$

$$(0,9950 + 0,0127 i)(0,1792 + 0,8303 i) 10^3 =$$

$$\left[(-0,1017 + 0,0268 i) + (0,1678 + 0,8284 i) \right] 10^3 =$$

$$\left[(+0,0660 + 0,8552 i) \right] 10^3 .$$

Uit dit laatste resultaat volgt: $\hat{Q}(2) \approx \underline{\underline{860 \text{ m}^3/\text{s}}}$

$$\phi(2) = \underline{\underline{274^\circ 25'}}$$

Opm. 1. De randvoorwaarden bij dit getallenvoorbeeld zijn willekeurig gekozen.

2. De eerste schatting die voor \hat{Q}_{gem} werd gemaakt was $\hat{Q}_{gem} = 500 \text{ m}^3/\text{s}$.

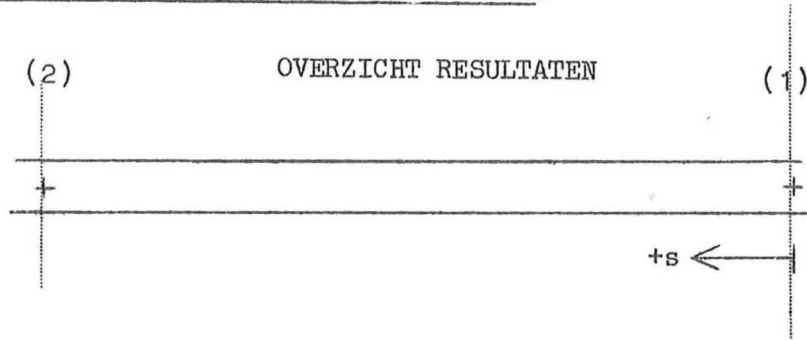
3. Nu vinden we, bij een schatting $\hat{Q}_{gem} = 800 \text{ m}^3/\text{s}$, :

$$\frac{\hat{Q}(2) + \hat{Q}(1)}{2} = \frac{860 + 850}{2} \approx 855 \text{ m}^3/\text{s}.$$

4. Men zou de berekeningen nog een keer kunnen herhalen voor een schatting b.v. $\hat{Q}_{gem} = 840 \text{ m}^3/\text{s}$.

Bijlage 6.2.

Voorbeeld toepassing Harmonische Methode.



$$r = p + iq = (0,1862 + 0,2738 i) 10^{-4}$$

$$rL = pL + iqL = 0,0931 + 0,1369 i$$

$L_v = 0,9950 + 0,0127 i$	$M_v = (-0,1205 - 0,0482 i) 10^{-3}$
$N_v = (+0,8900 - 0,2104 \cdot 10^3 i)$	$O_v = 0,9950 + 0,0127 i$

VAKGRENS (2) :

$h_c(2) = -0,1042 - 0,5909 i$ $\hat{h}(2) = 0,60 \text{ m}, \kappa(2) = 100^\circ$ $Q_c(2) = (-0,0066 + 0,8552 i) 10^3$ $\hat{Q}(2) \approx 860 \text{ m}^3/\text{s}, \phi(2) = 274^\circ 25'$

VAKGRENS (1) :

$h_c(1) = -0,1294 - 0,4830 i$ $\hat{h}(1) = 0,50 \text{ m}, \kappa(1) = 105^\circ$ $Q_c(1) = (-0,1792 - 0,8303 i) 10^3$ $\hat{Q}(1) \approx 850 \text{ m}^3/\text{s}, \phi(1) = 282^\circ 11'$

Opm. 1. Met bovenstaande grootheden is een eenvoudige controle mogelijk door uitgaande van gegeven $h(1,t)$ en $Q(1,t)$ de functies $h(2,t)$ en $Q(2,t)$ te berekenen.

De toepassing van de Harmonische Methode komt blijkbaar daarop neer, dat voor een bepaald vak van twee bekende functies de amplitude en de fasehoek wordt ingevoerd en van twee onbekende functies de fase en de amplitude worden berekend.

Het verloop van de functies in de tijd ligt van het begin af aan vast.

Opm.: 1. De complexe functies bevatten dubbele informatie, namelijk betreffende de amplitude en betreffende de fasehoek.

2. In paragraaf 6.5 wordt een probleem ad 2e besproken, waarbij naast $h(1,t)$ de tweede randvoorwaarde gegeven is als $Q(2,t) = 0$ voor alle waarden van t .

3. Vanzelfsprekend zal men bij de meeste praktijkproblemen niet kunnen volstaan met een schematisatie tot slechts één vak. In het kollege b73B wordt besproken hoe een benedenrivier (-engebied, delta) of een havencomplex kan worden geschematiseerd tot een systeem van takken en knooppunten.

Voor ieder vak geldt een stel vierpool-vergelijkingen. Het komt er op neer de vakken aan elkaar te schakelen, waarbij aan "splitsingspunt-voorwaarden" moet worden voldaan.

In het kollege b73A wordt hierop niet verder ingegaan.

4. Het verdelen in niet te grote vakken is ook in het geval van een onvertakte prismatische open leiding nodig.

In de gelineariseerde weerstandsterm komt in de faktor k ondermeer de amplitude van de functie Q (in het midden van het vak) voor.

Teneinde de weerstand voldoende nauwkeurig te verdiskontereren zal men de vaklengte dienen te beperken.

Voor berekeningen in de praktijk kan men b.v. denken aan een maximum vaklengte van b.v. $1/50$ maal de golflengte. In het algemeen is het verstandig om de invloed van de vaklengte na te gaan door bij een bepaald probleem de vaklengte te variëren.

Voor nadere gegevens betreffende de toepassing van de Harmonische Methode voor getij-problemen kan worden verwezen naar de bij dit gedeelte van het kollege behorende oefening 4.

In het kollege b73A wordt deze oplossingsmethode toegepast teneinde de voortplanting van z.g. seiches in een havenbekken te berekenen. (zie volgende paragraaf 6.5). Daarbij zal duidelijk worden dat de verhouding tussen de golflengte en de lengte van het bekken van groot belang is voor het golfverschijnsel.

6.5 HET BEREKENEN VAN DE VOORTPLANTING VAN Z.G. SEICHES IN EEN HAVENBEKKEN.6.5.1. Inleiding.

In een haven, of langs de kust in zee, kunnen doorlopend getijwaarnemingen worden verricht m.b.v. een registrerende peilschaal. Een dergelijke peilschaal wordt meestal zo gekonstrueerd, dat de golven met een hoge frequentie (windgolven) worden uitgedempt.

Indien men de waarnemingen bestudeert, dan blijkt, dat zich veelvuldig storingen in de normale getijbeweging voordoen. Deze storingen zijn van tweeërlei aard:

1. langzaam verlopende storingen, die een gevolg zijn van opstuwning van het water door wind (windeffekt, verloopt meestal over meerdere dagen).
2. snel verlopende storingen, die veelal worden veroorzaakt door snelle veranderingen in de meteorologische omstandigheden.

Het opvallende wat betreft de laatstgenoemde storingen is, dat de waterspiegelvariatiën, die in een havenbekken worden geregistreerd, meestal veel groter zijn dan die in de aangrenzende open zee.

De waterstandsvariatiën vinden in een relatief korte tijd plaats. Dit feit en de aanzienlijke stroomsnelheden, die hier een gevolg van zijn, maken het verschijnsel zeer hinderlijk voor de scheepvaart:

- a. grote troskrachten;
- b. stoten tegen aanlegsteigers o.d.;
- c. moeilijkheden bij het schutten, vooral bij een sluis met roldeuren;
- d. onvoorziene veranderingen in de stroom (snelheid en richting).

De verstoringen, die verantwoordelijk zijn voor deze hinder, kunnen worden veroorzaakt door:

1. zware stormen op een gedeelte van het zee-oppervlak;
2. plotselinge veranderingen van de luchtdruk;
3. veranderingen van windkracht of windrichting;
- 4.. aardbevingen, grondafschuivingen e.d.

De verstoringen, die zich op zee voordoen, kunnen worden onderscheiden in:

1. "bui-stoten", als het gaat over min of meer solitaire verstoringen van de waterspiegel;
2. "bui-oscillaties", indien de verstoringen zich in een min of meer regelmatige reeks voordoen (die vrij lang kan zijn).

Indien een havenbekken aan zeezijde wordt aangestoten door een solitaire verstoring dan zal zich in de haven een golf gaan voortplanten. Aan het gesloten einde en aan de havenmond vindt (partiële) terugkaatsing plaats, zodat het water in de haven gaat schommelen. Na de incidentele storing zal deze beweging na verloop van tijd uitdempen.

Indien de verstoring aan de havenmond min of meer periodiek is dan zal deze worden versterkt.

De mate van versterking wordt bepaald door:

- a. de lengte van de reeks oscillaties, die zich voordoen aan de haveningang;
- b. de periode van de oscillaties;
- c. de afmetingen van het havenbekken.

Het verschijnsel wordt zeer hinderlijk, indien de verhouding tussen de genoemde factoren ongunstig is. De variaties van de waterspiegel in havens, die door bui-oscillaties worden veroorzaakt, worden SEICHES genoemd.

De naam seiches stamt uit Zwitserland, waar op het meer van Genève reeds lang dergelijke schommelingen geregistreerd zijn.

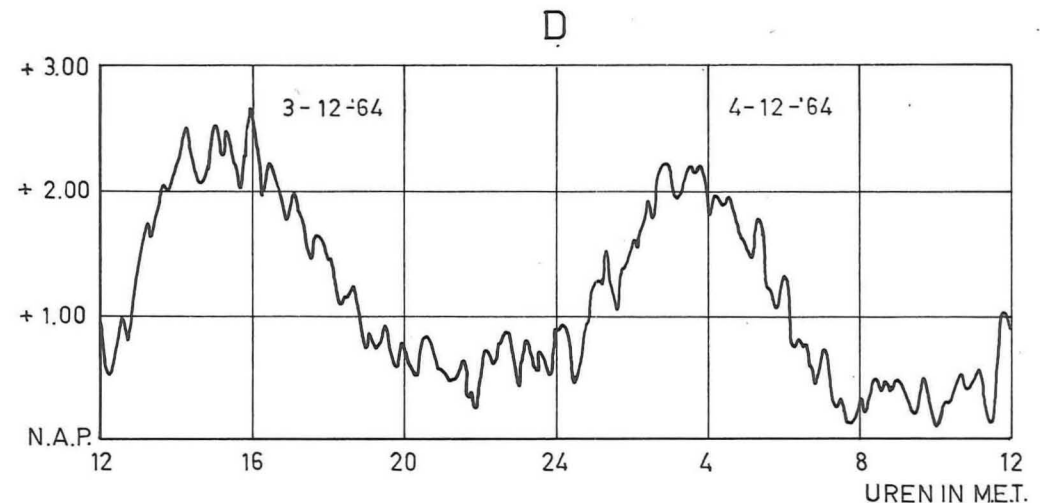
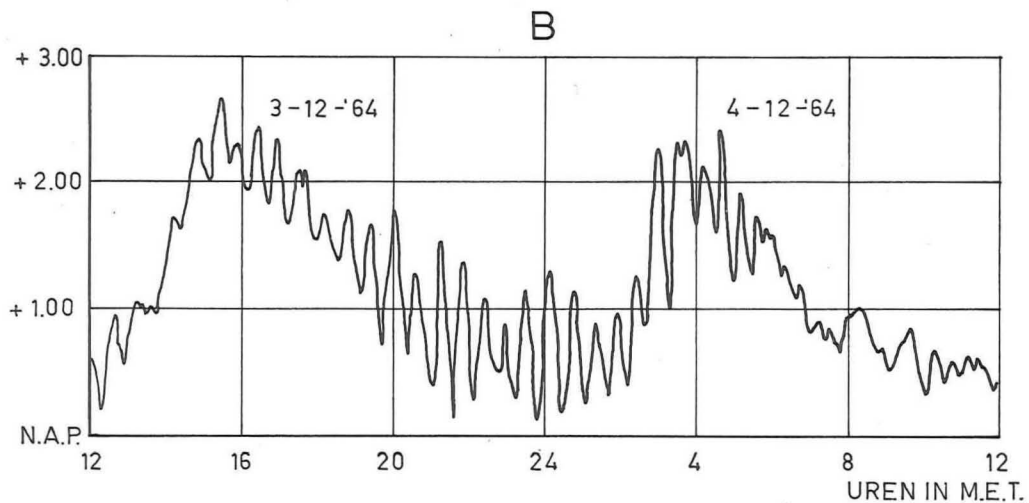
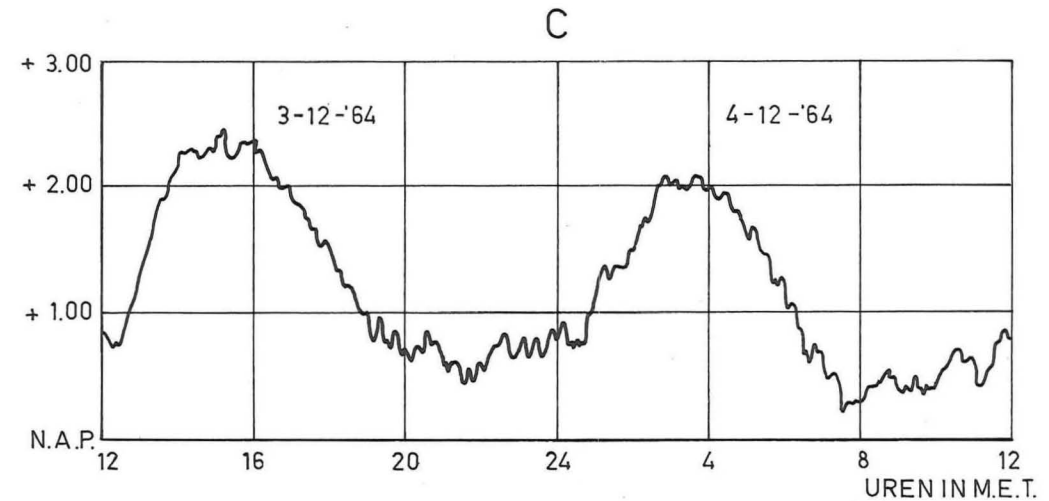
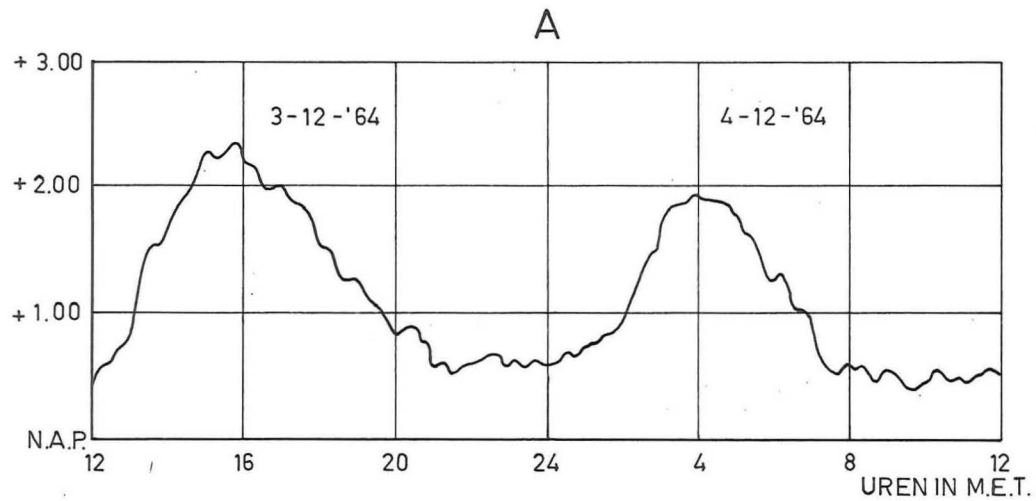
Later is het een verzamelnaam geworden voor bovengenoemde golven, met een periode van enkele minuten tot soms meer dan een uur.

De amplitude van de bui-oscillaties in zee (b.v. meetpaal Katwijk) is bijna steeds kleiner dan 0,20 m. In de haven van IJmuiden zijn wel waterstandsvariaties geregistreerd van ca. 1,50 m gedurende ongeveer 20 minuten (zie: de bijlage). Dit betekent in dat geval een versterking met een faktor 8. De versterkingsfaktor is ondermeer afhankelijk van de afmetingen van de haven en de haventoeegang.

Bij het ontwerpen van een nieuwe haven of voor de uitbreiding ("verbetering") van een bestaande haven, mag een onderzoek van het verschijnsel daarom niet achterwege blijven.

Een dergelijk onderzoek bestaat uit twee delen:

1. Een uitgebreid statistisch onderzoek naar het vóórkomen van seiches in de open zee ter plaatse.
2. Een onderzoek om het hinderlijke effect van de seiches te verminderen.



Op 3 en 4 december 1964 geregistreeerde waterstanden
 A Katwijk (meetpaal in zee)
 B IJmuiden (Noordersluis)
 C Hoek van Holland
 D Calandkanaal

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
 Afd. Weg- en Waterbouwkunde

VLOEISTOFMECHANICA
 KOLLEGE b 73 A

Overgenomen uit: Driemaandelijks Bericht Deltawerken N^o 33 aug. '65

ad 1. Wat betreft het eerste punt volstaan we met de opmerking, dat vooral gelet moet worden op de betrouwbaarheid van waarnemingen. Enige

faktoren die deze betrouwbaarheid ongunstig kunnen beïnvloeden zijn:

a. de nauwkeurigheid van de registrerende peilschaal voor golven met een dergelijke vrij grote frequentie. Deze peilschalen zijn meestal zodanig ontworpen, dat golven met een hoge frequentie (windgolven) worden uitgefilterd. In de loop van de tijd kan de konstruktie zo zijn beïnvloed dat óók de seiches met een hogere frequentie niet worden geregistreerd.

b. de plaats van de registrerende peilschaal. Het zal hierna duidelijk worden dat door resonantie-verschijnselen een fout beeld kan ontstaan w.b. de hoogte van de seiches, die zich op zee voordoen.

ad 2. Om de hinder, die van seiches wordt ondervonden, te beperken, kunnen b.v. de volgende mogelijkheden worden nagegaan:

- a. het verbinden van verschillende havenbekkens;
- b. het ontwerpen van geschikte overlaat;
- c. de haven een bijzondere vorm geven;
- d. de haven aansluiten op een lang kanaal of op een rivier.

De grote moeilijkheid, die we bij een dergelijk onderzoek ontmoeten, is dat de spreiding in de perioden van de bui-oscillaties, die worden waargenomen op een bepaalde plaats, meestal vrij groot is.

Hierdoor is het onmogelijk om in een ontwerp de hinderlijke invloed van de seiches geheel te voorkomen. Men zal slechts kunnen streven naar een optimum in die zin, dat de verhouding tussen de kosten en de schadeverwachting verantwoord is.

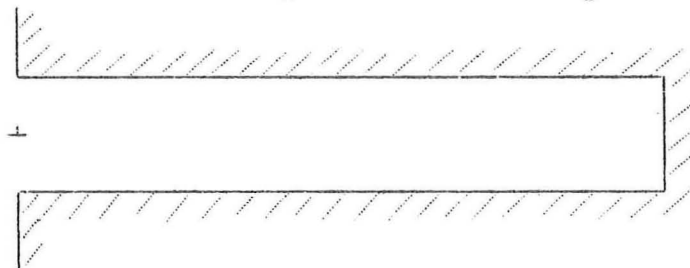
6.5.2. Een eenvoudige berekening.

Na de korte inleiding wordt in deze paragraaf voor een erg eenvoudig geval een berekening opgezet. Daartoe wordt een havenbekken geschematiseerd tot één prismatische bak met een lengte L. (zie figuur 6.6).

De randvoorwaarde $h(L,t)$ in zee is bekend. De randvoorwaarde aan de andere zijde volgt uit het feit dat het bekken is afgesloten:

$$Q(0,t) = 0 \text{ voor alle waarden van } t.$$

De positieve s -richting (de richting waarin wordt gerekend) is gekozen van 0 naar L . In deze richting wordt het debiet positief genoemd.



$$h(L,t) = \hat{h}(L) \cos \omega t \qquad Q(0,t) = 0$$

fig. 6.6.

Omdat $Q(0,t) = 0$ geven de vierpool-vergelijkingen ($Q_c(0) = 0$):

$$(6-44) \quad h_c(L) = L_v h_c(0)$$

$$(6-45) \quad Q_c(L) = N_v h_c(0)$$

Met deze vergelijkingen kunnen de beide onbekenden $h_c(0)$ en $Q_c(L)$ worden bepaald indien L_v en N_v bekend zijn (zie verg. (6-30) en (6-31)).

De relatie tussen de complexe grootheden, waarmee we rekenen, en de reële grootheden, waarin we geïnteresseerd zijn, is bekend (zie (6-9) en (6-10)).

We willen nu in de eerste plaats een uitdrukking vinden voor de verhouding tussen $\hat{h}(0)$ en $\hat{h}(L)$. Deze uitdrukking kan worden gevonden door de verhouding tussen de absolute waarden van de complexe functies te bepalen. Uit verg. (6-44) volgt dat:

$$|h_c(L)| = |L_v h_c(0)|$$

Men kan aantonen dat in het algemeen geldt:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

We kunnen dus schrijven:

$$|h_c(L)| = |L_v| \cdot |h_c(0)|$$

Uit deze laatste betrekking volgt dat:

$$\frac{\hat{h}(0)}{\hat{h}(L)} = \frac{1}{|L_v|}$$

Met de uitdrukking voor L_v (zie blz. 6.18) vinden we:

(6-46)

$$\frac{\hat{h}(0)}{\hat{h}(L)} = \frac{1}{|\cos h r L|}$$

De 'amplitude' van een complex getal $z = a + ib$ is $\hat{z} = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Als we rekening houden met (6-41) dan kunnen we schrijven:

$$\begin{aligned} |\cos h r L| &= \sqrt{\cos^2 h^2 p L \cos^2 q L + \sin^2 h^2 p L \sin^2 q L} \\ &= \sqrt{\cos^2 h^2 p L \cos^2 q L - \sin^2 h^2 p L \cos^2 q L + \sin^2 h^2 p L} \\ &= \sqrt{\cos^2 q L + \sin^2 h^2 p L} \end{aligned}$$

Voor (6-46) vinden we dan:

(6-47)

$$\frac{\hat{h}(0)}{\hat{h}(L)} = \frac{1}{\{\cos^2 q L + \sin^2 h^2 p L\}^{\frac{1}{2}}}$$

Deze verhouding wordt de versterkingsfaktor genoemd.

Opm.: De grootheden qL en pL (dimensieloos) worden uitgedrukt in radialen, omdat ω is uitgedrukt in radialen per seconde.

Eenvoudigheidshalve wordt nu eerst verondersteld dat de weerstand mag worden verwaarloosd. In dat geval mag men stellen $k = 0$. Uit (6-33) volgt dan $p = 0$, terwijl (6-34) voor q geeft:

$$q = \omega \sqrt{mb}$$

We vinden dus in een geval zonder weerstand:

$$r = p + iq = 0 + i \omega \sqrt{mb}$$

Uit (6-46) of (6-47) volgt in dat geval (met weerstand is nul) de volgende uitdrukking:

(6-48)

$$\frac{\hat{h}(0)}{\hat{h}(L)} = \frac{1}{|\cos q L|} = \frac{1}{|\cos \omega \sqrt{mb} L|}$$

We kunnen ons nu afvragen wanneer in dat geval de opslingerfaktor maximaal wordt. Indien de weerstand wordt verwaarloosd, dan blijkt volledige resonantie op te treden, d.w.z.

$$\frac{\hat{h}(0)}{\hat{h}(L)} = \infty \text{ voor } \cos ql = 0 \text{ dus voor:}$$

$$qL = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Deze voorwaarde kan worden geschreven als:

$$\begin{aligned} (6-49) \quad \omega \sqrt{mb'} L &= (2n - 1) \frac{\pi}{2} && \text{of} \\ (6-50) \quad \omega &= (2n - 1) \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{mb'} L} \end{aligned}$$

Met (6-50) kan de frequentie van de randvoorwaarde, waarbij resonantie op zal treden, worden bepaald.

We zien dat voor een bepaald bekken (met bepaalde waarden voor $\sqrt{mb'}$ en L) voor een aantal waarden ω resonantie mogelijk is.

Men duidt deze waarden volgens (6-48) wel aan met ω_0 , de eigen frekwenties van een bekken.

Op verschillende plaatsen in de voorgaande hoofdstukken is gesproken over de voortplantingssnelheid van een verstoring in een bepaald bekken

(wrijving verwaarloosd):

$$(6-51) \quad c = \sqrt{\frac{bs}{b} gh} = \frac{1}{\sqrt{mb'}}$$

Als we nu nog bedenken dat $\frac{2\pi}{\omega} = T =$ de periode en dat de golflengte $\lambda = c T$, dan kunnen ^{we} i.p.v. (6-50) ook schrijven:

$$(6-52) \quad L = (2n - 1) \frac{\pi}{2} \frac{c}{\omega} = (2n - 1) \frac{L}{4}$$

Uit (6-52) volgt dat resonantie optreedt, indien de lengte van het bekken gelijk is aan een oneven aantal maal een kwart van de golflengte.

Opm.: De functie $h(s, t)$ (een staande golf) heeft een knoop, aan de ingang van het bekken. De functie $Q(s, t)$ heeft een knoop aan het afgesloten einde, waar $Q = 0$ voor alle waarden van t . In de mond zijn de stromen maximaal.

Omdat in het bovenstaande de weerstand is verwaarloosd ($p=0$), kan de versterkingsfaktor oneindig worden. In de natuur zullen de waterstandsvariatiës beperkt blijven door de weerstand.

Als we terugkeren naar de uitdrukking (6-47) dan is het mogelijk om voor bepaalde waarden van pL en qL de versterkingsfaktor te berekenen.

Zowel p als q zijn afhankelijk van de grootte van $\frac{k}{\omega m}$ (zie verg. (6-33) en (6-34)).

In het boek "Tidal Computations, in rivers and coastal waters" van dr. J.J. Dronkers (1964) wordt de invloed van de weerstand nagegaan (zie blz. 235 e.v.). Om een indruk te geven van de invloed van de (relatieve) weerstand wordt hierna een figuur uit het bovengenoemde boek besproken.

Ingevoerd worden de volgende dimensieloze parameters:

$$(6-53) \quad s_1 = \frac{k}{\omega m}$$

$$(6-54) \quad s_2 = \frac{2\pi L}{\lambda} = \frac{\omega L}{c} = \omega L \sqrt{mb}$$

$$(6-55) \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + s_1^2}}$$

$$(6-56) \quad \beta = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{+1 + \sqrt{1 + s_1^2}}$$

Uit de definities (6-53) t/m (6-56) volgt dat we voor pL resp. qL kunnen schrijven:

$$pL = s_2 \sigma \quad \text{en} \quad qL = s_2 \beta$$

Als $k = 0$ dan is $s_1 = 0$ en dus $\sigma = 0$ en $\beta = 1$, zodat in dat geval $pL = 0$ en $qL = s_2$.

Men kan nu, voor een bepaalde waarde van s_1 , de versterkingsfaktor als functie van s_2 berekenen. In fig. 6.7 zijn de resultaten voor een aantal waarden van s_1 verzameld.

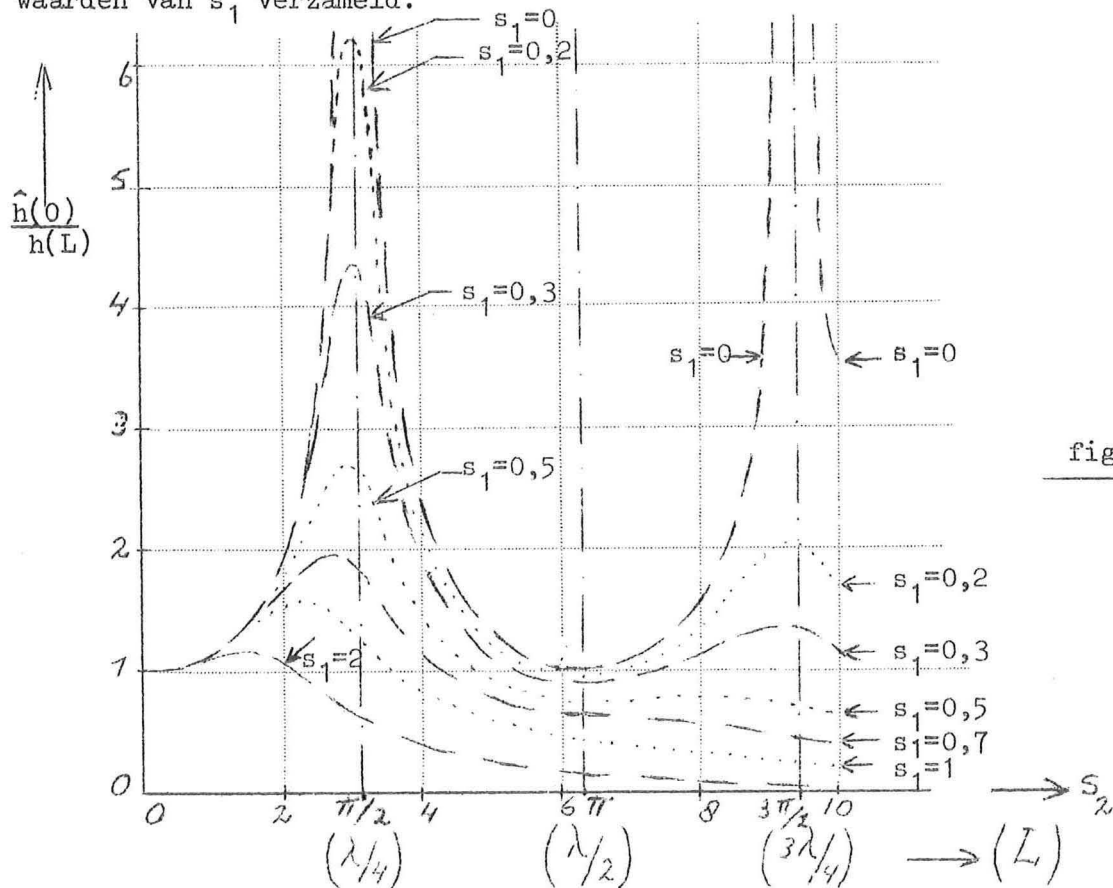


fig. 6.7

Behalve de grootheid s_2 is langs de horizontale as de korresponderende waarde van de bekkenlengte L uitgedrukt in de golflengte $\lambda = cT$, waarbij c is gedefinieerd volgens (6-51).

Voor $s_1 = 0$ zien we dat de kromme voor $s_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ asymptotisch naar oneindig gaat.

Dit komt overeen met de voorwaarde (6-50) als voor $n = 1$ wordt gekozen:

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \frac{c}{L}.$$

Deze waarde van ω_0 wordt de eerste resonantie-frekwentie genoemd.

We zien dat de versterkingsfaktor afneemt, naarmate de waarde van s_1 toeneemt. Voor bijvoorbeeld een waarde $s_1 = 0,5$ zien we dat de maximale versterkingsfaktor voorkomt bij een waarde van s_2 , die kleiner is dan $\frac{\pi}{2}$. Verder zien we in fig. 6.7 duidelijk dat de versterkingsfaktor voor de eerste resonantie-frekwentie, het grootst is.

De versterkingsfaktor is voor kleine waarden van s_2 , d.w.z. bij een kleine verhouding tussen bekkenlengte en golflengte, slechts weinig groter dan 1.

Opm.: Men kan een waarde voor s_2 bepalen bij een dubbeldaagse sinusvormige getijgolf en een bekken met de lengte $L = 3000$ m en een gemiddelde diepte van 5 m. Het resultaat kan in verband worden gebracht met de in Deel I onder 4.2 besproken kombergingsbeschouwing.

Men zal trachten een haven-ontwerp te maken dat voor de frekwenties van de seiches, die ter plaatse het meest voorkomen, zo goed mogelijk voldoet. Daarvoor is een onderzoek naar het vóórkomen van seiches in de zee ter plaatse nodig (zie 6.5.1). Een globale berekening met een betrekkelijk grove schematisatie geeft reeds een vrij goede indicatie in hoeverre bij een bepaalde situatie van versterking sprake is.

Vanzelfsprekend zal men in veel-gevallen niet kunnen volstaan met een schematisatie tot één vak. Voor het uitvoeren van een berekening voor een systeem van takken en splitsingspunten wordt verwezen naar de kolleges b73B.

Wat betreft de Harmonische Methode kan men de volgende paragraaf 6.6 als een overgang van b73A naar b73B zien.

6.5 HET PRINCIPE VAN DE MEERVOUTIGE HARMONISCHE METHODE.

Bij problemen in allerlei verschillende vakgebieden ontmoet men functies, die betrekkelijk willekeurig kunnen verlopen. In dergelijke gevallen wordt gebruik gemaakt van de mogelijkheid om een willekeurige functie te benaderen door een of andere reeks van handelbare functies.

Indien men te maken heeft met lineaire vergelijkingen dan kan men gebruik maken van het beginsel van superpositie. Dit wil zeggen dat oplossingen, die voor elk van de in de reeks voorkomende componenten kunnen worden gevonden, achteraf mogen worden gesuperponeerd tot de gezochte oplossing.

In deze paragraaf wordt verder slechts gesproken over periodieke functies. Zoals door Fourier is aangegeven kan elke periodieke functie worden benaderd door een reeks van sinusvormige functies (komponenten).

Hoewel de benaderingswijze als zodanig voor een groot aantal problemen kan worden toegepast, wordt ook in het onderstaande de voortplanting van periodieke lange golven in een open leiding beschouwd.

Uitgegaan wordt van de in hoofdstuk 2 (deel I) afgeleide vergelijkingen (2-15) en (2-11).

Voor de afleiding van deze vergelijkingen en de daarbij gemaakte veronderstellingen wordt hier naar hoofdstuk 2 terug verwezen.

Verondersteld wordt nog dat:

- de bodemhelling $\text{tg } I_b = I_b = 0$ en
- de verhouding $\frac{v^2}{gh} \ll 1$

In de vergelijking (2-15) wordt de faktor α gelijk 1 en verdwijnt de term met de bodemhelling. We werken verder met de volgende vergelijkingen:

$$(6-57) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = - \frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q|Q|}{c^2 A^2 R} + \frac{2b}{gA^2} Q \frac{\partial h}{\partial t}$$

$$(6-58) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = - b \frac{\partial h}{\partial t}$$

Opm.: In de bewegingsvergelijking is de term $\frac{2b}{gA^2} Q \frac{\partial h}{\partial t}$ niet verwaarloosd. Ook deze term is duidelijk niet lineair.

De gezochte functies h en Q zijn afhankelijk van de plaats s en de tijd t : $h(s,t)$ en $Q(s,t)$.

Zoals op blz. 6.3 en 6.4 wordt beschreven wordt een leiding afhankelijk van de figuratie in niet te grote vakken verdeeld. Voor elk vak wordt een representatief dwarsprofiel bepaald.

Daardoor mag men voor een bepaald vak stellen dat de factoren A, b, R en c konstant zijn in de s-richting.

Deze factoren zijn dan toch nog geen konstanten, omdat ze nog met de waterstand en dus in de tijd variëren.

Afgezien van het variëren van de factoren $\frac{1}{c^2 A^2 R}$ en $\frac{2b}{gA^2}$ zijn de weerstandsterm en de laatste term uit de bewegingsvergelijking (6-57) reeds niet-lineair.

Voor het oplossen van de vergelijkingen (6-57) en (6-58) zal men tegenwoordig onmiddellijk denken aan een numerieke benadering m.b.v. een computer.

Voor de hier bedoelde problemen worden in het kollege b73B numerieke oplossingsmethoden besproken en toegepast.

Om een inzicht te krijgen in het golfverschijnsel en in de mate waarin de verschillende fysische grootheden dit verschijnsel beïnvloeden, blijken echter andere oplossingsmethoden onmisbaar. Daarom wordt ook in het kollege b73B nog aandacht besteed aan Analytische oplossingsmethoden. In deze paragraaf wordt ten behoeve van een beter inzicht slechts het principe aangegeven van een beschouwing met functies bestaande uit meerdere harmonische componenten.

Zoals we gezien hebben in 6.3 en 6.4 is het voor een ANALYTISCHE OPLOSSING noodzakelijk dat alle termen in de vergelijkingen LINEAIR zijn. We moeten dus streven naar termen, waarin factoren vóór:

$$h, Q, \frac{\partial h}{\partial s}, \frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial Q}{\partial s} \text{ of } \frac{\partial Q}{\partial t}$$

konstant zijn.

We nemen nu aan dat de functies $h(s,t)$ en $Q(s,t)$ voor elke plaats s periodieke functies zijn. Dit wil zeggen dat deze functies, op een bepaalde plaats, in achtereenvolgende perioden T dezelfde gedaante hebben.

Een periodieke functie $F(t)$ kan volgens Fourier in een z.g. trigonometrische reeks worden ontwikkeld:

$$F(t) = A_0 + \sum_{N=1}^{N=\infty} (A_N \cos N \omega t + B_N \sin N \omega t)$$

In plaats van deze uitdrukking kan men ook schrijven:

$$F(t) = F_0 + \sum_{N=1}^{N=\infty} \hat{F}_N \cos (N \omega t - \theta_N), \text{ waarin}$$

$$F_0 = A_0, \quad \hat{F}_N = \sqrt{A_N^2 + B_N^2} \quad \text{en} \quad \theta_N = \text{arctg} \frac{B_N}{A_N}$$

In het volgende wordt van de functies h en Q het gedrag in de tijd beschouwd. Voor iedere willekeurige plaats kunnen de functies $h(t)$ en $Q(t)$ als volgt worden uitgedrukt:

$$(6-59) \quad h(t) = h_0 + \hat{h}_1 \cos (\omega_1 t - \kappa_1) + \hat{h}_2 \cos (2\omega_1 t - \kappa_2) + \dots$$

$$(6-60) \quad Q(t) = Q_0 + \hat{Q}_1 \cos (\omega_1 t - \phi_1) + \hat{Q}_2 \cos (2\omega_1 t - \phi_2) + \dots$$

In deze uitdrukkingen is $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ terwijl:

\hat{h}_N = de amplitude van de N -de h - komponent (een functie van s);

\hat{Q}_N = " " " " N -de Q - komponent (" " " s)

κ_N = de fasehoek " " N -de h - komponent (" " " s)

ϕ_N = " " " " N -de Q - komponent (" " " s)

Terwille van de eenvoud kunnen we voor (6-59) en (6-60) schrijven:

$$(6-61) \quad h = h_0 + h_1 + h_2 + \dots$$

$$(6-62) \quad Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots$$

Met deze uitdrukkingen voor h en Q kunnen we voor de lineaire termen uit het linker lid van de vergelijkingen (6-57) en (6-58) achtereenvolgens schrijven:

$$(6-63) \quad \frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h_0}{\partial s} + \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial h_2}{\partial s} + \dots$$

$$(6-64) \quad \frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial Q_0}{\partial s} + \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{\partial s} + \dots$$

Voor de traagheidsterm uit de vergelijking (6-57) kunnen we schrijven:

$$- m \frac{\partial Q}{\partial t}$$

We weten dat de faktor $m = \frac{1}{gA}$ van h afhankelijk is.

Omdat h periodiek in de tijd varieert is het mogelijk om de faktor m in het algemeen als volgt uit te drukken:

$$(6-65) \quad m = \bar{m} \left[n_0 + n_1 \cos (\omega_1 t - \kappa_1) + \dots \right]$$

De variatie van de faktor met de hoogte wordt dus zo goed mogelijk benaderd, door de faktor te vervangen door een reeks, die in het algemeen de gedaante heeft van de uitdrukking (6-65).

Voor $\frac{\partial Q}{\partial t}$ kunnen we schrijven:

$$(6-66) \quad \frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{\partial Q_0}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \dots$$

Met de uitdrukkingen (6-65) en (6-66) kan men voor de traagheidsterm

$- m \frac{\partial Q}{\partial t}$ dan schrijven:

$$(6-67) \quad - \bar{m} \left[n_0 + n_1 \cos (\omega_1 t - \kappa_1) + n_2 \cos 2(\omega_1 t - \kappa_1) + \dots \right] \left[\frac{\partial Q_0}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_2}{\partial t} + \dots \right]$$

Uit de uitdrukking (6-60) volgt achtereenvolgens dat: $\frac{\partial Q_0}{\partial t} = 0$,

$\frac{\partial Q_1}{\partial t} = - \omega_1 \hat{Q}_1 \sin (\omega_1 t - \phi_1)$, $\frac{\partial Q_2}{\partial t} = - 2 \omega_1 \hat{Q}_2 \sin (2\omega_1 t - \phi_2)$, etc.

Als we (6-67) nu verder uitwerken vinden we een groot aantal termen.

Terwille van de overzichtelijkheid nemen we in het volgende nog wat minder termen van de reeksen mee. Voor (6-67) schrijven we eerst:

$$(6-68) \quad - \bar{m} \left[n_0 + n_1 \cos (\omega_1 t - \kappa_1) \right] \left[\frac{\partial Q_1}{\partial t} \right]$$

Uitwerken geeft dan:

$$(6-69) \quad \bar{m} \omega_1 \hat{Q}_1 \left[n_0 \sin (\omega_1 t - \phi_1) + n_1 \sin (\omega_1 t - \phi_1) \cos (\omega_1 t - \kappa_1) \right] =$$

$$\bar{m} \omega_1 \hat{Q}_1 \left[n_0 \sin (\omega_1 t - \phi_1) + \frac{n_1}{2} \sin (2\omega_1 t - \phi_1 - \kappa_1) - \frac{n_1}{2} (\kappa_1 - \phi_1) \right]$$

Voor de eerste term van (6-69) kunnen we schrijven:

$\bar{m} \omega_1 \hat{Q}_1 n_0 \sin (\omega_1 t - \phi_1) = - \bar{m} n_0 \frac{\partial Q_1}{\partial t}$ dat is een lineaire term.

Verder zien we dat behalve deze term in (6-69) nog een konstante term

voorkomt en een lineaire term met de frekwentie $2\omega_1$ (zie opmerkingen later).

Indien we in plaats van (6-68) uitgaan van de uitdrukking (6-67) dan vinden we uiteraard een veel groter aantal termen:

- termen die konstant zijn in de tijd,
- lineaire termen met een frekwentie ω_1 ,
- " " " " " $2\omega_1$,
- " " " " " $3\omega_1$,
- " " " " " $4\omega_1$,
- etc. etc.

Omdat het hier slechts gaat om het principe, worden de uitdrukkingen verder niet uitgewerkt.

Opm.: In het kollege b73B wordt deze meervoudige harmonische methode aan de hand van een diktaat nog nader uitgewerkt en besproken.

De overige termen uit de vergelijking (6-57) en (6-58) kunnen eveneens op de boven aangegeven wijze worden aangepakt. We vinden dan uitdrukkingen, die als volgt kunnen worden aangegeven:

$$\begin{aligned}
 - \frac{Q|Q|}{C^2 A^2 R} & \rightarrow \boxed{\text{konstante termen}} + \boxed{\text{lineaire termen met een frekwentie } \omega_1} + \boxed{\text{lineaire termen met een frekwentie } 2\omega_1} + \dots \\
 + \frac{2b}{gA^2} Q \frac{\partial h}{\partial t} & \rightarrow \text{idem} \\
 - b \frac{\partial h}{\partial t} & \rightarrow \text{idem}
 \end{aligned}$$

Als we de vergelijkingen (6-57) en (6-58) nu beschouwen, dan vinden we, na substitutie, hiervoor de volgende algemene gedaante:

$$\text{(I)} \quad \frac{\partial h_0}{\partial s} + \frac{\partial h_1}{\partial s} + \frac{\partial h_2}{\partial s} + \dots = \boxed{\text{konstante termen}} + \boxed{\text{lineaire termen met een frekwentie } \omega_1} + \boxed{\text{lineaire termen met een frekwentie } 2\omega_1} \dots$$

$$\text{(II)} \quad \frac{\partial Q_0}{\partial s} + \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \frac{\partial Q_2}{\partial s} + \dots = \text{idem}$$

Omdat op ieder tijdstip aan deze vergelijkingen (I) en (II) moet worden voldaan, kunnen deze worden opgesplitst in een aantal vergelijkingen, waarin termen voorkomen met een zelfde frekwentie

In plaats van de vergelijkingen I en II krijgen we de volgende stelsels:

$$(Ia) \quad \frac{\partial h_0}{\partial s} = \text{som konstante termen in het rechter lid van (I)}$$

$$(IIa) \quad \frac{\partial Q_0}{\partial s} = \text{" " " " " " " " (II)}$$

$$(Ib) \quad \frac{\partial h_1}{\partial s} = \text{som termen met frekwentie } \omega_1 \text{ in het rechter lid van (I)}$$

$$(IIb) \quad \frac{\partial Q_1}{\partial s} = \text{" " " " } \omega_1 \text{ " " " " " " (II)}$$

$$(Ic) \quad \frac{\partial h_2}{\partial s} = \text{" " " " } 2\omega_1 \text{ " " " " " " (I)}$$

$$(IIc) \quad \frac{\partial Q_2}{\partial s} = \text{" " " " } 2\omega_1 \text{ " " " " " " (II)}$$

etc. etc.

We vinden dus een (vrij groot) aantal lineaire D.V. met konstante coëfficiënten, die twee aan twee kunnen worden opgelost:

- één stel voor de onbekenden h_0 en Q_0
- " " " " " " h_1 en Q_1
- " " " " " " h_2 en Q_2

etc. etc.

Nadat elk stel vergelijkingen is opgelost en aan de randvoorwaarde is voldaan kan men de resultaten superponeren tot de oplossing die gezocht wordt:

$$h = h_0 + h_1 + h_2 + \dots \rightarrow \underline{h(s,t)}$$

$$Q = Q_0 + Q_1 + Q_2 + \dots \rightarrow \underline{Q(s,t)}$$

De gezochte funkties $h(s,t)$ en $Q(s,t)$ worden, volgens het hierboven aangegeven principe, dus verkregen door de oplossingen, die voor elk der harmonische componenten worden gevonden, achteraf te superponeren.

Zoals ook reeds op blz. 6 is gesteld, geldt het beginsel van superpositie alleen indien de op te lossen vergelijkingen lineair zijn.

Voor het beschouwde probleem hebben de vergelijkingen een duidelijk niet-lineair karakter.

Uit het bovenstaande kan men konkluderen dat in principe elke gewenste graad van nauwkeurigheid is te bereiken, door het aantal termen van de reeksen uit te breiden. Indien echter de differentiaal-vergelijkingen niet lineair zijn dan zullen daarbij om praktische redenen duidelijke beperkingen moeten worden opgelegd. Voor het beschouwde probleem blijkt dat men de stelsels vergelijkingen Ia en IIa, Ib en IIb, etc. niet geheel onafhankelijk van elkaar kan oplossen. In de z.g. konstante coëfficiënten van de verschillende termen blijken factoren voor te komen, die afhankelijk zijn van de oplossing. Zo komt b.v. in de laatste termen van de uitdrukking (6-69) de amplitude van de functie Q_1 voor.

Indien men óók de overige termen uit de vergelijkingen (6-57) en (6-58) nader uitwerkt, dan blijkt dat in de verschillende "konstante" coëfficiënten grootheden voorkomen, die van de oplossing afhankelijk zijn. Omdat de vergelijkingen niet lineair zijn blijken de verschillende harmonische componenten elkaar wederzijds te beïnvloeden.

Een goede benadering van de juiste oplossing is daarom slechts mogelijk door het uitvoeren van een ITERATIE-PROCES:

- de benodigde factoren worden zo goed mogelijk geschat;
 - de stelsels vergelijkingen worden voor de éérste maal opgelost;
 - met de resultaten kunnen de factoren beter worden geschat;
 - de stelsels vergelijkingen worden opnieuw opgelost;
- etc.

Indien de geschatte grootheden voldoende in overeenstemming zijn met de resultaten wordt het iteratie-proces beëindigd.

Omdat men gedwongen is een iteratie-proces uit te voeren, zal men om praktische redenen het aantal componenten zoveel mogelijk beperken.

Dat wil zeggen dat men in de reeksen (zie b.v. de uitdrukkingen (6-59) en (6-60) slechts een beperkt aantal termen zal meenemen.

De meervoudige harmonische methode is in de praktijk uitgewerkt en toegepast voor het berekenen van de voortplanting van getijgolven op benedenrivieren (Stroband, 1947, De Ingenieur No. 36). Daarbij worden in de reeksen termen meegenomen waarvoor $N \leq 2$ d.w.z.

- konstante termen;
- termen met de frekwentie $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ ($T_1 = 44700$ sek., dit is de periode van het dubbeldaags Maansgetij);
- termen met de frekwentie $2\omega_1$ (één hoger harmonische).

Bij de uitwerking en de toepassing van deze benaderingswijze waarbij $N \leq 2$ stuit men voor meer ingewikkelde problemen reeds op vrij grote moeilijkheden.

- Omdat door de computer tegenwoordig andere benaderingsmethoden mogelijk zijn, zal men zich wat de harmonische methode betreft zelfs beperken tot het meenemen van termen waarvoor $n \leq 1$. Dit betekent dat bij de analytische benadering van een probleem wordt verondersteld dat:
 - de waterstanden en de debieten in de tijd variëren volgens een zuiver sinusvormige kromme;
 - er al of niet een konstant debiet Q_0 (bovenafvoer op benedenrivieren) aanwezig is;
 en het verloop van de middenstand h_0 kan worden berekend.

In het kollege b73B wordt een praktisch voorbeeld voor een dergelijke berekening besproken, waarbij voor hetzelfde probleem ook andere (numerieke) berekeningsmethoden worden toegepast.

In het bovenstaande werd, in aansluiting op het in de paragrafen 6.2 t/m 6.4 behandelde, het principe van de meervoudige Harmonische Methode slechts summier aangegeven. Dit maakt toch reeds enkele opmerkingen mogelijk, die tot het inzicht kunnen bijdragen.

Bij het uitwerken van de uitdrukking (6-68) voor de traagheidsterm vonden we de uitdrukking (6-69). Hierin komen drie termen voor en wel:

- een term met de frekwentie ω_1 ;
- een term die konstant is in de tijd;
- een term met de frekwentie $2\omega_1$.

We zien hieruit dat een niet-lineaire term produkten van cosinus- en sinus-termen geeft, die gesplitst kunnen worden in twee termen met resp. een hogere en een lagere frekwentie.

Het is duidelijk dat óók bij het uitwerken van de overige niet-lineaire termen uit de vergelijkingen (6-57) en (6-58) een zelfde beeld ontstaat. Indien men slechts uitgaat van enkelvoudige sinusvormige funkties dan krijgt men dus te maken met termen met een hoger (resp. lagere) frekwentie. Het niet-lineair karakter van de vergelijkingen, heeft dus blijkbaar tot gevolg dat in het systeem hoger harmonischen worden opgewekt (gegenereerd).

Het gevolg hiervan is dat de funkties $h(s,t)$ en $Q(s,t)$ vervormingen ondergaan.

Laten we ter illustratie veronderstellen dat aan de zee-zijde van een afgesloten ri vierarm de randvoorwaarde bestaat uit één enkele harmonische:

$$h_R = \hat{h}_1 \cos(\omega_1 t - \phi).$$



De functies $h(t)$ in punten landinwaarts zullen nu naast een komponent met de frekwentie ω_1 ook enige componenten bevatten met een hogere (resp. lagere) frekwentie.

Met name als gevolg van de wrijvingsterm maar ook tengevolge van de overige niet-lineaire termen worden harmonischen opgewekt, waardoor de functies h en Q vervormd zijn. Dit verschijnsel kan men in de praktijk duidelijk konstateren door de op verschillende plaatsen gemeten krommen onderling te vergelijken.

Indien men volstaat met het toepassen van de enkelvoudige harmonische methode dan blijven deze vervormingen uiteraard geheel buiten beschouwing!

DELFT, JANUARI 1973

C. Verspuy

College b 73 A OEFENING 4

Inleiding

Na de oplossingsmethode "Integratie m.b.v. Karakteristieken" wordt in het laatste gedeelte van het college b 73 A de Harmonische Methode behandeld. Omdat hier sprake is van een ANALYTISCHE oplossingsmethode mag men een belangrijke bijdrage t.b.v. het inzicht verwachten.

Gebleken is dat deze methode bij velen als moeilijk wordt ervaren, niet in de laatste plaats om het feit dat gewerkt wordt met complexe functies. Besloten is om de mogelijkheden voor zelfstudie uit te breiden door het beschikbaar stellen van deze oefening 4. Door een aantal gerichte vragen wordt a.h.w. gedemonstreerd hoe men bij de methode te werk gaat en welke mogelijkheden men heeft.

Voor de theorie van de Harmonische Methode kan worden verwezen naar het betreffende gedeelte van het dictaat. De beschrijving van de hierna volgende opgaven sluit daar zeer nauw bij aan.

Voorgestelde gang van zaken:

De opgaven zijn gesplitst in twee gedeelten.

Gedeelte 4 A bevat een paar eenvoudige vragen, die het best kunnen worden beantwoord in aansluiting op de behandeling van de Harmonische Methode op het college.

Deze vragen hebben betrekking op de theorie en op het rekenen met complexe functies.

In gedeelte 4B zijn enkele opgaven onder gebracht, die betrekking hebben op het lange golf-probleem dat reeds in oefening 1 is beschreven. De uitwerking van deze laatste opgaven zal ook niet méér dan enkele uren vergen.

Deze oefening 4 in zijn geheel is een introductie tot de berekeningsmethode. Geadviseerd wordt om t.z.t. (bij de definitieve zelfstudie als voorbereiding voor het tentamen) aansluitend op het gedeelte 4B óók enkele tentamen-opgaven betreffende dit onderwerp zelfstandig uit te werken. Indien daarna de uitwerkingen van deze tentamen opgaven worden ^{en} geraadpleegd moet men er rekening mee houden dat deze "in telegramstijl" zijn gesteld, waarbij ervan is uitgegaan dat de benodigde informatie in het college-dictaat is te vinden.

Voor deze oefening 4 hoeft geén antwoord-formulier te worden ingeleverd.

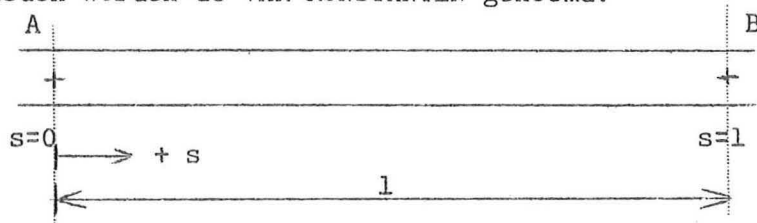
Omdat de opgaven volledig aansluiten op het bestaande college-dictaat, is ook geén bespreking nodig.

4 A Beschouwd wordt een riviergedeelte met een lengte l , dat als één vak mag worden opgevat. Zoals bekend wordt bij de Harmonische Methode verondersteld dat de golfbeweging PERIODIEK is (volledig ingespeeld) en zijn de D.V.n vooraf gelineariseerd. De voortplanting van een SINUSVORMIGE periodieke golf kan worden berekend m.b.v. de "vierpool-vergelijkingen". In een eenvoudige gedaante kunnen deze vergelijkingen als volgt worden geschreven:

$$(I) \quad h_c(1) = L_v h_c(0) + M_v Q_c(0)$$

$$(II) \quad Q_c(1) = N_v h_c(0) + O_v Q_c(0)$$

In de nu ingevoerde grootheden L_v , M_v , N_v en O_v komen vooral de eigenschappen van het tussen het punt A en het punt B gelegen vak tot uitdrukking. Deze grootheden worden de VAK-KONSTANTEN genoemd.



1. Hoe ziet de uitdrukking voor elk van de grootheden L_v , M_v , N_v en O_v eruit?
2. De voortplantingsconstante r is in het algemeen een complexe grootheid bestaande uit een reëel deel p en een imaginair deel q .

Geef voor de beide delen p en q een definitie.

3. Op welke wijze komt de weerstand resp. de traagheid in de voortplantingsconstante r tot uiting?

Indien de weerstand volledig wordt verwaarloosd wat worden dan de uitdrukkingen voor p en q ?

Bovengenoemde vierpool-vergelijkingen leggen een verband tussen de functies $h_c(0)$ en $Q_c(0)$ aan de éne zijde van een vak en de functies $h_c(1)$ en $Q_c(1)$ aan de andere zijde van het beschouwde vak.

De functies $h_c(0)$, $Q_c(0)$, $h_c(1)$ en $Q_c(1)$ zijn complexe grootheden.

Om dat te onderstrepen zijn deze functies met een index c onderscheiden.

Het is van belang dat de RELATIE tussen de reële grootheden, waarin we geïnteresseerd zijn, en de complexe grootheden, waarmee gerekend wordt, DUIDELIJK vast wordt gelegd.

Deze relatie is een afspraak, die men een maal moet maken en waaraan men zich daarna moet houden.

Als voorbeeld wordt een functie $h(A,t)$ beschouwd, die als volgt kan worden beschreven:

$$(III) \quad h(A,t) = h_0(A) + \hat{h}_1(A) \cos \{ \omega t + \kappa_1(A) \}$$

Bij de Enkelvoudige Harmonische Methode zonder bovenafvoer gaat het alleen om de tweede term van het rechter lid.

De complexe functie, die voor $h(A,t)$ in de berekeningen wordt ingevoerd, kan nu als volgt worden gedefinieerd:

$$h_c(A) = \hat{h}_1(A) \left\{ \cos \kappa_1(A) + i \sin \kappa_1(A) \right\}$$

Stellen we nu $h_c(A) = \textcircled{a} + i \textcircled{b}$ dan is : $\textcircled{a} = \hat{h}_1(A) \cos \kappa_1(A)$ en $\textcircled{b} = \hat{h}_1(A) \sin \kappa_1(A)$

Volgt nu bv. uit een berekening dat de complexe functie $h_c(B) = \textcircled{c} + i \textcircled{d}$, dan kunnen we daaruit de reële functie $h(B,t)$ afleiden. Men is daarbij natuurlijk aan de gemaakte afspraak gebonden.

$$h(B,t) = \hat{h}_1(B) \cos \left\{ \omega t + \kappa_1(B) \right\}$$

Hierin is dan $\hat{h}_1(B) = \sqrt{c^2 + d^2}$ en $\kappa_1(B) = \text{arctg} \frac{d}{c}$.

Opm.: Uit het bovenstaande blijkt direkt de zin van de complexe rekenwijze. Een complexe functie bevat een dubbele informatie: n.l. betreffende de AMPLITUDE en de FASE van de reële functie.

Stel nu dat $h(A,t)$ door (III) is gegeven, waarbij

$$\begin{aligned} h_0(A) &= 0,33 \text{ m} && \text{(het niveau v.d. middenstand t.o.v. een referentie-vlak)} \\ \hat{h}_1(A) &= 0,75 \text{ m} && \text{(de amplitude v.d. sinusvormige variatie)} \\ \kappa_1(A) &= -200^\circ && \left[\text{de fasehoek (voor } t = 0) \right] . \end{aligned}$$

4. Bepaal het reële deel \textcircled{a} en het imaginaire deel \textcircled{b} van de complexe functie $h_c(A)$, die in een berekening zullen worden ingevoerd bij de hierboven gemaakte afspraken.
5. Controleer de gevonden waarden, door uit \textcircled{a} en \textcircled{b} de amplitude $\hat{h}_1(A)$ en de fasehoek $\kappa_1(A)$ weer te bepalen.

6. Veronderstellen we vervolgens dat in het punt B ($s = 1$) de rivier is afgesloten, dan volgt daaruit de randvoorwaarde:

$$Q(B,t) = 0 \text{ voor alle waarden van } t.$$

Wat krijgt men in dat geval voor de vergelijkingen (I) en (II)?

7. Indien men de positieve s - as kiest van B naar A dan geven de vierpoolvergelijkingen in het onder 6. veronderstelde geval ($Q_c(B) = 0$) eenvoudige relaties.

Welke zijn dat?

8. Uit één van de onder 7. bedoelde relaties volgt direkt:

$$h_c(B) = \frac{1}{L_v} h_c(A)$$

Stel dat bij een bepaalde berekening blijkt dat L_v gelijk is aan:

$$L_v = 0,48 + 0,57 i$$

wat wordt dan $h_c(B)$ als voor $h_c(A)$ het onder 4. gevonden complexe getal wordt aangehouden?

9. Bepaal de amplitude en de fase voor het gevonden complexe getal $h_c(B)$.

Na de onder 9 gevonden resultaten lijkt het interessant om voor het relatief korte bekken, dat in de oefening 1 is beschouwd, een waarde voor de grootheid L te bepalen.

We keren in gedeelte 4 B terug naar een probleem, waarvan we reeds veel weten.

4B Een toepassing van de enkelvoudige Harmonische Methode voor het probleem van oefening 1.

Voor alle benodigde gegevens wordt verwezen naar de tekst en de bijlagen van de oefening 1 (eerste en tweede gedeelte).

Door de vakgroep Vloeistofmechanica is een berekening uitgevoerd, die nu eerst vrij uitvoerig zal worden besproken.

Het bekken met een lengte van 12.000 m werd verdeeld in twee vakken. Voor deze twee vakken is de Harmonische Methode toegepast. De daarbij gebruikte grootheden zijn allen vermeld op de bijlage 1 van deze oefening 4. De randvoorwaarde $h(1,t)$ is weergegeven op bijlage 3 van oefening 1.

Deze funktie is periodiek in de tijd.

We moeten deze funktie nu door een enkelvoudige sinusvormige funktie vervangen. Men kan de funktie ontwikkelen in een reeks volgens Fourier. Doet men dit dan vindt men,

als $\omega = \frac{2\pi}{T}$ en $T = 12 \text{ uur } 25 \text{ min.} = 44700 \text{ seconden}$:

$$h(1,t) = h_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t + A_2 \cos 2\omega t + B_2 \sin 2\omega t + \dots$$

De componenten met een hogere frekwentie 3ω , 4ω etc. blijken kleiner dan b.v. 0,04 m te zijn, zodat deze verder buiten beschouwing blijven.

Bij de Enkelvoudige Harmonische Methode wordt alléén de eerste hamonische component in de berekening betrokken. Dit betekent dat de funktie wordt vervangen door:

$$h(1,t) = h_0 + A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t$$

Afgerond blijken h_0 , A_1 en B_1 resp.:

$$\begin{aligned} h_0 &= 0,31 \text{ m,} \\ A_1 &= - 0,75 \text{ m en} \\ B_1 &= - 0,25 \text{ m te zijn.} \end{aligned}$$

De laatste uitdrukking is ook te schrijven als:

(IV) $h(1,t) = h_0 + \hat{h}_1 \cos (\omega t - \kappa_1)$

Hierbij is $\hat{h}_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ en $\kappa_1 = \text{arctg} \frac{B_1}{A_1}$.

We vinden uit de reeksontwikkeling dan ook dat:

$$\hat{h}_1 = 0,79 \text{ m} \quad \text{en} \quad \kappa_1 = 198^\circ$$

10. Zet de nu gevonden funktie (IV) uit tegen de tijd door de periode van 12 uur 25 minuten = 44700 s in 12 gelijke delen te verdelen.

Deze delen worden "maanuren" genoemd. Kies voor de tijdschaal:

$$\begin{aligned} 1 \text{ uur} &= 30 \text{ millimeter (millimeter-papier A3-formaat) dan is} \\ 1 \text{ maanuur} &= 31 \text{ millimeter} \end{aligned}$$

Kies voor de hoogte-schaal $1 \text{ m} = 0,10 \text{ m}$.

Het verdisconteren van de weerstand:

De weerstandsterm in de bewegingsvergelijking kan worden gelineariseerd volgens Lorentz (zie college-dictaat). De term wordt daarbij vervangen door de term:

$$k Q, \text{ waarin } k = \left(\frac{1}{C^2 A^2 R} \right)_{\text{gem}} \frac{8}{3\pi} \hat{Q}$$

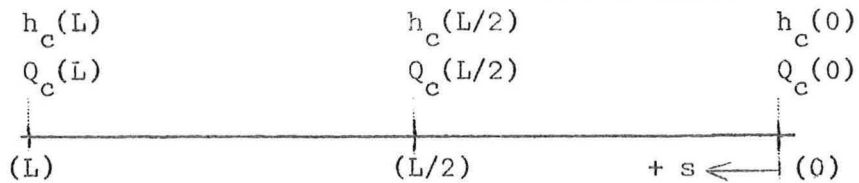
Het gevolg van een en ander is dat men voor de grootheid \hat{Q} een goede schatting moet maken. Dit impliceert het uitvoeren van een ITERATIEPROCES:

Het bekken is verdeeld in twee vakken dat betekent dat voor elk vak een schatting voor \hat{Q} is gemaakt:

- eerst m.b.v. een kombergingsbeschouwing (zie oef. 1 eerste gedeelte)
- daarna door rekening te houden met de uit een eerste berekening verkregen uitkomsten.

De gegevens op de bijlage hebben betrekking op de tweede berekening. Voor dit korte bekken is deze tweede berekening reeds voldoende nauwkeurig, omdat de weerstand een geringe invloed heeft.

Voor elk vak zijn de vakkonstanten berekend. De vierpoolvergelijkingen geven voor de beide vakken 2 maal 2 dus in totaal 4 vergelijkingen.



Als we er rekening mee houden dat uit de splitsingspunt-voorwaarden in dit geval volgt dat voor de beide vakken in het punt (L/2) de functies h_c en Q_c dezelfde zijn, dan zijn er in totaal 6 onbekende functies.

Er zijn dus twee randvoorwaarden nodig.

Gegeven zijn: $h_c(L)$ en $Q_c(0)$

Door het oplossen van 4 vergelijkingen met 4 onbekenden kunnen de overige complexe functies worden bepaald (zie blz. 2 van de bijlage van deze oefening 4).

De resultaten van de uitgevoerde berekeningen, die zijn vermeld op blz. 3 van de bijlage kunnen worden gebruikt bij de volgende opgaven.

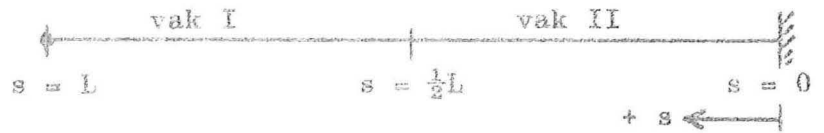
→ Gevraagd wordt het gehele bekken als één vak te beschouwen:

Na de bovenomschreven berekening komen de volgende berekeningen neer op controle-berekeningen, waarbij voor het benaderen van de invloed van de weerstand het debiet in het midden van het beschouwde vak bekend is: $Q(L/2, t)$.

11. Bepaal een waarde voor de faktor k voor het beschouwde vak $s = 0$ tot $s = L$.
12. Bereken waarden voor de grootheden p en q .
13. Bereken de vakkonstanten voor het beschouwde vak.
14. Omdat gegeven is $Q_c(0) = 0$ kan men de verhouding $\frac{h_c(L)}{h_c(0)}$ eenvoudig bepalen. Als gegeven is $h_c(L) = -0,75 + 0,25 i$, bereken dan $h_c(0)$.
15. Wat worden de amplitude en de fase-hoek van de functie $h(0, t)$?
16. Bepaal tevens de amplitude en de fase-hoek van de functie $Q(L, t)$
17. Vergelijk de onder 15 en 16. verkregen resultaten met de resultaten van de oefening 1 (zie de bijlage 7 en 3 van oefening 1).

Uiteraard blijkt ook nu dat er geen grote verschillen zijn tussen de functie $h(0, t)$ en de functie $h(L, t)$. Het fase-verschil tussen de functies $Q(L, t)$ en $h(L, t)$ bedraagt nog ongeveer $\frac{\pi}{2}$ of 90° , omdat het bekken relatief kort is.

Gegevens :



	vak I	vak II
vaklengte	6000 m	6000 m
stroomvoerende breedte	160 m	160 m
bergende breedte	215 m	215 m
coëff. van de Chézy	$50 \text{ m}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$	$50 \text{ m}^{\frac{1}{2}} \text{ s}^{-1}$
geschatte $\hat{Q}_{\text{gem.}}$	$220 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$	$80 \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$
gem. diepte	3,90 m	3,90 m
$r = p + i q$	$(0,2177 + 0,3416i) 10^{-4}$	$(0,0967 + 0,2804i) 10^{-4}$
$rl = pl + i ql$	$0,13061 + 0,20496i$	$0,05801 + 0,16827i$
<u>vakkonstanten</u> :		
L_v	$0,98743 + 0,02666i$	$0,98753 + 0,00972i$
M_v	$(-0,2930 - 0,1397i) 10^{-3}$	$(-0,1068 - 0,1374i) 10^{-3}$
N_v	$1,6200 - 0,1812 \cdot 10^3 i$	$0,5900 - 0,1805 \cdot 10^3 i$
O_v	$0,98743 + 0,02666i$	$0,98753 + 0,00972i$

RANDVOORWAARDEN : $Q(0, t) = 0$ voor alle waarden van t , dus

$$Q_c(0) = 0$$

$$h(L, t) = 0,31 + \hat{h}(L) \cos\{\omega t - K(L)\}, \text{ waarin}$$

$$\omega = 1,405 \cdot 10^{-4} \text{ rad./s, terwijl } \hat{h}(L) = 0,79 \text{ m.}$$

$$\text{en } K(L) = 198^\circ.$$

Voor $h_c(L)$ kan worden ingevoerd :

$$h_c(L) = -0,7500 + 0,2500 i$$

Voor elk vak gelden twee vierpool-vergelijkingen, waarmee vier onbekende functies kunnen worden opgelost. De berekeningen zijn verzameld op de volgende bladzijde van deze bijlage.

Vak II :

$L_v h_c(0) = (0,98753 + 0,00972i) h_c(0)$	
$M_v Q_c(0) = 0$	+
$h_c(\frac{1}{2}L) = (0,98753 + 0,00972i) h_c(0)$	(a)
$N_v h_c(0) = (0,59000 - 0,18049 \cdot 10^3 i) h_c(0)$	
$O_v Q_c(0) = 0$	+
$Q_c(\frac{1}{2}L) = (0,59000 - 0,18049 \cdot 10^3 i) h_c(0)$	(b)

Vak I :

$L_v h_c(\frac{1}{2}L) = (+0,97486 + 0,03593i) h_c(0)$	
$M_v Q_c(\frac{1}{2}L) = (-0,02538 + 0,05279i) h_c(0)$	+
$h_c(L) = (+0,94948 + 0,08872i) h_c(0)$	(c)
$N_v h_c(\frac{1}{2}L) = (0,00336 - 0,17895i) 10^3 h_c(0)$	
$O_v Q_c(\frac{1}{2}L) = (0,00539 - 0,17820i) 10^3 h_c(0)$	+
$Q_c(L) = (0,00875 - 0,35715i) 10^3 h_c(0)$	(d)

Als de tweede randvoorwaarde wordt verdisconteerd :

$$h_c(L) = (-0,7500 + 0,2500 i)$$

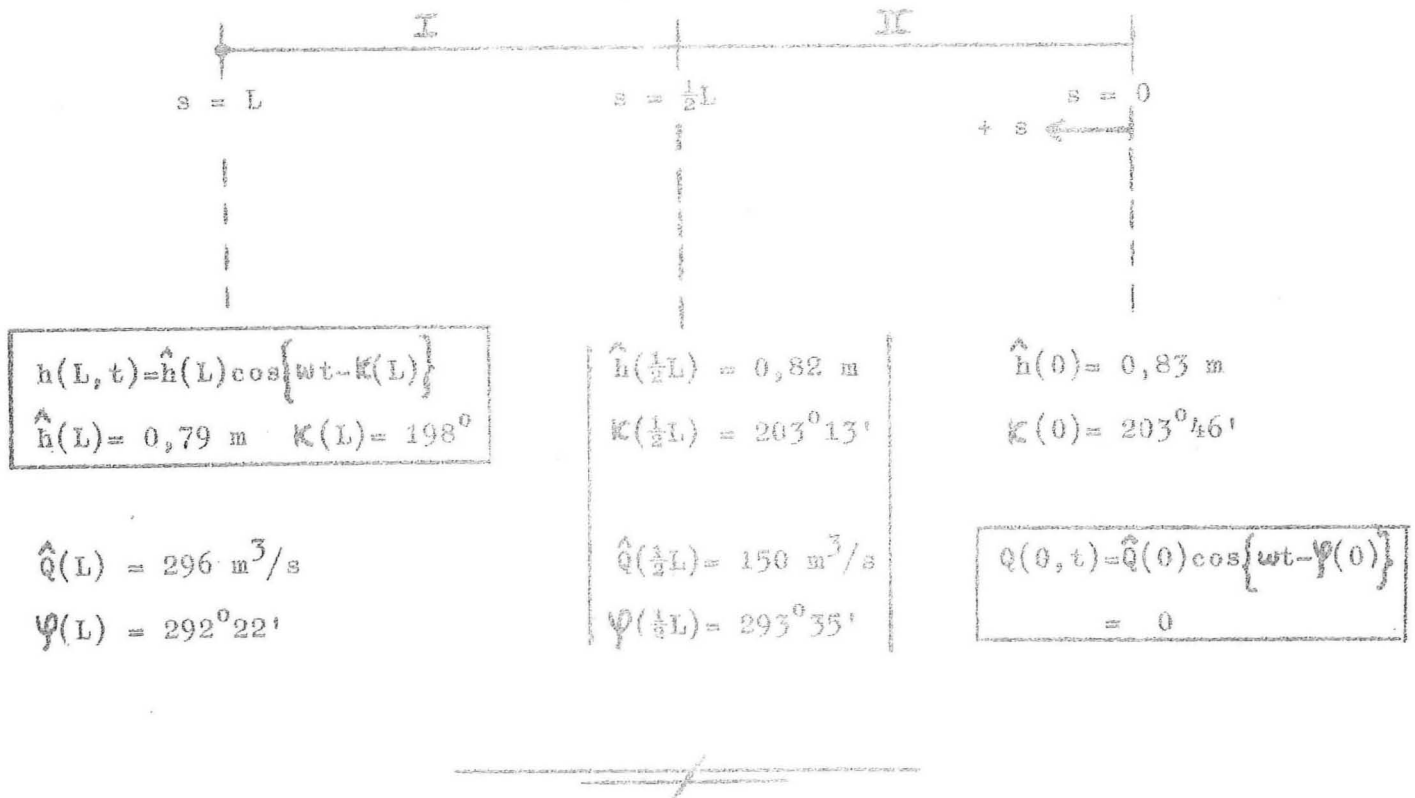
dan volgt uit (c) : $h_c(0) = \frac{-0,7500 + 0,2500i}{0,94948 + 0,08872i} = \underline{\underline{-0,75868 + 0,33419i}}$

Hieruit volgt weer dat $\hat{h}(0) = 0,83 \text{ m}$ en $\hat{\kappa}(0) = 203^\circ 46'$

Daarna volgt uit (a) , (b) en (d) achtereenvolgens :

$h_c(\frac{1}{2}L) = -0,75247 + 0,32265i$	\longrightarrow	$\hat{h}(\frac{1}{2}L) = 0,818 \text{ m}$	$\hat{\kappa}(L) = 203^\circ 13'$
$Q_c(\frac{1}{2}L) = +0,05987 + 0,13713i$	\longrightarrow	$\hat{Q}(\frac{1}{2}L) = 150 \text{ m}^3/\text{s}$	$\hat{\psi}(L) = 293^\circ 35'$
$Q_c(L) = +0,11272 + 0,27388i$	\longrightarrow	$\hat{Q}(L) = 296 \text{ m}^3/\text{s}$	$\hat{\psi}(L) = 292^\circ 22'$

Overzicht resultaten uitgevoerde berekeningen



Bij de opgaven 11. t/m 17. zijn dezelfde randvoorwaarden gegeven en mag het bekken als EEN enkel VAK worden opgevat.



SCHEMA