Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Delft Institute of Applied Mathematics

Kardinaalgetallen en het gedrag van de 2-machtsfunctie

(Engelse titel: Cardinal numbers and the behaviour of the powersetfunction)

Verslag ten behoeve van het
Delft Institute of Applied Mathematics
als onderdeel ter verkrijging

van de graad van

BACHELOR OF SCIENCE
in
TECHNISCHE WISKUNDE

door

Thijs Jacobs

Delft, Nederland
Juni 2015

Kardinaalgetallen en het gedrag van de 2-machtsfunctie

Thijs Jacobs

Begeleider
Dr. K.P. Hart

Overige commissieleden
Dr. E. Coplakova
Dr. C. Kraaikamp
Dr. Ir. M. Keizer

Voorwoord

Deze scriptie is geschreven voor het afronden van de bachelor technische wiskunde aan de Technische Universiteit Delft. In dit voorwoord wil ik een aantal mensen bedanken en wat vertellen hoe ik dit onderdeel van mijn bachelor beleefd heb.

In de eerste twee jaar van mijn studie technische wiskunde voelde ik steeds meer voor de zuivere kant van de wiskunde. Na een minor vol theoretische vakken was ik hier zeker van en ik ben daarom ook blij dat een zuiver wiskundige scriptie ook mogelijk is aan deze technische universiteit. Het heeft geleid tot een introductie in de wondere wereld van de verzamelingenleer. Het was goed en uitdagend dat ik heb kunnen proeven van een meer onderzoeksgerichte vorm van wiskunde bedrijven. Hetgeen mij doet nadenken over het verdere verloop van mijn wiskundige carière.

Ten slotte wil ik mijn gehele commissie en natuurlijk in het bijzonder K.P. Hart bedanken. Ik wil Klaas Pieter bedanken voor het feit dat hij uiterst behulpzaam is, de deur stond letterlijk en figuurlijk altijd open. Ik heb kunnen genieten van veel wiskunde die van toepassing was op zowel de scriptie als daarbuiten. Verder wil ik hem nog bedanken voor alle verbeterpunten voor de scriptie op voornamelijk wiskundig maar ook taalkundig gebied.

Het rest mij nog u veel leesplezier toe te wensen.

Samenvatting

Deze scriptie valt binnen de verzamelingenleer en zal hiervan theorieën behandelen die uiteindelijk zullen resulteren in de stelling van Silver. In het eerste hoofdstuk wordt de theorie van de ordinaalgetallen behandeld. We zullen zien wat deze zijn en wat voorbeelden bekijken. De meest belangrijke eigenschappen van ordinaalgetallen komen aan bod.

In hoofdstuk twee worden kardinaalgetallen geïntroduceerd. Ook hierbij behandelen we eerst de definitie en een aantal voorbeelden. We zullen zien hoe je rekenkunde kan bedrijven met deze kardinaalgetallen. Ten slotte catagoriseren we de kardinaalgetallen in regulier en singulier en zullen we een aantal stellingen over kardinalen beschouwen.

In het derde hoofdstuk zal uiteindelijk de stelling van Silver bewezen worden. Hiervoor zal echter eerst wat theorie over ω_1 behandeld worden. Hierbij definiëren we zowel gesloten en onbegrensde- als stationaire deelverzamelingen van ω_1. Na een aantal stellingen over deze deelverzamelingen wordt het bewijs van Silver gestipuleerd en bewezen. We zullen afsluiten met twee generalisaties van de stelling.

Inhoudsopgave

HOOFDSTUK 1

Ordinaalgetallen

1. Introductie

Aan het einde van de 19e eeuw ontstond de verzamelingenleer door de werken van George Cantor. Hij was de eerste die zich bezig hield met verzamelingen en was daarbij veel bezig met ordeningen van verzamelingen en grootte van verzamelingen. Zo introduceerde hij bijvoorbeeld het begrip 'Machtigheid' om iets te zeggen over het aantal elementen van een verzameling. Hij gebruikte de volgende definitie:

Definitie 1.1. *We noemen twee verzamelingen M en N* van gelijke grootte*, genoteerd met $|M| = |N|$, wanneer er een bijectie $f : M \to N$ bestaat. Wanneer er een injectie van M naar N bestaat noemen we N groter of gelijk aan M, genoteerd met $|M| \preccurlyeq |N|$*

Cantor kwam aan de hand van deze definitie met twee belangrijke stellingen. Ten eerste vond hij, en later Bernstein met een constructief bewijs, dat voor verzamelingen M en N waarvoor geldt dat $|M| \preccurlyeq |N|$ en $|N| \preccurlyeq |M|$ volgt dat $|M| = |N|$. Hiermee konden niet-triviale bijecties eenvoudig gevonden worden. Daarnaast vond hij een stelling het aantal elementen van de machtsverzameling. De machtsverzameling van X is de verzameling van alle deelverzamelingen van X en deze noteren we met $\mathcal{P}(X)$. Hij ontdekte dat $|X| \preccurlyeq |\mathcal{P}(X)|$ maar ook dat $|X| \neq |\mathcal{P}(X)|$. Deze twee eigenschappe samen schrijven we als $|X| \prec |\mathcal{P}(X)|$ en zal later in deze scriptie bewezen worden in stelling 2.3. In woorden: de machtsverzameling van X is strict groter dan X zelf. Dit resultaat levert meteen een paradox op. Noteer met A de verzameling van alle verzamelingen, dan vinden we dat $\mathcal{P}(A)$ een nog grotere verzameling is. We zullen later zien hoe we deze paradox oplossen.

Een bekende toepassing van deze stelling heeft betrekking op de natuurlijke getallen. De machtsverzameling van $\mathbb{N}$ is namelijk bijectief met $\mathbb{R}$. Cantor kon dus concluderen dat $|\mathbb{N}| \prec |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$.

Naast deze twee stellingen introduceerde Cantor ook Alephgetallen voor het aantal elementen van verzamelingen. Hij noteerde $|\mathbb{N}| = \aleph_0$. De gelijkheid $|X| = \aleph_0$ drukt dus uit dat X een aftelbaar oneindig is. Voor de kleinste oneindige verzamelingen die niet aftelbaar zijn, noteerde hij $\aleph_1$. Dit ging zo door met $\aleph_2, \aleph_3, \ldots$

Cantor vroeg zich af bij welk Alephgetal de verzameling van reële getallen hoorde. Hij vermoedde dat oneindige deelverzamelingen van $\mathbb{R}$ van gelijke grootte waren met $\mathbb{N}$ of $\mathbb{R}$ zelf. Dit komt overeen met de uitspraak:

$$|\mathbb{R}| = \aleph_1$$

Hij heeft echter niet een bewijs kunnen vinden voor deze uitspraak. Vele jaren later bleek echter dat deze uitspraak ook niet te bewijzen is. Het staat tegenwoordig bekend als de Continuüm Hypothese. In dit bachelorproject gaan we dieper in op de vraag hoe de functie $|X| \to |\mathcal{P}(X)|$ zich gedraagd.

1.1. Axiomatische verzamelingenleer. We gaan er in dit stuk vanuit dat de lezer bekend is met **ZF** en het *keuzeaxioma*. Hiermee is de paradox van de introductie meteen opgelost. We kunnen namelijk bewijzen dat de verzameling van alle verzamelingen helemaal niet bestaat. Degene die hier meer over willen weten kunnen [**3**] lezen. We nemen vanaf nu het keuzeaxioma aan en zullen dit waar nodig gebruiken. Het keuzeaxioma is equivalent met de welordeningsstelling. Voor we kunnen begrijpen wat die stelling inhoud hebben we eerst de defintie van een welordening nodig.

DEFINITIE 1.2. *Een relatie* $<$ *op een verzameling* X *heet een* lineaire ordening *van* X *als:*

- ***irreflexief:*** $\neg(x < x)$ *voor alle* $x \in X$
- ***transitief:*** $x < y$ *en* $y < z$ *dan* $x < z$ *voor alle* $x, y, z \in X$
- ***trichotomie:*** $(x < y) \vee (x = y) \vee (y < x)$ *voor alle* $x, y \in X$

DEFINITIE 1.3. *Een lineair geordende verzameling* $(X, <)$ *heet* welgeordend *als voor elke niet lege deelverzameling van* X *een* $<$*-minimaal element bestaat.*

Het is snel in te zien dat de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$ met hun gebruikelijke ordening een welgeordende verzameling vormen Welgeordende verzamelingen hebben interessante eigenschappen. De methode van volledige inductie op $\mathbb{N}$ kan worden veralgemeniseerd:

STELLING 1.1 (Inductieprincipe). *Laat* $(X, <)$ *een welgeordende verzameling zijn. Stel dat* $A \subseteq X$ *zo is dat voor alle* $x \in X$ *geldt: als voor alle* $y \in X$ *met* $y < x$ *geldt* $y \in A$*, dan ook* $x \in A$*. Dan geldt* $A = X$

BEWIJS. Stel dat $A \neq X$. Neem $x = \min X \setminus A$, wegens minimaliteit volgt dat voor alle $y < x$ geldt dat $y \in A$. Maar dan moet ook $x \in A$. Maar dit is een tegenspraak met de definitie van x. $\square$

De welordeningsstelling stelt dat elke verzameling te welordenen is. Zo zegt de welordeningstelling ook dat bijvoorbeeld de reële getallen te welordenen zijn. Je komt er snel achter dat dit niet de gebruikelijke ordening kan zijn. Omdat we het keuzeaxioma als waar veronderstellen en deze equivalent[1] is met de welordeningsstelling weten we dat elke verzameling te welordenen is. Dit helpt ons later bij het verder ontwikkelen van theorieën over de grootte van verzamelingen.

2. Definitie en voorbeelden

Er zijn natuurlijk ontzettend veel verzamelingen en daarmee ontzettend veel welordeningen. Een logische stap is dus om deze te gaan vergelijken. We noemen twee lineair geordende verzamelingen *isomorf* wanneer er een ordebewarende bijectie bestaat. Zo zijn $(\mathbb{R}, <)$ en $\big((-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), <\big)$ isomorf wegens hun gebruikelijke bijectie met behulp van de arctangens. Nu we weten hoe we welgeordende verzamelingen kunnen vergelijken zouden we graag een soort standaard welgeordende verzameling willen definieren. We doen dit met behulp van de volgende twee definities.

DEFINITIE 1.4. *Een verzameling* X *noemen we* transitief *als voor alle* $x \in X$ *geldt dat* $x \subset X$*.*

DEFINITIE 1.5. *Een* ordinaalgetal *is een transitieve verzameling die welgeordend is door* $\in$*.*

Ordinaalgetallen noteren we met griekse letters, vaak α, β of γ. Het triviale voorbeeld van een ordinaalgetal is $\emptyset$. Met behulp van het volgende lemma zien we dat er dan meteen oneindig veel moeten zijn.

LEMMA 1.1. *Als* α *een ordinaalgetal is, dan is* $\alpha \cup \{\alpha\}$ *dat ook.*

BEWIJS. Laat $x \in \alpha \cup \{\alpha\}$. Dan geldt dat $x = \alpha$ of $x \in \alpha$. In het eerste geval geldt $x \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$. In het tweede geval geldt wegens transitiviteit van α dat $x \subset \alpha$ en dus volgt $x \subset \alpha \cup \{\alpha\}$. We concluderen dat $\alpha \cup \{\alpha\}$ transitief is. Dat $\alpha \cup \{\alpha\}$ lineair geordend is door $\in$ volgt vrij snel uit het feit dat α lineair geordend en transitief is. Om te laten zien dat $\alpha \cup \{\alpha\}$ welgeordend is nemen we $A \subseteq \alpha \cup \{\alpha\}$. Als $A = \{\alpha\}$ dan is α het minimale element in A en anders bevat A elementen van α en kunnen we daarin een minimaal element vinden omdat α welgeordend is. $\square$

Met dit lemma kunnen we een rij ordinaalgetallen maken: $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\big\{\emptyset, \{\emptyset\}\big\}, \ldots$. We kunnen deze ordinalen met getallen identificeren: $0 = \emptyset, 1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, \ldots$ waarbij geldt dat $\alpha + 1 = \alpha \cup \{\alpha\}$. We noemen zulke ordinaalgetallen opvolgers, omdat er steeds een β bestaat zo dat $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. Een

[1] Voor een bewijs voor deze equivalentie verwijs ik naar [**6**]

ordinaalgetal waarvoor dit niet geldt heet een limietgetal. Een voorbeeld daarvan is het ordinaalgetal ω bestaande uit al de zojuist genoemde eindige ordinaalgetallen. Maar ook ω heeft weer een opvolger: $\omega + 1$. Wat weer aanleiding geeft tot het volgende limitegetal: $\omega + \omega = \omega \cdot 2$ als limiet van $\omega+1, \omega+2, \omega+3, \ldots$. Daarna vinden we $\omega \cdot 3 \ldots \omega \cdot \omega \ldots \omega^{\omega}$, en zo gaat het door *ad infinitum.* Het eerste overaftelbare ordinaalgetal noteren we met ω_1. Het ordinaalgetal ω_1 bevat dus alle aftelbare ordinaalgetallen. We zullen op pagina 13 het bestaan van ω_1 bewijzen.

3. Eigenschappen

Ordinaalgetallen hebben veel bijzondere eigenschappen.

LEMMA 1.2. *i Als $\alpha \in \beta$ en $\beta \in \gamma$ dan $\alpha \in \gamma$*
ii Als $\alpha \neq \beta$ en $\alpha \subset \beta$ dan $\alpha \in \beta$
iii Voor ordinaalgetallen α en β geldt dat $\alpha \in \beta$, $\alpha = \beta$ of $\beta \in \alpha$.
iv Laat X een verzameling ordinaalgetallen dan is $\sup X = \bigcup X$

BEWIJS. i γ is een transitieve verzameling en dus $\beta \subset \gamma$. Dan volgt uit $\alpha \in \beta$ dat $\alpha \in \gamma$.
ii Neem $\gamma = \min \beta \backslash \alpha$. Dan volgt dat $\forall \delta \in \alpha$ dat $\delta \in \gamma$ per definitie van γ en dus $\alpha \subseteq \gamma$. Stel $\alpha \neq \gamma$ dan $\alpha \in \gamma$. Maar dit is in tegenspraak met de definitie van γ. Het volgt dat $\alpha = \gamma$ en dus $\alpha \in \beta$.
iii Stel $\alpha \neq \beta$. Definiëer $\gamma = \alpha \cap \beta$. Dat γ een ordinaalgetal is volgt eenvoudig uit het feit dat α en β dat zijn. Stel $\gamma \neq \alpha$ en $\gamma \neq \beta$. Dan volgt uit *ii* dat $\gamma \in \alpha$ en $\gamma \in \beta$ en dus $\gamma \in \gamma$. Maar dit is een tegenspraak want $\in$ is irreflexief. Dus $\gamma = \alpha$ of $\gamma = \beta$. Maar dan $\gamma \subset \beta$ of $\gamma \subset \alpha$ en dus $\alpha \in \beta$ of $\beta \in \alpha$.
iv Noem $S = \bigcup X$ en we laten eerst zien dat S een ordinaalgetal is. Neem $x \in S$. Dan volgt dat $x \in y$ voor een zekere $y \in X$. Omdat elementen van X ordinaalgetallen zijn volgt dat $x \subset y$ en daarmee $x \subset S$. We concluderen dat S transitief is. Omdat X een verzameling ordinaalgetallen is volgt met *i* en *iii* dat X lineair geordend is door $\in$. Om te laten zien dat S welgeordend is nemen we een $A \subset S$. Voor $x \in A$ bestaat er een $\alpha \in X$ zodat $x \in \alpha$. Nu is $y := \min\{a \in A | a \in \alpha\}$ het gezochte minimum van A. Het rest nog te laten zien dat S de kleinste bovengrens is van X. Voor alle $x \in X$ geldt dat $x \subseteq S$ en omdat S transitief is geldt $x \in S$. Nu volgt dat S een bovengrens is. Stel nu dat het ordinaalgetal T ook een bovengrens is voor X. Dan geldt voor elke $x \in X$ dat $x \subseteq T$. Maar dan $S = \bigcup X \subseteq T$ en dus volgt met *ii* dat $S = T$ of $S \in T$. □

Voor meer theorie over ordinaalgetallen verwijs ik naar [**4**].

We kunnen nu de klasse van alle ordinaalgetallen definieren.

$$\mathbf{ON} = \{\alpha \mid \alpha \text{ is een ordinaalgetal}\}$$

We zeggen dat $\alpha < \beta$ dan en slechts dan als $\alpha \in \beta$. Met het lemma zien we dat **ON** lineair geordend is.

De volgende stelling maakt dat ordinaalgetallen zo handig zijn, ze zijn namelijk een kanonieke representant van elke welgeordende verzameling.

STELLING 1.2. *Elk welgeordende verzameling X is isomorf met precies één ordinaalgetal.*

Ook dit bewijs is terug te vinden in [**4**], bladzijde 20.

We kunnen nu ondubbelzinnig over het ordetype van een welorde praten, hiermee bedoelen we het unieke isomorfe ordinaalgetal.

Bij het onderzoeken van de functie $|X| \to |\mathcal{P}(X)|$ uit de inleiding zullen we eerst op een zinvolle manier een afbeelding $X \longmapsto |X|$ moeten vinden waarbij even grote verzamelingen hetzelfde beeld hebben. We zien nu dat voor welgeordende verzamelingen er een kanonieke afbeelding is die de verzameling op zijn isomorfe ordinaalgetal afbeeldt. In de volgende sectie zien we hoe we deze afbeelding gaan gebruiken om een afbeelding $X \longmapsto |X|$ te vinden.

HOOFDSTUK 2

kardinaalgetallen

1. Definitie en voorbeelden

Wanneer we het idee van de machtigheid willen formaliseren gebruiken we kardinaalgetallen. De theorie van de ordinaalgetallen komt goed van pas bij het definieren van kardinaalgetallen. Met behulp van stelling 1.2 heeft de volgende definitie zin voor welgeordende verzamelingen. Omdat we het keuzeaxioma hebben aangenomen is elke verzameling te welordenen. Vanaf nu wordt de notatie van de dubbele streep enkel nog gebruikt zoals deze in de volgende definitie staat.

Definitie 2.1. *Voor een verzameling A is $|A|$ het kleinste ordinaalgetal α waarvoor geldt dat er een bijectie tussen A en α bestaat.*

Voor elke ordinaalgetal α geldt dat $|\alpha| \leq \alpha$.

Definitie 2.2. *Een ordinaalgetal α is een kardinaalgetal als $\alpha = |\alpha|$.*

ω en elke $n \in \omega$ zijn voorbeelden van kardinaalgetallen. Uit de volgende stelling bljkt dat er echter ook veel ordinaalgetallen bestaan die niet een kardinaalgetal zijn.

Stelling 2.1. *Elk oneindig kardinaalgetal is een limietgetal.*

Bewijs. Stel dat α een opvolger is. Dan bestaat er dus een β zo dat $\alpha = \beta \cup \{\beta\}$. De volgende functie geeft een bijectie van α naar β aan.

$$f(\gamma) = \begin{cases} 0 & \text{als } \gamma = \beta \\ \gamma + 1 & \text{als } \gamma = n \in \omega \\ \gamma & \text{anders} \end{cases}$$

α is dus geen kardinaalgetal. □

Voor oneindige kardinaalgetallen gebruiken we vaak de griekse letters κ, λ en μ. Merk op dat stelling 2.1 maar een kant op werkt. Er zijn bijvoorbeeld genoeg aftelbaar oneindige limietordinalen ongelijk aan ω. Denk hierbij aan $\omega + \omega, \omega^2, \omega^\omega \ldots$

1.1. Hartogs Aleph functie. We weten dat ω het kleinste oneindige kardinaalgetal is. Een hele natuurlijke vraag die je jezelf kan afvragen is of er altijd een groter kardinaalgetal is. Om op deze vraag te beantwoorden bekijken we de Hartogs Aleph functie. Voor een verzameling X definieren we:

$\aleph(X)$ is het kleinste ordinaalgetal α zodat er geen injectieve functie bestaat van α naar X

Het bestaan van dit ordinaalgetal kan men teruglezen in [**3**] op bladzijde 42. Dat $\aleph(X)$ een kardinaalgetal is is snel duidelijk. Als dit niet zo is dan bestaat er een bijectie met een kleiner ordinaalgetal. Maar deze moet dan injectief af te beelden zijn in X per definitie van $\aleph(X)$. Maar nu vinden we via dit kleiner ordinaalgetal alsnog een injectie van $\aleph(X)$ in X. Dit is een tegenspraak. Met deze functie geldt voor elk ordinaalgetal α dat $|\alpha| < \aleph(\alpha)$ en dat $\aleph(\alpha)$ het kleinste kardinaalgetal groter dan α is. Dit gegeven impliceert direct dat er willekeurig grote kardinaalgetallen bestaan.

Deze functie geeft ons ook een handvat om alle oneindige kardinaalgetallen te kunnen definieren. Voor $\alpha \in \mathbf{ON}$ definieren we:

- $\omega_0 = \omega$
- $\omega_{\alpha+1} = \aleph(\omega_\alpha)$
- $\omega_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \omega_\beta$ voor limietgetal α

Voor elke α schrijven we ook wel $\aleph_\alpha = \omega_\alpha$. Wanneer we het over kardinaalgetallen hebben gebruiken we de $\aleph$ notatie. Wanneer we de ordinaaleigenschap van een kardinaalgetal willen benadrukken gebruiken we juist ω_α. Deze Aleph functie rechtvaardigt ook het bestaan van ω_1 zoals deze vlak voor lemma 1.2 genoemd is.

2. Kardinaalrekenkunde

Het optellen en vermenigvuldigen van kardinaalgetallen kunnen we als volgt definieren.

$$\kappa + \lambda = |\kappa \times \{0\} \cup \lambda \times \{1\}|$$

$$\kappa \cdot \lambda = |\kappa \times \lambda|$$

Het is eenvoudig bijecties op te stellen om aan te tonen dat de optelling en vermenigvuldiging van kardinaalgetallen associatief en commutatief zijn. Vermenigvuldigen van kardinaalgetallen heeft de volgende bijzondere eigenschap

Stelling 2.2. *Voor een oneindig kardinaalgetal κ geldt $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.*

Bewijs. Stel dat dit niet zo is. Noem κ het kleinste oneindige kardinaalgetal waarvoor dit niet zo is. Omdat sowieso geldt dat $\kappa \leq \kappa \cdot \kappa$ moet gelden dat $\kappa < \kappa \cdot \kappa$. We leggen de volgende ordening op $\kappa \times \kappa$. $\langle \alpha, \beta \rangle \lhd \langle \gamma, \delta \rangle$ dan en slechts dan als

- $\max\{\alpha, \beta\} < \max\{\gamma, \delta\}$
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$ en $\beta < \delta$
- $\max\{\alpha, \beta\} = \max\{\gamma, \delta\}$ en $\beta = \delta$ en $\alpha < \gamma$.

We laten eerst zien dat deze ordening $\kappa \times \kappa$ welordent. Laat $A \subseteq \kappa \times \kappa$ en maak hiermee de verzameling $B = \{\max\{\alpha, \beta\} \mid \langle \alpha, \beta \rangle \in A\}$. Omdat $B \subseteq \kappa$ kunnen we een minimaal element ε vinden in B. Noem $C = \{\langle \alpha, \beta \rangle \in A \mid \max\{\alpha, \beta\} = \varepsilon\}$. Wanneer C precies één element bevat hebben we ons minimum gevonden. Wanneer dit niet zo is kunnen we onze elementen in C alsnog welordenen met behulp van de laatste twee regels van de ordening van $\kappa \times \kappa$ en de welordening van κ zelf. Omdat $\kappa < \kappa \cdot \kappa$ moet er een paar $\langle \beta, \gamma \rangle$ met $\beta, \gamma \in \kappa$ zijn zo dat het ordetype van $\{\langle \delta, \epsilon \rangle \mid \langle \delta, \epsilon \rangle \lhd \langle \beta, \gamma \rangle\}$ gelijk is aan κ. Kies nu $\lambda = \max\{\beta, \gamma\} + 1$. Omdat κ een limietordinaal is en $\beta, \gamma \in \kappa$ geldt dat $\lambda < \kappa$. Als λ eindig is $|\lambda \times \lambda|$ dat ook. Als λ oneindig is geldt dat $|\lambda \times \lambda| = |\lambda|$ wegens minimaliteit van κ. In beide gevallen geldt $|\lambda \times \lambda| < \kappa$. Maar ook $\kappa = |\{\langle \delta, \epsilon \rangle \mid \langle \delta, \epsilon \rangle \lhd \langle \beta, \gamma \rangle\}| \leq |\lambda \times \lambda|$. Dit is een tegenspraak. □

Gevolg 2.1. *Voor oneindige kardinaalgetallen κ en λ geldt $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$.*

Bewijs. Zonder verlies van algemeenheid geldt dat $\lambda \leq \kappa$ en dan hebben we:
$\kappa \leq \kappa + \lambda \leq \kappa \cdot \lambda \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa$. □

2.1. Machtsverheffen. Naast het optellen en vermenigvuldigen is machtsverheffen een belangrijke operatie tussen kardinaalgetallen.

Definitie 2.3. *Voor kardinaalgetallen κ en λ definieren we κ^λ als de kardinaliteit van alle functies van λ naar κ.*

De kardinaliteit van de machtsverzameling $\mathcal{P}(\kappa)$ is gelijk aan 2^κ. De volgende functie geeft immers een bijectie van $\mathcal{P}(\kappa)$ naar 2^κ aan[1]:

$$f : A \longmapsto \chi_A$$

De functie $|X| \longmapsto |\mathcal{P}(X)|$ uit de introductie kunnen we nu herformuleren tot $\kappa \longmapsto 2^\kappa$. Bij het onderzoeken van deze functie is het eerste wat we moeten opmerken dat $\kappa < 2^\kappa$. Dit komt van de volgende stelling die ook al in de inleiding is genoemd:

STELLING 2.3 (Cantor). *Voor elke verzameling X geldt dat $X \prec \mathcal{P}(X)$*

BEWIJS. Een injectieve afbeelding $f : X \to \mathcal{P}(X)$ wordt gegeven door $x \longmapsto \{x\}$. Voor degene die het diagonaalargument van Cantor kennen weten dat dit argument bewijst dat er geen surjectieve functie van X naar $\mathcal{P}(X)$ bestaat. Voor degene die deze niet kennen geef ik een ander kort bewijs. Stel dat $f : X \to \mathcal{P}(X)$ gegeven is. De verzameling $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\}$ is een element van $\mathcal{P}(X)$ maar zit niet in het beeld van f. Want als $z \in X$ wordt afgebeeld op A dan geldt dat $z \in A$ dan en slechts dan als $z \notin A$. □

We kunnen nu ook de Continuüm Hypothese(CH) herformuleren tot de uitspraak: $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Gödel liet in 1940 zien dat **ZFC**+CH consistent is en dus dat er geen tegenvoorbeeld voor CH gevonden kan worden in **ZFC**. Cohen liet in 1963 dat CH ook niet te bewijzen is vanuit **ZFC**. We zeggen dan dat CH onafhankelijk is van **ZFC**. De uitspraak van de Continuüm Cypothese kan op een voor de hand liggende manier gegeneraliseerd worden: $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ voor elk ordinaalgetal α. Ook deze Gegeneraliseerde Continuüm Hypothese(GCH) is onafhankelijk van **ZFC**.

Het volgende lemma vertelt ons over rekenregels van het machtsverheffen van kardinaalgetallen.

LEMMA 2.1. *i* $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$
ii Als $\kappa \leq \lambda$ dan geldt $\kappa^\mu \leq \lambda^\mu$.
iii Als $\lambda \leq \mu$ dan geldt $\kappa^\lambda \leq \kappa^\mu$.
iv Voor κ geldt $\kappa^\kappa = 2^\kappa$.

BEWIJS. Voor de eerste drie opmerkingen kunnen met behulp van de definities eenvoudig bijecties of injecties gevonden worden. Preciese uitwerking wordt voor de lezer als opgave open gelaten. *iv* volgt uit $\kappa^\kappa \leq (2^\kappa)^\kappa = 2^{\kappa\cdot\kappa} = 2^\kappa \leq \kappa^\kappa$. □

Later in deze scriptie zullen we zien dat een stricte versie van *iii*, $\kappa < \lambda$ impliceert $2^\kappa < 2^\lambda$, niet geldt. Het is echter wel goed op te merken dat GCH deze wel impliceert. Wanneer $\aleph_\alpha < \aleph_\beta$ geldt immers dat $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} \leq \aleph_\beta < \aleph_{\beta+1} = 2^{\aleph_\beta}$.

3. Stelling van Kőnig

We willen graag de som en het product van kardinaalgetallen veralgemeniseren. In de eerstvolgende definitie noteren we rechts het geïndexeerde cartesisch product en links de definitie van het product van kardinaalgetallen.

DEFINITIE 2.4.

$$\prod_{i\in I} \kappa_i := \left|\prod_{i\in I} \kappa_i\right|$$

$$\sum_{i\in I} \kappa_i := \left|\bigcup_{i\in I} (\kappa_i \times \{i\})\right|$$

[1] χ_A is een functie van A naar $\{0, 1\}$ waarbij $\chi_A(a) = 1$ als $a \in A$ en $\chi_A(a) = 0$ als $a \notin A$

Met deze definities in het achterhoofd kunnen we een belangrijke stelling begrijpen. Deze stelling is sterk in zijn eenvoud en in zijn eenzaamheid in het vinden van stricte ongelijkheden tussen kardinaalgetallen.

STELLING 2.4 (Kőnig). *Laat I een indexverzameling zijn en $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ en $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ kardinaalgetallen zodat $\kappa_i < \lambda_i$ voor alle $i \in I$. Dan*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i$$

We zullen eerst het bewijs zien en daarna twee toepassingen van de stelling behandelen.

BEWIJS. We laten eerst zien dat er een injectie is van $\sum_{i\in I} \kappa_i$ naar $\prod_{i\in I} \lambda_i$ en bewijzen daarna dat er geen bijectie kan zijn. Omdat $\kappa_i < \lambda_i$ en deze allebei kardinaalgetallen zijn geldt dat $\kappa_i \subset \lambda_i$. We definieren nu een injectieve functie f van $\bigcup_{i\in I}(\kappa_i \times \{i\})$ naar $\prod_{i\in I} \lambda_i$ met $\alpha \in \kappa_i$ en $\alpha > 0$ door

$$f : \begin{cases} \langle \alpha, i\rangle \mapsto \langle 0, 0 \dots 0, \alpha, 0 \dots 0\rangle & \text{met } \alpha \text{ op de i-de plaats} \\ \langle 0, i\rangle \mapsto \langle 1, 1 \dots 1, 0, 1 \dots 1\rangle & \text{met } 0 \text{ op de i-de plaats} \end{cases}$$

We laten nu zien dat er geen surjectie van $\sum_{i\in I} \kappa_i$ naar $\prod_{i\in I} \lambda_i$ bestaat. Laat g nu een willekeurige functie van $\sum_{i\in I} \kappa_i$ naar $\prod_{i\in I} \lambda_i$ is. Wegens $\kappa_i < \lambda_i$ zal de functie samenstelling van de projectie op λ_i en $g \restriction_{\kappa_i \times \{i\}}$ niet surjectief zijn. We kunnen dus in elke λ_i een l_i vinden die niet in $\{\pi_i(g(\alpha, i)) \mid \alpha < \kappa_i\}$ zit. Maar dan ligt $\prod_{i\in I} l_i \in \prod_{i\in I} \lambda_i$ niet in het beeld van g. En dus is g niet surjectief. $\square$

Deze stelling heeft natuurlijk oneindig veel toepassingen. Hier zijn twee opvallende:
Laat I weer staan voor een indexverzameling van willekeurige grootte. Neem $\kappa_i = 1$ en $\lambda_i = 2$ voor alle $i \in I$. Dan $I = \sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i = 2^I$. We zien dus dat de stelling van Kőnig stelling 2.3 van Cantor impliceert.

Stel dat $2^{\aleph_0} = \aleph_\omega$. Kies nu $I = \omega$ en voor elke $i \in \omega$ dat $\kappa_i = \aleph_i$ en $\lambda_i = \aleph_\omega$. Dan $\sum_{i\in I} \kappa_i = \bigcup_{i\in\omega} \aleph_i = \aleph_\omega$ en $\prod_{i\in I} \lambda_i = (\aleph_\omega)^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. En dus volgt dat $\aleph_\omega < 2^{\aleph_0}$. Maar dit is een tegenspraak met onze aanname. We concluderen dat $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\omega$. Met hetzelfde argument zien we dat voor elk ordinaalgetal α die een aftelbaar limiet is van kleinere ordinalen geldt $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha$.

4. Reguliere en singuliere kardinaalgetallen

We hebben eerder al gezien dat alle oneindige kardinaalgetallen limietgetallen zijn. We zien bijvoorbeeld dat $\aleph_\omega = \lim_{\alpha<\aleph_\omega} \alpha = \bigcup_{\alpha<\aleph_\omega} \alpha$. Maar $\aleph_\omega$ kan als limiet ook benaderd worden door een aftelbare rij van de elementen van $\aleph_\omega$. Er geldt namelijk ook dat $\aleph_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \aleph_n$. Om deze eigenschap te kunnen benoemen gebruiken we de volgende definitie:

DEFINITIE 2.5. *Voor een oneindig kardinaalgetal κ definieren we de* cofinaliteit *als:*

$$\operatorname{cf} \kappa = \text{het kleinste ordinaalgetal } \beta \text{ zo dat er een rij } \langle \alpha_\epsilon \mid \epsilon < \beta\rangle \text{ bestaat met } \bigcup_{\epsilon<\beta} \alpha_\epsilon = \kappa$$

We merken op dat geldt dat $\operatorname{cf} \aleph_\omega \leq \omega$. We weten bovendien dat $\aleph_\omega$ een limietordinaal is en dus moet de gelijkheid $\operatorname{cf} \aleph_\omega = \omega$ gelden. Een eindige vereniging van eindige verzameling is weer eindig en dus is de cofinaliteit van $\aleph_0$ gelijk aan $\aleph_0$. Net zo geldt, met behulp van het keuzeaxioma, dat de aftelbare vereniging van aftelbare verzameling weer aftelbaar is en dus hebben we de gelijkheid $\operatorname{cf} \aleph_1 = \aleph_1$.

Wegens vergelijkbare definities van sommen en verenigingen worden deze notaties door elkaar gebruikt. Er geldt voor elke κ dat $\kappa = \bigcup_{i\in\kappa} i$ en dus $\operatorname{cf} \kappa \leq \kappa$. We catogoriseren kardinaalgetallen nu in twee soorten:

DEFINITIE 2.6. *Een kardinaalgetal κ noemen we* regulier *wanneer* $\operatorname{cf}\kappa = \kappa$. *Een kardinaalgetal dat niet regulier is noemen we* singulier.

$\aleph_\omega$ is dus een voorbeeld van een singulier kardinaalgetal. Een ander voorbeeld is $\aleph_{\omega+\omega}$. Voorbeelden van reguliere kardinaalgetallen zijn $\aleph_\alpha$ waarbij α een opvolger is.
Met deze nieuwe definitie levert Kőnig nog een noemenswaardige ongelijkheid op.

GEVOLG 2.2. *Voor alle $\lambda \geq \operatorname{cf}\kappa$ geldt $\kappa < \kappa^\lambda$.*

BEWIJS. Het voldoet te bewijzen dat $\kappa < \kappa^{\operatorname{cf}\kappa}$. Schrijf $\kappa = \sum_{i<\operatorname{cf}\kappa} \kappa_i$ met $\kappa_i < \kappa$. Dan

$$\kappa = \sum_{i<\operatorname{cf}\kappa} \kappa_i < \prod_{i<\operatorname{cf}\kappa} \kappa = \kappa^{\operatorname{cf}\kappa}$$

□

4.1. Bukovsky-Hechler. Bukovsky en Hechler kwamen in 1965 met een resultaat over de 2-machtsfunctie. We hebben hiervoor eerst nieuwe notatie en een lemma nodig. We noteren

$$2^{<\kappa} = \sup\{2^\lambda \mid \lambda \text{ een kardinaalgetal zodat } \lambda < \kappa\}$$

We hebben nu het volgende lemma:

LEMMA 2.2. *Voor een kardinaalgetal κ geldt $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\operatorname{cf}\kappa}$*

BEWIJS. Met de definitie van cofinaliteit vinden we $\kappa_i < \kappa$ zodat $\kappa = \sum_{i<\operatorname{cf}\kappa} \kappa_i$. En dus

$$2^\kappa = 2^{\sum_{i<\operatorname{cf}\kappa} \kappa_i} = \prod_{i<\operatorname{cf}\kappa} 2^{\kappa_i} \leq \prod_{i<\operatorname{cf}\kappa} 2^{<\kappa} = (2^{<\kappa})^{\operatorname{cf}\kappa} \leq (2^\kappa)^{\operatorname{cf}\kappa} = 2^{\kappa\cdot\operatorname{cf}\kappa} = 2^\kappa$$

□

Tot zover weten we over de 2-machtsfunctie dat $\kappa < 2^\kappa$ en dat wanneer $\kappa < \lambda$ geldt dat $2^\kappa \leq 2^\lambda$. Voor singuliere kardinaalgetallen hebben we hiernaast nog het volgende resultaat.

STELLING 2.5 (Bukovsky-Hechler). *Laat κ een singulier kardinaalgetal en stel dat er een γ_0 bestaat zo dat voor elke γ met $\gamma_0 \leq \gamma < \kappa$ geldt $2^\gamma = \lambda$. Dan ook $2^\kappa = \lambda$.*

BEWIJS. Omdat κ singulier weten we dat $\operatorname{cf}\kappa < \kappa$. Maar dan moet er een μ zijn zodat $\gamma_0 \leq \mu$ en $\operatorname{cf}\kappa \leq \mu < \kappa$. Dan moet gelden dat $2^\mu = \lambda$ en ook $2^{<\kappa} = \lambda$. Dan vinden we eenvoudig met behulp van lemma 2.2 dat $2^\kappa = (2^{<\kappa})^{\operatorname{cf}\kappa} = (2^\mu)^{\operatorname{cf}\kappa} = 2^{\mu\cdot\operatorname{cf}\kappa} = 2^\mu = \lambda$. □

HOOFDSTUK 3

Stelling van Silver

In het vorige hoofdstuk hebben we veel theorie over ordinaal- en kardinaalgetallen ontwikkeld. Aan het einde werd een eerste resultaat over de 2-machtsfunctie gepresenteerd. Silver ondekte in 1975 een soortgelijke stelling. Het bewijs hiervan behoeft echter nog wat voorkennis. We zullen in dit hoofdstuk eerst de voorkennis behandelen en later naar de stelling en het bewijs hiervan bekijken.

Het ordinaalgetal ω_1 blijkt een belangrijke rol te gaan spelen in het bewijs van de stelling van Silver. We moeten hiervoor bepaalde deelverzamelingen van ω_1 definieren.

1. Gesloten en onbegrensde verzamelingen

In bewijzen over ω_1 komen vaak verzamelingen voor die gesloten en onbegrensd zijn. We zullen ze hier eerst definieren, wat voorbeelden zien en een aantal stellingen behandelen.

DEFINITIE 3.1. *Een deelverzameling C van ω_1 is* gesloten *als voor alle $A \subseteq C$ geldt dat* $\sup A < \omega_1$ *impliceert* $\sup A \in C$.

Wanneer een C volgens deze definitie gesloten is, is die dat ook in de ordetopologie op ω_1.

DEFINITIE 3.2. *Een deelverzameling C van ω_1 is* onbegrensd *als voor alle $\alpha < \omega_1$ dan er een $\beta \in C$ bestaat zodat $\alpha < \beta$.*

Een triviaal voorbeeld van een gesloten en onbegrensde verzameling is ω_1 zelf. Een minder voor de hand liggend voorbeeld is de verzameling $C = \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha \text{ is een limiet ordinaal }\}$. Om dit te bewijzen nemen we een $A \subseteq C$. Dan geldt dat $\sup A \in A$ of $\sup A \notin A$. In het eerste geval zit $\sup A$ zeker in C. In het tweede geval moet gelden dat $\sup A$ een limiet ordinaal is, maar dan zit $\sup A \in C$ per definitie van C. We concluderen dat C gesloten is. Om te laten zien dat C onbegrensd is nemen we een $\alpha \in \omega_1$. Bekijk nu de verzameling $\{\alpha + n \mid n \in \omega\}$. Dan is $\beta := \sup\{\alpha + n \mid n \in \omega\}$ zeker een limiet ordinaal. Dus $\beta \in C$ en ook $\alpha < \beta$. Hiermee is bewezen dat C een gesloten en onbegrensde verzameling is. Er bestaan zelfs overaftelbaar veel gesloten en onbegrensde verzamelingen. We kunnen namelijk voor elke $\alpha < \omega_1$ de gesloten en onbegrensde verzameling $C_\alpha = \{\beta \in \omega_1 \mid \alpha < \beta\}$ definieren. We kunnen denken over gesloten en onbegrensde deelverzamelingen van ω_1 als zeer grote deelverzamelingen. Een natuurlijke vraag die je hierbij kan stellen is of zulke verzamelingen gesloten zijn onder het nemen van doorsnedes. Willekeurige doorsnedes van gesloten en onbegrensde verzamelingen zullen niet opnieuw gesloten en onbegrensd zijn. We zien namelijk dat $\bigcap_{\alpha \in \omega_1} C_\alpha = \emptyset$. Het volgende is daarentegen wel waar.

STELLING 3.1. *Stel dat we voor elke $n \in \omega$ een gesloten en onbegrensde verzameling C_n hebben gegeven. Dan is $C = \bigcap_{n \in \omega} C_n$ ook een gesloten en onbegrensde verzameling.*

BEWIJS. Het is eenvoudig in te zien dat C gesloten moet zijn. Voor $A \subseteq C$ geldt dat $A \subseteq C_n$ en dus $\sup A \in C_n$ voor alle $n \in \omega$. Hieruit volgt dat $\sup A \in C$ en dus dat C gesloten is.
Om te laten zien dat C onbegrensd is nemen we $\alpha < \omega_1$ willekeurig. We zoeken een $\beta \in C$ zo dat $\alpha < \beta$. Het blijkt dat we deze β kunnen vinden als supremum van een stijgende rij $\langle \beta_m \mid m \in \omega \rangle$. Kies $\beta_0 = \alpha$. We zullen nu β_{m+1} vinden met behulp van β_m. Neem dus aan dat we β_m hebben

gevonden. Omdat elke C_n onbegrensd is kunnen we $\gamma_{m,n} \in C_n$ vinden zodat $\beta_m < \gamma_{m,n}$. Definieer nu $\beta_{m+1} := \sup\{\gamma_{m,n} \mid n \in \omega\}$. We weten dat $\beta_{m+1} < \omega_1$ want $\aleph_1$ is regulier. Om dezelfde reden zit $\beta := \sup\{\beta_m \mid m \in \omega\}$ in ω_1. Duidelijk is dat $\alpha < \beta$ en dus hoeven we alleen nog te laten zien dat $\beta \in C$. Uit $\beta_m < \gamma_{m,n} \leq \beta_{m+1}$ volgt dat $\sup\{\gamma_{m,n} \mid m \in \omega\} = \beta$. Er geldt voor alle $n \in \omega$ dat $\gamma_{m,n} \in C_n$ en omdat C_n gesloten is dat $\beta \in C_n$. Maar dan ook $\beta \in C$. □

Definitie 3.3. *Laat voor elke $\alpha < \omega_1$ een C_α gesloten en onbegrensd gegeven. Dan noemen we $C := \{\beta < \omega_1 \mid \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\}$ de* diagonale doorsnede *van C_α.*

Gesloten en onbegrensde verzamelingen hebben nog meer eigenschappen.

Stelling 3.2. *De diagonale doorsnede C is gesloten en onbegrensd.*

Bewijs. Laat $A \subseteq C$ met $\sup A < \omega_1$ dan moeten we laten zien dat $\sup A \in C$. Om dit te verkrijgen zullen we laten zien dat $\beta := \sup A \in C_\alpha$ voor alle $\alpha < \beta$. Neem hiervoor $\alpha < \beta$ willekeurig en definieer $A_\alpha := \{\gamma \in A \mid \alpha < \gamma\}$. Dan is $\beta = \sup A = \sup A_\alpha$. Merk op dat $A_\alpha \subseteq A \subseteq C$ en omdat $\alpha < \gamma$ geldt dat $A_\alpha \subseteq C_\alpha$. We weten dat elke C_α gesloten is en dus geldt dat $\beta \in C_\alpha$. We hadden $\alpha < \beta$ willekeurig gekozen en dus geldt dat $\beta \in C_\alpha$ voor alle $\alpha < \beta$. We concluderen dat C gesloten is.
Neem $\alpha < \omega_1$ willekeurig. We zoeken een $\beta \in C$ zo dat $\alpha < \beta$. Ook nu zal β het supremum zijn van een stijgende rij $\langle \beta_n \mid n \in \omega \rangle$. Kies $\beta_0 = \alpha$ en neem aan dat β_n gegeven is. Omdat $\beta_n < \omega_1$ is de verzameling $\{C_\gamma \mid \gamma < \beta_n\}$ aftelbaar en dus volgt met stelling 3.1 dat $B_{\beta_n} := \bigcap_{\gamma<\beta_n} C_\gamma$ is een gesloten en onbegrensde verzameling. We kunnen dus een $\beta_{n+1} \in B_{\beta_n}$ vinden zodat $\beta_n < \beta_{n+1}$. Definieer nu $\beta = \sup\{\beta_n \mid n \in \omega\}$. Dan geldt sowieso dat $\alpha < \beta$. Het rest nog te laten zien dat $\beta \in C$. Neem $\delta < \beta$ willekeurig. Dan moet er een $m \in \omega$ bestaan zo dat $\delta < \beta_m$. Omdat de rij $\langle \beta_n \mid n \in \omega \rangle$ stijgend is en per definitie van deze rij geldt dat $\{\beta_n \mid m < n\} \subseteq C_\delta$. Maar dan $\beta = \sup\{\beta_n \mid n \in \omega\} = \sup\{\beta_n \mid m < n\} \in C_\delta$. Omdat $\delta < \beta$ willekeurig was volgt uit de definitie van C dat $\beta \in C$. □

2. Stationaire verzameling

Nu we bekend zijn geworden met gesloten en begrensde verzamelingen kunnen we gaan kijken wat een stationaire verzameling is.

Definitie 3.4. *We noemen S een* stationaire verzameling *als voor elke gesloten en onbegrensde verzameling C geldt dat $S \cap C \neq \emptyset$*

We kunnen over stationaire verzamelingen denken als relatief grote deelverzamelingen van ω_1. In de volgende stelling wordt onder andere duidelijk hoe zij zich tot gesloten en onbegrensde verzamelingen verhouden.

Stelling 3.3. *i elke gesloten en onbegrensde verzameling is stationair.*
ii Gegeven een stationaire verzameling S en een gesloten en onbegrensde verzameling C, dan is $S \cap C$ een stationaire verzameling.
iii elke stationaire verzameling is onbegrensd.

Bewijs. i Laat C en $\tilde{C}$ gesloten en onbegrensde verzamelingen zijn. Dan volgt uit stelling 3.1 dat $C \cap \tilde{C}$ een gesloten en onbegrensde verzameling is en dus zeker niet leeg.
ii Laat S een stationaire verzameling en C, $\tilde{C}$ gesloten en onbegrensde verzamelingen. Dan geldt dat $(S \cap C) \cap \tilde{C} = S \cap (C \cap \tilde{C}) \neq \emptyset$ omdat S stationair is en $C \cap \tilde{C}$ een gesloten en onbegrensde verzameling.
iii Stel S is stationair. Neem α willekeurig. Omdat $C_\alpha = \{\beta < \omega_1 \mid \alpha < \beta\}$ gesloten en onbegrensd is moet gelden dat $S \bigcap C_\alpha \neq \emptyset$. Neem $\beta \in S \bigcap C_\alpha$. Dan hebben we nu een element in S gevonden die groter is dan α. □

In theorie kunnen we wegens de eerste opmerking van deze stelling overaftelbaar veel voorbeelden van stationaire verzamelingen opschrijven. Het is echter niet zo eenvoudig om een stationaire verzameling te vinden die niet gesloten en onbegrensd is. Dit komt door het impliciete karakter van de definitie van de stationaire verzameling.

ω_1 is overaftelbaar en het blijkt dat wanneer je deze in aftelbaar veel stukken wil hakken, tenminste 1 verzameling redelijk groot moet zijn. Dit wordt geformaliseerd in de volgende stelling.

STELLING 3.4. *Stel dat $\omega_1 = \bigcup\{S_n \mid n \in \omega\}$. Dan bestaat er een $n \in \omega$ zo dat S_n stationair is.*

BEWIJS. Stel dat voor alle $n \in \omega$ geldt dat S_n niet stationair is, dan geldt dat er C_n gesloten en onbegrensd bestaan zo dat $S_n \cap C_n = \emptyset$. Uit stelling 3.1 volgt dat $C = \bigcap_{n\in\omega} C_n$ is een gesloten en onbegrensde verzameling. Er geldt dat $\omega_1 \cap C = \bigcup S_n \cap C = \emptyset$. Dit is een tegenspraak met het gegeven dat C ook een gesloten en onbegrensde verzameling is. $\square$

Merk op dat deze stelling ook geldt voor stationaire verzamelingen in plaats van ω_1. Het bewijs is hetzelfde. Met behulp van deze stelling zijn we wel in staat een voorbeeld te kunnen geven van een stationaire verzameling die niet gesloten en onbegrensd is. We vinden zelfs overaftelbaar veel disjuncte stationaire verzamelingen.

Omdat elke $\alpha \in \omega_1$ aftelbaar is kunnen we een injectieve $f_\alpha : \alpha \to \omega$ vinden. Met behulp van het keuzeaxioma vinden we de rij $\langle f_\alpha \mid \alpha \in \omega_1\rangle$ waarmee we de volgende verzameling kunnen definieren:

$$A_{\alpha,n} := \{\beta > \alpha \mid f_\beta(\alpha) = n\}$$

Wegens injectiviteit volgt dat voor vaste n geldt dat $A_{\gamma,n} \cap A_{\delta,n} = \emptyset$. Omdat voor elke β, $f_\beta(\alpha)$ een waarde aanneemt geldt dat $\{\beta \mid \beta > \alpha\} = \bigcup_{n\in\omega} A_{\alpha,n}$. Omdat het linkerlid van deze gelijkheid een gesloten en onbegrensde verzameling is volgt uit stelling 3.4 dat er ten minste één $n \in \omega$ is waarvoor $A_{\alpha,n}$ stationair is. Noem $n_\alpha \in \omega$ de kleinste zodat dit geldt. Merk nu op dat er overaftelbaar veel α's zijn en aftelbaar veel $n_\alpha \in \omega$. Nu moet er dus een $\tilde{n} \in \omega$ en een deelverzameling $A \subseteq \omega_1$ zijn zodat $|A| = \aleph_1$ en $n_\alpha = \tilde{n}$ voor alle $\alpha \in A$. Dan moet de verzameling $\{A_{\alpha,\tilde{n}}\}_{\alpha\in A}$ ook overaftelbaar zijn en bovendien wisten we al dat de elementen van deze verzameling paarsgewijs disjunct moeten zijn. Stel dat in één van deze verzamelingen een gesloten en onbegrensde verzameling bevat. Dan moet deze verzameling een niet lege doorsnijding hebben met de andere stationaire verzamelingen. Maar dit is in tegenspraak met het feit dat alle $A_{\alpha,\tilde{n}}$ disjunct zijn.

2.1. Stelling van Fodor. ω en ω_1 hebben veel verschillende eigenschappen. Bekijk bijvoorbeeld eens de volgende functie: $f : \omega \longrightarrow \omega$ gegeven door

$$f \begin{cases} n \longmapsto n-1 & n \geq 1 \\ 0 \longmapsto k & \text{jouw favoriete getal } k \end{cases}$$

Op $\omega \setminus \{0\}$ geldt dat $f(n) < n$ en f is injectief. Wanneer we een vergelijkbare functie voor ω_1 gaan zoeken kunnen we dezelfde strategie als de vorige functie gebruiken voor ordinaalgetallen die opvolgers zijn. We komen echter in de knel met limietgetallen. De volgende stelling zegt zelfs dat die limietgetallen veel kapot maken.

STELLING 3.5 (Fodor). *Laat S een stationaire verzameling zijn en f een functie zo dat $f(\alpha) < \alpha$ voor alle $\alpha \in S$. Dan is er een stationaire $\tilde{S} \subseteq S$ waarop f constant is.*

De functie f is dus verre van injectief. Hij beeld immers een hele stationaire verzameling op een specifiek element af.

BEWIJS. Stel dat het niet zo is. Voor elke $\alpha < \omega_1$ is dan $S_\alpha := \{\beta \in S \mid f(\beta) = \alpha\}$ niet stationair. Er bestaan dus C_α's gesloten en onbegrensd zo dat $S_\alpha \cap C_\alpha = \emptyset$. Met andere woorden, voor elke $\beta \in C_\alpha$ geldt $f(\beta) \neq \alpha$.
Met behulp van stelling 3.2 vinden we $C = \{\beta < \omega_1 \mid \beta \in \bigcap_{\alpha<\beta} C_\alpha\}$ gesloten en onbegrensd. Omdat

S stationair is kunnen we een $\gamma \in S \cap C$ nemen. Noem $\delta = f(\gamma)$, dan volgt dat $\gamma \notin C_\delta$. Omdat $\gamma \in S$ geldt dat $f(\gamma) = \delta < \gamma$. Met dit gegeven en het feit dat $\gamma \in C$ moet ook gelden dat $\gamma \in C_\delta$. Dit is een tegenspraak. $\square$

De volgende stelling is een gevolg van Fodor. We zullen deze in het volgende hoofdstuk gebruiken in het bewijs van de stelling van Silver.

STELLING 3.6. *Laat $S \subseteq \omega_1$ een stationaire verzameling zijn en f een functie waarvoor geldt dat voor alle $\alpha \in S:\ f(\alpha) < \omega_\alpha$. Dan bestaat er een $\gamma < \omega_1$ en een stationaire $\tilde{S} \subseteq S$ zo dat $f(\alpha) < \omega_\gamma$ voor alle $\alpha \in \tilde{S}$.*

BEWIJS. Neem $C := \{\alpha < \omega_1 \mid \alpha \text{ is een limiet ordinaal }\}$. We hebben al eerder gezien dat dit een gesloten en onbegrensde verzameling is. Neem $\alpha \in S \cap C$. Omdat $\alpha \in C$ geldt dat $\omega_\alpha = \sup\{\omega_\beta \mid \beta < \alpha\}$. Omdat $\alpha \in S$ geldt dat $f(\alpha) < \omega_\alpha$. Deze twee gegevens impliceren dat er een $\beta < \alpha$ bestaat zo dat $f(\alpha) < \omega_\beta$. Definieer nu de functie $g(\alpha) =$kleinste β waarvoor $f(\alpha) < \omega_\beta$. Merk op dat $S \cap C$ stationair is wegens stelling 3.3 *ii* en dat voor alle $\alpha \in S \cap C$ geldt dat $g(\alpha) = \beta < \alpha$. Uit stelling 3.5 volgt nu meteen dat er stationaire $\tilde{S} \subseteq S \cap C$ en $\gamma < \omega_1$ bestaan zodanig dat $g(\delta) = \gamma$ voor alle $\delta \in \tilde{S}$. Wanneer we het terugvertalen naar onze oorspronkelijke functie f zien we dat voor alle $\delta \in \tilde{S}$ geldt dat $f(\delta) < \omega_\gamma$. $\square$

3. Stelling van Silver

Tot zover hebben we de volgende resultaten over de kardinaliteit van de machterverzameling:

i Voor κ geldt $\kappa < 2^\kappa$
ii Als $\kappa \leq \lambda$ dan $2^\kappa \leq 2^\lambda$
iii Kőnig impliceert een aantal ongelijkheden zoals $2^{\aleph_0} \neq \aleph_\alpha$ voor α limiet van aftelbare rij strict kleinere ordinalen.

Er blijven nog ontzettend veel mogelijkheden over. Cohen liet in 1963 met behulp van zijn eigen ontwikkelde theorie van forcing zien dat ZFC consistent is met $2^{\aleph_0} \geq \aleph_2$. Kort na die doorbraak liet Solovay zien dat $2^{\aleph_0}$ alles zou kunnen zijn wat niet door Kőnig wordt tegengesproken. Om maar wat willekeurige voorbeelden te geven: **ZFC** is consistent met $2^{\aleph_0} = \aleph_{113}$, $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_\omega+1}$ of $2^{\aleph_0} = \aleph_{\omega_1}$, gegeven dat **ZF** consistent is. Eáston kon dit voor reguliere kardinaalgetallen zelfs uitbreiden naar uitspraken als: **ZFC** is consistent met $2^{\aleph_0} = \aleph_1, 2^{\aleph_1} = \aleph_{44}$ en $2^{\aleph_2} = \aleph_{47}$. Maar ook bijvoorbeeld $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1} = \aleph_3, 2^{\aleph_2} = \aleph_4$, wat een tegenvoorbeeld is voor een stricte versie van resultaat ii hierboven. Hoe meer van dit soort ontdekkingen werden gedaan, hoe grotere schok het in 1974 was toen Silver met de volgende stelling kwam.

STELLING 3.7 (Silver). *Stel dat voor elke $\alpha \in \omega_1$ geldt dat $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, dan ook $2^{\aleph_{\omega_1}} = \aleph_{\omega_1+1}$.*

Met andere woorden: wanneer de Gegeneraliseerde Continuüm Hypothese geldt tot ω_1 dan moet deze gelden tot en met ω_1. Het volgende bewijs is een elementair bewijs van de stelling en komt van [**2**]. Het orginele bewijs van Silver gebruikte onder andere generieke ultramachten en is terug te lezen in [**5**].

BEWIJS. We willen gaan bewijzen dat de kardinaliteit van $\mathcal{P}(\aleph_{\omega_1}) = \aleph_{\omega_1+1}$. We doen dit door aan te nemen dat $\mathcal{P}(\aleph_{\omega_1})$ een cardinaliteit heeft die strict groter is dan $\aleph_{\omega_1+1}$. We gaan hier een tegenspraak uit afleiden.

Laat $\alpha < \omega_1$. De aannames van onze stelling zeggen dat $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ en dus kunnen we een lijst $\{A^\alpha_\varepsilon \mid \varepsilon \in \omega_{\alpha+1}\}$ van alle elementen van $\mathcal{P}(\omega_\alpha)$ maken. Voor elke verzameling $A \subseteq \omega_{\omega_1}$ definieren we een functie $f_A \in \prod_{\alpha\in\omega_1} \omega_{\alpha+1}$ als volgt

$$f_A : \alpha \longmapsto \varepsilon, \text{ zodat } A \cap \omega_\alpha = A^\alpha_\varepsilon$$

We definieren nu een relatie R voor elementen van $\mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ door $A\ R\ B$ als $\{\alpha \mid f_A(\alpha) < f_B(\alpha)\}$ stationair is.

LEMMA 3.1. *Voor ongelijke verzamelingen $A, B \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ geldt dat $A\ R\ B$ of $B\ R\ A$.*

BEWIJS. Merk op dat

$$\omega_1 = \{\alpha \mid f_A(\alpha) < f_B(\alpha)\} \cup \{\alpha \mid f_A(\alpha) = f_B(\alpha)\} \cup \{\alpha \mid f_A(\alpha) > f_B(\alpha)\}$$

Als $A \neq B$ dan bestaat er een $\alpha < \omega_1$ met $A \cap \omega_\alpha \neq B \cap \omega_\alpha$. Maar dan geldt voor alle $\beta > \alpha$ dat $f_A(\beta) \neq f_B(\beta)$. Dan geldt dat de verzameling $\{\alpha \mid f_A(\alpha) = f_B(\alpha)\}$ begrensd is en dus zeker niet stationair. Uit stelling 3.4 volgt nu dat $\{\alpha \mid f_A(\alpha) < f_B(\alpha)\}$ of $\{\alpha \mid f_A(\alpha) > f_B(\alpha)\}$ stationair moet zijn. $\square$

Dit lemma helpt ons bij het bewijs van het volgende lemma.

LEMMA 3.2. *Er bestaat een $B \subseteq \omega_{\omega_1}$ zodat de verzameling $\{A \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1}) \mid A\ R\ B\}$ cardinaliteit ten minste $\aleph_{\omega_1+1}$ heeft.*

BEWIJS. Omdat de kardinalitiet van $X \subseteq \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ ten minste $\aleph_{\omega_1+1}$ is kunnen we een $X \subseteq \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ vinden van kardinaliteit $\aleph_{\omega_1+1}$. Als er een $B \in X$ zit die voldoet aan het lemma dan zijn we klaar. Neem aan dat dit niet zo is. Dan geldt voor elke $C \in X$ dat de verzameling $R^{-1}(C) = \{A \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1}) \mid A\ R\ C\}$ ten hoogste kardinaliteit $\aleph_{\omega_1}$ heeft. Definiëer nu $Y := \bigcup\{R^{-1}(C) \mid C \in X\}$. Y is de vereniging van $\aleph_{\omega_1+1}$ verzamelingen van kardinaliteit ten hoogste $\aleph_{\omega_1}$. Y heeft dus een kardinaliteit van ten hoogste $\aleph_{\omega_1+1} \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1+1}$. Uit de aanname die ons tot een tegenspraak gaat leiden volgt nu dat $\mathcal{P}(\omega_{\omega_1}) \setminus Y$ niet leeg is. Voor een B uit die verzameling geldt voor elke $A \in X$ dat $B \notin R^{-1}(A)$ want anders zou $B \in Y$. Maar als $B\ R\ A$ niet geldt volgt uit lemma 3.1 dat $A\ R\ B$ voor alle $A \in X$. $\square$

Laat vanaf nu B staan voor de verzameling zoals die in lemma 3.2 beschreven is.

Voor elke $\alpha < \omega_1$ geldt dat $f_B(\alpha) = \varepsilon$ met $\varepsilon < \omega_{\alpha+1}$. De verzameling $\{\beta \mid \beta < f_B(\alpha)\}$ heeft dus een kardinaliteit ten hoogste $\aleph_\alpha$. Dit impliceert dat er een injectieve functie

$$g_\alpha : \{\beta \mid \beta < f_B(\alpha)\} \longrightarrow \{\beta \mid \beta < \omega_\alpha\}$$

bestaat.

Neem een A zo dat $A\ R\ B$. Dan is $S_A = \{\alpha \mid f_A(\alpha) < f_B(\alpha)\}$ stationair. Voor een $\alpha \in S_A$ geldt dat $f_A(\alpha) \in \operatorname{dom} g_\alpha$ en dus $g_\alpha(f_A(\alpha)) < \omega_\alpha$. We kunnen nu stelling 3.6 toepassen op de functie $g_\alpha(f_A(\,\cdot\,))$. We vinden een stationaire $T_A \subseteq S_A$ en $\gamma_A < \omega_1$ zodat voor alle $\alpha \in T_A$ geldt $g_\alpha(f_A(\alpha)) < \omega_{\gamma_A}$.

Voor elke A met $A\ R\ B$ vinden we dus een $T_A \in \mathcal{P}(\omega_1)$ en $\gamma_A < \omega_1$.

We willen laten zien dat er $T \in \mathcal{P}(\omega_1)$ en $\gamma < \omega_1$ bestaan zo dat $A_{T,\gamma} := \{A \mid A\ R\ B, T_A = T \text{ en } \gamma_A = \gamma\}$ van kardinaliteit ten minste $\aleph_{\omega_1+1}$ is. Stel dat dit niet zo is. Dan is de kardinaliteit van elke $A_{T,\gamma}$ ten hoogste $\aleph_{\omega_1}$. Verder weten we omdat $T_A \in \mathcal{P}(\omega_1)$ en $\gamma_A < \omega_1$ dat de kardinaliteit van de verzameling paren (T_A, γ_A) ten hoogste $2^{\aleph_1} \cdot \aleph_1 = \aleph_2 \cdot \aleph_1 = \aleph_2$ is. Hierbij hebben we de aanname van de stelling gebruikt. We hebben nu dat

$$\{A \mid A\ R\ B\} = \bigcup_{(T,\gamma)} A_{T,\gamma}$$

Links hebben we nu een verzameling van kardinaliteit $\aleph_{\omega_1+1}$. Rechts is een vereniging van $\aleph_2$ verzamelingen waarbij elke verzameling kardinaliteit ten hoogste $\aleph_{\omega_1}$ heeft. De rechter verzameling is heeft dus kardinaliteit ten hoogste $\aleph_2 \cdot \aleph_{\omega_1} = \aleph_{\omega_1}$. Dit levert een tegenspraak want een verzameling die $\aleph_{\omega_1}$ elementen bevat kan niet gelijk zijn aan een die $\aleph_{\omega_1+1}$ elementen bevat. Neem nu een specifieke $A_{T,\gamma}$ die kardinaliteit ten minste $\aleph_{\omega_1+1}$ heeft. Elke $A \in A_{T,\gamma}$ induceert de volgende functie:

$$\varphi_A : \begin{cases} T \longrightarrow \omega_\gamma \\ \alpha \longmapsto g_\alpha(f_A(\alpha)) \end{cases}$$

Het aantal functies $T \to \omega_\gamma$ is per definitie

$$al\gamma^{\aleph_1} \leq \max\{\aleph_\gamma^{\aleph_\gamma}, \aleph_1^{\aleph_1}\} = \max\{2^{\aleph_\gamma}, 2^{\aleph_1}\} = \max\{\aleph_{\gamma+1}, \aleph_2\} < \aleph_{\omega_1}.$$

Merk op dat we hier de aanname van de stelling weer gebruiken. Maar dan moeten er $A_1, A_2 \in A_{T,\gamma}$ verschillend bestaan die precies dezelfde functie induceren. Dat betekend dat voor alle $\alpha \in T$ geldt dat $g_\alpha(f_{A_1}(\alpha)) = g_\alpha(f_{A_2}(\alpha))$. Herinner dat g_α injectief is. We vinden dat $f_{A_1}(\alpha) = f_{A_2}(\alpha)$ op heel T. We kunnen concluderen dat $\{\alpha \mid f_{A_1}(\alpha) = f_{A_2}(\alpha)\}$ is onbegrensd. Maar dat is in tegenspraak met de aanname dat $A_1 \neq A_2$ en het begin van het bewijs van lemma 3.1. $\square$

4. Generalisaties

Nu we het bewijs van de stelling hebben staan kunnen we gaan kijken hoe we deze aan kunnen scherpen of anders kunnen gebruiken.

Ten eerste kunnen we onze aanname verzwakken. Het blijkt dat we de gelijkheid $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ slechts nodig hebben op een stationaire deelverzameling van ω_1. Er komt nu een schets hoe het bewijs dan aangepast moet worden. Stel dat $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ voor alle $\alpha \in S$. De eerste keer dat we de aanname van de stelling gebruiken doen we dit om de elementen van $\mathcal{P}(\aleph_\alpha)$ te kunnen nummeren. De lijst $\{A_\varepsilon^\alpha \mid \varepsilon \in \omega_{\alpha+1}\}$ van elementen van $\mathcal{P}(\aleph_\alpha)$ kunnen we nu slechts maken voor alle $\alpha \in S$. Hierdoor kunnen we voor $A \subseteq \omega_{\omega_1}$ de functie f_A op een gelijke manier definieren alleen zal het domein S zijn. Omdat we weten dat stelling 3.4 ook geldt voor stationaire verzamelingen in plaats van ω_1 blijven lemma 3.1 en lemma 3.2 gelden. Op de andere twee plekken waar we onze aanname gebruiken is ons doel slechts het afschatten van kardinaalgetallen. We laten hier in het algemeen zien hoe het afschatten gaat met de zwakkere aanname. Stel we willen laten zien dat $2^{\aleph_\gamma} < \aleph_{\omega_1}$. We kunnen niet meer direct concluderen dat $2^{\aleph_\gamma} = \aleph_{\gamma+1}$ maar door stelling 3.3 *iii* weten we dat S onbegrensd is. Er is dus een $\alpha \in S$ zodat $\gamma < \alpha$. Maar dan geldt $2^{\aleph_\gamma} \leq 2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1} < \omega_1$. Deze afschatting is voldoende voor ons bewijs. De rest van het bewijs blijft zoals dit is.

4.1. Andere versie van de stelling van Silver. De stelling van Silver zegt iets over het gedrag van de gegeneraliseerde continuum hypothese. We kunnen het bewijs aanvullen om een aangepaste versie van de stelling te bewijzen.

Stelling 3.8. *Stel dat voor elke $\alpha \in \omega_1$ geldt dat $2^{\aleph_\alpha} \leq \aleph_{\alpha+2}$, dan ook $2^{\aleph_{\omega_1}} \leq \aleph_{\omega_1+2}$.*

Laten we het bewijs van de stelling van Silver op de nieuwe situatie toepassen. Wegens aanname dat $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+2}$ vinden we een lijst $\{A_\varepsilon^\alpha \mid \varepsilon \in \omega_{\alpha+2}\}$ van alle elementen van $\mathcal{P}(\omega_\alpha)$. We definieren nu voor elke $A \subseteq \omega_{\omega_1}$ een functie $f_A \in \prod_{\alpha \in \omega_1} \omega_{\alpha+2}$ als volgt

$$f_A : \alpha \longmapsto \varepsilon, \text{ zodat } A \cap \omega_\alpha = A_\varepsilon^\alpha$$

We kunnen lemma 3.1 en lemma 3.2 overnemen maar we blijken een probleem te hebben wanneer we onze injectieve g_α willen defnieren. Omdat $f_B(\alpha) < \omega_{\alpha+2}$ vinden we slechts een injectie

$$g_\alpha : \{\beta \mid \beta < f_B(\alpha)\} \longrightarrow \{\beta \mid \beta < \omega_{\alpha+1}\}$$

Dit is echter niet sterk genoeg om stelling 3.6 toe te kunnen passen.

We zullen een nieuw bewijs moeten verzinnen. Deze maakt echter wel gebruik van het hiervoor gegeven bewijs van Silver.

Bewijs. Laat f_A zoals eerder beschreven is. We definieren een relatie tussen functies door $g\ R\ f$ als $\{\alpha \in \omega_1 \mid g(\alpha) < f(\alpha)\}$ stationair is. Dit komt overeen met de relatie gedefinieerd in het bewijs van de stelling van Silver.

Neem een $f \in \prod_{\alpha\in\omega_1} \omega_{\alpha+2}$ vast. Noteer nu

$$X_f = \{A \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1}) \mid f_A\ R\ f\}$$
$$S_A = \{\alpha \in \omega_1 \mid f_A(\alpha) < f(\alpha)\}$$

Merk op dat voor elke A in X_f de verzameling S_A stationair is. Voor vaste $S \in \mathcal{P}(\omega_1)$ schrijven we

$$X_{f,S} = \{A \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1}) \mid S_A = S\}$$

Het aantal verzamelingen $S \in \mathcal{P}(\omega_1)$ is ten hoogste $2^{\aleph_1} = \aleph_3$. Door nu te laten zien dat voor vaste S geldt dat $|X_{f,S}| \le \aleph_{\omega_1+1}$ kunnen we concluderen dat $|X_f| \le \aleph_3 \cdot \aleph_{\omega_1+1} = \aleph_{\omega_1+1}$.

Neem nu ook $S \in \mathcal{P}(\omega_1)$ vast. Merk op dat voor onze vaste f geldt dat $|f(\alpha)| \le \omega_{\alpha+1}$. We kunnen dus surjecties $\varphi_\alpha : \omega_{\alpha+1} \longrightarrow f(\alpha)$ vinden. Hiermee definieren we $h_A \in \prod_{\alpha\in\omega_1} \omega_{\alpha+1}$ als volgt

$$h_A(\alpha) = \begin{cases} \min\{\varepsilon \in \omega_{\alpha+1} \mid \varphi_\alpha(\varepsilon) = f_A(\alpha)\} & \alpha \in S \\ 0 & \alpha \notin S \end{cases}$$

Merk op dat voor ongelijke $A, B \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ geldt dat er een γ is waarvoor $A \cap \omega_\gamma \ne B \cap \omega_\gamma$. Maar nu volgt dat voor alle $\beta \ge \gamma$ geldt dat $f_A(\beta) \ne f_B(\beta)$. En dus volgt voor β zodat $\beta \ge \gamma$ en $\beta \in S$ dat $h_A(\beta) \ne h_B(\beta)$. Merk op dat deze verzameling β's nog steeds een stationaire verzameling is wegens stelling 3.3 *ii*. Omdat stelling 3.4 ook geldt voor stationaire verzamelingen in plaats van ω_1 vinden we weer dat $h_A\ R\ h_B$ of $h_B\ R\ h_A$.

Wanneer we aannemen dat er strict meer dan $\aleph_{\omega_1+1}$ verschillende fucties h_A zijn, kunnen we het gegeven bewijs van de stelling van Silver gebruiken om een tegenspraak te vinden. We kunnen een vergelijkbaar lemma als lemma 3.2 bewijzen. Doordat $h_A \in \prod_{\alpha\in\omega_1} \omega_{\alpha+1}$ kunnen de functies g_α nu wel zo gedefinierd worden dat we stelling 3.6 kunnen toepassen. Onze aanname dat $2^{\aleph_\alpha} \le \aleph_{\alpha+2}$ is voldoende in de rest van het bewijs. We concluderen dat het aantal verschillende functies h_A ten hoogste van grootte $\aleph_{\omega_1+1}$ is.

Nu we dit weten kunnen we bewijzen dat $|X_{f,S}| \le \aleph_{\omega_1+1}$. Stel dat dit niet zo is. Dan vinden we een tegenspraak met de injectiviteit van de functie die A op h_A afbeeldt en het feit dat er niet meer dan $\aleph_{\omega_1+1}$ verschillende h_A functies zijn.

Al het voorgaande geeft ons het volgende resultaat. Voor elke functie $f \in \prod_{\alpha<\omega_1} \omega_{\alpha+2}$ geldt dat $|X_f| \le \aleph_{\omega_1+1}$.

We gaan dit gebruiken om te bewijzen dat $\mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ ten hoogste $\aleph_{\omega_1+2}$ elementen heeft. We gaan een rij $\langle A_\alpha \rangle$ construeren. Neem hiervoor een $A_0 \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$. Stel dat $\langle A_\alpha \mid \alpha < \theta \rangle$ gegeven is. Kies wanneer mogelijk $A_\theta \in \mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ zodat $A_\theta \notin \bigcup_{\alpha<\theta} X_{f_{A_\alpha}}$. Merk op dat door deze keuze geldt dat $f_{A_\alpha}\ R\ f_{A_\theta}$ voor elke $\alpha < \theta$. Wanneer we niet meer een nieuwe A_θ kunnen kiezen geldt dat

$$\mathcal{P}(\omega_{\omega_1}) \subseteq \bigcup_{\alpha<\theta} X_{f_{A_\alpha}} \tag{1}$$

Merk op dat er altijd een θ moet zijn waarvoor we geen nieuwe A_θ meer kunnen vinden. Deze zal immers kleiner zijn dan $\aleph(\mathcal{P}(\omega_{\omega_1}))$. We weten al dat voor elke α dat $|X_{f_{A_\alpha}}| \le \aleph_{\omega_1+1}$. Om te onderzoeken hoe groot θ is merken we het volgende op. Wanneer $\alpha < \theta$ dan geldt $\{A_\beta \mid \beta < \alpha\} \subseteq X_{f_{A_\alpha}}$. En dus dat $|\alpha| \le \aleph_{\omega_1+1}$. Maar dan moet gelden dat $\alpha < \aleph_{\omega_1+2}$. Voor $\alpha < \theta$ geldt dus dat $\alpha < \aleph_{\omega_1+2}$ en daaruit volgt dat $\theta \le \aleph_{\omega_1+2}$. We kunnen conluderen nu met behulp van (1) dat het aantal elementen van $\mathcal{P}(\omega_{\omega_1})$ kleiner of gelijk is aan $|\theta| \cdot |X_{f_{A_\alpha}}| \le \aleph_{\omega_1+2} \cdot \aleph_{\omega_1+1} = \aleph_{\omega_1+2}$. □

Galvin en Hajnal lieten in [**1**] onder ander zien dat deze gegenareliseerde stelling van Silver geldt voor elke $\beta < \omega_1$ in plaats van 2.

Bibliografie

[1] F. Galvin en A. Hajnal. Inequalities for cardinal powers. *Ann. Math., 101, 491-498*, 1975.

[2] J. E. Baumgartner en K. Prikry. Singular cardinals and the generalized continuum hypothesis. *The American Mathematical Monthly, Vol. 84, No. 2, pp. 108-113*, 1977.

[3] K.P. Hart. *Verzamelingenleer*. Technische Universiteit Delft, 2011.

[4] T. Jech. *Set Theory*. Springer, third edition, 2003.

[5] J. Silver. On the singular cardinals problem. *Int'l Congress of Mathematicians*, 1974.

[6] Aad Vijn. *Het keuzeaxioma*. Technische Universiteit Delft, 2012.

Index