

2159
A.W. Grootendorst
B. Meulenbeld

ANALYSE

DEEL 2, Functies met twee of meer variabelen

Delftse Uitgevers Maatschappij – 1986

analyse 2

C10088
56708



BIBLIOTHEEK TU Delft
P 2159 7180



C

885670

analyse 2

Dr. B. Meulenbeld, *oud-hoogleraar aan de Technische Hogeschool Delft*

Dr. A.W. Grootendorst, *hoogleraar aan de Technische Hogeschool Delft*

Zesde, herziene druk, heruitgave



CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Meulenbeld, B.

Analyse / B. Meulenbeld, A.W. Grootendorst. — Delft: Delftsche U.M.

2. — III.

Oorspr. titel: Analyse voor propaedeutische examens / B. Meulenbeld en W.K. Baart.
— Dl. 2 (p. 1-204). — Haarlem: Stam Technische Boeken, 1960). — Met reg.

ISBN 90-6562-065-6

SISO 515 UDC 517(075.8)

Trefw.: wiskundige analyse.

© VSSD

Zesde druk 1986

Delftse Uitgevers Maatschappij b.v.

P.O. Box 2851, 2601 CW Delft, The Netherlands

Tel. 015-123725

Alle rechten voorbehouden. Niets uit deze uitgave mag worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door fotokopieën, opnamen of op enige andere manier, zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van de uitgever.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted, in any form or by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without the prior written permission of the publisher.

ISBN 90 6562 065 6

Voorbericht bij de vijfde druk

Deze uitgave kan beschouwd worden als de vijfde druk van de pagina's 1...204 van het boek: „Analyse voor propaedeutische examens, deel 2” van de hand van Meulenbeld en Baart.

Aangezien de stof aanmerkelijk is uitgebreid leek het ons gewenst het genoemde boek in twee gedeelten te laten verschijnen. Het voorliggende deel 2 bevat hoofdzakelijk de differentiaal- en integraalrekening van functies van meer dan één veranderlijke. Deel 3 is geheel gewijd aan differentiaalvergelijkingen.

Evenals in deel 1 zijn ook in dit deel ingrijpende veranderingen aangebracht. Behalve aan de uitbreiding van de stof is dit ook toe te schrijven aan een strengere behandeling. Elke deskundige zal begrijpen dat er juist bij functies van meerdere veranderlijken grote problemen liggen en dat men bij een eerste behandeling van deze materie noodzakelijkerwijs concessies aan de strengheid van behandeling zal moeten toestaan.

Zo is b.v. bij de stellingen van Gauss en Stokes wel een aantal topologische problemen aangeroerd, maar niet „ad fundum” behandeld.

Om het boek leesbaar te houden is daarom de formulering soms „populair” gekozen. Op veler vraag is ook de vectoranalyse en de theorie van ruimtekrommen en -oppervlakken uitgebreid.

Voor opbouwende kritiek houden we ons zeer aanbevolen.

Delft, juli 1976.

De schrijvers

B. Meulenbeld

A. W. Grootendorst

Voorbericht bij de zesde druk

Deze zesde druk is een nagenoeg ongewijzigde herdruk van de voorafgaande. Zoals de lezer bemerkt zal hebben is deze druk verzorgd door de VSSD. Volgaarne willen wij deze vereniging bedanken voor de bereidwilligheid en de keurige uitvoering van dit werk.

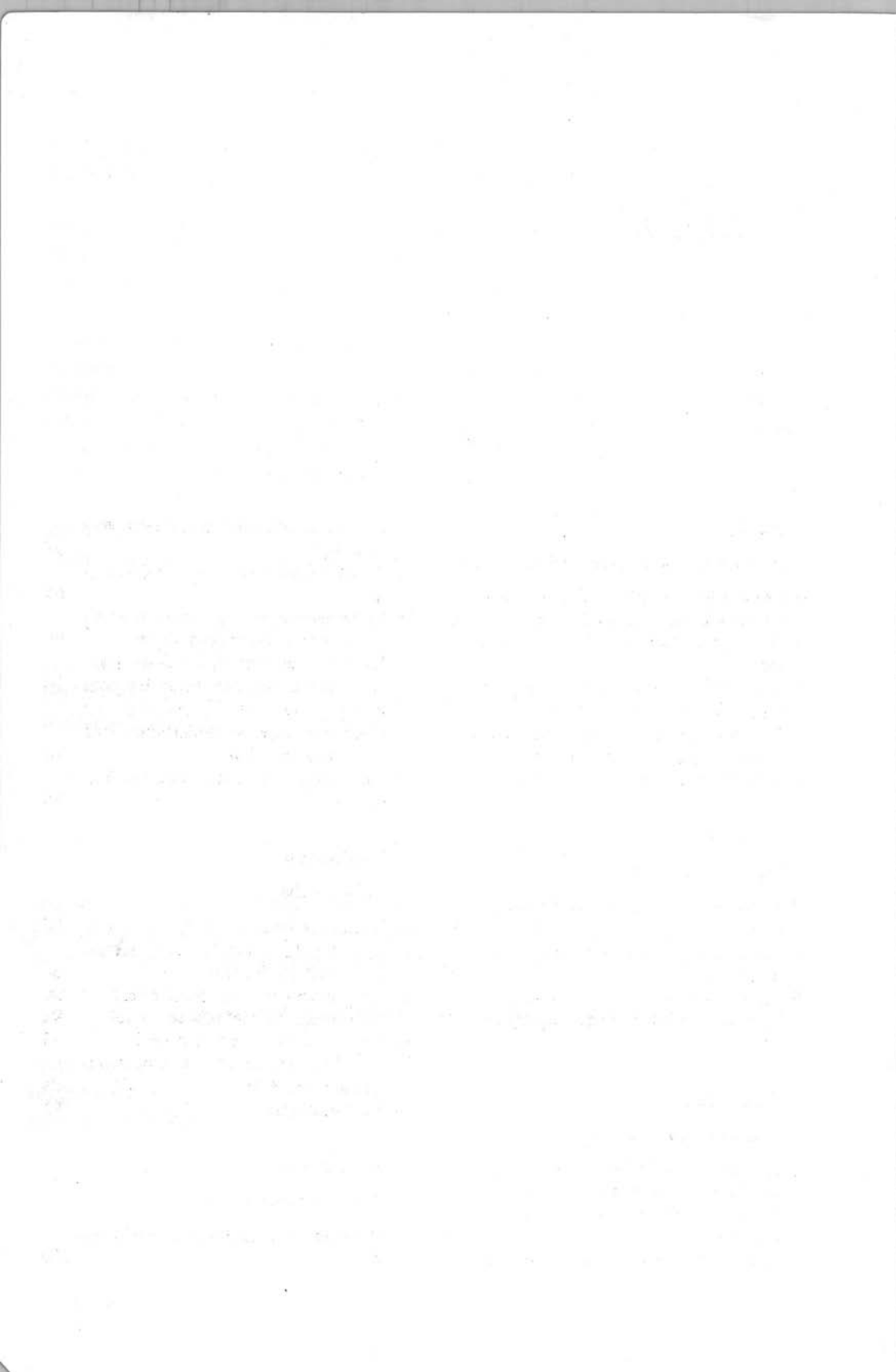
Als steeds houden wij ons aanbevolen voor constructieve opmerkingen.

Delft, april 1986

De schrijvers

B. Meulenbeld

A.W. Grootendorst



Inhoud

Hoofdstuk 1

Funcities van twee veranderlijken

- | | | |
|---|--|----|
| 1 | Continuïteit en differentieerbaarheid | 13 |
| 2 | Gemengde partiële afgeleiden | 15 |
| 3 | Homogene functies. Stelling van Euler | 16 |
| 4 | De middelwaardestelling voor een functie van twee veranderlijken | 18 |
| 5 | De formules van Taylor voor een functie van twee veranderlijken | 21 |
| 6 | Invoeren van nieuwe variabelen | 23 |

Hoofdstuk 2

Impliciete functies

- | | | |
|---|---|----|
| 7 | Impliciete functies van één veranderlijke | 37 |
| 8 | Impliciete functies van twee veranderlijken | 43 |
| 9 | Impliciete functies van één veranderlijke, bepaald door twee vergelijkingen | 47 |

Hoofdstuk 3

Extreme waarden

- | | | |
|----|--|----|
| 10 | Extreme waarden bij impliciet gegeven functies van één variabele | 51 |
| 11 | Extremen bij functies van twee variabelen | 54 |
| 12 | Voldoende voorwaarden voor ex- | |

- | | | |
|----|--|----|
| | tremen bij een functie van twee veranderlijken | 57 |
| 13 | De methode van de kleinste kwadraten | 64 |
| 14 | Extremen met nevenvoorwaarden bij functies van één veranderlijke | 66 |
| 15 | Extreme waarden bij impliciet gegeven functies van twee veranderlijken | 74 |
| 16 | Extreme waarden bij functies van meer dan twee veranderlijken met nevenvoorwaarden | 78 |
| 17 | De multiplicatorenmethode van Lagrange | 84 |

Hoofdstuk 4

Vectoranalyse

- | | | |
|----|---|----|
| 18 | Vectorruimten | 88 |
| 19 | Vectorveld; vectorfunctie; scalair veld; scalaire functie | 88 |
| 20 | De gradiënt van een scalair veld | 90 |
| 21 | De divergentie van een vectorveld | 92 |
| 22 | De rotatie van een vectorveld | 93 |
| 23 | Betrekkingen tussen gradiënt, divergentie en rotatie | 94 |
| 24 | Vectoranalyse | 95 |

Hoofdstuk 5

Vlakke krommen

- | | | |
|----|--------------------------------------|-----|
| 25 | Parametervoorstelling van een kromme | 100 |
|----|--------------------------------------|-----|

26 Differentiatie van een in parameter- vorm gegeven functie	105	54 Expliciete berekening van de dub- belintegraal. Herhaalde integraal bij constante grenzen	185
27 Voorstelling van een kromme in poolcoördinaten	108	55 Riemann-sommen bij dubbelintegra- len	189
28 De booglengte van een vlakke krom- me	112	56 Dubbelintegraal over algemene inte- gratiegebieden	190
29 De booglengte als parameter	122	57 Berekening van de dubbelintegraal over algemene integratiegebieden	194
30 Kromming en kromtestraal	123	58 De stelling van Green voor het plat- te vlak	201
31 Tangentiële vector en normaalvector	125	59 Gevolgen van de stelling van Green; exacte differentiaal	211
32 Uitdrukkingen voor de kromming en de kromtestraal	128	60 Kromlijngige coördinaten; inverse transformatie	220
33 Voorbeelden van berekening van kromming en kromtestraal	133	61 Existentievoorwaarden voor de in- verse transformatie	228
Hoofdstuk 6		62 Invoeren van nieuwe variabelen in een dubbelintegraal	232
<i>Ruimtekrommen</i>		63 Meetkundige toelichting bij de transformatie van dubbelintegralen	238
34 Parameter- en vectorvoorstelling van een ruimtekromme	137	64 Enkele toepassingen van transfor- matie van dubbelintegralen	240
35 Eliminatie van de parameter	139	65 Cilindercoördinaten in dubbelinte- gralen	242
36 Raaklijn aan een ruimtekromme; normaalvlak	141	66 Oneigenlijke integralen 1	248
37 Booglengte van een ruimtekromme	142	67 Oneigenlijke integralen 2	253
38 Triëder van Trenet-Serret	145	68 Drievoudige integraal	255
39 Formules van Trenet-Serret	147	69 Cilindercoördinaten en bolcoördi- naten	258
40 Meetkundige betekenis van de krom- ming	148	70 Berekening van de oppervlakte van een vlakke figuur	266
41 Meetkundige betekenis van de torsie	150	71 Algemene formules voor inhouden. Inhouden van omwentelingslicha- men	269
42 Meetkundige betekenis van het os- culatievlak	152	72 Oppervlakte van een gebogen vlak in rechthoekige coördinaten	275
43 Voorbeeld van berekening van de in dit hoofdstuk ingevoerde grootheden	154	73 Berekening van de oppervlakte van een ruimteoppervlak met behulp van kromlijngige coördinaten	280
44 Raakvlak aan een oppervlak	157	74 Berekening van de oppervlakte van een ruimteoppervlak met behulp van cilindercoördinaten	282
Hoofdstuk 7		75 Berekening van de oppervlakte van een ruimteoppervlak met behulp van bolcoördinaten	284
<i>Lijnintegralen</i>		76 Oppervlakte van omwentelingslicha- men	288
45 Het begrip lijnintegraal	161		
46 Existentie van de lijnintegraal	163		
47 Eigenschappen van de lijnintegraal	165		
48 Voorbeelden van lijnintegralen	166		
49 Fysische betekenis van de lijninte- graal. Massadichtheid	169		
50 Arbeidsintegraal	172		
Hoofdstuk 8			
<i>Meervoudige integralen</i>			
51 Inhoudsbegrip; dubbelintegraal	176		
52 Existentie van de dubbelintegraal van continue functies	179		
53 Eigenschappen van dubbelintegralen	183		

Hoofdstuk 9

Integraalstellingen

77	Oppervlak-integralen	292
78	Inleidende opmerkingen over integraalstellingen	296
79	Het divergentietheorema (Stelling van Gauss)	299
80	Stellingen van Green voor de ruimte	306
81	De stelling van Stokes	308
82	Fysische betekenis van divergentie, rotatie en de integraalstellingen	314

Hoofdstuk 10

Massa. Zwaartepunt. Traagheidsmoment

83	Massa en massadichtheid van een oppervlak en van een lichaam	318
----	--	-----

84	Statisch moment, zwaartepunt, traagheidsmoment van systemen van een eindig aantal massapunten	320
85	Statisch moment, zwaartepunt, traagheidsmoment bij continue massaverdeling	322
86	Verschuivingsstelling voor vlakke traagheidsmomenten	329
87	Regels van Guldin (Pappus)	331

Hoofdstuk 11

Gamma- en bètafunctie

88	De gammafunctie	334
89	De bètafunctie	336

Register	342
-----------------	-----



Beknopte lijst van gebruikte symbolen

$a = b$	a gelijk aan b
$a \neq b$	a niet gelijk aan b
$a \approx b$	a „ongeveer” gelijk aan b
$a > b$	a groter dan b
$a \geq b$	a groter dan b of a gelijk aan b
$a < b$	a kleiner dan b
$a \leq b$	a kleiner dan b of a gelijk aan b
\Rightarrow	impliceert; als ..., dan ...; hieruit volgt
\Leftrightarrow	is equivalent met; is gelijkwaardig met
\wedge	en
\vee	of
$V = \{a, b, c\}$	V is de verzameling van de elementen a , b en c
$V = \{x P(x)\}$	V is de verzameling van alle elementen x die de eigenschap P hebben
\emptyset	de lege verzameling
$a \in V$	a is een element van V
$p \notin V$	p is niet een element van V
$V \subset W$	V is een deelverzameling van W
$V \not\subset W$	V is geen deelverzameling van W
$C \cap D$	de doorsnede van C en D („ C door D ”)
$E \cup F$	de vereniging van E en F („ E met F ”)
$A \setminus B$	„ A , en daaruit weggelaten B ”; $\{x \in A x \notin B\}$
$V \times W$	de verzameling geordende paren (x, y) , waarvoor geldt $x \in V \wedge y \in W$
\mathbb{N}	de verzameling natuurlijke getallen
\mathbb{Z}	de verzameling gehele getallen
\mathbb{Q}	de verzameling rationale getallen
\mathbb{R}	de verzameling reële getallen
\mathbb{C}	de verzameling complexe getallen
\circ	operatietekens
$\forall [a, b \in \mathbb{R}] \dots$	voor iedere a en b , element van \mathbb{R} geldt ... („alquantor”)
$\exists [x \in V] \dots$	er is een $x \in V$, waarvoor geldt ... („existentiequantor”)
$n!$	$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ ($n \in \mathbb{N}$); spreek uit: n -faculteit

$(\underline{a}, \underline{b})$	}	inwendig produkt van de vectoren \underline{a} en \underline{b}
$\underline{a} \cdot \underline{b}$		uitwendig produkt van de vectoren \underline{a} en \underline{b}
$\underline{a} \times \underline{b}$	}	Nabla operator
∇		gradiënt van de scalaire functie $f: \underline{x} \mapsto f(\underline{x})$
∇f	}	divergentie van de vectorfunctie $\underline{v}: \underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x})$
grad $f(\underline{x})$		rotatie van de vectorfunctie $\underline{v}: \underline{x} \mapsto \underline{v}(\underline{x})$
(∇, \underline{v})	}	operator van Laplace
$\nabla \cdot \underline{v}$		norm van de vector \underline{v}
div $\underline{v}(\underline{x})$	}	
$\nabla \times \underline{v}$		
rot $\underline{v}(\underline{x})$	}	
∇^2		
Δ		
$\ \underline{v}\ $		

Functies van twee veranderlijken

1 Continuïteit en differentieerbaarheid

In deel 1 zijn voor een functie van twee veranderlijken de begrippen limiet, continuïteit, partiële differentieerbaarheid, totale differentieerbaarheid en richtingsafgeleide ingevoerd.

Hieronder volgen enkele stellingen die de samenhang tussen deze begrippen aangeven. G stelt daarbij steeds een deelgebied voor van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Stelling 1

Als f_x en f_y begrensd zijn in G , dan is f continu in G .

Bewijs:

Als $A \in G$ het getallenpaar (x_0, y_0) is en h en k getallen zó dat de drie punten $(x_0 + h, y_0 + k)$, $(x_0 + h, y_0)$ en $(x_0, y_0 + k)$ en hun rechte verbindingslijnen in G liggen (zie fig. 1) en als we verder aannemen

$$|f_x(x, y)| < M, |f_y(x, y)| < N \quad \forall (x, y) \in G$$

dan geldt:

$$\begin{aligned} |f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| &\leq |f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k)| + \\ &+ |f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| = \\ &= |h| |f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k)| + |k| |f_y(x_0, y_0 + \theta_2 k)| \\ &\qquad\qquad\qquad (0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_2 < 1) \end{aligned}$$

volgens de middelwaardstelling voor functies van één veranderlijke.

Hieruit volgt:

$$|f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)| \leq |h|M + |k|N$$

en dus:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$

Stelling 2

Als f_x en f_y continu zijn in een punt $P \in G$, dan is f totaal differentieerbaar in P .

Voor het bewijs zie deel 1, blz. 396.

Stelling 3

Als f totaal differentieerbaar is in een punt $P \in G$, dan geldt

a f is continu in P ;

b f is in P differentieerbaar in alle richtingen.

Voor het bewijs zie deel 1, blz. 397-399.

Opmerking:

Als f_x en f_y bestaan in $P \in G$, dan hoeft f niet noodzakelijk continu in P te zijn.

Voor het bewijs van deze bewering geven wij het volgende „tegenvoorbeeld”.

Stel dat f een functie is, gedefinieerd als:

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$f(0, 0) = 0$$

Nu is:

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Evenzo bewijst men $f_y(0, 0) = 0$.

In $(0, 0)$ bestaan dus f_x en f_y .

Nadert men langs de lijn met vergelijking $y = mx$ tot 0, dan geldt:

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx^2}{x^2(1+m^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m}{1+m^2} \\ &= \frac{m}{1+m^2}\end{aligned}$$

Daar deze uitdrukking afhankelijk is van m , bestaat dus $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ niet, en is $f(x,y)$ zeker niet continu in $(0,0)$.

2 Gemengde partiële afgeleiden

In deel 1 vermeldden we zonder bewijs de volgende stelling:

Stelling

Als in een gebied $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de partiële afgeleide functies van de eerste en de tweede orde van f bestaan en als in een punt $(x_0, y_0) \in G$ de functies f_{xy} en f_{yx} continu zijn, dan geldt:

$$f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$$

We zullen deze stelling nu bewijzen.

Bewijs:

We beschouwen de uitdrukking:

$$F = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$$

waarbij h en k beide $\neq 0$ zijn, en zo groot dat de 3 punten $(x_0 + h, y_0 + k)$, $(x_0 + h, y_0)$ en $(x_0, y_0 + k)$ en hun rechte verbindingslijnen in G liggen (zie fig. 1). We stellen:

$$f(x, y_0 + k) - f(x, y_0) = \varphi(x) \text{ en } f(x_0 + h, y) - f(x_0, y) = \psi(y)$$

dan geldt:

$$F = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0)$$

en ook:

$$F = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0)$$

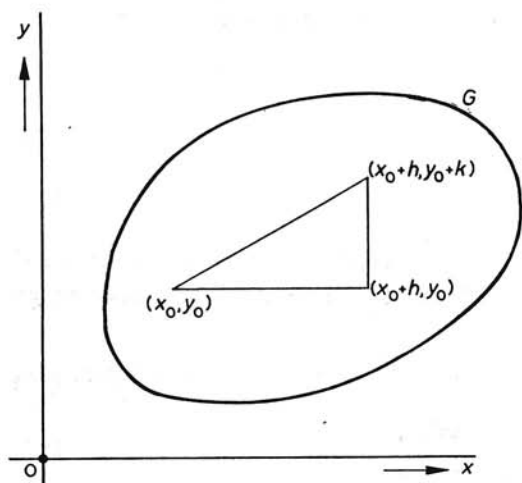


Fig. 1

Volgens de middelwaardstelling voor één veranderlijke kan men voor beide vormen schrijven:

$$\begin{cases} F = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) = h\varphi'(x_0 + \theta_1 h) & (0 < \theta_1 < 1) \\ F = \psi(y_0 + k) - \psi(y_0) = k\psi'(y_0 + \theta_2 k) & (0 < \theta_2 < 1) \end{cases} \quad (2.1)$$

Nu is:

$$\varphi'(x_0 + \theta_1 h) = f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + k) - f_x(x_0 + \theta_1 h, y_0)$$

$$\psi'(y_0 + \theta_2 k) = f_y(x_0 + h, y_0 + \theta_2 k) - f_y(x_0, y_0 + \theta_2 k)$$

Past men op deze rechterleden weer de middelwaardstelling toe, dan vindt men wegens (2.1):

$$F = hkf_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_3 k) \quad (0 < \theta_3 < 1)$$

$$F = khf_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_2 k) \quad (0 < \theta_4 < 1)$$

zodat:

$$f_{xy}(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_3 k) = f_{yx}(x_0 + \theta_4 h, y_0 + \theta_2 k)$$

Laat men nu h en k tot nul naderen, dan volgt het gestelde uit de gegeven continuïteit van f_{xy} en f_{yx} in (x_0, y_0) .

3 Homogene functies. Stelling van Euler

We beschouwen de functies f_1, f_2, f_3 , gedefinieerd op een geschikt gekozen deelverzameling van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ door:

$$f_1(x, y) = x^3 + y^3$$

$$f_2(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$$

$$f_3(x, y) = xy \ln \frac{y}{x}$$

Elk van deze functies heeft de eigenschap dat als men de veranderlijken x en y vervangt door λx resp. λy , waarin λ een parameter is, de functiewaarde vermenigvuldigd wordt met een macht van λ . Zo is:

$$f_1(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 = \lambda^3(x^3 + y^3) \quad (3.1)$$

$$f_2(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2(\lambda y)^2}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \lambda^2 \left(\frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \right) \quad (3.2)$$

$$f_3(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) \ln \frac{\lambda y}{\lambda x} = \lambda^2 \left(xy \ln \frac{y}{x} \right) \quad (3.3)$$

Functies met deze eigenschap noemen we *homogene functies*.

Definitie

Een functie f , gedefinieerd op een deelverzameling van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, heet *homogeen van de graad n* , indien geldt:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

voor alle waarden van x , y en λ , waarvoor $f(\lambda x, \lambda y)$ en $f(x, y)$ zijn gedefinieerd.

Opmerking 1:

De graad kan ook negatief, nul of gebroken zijn. Zo is f_4 met $f_4(x, y) = \frac{x}{x^3 + y^3}$ homogeen van de graad -2 , f_5 met $f_5(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ homogeen van de graad 0 en f_6 met $f_6(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$ homogeen van de graad $\frac{2}{3}$.

Opmerking 2:

Het begrip homogeniteit bestaat ook bij functies van meer dan twee variabelen. De definitie voor homogeniteit luidt dan, kort gezegd:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_m) = \lambda^n f(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (3.4)$$

Een belangrijke stelling over homogene functies is de volgende.

Stelling van Euler*

Als f een functie is, die gedefinieerd is op een open deelverzameling van \mathbb{R}^m , en daar alle partiële afgeleiden bezit van de eerste orde, terwijl f homogeen is van de graad n , dan geldt:

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + x_m \frac{\partial f}{\partial x_m} = nf(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad (3.5)$$

Bewijs:

We differentiëren beide leden van de identiteit in λ (3.4) naar λ en vinden dan volgens de kettingregel:

$$x_1 \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m)}{\partial(\lambda x_1)} + \dots + x_m \frac{\partial f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_m)}{\partial(\lambda x_m)} = n\lambda^{n-1}f(x_1, \dots, x_m)$$

Deze betrekking geldt voor alle waarden van λ . Stellen we hierin $\lambda = 1$, dan volgt direct (3.5).

We verifiëren deze stelling aan de functie f_3 uit (3.3):

$$f_3(x, y) = xy \ln \frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x} = y \left(-1 + \ln \frac{y}{x} \right)$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial y} = x \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right)$$

$$\begin{aligned} x \frac{\partial f_3}{\partial x} + y \frac{\partial f_3}{\partial y} &= xy \left(-1 + \ln \frac{y}{x} \right) + xy \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right) \\ &= 2xy \ln \frac{y}{x} = 2f_3(x, y) \end{aligned}$$

4 De middelwaardstelling voor een functie van twee veranderlijken

Stelling

Laat f gedefinieerd zijn op een deelgebied G van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ en daar partiële afgeleiden bezitten van de eerste orde, waarbij f_x of f_y continu is. Als nu (x_0, y_0) en $(x_0 + h, y_0 + k)$ twee punten van G zijn, waarvan de rechte verbindingslijn geheel in G ligt,

* Leonhard Euler 1707–1783.

dan is er minstens één getal $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ zó dat:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (4.1)$$

Deze stelling heet de *middelwaardestelling* voor een functie van twee veranderlijken.

Bewijs:

De functie F met

$$F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$$

waarin t een veranderlijke is op het interval $[0, 1]$ is voor alle waarden van t uit dit interval differentieerbaar.

Volgens de middelwaardestelling voor een functie van één veranderlijke is dus:

$$F(1) = F(0) + F'(\theta) \quad (0 < \theta < 1) \quad (4.2)$$

Nu is:

$$F(1) = f(x_0 + h, y_0 + k); F(0) = f(x_0, y_0) \quad (4.3)$$

Verder is, daar aan de voorwaarden voor het differentiëren van samengestelde functies is voldaan (zie deel 1, blz. 403):

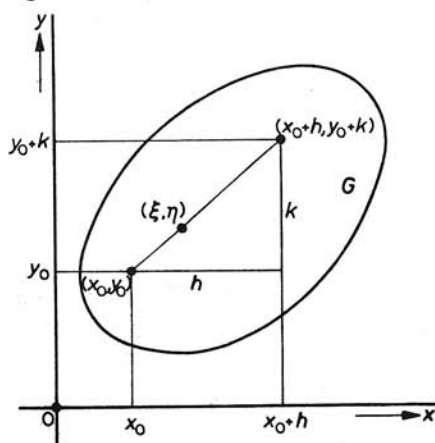
$$F'(t) = hf_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + kf_y(x_0 + ht, y_0 + kt) \quad (4.4)$$

Uit (4.2), (4.3) en (4.4) volgt het gestelde.

Opmerking:

Daar het punt $(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$ ($0 < \theta < 1$) een punt (ξ, η) voorstelt van de rechte verbindinglijn tussen de punten (x_0, y_0) en $(x_0 + h, y_0 + k)$ (zie fig. 2) kan

Fig. 2



men (4.1) ook schrijven als:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + hf_x(\xi, \eta) + kf_y(\xi, \eta)$$

Gevolg 1

Men kan gemakkelijk de fout schatten die men maakt als men voor de *differentie*

$$\Delta f = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$$

in de plaats stelt:

$$hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0)$$

Is nl. op het segment van (x_0, y_0) naar $(x_0 + h, y_0 + k)$:

$$M_x = \sup f_x, \quad m_x = \inf f_x$$

$$M_y = \sup f_y, \quad m_y = \inf f_y$$

dan is deze fout absoluut genomen nooit groter dan:

$$|h|(M_x - m_x) + |k|(M_y - m_y)$$

Gevolg 2

Zijn de partiële afgeleiden van f in een omgeving van een punt (x_0, y_0) steeds nul, dan is f in deze omgeving constant. Immers, is $(x_0 + h, y_0 + k)$ een punt van deze omgeving, dan is dit ook het geval voor $(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$. Bovendien is $f_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0$ en $f_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0$, zodat:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0)$$

Gevolg 3

Met behulp van de middelwaardestelling kunnen we een ander bewijs geven van de stelling (zie deel 1, par. 136):

Als f_x en f_y continu zijn in $P \in G$, dan is f differentieerbaar in P .

Dit bewijs verloopt als volgt:

Als f_x en f_y continu zijn in een punt $P(x_0, y_0)$, dan bestaan deze in een omgeving van dat punt. Volgens de middelwaardestelling geldt dan (als h en k weer zo zijn dat de rechte die (x_0, y_0) verbindt met $(x_0 + h, y_0 + k)$ geheel in G ligt):

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + hf_x(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) + \\ &+ kf_y(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Schrijft men $h = x - x_0$ en $k = y - y_0$ en

$$\varphi(x, y) = f_x(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$$

$$\psi(x, y) = f_y(x_0 + \theta(x - x_0), y_0 + \theta(y - y_0))$$

dan gaat (4.5) over in:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\varphi(x, y) + (y - y_0)\psi(x, y)$$

Daar φ en ψ continu zijn in (x_0, y_0) staat hier juist dat f aan de definitie van totale differentieerbaarheid voldoet.

5 De formules van Taylor voor een functie van twee veranderlijken

We veronderstellen dat f in een gebied G dat de verbindingsrechte van (x_0, y_0) met $(x_0 + h, y_0 + k)$ geheel bevat, continue partiële afgeleiden van de n^{de} -orde ($n \geq 1$) bezit. De functie F van de veranderlijke t , gedefinieerd door $F(t) = f(x_0 + ht, y_0 + kt)$ is dan voor t , waarbij $t \in [0, 1]$, tenminste n maal continu differentieerbaar naar t .

Volgens de formules van Maclaurin met de restterm van Lagrange is dan:

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!} F'(0) + \frac{1}{2!} F''(0) + \dots + \frac{1}{(n-1)!} F^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!} F^{(n)}(\theta) \quad (5.1)$$

waarin $0 < \theta < 1$ is.

Nu is:

$$F'(t) = hf_x(x_0 + ht, y_0 + kt) + kf_y(x_0 + ht, y_0 + kt)$$

$$F''(t) = h^2 f_{xx}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 2hk f_{xy}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k^2 f_{yy}(x_0 + ht, y_0 + kt)$$

$$F'''(t) = h^3 f_{xxx}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 3h^2 k f_{xxy}(x_0 + ht, y_0 + kt) + 3hk^2 f_{xyy}(x_0 + ht, y_0 + kt) + k^3 f_{yyy}(x_0 + ht, y_0 + kt)$$

enz.

Ter vereenvoudiging van de schrijfwijze gebruikt men de symbolische operator:

$$\left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m$$

De vorm tussen haakjes wordt hierbij ontwikkeld volgens het binomium van Newton.

De uitdrukking $\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^p \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^q$ toegepast op $f(x, y)$ wordt vervangen door de partiële

afgeleide $f_{x^p y^q}(x, y)$. Hieruit volgt:

$$\begin{aligned}
 F'(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0 + ht, y_0 + kt) \\
 F''(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0 + ht, y_0 + kt) \\
 F'''(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^3 f(x_0 + ht, y_0 + kt) \\
 &\dots \dots \dots \\
 F^{(n)}(t) &= \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0 + ht, y_0 + kt)
 \end{aligned}$$

Past men dit toe op (5.1), dan vindt men:

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \\
 &+ \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \\
 &+ \dots + \frac{1}{(n-1)!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^{n-1} f(x_0, y_0) + R_n(h, k)
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

waarin:

$$R_n(h, k) = \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)$$

Deze formule noemt men de *formule van Taylor* voor een functie van twee veranderlijken.

In het algemeen nadert de restterm $R_n(h, k)$ van een hogere orde tot nul dan de term ervoor, d.w.z. als $h \rightarrow 0$ en $k \rightarrow 0$ dan is $R_n(h, k) = \varepsilon r^{n-1}$, waarin $\varepsilon \rightarrow 0$ als $r = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$.

Zo kan men voor $n = 2$ ook schrijven:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k \tag{5.3}$$

waarin $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ als $r \rightarrow 0$.

Kiest men $h = dx$ en $k = dy$, dan stellen de eerste twee termen van het rechterlid van (5.3) juist de totale differentiaal dz voor van $z = f(x, y)$, terwijl het linkerlid de differentie Δz van $f(x, y)$ aangeeft. Er geldt dus:

$$\Delta z = dz + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

waarin $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ als $r = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$.

Is $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(h, k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^n f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = 0$ voor alle θ met

$0 < \theta < 1$, dan kan men $f(x_0 + h, y_0 + k)$ in een convergente reeks naar h en k ontwikkelen.

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} \left(h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x_0, y_0) + \dots$$

Deze reeks heet de *reeks van Taylor* voor een functie van twee veranderlijken.

6 Invoeren van nieuwe variabelen

We nemen in deze paragraaf aan dat alle optredende functies voldoende vaak differentieerbaar zijn.

Stel dat f een functie is die gedefinieerd is op een deelverzameling $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en $z = f(x, y)$.

In veel gevallen is het gewenst in plaats van de variabelen x en y nieuwe variabelen in te voeren, die op een gegeven wijze samenhangen met x en y .

Voorbeeld

$$z = f(x, y) = x^3 + y^3$$

We voeren u en v in door:

$$x = \varphi(u, v) = u^2 + v^2$$

$$y = \psi(u, v) = u + v$$

Er geldt dan:

$$z = f\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\} = f^*(u, v) = (u^2 + v^2)^3 + (u + v)^3$$

We kunnen nu b.v. vragen om $\frac{\partial f^*}{\partial u}$ en $\frac{\partial f^*}{\partial v}$ uit te drukken in $x, y, \frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$

(„nieuw in oud”), maar ook om $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ uit te drukken in $u, v, \frac{\partial f^*}{\partial u}, \frac{\partial f^*}{\partial v}$ („oud in nieuw”).

Van de vele gevallen die zich kunnen voordoen, bespreken wij de volgende:

Geval 1

Gegeven: $z = f(x, y)$. Men stelt $x = \varphi(u, v)$ en $y = \psi(u, v)$. Dan geldt:

$$z = f\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\} = f^*(u, v)$$

Gevraagd: Druk $\frac{\partial f^*}{\partial u}$ en $\frac{\partial f^*}{\partial v}$ uit in $x, y, \frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ („nieuw in oud”).

Oplossing:

Volgens de kettingregel geldt:

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

Nu bevatten $\frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ en $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ de variabelen u en v , en om het geheel in $x, y, \frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ uit te drukken zal men in het algemeen trachten u en v op te lossen uit $x = \varphi(u, v)$ en $y = \psi(u, v)$, tenzij bijzondere combinaties het mogelijk maken dit oplossen te voorkomen (zie voorbeelden).

Geval 2

Gevraagd: Druk $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ uit in $u, v, \frac{\partial f^*}{\partial u}$ en $\frac{\partial f^*}{\partial v}$ („oud in nieuw”).

Oplossing:

Onder bepaalde voorwaarden kunnen we u en v oplossen uit $x = \varphi(u, v)$ en $y = \psi(u, v)$.

Deze voorwaarden zullen worden besproken in par. 61.

We nemen aan dat aan deze voorwaarden is voldaan en stellen in dat geval $u = g(x, y)$ en $v = h(x, y)$, zodat:

$$z = f^*\{g(x, y), h(x, y)\} = f(x, y)$$

Toepassing van de kettingregel geeft dan:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f^*}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f^*}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$$

We willen nu nog $\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$ en $\frac{\partial h}{\partial y}$ uitdrukken in u en v , en wel het liefst zonder eerst $g(x, y)$ en $h(x, y)$ expliciet te berekenen. Dit is mogelijk door de gelijkheden $x = \varphi(u, v)$ en $y = \psi(u, v)$ partieel naar x , resp. y te differentiëren.

Partiële differentiatie naar x levert:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial \psi}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Als we nu onderstellen dat de determinant van dit stelsel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}$$

van nul verschilt voor alle betrokken waarden van u en v , dan kan men $\frac{\partial g}{\partial x}$ en $\frac{\partial h}{\partial x}$ oplossen.

We noemen deze determinant de *functionaaldeterminant* of ook wel de *determinant van Jacobi**, of, met een germanisme, de *Jacobiaan*. Gewoonlijk wordt een dergelijke determinant symbolisch aangegeven door $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$. Lost men uit (6.1) $\frac{\partial g}{\partial x}$ en $\frac{\partial h}{\partial x}$ op, dan krijgt men als $\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} \neq 0$:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}}$$

en

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial u}}{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}}$$

Op eenzelfde wijze levert partiële integratie naar y :

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}}$$

en

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}}$$

* Carl Gustav Jacobi (1804–1851).

Voorbeeld 1

Gegeven:

$$z = f(x, y) = \frac{1}{3}(x^3 + y^3)$$

Men stelt

$$x = \rho \cos \varphi \text{ en } y = \rho \sin \varphi$$

Dan geldt:

$$z = \frac{1}{3}\{\rho^3 \cos^3 \varphi + \rho^3 \sin^3 \varphi\} = f^*(\rho, \varphi)$$

Gevraagd:

Druk $\frac{\partial f^*}{\partial \rho}$ en $\frac{\partial f^*}{\partial \varphi}$ uit in $x, y, \frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Oplossing:

Volgens de kettingregel geldt:

$$\frac{\partial f^*}{\partial \rho} = x^2 \cdot \cos \varphi + y^2 \cdot \sin \varphi$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial \varphi} = x^2 \cdot (-\rho \sin \varphi) + y^2 \cdot \rho \cos \varphi$$

Nu is $x^2 + y^2 = \rho^2$. Als we $\rho > 0$ veronderstellen dan is $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, dus

$$\cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ en } \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

zodat:

$$\frac{\partial f^*}{\partial \rho} = \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

en

$$\frac{\partial f^*}{\partial \varphi} = xy(y - x)$$

Opmerking:

Deze resultaten had men natuurlijk ook kunnen vinden door $f^*(\rho, \varphi)$ rechtstreeks naar ρ en φ partieel te differentiëren.

Voorbeeld 2

Gegeven:

$z = f(x, y)$. We stellen weer $x = \rho \cos \varphi$ en $y = \rho \sin \varphi$.

Dan geldt:

$$z = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = f^*(\rho, \varphi)$$

Gevraagd:

Druk $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ uit in ρ, φ en de partiële afgeleiden van f^* naar ρ en φ .

Oplossing:

We nemen aan dat we ρ en φ kunnen uitdrukken in x en y en stellen $\rho = g(x, y)$ en $\varphi = h(x, y)$.

Dan geldt:

$$z = f^*\{g(x, y), h(x, y)\} = f(x, y)$$

en dus volgens de kettingregel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

We bepalen $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ en $\frac{\partial h}{\partial y}$ door $x = \rho \cos \varphi$ en $y = \rho \sin \varphi$ partieel te differentiëren naar x , resp. y :

$$1 = \cos \varphi \cdot \frac{\partial g}{\partial x} - \rho \sin \varphi \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$0 = \cos \varphi \cdot \frac{\partial g}{\partial y} - \rho \sin \varphi \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$0 = \sin \varphi \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \rho \cos \varphi \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$1 = \sin \varphi \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \rho \cos \varphi \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\rho \sin \varphi \\ 0 & \rho \cos \varphi \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix}} = \cos \varphi$$

en analoog:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \sin \varphi$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{\rho}$$

Uit (6.2) volgt door partiële differentiatie naar x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f^*}{\partial \rho} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi \partial \rho} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \\ &= \frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \\ &\quad + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Evenzo door partiële differentiatie naar y :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f^*}{\partial \rho} \right) \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \right) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi \partial \rho} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho^2} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \\
&\quad + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi^2} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

We vinden $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$ en $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$ door partiële differentiatie uit $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ en $\frac{\partial h}{\partial y}$ aldus:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} &= -\sin \varphi \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\
&= \frac{\sin^2 \varphi}{\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} &= -\frac{\rho \cos \varphi \frac{\partial h}{\partial x} - \sin \varphi \frac{\partial g}{\partial x}}{\rho^2} \\
&= -\frac{-\sin \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi}{\rho^2} \\
&= \frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} &= \cos \varphi \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \\
&= \frac{\cos^2 \varphi}{\rho}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} &= \frac{-\rho \sin \varphi \frac{\partial h}{\partial y} - \cos \varphi \frac{\partial g}{\partial y}}{\rho^2} \\
&= -\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}
\end{aligned}$$

Ingevuld in (6.3) en (6.4) geeft dit:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho^2} \cos^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \left(\frac{-\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} \right) + \\
&\quad + \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{\rho^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho^2} \sin^2 \varphi + 2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho \partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\rho} + \\ &+ \frac{\partial f^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\rho} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi^2} \cdot \frac{\cos^2 \varphi}{\rho^2} + \frac{\partial f^*}{\partial \varphi} \cdot \left(-\frac{\sin 2\varphi}{\rho^2} \right) \end{aligned}$$

en opgeteld:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f^*}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2 f^*}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial f^*}{\partial \rho}$$

Stel $z = f(x, y)$. We voeren nu nieuwe variabelen u en v in, die in tegenstelling tot het in geval 1 besprokene, expliciet zijn uitgedrukt in x en y , dus in de gedaante $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$.

Als wij aannemen dat x en y kunnen worden uitgedrukt in u en v , b.v. $x = \varphi(u, v)$ en $y = \psi(u, v)$, dan geldt:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ &= f\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\} \\ &= f^*(u, v) \end{aligned}$$

We kunnen ook hier weer twee problemen stellen:

Geval 3

Druk $\frac{\partial f^*}{\partial u}$ en $\frac{\partial f^*}{\partial v}$ uit in x, y , $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ („nieuw in oud”).

Geval 4

Druk $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ uit in u, v , $\frac{\partial f^*}{\partial u}$ en $\frac{\partial f^*}{\partial v}$ („oud in nieuw”).

We geven van de gevallen 3 en 4 een voorbeeld.

Voorbeeld 3

Gegeven:

$$z = f(x, y)$$

Men stelt:

$$\left. \begin{aligned} u &= e^x + e^y \\ v &= e^{-x} + e^{-y} \end{aligned} \right\}$$

(6.5)

Gevraagd:

Druk $\frac{\partial f^*}{\partial u}$ en $\frac{\partial f^*}{\partial v}$ uit in $x, y, \frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Oplossing:

Volgens de kettingregel is:

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

$\frac{\partial \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \psi}{\partial u}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ en $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ worden gevonden door (6.5) naar u resp. v partieel te differentiëren. Dit geeft:

$$1 = e^x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} + e^y \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$0 = e^x \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} + e^y \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

$$0 = -e^{-x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial u} - e^{-y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial u}$$

$$1 = -e^{-x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v} - e^{-y} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

waaruit men oplost:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{-e^{-y}}{e^{y-x} - e^{x-y}}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = \frac{e^{-x}}{e^{y-x} - e^{x-y}}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{-e^y}{e^{y-x} - e^{x-y}}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} = \frac{e^x}{e^{y-x} - e^{x-y}}$$

We vinden dus:

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} = \frac{-e^{-y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + e^{-x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y}}{e^{y-x} - e^{x-y}}$$

$$\frac{\partial f^*}{\partial v} = \frac{-e^y \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + e^x \cdot \frac{\partial f}{\partial y}}{e^{y-x} - e^{x-y}}$$

Voorbeeld 4

Gegeven:

$$z = f(x, y)$$

We voeren u en v in volgens:

$$\text{en } \left. \begin{array}{l} u = y^2 - x^2 = g(x, y) \\ v = y - x = h(x, y) \end{array} \right\} \quad (6.6)$$

Gevraagd:

Druk de vorm

$$y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (x + y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

(gegeven in „oude” variabelen x en y) uit in „nieuwe” variabelen u en v .

Oplossing:

We nemen weer aan dat we x en y uit (6.6) kunnen oplossen in de gedaante:

$$x = \varphi(u, v) \text{ en } y = \psi(u, v)$$

zodat:

$$\begin{aligned} z &= f(x, y) \\ &= f\{\varphi(u, v), \psi(u, v)\} \\ &= f^*(u, v) \\ &= f^*\{g(x, y), h(x, y)\} \end{aligned}$$

Met de kettingregel vinden we weer

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f^*}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f^*}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f^*}{\partial u} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned}$$

Hierin is $\frac{\partial g}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial h}{\partial x} = -1$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial h}{\partial y} = 1$.

Op dezelfde wijze als geval 2 kan men afleiden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial f^*}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial f^*}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f^*}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2} \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial f^*}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial f^*}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (6.9)$$

Hierin is $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$.

Ingevuld in (6.7), (6.8) en (6.9) volgt er:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4x^2 \cdot \frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} + 4x \cdot \frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} - 2 \cdot \frac{\partial f^*}{\partial u} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xy \cdot \frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} - 2(x+y) \cdot \frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4y^2 \cdot \frac{\partial^2 f^*}{\partial u^2} + 4y \cdot \frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} + 2 \cdot \frac{\partial f^*}{\partial u} + \frac{\partial^2 f^*}{\partial v^2}$$

Substitutie in de gegeven vorm geeft:

$$y \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + (x+y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2v^2 \cdot \frac{\partial^2 f^*}{\partial u \partial v} - 2v \cdot \frac{\partial f^*}{\partial u}$$

Toepassing uit de theorie van de complexe functies

Deze toepassing is een voorbeeld van geval 2.

In de complexe functietheorie zijn van fundamenteel belang de z.g. *differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann*:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

en

$$\frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{\partial v}{\partial x}$$

Hierin zijn u en v functies van twee variabelen x en y (voldoend vaak differentieerbaar).

We voeren poolcoördinaten in $x = \rho \cos \varphi$ en $y = \rho \sin \varphi$, dan geldt:

$$u(x, y) = u(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

$$= u^*(\rho, \varphi)$$

$$v(x, y) = v(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

$$= v^*(\rho, \varphi)$$

We nemen weer aan dat we ρ en φ kunnen uitdrukken in x en y en stellen $\rho = g(x, y)$ en $\varphi = h(x, y)$.

De kettingregel geeft weer (zie (6.2)):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v^*}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial h}{\partial y}$$

(6.10)

Daar $\frac{\partial g}{\partial x} = \cos \varphi$, $\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\sin \varphi}{\rho}$, $\frac{\partial g}{\partial y} = \sin \varphi$ en $\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\cos \varphi}{\rho}$ (zie voorbeeld 2),

volgt uit (6.10):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v^*}{\partial \rho} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u^*}{\partial \rho} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{\rho}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v^*}{\partial \rho} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{\rho}$$

De differentiaalvergelijkingen van Cauchy-Riemann gaan dan over in:

$$\frac{\partial u^*}{\partial \rho} \cdot \cos \varphi - \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\rho} = \frac{\partial v^*}{\partial \rho} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{\rho}$$

en

$$\frac{\partial u^*}{\partial \rho} \cdot \sin \varphi + \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\cos \varphi}{\rho} = -\frac{\partial v^*}{\partial \rho} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi}{\rho}$$

dus:

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi - \left(\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} + \frac{\partial v^*}{\partial \rho} \right) \sin \varphi = 0$$

en

$$\left(\frac{\partial v^*}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi + \left(\frac{\partial u^*}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \varphi} \right) \sin \varphi = 0$$

Deze betrekkingen moeten gelden voor alle waarden van φ . Kies $\varphi = 0$ of $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, dan geldt:

$$\frac{\partial u^*}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial v^*}{\partial \varphi}$$

en

$$\frac{\partial v^*}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial u^*}{\partial \varphi}$$

Opmerking:

Het komt ook dikwijls voor dat in een betrekking tussen twee veranderlijken de rollen van afhankelijk en onafhankelijk veranderlijken worden verwisseld.

Voorbeeld

Neem aan dat de functie f een inverse φ heeft, dus als $y = f(x)$, dan is $x = \varphi(y)$.

We vragen nu $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d^2\varphi}{dy^2}$ en $\frac{d^3\varphi}{dy^3}$ uit te drukken in $\frac{df}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$ en $\frac{d^3f}{dx^3}$.

Oplossing:

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{1}{\frac{df}{dx}}$$

dus:

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = - \frac{\frac{d}{dy} \left(\frac{df}{dx} \right)}{\left(\frac{df}{dx} \right)^2}$$

$$= - \frac{\frac{d^2f}{dx^2} \cdot \frac{d\varphi}{dy}}{\left(\frac{df}{dx} \right)^2}$$

$$= - \frac{\frac{d^2f}{dx^2}}{\left(\frac{df}{dx} \right)^3}$$

$$\frac{d^3\varphi}{dy^3} = - \frac{\left(\frac{df}{dx} \right)^3 \cdot \frac{d^3f}{dx^3} - \frac{d^2f}{dx^2} \cdot 3 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \cdot \frac{d^2f}{dx^2}}{\left(\frac{df}{dx} \right)^6} \cdot \frac{d\varphi}{dy}$$

of:

$$\frac{d^3\varphi}{dy^3} = \frac{- \frac{df}{dx} \cdot \frac{d^3f}{dx^3} + 3 \left(\frac{d^2f}{dx^2} \right)^2}{\left(\frac{df}{dx} \right)^5}$$

Impliciete functies

7 Impliciete functies van één veranderlijke

Tot nu toe waren de functies van één veranderlijke waarmede we ons bezighielden gegeven in *expliciete* vorm, d.w.z. in de gedaante $f: x \mapsto f(x)$, of (als we de afhankelijk veranderlijke y noemen) in de gedaante $y = f(x)$. Vaak echter wordt het verband tussen de onafhankelijk veranderlijke x en de afhankelijk veranderlijke y gegeven door een betrekking van de vorm $F(x, y) = 0$. Dit is b.v. het geval bij de vergelijking van een rechte lijn, zoals $2x + 3y + 4 = 0$, of bij de vergelijking van een cirkel, b.v.

$x^2 + y^2 - 4 = 0$, of die van een ellips als $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$. Om nu een uit-

drukking te verkrijgen die het verband tussen x en y expliciet aangeeft trachten we y of x uit de vergelijking „op te lossen”. We zeggen dan dat de functie f resp. φ met $y = f(x)$ of $x = \varphi(y)$, die wij op deze wijze gevonden hebben, *impliciet* bepaald is door de vergelijking $F(x, y) = 0$, of traditioneel en minder correct, dat door de vergelijking $F(x, y) = 0$ y bepaald is als functie van x (resp. x bepaald is als functie van y). In veel gevallen lukt het eenduidig „oplossen” van y (resp. x) niet. Zo b.v. wel bij $2x + 3y + 4 = 0$, maar niet bij $2x^5 + 3xy^3 - 2y^5 = 7$. Het is daarom juist om aandacht te besteden aan de definitie van een impliciete functie. Het is onjuist te denken dat iedere gegeven vergelijking van de vorm: $F(x, y) = 0$ y als functie van x (of x als functie van y) definieert. Daartoe zou immers iedere x uit een bepaald interval één waarde voor y moeten bepalen. Neemt men als voorbeeld de vergelijking $2x^2 + 3y^2 - 2 = 0$, dan vindt men bij elke $x \in \langle -1, 1 \rangle$ twee verschillende waarden voor y . Als men neemt $2x^2 + 3y^2 + 2 = 0$, dan behoort bij geen enkele reële waarde van x een waarde voor y . We zullen daarom aangeven onder welke voorwaarden door de vergelijking $F(x, y) = 0$ y als functie van x (of x als functie van y) is gedefinieerd, en welke de eigenschappen van die functie zijn.

We formuleren de volgende stelling, waarvan we het bewijs achterwege laten.

Stelling

Stel dat een functie F gedefinieerd is op een gebied $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en daar continue partiële afgeleiden F_x en F_y heeft, en dat verder geldt $(x_0, y_0) \in G$ en wel zo dat $F(x_0, y_0) = 0$ en $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. Er bestaat dan een rechthoeksomgeving $\{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2\}$ met middelpunt (x_0, y_0) zodanig dat op $\langle x_1, x_2 \rangle$, y als functie van x gedefinieerd wordt door $F(x, y) = 0$. Als we stellen $y = f(x)$, dan geldt voor f :

a Bij iedere $x \in \langle x_1, x_2 \rangle$ behoort één waarde $y = f(x)$

b $f(x_0) = y_0$

c $F\{x, f(x)\} = 0 \quad \forall x \in \langle x_1, x_2 \rangle$

d $y_1 < f(x) < y_2 \quad \forall x \in \langle x_1, x_2 \rangle$

e f is differentieerbaar op $\langle x_1, x_2 \rangle$ en heeft daar een continue afgeleide.

Figuur 3 zal dit verduidelijken.

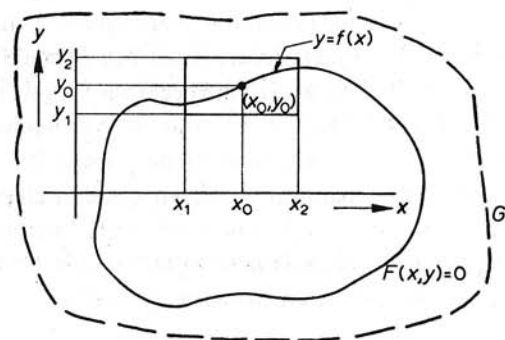
De eigenschappen b en c geven aan dat de grafiek van de functie f gaat door het punt (x_0, y_0) en ligt op de kromme bepaald door $F(x, y) = 0$.

Voorbeeld 1

Is gegeven $x^2 + y^2 = 4$, dan is er een rechthoeksomgeving van $(0, 2)$ waar geldt $y = \sqrt{4 - x^2}$, en de functie $x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$ heeft de in de stelling genoemde eigenschappen. Zo is er ook een rechthoeksomgeving van $(0, -2)$ waar geldt $y = -\sqrt{4 - x^2}$. De functie $x \mapsto -\sqrt{4 - x^2}$ heeft eveneens deze eigenschappen. In beide gevallen is, als men stelt $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ voldaan aan $F_y \neq 0$. Beschouwt men echter het punt $(2, 0)$, dan zien we: $F_y(2, 0) = 0$. In elke rechthoeksomgeving van $(2, 0)$ zal een deel verlopen van de kromme die door $F(x, y) = 0$ wordt bepaald. Dit is echter niet de grafiek van een functie, daar door elke x niet slechts één waarde van y is bepaald (zie figuur 4).

Is nu $F(x, y) = 0$ gegeven en voldoet F aan de in de stelling genoemde voorwaarden,

Fig. 3



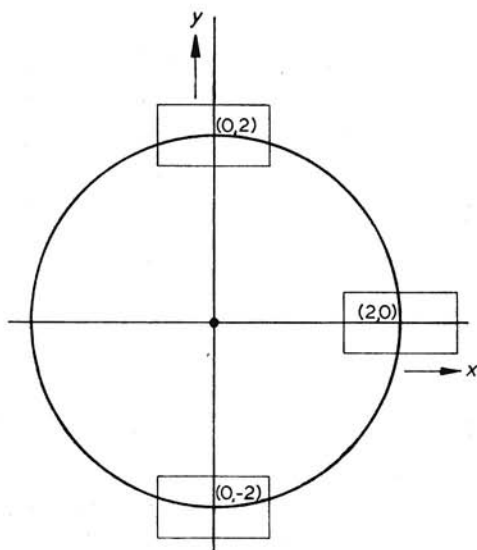


Fig. 4

dan is het eenvoudig om de afgeleiden van de functie f te vinden. Immers als $y = f(x)$, dan geldt:

$$F\{x, f(x)\} = 0$$

Partiële differentiatie naar x geeft:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} = 0 \quad (7.1)$$

en dus geldt (daar $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$):

$$\frac{df}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (7.2)$$

N.B. De uitdrukking (7.2) geldt voor alle functies f die door $F(x, y) = 0$ bepaald zijn. In het voorbeeld $F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ geldt dus (7.2) voor $f_1: x \mapsto \sqrt{4 - x^2}$ en voor $f_2: x \mapsto -\sqrt{4 - x^2}$ (zie fig. 5).

Voorbeeld 2

Bepaal de vergelijking van de raaklijn in het punt $(2, -2)$ aan de kegelsnede met vergelijking:

$$x^2 + xy + y^2 = 4$$

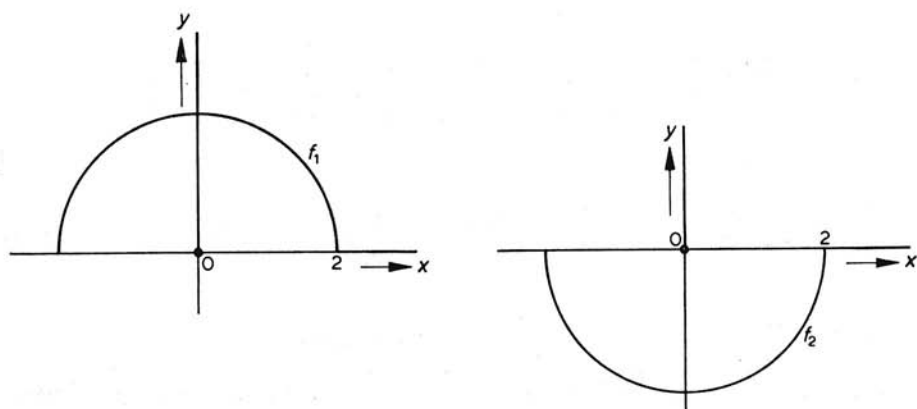


Fig. 5

Oplossing:

$$F(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x + y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x + 2y$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{(2,-2)} = 2$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{(2,-2)} = -2$$

Dus $f_x(2) = -\frac{2}{-2} = 1$. Dit is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in $(2, -2)$ aan de kegelsnede. De vergelijking van deze raaklijn is dus: $y + 2 = x - 2$, of: $x - y = 4$.

Als de uit $F(x, y) = 0$ bepaalde functie f met $y = f(x)$ tweemaal differentieerbaar is, dan kan men als volgt $\frac{d^2f}{dx^2}$ berekenen. We differentiëren:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx}$$

en vinden dan volgens (7.1):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} \right) \frac{df}{dx} = 0$$

of:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 = 0$$

of:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot \frac{df}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad (7.3)$$

Men bedenke bij deze afleiding dat $\frac{df}{dx}$ *alleen van x afhangt*.

In de betrekking (7.3) is $\frac{df}{dx}$ bekend, en daar $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ is, kan men $\frac{d^2 f}{dx^2}$ hieruit berekenen.

N.B. Hierbij is steeds ondersteld dat F voldoende vaak differentieerbaar is met continue afgeleiden.

Voorbeeld 3

Als $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en $y = f(x)$, bepaal dan $\frac{df}{dx}$ en $\frac{d^2 f}{dx^2}$ voor die waarden van x , waar dit mogelijk is.

Oplossing:

Als $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, dan geldt $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$ en $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$ en dus $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ voor $(a, 0)$ en $(-a, 0)$. Door naar x te differentiëren vindt men:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{df}{dx} = 0 \quad (7.4)$$

waaruit volgt:

$$\frac{df}{dx} = - \frac{b^2 x}{a^2 y} \quad (\text{mits } y \neq 0)$$

Door (7.4) nogmaals naar x te differentiëren verkrijgt men:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{y}{b^2} \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{1}{b^2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 = 0$$

of:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = - \frac{b^2}{y} \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{b^2}{y} \left\{ \frac{1}{a^2} + \frac{b^2 x^2}{a^4 y^2} \right\} \\
&= -\frac{b^2}{y} \left\{ \frac{a^2 y^2 + b^2 x^2}{a^4 y^2} \right\} \\
&= -\frac{b^2}{y} \frac{a^2 b^2}{a^4 y^2} \\
&= -\frac{b^4}{a^2 y^3}
\end{aligned}$$

Deze berekening geldt dus niet voor de punten $(\pm a, 0)$.

Voorbeeld 4

Als $x^2 y + xy^2 = 2p^3$ ($p \neq 0$) en $y = f(x)$, bepaal dan $\frac{df}{dx}$ en $\frac{d^2 f}{dx^2}$ in het punt (p, p) van de kromme voorgesteld door de vergelijking $y = f(x)$.

Oplossing:

Door differentiatie naar x vindt men:

$$2xy + y^2 + (x^2 + 2xy) \frac{df}{dx} = 0 \quad (7.5)$$

Dus voor het punt (p, p) :

$$3p^2 + 3p^2 \frac{df}{dx} = 0, \text{ of } \frac{df}{dx} = -1$$

Differentieert men (7.5) nogmaals naar x , dan verkrijgt men:

$$2y + (x^2 + 2xy) \frac{d^2 f}{dx^2} + 2(2x + 2y) \frac{df}{dx} + 2x \left(\frac{df}{dx} \right)^2 = 0$$

In het punt (p, p) :

$$2p + 3p^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + 8p(-1) + 2p \cdot 1 = 0$$

waaruit men oplost:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{4}{3p}$$

8 Impliciete functies van twee veranderlijken

De theorie van de vorige paragraaf kan uitgebreid worden tot functies met twee en meer veranderlijken. Voor impliciete functies van twee veranderlijken geldt:

Wanneer de vergelijking $F(x, y, z) = 0$ gegeven is, dan zal, indien F aan bepaalde voorwaarden voldoet, bij ieder paar (x, y) één waarde van z behoren. We zeggen dan dat door de vergelijking $F(x, y, z) = 0$ z bepaald is als functie van x en y , dus $z = f(x, y)$. In dit verband geldt een stelling, analoog met die van par. 7, die we ook hier niet zullen bewijzen.

Stelling

Laat de functie F gedefinieerd zijn op een gebied $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (dus $F: (x, y, z) \mapsto F(x, y, z)$) en daar continue partiële afgeleiden F_x , F_y en F_z bezitten. Zij verder $(x_0, y_0, z_0) \in V$, en wel zo dat $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ en $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Dan bestaat er een „rechthoekige” omgeving:

$$\{(x, y, z) \mid x_1 \leq x \leq x_2; y_1 \leq y \leq y_2; z_1 \leq z \leq z_2\}$$

met middelpunt (x_0, y_0, z_0) , zodanig dat op het tweedimensionale gebied $G = \{(x, y) \mid x_1 < x < x_2; y_1 < y < y_2\}$ z als functie gedefinieerd wordt van x en y door $F(x, y, z) = 0$. Als we stellen $z = f(x, y)$, dan geldt:

a Bij iedere $(x, y) \in G$ behoort één waarde $z = f(x, y)$

b $f(x_0, y_0) = z_0$

c $F\{x, y, f(x, y)\} = 0 \quad \forall (x, y) \in G$

d $z_1 < f(x, y) < z_2 \quad \forall (x, y) \in G$

e f heeft continue partiële eerste afgeleiden naar x en naar y op G .

Is nu $F(x, y, z) = 0$ gegeven, en voldoet F aan de in de stelling genoemde voorwaarden, dan is het eenvoudig om de partiële afgeleiden van de functie f te vinden. Immers, als $z = f(x, y)$, dan geldt:

$$F\{x, y, f(x, y)\} = 0$$

Partiële differentiatie naar x geeft dan:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (8.1)$$

Evenzo geeft partiële differentiatie naar y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (8.2)$$

Daar $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ is, kan men hieruit oplossen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \\ \text{en} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Deze uitdrukkingen (8.3) gelden voor alle functies f die door $F(x, y, z) = 0$ bepaald zijn.

Voorbeeld 1

Als $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en $z = f(x, y)$, bepaal dan $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ voor die waarden van x en y , waar dit mogelijk is.

Oplossing:

Als:

$$F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$$

dan geldt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}$$

en

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{2z}{c^2}$$

dus:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \text{ als } z = 0 \text{ en } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Partiële differentiatie naar x geeft:

$$\frac{x}{a^2} + \frac{z}{c^2} \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

of:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{c^2}{a^2} \frac{x}{z}$$

Partiële differentiatie naar y geeft:

$$\frac{y}{b^2} + \frac{z}{c^2} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

of:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{c^2}{b^2} \frac{y}{z}$$

Deze betrekkingen gelden voor die punten waarvoor $z \neq 0$, dus niet voor de punten van de ellips: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$.

Voorbeeld 2

Uit de natuurkunde is bekend dat het verband tussen de spanning p , het volume V en de absolute temperatuur T van een afgesloten gewichtshoeveelheid gas gegeven wordt door de wet van Boyle-Gay Lussac,* t.w. $p \cdot V = R \cdot T$, waarin R de gasconstante voor die hoeveelheid is. Men kan nu achtereenvolgens p afhankelijk denken van V en T , dan V afhankelijk van T en p , en tenslotte T afhankelijk van p en V . We stellen dan:

$$p = p^*(V, T)$$

$$V = V^*(T, p)$$

$$T = T^*(p, V)$$

Er geldt dan de volgende stelling (de z.g. „-1 regel”).

Stelling

$$\left(\frac{\partial p^*}{\partial V}\right)\left(\frac{\partial V^*}{\partial T}\right)\left(\frac{\partial T^*}{\partial p}\right) = -1$$

Bewijs:

Stel $F(p, V, T) = p \cdot V - R \cdot T$, dan volgt uit $F(p, V, T) = 0$ achtereenvolgens:

$$F\{p^*(V, T), V, T\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{\partial p^*}{\partial V} + \frac{\partial F}{\partial V} = 0 \Rightarrow V \frac{\partial p^*}{\partial V} + p = 0 \Rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial V} = -\frac{p}{V}$$

* R. Boyle 1627-1691. J. L. Gay-Lussac 1778-1850.

$$F\{p, V^*(T, p), T\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial T} + \frac{\partial F}{\partial V} \cdot \frac{\partial V^*}{\partial T} = 0 \Rightarrow -R + p \frac{\partial V^*}{\partial T} = 0 \Rightarrow \frac{\partial V^*}{\partial T} = \frac{R}{p}$$

$$F\{p, V, T^*(p, V)\} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial T} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial p} = 0 \Rightarrow V - R \frac{\partial T^*}{\partial p} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T^*}{\partial p} = \frac{V}{R}$$

Dus:

$$\left(\frac{\partial p^*}{\partial V}\right) \left(\frac{\partial V^*}{\partial T}\right) \left(\frac{\partial T^*}{\partial p}\right) = -\frac{p}{V} \cdot \frac{R}{p} \cdot \frac{V}{R} = -1$$

Wanneer de functies F en f voldoende vaak differentieerbaar zijn met continue afgeleiden, dan kan men $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ als volgt berekenen:

Door (8.1) naar x partieel te differentiëren verkrijgt men:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad (8.4)$$

Door (8.1) naar y , of (8.2) naar x partieel te differentiëren, vindt men:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \quad (8.5)$$

terwijl partiële differentiatie van (8.2) naar y levert:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (8.6)$$

Uit (8.4), (8.5) en (8.6) kan men $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ oplossen daar $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ is en $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ uit (8.1) en (8.2) zijn berekend.

Hierbij is gebruik gemaakt van de gelijkheden $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}$ enz.

Voorbeeld 3

Als $xy + xz = y^2 + z^2$ en $z = f(x, y)$, bereken dan $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ voor die waarden van x en y waar dit mogelijk is.

Oplossing:

Stel $F(x, y, z) = xy + xz - y^2 - z^2$, dan is $\frac{\partial F}{\partial z} = x - 2z$ en $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ als $x - 2z \neq 0$.

Partiële differentiatie naar x en y geeft:

$$(y + z) + (x - 2z) \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (8.7)$$

dus:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y+z}{x-2z} \quad (x-2z \neq 0)$$

$$(x-2y) + (x-2z) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

dus:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{x-2y}{x-2z} \quad (x-2z \neq 0) \quad (8.8)$$

Nogmaals partieel differentiëren naar x in (8.7) levert:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + (x-2z) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} - 2 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 = 0$$

Na invullen van de gevonden waarde voor $\frac{\partial f}{\partial x}$ verkrijgt men:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(y+z)(x+y-z)}{(x-2z)^3}$$

Partiële differentiatie naar y in (8.7) geeft:

$$1 + (x-2z) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} - 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

waaruit volgt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{4(xz - y^2 - z^2)}{(x-2z)^3}$$

Evenzo geeft partiële differentiatie naar y in (8.8):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{(2z-x)^2 + (x-2y)^2}{(x-2z)^3}$$

De gevonden waarden zijn alleen juist als $x \neq 2z$.

9 Impliciete functies van één veranderlijke, bepaald door twee vergelijkingen

We veronderstellen dat tussen x , y en z de twee betrekkingen bestaan:

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, z) &= 0 \\ G(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.1)$$

Indien F in G aan bepaalde voorwaarden voldoen (o.a. dat $F_x, F_y, F_z, G_x, G_y, G_z$ con-

tinu zijn in een bepaald gebied $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, dan zijn y en z door (9.1) bepaald als functies van x , d.w.z. er bestaan functies f en g zodanig dat:

$$y = f(x)$$

en

$$z = g(x)$$

gedefinieerd op een zeker interval $\langle x_1, x_2 \rangle$, terwijl geldt:

$$\left. \begin{aligned} F\{x, f(x), g(x)\} &= 0 \\ G\{x, f(x), g(x)\} &= 0 \end{aligned} \right\} \forall x \in \langle x_1, x_2 \rangle \quad (9.2)$$

Bepaling van $\frac{df}{dx}$ en $\frac{dg}{dx}$ geschiedt door differentiatie naar x van de betrekkingen in (9.2). We vinden:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{df}{dx} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dg}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{df}{dx} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{dg}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.3)$$

Men kan $\frac{df}{dx}$ en $\frac{dg}{dx}$ uit deze vergelijkingen oplossen mits de determinant:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ongelijk nul is.

Dit is de reeds in par. 6 ingevoerde *functionaaldeterminant* of *determinant van Jacobi*, ook aangegeven door de notatie $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}$.

Lost men uit (9.3) $\frac{df}{dx}$ en $\frac{dg}{dx}$ op, dan verkrijgt men als $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$ is:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}$$

en

$$\frac{dg}{dx} = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}$$

Wil men ook $\frac{d^2f}{dx^2}$ en $\frac{d^2g}{dx^2}$ bepalen, dan gaat men op dezelfde wijze (9.3) als samengestelde functie differentiëren, daarbij bedenkend dat $\frac{df}{dx}$ en $\frac{dg}{dx}$ alleen van x afhangen.

Voorbeeld

Als

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$

en

$$y = f(x), z = g(x)$$

bepaal dan $\frac{df}{dx}$, $\frac{dg}{dx}$, $\frac{d^2f}{dx^2}$ en $\frac{d^2g}{dx^2}$.

Oplossing:

Differentiatie naar x geeft:

$$\left. \begin{aligned} x + y \frac{df}{dx} + z \frac{dg}{dx} &= 0 \\ 1 + \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

Hieruit zijn $\frac{df}{dx}$ en $\frac{dg}{dx}$ oplosbaar indien:

$$\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = y - z \neq 0$$

We veronderstellen $y \neq z$. In dit geval is:

$$\frac{df}{dx} = \frac{z - x}{y - z}; \quad \frac{dg}{dx} = \frac{x - y}{y - z} \quad (9.5)$$

Differentieert men (9.4) nogmaals naar x , dan verkrijgt men:

$$\left. \begin{aligned} 1 + y \frac{d^2f}{dx^2} + z \frac{d^2g}{dx^2} + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dx}\right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2f}{dx^2} + \frac{d^2g}{dx^2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Lost men hieruit $\frac{d^2f}{dx^2}$ en $\frac{d^2g}{dx^2}$ op, en vult men voor $\frac{df}{dx}$ en $\frac{dg}{dx}$ de gevonden waarden uit (9.5) in, dan vindt men:

$$\begin{aligned}\frac{d^2f}{dx^2} &= - \frac{2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)}{(y - z)^3} \\ &= - \frac{2(9 - xy - xz - yz)}{(y - z)^3}\end{aligned}$$

en

$$\frac{d^2g}{dx^2} = + \frac{2(9 - xy - xz - yz)}{(y - z)^3}$$

Extreme waarden

10 Extreme waarden bij impliciet gegeven functies van één variabele

In par. 8 zijn voldoende voorwaarden aangegeven waaronder de vergelijking $F(x, y, z) = 0$ y als functie f van x definieert. Wij zullen deze voorwaarden hier niet herhalen. Verder vonden we door differentiatie voor alle betrokken functies:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{df}{dx} = 0 \quad (10.1)$$

en dus in de punten waar $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$:

$$\frac{df}{dx} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} \quad (10.2)$$

Bij de functies van één variabele is aangetoond dat een functie die continu is in x_0 slechts dan een extreem heeft in x_0 als $f'(x_0) = 0$. Daar in ons geval geldt $F_y(x_0, y_0) \neq 0$, volgt uit (10.2) dat, indien f een extreem heeft in x_0 , geldt:

$$F_x(x_0, y_0) = 0$$

Dit is dus een *noodzakelijke* voorwaarde opdat de door $F(x, y) = 0$ gedefinieerde functie f van x een extreem bezit in x_0 .

Als nu $f''(x_0)$ bestaat, dan heeft f een relatief maximum in x_0 indien $f''(x_0) < 0$, en een relatief minimum in x_0 indien $f''(x_0) > 0$, terwijl het bestaan van een extreem in x_0 vooralsnog onbeslist blijft als $f''(x_0) = 0$.

Indien F continue partiële afgeleiden van de tweede orde heeft, dan kunnen we f''

berekenen door (10.1) te differentiëren naar x . Er volgt dan:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{df}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{d^2 f}{dx^2} = 0 \quad (10.3)$$

Nu is $f'(x_0) = 0$, zodat uit (10.3) volgt:

$$f''(x_0) = - \frac{F_{xx}(x_0, y_0)}{F_y(x_0, y_0)}$$

Voorbeeld 1

Onderzoek de extreme waarden van f als $y = f(x)$ en y bepaald is door:

$$F(x, y) = x^2 y - y^3 + 1 = 0$$

Oplossing:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 - 3y^2$$

Eventuele extremen vinden we uit:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{cases}$$

dus:

$$\begin{cases} 2xy = 0 \\ x^2 y - y^3 + 1 = 0 \end{cases}$$

Hieraan voldoet slechts $(x, y) = (0, 1)$, terwijl $F_y(0, 1) \neq 0$. Aangezien verder

$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2y$, vinden we:

$$f''(0) = - \frac{F_{xx}(0, 1)}{F_y(0, 1)} = - \frac{2}{-3} = \frac{2}{3}$$

De functie f heeft dus een relatief minimum voor $x = 0$.

Voorbeeld 2

Bepaal de relatief hoogste en laagste punten van de kromme met vergelijking:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0)$$

Deze kromme heet het *folium van Descartes*.

Oplossing:

Als $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, dan geldt:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 3ay$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 3ax$$

Eventuele extremen vinden we uit:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ F(x, y) = 0 \end{array} \right\}$$

dus:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 - ay = 0 \\ x^3 + y^3 - 3axy = 0 \end{array} \right\}$$

Hieraan voldoen $(0, 0)$ en $(a^{\sqrt[3]{2}}, a^{\sqrt[3]{4}})$.

We beschouwen eerst $(a^{\sqrt[3]{2}}, a^{\sqrt[3]{4}})$.

Aangezien $F_y(a^{\sqrt[3]{2}}, a^{\sqrt[3]{4}}) = 3a^2 \sqrt[3]{2} \neq 0$ en $F_{xx}(a^{\sqrt[3]{2}}, a^{\sqrt[3]{4}}) = 6a^{\sqrt[3]{2}}$, geldt:

$$f''(a^{\sqrt[3]{2}}) = -\frac{6a^{\sqrt[3]{2}}}{3a^2 \sqrt[3]{2}} = -\frac{2}{a} < 0$$

Het punt $(a^{\sqrt[3]{2}}, a^{\sqrt[3]{4}})$ is dus een relatief hoogste punt van de kromme (fig. 6).

Daar $F_y(0, 0) = 0$ kunnen we omtrent dit punt $(0, 0)$ voorshands geen verdere conclusies trekken. Men kan aantonen dat indien voor een punt (x_0, y_0) van de kromme met vergelijking $F(x, y) = 0$ geldt $F_x(x_0, y_0) = 0$ en $F_y(x_0, y_0) = 0$ er in een omgeving van dat punt door $F(x, y) = 0$ veelal meer dan één functie f met $y = f(x)$ wordt gedefinieerd.

Meetkundig betekent dit dat de kromme zich in het punt (x_0, y_0) vertakt. Dit punt heet dan een *dubbelpunt* van de kromme. Voor één of meer van de door (x_0, y_0) gaande takken kan dit punt dan een hoogste resp. laagste punt zijn.

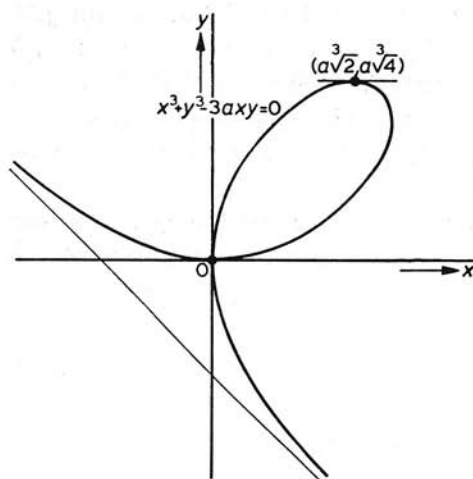


Fig. 6

11 Extremen bij functies van twee variabelen

Definitie

Laat f een functie zijn, gedefinieerd op een gebied $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, en laat $(x_0, y_0) \in G$ ((x_0, y_0) is dus uiteraard een inwendig punt van G). Men zegt dan dat f een relatief maximum (resp. minimum) heeft in (x_0, y_0) , indien er een gereduceerde omgeving Ω' van (x_0, y_0) bestaat zodanig dat $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) > f(x_0, y_0)$) $\forall (x, y) \in \Omega'$.

Vervangt men in deze definitie $f(x, y) < f(x_0, y_0)$ door $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ (resp. $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ door $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$), dan noemt men het extreem *oneigenlijk*. De hierboven genoemde extremen noemt men *inwendige* of *vrije extremen*.

Beschouwt men een functie f die gedefinieerd is op een afgesloten gebied \bar{G} (d.i. een gebied inclusief de rand), dan zegt men dat f een relatief minimum heeft in $(x_0, y_0) \in \bar{G}$, indien er een gereduceerde omgeving Ω' van (x_0, y_0) bestaat zodanig dat $f(x, y) > f(x_0, y_0) \forall (x, y) \in \bar{G} \cap \Omega'$. Analoog definieert men in deze situatie een relatief maximum.

Als $z = f(x, y)$ de vergelijking is van het oppervlak S in \mathbb{R}^3 , dan zijn de relatief hoogste en laagste waarden van z de z -coördinaten van de relatief hoogste en laagste punten van het oppervlak S .

Neemt de functie op zijn domein D een grootste (resp. kleinste) waarde aan, dan noemt men deze waarde een *absoluut* maximum (resp. minimum).

Dit absolute maximum kan eigenlijk of oneigenlijk zijn. Indien het eigenlijk is en in (x_0, y_0) aangenomen wordt, dan geldt voor alle (x, y) die tot D behoren en van (x_0, y_0) verschillen $f(x, y) < f(x_0, y_0)$. Indien het maximum oneigenlijk is, dan zijn

er nog punten (x, y) die tot D behoren en van (x_0, y_0) verschillen, waarin geldt $f(x, y) = f(x_0, y_0)$. Voor de overige punten (x, y) geldt echter $f(x, y) < f(x_0, y_0)$. Analoge opmerkingen gelden voor een absoluut minimum.

Is f continu differentieerbaar in een gebied G , d.w.z. zijn de partiële afgeleiden van f continu in G , dan kunnen we enige noodzakelijke voorwaarden voor het bestaan van een extreem in een punt $(x_0, y_0) \in G$ opstellen.

Snijden we het oppervlak S met vergelijking $z = f(x, y)$ met het door (x_0, y_0) gaande verticale vlak, bepaald door $y = y^*(x)$, waarbij $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$, dan moet de doorsnijdingskromme bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} z &= f(x, y) \\ y - y_0 &= \lambda(x - x_0) \end{aligned} \right\} \quad (11.1)$$

voor iedere λ in (x_0, y_0) een hoogste of laagste punt hebben.

Uit (11.1) volgt:

$$z = f\{x, y^*(x)\} = f^*(x)$$

en dus geldt volgens de kettingregel:

$$\frac{df^*}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy^*}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}$$

Nu geldt in (x_0, y_0) voor alle waarden van λ

$$\frac{df^*}{dx} = 0$$

slechts dan indien:

$$\left. \begin{aligned} f_x(x_0, y_0) &= 0 \\ f_y(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.2)$$

Dit zijn dus *noodzakelijke* voorwaarden voor het optreden van een extreem in (x_0, y_0) . Punten waarbij voldaan is aan de voorwaarden (11.2) noemt men *stationaire* punten. Meetkundig betekenen de voorwaarden (11.2) dat in een stationair punt (x_0, y_0) het raakvlak aan S in (x_0, y_0, z_0) evenwijdig is aan het x, y -vlak.

Men zou geneigd zijn te denken dat de functie f in (x_0, y_0) een minimum (maximum) bezit als voor ieder van de hierboven aangegeven doorsnijdingskrommen, het punt (x_0, y_0, z_0) een laagste (hoogste) punt is. Deze gedachte is onjuist, hetgeen in par. 12 door een voorbeeld (vb. 3) zal worden aangetoond. Zeker zijn dan ook de voorwaarden (11.2) niet voldoende voor het optreden van een extreem in (x_0, y_0) .

Een voorbeeld waarin wordt aangetoond dat in een stationair punt niet altijd een extreem optreedt is het volgende.

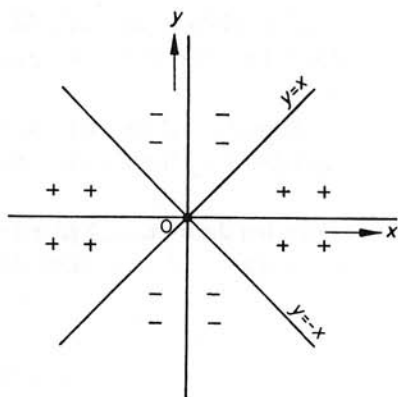


Fig. 7

Voorbeeld

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

Het enige stationaire punt is dus de oorsprong. Verder ziet men dat in alle punten van de rechten met vergelijkingen $y = \pm x$ de functie de waarden nul aanneemt, dat op de verzameling $\{(x, y) | x^2 - y^2 > 0\}$ de functiewaarden positief zijn, en dat op $\{(x, y) | x^2 - y^2 < 0\}$ de functiewaarden negatief zijn (zie fig. 7). In elke omgeving van O wisselt f van teken, zodat f in $(0, 0)$ geen extreme waarde bezit. Meetkundig gesproken noemt men het punt $(0, 0, 0)$ van het oppervlak een *zadelpunt*. Ter verduidelijking is in fig. 8 een gedeelte van het oppervlak met vergelijking $z = x^2 - y^2$ (hyperbolische paraboloid) in een omgeving van O geschetst.

Voor de functie f met $f(x, y) = x^2 + y^2$ is de oorsprong eveneens een stationair punt. Hier neemt f een (absoluut) minimum aan, aangezien $f(x, y) > f(0, 0) \forall (x, y) \neq (0, 0)$.

Laat (x_0, y_0) een stationair punt zijn en P het bijbehorende punt van het oppervlak S met vergelijking $z = f(x, y)$. Als men nu S snijdt met het vlak $z = z_0$, dan verkrijgt men een doorsnijdingskromme die uiteraard door P gaat. Is P een extreem punt van het oppervlak, dan zal P een zogenaamd *geïsoleerd* punt van deze kromme zijn. In de omgeving van (x_0, y_0) liggen immers slechts punten, waarvoor z òf steeds groter òf steeds kleiner dan z_0 is. Is echter P een gewoon punt of een vertakkingspunt van de doorsnijdingskromme, d.w.z. liggen in een willekeurig kleine omgeving van P nog andere punten van de kromme, dan is P geen extreem punt. Hoogstens heeft de functie dan in (x_0, y_0) een oneigenlijk extreem (zie het begin van deze paragraaf).

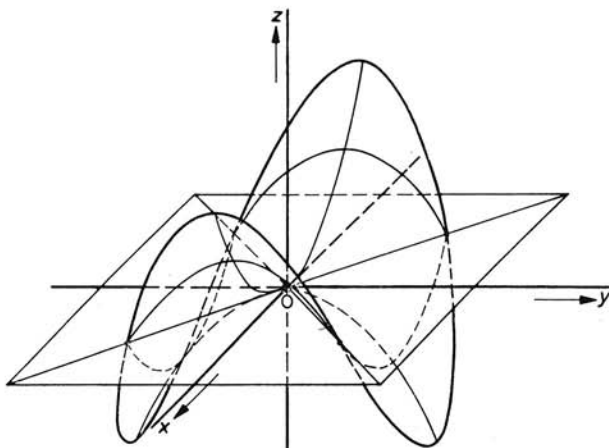


Fig. 8

Om in bepaalde gevallen te kunnen beslissen of een stationair punt een extreem punt oplevert, hebben we de ontwikkeling van Taylor nodig voor een functie van twee veranderlijken.

Opmerking:

Het spreekt vanzelf dat men deze theorie op eenvoudige wijze kan uitbreiden voor functies van meer dan twee veranderlijken. Zo zijn de noodzakelijke voorwaarden voor een extreem bij een functie van drie veranderlijken:

$$\left. \begin{aligned} f_x(x_0, y_0, z_0) &= 0 \\ f_y(x_0, y_0, z_0) &= 0 \\ f_z(x_0, y_0, z_0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11.3)$$

12 Voldoende voorwaarden voor extremen bij een functie van twee veranderlijken

We veronderstellen dat (x_0, y_0) een stationair punt is voor de functie f , zodat $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Verder nemen we aan dat de tweede partiële afgeleiden van f bestaan en continu zijn. Volgens de formule van Taylor (5.2) is dan:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) &= \\ &= \frac{1}{2}\{h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0)\} + \varepsilon r^2 \end{aligned} \quad (12.1)$$

waarin $r = \sqrt{h^2 + k^2}$ en $\varepsilon \rightarrow 0$ als $r \rightarrow 0$.

Hieruit ziet men dat in een voldoende kleine omgeving van (x_0, y_0) het gedrag van

$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$ „in hoofdzaak” bepaald wordt door de in h en k kwadratische vorm:

$$v(x_0, y_0) = h^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2hk f_{xy}(x_0, y_0) + k^2 f_{yy}(x_0, y_0)$$

We stellen ter bekorting:

$$\left. \begin{aligned} a &= f_{xx}(x_0, y_0) \\ b &= f_{xy}(x_0, y_0) \\ c &= f_{yy}(x_0, y_0) \end{aligned} \right\}$$

en schrijven de kwadratische vorm $ah^2 + 2bhk + ck^2$ in de gedaante:

$$a \left\{ \left(h + \frac{b}{a} k \right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2} k^2 \right\} \quad (12.2)$$

waarbij we onderstellen dat $a \neq 0$.

We onderscheiden nu drie gevallen, afhankelijk van het teken van de discriminant $\Delta = ac - b^2$.

I $\Delta > 0$

We zien dat in dit geval de vorm (12.2) voor $(h, k) \neq (0, 0)$ constant van teken (definit) is en wel positief definit als $a > 0$ en negatief definit als $a < 0$ is.

Stelt men in (12.1) $h = r \cos \alpha$ en $k = r \sin \alpha$, waarin $r > 0$ en $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, dan kan (12.1) geschreven worden als:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2} r^2 \{ a \cos^2 \alpha + 2b \cos \alpha \sin \alpha + c \sin^2 \alpha \} + \varepsilon r^2$$

De vorm tussen accoladen is continu in α voor $\alpha \in [0, 2\pi]$ en bezit dus een maximum M en een minimum m . Dus is:

A als $a > 0$ $v(x_0, y_0) \geq mr^2 > 0$ (definit positief);

B als $a < 0$ $v(x_0, y_0) \leq Mr^2 < 0$ (definit negatief).

In geval A geldt voor voldoende kleine $r \neq 0$: $|\varepsilon| < \frac{1}{4}m$ en dus $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > \frac{1}{4}mr^2 > 0$. f neemt een minimum aan in (x_0, y_0) . In geval B geldt voor voldoende kleine $r \neq 0$: $|\varepsilon| < \frac{1}{4}|M|$ en dus $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < \frac{1}{4}Mr^2 < 0$. f neemt een maximum aan in (x_0, y_0) .

II $\Delta < 0$

In dit geval wisselt $v(x_0, y_0)$ van teken (is indefinit) en is $m < 0 < M$. Als het minimum m van:

$$a \cos^2 \alpha + 2b \cos \alpha \sin \alpha + c \sin^2 \alpha$$

wordt aangenomen in α_1 , en het maximum M in α_2 , dan geldt voor voldoende kleine r : $|\varepsilon| < \frac{1}{4}M$ en $|\varepsilon| < \frac{1}{4}|m|$, zodat voor α_1 geldt $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) < \frac{1}{4}mr^2 < 0$, en voor α_2 geldt $f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) > \frac{1}{4}Mr^2 > 0$.

I In dit geval bezit de functie f dus geen extremum in (x_0, y_0) .

III $\Delta = 0$

Nu is $v(x_0, y_0)$ semidefinit en is er omtrent f geen enkele conclusie te trekken.

Opmerking:

Als $a = 0, b \neq 0$ dan is het duidelijk dat $v(x_0, y_0)$ indefinit is en dat f geen extreem in (x_0, y_0) bezit. Indien $a = b = 0$, dan geeft deze methode geen uitsluitsel.

Samenvatting

Heeft een functie f continue partiële tweede afgeleiden in een punt (x_0, y_0) , dan kan $f(x_0, y_0)$ slechts dan een extreme waarde zijn als:

$$f_x(x_0, y_0) = 0$$

en

$$f_y(x_0, y_0) = 0$$

Stelt men:

$$a = f_{xx}(x_0, y_0)$$

$$b = f_{xy}(x_0, y_0)$$

$$c = f_{yy}(x_0, y_0)$$

dan is $f(x_0, y_0)$ een extreme waarde indien:

$$\Delta = ac - b^2 = f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

en wel een *maximum* als:

$$a = f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \quad (\text{dus ook } c = f_{yy}(x_0, y_0) < 0)$$

en een *minimum* als:

$$a = f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \quad (\text{dus ook } c = f_{yy}(x_0, y_0) > 0)$$

De functie heeft geen extreem in (x_0, y_0) , indien $\Delta < 0$ is.

Is $\Delta = 0$, dan wordt geen uitsluitsel verkregen. Het is in het laatste geval soms mogelijk door een elementair onderzoek omtrent het gedrag van $f(x, y)$ in de omgeving van (x_0, y_0) tot een conclusie te komen.

Voorbeeld 1

Gevraagd de driehoek, waarvoor het produkt van de sinussen van de drie hoeken zo groot mogelijk is.

Oplossing:

Noemen we de drie hoeken x , y en z , dan moeten dus x , y en z voldoen aan:

$$0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi, \quad 0 < z < \pi, \quad x + y + z = \pi$$

Stellen we $z = \pi - (x + y)$, dan is dus ook $0 < x + y < \pi$.

De functie f met:

$$f(x, y) = \sin x \sin y \sin(x + y)$$

is dus voor een driehoek gedefinieerd op het gebied

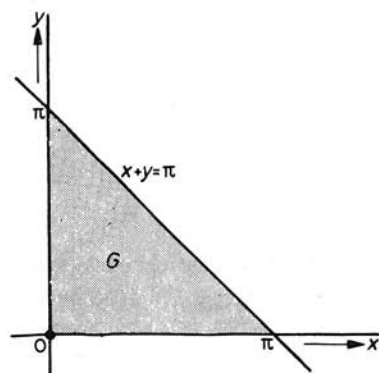
$$G = \{(x, y) | 0 < x + y < \pi; x > 0; y > 0\}$$

dat in fig. 9 als een gerasterde driehoek is aangegeven. In dit gebied is de functie steeds positief.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \sin y \{ \sin x \cos(x + y) + \cos x \sin(x + y) \} \\ &= \sin y \sin(2x + y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin x \{ \sin y \cos(x + y) + \cos y \sin(x + y) \} \\ &= \sin x \sin(x + 2y) \end{aligned}$$

Fig. 9



We moeten dus x en y oplossen uit:

$$\left. \begin{aligned} \sin y \sin(2x + y) &= 0 \\ \sin x \sin(x + 2y) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Als oplossingen vindt men de punten $(0, 0)$, $(\pi, 0)$, $(0, \pi)$, $(\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$, waarvan alleen het laatste in aanmerking komt, omdat de eerste vier op de rand van G liggen.

Verder is:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \sin y \cos(2x + y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sin 2(x + y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \sin x \cos(x + 2y)$$

Voor $(x, y) = (\frac{1}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi)$ volgt hieruit:

$$a = -\sqrt{3}, \quad b = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad c = -\sqrt{3}, \quad \Delta = ac - b^2 = 3 - \frac{3}{4} > 0$$

De functie heeft dus een relatief maximum voor $x = \frac{\pi}{3}$, $y = \frac{\pi}{3}$, $z = \frac{\pi}{3}$. Dit maximum is zelfs absoluut, hetgeen men als volgt inzielt. Sluit men het gebied G af door de rand toe te voegen, dan heeft de continue functie f op deze begrensde gesloten verzameling een grootste en een kleinste waarde (zie deel 1, par. 132). Op de rand is de functie nul, dus treedt de grootste waarde op voor een inwendig punt. Aangezien er geen ander punt dan het gevonden in aanmerking komt, levert dit punt een absoluut maximum. De gelijkzijdige driehoek is dus de gevraagde. Uit de laatste beschouwing blijkt verder dat het onderzoek met behulp van de discriminant Δ overbodig is.

Voorbeeld 2

Bepaal de extremen van de functie f , met:

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6xy - 3y^2$$

Oplossing:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6x + 6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 6x - 6y$$

Stationaire punten vindt men dus uit:

$$\left. \begin{aligned} x^2 - 2x + 2y &= 0 \\ y^2 + 2x - 2y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Door optelling van deze vergelijkingen vindt men: $x^2 + y^2 = 0$, zodat het enige stationaire punt is $(0, 0)$, waarvoor $z = 0$ is (hierin geldt $z = f(x, y)$).

Verder is $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 6$, zodat $a = -6$, $b = 6$ en $c = -6$, waaruit volgt:

$$\Delta(0, 0) = 36 - 36 = 0$$

De gebruikte methode geeft dus geen verder uitsluitel.

We snijden nu het oppervlak met een verticaal vlak: $y = mx$ door $O(0, 0, 0)$, en verkrijgen de doorsnijdingskromme:

$$z = (1 + m^3)x^3 - 3x^2(1 - 2m + m^2), \quad y = mx$$

Neemt men in het bijzonder $m = 1$, dan volgt:

$$z = 2x^3, \quad y = x$$

Blijkbaar is $z > 0$ voor $x > 0$, terwijl $z < 0$ is voor $x < 0$. In iedere omgeving van $(0, 0, 0)$ zijn er dus punten, waarvoor $z > 0$ en punten waarvoor $z < 0$ is. Er is dus geen extreem in $(0, 0, 0)$. De functie heeft blijkbaar in het geheel geen extreem.

Voorbeeld 3

Gevraagd de extremen van de functie f met:

$$f(x, y) = x^6 - 2x^2y + y^2$$

Oplossing:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^5 - 4xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2x^2 + 2y$$

Stationaire punten worden dus bepaald uit:

$$\left. \begin{aligned} 6x^5 - 4xy &= 0 \\ -2x^2 + 2y &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.3)$$

Uit (12.3) vindt men de punten:

$$(0, 0), \left(\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{2}{3}\right), \left(-\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{2}{3}\right)$$

Voor deze punten is z resp. 0 , $-\frac{4}{2^7}$, $-\frac{4}{2^7}$ ($z = f(x, y)$).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 30x^4 - 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Voor het punt $(0, 0)$ is $a = 0$, $b = 0$ en $c = 2$, zodat $\Delta = ac - b^2 = 0$. In dit punt, waarvoor $z = 0$, is dus een nader onderzoek nodig. Voor de overige punten blijkt op de bekende wijze dat de functie een relatief minimum bezit.

Voor het onderzoek van het punt $(0, 0)$ snijden we het oppervlak bepaald door $z = x^6 - 2x^2y + y^2$ met het verticale door $(0, 0, 0)$ gaande vlak met vergelijking $y = mx$ en onderzoeken de doorsnijdingskrommen, waarvoor geldt:

$$z = \varphi_m(x) = x^6 - 2mx^3 + m^2x^2$$

en

$$y = mx$$

$$\varphi'_m(x) = 6x^5 - 6mx^2 + 2m^2x$$

$$\varphi''_m(x) = 30x^4 - 12mx + 2m^2$$

Nu geldt $\varphi'_m(0) = 0$, terwijl $\varphi''_m(0) = 2m^2 > 0$ voor $m \neq 0$. Voor iedere $m \neq 0$ heeft dus φ_m voor $x = 0$ een relatief minimum. Voor $m = 0$ is $\varphi_0(x) \equiv x^6$. We constateren dat φ_0 ook een relatief minimum bezit voor $x = 0$. Omdat door $y = mx$ niet het verticale vlak $x = 0$ kan worden voorgesteld, snijden we het oppervlak ook nog met $x = 0$, en vinden de kromme:

$$z = y^2, \quad x = 0$$

welke kromme voor $y = 0$ een laagste punt heeft. Alle door O gaande verticale platte vlakken geven dus doorsnijdingskrommen die in O een relatief laagste punt bezitten.

Toch zal blijken dat O geen relatief laagste punt voor het gegeven oppervlak is. We schrijven daartoe:

$$z = x^6 - 2x^2y + y^2 = (y - x^2)^2 - x^4 + x^6$$

Op de parabool: $y = x^2$ wordt het teken van z bepaald door:

$$z = -x^4 + x^6 = -x^4(1 - x^2)$$

welk teken voor $|x| < 1$ blijkbaar negatief is. In elke omgeving van $(0, 0)$ liggen dus punten waarvoor $z < 0$ is. Daar we reeds gezien hebben, dat op iedere rechte door

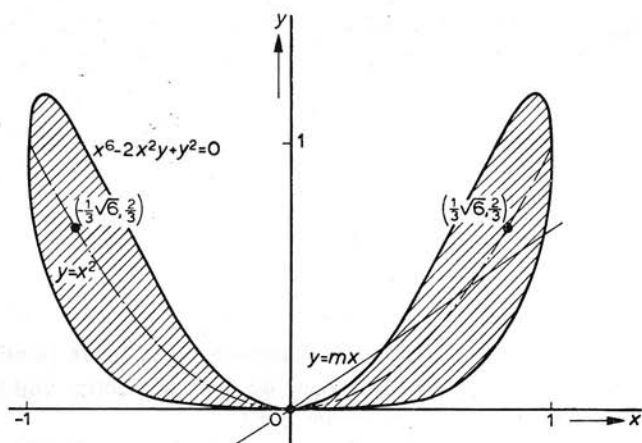


Fig. 10

O in het x, y -vlak in elke omgeving van $(0, 0)$ punten liggen waarvoor $z > 0$ is, heeft dus de functie geen extreem voor $(0, 0)$.

Duidelijkheidshalve is in fig. 10 de doorsnijding van $z = f(x, y)$ met het niveauvlak: $z = 0$, getekend.

Deze doorsnijdingskromme is bepaald door:

$$x^6 - 2x^2y + y^2 = 0 \quad (12.4)$$

Door y uit (12.4) op te lossen vindt men:

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^4 - x^6}$$

waaruit eenvoudig het verloop van de kromme volgt.

We hebben reeds aangetoond dat op de parabool: $y = x^2$, voor $|x| < 1$ $f(x, y)$ steeds negatief is. Bijgevolg neemt voor het gehele binnengebied van de in fig. 10 geschetste kromme de functie f negatieve waarden aan. Buiten de kromme is $z > 0$, en op de kromme is $z = 0$. Op het door de kromme begrensde gesloten gebied heeft de gegeven functie een absoluut minimum. Hieruit volgt dat $z = -\frac{4}{27}$, aangenomen in de punten $(\pm \frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{2}{3})$ niet alleen een relatief maar ook een absoluut minimum is. De in fig. 10 geschetste kromme raakt aan de x -as in O , en ligt verder geheel boven de x -as. De beide door O gaande takken hebben in O een horizontale raaklijn. Het is daarom dat men langs de rechte: $y = mx$, het punt O steeds nadert vanuit het voor z positieve gebied van het x, y -vlak.

13 De methode van de kleinste kwadraten

Gegeven is dat op een aantal tijdstippen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ een aantal waarnemingen $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ gedaan is, en dat aangenomen wordt dat tussen y en x een lineaire

betrekking: $y = mx + b$, bestaat. Omdat een rechte reeds door twee punten bepaald is, bestaat er in het algemeen geen rechte die door alle punten (x_k, y_k) gaat. Gevraagd wordt naar de rechte die „zo goed mogelijk” bij deze punten aansluit. Hiermede bedoelen we het volgende. Op de rechte $y = mx + b$, behoort bij $x = x_k$, de y -waarde $mx_k + b$, die dus in het algemeen afwijkt van de waargenomen waarde y_k . Het verschil:

$$d_k = y_k - (mx_k + b)$$

noemt men een *deviatie*. Sommige deviaties zullen positief zijn, andere negatief. We zullen nu zeggen dat een rechte zich „zo goed mogelijk” aansluit bij de punten (x_k, y_k) , indien de som van de kwadraten van de deviaties, dus $\sum_{k=1}^n d_k^2$ minimaal is. Gevraagd wordt dus naar het minimum van de functie f van twee veranderlijken m en b , gegeven door:

$$f(m, b) = (y_1 - mx_1 - b)^2 + (y_2 - mx_2 - b)^2 + \dots + (y_n - mx_n - b)^2$$

We moeten dus oplossen:

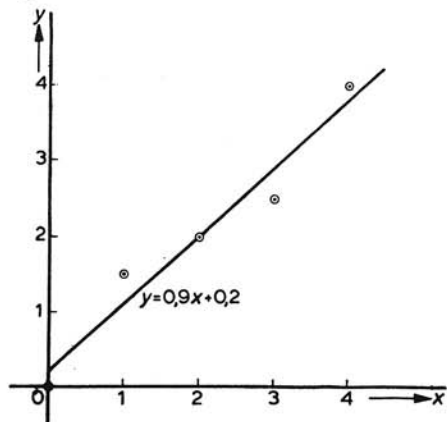
$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial b} = 0$$

Voorbeeld

Gevraagd:

De rechte die zo goed mogelijk aansluit bij de punten $(0, 0)$, $(1, 1\frac{1}{2})$, $(2, 2)$, $(3, 2\frac{1}{2})$ en $(4, 4)$ (zie fig. 11).

Fig. 11



Oplossing:

x	y	d	d^2
0	0	$-b$	b^2
1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} - m - b$	$2\frac{1}{4} - 3b + b^2 - 3m + 2mb + m^2$
2	2	$2 - 2m - b$	$4 - 4b + b^2 - 8m + 4mb + 4m^2$
3	$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2} - 3m - b$	$6\frac{1}{4} - 5b + b^2 - 15m + 6mb + 9m^2$
4	4	$4 - 4m - b$	$16 - 8b + b^2 - 32m + 8mb + 16m^2$

$$\sum d^2 = f(m, b) = 28\frac{1}{2} - 20b + 5b^2 - 58m + 20mb + 30m^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial m} = -58 + 20b + 60m = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial b} = -20 + 10b + 20m = 0$$

We vinden hieruit $m = 0,9$ en $b = 0,2$. Voor deze waarden van m en b geldt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial m^2} = 60, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial m \partial b} = 20, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial b^2} = 10, \quad \Delta = 600 - 400 > 0$$

Er is dus een minimum hetgeen uit de aard van het probleem al duidelijk was.

De rechte met vergelijking $y = 0,9x + 0,2$ is dus de rechte die zo goed mogelijk aansluit bij de waarnemingsresultaten.

Opmerking:

De hierboven gebruikte *methode van de kleinste kwadraten* wordt ook toegepast op meer ingewikkelde problemen dan het behandelde.

14 Extremen met nevenvoorwaarden bij functies van één veranderlijke

Het gebeurt dikwijls dat de uiterste waarden van $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ moeten worden onderzocht, terwijl x en y nog aan een bepaalde voorwaarde voldoen. In dat geval spreken we van *extrema met een nevenvoorwaarde*.

Een eenvoudig geval is het volgende:

Gegeven:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 1 \tag{14.1}$$

Gevraagd:

De extrema van f te bepalen als x en y ook nog voldoen aan de nevenvoorwaarde:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \quad (14.2)$$

Algemeen luidt het probleem: bepaal de extrema van $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$, met nevenvoorwaarde: $\varphi(x, y) = 0$.

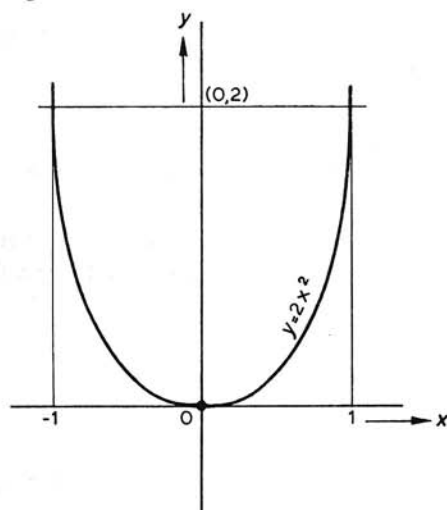
In het gegeven voorbeeld is het probleem eenvoudig: We kunnen y^2 uit (14.2) oplossen en substitueren in (14.1). Hierdoor gaat f over in f^* met $f^*(x) = 2x^2$, waarbij uit (14.2) volgt dat geldt $x^2 \leq 1$, dus $x \in [-1, 1]$. Het probleem is dus teruggebracht tot het onderzoek van een functie van één veranderlijke, nl. f^* , op het gesloten interval $[-1, 1]$. Aangezien $\frac{df^*}{dx} = 4x$ en $\frac{d^2f^*}{dx^2} = 4$ heeft f^* een minimum 0 voor $x = 0$. Dat betekent dat f een minimum 0 heeft voor de punten $(0, 1)$ en $(0, -1)$, zoals uit (14.2) volgt.

De functie f^* heeft bovendien twee randmaxima, nl. $+1$ en wel voor $x = 1$ en $x = -1$ (zie fig. 12). Voor deze waarden van x geldt: $y = 0$ en dus $f^*(1) = f(1, 0) = 2$. Deze randextremen hadden we niet door differentiatie van f^* kunnen vinden. Wel zouden we deze gevonden hebben indien we uit (14.2) hadden opgelost: $x^2 = 1 - y^2$ en dus f hadden doen overgaan in de functie f^{**} van y , dus:

$$f(x, y) = f^{**}(y) = 2 - 2y^2$$

Uit $\frac{df^{**}}{dy} = -4y$ en $\frac{d^2f^{**}}{dy^2} = -4$ volgt dat $y = 0$ een maximum geeft voor f^{**} en dat dus $f(x, y)$ maximaal is voor $(x, y) = (1, 0)$ en $(x, y) = (-1, 0)$. De waarden

Fig. 12



$y = \pm 1$ geven nu de randminima voor f^{**} en de reeds bekende minima in $(0, 1)$ en $(0, -1)$.

We kunnen een en ander ook meetkundig voorstellen. Door f wordt een oppervlak bepaald met vergelijking $z = x^2 - y^2 + 1$ (een hyperbolische paraboloid).

De punten (x, y, z) in \mathbb{R}^3 die voldoen aan $x^2 + y^2 - 1 = 0$ vormen een rechte cirkelcilinder. Wanneer men nu vraagt naar de extremen van f met $f(x, y) = x^2 - y^2 + 1$ onder de nevenvoorwaarde $x^2 + y^2 - 1 = 0$, dan vraagt men eigenlijk naar de hoogste en laagste punten van de doorsnijdingskromme van de genoemde hyperbolische paraboloid en de cilinder. In fig. 13 is deze doorsnijdingskromme geschetst.

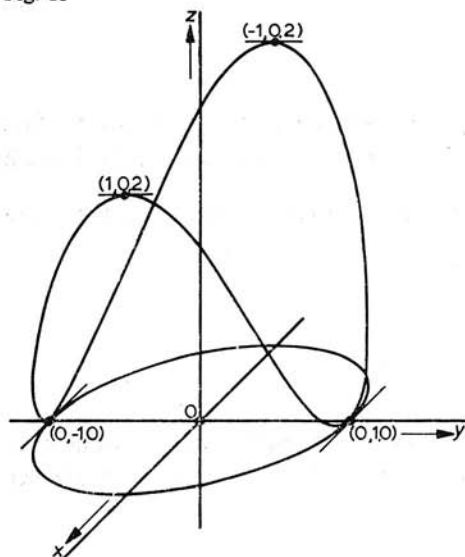
De vraag is nu of men deze methode ook in het algemeen geval kan toepassen. We zagen reeds in par. 7 dat y door $\varphi(x, y) = 0$ wordt gedefinieerd als functie van x in een omgeving (op de reële as) van x_0 , indien geldt $\varphi(x_0, y_0) = 0$ en $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Men zou dan in principe bovenstaande methode kunnen toepassen indien men expliciet zou kunnen aangeven hoe y afhangt van x , d.w.z. hoe men een functie y^* daadwerkelijk zou kunnen bepalen, zodanig dat $y = y^*(x)$ en $\varphi\{x, y^*(x)\} = 0$. In vele gevallen lukt dit niet. Men kan dan als volgt te werk gaan.

Laat φ voldoen aan de voorwaarden van par. 7, dan bepaalt $\varphi(x, y) = 0$ y als functie y^* van x en wel zó dat:

$$\varphi\{x, y^*(x)\} = 0$$

Hierdoor gaat $f(x, y)$ over in $f\{x, y^*(x)\} = f^*(x)$.

Fig. 13



Er geldt dan:

$$\frac{df^*}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy^*}{dx} \quad (14.3)$$

Verder volgt uit $\varphi(x, y) = 0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{dy^*}{dx} = 0$$

en dus geldt in de punten waar $\varphi_y(x, y) \neq 0$:

$$\frac{dy^*}{dx} = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \quad (14.4)$$

Door substitutie gaat (14.3) over in:

$$\frac{df^*}{dx} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} \quad (14.5)$$

Een noodzakelijke voorwaarde opdat $\frac{df^*}{dx} = 0$, is dus:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{vmatrix} = 0 \quad (14.6)$$

Uit (14.6) en $\varphi(x, y) = 0$ kan men dan de punten bepalen waar $f(x, y)$ extreem kan zijn onder de nevenvoorwaarde $\varphi(x, y) = 0$. Voor een verder onderzoek bepaalt men $\frac{d^2 f^*}{dx^2}$ door (14.5) te differentiëren en hierin de uit (14.4) volgende waarde van $\frac{dy^*}{dx}$ te substitueren.

Opmerking 1:

Als φ_y in een punt de waarde nul aanneemt, dan onderzoekt men of in dat punt φ_x van nul verschilt. Is dit het geval, dan kan men x als functie van y beschouwen en de bovenstaande methode volgen.

Opmerking 2:

Voor de punten (x_0, y_0) waarvoor zowel geldt $\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ als $\varphi_y(x_0, y_0) = 0$ kan men bovenstaande methode niet gebruiken. We zullen deze punten hier buiten beschouwing laten.

Voorbeeld 1

Bepaal de extrema van f als:

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2y + xy^2 - 2xy$$

voor de punten waarvoor geldt:

$$x^2 + y^2 - 2y \leq 0$$

Oplossing:

De functie is gegeven op een gesloten verzameling begrensd door de cirkel $x^2 + y^2 - 2y = 0$. Er kunnen dus ook randextremen optreden. We bepalen ons eerst tot de vrije extremen.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 4xy + y^2 - 2y$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 2xy - 2x$$

Stationaire punten worden dus bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} 3x^2 + 4xy + y^2 - 2y &= 0 \\ 2x^2 + 2xy - 2x &= 0 \end{aligned} \right\}$$

We vinden hieruit de punten $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $(0, 0)$ en $(0, 2)$ met bijbehorende functiewaarden $-\frac{1}{27}, 0, 0$.

Het eerste punt ligt in het inwendige van de definitieverzameling, de laatste twee liggen op de rand.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x + 2y - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$$

Voor het punt $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ is

$$a = 4\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}, \Delta = ac - b^2 = 2 > 0$$

dus voor $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ heeft de functie een relatief extreem en wel een minimum, omdat $a > 0$ is.

Hoewel de punten $(0, 0)$ en $(0, 2)$ randpunten zijn van de definitieverzameling, is het mogelijk dat de gegeven functie voor deze punten vrije extremen heeft, indien we de voorwaarde: $x^2 + y^2 - 2y \leq 0$ weglaten. Is dit het geval, dan treden voor deze punten zeker randextremen op. Voor het punt $(0, 0)$ is

$$a = 8, b = -2, c = 0, \Delta = ac - b^2 = -4 < 0$$

dus is er voor $(0, 0)$ geen vrij extreem.

Voor het punt $(0, 2)$ is

$$a = 8, b = 2, c = 0, \Delta = ac - b^2 = -4 < 0$$

dus ook voor $(0, 2)$ is er geen vrij extreem.

We onderzoeken vervolgens de functie op de rand, bepaald door de nevenvoorwaarde:

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

Hier kunnen we f omzetten in een functie f^* van y alleen, daar:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^3 + 2x^2y + xy^2 - 2xy \\ &= 2x^2y + x(x^2 + y^2 - 2y) \end{aligned}$$

gecombineerd met:

$$x^2 + y^2 - 2y = 0$$

Door x te elimineren volgt hieruit:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f\{x^*(y), y\} \\ &= f^*(y) \\ &= -2y^3 + 4y^2 \end{aligned}$$

De functie f^* is hierbij gedefinieerd op het interval $[0, 2]$. f^* als functie van y heeft op $[0, 2]$ een relatief maximum $\frac{64}{27}$ voor $y = \frac{2}{3}$ en twee grensminima 0 voor $y = 0$ en $y = 2$. Het is echter de vraag of het grensmaximum $\frac{64}{27}$, maximum blijft, als we het binnengebied mee beschouwen. In het onderhavige geval kunnen we ons beroepen op de stelling dat de continue functie f op de gesloten en begrensde verzameling een grootste en een kleinste waarde aanneemt. We weten reeds dat in het binnengebied geen maximum wordt aangenomen. Dus wordt het op de rand aangenomen, d.w.z. $\frac{64}{27}$ is zelfs een absoluut maximum.

Deze redenering is niet toe te passen voor de punten $(0, 0)$ en $(0, 2)$, omdat hiervoor

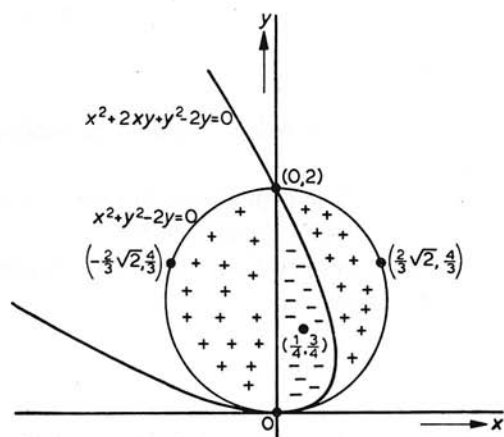


Fig. 14

f de waarde 0 aanneemt, en we reeds het inwendige punt $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ gevonden hebben, waarvoor de functie de waarde $-\frac{1}{8}$ aanneemt, dus kleiner dan 0. Voor $(0, 0)$ en $(0, 2)$ kan de functie dus hoogstens relatieve minima hebben. Om de punten $(0, 0, 0)$ en $(0, 2, 0)$ te onderzoeken snijden we het oppervlak $z = f(x, y)$ met het niveauvlak: $z = 0$. De doorsnijdingskromme:

$$x^3 + 2x^2y + xy^2 - 2xy = x(x^2 + 2xy + y^2 - 2y) = 0$$

valt uiteen in de rechte: $x = 0$, en de parabool: $x^2 + 2xy + y^2 - 2y = 0$. (Zie fig. 14). Een elementair onderzoek leert dat de definitieverzameling hierdoor wordt verdeeld in gebieden waarvoor $z > 0$ en waarin $z < 0$ is. Deze gebieden zijn in de figuur door + en - tekens aangegeven. Hieruit blijkt dat in de omgeving zowel van $(0, 0)$ als $(0, 2)$ in het binnengebied tekenwisseling optreedt. Voor deze punten heeft dus f geen extreem. Omdat verder op de rand van de cirkel $z \geq 0$ is, is het reeds eerder gevonden relatieve minimum $-\frac{1}{8}$ tevens een absoluut minimum.

Voorbeeld 2

Van een vlakke vierhoek ABCD zijn de vier zijden a, b, c en d gegeven (fig. 15). Gevraagd de vierhoek zo te bepalen dat de oppervlakte maximaal is (probleem van Huygens).

Oplossing:

We nemen als veranderlijken de hoeken $ABC = x$ en $CDA = y$. De oppervlakte van de vierhoek is dan:

$$O(x, y) = \frac{1}{2}ab \sin x + \frac{1}{2}cd \sin y \quad (14.7)$$

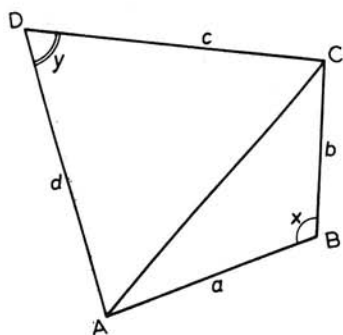


Fig. 15

Door de diagonaal AC zowel in x als in y uit te drukken, vindt men de nevenvoorwaarde:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos x = c^2 + d^2 - 2cd \cos y \quad (14.8)$$

Uit (14.7) volgt:

$$\frac{dO^*}{dx} = \frac{1}{2}ab \cos x + \frac{1}{2}cd \cos y \frac{dy^*}{dx} \quad (14.9)$$

en uit (14.8):

$$2ab \sin x = 2cd \sin y \frac{dy^*}{dx}$$

dus:

$$\frac{dy^*}{dx} = \frac{ab \sin x}{cd \sin y} \quad (14.10)$$

Substitutie van (14.10) in (14.9) levert:

$$\begin{aligned} \frac{dO^*}{dx} &= \frac{1}{2}ab \left(\cos x + \cos y \frac{\sin x}{\sin y} \right) \\ &= \frac{1}{2}ab \frac{\sin(x+y)}{\sin y} \end{aligned} \quad (14.11)$$

$\frac{dO^*}{dx} = 0$, indien $\sin(x+y) = 0$ ($\sin y \neq 0$). In verband met de aard van het vraagstuk voldoet slechts:

$$x + y = \pi$$

Een noodzakelijke voorwaarde is dus dat de vierhoek een koordenvierhoek is.

Uit (14.11) volgt verder:

$$\frac{d^2O^*}{dx^2} = \frac{1}{2}ab \frac{\sin y \cos(x+y) \cdot \left(1 + \frac{dy^*}{dx}\right) - \sin(x+y) \cos y \cdot \frac{dy^*}{dx}}{\sin^2 y} \quad (14.12)$$

In een extreem geldt $x + y = \pi$, dus geldt daar $\sin x = \sin y$, en dus gaat (14.10) over in:

$$\frac{dy^*}{dx} = \frac{ab}{cd}$$

De formule (14.12) gaat dan over in:

$$\frac{d^2O^*}{dx^2} = -\frac{1}{2} \frac{ab}{\sin x} \left(1 + \frac{ab}{cd}\right)$$

Daar $0 < x < \pi$ is, is $\sin x > 0$, dus $\frac{d^2O^*}{dx^2} < 0$.

De oppervlakte van de koordenvierhoek is dus een maximum.

De grootte van x vindt men uit de nevenvoorwaarde (14.8), waarin $\cos y = -\cos x$ wegens $x + y = \pi$.

15 Extreme waarden bij impliciet gegeven functies van twee veranderlijken

Stel dat F een functie van de drie veranderlijken x , y en z is, en wel zodanig dat door de vergelijking:

$$F(x, y, z) = 0 \tag{15.1}$$

z wordt gedefinieerd als een functie van x en y (zie par. 8). Noodzakelijk daartoe

is in ieder geval: $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

We stellen $z = f(x, y)$ en vragen naar de extrema van f op het inwendige van het definitiegebied van f .

Noodzakelijke voorwaarden voor een inwendig extreem zijn:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{15.2}$$

Uit (15.1) vindt men door differentiatie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{15.3}$$

zodat (daar $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

en

$$\frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Noodzakelijke voorwaarden voor het optreden van een extreem zijn dus:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.4)$$

N.B. Dit zijn twee vergelijkingen in x en y , daar $z = f(x, y)$.

Als F en f aan de vereiste voorwaarden van differentieerbaarheid voldoen, kan men $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ bepalen uit (15.3) door differentiatie. Men vindt dan:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15.5)$$

Daar voor stationaire punten de voorwaarden (15.2) gelden kan men voor die punten het stelsel (15.5) vereenvoudigen tot:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

waaruit volgt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

waarmee de voldoende voorwaarden voor extremen (zie par. 12) kunnen worden getoetst.

Voorbeeld

Bepaal de extreme waarden van z als z gegeven is door de vergelijking:

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 72x + 36y + 8z + 40 = 0 \quad (15.6)$$

Oplossing:

We stellen:

$$F(x, y, z) = 36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 72x + 36y + 8z + 40$$

Volgens par. 8 zal door $F(x, y, z) = 0$ z gedefinieerd worden als functie f van x en y in die punten (x, y) waar geldt:

$$\left. \begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \end{array} \right\} \quad (15.7)$$

We onderzoeken eerst de eerste voorwaarde van (15.7) en rangschikken daartoe (15.6) aldus:

$$4z^2 + 8z + 36x^2 + 9y^2 - 72x + 36y + 40 = 0$$

Men kan dit beschouwen als een vierkantsvergelijking in z met oplossingen:

$$z = -1 \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4} \quad (15.8)$$

Daaruit volgt dat alleen die paren (x, y) een reële waarde voor z opleveren waarvoor geldt:

$$-4x^2 - y^2 + 8x - 4y - 4 \geq 0$$

d.w.z. f kan hoogstens gedefinieerd zijn op en binnen een ellips en wel voor die paren (x, y) waarvoor geldt:

$$\{(x, y) | 4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 4 \leq 0\}$$

of:

$$\{(x, y) | 4(x-1)^2 + (y+2)^2 - 4 \leq 0\}$$

De tweede voorwaarde van (15.7) $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ geeft:

$$z \neq -1$$

Uit $F(x, y, z) = 0$ volgt voor $z = -1$:

$$36x^2 + 9y^2 - 72x + 36y + 36 = 0$$

en dit is juist:

$$4(x-1)^2 + (y+2)^2 - 4 = 0 \tag{15.9}$$

Door $F(x, y, z) = 0$ worden dus twee functies f van x en y gedefinieerd zodanig dat:

$$F\{x, y, f(x, y)\} = 0$$

op en binnen de genoemde ellips.

Op de rand van de ellips uit (15.9) is $z = -1$.

We bepalen nu eerst de vrije extremen van die functies f :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 72x - 72$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 18y + 36$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 8z + 8$$

De stationaire punten worden dus bepaald door $72x - 72 = 0$, $18y + 36 = 0$ en $8z + 8 \neq 0$.

Deze zijn dus $P_1(1, -2, 2)$ en $P_2(1, -2, -4)$.

Verder geldt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 72, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 18$$

Voor P_1 is dus, omdat voor dit punt $\frac{\partial F}{\partial z} = 8 \times 2 + 8 = 24$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{72}{24} = -3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{18}{24} = -\frac{3}{4}$$

Voor P_1 is dus $\Delta = (-3)(-\frac{3}{4}) - 0 > 0$ en wegens $f_{xx}(1, -2) < 0$ heeft f in $(1, -2)$ een relatief maximum ter grootte van 2.

Op analoge wijze vindt men in P_2 een relatief minimum van -4 .

Op de rand (15.9) kunnen geen relatieve extremen optreden, daar in elke omgeving van elk randpunt wegens (15.8) waarden van z groter en kleiner dan -1 worden aangenomen.

De gevonden extremen zijn dus tevens absolute extremen van z .

Opmerking:

We vestigen er de aandacht op dat door (15.6) twee functies f zijn gedefinieerd, waarvoor eenzelfde berekening van $\frac{\partial f}{\partial x}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ geldt (zie ook par. 8). De ene functie bezit het maximum 2 in P_1 , de andere het minimum -4 in P_2 .

16 Extreme waarden bij functies van meer dan twee veranderlijken met nevenvoorwaarden

Is een functie van n veranderlijken gegeven met m voorwaardevergelijkingen ($m < n$), dan is het bepalen van de eventuele extremen van deze functie, terug te brengen tot dat voor een functie van $(n - m)$ veranderlijken. Een eenvoudig geval is dat van een functie w van drie veranderlijken:

$$u = w(x, y, z) \tag{16.1}$$

met de nevenvoorwaarde:

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{16.2}$$

Indien z uit (16.2) kan worden opgelost, substitueert men de gevonden waarde in (16.1), waardoor het probleem overgaat in dat voor een functie van twee veranderlijken. Toch kunnen zich door het bestaan van de nevenvoorwaarde complicaties voordoen, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

Voorbeeld 1

Gevraagd de extremen van de functie w met:

$$w(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4$$

op de bol:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \quad (16.3)$$

Oplossing:

Uit (16.3) volgt $z^2 = 1 - x^2 - y^2$. Door substitutie hiervan in $w(x, y, z)$ ontstaat:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^4 + y^4 + (1 - x^2 - y^2)^2 \\ &= 2x^4 + 2y^4 + 2x^2y^2 - 2x^2 - 2y^2 + 1 \end{aligned}$$

waarbij, omdat $z^2 \geq 0$ is, x en y moeten liggen in het afgesloten gebied:

$$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$$

Nu is:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 8x^3 + 4xy^2 - 4x \\ &= 4x(2x^2 + y^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= 8y^3 + 4x^2y - 4y \\ &= 4y(2y^2 + x^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24x^2 + 4y^2 - 4$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 8xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24y^2 + 4x^2 - 4$$

De stationaire punten (x, y) vindt men uit $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, zodat x en y te bepalen zijn uit telkens een van de volgende stelsels:

$$\text{I} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{II} \quad \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 2y^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{III} \quad \begin{cases} x = 0 \\ 2y^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{IV} \quad \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Het stelsel I geeft: $x = 0, y = 0, z = \pm 1, w(0, 0, \pm 1) = 1$.

$a = -4, b = 0, c = -4, \Delta = 16 > 0$ en omdat $a < 0$ is, heeft dus w een relatief maximum in $(0, 0, \pm 1)$.

Het stelsel II geeft: $x^2 = y^2 = z^2 = \frac{1}{3}; w(x, y, z) = \frac{1}{3}$. Dit zijn dus de 8 punten $(\pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, \pm\frac{1}{3}\sqrt{3}, \pm\frac{1}{3}\sqrt{3})$. Hiervoor is $a = 5\frac{1}{3}, b = \pm 2\frac{2}{3}$ en $c = 5\frac{1}{3}, \Delta > 0$ en daar $a > 0$ is, bezit w in deze punten een relatief minimum.

Het stelsel III geeft: $x = 0, y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}; w(x, y, z) = \frac{1}{2}$. Verder is $a = -2, b = 0, c = 8, \Delta = -16$, dus $\Delta < 0$. In deze punten heeft w dus geen extreem.

Het stelsel IV geeft: $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, y = 0, z = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}; w(x, y, z) = \frac{1}{2}$. Ook voor deze punten heeft w geen extreem.

We moeten nu nog de rand onderzoeken. Voor de rand is:

$$f(x, y) = x^4 + y^4$$

en

$$x^2 + y^2 = 1$$

Bij substitutie van y^2 gaat $f(x, y)$ over in

$$\begin{aligned} g(x) &= x^4 + (1 - x^2)^2 \\ &= 2x^4 - 2x^2 + 1 \quad (-1 \leq x \leq 1) \end{aligned}$$

$$\frac{dg}{dx} = 8x^3 - 4x$$

$$\frac{d^2g}{dx^2} = 24x^2 - 4$$

Hieruit volgt dat f op de rand een relatief maximum heeft voor $x = 0, y = \pm 1$, een relatief minimum voor $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}, y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$, en grensmaxima voor $x = -1, y = 0$ en $x = 1, y = 0$. De bijbehorende waarden van w zijn resp. $1, \frac{1}{2}, 1$ en 1 . We moeten nu nog onderzoeken of de gevonden waarden extremen blijven, als we het binnengebied mee beschouwen. Dit onderzoek kan om de volgende reden achterwege blijven.

De functie w is symmetrisch in x, y en z , evenals de nevenvoorwaarde:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

We hebben reeds een maximum gevonden voor de punten $(0, 0, \pm 1)$. Dus moeten er ook maxima zijn voor $(0, \pm 1, 0)$ en $(\pm 1, 0, 0)$. Voor deze laatste punten vonden

wij bij onze berekening randextremen. We hebben een minimum gevonden voor de punten $(\pm \frac{1}{3}\sqrt{3}, \pm \frac{1}{3}\sqrt{3}, \pm \frac{1}{3}\sqrt{3})$ die symmetrisch liggen t.o.v. de coördinaatvlakken. Er rest nog het onderzoek voor de punten $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$. Substitueert men x^2 uit (16.3) in $w(x, y, z)$, dan gaat w over in een functie van y en z met nevenvoorwaarde:

$$y^2 + z^2 - 1 \leq 0$$

In dit geval liggen $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$ in het inwendige van het y, z -gebied. We hebben reeds gezien dat de overeenkomstige punten $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, y = 0$ geen extreem opleverden voor de functie f . Hieruit volgt dat voor de punten $(\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, 0)$ geen extreem optreedt voor w .

Omdat op de gesloten en begrensde verzameling $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ de functie w een absoluut grootste en een absoluut kleinste waarde aanneemt, is $w = 1$ een absoluut maximum en $w = \frac{1}{3}$ een absoluut minimum.

We geven vervolgens een voorbeeld, waarbij het minder aanbeveling verdient z uit de nevenvoorwaarde op te lossen.

Voorbeeld 2

Bepaal de extreme waarden van de functie w met

$$w(x, y, z) = x + y + z$$

voor de punten van de ellipsoïde:

$$3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz - 12 = 0 \quad (16.4)$$

Oplossing:

We stellen (zie ook voorbeeld uit par. 15):

$$F(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz - 12$$

Volgens par. 8 zal door $F(x, y, z) = 0$ z gedefinieerd kunnen worden als functie f van x en y in die punten (x, y) , waarvoor geldt:

$$\left. \begin{array}{l} F(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} \neq 0 \end{array} \right\} \quad (16.5)$$

Beschouwen we $F(x, y, z) = 0$ als een vierkantsvergelijking in z , dan vinden we als oplossingen voor z :

$$z = \frac{-y \pm \sqrt{-9x^2 - 6xy - 5y^2 + 36}}{3} \quad (16.6)$$

Deze waarden van z zijn alleen reëel als

$$-9x^2 - 6xy - 5y^2 + 36 \geq 0$$

d.w.z. f kan hoogstens gedefinieerd zijn op en binnen een ellips en wel voor die paren (x, y) waarvoor geldt:

$$\{(x, y) | 9x^2 + 6xy + 5y^2 \leq 36\}$$

De tweede voorwaarde uit (16.5) $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ geeft:

$$6z + 2y \neq 0$$

In verband met (16.4) correspondeert met $6z + 2y = 0$ juist de ellips

$$9x^2 + 6xy + 5y^2 = 36 \quad (16.7)$$

We bepalen eerst de stationaire punten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= 1 + \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

Door (16.4) te differentiëren volgt:

$$\left. \begin{aligned} 6x + 6z \frac{\partial f}{\partial x} + 2y + 2y \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ 4y + 6z \frac{\partial f}{\partial y} + 2x + 2z + 2y \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16.9)$$

In een stationair punt zijn $\frac{\partial w}{\partial x}$ en $\frac{\partial w}{\partial y}$ nul, dus is $\frac{\partial f}{\partial x} = -1$ en $\frac{\partial f}{\partial y} = -1$. Ingevuld in (16.9) geeft dit:

$$\left. \begin{aligned} x - z &= 0 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned} \right\}$$

In combinatie met (16.4) volgen hieruit de punten $(1, 1, 1)$ en $(-1, -1, -1)$ met $w(1, 1, 1) = 3$ en $w(-1, -1, -1) = -3$.

Door (16.8) en (16.9) nogmaals te differentiëren vindt men:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$6 + 6 \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (6z + 2y) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$6 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} + 2 + 2 \frac{\partial f}{\partial x} + (6z + 2y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

$$4 + 6 \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 4 \frac{\partial f}{\partial y} + (6z + 2y) \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Voor het punt (1, 1, 1) volgt hieruit:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{3}{4}$$

zodat $\Delta = ac - b^2 = \frac{9}{16}$, dus $\Delta > 0$. Daar $a = -\frac{3}{2}$ neemt dus w in punt (1, 1, 1) een relatief maximum aan.

Voor het punt (-1, -1, -1) volgt op dezelfde wijze:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{3}{4}$$

$\Delta = ac - b^2 = \frac{9}{16}$, dus $\Delta > 0$. Daar $a = \frac{3}{2}$ neemt w in punt (-1, -1, -1) een relatief minimum aan.

Wegens (16.6) is:

$$w = x + y + z = \frac{3x + 2y \pm \sqrt{-9x^2 - 6xy - 5y^2 + 36}}{3}$$

Er kunnen vanwege het \pm -teken geen relatieve extremen op de rand (16.7) optreden. De gevonden extremen zijn dus absolute extremen.

Opmerking:

In de oplossing hebben we z een bijzondere rol laten vervullen t.o.v. x en y , waardoor er een randkwestie ontstond, die een extra beschouwing vereiste. In par. 17 wordt een methode aangegeven waarin x , y en z een symmetrische rol spelen en waardoor een „elegantere” oplossing wordt verkregen.

17 De multiplicatorenmethode van Lagrange

Voor het bepalen van de stationaire punten past men veelvuldig ook de volgende methode toe, welke de *multiplicatorenmethode van Lagrange* genoemd wordt.

Bij een impliciet gegeven functie van één veranderlijke met nevenvoorwaarde gaat men als volgt tewerk.

Gegeven is de functie $f: (x, y) \mapsto f(x, y)$ met de nevenvoorwaarde $\phi(x, y) = 0$. Laat door deze laatste voorwaarde y impliciet bepaald zijn als functie van x , zeg $y = y^*(x)$. Hierdoor gaat f over in een functie f^* van x alleen, die gedefinieerd is door:

$$f^*(x) = f\{x, y^*(x)\}.$$

In plaats van de functie f onderzoeken we de functie w die bepaald is door

$$w(x, y) = f(x, y) + \lambda\phi(x, y)$$

waarin λ een nader te bepalen constante is. Deze constante noemt men een *multiplier*. De functies w en f hebben op de kromme met vergelijking $\phi(x, y) = 0$ dezelfde waarden. Dit geldt ook voor w^* en f^* als we definiëren;

$$w^*(x) = w\{x, y^*(x)\} = f\{x, y^*(x)\} + \lambda\phi\{x, y^*(x)\}.$$

w^* en f^* hebben dus ook dezelfde extremen. Voor een extreem van w^* is noodzakelijk:

$$\frac{dw^*}{dx} = 0,$$

dus

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy^*}{dx} + \lambda \left(\frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy^*}{dx} \right) = 0,$$

of wel:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \frac{dy^*}{dx} = 0.$$

We bepalen nu λ zodanig dat

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0;$$

dan geldt ook:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

en we wisten al: $\phi(x, y) = 0$; samengevat:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \phi(x, y) = 0 \end{array} \right\} \quad (17.1)$$

Formule (17.1) stelt drie vergelijkingen met drie onbekenden λ , x en y voor, waarbij voor het probleem alleen de waarden van x en y belangrijk zijn.

De multiplicatorenmethode geeft niet aan of voor de gevonden waarden van x en y inderdaad extremen optreden. Ze wordt dan ook uitsluitend toegepast als op andere wijze dan door differentiëren tot het bestaan van extremen kan worden besloten.

Voorbeeld 1

Bepaal de extreme waarden van de functie f als

$$f(x, y) = x + y$$

voor de punten van de cirkel $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Oplossing:

$f(x, y) = x + y$, $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Volgens (17.1) is dus voor een extreem noodzakelijk:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Uit deze drie vergelijkingen vindt men:

$$(x_1, y_1) = (\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2})$$

$$(x_2, y_2) = (-\frac{1}{2}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2})$$

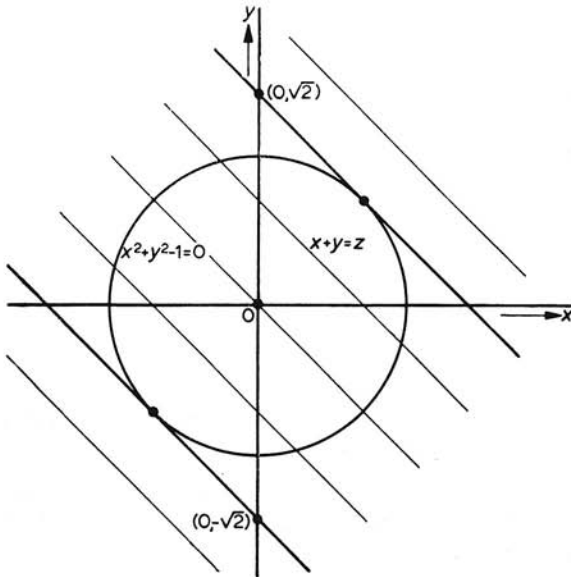
$$z_1 = f(x_1, y_1) = \sqrt{2}$$

$$z_2 = f(x_2, y_2) = -\sqrt{2}$$

Dat z_1 een maximum en z_2 een minimum is, ziet men als volgt in. De verzameling punten, waarop de continue functie $f: (x, y) \mapsto x + y$ gedefinieerd is, is de cirkel $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Als we deze parametriseren door te stellen: $x = \cos \alpha$, $y = \sin \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), dan

Fig. 16



geldt: $z = f(x, y) = f(\cos \alpha, \sin \alpha) = f^*(\alpha)$. Op het gesloten interval $[0, 2\pi]$ heeft de continue functie f^* een maximum en een minimum.

Het behandelde voorbeeld is als volgt meetkundig toe te lichten (zie fig. 16). Bij veranderlijke z stelt $z = x + y$ in het x, y -vlak een stelsel rechten voor met richtingscoëfficiënt -1 . Hierbij is z gelijk aan de ordinaat van het snijpunt met de y -as. We moeten dus op de cirkel $x^2 + y^2 - 1 = 0$ die punten bepalen, waarvoor deze ordinaat een extreme waarde heeft. Blijkbaar zijn dit de punten, waarin een rechte van het stelsel de cirkel raakt. Deze raaklijnen zijn $x + y = \sqrt{2}$, en $x + y = -\sqrt{2}$, waaruit het maximum $\sqrt{2}$ en het minimum $-\sqrt{2}$ volgt.

Ook bij functies van meer veranderlijken met nevenvoorwaarden kan men met succes de multiplicatorenmethode toepassen ter bepaling van de stationaire punten. We lichten deze methode toe aan het geval van een functie van drie veranderlijken:

Laat $w = f(x, y, z)$ zijn, met de nevenvoorwaarde $\varphi(x, y, z) = 0$.

We vormen dan de functie u met

$$u(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z)$$

Door een redenering analoog aan die bij een functie van twee variabelen met nevenvoorwaarde, vinden we als noodzakelijke eisen voor een extreem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Voor de bepaling van x, y, z en λ vinden we het volgende stelsel vergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \\ \varphi(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

Deze methode geeft slechts dan vereenvoudiging, als men uit de aard van het probleem tot een extreem kan besluiten.

Voorbeeld 2

Gevraagd de minimumafstand van het punt $P(-1, -2, 3)$ tot een punt $Q(x, y, z)$ van het vlak $2x + 2y + z - 6 = 0$.

Oplissing:

De afstand van het punt P tot een punt $Q(x, y, z)$ van het vlak is

$$d = \sqrt{(x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2}.$$

In plaats van naar het minimum van d kunnen we ook naar het minimum van d^2 vragen, waardoor we wortelvormen vermijden. Gevraagd wordt dus naar het minimum van de functie w met

$$w(x, y, z) = (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2$$

onder de voorwaarde:

$$2x + 2y + z - 6 = 0$$

Volgens de methode van Lagrange beschouwen we:

$$u(x, y, z) = (x + 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 + \lambda(2x + 2y + z - 6)$$

Als gevolg van (17.2) moeten we dus oplossen:

$$\left. \begin{aligned} 2(x + 1) + \lambda \cdot 2 &= 0 \\ 2(y + 2) + \lambda \cdot 2 &= 0 \\ 2(z - 3) + \lambda &= 0 \\ 2x + 2y + z - 6 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Hieruit vindt men $\lambda = -2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 4$, $d^2 = 9$ en $d = 3$. Uit de aard van dit vraagstuk is de gevonden waarde een minimum. Het gevonden punt $(1, 0, 4)$ is het voetpunt van de loodlijn uit P op het gegeven vlak neergelaten.

Opmerking 1:

De opgave van voorbeeld 2 uit par. 16 is met de multiplicatorenmethode eenvoudiger op te lossen. Men beschouwt dan de functie u met

$$u(x, y, z) = x + y + z + \lambda(3x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy + 2yz - 12)$$

Door toepassing van (17.2) vindt men dan zeer snel de stationaire punten $(1, 1, 1)$ met $w = 3$ en $(-1, -1, -1)$ met $w = -3$. Omdat op de ellipsoïde (16.4) de functie w een maximum en een minimum aanneemt is $w(1, 1, 1) = 3$ een absoluut maximum en $w(-1, -1, -1) = -3$ een absoluut minimum.

Opmerking 2:

Is algemeen gegeven een functie f van n veranderlijken x_1, x_2, \dots, x_n met m nevenvoorwaarden:

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (k = 1, \dots, m, m < n)$$

dan wordt de methode van Lagrange als volgt toegepast.

Men differentieert de functie w met

$$w(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k \varphi_k(x_1, \dots, x_n)$$

achtereenvolgens partieel naar elk van de veranderlijken, waarbij de λ 's constanten zijn. Door de afgeleiden nul te stellen, te zamen met de m voorwaardevergelijkingen, verkrijgt men een stel van $(n + m)$ vergelijkingen ter bepaling van $x_1 \dots x_n, \lambda_1 \dots \lambda_m$.

Vectoranalyse

18 Vectorruimten

In deel 1, par. 47 is het begrip vectorruimte ingevoerd en met een aantal voorbeelden toegelicht. Hierbij kwamen uitsluitend de algebraïsche eigenschappen van een vectorruimte aan de orde. In dit hoofdstuk zullen we ons bezighouden met de vectorruimten in \mathbb{R}^2 en \mathbb{R}^3 , d.w.z. vectorruimten waarvan de elementen geordende tweetallen, resp.

drietallen van reële getallen zijn, genoteerd als (x, y) , resp. (x, y, z) of $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ resp. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, en waarbij de optelling resp. gedefinieerd is als:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

en

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

en de vermenigvuldiging met een element $\alpha \in \mathbb{R}$ resp. gedefinieerd is als:

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$$

en

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

De vectoren $\underline{v}_1 = (x_1, y_1)$ en $\underline{v}_2 = (x_2, y_2)$ heten gelijk, dan en slechts dan als $x_1 = x_2$ en $y_1 = y_2$.

In deel 1, par. 48 is een aanschouwelijke voorstelling van vectoren gegeven, nl. als „pijlen”, gerichte lijnstukken in \mathbb{R}^2 , resp. \mathbb{R}^3 (zie fig. 17).

19 Vectorveld; vectorfunctie; scalair veld; scalaire functie

We voeren nu een aantal begrippen in, die van groot belang zijn in de theorie van krommen en oppervlakken.

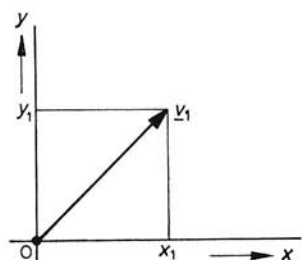
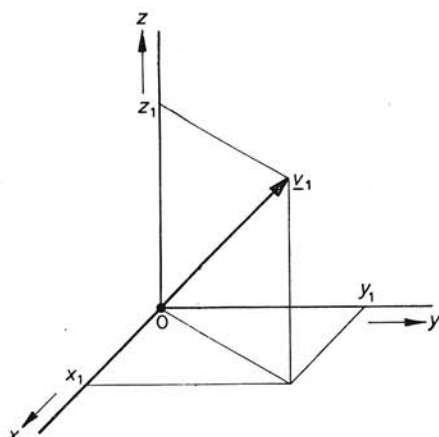


Fig. 17



Definitie

Indien men aan ieder punt $(x, y, z) \in G$, waarbij G een deelverzameling is van \mathbb{R}^3 , door middel van een functievoorschrift f een getal $f(x, y, z)$ toevoegt, dan zegt men dat op G een scalair veld is gedefinieerd.

De verzameling $\{f(x, y, z) | (x, y, z) \in G\}$ heet een scalair veld en de toevoeging $f: (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ heet een scalaire functie.

Een scalaire functie is dus een functie van \mathbb{R}^3 naar \mathbb{R} . Hier kan men ook aangeven $f(x)$ i.p.v. $f(x, y, z)$.

Een voorbeeld hiervan is de functie die in ieder punt \underline{x} in de „fysische” ruimte de temperatuur aangeeft.

Definitie

Indien aan ieder punt $(x, y, z) \in G$, waarbij G een deelverzameling is van \mathbb{R}^3 , een vector $\underline{v}(x, y, z)$ is toegevoegd, waarvan de (reële) kentallen $v_1(x, y, z)$, $v_2(x, y, z)$, $v_3(x, y, z)$ afhangen van x , y en z , dan zegt men dat op G een vectorveld is gedefinieerd. De verzameling $\{\underline{v}(x, y, z) | (x, y, z) \in G\}$ heet vectorveld en de toevoeging $\underline{v}: (x, y, z) \mapsto \underline{v}(x, y, z)$ heet een vector(veld) functie.

Een vectorfunctie is dus een functie van \mathbb{R}^3 naar \mathbb{R}^3 . Wanneer we het „punt” $(x, y, z) \in G$ aanduiden als de vector \underline{x} , dan kan men het vectorveld ook aangeven als $\{\underline{v}(\underline{x}) | \underline{x} \in G\}$.

Een voorbeeld hiervan treft men aan b.v. bij een stationair stromende vloeistof, indien men in ieder punt \underline{x} de snelheidsvector $\underline{v}(\underline{x})$ beschouwt.

Opmerking:

Analoge definities als bovenvermeld gelden voor deelgebieden van \mathbb{R}^2 .

In de volgende paragrafen zullen we de afbeeldingen bestuderen waarbij:

- a* aan een scalair veld een vectorveld wordt toegevoegd (gradiënt),
- b* aan een vectorveld een scalair veld wordt toegevoegd (divergentie),
- c* aan een vectorveld een vectorveld wordt toegevoegd (rotatie).

20 De gradiënt van een scalair veld

Stel dat f een (scalaire) functie is die gedefinieerd is op een gebied $G \subset \mathbb{R}^3$ en daar continue partiële afgeleiden f_x , f_y en f_z heeft.

Definitie

De vector, in ieder punt $\underline{x} \in G$ gedefinieerd, met kentallen $f_x(\underline{x})$, $f_y(\underline{x})$ en $f_z(\underline{x})$ heet de gradiënt van $f(\underline{x})$.

Notatie: $\text{grad } f(\underline{x})$.

We kunnen dus schrijven:

$$\text{grad } f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} f_x(\underline{x}) \\ f_y(\underline{x}) \\ f_z(\underline{x}) \end{pmatrix}$$

Voorbeeld:

Als $f(\underline{x}) = x^2 + y^2 + z^2$ is, dan geldt: $\text{grad } f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$.

Een andere notatie voor $\text{grad } f(\underline{x})$ verkrijgt men door middel van de *symbolische* vector *nabla* ∇ .

Definitie

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{20.1}$$

Stelt men nu zuiver formeel het scalaire produkt ∇f op, dan verkrijgt men

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

en dat is juist $\text{grad } f(x)$, dus

$$\text{grad } f(x) = \nabla f$$

Om een idee te krijgen van de betekenis van de gradiënt beschouwen we de eenheids-

vector \underline{a} in de richting φ , met kentallen $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$, dus $\underline{a} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$.

In deel 1, par. 137 is de richtingsafgeleide f_φ in de richting φ voor een functie f van twee variabelen gedefinieerd. Op analoge wijze kan men de richtingsafgeleiden definiëren voor een functie f van drie variabelen. Men beschouwt dan de punten (x, y, z) en $(x + h, y + k, z + l)$, waarin $h = \rho \cos \alpha$, $k = \rho \cos \beta$, $l = \rho \cos \gamma$, en $\rho = \sqrt{h^2 + k^2 + l^2}$.

De richtingsafgeleide f_φ van f in de richting φ wordt dan gedefinieerd als:

$$f_\varphi(x, y, z) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{f(x + \rho \cos \alpha, y + \rho \cos \beta, z + \rho \cos \gamma) - f(x, y, z)}{\rho}$$

als deze limiet bestaat.

Op dezelfde wijze als in het tweedimensionale geval kan men aantonen dat voor deze afgeleide geldt:

$$f_\varphi(x, y, z) = f_x(x, y, z) \cdot \cos \alpha + f_y(x, y, z) \cdot \cos \beta + f_z(x, y, z) \cdot \cos \gamma$$

(indien f aan bepaalde voorwaarden, b.v. totale differentieerbaarheid, voldoet).

Dus:

$$f_\varphi(x, y, z) = \underline{a} \cdot \nabla f^*$$

d.w.z. $f_\varphi(x, y, z)$ is het inwendig produkt van de gradiënt van f en de eenheidsvector \underline{a} in de richting φ . Maar dit inwendig produkt stelt juist de grootte voor van de projectie van de vector \underline{a} op de gradiënt. Het is duidelijk dat deze projectie het grootst is als \underline{a} de richting heeft van de gradiënt. Hieruit volgt:

De richting van ∇f is de richting waarin, uitgaande van het punt (x, y, z) , de functiewaarden van f het sterkst toenemen. De grootte van ∇f geeft een maat aan voor die toename.

* Het inwendig product van de vectoren \underline{a} en \underline{b} zal nu eens aangegeven worden door $(\underline{a}, \underline{b})$, dan weer door $\underline{a} \cdot \underline{b}$.

Als wij stellen $f(x, y, z) = C$ en C verschillende waarden laten aannemen, dan krijgen we een stelsel oppervlakken, de *niveauoppervlakken* van f genaamd.

In par. 44 zullen we aantonen dat de vergelijking van het raakvlak aan het niveauoppervlak, gaande door (x_0, y_0, z_0) is:

$$(x - x_0)f_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)f_z(x_0, y_0, z_0) = 0$$

We zien dan dat ∇f een normaalvector is op het niveauoppervlak in (x_0, y_0, z_0) , zodat *de gradiënt in een punt loodrecht staat op het niveauoppervlak in dat punt*.

21 De divergentie van een vectorveld

Stel dat \underline{v} een vectorfunctie is, gedefinieerd op een gebied $G \subset \mathbb{R}^3$, zó dat:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} v_1(\underline{x}) \\ v_2(\underline{x}) \\ v_3(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

Hierin zijn v_1, v_2 en v_3 scalaire functies van x, y, z , gedefinieerd op G , die we partieel differentieerbaar veronderstellen naar x, y en z .

Definitie

Het aan $\underline{v}(\underline{x})$ toegevoegde reële getal

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

heet de *divergentie* van $\underline{v}(\underline{x})$.

Notatie: $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x})$.

Gebruik makend van de in (20.1) ingevoerde vector ∇ kan men de divergentie formeel schrijven als het inwendige produkt van ∇ met \underline{v} , waarbij $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$:

$$\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x}) = \nabla \cdot \underline{v}$$

Voorbeeld

Als $\underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{bmatrix}$, dan geldt: $\nabla \cdot \underline{v} = 2x + 2y + 2z$.

De fysische betekenis van $\nabla \cdot \underline{v}$ zal blijken bij de stellingen van Gauss* en Stokes* (zie hoofdstuk 9).

* C. F. Gauss 1777–1855. G. G. Stokes 1819–1903.

22 De rotatie van een vectorveld

Als \underline{v} de in par. 21 gedefinieerde vectorfunctie is, dan kunnen we de rotatie als volgt definiëren:

Definitie

De aan $\underline{v}(\underline{x})$ toegevoegde vector

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (22.1)$$

heet de rotatie van $\underline{v}(\underline{x})$ of curl van $\underline{v}(\underline{x})$.

Notatie: $\text{rot } \underline{v}(\underline{x})$.

Men kan (22.1) ook formeel schrijven als de determinant:

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{x}) = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \partial & \partial & \partial \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

waarin \underline{e}_1 , \underline{e}_2 en \underline{e}_3 de eenheidsvectoren langs de coördinaatassen zijn en de symbolische betekenis van de tweede rij duidelijk wordt door de determinant naar de eerste rij te ontwikkelen. Er ontstaat dan:

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{x}) = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) \underline{e}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) \underline{e}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) \underline{e}_3$$

Gebruikt men weer de vector ∇ , dan kan men $\text{rot } \underline{v}$ ook schrijven als het uitwendig produkt $\nabla \times \underline{v}$, dus:

$$\text{rot } \underline{v}(\underline{x}) = \nabla \times \underline{v}$$

Voorbeeld

Als:

$$\underline{v}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x + y + z \\ x^2 + y^2 + z^2 \\ x^3 + y^3 + z^3 \end{pmatrix}$$

dan is:

$$\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 3y^2 - 2z \\ 1 - 3x^2 \\ 2x - 1 \end{bmatrix}$$

Ook de fysische betekenis van $\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{x})$ zal blijken bij de stellingen van Gauss en Stokes.

Opmerking:

Dikwijls schrijft men ter bekorting (maar ten onrechte) $\operatorname{div} \underline{v}$ i.p.v. $\operatorname{div} \underline{v}(\underline{x})$ en $\operatorname{rot} \underline{v}$ i.p.v. $\operatorname{rot} \underline{v}(\underline{x})$.

23 Betrekkingen tussen gradiënt, divergentie en rotatie

Uit de definities van gradiënt, divergentie en rotatie volgt een groot aantal betrekkingen, waarvan we er hier enkele vermelden, steeds in de veronderstelling dat de betrokken functies voldoende vaak differentieerbaar zijn met continue afgeleiden.

I *De rotatie van de gradiënt van f is de vector $\underline{0}$.*

Dus:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f(\underline{x}) = \underline{0} \quad (23.1)$$

Bewijs:

$$\operatorname{rot} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

II *De divergentie van de rotatie van \underline{v} is het getal 0.*

Dus:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{v} = 0 \quad (23.2)$$

Bewijs:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) = 0$$

$$\text{III} \quad \text{div grad } f(\underline{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (23.3)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} \text{div grad } f(\underline{x}) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Het rechterlid is een belangrijke uitdrukking, die vaak in de potentiaaltheorie voorkomt en afgekort wordt door $\nabla^2 f$, zodat wegens (23.3) geldt:

$$\text{div grad } f(\underline{x}) = \nabla^2 f \quad (23.4)$$

De operator ∇^2 gedefinieerd door:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

wordt de *operator van Laplace** genoemd.

De vergelijking:

$$\nabla^2 f = 0, \text{ ook wel genoteerd als } \Delta f = 0$$

heet de *vergelijking van Laplace*.

We kunnen de formules (23.1), (23.2) en (23.3) in nabla-notatie schrijven als:

$$\nabla \times (\nabla f) = \underline{0} \quad (23.1)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{v}) = 0 \quad (23.2)$$

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f \quad (23.3)$$

24 Vectoranalyse

De vectorfuncties die wij tot nu toe behandeld hebben voegen aan ieder punt van \mathbb{R}^3 of \mathbb{R}^2 een vector toe. We kunnen echter ook een vectorfunctie definiëren die aan ieder punt van een zeker interval op de reële getallenrechte een vector in \mathbb{R}^3 of \mathbb{R}^2 toevoegt. De fysische betekenis daarvan is vaak een vector waarvan de componenten met de tijd veranderen, b.v. de plaatsvector van een bewegend stoffelijk punt.

* P. S. Laplace (1749–1827).

Definitie

Een vectorfunctie gedefinieerd op een interval I van de reële getallenrechte \mathbb{R} met waarden in \mathbb{R}^3 is een voorschrift \underline{v} dat aan iedere $t \in I$ op eenduidige wijze een vector $\underline{v}(t)$ in \mathbb{R}^3 toevoegt.

Als:

$$\underline{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{bmatrix}$$

dan heten de functies v_1 , v_2 en v_3 de *componentfuncties* van \underline{v} , $v_1(t)$, $v_2(t)$ en $v_3(t)$ zijn de *componenten* van $\underline{v}(t)$. In \mathbb{R}^3 schrijven we vaak $x(t)$, $y(t)$ en $z(t)$ in plaats van $v_1(t)$, $v_2(t)$ en $v_3(t)$.

Een analoge definitie geldt voor een vectorfunctie van \mathbb{R} naar \mathbb{R}^2 .

We kunnen voor deze vectorfuncties op een voor de hand liggende manier de begrippen limiet, continuïteit en differentieerbaarheid invoeren. Hierbij hebben we in de vectorruimte een analogon nodig voor het begrip absolute waarde bij de reële getallen. Dit vinden we door de *norm* of *lengte* van een vector in te voeren.

Definitie

De norm $\|\underline{v}\|$ van een vector $\underline{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ wordt gedefinieerd door $\|\underline{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Een analoge definitie voor norm geldt in \mathbb{R}^2 .

Definitie

Een vectorfunctie \underline{v} , gedefinieerd op een gereduceerde omgeving van $t_0 \in \mathbb{R}$ (met waarden in \mathbb{R}^3), heeft voor $t = t_0$ de limiet(vector) \underline{a} , indien

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \|\underline{v}(t) - \underline{a}\| = 0 \quad (24.1)$$

We schrijven in dit geval:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{v}(t) = \underline{a}$$

Dit betekent dat bij iedere $\varepsilon > 0$ een $\delta(\varepsilon)$ bestaat, zodanig dat

$$\{v_1(t) - a_1\}^2 + \{v_2(t) - a_2\}^2 + \{v_3(t) - a_3\}^2 < \varepsilon$$

als $0 < |t - t_0| < \delta(\varepsilon)$.

Het is direct duidelijk dat in de definitie (24.1) equivalent is met:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} v_i(t) = a_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

De volgende definitie voor continuïteit is nu zeer voor de hand liggend.

Definitie

Een vectorfunctie \underline{v} , gedefinieerd op een (volle) omgeving van $t_0 \in \mathbb{R}$ (met waarden in \mathbb{R}^3) is continu in t_0 , indien

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{v}(t) = \underline{v}(t_0)$$

Men kan eenvoudig aantonen dat deze definitie gelijkwaardig is met de volgende definitie.

Definitie

Een vectorfunctie \underline{v} , gedefinieerd op een (volle) omgeving van $t_0 \in \mathbb{R}$ (met waarden in \mathbb{R}^3) is continu in t_0 , indien de componentfuncties v_i continu zijn in t_0 ($i = 1, 2, 3$).

Definitie

Een vectorfunctie \underline{v} , gedefinieerd op $\langle a, b \rangle$, heet continu op $\langle a, b \rangle$, indien \underline{v} continu is $\forall t \in \langle a, b \rangle$.

De definitie voor differentieerbaarheid is als volgt:

Definitie

Een vectorfunctie \underline{v} , gedefinieerd op een (volle) omgeving van $t \in \mathbb{R}$ heet differentieerbaar in t , indien

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{v}(t + \Delta t) - \underline{v}(t)}{\Delta t}$$

bestaat.

Notatie voor deze limiet: $\frac{\partial \underline{v}}{\partial t}$ of $\underline{v}'(t)$ of $\dot{\underline{v}}(t)$ (de afgeleide van \underline{v} in het punt t).

Definitie

De functie $\underline{v}' : t \mapsto \underline{v}'(t)$ heet de afgeleide functie van \underline{v} .

Definitie

Een vectorfunctie \underline{v} gedefinieerd op $\langle a, b \rangle$ heet differentieerbaar op $\langle a, b \rangle$, indien \underline{v} differentieerbaar is $\forall t \in \langle a, b \rangle$.

Opmerking 1:

Linker-en rechterlimiet in t , linker-en rechter continuïteit in t , linker-en rechter differentieerbaarheid in t , als ook continuïteit en differentieerbaarheid op een gesloten interval worden op voor de hand liggende wijze gedefinieerd.

Opmerking 2:

Uit de definitie van afgeleide van een vectorfunctie en uit die van gelijkheid van vectoren volgt onmiddellijk dat de vectorfunctie \underline{v} differentieerbaar is in t , dan en slechts dan als de componentfuncties v_i ($i = 1, 2, 3$) differentieerbaar zijn in t .

Opmerking 3:

Analoge definities gelden voor vectorfuncties van \mathbb{R} naar \mathbb{R}^2 .

Uit de definities volgen direct de regels voor differentiatie van de som, het verschil en het produkt van vectorfuncties (waarvan de definities aan de hand van som, verschil en produkt van vectoren eenvoudig kunnen worden gegeven).

Bij het produkt moet men onderscheiden:

a het produkt van een scalaire functie α met een vectorfunctie \underline{v} , gedefinieerd door:

$$\alpha \underline{v}(t) = \alpha(t) \underline{v}(t) = \begin{bmatrix} \alpha(t)v_1(t) \\ \alpha(t)v_2(t) \\ \alpha(t)v_3(t) \end{bmatrix}$$

b het inwendig produkt van twee vectorfuncties \underline{v} en \underline{w} , gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} (\underline{v} \cdot \underline{w})(t) &= \underline{v}(t) \cdot \underline{w}(t) \\ &= v_1(t)w_1(t) + v_2(t)w_2(t) + v_3(t)w_3(t) \end{aligned}$$

c het uitwendig produkt van twee vectorfuncties \underline{v} en \underline{w} , gedefinieerd door:

$$\begin{aligned} (\underline{v} \times \underline{w})(t) &= \underline{v}(t) \times \underline{w}(t) \\ &= \begin{bmatrix} v_2(t)w_3(t) - v_3(t)w_2(t) \\ v_3(t)w_1(t) - v_1(t)w_3(t) \\ v_1(t)w_2(t) - v_2(t)w_1(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Men kan eenvoudig narekenen (waarbij men soms op de volgorde van de factoren moet letten):

$$\frac{d(\underline{v} \pm \underline{w})}{dt} = \frac{d\underline{v}}{dt} \pm \frac{d\underline{w}}{dt} \quad (24.2)$$

$$\frac{d(\alpha \underline{v})}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \underline{v}(t) + \alpha(t) \frac{d\underline{v}}{dt} \quad (24.3)$$

$$\frac{d(\underline{v} \cdot \underline{w})}{dt} = \frac{d\underline{v}}{dt} \cdot \underline{w}(t) + \underline{v}(t) \cdot \frac{d\underline{w}}{dt} \quad (24.4)$$

$$\frac{d(\underline{v} \times \underline{w})}{dt} = \frac{d\underline{v}}{dt} \times \underline{w}(t) + \underline{v}(t) \times \frac{d\underline{w}}{dt} \quad (24.5)$$

Opmerking 4:

De formules (24.2) ... (24.5) gelden ook voor vectorfuncties van \mathbb{R} naar \mathbb{R}^2 .

Vlakke krommen

25 Parametervoorstelling van een kromme

In deel 1 is uiteengezet hoe men het verloop van een functie grafisch kan voorstellen door een vlakke kromme met vergelijking $y = f(x)$. Aangezien op grond van de definitie van een functie bij elke x waarvoor de functie gedefinieerd is, slechts één waarde van y behoort, verkrijgt men als grafiek steeds één enkelvoudige tak. Heeft men echter een rechthoekig coördinatenstelsel en een vlakke kromme die door een lijn evenwijdig aan de y -as niet altijd in slechts één punt gesneden wordt, dan zal die kromme voorgesteld moeten worden door meer dan één functie, die, hetzij in expliciete, hetzij in impliciete vorm (zie par. 7) gegeven zijn.

Als voorbeeld nemen we de eenheidscirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$. Deze kan ook vastgelegd worden door twee functies in expliciete vorm t.w. $y = \sqrt{1 - x^2}$ (bovenste helft) en $y = -\sqrt{1 - x^2}$ (onderste helft).

Een voorbeeld van een kromme waarvan de vergelijking in impliciete vorm gegeven is, waarbij het bijzonder moeilijk is een voorstelling te geven in expliciete vorm door één of meer functies, treffen we aan bij het reeds in par. 10, voorbeeld 2 ingevoerde folium van Descartes, bepaald in impliciete vorm door de vergelijking (zie fig. 6):

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Juist in deze gevallen is er behoefte om een functie nog op een andere wijze voor te stellen. Een methode is die van een voorstelling in *parametervorm*, waarbij we met succes gebruik kunnen maken van vectorfuncties.

Stel dat X een monotone, continue functie is van t , gedefinieerd op een interval I van de reële as, met waardenverzameling V en dat Y een continue functie is, gedefinieerd op I en ook op V .

We stellen:*

$$\left. \begin{array}{l} x = X(t) \\ y = Y(t) \end{array} \right\} \quad (25.1)$$

Daar X monotoon en continu is, heeft X een inverse X^{inv} , gedefinieerd op V (zie deel 1, par. 37), dus:

$$t = X^{\text{inv}}(x) \quad (\forall x \in V)$$

Dus geldt, daar $y = Y(t)$, dat:

$$y = Y(X^{\text{inv}}(x))$$

dus $y = f(x)$, waarin f een continue functie is van x ($\forall x \in V$).

Door (25.1) is dus y bepaald „als functie van x ”. Men noemt (25.1) een *parametervoorstelling* van deze functie. De overgang van (25.1) naar $y = f(x)$ noemt men het *eliminieren* van de parameter.

Omgekeerd kunnen we als gegeven is $y = f(x)$, op triviale wijze een parametervoorstelling geven van f , of zoals men zegt: f (of de kromme) *parametriseren*. Men schrijft:

$$\left. \begin{array}{l} x = t \\ y = f(t) \end{array} \right\}$$

Wanneer y in impliciete vorm gegeven is als functie van x , dan is het vaak lastiger om tot een parametervoorstelling van f te komen. We zullen daarvan als voorbeeld het folium van Descartes geven (zie voorbeeld 3).

De parametervoorstelling (25.1) kunnen we in vectorvorm schrijven als:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix}$$

of

$$\underline{r} = \underline{r}^*(t)$$

De vector \underline{r} is dan de *plaatsvector* van het punt met coördinaten $X(t)$ en $Y(t)$. Vaak schrijft men (slordig): $\underline{r} = \underline{r}(t)$, maar dan heeft \underline{r} een dubbele betekenis.

* We zullen deze notatie met X en Y gebruiken in plaats van de ook dikwijls voorkomende notatie:

$$\left. \begin{array}{l} x = f(t) \\ y = g(t) \end{array} \right\} \quad \text{of} \quad \left. \begin{array}{l} x = \varphi_1(t) \\ y = \varphi_2(t) \end{array} \right\}$$

omdat daardoor later afgeleide formules een overzichtelijker vorm verkrijgen.

Voorbeeld 1

Als

$$\left. \begin{aligned} x &= X(t) = a \cos t \\ y &= Y(t) = b \sin t \end{aligned} \right\}$$

waarin $a > 0$, $b > 0$ en $t \in [0, \pi]$, dan is X monotoon (dalend) en continu op $[0, \pi]$. X neemt alle waarden aan van het interval $[-a, a]$, Y alle waarden van $[0, b]$. Dus is $y \geq 0$. Eliminatie van de parameter t geeft y als functie van x in impliciete of expliciete form. Hier dus:

$$\cos t = \frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{y}{b}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{met } y \geq 0$$

of

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

De grafiek van de functie is een halve ellips. Laat men echter t het interval $[0, 2\pi]$ doorlopen, dan bepalen $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ alle punten van de ellips met vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

In dit geval is y niet door één functievoorschrift bepaald.

Uit dit voorbeeld ziet men dat, wanneer men een gegeven kromme met vergelijking $f(x, y) = 0$ wil parametriseren, de functie X en Y uit (25.1) zo bepaald moeten worden dat, als t een zeker interval doorloopt, de paren $\{X(t), Y(t)\}$ alle punten van de kromme opleveren, maar ook niet meer.

Met behulp van de parameter t kunnen we de kromme een bepaalde *zin* of *richting* geven. De richting waarin de parameterwaarden toenemen zullen we de *positieve* richting noemen, die waarin t afneemt de *negatieve* richting. Indien het punt $(x, y) = (X(t), Y(t))$ een kromme beschrijft als t het interval $[t_0, t_1]$ doorloopt, en $P_0 = (X(t_0), Y(t_0))$, $P_1 = (X(t_1), Y(t_1))$, dan wordt de kromme in positieve zin doorlopen van P_0 naar P_1 .

In vele gevallen kan men aan de parameter een meetkundige of fysische betekenis geven. In het bovengenoemde geval van de ellips stelt t de *excentrische hoek* voor, d.i. de hoek met O als hoekpunt en benen langs de lange as en door het met het punt t corresponderend punt Q van de omgeschreven cirkel verticaal boven of onder het punt $P(a \cos t, b \sin t)$ (zie fig. 18).

Vaak stelt ook t de tijd voor. De ligging van een punt wordt dan een functie van de tijd t . De vergelijkingen:

$$x = X(t), \quad y = Y(t)$$

zijn dan de *bewegingsvergelijkingen* van een punt.

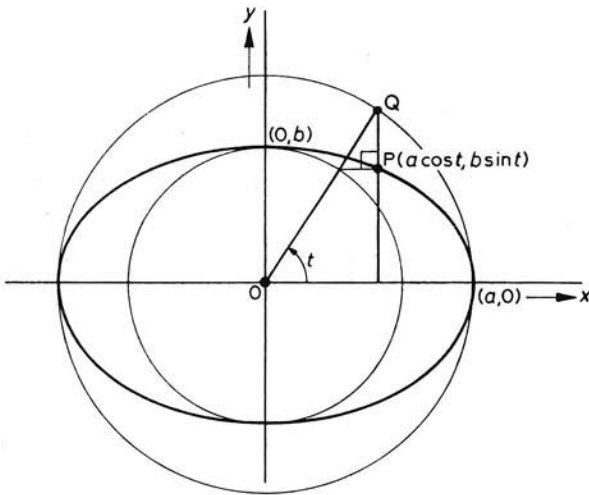


Fig. 18

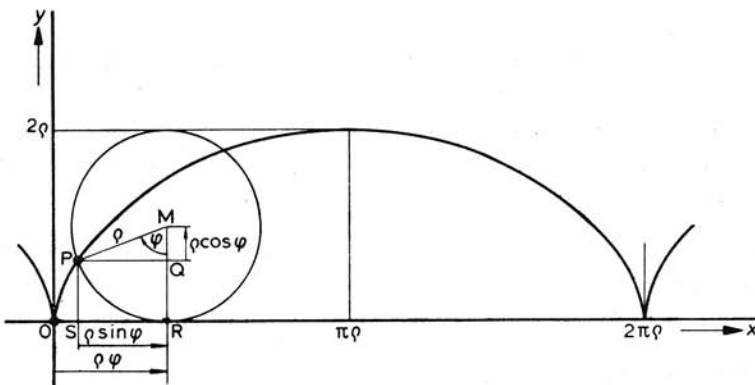
Voorbeeld 2

De gewone cycloïde

De cycloïde ontstaat als een cirkel rolt langs een rechte of een andere cirkel. Wij behandelen hier het geval dat een cirkel met straal ρ rolt langs de x -as, en beschouwen een punt P van de omtrek. We kiezen de oorsprong van het assenstelsel zo dat op de tijd $t = 0$ het beschouwde punt zich in O bevindt (zie fig. 19). De hoek waarover de cirkel gewenteld is noemen we φ . In het geval dat de cirkel eenparig langs de x -as rolt, is φ evenredig met de tijd t .

Als de cirkel rolt zonder te slippen, dan is de lengte van de cirkelboog PR gelijk aan de lengte van de weg OR . De boog PR is $\rho\varphi$.

Fig. 19



Uit fig. 19 volgt verder:

$$x = OR - SR = OR - PQ = \rho\varphi - \rho \sin \varphi$$

$$y = PS = QR = MR - MQ = \rho - \rho \cos \varphi$$

zodat de parametervergelijkingen zijn:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho(\varphi - \sin \varphi) \\ y &= \rho(1 - \cos \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (25.2)$$

of in vectorvorm:

$$\underline{r} = \underline{r}^*(\varphi) = \begin{pmatrix} \rho(\varphi - \sin \varphi) \\ \rho(1 - \cos \varphi) \end{pmatrix}$$

Om de vergelijking van de cycloïde in niet-parametervorm te verkrijgen, moet men uit (25.2) φ elimineren. De vergelijking wordt dan zeer ingewikkeld.

Voorbeeld 3

*Het folium van Descartes**

In par. 10 behandelden we enkele eigenschappen van het folium van Descartes, bepaald door de vergelijking:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

Een parametervoorstelling kunnen we verkrijgen door het folium te snijden met rechte lijnen door de oorsprong, waarvan de richtingscoëfficiënt m alle waarden doorloopt: $y = mx$. De coördinaten van de snijpunten met de kromme vindt men uit:

$$\left. \begin{aligned} y &= mx \\ x^3 + y^3 - 3axy &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Een van de snijpunten is de oorsprong, dubbel geteld, het andere wordt bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3am}{1 + m^3} \\ y &= \frac{3am^2}{1 + m^3} \end{aligned} \right\} \quad (25.3)$$

(25.3) geeft een parametervoorstelling voor het folium met m als parameter.

In vectorvorm:

$$\underline{r} = \underline{r}^*(m) = \begin{pmatrix} \frac{3am}{1 + m^3} \\ \frac{3am^2}{1 + m^3} \end{pmatrix}$$

* R. Descartes 1596-1650.

26 Differentiatie van een in parametervorm gegeven functie

Als $x = X(t)$ en $y = Y(t)$, dan bestaat er, indien aan de in par. 25 vermelde voorwaarden is voldaan, een functie f zodanig dat:

$$y = f(x)$$

Indien X en Y differentieerbaar zijn naar t , kan men vragen hoe men $\frac{df}{dx}$ kan uitdrukken in $\frac{dX}{dt}$ en $\frac{dY}{dt}$.

Uit $y = f(x)$ volgt:

$$y = f\{X(t)\} = Y(t)$$

en dus volgens de kettingregel:

$$\frac{dY}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dX}{dt}$$

zodat (indien $\frac{dX}{dt} \neq 0$):

$$\frac{df}{dx} = \frac{\frac{dY}{dt}}{\frac{dX}{dt}} \quad (26.1)$$

Als men in navolging van Newton de afgeleiden naar een parameter aangeeft met een stip boven de te differentiëren functie (fluxienotatie), dan verkrijgt men:

$$\frac{dX}{dt} = \dot{X}(t) \text{ en } \frac{dY}{dt} = \dot{Y}(t)$$

zodat (26.1) te schrijven is als:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)} \quad (26.2)$$

De waarde van $\frac{df}{dx}$ in een punt P stelt de tangens voor van de hellingshoek α , die de raaklijn in P aan de kromme met de positieve richting van de x -as maakt. Men kiest hiervoor de hoek α gelegen tussen $-\frac{1}{2}\pi$ en $\frac{1}{2}\pi$, waarover de positieve richting van de x -as gedraaid moet worden om de richting van de raaklijn te verkrijgen.

Zo is in fig. 20a de hoek α positief, en in fig. 20b is α negatief.

Nu de richting van de kromme door de parameter vastgelegd is, kan men ook aan de raaklijn een positieve of negatieve zin geven. We zullen als positieve richting op de raaklijn die richting kiezen, waarin de „parameter toeneemt” (zie fig. 20).

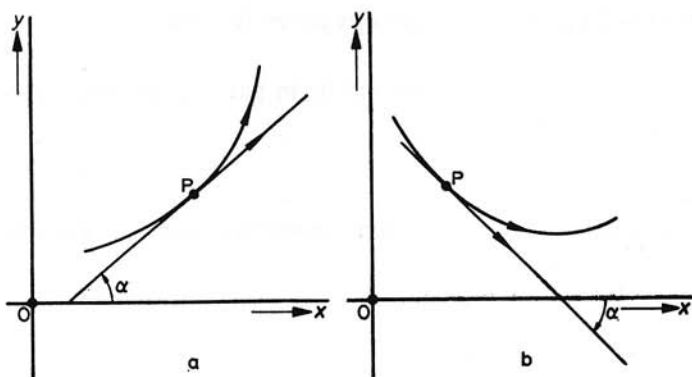


Fig. 20

De tweede afgeleide $\frac{d^2f}{dx^2}$ wordt verkregen door (26.2) nogmaals naar x te differentiëren en daarbij de kettingregel toe te passen.

$$\begin{aligned} \frac{d^2f}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)} \right) \cdot \frac{1}{\dot{X}(t)} \\ &= \frac{\ddot{Y}(t)\dot{X}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\{\dot{X}(t)\}^2} \cdot \frac{1}{\dot{X}(t)} \\ &= \frac{\ddot{Y}(t)\dot{X}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\{\dot{X}(t)\}^3} \end{aligned}$$

Voorbeeld 1

$x = X(\varphi) = r \cos \varphi$, $y = Y(\varphi) = r \sin \varphi$ (r is constant, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Dit is een parametervoorstelling van een cirkel met straal r en middelpunt in O (zie fig. 21). De parameter φ is de hoek die de voerstraal naar een punt maakt met de positieve x -as.

Nu is

$$\dot{X}(\varphi) = -r \sin \varphi, \quad \dot{Y}(\varphi) = r \cos \varphi$$

zodat, als $y = f(x)$, geldt:

$$\frac{df}{dx} = \frac{r \cos \varphi}{-r \sin \varphi} = -\cot \varphi$$

Dit resultaat is ook eenvoudig uit fig. 21 af te leiden als volgt:

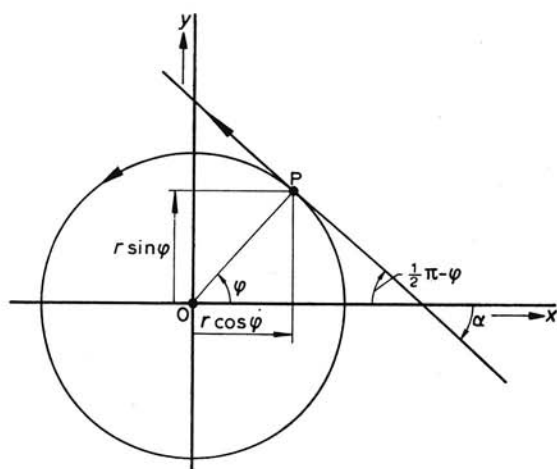


Fig. 21

Daar $\frac{df}{dx} = \tan \alpha$ en $\alpha = -(\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, geldt:

$$\frac{df}{dx} = -\tan(\frac{1}{2}\pi - \varphi) = -\cot \varphi$$

Verder geldt:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{df}{dx}\right)}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\dot{X}(\varphi)} = \frac{1}{\sin^2 \varphi} \cdot \frac{1}{-r \sin \varphi} = -\frac{1}{r \sin^3 \varphi}$$

Voorbeeld 2

$x = X(\varphi) = \rho(\varphi - \sin \varphi)$, $y = Y(\varphi) = \rho(1 - \cos \varphi)$, ρ constant, $\varphi \in \langle \leftarrow, \rightarrow \rangle$.

Dit is een parametervoorstelling van de in par. 25 besproken gewone cycloïde (zie fig. 19).

$$\dot{X}(\varphi) = \rho(1 - \cos \varphi), \quad \dot{Y}(\varphi) = \rho \sin \varphi$$

zodat, als $y = f(x)$:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\rho \sin \varphi}{\rho(1 - \cos \varphi)} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} = \cot \frac{1}{2}\varphi$$

Men ziet hieruit dat de raaklijnen aan de cycloïde horizontaal zijn in de punten waar $\cot \frac{1}{2}\varphi = 0$, dus in de punten met parameterwaarden $\pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$. Verticale raaklijnen treden op in de punten met $\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$. In deze laatste punten is $y = 0$.

Verder is:

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d(\cot \frac{1}{2}\varphi)}{d\varphi} \cdot \frac{1}{\dot{X}(\varphi)} = -\frac{1}{2 \sin^2 \frac{1}{2}\varphi} \cdot \frac{1}{\rho(1 - \cos \varphi)} = -\frac{1}{4\rho \sin^4 \frac{1}{2}\varphi}$$

De cycloïde heeft geen buigpunten.

27 Voorstelling van een kromme in poolcoördinaten

Een tweede methode om een functie voor te stellen is gebruik te maken van poolcoördinaten.

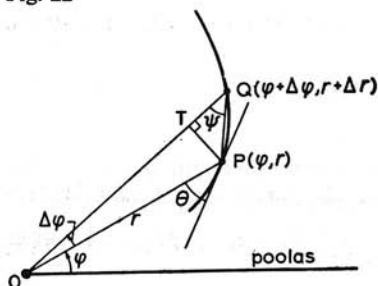
In het vorige is reeds vele malen gesproken over poolcoördinaten. We zullen ons hier beperken tot enkele aanvullende opmerkingen.

Is de voerstraal r gegeven als functie van φ in de gedaante $r = R(\varphi)$, dan wordt de grafiek van de door deze vergelijking (de *poolvergelijking*) voorgestelde kromme, gevormd door alle punten waarvan de poolcoördinaten φ en r aan de vergelijking voldoen. Een moeilijkheid bij het gebruik van het poolcoördinatenstelsel is het feit, dat elk stel coördinaten (φ, r) met $r \geq 0$ wel een punt in het platte vlak bepaalt, maar dat omgekeerd een punt van het platte vlak niet eenduidig met een paar poolcoördinaten correspondeert. Immers de coördinatenstellen (φ_1, r_1) , $(\varphi_1 \pm 2k\pi, r_1)$ ($k = 1, 2, \dots$) wijzen in het platte vlak hetzelfde punt aan.

Voldoet nu (φ_1, r_1) aan de poolvergelijking $r = R(\varphi)$, dan zal het corresponderende punt op de kromme liggen. Het punt met coördinaten $(\varphi_1 \pm 2k\pi, r_1)$ ligt dan ook op de kromme, terwijl in het algemeen deze coördinaten niet aan de poolvergelijking zullen voldoen. We mogen dus niet zonder meer zeggen dat de door $r = R(\varphi)$ voorgestelde kromme uitsluitend punten bevat waarvan de poolcoördinaten aan deze vergelijking voldoen. Praktisch levert dit echter weinig moeilijkheden.

In fig. 22 is P een punt van de kromme met vergelijking $r = R(\varphi)$, met poolcoördinaten (φ, r) . We zullen veronderstellen dat R een differentieerbare functie van φ is. Het punt Q heeft tot coördinaten $(\varphi + \Delta\varphi, r + \Delta r)$. De hoek OQP tussen voer-

Fig. 22



straal en koorde PQ noemen we ψ . Laat men uit P de loodlijn PT neer op OQ, dan geldt:

$$\begin{aligned}\tan \psi &= \frac{r \sin \Delta\varphi}{r + \Delta r - r \cos \Delta\varphi} \\ &= \frac{2r \sin \frac{1}{2}\Delta\varphi \cos \frac{1}{2}\Delta\varphi}{2r \sin^2 \frac{1}{2}\Delta\varphi + \Delta r} \\ &= \frac{r}{r \tan \frac{1}{2}\Delta\varphi + \frac{\Delta r}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi}}\end{aligned}$$

Laat men nu het punt Q naderen tot P, dan zal $\Delta\varphi \rightarrow 0$, en de lijn waarop koorde PQ ligt overgaan in de raaklijn in P. De hoek ψ zal bij deze limietovergang overgaan in de hoek θ tussen de raaklijn en de voerstraal in P. We vinden dan:

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \tan \psi \\ &= \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{r}{r \tan \frac{1}{2}\Delta\varphi + \frac{\Delta r}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\sin \Delta\varphi}} \\ &= \frac{R(\varphi)}{\frac{dR}{d\varphi}}\end{aligned}$$

Als we nu schrijven:

$$\frac{dR}{d\varphi} = R'(\varphi)$$

dan vinden we:

$$\tan \theta = \frac{R(\varphi)}{R'(\varphi)} \quad (27.1)$$

Voorbeeld

Gevraagd alle krommen die in elk van hun punten de voerstraal onder een constante hoek snijden.

Oplossing:

De hoek θ tussen de voerstraal en de raaklijn moet in elk punt constant zijn. In verband met (27.1) moet dus $\frac{R(\varphi)}{R'(\varphi)}$, dus ook $\frac{R'(\varphi)}{R(\varphi)}$ constant zijn. De voorwaarde is

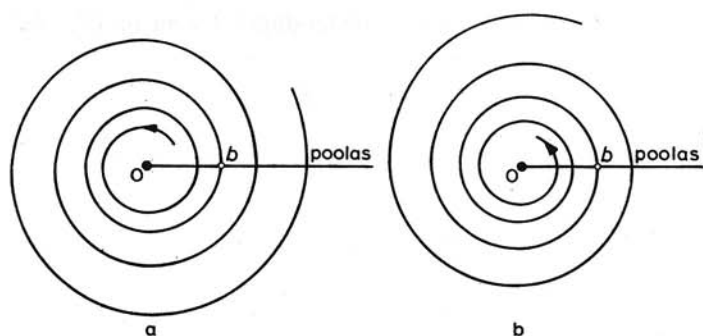


Fig. 23

dus:

$$\frac{R'(\varphi)}{R(\varphi)} = p \quad (p = \text{constant})$$

Hieruit volgt:

$$\ln |R(\varphi)| = p\varphi + \ln |c|$$

$$|R(\varphi)| = |c| e^{p\varphi}$$

of

$$R(\varphi) = b e^{p\varphi}$$

waarin b een willekeurige constante ($\neq 0$) voorstelt. Reële punten verkrijgt men alleen als $R(\varphi) > 0$, dus als $b > 0$ is.

De poolvergelijking van de gevraagde krommen is dus:

$$R(\varphi) = b e^{p\varphi}$$

waarin p een gegeven en b een willekeurige positieve constante voorstelt.

In fig. 23a is de grafiek getekend voor het geval dat $p > 0$, in fig. 23b voor het geval dat $p < 0$ is. In beide gevallen stelt de oplossing een stelsel spiralen voor.

Men noemt zo'n spiraal een *equi-angulaire spiraal*.

Is $p = 0$, dan geldt $R(\varphi) = b$. We hebben dus een stelsel cirkels. In dit geval is $\cot \theta = 0$, dus $\theta = \frac{1}{2}\pi$. De hoek tussen raaklijn en voerstraal is dan steeds $\frac{1}{2}\pi$.

Opmerking:

Men kan (27.1) ook afleiden uit de transformatieformules van rechthoekige- op poolcoördinaten:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

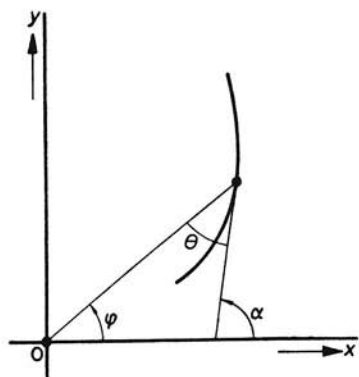


Fig. 24

Uit fig. 24 ziet men: $\theta = \alpha - \varphi$, dus

$$\tan \theta = \tan(\alpha - \varphi) = \frac{\tan \alpha - \tan \varphi}{1 + \tan \alpha \tan \varphi}$$

Op de kromme geldt $r = R(\varphi)$. Dus geldt voor de punten op de kromme:

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\varphi) \cos \varphi = X(\varphi) \\ y &= R(\varphi) \sin \varphi = Y(\varphi) \end{aligned} \right\}$$

Als eliminatie van φ oplevert $y = f(x)$, dan geldt:

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{df}{dx} \\ &= \frac{\dot{Y}(\varphi)}{\dot{X}(\varphi)} \\ &= \frac{R'(\varphi) \sin \varphi + R(\varphi) \cos \varphi}{R'(\varphi) \cos \varphi - R(\varphi) \sin \varphi} \\ &= \frac{R'(\varphi) \tan \varphi + R(\varphi)}{R'(\varphi) - R(\varphi) \tan \varphi} \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\frac{R'(\varphi) \tan \varphi + R(\varphi)}{R'(\varphi) - R(\varphi) \tan \varphi} - \tan \varphi}{1 + \frac{\{R'(\varphi) \tan \varphi + R(\varphi)\} \tan \varphi}{R'(\varphi) - R(\varphi) \tan \varphi}} \\ &= \frac{R(\varphi) + R(\varphi) \tan^2 \varphi}{R'(\varphi) + R'(\varphi) \tan^2 \varphi} \end{aligned}$$

$$= \frac{R(\varphi)}{R'(\varphi)}$$

is overeenstemming met (27.1).

28 De booglengte van een vlakke kromme

In deel 1, par. 19 is het begrip booglengte van een cirkelboog ingevoerd met behulp van de lengte van ingeschreven lijnstukken.

We willen nu het begrip uitbreiden voor een algemene vlakke kromme met de vergelijking $y = f(x)$. We veronderstellen f continu op een interval $[a, b]$ en vragen ons af of men aan de boog K van de grafiek van $y = f(x)$ tussen de punten $A\{a, f(a)\}$ en $B\{b, f(b)\}$ een getal σ kan toekennen dat men als „lengte” van de boog K kan opvatten. Is dit het geval, dan noemt men dat getal de *booglengte* van K tussen A en B . Men noteert dat als $\sigma(a, b)$.

We verdelen het interval $[a, b]$ door $n + 1$ deelpunten $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n (= b)$, in n deelintervallen met lengte $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. De punten op de kromme die bij deze abscissen behoren, duiden we aan door $A, P_1, P_2, \dots, P_{i-1}, P_i, \dots, B$ (fig. 25). Noemen we

$$y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = \Delta y_i$$

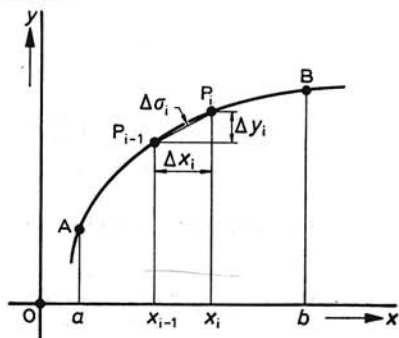
dan is de lengte van het lijnstuk $\overline{P_{i-1}P_i}$ voor te stellen door:

$$\overline{P_{i-1}P_i} = \Delta \sigma_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

De lengte van het gebroken lijnstuk $AP_1 \dots P_{i-1}P_i \dots B$ is dus

$$\sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Fig. 25



We veronderstellen verder dat f op $[a, b]$ een continue afgeleide heeft, dan is volgens de middelwaardstelling:

$$\Delta y_i = f'(\xi_i)\Delta x_i \quad (x_{i-1} < \xi_i < x_i)$$

zodat

$$\sum_{i=1}^n \Delta \sigma_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \{f'(\xi_i)\}^2} \Delta x_i$$

Dit is een *Riemansom* behorende bij de integraal $\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$.

Omdat $x \mapsto \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ continu is op $[x_{i-1}, x_i]$, neemt deze functie op dit interval een minimum m_i en een maximum M_i aan. Hieruit volgt:

$$\underline{\sigma}_v = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \{f'(\xi_i)\}^2} \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i = \bar{\sigma}_v$$

Wegens de continuïteit van f' is bij alle mogelijke verdelingen v van $[a, b]$ in deelintervallen:

$$\sup \{\underline{\sigma}_v\} = \inf \{\bar{\sigma}_v\} = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

Deze bepaalde integraal nemen wij als definitie van de booglengthe $\sigma(a, b)$ van AB:

$$\sigma(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \quad (28.1)$$

Als deze integraal bestaat, noemt men de kromme tussen A en B *rectificeerbaar*.

Voor een willekeurig punt x van $[a, b]$ geldt:

$$\sigma(a, x) = \int_a^x \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt$$

Bij vaste a is door $\int_a^x \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt$ aan iedere $x \in [a, b]$ een getal $\sigma(a, x)$ toegevoegd. We noemen deze toevoeging s , zodat:

$$s(x) = \int_a^x \sqrt{1 + \{f'(t)\}^2} dt$$

dus

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$$

of met differentialen:

$$ds = \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \quad (28.2)$$

Verder stellen we $s(x) = \sigma$.

Men noemt ds het *boogelement* of *lijnelement* van de kromme met vergelijking $y = f(x)$.

Omdat $\sqrt{1 + f'^2(x)} > 0$, wordt bij gebruik van (28.1) de booglengthe zó gemeten dat s een stijgende functie van x is.

Als de kromme gegeven is door de parametervoorstelling:

$$x = X(t), \quad y = Y(t)$$

dan volgt uit (28.2):

$$ds = \sqrt{1 + \left\{ \frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)} \right\}^2} \dot{X}(t) dt$$

dus:

$$ds = \sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2} \frac{\dot{X}(t)}{|\dot{X}(t)|} dt \quad (28.3)$$

Daar volgens de veronderstelling X monotoon is op het beschouwde t -interval, heeft $\dot{X}(t)$ een vast teken. Op dat interval is steeds $\frac{\dot{X}(t)}{|\dot{X}(t)|} = 1$ of $\frac{\dot{X}(t)}{|\dot{X}(t)|} = -1$.

In het eerste geval is de functie X monotoon stijgend.

t_1 (behorend bij $x = a$) is kleiner dan t_2 (behorend bij $x = b$), daar $a < b$. In dit geval geldt dus volgens (28.3):

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2} \quad (28.4)$$

(28.1) gaat over in:

$$\begin{aligned} \sigma(a, b) &= s(b) - s(a) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2} dt \end{aligned} \quad (28.5)$$

In het tweede geval is X monotoon dalend en geldt $t_1 > t_2$ als $a < b$. Men vindt volgens (28.3):

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2} \quad (28.6)$$

dus:

$$\begin{aligned} s(b) - s(a) &= - \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2} dt \\ &= \int_{t_2}^{t_1} \sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2} dt \end{aligned} \quad (28.7)$$

zodat de lengte $\sigma(a, b)$ ($a < b$) van de boog toch weer positief uitvalt.

Voorbeeld 1

De cirkel met vergelijking $x^2 + y^2 = 1$ kan men in parametervorm voorstellen door (zie fig. 26):

$$\left. \begin{aligned} x &= X(\varphi) = \cos \varphi \\ y &= Y(\varphi) = \sin \varphi \end{aligned} \right\} (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

$$\dot{X}(\varphi) = -\sin \varphi, \quad \dot{Y}(\varphi) = \cos \varphi$$

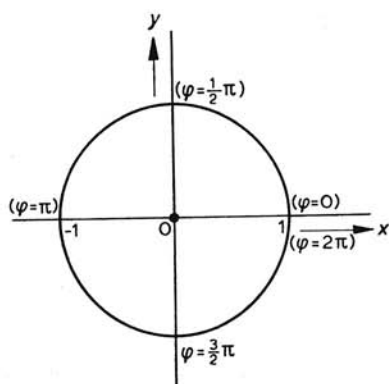


Fig. 26

Voor de bovenhelft van de cirkel waarbij φ de waarden van 0 tot π doorloopt, is de functie $X: x \mapsto X(\varphi) = \cos \varphi$ monotoon dalend. Volgens (28.6) is:

$$\frac{ds}{dt} = -\sqrt{\{\dot{X}(\varphi)\}^2 + \{\dot{Y}(\varphi)\}^2} = -\sqrt{(-\sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi} = -1$$

Volgens (28.7) is:

$$\sigma(-1, 1) = -\int_{\pi}^0 dt = \int_0^{\pi} dt = \pi$$

Bij de onderhelft doorloopt φ de waarden van π tot 2π . De functie $X: x \mapsto X(\varphi) = \cos \varphi$ is dan toenemend, zodat volgens (28.4) geldt:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\{\dot{X}(\varphi)\}^2 + \{\dot{Y}(\varphi)\}^2} = \sqrt{(-\sin \varphi)^2 + \cos^2 \varphi} = 1$$

Volgens (28.5) is:

$$\sigma(-1, 1) = \int_{\pi}^{2\pi} dt = \pi$$

N.B. Zie ook voorbeeld 1 in par. 33.

Opmerking:

De booglengete is, eventueel afgezien van het teken, *onafhankelijk van de keuze van de parameter*. Hiermede bedoelen we het volgende.

Stel dat we een andere parameter invoeren, b.v. u , die met t als volgt samenhangt: $t = \varphi(u)$, waarin φ een monotone, differentieerbare functie is van u , met een continue afgeleide. We kunnen dan u opvatten als functie van t , b.v.: $u = \psi(t)$. Er geldt

dan: $\frac{d\varphi}{du} \cdot \frac{d\psi}{dt} = 1$. Substitutie van $\varphi(u)$ in X en Y geeft:

$$X(t) = X\{\varphi(u)\} = X^*(u) \text{ en } \dot{X}(t) = \dot{X}^*(u) \cdot \frac{d\psi}{dt}$$

$$Y(t = Y\{\varphi(u)\} = Y^*(u) \text{ en } \dot{Y}(t) = \dot{Y}^*(u) \cdot \frac{d\psi}{dt}$$

Is $\varphi(t_1) = \alpha$ en $\varphi(t_2) = \beta$, dan gaat (28.5) over in:

$$\begin{aligned} \sigma(a, b) &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\dot{X}^*(u)]^2 + [\dot{Y}^*(u)]^2} \left(\frac{d\psi}{dt} \right)^2 \frac{d\varphi}{du} du \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\dot{X}^*(u)]^2 + [\dot{Y}^*(u)]^2} \left| \frac{d\psi}{dt} \right| \frac{d\varphi}{du} du \end{aligned}$$

Daar $\frac{d\psi}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{du} = 1$, zien we dat in het geval dat φ (en dus ook ψ) monotoon stijgend is, het gebruik van u als parameter dezelfde waarde voor $\sigma(a, b)$ oplevert, als wanneer men t als parameter gebruikt. Is echter φ (en dus ook ψ) monotoon dalend, dan vinden we juist de tegengestelde waarde voor $\sigma(a, b)$.

Algemeen stelt men het lijnelement voor door:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

Indien de kromme gegeven is door de vectorfunctie \underline{R} , dus $\underline{r} = \underline{R}(t)$, dan volgt uit (28.5) onmiddellijk dat de booglengthe van dat deel van de kromme tussen A met parameter t_0 en B met parameter t_1 , gelijk is aan:

$$\sigma(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\underline{R}}(t) \cdot \dot{\underline{R}}(t)} dt$$

Indien de kromme gegeven is door middel van een poolvergelijking $r = R(\varphi)$, dan volgt uit:

$$\left. \begin{aligned} x &= R(\varphi) \cos \varphi = X(\varphi) \\ y &= R(\varphi) \sin \varphi = Y(\varphi) \end{aligned} \right\}$$

dat

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}(\varphi) &= R'(\varphi) \cos \varphi - R(\varphi) \sin \varphi \\ \dot{Y}(\varphi) &= R'(\varphi) \sin \varphi + R(\varphi) \cos \varphi \end{aligned} \right\}$$

Substitutie in

$$ds = \sqrt{[\dot{X}(\varphi)]^2 + [\dot{Y}(\varphi)]^2} d\varphi$$

geeft:

$$ds = \sqrt{R^2(\varphi) + R'^2(\varphi)} d\varphi$$

Bij gebruik van deze formule wordt $s(\varphi)$ gemeten in de bij toenemende φ passende omloopszin van de kromme.

Voorbeeld 2

Gegeven is de parabool met vergelijking:

$$y = f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

Gevraagd wordt de lengte van de boog tussen $(0, 0)$ en $P(1, \frac{1}{2})$.

Oplossing:

$$\begin{aligned}\sigma(0, 1) &= \int_0^1 \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx \\ &= x\sqrt{1 + x^2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 \frac{x^2 + 1 - 1}{\sqrt{1 + x^2}} dx \\ &= \sqrt{2} - \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}}\end{aligned}$$

dus:

$$\begin{aligned}2\sigma(0, 1) &= \sqrt{2} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} \\ &= \sqrt{2} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \Big|_0^1\end{aligned}$$

zodat

$$\sigma(0, 1) = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

Voorbeeld 3

Gegeven is de kettinglijn met vergelijking:

$$y = f(x) = a \cosh \frac{x}{a} = \frac{1}{2} \left\{ \exp \frac{x}{a} + \exp \left(-\frac{x}{a} \right) \right\} \quad (a > 0)$$

Gevraagd wordt de lengte van de boog tussen $A(0, a)$ en $P\{x_0, f(x_0)\}$ (zie fig. 27).

Oplossing:

$$\begin{aligned}\sigma(0, x_0) &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx \\ &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}} dx\end{aligned}$$

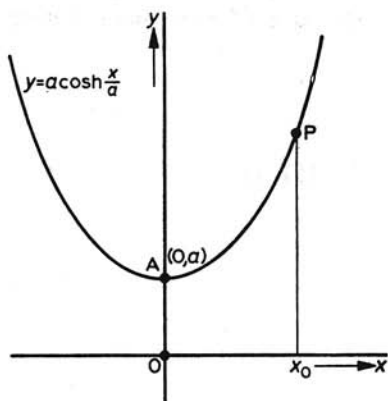


Fig. 27

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{x_0} \cosh \frac{x}{a} dx \\
 &= a \sinh \frac{x_0}{a}
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 4

Gegeven is de ellips met vergelijking:

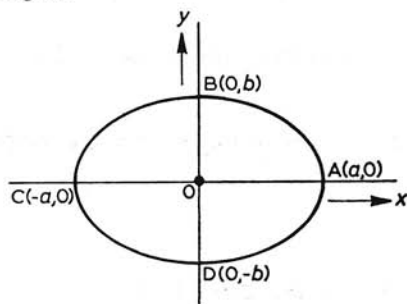
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0, b > 0)$$

Gevraagd wordt de omtrek van de ellips. *(kan je niet exact berekenen)*

Oplossing:

Op grond van de symmetrie kunnen we opmerken, dat de omtrek 4 maal de lengte

Fig. 28



is van de boog tussen B(0, b) en A(a, 0) (zie fig. 28). Voor de bovenhelft van de ellips geldt:

$$y = f(x) = b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

De lengte van de boog BA is dan:

$$\begin{aligned} \sigma(0, a) &= \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx \\ &= \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx \end{aligned}$$

De omtrek van de ellips is dus:

$$S = 4\sigma(0, a) = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx$$

Deze uitdrukking is te vereenvoudigen door invoering van de numerieke excentriciteit:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (a \leq b)$$

Men vindt dan:

$$S = 4 \int_0^a \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}} dx$$

Substitutie van $x = a \sin \varphi$ levert:

$$S = 4a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \quad (28.8)$$

Deze integraal is niet te berekenen met behulp van elementaire functies en heet een *elliptische integraal*. (bewijs !!)

De uitkomst van deze integraal is voor verschillende waarden van e getabelleerd.*

Men had de omtrek van de ellips ook kunnen vinden door uit te gaan van de parametervoorstelling:

$$\left. \begin{aligned} x &= X(t) = a \cos t \\ y &= Y(t) = b \sin t \end{aligned} \right\}$$

Om de boog BA te berekenen is het voldoende t het interval $[0, \frac{1}{2}\pi]$ te laten doorlopen. Men vindt dan:

$$S = 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2} dt$$

* Zie b.v. Abramowitz en Stegun-Handbook of mathematical functions, Dover 1965.

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt \\
&= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2(1 - \cos^2 t) + b^2 \cos^2 t} dt \\
&= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{a^2 - a^2 e^2 \cos^2 t} dt \\
&= 4a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt
\end{aligned}$$

Stelt men $t = \frac{1}{2}\pi - \varphi$, dan vindt men weer de uitkomst (28.8).

Voorbeeld 5

Gegeven is de cycloïde door middel van de parametervoorstelling (zie fig. 19):

$$\left. \begin{aligned}
x &= X(\varphi) = \rho(\varphi - \sin \varphi) \\
y &= Y(\varphi) = \rho(1 - \cos \varphi) \quad (\rho \text{ is constant})
\end{aligned} \right\}$$

Gevraagd wordt de lengte van één boog van de cycloïde (dus $0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Oplossing:

$$\dot{X}(\varphi) = \rho(1 - \cos \varphi)$$

$$\dot{Y}(\varphi) = \rho \sin \varphi$$

dus:

$$\begin{aligned}
\sigma(0, 2\pi\rho) &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(1 - \cos \varphi)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\
&= \rho \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos \varphi} d\varphi \\
&= 2\rho \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2}\varphi d\varphi = 8\rho
\end{aligned}$$

De booglengte van één boog is dus acht keer de straal van de rolcirkel.

Voorbeeld 6

Gegeven is de astroïde door middel van de parametervoorstelling (zie fig. 29):

$$\left. \begin{aligned}
x &= X(\varphi) = a \cos^3 \varphi \quad (a > 0) \\
y &= Y(\varphi) = a \sin^3 \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)
\end{aligned} \right\}$$

Gevraagd wordt de lengte S van de kromme.

Oplossing:

Vanwege de symmetrie van de kromme t.o.v. de x -as en de y -as, is de omtrek 4 maal de lengte van de boog in het eerste kwadrant, dus het deel waarvoor geldt: $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$.

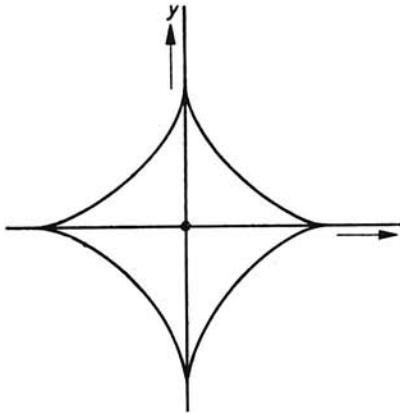


Fig. 29

$$\dot{X}(\varphi) = -3a \cos^2 \varphi \sin \varphi, \quad \dot{Y}(\varphi) = 3a \sin^2 \varphi \cos \varphi$$

dus:

$$\begin{aligned} S &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{9a^2 \cos^4 \varphi \sin^2 \varphi + 9a^2 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi} \, d\varphi \\ &= 12a \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \\ &= 6a \sin^2 \varphi \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} = 6a \end{aligned}$$

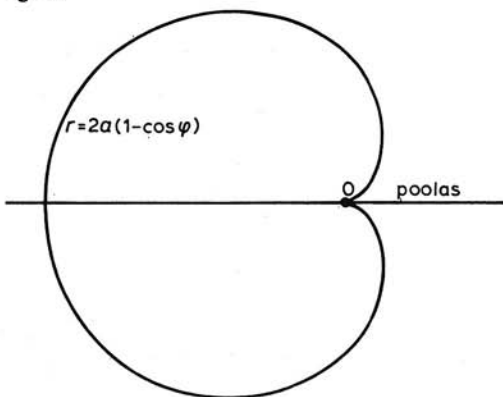
Voorbeeld 7

Gegeven is de cardioïde door middel van een poolvergelijking (zie fig. 30):

$$r = R(\varphi) = 2a(1 - \cos \varphi) \quad (a > 0)$$

Gevraagd wordt de lengte S van de kromme.

Fig. 30



Oplossing:

Op grond van de symmetrie t.o.v. de poolas, is de omtrek twee maal de lengte van de boog in het bovenste halfvlak, zodat:

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^\pi \sqrt{\{R(\varphi)\}^2 + \{R'(\varphi)\}^2} d\varphi \\ &= 2 \int_0^\pi \sqrt{4a^2(1 - \cos \varphi)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= 8a \int_0^\pi \sin \frac{1}{2}\varphi d\varphi = 16a \end{aligned}$$

29 De booglengte als parameter

Als een kromme gegeven is in parametervorm door:

$$\left. \begin{aligned} x &= X(t) \\ y &= Y(t) \end{aligned} \right\} (t \in I) \quad (29.1)$$

en A een vast punt van de kromme is, met parameterwaarde $t = t_0$ en P een willekeurig punt van die kromme met parameterwaarde t , dan geldt volgens par. 28 als $\dot{X}(t) > 0$:

$$\sigma = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\{\dot{X}(\tau)\}^2 + \{\dot{Y}(\tau)\}^2} d\tau \quad (29.2)$$

s is dus een stijgende functie van t , met negatieve waarden als $t < t_0$. In het σ -interval dat met het t -interval correspondeert, is dus ook de inverse functie T een stijgende functie van σ , als we stellen:

$$t = T(\sigma) \quad (29.3)$$

Een punt P van de kromme wordt dus ook door een waarde van σ aangegeven. Hierin is σ de booglengte AP, positief gerekend in een richting waarin t toeneemt. In A is deze booglengte gelijk aan 0. Substitueert men (29.3) in (29.1), dan verkrijgt men:

$$\left. \begin{aligned} x &= X\{T(\sigma)\} = X^*(\sigma) \\ y &= Y\{T(\sigma)\} = Y^*(\sigma) \end{aligned} \right\}$$

Om X^* en Y^* te vinden zou men t moeten oplossen uit (29.2). In vele gevallen gaat het echter om $\frac{dX^*}{d\sigma}$ en $\frac{dY^*}{d\sigma}$. Men kan dan het expliciet oplossen van t vermijden, daar:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dX^*}{d\sigma} &= \frac{dX}{dt} \cdot \frac{dT}{d\sigma} = \frac{dX}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{X}(t)}{\sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2}} \\ \frac{dY^*}{d\sigma} &= \frac{dY}{dt} \cdot \frac{dT}{d\sigma} = \frac{dY}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{\dot{Y}(t)}{\sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (29.4)$$

Voorbeeld

Stel dat

$$\left. \begin{aligned} x &= X(t) = t \\ y &= Y(t) = t^2 \end{aligned} \right\}$$

is, dan geldt:

$$\sigma = s(t) = \int_a^t \sqrt{1 + 4\tau^2} d\tau$$

en dus volgens (29.4):

$$\frac{dX^*}{d\sigma} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}}, \quad \frac{dY^*}{d\sigma} = \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2}}$$

30 Kromming en kromtestraal

Het begrip „kromming” is intuïtief bekend. Zo vinden we dat van twee cirkels met verschillende straal de cirkel met de kleinste straal „sterker gekromd” is dan die met de grootste straal. Dit leidt er toe het intuïtieve begrip kromming bij een cirkel te kwantificeren door de volgende definitie.

Definitie

De kromming k van een cirkel met straal R is bepaald door

$$k = \frac{1}{R}$$

In fig. 31 is een cirkel getekend met de raaklijnen in P en P_1 . Stelt men de booglengte, gemeten van het vaste punt A voor door σ , dan is de lengte van de boog PP_1 de toename $\Delta\sigma$ van de booglengte, als men van P naar P_1 gaat. Stelt men de richtingsverandering van de middelpuntsvoerstraal voor door $\Delta\alpha(\sigma)$, dan volgt uit $\Delta\sigma = R\Delta\alpha(\sigma)$:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{\Delta\alpha(\sigma)}{\Delta\sigma}$$

Daar bij een cirkel de raaklijn loodrecht staat op de straal naar het raakpunt, is de richtingsverandering $\Delta\alpha(\sigma)$ van de raaklijn tussen P en P_1 even groot als de richtingsverandering van de straal. Bij een cirkel is dus de kromming gelijk aan de richtingsverandering van de raaklijn, gedeeld door de verandering van de booglengte, of korter: de richtingsverandering per eenheid van booglengte.

Bij een willekeurige kromme is deze richtingsverandering per eenheid van booglengte

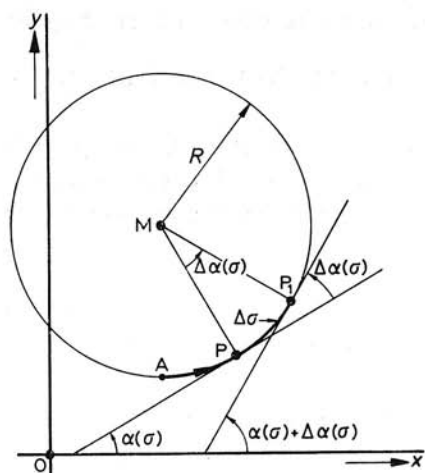


Fig. 31

niet meer constant; wij kunnen echter deze grootheid de *gemiddelde kromming* tussen

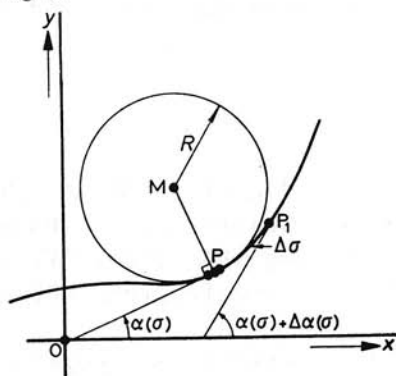
P en P_1 noemen. In fig. 32 is dus het quotiënt $\frac{\Delta\alpha(\sigma)}{\Delta\sigma}$ de gemiddelde kromming van de kromme tussen de punten P en P_1 .

Laat men nu P_1 tot P naderen, dan naderen $\Delta\alpha(\sigma)$ en $\Delta\sigma$ tot nul. In het algemeen zal de gemiddelde kromming veranderen. Nadert deze tot een limiet, dan noemt men deze limiet de *kromming* in het punt P.

Onder de kromming ($k(\sigma)$) in het punt P met booglengte σ verstaat men de limietwaarde van de gemiddelde kromming tussen P en P_1 als P_1 tot P nadert:

$$k(\sigma) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\alpha(\sigma)}{\Delta\sigma} = \frac{d\alpha}{d\sigma}$$

Fig. 32



Hierbij is aangenomen dat α een differentieerbare functie is van σ . Is α een stijgende functie van σ , dan is $\frac{d\alpha}{d\sigma}$ en dus $k(\sigma)$ positief; is α een afnemende functie van σ , dan is $k(\sigma)$ negatief.

Bij een cirkel is de straal het omgekeerde van de kromming. Ook bij een algemene kromme vat men de absolute waarde van het omgekeerde van de kromming op als de straal van een cirkel die *kromtecirkel* wordt genoemd. De straal van deze cirkel heet *kromtestraal* $R(\sigma)$, dus:

$$R(\sigma) = \frac{1}{|k(\sigma)|} = \frac{1}{\left| \frac{d\alpha}{d\sigma} \right|} \quad (30.1)$$

Als we stellen: $a = \alpha(\sigma)$ en $\sigma = s^*(a)$, kan men (30.1) ook schrijven als:

$$R(\sigma) = \left| \frac{ds^*}{da} \right|$$

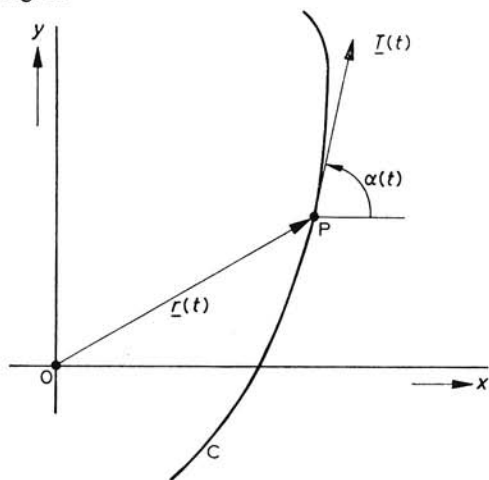
Zet men op de normaal in P aan de „holle” zijde van de kromme een stuk af ter lengte $R(\sigma)$, dan is het daardoor gevonden eindpunt M het middelpunt van de kromtecirkel, het z.g. *kromtemiddelpunt*. Dit punt kan ook gevonden worden als het punt waartoe het snijpunt van de normalen in P en P_1 nadert als men P_1 laat naderen tot P. Het bewijs hiervan laten we achterwege.

31 Tangentiële vector en normaalvector

Stel dat een vlakke kromme C de vectorvergelijking heeft (zie fig. 33):

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \quad (t \in I)$$

Fig. 33



dan is

$$\underline{\dot{r}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix}$$

indien X en Y differentieerbaar zijn.

De tangens van de hellingshoek van deze vector is $\frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)}$, terwijl de lengte is

$$\|\underline{\dot{r}}(t)\| = \sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2} = \left| \frac{ds}{dt} \right| \quad (31.1)$$

volgens (28.4) en (28.6).

Als we $\underline{\dot{r}}(t)$ laten aangrijpen in P , dan is dit dus een vector langs de raaklijn in P aan C met grootte $\left| \frac{ds}{dt} \right|$. De vector $\underline{T}(t)$, bepaald door:

$$\underline{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2}} \begin{pmatrix} \dot{X}(t) \\ \dot{Y}(t) \end{pmatrix}$$

is dus een raaklijnvector met lengte 1. Deze vector heet *tangentiële eenheidsvector*.

Opmerking:

Bij gebruik van de booglengte σ als parameter, waarbij dus s de identieke functie voorstelt, volgt uit (31.1), dat $\left(\frac{ds}{d\sigma} \right) = 1$ en dus $\|\underline{\dot{r}}(\sigma)\| = 1$, zodat:

$$\underline{T}(\sigma) = \frac{d\underline{r}}{d\sigma} = \begin{pmatrix} \dot{X}(\sigma) \\ \dot{Y}(\sigma) \end{pmatrix}$$

Indien de hoek die de vector $\underline{T}(t)$ maakt met de positieve x -as wordt voorgesteld door $\alpha(t)$ (zie fig. 33), dan geldt:

$$\underline{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) \end{pmatrix}$$

Voor de afgeleide vector van de tangentiële eenheidsvector geldt dan:

$$\underline{\dot{T}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha(t) \cdot \dot{\alpha}(t) \\ \cos \alpha(t) \cdot \dot{\alpha}(t) \end{pmatrix}$$

Meetkundig kan men hieruit de volgende conclusies trekken.

Uit:

$$\underline{T}(t) \cdot \underline{\dot{T}}(t) = 0$$

volgt dat $\underline{T}(t)$ en $\underline{\dot{T}}(t)$ loodrecht op elkaar staan.

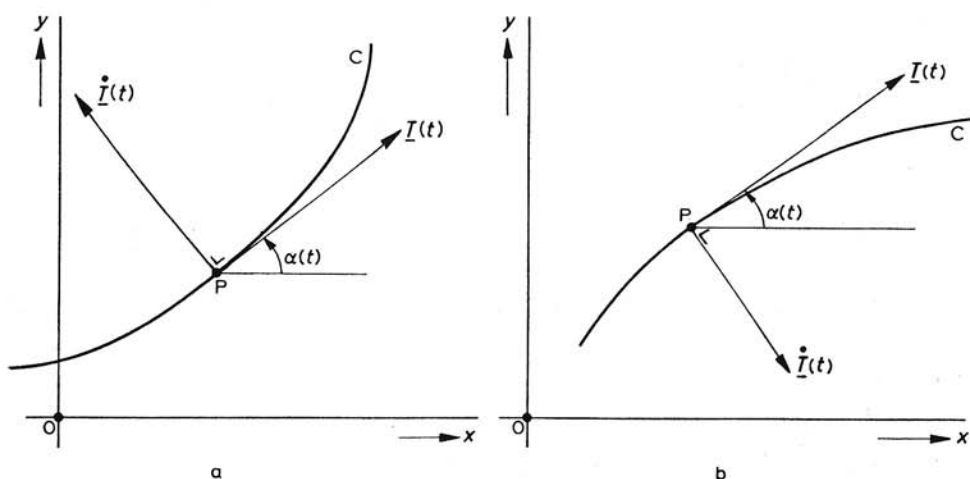


Fig. 34

Als $\dot{\alpha}(t) > 0$, dan heeft de kromme de „holle zijde van” de positieve x -as afgekeerd. Indien men het geval neemt dat $\cos \alpha(t) > 0$ en $\sin \alpha(t) > 0$ (zoals in fig. 34a), dan heeft $\underline{T}(t)$ de getekende stand en wijst $\dot{\underline{T}}(t)$ naar „de holle zijde van de kromme”, daar in dit geval geldt: $-\sin \alpha(t) \cdot \dot{\alpha}(t) < 0$ en $\cos \alpha(t) \cdot \dot{\alpha}(t) > 0$. Geldt echter $\dot{\alpha}(t) < 0$, dan keert de kromme de holle zijde naar de positieve x -as toe. Voor het getekende geval (als in fig. 34b) dat $\cos \alpha(t) > 0$ en $\sin \alpha(t) > 0$ kan men eenvoudig nagaan dat ook dan $\dot{\underline{T}}(t)$ wijst naar de holle zijde van de kromme. Dit blijkt ook in alle overgebleven gevallen te gelden.

Tenslotte merken we op dat voor de lengte $\|\dot{\underline{T}}(t)\|$ van $\dot{\underline{T}}(t)$ geldt:

$$\|\dot{\underline{T}}(t)\| = |\dot{\alpha}(t)|$$

Als men $a = \alpha(t)$ als de parameter kiest, dan is

$$\|\dot{\underline{T}}(a)\| = 1$$

Daar $\underline{T}(a)$ en $\dot{\underline{T}}(a)$ loodrecht op elkaar staan, is $\dot{\underline{T}}(a)$ een eenheidsvector langs de normale in de richting van de holle zijde van de kromme. Deze vector $\underline{N}(a)$ heet de *normale eenheidsvector*, dus:

$$\underline{N}(a) = \frac{d\underline{T}}{da}$$

Als de booglengte σ de parameter is, gebruikt men voor de normale eenheidsvector in plaats van $\underline{N}(a)$ de notatie $\underline{N}(\sigma)$. Nu geldt:

$$\|\dot{\underline{T}}(\sigma)\| = |\dot{\alpha}(\sigma)| = |k(\sigma)| = \frac{1}{R(\sigma)}$$

en dus

$$\underline{\dot{T}}(\sigma) = |k(\sigma)|\underline{N}(\sigma)$$

Het eindpunt van $\underline{\dot{T}}(\sigma)$ is juist het kromtemiddelpunt.

We kunnen aan de normaal op de kromme een positieve richting toekennen door af te spreken dat deze positieve richting op de normaal verkregen wordt door de positieve richting van de raaklijn (zie par. 26) over $\frac{1}{2}\pi$ te draaien in positieve zin (= linksom). Als $\underline{N}(\sigma)$ de normale eenheidsvector in positieve richting op de normaal is, dan geldt:

$$\underline{\dot{T}}(\sigma) = k(\sigma)\underline{N}(\sigma)$$

32 Uitdrukkingen voor de kromming en de kromtestraal

32.1 De kromme is gegeven in parametervorm: $x = X(t)$, $y = Y(t)$

Stel dat voor de booglengte σ geldt:

$$\sigma = s(t) \text{ en } t = s^{\text{inv}}(\sigma)$$

dan verkrijgt men:

$$\alpha(t) = \alpha\{s^{\text{inv}}(\sigma)\} = \alpha^*(\sigma)$$

De kromming is dan:

$$k(\sigma) = \frac{d\alpha^*}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{ds^{\text{inv}}}{d\sigma} = \frac{\frac{d\alpha}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = k^*(t) \quad (32.1)$$

Nu is:

$$\tan \alpha(t) = \frac{\dot{Y}(t)}{\dot{X}(t)}$$

dus:

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha(t)} \cdot \dot{\alpha}(t) = \frac{\dot{X}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\{\dot{X}(t)\}^2}$$

zodat

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}(t) &= \frac{\dot{X}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\{\dot{X}(t)\}^2} \cdot \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha(t)} \\ &= \frac{\dot{X}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\{\dot{X}(t)\}^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\{\dot{Y}(t)\}^2}{\{\dot{X}(t)\}^2}} \end{aligned}$$

dus:

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\dot{X}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2} \quad (32.2)$$

Verder geldt:

$$\frac{ds}{dt} = \pm \sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2} \quad (32.3)$$

waarin het plusteken geldt als X een toenemende functie is van t , en het $-$ teken als X een afnemende functie is van t (zie par. 28).

Uit (32.1), (32.2) en (32.3) volgt voor de kromming als functie van de parameter t :

$$k^*(t) = \pm \frac{\dot{X}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)}{[\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2]^{\frac{3}{2}}} \star \quad (32.4)$$

De kromtestraal als functie van t wordt voorgesteld door:

$$R^*(t) = \frac{[\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2]^{\frac{3}{2}}}{|\dot{X}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{X}(t)|} \star \quad (32.5)$$

voor die punten waar de noemer ongelijk aan nul is.

Voeren we als parameter de booglengte σ in en stellen we:

$$x = X(\sigma) \text{ en } y = Y(\sigma)$$

dan geldt, daar de lengte van de vector $\begin{pmatrix} \dot{X}(\sigma) \\ \dot{Y}(\sigma) \end{pmatrix}$ juist 1 is (zie opmerking bij par. 31):

$$\{\dot{X}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Y}(\sigma)\}^2 = 1$$

en dus

$$\dot{X}(\sigma)\ddot{X}(\sigma) + \dot{Y}(\sigma)\ddot{Y}(\sigma) = 0$$

Hieruit volgt voor $k(\sigma)$ (wegens 32.4):

$$\begin{aligned} k(\sigma) &= \pm \{\dot{X}(\sigma)\ddot{Y}(\sigma) - \dot{Y}(\sigma)\ddot{X}(\sigma)\} \\ &= \pm \dot{Y}(\sigma) \left\{ \dot{X}(\sigma) - \dot{Y}(\sigma) \frac{\ddot{X}(\sigma)}{\dot{Y}(\sigma)} \right\} \\ &= \pm \dot{Y}(\sigma) \left\{ \dot{X}(\sigma) + \dot{Y}(\sigma) \frac{\dot{Y}(\sigma)}{\dot{X}(\sigma)} \right\} \\ &= \pm \frac{\dot{Y}(\sigma)}{\dot{X}(\sigma)} \end{aligned}$$

* Voor het vervolg van de theorie en in de toepassingen laten we het *-teken in $k^*(t)$ en $R^*(t)$ gemakshalve weg.

dus:

$$k(\sigma) = \pm \frac{\dot{Y}(\sigma)}{\dot{X}(\sigma)} = \mp \frac{\ddot{X}(\sigma)}{\dot{Y}(\sigma)} \quad (32.6)$$

waarbij de bovenste tekens gelden als $X(\sigma)$ monotoon toeneemt in het beschouwde σ -interval en de onderste als $X(\sigma)$ monotoon afneemt.

Uit (32.6) volgt:

$$\begin{aligned} \{k(\sigma)\}^2 &= \left\{ \frac{\dot{Y}(\sigma)}{\dot{X}(\sigma)} \right\}^2 = \left\{ \frac{\ddot{X}(\sigma)}{\dot{Y}(\sigma)} \right\}^2 \\ &= \frac{\{\dot{Y}(\sigma)\}^2 + \{\ddot{X}(\sigma)\}^2}{\{\dot{X}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Y}(\sigma)\}^2} \\ &= \{\ddot{X}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Y}(\sigma)\}^2 \end{aligned}$$

zodat ook geldt:

$$|k(\sigma)| = \sqrt{\{\ddot{X}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Y}(\sigma)\}^2}$$

32.2 De kromme is gegeven door de vergelijking: $y = f(x)$

Uitdrukkingen voor de kromming k en de kromtestraal R vindt men uit de in 32.1 gegeven parametervoorstelling, door voor de parameter t de onafhankelijk veranderlijke x te kiezen.

Als we dan formeel stellen: $x = X(x)$, $y = Y(x)$, dan geldt:

$$X(x) = x \text{ en } Y(x) = f(x)$$

waaruit men vindt:

$$\dot{X}(x) = 1, \quad \ddot{X}(x) = 0, \quad \dot{Y}(x) = f'(x), \quad \ddot{Y}(x) = f''(x)$$

Wanneer we de kromming en de kromtestraal voorstellen door $k(x)$, resp. $R(x)$, dan volgt uit (32.4):

$$k(x) = \frac{f''(x)}{[1 + \{f'(x)\}^2]^{\frac{3}{2}}} \quad (32.7)$$

(Hier het $+$ teken uit (32.4) daar X gedefinieerd door $X(x) = x$ een monotoon toenemende functie is.) Uit (32.5) volgt:

$$R(x) = \frac{[1 + \{f'(x)\}^2]^{\frac{3}{2}}}{|f''(x)|} \quad (32.8)$$

Uit (32.7) zien we dat het teken van $k(x)$ overeenstemt met dat van $f''(x)$.

Is in een punt $f''(x) > 0$ dan keert de kromme de bolle zijde naar de positieve x -as. Men noemt de kromme dan *convex*. Indien in een punt $f''(x) < 0$, dan keert de kromme de holle zijde naar de positieve x -as. Men noemt de kromme dan *concaaf*. Indien in een punt $f''(x) > 0$ en de kromme dus convex is, dan is ook $k(x) > 0$.

Daar het kromtemiddelpunt aan de holle zijde van de kromme ligt, bevindt zich de kromtecirkel bij positieve $k(x)$ boven de kromme. Is $k(x)$ negatief, dan beneden de kromme.

Uit (32.7) blijkt dat voor $f''(x) = 0$ ook $k(x) = 0$, en dat de kromtestraal „oneindig groot” is. Is voor $x = x_0$ $f''(x) = 0$ en $f'''(x) \neq 0$, dan wisselt f'' voor $x = x_0$ van teken. De kromme bezit voor $x = x_0$ een buigpunt. De kromtestraal is dus „oneindig groot”, hetgeen betekent dat de kromtecirkel in een rechte lijn is overgegaan. We merken hierbij op dat voor een buigpunt de kromtestraal niet altijd „oneindig groot” is. De grafiek van $y = x^3$ heeft een buigpunt voor $x = 0$, terwijl in het punt $(0, 0)$ de kromtestraal nul is.

32.3 De kromme is gegeven in poolcoördinaten: $r = \rho(\varphi)$

Stel $r = \rho(\varphi)$ is de poolvergelijking van de kromme (zie ook par. 27). Is P een punt van de kromme met de poolcoördinaten $\{\varphi, \rho(\varphi)\}$, dan is de hoek $\theta(\varphi)$ tussen de voerstraal naar P en de raaklijn in P aan de kromme (zie fig. 35) bepaald door:

$$\tan \theta(\varphi) = \frac{\rho(\varphi)}{\rho'(\varphi)} \quad (32.9)$$

Is $\alpha(\varphi)$ de hellingshoek van de raaklijn in P, dan is:

$$\alpha(\varphi) = \varphi + \theta(\varphi) \quad (32.10)$$

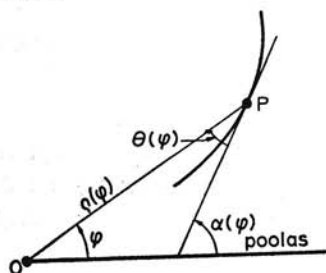
Als we weer stellen $\sigma = s(\varphi)$ en $\varphi = s^{\text{inv}}(\sigma)$, dan verkrijgt men:

$$\alpha(\varphi) = \alpha\{s^{\text{inv}}(\sigma)\} = \alpha^*(\sigma)$$

De kromming is dan:

$$k(\sigma) = \frac{d\alpha^*}{d\sigma} = \frac{d\alpha}{d\varphi} \cdot \frac{ds^{\text{inv}}}{d\sigma} = \frac{\frac{d\alpha}{d\varphi}}{\frac{ds}{d\varphi}} = k^*(\varphi)$$

Fig. 35



Uit (32.10) volgt:

$$\frac{d\alpha}{d\varphi} = 1 + \frac{d\theta}{d\varphi}$$

Door differentiatie in (32.9) vindt men:

$$\frac{1}{\cos^2 \theta(\varphi)} \cdot \frac{d\theta}{d\varphi} = \frac{\{\rho'(\varphi)\}^2 - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)}{\{\rho'(\varphi)\}^2}$$

zodat:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{\{\rho'(\varphi)\}^2 - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)}{\{\rho'(\varphi)\}^2} \cdot \frac{1}{\tan^2 \theta(\varphi) + 1} \\ &= \frac{\{\rho'(\varphi)\}^2 - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)}{\{\rho(\varphi)\}^2 + \{\rho'(\varphi)\}^2} \end{aligned}$$

en dus:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\varphi} &= 1 + \frac{d\theta}{d\varphi} \\ &= \frac{\{\rho(\varphi)\}^2 + 2\{\rho'(\varphi)\}^2 - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)}{\{\rho(\varphi)\}^2 + \{\rho'(\varphi)\}^2} \end{aligned}$$

Volgens par. 28 geldt:

$$\frac{ds}{d\varphi} = \sqrt{\{\rho(\varphi)\}^2 + \{\rho'(\varphi)\}^2}$$

waardoor we vinden voor de kromming als functie van φ :

$$k^*(\varphi) = \frac{\{\rho(\varphi)\}^2 + 2\{\rho'(\varphi)\}^2 - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)}{[\{\rho(\varphi)\}^2 + \{\rho'(\varphi)\}^2]^{\frac{3}{2}}} \quad *$$
 (32.11)

en voor de kromtestraal als functie van φ :

$$R^*(\varphi) = \frac{[\{\rho(\varphi)\}^2 + \{\rho'(\varphi)\}^2]^{\frac{3}{2}}}{|\{\rho(\varphi)\}^2 + 2\{\rho'(\varphi)\}^2 - \rho(\varphi)\rho''(\varphi)|} \quad *$$
 (32.12)

Opmerking:

De formules (32.11) en (32.12) kan men ook afleiden met behulp van de transformatieformules: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Deze afleiding wordt aan de lezer overgelaten.

* Ook hier zullen we voor verder gebruik van (32.11) en (32.12) de *-tekens weglaten.

33 Voorbeelden van berekening van kromming en kromtestraal

Voorbeeld 1

Bereken de kromming en de kromtestraal in een willekeurig punt voor de ellips, bepaald door de parametervoorstelling:

$$x = X(\varphi) = a \cos \varphi; \quad y = Y(\varphi) = b \sin \varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi) \quad (a > 0, b > 0)$$

Oplossing:

De functie $\varphi \mapsto a \cos \varphi$ is niet monotoon op $[0, 2\pi]$, maar wel op $[0, \pi]$ en $\langle \pi, 2\pi \rangle$. Op elk van die intervallen kan dus y worden opgevat „als een functie van x “. De vorenstaande theorie is dan van toepassing. Nu is:

$$\dot{X}(\varphi) = -a \sin \varphi; \quad \dot{Y}(\varphi) = b \cos \varphi$$

$$\ddot{X}(\varphi) = -a \cos \varphi; \quad \ddot{Y}(\varphi) = -b \sin \varphi$$

Voor de bovenhelft van de ellips: $\varphi \in [0, \pi]$ is $X(\varphi)$ monotoon afnemend. Volgens (32.4), als we de kromming door $k(\varphi)$ en de kromtestraal door $R(\varphi)$ voorstellen, geldt:

$$\begin{aligned} k(\varphi) &= - \frac{\dot{X}(\varphi)\dot{Y}(\varphi) - \ddot{Y}(\varphi)\dot{X}(\varphi)}{[\{\dot{X}(\varphi)\}^2 + \{\dot{Y}(\varphi)\}^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= - \frac{ab \sin^2 \varphi + ab \cos^2 \varphi}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \\ &= - \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (33.1)$$

Voor de benedenhelft $\varphi \in \langle \pi, 2\pi \rangle$ is de functie $\varphi \mapsto a \cos \varphi$ monotoon toenemend. We vinden dan ook volgens (32.4):

$$k(\varphi) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \quad (33.2)$$

In beide gevallen volgt uit (32.5):

$$R(\varphi) = \frac{(a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{ab} \quad (33.3)$$

Voor de top $(a, 0)$ is $\varphi = 0$, dus volgens (33.1) en (33.3):

$$k(0) = - \frac{a}{b^2} \quad \text{en} \quad R(0) = \frac{b^2}{a}$$

Voor de top $(0, b)$ geldt $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, dus volgens (33.1) en (33.3):

$$k\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -\frac{b}{a^2} \text{ en } R\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{a^2}{b}$$

Is de ellips gegeven door de vergelijking:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

dan is voor de bovenste helft:

$$y = f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-bx}{a(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad f''(x) = \frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (x \neq \pm a)$$

Hieruit volgt, als wij de kromming door $k(x)$ en de kromtestraal door $R(x)$ voorstellen, uit (32.7) en (32.8):

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{-ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} \left\{ 1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)} \right\}^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{-a^4 b}{(a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (x \neq \pm a) \\ R(x) &= \frac{(a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b} \end{aligned}$$

Voor de onderste helft vindt men op soortgelijke wijze:

$$k(x) = \frac{a^4 b}{(a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad R(x) = \frac{(a^4 - a^2 x^2 + b^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}$$

De berekening is slechts geldig voor $x \neq \pm a$. Men vindt dus uit deze berekening niet de kromming en de kromtestraal in de uiteinden van de lange as. Men kan ze vinden als limietgeval van de bovenstaande uitdrukkingen. Ook kan men x als functie van y beschouwen, waarbij de berekening voor $R(x)$ en $k(x)$ in de uiteinden van de lange as geen moeilijkheden biedt.

Voorbeeld 2

Bereken de kromming en de kromtestraal in een willekeurig punt van de kettinglijn met vergelijking:

$$y = f(x) = a \cosh \frac{x}{a} \quad (a > 0)$$

Oplossing:

$$f'(x) = \sinh \frac{x}{a}, \quad f''(x) = \frac{1}{a} \cosh \frac{x}{a}$$

Uit (32.7) volgt:

$$\begin{aligned} k(x) &= \frac{\cosh \frac{x}{a}}{a \left(1 + \sinh^2 \frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{\cosh \frac{x}{a}}{a \cosh^3 \frac{x}{a}} \\ &= \frac{1}{a \cosh^2 \frac{x}{a}} \end{aligned}$$

De kromming is dus in elk punt positief, de kromme is steeds convex.

Verder volgt uit (32.8):

$$R(x) = a \cosh^2 \frac{x}{a} = \frac{f^2(x)}{a} = \frac{y^2}{a}$$

Voorbeeld 3

Bereken de kromming en de kromtestraal in een willekeurig punt van de cycloïde met parametervergelijkingen:

$$\left. \begin{aligned} x &= X(\varphi) = \rho(\varphi - \sin \varphi) \\ y &= Y(\varphi) = \rho(1 - \cos \varphi) \quad (\rho \text{ is constant}) \end{aligned} \right\}$$

Oplossing:

$$\dot{X}(\varphi) = \rho(1 - \cos \varphi); \quad \dot{Y}(\varphi) = \rho \sin \varphi$$

$$\ddot{X}(\varphi) = \rho \sin \varphi; \quad \ddot{Y}(\varphi) = \rho \cos \varphi$$

Als we de kromming voorstellen door $k(\varphi)$ en de kromtestraal door $R(\varphi)$, dan geldt volgens (32.4) en (32.5), daar $X(\varphi)$ een monotoon toenemende functie van φ is:

$$k(\varphi) = \frac{\rho^2 \cos \varphi (1 - \cos \varphi) - \rho^2 \sin^2 \varphi}{\{\rho^2(1 - \cos \varphi)^2 + \rho^2 \sin^2 \varphi\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\cos \varphi - 1}{\rho \{2(1 - \cos \varphi)\}^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{-1}{2\rho \{2(1 - \cos \varphi)\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{4\rho |\sin \frac{1}{2}\varphi|}
 \end{aligned}$$

$$R(\varphi) = 4\rho |\sin \frac{1}{2}\varphi|$$

De kromme is concaaf. In de keerpunten van de kromme, dit zijn de punten waarvoor geldt $\varphi = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{N}$), geldt $R = 0$.

Voorbeeld 4

Bereken de kromming en de kromtestraal in een willekeurig punt van de cardioïde met poolvergelijking (zie fig. 30):

$$r = \rho(\varphi) = 2a(1 - \cos \varphi) \quad (a > 0, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

Oplossing:

Volgens (32.11) en (32.12) gelden voor de kromming $k(\varphi)$ en de kromtestraal $R(\varphi)$:

$$\begin{aligned}
 k(\varphi) &= \frac{4a^2(1 - \cos \varphi)^2 + 8a^2 \sin^2 \varphi - 4a^2 \cos \varphi(1 - \cos \varphi)}{\{4a^2(1 - \cos \varphi)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi\}^{\frac{3}{2}}} \\
 &= \frac{3(1 - \cos \varphi)}{2a(2 - 2 \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{8a \sin \frac{1}{2}\varphi} \quad (\varphi \neq 0)
 \end{aligned}$$

$$R(\varphi) = \frac{8}{3}a \sin \frac{1}{2}\varphi$$

Ruimtekrommen

34 Parameter- en vectorvoorstelling van een ruimtekromme

Stel dat \underline{r} een continue vectorfunctie is van de reële variabelen t , gedefinieerd op een interval I van de reële getallenrechte met waarden in \mathbb{R}^3 :

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \quad (34.1)$$

Als men de vector $\underline{r}(t)$ laat beginnen in O , dan heeft het „eindpunt” van deze vector de coördinaten $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$. Bij variabele t vormen deze eindpunten een verzameling die men een continue *ruimtekromme* noemt. (34.1) heet dan een *vectorvoorstelling* van deze kromme. Soms schrijft men deze kromme ook wel in *parametervoorstelling*, d.w.z. met behulp van de parametervergelijkingen:

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t)$$

Voorbeeld 1

Een vectorvoorstelling van een rechte lijn

Stel dat de rechte l door $P(a, b, c)$ gaat en met de positieve x -as, y -as en z -as hoeken maakt α , β , resp. γ , dan is een vectorvoorstelling van l (zie fig. 36):

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} a + t \cos \alpha \\ b + t \cos \beta \\ c + t \cos \gamma \end{bmatrix}$$

of

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$$

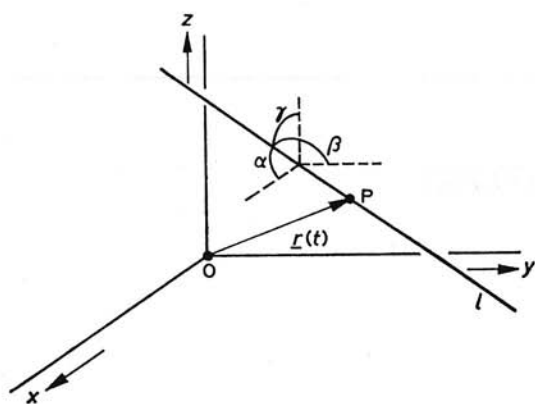


Fig. 36

Voorbeeld 2

Een vectorvoorstelling van de z.g. cirkelschroeflijn

Deze kromme ontstaat als een punt (P) zich beweegt op een omwentelingscilinder met de z-as tot as en straal a , zó dat de snelheidscomponent in de richting van deze as en de hoeksnelheid om deze as constant zijn. Een vectorvoorstelling van deze kromme is dan:

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{bmatrix}$$

Hierbij is t de hoek die de loodlijn uit P op de as maakt met de positieve x -as (zie fig. 37). Men noemt deze kromme een *cirkelschroeflijn*.

Voorbeeld 3

Een vectorvoorstelling van de z.g. kubische ruimtekromme

Deze luidt aldus:

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

Het is de vectorvoorstelling van een ruimtekromme van de derde graad, waarmee men bedoelt dat de kromme met een willekeurig plat vlak drie (al dan niet reële) punten heeft (zie fig. 38).

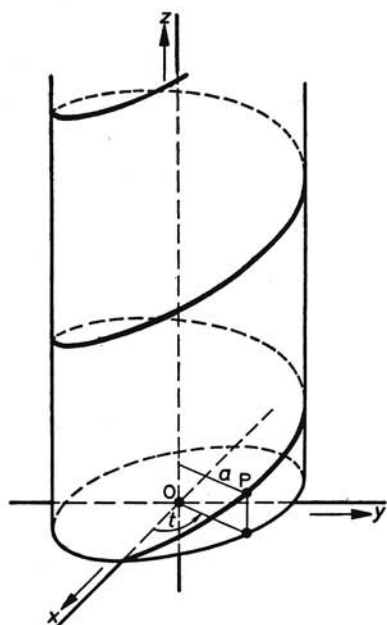


Fig. 37

35 Eliminatie van de parameter

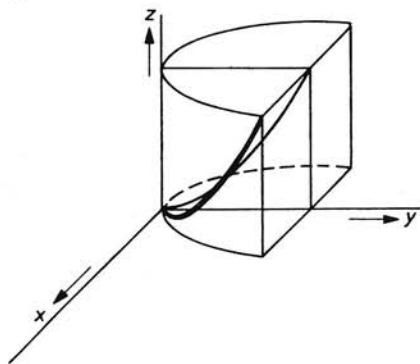
Als de ruimtekromme in parametervorm gegeven is, dus:

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t) \quad (35.1)$$

en men uit b.v. de eerste van deze drie vergelijkingen t kan oplossen, dan geeft substitutie van t in de twee andere vergelijkingen:

$$y = f_1(x), \quad z = f_2(x) \quad (35.2)$$

Fig. 38



De punten die voldoen aan de eerste vergelijking van (35.2) liggen op een cilinder (eventueel een plat vlak), waarvan de kromme met vergelijking: $y = f_1(x)$ de doorsnede is met het x, y -vlak en de beschrijvende lijnen evenwijdig aan de z -as lopen. De tweede vergelijking stelt een cilinder (eventueel een plat vlak) voor evenwijdig aan de y -as. De kromme met vergelijkingen (35.2) is dus een verzameling van gemeenschappelijke punten van deze twee cilinders.

Voorbeeld

De kubische ruimtekromme met vectorvergelijking:

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$$

heeft als parametervoorstelling:

$$x = X(t) = t, \quad y = Y(t) = t^2, \quad z = Z(t) = t^3 \quad (35.3)$$

Hieruit zien we dat deze kromme snijkromme is van de cilinders met vergelijkingen (zie fig. 38):

$$y = x^2 \quad \text{en} \quad z = y^{\frac{3}{2}}$$

Door eliminatie van t uit (35.1) verkrijgt men in het algemeen twee vergelijkingen in x, y en z :

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0 \quad (35.4)$$

De door (35.1) gegeven kromme valt geheel of gedeeltelijk samen met de door (35.4) bepaalde snijkromme. In het algemeen is een ruimtekromme niet te verkrijgen als volledige doorsnijding van twee oppervlakken. Zijn de oppervlakken uit (35.4) resp. van de graden m en n , dan is de doorsnijding een kromme van de graad $m \cdot n$. Om een derde graadsruimtekromme als volledige doorsnijding te krijgen, zouden de oppervlakken resp. van de graden 3 en 1 moeten zijn. Dit levert echter een vlakke kromme op, dus moeten de graadgetallen van de oppervlakken minstens beide 2 zijn. Maar dan is de doorsnijding een kromme van de vierde graad. De kubische ruimtekromme (35.3) is een gedeeltelijke doorsnijding van de oppervlakken $x^2 - y = 0$, en $xz - y^2 = 0$. De restdoorsnijding is de z -as.

In voorbeeld 2 van par. 34 kunnen we uit de parametervoorstelling:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad z = bt$$

concluderen dat deze cirkelschroeflijn ligt op de cilinder met vergelijking: $x^2 + y^2 = a^2$

en op het oppervlak met vergelijking: $x = a \cos \frac{z}{b}$.

36 Raaklijn aan een ruimtekromme; normaalvlak

Stel dat K een ruimtekromme is met vectorvoorstelling:

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \quad (t \in I)$$

dus met parametervoorstelling:

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = Z(t)$$

Hierbij veronderstellen we dat X , Y en Z differentieerbare functies zijn op I . Als P en Q twee verschillende punten zijn op K met parameterwaarden t_0 , resp. $t_0 + \Delta t$, dan zijn de coördinaten van P : $X(t_0)$, $Y(t_0)$ en $Z(t_0)$ en die van Q : $X(t_0 + \Delta t)$, $Y(t_0 + \Delta t)$ en $Z(t_0 + \Delta t)$. De richtingsgetallen van de lijn door P en Q zijn evenredig met de coördinaatverschillen tussen P en Q , zodat we voor deze richtingsgetallen kunnen nemen:

$$X(t_0 + \Delta t) - X(t_0), \quad Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0), \quad Z(t_0 + \Delta t) - Z(t_0)$$

Maar ook, omdat P en Q verschillend zijn ($\Delta t \neq 0$):

$$\frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t}, \quad \frac{Y(t_0 + \Delta t) - Y(t_0)}{\Delta t}, \quad \frac{Z(t_0 + \Delta t) - Z(t_0)}{\Delta t}$$

Laat men Q naderen tot P , dan zullen op grond van de veronderstelde differentieerbaarheid van X , Y en Z , de richtingsgetallen van PQ naderen tot $\dot{X}(t_0)$, $\dot{Y}(t_0)$ en $\dot{Z}(t_0)$. De lijn PQ „nadert tot” de lijn met vectorvoorstelling:

$$\underline{l}(t) = \begin{bmatrix} X(t_0) \\ Y(t_0) \\ Z(t_0) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} \dot{X}(t_0) \\ \dot{Y}(t_0) \\ \dot{Z}(t_0) \end{bmatrix} \quad (36.1)$$

of ook

$$\underline{l}(t) = \underline{r}(t_0) + t\dot{\underline{r}}(t_0)$$

Deze lijn noemt men de *raaklijn* in P aan de kromme K .

Stellen we $X(t_0) = x_0$, $Y(t_0) = y_0$, $Z(t_0) = z_0$, $\dot{X}(t_0) = \dot{x}_0$, $\dot{Y}(t_0) = \dot{y}_0$ en $\dot{Z}(t_0) = \dot{z}_0$, dan vinden we door eliminatie van t uit (36.1), indien $\dot{x}_0 \neq 0$, $\dot{y}_0 \neq 0$, $\dot{z}_0 \neq 0$, voor de raaklijn:

$$\frac{x - x_0}{\dot{x}_0} = \frac{y - y_0}{\dot{y}_0} = \frac{z - z_0}{\dot{z}_0} \quad (36.2)$$

Deze is ook te schrijven als snijlijn van de platte vlakken:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}_0(x - x_0) &= \dot{x}_0(y - y_0) \\ \dot{z}_0(y - y_0) &= \dot{y}_0(z - z_0) \end{aligned} \right\}$$

Het vlak door P loodrecht op de raaklijn noemen we het *normalenvlak* in P op de kromme K. Uit (36.2) ziet men direct dat het normalenvlak tot vergelijking heeft:

$$(x - x_0)\dot{x}_0 + (y - y_0)\dot{y}_0 + (z - z_0)\dot{z}_0 = 0$$

Hierop komen we nog terug in par. 38.

Opmerking:

Een analoge redenering geeft in het geval van een vlakke kromme met parameter-voorstelling:

$$x = X(t), \quad y = Y(t)$$

voor de richtingsgetallen van de raaklijn $\dot{X}(t)$, $\dot{Y}(t)$, in overeenstemming met het resultaat in par. 31.

37 Booglengte van een ruimtekromme

Indien de functies X , Y en Z continue eerste afgeleiden hebben, dan kunnen we het begrip *booglengte* definiëren op een wijze die analoog is aan die bij een vlakke kromme (zie par. 28). We kiezen daartoe een vast punt A op de gegeven ruimtekromme K met b.v. de parameterwaarde t_0 . We definiëren de booglengte σ tussen A en een punt P met parameterwaarde t aldus:

$$\sigma = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\{\dot{X}(\tau)\}^2 + \{\dot{Y}(\tau)\}^2 + \{\dot{Z}(\tau)\}^2} d\tau$$

waaruit volgt:

$$\dot{s}(t) = \sqrt{\{\dot{X}(t)\}^2 + \{\dot{Y}(t)\}^2 + \{\dot{Z}(t)\}^2} \quad (37.1)$$

Kiezen we als parameter x en stellen we in de parametervoorstelling:

$$x = x, \quad y = Y(x), \quad z = Z(x)$$

dan is de booglengte $\sigma(a, b)$ tussen twee punten met x -coördinaten a , resp. b :

$$\sigma(a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{dx}\right)^2} dx$$

Voorbeeld 1

De lengte van één gang van de cirkelschroeflijn uit voorbeeld 2 van par. 34 is gelijk aan:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 \tau + b^2 \sin^2 \tau + b^2} d\tau = 2\pi \sqrt{a^2 + b^2}$$

Opmerking:

Evenals bij een vlakke kromme kan men op geheel analoge wijze voor een ruimtekromme bewijzen, dat de booglengete onafhankelijk is van de keuze van de parameter (zie opmerking bij par. 28), mits de samenhang tussen de gekozen parameters wordt gegeven door een monotoon toenemende, continu differentieerbare functie.

Gebruikt men de booglengete σ als parameter en stelt men:

$$x = X(\sigma), y = Y(\sigma), z = Z(\sigma)$$

dan volgt uit (37.1) en uit het feit dat $\sigma = s(\sigma)$ impliceert dat $\frac{ds}{d\sigma} = 1$:

$$\{\dot{X}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Y}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Z}(\sigma)\}^2 = 1 \quad (37.2)$$

m.a.w. de vector $\begin{bmatrix} \dot{X}(\sigma) \\ \dot{Y}(\sigma) \\ \dot{Z}(\sigma) \end{bmatrix}$ is een eenheidsvector, waarvan de drager langs de raaklijn in $P\{X(\sigma), Y(\sigma), Z(\sigma)\}$ valt. Men noemt dit de *tangentiële eenheidsvector* $\underline{T}(\sigma)$. Als X , Y en Z tweemaal differentieerbaar zijn, dan volgt uit (37.2):

$$\ddot{X}(\sigma) \cdot \dot{X}(\sigma) + \ddot{Y}(\sigma) \cdot \dot{Y}(\sigma) + \ddot{Z}(\sigma) \cdot \dot{Z}(\sigma) = 0$$

m.a.w. de vector $\begin{bmatrix} \dot{X}(\sigma) \\ \dot{Y}(\sigma) \\ \dot{Z}(\sigma) \end{bmatrix}$ is één van de vele vectoren die loodrecht staan op de raaklijn in P aan K . Men noemt deze vector de *hoofdnormaalvector*. Ook hierop komen we in par. 38 terug.

Bij de invoering van de booglengete σ als parameter zou men in principe moeten weten hoe uit de betrekking:

$$\sigma = s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\{\dot{X}(\tau)\}^2 + \{\dot{Y}(\tau)\}^2 + \{\dot{Z}(\tau)\}^2} d\tau$$

t kan worden berekend als functie van σ . Hiervoor zou men de integratie moeten uitvoeren en daarna t oplossen.

Voorbeeld 2

Bij de ruimtekromme bepaald door:

$$x = \cos t, y = \sin t, z = t$$

is

$$\sigma = s(t) = \int_0^t \sqrt{\sin^2 \tau + \cos^2 \tau + 1} d\tau = t\sqrt{2}$$

en dus

$$t = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$$

Soms lukt het integreren nog wel, maar geeft het oplossen van t problemen.

Voorbeeld 3

Bij de ruimtekromme bepaald door:

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = \frac{2}{3}t^3$$

vindt men:

$$\begin{aligned}\sigma = s(t) &= \int_0^t \sqrt{1 + 4\tau^2 + 4\tau^4} d\tau \\ &= \int_0^t (1 + 2\tau^2) d\tau \\ &= t + \frac{2}{3}t^3\end{aligned}$$

zodat t niet eenvoudig in σ is uit te drukken.

In vele gevallen geeft echter het integreren al moeilijkheden. Dikwijls hebben we alleen de afgeleiden naar σ nodig. Die kunnen we bepalen met de kettingregel.

Voorbeeld 4

Van de ruimtekromme bepaald door:

$$x = X(t) = t, \quad y = Y(t) = t^2, \quad z = Z(t) = t^3$$

vindt men:

$$\sigma = s(t) = \int_0^t \sqrt{1 + 4\tau^2 + 9\tau^4} d\tau$$

Indien we stellen $t = \varphi(\sigma)$ en

$$x = X(t) = X\{\varphi(\sigma)\} = X^*(\sigma)$$

$$y = Y(t) = Y\{\varphi(\sigma)\} = Y^*(\sigma)$$

$$z = Z(t) = Z\{\varphi(\sigma)\} = Z^*(\sigma)$$

dan geldt:

$$\dot{X}^*(\sigma) = \dot{X}(t) \cdot \dot{\varphi}(\sigma) = \frac{\dot{X}(t)}{\dot{s}(t)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

$$\dot{Y}^*(\sigma) = \dot{Y}(t) \cdot \dot{\varphi}(\sigma) = \frac{\dot{Y}(t)}{\dot{s}(t)} = \frac{2t}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

$$\dot{Z}^*(\sigma) = \dot{Z}(t) \cdot \dot{\varphi}(\sigma) = \frac{\dot{Z}(t)}{\dot{s}(t)} = \frac{3t^2}{\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}}$$

Voorts geldt:

$$\ddot{X}^*(\sigma) = \frac{\dot{s}(t)\ddot{X}(t) - \dot{X}(t)\ddot{s}(t)}{\{\dot{s}(t)\}^3} = \frac{-4t - 18t^3}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^2}$$

$$\dot{Y}^*(\sigma) = \frac{\dot{s}(t)\ddot{Y}(t) - \dot{Y}(t)\ddot{s}(t)}{\{\dot{s}(t)\}^3} = \frac{2 - 18t^4}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^2}$$

$$\dot{Z}^*(\sigma) = \frac{\dot{s}(t)\ddot{Z}(t) - \dot{Z}(t)\ddot{s}(t)}{\{\dot{s}(t)\}^3} = \frac{6t + 12t^3}{(1 + 4t^2 + 9t^4)^2}$$

Zo is b.v. voor het punt (1, 1, 1) (met $t = 1$) de tangentiële eenheidsvector

en de hoofdnormaalvector

$$\begin{pmatrix} -\frac{22}{14^2} \\ -\frac{16}{14^2} \\ \frac{18}{14^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{14}} \\ \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \frac{3}{\sqrt{14}} \end{pmatrix}$$

38 Triëder van Frenet-Serret

Stel dat K een ruimtekromme is met vectorvergelijking

$$\underline{r}(\sigma) = \begin{pmatrix} X(\sigma) \\ Y(\sigma) \\ Z(\sigma) \end{pmatrix}$$

waarin de parameter σ de booglengte voorstelt.

In par. 37 zagen we reeds dat in dit geval geldt:

$$\{\dot{X}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Y}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Z}(\sigma)\}^2 = 1$$

zodat de vector $\dot{\underline{r}}(\sigma)$ een eenheidsvector is in de richting van de raaklijn in P aan K , de tangentiële eenheidsvector $\underline{T}(\sigma)$.

Ook merkten we op dat de vector

$$\underline{\dot{T}}(\sigma) = \dot{\underline{r}}(\sigma) = \begin{pmatrix} \dot{X}(\sigma) \\ \dot{Y}(\sigma) \\ \dot{Z}(\sigma) \end{pmatrix}$$

loodrecht staat op de raaklijn in P aan K en dat deze vector hoofdnormaalvector genoemd wordt. De lengte van deze vector stellen we voor door $\kappa(\sigma)$ en deze wordt de *kromming* van K in P genoemd. Hiervoor geldt:

$$\kappa(\sigma) = \sqrt{\{\dot{X}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Y}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Z}(\sigma)\}^2}$$

De eenheidsvector $\underline{N}(\sigma)$ in de richting van de hoofdnormaalvector heet eenheids-
hoofdnormaalvector in P op K, zodat:

$$\underline{N}(\sigma) = \frac{1}{\kappa(\sigma)} \ddot{r}(\sigma) = \frac{1}{\kappa(\sigma)} \dot{\underline{T}}(\sigma) \quad (38.1)$$

De drager van deze vector heet *hoofdnormaal* in P op K.

We voeren verder nog in de vector $\underline{B}(\sigma)$, gedefinieerd door

$$\underline{B}(\sigma) = \underline{T}(\sigma) \times \underline{N}(\sigma) \quad (38.2)$$

de z.g. eenheidsbinormaalvector in P op K. Deze staat loodrecht op $\underline{T}(\sigma)$ en op $\underline{N}(\sigma)$. De drager van deze vector heet *binormaal*.

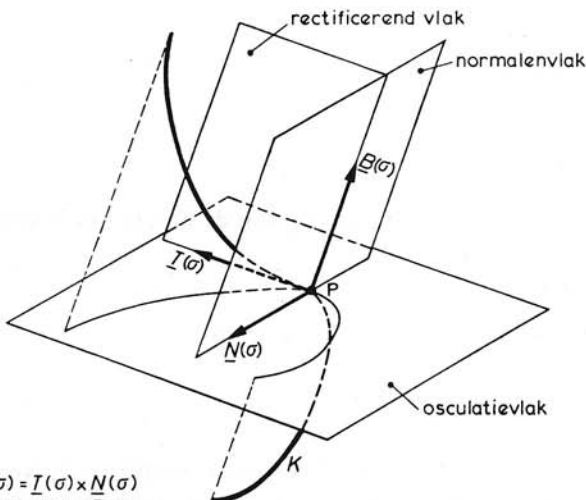
Tenslotte voeren we de volgende benamingen in:

- a het vlak door P loodrecht op $\underline{T}(\sigma)$: *normalenvlak*;
- b het vlak door P loodrecht op $\underline{N}(\sigma)$: *rectificerend vlak*;
- c het vlak door P loodrecht op $\underline{B}(\sigma)$: *osculatievlak*.

Uit het vorenstaande blijkt dat de vectoren $\underline{T}(\sigma)$, $\underline{N}(\sigma)$ en $\underline{B}(\sigma)$ onderling loodrecht op elkaar staan en elk de lengte één hebben.

De onderlinge ligging van de ingevoerde lijnen en vlakken is aanschouwelijk weer-
gegeven in fig. 39. De getekende drievlakshoek die in het algemeen voor elk punt
van de kromme een andere stand zal innemen, noemt men de *triëder van Frenet-
Serret*.*

Fig. 39



$$\begin{aligned} \underline{B}(\sigma) &= \underline{T}(\sigma) \times \underline{N}(\sigma) \\ \underline{T}(\sigma) &= \underline{N}(\sigma) \times \underline{B}(\sigma) \\ \underline{N}(\sigma) &= \underline{B}(\sigma) \times \underline{T}(\sigma) \end{aligned}$$

* J. F. Frenet 1816-1868. J. A. Serret 1819-1885.

Uit fig. 39 leest men onmiddellijk af (volgend uit de meetkundig geïnterpreteerde definitie van uitwendig produkt), dat tussen de drie eenheidsvectoren $\underline{B}(\sigma)$, $\underline{T}(\sigma)$ en $\underline{N}(\sigma)$ behalve (38.2) nog de volgende betrekkingen gelden:

$$\underline{T}(\sigma) = \underline{N}(\sigma) \times \underline{B}(\sigma) \quad (38.3)$$

$$\underline{N}(\sigma) = \underline{B}(\sigma) \times \underline{T}(\sigma) \quad (38.4)$$

39 Formules van Frenet-Serret

Tussen de in de vorige paragrafen ingevoerde grootheden bestaan verbanden die weergegeven worden door de z.g. *formules van Frenet-Serret*. Uit deze formules blijkt dat de afgeleide vectoren $\underline{\dot{T}}(\sigma)$, $\underline{\dot{N}}(\sigma)$ en $\underline{\dot{B}}(\sigma)$ lineair afhangen van $\underline{T}(\sigma)$, $\underline{N}(\sigma)$ en $\underline{B}(\sigma)$.

a Uit (38.1) volgt:

$$\underline{\dot{T}}(\sigma) = \kappa(\sigma)\underline{N}(\sigma) \quad (39.1)$$

$\underline{\dot{T}}(\sigma)$ is dus een scalair veelvoud van $\underline{N}(\sigma)$.

b Wij zullen nu bewijzen dat ook $\underline{\dot{B}}(\sigma)$ een scalair veelvoud is van $\underline{N}(\sigma)$.

Uit $\|\underline{B}(\sigma)\| = 1$ en dus $\underline{B}(\sigma) \cdot \underline{B}(\sigma) = 1$ volgt door differentiatie:

$$\underline{B}(\sigma) \cdot \underline{\dot{B}}(\sigma) = 0$$

en dus

$$\underline{\dot{B}}(\sigma) \perp \underline{B}(\sigma) \quad (39.2)$$

Uit $\underline{B}(\sigma) \perp \underline{T}(\sigma)$ volgt verder:

$$\underline{B}(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma) = 0$$

en door differentiatie:

$$\underline{\dot{B}}(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma) + \underline{B}(\sigma) \cdot \underline{\dot{T}}(\sigma) = 0$$

dus, wegens (39.1):

$$\underline{\dot{B}}(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma) + \kappa(\sigma)\underline{B}(\sigma) \cdot \underline{N}(\sigma) = 0 \quad (39.3)$$

Daar echter $\underline{B}(\sigma) \perp \underline{N}(\sigma)$, dus $\underline{B}(\sigma) \cdot \underline{N}(\sigma) = 0$, volgt uit (39.3):

$$\underline{\dot{B}}(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma) = 0$$

zodat

$$\underline{\dot{B}}(\sigma) \perp \underline{T}(\sigma) \quad (39.4)$$

Daar volgens (39.2) en (39.4) $\underline{\dot{B}}(\sigma)$ loodrecht staat op $\underline{B}(\sigma)$ en $\underline{T}(\sigma)$ en ook $\underline{N}(\sigma)$ loodrecht staat op $\underline{B}(\sigma)$ en $\underline{T}(\sigma)$, is dus $\underline{\dot{B}}(\sigma)$ een scalair veelvoud van $\underline{N}(\sigma)$. Als wij

de evenredigheidsfactor aangeven met $-\tau(\sigma)$, hebben we dus bewezen:

$$\underline{\dot{B}}(\sigma) = -\tau(\sigma)\underline{N}(\sigma) \quad (39.5)$$

$\tau(\sigma)$ wordt de *torsie* genoemd.

c Tenslotte tonen we aan dat $\underline{\dot{N}}(\sigma)$ een lineaire combinatie is van $\underline{T}(\sigma)$ en $\underline{B}(\sigma)$.
Uit (38.4) volgt:

$$\underline{\dot{N}}(\sigma) = \underline{\dot{B}}(\sigma) \times \underline{T}(\sigma) + \underline{B}(\sigma) \times \underline{\dot{T}}(\sigma)$$

Hiervoor kan men schrijven volgens (39.1) en (39.5):

$$\underline{\dot{N}}(\sigma) = -\tau(\sigma)\{\underline{N}(\sigma) \times \underline{T}(\sigma)\} + \kappa(\sigma)\{\underline{B}(\sigma) \times \underline{N}(\sigma)\}$$

en dit is volgens (38.2) en (38.3) gelijk aan:

$$\underline{\dot{N}}(\sigma) = \tau(\sigma)\underline{B}(\sigma) - \kappa(\sigma)\underline{T}(\sigma)$$

Samengevat luiden de *formules van Frenet-Serret*:

$\underline{\dot{T}}(\sigma) =$	$\kappa(\sigma)\underline{N}(\sigma)$	
$\underline{\dot{N}}(\sigma) =$	$-\kappa(\sigma)\underline{T}(\sigma)$	$+ \tau(\sigma)\underline{B}(\sigma)$
$\underline{\dot{B}}(\sigma) =$	$-\tau(\sigma)\underline{N}(\sigma)$	

40 Meetkundige betekenis van de kromming

Om de meetkundige betekenis van $\kappa(\sigma)$ aan te geven en tevens om de analogie met het begrip kromming bij vlakke krommen (zie par. 30) te doen uitkomen, bewijzen we de volgende stelling.

Stelling

Als P en Q twee punten zijn op de kromme K met booglengten σ resp. $\sigma + \Delta\sigma$ en als $\Delta\theta$ de positieve hoek is tussen de tangentiële eenheidsvectoren $\underline{T}(\sigma)$ en $\underline{T}(\sigma + \Delta\sigma)$, dan geldt:

$$\kappa(\sigma) = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta\sigma} \right| = \left| \frac{d\theta}{d\sigma} \right|$$

Bewijs:

Stel dat

$$\underline{r}(\sigma) = \begin{pmatrix} X(\sigma) \\ Y(\sigma) \\ Z(\sigma) \end{pmatrix}$$

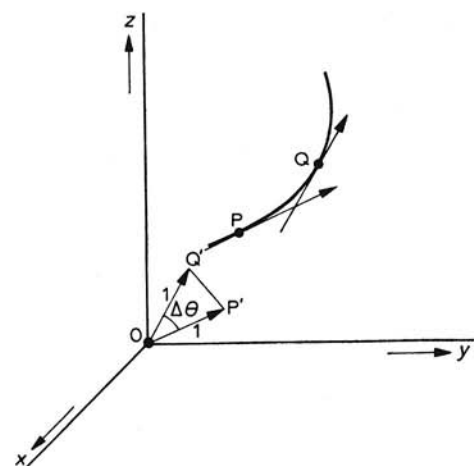


Fig. 40

een vectorvoorstelling van K is, waarbij verondersteld wordt dat X , Y en Z tweemaal differentieerbaar zijn.

We brengen de tangentiële eenheidsvectoren in P en Q aan K „over naar de oorsprong”, d.w.z. we beschouwen de vectoren $\underline{\dot{r}}(\sigma)$ en $\underline{\dot{r}}(\sigma + \Delta\sigma)$ met beginpunt in O en noemen die $\overrightarrow{OP'}$ resp. $\overrightarrow{OQ'}$ (zie fig. 40).

Nu geldt voor de afstand $P'Q'$ enerzijds:

$$P'Q' = \|\underline{\dot{r}}(\sigma + \Delta\sigma) - \underline{\dot{r}}(\sigma)\|$$

en anderzijds geeft de cosinusregel in driehoek $OP'Q'$:

$$(P'Q')^2 = 1 + 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos \Delta\theta = 4 \sin^2 \frac{1}{2}\Delta\theta$$

zodat

$$\|\underline{\dot{r}}(\sigma + \Delta\sigma) - \underline{\dot{r}}(\sigma)\|^2 = 4 \sin^2 \frac{1}{2}\Delta\theta$$

Deling door $(\Delta\sigma)^2$ geeft:

$$\frac{\|\underline{\dot{r}}(\sigma + \Delta\sigma) - \underline{\dot{r}}(\sigma)\|^2}{(\Delta\sigma)^2} = \frac{4 \sin^2 \frac{1}{2}\Delta\theta}{(\Delta\sigma)^2}$$

en, indien $\Delta\theta \neq 0$:

$$\frac{\|\underline{\dot{r}}(\sigma + \Delta\sigma) - \underline{\dot{r}}(\sigma)\|^2}{(\Delta\sigma)^2} = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\Delta\theta}{(\frac{1}{2}\Delta\theta)^2} \cdot \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta\sigma}\right)^2$$

of

$$\left(\frac{\underline{\dot{r}}(\sigma + \Delta\sigma) - \underline{\dot{r}}(\sigma)}{\Delta\sigma}, \frac{\underline{\dot{r}}(\sigma + \Delta\sigma) - \underline{\dot{r}}(\sigma)}{\Delta\sigma}\right) = \frac{\sin^2 \frac{1}{2}\Delta\theta}{(\frac{1}{2}\Delta\theta)^2} \cdot \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta\sigma}\right)^2$$

Als $\Delta\sigma \rightarrow 0$, dan zal ook $\Delta\theta \rightarrow 0$, zodat men verkrijgt:

$$(\underline{\ddot{r}}(\sigma), \underline{\ddot{r}}(\sigma))^2 = \left(\frac{d\theta}{d\sigma} \right)^2$$

of

$$\|\underline{\ddot{r}}(\sigma)\| = \left| \frac{d\theta}{d\sigma} \right|$$

of

$$\kappa(\sigma) = \left| \frac{d\theta}{d\sigma} \right|$$

Als $\Delta\theta = 0$, definiëren we $\kappa(\sigma) = 0$. De stelling is dan triviaal.

We hebben dus:

$$\kappa(\sigma) = \left| \frac{d\theta}{d\sigma} \right| = \sqrt{\{\dot{X}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Y}(\sigma)\}^2 + \{\dot{Z}(\sigma)\}^2}$$

41 Meetkundige betekenis van de torsie

In par. 38 zagen we dat de eenheidsbinormaalvector $\underline{B}(\sigma)$ in P loodrecht staat op het osculatievlak in P aan de kromme. Zoals de in par. 40 afgeleide stelling een verband aangeeft tussen de kromming $\kappa(\sigma)$ en de richtingsverandering van de tangentiële eenheidsvector, zo bestaat er ook een verband tussen de torsie $\tau(\sigma)$ en de richtingsverandering van de eenheidsbinormaalvector, dus van de standsverandering van het osculatievlak. Dit wordt weergegeven in de volgende stelling.

Stelling

Als P en Q twee punten zijn op de kromme K met booglengthen σ resp. $\sigma + \Delta\sigma$ en als $\Delta\varphi$ de positieve hoek is tussen de vectoren $\underline{B}(\sigma)$ en $\underline{B}(\sigma + \Delta\sigma)$, dan geldt:

$$|\tau(\sigma)| = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta\sigma} \right| = \left| \frac{d\varphi}{d\sigma} \right|$$

(uiteraard indien deze limiet bestaat).

Bewijs:

Naar analogie met het bewijs van de stelling uit par. 40 brengen we de eenheidsbinormaalvectoren van P en Q „over naar O”, waardoor de vectoren \overrightarrow{OP} resp. \overrightarrow{OQ} ontstaan (zie fig. 41).

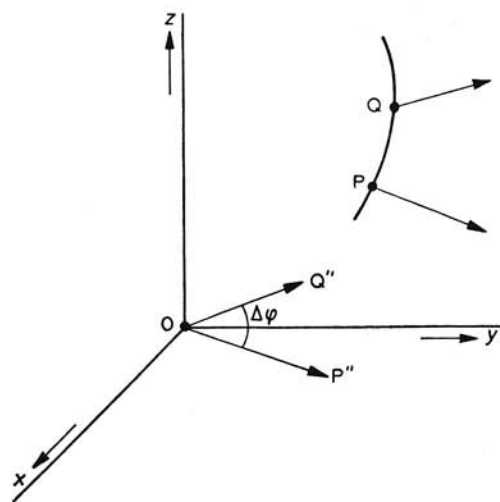


Fig. 41

Nu geldt voor de afstand $P''Q''$ enerzijds:

$$P''Q'' = \|B(\sigma + \Delta\sigma) - B(\sigma)\|$$

en anderzijds geeft de cosinusregel in driehoek $OP''Q''$:

$$(P''Q'')^2 = 4 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta\varphi$$

zodat

$$\|B(\sigma + \Delta\sigma) - B(\sigma)\|^2 = 4 \sin^2 \frac{1}{2} \Delta\varphi$$

Op geheel analoge wijze als in par. 40 leidt men hieruit af:

$$\|\underline{\dot{B}}(\sigma)\|^2 = \left(\frac{d\varphi}{d\sigma}\right)^2$$

en dus:

$$\|\underline{\dot{B}}(\sigma)\| = \left|\frac{d\varphi}{d\sigma}\right| \quad (41.1)$$

Volgens de derde formule van Frenet-Serret (zie par. 39) is

$$\underline{\dot{B}}(\sigma) = -\tau(\sigma)\underline{N}(\sigma) \quad (41.2)$$

Daar $\underline{N}(\sigma)$ een eenheidsvector is, geldt:

$$\|\underline{\dot{B}}(\sigma)\| = |\tau(\sigma)| \quad (41.3)$$

Uit (41.1) en (41.3) volgt:

$$|\tau(\sigma)| = \left|\frac{d\varphi}{d\sigma}\right|$$

Opmerking:

Door gebruik te maken van (41.2) kan men bewijzen dat

$$\tau(\sigma) = \frac{1}{\kappa^2(\sigma)} \begin{vmatrix} \dot{X}(\sigma) & \dot{Y}(\sigma) & \dot{Z}(\sigma) \\ \ddot{X}(\sigma) & \ddot{Y}(\sigma) & \ddot{Z}(\sigma) \\ \ddot{X}(\sigma) & \ddot{Y}(\sigma) & \ddot{Z}(\sigma) \end{vmatrix}$$

42 Meetkundige betekenis van het osculatievlak

Stel dat K een kromme is met vectorvoorstelling:

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix}$$

en P een punt op K met parameter t_0 . We veronderstellen dat X , Y en Z functies zijn van t die elk in een omgeving van t_0 te ontwikkelen zijn in een reeks van Taylor:

$$X(t_0 + h) = X(t_0) + h\dot{X}(t_0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{X}(t_0) + \dots$$

$$Y(t_0 + h) = Y(t_0) + h\dot{Y}(t_0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{Y}(t_0) + \dots$$

$$Z(t_0 + h) = Z(t_0) + h\dot{Z}(t_0) + \frac{h^2}{2!} \ddot{Z}(t_0) + \dots$$

Korthedshalve schrijven we X_0 i.p.v. $X(t_0)$, \dot{X}_0 i.p.v. $\dot{X}(t_0)$, \ddot{X}_0 i.p.v. $\ddot{X}(t_0)$ enz. We brengen in de ontwikkelingen van $Y(t_0 + h)$ en $Z(t_0 + h)$ analoge bekortingen aan.

Een willekeurig vlak V door P heeft tot vergelijking:

$$A(x - X_0) + B(y - Y_0) + C(z - Z_0) = 0 \quad (42.1)$$

Dit vlak snijdt de kromme K in punten met plaatsvector $\begin{bmatrix} X(t_0 + h) \\ Y(t_0 + h) \\ Z(t_0 + h) \end{bmatrix}$, waarin de waarden van de bijbehorende h worden gevonden uit:

$$A \left\{ h\dot{X}_0 + \frac{h^2}{2!} \ddot{X}_0 + \dots \right\} + B \left\{ h\dot{Y}_0 + \frac{h^2}{2!} \ddot{Y}_0 + \dots \right\} + C \left\{ h\dot{Z}_0 + \frac{h^2}{2!} \ddot{Z}_0 + \dots \right\} = 0$$

of ook:

$$h\{A\dot{X}_0 + B\dot{Y}_0 + C\dot{Z}_0\} + \frac{h^2}{2!} \{A\ddot{X}_0 + B\ddot{Y}_0 + C\ddot{Z}_0\} + \dots = 0 \quad (42.2)$$

Hieraan voldoet $h = 0$, welke waarde correspondeert met P als snijpunt, hetgeen te

voorzien was, aangezien we het vlak door P gekozen hadden. Kiest men A, B en C zodanig dat ook nog geldt:

$$A\dot{X}_0 + B\dot{Y}_0 + C\dot{Z}_0 = 0 \quad (42.3)$$

dan heeft (42.2) een dubbele wortel $h = 0$ en snijdt K het vlak V in twee punten die met P samenvallen. Het vlak V bevat dan de raaklijn in P aan de kromme. Wanneer we aan A, B en C ook nog de eis opleggen dat

$$A\ddot{X}_0 + B\ddot{Y}_0 + C\ddot{Z}_0 = 0 \quad (42.4)$$

dan heeft V met de kromme K drie punten gemeen die met P samenvallen.

Door de voorwaarden (42.3) en (42.4) is het vlak volledig bepaald. Dit is juist dat vlak waartoe een vlak „nadert” dat drie punten P, Q en R met de kromme K gemeen heeft als Q en R naderen tot P, of ook het vlak waartoe het vlak gaande door de raaklijn in P aan K en een punt Q van K nadert als Q nadert tot P (zie fig. 42).

De vergelijking van dit vlak vindt men door A, B en C te elimineren uit (42.1), (42.3) en (42.4). Men vindt dan in determinantvorm:

$$\begin{vmatrix} x - X_0 & y - Y_0 & z - Z_0 \\ \dot{X}_0 & \dot{Y}_0 & \dot{Z}_0 \\ \ddot{X}_0 & \ddot{Y}_0 & \ddot{Z}_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (42.5)$$

Ontwikkeling van deze determinant naar de eerste rij geeft:

$$B_1(x - X_0) + B_2(y - Y_0) + B_3(z - Z_0) = 0 \quad (42.6)$$

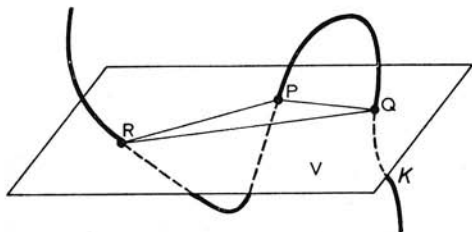
waarin gesteld is:

$$B_1 = \begin{vmatrix} \dot{Y}_0 & \dot{Z}_0 \\ \ddot{Y}_0 & \ddot{Z}_0 \end{vmatrix}, \quad B_2 = - \begin{vmatrix} \dot{X}_0 & \dot{Z}_0 \\ \ddot{X}_0 & \ddot{Z}_0 \end{vmatrix}, \quad B_3 = \begin{vmatrix} \dot{X}_0 & \dot{Y}_0 \\ \ddot{X}_0 & \ddot{Y}_0 \end{vmatrix}$$

Hieruit ziet men dat een normaalvector in P op V juist is de vector $\dot{\underline{r}}(t_0) \times \ddot{\underline{r}}(t_0)$. Kiest men als parameter de booglengte σ , dan volgt uit $\dot{\underline{r}}(\sigma) = \underline{T}(\sigma)$ en $\ddot{\underline{r}}(\sigma) = \underline{N}(\sigma)$, in verband met (38.2), dat de eenheidsbinormaalvector een normaalvector in P op V is. Bij willekeurige parameter t leidt men eenvoudig af: $\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t) = \{\dot{\underline{r}}^*(\sigma) \times \ddot{\underline{r}}^*(\sigma)\} \{\dot{s}(t)\}^2$, waarmee is aangetoond dat de vector $\dot{\underline{r}}(t) \times \ddot{\underline{r}}(t)$ een scalair veelvoud is van de eenheidsbinormaalvector.

Vlak V staat kennelijk loodrecht op de binormaal in P op K en is dus het in par. 38 gedefinieerde osculatievlak. De vergelijking van het osculatievlak wordt gegeven door (42.5) of (42.6) en dit vlak bevat ook de hoofdnormaal in P op K .

Fig. 42



43 Voorbeeld van berekening van de in dit hoofdstuk ingevoerde grootheden

We nemen als voorbeeld de cirkelschroeflijn K met vectorvergelijking:

$$\underline{r}^*(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Voor de booglengte σ , berekend vanaf het punt met parameter $t_0 = 0$, dus plaatsvector $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, vinden we:

$$\sigma = s(t) = \int_0^t \sqrt{\sin^2 \tau + \cos^2 \tau + 4} d\tau = t\sqrt{5}$$

Indien we de booglengte σ als parameter invoeren, verkrijgt de kromme de vectorvergelijking:

$$\underline{r}(\sigma) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\sigma}{\sqrt{5}} \\ \sin \frac{\sigma}{\sqrt{5}} \\ \frac{2\sigma}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

Als punt P nemen we het punt met parameterwaarde $\sigma = \frac{1}{4}\pi\sqrt{5}$. P heeft dus de

plaatsvector $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\pi \end{pmatrix}$. Met de gebruikelijke notatie vinden we dan:

$$\dot{X}_0 = -\frac{1}{\sqrt{10}}; \dot{Y}_0 = \frac{1}{\sqrt{10}}; \dot{Z}_0 = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\ddot{X}_0 = -\frac{1}{5\sqrt{2}}; \ddot{Y}_0 = -\frac{1}{5\sqrt{2}}; \ddot{Z}_0 = 0$$

$$\ddot{X}_0 = \frac{1}{5\sqrt{10}}; \ddot{Y}_0 = -\frac{1}{5\sqrt{10}}; \ddot{Z}_0 = 0$$

Een vectorvergelijking van de *raaklijn* in P is dus:

$$\underline{l}(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\pi \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

De raaklijn in P is dus de snijlijn van de vlakken met vergelijkingen:

$$\left. \begin{array}{l} x + y - \sqrt{2} = 0 \\ 2y\sqrt{2} - z - 2 + \frac{1}{2}\pi = 0 \end{array} \right\}$$

De vergelijking van het *normaleenvlak* door P op K is:

$$-\frac{1}{\sqrt{10}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{10}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{2}{\sqrt{5}}\left(z - \frac{1}{2}\pi\right) = 0$$

of

$$x - y - 2z\sqrt{2} + \pi\sqrt{2} = 0$$

Een vectorvoorstelling van de *hoofdnormaal* in P op K is:

$$\underline{n}(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\pi \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{5\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{5\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Deze is de snijlijn van de vlakken met vergelijkingen:

$$\left. \begin{array}{l} x = y \\ z = \frac{1}{2}\pi \end{array} \right\}$$

De vergelijking van het *rectificerende vlak* in P is:

$$-\frac{1}{5\sqrt{2}}\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{5\sqrt{2}}\left(y - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

of

$$x + y - \sqrt{2} = 0$$

De vergelijking van het *osculatievlak* in P aan K is:

$$\begin{vmatrix} x - \frac{1}{\sqrt{2}} & y - \frac{1}{\sqrt{2}} & z - \frac{1}{2}\pi \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{5\sqrt{2}} & -\frac{1}{5\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

of wel:

$$4x - 4y + 2z\sqrt{2} = \pi\sqrt{2}$$

Een vectorvergelijking van de *binormaal* door P op K is dus:

$$\underline{b}(\lambda) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2}\pi \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Deze is dus de snijlijn van de vlakken met vergelijkingen:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = \sqrt{2} \\ y\sqrt{2} + 2z = 1 + \pi \end{array} \right\}$$

De *kromming* in P heeft de waarde:

$$\sqrt{\left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5\sqrt{2}}\right)^2} + 0 = \frac{1}{5}$$

De kromme K heeft als bijzonderheid dat de kromming $k(\sigma)$ constant is, immers:

$$k(\sigma) = \sqrt{\left(-\frac{1}{5}\cos\frac{\sigma}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\sin\frac{\sigma}{\sqrt{5}}\right)^2} + 0 = \frac{1}{5}$$

Dit behoeft geen verbazing te wekken, als wij bedenken dat de kromme op een cilinder ligt.

De *torsie* in P heeft de waarde:

$$5^2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{5\sqrt{2}} & -\frac{1}{5\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{5\sqrt{10}} & -\frac{1}{5\sqrt{10}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{2}{5}$$

Ook de torsie heeft bij deze kromme de eigenschap constant te zijn, want in een willekeurig punt met booglenge σ geldt:

$$\begin{aligned} \tau(\sigma) &= 5^2 \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{5} \cos \frac{s}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{5} \sin \frac{s}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{1}{5\sqrt{5}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{5\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 5^2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5\sqrt{5}} \left(\cos^2 \frac{s}{\sqrt{5}} + \sin^2 \frac{s}{\sqrt{5}} \right) = -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

Vergelijken we deze kromme met een cirkel met straal 5, dan zien we dat ook bij de cirkel de kromming in elk punt constant en $=\frac{1}{5}$ is. Bij de cirkel is het osculatievlak in elk punt steeds het vlak van de cirkel, en de binormaal heeft in elk punt dezelfde richting. Bij de schroeflijn verandert het osculatievlak, en dus de binormaal in elk punt „continu” van richting.

44 Raakvlak aan een oppervlak

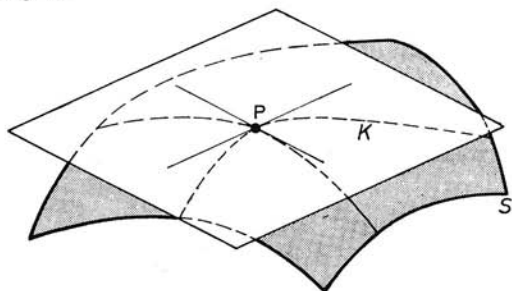
Stel dat S een oppervlak is en P een punt op S (zie fig. 43).

Definitie

Een raaklijn in P aan het oppervlak S is een raaklijn in P aan een kromme die geheel op S ligt.

Door P op S gaan oneindig veel raaklijnen aan S , daar er oneindig veel op S gelegen krommen door P gaan.

Fig. 43



We zullen aantonen dat „in het algemeen” al deze raaklijnen in een plat vlak liggen. Dit vlak heet dan het *raakvlak* in P aan S.

Definitie

Het raakvlak in P aan het oppervlak S is het platte vlak dat gevormd wordt door de raaklijnen in P aan S.

Het bewijs voor het bestaan van het raakvlak onder zekere voorwaarden kan als volgt worden gegeven:

Stel dat de vergelijking van S is

$$F(x, y, z) = 0 \quad (44.1)$$

en dat de plaatsvector van P is $\begin{Bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{Bmatrix}$. Stel voorts dat K een kromme op S is met

vectorvergelijking:

$$\underline{r}(t) = \begin{Bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{Bmatrix} \quad (t \in I)$$

Indien t_0 de parameterwaarde van P op K is, dan is (volgens par. 36) een vectorvergelijking van de raaklijn in P aan K:

$$\underline{l}(t) = \underline{r}(t_0) + \lambda \underline{\dot{r}}(t_0)$$

Dit betekent dat voor de coördinaten x , y en z van een punt op de raaklijn geldt:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \dot{X}(t_0) \\ y &= y_0 + \lambda \dot{Y}(t_0) \\ z &= z_0 + \lambda \dot{Z}(t_0) \end{aligned} \right\} \quad (44.2)$$

Hierin is uiteraard $X(t_0) = x_0$, $Y(t_0) = y_0$ en $Z(t_0) = z_0$. Als we nog invoeren $\dot{X}(t_0) = \dot{X}_0$, $\dot{Y}(t_0) = \dot{Y}_0$, $\dot{Z}(t_0) = \dot{Z}_0$, dan kunnen we (44.2) schrijven als:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 + \lambda \dot{X}_0 \\ y &= y_0 + \lambda \dot{Y}_0 \\ z &= z_0 + \lambda \dot{Z}_0 \end{aligned} \right\} \quad (44.3)$$

Daar K geheel op S ligt, geldt volgens (44.1) voor alle $t \in I$:

$$F\{X(t), Y(t), Z(t)\} = 0 \quad (44.4)$$

Indien F , X , Y en Z voldoen aan de voorwaarden vermeld in par. 8, dan geeft differentiatie naar t in (44.4):

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dX}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dY}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dZ}{dt} = 0$$

Als we de waarden van F_x , F_y en F_z in $P(x_0, y_0, z_0)$ voorstellen door $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ en $\frac{\partial F}{\partial z_0}$, dan geldt de getallengelijkheid:

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} \cdot \dot{X}_0 + \frac{\partial F}{\partial y_0} \cdot \dot{Y}_0 + \frac{\partial F}{\partial z_0} \cdot \dot{Z}_0 = 0 \quad (44.5)$$

Eliminatie van \dot{X}_0 , \dot{Y}_0 en \dot{Z}_0 uit (44.3) en (44.5) geeft, dat de coördinaten x , y en z van een willekeurig punt van een willekeurige raaklijn door P aan S voldoen aan:

$$(x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x_0} + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y_0} + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z_0} = 0 \quad (44.6)$$

Indien $\frac{\partial F}{\partial x_0}$, $\frac{\partial F}{\partial y_0}$ en $\frac{\partial F}{\partial z_0}$ alle drie bestaan en niet alle drie nul zijn, stelt (44.6) de vergelijking van een plat vlak voor: het *raakvlak* in P aan S .

Indien het oppervlak S gegeven is in expliciete vorm door

$$z = f(x, y)$$

dan geldt

$$f(x, y) - z = 0$$

Met behulp van (44.6) vindt men aangezien in dit geval geldt:

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

voor de vergelijking van het raakvlak aan S in $P(x_0, y_0, z_0)$:

$$z - z_0 = (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0)$$

Voorbeeld

De vergelijking van het raakvlak in het punt $P(x_0, y_0, z_0)$ aan de ellipsoïde met vergelijking

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

is volgens (44.6):

$$(x - x_0) \frac{x_0}{a^2} + (y - y_0) \frac{y_0}{b^2} + (z - z_0) \frac{z_0}{c^2} = 0$$

of anders geschreven:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} + \frac{z \cdot z_0}{c^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2}$$

Aangezien P op de ellipsoïde ligt, geldt:

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1$$

zodat de vergelijking van het bedoelde raakvlak is:

$$\frac{x \cdot x_0}{a^2} + \frac{y \cdot y_0}{b^2} + \frac{z \cdot z_0}{c^2} = 1$$

Opmerking 1:

Een voorbeeld van een geval dat er in P geen raakvlak aan S bestaat is het volgende. De vergelijking:

$$2x^2 - 2y^2 + z^2 = 0$$

stelt een kegel S voor met top P(0, 0, 0). In P nemen de partiële afgeleiden F_x , F_y en F_z de waarde nul aan, zodat er in P geen raakvlak aan de kegel S is.

Opmerking 2:

Is een kromme K gegeven als snijkromme van twee oppervlakken, dan vindt men de raaklijn in P aan K als snijlijn van de raakvlakken in P aan die oppervlakken. Zijn de oppervlakken S_1 en S_2 bepaald door

$$F(x, y, z) = 0$$

en

$$G(x, y, z) = 0$$

dan wordt de raaklijn in $P(x_0, y_0, z_0)$ bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} (x - x_0) \frac{\partial F}{\partial x_0} + (y - y_0) \frac{\partial F}{\partial y_0} + (z - z_0) \frac{\partial F}{\partial z_0} &= 0 \\ (x - x_0) \frac{\partial G}{\partial x_0} + (y - y_0) \frac{\partial G}{\partial y_0} + (z - z_0) \frac{\partial G}{\partial z_0} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Lijnintegralen

45 Het begrip lijnintegraal

We zullen nu een nieuw soort integraal invoeren die een generalisatie is van de in deel 1 (par. 28 e.v.) ingevoerde enkelvoudige integraal $\int_a^b f(x)dx$. Deze laatste integraal is een integraal van een functie f , gedefinieerd op een interval van de x -as, dus op een lijnsegment. De generalisatie bestaat daarin dat men nu een scalaire functie beschouwt die gedefinieerd is op een kromme in een twee- of meerdimensionale ruimte en een nieuw soort integraal invoert met deze functie als integrand. Zo'n integraal noemt men een *lijnintegraal*.

We zullen ons beperken tot krommen in \mathbb{R}^2 of \mathbb{R}^3 . De theorie wordt gegeven voor \mathbb{R}^3 ; de behandeling voor \mathbb{R}^2 verloopt geheel analoog.

Stel dat K een kromme is in \mathbb{R}^3 met vectorvergelijking:

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \quad (t \in I)$$

Hierbij is I een interval op de reële getallenrechte, de functies X , Y en Z zijn differentieerbaar op I met continue afgeleiden. K is *georiënteerd*, d.w.z. op K is een positieve richting gedefinieerd waarbij A (met parameterwaarde α) het beginpunt is, en B (met parameterwaarde β) het eindpunt (zie fig. 44). A mag eventueel met B samenvallen, de kromme heet dan *gesloten*.

Stel dat f een continue functie is van \mathbb{R}^3 naar \mathbb{R} , gedefinieerd op een „omgeving” van K , dus $f: (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, waarin $f(x, y, z) \in \mathbb{R}$.

We brengen op K een verdeling V aan door middel van een eindig aantal deelpunten $P_0 = A, P_1, \dots, P_n = B$, en kiezen op elk deelsegment $[P_{i-1}, P_i]$ van K een punt Q_i .

Stel dat P_i en Q_i als plaatsvectoren hebben $\begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{bmatrix}$.

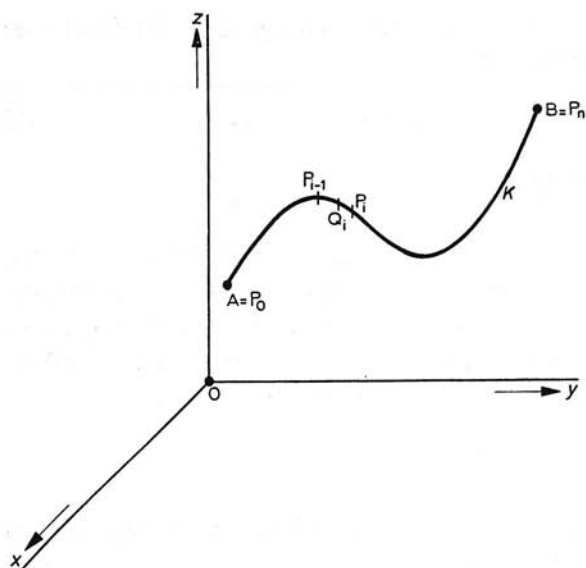


Fig. 44

Bij deze verdeling V en deze keuze van de „tussenspunten” Q_i vormen we de bijbehorende Riemanssom:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (45.1)$$

Men kan nu aantonen (zie par. 46) dat bij de gemaakte veronderstellingen over K en f er een getal I bestaat dat „willekeurig dicht” te benaderen is met Riemanssommen door de verdeling maar „fijn genoeg” te kiezen.

Hiermee wordt het volgende bedoeld.

Bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat een verdeling V zodanig dat

$$|I - \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(x_i - x_{i-1})| < \varepsilon$$

voor elke Riemanssom behorende bij deze verdeling V en alle verdelingen die daarvan een verfijning zijn.

Een verfijning van een verdeling V is een verdeling, die alle deelpunten heeft van V en eventueel nog andere deelpunten bezit.

Notatie:

$$I = \int_K f(x, y, z) dx$$

I heet de lijnintegraal naar x van de functie f langs de kromme K .

Uit het bewijs (zie par. 46) zal blijken dat I in feite een „gewone” integraal naar de parameter t is. We zullen aantonen dat

$$I = \int_K f(x, y, z) dx = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f\{X(t), Y(t), Z(t)\} \dot{X}(t) dt \quad (45.2)$$

Opmerking 1:

De integraal (45.2) is niet afhankelijk van de keuze van de parameter langs K , mits de samenhang tussen de gekozen parameters wordt gegeven door een monotoon toenemende, continu differentieerbare functie. Het bewijs hiervan verloopt op soortgelijke wijze als in par. 28 voor de booglengte is gegeven. De integraal is wel afhankelijk van de kromme K , die A en B verbindt (zie ook par. 50).

Opmerking 2:

Op analoge wijze kan men een lijnintegraal naar y of z invoeren, die men noteert als $\int_K f(x, y, z) dy$, resp. $\int_K f(x, y, z) dz$. Het blijkt dan dat

$$\int_K f(x, y, z) dy = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f\{X(t), Y(t), Z(t)\} \dot{Y}(t) dt$$

en

$$\int_K f(x, y, z) dz = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f\{X(t), Y(t), Z(t)\} \dot{Z}(t) dt$$

Opmerking 3:

Men kan ook een lijnintegraal naar de booglengte σ invoeren, genoteerd als $\int_K f(x, y, z) d\sigma$.

Indien $\sigma = s(t)$, dan geldt:

$$\int_K f(x, y, z) d\sigma = \int_{t=\alpha}^{t=\beta} f\{X(t), Y(t), Z(t)\} \dot{s}(t) dt$$

46 Existentie van de lijnintegraal

Stel dat het punt P_i de parameterwaarde t_i heeft en het punt Q_i de parameterwaarde τ_i . Voor de in (45.1) genoemde Riemanssom geldt dan:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f\{X(\tau_i), Y(\tau_i), Z(\tau_i)\} \{X(t_i) - X(t_{i-1})\}$$

Toepassing van de middelwaardstelling geeft:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f\{X(\tau_i), Y(\tau_i), Z(\tau_i)\} \dot{X}(\rho_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$(\rho_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle) \quad (46.1)$$

Het rechterlid lijkt veel op een Riemannsom behorende bij de integraal:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f\{X(t), Y(t), Z(t)\} \dot{X}(t) dt \quad (46.2)$$

Het verschil ligt daarin dat in de som uit (46.1) twee verschillende tussenpunten voorkomen, t.w. met parameterwaarden τ_i en ρ_i , terwijl een Riemannsom behorende bij de integraal uit (46.2):

$$\sum_{i=1}^n f\{X(\tau_i), Y(\tau_i), Z(\tau_i)\} \dot{X}(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

maar één tussenpunt op elk deelinterval heeft, nl. dat met de parameterwaarde τ_i . We zullen nu bewijzen dat bij toenemende verfijning van de verdeling de som uit (46.1) de integraal uit (46.2) willekeurig dicht gaat benaderen.

Voor het bewijs van deze bewering leiden we eerst de volgende stelling af.

Stelling

Als F en G continue functies zijn van t op $[\alpha, \beta]$, dan bestaat er bij iedere $\varepsilon > 0$ een verdeling V van $[\alpha, \beta]$, zodat voor V en alle verfijningen daarvan geldt:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t)G(t) dt - \sum_{i=1}^n F(\tau_i)G(\rho_i)(t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon \quad (46.3)$$

Hierin zijn t_0, t_1, \dots, t_n parameterwaarden van de deelpunten van V ; ρ_i en τ_i die van tussenpunten, die niet behoeven samen te vallen. Hierbij geldt: $\rho_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$ en $\tau_i \in \langle t_{i-1}, t_i \rangle$.

Bewijs:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t)G(t) dt - \sum_{i=1}^n F(\tau_i)G(\rho_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \\ &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t)G(t) dt - \sum_{i=1}^n F(\tau_i)G(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^n F(\tau_i)G(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i=1}^n F(\tau_i)G(\rho_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \end{aligned} \quad (46.4)$$

Vorm nu een verdeling V_1 , zó fijn dat bij een gegeven $\varepsilon_0 > 0$ geldt:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t)G(t) dt - \sum_{i=1}^n F(\tau_i)G(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon_0$$

Dit is mogelijk omdat $\sum_{i=1}^n F(\tau_i)G(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$ een Riemannsom is behorende bij $\int_{\alpha}^{\beta} F(t)G(t) dt$. Deze integraal bestaat omdat FG , als het produkt van twee continue functies, continu is. Vorm verder een verdeling V_2 zó fijn, dat:

$$|G(\tau_i) - G(\rho_i)| < \varepsilon_0 \quad \forall i$$

Dit kan omdat G continu is op het gesloten interval $[\alpha, \beta]$, en dus gelijkmatig continu (zie deel 1, par. 11).

Als V een verfijning is van zowel V_1 als V_2 , dan geldt voor V op grond van (46.4):

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t)G(t) dt - \sum_{i=1}^n F(\tau_i)G(\rho_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \\ & < \varepsilon_0 + \left| \sum_{i=1}^n F(\tau_i)\{G(\tau_i) - G(\rho_i)\}(t_i - t_{i-1}) \right| \\ & < \varepsilon_0 + \varepsilon_0 \left| \sum_{i=1}^n F(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \end{aligned}$$

Nu is verder

$$\left| \sum_{i=1}^n F(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |F(\tau_i)| (t_i - t_{i-1}) \leq \int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt$$

Als we stellen $\int_{\alpha}^{\beta} |F(t)| dt = A$ (constant > 0), dan geldt:

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} F(t)G(t) dt - \sum_{i=1}^n F(\tau_i)G(\rho_i)(t_i - t_{i-1}) \right| < \varepsilon_0(1 + A)$$

Bij elke gegeven $\varepsilon > 0$ is altijd een $\varepsilon_0 > 0$ te bepalen, zó dat $\varepsilon_0(1 + A) < \varepsilon$, waarmee (46.3) bewezen is.

Passen we deze stelling toe met $F(t) = f\{X(t), Y(t), Z(t)\}$ en $G(t) = \dot{X}(t)$, dan volgt hieruit de juistheid van de bewering. Tevens volgt hieruit dat

$$\int_K f(x, y, z) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\{X(t), Y(t), Z(t)\} \dot{X}(t) dt$$

en daarmee de existentie van de lijnintegraal $\int_K f(x, y, z) dz$.

Door voor $G(t)$ te kiezen: $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ of $\dot{\sigma}(t)$, bewijst men de existentie van de andere lijnintegralen.

47 Eigenschappen van de lijnintegraal

Als K , f en g voldoen aan de voorwaarden van de vorige paragrafen, dan kan men op eenvoudige wijze de volgende eigenschappen van lijnintegralen afleiden. De bewijzen laten we aan de lezer over.

Eigenschap 1

$$\int_K c f(x, y, z) dx = c \int_K f(x, y, z) dx \quad (c \text{ is een constante})$$

Eigenschap 2

$$\int_K f(x, y, z) dx + \int_K g(x, y, z) dx = \int_K \{f(x, y, z) + g(x, y, z)\} dx$$

Eigenschap 3

$$\int_K f(x, y, z) dx = - \int_{K^-} f(x, y, z) dx$$

Hierin betekent het minteken in K^- in het integraalteken, dat K in een richting tegengesteld aan de positieve richting wordt doorlopen.

Eigenschap 4

Beschouwen we twee krommen K_1 en K_2 zó dat het eindpunt van K_1 samenvalt met het beginpunt van K_2 . Als we $K_1 + K_2$ als de totale weg definiëren, dan geldt, indien $K_1 + K_2$ ook aan de gestelde voorwaarde voldoet:

$$\int_{K_1+K_2} f(x, y, z) dx = \int_{K_1} f(x, y, z) dx + \int_{K_2} f(x, y, z) dx$$

Indien K_1 en K_2 wel aan de gestelde eisen voldoen, maar $K_1 + K_2$ niet (b.v. $K_1 + K_2$ vertoont een „knik” in het aansluitingspunt van K_1 en K_2) dan definiëren we:

$$\int_{K_1+K_2} f(x, y, z) dx = \int_{K_1} f(x, y, z) dx + \int_{K_2} f(x, y, z) dx$$

Opmerking 1:

Analoge stellingen gelden voor de andere lijnintegralen.

Opmerking 2:

In analogie met de situatie bij de „gewone” integralen kunnen we ook hier oneigenlijke lijnintegralen invoeren. We gaan hierop echter niet nader in.

48 Voorbeelden van lijnintegralen

Voorbeeld 1

De integratieweg K is het deel van de kromme met vectorvergelijking:

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}t^3 \\ t^2 \\ t \end{bmatrix}$$

dat doorlopen wordt vanaf de oorsprong O tot het punt A met parameterwaarde 1,

dus met plaatsvector $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bereken:

$$\int_K (y + z) dx \text{ en } \int_K (y + z) d\sigma$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} a \quad \int_K (y + z) dx &= \int_{t=0}^{t=1} (t^2 + t) 2t^2 dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^5 + \frac{1}{2}t^4 \right]_0^1 = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b \quad \int_K (y + z) d\sigma &= \int_{t=0}^{t=1} (t^2 + t) \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + t)(1 + 2t^2) dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^5 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \right]_0^1 = \frac{2}{15} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

We verbinden de punten O en A uit voorbeeld 1 door een rechte, die tot vectorvergelijking heeft:

$$r(t) = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}t \\ t \\ t \end{bmatrix}$$

en integreren langs deze weg, die we L zullen noemen, dezelfde integrand als in voorbeeld 1. Men krijgt dan:

$$a \quad \int_L (y + z) dx = \int_{t=0}^{t=1} (t + t) \frac{2}{3} dt = \frac{2}{3} t^2 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned} b \quad \int_L (y + z) d\sigma &= \int_{t=0}^{t=1} (t + t) \sqrt{\frac{4}{9} + 1 + 1} dt \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{22} \int_0^1 2t dt = \frac{1}{3} \sqrt{22} \end{aligned}$$

Voorbeeld 3

De integratieweg K is het deel van de parabool bepaald door $y = 2x^2$, $z = 0$, doorlopen van O tot P(1, 2, 0) (zie fig. 45).

Bereken:

$$\int_K (2xy + y^2 + x^2yz) dx \text{ en } \int_K (2x^2 + xy) dy$$

Oplossing:

We gebruiken x als parameter en vinden dan:

$$\begin{aligned} a \quad \int_K (2xy + y^2 + x^2yz) dx &= \int_0^1 (4x^3 + 4x^4) dx \\ &= \left[x^4 + \frac{4}{5}x^5 \right]_0^1 = \frac{9}{5} \end{aligned}$$

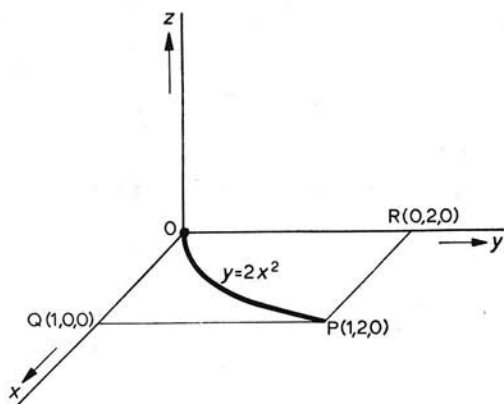


Fig. 45

$$\begin{aligned}
 b \quad \int_K (2x^2 + xy) dy &= \int_0^1 (2x^2 + 2x^3) 4x dx \\
 &= [2x^4 + \frac{8}{5}x^5]_0^1 = \frac{18}{5}
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 4

Bepaal $\int_K xy d\sigma$, waarin

- a K de integratieweg uit voorbeeld 3 is;
- b K de gebroken lijn OQP is (zie fig. 45);
- c K de gebroken lijn ORP is (zie fig. 45).

Oplossing:

a We nemen als parameter x , dan geldt, als $\sigma = s(x)$:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + 16x^2}$$

dus:

$$\begin{aligned}
 \int_K xy d\sigma &= \int_0^1 x \cdot 2x^2 \sqrt{1 + 16x^2} dx \\
 &= \frac{1}{24} x^2 (1 + 16x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 - \frac{1}{960} (1 + 16x^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 \\
 &= \frac{391\sqrt{17} + 1}{960}
 \end{aligned}$$

b Langs OQ geldt $y = 0$, dus $\int_{OQ} xy d\sigma = 0$

Langs QP kiezen we y als parameter. Dan geldt: $\sigma = y$, $x = 1$, zodat:

$$\int_{QP} xy d\sigma = \int_0^2 y dy = 2$$

Nu geldt dus:

$$\int_K xy d\sigma = 2$$

c Langs OR geldt $x = 0$, dus $\int_{OR} xy d\sigma = 0$

Langs RP kiezen we y als parameter, en dan geldt: $\sigma = x$, $y = 2$, zodat:

$$\int_{RP} xy d\sigma = \int_0^1 2x dx = 1$$

Dus nu geldt:

$$\int_K xy d\sigma = 1$$

Opmerking 1:

Uit de voorbeelden 1, 2 en 4 zien we dat de lijnintegraal niet alleen afhangt van de integrand en begin- en eindpunt, maar ook van de integratieweg (en de richting daarop), die deze punten verbindt.

Opmerking 2:

Een som van lijnintegralen naar x , y en z wordt meestal met één integraalteken geschreven; b.v.:

$$\int_K f_1(x, y, z) dx + \int_K f_2(x, y, z) dy + \int_K f_3(x, y, z) dz$$

wordt geschreven als:

$$\int_K f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz$$

49 Fysische betekenis van de lijnintegraal. Massadichtheid

We kunnen aan de in de vorige paragrafen gedefinieerde lijnintegralen

$$\int_K f(x, y, z) d\sigma$$

en

$$\int_K f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz$$

een fysische betekenis toekennen.

In deze paragraaf zullen we ons met de eerste integraal bezighouden; in par. 50 met de tweede.

Stel dat

$$\underline{r}(t) = \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \\ Z(t) \end{bmatrix} \quad (t \in I)$$

een vectorvergelijking is van een ruimtekromme K en wel zó dat \underline{r} een continue eerste afgeleide heeft. Laat A het beginpunt zijn met parameterwaarde t_0 . Op K denken we ons een massaverdeling aangebracht. De massa op een deel AP van K hangt af van de lengte van de boog AP . We stellen die massa voor door $m(\sigma_1)$, waarin σ_1 de booglengte in P is. Als Q een punt is met booglengte σ_2 , dan definiëren we de *gemiddelde massadichtheid* op de boog PQ door

$$\frac{m(\sigma_2) - m(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1}$$

Indien m een differentieerbare functie van σ is, dan bestaat

$$\lim_{\sigma_2 \rightarrow \sigma_1} \frac{m(\sigma_2) - m(\sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} = m'(\sigma_1)$$

Dit heet per definitie de *massadichtheid* in P , voorgesteld door $\rho(\sigma_1)$, zodat $\rho(\sigma_1) = m'(\sigma_1)$.

Als $\sigma = s(t)$, stellen we $\rho(\sigma) = \rho\{s(t)\} = \rho^*(t)$. Indien ρ een continue functie is van σ (en dus ρ^* een continue functie van t), spreekt men van een *continue massaverdeling*.

We zullen in het volgende aannemen dat we hiermee te doen hebben. Als $\rho(\sigma)$ constant is, heet de massaverdeling *homogeen*; in dit geval is de massadichtheid de massa per lengte-eenheid van de kromme.

Uit het bovenstaande volgt dat de massafunctie m een primitieve is van de massadichtheidsfunctie ρ .

De massa op AP wordt bepaald door:

$$m(\sigma_1) = \int_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_1} m'(\sigma) d\sigma = \int_{\sigma=0}^{\sigma=\sigma_1} \rho(\sigma) d\sigma$$

Indien de massadichtheidsfunctie gegeven is als functie van t , geldt als P de parameterwaarde t_1 heeft:

$$m(\sigma_1) = \int_{t=t_0}^{t=t_1} \rho\{s(t)\} \frac{ds}{dt} dt$$

Dit is juist de lijnintegraal

$$\int_{K_1} \rho^*(t) d\sigma$$

als K_1 dat deel van K is tussen A en P .

Vaak is de beschouwde kromme ingebed in een met massa belegd deel van de driedimensionale ruimte. In dat geval wordt de massadichtheid in een punt P met plaats-

vector $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ gedefinieerd door:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Hierbij stelt ΔV een volume-element voor waarin P ligt en Δm de massa daarvan. Indien deze limiet bestaat, *onafhankelijk van de wijze waarop ΔV tot nul nadert*, stellen we:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = D(x, y, z)$$

D noemen we de massadichtheidsfunctie.

Indien D een continue functie is van x, y, z , dan kunnen we bewijzen dat voor de massadichtheidsfunctie ρ op K geldt:

$$\rho(\sigma) = \rho\{s(t)\} = D\{X(t), Y(t), Z(t)\}$$

De totale massa van het deel K_1 van K tussen A en P is dan:

$$\int_{t=t_0}^{t=t_1} D\{X(t), Y(t), Z(t)\} \frac{ds}{dt} dt$$

Dat is juist de hierboven gedefinieerde lijnintegraal:

$$\int_{K_1} D(x, y, z) d\sigma$$

Voorbeeld 1

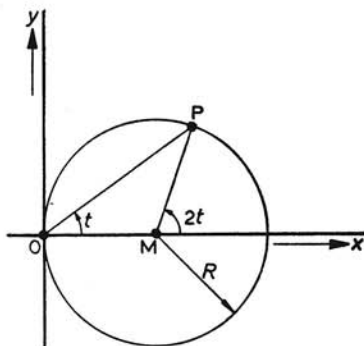
Een cirkel met straal R en middelpunt op de x -as raakt aan de y -as. Bereken de massa van de cirkelomtrek, als de massadichtheid in elk punt evenredig is met de afstand tot de oorsprong.

Oplossing:

Als parameter voeren we in de hoek POM (zie fig. 46). We stellen die voor door t . Indien we de booglengte σ rekenen vanaf O in positieve zin (dus „links-om”), geldt voor de booglengte:

$$\sigma = s(t) = \pi R + 2tR \quad (t \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi])$$

Fig. 46



Voor de massafunctie geldt:

$$\rho^*(t) = a \cdot OP = a \cdot 2R \cos t \quad (a \text{ constant})$$

De massa M van de cirkelomtrek is:

$$M = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} a \cdot 2R \cos t \cdot 2R dt = 8aR^2$$

Voorbeeld 2

De kromme K is het deel van de ruimtekromme met vectorvergelijking:

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

dat ligt tussen O en het punt A met parameterwaarde $t = 1$. Bereken de massa van K als de massadichtheid in elk punt evenredig is met het kwadraat van de afstand tot de oorsprong, dus als:

$$D(x, y, z) = a(x^2 + y^2 + z^2) \quad (a \text{ constant})$$

Oplossing:

Indien we de booglengte σ rekenen vanaf O en wel positief in de richting waarin t toeneemt, dan geldt:

$$\dot{s}(t) = \sqrt{4t^4 + 4t^2 + 1} = 1 + 2t^2 \quad (t \in [0, 1])$$

Voor de massadichtheidsfunctie geldt:

$$\rho^*(t) = a(x^2 + y^2 + z^2) = a\left(\frac{4}{9}t^6 + t^4 + t^2\right)$$

De massa van K is:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 a(x^2 + y^2 + z^2) d\sigma \\ &= \int_0^1 a\left(\frac{4}{9}t^6 + t^4 + t^2\right)(1 + 2t^2) dt \\ &= a\left[8t^9 + \frac{26}{9}t^7 + \frac{2}{3}t^5 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 \\ &= a\left(8 + \frac{26}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

50 Arbeidsintegraal

Stel dat

$$\underline{r}(\sigma) = \begin{pmatrix} X(\sigma) \\ Y(\sigma) \\ Z(\sigma) \end{pmatrix} \quad \sigma \in [0, l]$$

een vectorvergelijking is van een ruimtekromme K waarbij de booglengte σ als parameter is gebruikt. Hierbij is weer verondersteld dat \underline{r} een continue afgeleide bezit. Voor de tangentiële eenheidsvector geldt (zie par. 37):

$$\underline{T}(\sigma) = \underline{\dot{r}}(\sigma) = \begin{bmatrix} \dot{X}(\sigma) \\ \dot{Y}(\sigma) \\ \dot{Z}(\sigma) \end{bmatrix}$$

Verder denken we ons in een omgeving van K een vectorveld gedefinieerd door:

$$\underline{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (50.1)$$

waarbij f_1, f_2 en f_3 continue functies zijn.

Op K geldt dan:

$$\begin{aligned} \underline{F}(x, y, z) &= \underline{F}\{X(\sigma), Y(\sigma), Z(\sigma)\} \\ &= \begin{bmatrix} f_1^*(\sigma) \\ f_2^*(\sigma) \\ f_3^*(\sigma) \end{bmatrix} = \underline{F}^*(\sigma) \end{aligned}$$

We vinden voor het inwendig product:

$$\underline{F}^*(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma) = f_1^*(\sigma)\dot{X}(\sigma) + f_2^*(\sigma)\dot{Y}(\sigma) + f_3^*(\sigma)\dot{Z}(\sigma)$$

Integratie van 0 tot l geeft:

$$\begin{aligned} \int_0^l \underline{F}^*(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma) d\sigma &= \int_0^l \{f_1^*(\sigma)\dot{X}(\sigma) + f_2^*(\sigma)\dot{Y}(\sigma) + f_3^*(\sigma)\dot{Z}(\sigma)\} d\sigma \\ &= \int_0^l [f_1\{X(\sigma), Y(\sigma), Z(\sigma)\}\dot{X}(\sigma) + f_2\{X(\sigma), Y(\sigma), Z(\sigma)\}\dot{Y}(\sigma) \\ &\quad + f_3\{X(\sigma), Y(\sigma), Z(\sigma)\}\dot{Z}(\sigma)] d\sigma \end{aligned}$$

Dit is echter juist:

$$\int_K f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz \quad (50.2)$$

zodat:

$$\int_0^l \underline{F}^*(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma) d\sigma = \int_K f_1(x, y, z)dx + f_2(x, y, z)dy + f_3(x, y, z)dz \quad (50.3)$$

Een belangrijke toepassing hiervan vindt men in de mechanica bij de definitie van het begrip arbeid als lijnintegraal.

We beschouwen een massadeeltje dat langs de kromme K beweegt onder invloed van een kracht, bepaald door de functie \underline{F} uit (50.1).

We definiëren de door deze kracht verrichte *arbeid* als

$$\int_K \underline{F}^*(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma) d\sigma$$

Deze is volgens (50.3) gelijk aan de lijnintegraal uit (50.2). Deze lijnintegraal heet de *arbeidsintegraal* langs K .

Het zinvolle van deze definitie van arbeid ziet men in als men bedenkt dat het inwendige produkt $\underline{F}^*(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma)$ juist de grootte is van de projectie van $\underline{F}^*(\sigma)$ op de raaklijn aan K in een punt met booglenge σ , daar $\underline{T}(\sigma)$ juist de tangentiële eenheidsvector is. De definitie is een natuurlijke generalisatie van het intuïtieve begrip van arbeid d.w.z. weglengte vermenigvuldigd met de projectie van de kracht op de weg.

Opmerking:

In het voorgaande van deze paragraaf zijn we uitgegaan van de booglenge als parameter, waardoor de fysische betekenis van $\underline{F}^*(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma)$ duidelijk naar voren kwam. De lijnintegraal (50.2) is echter onafhankelijk van de gekozen parameter (onder de voorwaarden genoemd in de opmerking bij par. 45). Volgens (50.3) is de integraal $\int_K \underline{F}^*(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma) d\sigma$, dus de definitie van arbeid, onafhankelijk van de keuze van de parameter.

Voorbeeld 1

K is het deel van de kromme met vectorvergelijking

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}t^3 \\ t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

gelegen tussen O en het punt A met parameter $t = 1$.

N.B. t is nu niet de booglenge!

\underline{F} is gedefinieerd door:

$$\underline{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

en

$$\underline{F}^{**}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Bereken:

$$\int_K \underline{F}^{**}(t) \cdot \underline{\dot{r}}(t) dt$$

Oplossing:

$$\begin{aligned} \int_K \underline{F}^{**}(t) \cdot \underline{\dot{r}}(t) dt &= \int_K x dx + y dy + z dz \\ &= \int_{t=0}^1 \{ \frac{2}{3}t^3 \cdot 2t^2 + t^2 \cdot 2t + t \cdot 1 \} dt \\ &= \int_0^1 (\frac{4}{3}t^5 + 2t^3 + t) dt \\ &= [\frac{2}{9}t^6 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^2]_0^1 = \frac{11}{9} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Als de kinetische energie van een stoffelijk punt met massa m en snelheid $\underline{v}(t)$ (ten tijde t) gedefinieerd wordt door $\frac{1}{2}m \|\underline{v}(t)\|^2$, dan geldt de volgende stelling.

Stelling

De toename van de kinetische energie van een stoffelijk punt is gelijk aan de arbeid, verricht door de resultante van de krachten die op dit stoffelijk punt werken.

Bewijs:

Volgens de tweede wet van Newton geldt:

$$\underline{F}^{**}(t) = m\underline{\ddot{r}}(t)$$

zodat:

$$\begin{aligned}\int_K \underline{F}^{**}(t) \cdot \underline{\dot{r}}(t) dt &= \int_K m\underline{\ddot{r}}(t) \cdot \underline{\dot{r}}(t) dt \\ &= \frac{1}{2}m \{ \underline{\dot{r}}(t) \cdot \underline{\dot{r}}(t) \} \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} \\ &= \frac{1}{2}m \|\underline{\dot{r}}(t)\|^2 \Big|_{t=t_0}^{t=t_1} \\ &= \frac{1}{2}m \|\underline{v}(t_1)\|^2 - \frac{1}{2}m \|\underline{v}(t_0)\|^2\end{aligned}$$

Aangezien (als σ de booglengte is) geldt:

$$\int_K \underline{F}^*(\sigma) \cdot \underline{T}(\sigma) d\sigma = \int_K \underline{F}^{**}(t) \cdot \underline{\dot{r}}(t) dt$$

is het gestelde hiermee bewezen.

Meervoudige integralen

51 Inhoudsbegrip; dubbelintegraal

In deel 1, par. 28 is het oppervlaktebegrip voor vlakke figuren langs axiomatische weg gedefinieerd als een bepaalde integraal. In het volgende willen we dit uitbreiden tot het inhouds- en oppervlaktebegrip van lichamen in de driedimensionale ruimte.

Uitgangspunt daarbij is een functie f , gedefinieerd op een gesloten rechthoek R in het platte vlak, met waarden in het lichaam van de reële getallen.

R is bepaald als volgt: $R = \{(x, y) | a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$. We veronderstellen f begrensd en niet-negatief, d.w.z. er bestaat een $M \in \mathbb{R}$ zodanig dat $0 \leq f(x, y) \leq M \forall (x, y) \in R$.

Ons doel is de inhoud te definiëren van dat deel van de ruimte dat begrensd wordt door het oppervlak met vergelijking: $z = f(x, y)$ en de platte vlakken met vergelijkingen: resp. $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$ en $z = 0$ (zie fig. 47).

We brengen daartoe op de rechthoek R een verdeling V aan door lijnen evenwijdig aan de zijden van R , als volgt (zie fig. 48):

Het interval $[a, b]$ verdelen we in n delen door middel van niet noodzakelijk equidistante deelpunten $x_0 (= a)$, $x_1, x_2, \dots, x_n (= b)$; evenzo verdelen we het interval $[c, d]$ in m delen door middel van de deelpunten $y_0 (= c)$, $y_1, y_2, \dots, y_m (= d)$. Door deze deelpunten trekken we lijnen evenwijdig aan de y -as, resp. x -as, waardoor de rechthoek R verdeeld wordt in nm rechthoeken R_{ij} met

$$R_{ij} = \{(x, y) | x_{i-1} \leq x \leq x_i; y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

en

$$i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$$

De oppervlakte van R_{ij} geven we aan met ΔR_{ij} . Op elke rechthoek R_{ij} is f begrensd en heeft een supremum M_{ij} en een infimum m_{ij} .

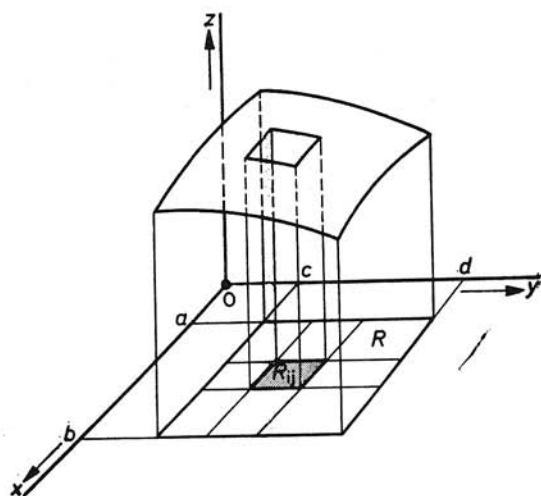


Fig. 47

Bij deze verdeling V definiëren we de *bovensom* \bar{s}_V en de *ondersom* s_V door:

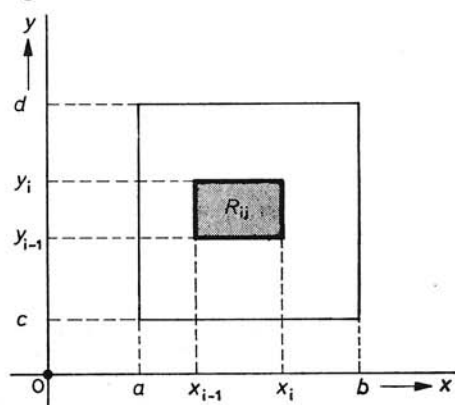
$$\bar{s}_V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta R_{ij}$$

en

$$s_V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta R_{ij}$$

De meetkundige betekenis hiervan is duidelijk als men bedenkt dat $M_{ij} \Delta R_{ij}$ per definitie de inhoud voorstelt van een prisma met grondvlak R_{ij} dat het deel van de ruimte omvat, begrensd door het x, y -vlak, verticale vlakken door de zijden van R_{ij} en het deel van het oppervlak met vergelijking $z = f(x, y)$, dat boven R_{ij} ligt. Het

Fig. 48



produkt $m_{ij}\Delta R_{ij}$ stelt de inhoud voor van een prisma dat geheel binnen dat ruimte-deel ligt.

Als M een bovengrens is voor de functiewaarden $f(x, y)$ die f op R aanneemt en m een ondergrens, dan geldt: $M_{ij} \leq M$ en $m_{ij} \geq m$, zodat:

$$\begin{aligned}\bar{s}_V &= \sum_{i,j} M_{ij}\Delta R_{ij} \leq \sum_{i,j} M\Delta R_{ij} \\ &= M \sum_{i,j} \Delta R_{ij} = M(b-a)(c-d)\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}s_V &= \sum_{i,j} m_{ij}\Delta R_{ij} \geq \sum_{i,j} m\Delta R_{ij} \\ &= m \sum_{i,j} \Delta R_{ij} = m(b-a)(c-d)\end{aligned}$$

We hebben dus:

$$m(b-a)(c-d) \leq s_V \leq \bar{s}_V \leq M(b-a)(c-d) \quad (51.1)$$

De ondersommen voor alle mogelijke verdelingen zijn naar boven begrensd en hebben derhalve een kleinste bovengrens (supremum) die men de *onderintegraal* \bar{I} van f over de rechthoek R noemt. In formulevorm:

$$\bar{I} = \sup \{s_V\}$$

Uit (51.1) ziet men ook dat de bovensommen voor alle mogelijke verdelingen naar beneden begrensd zijn. Ze hebben een grootste ondergrens (infimum), die men de *bovenintegraal* \bar{I} van f over de rechthoek R noemt, dus:

$$\bar{I} = \inf \{\bar{s}_V\}$$

Indien f aan zekere voorwaarden voldoet, geldt $I = \bar{I}$. Men noemt de functie f dan *Riemann-integreerbaar* over R , of kortweg integreerbaar. In dit geval heet de gemeenschappelijke waarde van I en \bar{I} de *Riemann-integraal (dubbelintegraal)* van f over R . Men schrijft die als:

$$\iint_R f(x, y) dx dy \quad \text{of} \quad \iint_R f(x, y) dR \quad (51.2)$$

Hierin heet $f(x, y)$ de *integrand*, $dx dy$ of dR het *oppervlakte-element* (of integratie-element) en R het *integratiegebied*. Indien f begrensd is en niet negatief is, en de integraal (51.2) bestaat, is $\iint_R f(x, y) dx dy$ per definitie de *inhoud* van het ruimte-deel, bepaald door:

$$R = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b; c \leq y \leq d; 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Dit is het deel „onder” het oppervlak met vergelijking $z = f(x, y)$ en „boven” het x, y -vlak.

In par. 52 zullen we zien dat continuïteit van f op R een voldoende voorwaarde is voor de integreerbaarheid van f over R . In par. 54 zullen we een effectieve methode aangeven om $\iint_R f(x, y) dx dy$ te berekenen.

52 Existentie van de dubbelintegraal van continue functies

Indien f continu is op een gesloten rechthoek R , zal blijken dat $I = \bar{I}$. Om dit te bewijzen hebben we een aantal begrippen en eigenschappen nodig die grote overeenkomst vertonen met hetgeen in deel 1, par. 29 is behandeld.

Definitie

Als V_1 een verdeling is van de rechthoek R , dan verstaan we onder een verfijning V_2 van V_1 een verdeling die alle deelpunten (x_i, y_j) van V_1 bevat, en eventueel nog andere deelpunten heeft.

Op analoge wijze als bij het ééndimensionale geval kan men dan de volgende stelling bewijzen.

Stelling 1

Als V_2 een verfijning is van V_1 en s_{V_1} en s_{V_2} de bij V_1 resp. V_2 behorende ondersommen zijn, dan geldt: $s_{V_2} \geq s_{V_1}$; evenzo geldt voor de bijbehorende bovensommen: $\bar{s}_{V_2} \leq \bar{s}_{V_1}$. We kunnen deze stelling ook zó formuleren: Bij toenemende verfijning nemen de ondersommen niet af en de bovensommen niet toe.

Definitie

Een verdeling V_3 heet de superpositie van twee verdelingen V_1 en V_2 , als V_3 bestaat uit alle deelpunten van V_1 en V_2 samen.

Uit stelling 1 bewijst men op eenvoudige wijze:

Stelling 2

Wanneer V_1 en V_2 willekeurige verdelingen zijn, geldt:

$$s_{V_1} \leq \bar{s}_{V_2}$$

Kort gezegd:

Een ondersom is nooit groter dan een bovensom.

Voor het bewijs betrekken we de superpositie V_3 van V_1 en V_2 in de beschouwing en passen stelling 1 toe, alsmede de eigenschap dat $s_{V_3} \leq \bar{s}_{V_3}$.

Stelling 3

Voor de onderintegraal I en de bovenintegraal \bar{I} geldt de ongelijkheid:

$$I \leq \bar{I}$$

Bewijs:

Stel dat zou gelden: $I > \bar{I}$, dan stellen we $\varepsilon = I - \bar{I}$, dus $\varepsilon > 0$. Aangezien I de kleinste bovengrens is van de ondersommen voor alle mogelijke verdelingen, is er een verdeling V_1 , zodanig dat voor de bijbehorende ondersom s_{V_1} geldt:

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon < s_{V_1} \leq \bar{I}$$

Evenzo is er een verdeling V_2 , zodanig dat voor de bijbehorende bovensom \bar{s}_{V_2} geldt:

$$\bar{I} \leq \bar{s}_{V_2} < \bar{I} + \frac{1}{2}\varepsilon$$

Op grond van de definitie van ε geldt echter:

$$\bar{I} + \frac{1}{2}\varepsilon = I - \frac{1}{2}\varepsilon$$

en dus zou gelden:

$$\bar{s}_{V_2} < s_{V_1}$$

hetgeen in strijd is met stelling 2.

Fig. 49a geeft de (niet-optredende) situatie aan voor het geval dat $\bar{I} < I$ zou zijn.

Uit de stellingen 2 en 3 volgt, mede op grond van de definitie van I en \bar{I} , dat we de ongelijkheid (51.1) kunnen aanvullen tot die in de volgende stelling.

Stelling 4 (zie fig. 49b)

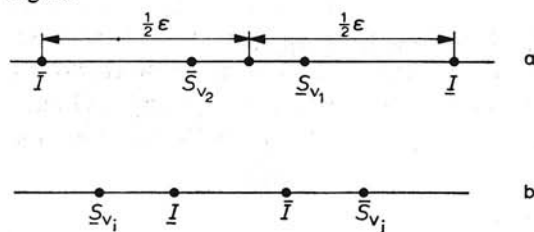
$$m(b-a)(d-c) \leq s_{V_i} \leq I \leq \bar{I} \leq \bar{s}_{V_j} \leq M(b-a)(d-c) \quad (\forall i, j)$$

Wanneer we kunnen aantonen dat bij willekeurige $\varepsilon > 0$ verdelingen V_1 en V_2 bestaan, zodanig dat voor de bijbehorende ondersom s_{V_1} en bovensom \bar{s}_{V_2} geldt: $\bar{s}_{V_2} - s_{V_1} < \varepsilon$, dan geldt ook: $\bar{I} - I < \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$) en dus $\bar{I} = I$.

We zullen aantonen dat dit mogelijk is in geval f continu is op een begrensde gesloten rechthoek R (en zelfs met eenzelfde verdeling).

Hierbij grijpen we terug op de definitie van *uniforme* (gelijkmatige) *continuïteit*, die gegeven is in deel 1, par. 132. We zullen deze definitie herhalen.

Fig. 49



Definitie

Een functie f , gedefinieerd op een (al of niet gesloten) deelgebied G van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ heet uniform continu op G , als bij iedere $\varepsilon > 0$ een getal δ bestaat, dat alleen afhankelijk is van ε , zodanig dat:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

indien $|x_1 - x_2| < \delta$, $|y_1 - y_2| < \delta$ en $(x_1, y_1) \in G$, $(x_2, y_2) \in G$.

De eis van uniforme continuïteit is een zwaardere eis dan die van continuïteit in ieder punt van G .

Voor uniforme continuïteit geldt echter de stelling die ook reeds in deel 1, par. 132 is genoemd en die we als stelling 5 hier zullen herhalen.

Stelling 5

Als een functie f continu is op een begrensde afgesloten gebied $D \subset \mathbb{R}_1 \times \mathbb{R}_2$, dan is f uniform continu op D .

We zullen deze stelling hier niet bewijzen.

Nu kunnen we de reeds in het begin van deze paragraaf genoemde stelling bewijzen:

Stelling 6

Als f continu is op de begrensde gesloten rechthoek:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$$

dan bestaat:

$$\iint_R f(x, y) dx dy \quad (52.1)$$

Bewijs:

Volgens stelling 5 bestaat er bij gegeven $\varepsilon > 0$ een getal δ , slechts afhankelijk van ε , zodanig dat:

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)}$$

indien $|x_1 - x_2| < \delta$, $|y_1 - y_2| < \delta$, $(x_1, y_1) \in R$, $(x_2, y_2) \in R$.

We brengen nu een verdeling V aan op R , zodanig dat de lengte en de breedte van iedere deelrechthoek R_{ij} kleiner is dan δ . Aangezien f continu is op de (gesloten) deelrechthoek R_{ij} neemt f daar zijn supremum aan als maximum M_{ij} en zijn infimum als minimum m_{ij} , m.a.w. er bestaan punten (x_{ij}, y_{ij}) en (x'_{ij}, y'_{ij}) , beide behorend tot R_{ij} , zodanig dat:

$$f(x_{ij}, y_{ij}) = M_{ij} \text{ en } f(x'_{ij}, y'_{ij}) = m_{ij}$$

Op grond van de uniforme continuïteit geldt:

$$M_{ij} - m_{ij} = f(x_{ij}, y_{ij}) - f(x'_{ij}, y'_{ij}) < \frac{\varepsilon}{(b-a)(c-d)}$$

Dan geldt echter voor de bijbehorende bovensom \bar{s}_V en ondersom \underline{s}_V :

$$\begin{aligned}\bar{s}_V - \underline{s}_V &= \sum_{i,j} M_{ij} \Delta R_{ij} - \sum_{i,j} m_{ij} \Delta R_{ij} = \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta R_{ij} \\ &< \sum_{i,j} \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \Delta R_{ij} = \frac{\varepsilon}{(b-a)(d-c)} \sum_{i,j} \Delta R_{ij} = \varepsilon\end{aligned}$$

Op grond van de ongelijkheid in stelling 4 geldt:

$$\bar{I} - I < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

dus:

$$\bar{I} = I$$

en die gemeenschappelijke waarde van \bar{I} en I is per definitie de integraal (52.1).

Opmerking 1:

Het is uit het bovenstaande duidelijk dat de theorie ook opgaat indien men het integratiegebied vervangt door de vereniging S van eindig veel gesloten, begrensde rechthoeken met zijden evenwijdig aan de coördinaat-assen.

Opmerking 2:

In de voorafgaande beschouwingen hebben we verondersteld dat $f(x, y) \geq 0$ op R . Het is duidelijk dat de theorie onveranderd opgaat indien f begrensd is op R en $f(x, y)$ eventueel van teken wisselt. De integraal stelt dan echter geen inhoud voor.

Opmerking 3:

Het existentiebewijs dat we gaven voor de dubbelintegraal van continue functies heeft een ander verloop dan het corresponderende bewijs bij de enkelvoudige integraal (zie deel 1, par. 30). Daar deden we een beroep op de hoofdstelling van de integraalrekening. We behoeften het begrip uniforme continuïteit niet te gebruiken. Bovendien had die bewijsmethode het voordeel dat we via een primitieve van f de integraal $\int_a^b f(x) dx$ konden berekenen. De voor de dubbelintegraal gebruikte methode kan ook toegepast worden (bijna letterlijk!) bij de enkelvoudige integraal.

Wat de expliciete berekening van dubbelintegralen betreft merken we hier alleen op dat dit kan geschieden met behulp van z.g. herhaalde integralen, die in par. 54 zullen worden behandeld.

Opmerking 4:

In het onderhavige geval, nl. dat waarbij het integratiegebied een rechthoek is met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen, spreekt men wel van een dubbelintegraal met constante grenzen.

Opmerking 5:

Wanneer de betrokken functie f continu is in het *inwendige* van R en in ieder randpunt een eindige limiet bezit (bij benadering vanuit het inwendige van R), dan kunnen we aan $\iint_R f(x, y) dx dy$ toch een betekenis toekennen. We voeren daartoe de functie f^* in aldus: $f^*(x, y) = f(x, y)$ als (x, y) een inwendig punt is van R , en $f^*(x, y) = \lim_{(\xi, \eta) \rightarrow (x, y)} f(\xi, \eta)$ als (x, y) een randpunt is van R . Voor f^* gaat de bovengenoemde theorie op, en we definiëren:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f^*(x, y) dx dy.$$

53 Eigenschappen van dubbelintegralen

In deze paragraaf stellen R_1 , R_2 en R_3 begrensde gesloten rechthoeken voor met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen. f , g en h zijn functies die continu zijn op de betreffende integratiegebieden.

Er gelden dan de volgende eigenschappen.

Eigenschap 1

$$\iint_R \{f(x, y) \pm g(x, y)\} dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy \pm \iint_R g(x, y) dx dy$$

Eigenschap 2

$$\iint_R \lambda f(x, y) dx dy = \lambda \iint_R f(x, y) dx dy \quad (\lambda \text{ constant})$$

Men kan deze twee eigenschappen als volgt samenvatten:

$$\iint_R \{\lambda f(x, y) + \mu g(x, y)\} dx dy = \lambda \iint_R f(x, y) dx dy + \mu \iint_R g(x, y) dx dy$$

(λ en μ constant)

De bewijzen ervan volgen direct uit de definitie van integraal als gemeenschappelijke waarde van onder- en bovenintegraal.

Eigenschap 3

Indien op R geldt: $f(x, y) \leq g(x, y)$, dan geldt:

$$\iint_R f(x, y) dx dy \leq \iint_R g(x, y) dx dy \quad (53.1)$$

Bewijs:

Uit de ongelijkheid in stelling 4 van par. 52 volgt:

$$\iint_R h(x, y) dx dy \geq 0, \text{ indien } h(x, y) \geq 0$$

Toegepast op

$$h(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$$

volgt in ons geval:

$$\iint_R \{g(x, y) - f(x, y)\} dx dy \geq 0$$

Op grond van eigenschap 1 volgt hieruit (53.1).

Eigenschap 4

Als R_1 en R_2 disjunct zijn en S hun vereniging is, dan geldt:

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy$$

Het bewijs kan op analoge wijze geleverd worden als bij de enkelvoudige integratie. Als I_1, I_2, I de onderintegralen zijn van f over resp. R_1, R_2, S , dan kan men evenals in deel 1, par. 29 met voor de hand liggende wijzigingen bewijzen: $I_1 + I_2 = I$. Evenzo voor de corresponderende bovenintegralen: $\bar{I}_1 + \bar{I}_2 = \bar{I}$, waaruit het bewijs van eigenschap 4 onmiddellijk volgt.

Eigenschap 5

Als m en M resp. het minimum en het maximum zijn van f op R , dan geldt:

$$m \cdot \text{opp. } R \leq \iint_R f(x, y) dx dy \leq M \cdot \text{opp. } R$$

Het bewijs volgt direct uit stelling 4 van par. 52.

Eigenschap 6

Als m en M resp. het minimum en het maximum zijn van f op R , dan is er een getal μ met $m \leq \mu \leq M$, zodanig dat

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \mu \cdot \text{opp. } R$$

Men noemt μ dan ook wel de *gemiddelde waarde* van f op R .

Bewijs:

Uit eigenschap 5 volgt dat $\frac{1}{\text{opp. } R} \iint_R f(x, y) dx dy$ een getal μ is, gelegen tussen het minimum m en het maximum M van f , waaruit eigenschap 6 volgt.

Daar f continu is op R , neemt f elke waarde aan tussen m en M . Er is dus een punt $(\xi, \eta) \in R$, zodanig dat:

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{\text{opp. } R} \iint_R f(x, y) dx dy$$

Eigenschap 6 kan ook worden uitgedrukt als:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = f(\xi, \eta) \cdot \text{opp. } R \quad (\xi, \eta) \in R$$

In deze vorm staat eigenschap 6 bekend als de *middelwaardstelling van de integraalrekening*.

54 Expliciete berekening van de dubbelintegraal. Herhaalde integraal bij constante grenzen

Voor het berekenen van $\iint_R f(x, y) dx dy$ is het gebruik van de definitie zonder meer alleen geschikt bij numerieke toepassingen. In de meeste gevallen brengt men een dubbelintegraal terug tot een *herhaalde integraal*. Dit geschiedt op de volgende wijze. We gaan uit van een functie f die continu is op de begrensde, gesloten rechthoek R , bepaald door:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$$

Op R brengen we een verdeling V aan op de wijze als in par. 51 is aangegeven (zie fig. 48). Als m_{ij} het minimum voorstelt van f op R_{ij} (f is continu op de begrensde, gesloten rechthoek R_{ij} !), dan is de bij deze verdeling behorende ondersom s_V gedefinieerd door:

$$s_V = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Volgens de definitie van de integraal geldt:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \sup \{s_V\}$$

waarin $\{s_V\}$ de verzameling van de ondersommen bij alle mogelijke verdelingen voorstelt.

We kiezen een $y_0 \in [c, d]$ en houden deze voorlopig constant. De functie $x \mapsto f(x, y_0)$ is dan een continue functie van x op $[a, b]$. De integraal $\int_a^b f(x, y_0) dx$ bestaat dus. Meetkundig stelt dit het gearceerde oppervlak in fig. 50 voor. Wanneer we y_0 het interval $[c, d]$ laten doorlopen, is hiermede een functie φ van y gedefinieerd door:

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (y \in [c, d])$$

We bewijzen eerst de volgende stelling.

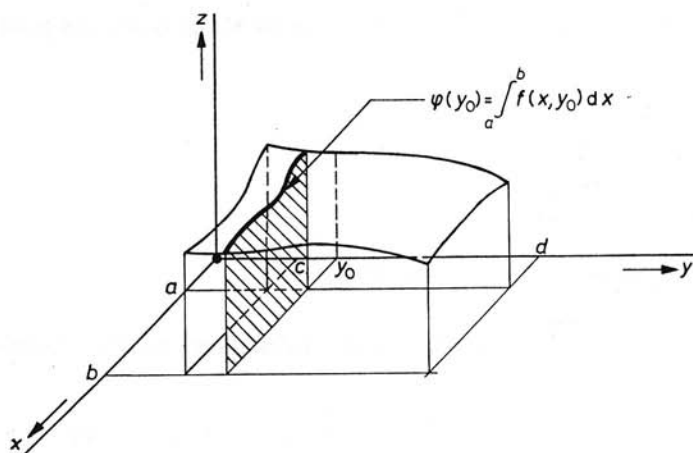


Fig. 50

Stelling

De functie φ met $\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ is een continue functie van y in $[c, d]$.

Bewijs:

We tonen aan dat φ continu is in een inwendig punt van $[c, d]$. Het bewijs voor de randpunten verloopt met voor de hand liggende wijzigingen. Neem $y_0 \in \langle c, d \rangle$. We moeten laten zien dat bij gegeven $\varepsilon > 0$ een δ bestaat, alleen afhankelijk van ε , zodanig dat $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, indien $|y - y_0| < \delta$. Voor $y \in \langle c, d \rangle$ geldt:

$$\begin{aligned} |\varphi(y) - \varphi(y_0)| &= \left| \int_a^b f(x, y) dx - \int_a^b f(x, y_0) dx \right| \\ &= \left| \int_a^b \{f(x, y) - f(x, y_0)\} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \end{aligned}$$

Aangezien f uniform continu is op R , is er bij het getal $\frac{\varepsilon}{b-a}$ een δ te vinden, alleen

afhankelijk van ε , zó dat $|f(x, y) - f(x, y_0)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$, indien $|y - y_0| < \delta$ (en $y \in \langle c, d \rangle$). Aan de voorwaarde $|x - x| < \delta$ is op triviale wijze voldaan. Voor deze y geldt dan:

$$\begin{aligned} |\varphi(y) - \varphi(y_0)| &\leq \int_a^b |f(x, y) - f(x, y_0)| dx \\ &\leq (b-a) \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon \end{aligned}$$

M.a.w. φ is continu in y_0 , waarmee de stelling bewezen is.

Daar φ continu is in $[c, d]$, heeft het zin te spreken over $\int_c^d \varphi(y) dy$.

We nemen een vaste $y_0 \in [y_{i-1}, y_i]$. Dan zal bij deze y_0 de functie $x \mapsto f(x, y_0)$ een

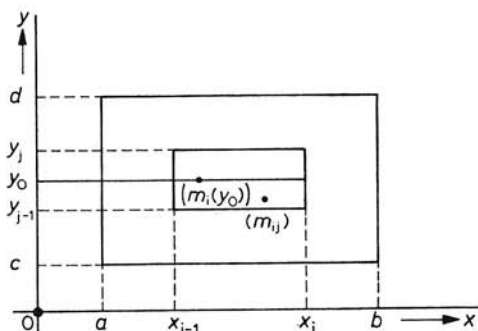


Fig. 51

functie zijn van x alleen, gedefinieerd op $[a, b]$. We zullen het minimum dat deze functie aanneemt op $[x_{i-1}, x_i]$ aangeven door $m_i(y_0)$. Nu geldt:

$$\begin{aligned} \varphi(y_0) &= \int_a^b f(x, y_0) dx \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y_0) dx \\ &\geq \sum_{i=1}^n m_i(y_0)(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

Echter geldt: $m_i(y_0) \geq m_{ij}$, daar m_{ij} het minimum is van f op R_{ij} en $m_i(y_0)$ het minimum is van f op een deelverzameling van R_{ij} . In fig. 51 zijn $(m_i(y_0))$ en (m_{ij}) tussen haakjes geplaatst om aan te geven dat deze waarden hier door f worden aangenomen.

Dus geldt:

$$\varphi(y_0) \geq \sum_{i=1}^n m_{ij}(x_i - x_{i-1})$$

Maar dit geldt voor alle $\varphi(y)$ met $y \in [y_{j-1}, y_j]$, dus ook voor het minimum van φ op $[y_{j-1}, y_j]$ dat we aangeven met $\min_{j-1, j} \varphi(y)$. Zodat:

$$\min_{j-1, j} \varphi(y) \geq \sum_{i=1}^n m_{ij}(x_i - x_{i-1})$$

en

$$\begin{aligned} \int_c^d \varphi(y) dy &= \sum_{j=1}^m \int_{y_{j-1}}^{y_j} \varphi(y) dy \\ &\geq \sum_{j=1}^m \{\min_{j-1, j} \varphi(y)\}(y_j - y_{j-1}) \\ &\geq \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = s_V \end{aligned}$$

Dit geldt voor elke verdeling V , zodat we op grond van de definitie van supremum vinden:

$$\int_c^d \varphi(y) dy \geq \sup \{s_V\} = I$$

Een analoge redenering kan men houden, uitgaande van de bovensom \bar{s}_V bij de gekozen verdeling. Men vindt dan:

$$\int_c^d \varphi(y) dy \leq \bar{s}_V$$

Daar dit voor alle verdelingen geldt, kan men concluderen:

$$\int_c^d \varphi(y) dy \leq \inf \{ \bar{s}_V \} = \bar{I}$$

Omdat f continu is op R , geldt $I = \bar{I}$.

Uit:

$$I \leq \int_c^d \varphi(y) dy \leq \bar{I}$$

volgt dat:

$$\int_c^d \varphi(y) dy = \bar{I} = I = I$$

en dus:

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy = \iint_R f(x, y) dx dy = I$$

De integraal in het linkerlid heet een *herhaalde integraal*. De integrand van de integraal over y is zelf weer een integraal, nl. een integraal over x . Vaak laat men de accoladen weg, en om duidelijk uit te laten komen welke integratieveranderlijken en integraalgrenzen bij elkaar behoren, schrijft men vaak:

$$I = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx$$

In deze gehele beschouwing kan men x en y van rol laten verwisselen, zodat dus ook geldt:

$$I = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$

Bij een herhaalde integraal met continue integrand en constante grenzen kan dus de volgorde van de integraties worden verwisseld.

Laat men in het midden welke integratie men het eerst uitvoert, dan kan men ook schrijven:

$$I = \iint_R f(x, y) dR = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy$$

waarbij de volgorde van de integratieveranderlijken overeenkomt met die van de integraaltekens, dit in verband met de grenzen.

In het linkerlid staat dus de integraal (dubbelintegraal), zoals deze in par. 51 is gedefinieerd, in het rechterlid een herhaalde integraal.

Voorbeeld 1

Bereken:

$$\int_0^1 \int_1^2 (x^3 + 3x^2y + y^2) dx dy$$

Oplossing:

De integraal is gelijk aan de herhaalde integraal:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left\{ \int_1^2 (x^3 + 3x^2y + y^2) dy \right\} dx &= \int_0^1 [x^3y + \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}y^3]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 (x^3 + \frac{9}{2}x^2 + \frac{7}{3}) dx \\ &= [\frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{2}x^3 + \frac{7}{3}x]_0^1 = \frac{49}{12}\end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$I = \int_0^\pi \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x+y) e^{\cos y} dy \right\} dx$$

Oplossing:

De integraal in het rechterlid is niet zo eenvoudig te berekenen. We verwisselen daarom de volgorde van integratie, en trachten te berekenen:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^\pi \cos(x+y) e^{\cos y} dx \right\} dy$$

Nu is:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \cos(x+y) e^{\cos y} dx &= e^{\cos y} \int_0^\pi \cos(x+y) dx \\ &= [e^{\cos y} \sin(x+y)]_{x=0}^{x=\pi} \\ &= -2 \sin y \cdot e^{\cos y}\end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned}I &= -2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin y \cdot e^{\cos y} dy \\ &= [2e^{\cos y}]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 2(1 - e)\end{aligned}$$

55 Riemannsommen bij dubbelintegralen

Het berekenen van een dubbelintegraal door middel van herleiding tot herhaalde integralen kan wel eens tot moeilijkheden aanleiding geven als de betreffende enkelvoudige integralen moeilijk te berekenen zijn. Men kan dan, evenals in het één-dimensionale geval, de waarde van $\iint_R f(x, y) dx dy$ benaderen met Riemannsommen.

Stel dat I weer de gemeenschappelijke waarde is van $I (= \sup \{s_V\})$ en $\bar{I} (= \inf \{\bar{s}_V\})$. Bij iedere $\varepsilon > 0$ bestaat er een verdeling V_1 , zó dat:

$$I \leq \bar{s}_{V_1} < I + \frac{1}{2}\varepsilon \tag{55.1}$$

waarin \bar{s}_{V_1} de bij V_1 behorende bovensom is. Ook bestaat er een verdeling V_2 met ondersom s_{V_2} , zó dat:

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon < s_{V_2} \leq I \tag{55.2}$$

Superponeert men nu V_1 en V_2 tot de verdeling V , dan geldt:

$$I \leq \bar{s}_V \leq \bar{s}_{V_1}$$

en

$$s_{V_2} \leq s_V \leq I$$

daar bij verfijning de ondersommen niet dalen en de bovensommen niet stijgen. Wegens (55.1) en (55.2) geldt dan ook:

$$I - \frac{1}{2}\varepsilon < s_V \leq I \leq \bar{s}_V < I + \frac{1}{2}\varepsilon \quad (55.3)$$

Hieruit volgt:

$$\bar{s}_V - s_V < \varepsilon$$

Men ziet uit (55.3) dat men door de verdelingen fijn genoeg te kiezen I willekeurig dicht kan benaderen, zowel met ondersommen als met bovensommen.

Als bij deze VR weer verdeeld is in rechthoeken R_{ij} op de bekende wijze en als we het minimum en het maximum van f op R_{ij} weer aangeven met resp. m_{ij} en M_{ij} , dan geldt voor een willekeurige $\xi_{ij} \in R_{ij}$:

$$m_{ij} \leq f(\xi_{i,j}) \leq M_{ij}$$

Men vormt nu de Riemanssom:

$$\sum_{i,j} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} s_V &= \sum_{i,j} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &\leq \sum_{i,j} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &\leq \sum_{i,j} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \bar{s}_V \end{aligned} \quad (55.4)$$

Uit (55.3) en (55.4) volgt direct:

$$|I - \sum_{i,j} f(\xi_{i,j})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})| < \varepsilon$$

We kunnen de integraal $\iint_R f(x, y) dx dy$ willekeurig dicht benaderen door Riemanssommen.

56 Dubbelintegraal over algemenere integratiegebieden

Tot nu toe is verondersteld dat het integratiegebied begrensd werd door een aantal lijnstukken evenwijdig met de x -as of y -as. Men kan de theorie echter uitbreiden tot algemenere integratiegebieden.

Voor we op de aard van deze gebieden ingaan, geven we eerst enkele definities.

Definitie

Als X en Y functies zijn van t op $[a, b]$ en daar continue afgeleiden \dot{X} en \dot{Y} bezitten, dan noemt men de puntverzameling met vectorvoorstelling:

$$\underline{r}(t) = \begin{pmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{pmatrix} \quad t \in [a, b]$$

een gladde boog.

Een voorbeeld ziet men in fig. 52a.

Definitie

Een bij gedeelten gladde kromme bestaat uit een eindig aantal gladde bogen, zó dat het eindpunt van een boog samenvalt met het beginpunt van de volgende boog (zie fig. 52b).

Definitie

Valt het eindpunt van de laatste boog van een uit gladde bogen bestaande kromme samen met het beginpunt van de eerste boog, dan noemt men de kromme gesloten.

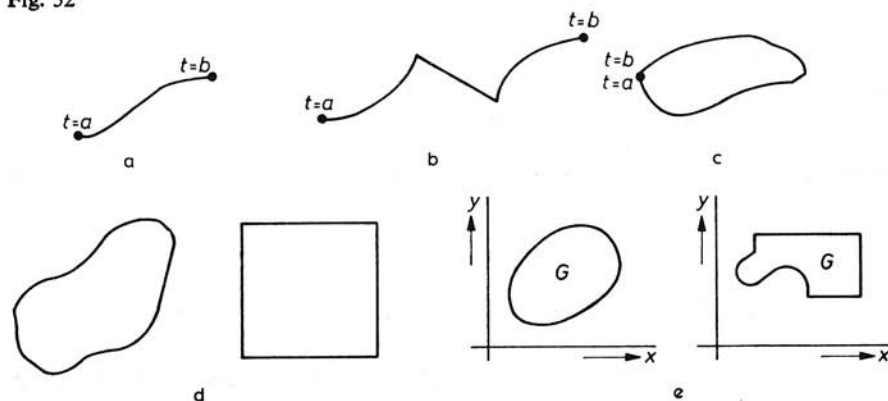
(Zie fig. 52c)

Definitie

Een gesloten bij gedeelten gladde kromme die zichzelf niet snijdt, noemt men een Jordan*-kromme.

Voorbeelden van een Jordankromme zien we in fig. 52d.

Fig. 52



* Camille Jordan (1838–1922).

We beschouwen nu begrensde gebieden, begrensd door een bij gedeelten gladde kromme. Deze begrenzing zullen we *randkromme* noemen. Deze kan ook bestaan uit rechte lijnstukken evenwijdig met de x -as of y -as. Het essentiële daarbij is dat *de randkromme een lengte heeft, dus rectificeerbaar is*.

Enkele voorbeelden van deze gebieden en de randkrommen vindt men in fig. 52e. Stel dat G een afgesloten gebied is met een randkromme K van bovengenoemd type en f een functie die op G (inclusief de rand) gedefinieerd en daar *begrensd* en *continu* is.

Om de dubbelintegraal $\iint_G f(x, y) dx dy$ te definiëren, gaan we als volgt te werk.

We stellen dat R de gesloten, begrensde rechthoek is:

$$R = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

zodanig dat $G \subset R$.

We definiëren nu een functie f^* aldus:

$$\begin{aligned} f^*(x, y) &= f(x, y) & (x, y) \in G \\ &= 0 & (x, y) \in R - G \end{aligned}$$

We zullen aantonen dat onder de gemaakte veronderstellingen $\iint_R f^*(x, y) dx dy$ bestaat. We definiëren dan:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_R f^*(x, y) dx dy \quad (56.1)$$

Evenals in par. 51 brengen we op de rechthoek R een verdeling V aan in deelrechthoeken. Deze vallen uiteen in drie soorten, nl. rechthoeken R_{ij} die geen punten van de randkromme K bevatten en geheel daar binnen liggen, rechthoeken R'_{ij} die elk minstens één punt van K bevatten en rechthoeken R''_{ij} die geen punten van K bevatten en buiten G liggen.

Daar f^* begrensd is op R , heeft het zin om over ondersommen, bovensommen, onderintegraal en bovenintegraal te spreken zoals in par. 52. Er geldt met de daar gebruikte notatie (zie par. 52, stelling 4):

$$m(b-a)(d-c) \leq s_V \leq I \leq \bar{I} \leq \bar{s}_V \leq M(b-a)(d-c)$$

Hierin zijn m en M het infimum, resp. supremum van f^* op R ; maar om omdat $f^* = f$ op G en f op G continu is, en tevens f^* op $R - G$ de waarde nul heeft, zijn m en M het minimum, resp. maximum van f op G .

We onderzoeken de bijdragen van de drie genoemde soorten rechthoeken tot $\bar{s}_V - s_V$. Het is direct duidelijk dat de bijdrage van de R''_{ij} nul is. Verder splitsen we de bij de verdeling V behorende ondersom s_V in:

$$s_V = \underline{\Sigma} + \underline{\Sigma}'$$

waarin $\underline{\Sigma}$ de bijdrage van de rechthoeken R_{ij} , en $\underline{\Sigma}'$ die der rechthoeken R'_{ij} is. Analoog schrijven we voor de bovensommen:

$$\bar{s}_V = \bar{\Sigma} + \bar{\Sigma}'$$

zodat:

$$\bar{s}_V - s_V = \bar{\Sigma} - \underline{\Sigma} + \bar{\Sigma}' - \underline{\Sigma}' \quad (56.2)$$

Voor het onderzoek van de bijdragen van R'_{ij} verdelen we K door de n deelpunten P_1, P_2, \dots, P_n in n delen, elk met lengte $\frac{L}{n}$ (als L de lengte van K voorstelt). We construeren nu vierkanten met zijden ter lengte $\frac{2L}{n}$ evenwijdig aan de coördinaatassen, die elk zo'n deelpunt tot middelpunt hebben (zie fig. 53). Het is dan duidelijk dat we bij vaste n de verdeling V zo fijn kunnen kiezen dat de vereniging van de rechthoeken R'_{ij} binnen de vereniging van de aldus geconstrueerde vierkanten ligt.

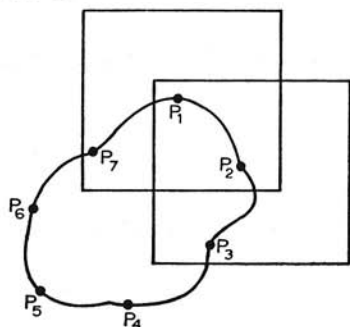
De gezamenlijke oppervlakte van die vierkanten bedraagt $\frac{4L^2}{n^2} \cdot n = \frac{4L^2}{n}$. Voor de bijdrage aan $\bar{s}_V - s_V$ geldt dus:

$$\begin{aligned} \bar{\Sigma}' - \underline{\Sigma}' &= \sum_{i,j} (M_{ij} - m_{ij}) \Delta R_{ij} \\ &\leq (M - m) \sum_{i,j} \Delta R_{ij} \\ &\leq (M - m) \frac{4L^2}{n} \end{aligned} \quad (56.3)$$

Met betrekking tot de bijdrage van de R_{ij} aan $\bar{s}_V - s_V$ merken we op dat op de vereniging van de R_{ij} de functie f^* ($= f$ op G) uniform continu is. Bij gegeven $\varepsilon > 0$ is er een verdeling V_1 zodanig dat $M_{ij} - m_{ij} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)(d-c)}$ voor alle bij V_1 behorende R_{ij} . Voor de bijdrage van de R_{ij} aan de bij V_1 behorende onder-, resp. bovensom geldt dus:

$$\bar{\Sigma} - \underline{\Sigma} < \frac{\varepsilon}{2(b-a)(d-c)} \cdot (b-a)(d-c) = \frac{1}{2}\varepsilon \quad (56.4)$$

Fig. 53



We kiezen vervolgens een n zodanig dat

$$\frac{4(M - m)L^2}{n} < \frac{1}{2}\varepsilon \quad (56.5)$$

Daarna verfijnen we V_1 tot een zodanige verdeling V dat de vereniging van de daarbij behorende R'_{ij} binnen de door (56.5) bepaalde vierkanten ligt.

Voor deze verdeling V geldt dan volgens (56.2), (56.3), (56.4) en (56.5):

$$\bar{s}_V - s_V = \bar{\Sigma} - \underline{\Sigma} + \bar{\Sigma}' - \underline{\Sigma}' < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

Dus ook:

$$\bar{I} - \underline{I} < \varepsilon$$

Daar dit geldt voor alle $\varepsilon > 0$, volgt:

$$\bar{I} = \underline{I}$$

m.a.w. f^* is integreerbaar over R , waarmee de definitie uitgedrukt in (56.1) gerechtvaardigd is.

Opmerking 1:

Het is duidelijk dat we op deze wijze ook de integraal van een functie f over een gesloten rechthoek R kunnen definiëren als f op R begrensd is en discontinuïteiten heeft die liggen op een bij gedeelten gladde kromme.

Opmerking 2:

De in par. 53 genoemde stellingen voor integralen over rechthoekige gebieden gelden ook voor integralen over de in deze paragraaf gedefinieerde gebieden. In het bijzonder geldt de herleiding tot herhaalde integralen.

57 Berekening van de dubbelintegraal over algemene integratiegebieden

We bepalen ons allereerst tot een gebied G , begrensd door lijnstukken (eventueel met lengte nul) op de rechten $x = a$ en $x = b$ en door segmenten van de grafieken van $y = \varphi_1(x)$ en $y = \varphi_2(x)$ ($x \in [a, b]$), waarin φ_1 en φ_2 continue afgeleiden in $[a, b]$ bezitten. In formule:

$$G = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b; \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$$

(Zie fig. 54).

We sluiten G op in een rechthoek R , d.w.z. we construeren een rechthoek R , bepaald door:

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$$

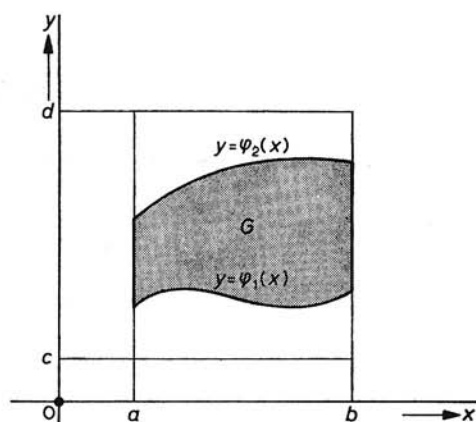


Fig. 54

zodanig dat $G \subset R$.

Evenals in par. 55 kunnen we nu bewijzen:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_R f^*(x, y) dx dy$$

zodat:

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left\{ \int_c^d f^*(x, y) dy \right\} dx \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f^*(x, y) dy \right\} dx \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx \end{aligned}$$

waarmede de dubbelintegraal gereduceerd is tot een herhaalde integraal.

Op analoge wijze kunnen we het geval behandelen dat G begrensd wordt door lijnstukken op de rechten $y = c$ en $y = d$ en door segmenten van de grafieken van $x = \psi_1(y)$ en $x = \psi_2(y)$ ($y \in [c, d]$), waarin ψ_1 en ψ_2 continue afgeleiden in $[c, d]$ bezitten:

$$G = \{(x, y) | c \leq y \leq d; \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

(Zie fig. 55).

In dit geval geldt:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy$$

Dikwijls doet zich het geval voor dat G tot beide typen behoort, b.v. als de randkromme een gesloten kromme is, samengesteld uit de grafieken van

$$y = \varphi_1(x) \text{ en } y = \varphi_2(x) \quad (x \in [a, b])$$

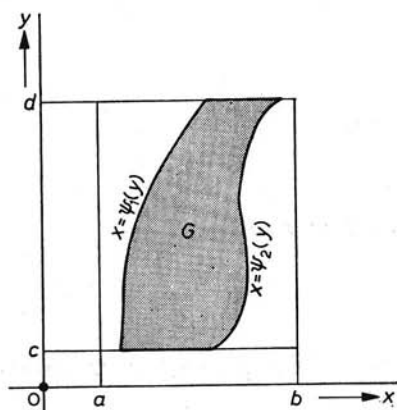


Fig. 55

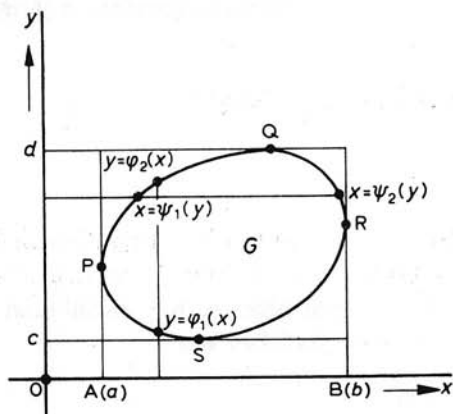
Men kan dit geval ook beschouwen als samenstel van de grafieken van $x = \psi_1(y)$ en $x = \psi_2(y)$ ($y \in [c, d]$) (zie fig. 56). Er geldt dan:

$$\begin{aligned} \iint_G f(x, y) dx dy &= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right\} dx \\ &= \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right\} dy \end{aligned}$$

Opmerking 1:

We hebben ons in het bovenstaande tot drie soorten integratiegebieden beperkt. Het is duidelijk dat men het resultaat ook kan uitbreiden tot integratiegebieden die de vereniging zijn van een eindig aantal van dit soort gebieden. Men past dan de volgende stelling toe:

Fig. 56



Stelling

Als $G = G_1 \cup G_2$, dan geldt:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_{G_1} f(x, y) dx dy + \iint_{G_2} f(x, y) dx dy$$

(zie par. 53, eigenschap 4 en par. 55, opmerking 2).

We zullen dit soort gebieden *geoorloofde integratiegebieden* noemen.

Opmerking 2:

Als G een geoorloofd integratiegebied is, dan stelt $\iint_G dx dy$ in getalwaarde de oppervlakte van G voor. We tonen dit aan voor het integratiegebied G uit fig. 56.

Daar geldt:

$$\begin{aligned} \text{opp. } G &= \text{opp. APQRB} - \text{opp. APSRB} \\ &= \int_a^b \varphi_2(x) dx - \int_a^b \varphi_1(x) dx \\ &= \int_a^b \{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)\} dx \\ &= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \right\} dx = \iint_G dx dy \end{aligned}$$

Opmerking 3:

Het in fig. 56 getekende gebied heeft de eigenschap dat ieder tweetal punten in G verbonden kan worden door een lijnstuk dat geheel binnen G ligt. Zo'n gebied heet een *convex* gebied.

Voorbeeld 1

Gegeven:

$$G = \{(x, y) | 0 \leq y \leq a; y \leq x \leq 2a - y\}$$

Gevraagd:

Schrijf $\iint_G f(x, y) dx dy$ op twee manieren als een herhaalde integraal.

Oplossing:

Het verdient aanbeveling eerst in het x, y -vlak een tekening van het integratiegebied G te maken. Dit gebied wordt volgens de opgave begrensd door de rechten met vergelijkingen:

$$y = 0, \quad y = a, \quad x = y, \quad x = 2a - y$$

G is aangeduid in fig. 57 als het gerasterde gebied.

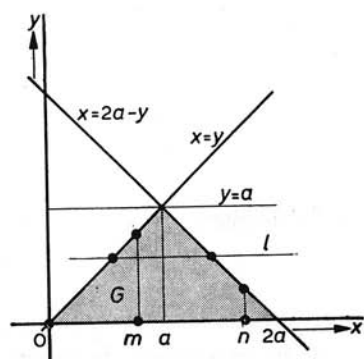


Fig. 57

Als we eerst naar x en dan naar y integreren, moeten we bij vaste y de grenzen voor x aangeven (zie in fig. 57 de rechte l). Op l loopt x van y tot $2a - y$. Daarna loopt y van 0 tot a , dus:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^a \left\{ \int_y^{2a-y} f(x, y) dx \right\} dy$$

Keren we de volgorde van de integratie om, dan moeten we eerst x vast houden, vervolgens bij die x de grenzen van y bepalen en daarna x laten lopen van 0 tot $2a$. Het is duidelijk dat de grenzen voor y bij een vaste $x \in [0, a]$ anders zijn dan bij vaste $x \in [a, 2a]$ (zie de lijnen m en n in fig. 57). Het resultaat is:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_0^a \left\{ \int_0^x f(x, y) dy \right\} dx + \int_a^{2a} \left\{ \int_0^{2a-x} f(x, y) dy \right\} dx$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$\int_0^1 \left\{ \int_{\sqrt{\frac{1}{2}x}}^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy \right\} dx + \int_1^2 \left\{ \int_{\sqrt{\frac{1}{2}x}}^1 \frac{\sin y}{y} dy \right\} dx$$

Oplossing:

Aangezien we geen primitieve kennen van de functie $y \mapsto \frac{\sin y}{y}$ trachten we de integraal te berekenen door de integratievolgorde anders te kiezen. Als we het integratiegebied van de eerste integraal OAB noemen en dat van de tweede integraal ABC (zie fig. 58), dan geldt:

$$OAB = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; \sqrt{\frac{1}{2}x} \leq y \leq \sqrt{x}\}$$

$$ABC = \{(x, y) | 1 \leq x \leq 2; \sqrt{\frac{1}{2}x} \leq y \leq 1\}$$

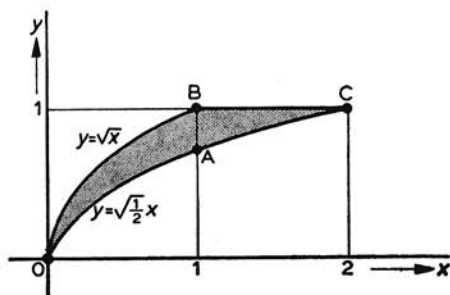


Fig. 58

Als we eerst naar x en dan naar y integreren, dan kunnen we de som van beide integralen als één integraal schrijven, nl. als:

$$\int_0^1 \left\{ \int_{y^2}^{2y^2} \frac{\sin y}{y} dx \right\} dy$$

en daarvoor geldt:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\{ \int_{y^2}^{2y^2} \frac{\sin y}{y} dx \right\} dy &= \int_0^1 \left\{ \frac{\sin y}{y} \int_{y^2}^{2y^2} dx \right\} dy \\ &= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} (2y^2 - y^2) dy \\ &= \int_0^1 y \sin y dy \\ &= -y \cos y \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos y dy \\ &= -\cos 1 + \sin 1 \\ &= \sqrt{2} \sin(1 - \frac{1}{4}\pi) \end{aligned}$$

Voorbeeld 3

Bereken de inhoud van het in het eerste octant gelegen deel V van de ruimte begrensd door de platte vlakken met vergelijkingen:

$$2x + 3y + z = 6, \quad x + y = 2, \quad y = 0, \quad z = 0$$

en de cilinder met vergelijking $y^2 = x$ (zie fig. 59b).

Oplossing:

Het bedoelde ruimtedeel V heeft als „grondvlak” het vlakdeel G in het x, y -vlak dat begrensd wordt door de x -as, de rechte met vergelijking $x + y = 2$ en de parabool met vergelijking $y = x^2$. De beide laatste snijden elkaar in het punt $(1, 1)$ (zie fig. 59a). Voor G geldt dus:

$$G = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1; y^2 \leq x \leq 2 - y\}$$

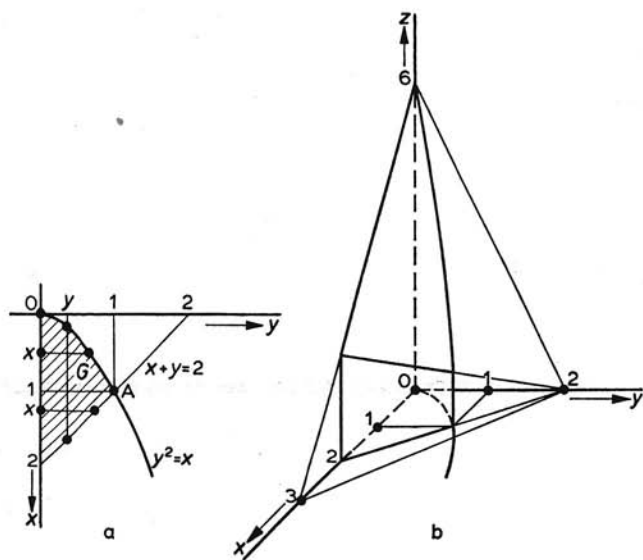


Fig. 59

Wanneer we stellen: $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$ en de gevraagde inhoud I noemen, dan geldt:

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy$$

Als we eerst naar x en dan naar y integreren, krijgen we:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left\{ \int_{y^2}^{2-y} (6 - 2x - 3y) dx \right\} dy \\ &= \int_0^1 \left\{ [6x - x^2 - 3xy]_{x=y^2}^{x=2-y} \right\} dy \\ &= \int_0^1 (y^4 + 3y^3 - 4y^2 - 8y + 8) dy \\ &= \left[\frac{1}{5}y^5 + \frac{3}{4}y^4 - \frac{4}{3}y^3 - 8y + 8y \right]_0^1 = 3\frac{7}{60} \end{aligned}$$

Als we de integratievolgorde veranderen, dan moeten we onderscheiden: $x \in [0, 1]$ en $x \in [1, 2]$.

Als $x \in [0, 1]$, dan loopt y van 0 tot \sqrt{x} . Als $x \in [1, 2]$, dan loopt y van 0 tot $2 - x$, zodat we vinden:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{x}} (6 - 2x - 3y) dy \right\} dx + \int_1^2 \left\{ \int_0^{2-x} (6 - 2x - 3y) dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ [6y - 2xy - \frac{3}{2}y^2]_{y=0}^{y=\sqrt{x}} \right\} dx + \int_1^2 \left\{ [6y - 2xy - \frac{3}{2}y^2]_{y=0}^{y=2-x} \right\} dx \\ &= \int_0^1 (6\sqrt{x} - 2x\sqrt{x} - \frac{3}{2}x) dx + \int_1^2 (\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6) dx \\ &= [4x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{4}x^2]_0^1 + [\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x]_1^2 = 3\frac{7}{60} \end{aligned}$$

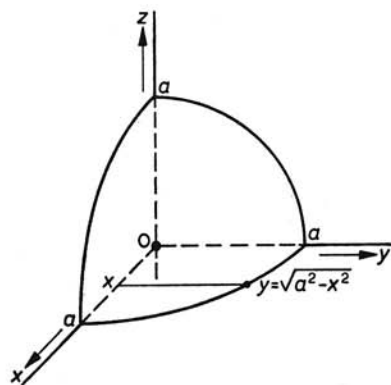


Fig. 60

Voorbeeld 4

Bereken de inhoud van een bol met straal a .

Oplossing:

We berekenen eerst de inhoud I van het deel van de bol gelegen in het eerste octant (zie fig. 60).

De vergelijking van de bol is:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Voor het beschouwde deel geldt dus:

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

De grenzen voor y bij gegeven $x \in [0, a]$ zijn 0 en $\sqrt{a^2 - x^2}$ zodat we vinden:

$$I = \int_0^a \left\{ \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy \right\} dx$$

$\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dy$ stelt de oppervlakte voor van een kwartcirkel met straal $\sqrt{a^2 - x^2}$, en is dus gelijk aan $\frac{1}{4}\pi(a^2 - x^2)$, zodat:

$$I = \frac{\pi}{4} \int_0^a (a^2 - x^2) dx = \frac{1}{8}\pi a^3$$

De inhoud van de bol is dus $8 \cdot \frac{1}{8}\pi a^3 = \frac{4}{3}\pi a^3$.

58 De stelling van Green voor het platte vlak

Er bestaat een nauwe relatie tussen een lijnintegraal, genomen langs een Jordankromme (zie definitie in par. 56) en een daarmee op een nader aan te geven wijze

verbonden dubbelintegraal. Dit verband wordt aangegeven door de volgende van Green* afkomstige stelling.

Stelling van Green

Stel dat S een open verzameling is en dat P en Q functies zijn, gedefinieerd op S , en wel zó dat P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$ en $\frac{\partial Q}{\partial x}$ continu zijn in S . Als verder K een Jordankromme is in S , die een gebied G omsluit, dan geldt:

$$\int_{K^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (58.1)$$

Hierin betekent K^+ dat K zo wordt doorlopen dat men G steeds aan de linkerhand heeft.

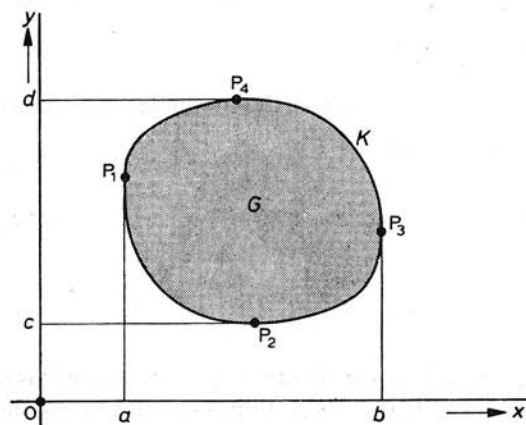
Bewijs:

We tonen de stelling aan voor een convex gebied, waarbij de rand K kan worden verdeeld in de bogen $P_1P_2P_3$ en $P_1P_4P_3$ (zie fig. 61). Deze worden gegeven door de vergelijkingen $y = \varphi_1(x)$, resp. $y = \varphi_2(x)$ ($x \in [a, b]$). Ook kan K verdeeld worden in de bogen $P_2P_1P_4$ en $P_2P_3P_4$, gegeven door de vergelijkingen $x = \psi_1(y)$, resp. $x = \psi_2(y)$ ($y \in [c, d]$). Hierbij is verondersteld dat $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ in hun domein continu zijn en daar continue afgeleiden bezitten.

We beschouwen nu:

$$I_1 = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

Fig. 61



* George Green (1793–1841).

en schrijven het rechterlid als de herhaalde integraal:

$$I_1 = \int_c^d \left\{ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx \right\} dy$$

De integraal tussen accoladen is gemakkelijk te berekenen, daar hierin y constant is:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_c^d \{Q(x, y)|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\} dy \\ &= \int_c^d [Q\{\psi_2(y), y\} - Q\{\psi_1(y), y\}] dy \\ &= \int_c^d Q\{\psi_2(y), y\} dy - \int_c^d Q\{\psi_1(y), y\} dy \\ &= \int_c^d Q\{\psi_2(y), y\} dy + \int_d^c Q\{\psi_1(y), y\} dy \end{aligned}$$

$\int_c^d Q\{\psi_2(y), y\} dy$ is de lijnintegraal van $Q(x, y)$, genomen langs de kromme met vergelijking $x = \psi_2(y)$ van P_2 via P_3 naar P_4 en $\int_d^c Q\{\psi_1(y), y\} dy$ de lijnintegraal van $Q(x, y)$, genomen langs de kromme met vergelijking $x = \psi_1(y)$ van P_4 via P_1 naar P_2 . Tezamen geven ze juist de lijnintegraal van $Q(x, y)$ aan, genomen langs de gehele kromme K (linksom doorlopen), zodat we vinden:

$$I_1 = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{K^+} Q(x, y) dy \quad (58.2)$$

Op analoge wijze leiden we af, als $I_2 = \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_a^b \left\{ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right\} dx \\ &= \int_a^b \{P(x, y)|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\} dx \\ &= \int_a^b [P\{x, \varphi_2(x)\} - P\{x, \varphi_1(x)\}] dx \\ &= \int_a^b P\{x, \varphi_2(x)\} dx - \int_a^b P\{x, \varphi_1(x)\} dx \\ &= - \int_b^a P\{x, \varphi_2(x)\} dx - \int_a^b P\{x, \varphi_1(x)\} dx \\ &= - \int_{K^+} P(x, y) dx \end{aligned}$$

zodat:

$$I_2 = \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{K^+} P(x, y) dx \quad (58.3)$$

Als we (58.3) aftrekken van (58.2), verkrijgen we (58.1).

We kunnen de stelling ook toepassen op een niet convex integratiegebied dat omsloten wordt door een Jordankromme indien we dit integratiegebied kunnen verdelen in een eindig aantal convexe delen. Zo zien we b.v. in fig. 62 dat de integralen over G_1 en G_2 tezamen de integraal over $G_1 \cup G_2$ opleveren. De lijnintegralen langs de randkrom-

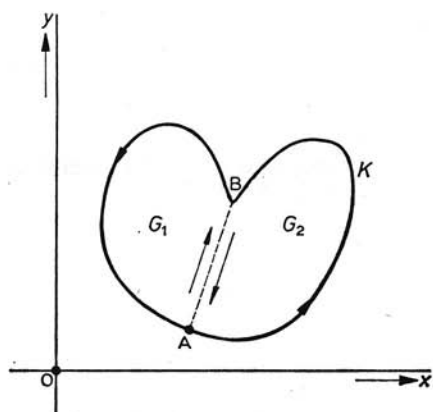


Fig. 62

men van G_1 en G_2 geven die langs K , plus twee lijnintegralen langs de scheidingslijn AB in tegengestelde richtingen. Deze heffen elkaar dus op.

Voorbeeld 1

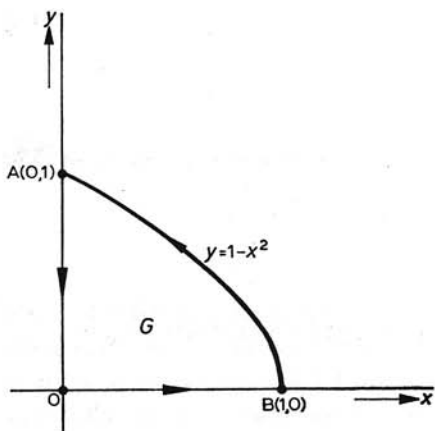
Verifieer de stelling van Green voor het geval dat $P(x, y) = x + 2y$, $Q(x, y) = xy$ en G het in fig. 63 aangegeven integratiegebied is, dus:

$$G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 - x^2\}$$

Oplossing:

De betreffende lijnintegraal $\int_{K^+} (x + 2y)dx + xydy$ is gelijk aan de som van de drie lijnintegralen langs de segmenten OB , BA en AO .

Fig. 63



Langs OB geldt:

$$\int_0^1 (x + 0) dx + 0 dy = \frac{1}{2}$$

Langs BA:

$$\int_0^1 \{x + 2(1 - x^2)\} dx + \int_0^1 y \sqrt{1 - y} dy = -1\frac{5}{6} + \frac{4}{15} = -1\frac{17}{30}$$

Langs AO:

$$\int_1^0 2y dx + \int_1^0 0 dy = 0$$

De waarde van de lijnintegraal is dus $-1\frac{1}{15}$.

De bijbehorende gebiedsintegraal is:

$$\begin{aligned} \iint_G (y - 2) dx dy &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x^2} (y - 2) dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} y^2 - 2y \right\}_0^{1-x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2} x^4 + x^2 - \frac{3}{2} \right\} dx = -1\frac{1}{15} \end{aligned}$$

waarmede de stelling van Green voor dit geval is geverifieerd.

Voorbeeld 2

Met behulp van de stelling van Green kunnen we de oppervlakte A van een gebied G uitdrukken in een lijnintegraal.

Stellen we in (58.1) $P(x, y) = -y$ en $Q(x, y) = 0$, dan volgt:

$$A = \iint_G dx dy = - \int_{K^+} y dx$$

Als we stellen $P(x, y) = 0$ en $Q(x, y) = x$, volgt evenzo:

$$A = \iint_G dx dy = \int_{K^+} x dy \quad (58.4)$$

en dus:

$$A = \frac{1}{2} \int_{K^+} x dy - y dx \quad (58.5)$$

Voorbeeld 3

Bereken de oppervlakte A van een vlakdeel omsloten door een ellips met assen $2a$ en $2b$, door toepassing van (58.5).

Oplossing:

We kunnen de ellips zo plaatsen (zie par. 25), dat een parametervoorstelling is:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos t \\ y &= b \sin t \end{aligned} \right\} \quad (t \in [0, 2\pi])$$

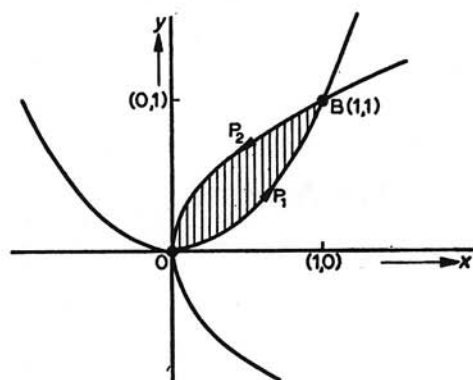


Fig. 64

Door toepassing van de formule (58.5) vindt men:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{a \cos t \cdot b \cos t - b \sin t \cdot (-a \sin t)\} dt \\
 &= \frac{1}{2} ab \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = \pi ab
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 4

Bereken de oppervlakte van het gebied, ingesloten door de parabolen met vergelijkingen $y = x^2$ en $x = y^2$.

Oplossing:

In fig. 64 is het bedoelde gebied gearceerd aangegeven. De parabolen snijden elkaar behalve in O ook nog in B(1, 1). Voor de gevraagde oppervlakte A geldt, als P_1 loopt van O naar B en P_2 loopt van B naar O:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{2} \int_{P_1} (x dy - y dx) + \frac{1}{2} \int_{P_2} (x dy - y dx) \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x \cdot 2x dx - x^2 dx) + \frac{1}{2} \int_1^0 (y^2 dy - y \cdot 2y) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 y^2 dy = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 5

Bereken de oppervlakte omsloten door de lus van het folium van Descartes met vergelijking $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ ($a > 0$).

Oplossing:

Een parametervoorstelling voor de lus verkrijgen we door de kromme te snijden met de rechte $y = mx$ (zie fig. 65). Men vindt dan (zie par. 25, voorbeeld 3):

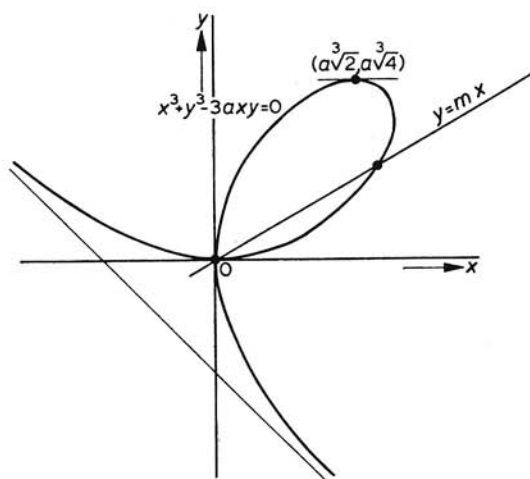


Fig. 65

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{3am}{m^3 + 1} \\ y &= \frac{3am^2}{m^3 + 1} \end{aligned} \right\} m \in [0, \rightarrow)$$

Indien we formule (58.4) gebruiken, krijgen we voor de oppervlakte A :

$$\begin{aligned} A &= - \int_{K^+} y dx \\ &= - \int_0^\infty \frac{3am^2}{m^3 + 1} \cdot \frac{(m^3 + 1)3a - 3am \cdot 3m^2}{(m^3 + 1)^2} dm \\ &= 9a^2 \int_0^\infty \frac{(2m^3 - 1)m^2}{(m^3 + 1)^3} dm \end{aligned}$$

Stelt men $t = m^3 + 1$, dan blijkt:

$$A = 3a^2 \int_1^\infty \frac{2t - 3}{t^3} dt = 3a^2 \left[-\frac{2}{t} + \frac{3}{2} \frac{1}{t^2} \right]_1^\infty = \frac{3}{2}a^2$$

Voorbeeld 6

Als f een functie is, gedefinieerd op een gebied S , met continue eerste en tweede partiële afgeleiden en als G een deelgebied is van S , omsloten door een Jordankromme K , dan geldt de formule:

$$\iint_G \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_{K^+} \text{grad } f(x) \cdot \underline{n}(\sigma) d\sigma \quad (58.6)$$

Hierin is $\text{grad } f(\underline{x})$ de in par. 20 gedefinieerde vector $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$; $\underline{n}(\sigma)$ is de „naar buiten”

gerichte normale eenheidsvector op R . Bij de lijnintegraal is de booglengte σ als parameter gebruikt. Bewijs deze formule.

Bewijs:

Toepassing van de stelling van Green met

$$P(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{en} \quad Q(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}$$

geeft:

$$\iint_G \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_{K^+} -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy$$

Indien K als parametervoorstelling heeft:

$$x = X(\sigma), \quad y = Y(\sigma)$$

dan geldt:

$$\begin{aligned} \int_{K^+} -\frac{\partial f}{\partial y} dx + \frac{\partial f}{\partial x} dy &= \int_{K^+} \left\{ -\frac{\partial f}{\partial y} \dot{X}(\sigma) + \frac{\partial f}{\partial x} \dot{Y}(\sigma) \right\} d\sigma \\ &= \int_{K^+} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \dot{Y}(\sigma) + \frac{\partial f}{\partial y} \{-\dot{X}(\sigma)\} \right\} d\sigma \end{aligned}$$

Nu is echter de vector $\begin{pmatrix} \dot{Y}(\sigma) \\ -\dot{X}(\sigma) \end{pmatrix}$ de „naar buiten” gerichte normale eenheidsvector $\underline{n}(\sigma)$ in het punt met parameterwaarde σ , zodat we vinden:

$$\iint_G \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx dy = \int_{K^+} \text{grad } f(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\sigma) d\sigma$$

waarmee (58.6) is bewezen.

Opmerking 1:

Met de in par. 20 ingevoerde nabla-notatie kunnen we (58.6) ook schrijven als:

$$\iint_G \nabla^2 f dx dy = \int_{K^+} \nabla f \cdot \underline{n}(\sigma) d\sigma$$

Opmerking 2:

We kunnen de stelling van Green ook toepassen op gebieden G waarvan de rand bestaat uit eindig veel Jordankrommen K_1, K_2, \dots, K_n . Indien we de vereniging daarvan K noemen, dan geldt:

$$\int_{K^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

waarbij met K^+ bedoeld wordt dat de rand zodanig wordt doorlopen dat men G steeds aan de linkerhand heeft.

We geven een schets van het bewijs voor de in fig. 66a getekende situatie, waarbij G het gerasterde gebied is. We verbinden A op K_1 met B op K_2 en H op K_1 met L op K_3 . Op het enkelvoudig samenhangend (zie blz. 211) gebied G^* begrensd door de weg W : ABDBAFHLMLHA geldt:

$$\int_{W^+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_{G^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

en aangezien de integralen \int_{AB} en \int_{BA} , resp. \int_{HL} en \int_{LH} tegen elkaar wegvallen, geldt:

$$\int_{K_1^+} + \int_{K_2^+} + \int_{K_3^+} = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \quad (58.7)$$

waarbij de integrand in de drie lijnintegralen is:

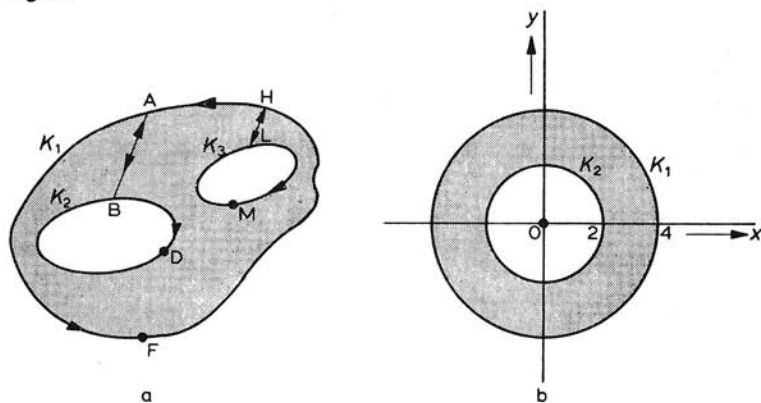
$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

Voorbeeld

Stel dat G gedefinieerd is door:

$$G = \{(x, y) | 4 \leq x^2 + y^2 \leq 16\} \quad (\text{zie fig. 66b})$$

Fig. 66



en P en Q door

$$P(x, y) = x^2y$$

$$Q(x, y) = y^3 - xy^2$$

Gevraagd wordt (58.7) in dit geval te verifiëren.

Oplossing:

Volgens (58.7) geldt:

$$\begin{aligned} & \int_{K_1^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{K_2^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \\ &= \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \end{aligned} \quad (58.8)$$

Op K_1^+ geldt:

$$x = 4 \cos \alpha \quad (\alpha \text{ loopt van } 0 \text{ tot } 2\pi)$$

$$y = 4 \sin \alpha$$

Op K_2^+ geldt:

$$x = 2 \cos \beta \quad (\beta \text{ loopt van } 2\pi \text{ tot } 0)$$

$$y = 2 \sin \beta$$

Dus is het linkerlid van (58.8) gelijk aan:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} -256 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha d\alpha + \int_0^{2\pi} 256(\sin^3 \alpha - \sin^2 \alpha \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha \\ &+ \int_{2\pi}^0 -16 \cos^2 \beta \sin^2 \beta d\beta + \int_{2\pi}^0 16(\sin^3 \beta - \sin^2 \beta \cos \beta) \cos \beta d\beta \\ &= -64\pi - 64\pi + 4\pi + 4\pi = -120\pi \end{aligned}$$

Verder is het rechterlid van (58.8) gelijk aan

$$\iint_G -(x^2 + y^2) dx dy$$

Deze integraal is het eenvoudigst uit te rekenen met poolcoördinaten (zie par. 65). Dit geeft:

$$- \iint_G (x^2 + y^2) dx dy = - \int_0^{2\pi} \left\{ \int_2^4 \rho^3 d\rho \right\} d\varphi = -120\pi$$

waarmede (58.8) is geverifieerd.

59 Gevolgen van de stelling van Green; exacte differentiaal

Definitie

Een gebied G heet enkelvoudig samenhangend als met iedere Jordankromme K die geheel in G ligt, ook het gebied „binnen” K geheel tot G behoort. Een gebied G dat niet enkelvoudig samenhangend is, heet meervoudig samenhangend.

Voorbeeld 1

Het gebied $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ is enkelvoudig samenhangend. Het is het inwendige van een eenheidscirkel.

Voorbeeld 2

Het gebied $\{(x, y) | 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ is meervoudig samenhangend. Dit is het inwendige van een eenheidscirkel met uitzondering van O .

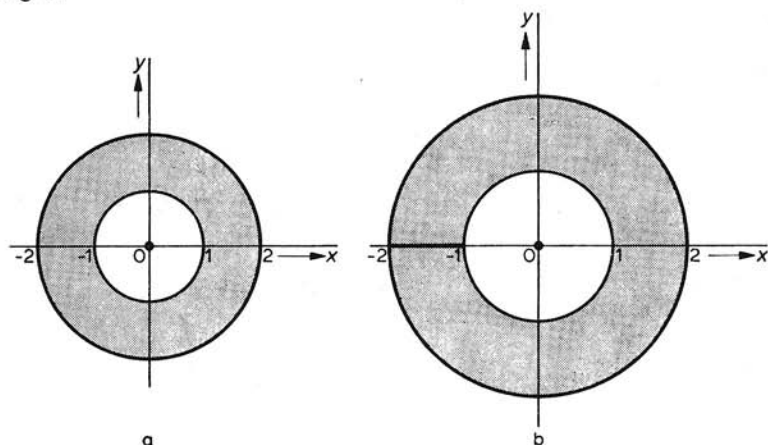
Voorbeeld 3

Het gebied $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ is meervoudig samenhangend (zie fig. 67a).

Voorbeeld 4

Het gebied $\{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 < 4; x \notin [-2, -1]\}$ is enkelvoudig samenhangend (zie fig. 67b).

Fig. 67



Voor het volgende veronderstellen we dat G een *enkelvoudig samenhangend gebied* is en dat P , Q , P_y en Q_x continu zijn in G .

Onder deze veronderstellingen kunnen we de volgende conclusies trekken uit de stelling van Green.

Stelling 1

Indien in G geldt:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \forall (x, y) \in G \quad (59.1)$$

dan geldt voor elke Jordankromme K in G :

$$\int_K P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

Bewijs:

We passen de stelling van Green toe op het binnengebied G_1 van K en zien dan:

$$\int_{K^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_{G_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

wegens (59.1) voor $\forall (x, y) \in G$ en dus ook $\forall (x, y) \in G_1$.

Opmerking:

Indien G meervoudig samenhangend is, dan behoeft de stelling niet juist te zijn. In dat geval zijn er Jordankrommen binnen G die gebieden omvatten met punten die niet tot G behoren. Voor zulke punten weten we niet of $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ nul is.

Stelling 2

Als (59.1) geldt, dan is de lijnintegraal:

$$\int_A^B P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

onafhankelijk van de weg die de punten A en B (beide in G) verbindt.

N.B. We veronderstellen hier en in de rest van deze paragraaf dat de gebruikte wegen „toelaatbare” integratiewegen zijn die geheel in G verlopen.

Bewijs:

Stel dat C_1^+ en C_2^+ integratiewegen zijn die lopen van A naar B en C_1^- en C_2^- van B naar A (zie fig. 68). Dan is $C_1^+ \cup C_2^-$ een Jordankromme K in G .

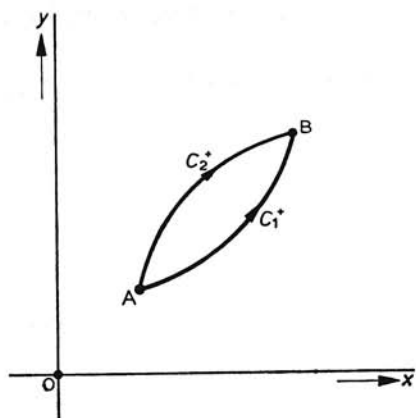


Fig. 68

Passen we hierop stelling 1 toe, dan vinden we:

$$\int_{K^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

of:

$$\int_{C_1^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy + \int_{C_2^-} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$$

zodat:

$$\int_{C_1^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{C_2^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

waarmede de stelling bewezen is.

Gevolg

Indien $A(a, b)$ een vast punt en $P(\xi, \eta)$ een variabel punt is van G , dan zal, indien aan de voorwaarden van stelling 2 (of stelling 1) is voldaan, de waarde van de integraal:

$$\int_{(a,b)}^{(\xi,\eta)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \tag{59.2}$$

alleen afhangen van (ξ, η) , m.a.w. de functie F bepaald door:

$$F(\xi, \eta) = \int_{(a,b)}^{(\xi,\eta)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \tag{59.3}$$

is gedefinieerd voor alle (ξ, η) in G .

Algemeen (d.w.z. ook als P_x en Q_y niet continu zijn) geldt de volgende stelling.

Stelling 3

Indien P en Q continue functies zijn in een enkelvoudig samenhangend gebied G , en indien de lijnintegraal

$$\int_{(a,b)}^{(\xi,\eta)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

onafhankelijk is van de gekozen weg in G van (a, b) naar (ξ, η) , dan geldt, als we F definiëren door

$$F(\xi, \eta) = \int_{(a,b)}^{(\xi,\eta)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

voor de partiële afgeleiden:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = P(\xi, \eta), \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta)$$

Bewijs:

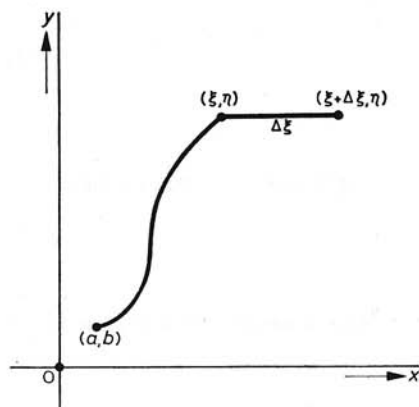
Volgens definitie geldt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \xi} &= \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \frac{F(\xi + \Delta \xi, \eta) - F(\xi, \eta)}{\Delta \xi} \\ &= \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \xi} \left\{ \int_{(a,b)}^{(\xi + \Delta \xi, \eta)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy - \right. \\ &\quad \left. - \int_{(a,b)}^{(\xi, \eta)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \right\} \end{aligned}$$

Hierin mogen de integratiewegen willekeurig worden gekozen. We kiezen in de eerste integraal een willekeurige integratieweg in G van (a, b) naar (ξ, η) plus het lijnstuk evenwijdig aan de x -as dat (ξ, η) verbindt met $(\xi + \Delta \xi, \eta)$ (zie fig. 69). Er geldt dan:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \lim_{\Delta \xi \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta \xi} \left\{ \int_{(\xi, \eta)}^{(\xi + \Delta \xi, \eta)} P(x, y) dx + Q(x, y) dy \right\}$$

Fig. 69



Langs de gekozen weg van (ξ, η) naar $(\xi + \Delta\xi, \eta)$ is echter y constant, zodat we vinden:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\xi} \int_{(\xi, \eta)}^{(\xi + \Delta\xi, \eta)} P(x, y) dx$$

Daar P continu is, kunnen we hiervoor schrijven:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\xi} \cdot P(\xi + \theta \Delta\xi, \eta) \cdot \Delta\xi \quad (0 < \theta < 1)$$

dus:

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = P(\xi, \eta)$$

Op analoge wijze wordt bewezen: $\frac{\partial F}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta)$.

Stelling 4

Zijn P , Q , P_y en Q_x continue functies in een enkelvoudig samenhangend gebied G , dan is een noodzakelijk en voldoende voorwaarde opdat de lijnintegraal (59.2) onafhankelijk is van de gekozen weg in G van (a, b) naar (ξ, η) , dat

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Bewijs:

Uit stelling 2 volgt dat de voorwaarde voldoende is. De noodzakelijkheid volgt uit het feit dat voor de in (59.3) geïntroduceerde functie F geldt dat $F_{\xi\eta}$ en $F_{\eta\xi}$ continu zijn in G en dus gelijk.

Immers (volgens stelling 3):

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = P(\xi, \eta) \quad \text{en} \quad \frac{\partial F}{\partial \eta} = Q(\xi, \eta)$$

Daar P_y en Q_x bestaan, volgt:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial P}{\partial \eta} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} = \frac{\partial Q}{\partial \xi}$$

Op grond van de continuïteit van P_y en Q_x derhalve:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial^2 F}{\partial \eta \partial \xi} \quad \forall (\xi, \eta) \in G$$

Dus ook:

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = \frac{\partial Q}{\partial \xi} \quad \forall (\xi, \eta) \in G$$

Stelling 5

Zijn P , Q , P_y en Q_x continue functies in een enkelvoudig samenhangend gebied G , dan is een noodzakelijk en voldoende voorwaarde opdat de lijnintegraal (59.2) onafhankelijk is van de gekozen weg in G van (a, b) naar (ξ, η) , dat er een functie F bestaat, zó dat

$$\text{grad } F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

Bewijs:

Dat de voorwaarde noodzakelijk is volgt uit stelling 3 met de daar ingevoerde functie F (zie ook (59.3)).

Is nu:

$$\text{grad } F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

dan is

$$P(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{en} \quad Q(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y}$$

Door toepassing van de stelling van Green volgt dan uit stelling 4 dat de voorwaarde ook voldoende is.

In deel 1, par. 136 zagen we dat indien een functie F in een gebied G totaal differentieerbaar is, geldt:

$$F(x + h, y + k) - F(x, y) = hF_x(x, y) + kF_y(x, y) + \varepsilon_1 h + \varepsilon_2 k$$

met $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ en $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ als $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ en aan zekere eisen over de ligging van (x, y) en $(x + h, y + k)$ in G voldaan is.

De uitdrukking

$$hF_x(x, y) + kF_y(x, y)$$

die van de vier veranderlijken h , k , x en y afhangt, is daar gedefinieerd als de *totale differentiaal* van F , geschreven als dF , dus:

$$dF = hF_x(x, y) + kF_y(x, y)$$

of indien we h en k schrijven als dx resp. dy :

$$dF = F_x(x, y)dx + F_y(x, y)dy$$

In het algemeen noemen we een vorm van de gedaante:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (59.4)$$

een *differentiaalvorm*.

Definitie

Een differentiaalvorm heet een *exacte differentiaal* wanneer deze de totale differentiaal is van een functie F .

De vorm in (59.4) is dus exact als er een functie F bestaat, zodanig dat:

$$P(x, y) = F_x(x, y) \text{ en } Q(x, y) = F_y(x, y)$$

of anders gezegd, zodanig dat:

$$\text{grad } F(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$$

Voorbeelden van exacte differentialen

a $ydx + xdy = d(xy)$

b $(y \cos x)dx + \sin x dy = d(y \sin x)$

Uit stellingen 4 en 5 volgt onmiddellijk stelling 6.

Stelling 6

Zijn P , Q , P_y en Q_x continue functies in een enkelvoudig samenhangend gebied, dan zal de differentiaalvorm

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

dan en slechts dan exact zijn, indien

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in G$$

De betreffende functie F wordt dan bepaald door:

$$F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(\xi, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta \quad (59.5)$$

waarbij (x_0, y_0) een willekeurig punt in G en de integratieweg van (x_0, y_0) naar (x, y) een willekeurige (bij gedeelten gladde) kromme zijn. Doordat het beginpunt (x_0, y_0) willekeurig in G gekozen kan worden is $F(x, y)$ bepaald op een constante na.

Liggen de punten (x_0, y_0) , (x, y_0) en (x, y) in een convex gebied G , dan kan men de lijnintegraal (59.5) gemakkelijk terugbrengen tot „gewone” integralen. We kiezen als integratieweg de rechte wegen van (x_0, y_0) tot (x, y_0) en van (x, y_0) naar (x, y) . We krijgen dan:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0) dt + \int_{y_0}^y Q(x, s) ds$$

Zo volgt ook, als (x_0, y_0) , (x_0, y) en (x, y) in een convex gebied G liggen

$$F(x, y) = \int_{y_0}^y Q(x_0, s) ds + \int_{x_0}^x P(t, y) dt$$

Voorbeeld

Als $P(x, y) = 2x - 2y$ en $Q(x, y) = -2x + 4y$ dan geldt:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = -2$$

en de vorm

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

is exact.

We kiezen voor G het x, y -vlak en voor (x_0, y_0) het punt $(0, 0)$. Er geldt dan:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} P(\xi, \eta) d\xi + Q(\xi, \eta) d\eta \\ &= \int_0^x 2t dt + \int_0^y (-2x + 4s) ds \\ &= x^2 - 2xy + 2y^2 \end{aligned}$$

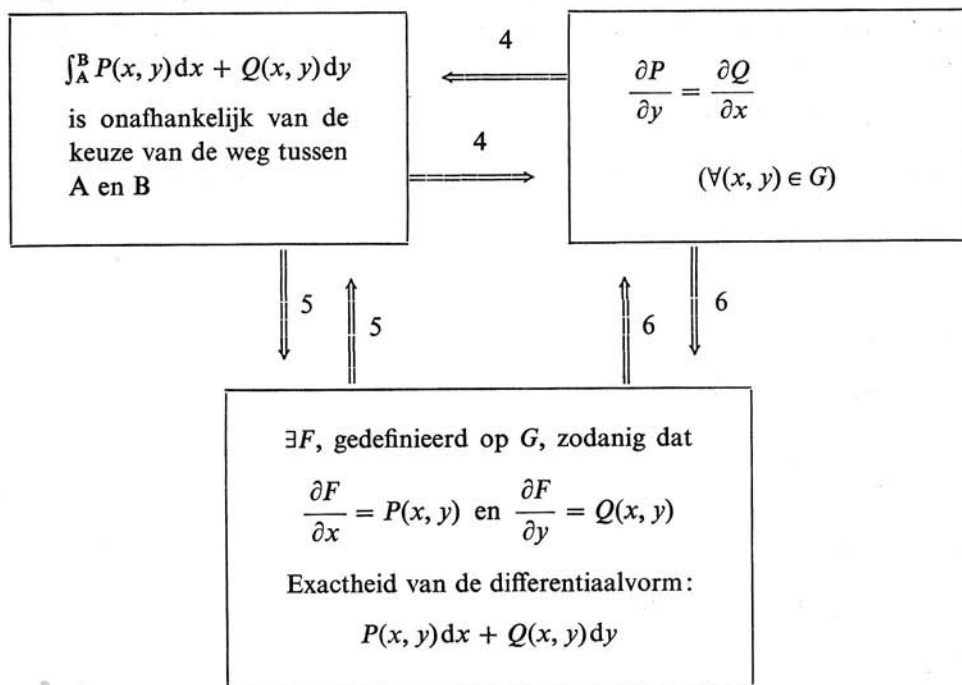
De verzameling van alle reële functies die, als de gezochte F kunnen optreden wordt bepaald door:

$$\{x^2 - 2xy + 2y^2 + c \mid c \in \mathbb{R}\}$$

Samenvatting

Indien G een enkelvoudig samenhangend gebied is en indien P , Q , P_y en Q_x continue functies zijn in G , dan geldt het volgende schema (zie schema 59.1). $S_1 \Rightarrow S_2$ betekent: bewering S_1 impliceert bewering S_2 . Het daarbij geplaatste cijfer geeft de stelling aan, waarin deze bewering wordt uitgedrukt.

Schema 59.1



Opmerking:

Voor drie dimensies kunnen stellingen worden bewezen analoog aan de stellingen uit schema 59.1. We volstaan met het vermelden van de volgende stelling.

Stelling 7

Indien G een enkelvoudig samenhangend gebied is in \mathbb{R}^3 * en indien $P, Q, R, P_y, P_z, Q_x, Q_z, R_x$ en R_y continue functies zijn in G , dan is een noodzakelijk en voldoende voorwaarde dat

$$\int_A^B P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

onafhankelijk is van de integratieweg van A naar B in G , aldus te formuleren:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z} \quad \forall (x, y, z) \in G$$

Er bestaat dan een functie F , gedefinieerd op G , zó dat:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y, z), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y, z), \quad \frac{\partial F}{\partial z} = R(x, y, z)$$

* Op een exacte definitie van enkelvoudige samenhang in \mathbb{R}_3 , kunnen we hier niet ingaan.

of anders gezegd: $\text{grad } F(x, y, z) = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix}$

60 Kromlijnige coördinaten; inverse transformatie

In hoofdstuk 1, par. 6, hielden we ons bezig met enkele rekentechnische aspecten van het invoeren van nieuwe veranderlijken. In verband met toepassingen van de theorie van de dubbelintegralen zullen we thans nader ingaan op een speciale *transformatie* of *substitutie*. Bij het berekenen van dubbelintegralen is het in vele gevallen wenselijk om de veranderlijken x en y te vervangen door nieuwe veranderlijken u en v , die met x en y samenhangen door middel van de volgende betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} u &= U(x, y) \\ v &= V(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (60.1)$$

waarin U en V functies zijn die aan ieder punt (x, y) van een zekere puntverzameling S in het x, y -vlak op eenduidige wijze een punt (u, v) in het u, v -vlak toevoegen (zie fig. 70).

Voorbeeld 1

$$u = 3x + 4y$$

$$v = 4x - 3y$$

S is het gehele x, y -vlak.

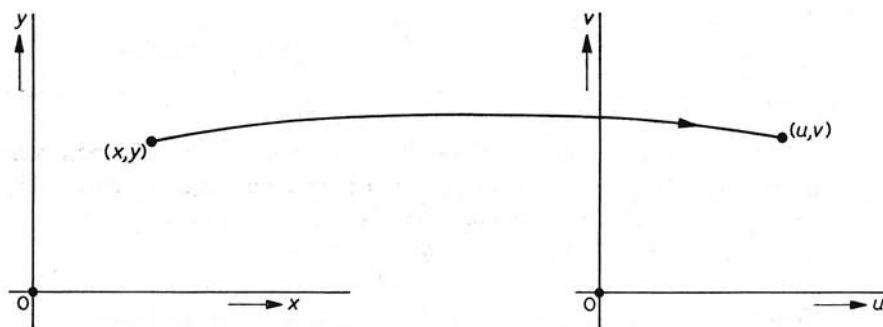
Voorbeeld 2

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = x - y$$

S is het gehele x, y -vlak.

Fig. 70



Voorbeeld 3

$$u = x \cos y$$

$$v = x \sin y$$

$$S = \{(x, y) | x \geq 0; 0 \leq y < 2\pi\}$$

Van bijzonder belang zijn die transformaties waarbij x en y op eenduidige wijze kunnen worden uitgedrukt in u en v via de *inverse transformatie*. Soms is het direct te zien hoe deze wordt gevonden. Zo geldt in voorbeeld 1:

$$x = \frac{3}{2}u + \frac{4}{3}v$$

$$y = \frac{4}{2}u - \frac{3}{2}v$$

In voorbeeld 2 is het iets minder doorzichtig. Daar geldt:

$$\frac{u}{v} = x + y \quad (\text{als } x \neq y, \text{ dus } v \neq 0)$$

Met $v = x - y$ volgt dan:

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{v} + v \right)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{v} - v \right)$$

In voorbeeld 3 vindt men:

$$u^2 + v^2 = x^2$$

$$\sin y = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \cos y = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad ((u, v) \neq (0, 0))$$

In par. 61 zullen we verder ingaan op de voorwaarden waaronder dit „oplossen” mogelijk is, dus op de existentievoorwaarden voor de inverse transformatie.

Voorlopig nemen we aan dat dit „oplossen” gelukt, en dat door (60.1) een gebied G in het x, y -vlak één-eenduidig wordt afgebeeld op een gebied H in het u, v -vlak. Met elk punt $(x, y) \in G$ correspondeert juist één punt $(u, v) \in H$ en omgekeerd. De inverse transformatie duiden we aan met:

$$\left. \begin{aligned} x &= X(u, v) \\ y &= Y(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (60.2)$$

In dit geval kunnen we door middel van (60.1) en (60.2) ook nieuwe coördinaten in het platte vlak invoeren. Is $P \in G$ een punt met coördinatenpaar (x_0, y_0) , dan wordt hierdoor eenduidig een punt $Q \in H$ bepaald met coördinatenpaar (u_0, v_0) :

$$u_0 = U(x_0, y_0)$$

$$v_0 = V(x_0, y_0)$$

Omgekeerd zijn door u_0 en v_0 de coördinaten x_0 en y_0 eenduidig vastgelegd door:

$$x_0 = X(u_0, v_0)$$

$$y_0 = Y(u_0, v_0)$$

De ligging van P is dus eenduidig vastgelegd door het getallenpaar (u_0, v_0) . Aan P kunnen we als coördinaten toekennen (u_0, v_0) , ook wel *kromlijnige coördinaten* genoemd. De „coördinaatlijnen”: $u = \text{constant}$ en $v = \text{constant}$ worden in het x, y -vlak afgebeeld door twee stelsels krommen, waarvan de vergelijkingen zijn:

$$U(x, y) = k_1$$

$$V(x, y) = k_2 \quad (k_1 \text{ en } k_2 \text{ zijn constanten})$$

Elk punt in G is dan het snijpunt van één kromme van het ene stelsel met één van het andere stelsel.

Voorbeeld 4

Als

$$u = 3x + 4y$$

$$v = 4x - 3y$$

dan is

$$x = \frac{3}{25}u + \frac{4}{25}v$$

$$y = \frac{4}{25}u - \frac{3}{25}v$$

De nieuwe „coördinaatlijnen” hebben dan de vergelijkingen:

$$u = 3x + 4y = k_1$$

$$v = 4x - 3y = k_2$$

Zie fig. 71.

Voorbeeld 5

Als

$$u = x^2 - y^2$$

$$v = x - y$$

dan geldt, indien $v \neq 0$:

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{v} + v \right)$$

$$y = \frac{1}{2} \left(\frac{u}{v} - v \right)$$

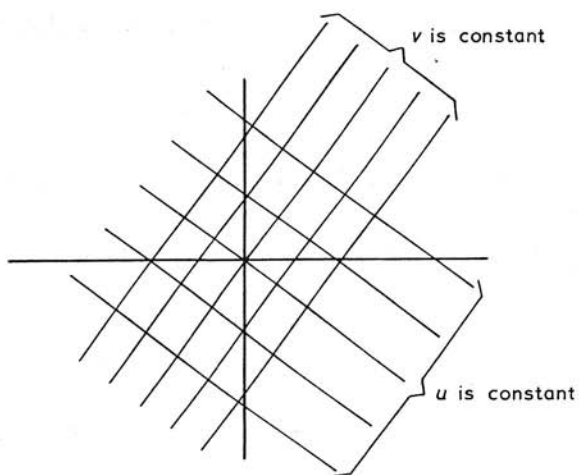


Fig. 71

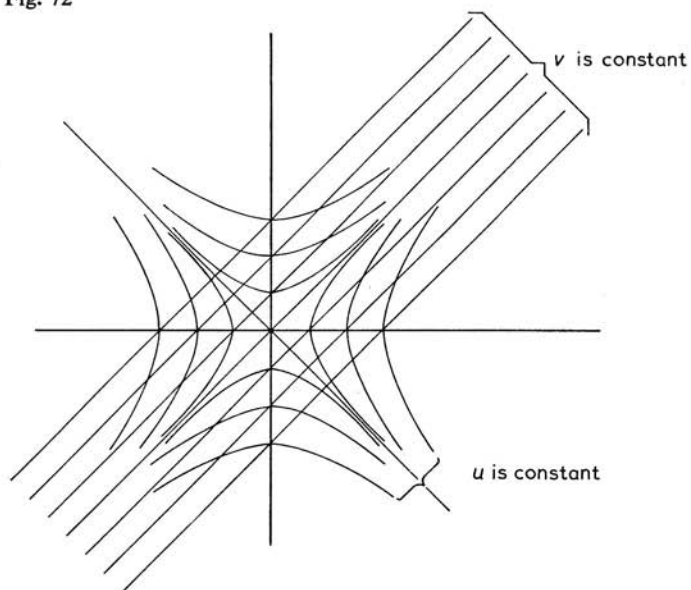
De nieuwe „coördinaatlijnen” hebben de vergelijkingen:

$$u = x^2 - y^2 = k_1 \quad (\text{d.w.z. orthogonale hyperbolen})$$

$$v = x - y = k_2 \quad (\text{d.w.z. evenwijdige rechte lijnen})$$

Zie fig. 72.

Fig. 72



Voorbeeld 6

In par. 27 bespraken we reeds de *poolcoördinaten*. Een punt P in het x, y -vlak werd daarbij vastgelegd door de voerstraal OP (met lengte ρ) en de voerhoek φ die deze voerstraal met de positieve x -as maakt.

Als we φ rekenen van 0 (inclusief) tot 2π (exclusief), dan correspondeert met ieder paar (ρ, φ) met $\rho \geq 0$ en $\varphi \in [0, 2\pi)$ precies één punt in het x, y -vlak. Bij gegeven ρ en φ vindt men de rechthoekige coördinaten van P uit:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos \varphi \\ y &= \rho \sin \varphi \end{aligned} \right\} \quad (60.3)$$

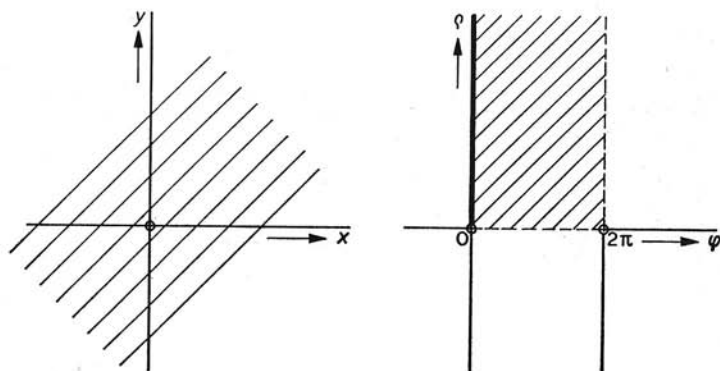
Omgekeerd correspondeert met ieder punt P (met uitzondering van O) in het x, y -vlak juist één paar (ρ, φ) met $\rho > 0$ en $\varphi \in [0, 2\pi)$. O heeft een voerstraal met lengte 0. Aan O is geen voerhoek toegevoegd. Vanwege (60.3) wordt het x, y -vlak, met uitzondering van O, één-eenduidig afgebeeld op de strook in het ρ, φ -vlak bepaald door (zie fig. 73): $\{(\rho, \varphi) \mid \rho > 0; \varphi \in [0, 2\pi)\}$.

Bij gegeven x en y bepaalt men ρ en φ uit:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \sin \varphi &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned} \right\}$$

Door deze laatste twee vergelijkingen en het gegeven $\varphi \in [0, 2\pi)$ is φ eenduidig bepaald als $(x, y) \neq (0, 0)$.

Fig. 73



De nieuwe coördinaatlijnen zijn:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = k_1 \quad (\text{dus } x^2 + y^2 = k_1^2, \text{ d.w.z. concentrische cirkels met } O \text{ als middelpunt})$$

$$\varphi = k_2 \quad (\text{m.a.w. halve rechten door } O)$$

Zie fig. 74.

We bepalen ons tot het algemene geval.

We veronderstellen dat niet alleen x en y „opgelost” kunnen worden uit (60.1), waardoor we x en y verkrijgen „als functie van u en v ” in de gedaante (60.2), maar we nemen ook aan dat de functies U en V , resp. X en Y continue partiële afgeleiden bezitten naar x en y , resp. naar u en v . Zonder X en Y expliciet te bepalen kunnen we de partiële afgeleiden X_u, X_v, Y_u en Y_v op de volgende wijze berekenen.

We substitueren $x = X(u, v)$ en $y = Y(u, v)$ in (60.1), waardoor de volgende identiteiten ontstaan:

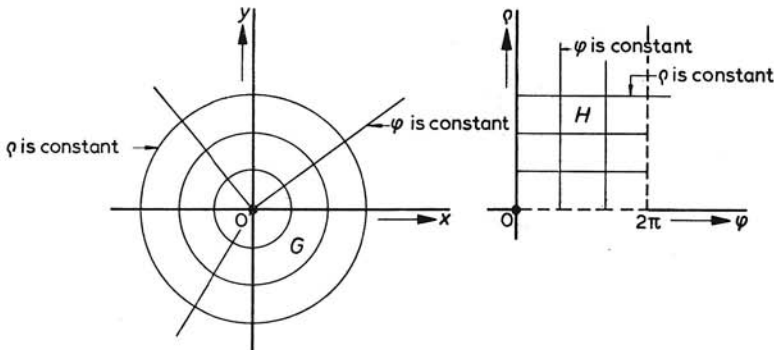
$$u = U\{X(u, v), Y(u, v)\}$$

$$v = V\{X(u, v), Y(u, v)\}$$

Differentiëren we rechter- en linkerlid van elk van deze identiteiten partieel naar u en v (het rechterlid als samengestelde functie), dan krijgen we:

$$\left. \begin{aligned} 1 &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} \\ 0 &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} \end{aligned} \right\} \quad (60.4)$$

Fig. 74



en

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} \\ 1 &= \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} \end{aligned} \right\} \quad (60.5)$$

Uit (60.4) en (60.5) kan men $\frac{\partial X}{\partial u}$, $\frac{\partial Y}{\partial u}$, $\frac{\partial X}{\partial v}$ en $\frac{\partial Y}{\partial v}$ oplossen, mits de determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix} \text{ ongelijk is aan nul.}$$

Deze determinant is de in par. 6 ingevoerde functionaaldeterminant of determinant van Jacobi, geschreven als $\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)}$. Indien we ter afkorting deze determinant D stellen volgt uit (60.4) en (60.5):

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \quad (60.6)$$

Met behulp van (60.6) kan men de functionaaldeterminant van de inverse functies

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

gemakkelijk berekenen. Immers:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} &= \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} \\ &= \frac{1}{D^2} \left\{ \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} \right\} \\ &= \frac{D}{D^2} = \frac{1}{D} = \frac{1}{\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)}} \end{aligned}$$

zodat:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)}}$$

In woorden: *De functionaaldeterminant van het inverse systeem van functies is het omgekeerde van die van het oorspronkelijke systeem, indien deze laatste van nul verschilt.*

Voorbeeld 7

$$u = U(x, y) = 3x + 4y$$

$$v = V(x, y) = 4x - 3y$$

Hier geldt:

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -25$$

Dus als

$$x = X(u, v)$$

$$y = Y(u, v)$$

dan geldt:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{25}$$

hetgeen ook gemakkelijk te verifiëren is door x en y op te lossen.

Voorbeeld 8

$$u = U(x, y) = x^2 - y^2$$

$$v = V(x, y) = x - y$$

Hier geldt:

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2(x - y)$$

Dus als

$$x = X(u, v)$$

$$y = Y(u, v)$$

dan geldt:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2(x - y)} = -\frac{1}{2v} \quad (v \neq 0)$$

Ook dit kan men gemakkelijk verifiëren door x en y op te lossen.

Voorbeeld 9

$$x = X(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$$

$$y = Y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$$

Hier is:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$$

Dus als

$$\rho = R(x, y)$$

$$\varphi = \Phi(x, y)$$

dan geldt:

$$\frac{\partial(R, \Phi)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

61 Existentievoorwaarden voor de inverse transformatie

In deze paragraaf gaan we nader in op de voorwaarden waaronder de transformatie-
(afbeelding), bepaald door:

$$\left. \begin{aligned} u &= U(x, y) \\ v &= V(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (61.1)$$

een inverse heeft.

We veronderstellen dat door (61.1) het punt (x_0, y_0) in het x, y -vlak afgebeeld wordt op het punt (u_0, v_0) in het u, v -vlak. Verder nemen we aan dat in een omgeving van het punt (x_0, y_0) de partiële afgeleiden U_x, U_y, V_x, V_y bestaan en continu zijn. We spreken dan van een continu differentieerbare transformatie of continu differentieerbare afbeelding.

Hiervoor geldt de volgende omkeerstelling.

Stelling

Indien in een omgeving van het punt $P(x_0, y_0)$ de functies U en V continue partiële afgeleiden naar x en naar y bezitten, terwijl de functionaaldeterminant

$$D = \frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} \end{vmatrix}$$

in (x_0, y_0) ongelijk is aan nul, dan is er een omgeving G van (x_0, y_0) in het x, y -vlak, waar het stelsel (61.1) eenduidig oplosbaar is. D.w.z. als we het beeldgebied van G in het u, v -vlak aangeven met H , dan zijn er eenduidig bepaalde functies X en Y die H afbeelden op G , en wel zó dat

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= X(u_0, v_0), & x &= X(u, v) \\ y_0 &= Y(u_0, v_0), & y &= Y(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (61.2)$$

terwijl geldt:

$$\left. \begin{aligned} u &= U\{X(u, v), Y(u, v)\} \\ v &= V\{X(u, v), Y(u, v)\} \end{aligned} \right\} \quad (61.3)$$

voor alle $(u, v) \in H$.

Bovendien geldt dat in H de functies X en Y continue partiële afgeleiden naar u en v bezitten, die gevonden worden uit:

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial u} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{D} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \quad (61.4)$$

De bedoelde afbeeldingen worden schematisch in fig. 75 weergegeven.

Bewijs:

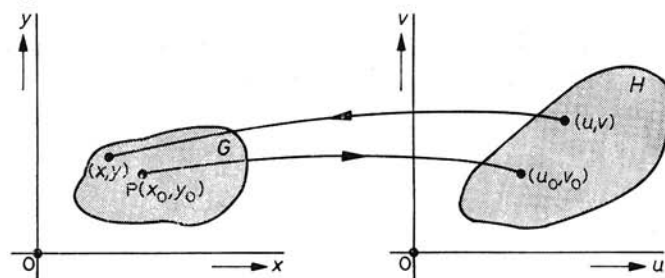
Daar in P geldt: $D \neq 0$, kan niet tegelijkertijd gelden: $\frac{\partial U}{\partial x_0} = 0$ en $\frac{\partial U}{\partial y_0} = 0$. Bovendien is er een omgeving van P , waar D een constant teken heeft. Stel $\frac{\partial U}{\partial x_0} \neq 0$, dan volgt op grond van de stelling over impliciete functies (zie par. 7) dat in een zekere omgeving van P de variabele x kan worden opgelost „als functie van u en y ” uit de vergelijking:

$$u = U(x, y)$$

d.w.z. er bestaat een functie g van u en y (zelfs met continue partiële afgeleiden naar u en y), zo dat:

$$x = g(u, y) \text{ en } u = U\{g(u, y), y\}.$$

Fig. 75



Substitueert men dit resultaat in (61.1), dan verkrijgt men:

$$\left. \begin{aligned} u &= U\{g(u, y), y\} = U^*(u, y) \\ v &= V\{g(u, y), y\} = V^*(u, y) \end{aligned} \right\} \quad (61.5)$$

Partiële differentiatie van (61.5) naar y geeft (u constant!):

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\frac{\partial V^*}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}$$

Elimineert men hieruit $\frac{\partial g}{\partial y}$, dan krijgt men:

$$\frac{\partial V^*}{\partial y} = \frac{1}{\frac{\partial U}{\partial x}} \cdot D$$

Uit het feit dat D en $\frac{\partial U}{\partial x}$ in P van nul verschillen, volgt dat er een omgeving van $P(x_0, y_0)$ bestaat, waarin deze een constant teken hebben. Dus heeft ook $\frac{\partial V^*}{\partial y}$ in die omgeving een constant teken.

Volgens de hiervoor aangehaalde stelling uit par. 7, wordt door

$$v = V^*(u, y)$$

y gedefinieerd „als functie van u en v ”, d.w.z. er bestaat een functie Y van u en v (zelfs met continue partiële afgeleiden naar u en v), zó dat

$$\left. \begin{aligned} y &= Y(u, v) \\ v &= V^*\{u, Y(u, v)\} \end{aligned} \right\} \quad (61.6)$$

Doch dan volgt uit $x = g(u, y)$ dat:

$$x = g\{u, Y(u, v)\}$$

waarvoor we schrijven:

$$x = X(u, v)$$

Tezamen met (61.6) vinden we:

$$x = X(u, v)$$

$$y = Y(u, v)$$

waarmede (61.2) en (61.3) zijn bewezen.

De beweringen in (61.4) volgen door toepassing van de kettingregel, zoals we dit al (formeel) in par. 60 hebben gedaan.

Het kan zijn dat in de omgeving waar $D \neq 0$ niet in elk punt geldt: $\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$. We verdelen dan – zo mogelijk – G in eindig veel delen, waar òf $\frac{\partial U}{\partial x} \neq 0$, òf $\frac{\partial U}{\partial y} \neq 0$.

Wegens $D \neq 0$ kan in een punt van de bedoelde omgeving niet tegelijk gelden: $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$.

De punten waarin $D = 0$ noemt men *singuliere punten* van de afbeelding. In zulke punten heeft de afbeelding geen inverse.

Voorbeeld

Bij poolcoördinaten geldt:

$$x = X(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$$

$$y = Y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$$

en dus:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho$$

De oorsprong O , waar $\rho = 0$, is dus een singulier punt van het poolcoördinatenstelsel. In fig. 74 is elk punt, met uitzondering van O bepaald als snijpunt van een cirkel met vergelijking: $\rho = \rho_0$ en een halve rechte door O met vergelijking: $\varphi = \varphi_0$. Elk punt behalve O is dan snijpunt van juist één cirkel met juist één halve rechte. Voor het singuliere punt O geldt dit niet.

Opmerking:

Zonder bewijs vermelden we nog, dat de afbeelding (61.1) „oriëntatiebehoudend” is, indien de functionaaldeterminant $\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)}$ positief is, d.w.z. dat als een punt P een kromme K in het x, y -vlak „linksom” doorloopt, het beeldpunt P' in het u, v -vlak de beeldkromme K' eveneens „linksom” doorloopt. Indien $\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)}$ negatief is, dan doorloopt P' de beeldkromme K' „rechtsom”, als P de kromme K „linksom” doorloopt.

62 Invoeren van nieuwe variabelen in een dubbelintegraal

Bij het berekenen van de enkelvoudige integraal $\int_a^b f(x) dx$ vervangen we in vele gevallen de variabele x door een nieuwe variabele t , die met x samenhang volgens de betrekking: $x = \varphi(t)$. Het bleek daarbij dat deze integraal dezelfde waarde heeft als een andere integraal met andere integrand en een ander integratie-interval, t.w.:

$$\int_a^b f\{\varphi(t)\} \varphi'(t) dt$$

waarbij $a = \varphi(\alpha)$ en $b = \varphi(\beta)$. Tevens moet φ aan zekere voorwaarden voldoen (zie deel 1, par. 32).

Bij het berekenen van dubbelintegralen is iets dergelijks mogelijk.

Stel dat we moeten berekenen:

$$\iint_G f(x, y) dx dy \quad (62.1)$$

waarbij f een continue functie is en G een (toelaatbaar) integratiegebied. We beelden G af op een gebied H in het u, v -vlak door middel van de transformatie:

$$x = X(u, v)$$

$$y = Y(u, v)$$

waarbij de functies X en Y voldoen aan de voorwaarden van de stelling uit par. 61.

Verder nemen we aan dat op G geldt: $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \neq 0$. Het zal blijken dat de te bere-

kenen integraal (62.1) dezelfde waarde heeft als een integraal over H in het u, v -vlak met een andere integrand. Er geldt dan:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_H f\{X(u, v), Y(u, v)\} \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (62.2)$$

Het is van belang de afbeeldingsfuncties X en Y zodanig te kiezen dat de integraal in het rechterlid van (62.2) eenvoudiger te berekenen is dan die in het linkerlid, òf doordat de integrand eenvoudiger is, òf het integratiegebied, òf beide.

Voordat we op het bewijs van (62.2) ingaan, verduidelijken we deze betrekking eerst met een voorbeeld.

Voorbeeld 1

Bereken de integraal:

$$\iint_G e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$$

waarin $G = \{(x, y) | x \geq 0; y \geq 0; x + y \leq 1\}$, hetgeen betekent dat G de afgesloten driehoek is met hoekpunten: $(0, 0)$, $(0, 1)$ en $(1, 0)$ (zie fig. 76).

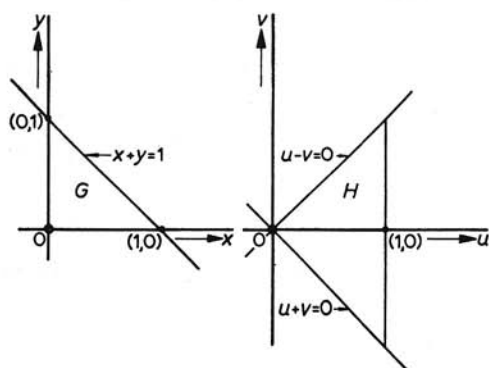


Fig. 76

Oplissing:

We beelden het gebied G in het x, y -vlak af op het gebied H in het u, v -vlak door middel van de transformatie:

$$u = U(x, y) = x + y$$

$$v = V(x, y) = x - y$$

Het beeldgebied H van G is dan bepaald door: $H = \{(u, v) | 0 \leq u \leq 1; -u \leq v \leq u\}$. Hierbij is H dus de afgesloten driehoek met hoekpunten $(0, 0)$, $(1, 1)$ en $(1, -1)$.

Verder geldt:

$$U_x = 1, U_y = 1, V_x = 1, V_y = -1$$

zodat:

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

en dus:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}$$

Volgens (62.2) is dan:

$$\begin{aligned} \iint_G e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy &= \iint_H e^{-\frac{v}{u}} \frac{1}{2} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \int_{-u}^u e^{-\frac{v}{u}} dv \right\} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-u \cdot e^{-\frac{v}{u}} \right]_{v=-u}^{v=u} du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (-u \cdot e^{-1} + u \cdot e) du \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \int_0^1 u \, du = \frac{1}{4} \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

Aan het bewijs van (62.2) ligt de volgende stelling ten grondslag.

Stelling 1

Als G een gebied is in het x, y -vlak, begrensd door een Jordankromme K en als G afgebeeld wordt op het gebied H in het u, v -vlak begrensd door de Jordankromme L door middel van de transformatie:

$$x = X(u, v)$$

$$y = Y(u, v)$$

waarbij X en Y voldoen aan de bovengenoemde voorwaarden, dan geldt voor de oppervlakte O van het gebied G :

$$O = \iint_H \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv \quad (62.3)$$

Bewijs:

Stel dat een parametervoorstelling van K is:

$$x = \varphi_1(t)$$

$$y = \varphi_2(t)$$

Varieert bij het eenmaal linksom doorlopen van K de parameter t van t_0 tot t_1 , dan geldt volgens (58.4):

$$O = \int_{K^+} x \, dy = \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) \varphi_2'(t) \, dt \quad (62.4)$$

Op K kunnen we de transformatieformules lezen als:

$$\left. \begin{aligned} x &= \varphi_1(t) = X(u, v) \\ y &= \varphi_2(t) = Y(u, v) \end{aligned} \right\} \quad (62.5)$$

zodat op de beeldkromme L geldt:

$$\left. \begin{aligned} u &= \psi_1(t) \\ v &= \psi_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (62.6)$$

De uitdrukking (62.5) gaat dan over in:

$$x = \varphi_1(t) = X\{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$$

$$y = \varphi_2(t) = Y\{\psi_1(t), \psi_2(t)\}$$

Door deze substitutie gaat (62.4) over in:

$$\begin{aligned}
 O &= \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) \left\{ \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{d\psi_1}{dt} + \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{d\psi_2}{dt} \right\} dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{d\psi_1}{dt} dt + \int_{t_0}^{t_1} \varphi_1(t) \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{d\psi_2}{dt} dt
 \end{aligned} \tag{62.7}$$

Wanneer een punt de kromme K linksom doorloopt, zal (zie opmerking bij par. 61) het beeldpunt de beeldkromme L linksom of rechtsom doorlopen, al naargelang de functionaaldeterminant $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)}$ positief of negatief is. Stellen we deze determinant voor door D , dan kan men (62.7) wegens (62.5) en (62.6) schrijven als:

$$O = \frac{|D|}{D} \int_{L^+} X(u, v) \frac{\partial Y}{\partial u} du + X(u, v) \frac{\partial Y}{\partial v} dv \tag{62.8}$$

Volgens de formule van Green geldt:

$$\int_{L^+} P(u, v) du + Q(u, v) dv = \iint_H \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} \right) du dv$$

Passen we dit toe met

$$P(u, v) = X(u, v) \frac{\partial Y}{\partial u} \text{ en } Q(u, v) = X(u, v) \frac{\partial Y}{\partial v}$$

dan geldt:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} &= \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} + X(u, v) \frac{\partial^2 Y}{\partial u \partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} - X(u, v) \frac{\partial^2 Y}{\partial v \partial u} \\
 &= \frac{\partial X}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} \\
 &= \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = D
 \end{aligned}$$

De formule (62.8) gaat dan over in:

$$O = \frac{|D|}{D} \iint_H D du dv = \iint_H |D| du dv$$

Hiermee is stelling 1 bewezen.*

Met behulp van stelling 1 kunnen we de berekening van de oppervlakte O vereenvoudigen, indien de integraal in het rechterlid gemakkelijk te berekenen is.

* We merken hierbij op dat we in dit bewijs gebruikt hebben: $\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial u}$, ofschoon we dit bij de formulering van stelling 1 niet geeist hebben. Er zijn nl. „zuiniger” bewijzen van stelling 1.

Voorbeeld 2

Bereken de oppervlakte van het in het eerste kwadrant gelegen begrensde vlakdeel G dat ingesloten wordt door de parabolen met vergelijkingen:

$$y = 2x^2; y = x^2; x = 2y^2; x = y^2$$

G is dus bepaald door $\{(x, y) | y^2 \leq x \leq 2y^2; x^2 \leq y \leq 2x^2\}$ (zie fig. 77).

Oplossing:

We beelden het x, y -vlak af op het u, v -vlak door middel van de transformatie:

$$u = \frac{y^2}{x}$$

$$v = \frac{x^2}{y}$$

Het beeld H is het vlakdeel in het u, v -vlak, bepaald door

$$H = \{(u, v) | \frac{1}{2} \leq u \leq 1; \frac{1}{2} \leq v \leq 1\}$$

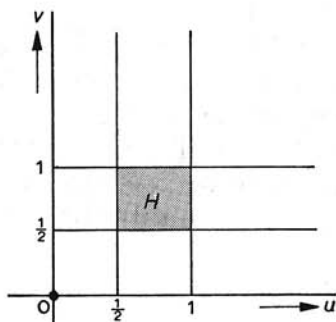
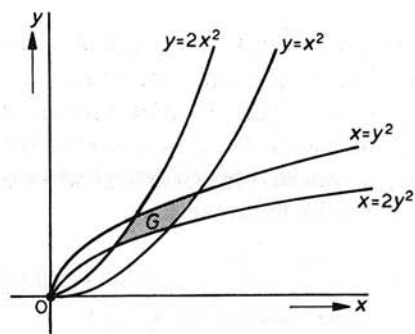
Als we de oppervlakte van G door O voorstellen, dan geldt:

$$O = \iint_H \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Hierin is

$$\begin{aligned} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} &= \left\{ \frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} \right\}^{-1} \\ &= \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix}^{-1} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Fig. 77



zodat:

$$O = \int_{u=\frac{1}{2}}^1 \int_{v=\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{3} dudv = \frac{1}{12}$$

Gevolg van stelling 1

Als we op (62.3) de middelwaardestelling van de integraalrekening toepassen (zie par. 53), dan geldt als O' de oppervlakte van H voorstelt, dat er een punt (u_0, v_0) bestaat in H , zodanig dat:

$$O = \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u_0, v_0)} \right| O'$$

Schets van een bewijs van (62.2):

We verdelen G in een eindig aantal b.v. n oppervlakte-elementen G_1, G_2, \dots, G_n met oppervlakten $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_n$. De corresponderende elementen in het u, v -vlak zijn: H_1, H_2, \dots, H_n met oppervlakten $\Delta H_1, \Delta H_2, \dots, \Delta H_n$.

Volgens „gevolg van stelling 1” is er in iedere H_i een punt (u_i, v_i) zodanig dat:

$$\Delta G_i = \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u_i, v_i)} \right| \Delta H_i$$

Als (x_i, y_i) het punt is dat in het x, y -vlak correspondeert met (u_i, v_i) in het u, v -vlak, dan geldt:

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta G_i = \sum_{i=1}^n f\{X(u_i, v_i), Y(u_i, v_i)\} \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u_i, v_i)} \right| \Delta H_i$$

Hiermee kan men bewijzen (door steeds de verdeling te verfijnen), dat geldt:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_H f\{X(u, v), Y(u, v)\} \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Opmerking:

De betrekking (62.2) blijft ook geldig als D in G overal gelijk van teken is, maar alleen in een eindig aantal punten 0 is. We sluiten dan in dat geval deze punten van het integratiegebied uit, door er gebiedjes met diameter d (b.v. cirkels) omheen te leggen. Voor het overblijvende deel geldt dan (62.2) waarna de geldigheid voor het gehele gebied wordt verkregen door d tot 0 te laten naderen. In par. 65 komen we hierop terug.

63 Meetkundige toelichting bij de transformatie van dubbelintegralen

In deze paragraaf zullen we de formules (62.3) en (62.2) meetkundig toelichten. De notaties en veronderstellingen zijn die van par. 61.

We verdelen daartoe het gebied G door middel van krommen, gedefinieerd door:

$$U(x, y) = c_i$$

$$V(x, y) = c_j$$

waarin c_i en c_j willekeurige constanten zijn. Hierdoor wordt G verdeeld in deelgebiedjes G_{ij} met oppervlakten ΔG_{ij} , waarbij G_{ij} begrensd wordt door de krommen met vergelijkingen:

$$U(x, y) = u_i, \quad U(x, y) = u_i + \Delta u_i$$

$$V(x, y) = v_j, \quad V(x, y) = v_j + \Delta v_j$$

Hierin zijn $u_i, v_j, \Delta u_i$ en Δv_j constant (zie fig. 78).

De hoekpunten van het gebied G_{ij} dat we in fig. 79 vergroot hebben weergegeven, noemen we $P(x, y), Q(x + \Delta_1 x, y + \Delta_1 y), S(x + \Delta_2 x, y + \Delta_2 y)$ en T .

Wanneer de verdeling erg fijn is, dan is „bij benadering“:

$$\Delta G_{ij} \approx \text{opp. parallelogram PQRS}$$

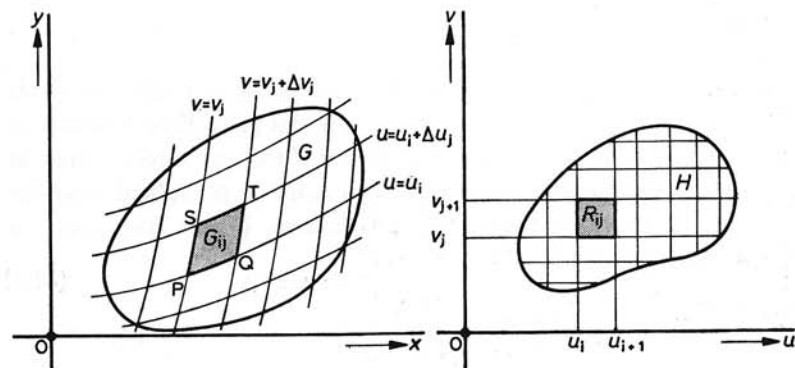
Deze oppervlakte is volgens een stelling uit de lineaire algebra gelijk aan de absolute

waarde van $\begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_1 y \\ \Delta_2 x & \Delta_2 y \end{vmatrix}$.

Op de kromme met vergelijking $U(x, y) = u_i$ is u constant. Daarop is x verder alleen afhankelijk van v , dus:

$$x = X(u_i, v) = X^*(v)$$

Fig. 78



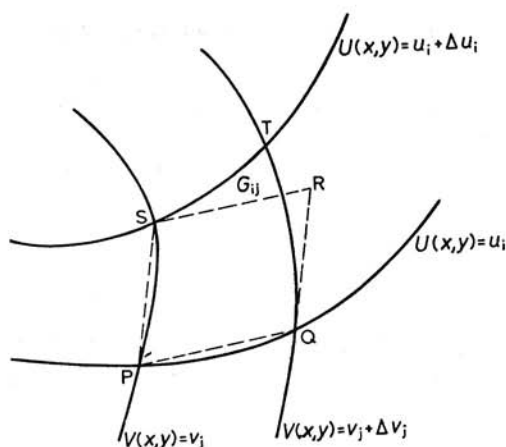


Fig. 79

Als we x als functie van v opvatten, dan geldt bij benadering:

$$x + \Delta_1 x = x + \left(\frac{dX^*}{dv} \right)_{v_j} \Delta v_j = x + \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)_P \Delta v_j$$

en dus:

$$\Delta_1 x \approx \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)_P \Delta v_j$$

Zo vindt men ook:

$$\Delta_1 y \approx \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)_P \Delta v_j$$

Op de kromme met vergelijking:

$$V(x, y) = v_j$$

is v constant en dus y een functie van u alleen. Dit geeft:

$$\Delta_2 x \approx \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)_P \Delta u_i$$

$$\Delta_2 y \approx \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)_P \Delta u_i$$

Bij benadering is:

$$\Delta G_{ij} \approx \begin{vmatrix} \Delta_1 x & \Delta_1 y \\ \Delta_2 x & \Delta_2 y \end{vmatrix} = \left\| \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)_P & \left(\frac{\partial Y}{\partial v} \right)_P \\ \left(\frac{\partial X}{\partial u} \right)_P & \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \right)_P \end{pmatrix} \right\| |\Delta u_i| |\Delta v_j| \quad (63.1)$$

Als we bovendien aannemen dat het totaal van alle benaderingsfouten bij toenemende verdeling van G tot nul nadert en de randkromme geen problemen oplevert, dan lijkt het aannemelijk dat

$$\iint_G dx dy = \iint_H \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

en daaruit:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \iint_H f\{X(u, v), Y(u, v)\} \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Opmerking:

In fig. 78 stelt in het u, v -vlak $\Delta R_{ij} = |\Delta u_i| |\Delta v_j|$ de oppervlakte voor van het rechthoekje R_{ij} , dat in het x, y -vlak afgebeeld wordt op het gebiedje G_{ij} met oppervlakte ΔG_{ij} . Uit (63.1) ziet men dat ΔG_{ij} (bij benadering) verkregen wordt door ΔR_{ij} met de factor $\left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right|$ te vermenigvuldigen.

64 Enkele toepassingen van transformatie van dubbelintegralen

Toepassing 1

Bereken de oppervlakte van het afgesloten gebied E met rand de ellips met vergelijking:

$$(3x + 4y)^2 + (2x + y)^2 = 16$$

Oplossing:

Volgens par. 57 (opmerking 2) is de oppervlakte gelijk aan

$$\iint_E dx dy$$

We voeren nieuwe variabelen in, die gedefinieerd zijn door de vergelijkingen:

$$u = U(x, y) = 3x + 4y$$

$$v = V(x, y) = 2x + y$$

Nu is $\frac{\partial U}{\partial x} = 3, \frac{\partial U}{\partial y} = 4, \frac{\partial V}{\partial x} = 2, \frac{\partial V}{\partial y} = 1$, zodat:

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$$

dus:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{3}$$

Het beeld H in het u, v -vlak van E in het x, y -vlak is:

$$H = \{(u, v) | u^2 + v^2 \leq 16\}$$

d.i. het afgesloten gebied van een cirkel met vergelijking $u^2 + v^2 = 16$ (zie fig. 80).

We vinden volgens par. 62:

$$\iint_E dx dy = \iint_H \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{3} \pi$$

Toepassing 2

Bereken de integraal $I = \iint_G xy dx dy$, waarbij G het in het eerste kwadrant gelegen afgesloten gebied is, ingesloten door de krommen met vergelijkingen $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 16$.

Oplossing:

We voeren nieuwe variabelen in, gedefinieerd door de vergelijkingen:

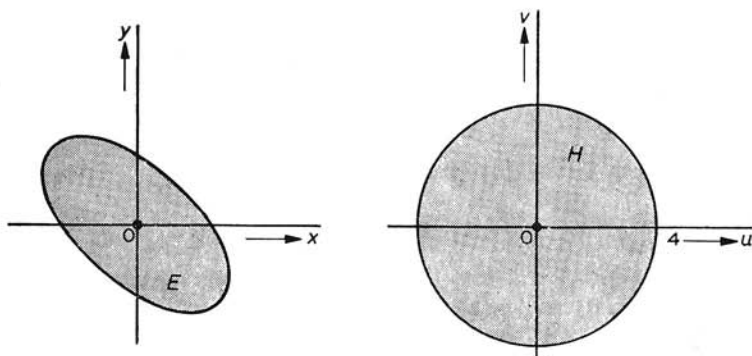
$$u = U(x, y) = x^2 - y^2$$

$$v = V(x, y) = x^2 + y^2$$

Nu geldt:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 2y$$

Fig. 80



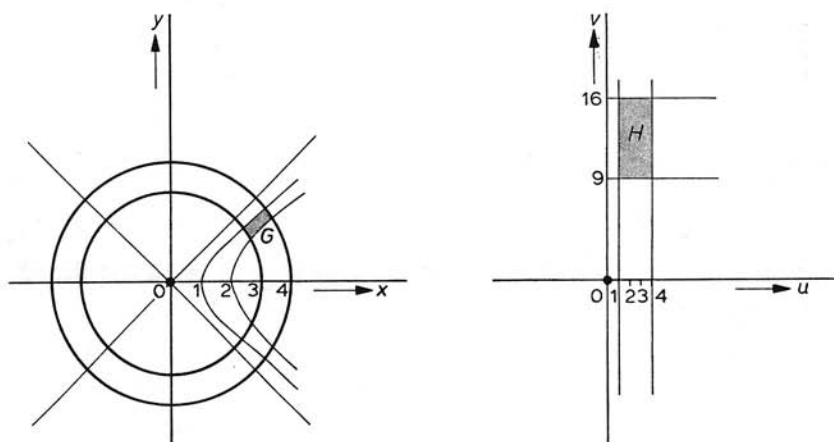


Fig. 81

zodat:

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2x & 2y \end{vmatrix} = 8xy$$

en dus:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{8xy}$$

Het beeldgebied H in het u, v -vlak is $H = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 4; 9 \leq v \leq 16\}$ (zie fig. 81).

We vinden:

$$\begin{aligned} I &= \iint_G xy \, dx \, dy \\ &= \iint_H xy \cdot \frac{1}{8xy} \, du \, dv \\ &= \frac{1}{8} \iint_H du \, dv \\ &= \frac{1}{8} \int_1^4 du \int_9^{16} dv = \frac{21}{8} \end{aligned}$$

65 Cilindercoördinaten in dubbelintegralen

In plaats van rechthoekige coördinaten gebruikt men in de ruimte ook wel de z.g. *cilindercoördinaten* ρ , φ en z . Men legt dan een punt P niet vast door zijn rechthoekige coördinaten x , y en z , maar men vervangt de x - en y -coördinaten door de poolcoördinaten ρ en φ in het x, y -vlak (zie fig. 82).

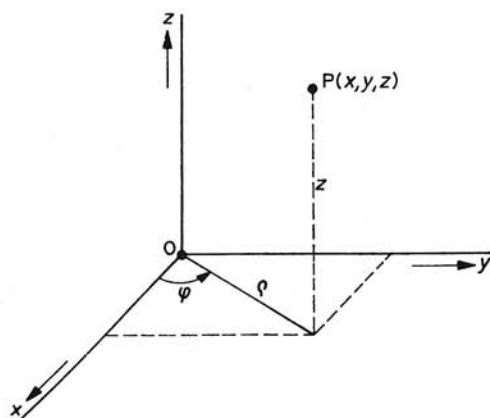


Fig. 82

Tussen de rechthoekige coördinaten en de cilindercoördinaten bestaan de volgende betrekkingen:

$$\left. \begin{aligned} x &= X(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi \\ y &= Y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \right\} \quad (65.1)$$

De formules (65.1) noemt men wel de *transformatieformules* voor de overgang van rechthoekige- naar cilindercoördinaten.

Wanneer de vergelijking van een oppervlak gegeven is in rechthoekige coördinaten door $z = f(x, y)$, dan gaat deze vergelijking bij overgang op cilindercoördinaten over in:

$$z = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi)$$

Een integraal van de gedaante

$$I = \iint_G f(x, y) dx dy \quad (65.2)$$

wordt bij deze overgang formeel overgevoerd in:

$$I^* = \iint_H f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| d\rho d\varphi$$

waarin H het beeld van G is in het ρ, φ -vlak en

$$\left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(\rho, \varphi)} \right| = \left| \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} \right| = \rho$$

zodat (65.2) overgaat in:

$$I^* = \iint_H f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi \quad (65.3)$$

In par. 61 is reeds opgemerkt dat de oorsprong O een singulier punt is voor de overgang op poolcoördinaten, omdat daar $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\rho, \varphi)}$ de waarde nul heeft.

In par. 62 (opmerking) is gezegd dat de substitutie toch geoorloofd is als O in het gebied G ligt. We zullen dit hier nog nader toelichten.

We beschrijven om O in het x, y -vlak een cirkel met straal r die geheel in G ligt; het inwendige van deze cirkel noemen we C . Op het gebied $G - C$ geldt (65.3), als we het beeld van C in het ρ, φ -vlak voorstellen door C' (zie fig. 83):

$$\begin{aligned} \left| \iint_C f(x, y) dx dy \right| &= \left| \iint_G f(x, y) dx dy - \iint_{G-C} f(x, y) dx dy \right| \\ &= \left| I - \iint_{H-C'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi \right| \end{aligned}$$

f is continu binnen en op de cirkel met middelpunt O en straal r in het x, y -vlak. Er geldt daar: $|f(x, y)| \leq M$ dus:

$$\left| \iint_C f(x, y) dx dy \right| \leq M\pi r^2$$

Als we r tot nul laten naderen, vinden we dus:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left| I - \iint_{H-C'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi \right| = 0$$

of:

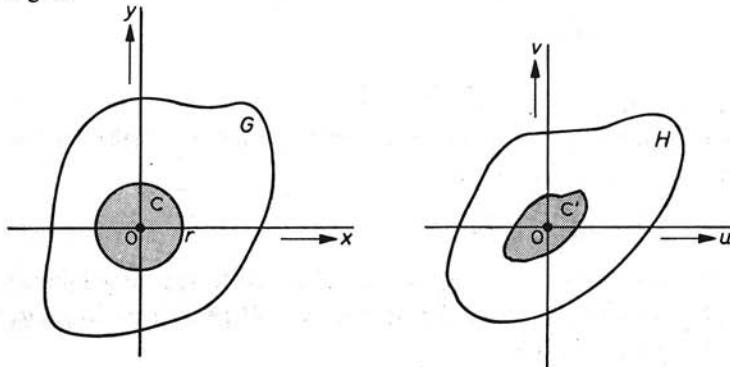
$$I = \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{H-C'} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi$$

Deze limiet definiëren we als de formeel ingevoerde I^* uit (65.3).

Opmerking:

We zouden moeten bewijzen dat we dezelfde uitkomst verkregen hadden als we in plaats van de „inkrimpende” cirkels andere gebieden hadden gekozen waarvan de diameter tot nul naderden. We gaan daarop niet nader in.

Fig. 83



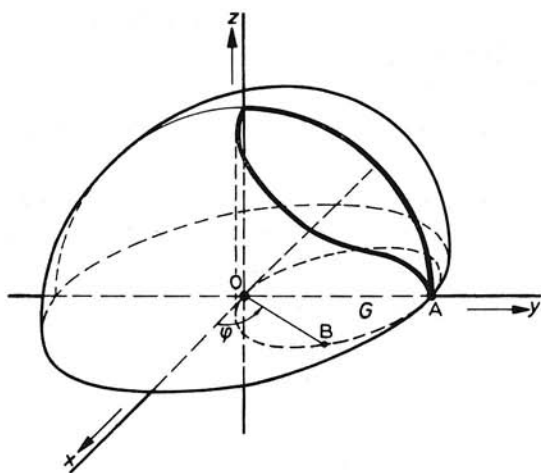


Fig. 84

Voorbeeld 1

S is een bol met middelpunt O en straal $2a$. C is een cirkel in het x, y -vlak met straal a en middelpunt $(0, a)$. Deze cirkel is richtcirkel van een rechte cirkelcilinder K . Gevraagd wordt de inhoud van dat afgesloten deel V van de ruimte dat ligt binnen de bol S en binnen de cilinder K . Voor V geldt:

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2; x^2 + (y - a)^2 \leq a^2\}$$

Oplossing:

Het lichaam waarvan de inhoud gevraagd wordt valt door snijding met het x, y -vlak en het y, z -vlak uiteen in vier delen met gelijke inhoud. Indien we het vlakdeel binnen de halve cirkel OBA (zie fig. 84) in het eerste octant G noemen, dan geldt dus voor de gevraagde inhoud I :

$$I = 4 \iint_G \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy$$

daar in het eerste octant geldt: $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$.

Bij overgang op poolcoördinaten in het platte vlak gaat G (in het x, y -vlak) over in H in het ρ, φ -vlak, waarbij H bepaald is door:

$$H = \{(\rho, \varphi) | 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi; 0 \leq \rho \leq 2a \sin \varphi\}$$

Immers, de halve cirkel die in het x, y -vlak G begrenst, heeft tot vergelijking: $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ of $x^2 + y^2 - 2ay = 0$. Op de rand van H geldt: $\rho = 2a \sin \varphi$, waarbij φ loopt van 0 tot $\frac{1}{2}\pi$ (zie fig. 85).

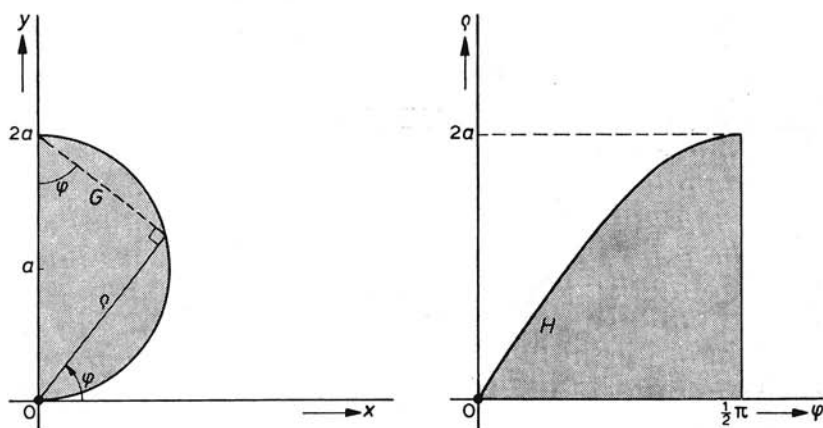


Fig. 85

Er geldt dus:

$$\begin{aligned}
 I &= 4 \iint_H \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho \, d\rho \, d\varphi \\
 &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^{2a \sin \varphi} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho \, d\rho \right\} d\varphi \\
 &= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[-(4a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_{\rho=0}^{2a \sin \varphi} d\varphi \\
 &= \frac{32a^3}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 - \cos^3 \varphi) d\varphi = \frac{32a^3}{3} \left(\frac{1}{2}\pi - \frac{2}{3} \right)
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

Bereken:

$$I = \iint_G e^{x^2+y^2-x^2y^2} \sqrt{1-x^2} \, dx \, dy$$

waarin $G = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1\}$.

Oplossing:

We voeren nieuwe variabelen in die gedefinieerd zijn door de vergelijkingen:

$$u = U(x, y) = x$$

$$v = V(x, y) = y\sqrt{1-x^2}$$

Nu geldt:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{yx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \sqrt{1-x^2}$$

zodat:

$$\frac{\partial(U, V)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-yx}{\sqrt{1-x^2}} & \sqrt{1-x^2} \end{vmatrix} = \sqrt{1-x^2}$$

en dus:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Het beeld H in het u, v -vlak is (zie fig. 86):

$$H = \{(u, v) | u \geq 0; v \geq 0; u^2 + v^2 \leq 1\}$$

We vinden dus:

$$I = \iint_H e^{u^2+v^2} \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} du dv = \iint_H e^{u^2+v^2} du dv$$

Voor de berekening van deze laatste integraal voeren we poolcoördinaten in.

We stellen:

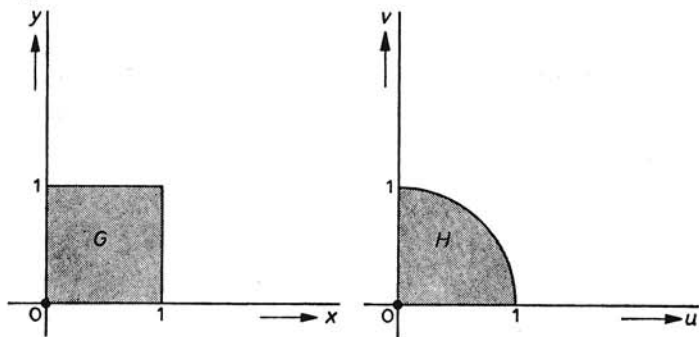
$$u = \rho \cos \varphi$$

$$v = \rho \sin \varphi$$

Als (u, v) het afgesloten gebied H doorloopt, dan zijn de grenzen voor φ resp. 0 en $\frac{1}{2}\pi$ en voor ρ (bij constante φ) 0 en 1, zodat:

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^1 e^{\rho^2} \rho d\rho \right\} d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \frac{1}{2} e^{\rho^2} \right\}_0^1 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (e - 1) d\varphi = \frac{1}{4}\pi(e - 1)$$

Fig. 86



66 Oneigenlijke integralen 1

Evenals bij integralen van functies van één variabele, kennen we ook bij dubbelintegralen *oneigenlijke* integralen. We onderscheiden ook hier:

I Oneigenlijke integralen van de eerste soort, d.w.z. integralen waarbij het integratiegebied onbegrensd is.

II Oneigenlijke integralen van de tweede soort, d.w.z. integralen waarbij de integrand één of meer singulariteiten vertoont.

In deze paragraaf zullen we de *oneigenlijke integralen van de eerste soort* behandelen.

In par. 52 hebben we bewezen dat een functie f die continu is in een begrensd (toelaatbaar) integratiegebied G , integreerbaar is op G . Het blijkt mogelijk te zijn het integraalbegrip uit te breiden voor functies die op een onbegrensd gebied gedefinieerd en continu zijn. We gaan daarbij als volgt te werk.

We kiezen een rij (afgesloten) deelgebieden in G : $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ die de volgende eigenschappen hebben:

a elk gebied G_n is begrensd;

b bij elk willekeurig begrensd deelgebied H van G bestaat een natuurlijk getal $N(H)$ (afhankelijk van H), zodanig dat H bevat is in elke G_n met $n \geq N(H)$.

Ruwweg gezegd: de G_i dijen zo uit dat ze bij voldoende grote index elk begrensd deelgebied van G bevatten.

Indien b.v. G het gehele x, y -vlak is, kunnen we voor de G_i concentrische cirkels nemen met straal i en middelpunt O ; maar ook vele andere keuzen zijn mogelijk, b.v. vierkanten met zijden evenwijdig aan de coördinaatassen, middelpunt in O en lengten van de zijden $2i$.

Indien nu f integreerbaar is op elk gebied G_n van zo'n gekozen rij, en indien de limiet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} f(x, y) dx dy$$

bestaat en onafhankelijk is van de keuze van de gebieden G_n , dan definiëren we:

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} f(x, y) dx dy$$

We noemen dan $\iint_G f(x, y) dx dy$ ook een dubbelintegraal, en wel een *oneigenlijke dubbelintegraal van de eerste soort*.

Als $\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} f(x, y) dx dy$ bestaat, noemen we deze oneigenlijke integraal *convergent*.

Ook als deze limiet niet bestaat, noemen we $\iint_G f(x, y) dx dy$ een oneigenlijke integraal, maar dan een *divergente* oneigenlijke integraal van de eerste soort.

Voorbeeld 1

Bereken:

$$I = \iint_G e^{-x^2-y^2} dx dy$$

waarbij G het gehele x, y -vlak voorstelt.

Oplossing:

We kiezen voor de hierboven genoemde deelgebieden de verzamelingen C_n , gedefinieerd door:

$$C_n = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq n^2; n \in \mathbb{N}\}$$

C_n is dus de afgesloten cirkelschijf met straal n en middelpunt O . Het is duidelijk dat deze C_n voldoen aan de eisen die we aan de G_n stelden.

We moeten nu bepalen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dx dy \quad (66.1)$$

en aantonen dat deze limiet onafhankelijk is van de keuze van de gebieden G_n , mits die voldoen aan de gestelde eisen.

Voor het berekenen van de integraal in (66.1) gaan we over op poolcoördinaten.

We vinden dan:

$$\iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^n e^{-\rho^2} \rho d\rho \right\} d\varphi = 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\rho^2} \right]_0^n = \pi(1 - e^{-n^2})$$

Dus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$$

We moeten nog aantonen dat deze limiet onafhankelijk is van de keuze van de deelgebieden G_n .

We nemen daartoe een rij begrensde gebieden G_1, G_2, G_3, \dots en wel zo dat bij ieder begrensd deelgebied H van het platte vlak een natuurlijk getal $N(H)$ bestaat, zo dat

$$H \subset G_n \quad \forall n \geq N(H)$$

We zullen moeten bewijzen dat ook voor deze G_1, G_2, G_3, \dots geldt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$$

m.a.w. dat er bij elke $\varepsilon > 0$ een j_0 bestaat, zodanig dat:

$$\pi - \varepsilon < \iint_{G_j} e^{-x^2-y^2} dx dy < \pi + \varepsilon \quad \forall j > j_0$$

Nu weten we dat er bij gegeven $\varepsilon > 0$ een $N(\varepsilon)$ bestaat, zodanig dat

$$\pi - \varepsilon < \iint_{C_n} e^{-x^2-y^2} dx dy < \pi + \varepsilon$$

voor alle cirkelgebieden C_n met straal $n > N(\varepsilon)$. Op grond van de eigenschappen van de gebieden G_n is er een j_0 zo dat $C_{N(\varepsilon)} \subset G_j \quad \forall j \geq j_0$.

Elk zo'n G_j ligt echter ook weer in een cirkelgebied $C_{m(j)}$ met $m(j) \geq N(\varepsilon)$ (zie fig. 87).

Voor deze $C_{m(j)}$ geldt dus ook:

$$\pi - \varepsilon < \iint_{C_{m(j)}} e^{-x^2-y^2} dx dy < \pi + \varepsilon$$

Daar de integrand *positief* is, hebben we mede op grond van

$$C_{N(\varepsilon)} \subset G_j \subset C_{m(j)}$$

de ongelijkheden:

$$\pi - \varepsilon < \iint_{C_{N(\varepsilon)}} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{G_j} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{C_{m(j)}} e^{-x^2-y^2} dx dy < \pi + \varepsilon$$

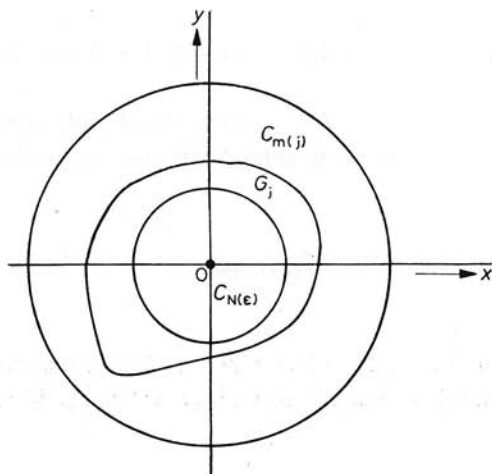
Voor $j \geq j_0$ geldt dus:

$$\pi - \varepsilon < \iint_{G_j} e^{-x^2-y^2} dx dy < \pi + \varepsilon$$

Dat wil zeggen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} e^{-x^2-y^2} dx dy = \pi$$

Fig. 87



Opmerking 1:

Kiezen we voor de deelgebieden die vierkanten V_n die bepaald worden door $V_n = \{(x, y) \mid |x| \leq n; (y) \leq n\}$, dan verkrijgen we:

$$\begin{aligned}\iint_{V_n} e^{-x^2-y^2} dx dy &= \int_{-n}^n \left\{ \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right\} e^{-y^2} dy \\ &= \left\{ \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right\} \left\{ \int_{-n}^n e^{-y^2} dy \right\} \\ &= \left\{ \int_{-n}^n e^{-x^2} dx \right\}^2\end{aligned}$$

Als n nadert tot oneindig, dan ontstaat:

$$\pi = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

Daar de integrand positief is, geldt dus ook:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

en ook:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Deze integraal wordt de *integraal van Poisson** genoemd.

De functie $x \mapsto e^{-x^2}$ heeft geen primitieven die in elementaire functies zijn uit te drukken, maar deze primitieven bestaan wel (zie deel 1, par. 30).

Een primitieve is in ieder geval de functie F met

$$F(x) = \int_0^x e^{-u^2} du$$

Deze functie, vermenigvuldigd met de factor $\frac{2}{\sqrt{\pi}}$, speelt in de foutentheorie en in de statistiek een grote rol. De waarden ervan worden door numerieke integratie benaderd en zijn in tabellen te vinden (zie b.v. Abramowitz en Stegun).

Men noemt deze laatste functie de *foutenfuntie van Gauss*. Men noteert deze ook als Erf, dus:

$$\text{Erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$$

Volgens het bovenstaande is:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \text{Erf } x = 1$$

Opmerking 2:

De moeilijkheid bij het berekenen van een oneigenlijke integraal van de eerste soort is te bewijzen dat de uitkomst onafhankelijk is van de gekozen rij gebieden G_n . Men

* S. D. Poisson 1781-1840.

kan echter bewijzen, op geheel analoge wijze als waarop dit in voorbeeld 1 is geschied, dat bij *positieve integrand* het voldoende is zich te bepalen tot een beperkter soort geschikt gekozen gebieden.

Vaak zullen dit gebieden zijn van een bijzondere vorm (cirkels, vierkanten, ellipsen, enz.), doch dit behoeft niet, zoals uit het volgende voorbeeld blijkt.

Voorbeeld 2

Bereken:

$$I = \iint_G x^5 e^{-x^2 y} dx dy$$

$$\text{waarin } G = \left\{ (x, y) \left| \frac{1}{x} \leq y \leq x^2; x \geq 1 \right. \right\}.$$

Oplossing:

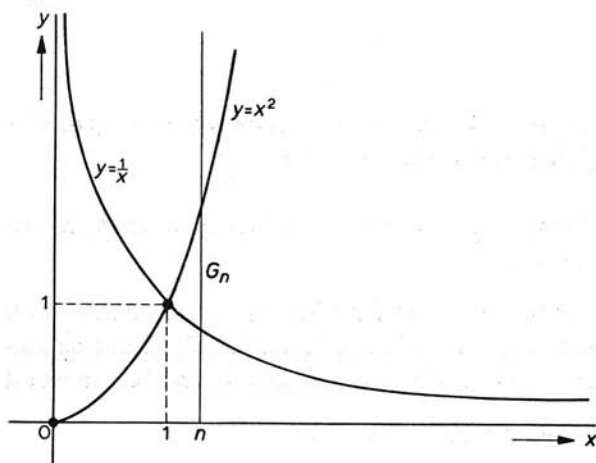
We kiezen voor G_n de vlakdelen (zie fig. 88):

$$G_n = \left\{ (x, y) \left| \frac{1}{x} \leq y \leq x^2; 1 \leq x \leq n \right. \right\}$$

We vinden dan, daar op G de integrand $x^5 e^{-x^2 y}$ positief is:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G_n} x^5 e^{-x^2 y} dx dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \left\{ \int_{1/x}^{x^2} x^5 e^{-x^2 y} dy \right\} dx \end{aligned}$$

Fig. 88



$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n [-x^3 e^{-x^2 y}]_{y=1/x}^{x^2} dx \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n (-x^3 e^{-x^4} + x^3 e^{-x}) dx \\
&= \frac{1}{4} e^{-x^4} \Big|_1^\infty + \int_1^\infty x^3 e^{-x} dx = -\frac{1}{4e} + \frac{16}{e}
\end{aligned}$$

67 Oneigenlijke integralen 2

In deze paragraaf behandelen we de *oneigenlijke integralen van de tweede soort*. We beginnen met enkele definities.

Definitie 1

Als f een functie is die gedefinieerd is op een (eventueel gereduceerde) omgeving van een punt $P(a, b)$ in het platte vlak, dan zeggen we dat f een pool heeft in P indien

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y) = \infty$$

Definitie 2

Een singulariteit van een functie f is een punt waar f niet gedefinieerd is of wel gedefinieerd is maar een pool heeft.

Definitie 3

Indien P een singulariteit is van een functie f en wel zo dat er een cirkel om P bestaat waarbinnen f geen andere singulariteiten heeft, dan noemen we P een geïsoleerde singulariteit van f .

Definitie 4

De diameter van een begrensde verzameling V is de kleinste bovengrens van de afstanden $d(P, Q)$, waarbij de punten P en Q de gehele verzameling V doorlopen.

Als een functie f in een gebied G singulariteiten heeft, dan kan men op de hierna aangegeven wijze $\iint_G f(x, y) dx dy$ definiëren.

We zullen ons hierbij beperken tot het geval dat f slechts één singulariteit P heeft in G . We vormen dan een rij omgevingen $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$ van P , zo dat de diameters daarvan tot nul naderen als n tot oneindig nadert. Een voorbeeld ervan wordt gevormd door cirkelgebieden met middelpunt P en straal $\frac{1}{n}$.

Als de rij van integralen over de overblijvende gebieden $G - G_n$ tot een limiet nadert als $n \rightarrow \infty$, dus als

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G - G_n} f(x, y) dx dy$$

bestaat en onafhankelijk is van de gekozen omgevingen G_n , dan definiëren we:

$$\iint_G f(x, y) dG = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{G - G_n} f(x, y) dx dy$$

Deze limiet heet een *oneigenlijke dubbelintegraal van de tweede soort* en de integraal noemt men *convergent*. Bestaat de limiet niet, dan noemt men $\iint_G f(x, y) dx dy$ een *divergente oneigenlijke integraal van de tweede soort*.

Opmerking:

Een moeilijkheid bij het berekenen van een dergelijke integraal is – evenals bij de oneigenlijke integralen van de eerste soort – het bewijs dat de limiet, zo deze bestaat, onafhankelijk is van de gekozen omgevingen van P , mits hun diameter naar nul gaat. Ook hier kan men bewijzen dat bij een *positieve* integrand het voldoende is zich te bepalen tot een beperkter soort geschikt gekozen gebieden. Zeer dikwijls kiest men cirkels of vierkanten met middelpunt in P .

Het bewijs hiervan verloopt analoog aan dat gegeven bij par. 66, voorbeeld 1.

We geven dit bewijs niet, maar zullen het gebruik van de stelling illustreren aan de hand van een voorbeeld.

Voorbeeld

Bereken:

$$I = \iint_C \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^p} \quad (p > 0)$$

waarin C gedefinieerd is door: $C = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

Oplossing:

De integrand heeft één pool in C nl. het punt $(0, 0)$. Daar de integrand positief is buiten de oorsprong, mogen we ons op grond van bovengenoemde opmerking beperken bij de bepaling van I tot het gebruik van cirkelomgevingen C_n met straal $\frac{1}{n}$ en middelpunt O . Voor de berekening van de integraal over het gebied $C - C_n$ gaan we over op poolcoördinaten:

$$\iint_{C - C_n} \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^p} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{1/n}^R \frac{dr}{r^{p-1}} = 2\pi \int_{1/n}^R \frac{dr}{r^{p-1}} \quad (67.1)$$

Nu weten we (zie deel 1, par. 80) dat de enkelvoudige integraal $\int_0^R \frac{dr}{r^{p-1}}$ dan en alleen dan convergeert als $p < 2$ is en dan de waarde heeft: $\frac{R^{2-p}}{2-p}$. Hieruit en uit (67.1) volgt dat

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{C-C_n} \frac{dx dy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^p}$$

alleen convergent is als $p < 2$ en dan gelijk is aan $\frac{2\pi R^{2-p}}{2-p}$.

68 Drievoudige integraal

De theorie van de dubbelintegralen kan worden uitgebreid tot die van de meervoudige integralen. In het volgende zullen we in grote lijnen en zonder bewijzen aangeven hoe deze generalisatie verloopt en wat de resultaten zijn. Ten aanzien van de bewijzen volstaan we met op te merken dat er een grote analogie is met de bewijzen bij dubbelintegralen.

We beschouwen een deel V van de ruimte \mathbb{R}^3 , ingesloten door een gesloten oppervlak met vergelijking: $F(x, y, z) = 0$ inclusief de rand, dus $V = \{(x, y, z) | F(x, y, z) \leq 0\}$. Een voorbeeld hiervan is de bol met vergelijking: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Verder nemen we aan dat een functie f gedefinieerd wordt op V en hierin *continu* is.

We verdelen V door middel van een eindig aantal oppervlakken in deelgebieden (volume-elementen) V_1, V_2, \dots, V_n , waarvan de inhouden zijn: $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_n$. Als m_i en M_i het minimum, resp. het maximum van f op V_i zijn, dan vormen we bij de verdeling, die we d noemen, de ondersom:

$$s_d = \sum_{i=0}^n m_i \Delta V_i$$

en de bovensom:

$$\bar{s}_d = \sum_{i=0}^n M_i \Delta V_i$$

Men kan bewijzen dat de verzamelingen $\{s_d\}$ en $\{\bar{s}_d\}$ voor alle mogelijke verdelingen d naar boven, resp. naar beneden begrensd zijn (f is begrensd op V) en dus een supremum, resp. infimum hebben. Daar f continu is in V geldt zelfs $\sup\{s_d\} = \inf\{\bar{s}_d\}$. Deze gemeenschappelijke waarde wordt dan gedefinieerd als de drievoudige integraal van f over V . Notatie:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

Men kan verder bewijzen dat ook de drievoudige integraal de eigenschappen bezit die een directe generalisatie zijn van de eigenschappen 1...6 van par. 53.

Opmerking:

Als $f(x, y, z) \equiv 1$ in V , dan stelt $\iiint_V dx dy dz$ in getalwaarde de inhoud van V voor (zie ook par. 71).

De daadwerkelijke *berekening* van een drievoudige integraal kan geschieden door toepassing van de theorie die het analogon is van die van par. 54.

Hierdoor kan een drievoudige integraal herleid worden tot een herhaalde integraal.

Voorbeeld 1

Bereken:

$$I = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

als $V = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}$.

Oplossing:

De herleiding van de drievoudige integraal tot een herhaalde integraal gaat als volgt:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[\int_0^2 \left\{ \int_0^3 (x^2 + y^2 + z^2) dz \right\} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^2 (x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3) \Big|_{z=0}^3 dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 \left\{ \int_0^2 (3x^2 + 3y^2 + 9) dy \right\} dx \\ &= \int_0^1 (3x^2 y + y^3 + 9y) \Big|_{y=0}^2 dx \\ &= \int_0^1 (6x^2 + 8 + 18) dx = (2x^3 + 26x) \Big|_{x=0}^1 = 28 \end{aligned}$$

In dit voorbeeld zijn de grenzen van x , y en z vast, d.w.z. onafhankelijk van elkaar. Men kan de herleiding ook uitvoeren als de grenzen niet vast zijn. Ook hiervan geven we een voorbeeld.

Voorbeeld 2

Bereken:

$$I = \iiint_V \frac{dx dy dz}{(1 + x + y + z)^3}$$

als $V = \{(x, y, z) | x + y + z \leq 1; x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0\}$.

Oplossing:

We integreren eerst naar x , dan naar y en vervolgens naar z . We houden dus eerst y en z vast, b.v. $y = y_0$ en $z = z_0$. Bij die waarden van y en z loopt x van 0 tot

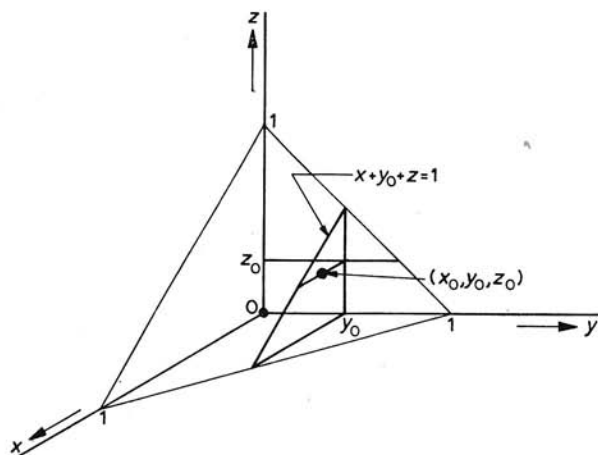


Fig. 89

$1 - y_0 - z_0$ (zie fig. 89). Vervolgens variëren bij vaste z de waarden van y van 0 tot $1 - z_0$. Tenslotte laten we z alle waarden aannemen tussen 0 en 1.

De berekening verloopt dan als volgt:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-z} \left\{ \int_0^{1-y-z} \frac{dx}{(1+x+y+z)^3} \right\} dy \right] dz \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-z} \frac{-1}{2(1+x+y+z)^2} \Big|_{x=0}^{x=1-y-z} dy \right] dz \\
 &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-z} \left(-\frac{1}{2 \cdot 2^2} + \frac{1}{2(1+y+z)^2} \right) dy \right] dz \\
 &= \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{8}y - \frac{1}{2(1+y+z)} \right\} \Big|_{y=0}^{y=1-z} dz \\
 &= \int_0^1 \left\{ -\frac{1}{8}(1-z) - \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2(1+z)} \right\} dz \\
 &= \left(-\frac{3}{8}z + \frac{1}{16}z^2 + \frac{1}{2} \ln(1+z) \right) \Big|_{z=0}^{z=1} = -\frac{5}{16} + \frac{1}{2} \ln 2
 \end{aligned}$$

Tenslotte vermelden we nog dat in vele gevallen het invoeren van nieuwe variabelen is toegestaan en dat bij deze transformatie analoge formules gelden als bij de overgang op nieuwe variabelen bij dubbelintegralen.

Zo geldt dat invoeren van nieuwe variabelen via de formules:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= X(u, v, w) \\
 y &= Y(u, v, w) \\
 z &= Z(u, v, w)
 \end{aligned} \right\} \quad (68.1)$$

is toegestaan, indien X , Y en Z continue partiële afgeleiden hebben naar u , v en w en de functionaaldeterminant:

$$D = \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial X}{\partial w} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial w} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (68.2)$$

van nul verschilt in V .

Door deze substitutie (68.1) gaat de integraal

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

over in:

$$\iiint_{V^*} f\{X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w)\} \left| \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \quad (68.3)$$

als V^* het deel voorstelt van de u, v, w -ruimte dat het beeld is van V in de x, y, z -ruimte.

69 Cilindercoördinaten en bolcoördinaten

In deze paragraaf behandelen we twee veel voorkomende gevallen van het invoeren van nieuwe variabelen in drievoudige integralen.

69.1 Cilindercoördinaten

In par. 65 hebben we in de dubbelintegraal

$$\iint_G f(x, y) dx dy$$

cilindercoördinaten ingevoerd met behulp van de transformatieformules (65.1). In feite kwam dit neer op het invoeren van poolcoördinaten ρ en φ in het x, y -vlak:

$$x = X(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$$

$$y = Y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$$

Voeren we de cilindercoördinaten in volgens de transformatie (65.1), dan gaat de drievoudige integraal:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

volgens (68.2) en (68.3) over in:

$$\iiint_{V^*} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz$$

waarin V^* het beeld is van V in de ρ, φ, z -ruimte.

Immers voor de functionaaldeterminant $\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\rho, \varphi, z)}$ bij deze overgang geldt:

$$\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

Als $\rho = 0$, dan geldt $D = 0$. Men kan echter bewijzen dat de gegeven transformatieformule van de integraal ook blijft gelden, als V de oorsprong bevat.

We kunnen bij deze transformatie de volgende aanschouwelijke voorstelling maken. We denken ons de x, y, z -ruimte verdeeld door cilinders: $\rho = \text{constant}$ en platte vlakken: $\varphi = \text{constant}$ en $z = \text{constant}$. Het „volume-element” is dan bij benadering (zie fig. 90):

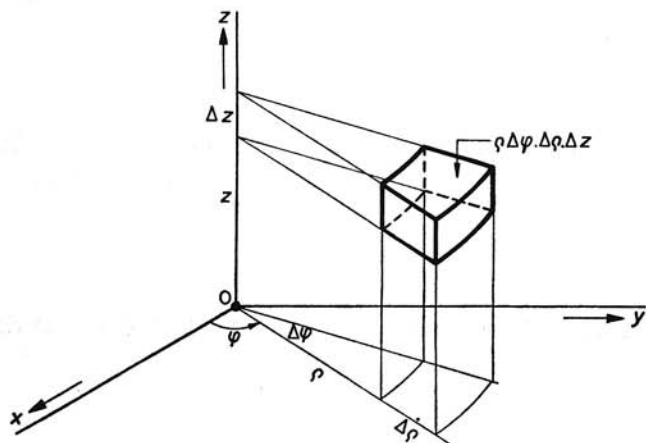
$$\Delta V = \rho \Delta\varphi \cdot \Delta\rho \cdot \Delta z$$

Opmerking 1:

Door $f(x, y, z) \equiv 1$ te kiezen, krijgt men de inhoud I van V (in getalwaarde) in cilindercoördinaten uitgedrukt:

$$I = \iiint_{V^*} \rho d\rho d\varphi dz$$

Fig. 90



69.2 Bolcoördinaten

Vaak wordt bij berekeningen gebruik gemaakt van *bolcoördinaten* of *ruimte-poolcoördinaten*.

In fig. 91 is een punt P gegeven door de drie rechthoekige coördinaten x , y en z .

Als bolcoördinaten worden nu ingevoerd:

a de hoek φ , die de projectie OP' van de voerstraal OP op het x, y -vlak maakt met de positieve x -as, te rekenen vanaf deze as in positieve zin ($0 \leq \varphi < 2\pi$), d.w.z. in de richting waarin de positieve x -as moet draaien om deze met de positieve y -as te laten samenvallen;

b de hoek θ die de voerstraal OP maakt met de positieve z -as ($0 \leq \theta \leq \pi$);

c de lengte r van de voerstraal OP ($0 \leq r < \infty$).

Uit de figuur leest men direct het verband af tussen de beide soorten coördinaten.

De *transformatieformules* voor de overgang van *rechthoekige- op bolcoördinaten* luiden:

$$x = X(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \cos \varphi$$

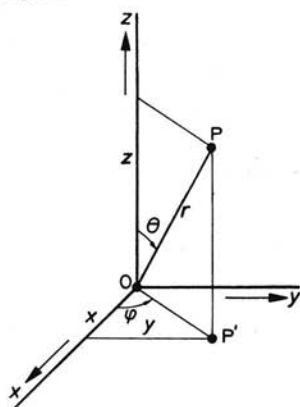
$$y = Y(r, \theta, \varphi) = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = Z(r, \theta, \varphi) = r \cos \theta$$

Voor de functionaaldeterminant $\frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ bij deze overgang geldt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(X, Y, Z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta \end{aligned}$$

Fig. 91



Hierbij gaat de drievoudige integraal

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$$

over in:

$$\iiint_{V^*} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (69.1)$$

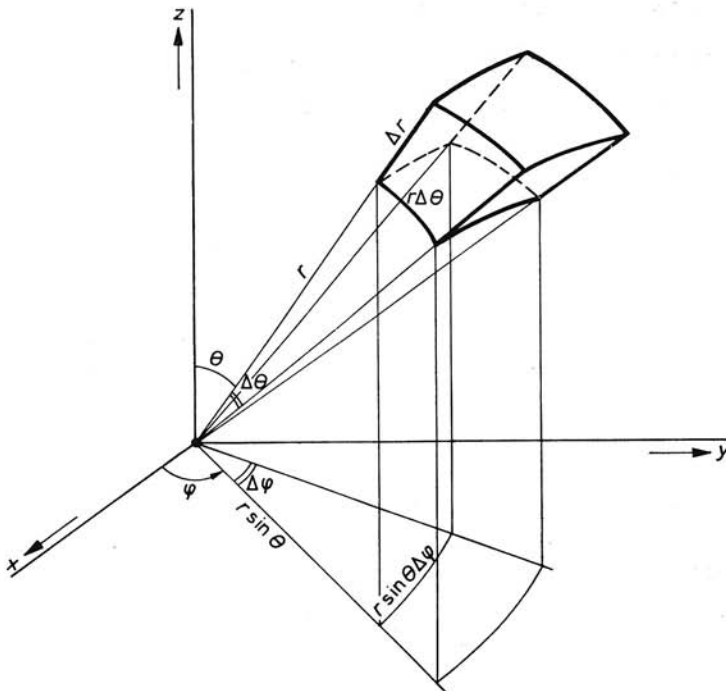
waarin V^* het beeld is van V in de r, θ, φ -ruimte.

De functionaaldeterminant heeft de waarde nul als $r = 0$ of $\theta = 0$ of $\theta = \pi$. Men kan ook hier bewijzen dat de transformatieformule (69.1) blijft gelden als V de oorsprong bevat of een deel van de halve rechten: $\theta = 0$ of $\theta = \pi$.

Ook nu is een aanschouwelijke voorstelling mogelijk. We kunnen de x, y, z -ruimte verdeeld denken door bollen: $r = \text{constant}$, kegels: $\theta = \text{constant}$ en halfvlakken $\varphi = \text{constant}$. Het „volume-element” is dan bij benadering (zie fig. 92):

$$\Delta V = r \Delta \theta \cdot r \sin \theta \Delta \varphi \cdot \Delta r = r^2 \sin \theta \Delta r \Delta \theta \Delta \varphi$$

Fig. 92



Opmerking 2:

Door $f(x, y, z) \equiv 1$ te kiezen verkrijgt men de inhoud I van V (in getalwaarde) in bolcoördinaten uitgedrukt:

$$I = \iiint_{V^*} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Voorbeeld 1

Bereken de inhoud I van een bol met straal a met behulp van bolcoördinaten.

Oplossing:

Als we de oorsprong van het assenkruis in het middelpunt van de bol leggen, kunnen we volstaan met de berekening van de inhoud van dat deel V van de bol dat in het eerste octant ligt, dus:

$$I = 8 \iiint_V dx dy dz$$

met

$$V = \{(x, y, z) | x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

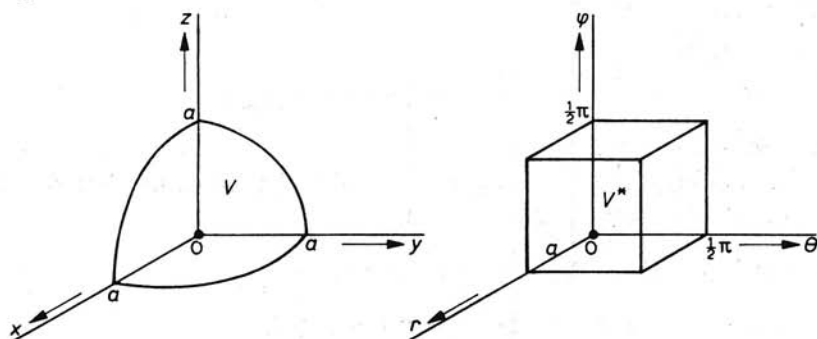
Bij overgang op bolcoördinaten wordt het beeld van V in de r, θ, φ -ruimte V^* bepaald door (zie fig. 93):

$$V^* = \{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq a; 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi; 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi\}$$

zodat we vinden:

$$\begin{aligned} I &= 8 \iiint_{V^*} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 8 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^a r^2 dr \right\} \sin \theta d\theta \right] d\varphi \\ &= 8 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{3}a^3 = \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

Fig. 93



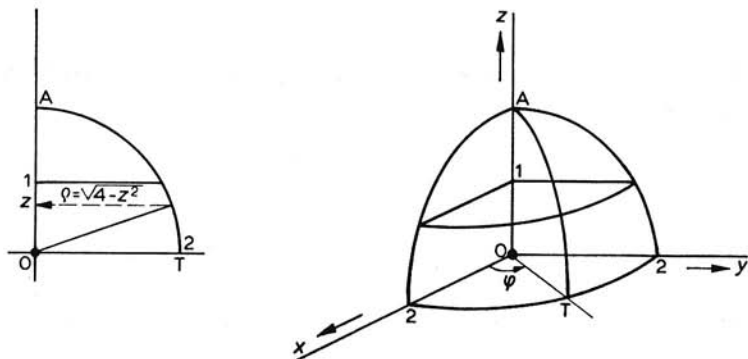


Fig. 94

Voorbeeld 2

Bereken de inhoud van dat deel V van de ruimte bepaald door:

$$V = \{(x, y, z) | x \geq 0; y \geq 0; 0 \leq z \leq 1; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$$

Oplissing:

a Met cilindercoördinaten (zie fig. 94)

De grenzen van z , φ en ρ worden bepaald door $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$, $0 \leq \rho \leq \sqrt{4 - z^2}$, zodat:

$$V^* = \{(z, \varphi, \rho) | 0 \leq z \leq 1; 0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi; 0 \leq \rho \leq \sqrt{4 - z^2}\}$$

Dus:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{V^*} \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{4-z^2}} \rho \, d\rho \right\} dz \right] d\varphi \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^1 \frac{1}{2}(4 - z^2) dz \right\} d\varphi \\ &= (2z - \frac{1}{6}z^3)_0^1 \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{11}{12}\pi \end{aligned}$$

b Met bolcoördinaten (zie fig. 95)

We splitsen V nu in twee delen, t.w. het deel V_1 met $0 \leq \theta \leq \frac{1}{3}\pi$ en het deel V_2 met $\frac{1}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ (zie de doorsnede AOT in fig. 95).

In V_1 geldt dan: $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$; $0 \leq \theta \leq \frac{1}{3}\pi$; $0 \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}$.

In V_2 geldt echter: $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$; $\frac{1}{3}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$; $0 \leq r \leq 2$.

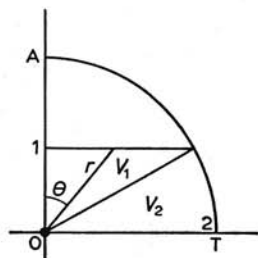


Fig. 95

Voor de integraal geldt:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^{\frac{1}{\cos \theta}} r^2 dr \right\} \sin \theta d\theta \right] d\varphi + \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \left\{ \int_0^2 r^2 dr \right\} \sin \theta d\theta \right] d\varphi \\
 &= \frac{1}{2}\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin \theta}{3 \cos^3 \theta} d\theta + \frac{1}{2}\pi \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \frac{8}{3} \sin \theta d\theta \\
 &= \frac{1}{2}\pi \left\{ \left(\frac{1}{6 \cos^2 \theta} \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} - \frac{8}{3} \cdot \cos \theta \Big|_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} \right\} \\
 &= \frac{1}{2}\pi \left\{ \frac{4}{6} - \frac{1}{6} + \frac{8}{3} \right\} = \frac{1}{2}\pi
 \end{aligned}$$

Voorbeeld 3

Bereken het volume van het afgesloten deel van de ruimte begrensd door het oppervlak met vergelijking:

$$x^3 + y^3 + z^3 = a^3$$

Oplossing:

Het begrenzend oppervlak is symmetrisch t.o.v. de drie coördinaatvlakken. De doorsnede met elk van de coördinaatvlakken is een astroïde (zie fig. 96).

Ook hier kunnen we vanwege de symmetrie volstaan met de berekening van de inhoud van het in het eerste octant gelegen deel van het lichaam, zodat:

$$I = 8 \iiint_V dx dy dz$$

waarin

$$V = \{(x, y, z) | x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0; x^3 + y^3 + z^3 \leq a^3\}$$

We stellen nu

$$x = u^3$$

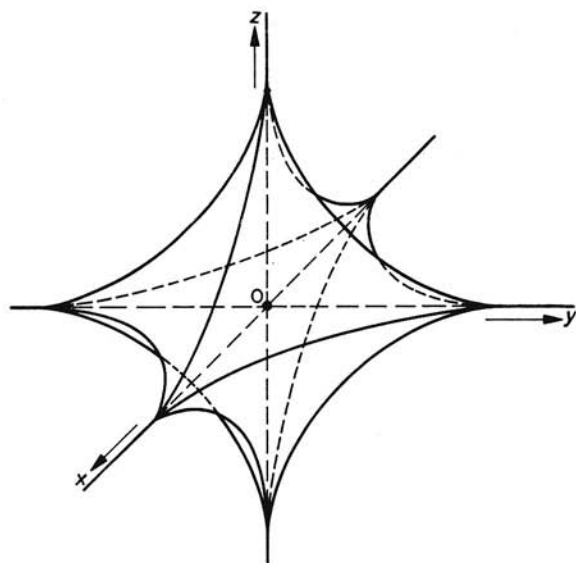


Fig. 96

$$y = v^3$$

$$z = w^3$$

waardoor V overgaat in het deel V^* van de u, v, w -ruimte bepaald door:

$$V^* = \{(u, v, w) | u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0; u^2 + v^2 + w^2 \leq a^2\}$$

Dit is het deel van de u, v, w -ruimte in het eerste octant begrensd door de bol met middelpunt O en straal a .

De functionaaldeterminant bij deze transformatie is:

$$\begin{vmatrix} 3u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3w^2 \end{vmatrix} = 27u^2v^2w^2$$

Hierdoor gaat I over in:

$$I = 8 \iiint_{V^*} 27u^2v^2w^2 \, du \, dv \, dw$$

Aangezien we „over een bol integreren”, voeren we bolcoördinaten in:

$$u = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$v = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$w = r \cos \theta$$

De grenzen van r , θ en φ worden bepaald door: $0 \leq r < a^{\frac{1}{3}}$; $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$; $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$, zodat I overgaat in:

$$\begin{aligned} I &= 8 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left[\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^{a^{\frac{1}{3}}} 27r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi \cdot r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi \cdot r^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr \right\} d\theta \right] d\varphi \\ &= 8 \cdot 27 \left\{ \int_0^{a^{\frac{1}{3}}} r^8 dr \right\} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta \right\} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi \right\} \\ &= 8 \cdot 27 \cdot \frac{1}{9} r^9 \Big|_0^{a^{\frac{1}{3}}} \cdot I_2 \cdot I_3 \end{aligned}$$

waarin (zie deel 1, par. 129):

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^5 \theta d\theta - \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^7 \theta d\theta \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{6}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{105} \end{aligned}$$

en

$$I_3 = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi = \frac{\pi}{16}$$

zodat:

$$I = 8 \cdot 27 \cdot \frac{1}{9} a^3 \cdot \frac{8}{105} \cdot \frac{\pi}{16} = \frac{4}{35} \pi a^3$$

70 Berekening van de oppervlakte van een vlakke figuur

In par. 57 (opmerking 2) merkten we op dat de oppervlakte van een (toelaatbaar) integratiegebied wordt voorgesteld door de dubbelintegraal:

$$\iint_G dx dy$$

In deel 1 hebben we echter al de oppervlakte van zeer speciale gebieden gedefinieerd, nl. gebieden G ingesloten door de x -as, de rechten met vergelijkingen: $x = a$ en $x = b$ ($b \geq a$) en de grafiek van de continue functie f ($f(x) \geq 0$). De oppervlakte werd daarbij gedefinieerd als:

$$\int_a^b f(x) dx$$

We laten nu zien dat in dit geval geldt:

$$\int_a^b f(x) dx = \iint_G dx dy$$

Immers: herleiding van de dubbelintegraal tot een herhaalde integraal levert (zie fig. 97a):

$$\iint_G dx dy = \int_a^b \left\{ \int_0^{f(x)} dy \right\} dx = \int_a^b f(x) dx$$

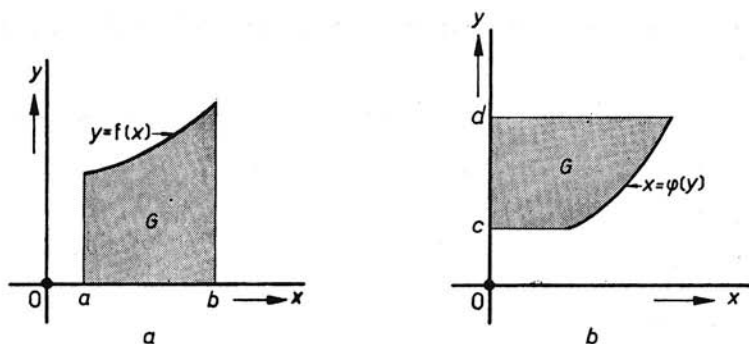


Fig. 97

Wordt G ingesloten door de y -as, de lijnen met vergelijkingen: $y = c$ en $y = d$ ($d \geq c$) en de grafiek van de functie $\varphi: y \mapsto \varphi(y)$, dan vindt men op dezelfde wijze (zie fig. 97b):

$$\iint_G dx dy = \int_c^d \left\{ \int_0^{\varphi(y)} dx \right\} = \int_c^d \varphi(y) dy$$

Voor de transformatie van rechthoekige in poolcoördinaten:

$$x = X(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$$

$$y = Y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$$

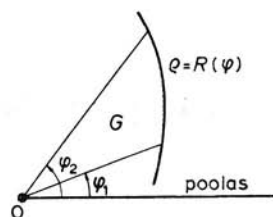
is de functionaaldeterminant $\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho$ (zie par. 65), zodat we voor de oppervlakte O van een gebied G vinden:

$$O = \iint_G dx dy = \iint_H \rho d\rho d\varphi \quad (70.1)$$

waarbij H het gebied is dat in het ρ, φ -vlak correspondeert met het gebied G in het x, y -vlak.

Stel dat $\rho = R(\varphi)$ de poolvergelijking is van een kromme, waarbij R een continue functie is van φ , gedefinieerd voor $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ (zie fig. 98). We willen nu de oppervlakte berekenen van het afgesloten gebied G , ingesloten door de kromme en de

Fig. 98



voerstralen met vergelijkingen: $\varphi = \varphi_1$ en $\varphi = \varphi_2$. Volgens (70.1) is deze oppervlakte gelijk aan:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left\{ \int_0^{R(\varphi)} d\rho \right\} d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R^2(\varphi) d\varphi$$

Voorbeeld 1

Bereken de oppervlakte van de lus van het folium van Descartes met vergelijking:

$$x^3 - xy + y^3 = 0$$

Oplossing:

In fig. 99 is de grafiek van de kromme geschetst. De coördinaatassen zijn de raaklijnen aan de kromme in O. Gaat men met behulp van de transformatieformules:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi$$

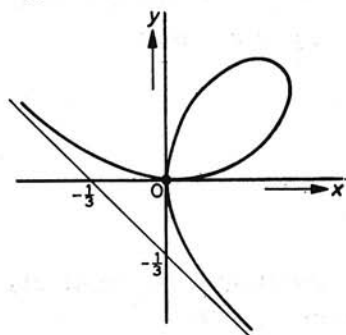
over op poolcoördinaten, dan vindt men voor de poolvergelijking:

$$\rho = \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi}$$

De bedoelde lus wordt doorlopen als φ loopt van 0 tot $\frac{1}{2}\pi$, zodat de oppervlakte van de lus gelijk is aan

$$\begin{aligned} O &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi}{(\sin^3 \varphi + \cos^3 \varphi)^2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{1}{2}\pi} \frac{\tan^2 \varphi d(\tan \varphi)}{(\tan^3 \varphi + 1)^2} \\ &= \frac{1}{6} \left[-\frac{1}{\tan^3 \varphi + 1} \right]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Fig. 99



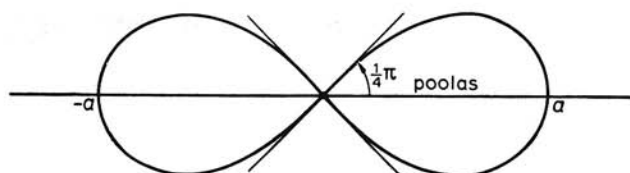


Fig. 100

Voorbeeld 2

Bereken de oppervlakte binnen de lemniscaat met poolvergelijking:

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

Oplossing:

De grafiek is geschetst in fig. 100.

De oppervlakte is gelijk aan

$$4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} a^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = a^2 [\sin 2\varphi]_0^{\frac{1}{2}\pi} = a^2$$

71 Algemene formules voor inhouden. Inhouden van omwentelingslichamen

In de paragrafen 68 en 69 is reeds opgemerkt dat de inhoud I van een afgesloten gebied V in de ruimte wordt voorgesteld door:

a in rechthoekige coördinaten:

$$I = \iiint_V dx \, dy \, dz$$

b in cilindercoördinaten:

$$I = \iiint_{V^*} \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz$$

als V in de x, y, z -ruimte wordt overgevoerd in V^* van de ρ, φ, z -ruimte;

c in bolcoördinaten:

$$I = \iiint_{V^{**}} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi$$

als V wordt overgevoerd in V^{**} van de r, θ, φ -ruimte.

Stel dat $z = f(x, y)$ de vergelijking is in rechthoekige coördinaten van een oppervlak, waarbij f continu en niet-negatief is in een gebied G in het x, y -vlak.

Voor de inhoud I van het deel V van de rechte cilinder met G als grondvlak, gelegen tussen het oppervlak en het x, y -vlak geldt dan:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V dx dy dz \\ &= \iint_G \left\{ \int_0^{f(x,y)} dz \right\} dx dy \\ &= \iint_G f(x, y) dx dy \end{aligned} \tag{71.1}$$

Dit is de integraal met behulp waarvan het inhoudsbegrip is ingevoerd (zie par. 51). Is het oppervlak gegeven in cilindercoördinaten: $z = Z(\rho, \varphi)$, dan is:

$$I = \iint_{G^*} Z(\rho, \varphi) \rho d\varphi d\rho.$$

waarin G^* het beeld is van G in het ρ, φ -vlak.

Als V de oorsprong bevat en de vergelijking van een oppervlak in bolcoördinaten is gegeven: $r = R(\varphi, \theta)$, dan is:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{V^*} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi \left\{ \int_0^{R(\varphi, \theta)} r^2 dr \right\} \sin \theta d\theta \right] d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi R^3(\varphi, \theta) \sin \theta d\theta \right\} d\varphi \end{aligned}$$

Met deze formule kan men zeer eenvoudig de inhoud berekenen van een bol met straal a . Er geldt $R(\varphi, \theta) = a$, dus:

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi a^3 \sin \theta \right\} d\varphi = \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot a^3 \cdot 2 = \frac{4}{3}\pi a^3$$

In bovenstaande formules voor de inhoud zijn de drievoudige integralen tot dubbelintegralen teruggebracht. Voor zeer bijzondere oppervlakken kan men deze laatste zelfs tot enkelvoudige integralen terugbrengen. Dit is b.v. het geval bij de berekening van de inhoud van een *omwentelingslichaam*.

De kromme met vergelijking: $y = f(x)$, gelegen in het x, y -vlak beschrijft bij wenteling om de x -as een omwentelingsoppervlak (zie fig. 101). Door twee vlakken loodrecht op de x -as met vergelijking: $x = a$ en $x = b$ ($b > a$), en dat oppervlak, wordt een omwentelingslichaam begrensd. Wij willen nu de inhoud van dit lichaam berekenen.

Als gebied G beschouwen wij het afgesloten gebied in het x, y -vlak, gelegen tussen de x -as, de kromme met vergelijking: $y = f(x)$, en de rechten met vergelijking: $x = a$ en $x = b$.

Voor de z -coördinaat van een willekeurig punt $P(x, y, z)$ van het omwentelingsoppervlak geldt:

$$z = PP_1 = \sqrt{\{f(x)\}^2 - y^2}$$

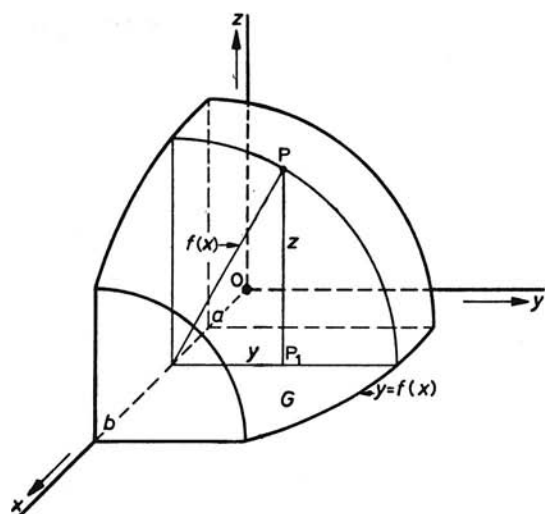


Fig. 101

zodat volgens (71.1) geldt:

$$I = 4 \int_a^b \left\{ \int_0^{f(x)} \sqrt{\{f(x)\}^2 - y^2} dy \right\} dx$$

De binnenste integraal stelt de oppervlakte voor van een kwartcirkel met $f(x)$ tot straal, en is dus gelijk aan $\frac{1}{4}\pi\{f(x)\}^2$, zodat

$$I = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx$$

Op dezelfde wijze kan men ook de inhoud berekenen van het lichaam, gevormd bij omwenteling van de kromme met vergelijking: $y = f(x)$, waarbij $f(x)$ een monotone continue functie van x is, om de y -as en begrensd door de vlakken $y = c$ en $y = d$ ($d > c$).

Men vindt dan:

$$I = \pi \int_c^d \{\varphi(y)\}^2 dy = \pi \int_c^d x^2 dy$$

waarbij $\varphi: y \mapsto \varphi(y)$ de inverse functie voorstelt van $f: x \mapsto f(x) = y$.

Wentelt een gesloten kromme, die de x -as niet snijdt en die bestaat uit de twee krommen $y_1 = f_1(x)$ en $y_2 = f_2(x)$ om deze as, dan is

$$I = \pi \int_a^b [\{f_1(x)\}^2 - \{f_2(x)\}^2] dx = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

als de „uiterste grenzen” van de kromme bepaald worden door $x = a$ en $x = b$ ($b > a$). Zie fig. 102.

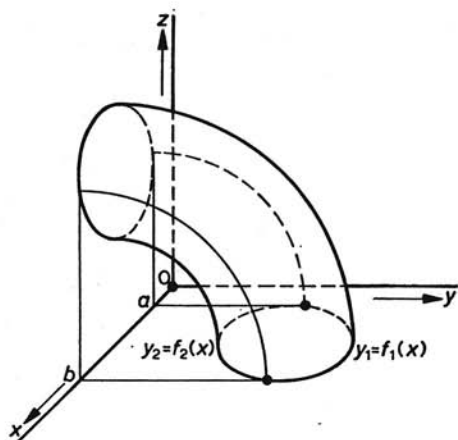


Fig. 102

Voorbeeld 1

Leid de formule af voor de inhoud van een bolsegment. De straal van de bol is r , hoogte van het segment is h (zie fig. 103).

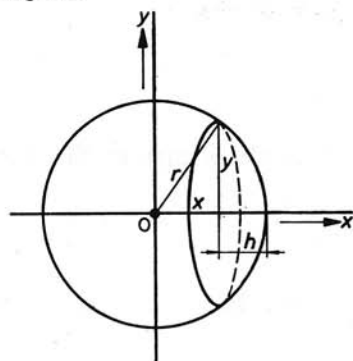
Oplossing:

Uit de figuur leest men af:

$$\begin{aligned} \text{Inh. segment} &= \pi \int_{r-h}^r y^2 dx \\ &= \pi \int_{r-h}^r (r^2 - x^2) dx = \pi [r^2 x - \frac{1}{3} x^3]_{r-h}^r = \frac{1}{3} \pi h^2 (3r - h) \end{aligned}$$

Voor $h = 2r$ vindt men de inhoud van de bol: $I = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Fig. 103



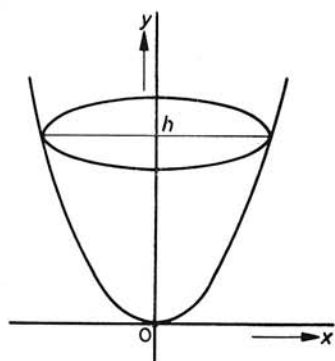


Fig. 104

Voorbeeld 2

Gevraagd de inhoud van het lichaam beschreven door wenteling van de parabool $x^2 = 2py$ om de y -as en begrensd door de vlakken $y = 0$ en $y = h$ (zie fig. 104).

Oplossing:

$$I = \int_0^h \pi x^2 dy = \int_0^h \pi 2py dy = [\pi p y^2]_0^h = \pi p h^2$$

De inhoud is dus gelijk aan de helft van de inhoud van de omgeschreven cilinder.

Voorbeeld 3

Bereken de inhoud I van de ring die ontstaat door wenteling van een cirkel om een as in het vlak van de cirkel, die de cirkel niet snijdt (*torus*).

Oplossing:

We nemen de omwentelingsas als x -as (zie fig. 105), en het middelpunt M van de cirkel op de y -as. Stellen we de afstand van het middelpunt tot de x -as voor door b en de straal van de cirkel door r , dan is de vergelijking van de cirkel:

$$x^2 + (y - b)^2 = r^2$$

waaruit volgt:

$$f_1(x) = b + \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$f_2(x) = b - \sqrt{r^2 - x^2}$$

zodat:

$$\begin{aligned} I &= \pi \int_{-r}^r [\{f_1(x)\}^2 - \{f_2(x)\}^2] dx \\ &= 4\pi b \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} dx \end{aligned}$$

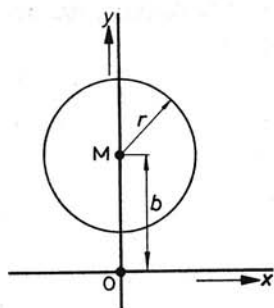


Fig. 105

Deze laatste integraal stelt de oppervlakte voor van een halve cirkel met straal r , en is dus gelijk aan $\frac{1}{2}\pi r^2$. De inhoud van de torus is dus $2\pi^2 b r^2$.

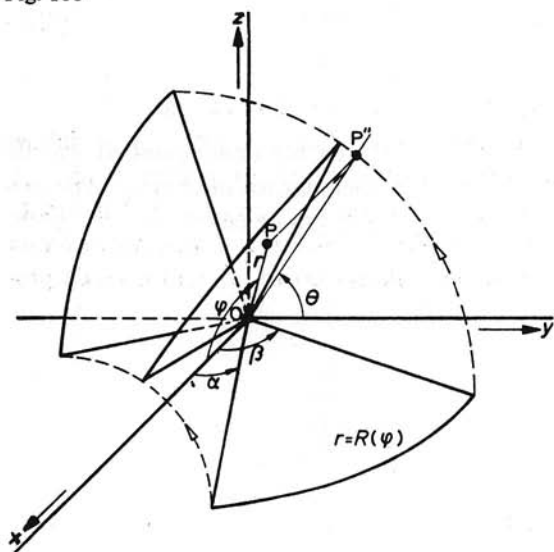
Voorbeeld 4

De sector begrensd door een boog van de kromme waarvan de poolvergelijking is $r = R(\varphi)$ en door de beide rechten: $\varphi = \alpha$ en $\varphi = \beta$, wentelt om de poolas. Leid de formule af voor het volume I van het aldus ontstane omwentelingslichaam.

Oplossing:

We gebruiken bolcoördinaten, doch laten nu de x -as de rol vervullen die doorgaans de z -as speelt. De hoek φ is dus nu de hoek die de voerstraal OP (zie fig. 106) met de

Fig. 106



x -as maakt, en die anders meestal door θ wordt aangegeven. θ is de hoek die het wentelende vlak maakt met het x, y -vlak. We vinden dus nu:

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V r^2 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_\alpha^\beta \sin \varphi \, d\varphi \int_0^{R(\varphi)} r^2 \, dr \right\} d\theta \\ &= \frac{2}{3} \pi \int_\alpha^\beta R^3(\varphi) \sin \varphi \, d\varphi \end{aligned}$$

72 Oppervlakte van een gebogen vlak in rechthoekige coördinaten

We willen nu de oppervlakte van een gekromd oppervlak definiëren, en beschouwen daartoe een oppervlak S dat ligt boven een gebied G in het x, y -vlak, en dat voorgesteld wordt door $z = f(x, y)$, waarbij de partiële afgeleiden f_x en f_y continu zijn. In elk punt P van S bestaat dan een raakvlak aan S dat niet loodrecht op het x, y -vlak staat. Immers, zijn (x_0, y_0, z_0) de coördinaten van P , dan is de vergelijking van het raakvlak in P aan S volgens par. 44:

$$z - z_0 = p_0(x - x_0) + q_0(y - y_0)$$

waarin

$$p_0 = f_x(x_0, y_0) \text{ en } q_0 = f_y(x_0, y_0)$$

De richtingsgetallen van de normaal op het oppervlak in P zijn dus $(p_0, q_0, -1)$. De richtingscosinus van de scherpe hoek γ_0 , die deze normaal maakt met de z -as, of wat hetzelfde is, van de scherpe hoek die het raakvlak in P met het x, y -vlak maakt, is dus

$$\cos \gamma_0 = \frac{1}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2 + 1}} \quad (72.1)$$

Deze kan wegens de continuïteit van f_x en f_y in G niet gelijk aan 0 zijn.

We verdelen nu het gebied G in n deelgebieden G_1, G_2, \dots, G_n met oppervlakten $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_n$. In elk van deze deelgebieden kiezen we punten $P_1(\xi_1, \eta_1), P_2(\xi_2, \eta_2), \dots, P_n(\xi_n, \eta_n)$, en brengen in elk van de punten $\{\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)\}$ het raakvlak aan S aan (zie fig. 107). Is γ_i de hoek die dit raakvlak maakt met het x, y -vlak en $\Delta \tau_i$ de oppervlakte van het deel τ_i van het raakvlak boven G_i , dan is G_i de projectie van τ_i op het x, y -vlak.

Volgens de stereometrie is:

$$\Delta G_i = \Delta \tau_i \cos \gamma_i$$

waaruit we vinden wegens (72.1):

$$\Delta \tau_i = \frac{\Delta G_i}{\cos \gamma_i} = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \Delta G_i$$

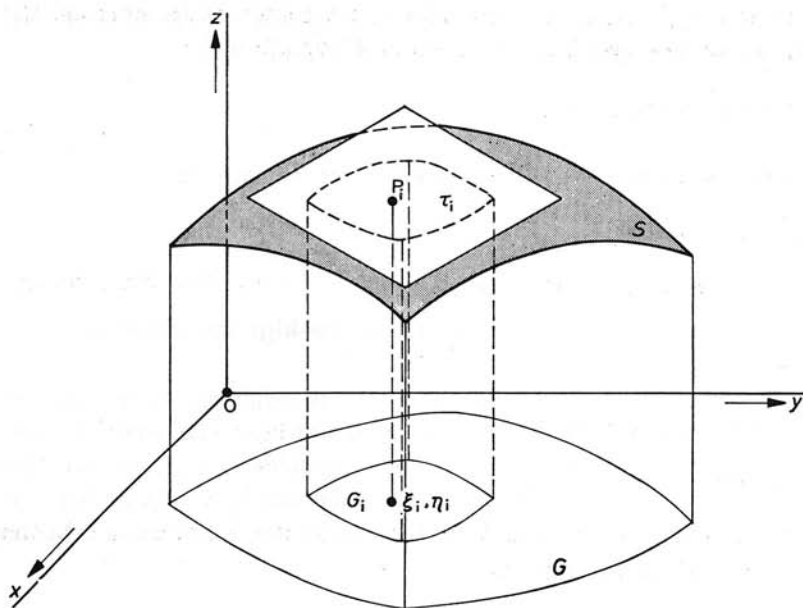


Fig. 107

Hierin geldt:

$$p_i = f_x(\xi_i, \eta_i) \text{ en } q_i = f_y(\xi_i, \eta_i)$$

We vormen nu de som van al deze oppervlakten $\Delta\tau_i$:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \Delta G_i$$

of wel:

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \Delta G_i \quad (72.2)$$

Dit is een Riemansom die behoort bij de integraal

$$\begin{aligned} I &= \iint_G \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy \\ &= \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy \end{aligned}$$

Bij toenemende verfijning van de verdeling van G zal de som uit (72.2) steeds dichter de integraal I benaderen. Anderzijds vinden we dat de som van alle oppervlakten $\Delta\tau_i$

datgene benadert wat we intuïtief de oppervlakte van S zouden willen noemen. Dit is de reden waarom we de oppervlakte van S boven G definiëren als:

$$\iint_G \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy$$

Vaak stellen we $f_x(x, y) = p$ en $f_y(x, y) = q$. We noemen het symbool:

$$dS = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy$$

het *oppervlakte-element* van f in rechthoekige coördinaten. We schrijven dan symbolisch:

$$O = \iint_G dS$$

Indien het oppervlak gegeven is in impliciete vorm, d.w.z. in de gedaante:

$$F(x, y, z) = 0$$

waarbij aan zodanige voorwaarden is voldaan, dat men z kan beschouwen als functie van x en y (zie hoofdstuk 2), dan vindt men, als men stelt:

$$z = f(x, y)$$

in die gevallen waar $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \text{en} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

Voor de oppervlakte boven een gebied G vindt men dus:

$$O = \iint_G \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} dx dy \quad (72.3)$$

Voorbeeld 1

Bereken het deel van de oppervlakte van de paraboloid met vergelijking:

$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

dat gelegen is binnen de cilinder met vergelijking:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Oplossing:

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{a}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{b}$, zodat het oppervlakte-element gelijk is aan:

$$dS = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy$$

Voor de gevraagde oppervlakte O geldt:

$$O = \iint_E \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}} dx dy \quad (72.4)$$

waarin E het afgesloten gebied voorstelt, begrensd door de ellips met vergelijking $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (zie fig. 108).

Substitueren we nu:

$$x = X(\rho, \varphi) = a\rho \cos \varphi$$

$$y = Y(\rho, \varphi) = b\rho \sin \varphi$$

dan geldt voor de functionaaldeterminant:

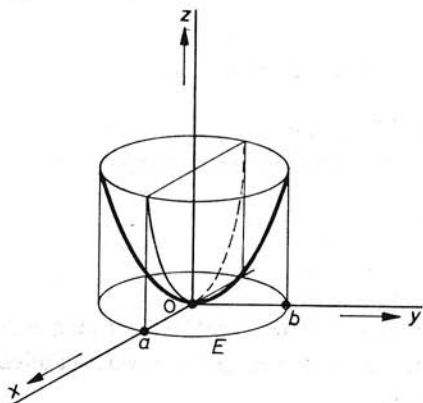
$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\rho, \varphi)} = ab\rho$$

(72.4) gaat over in:

$$O = ab \iint_C \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho d\varphi$$

met $C = \{(\rho, \varphi) | 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$.

Fig. 108



We krijgen dan:

$$O = 4ab \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^1 \rho \sqrt{1 + \rho^2} d\rho \right\} d\varphi = \frac{4}{3}(2\sqrt{2} - 1)ab\pi$$

Voorbeeld 2

Bereken de oppervlakte van de bol met straal a .

Oplossing:

We plaatsen het middelpunt van de bol in de oorsprong en berekenen de oppervlakte van de halve bol „boven” het x, y -vlak.

De vergelijking van de bol is dan:

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$\text{Dus is: } \frac{\partial F}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z.$$

We moeten nu omzichtig te werk gaan, daar voor de punten in het x, y -vlak geldt:

$\frac{\partial F}{\partial z} = 0$, zodat we (72.3) niet kunnen toepassen. We berekenen nu eerst de oppervlakte boven de cirkel C_r in het x, y -vlak, bepaald door:

$$C_r = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2 < a^2\}$$

en laten daarna r naderen tot a . We berekenen:

$$\lim_{r \rightarrow a} \iint_{C_r} \frac{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 4z^2}}{2z} dx dy$$

en dit is gelijk aan:

$$\lim_{r \rightarrow a} \iint_{C_r} \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dx dy$$

Voert men in deze integraal poolcoördinaten in, dan krijgt men:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow a} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^r \frac{a\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \right\} d\varphi &= \lim_{r \rightarrow a} -2\pi a \sqrt{a^2 - \rho^2} \Big|_0^r \\ &= \lim_{r \rightarrow a} -2\pi a \sqrt{a^2 - r^2} + 2\pi a^2 = 2\pi a^2 \end{aligned}$$

zodat de oppervlakte van de bol gelijk is aan $4\pi a^2$.

We gaan hier voorbij aan het (noodzakelijk) bewijs dat we dezelfde uitkomst verkregen zouden hebben, als we de snijcirkel van de bol met het x, y -vlak hadden benaderd met andere krommen dan de gekozen C_r .

73 Berekening van de oppervlakte van een ruimteoppervlak met behulp van kromlijnige coördinaten

Stel dat in een gebied G van het x, y -vlak een functie $f: (x, y) \mapsto z$ gedefinieerd is. $z = f(x, y)$ is de vergelijking van het door f bepaalde oppervlak „boven” G .

In par. 72 hebben we de oppervlakte gedefinieerd van dit boven G gelegen oppervlak. We willen nu aangeven hoe de oppervlakte-formules worden als we in plaats van x en y andere coördinaten invoeren.

Vooraf merken we op dat deze paragraaf een rekentechnisch karakter heeft. De nadruk zal liggen op het „hoe” en niet op de voorwaarden waaraan de betrokken gebieden en functies moeten voldoen om de uitgevoerde bewerkingen te rechtvaardigen.

Uitgaande van $z = f(x, y)$ gaan we over op kromlijnige coördinaten u en v , die met x en y samenhangen als volgt:

$$\left. \begin{array}{l} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \end{array} \right\} \quad (73.1)$$

Bij deze transformatie gaat G over in H in het u, v -vlak. Voor de coördinaten x, y en z van een punt P van het oppervlak kunnen we dan schrijven:

$$x = X(u, v), y = Y(u, v), z = f(x, y) = f\{X(u, v), Y(u, v)\} = Z(u, v)$$

zodat we het oppervlak kunnen beschrijven in de zogenaamde *parametervoorstelling*:

$$\left. \begin{array}{l} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \\ z = Z(u, v) \end{array} \right\} \quad (u, v) \in H$$

Hierin zijn u en v de parameters.

Als we veronderstellen dat in elk punt van G geldt:

$$D = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \neq 0^*$$

dan geldt volgens de theorie van par. 61:

$$u = U(x, y)$$

$$v = V(x, y)$$

en

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{D} \frac{\partial Y}{\partial v}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{D} \frac{\partial X}{\partial v}$$

* Let er op dat in vergelijking met par. 61 de rollen van (x, y) en (u, v) omgewisseld zijn. Hier geldt:

$$D = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}, \quad \text{maar in par. 61: } D = \frac{\partial(U, V)}{\partial(u, v)}.$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{D} \frac{\partial Y}{\partial u}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{D} \frac{\partial X}{\partial u}$$

Verder geldt, aangezien $Z(u, v) = Z\{U(x, y), V(x, y)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial Y}{\partial u} \right) \\ &= -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{D} \left(-\frac{\partial Z}{\partial u} \cdot \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial v} \cdot \frac{\partial X}{\partial u} \right) \\ &= -\frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{1}{D} \cdot \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \end{aligned}$$

zodat:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} &= \sqrt{1 + \frac{1}{D^2} \left\{ \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right\}^2 + \frac{1}{D^2} \left\{ \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right\}^2} \\ &= \frac{1}{\left| \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right|} \sqrt{\left\{ \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right\}^2} \end{aligned}$$

Dit betekent dat door de transformatie (73.1) de formule voor de oppervlakte:

$$O = \iint_G \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

wordt overgevoerd in (mede op grond van (62.2:))

$$O = \iint_H \sqrt{\left\{ \frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)} \right\}^2 + \left\{ \frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} \right\}^2} du dv \quad (73.2)$$

als H het beeld is in het u, v -vlak van G .

Deze formule voor de oppervlakte is symmetrisch in x, y en z . Geldt in een punt van G , $D = 0$, dan kan men veronderstellen dat een van de twee determinanten $\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(u, v)}$ en $\frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}$ ongelijk aan 0 is en dezelfde redenering toepassen. Men krijgt

dan toch dezelfde formule (73.2). Deze geldt dus zo lang niet alle drie functionaal-determinanten gelijk aan 0 zijn.

We zullen formule (73.2) toepassen voor het afleiden van de oppervlakteformules bij het gebruik van cilinder- en bolcoördinaten.

74 Berekening van de oppervlakte van een ruimteoppervlak met behulp van cilindercoördinaten

Als een oppervlak S gegeven is door de vergelijking:

$$z = f(x, y) \quad (x, y) \in G$$

en men over gaat op cilindercoördinaten:

$$x = X(\rho, \varphi) = \rho \cos \varphi$$

$$y = Y(\rho, \varphi) = \rho \sin \varphi$$

dan wordt de vergelijking van dit oppervlak:

$$Z = f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = Z(\rho, \varphi)$$

waarbij $(\rho, \varphi) \in H$, als H het beeld is in het ρ, φ -vlak van G in het x, y -vlak.

In dit geval geldt:

$$\frac{\partial(X, Y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho$$

$$\frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi & \rho \cos \varphi \\ \frac{\partial Z}{\partial \rho} & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \sin \varphi \frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \rho \cos \varphi \frac{\partial Z}{\partial \rho}$$

$$\frac{\partial(Z, X)}{\partial(\rho, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial \rho} & \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho \sin \varphi \frac{\partial Z}{\partial \rho} - \cos \varphi \frac{\partial Z}{\partial \varphi}$$

zodat:

$$O = \iint_H \sqrt{\rho^2 + \left(\sin \varphi \frac{\partial Z}{\partial \varphi} - \rho \cos \varphi \frac{\partial Z}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\rho \sin \varphi \frac{\partial Z}{\partial \rho} + \cos \varphi \frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right)^2} d\varphi d\rho$$

of:

$$O = \iint_H \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right)^2} d\varphi d\rho$$

Voorbeeld

Gevraagd wordt de grootte van de oppervlakte van dat deel van de paraboloid met vergelijking:

$$2az = x^2 - y^2$$

waarvan de projectie op het x, y -vlak gelijk is aan het door de lussen van de kromme met poolvergelijking:

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$$

omsloten deel van het x, y -vlak.

Oplossing:

De kromme met vergelijking $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ stelt een lemniscaat voor (zie par. 70, voorbeeld 2), waarvan de raaklijnen in O tot vergelijkingen hebben (zie fig. 109):

$$x = y \text{ en } x = -y$$

In het gebied waar de projectie op het x, y -vlak van de paraboloid binnen de lussen van de lemniscaat valt, is steeds $x^2 > y^2$, dus $z > 0$.

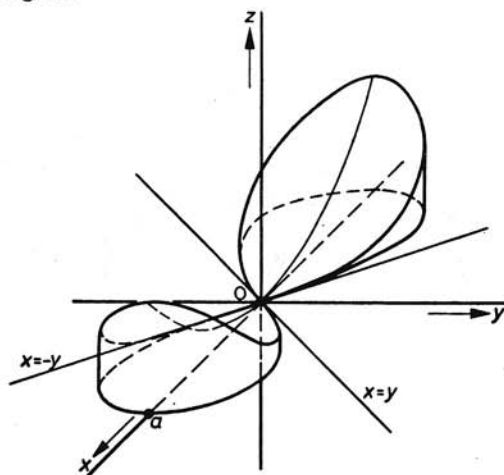
De vergelijking in cilindercoördinaten van de paraboloid is:

$$2az = \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi$$

of

$$z = \frac{\rho^2 \cos 2\varphi}{2a}$$

Fig. 109



Daar $\frac{\partial Z}{\partial \rho} = \frac{\rho \cos 2\varphi}{a}$ en $\frac{\partial Z}{\partial \varphi} = -\frac{\rho^2 \sin 2\varphi}{a}$, is de gevraagde oppervlakte gelijk aan:

$$\begin{aligned}
 O &= 4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \sqrt{\rho^2 + \rho^4 \frac{\cos^2 2\varphi}{a^2} + \rho^4 \frac{\sin^2 2\varphi}{a^2}} d\rho \right\} d\varphi \\
 &= \frac{4}{a} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} \rho \sqrt{a^2 + \rho^2} d\rho \right\} d\varphi \\
 &= \frac{4}{3a} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [(a^2 + \rho^2)^{\frac{3}{2}}]_0^{a\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi \\
 &= \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (1 + \cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi - \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \\
 &= \frac{8}{3} a^2 \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 \varphi d\varphi - \frac{1}{3} \pi a^2 = \frac{a^2}{9} (20 - 3\pi)
 \end{aligned}$$

75 Berekening van de oppervlakte van een ruimteoppervlak met behulp van bolcoördinaten

Als een oppervlak S gegeven is door de vergelijking:

$$z = f(x, y)$$

dan kan men bij gebruik van bolcoördinaten op de volgende wijze een parametervoorstelling van S krijgen.

In het algemeen geldt bij overgang op bolcoördinaten:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

De plaats van een punt P op S kan men bij gegeven θ en φ vastleggen door de lengte van de voerstraal r te geven als functie van θ en φ , dus (zie fig. 110):

$$r = R(\theta, \varphi)$$

Hierdoor ontstaat de volgende parametervoorstelling van het oppervlak S met θ en φ als parameters:

$$\left. \begin{aligned}
 x &= X(\theta, \varphi) = R(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi \\
 y &= Y(\theta, \varphi) = R(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi \\
 z &= Z(\theta, \varphi) = R(\theta, \varphi) \cos \theta
 \end{aligned} \right\} (\theta, \varphi) \in H$$

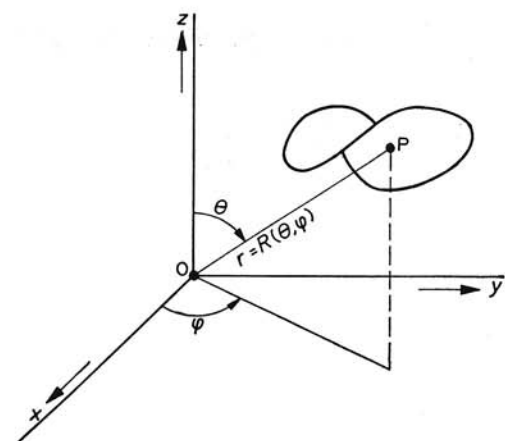


Fig. 110

als H het beeld is in het θ, φ -vlak van G in het x, y -vlak.

We vinden dan:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(X, Y)}{\partial(\theta, \varphi)} \\ &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \theta \cos \varphi + R(\theta, \varphi) \cos \theta \cos \varphi & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \sin \theta \cos \varphi - R(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi \\ \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \theta \sin \varphi + R(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \varphi & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \sin \theta \sin \varphi + R(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi \end{array} \right| \\ &= R(\theta, \varphi) \sin \theta \left\{ R(\theta, \varphi) \cos \theta + \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \theta \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(Y, Z)}{\partial(\theta, \varphi)} \\ &= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \theta \sin \varphi + R(\theta, \varphi) \cos \theta \sin \varphi & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \sin \theta \sin \varphi + R(\theta, \varphi) \sin \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial R}{\partial \theta} \cos \theta - R(\theta, \varphi) \sin \theta & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \cos \theta \end{array} \right| \\ &= R(\theta, \varphi) \left\{ \frac{\partial R}{\partial \varphi} \sin \varphi + R(\theta, \varphi) \sin^2 \theta \cos \varphi - \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta \cos \varphi \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(Z, X)}{\partial(\theta, \varphi)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial R}{\partial \theta} \cos \theta - R(\theta, \varphi) \sin \theta & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \cos \theta \\ \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \theta \cos \varphi + R(\theta, \varphi) \cos \theta \cos \varphi & \frac{\partial R}{\partial \varphi} \sin \theta \cos \varphi - R(\theta, \varphi) \sin \theta \sin \varphi \end{array} \right| \\
&= -R(\theta, \varphi) \left\{ \frac{\partial R}{\partial \varphi} \cos \varphi - R(\theta, \varphi) \sin^2 \theta \sin \varphi + \frac{\partial R}{\partial \theta} \sin \theta \cos \theta \sin \varphi \right\}
\end{aligned}$$

Vult men deze waarden in (73.2) in, dan vindt men na enige berekening:

$$O = \iint_H R(\theta, \varphi) \sqrt{\left\{ R^2(\theta, \varphi) + \left(\frac{\partial R}{\partial \theta} \right)^2 \right\} \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2} d\theta d\varphi \quad (75.1)$$

Voorbeeld 1

Bereken de oppervlakte O van een bol met straal a met behulp van bolcoördinaten.

Oplossing:

We plaatsen het middelpunt van de bol in de oorsprong. De vergelijking van de bol in bolcoördinaten is dan: $r = a$, dus geldt: $R(\theta, \varphi) = a$. De waarden die θ en φ doorlopen zijn $0 \leq \theta \leq \pi$ en $0 \leq \varphi < 2\pi$. Aangezien $\frac{\partial R}{\partial \theta} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$, krijgen we:

$$O = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\pi a \sqrt{a^2 \sin^2 \theta} d\theta \right\} d\varphi = 2\pi a^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2\pi a^2 [-\cos \theta]_0^\pi = 4\pi a^2$$

Voorbeeld 2

Bereken de oppervlakte van dat deel van de bol met straal a en middelpunt O , waarvan de projectie op het x, y -vlak valt binnen de lussen van de kromme met poolvergelijking: $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ (lemniscaat).

Oplossing:

Op grond van de symmetrie is het voldoende de oppervlakte te berekenen van dat deel van de bol dat „boven” de lemniscaat ligt in het eerste octant (zie fig. 111). De vergelijking van de bol in bolcoördinaten is $r = a$, zodat we voor de gevraagde oppervlakte O vinden:

$$O = 8 \iint_H a \sqrt{a^2 \sin^2 \theta} d\theta = 8a^2 \iint_H \sin \theta d\theta \quad (75.2)$$

Hierin is H het deel van het θ, φ -vlak dat doorlopen wordt door de coördinaten θ en φ van een punt P op de bol, als P het bewuste oppervlak doorloopt. Dan geldt

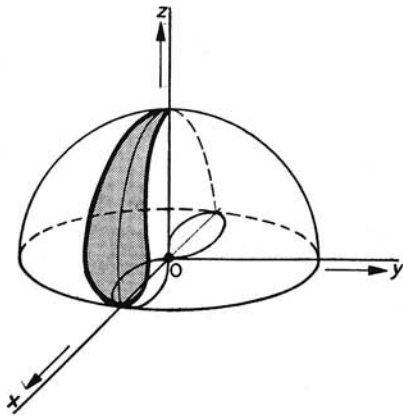
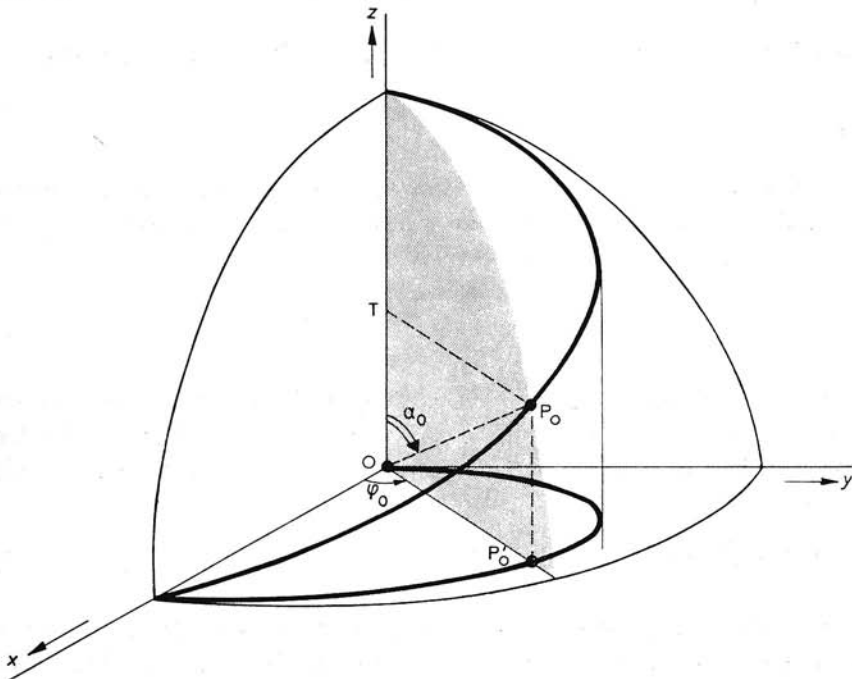


Fig. 111

voor de grenzen van φ : $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{4}\pi$ (zie par. 74, voorbeeld). We willen voorts nog weten wat – bij vaste φ – de grenzen zijn voor θ . We zien (zie fig. 112) dat bij vaste φ_0 , θ loopt van 0 tot α_0 , waarbij geldt dat het punt $P_0(\varphi_0, \alpha_0)$ op de snijkromme ligt van de bol en de lemniscaatcilinder. Als we de projecties van P_0 op het x, y -vlak en op de z -as aangeven met resp. P'_0 en T, dan geldt:

$$TP_0 = OP_0 \sin \alpha_0 = a \sin \alpha_0 \quad (P_0 \text{ op bol})$$

Fig. 112



maar ook:

$$TP_0 = OP'_0 = a\sqrt{\cos 2\varphi_0} \quad (P_0 \text{ op cilinder})$$

zodat bij vaste φ_0 voor de grenzen van θ geldt: $0 \leq \theta \leq \alpha_0$, met $\sin \alpha_0 = \sqrt{\cos 2\varphi_0}$ en $0 \leq \alpha_0 \leq \pi$.

Voor (75.2) kunnen we dus schrijven:

$$O = 8a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^{\alpha} \sin \theta \, d\theta \right\} d\varphi$$

met $\sin \alpha = \sqrt{\cos 2\varphi}$.

We vinden dan:

$$\begin{aligned} O &= 8a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [-\cos \theta]_0^{\alpha} d\varphi \\ &= 8a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-\cos \alpha + 1) d\varphi \\ &= 8a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-\sqrt{1 - \cos 2\varphi} + 1) d\varphi \\ &= 8a^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (-\sqrt{2} \sin \varphi + 1) d\varphi \\ &= 8a^2 [\sqrt{2} \cos \varphi + \varphi]_0^{\frac{1}{2}\pi} = 8a^2(1 + \frac{1}{2}\pi - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

76 Oppervlakte van omwentelingslichamen

Evenals de inhoudsberekening van omwentelingslichamen kan geschieden met een enkelvoudige integraal, zo is dit ook het geval bij de berekening van de oppervlakte daarvan.

We nemen aan dat de kromme met vergelijking $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) geheel in het eerste kwadrant ligt (eventueel met punten op de x -as, dus $f(x) \geq 0$ als $x \in [a, b]$) (zie fig. 101). We laten deze kromme wentelen om de x -as, en vragen naar de oppervlakte van het gebogen deel van het zo ontstane omwentelingslichaam gelegen tussen de vlakken met vergelijkingen: $x = a$ en $x = b$ ($b > a$).

De vergelijking van het omwentelingsoppervlak vinden we op dezelfde manier als in par. 71. Voor het in het eerste octant gelegen deel van dat oppervlak is deze:

$$z = g(x, y) = \sqrt{\{f(x)\}^2 - y^2}$$

Nu is:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{\{f(x)\}^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{\{f(x)\}^2 - y^2}}$$

De gevraagde oppervlakte O voldoet dus aan:

$$O = 4 \int_a^b \left\{ \int_0^{f(x)} \sqrt{1 + \frac{\{f(x)f'(x)\}^2}{\{f(x)\}^2 - y^2} + \frac{y^2}{\{f(x)\}^2 - y^2}} \, dy \right\} dx$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_a^b \left\{ \int_0^{f(x)} \frac{f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}}{\sqrt{\{f(x)\}^2 - y^2}} dy \right\} dx \\
&= 4 \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} \left[\arcsin \frac{y}{f(x)} \right]_{y=0}^{y=f(x)} dx
\end{aligned}$$

zodat:

$$O = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

of als we $y = f(x)$ stellen:

$$O = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Opmerking 1:

In het vorenstaande is uiteraard steeds verondersteld dat f differentieerbaar is op $[a, b]$ en dat f' continu is in $[a, b]$.

Opmerking 2:

Indien niet geldt: $f(x) \geq 0$ voor $x \in [a, b]$, dan kunnen we, indien het aantal snijpunten met de x -as eindig is, het oppervlak in een eindig aantal delen verdelen en van elk deel de oppervlakte berekenen.

Opmerking 3:

Indien de vergelijking van de wentelende kromme in poolcoördinaten is gegeven door $\rho = R(\varphi)$ en men wil de „ronde” oppervlakte bepalen van het lichaam dat ontstaat door wenteling van de sector, begrensd door de kromme en de beide voerstraal $\varphi = \alpha$ en $\varphi = \beta$ om de poolas, dan past men dezelfde methode toe als aangegeven is in par. 71, voorbeeld 4. We gebruiken bolcoördinaten en laten de x -as de rol vervullen die normaliter bij bolcoördinaten wordt gespeeld door de z -as. De poolhoek φ uit de vergelijking van de kromme neemt dan de rol over van hoek θ in formule (75.1). Wat hierin θ is, noemen we nu φ .

Volgens (75.1) geldt dan voor de gezochte oppervlakte O :

$$O = \int_0^{2\pi} \left\{ \int_\alpha^\beta R(\varphi) \sqrt{\left\{ R^2(\varphi) + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 \right\} \sin^2 \varphi} d\varphi \right\} d\theta$$

en dus:

$$O = 2\pi \int_\alpha^\beta R(\varphi) \sin \varphi \sqrt{R^2(\varphi) + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2} d\varphi \quad (76.1)$$

Voorbeeld 1

Bereken de ronde oppervlakte van een bolschijf.

Oplossing:

Het ronde oppervlak van een bolschijf verkrijgt men door een boog AB van de cirkel met middelpunt O en straal r te laten wentelen om de x -as (zie fig. 113).

Nu geldt:

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

en dus:

$$f(x)\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} = \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = r$$

zodat:

$$O = 2\pi \int_a^b r dx = 2\pi r(b - a)$$

Voorbeeld 2

Bereken de ronde oppervlakte van een torus.

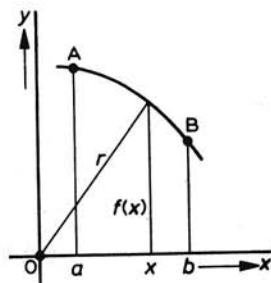
Oplossing:

Evenals in par. 71, voorbeeld 3 vindt men (zie fig. 105):

$$f_1(x) = b + \sqrt{r^2 - x^2}, \quad f_2(x) = b - \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Fig. 113



De oppervlakte van de torus is dus:

$$\begin{aligned} O &= 4\pi \int_0^r (b + \sqrt{r^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx + \\ &+ 4\pi \int_0^r (b - \sqrt{r^2 - x^2}) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ &= 8\pi br \int_0^r \frac{dx}{\sqrt{r^2 - x^2}} \\ &= 8\pi br \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = 4\pi^2 br \end{aligned}$$

Voorbeeld 3

Bereken de oppervlakte van het lichaam, dat ontstaat bij wenteling van de cardioïde met poolvergelijking: $\rho = 2a(1 - \cos \varphi)$, om de poolas (zie fig. 76).

Oplossing:

Volgens (76.1) is deze oppervlakte:

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_0^\pi 2a(1 - \cos \varphi) \sin \varphi \sqrt{4a^2(1 - \cos \varphi)^2 + 4a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= 64\pi a^2 \int_0^\pi \sin^4 \frac{1}{2}\varphi \cos \frac{1}{2}\varphi d\varphi = \frac{128}{5}\pi a^2 \end{aligned}$$

Integraalstellingen

77 Oppervlak-integralen

In hoofdstuk 7 werd het begrip lijnintegraal ingevoerd. Dit begrip kan worden uitgebreid tot het begrip „oppervlak-integraal” en wel aldus:

Stel dat S een oppervlak is in \mathbb{R}^3 , gegeven door de vergelijking:

$$z = f(x, y)$$

waarbij f gedefinieerd is op een gebied G dat een geoorloofd integratiegebied is (zie hiervoor par. 54), waarbij tevens de afgeleiden f_x en f_y continu zijn in G .

Stel verder dat $\varphi: (x, y, z) \mapsto \varphi(x, y, z)$ een functie is, gedefinieerd op een (drie-dimensionale) omgeving van S en daar continu is. Op dezelfde wijze als in par. 72 is uiteengezet, verdelen we de projectie G van S op het x, y -vlak in n deelgebieden G_1, G_2, \dots, G_n met oppervlakken resp. $\Delta G_1, \Delta G_2, \dots, \Delta G_n$.

We kiezen weer in elk van deze deelgebieden punten $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$ en brengen in de punten $\{\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)\}$ het raakvlak aan S aan.

Stel dat $\Delta\tau_i$ weer de oppervlakte van het deel τ_i is van het raakvlak aan S dat „boven” G_i ligt, d.w.z. dat G_i tot projectie op het x, y -vlak heeft.

We vormen de bij deze verdeling van G en de bij deze keuze van de punten (ξ_i, η_i) behorende som:

$$\sum_{i=1}^n \varphi\{\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)\} \Delta\tau_i$$

die volgens (72.1) gelijk is aan:

$$\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i)) \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \Delta G_i$$

Dit is een Riemanssom behorende bij de integraal:

$$\iint_G \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy$$

waarvan de existentie verzekerd is door de continuïteit van φ , f , f_x en f_y .
We definiëren de integraal van φ over S als:

$$\iint_S \varphi(x, y, z) dS = \iint_G \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} dx dy$$

Hierin is weer dS het z.g. oppervlakte-element, waarvoor geldt bij gebruik van

a rechthoekige coördinaten:

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

b cilindercoördinaten:

$$dS = \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\right)^2} d\rho d\varphi$$

c bolcoördinaten:

$$dS = R(\theta, \varphi) \sqrt{\left\{R^2(\theta, \varphi) + \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}\right)^2\right\} \sin^2 \theta + \left(\frac{\partial R}{\partial \varphi}\right)^2} d\theta d\varphi$$

d „algemene” coördinaten:

$$dS = \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix}^2} du dv$$

Voorts geldt, indien het oppervlak S in *impliciete* vorm gegeven is door $F(x, y, z) = 0$ terwijl aan voldoende eisen van differentieerbaarheid is voldaan en $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$:

$$dS = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\frac{\partial F}{\partial z}} dx dy$$

Voorbeeld

Als S gedefinieerd is door (zie fig. 114):

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4; z \geq 1\}$$

bereken dan:

$$\iint_S \varphi(x, y, z) dS$$

indien:

a $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2)z$

b $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2$

Oplossing:

a We berekenen $\iint_S \varphi(x, y, z) dS$ met *rechthoekige* coördinaten. De projectie G van S op het x, y -vlak is bepaald door de eis:

$$G = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 3; z = 0\}$$

Voor dS vinden we:

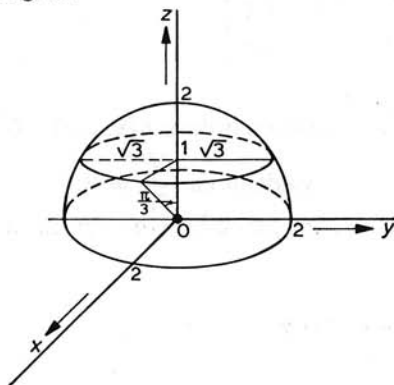
$$dS = \frac{1}{z} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dx dy = \frac{2}{z} dx dy$$

daar op S geldt $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Hieruit blijkt:

$$\iint_S \varphi(x, y, z) dS = 2 \iint_G (x^2 + y^2) dx dy$$

Fig. 114



Overgang op poolcoördinaten geeft:

$$\iint_S \varphi(x, y, z) dS = 8 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^{\sqrt{3}} r^3 dr \right\} d\varphi = 9\pi$$

Bij gebruik van *bolcoördinaten* wordt S bepaald door:

$$S = \left\{ (R, \theta, \varphi) \mid R = 2; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}; 0 \leq \varphi < 2\pi \right\}$$

zodat $\frac{\partial R}{\partial \theta} = \frac{\partial R}{\partial \varphi} = 0$ en $dS = 4 \sin \theta d\theta d\varphi$.

Voorts geldt:

$$\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2)z = R^2 \sin^2 \theta \cdot R \cos \theta = 8 \sin^2 \theta \cos \theta$$

dus:

$$\begin{aligned} \iint_S \varphi(x, y, z) dS &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left\{ \int_{\theta=0}^{\frac{1}{3}\pi} 32 \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \right\} d\varphi \\ &= 64\pi \int_0^{\frac{1}{3}\pi} \sin^3 \theta \cos \theta d\theta \\ &= 16\pi \sin^4 \theta \Big|_0^{\frac{1}{3}\pi} = 9\pi \end{aligned}$$

Bij gebruik van *cilindercoördinaten* wordt S bepaald door:

$$S = \{ \rho, \varphi, z \mid \rho^2 + z^2 = 4; z \geq 1; 0 \leq \varphi < 2\pi \}$$

zodat:

$$\frac{\partial Z}{\partial \rho} = -\frac{\rho}{z} \text{ en } \frac{\partial Z}{\partial \varphi} = 0$$

en

$$dS = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^4}{z^2}} d\rho d\varphi$$

Voorts geldt $\varphi(x, y, z) = (x^2 + y^2)z = \rho^2 z$, dus:

$$\begin{aligned} \iint_S \varphi(x, y, z) dS &= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^{\sqrt{3}} \rho^2 z \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho^4}{z^2}} d\rho d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 \sqrt{\rho^2 z^2 + \rho^4} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho^2 \sqrt{\rho^2(4 - \rho^2) + \rho^4} d\rho \\ &= 4\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho^3 d\rho = 9\pi \end{aligned}$$

b Indien we $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2$ stellen, vinden we, bij gebruikmaken van rechtehoekige coördinaten:

$$\iint_S \varphi(x, y, z) dS = \iint_G (x^2 + y^2) \frac{2}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} dx dy$$

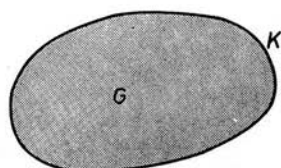


Fig. 115

Overgang op poolcoördinaten levert dan:

$$\begin{aligned} \iint_S \varphi(x, y, z) dS &= 8 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\rho^3}{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^3 \frac{u du}{\sqrt{4-u}} = \frac{20}{3}\pi \end{aligned}$$

Ga zelf na hoe het gebruik van bolcoördinaten resp. cilindercoördinaten verloopt.

78 Inleidende opmerkingen over integraalstellingen

In par. 58 werd de stelling van Green afgeleid die een verband legt tussen een lijn-integraal, genomen langs een gesloten vlakke kromme K en een dubbelintegraal berekend over het door K omsloten deel G van het platte vlak (fig. 115).

Er geldt dan:

$$\int_{K^+} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Deze stelling is geldig in \mathbb{R}^2 . We kunnen op twee manieren generaliseren tot een stelling die geldt in \mathbb{R}^3 , en wel enerzijds door i.p.v. het door een gesloten vlakke kromme omsloten deel van het platte vlak te beschouwen het door een gesloten oppervlak omsloten deel van de ruimte. Deze generalisatie leidt tot de stelling van Gauss. Anderzijds kunnen we de rol van de vlakke kromme K laten overnemen door een ruimtekromme en i.p.v. het vlakdeel dat door K begrensd wordt een gebogen oppervlak beschouwen dat door genoemde ruimtekromme begrensd wordt. Deze generalisatie leidt tot de stelling van Stokes* (zie fig. 116).

Voor dat we tot een bespreking van deze stellingen overgaan, zullen we enkele problemen signaleren die verbonden zijn aan de begrippen oppervlak, gesloten oppervlak, binnenkant en buitenkant van een oppervlak, als ook aan het begrip rand van een oppervlak. Wanneer we ons beperken tot „eenvoudige” oppervlakken (b.v. bol, ellipsoïde en kubus), dan lijken de genoemde begrippen intuïtief wel duidelijk. Wij

* G. G. Stokes 1819–1903.

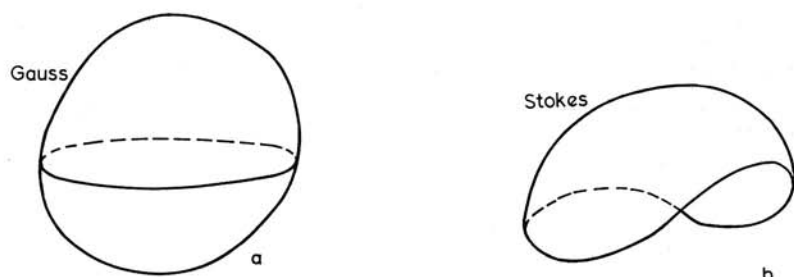
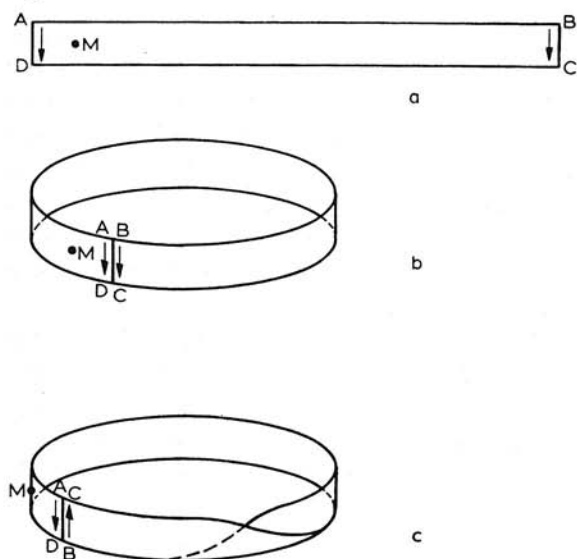


Fig. 116

vinden ze gesloten omdat ze de ruimte in twee delen verdelen, waarbij men niet van het ene deel in het andere kan komen zonder het oppervlak te passeren. Ook de begrippen binnenkant en buitenkant leveren intuïtief geen problemen op. Verder is het bij een halve bol „duidelijk” wat we onder de rand zullen verstaan, terwijl men ook aan een halve bol duidelijk twee kanten kan onderscheiden (binnenkant en buitenkant). Het is echter niet moeilijk een voorbeeld te geven van een oppervlak waaraan geen binnenkant of buitenkant valt toe te kennen. We nemen daartoe een rechthoekig stuk papier ABCD (zie fig. 117a). We kunnen hiervan een ring maken door de zijde AD te laten samenvallen met de zijde BC, zó, dat de getekende pijlen na identificatie van AD en BC eenzelfde richting hebben (fig. 117b). Aan deze ring onderscheiden we (intuïtief) duidelijk twee kanten. Brengen we echter, voordat we de zijden AD en BC samenvoegen, een „slag” aan in het papier, zodanig dat bij het „dichtplakken” het hoekpunt A samenvalt met C en D met B, dan lopen na deze operatie de pijlen AD en BC in tegengestelde richting (fig. 117c).

Fig. 117



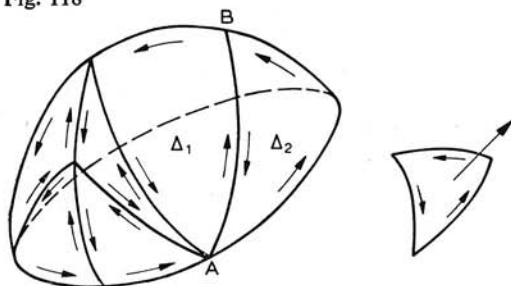
Aan deze z.g. *band van Moebius** zijn geen binnenkant en geen buitenkant te onderscheiden. Dit blijkt als volgt. Begint men bij M op de band een lijn te trekken, evenwijdig aan AB, dan kan men, zonder het potlood van het papier te nemen deze lijn doortrekken tot men in M terug is. Het blijkt dan dat deze lijn over de gehele band heen loopt! Deze band van Moebius is een typisch voorbeeld van een niet-oriënteerbaar oppervlak.

Zonder in details te treden zullen we schetsmatig aangeven wat we onder een *oriënteerbaar oppervlak* verstaan. Stel dat we op een oppervlak S een verdeling kunnen aanbrengen in eindig veel kromlijnige driehoeken die of niets of een hoekpunt of een zijde gemeen hebben, terwijl één zijde tot hoogstens twee driehoeken behoort. We zeggen dan dat we een *triangulatie* op S hebben aangebracht. We noemen dan S oriënteerbaar, indien we in iedere driehoek een omloopzin kunnen aanbrengen zó dat, indien de driehoeken Δ_1 en Δ_2 een zijde AB gemeen hebben, de richting langs AB in Δ_1 tegengesteld is aan die langs AB in Δ_2 (zie fig. 118). Wanneer een oppervlak S oriënteerbaar is, kunnen we daaraan een *binnenkant* en een *buitenkant* onderscheiden door de oriëntatierichting in een driehoek te laten corresponderen met de rotatierichting van een (b.v. rechtsomdraaiende) kurketrekker. De voortgangsrichting van die kurketrekker wijst dan één bepaalde kant van S aan; de tegenovergestelde richting wijst de andere kant van S aan.

De *rand van het oppervlak* is dan het geheel van de zijden van de bij de triangulatie gebruikte driehoeken, waarbij we twee aangrenzende zijden tegen elkaar laten wegvallen. Indien alle zijden tegen elkaar wegvallen, noemen we het oppervlak *gesloten* (de rand is dan gereduceerd tot de lege verzameling). Dit begrip „gesloten” blijkt dan achteraf samen te vallen met het eerder genoemde begrip „gesloten”, maar het bewijs daarvan is verre van eenvoudig. In het bestek van dit boek kunnen we hier niet verder op ingaan (blijft o.m. de vraag wat kromlijnige driehoeken zijn). De belangstellende lezer wordt verwezen naar leerboeken over topologie*.

In het vervolg zullen we steeds, als we over oppervlakken spreken, oriënteerbare oppervlakken bedoelen. Met gesloten oppervlakken worden die oppervlakken be-

Fig. 118



* A. F. Moebius (1790–1868).

* b.v. E. M. Patterson „Topology”, Oliver and Boyd, Edinburgh.

doeld die de ruimte verdelen in twee of meer „gescheiden” delen, terwijl we ook vrijelijk zullen spreken over de rand van een oppervlak.

Dit heeft ten gevolg dat de bewijzen in de paragrafen over de integraalstellingen een gedeeltelijk intuïtief karakter hebben.

79 Het divergentietheorema (stelling van Gauss)

De in de vorige paragraaf aangekondigde generalisatie van de stelling van Green tot de stelling van Gauss, luidt als volgt:

Stelling

Stel dat S een gesloten oriënteerbaar oppervlak in \mathbb{R}^3 is, dat het deel V van \mathbb{R}^3 omsluit. In een punt van S stellen we de richtingscosinussen van de naar buiten gerichte normaal (buitennormaal) voor door resp. $\cos \alpha$, $\cos \beta$ en $\cos \gamma$, waarin α , β , γ de hoeken zijn die de buitennormaal maakt met resp. de positieve x -, y - en z -as.* Verder zijn P , Q en R in V (inclusief S) gedefinieerde continue functies van x , y en z , waarbij ook de afgeleiden P_x , Q_y en R_z continu zijn. Er geldt dan:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_S \{ (P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma) \} dS \quad (79.1)$$

Bewijs:

We veronderstellen allereerst dat S een convex oppervlak is, d.w.z. dat elke rechte het oppervlak in niet meer dan twee punten snijdt. Stel dat G de projectie is van S op het x, y -vlak en dat het onderste deel S_1 van S tot vergelijking heeft:

$$z = Z_1(x, y)$$

en het bovenste deel S_2 tot vergelijking:

$$z = Z_2(x, y)$$

Hierbij worden Z_1 en Z_2 continu verondersteld in G .

We beschouwen eerst

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz$$

* α , β en γ hangen af van het beschouwde punt (x, y, z) op S . Ter bekorting schrijven we echter α in plaats van $\alpha(x, y, z)$, etc.

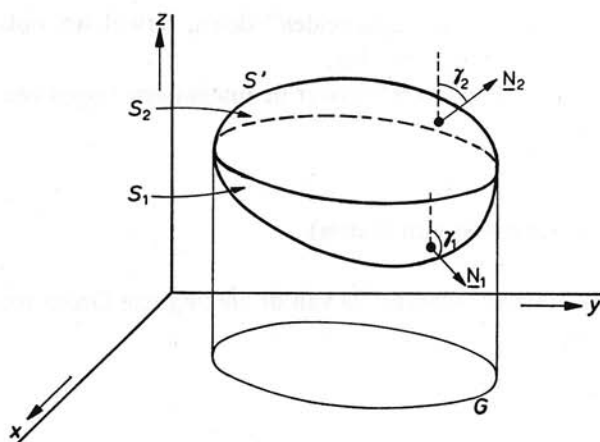


Fig. 119

en schrijven deze als een herhaalde integraal:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \iint_G \left\{ \int_{Z_1(x,y)}^{Z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right\} dx dy \\ &= \iint_G [R\{x, y, Z_2(x, y)\} - R\{x, y, Z_1(x, y)\}] dx dy \end{aligned} \quad (79.2)$$

Verder geldt:

$$\begin{aligned} \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma(x, y, z) dS &= \iint_{S_1} R(x, y, z) \cos \gamma_1(x, y, z) dS + \\ &+ \iint_{S_2} R(x, y, z) \cos \gamma_2(x, y, z) dS \end{aligned} \quad (79.3)$$

waarin γ_1 resp. γ_2 de hoeken tussen buitennormaal en positieve z-as aangeven op S_1 resp. S_2 . Daar op S_1 de buitennormaal naar beneden gericht is, geldt: $\cos \gamma_1 < 0$; op S_2 is de buitennormaal naar boven gericht en dus $\cos \gamma_2 > 0$ (zie fig. 119). Volgens par. 72 geldt:

$$dS = \frac{dx dy}{\cos \alpha}$$

waarin α de *scherpe* hoek is tussen de positieve z-as en de (niet georiënteerde) drager van de normaal op het oppervlak. Op S_1 geldt (zie fig. 120) dus:

$$dS = \frac{dx dy}{\cos(\pi - \gamma_1)} = - \frac{dx dy}{\cos \gamma_1}$$

en op S_2 (zie fig. 120):

$$dS = \frac{dx dy}{\cos \gamma_2}$$

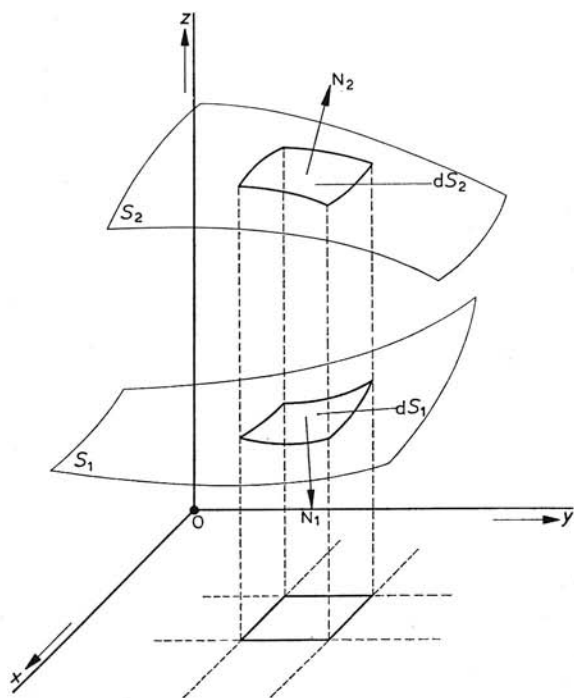


Fig. 120

Dus is:

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} R(x, y, z) \cos \gamma dS &= \iint_{S_1} R\{x, y, Z_1(x, y)\} \cos \gamma_1 dS \\
 &= \iint_G R\{x, y, Z_1(x, y)\} \cos \gamma_1 \frac{dx dy}{-\cos \gamma_1} \\
 &= - \iint_G R\{x, y, Z_1(x, y)\} dx dy
 \end{aligned} \tag{79.4}$$

en

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_2} R(x, y, z) \cos \gamma dS &= \iint_{S_2} R\{x, y, Z_2(x, y)\} \cos \gamma_2 dS \\
 &= \iint_G R\{x, y, Z_2(x, y)\} \cos \gamma_2 \frac{dx dy}{\cos \gamma_2} \\
 &= \iint_G R\{x, y, Z_2(x, y)\} dx dy
 \end{aligned} \tag{79.5}$$

Uit (79.3), (79.4) en (79.5) volgt:

$$\iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS = \iint_G R\{x, y, Z_2(x, y)\} dx dy - \iint_G R\{x, y, Z_1(x, y)\} dx dy$$

Hieruit en uit (79.2) volgt:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS \quad (79.6)$$

Op analoge wijze bewijst men (onder analoge veronderstellingen over S):

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_S P(x, y, z) \cos \alpha dS \quad (79.7)$$

en

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_S Q(x, y, z) \cos \beta dS \quad (79.8)$$

Uit (79.6), (79.7) en (79.8) volgt door optellen (79.1).

Opmerking 1:

Bij deze afleiding is essentieel dat de projecties van S_1 en S_2 op het x, y -vlak samenvallen en dat een analoge situatie bestaat t.o.v. het y, z -vlak en het x, z -vlak.

Opmerking 2:

De hierboven uitgevoerde berekening van $\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz$ zou tot hetzelfde resul-

taat geleid hebben indien S_1 en S_2 van elkaar gescheiden waren door een cilindervlak met de as evenwijdig aan de z -as. De bijdrage van de cilinderwand tot de oppervlak-integraal zou dan nul geweest zijn, daar de buitennormaal op de cilinderwand evenwijdig loopt met het x, y -vlak. Hiervoor geldt dus: $\cos \gamma = 0$. Wanneer t.o.v. het y, z -vlak en het x, y -vlak een analoge situatie bestaat, vinden we ook weer het resultaat (79.1). Bij een kubus met zijvlakken evenwijdig aan de coördinaatvlakken is dit b.v. het geval!

Opmerking 3:

De stelling kan ook toegepast worden op lichamen die te verdelen zijn in een eindig aantal convexe delen, die elk begrensd worden door een oppervlak waarop (79.1) van toepassing is. We passen daartoe op elk van die delen de stelling toe en tellen de resultaten op. De oppervlak-integralen over de deelvlakken komen twee maal voor en wel met verschillend teken (vanwege de tegengesteld gerichte normalen). Ze vallen dus twee aan twee tegen elkaar weg.

We kunnen de hiervoor afgeleide stelling ook „vertalen” in vectorvorm door P , Q en R op te vatten als de componenten van een vectorfunctie \underline{F} , dus als $\underline{F} = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix}$.
D.w.z.:

$$\underline{F}(\underline{x}) = \underline{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Er geldt dan:

$$\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Stelt $\underline{N}(\underline{x})$ de eenheidsvector voor langs de buitennormaal op S in het punt met plaatsvector \underline{x} ($\underline{x} = (x, y, z)$), dan geldt ook:

$$(\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) = P(x, y, z) \cos \alpha + Q(x, y, z) \cos \beta + R(x, y, z) \cos \gamma$$

We kunnen het divergentietheorema dan ook aldus formuleren:

Divergentie theorema (Theorema van Gauss)

Stel dat S een gesloten oriënteerbaar oppervlak in \mathbb{R}^3 is, dat het deel V van \mathbb{R}^3 omsluit. In een punt van S met plaatsvector \underline{x} stellen we de eenheidsvector langs de naar buiten gerichte normaal op S voor door $\underline{N}(\underline{x})$. Verder is \underline{F} een op V (inclusief S) gedefinieerde vectorfunctie waarbij de drie componenten van \underline{F} continu zijn. Er geldt dan:

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) dV = \iint_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) dS \quad (79.9)$$

of met gebruikmaking van de nabla-operator ∇ (zie hoofdstuk 4):

$$\iiint_V (\nabla, \underline{F}) dV = \iint_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) dS \quad (79.10)$$

Voorbeeld 1

Neem aan dat V en S gedefinieerd zijn zoals in de divergentiestelling. Stel dat O een vast punt is in \mathbb{R}^3 en P een veranderlijk punt op S met plaatsvector $\underline{R}(\underline{x})$. Stel dat verder $\underline{N}(\underline{x})$ de eenheidsvector is langs de buitennormaal op S (zie fig. 121). Bewijs dan dat voor de inhoud I_V van V geldt:

$$I_V = \frac{1}{3} \iint_S (\underline{R}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) dS \quad (79.11)$$

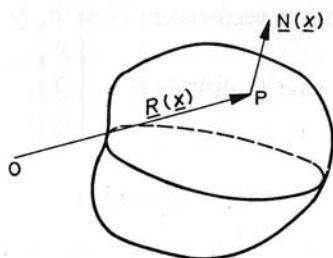


Fig. 121

Bewijs:

We nemen O als oorsprong van het coördinatenstelsel en passen de divergentiestelling toe op het vectorveld $\underline{R}(x)$. Er geldt dan $\underline{R}(x) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, dus $\text{div } \underline{R}(x) = 1 + 1 + 1 = 3$, zodat volgens (79.9) geldt:

$$\iiint_V 3 dV = \iint_S (\underline{R}(x), \underline{N}(x)) dS$$

waaruit (79.11) volgt.

Voorbeeld 2

Verifieer het divergentietheorema voor het geval dat

$$\underline{F}(x) = \begin{pmatrix} x + y \\ y - x \\ z^2 \end{pmatrix}$$

en

$$S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \geq 0\} \cup \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq 1; z = 0\}$$

S bestaat dus uit een halve bol die „afgesloten” wordt door een vlak door het middelpunt.

Oplossing:

Hier geldt:

$$\text{div } \underline{F}(x) = 1 + 1 + 2z = 2(z + 1)$$

Voor de volume-integraal I_1 geldt dus:

$$I_1 = \iiint_V \text{div } \underline{F}(x) dV = 2 \iiint_V (z + 1) dV$$

Overgaande op bolcoördinaten vinden we:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) dV &= 2 \int_{r=0}^1 \int_{\theta=0}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (r \cos \theta + 1)r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\ &= 4\pi \int_{\theta=0}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{r=0}^1 (r^3 \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin \theta) dr d\theta \\ &= 4\pi \left\{ \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} + \frac{1}{3} (-\cos \theta) \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} \right\} = 4\pi \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{3} \right) = \frac{11}{6}\pi \end{aligned}$$

Het oppervlak bestaat uit het oppervlak B van de halve bol en het grondvlak G in het x, y -vlak.

Op B is de normaal $\underline{N}(\underline{x})$ radiaal gericht, dus $\underline{N}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$.

(N.B. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$). We vinden:

$$\begin{aligned} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) &= x(x+y) + y(y-x) + z^3 \\ &= x^2 + y^2 + (1 - x^2 - y^2)\sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{aligned}$$

Voor de oppervlak-integraal I_2 geldt:

$$I_2 = \iint_B \{x^2 + y^2 + (1 - x^2 - y^2)^{\frac{3}{2}}\} dS$$

We gaan over op bolcoördinaten en bedenken dat de straal van B de waarde 1 heeft. Op B geldt:

$$x^2 + y^2 = \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi = \sin^2 \theta$$

We vinden dan:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\theta=0}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \{\sin^2 \theta + \cos^3 \theta\} \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin \theta - \cos^2 \theta \sin \theta + \cos^3 \theta \sin \theta) d\theta \\ &= 2\pi \left\{ -\cos \theta + \frac{1}{3} \cos^3 \theta - \frac{1}{4} \cos^4 \theta \right\} \Big|_0^{\frac{1}{2}\pi} \\ &= 2\pi \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{11}{6}\pi \end{aligned}$$

De naar buiten gerichte eenheidsnormaal op het grondvlak is de vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, zodat voor het grondvlak geldt:

$$(\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) = -z^2$$

en dus:

$$\iint_G (\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) dS = \iint_G -z^2 dx dy = 0$$

daar op G geldt: $z = 0$.

De totale oppervlak-integraal is dus $\frac{11}{6}\pi + 0 = \frac{11}{6}\pi$. Dit is ook de waarde van I_1 .

80 Stellingen van Green voor de ruimte

In deze paragraaf hebben S en V dezelfde betekenis als in de vorige paragraaf. Stel dat u en v functies zijn, gedefinieerd op V (inclusief S) met continue eerste en tweede partiële afgeleiden naar x , y en z .

We passen nu het divergentietheorema toe met

$$\underline{F}(x) = u(x) \operatorname{grad} v(x) = u(x) \nabla v$$

$$= \begin{pmatrix} u(x) \frac{\partial v}{\partial x} \\ u(x) \frac{\partial v}{\partial y} \\ u(x) \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \underline{F}(x) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(u(x) \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u(x) \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u(x) \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ &= u(x) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned}$$

Nu geldt:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \nabla^2 v$$

waarin ∇^2 de operator van Laplace voorstelt (zie par. 23), terwijl:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z}$$

gelijk is aan het inwendige produkt

$$(\nabla u, \nabla v)$$

van de vectoren ∇u ($= \operatorname{grad} u(x)$) en ∇v ($= \operatorname{grad} v(x)$).

De volume-integraal uit (79.9) verkrijgt dan de gedaante:

$$\iiint_V \{u(x) \nabla^2 v + (\nabla u, \nabla v)\} dV$$

Verder geldt in dit geval:

$$(\underline{F}(x), \underline{N}(x)) = (u(x) \nabla v, \underline{N}(x))$$

De oppervlak-integraal in (79.9) heeft de vorm:

$$\iint_S (u(x) \nabla v, \underline{N}(x)) dS$$

Het divergentietheorema wordt in dit geval dus:

$$\begin{aligned} \iiint_V \{u(\underline{x})\nabla^2 v + (\nabla u, \nabla v)\} dV \\ = \iint_S (u(\underline{x})\nabla v, \underline{N}(\underline{x})) dS \end{aligned} \quad (80.1)$$

Dit wordt de *eerste stelling van Green voor de ruimte* genoemd.

Verwisselt men in (80.1) $u(\underline{x})$ en $v(\underline{x})$ dan krijgt men:

$$\begin{aligned} \iiint_V \{v(\underline{x})\nabla^2 u + (\nabla u, \nabla v)\} dV \\ = \iint_S (v(\underline{x})\nabla u, \underline{N}(\underline{x})) dS \end{aligned} \quad (80.2)$$

Trekt men rechter- en linkerlid van (80.2) af van de overeenkomstige leden van (80.1), dan ontstaat de z.g. *tweede stelling van Green voor de ruimte*:

$$\begin{aligned} \iiint_V \{u(\underline{x})\nabla^2 v - v(\underline{x})\nabla^2 u\} dV \\ = \iint_S (u(\underline{x})\nabla v - v(\underline{x})\nabla u, \underline{N}(\underline{x})) dS \end{aligned} \quad (80.3)$$

Opmerking 1:

Indien de waarde van $v(\underline{x})$ identiek 1 is, dan gaat (80.3) over in:

$$\iiint_V \nabla^2 u dV = \iint_S (\nabla u, \underline{N}(\underline{x})) dS \quad (80.4)$$

Nu heeft het inwendig produkt $(\nabla u, \underline{N}(\underline{x}))$ juist de waarde die gelijk is aan de lengte van de normale component van ∇u voorzien van het juiste teken. Volgens deel 1, par. 137 is deze gelijk aan de richtingsafgeleide in de richting van de buitennormaal. Indien we deze richtingsafgeleide voorstellen door $\frac{\partial u}{\partial n}$, dan vinden we:

$$\iiint_V \nabla^2 u dV = \iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS$$

Opmerking 2:

Indien u een *harmonische functie* is, d.w.z. indien u voldoet aan de vergelijking van Laplace:

$$\nabla^2 u = 0$$

of

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

dan volgt uit (80.1), indien we hierin $u = v$ stellen:

$$\iiint_V (\nabla u, \nabla u) dV = \iint_S (u(\underline{x}) \nabla u, \underline{N}(\underline{x})) dS \quad (80.5)$$

Aangezien echter (volgens opmerking 1) geldt:

$$\begin{aligned} (u(\underline{x}) \nabla u, \underline{N}(\underline{x})) &= u(\underline{x}) (\nabla u, \underline{N}(\underline{x})) \\ &= u(\underline{x}) \frac{\partial u}{\partial n} \end{aligned}$$

kunnen we (80.5) ook schrijven als:

$$\iiint_V \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right\} dV = \iint_S u(\underline{x}) \frac{\partial u}{\partial n} dS \quad (80.6)$$

81 De stelling van Stokes

Stel dat in \mathbb{R}^3 een oriënteerbaar oppervlak S gegeven is, dat voorgesteld kan worden door de vergelijking: $z = f(x, y)$, waarin f , f_x en f_y continu zijn in de definitieverzameling en dat S ook voorgesteld kan worden door $y = g(x, z)$, of door $x = h(y, z)$, waarbij g en h aan analoge eisen voldoen, nl. dat g , g_x , g_z , h , h_y , h_z continu zijn in de definitieverzameling.

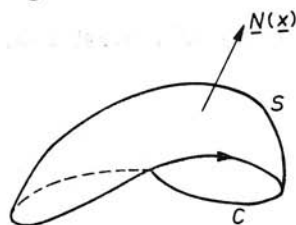
Verder nemen we aan dat de randkromme C van S een rectificeerbare (samenhangende) kromme is, die in parametervorm gegeven wordt door:

$$x = X(t), y = Y(t), z = Z(t) = f\{X(t), Y(t)\} \quad (t \in [t_0, t_1]) \quad (81.1)$$

waarin X , Y en Z bij gedeelten continu zijn met continue afgeleiden.

Op S kiezen we een onderkant en een bovenkant. Op C kiezen we een omloopsrichting en wel zó, dat C in positieve zin wordt doorlopen, indien deze, gezien vanaf de bovenkant van S , tegen de wijzers van de klok wordt doorlopen.

Fig. 122



Anders gezegd: We kiezen op S een normaalvector en op C een omloopsrichting, die op dezelfde manier bij elkaar passen als de voortgangsrichting en draairichting van een rechtsomdraaiende kurketrekker (zie fig. 122).

De richtingscosinussen van de gekozen normaal stellen we voor door $\cos \alpha$, $\cos \beta$ en $\cos \gamma$.*

Tenslotte zijn P , Q en R functies van de drie variabelen x , y en z , gedefinieerd in een (driedimensionale) omgeving van S , met continue partiële eerste afgeleiden.

We bewijzen nu de volgende stelling.

Stelling van Stokes:

$$\int_{C^+} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right\} dS$$

(81.2)

Bewijs:

Eerst tonen we aan:

$$\int_{C^+} P(x, y, z)dx = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS$$

Neem aan dat de gekozen normaalvector op S een scherpe hoek maakt met de positieve z -as (populair gezegd: de gekozen normaalvector op S wijst van het x , y -vlak af naar boven).

Volgens par. 72 is een richtingsvector van de drager van de normaal op S gegeven

door
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Deling door $-\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}$ geeft de kentallen van de eenheidsnormaalvector op S in de gekozen richting („naar boven”), zodat deze eenheidsnormaalvector gegeven is door:

* Ook hier schrijven we weer $\cos \alpha$ i.p.v. $\cos \alpha(x, y, z)$, etc.

$$\underline{N(x)} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \\ 1 \\ \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \end{pmatrix} \quad (81.3)$$

Stel dat de projectie van S op het x, y -vlak S_1 is en C_1 de projectie van C op het x, y -vlak. Uit (81.1) volgt dan dat een parametervoorstelling van C_1 is:

$$x = X(t), \quad y = Y(t), \quad z = 0 \quad (t \in [t_0, t_1])$$

Indien we stellen:

$$P\{x, y, f(x, y)\} = P_1(x, y)$$

dan geldt:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} P(x, y, z) dx &= \int_{t_0}^{t_1} [P\{X(t), Y(t), f\{X(t), Y(t)\}\}] \frac{dX}{dt} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} P_1\{X(t), Y(t)\} \frac{dX}{dt} dt = \int_{C_1^+} P_1(x, y) dx \end{aligned}$$

Hierin ligt de omloopzin op C_1 vast door de op C gekozen omloopzin. Volgens de stelling van Green voor het platte vlak geldt:

$$\int_{C_1^+} P_1(x, y) dx = - \iint_{S_1} \frac{\partial P_1}{\partial y} dx dy$$

Uit

$$\frac{\partial P_1}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y}$$

volgt dan:

$$\begin{aligned} \int_{C^+} P(x, y, z) dx &= \int_{C_1^+} P_1(x, y) dx \\ &= \iint_{S_1} \left\{ -\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial y} \cos \gamma \right) \frac{dx dy}{\cos \gamma} \\
&= \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma + \frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta \right) dS
\end{aligned} \tag{81.4}$$

daar volgens (81.3) geldt:

$$\cos \beta = -\frac{\partial f}{\partial y} \cos \gamma$$

Voorts is:

$$dx dy = \cos \gamma \cdot dS$$

Op analoge wijze toont men aan:

$$\int_{c^+} Q(x, y, z) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) dS \tag{81.5}$$

en

$$\int_{c^+} R(x, y, z) dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) dS \tag{81.6}$$

Hierbij maakt men gebruik van de mogelijkheid om S ook voor te stellen door: $y = g(x, z)$ of door $x = h(y, z)$, zoals aan het begin van deze paragraaf geëist werd. Optelling van (81.4), (81.5) en (81.6) levert het resultaat (81.2).

Opmerking:

Voor het geval dat S een (enkelvoudig samenhangend) gebied is in het x, y -vlak, levert (81.2) uiteraard de stelling van Green voor het platte vlak. De richting van $\underline{N}(x)$ is in dat geval de richting van de positieve z -as ($\cos \alpha = 0$, $\cos \beta = 0$, $\cos \gamma = 1$). Daar verder $dz = 0$, gaat (81.2) over in:

$$\int_{c^+} P(x, y, 0) dx + Q(x, y, 0) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dS$$

Als $P(x, y, 0) = P^*(x, y)$ en $Q(x, y, 0) = Q^*(x, y)$, dan geldt:

$$\int_{c^+} P^*(x, y) dx + Q^*(x, y) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q^*}{\partial x} - \frac{\partial P^*}{\partial y} \right) dS$$

Dit is de stelling van Green voor het platte vlak.

De stelling van Stokes kan ook gegeven worden in vectornotatie.

Stel dat \underline{F} een vectorfunctie is, gedefinieerd in een omgeving van S door:

$$\underline{F}(x) = \underline{F}(x, y, z) = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix}$$

en wel zó, dat P , Q en R continu zijn met continue partiële eerste afgeleiden.

Volgens par. 22 geldt dan:

$$\text{rot } \underline{F}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \nabla \times \underline{F}$$

Daar

$$\underline{N}(x) = \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{bmatrix}$$

kan de integrand in het rechterlid van (81.2) geschreven worden als het scalaire produkt:

$$(\text{rot } \underline{F}(x), \underline{N}(x))$$

of ook als:

$$(\nabla \times \underline{F}, \underline{N}(x))$$

De lijnintegraal in het linkerlid van (81.2) kan volgens (50.3) ook worden uitgedrukt als:

$$\int_{C^+} (\underline{F}(x), \underline{T}(x)) d\sigma$$

indien $\underline{T}(x)$ de tangentiële eenheidsvector $\begin{bmatrix} \frac{dX}{d\sigma} \\ \frac{dY}{d\sigma} \\ \frac{dZ}{d\sigma} \end{bmatrix}$ langs C is.

Hierbij is als parameter de booglengte σ gebruikt, maar deze integraal is onafhankelijk van de gebruikte parameter, althans indien aan bepaalde eisen is voldaan (zie par. 45 en 50).

De stelling van Stokes luidt in vectornotatie:

$$\iint_S (\nabla \times \underline{F}, \underline{N}(x)) dS = \int_{C^+} (\underline{F}(x), \underline{T}(x)) d\sigma$$

Opmerking:

De Stelling van Stokes geldt ook voor een oppervlak dat verdeeld kan worden in een eindig aantal delen die aan de in het begin van deze paragraaf gestelde eisen voldoen.

Voorbeeld

Verifieer de stelling van Stokes voor het geval dat

$$\underline{F}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 2x - y \\ -yz^2 \\ -y^2z \end{bmatrix}$$

$$S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1; z \geq 0\}$$

$$C = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 = 1; z = 0\}$$

S is dus de helft van de eenheidsbol „boven” het x, y -vlak.

Oplossing:

In dit geval geldt:

$$\text{rot } \underline{F}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \underline{N}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$dS = \frac{dx dy}{z}$$

zodat:

$$\iint_S (\nabla \times \underline{F}, \underline{N}(\underline{x})) dS = \iint_{S_1} z \frac{dx dy}{z} = \iint_{S_1} dx dy = \pi$$

aangezien $S_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1; z = 0\}$.

De rand C schrijven we in parametervorm:

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0 \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

Voor $\underline{T}(\underline{x})$ geldt dan:

$$\underline{T}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix}$$

dus:

$$\int_{C^+} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{T}(\underline{x})) dt = \int_{t=0}^{2\pi} (2 \cos t - \sin t)(-\sin t) dt = \pi$$

waarmede voor dit geval de stelling van Stokes is geverifieerd.

82 Fysische betekenis van divergentie, rotatie en de integraalstellingen

In deze paragraaf geven we een intuïtieve verklaring van bovenstaande begrippen. We beschouwen daartoe een onsamendrukbare vloeistof, waarin een stroming plaatsvindt. De snelheidsvector in een punt met plaatsvector \underline{x} stellen we voor door $\underline{F}(\underline{x})$. We nemen daarbij aan dat $\underline{F}(\underline{x})$ onafhankelijk is van de tijd (we spreken dan van een stationaire stroming). Als de massadichtheid van deze vloeistof de waarde 1 heeft, dan wordt de totale massa van de vloeistof die per seconde door een „klein” oppervlak ΔS van uit een volumedeel V naar buiten stroomt, gegeven door

$$\underline{F}_n(\underline{x}) \Delta S$$

↙ moet zijn $\underline{F}(\underline{x})$

indien $\underline{F}_n(\underline{x})$ de over ΔS gemiddelde component van de vector $\underline{F}(\underline{x})$ is in de richting van de buitennormaal op het oppervlakte-element ΔS . Indien we het begrenzende oppervlak van V voorstellen door S , wordt de totale hoeveelheid vloeistof die per seconde door S van binnen naar buiten stroomt, gegeven door:

$$\iint_S \underline{F}_n(\underline{x}) dS = \iint_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) dS$$

Deze hoeveelheid wordt ook wel de *flux* door S genoemd. Deze flux door S is volgens de divergentiestelling gelijk aan de ruimte-integraal van de divergentie van $\underline{F}(\underline{x})$ over V , d.w.z. gelijk aan:

$$\iiint_V \operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) dV$$

Hieruit zullen we een fysische betekenis voor $\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x})$ afleiden. Daar de vloeistof onsamendrukbaar en de stroming stationair is, zal de hoeveelheid vloeistof die door V naar buiten (resp. naar binnen) stroomt, moeten worden aangevuld (resp. geabsorbeerd). D.w.z. in het inwendige van V moeten er bronnen (of putten) aanwezig zijn. Beschouwen we een punt $P(x, y, z)$ in het inwendige van V en passen we de divergentiestelling toe op een „kleine” omgeving ΔV van P , dan geldt:

$$\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) dV = \iint_{\Delta S} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) dS$$

als ΔS het begrenzende oppervlak van ΔV voorstelt. Passen we de middelwaardestelling toe voor drievoudige integralen (analoog aan die voor dubbelintegralen), dan vinden we:

$$(\text{Inhoud } \Delta V) \cdot \operatorname{div} \underline{F}(\xi, \eta, \zeta) = \iint_{\Delta S} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) dS$$

Hierbij is (ξ, η, ζ) een punt in ΔV .

Anders gezegd:

$$\operatorname{div} \underline{F}(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\iint_{\Delta S} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) dS}{\text{Inhoud } \Delta V}$$

Laten we ΔV tot nul naderen, dan nadert (ξ, η, ζ) tot (x, y, z) . We vinden:

$$\operatorname{div} \underline{F}(x, y, z) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iint_{\Delta S} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) dS}{\text{Inhoud } \Delta V}$$

(uiteraard indien aan voldoende voorwaarden voor het bestaan van deze limiet is voldaan).

De breuk rechts stelt de gemiddelde vloeistofstroom voor die per seconde per volume-eenheid door ΔS gaat. De limiet kunnen we de *brondichtheid* in P noemen. We kunnen dus $\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x})$ opvatten als de *brondichtheid van de stationaire stroom van de onsamendrukbare vloeistof, indien de snelheidsvector $\underline{F}(\underline{x})$ is.*

Indien er geen vloeistof wordt voortgebracht of geabsorbeerd, dan is het volumedeel bronvrij. Deze eigenschap wordt gekarakteriseerd door $\operatorname{div} \underline{F}(\underline{x}) = 0$ in V . Indien deze betrekking geldt, dan is volgens de divergentiestelling, als S het begrenzende oppervlak van V is:

$$\iint_S (\underline{F}(\underline{x}), \underline{N}(\underline{x})) dS = \iint_S \underline{F}_n(\underline{x}) dS = 0$$

Indien een ruimte bronvrij is, dan heeft voor elk gesloten oppervlak S de flux door S de waarde nul.

We zullen trachten een fysische betekenis toe te kennen aan de stelling van Stokes. Daartoe beschouwen we een onsamendrukbare vloeistof waarin een stationaire stroming heerst. De snelheidsvector $\underline{F}(\underline{x})$ in een punt P met plaatsvector $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

wordt gegeven door: $\underline{F}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix}$.

De lijnintegraal die in het linkerlid van (81.2) voorkomt, nl.:

$$\int_{C^+} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \int_{C^+} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{T}(\underline{x})) d\sigma$$

wordt de *circulatie* van de stroming langs C genoemd. De stelling van Stokes zegt nu dat de circulatie langs een georiënteerde C^+ gelijk is aan de oppervlak-integraal van de component van de rotatie in de richting van de normaal op elk oriënteerbaar oppervlak door de kromme C , mits deze richting „volgens de kurketrekkerregel” past bij de omloopszin op C^+ . We zullen deze „normale” component van de rotatie, die gelijk is aan het inwendige produkt:

$$(\underline{N}(\underline{x}), \nabla \times \underline{F})$$

kortheidshalve noteren als $(\operatorname{rot} \underline{F}(\underline{x}))_n$.

We passen de stelling van Stokes toe op een „kleine” gesloten kromme ΔC om een punt P, gelegen op het oppervlak S . Met „klein” bedoelen we dat ΔC een deel ΔS van S omsluit dat bij benadering als vlak te beschouwen is. Volgens de middel-

waardstelling van de integraalrekening geldt dan (alweer bij benadering) dat er in ΔS een punt Q met coördinaten (ξ, η, ζ) (of plaatsvector $\underline{\xi}$) is, zodanig dat

$$\iint_{\Delta S} (\text{rot } \underline{F}(\underline{x}))_n dS = (\text{opp. } \Delta S) \cdot (\text{rot } \underline{F}(\underline{\xi}))_n$$

Met behulp van de stelling van Stokes volgt dan:

$$(\text{rot } \underline{F}(\underline{\xi}))_n = \frac{\int_{\Delta C} (\underline{F}(\underline{x}), \underline{T}(\underline{x})) d\sigma}{\text{Opp. } \Delta S}$$

De breuk in het rechterlid is per definitie de gemiddelde circulatie per oppervlakte-eenheid van ΔS langs ΔC . Indien ΔS nadert tot nul, dan zal, als aan de voldoende voorwaarden van continuïteit is voldaan, het linkerlid naderen tot de grootte van de component van de rotatie in de richting van de normaal in P op S .

De limiet van het rechterlid kan worden beschouwd als de *circulatie-dichtheid* van de stroming in het punt P .

Is de rotatie in elk punt nul, dan is de circulatie langs elke gesloten kromme gelijk aan nul. Men noemt het snelheidsveld dan *wervelvrij* of *rotatievrij*.

Beschouwt men $\underline{F}(\underline{x})$ als een kracht die in het punt P met plaatsvector \underline{x} is gedefinieerd (dus men ziet \underline{F} als een krachtenveld), dan stelt de lijnintegraal die in de stelling van Stokes voorkomt de arbeid voor die door $\underline{F}(\underline{x})$ verricht wordt op een massadeeltje als dit C^+ doorloopt. Als $\text{rot } \underline{F}(\underline{x}) = \underline{0}$ voor alle punten waar \underline{F} gedefinieerd is, spreekt men bij een krachtenveld van een *conservatief veld* (i.p.v. wervelvrij, zoals in de stromingsleer). Het is duidelijk dat in een conservatief krachtenveld de arbeidsintegraal langs een gesloten kromme nul is.

Hieruit volgt dat *in een conservatief veld de arbeid verricht langs een kromme van een punt P_1 , naar een punt P_2 in het veld onafhankelijk is van de gekozen weg van P_1 naar P_2 (uiteraard indien langs deze weg integratie mogelijk is).*

Hiermee is de bewering van par. 59 bewezen, waarin als noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de onafhankelijkheid van de keuze van de weg bij de lijnintegraal

$$\int_A^B P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

werd gegeven:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

hetgeen betekent dat:

$$\text{rot } \underline{F}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Evenals in het tweedimensionale geval kan men bewijzen dat er een functie φ bestaat zodanig dat:

$$\text{grad } \varphi(\underline{x}) = \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix}$$

Is in dit veld ook nog $\text{div. } \underline{F}(\underline{x}) = 0$, dan geldt, daar

$$\underline{F}(\underline{x}) = \text{grad } \varphi(\underline{x})$$

dat:

$$\text{div. grad } \varphi(x, y, z) = 0$$

of:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

De functie φ die men ook wel de *potentiaal* van het vectorveld noemt, voldoet dan aan de vergelijking van Laplace.

Massa. Zwaartepunt. Traagheidsmoment

83 Massa en massadichtheid van een oppervlak en van een lichaam

In par. 49 werd het begrip massadichtheid op een kromme ingevoerd. Op analoge wijze kunnen we het begrip massadichtheid definiëren voor een oppervlak dat met massa belegd is, of voor een deel van de driedimensionale ruimte dat met massa gevuld is.

Laat op het oppervlak (in \mathbb{R}^3) S met vergelijking: $z = f(x, y)$ een punt P gegeven zijn met coördinaten (x, y, z) (of plaatsvector \underline{x}). Stel dat verder ΔS een deel is van S dat P bevat, ΔO de oppervlakte van ΔS en Δm de massa van ΔS . We noemen het quotiënt

$\frac{\Delta m}{\Delta O}$ de gemiddelde massadichtheid op ΔS . De limiet van dit quotiënt, indien ΔO tot nul nadert, dus $\lim_{\Delta O \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta O}$ noemt men de *massadichtheid van het oppervlak S in P* .

We stellen deze limiet voor door $\sigma(x, y, z) = \sigma\{x, y, f(x, y)\}$, zodat we hebben:

$$\lim_{\Delta O \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta O} = \sigma(x, y, z) = \sigma\{x, y, f(x, y)\} = \sigma^*(x, y)$$

Uiteraard is hierbij verondersteld dat genoemde limiet bestaat en onafhankelijk is van de wijze waarop ΔO tot nul nadert.

Indien σ een continue functie is van x, y en z en indien f continu is, dan vindt men voor de totale massa M van het oppervlak S :

$$M = \iint_S \sigma\{x, y, f(x, y)\} dS$$

* Dit hoofdstuk is bedoeld als een „rekentechnisch” hoofdstuk. Daarom wordt hier afgezien van een gedetailleerde omschrijving van de eisen, waaraan de betrokken functies, krommen, oppervlakken en lichamen moeten voldoen om de toegepaste bewerkingen te rechtvaardigen.

Hierin is dS het oppervlakte-element, waarvan de betekenis voor de verschillende coördinatenstelsels gegeven is in par. 77.

Op analoge wijze wordt bij een ruimtelijke massaverdeling de massadichtheid $\sigma(x, y, z)$ in het punt $P(x, y, z)$ gedefinieerd door:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \sigma(x, y, z)$$

waarin ΔV de inhoud voorstelt van een ruimtedeel waarin P ligt.

De totale massa M van een lichaam V wordt bij continue σ gegeven door:

$$M = \iiint_V \sigma(x, y, z) dV$$

Hierin is dV het volume-element waarvan de betekenis voor de verschillende coördinatenstelsels is gegeven in par. 71. Indien σ constant is, spreekt men van een *homogene* massabelegging.

Voorbeeld 1

Bereken de massa van het oppervlak van de cirkel uit het voorbeeld van par. 49, als de massadichtheid in elk punt evenredig is met de afstand tot de oorsprong.

Oplossing:

Stellen we $\sigma^*(x, y) = a\sqrt{x^2 + y^2}$, dan vinden we na overgang op poolcoördinaten:

$$M = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \left\{ \int_0^{2R \cos \varphi} a \cdot r \cdot r dr \right\} d\varphi = \frac{8}{3} a \cdot R^3 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 \varphi d\varphi = \frac{32}{9} a \cdot R^3$$

Voorbeeld 2

Bereken de massa van het ronde oppervlak van een halve bol met straal R , als de massadichtheid in elk punt evenredig is met het kwadraat van de afstand tot het grondvlak.

Oplossing:

Het assenstelsel kiezen we als in fig. 123 is aangegeven en we gebruiken bolcoördinaten. Daar R constant is, geldt:

$$dS = R^2 \sin \theta d\varphi d\theta$$

Stellen we $\sigma(x, y, z) = az^2 = aR^2 \cos^2 \theta$ (a constant), dan is:

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}\pi} aR^2 \cos^2 \theta \cdot R^2 \sin \theta d\theta \right\} d\varphi \\ &= 2\pi aR^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2}{3}\pi aR^4 \end{aligned}$$

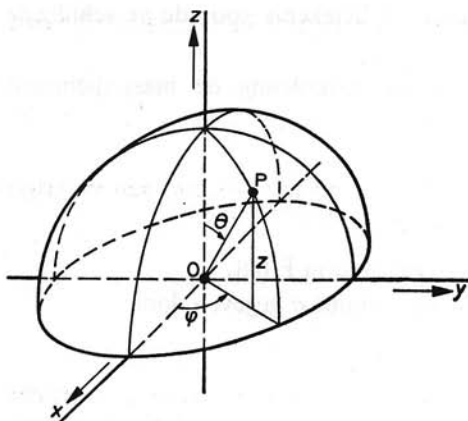


Fig. 123

Voorbeeld 3

Bereken de massa van de massieve halve bol met straal R , als de massadichtheid in elk punt evenredig is met het kwadraat van de afstand tot het grondvlak.

Oplossing:

We stellen $\sigma(x, y, z) = az^2 = ar^2 \cos^2 \theta$ (a constant), dan is:

$$M = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi} \left\{ \int_0^R ar^2 \cos^2 \theta \cdot r^2 \sin \theta dr \right\} d\theta \right] d\varphi = \frac{2}{15} \pi a R^5$$

84 Statisch moment, zwaartepunt, traagheidsmoment van systemen van een eindig aantal massapunten

We gaan uit van een systeem van n massa's m_1, m_2, \dots, m_n geplaatst in n punten P_1, P_2, \dots, P_n .

Als moment van de k^{de} orde van dat systeem t.o.v. een gegeven punt O een gegeven lijn a , of een gegeven vlak V definieert men de som:

$$\sum_{i=1}^n m_i r_i^k$$

waarbij de algemene term het produkt is van de massa in een punt van het systeem en de k^{de} macht van de afstand van dat punt tot resp. O , a of V .

Hieruit volgt dat het moment van de 0^{de} orde eenvoudig de totale massa $M = \sum_{i=1}^n m_i$ van het systeem voorstelt. Het moment van de 1ste orde t.o.v. O , a en V heet het *statisch moment* t.o.v. O , a en V .

Zo zijn de statische momenten van een systeem massapunten in een plat vlak t.o.v. de coördinaatassen:

$$S_x = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n m_i y_i$$

Deelt men deze grootheden door de totale massa M van het systeem, dan verkrijgt men per definitie de coördinaten van het *zwaartepunt* $Z(x, y)$:

$$x_z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \quad y_z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}$$

Zo vindt men voor een systeem van n massapunten in de ruimte voor de statische momenten t.o.v. de drie coördinaatvlakken:

$$S_x = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad S_z = \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

en voor de coördinaten van het zwaartepunt:

$$x_z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, \quad y_z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}, \quad z_z = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}$$

De momenten van de 2de orde worden *traagheidsmomenten* van het systeem genoemd. Zo zijn voor een vlak systeem van massapunten de traagheidsmomenten t.o.v. de coördinaatassen:

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2$$

Voor een ruimtelijk systeem vindt men evenzo, dat de traagheidsmomenten t.o.v. de coördinaatvlakken zijn:

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2, \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2, \quad I_z = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2$$

en t.o.v. de coördinaatassen (resp. x -, y - en z -as):

$$I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2), \quad I_{zx} = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2), \quad I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

Traagheidsmomenten t.o.v. een punt noemt men *polaire traagheidsmomenten*.

Bij een vlak systeem is het polaire traagheidsmoment t.o.v. O :

$$I_O = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

bij een ruimtelijk systeem:

$$I_O = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

85 Statisch moment, zwaartepunt, traagheidsmoment bij continue massa-verdeling

Het voorgaande kan men uitbreiden als men met continu verdeelde massa's, i.p.v. met systemen van een eindig aantal massapunten heeft te maken. Het is plausibel dat men dan de sommen uit de vorige paragraaf vervangt door integralen, en wel door enkelvoudige, dubbele of drievoudige integralen, al naargelang de massa op vlakke krommen, op oppervlakken of in volumina van de ruimte is verdeeld. Zo vinden we, als we de continue massadichtheid steeds door σ aangeven, de volgende uitdrukkingen.

85.1 Statische momenten

Van een vlakke kromme gegeven door de parametervoorstelling:

$$x = X(t)$$

$$y = Y(t)$$

wordt de booglengte als functie van t gegeven door $s(t)$. Voor het deel van deze kromme, gelegen tussen de punten met parameter a en b geldt dan voor de statische momenten t.o.v. de x -as, resp. y -as:

$$S_x = \int_a^b \sigma \{X(t), Y(t)\} X(t) \dot{s}(t) dt$$

$$S_y = \int_a^b \sigma \{X(t), Y(t)\} Y(t) \dot{s}(t) dt$$

Voor een gebied G in het platte vlak geldt voor de statische momenten t.o.v. de coördinaatassen:

$$S_x = \iint_G \sigma(x, y) x dG$$

$$S_y = \iint_G \sigma(x, y) y dG$$

Voor een gebogen oppervlak S met vergelijking $z = f(x, y)$ in de ruimte geldt voor de statische momenten t.o.v. de coördinaatvlakken:

$$S_x = \iint_S \sigma(x, y, z) x dS$$

$$S_y = \iint_S \sigma(x, y, z) y dS$$

$$S_z = \iint_S \sigma(x, y, z) z dS$$

Voor een volume V in de ruimte geldt voor de statische momenten t.o.v. de coördinaatvlakken:

$$S_x = \iiint_V \sigma(x, y, z) x dV$$

$$S_y = \iiint_V \sigma(x, y, z)y dV$$

$$S_z = \iiint_V \sigma(x, y, z)z dV$$

Delen we de bovenstaande grootheden door de bijbehorende totale massa, dan krijgen we de coördinaten van de corresponderende *zwaartepunten*.

85.2 Traagheidsmomenten

Voor de hierboven genoemde vlakke krommen, vlakke en gebogen oppervlakken en ruimtedelen, worden de *traagheidsmomenten* (momenten van de tweede orde) als volgt gedefinieerd.

a Voor een vlakke kromme zijn de traagheidsmomenten t.o.v. de coördinaatassen per definitie:

$$I_x = \int_a^b \sigma\{X(t), Y(t)\}X^2(t)\dot{s}(t) dt$$

$$I_y = \int_a^b \sigma\{X(t), Y(t)\}Y^2(t)\dot{s}(t) dt$$

b Voor een gebied G in het platte vlak zijn de traagheidsmomenten t.o.v. de coördinaatassen per definitie:

$$I_x = \iint_G \sigma(x, y)x^2 dG$$

$$I_y = \iint_G \sigma(x, y)y^2 dG$$

c Voor een gebogen oppervlak S met vergelijking $z = f(x, y)$ zijn de traagheidsmomenten t.o.v. de coördinaatvlakken per definitie:

$$I_x = \iint_S \sigma(x, y, z)x^2 dS$$

$$I_y = \iint_S \sigma(x, y, z)y^2 dS$$

$$I_z = \iint_S \sigma(x, y, z)z^2 dS$$

d Voor een gebogen oppervlak worden de traagheidsmomenten t.o.v. de x -as, y -as en z -as gedefinieerd door:

$$I_{yz} = \iint_S \sigma(x, y, z)(y^2 + z^2) dS$$

$$I_{zx} = \iint_S \sigma(x, y, z)(z^2 + x^2) dS$$

$$I_{xy} = \iint_S \sigma(x, y, z)(x^2 + y^2) dS$$

e Voor een ruimtedeel V zijn de traagheidsmomenten t.o.v. de coördinaatvlakken per definitie:

$$I_x = \iiint_V \sigma(x, y, z)x^2 dV$$

$$I_y = \iiint_V \sigma(x, y, z)y^2 dV$$

$$I_z = \iiint_V \sigma(x, y, z)z^2 dV$$

f Voor dit zelfde ruimtedeel V worden de traagheidsmomenten t.o.v. de x -as, y -as en z -as gedefinieerd door:

$$I_{yz} = \iiint_V \sigma(x, y, z)(y^2 + z^2) dV$$

$$I_{zx} = \iiint_V \sigma(x, y, z)(z^2 + x^2) dV$$

$$I_{xy} = \iiint_V \sigma(x, y, z)(x^2 + y^2) dV$$

85.3 Polaire traagheidsmomenten

Naast de genoemde traagheidsmomenten t.o.v. de coördinaatassen of coördinaatvlakken, definieert men ook de z.g. *polaire traagheidsmomenten* t.o.v. O aldus:

a Voor een vlakke kromme:

$$I_O = \int_a^b \sigma \{X(t), Y(t)\} \{X^2(t) + Y^2(t)\} \dot{s}(t) dt$$

b Voor een vlak gebied G :

$$I_O = \iint_G \sigma(x, y) \cdot (x^2 + y^2) dG$$

c Voor een gebogen oppervlak S met vergelijking $z = f(x, y)$:

$$I_O = \iint_S \sigma(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) dS$$

d Voor een ruimtedeel V :

$$I_O = \iiint_V \sigma(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) dV$$

Uit deze formules volgt voor het platte vlak:

$$I_O = I_x + I_y$$

en voor de ruimte:

$$I_O = I_x + I_y + I_z$$

$$I_O = \frac{1}{2}\{I_{yz} + I_{zx} + I_{xy}\}$$

Opmerking:

Voor een homogene massabelegging is $\sigma = \text{constant}$. In de quotiënten die de coördinaten van het zwaartepunt bepalen, kan dan uit teller (het statische moment) en noemer (totale massa) $\sigma(x, y)$ resp. $\sigma(x, y, z)$, etc. weggedeeld worden. Zo vinden we b.v. voor het zwaartepunt $Z(\xi, \eta, \zeta)$ van een homogeen belegd volume:

$$\xi = \frac{\iiint_V x dV}{\iiint_V dV}, \quad \eta = \frac{\iiint_V y dV}{\iiint_V dV}, \quad \zeta = \frac{\iiint_V z dV}{\iiint_V dV}$$

De gemeenschappelijke noemer stelt de inhoud van V voor.

In deze gevallen spreken we ook wel van *geometrisch zwaartepunt*.

Voorbeeld 1

Bepaal het zwaartepunt en de traagheidsmomenten t.o.v. de coördinaatassen van de cirkelomtrek uit het voorbeeld van par. 49.

Oplossing:

In par. 49 vonden we: $M = 8aR^2$.

Verder is, daar $x = OP \cos t = 2R \cos^2 t$ en $y = OP \sin t = 2R \cos t \sin t$:

$$\begin{aligned} S_x &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sigma \{X(t), Y(t)\} X(t) \dot{s}(t) dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} a \cdot 2R \cos t \cdot 2R \cos^2 t \cdot 2R dt = \frac{3}{3} aR^3 \end{aligned}$$

zodat:

$$\xi = \frac{S_x}{M} = \frac{\frac{3}{3} aR^3}{8aR^2} = \frac{3}{8} R$$

Uit symmetrieoverwegingen volgt: $\eta = 0$, zodat het zwaartepunt is $Z(\frac{3}{8}R, 0)$.

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sigma \{X(t), Y(t)\} X^2(t) \dot{s}(t) dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} a \cdot 2R \cos t \cdot 4R^2 \cos^4 t \cdot 2R dt \\ &= 16aR^4 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^5 t dt = \frac{2}{1} \frac{5}{5} aR^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_y &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sigma \{X(t), Y(t)\} Y^2(t) \dot{s}(t) dt \\ &= \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} a \cdot 2R \cos t \cdot 4R^2 \cos^2 t \sin^2 t \cdot 2R dt \end{aligned}$$

$$= 16aR^4 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^3 t \sin^2 t dt = \frac{64}{15}aR^4$$

$$I_O = I_x + I_y = \frac{256}{15}aR^4 + \frac{64}{15}aR^4 = \frac{64}{3}aR^4$$

Voorbeeld 2

Bepaal het zwaartepunt van het homogeen belegde oppervlak, waarbij $\sigma = 1$, in het eerste kwadrant, begrensd door de coördinaatassen en de kromme met vergelijking $y = 2 + x - x^2$ (zie fig. 124).

Oplossing:

$$M = \int_0^2 y dx = \int_0^2 (2 + x - x^2) dx = \frac{10}{3}$$

$$S_x = \int_0^2 \left\{ \int_0^{2+x-x^2} y dy \right\} x dx = \int_0^2 x(2 + x - x^2) dx = \frac{8}{3}$$

$$S_y = \int_0^2 \left\{ \int_0^{2+x-x^2} y dy \right\} dx = \frac{1}{2} \int_0^2 (2 + x - x^2)^2 dx = \frac{16}{5}$$

Dus:

$$\zeta = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{10}{3}} = \frac{4}{5}, \quad \eta = \frac{\frac{16}{5}}{\frac{10}{3}} = \frac{24}{25}$$

Voorbeeld 3

Bepaal de traagheidsmomenten t.o.v. de coördinaatassen van het homogene oppervlak, waarbij $\sigma = 1$, begrensd door de x -as en de kromme $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

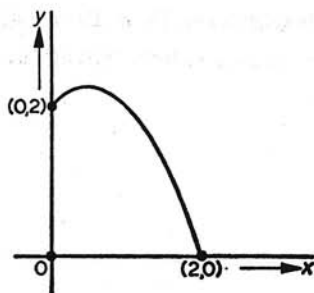
Oplossing:

$$I_x = \int_0^\pi \left\{ \int_0^{\sin x} y dy \right\} x^2 dx = \int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$$

$$I_y = \int_0^\pi \left\{ \int_0^{\sin x} y^2 dy \right\} dx = \frac{1}{3} \int_0^\pi \sin^3 x dx = \frac{4}{9}$$

$$I_O = I_x + I_y = \pi^2 - 4 + \frac{4}{9} = \pi^2 - 3\frac{5}{9}$$

Fig. 124



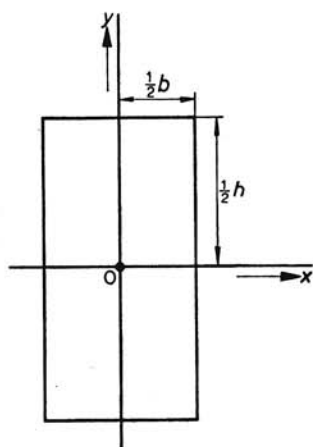


Fig. 125

Voorbeeld 4

Bepaal het traagheidsmoment van een homogene rechthoek (waarbij $\sigma = 1$) met breedte b en hoogte h t.o.v. de assen evenwijdig aan de zijden door het zwaartepunt (zie fig. 125).

Oplossing:

Het zwaartepunt is het middelpunt van de rechthoek. We kiezen dit punt als oorsprong van het coördinatenstelsel en nemen de coördinaatassen evenwijdig aan de zijden. De gevraagde traagheidsmomenten zijn dan I_x en I_y .

$$I_x = \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} dy \right\} x^2 dx = \frac{1}{12} hb^3$$

$$I_y = \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy \right\} dx = \frac{1}{12} bh^3$$

Het polaire traagheidsmoment t.o.v. O is

$$I_O = \frac{1}{12} hb(b^2 + h^2)$$

Voorbeeld 5

Bepaal het traagheidsmoment van een homogene cirkelschijf (waarbij $\sigma = 1$) met straal R t.o.v. een middellijn, en het polaire traagheidsmoment t.o.v. het middelpunt.

Oplossing:

Voor een assenstelsel gelegd door het middelpunt geldt:

$$I_x = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{4} \pi R^4$$

Daar $I_y = \frac{1}{4} \pi R^4$, is $I_O = \frac{1}{2} \pi R^4$.

Voorbeeld 6

Bepaal van een bolsector (straal bol R , middelpuntshoek α):

a het zwaartepunt, als alleen het boloppervlak homogeen met massa is belegd,
 $\sigma = 1$;

b het zwaartepunt met volume-massadichtheid, $\sigma = 1$;

c het traagheidsmoment t.o.v. de symmetrie-as in het geval b .

Oplossing:

We kiezen het assenstelsel als in fig. 126 is aangegeven en gebruiken bolcoördinaten. Vanwege de symmetrie zal zowel in geval a als ook in b het zwaartepunt op de z -as liggen.

a Daar de belegging homogeen is geldt:

$$\zeta = \frac{\iint_S z dS}{O}$$

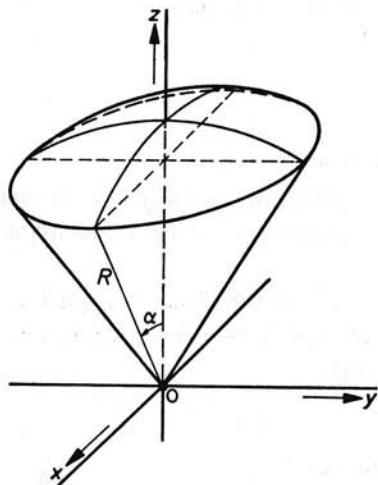
Hierin wordt de integraal genomen over het boloppervlak. O stelt de oppervlakte van dit boloppervlak voor.

Nu geldt:

$$\iint_S z dS = R^3 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta \right\} d\varphi = \pi R^3 \sin^2 \alpha$$

$$O = R^2 \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^\alpha \sin \theta d\theta \right\} d\varphi = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha)$$

Fig. 126



zodat:

$$\zeta = \frac{\pi R^3 \sin^2 \alpha}{2\pi R^2(1 - \cos \alpha)} = R \cos^2 \frac{1}{2}\alpha$$

b Nu geldt:

$$\zeta = \frac{\iiint_V z dV}{B}$$

waarin de integraal uitgestrekt wordt over de gehele bolsector. B stelt de inhoud van de bolsector voor.

$$\iiint_V z dV = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left\{ \int_0^\alpha \sin \theta \cos \theta d\theta \right\} r^3 dr \right] d\varphi = \frac{1}{4}\pi R^4 \sin^2 \alpha$$

$$B = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left\{ \int_0^\alpha \sin \theta d\theta \right\} r^2 dr \right] d\varphi = \frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \alpha)$$

zodat:

$$\zeta = \frac{\frac{1}{4}\pi R^4 \sin^2 \alpha}{\frac{2}{3}\pi R^3(1 - \cos \alpha)} = \frac{3}{4}R \cos^2 \frac{1}{2}\alpha$$

$$c \quad I_{xy} = \iiint_V (x^2 + y^2) dV$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \left\{ \int_0^\alpha \sin^3 \theta d\theta \right\} r^4 dr \right] d\varphi = \frac{2}{5}\pi R^5 \left(\frac{2}{3} - \cos \alpha + \frac{1}{3} \cos^3 \alpha \right)$$

Neemt men $\alpha = \pi$, dan vindt men voor het traagheidsmoment van een homogene bol ($\sigma = 1$) t.o.v. een middellijn:

$$I_{xy} = I_{zx} = I_{yz} = \frac{8}{15}\pi R^5$$

Voor het polaire traagheidsmoment t.o.v. het middelpunt verkrijgt men:

$$I_0 = \frac{1}{2}(I_{xy} + I_{zx} + I_{yz}) = \frac{4}{3}\pi R^5$$

en voor het traagheidsmoment t.o.v. een vlak door het middelpunt:

$$I_x = I_y = I_z = \frac{4}{15}\pi R^5$$

86 Verschuivingsstelling voor vlakke traagheidsmomenten

Verschuivingsstelling

Als I het traagheidsmoment is van een gebied G in het platte vlak t.o.v. een lijn l in dat vlak en I_0 is het traagheidsmoment van G t.o.v. een lijn l_0 door het zwaartepunt van G evenwijdig aan l , dan is

$$I = I_0 + Ma^2$$

als a de afstand is tussen l en l_0 , en M de totale massa van G is.

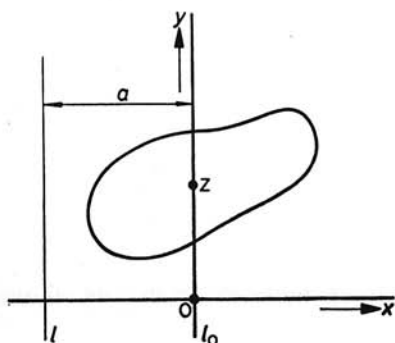


Fig. 127

Bewijs:

We kiezen het assenstelsel zó dat de y -as samenvalt met l_0 (fig. 127). Dan is:

$$I_0 = \iint_G \sigma(x, y)x^2 dx dy \quad (86.1)$$

$$\begin{aligned} I &= \iint_G \sigma(x, y)(x + a)^2 dx dy \\ &= \iint_G \sigma(x, y)x^2 dx dy + 2a \iint_G \sigma(x, y)x dx dy + a^2 \iint_G \sigma(x, y) dx dy \end{aligned} \quad (86.2)$$

Daar de y -as door het zwaartepunt van G gaat is

$$S_x = \iint_G \sigma(x, y)x dx dy = 0$$

terwijl

$$\iint_G \sigma(x, y) dx dy = M$$

Uit (86.1) en (86.2) volgt:

$$I = I_0 + Ma^2$$

Voorbeeld

In par. 85 vonden we voor het traagheidsmoment t.o.v. de y -as van het homogene gebied begrensd door x -as en de kromme: $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) (fig. 128):

$$I_x = \pi^2 - 4$$

T.o.v. de symmetrie-as $x = \frac{1}{2}\pi$, waarop het zwaartepunt ligt, is dus het traagheidsmoment:

$$I_0 = \pi^2 - 4 - 2\left(\frac{1}{2}\pi\right)^2 = \frac{1}{2}\pi^2 - 4$$

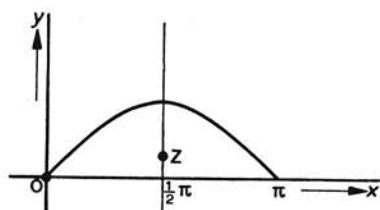


Fig. 128

87 Regels van Guldin (Pappus)*

Stel dat f een functie is, gedefinieerd op het interval $[a, b]$ op de x -as, die daar een continue eerste afgeleide heeft. Volgens par. 71 is de oppervlakte van het omwentelingslichaam dat ontstaat bij wenteling van de kromme met vergelijking $y = f(x)$ om de x -as gelijk aan:

$$O = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

Volgens par. 85 is de y -coördinaat η van het zwaartepunt van deze kromme, indien deze homogeen met massa belegd wordt ($\sigma = 1$):

$$\eta = \frac{\int_a^b f(x) \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx}{s}$$

als s de booglengte van de kromme over het interval voorstelt. Dus is

$$O = 2\pi\eta \cdot s$$

Hiermede is de *eerste regel van Guldin* bewezen (ook wel stelling van Pappus genaamd).

Eerste Regel van Guldin

De oppervlakte van een omwentelingslichaam is in getalwaarde gelijk aan de lengte van het deel van de kromme dat gewenteld wordt, vermenigvuldigd met de omtrek van de cirkel door het zwaartepunt bij één omwenteling doorlopen.

Stel dat y een gesloten begrensde gebied is in het platte vlak met oppervlakte O , begrensd door de krommen met vergelijkingen: $y_1 = f_1(x)$ en $y_2 = f_2(x)$ gedefinieerd voor $x \in [a, b]$ (zie fig. 129).

In par. 71 is bewezen dat de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat door wenteling van G om de x -as gelijk is aan:

$$I = \pi \int_a^b [\{f_1(x)\}^2 - \{f_2(x)\}^2] dx \quad (87.1)$$

* H. Guldin 1577-1643. Pappus van Alexandrië (\pm 300).

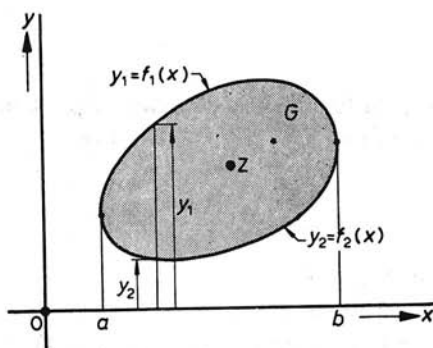


Fig. 129

Volgens par. 85 geldt voor de y -coördinaat η van het zwaartepunt Z van G :

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{\iint_G y \, dx \, dy}{O} \\
 &= \frac{\int_a^b \left\{ \int_{f_2(x)}^{f_1(x)} y \, dy \right\} dx}{O} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [\{f_1(x)\}^2 - \{f_2(x)\}^2] dx}{O}
 \end{aligned} \tag{87.2}$$

Uit (87.1) en (87.2) volgt:

$$I = 2\pi\eta \cdot O$$

Dit bewijst de juistheid van de *tweede Regel van Guldin*.

Tweede Regel van Guldin

De inhoud van een omwentelingslichaam is gelijk aan de oppervlakte van de halve meridiaandoorsnede, vermenigvuldigd met de omtrek van de cirkel door het zwaartepunt bij één omwenteling doorlopen.

Voorbeeld 1

Bereken de oppervlakte en de inhoud van de torus van par. 71, voorbeeld 3.

Oplossing:

Volgens de eerste Regel van Guldin geldt:

$$O = 2\pi R \cdot 2\pi a = 4\pi^2 aR$$

Volgens de tweede Regel:

$$I = \pi R^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 a R^2$$

Men kan deze regels dikwijls toepassen om de coördinaten van het zwaartepunt te vinden, als de oppervlakte of inhoud van het omwentelingslichaam bekend is.

Voorbeeld 2

Bepaal het zwaartepunt van een halve cirkel met straal R :

a voor een homogene belegging van de cirkelomtrek ($\sigma = 1$);

b voor een homogene belegging van het gebied binnen de halve cirkel ($\sigma = 1$).

Oplossing:

Kies de middellijn als x -as (fig. 130) en de symmetrie-as als y -as. Het is duidelijk dat het zwaartepunt in beide gevallen op de symmetrie-as is gelegen. Wentel de halve cirkel om de x -as.

a De oppervlakte van het omwentelingslichaam (bol) is $4\pi R^2$.

Volgens de eerste Regel van Guldin is dan

$$4\pi R^2 = \pi R \cdot 2\pi \eta_1$$

dus:

$$\eta_1 = \frac{2R}{\pi}$$

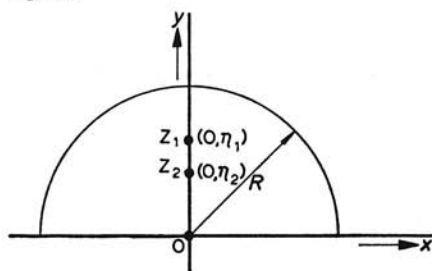
b De inhoud van het omwentelingslichaam is $\frac{4}{3}\pi R^3$. Volgens de tweede Regel van Guldin is dus

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot 2\pi \eta_2$$

of

$$\eta_2 = \frac{4R}{3\pi}$$

Fig. 130



Gamma- en bêtafunctie

88 De gammafunctie

In deel 1 par. 81 is aangetoond dat de integraal

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$$

convergeert als $p > 0$ en divergeert als $p \leq 0$. Deze integraal bepaalt dus een functie van p (indien $p > 0$).

Deze functie wordt de *gammafunctie* genoemd en voorgesteld door Γ . Dus:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt \quad (p > 0) \quad (88.1)$$

Ook werd de hoofdeigenschap van de gammafunctie bewezen, nl.:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (p > 0)$$

Hieruit volgt, daar $\Gamma(1) = 1$:

$$\Gamma(p+1) = p! \quad (p \in \mathbb{N})$$

Men kan bewijzen dat de Γ -functie voor $p > 0$ een continue functie is van p . Deze is dus op te vatten als een *voortzetting* van de voor gehele getallen gedefinieerde faculteitsfunctie, tot een voor alle positieve getallen gedefinieerde functie.

We zullen deze Γ -functie voortzetten tot een nieuwe functie die ook gedefinieerd is voor alle negatieve getallen met uitzondering van $\{-1, -2, -3, \dots\}$. Daartoe definiëren we eerst:

$$\Gamma_1(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

Indien $-1 < p < 0$, dan heeft $\Gamma(p+1)$ betekenis.

Γ_1 is gedefinieerd voor alle $p \neq 0$ die voldoen aan $p \in \langle -1, \rightarrow \rangle$ en stemt voor $p \in \langle 0, \rightarrow \rangle$ overeen met de boven gedefinieerde Γ -functie. We zeggen dan dat Γ_1 de Γ -functie voortzet op $\langle -1, \rightarrow \rangle$ met uitzondering van het punt 0.

Bijvoorbeeld: $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{-\frac{1}{2}} = -3\Gamma(\frac{3}{2})$.

Indien $-2 < p < -1$, dan geldt: $-1 < p + 1 < 0$, dus $\Gamma_1(p + 1)$ is gedefinieerd. We definiëren nu:

$$\Gamma_2(p) = \frac{\Gamma_1(p + 1)}{p}$$

Bijvoorbeeld: $\Gamma_2(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma_1(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\Gamma_1(-\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}\Gamma(\frac{3}{2})$.

Γ_2 zet dus Γ_1 voort tot het interval $\langle -2, \rightarrow \rangle$, met uitzondering van -1 en 0 . Zo doorgaande kan men een functie definiëren (die we ook met Γ aanduiden) die de „oude” Γ -functie voortzet tot alle reële getallen, met uitzondering van $0, -1, -2, -3, \dots$ enz. Deze Γ -functie voldoet dan aan:

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p + 1)}{p} \quad (p \neq 0, -1, -2, -3, \dots) \quad (88.2)$$

Hieruit volgt voor $p \rightarrow 0$ daar $\Gamma(1) = 1$ en de „oude” Γ -functie continu is:

$$\lim_{p \downarrow 0} \Gamma(p) = \lim_{p \downarrow 0} \frac{\Gamma(p + 1)}{p} = \infty$$

$$\lim_{p \uparrow 0} \Gamma(p) = \lim_{p \uparrow 0} \frac{\Gamma(p + 1)}{p} = -\infty$$

De Γ -functie heeft dus voor $p = 0$ een pool van de eerste orde. Evenzo blijkt dat voor iedere negatieve gehele p de functie een pool van de eerste orde heeft.

In fig. 131 is de grafische voorstelling van de Γ -functie getekend.

In par. 66 vonden we:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Met behulp hiervan zullen we $\Gamma(\frac{1}{2})$ berekenen.

We hebben nl.

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$$

Stellen we hierin: $\sqrt{t} = u$, dan blijkt:

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Uit (88.2) volgt dan:

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}; \quad \Gamma(-\frac{3}{2}) = -\frac{2}{3}\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}; \text{ enz.}$$

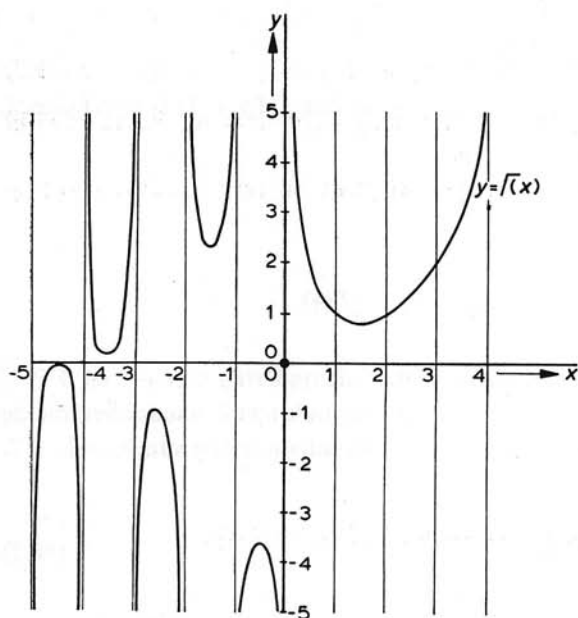


Fig. 131

89 De bètafunctie

De integraal

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \quad (89.1)$$

convergeert indien $p > 0$ en tevens $q > 0$. Dit is eenvoudig in te zien door op te merken dat de integrand zich „in de buurt” van 0 gedraagt als t^{p-1} en „in de buurt” van 1 als $(1-t)^{q-1}$.

Preciezer gezegd:

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}}{t^{p-1}} = 1$$

$$\lim_{t \uparrow 1} \frac{t^{p-1}(1-t)^{q-1}}{(1-t)^{q-1}} = 1$$

Voor het gedrag nabij 0 vergelijken we (89.1) met de integraal $\int_0^1 \frac{dt}{t^{1-p}}$, die convergeert als $1-p < 1$, d.w.z. als $p > 0$, en divergeert als $1-p \geq 1$, d.w.z. als $p \leq 0$ (zie deel 1, par. 80). Voor het gedrag nabij 1 geldt een analoge redenering.

De integraal in (89.1) definieert dus voor $p > 0$, $q > 0$ een functie van de twee variabelen p en q , die de *bètafunctie* wordt genoemd en wordt voorgesteld door B .

Dus:

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt \quad (p > 0, q > 0) \quad (89.2)$$

Blijkbaar geldt: $B(p, q) = B(q, p)$, hetgeen eenvoudig blijkt door op de integraal in (89.2) de substitutie $t = 1 - u$ toe te passen.

Een andere uitdrukking voor $B(p, q)$ krijgen we door de substitutie: $t = \cos^2 \varphi$ ($0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$).

Men vindt dan:

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi d\varphi$$

en dus ook:

$$B(q, p) = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2p-1} \varphi \cos^{2q-1} \varphi d\varphi$$

Stelling

Tussen de B -functie en de Γ -functie bestaat de volgende betrekking:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (p > 0, q > 0)$$

Bewijs:

Stel dat N een positief getal is. We definiëren dan:

$$\Gamma_N(p) = \int_0^N e^{-t} t^{p-1} dt \quad (89.3)$$

Dus geldt:

$$\Gamma(p) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Gamma_N(p)$$

Invoering van de substitutie $u = \sqrt{t}$ in (89.3) geeft:

$$\Gamma_N(p) = 2 \int_0^{\sqrt{N}} e^{-u^2} u^{2p-1} du$$

Analoog geldt:

$$\Gamma_N(q) = 2 \int_0^{\sqrt{N}} e^{-v^2} v^{2q-1} dv$$

Hieruit volgt:

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \Gamma_N(p) \right\} \cdot \left\{ \lim_{N \rightarrow \infty} \Gamma_N(q) \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \{ \Gamma_N(p)\Gamma_N(q) \} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 4 \left\{ \int_0^{\sqrt{N}} e^{-u^2} u^{2p-1} du \right\} \left\{ \int_0^{\sqrt{N}} e^{-v^2} v^{2q-1} dv \right\} \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} 4 \iint_{V(\sqrt{N})} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv \end{aligned}$$

waarin in het u, v -vlak $V(\sqrt{N}) = \{(u, v) | 0 \leq u \leq \sqrt{N}; 0 \leq v \leq \sqrt{N}\}$.

Indien we verder definiëren:

$$C(\sqrt{N}) = \{(u, v) | 0 \leq u^2 + v^2 \leq N; u \geq 0; v \geq 0\}$$

en

$$C(\sqrt{2N}) = \{(u, v) | 0 \leq u^2 + v^2 \leq 2N; u \geq 0; v \geq 0\}$$

dan geldt (zie fig. 132):

$$\begin{aligned} 4 \iint_{C(\sqrt{N})} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv &\leq 4 \iint_{C(\sqrt{N})} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv \\ &\leq 4 \iint_{C(\sqrt{2N})} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv \end{aligned} \quad (89.4)$$

We voeren in de over de kwartcirkels uitgestrekte integralen poolcoördinaten in, en krijgen dan:

$$\begin{aligned} 4 \iint_{C(\sqrt{N})} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv \\ = \{2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi d\varphi\} \{2 \int_0^{\sqrt{N}} e^{-\rho^2} \rho^{2(p+q)-1} d\rho\} \end{aligned}$$

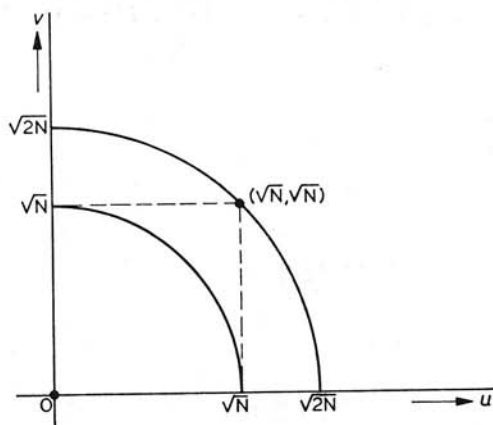
en

$$\begin{aligned} 4 \iint_{C(\sqrt{2N})} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv \\ = \{2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi d\varphi\} \{2 \int_0^{\sqrt{2N}} e^{-\rho^2} \rho^{2(p+q)-1} d\rho\} \end{aligned}$$

Dus geldt:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} 4 \iint_{C(\sqrt{N})} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv &= \lim_{N \rightarrow \infty} 4 \iint_{C(\sqrt{2N})} e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1} du dv \\ &= \{2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^{2p-1} \varphi \sin^{2q-1} \varphi d\varphi\} \cdot \Gamma(p+q) = B(p, q) \Gamma(p+q) \end{aligned}$$

Fig. 132



Dit geeft in (89.4) na limietovergang $N \rightarrow \infty$:

$$B(p, q)\Gamma(p + q) \leq \Gamma(p)\Gamma(q) \leq B(p, q)\Gamma(p + q)$$

dus:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)} \quad (p > 0, q > 0)$$

Men kan bewijzen dat de Γ -functie geen nulpunten bezit (zoals de grafiek in fig. 131 al suggereert), zodat $\Gamma(p + q) \neq 0$.

Voorbeeld 1

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 \varphi \cos^5 \varphi \, d\varphi &= \frac{1}{2}B(2\frac{1}{2}, 3) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(2\frac{1}{2})\Gamma(3)}{\Gamma(5\frac{1}{2})} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \cdot 2!}{4\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{2} \cdot 2\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{8}{315} \end{aligned}$$

Voorbeeld 2

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n-1} \varphi \, d\varphi \quad (n \text{ geheel positief}) &= \frac{1}{2}B(n, \frac{1}{2}) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(n)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\Gamma(n)}{(n - \frac{1}{2})(n - \frac{3}{2}) \dots \frac{1}{2}} \\ &= \frac{2^{n-1}\Gamma(n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)} = \frac{2 \cdot 4 \dots (2n - 2)}{1 \cdot 3 \dots (2n - 1)} \end{aligned}$$

Op dezelfde wijze toont men aan:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2n} \varphi \, d\varphi = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Voorbeeld 3

Bereken:

$$\int_0^a x^4 \sqrt{a^3 - x^3} \, dx$$

Oplossing:

Wij substitueren: $x = av^{\frac{1}{3}}$, dan volgt:

$$\begin{aligned} \int_0^a x^4 \sqrt{a^3 - x^3} dx &= \int_0^1 a^4 v^{\frac{4}{3}} \sqrt{a^3 - a^3 v} \cdot \frac{1}{3} a v^{-\frac{2}{3}} dv \\ &= \frac{1}{3} a^{6\frac{1}{2}} \int_0^1 v^{\frac{2}{3}} (1-v)^{\frac{1}{2}} dv \\ &= \frac{1}{3} a^{6\frac{1}{2}} B\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{3} a^{6\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{5}{3})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{19}{6})} \end{aligned}$$

Voorbeeld 4

In het x, y -vlak is een kromme gegeven met poolvergelijking: $\rho = R(\varphi)$ ($\alpha \leq \varphi \leq \beta$). De voerstraal OP naar elk punt P van de kromme is een middellijn van een cirkel, waarvan het vlak loodrecht staat op het x, y -vlak. Bereken de inhoud en het ronde oppervlak van het lichaam dat ingesloten wordt door deze cirkels, als P de kromme doorloopt en door de vlakken: $\varphi = \alpha$ en $\varphi = \beta$.

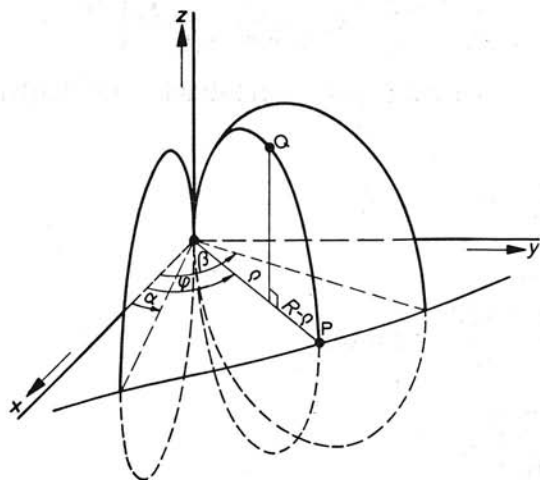
Oplossing:

Een willekeurig punt Q van de door de cirkels beschreven oppervlak, liggend boven het x, y -vlak heeft als cilindercoördinaten: φ ; ρ ; $\sqrt{\rho\{R(\varphi) - \rho\}}$ (zie fig. 133; hierin is voor het gemak R i.p.v. $R(\varphi)$ geplaatst).

De gevraagde inhoud is:

$$I = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_0^{R(\varphi)} \rho \sqrt{\rho\{R(\varphi) - \rho\}} d\rho \right] d\varphi$$

Fig. 133



In de integraal naar ρ substitueren we:

$$\rho = R(\varphi)u$$

waardoor we voor deze integraal vinden:

$$\begin{aligned} \int_0^{R(\varphi)} \rho \sqrt{\rho\{R(\varphi) - \rho\}} d\rho &= \int_0^1 R(\varphi)u \sqrt{R(\varphi)u\{R(\varphi) - R(\varphi)u\}} R(\varphi) du \\ &= R^3(\varphi) \int_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{\frac{1}{2}} du \\ &= R^3(\varphi) B\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ &= R^3(\varphi) \cdot \frac{\Gamma(\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(4)} \\ &= \frac{1}{16}\pi R^3(\varphi) \end{aligned}$$

De gevraagde inhoud is dus:

$$I = \frac{1}{8}\pi \int_{\alpha}^{\beta} R^3(\varphi) d\varphi$$

Om het ronde oppervlak van het lichaam te berekenen, passen we de volgende formule toe:

$$O = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_0^{R(\varphi)} \sqrt{\rho^2 + \rho^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial \varphi} \right)^2} d\rho \right] d\varphi$$

waarin $z = Z(\rho, \varphi) = \sqrt{\rho\{R(\varphi) - \rho\}}$ is.

Na enige berekening vinden we:

$$\frac{\partial Z}{\partial \rho} = \frac{1}{2} \frac{R(\varphi) - 2\rho}{\sqrt{\rho\{R(\varphi) - \rho\}}}; \quad \frac{\partial Z}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{\{R(\varphi) - \rho\}}} \cdot \frac{dR}{d\varphi}$$

zodat:

$$O = 2 \int_{\alpha}^{\beta} \left[\int_0^{R(\varphi)} \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho\{R(\varphi) - 2\rho\}^2}{4\{R(\varphi) - \rho\}} + \frac{\rho \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2}{4\{R(\varphi) - \rho\}}} d\rho \right] d\varphi$$

Van de integraal naar ρ maken we een B -functie door de substitutie: $\rho = R(\varphi)u$. We vinden dan:

$$\begin{aligned} \int_0^{R(\varphi)} \frac{\sqrt{\rho}}{\sqrt{R(\varphi) - \rho}} d\rho &= R(\varphi) \int_0^1 u^{\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= R(\varphi) B\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ &= R(\varphi) \frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)} = \frac{1}{2}\pi R(\varphi) \end{aligned}$$

zodat:

$$O = \frac{1}{2}\pi \int_{\alpha}^{\beta} R(\varphi) \sqrt{R^2(\varphi) + \left(\frac{dR}{d\varphi} \right)^2} d\varphi$$

Register

- Arbeidsintegraal* 173
Astroïde 120, 264
- Band* van Moebius 298
Betafunctie 336
Bewegingsvergelijkingen 102
Binormaal 146
Bolcoördinaten 260
Boogelement van een vlakke kromme 113
Booglengte van een vlakke kromme 112, – van een ruimtekromme 142, – als parameter 122
Bovenintegraal 178
Bovensom van een dubbelintegraal 117
Brondichtheid 315
Bronvrij 315
- Cardioïde* 121, 136, 291
Cauchy-Riemann, differentiaalvergelijkingen van – 33
Cilindercoördinaten 242, 258
Circulatie 315, – dichtheid 316
Cirkelschroeflijn 138, 154
Componentfuncties 96
Conservatief veld 316
Continue massaverdeling 170, 322
Convexe kromme 130, – oppervlak 299, – gebied 197, 202
Curl 93
Cycloïde, de gewone – 103, 120, 135
- Determinant* van Jacobi 25, 48, 226
Descartes, folium van – 53, 104, 206
- Deviatie* 65
Diameter van een begrensde verzameling 253
Differentiaal, exacte – 217
Differentiaalvorm 217
Differentie 20, 22
Divergentie 92
Divergentietheorema 299, 303
Drievoudige integraal 255
Dubbelintegraal 128, bovensom van een – 177, integrand van een – 178, ondersom van een – 177
Dubbelpunt 53
- Elliptische* integraal 119
Enkelvoudig samenhangend gebied 211
Equi-angulaire spiraal 110
Euler, stelling van – 16
Exacte differentiaal 217
Existentie van een dubbelintegraal 179, – van een lijnintegraal 163, – van de inverse transformatie 228
Extremee waarden 51 e.v., absolute – n 54, inwendige – n 54, oneigenlijke – n 54, relatieve – n 54, – n met nevenvoorwaarden 66, 78
- Flux* 314
Folium van Descartes 53, 104, 206
Foutenfunctie van Gauss 251
Frenet-Serret, triëder van – 145, formules van – 148
Functionaaldeterminant 25, 48, 226

- Gammafunctie* 334
Gauss, foutenfunctie van - 251, stelling van - 299, 303
Geïsoleerd punt 56
Gemiddelde kromming 124, - waarde 184, - massadichtheid 318
Georiënteerde kromme 161
Gesloten kromme 161, 191, - oppervlak 298
Gladder boog 191
Gradiënt 90
Green, stelling van - voor het platte vlak 202, voor de ruimte 306
Guldin, regels van - 331

Harmonische functie 307
Herhaalde integraal 185
Homogene functie 16, - massaverdeling 170, 319
Hoofdnormaal 146, - vector 143
Huygens, probleem van - 72

Impliciete functies van één veranderlijke 37, 47, - van twee veranderlijken 43
Integraal van Poisson 251, Riemann - 178
Integrand 178
Integratie-element 178, - gebied 178, 194
Integreerbaar 178
Inverse transformatie 221
Invoeren van nieuwe variabelen 23, 232

Jacobi, determinant van - 25, 48, 226
Jacobiaan 25
Jordankromme 191

Kettinglijn 117, 134
Kinetische energie 175
Kleinste kwadraten, methode van de - 64
Kromlijnige coördinaten 222
Kromming, gemiddelde - 124, - van een vlakke kromme 124, - van een ruimtekromme 145, 148
Kromtecirkel 125, - middelpunt 125, - straal 125
Kubische ruimtekromme 139, 140

Lagrange, multiplicatorenmethode van - 84
Laplace, operator van - 95, vergelijking van - 95
Lemniscaat 283, 286
Lengte van een vector 96

Lijnelement van een kromme 113
Lijnintegraal 161

Massa 318, - dichtheid 170, 318, continue - verdeling 170, 322, homogene - verdeling 170, 319
*Meer*voudig samenhangend gebied 211
Middelwaardestelling van de differentiaalrekening 18, - van de integraalrekening 185
Moebius, band van - 298
Moment 320, statisch - 320, 322
Multiplicatorenmethode van Lagrange 84

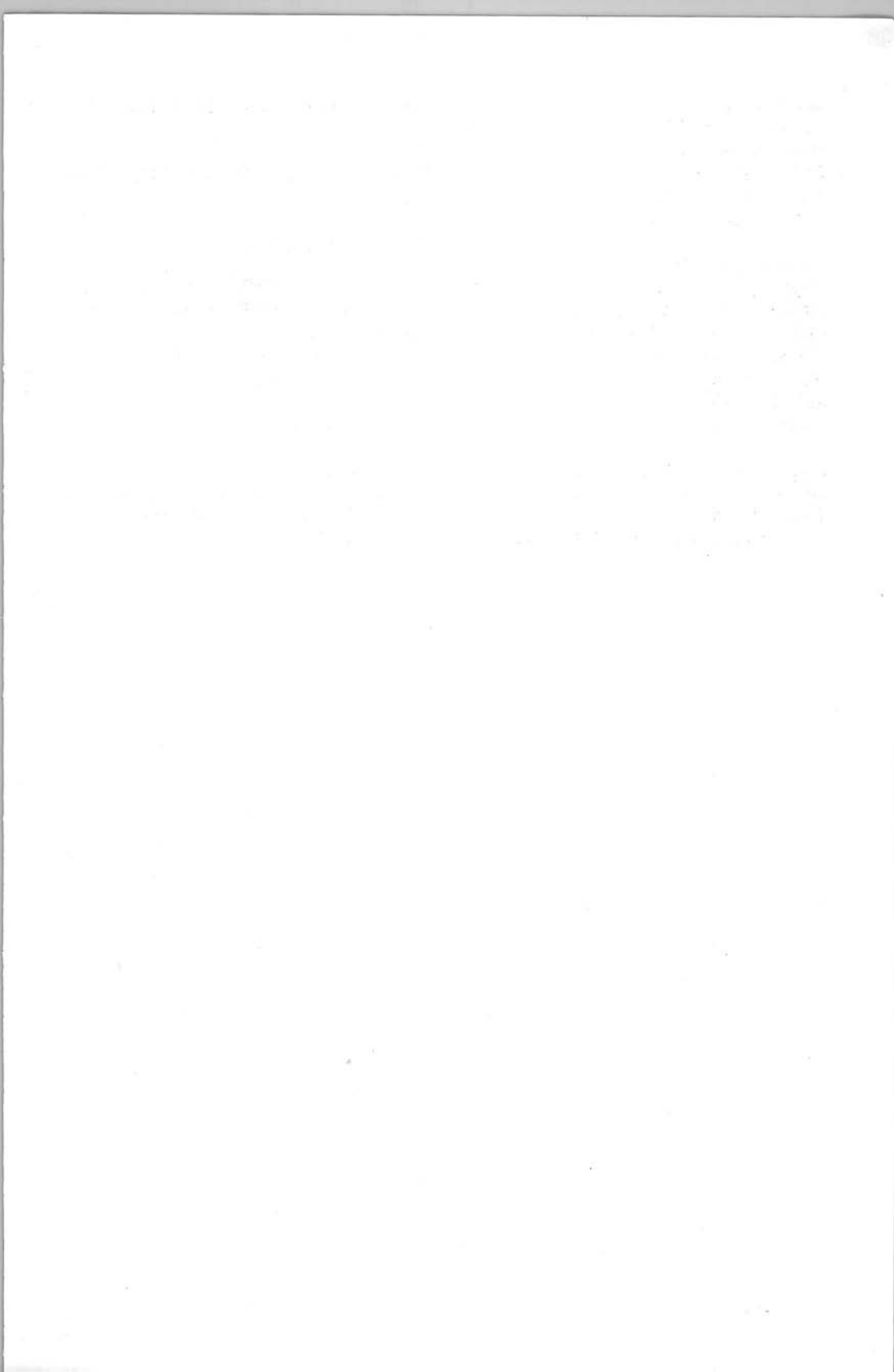
Nabla 90
Niveauoppervlak 92
Norm van een vector 96
Normale eenheidsvector 127
Normalenvlak 142, 146

Omwentelingslichaam, inhoud van een - 270, oppervlakte van een - 288
Onderintegraal 178
Ondersom van een dubbelintegraal 177
Oneigenlijke integraal van de eerste soort 248, - van de tweede soort 253
Operator van Laplace 95
Oppervlakte-element 178, 293
Oppervlak-integraal 292
Oppervlakte van een gebogen vlak 275, 280, 282, 284
Oriënteerba(a)r(e) kromme 161, - oppervlak 298
Osculatievlak 146, 152

Pappus, regels van - 331
Parametervoorstelling van een vlakke kromme 100, - van een ruimtekromme 137, - van een oppervlak 280
Parametriseren 101
Plaatsvector 101
Poisson, integraal van - 251
Polair traagheidsmoment 321, 324
Pool van een functie 253
Poolvergelijking 108
Potentiaal 317

Raaklijn aan een ruimtekromme 141, - aan een oppervlak 157
Raakvlak aan een oppervlak
Rand van een oppervlak 298

- Randkromme* 192
Rectificeerbaar 113
Rectificerend vlak 146
Riemann-integraal 178, – sommen 189
Rotatie 93, – vrij 316
Ruimte-poolcoördinaten 260
- Scalaire functie* 88, – veld 88
Singulariteit van een functie 253
Singuliere punten van de afbeelding 231
Stationaire punten 55, – stroming 314
Statisch moment 320, 322
Stokes, stelling van – 309
Substitutie 220
Superpositie 179
- Tangentiele eenheidsvector* 126, 143
Taylor, formule van – 21, reeks van – 23
Torsie 148, 150
Torus, inhoud van een – 273, oppervlakte van een – 290
- Traagheidsmoment* 321, 323, polaire – 321, 324
Triangulatie 298
Transformatie 220, – formules 243, 260, inverse – 221
- Uniforme continuïteit* 180
- Vectoranalyse* 95, – functie 88, – ruimte 88, – veld 88, – voorstelling van een ruimtekromme 137
Verfijning van een verdeling 162, 179
Verschuivingsstelling 329
- Wervelvrij veld* 316
- Zadelpunt* 56
Zin van een kromme 100, – van een normaal 128, – van een raaklijn 105
Zwaartepunt 321, 325



ANALYSE

door dr. J.H.J. Almering e.a.

'Analyse' behandelt de analyse op moderne wijze. De hoofdstukken bevatten vele voorbeelden, vraagstukken en oefeningen. Ze behandelen de grondbegrippen, complexe getallen, limieten en continuïteit, differentiëren, integratie, afbeeldingen, differentiaalvergelijkingen, meervoudige integralen, lijn- en oppervlakteintegralen en reeksen. Tevens zijn vele opgaven (mét antwoorden) opgenomen. Het boek doet o.a. dienst bij het analyse-onderwijs bij nagenoeg alle afdelingen van de TH-Delft.

Het is samengesteld door:
prof.dr. J.M. Aarts, dr. J.H.J. Almering,
drs. N.C. Balkenende, dr. H. Bavinck,
ir. J.J.I.M. van Kan, drs. J.S. Mahler en
drs. L. Sleutelberg.

400 pag., ISBN 90-6562-002-8

Van bovengenoemd Analyseboek wordt een selectie van de *numerieke onderwerpen* apart uitgegeven ten behoeve van de M.O.-cursussen (52 pag.).

ANALYSE

209 tentamenopgaven met uitwerkingen door dr. H. Bavinck

Aansluitend aan Analyse door dr. J.H.J. Almering e.a. redigeerde dr. H. Bavinck een boek met opgaven en uitwerkingen. Het aan studenten ter beschikking stellen van vraagstukken met uitwerkingen, betekent didactisch gezien een risico; van de gebruikers moet dan ook, wil men het boekje met vrucht hanteren, een zekere zelfdiscipline worden verwacht.

96 pag., ISBN 90-6562-060-5

DIFFERENTIAALVERGELIJKINGEN

220 voorbeelden en opgaven met oplossingen en beknopte theorie door drs. A. Schuitman

Aan de hand van voorbeelden en vele opgaven wordt in dit boek een overzicht gegeven van de verschillende typen differentiaalvergelijkingen. Ook wordt ingegaan op het oplossen van stelsels van differentiaalvergelijkingen en op toepassingen op partiële differentiaalvergelijkingen. Tenslotte worden Laplacetransformaties en randwaardenproblemen behandeld.

Het boek is vooral bedoeld als vraagstukkenverzameling naast een college of leerboek.

160 pag., ISBN 90-6562-026-5

DISCRETE ANALYSE

door Peter Nooy, Jan Vons en Rob Eveleens, syllabus bij het college van prof.dr. H.J.A. Duparc

Naast de conventionele analyse, die wel wordt aangeduid als 'continue' analyse, komt steeds meer de 'discrete' analyse naar voren. In tegenstelling tot de continue analyse wordt in de discrete analyse het begrip 'limiet' niet of nauwelijks gebruikt. Vanuit andere wetenschappen dan wiskunde en de techniek dienen zich vele discrete problemen aan; zo is voor het zoeken van oplossingen met behulp van een computer vaak discretisering nodig.

Bij de opzet van dit vak kan dankbaar gebruik worden gemaakt van de continue analyse.

De behandelde onderwerpen en hun (tussen haakjes geplaatste) analogon uit de continue analyse zijn:

differentierekening (differentiaalrekening)
somrekening (integraalrekening)
reeksen (reeksen)
differentievergelijkingen (differentiaalvergelijkingen)
Z-transformatie (Laplace-transformatie)
52 pag.

DICTAAT LINEAIRE ALGEBRA

door dr. G.W. Decnop, ir. H. van Iperen en dr. R. Martini

In een systematische opbouw behandelen de auteurs de lineaire algebra, zoals die wordt gegeven aan de TH-Delft. Daarbij zijn vele voorbeelden en vraagstukken opgenomen. Vectorruimten, matrices en rekentechnieken in R^n , lineaire afbeeldingen en bilineaire vormen, inwendige productruimten, stelsels lineaire vergelijkingen, determinanten, lineaire operatoren van vectorruimten, lineaire operatoren van inwendige productruimten en kwadratische vormen zijn de onderwerpen van de hoofdstukken.

236 pag. (formaat 19x26)
ISBN 90-6562-036-2

LINEAIRE ALGEBRA — MATRIXREKENING

door ir. C.A. den Braber, ir. H. van Iperen, drs. A. Schuitman en dr.ir. M.A. Viergever

Dit boek onderscheidt zich van 'Dictaat Lineaire Algebra' door een directere aansluiting bij de programma-eisen van enkele studierichtingen aan de TH-Delft.

De lineaire algebra en matrixrekening zijn in dit boek vooral toepassingsgericht behandeld, bijvoorbeeld met het oog op vakken als technische mechanica, stelsels lineaire differentiaalvergelijkingen en statistiek.

De volgende hoofdstukken zijn in het boek opgenomen:

- *Het oplossen van eenvoudige stelsels lineaire vergelijkingen
- *Matrixen, Bewerkingen met matrixen
- *Analytische meetkunde in de ruimte en het platte vlak
- * \mathbb{R}^n & \mathbb{C}^n . Rang van een matrix. Methode der kleinste kwadraten
- *Determinanten
- *Eigenwaarden en eigenvectoren.

Het is een leerboek met veel oefenstof, waarbij de docent zonedig de weg kan wijzen.

Deel 1, 144 pag., ISBN 90-6562-072-9

Deel 2, 192 pag., ISBN 90-6562-075-3

(Medio '86 zullen beide delen worden samen-gevoegd.)

ANALYSE

door prof.dr. B. Meulenbeld en prof.dr. A.W. Grootendorst

In drie kloekle delen (die voorheen bij Educa-boek verschenen) presenteren de auteurs een volledige cursus analyse, die nu —erg laag geprijsd— opnieuw op de markt wordt gebracht. Het werk is in de periode 1979—1980 ingrijpend gemoderniseerd.

Deel 1 beperkt zich in hoofdzaak tot *functies van één veranderlijke*. Beginselen van differentiaal- en integraalrekening, complexe getallen, extreme waarden en het schetsen van krommen, systematische berekening van de primitieven van enige klassen van functies, oneigenlijke integralen, rijen, reeksen, vergelijkingen, numerieke integratie en differentiatie, en hyperbolische functies. Tenslotte wordt kort aandacht besteed aan functies van twee veranderlijken.

Deel 2 behandelt *functies met twee of meer variabelen*. De hoofdstukken gaan over impliciete functies, extreme waarden, vectoranalyse, vlakke krommen, ruimtekrommen, lijn-integralen, meervoudige integralen, integraalstellingen, massa, zwaartepunt en traagheids-

moment, en de gamma- en béta-functie.

De *differentiaalvergelijkingen* zijn het onderwerp van deel 3. Gewone differentiaalvergelijkingen, het oplossen van differentiaalvergelijkingen met behulp van machtreeksen, simultane differentiaalvergelijkingen, de Laplace-transformatie, numerieke methoden voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen en partiële differentiaalvergelijkingen.

Deel 1, 433 pag., ISBN 90-6562-064-8

Deel 2, 344 pag., ISBN 90-6562-065-6

Deel 3, 256 pag., ISBN 90-6562-066-4

Deel 1 is reeds verschenen, de delen 2 en 3 verschijnen in de loop van 1986.

ELEMENTAIRE STATISTIEK

door ir. J. van Soest

Het bekende boekje van ir. Van Soest richt zich vooral op de toepassingen van de statistiek. Achtereenvolgens worden behandeld de beschrijvende statistiek, de kansrekening, stochastische variabelen, populatie en steekproef, de binomiale verdeling, de Poisson-verdeling, de normale verdeling, functies van continue stochastische variabelen, de centrale limietstelling, statistische toetsen voor ligging, toetsen voor verschil in ligging en toetsen voor varianties, regressie- en correlatierekening. Tal van vraagstukken zijn opgenomen.

176 pag., ISBN 90-6562-003-6

aanvulling ELEMENTAIRE STATISTIEK

door ir. J. van Soest, ir. A.J. Meelen en ir. J.M.G. Vermeulen

Ten behoeve van een meer mathematische benadering van de statistiek is een aanvulling beschikbaar, die een verdieping inhoudt van hetgeen in de hoofdstukken 3, 7, 8 en 13 van Elementaire Statistiek is weergegeven.

60 pag., ISBN 90-6562-006-0

Verder noemen we

Vraagstukken over Analytische Meetkunde en Lineaire Algebra, door drs. B.W. Steggerda; 192 pag.

Vectoranalyse, door prof.dr. R. Timman en dr. J.W. Reijn; 164 pag.

Vraagstukken over Waarschijnlijkheidsrekening, door dr. P.J.A. Kanters; 178 pag.

DIGITALE TECHNIEK

van probleemspecificatie tot realisatie
door ir. A.P. Thijssen, ir. H.A. Vink en
prof.ir. C.H. Eversdijk

In twee delen wordt een overzicht gegeven van de digitale (schakel-)techniek. De boeken worden gebruikt bij de colleges *Digitale Techniek I, II en III* voor studenten Elektrotechniek en Informatica.

Deel 1 behandelt de basiskennis van de componenten, waaronder: schakelalgebra, Karnaugh-diagrammen, SSI/MSI en LSI combinatorische schakelingen, flip-flops, schuifregisters en tellers. Veel aandacht wordt besteed aan het niet-ideale gedrag van de bouwstenen, waaronder de timing van de signalen.

Deel 2 behandelt het ontwerpen van grotere schakelingen, gebaseerd op het datapad-besturing ontwerpmodel. De specificatie en realisatie van besturingen neemt een groot stuk van dit deel in beslag. Daarnaast komen ook onderwerpen als microprogrammering, de afweging van hard/software oplossingen, testbaarheid, betrouwbaarheid en synchronisatie ruimschoots aan bod.

Vele opgaven en literatuurverwijzingen zijn toegevoegd. Uitwerkingen van opgaven zijn in beide delen opgenomen.

De systematische behandeling maakt de boeken ook uitstekend geschikt voor zelfstudie en voor gebruik op HTS en HIO.

De stof is zo geordend dat een eerste, meer globale, oriëntatie op het vakgebied eruit doordeed kan worden, waarna desgewenst één of meer onderwerpen kunnen worden uitgewerkt. Dit laatste vooral voor de richting Elektrotechniek.

Deel 1, 368 pag., ISBN 90-6562-068-0

Deel 2, 256 pag., ISBN 90-6562-069-9

overhead sheets

Voor docenten zijn lay-outs van *overhead-sheets* (ca. 300 stuks) verkrijgbaar. Voor nadere inlichtingen wende men zich tot de uitgever.

DIGITEST

Opgaven behorend bij *Digitale Techniek*

De in deze bundel opgenomen vraagstukken hebben in de jaren 1982 en 1983 deel uitgemaakt van de examens *Digitale Techniek* aan de TH-Delft. De vraagstukken zijn geordend naar onderwerp, overeenkomstig de hoofdstuk-indeling van het theorieboek. De vragen zijn

gesteld in multiple choice vorm. De antwoorden zijn op de laatste bladzijde weergegeven.

80 pag., ISBN 90-6562-046-x

MICROPROCESSORS

door ir. C.J. van Spronsen en ir. F. Bruggeman

In dit boek wordt de microprocessor geïntroduceerd, uitgaande van een algemeen model, aan de hand waarvan de interne opbouw en de instructie-afhandeling worden toegelicht. De diverse methoden van adressering, zoals microprocessors die kennen, worden behandeld. Uitgebreide aandacht krijgt de in- en uitvoer, alsmede de speciaal daarvoor ontwikkelde circuits. Standaards voor zowel aansluiting met de 'buitenwereld' als voor de koppeling van modules tot een (multi-)processor-systeem komen aan de orde.

Ook de programmatuur wordt niet vergeten, zoals blijkt uit de hoofdstukken over de ontwikkeling van software en de daarvoor bestaande ondersteuning in apparatuur en programmatuur.

Bij de behandeling van de stof in dit boek wordt aangenomen dat de lezer een (bepaalde) kennis heeft van digitale technieken.

160 pag., ISBN 90-6562-034-6

COMPUTERARCHITECTUUR

door prof.dr.ir. A.J. van de Goor en
ir. H.A. Spanjersberg

Dit boekwerk behandelt computerarchitectuur als raakvlak tussen de hardware en de software. Het poogt een achtergrond en verklaring te geven voor instructie-sets, adresseringsvormen, datatypen, interrupt-systemen, enzovoorts van traditionele computers. Daarnaast worden kwaliteitscriteria als orthogonaliteit, voorspelbaarheid, enzovoorts waaraan een goede architectuur moet voldoen, behandeld; deze worden bij de behandelde voorbeelden als toets gebruikt. De gevolgde methodiek is toepasbaar op vele gebieden buiten dat van de computer-architectuur.

De behandelde stof is voorzien van voorbeelden uit diverse bestaande architecturen om bepaalde concepten te illustreren. Als voorkennis wordt enig inzicht in de PDP-11 of vergelijkbare architectuur verondersteld en enige achtergrond in programmeertalen. De geboden stof is ontstaan uit het college

Computerarchitectuur aan de TH te Delft en is geschikt voor TH-studenten in hun latere studiejaar en voor HTS-studenten in hun laatste jaar.

256 pag., ISBN 90-6562-025-7

ELEKTRONISCHE VERSTERKERS EN PHASELOCK LOOP

door prof.dr.ir. J. Davidse

Deze handleiding omvat een aantal onderwerpen die aan de orde komen in de colleges in de electronica aan de TH-Delft.

De behandelde stof heeft betrekking op de moderne versterkertechniek en op de inrichting en toepassing van de zgn. phaselock loop.

Hoewel de moderne elektronica in toenemende mate gebruik maakt van digitale technieken voor de bewerking van elektronische signalen, blijft analoge signaalversterking onmisbaar bij de bron van de signalen.

In het bijzonder op deze plaats in de signaalketen is ruis de grootste vijand van de correcte overdracht van het signaal. Om deze reden is aan dit aspect relatief veel aandacht besteed.

De phaselock loop is een schakeling die vooral van groot belang is in de moderne communicatietechniek.

232 pag., ISBN 90-6562-021-4

ELEKTROTECHNISCH METEN

prof.dr.ir. K.B. Klaassen

De elektrotechniek en met name de elektronica, heeft ons vele hulpmiddelen voor het meten opgeleverd. Daarnaast vormt de elektrotechniek ook zelf een uitgebreid toepassingsgebied voor het meten.

Dit boek over elektrotechnisch meten stelt daarom beide categorieën aan de orde, dus zowel de elektrotechnische meetmiddelen als elektrotechnische metingen.

Het doel van het boek is een zodanige behandeling van de *grondslagen* van het meten, dat, naast het verstrekken van de benodigde *basiskennis*, het *inzicht* in het meten wordt bevorderd. Het einddoel daarbij is het zelfstandig kunnen *oplossen* van allerlei *meetproblemen*.

In dit boek is de aanpak van de vanouds sterk mechanisch en energie-technisch georiënteerde elektrotechnische meettechniek verlaten ten gunste van een meer systeem-technisch georiënteerde aanpak.

Na een korte samenvatting van de fundamenteën van het vak (*meettheorie*) blijkt het voor kwantitatief meten nodig te zijn eenheden af te spreken (*eenhedenstelsels*).

Om dit optimaal te kunnen meten, dit is: met de geringst mogelijke inspanning het gestelde doel bereiken, wordt een aantal alternatieve *meetmethoden* besproken.

Een meting verschaft slechts een eindige zekerheid; er worden altijd fouten gemaakt. De *foutentheorie* bespreekt daarom de *soorten fouten*, *foutenvoortplanting* en *foutenoorzaken*.

Een meetstelsel heeft een bepaalde *structuur* waarin verschillende functies voorkomen (*transductie*, *signaalbewerking*, *indicatie* en *registratie*).

Deze meetfuncties worden in het hoofdstuk *elektrotechnische meetmiddelen* besproken. Daarna komen de volledig *elektronische meetsystemen* aan de orde. Hierbij is een belangrijke plaats ingeruimd voor het automatisch *meten met de computer*, waarbij belangrijke zaken als *bemonstering*, *multiplexing* en *'aliasing'* aan de orde komen.

230 pag., ISBN 90-6562-033-8

INSTRUMENTELE ELEKTRONICA

door ir. P.P.L. Regtien

Dit leerboek bestrijkt het zeer brede terrein van de elektronica voor instrumentele doeleinden. Van de lezer wordt slechts enige wiskundige voorkennis verwacht. Ieder hoofdstuk is verdeeld in tweeën, waarbij het eerste deel als basis geldt, terwijl het tweede deel, dat eventueel overgeslagen kan worden, wat dieper op de stof ingaat. Elk hoofdstuk wordt besloten met een samenvatting en opgaven, waarvan de antwoorden achterin het boek zijn opgenomen.

Enige onderwerpen die aan de orde komen zijn: systeem- en signaalbeschrijvingen, netwerken, filters, elektronische bewerkingschakelingen & versterkers, oscillatoren, modulatie, en analoog-digitaal- en digitaal-analoog-omzetters. Voorts wordt een inleiding gegeven in de digitale techniek en in microprocessors. Het boek wordt besloten met een hoofdstuk over (computer-) meetsystemen en enige fouttheorie.

ca. 300 pag., ISBN 9065620621
(verschijnt voorjaar 1986)

ELEKTRISCHE NETWERKEN

door ir. A. Henderson

Dit boek is in eerste instantie opgezet als dictaat van het college Elektrische Netwerken voor de eerstejaarsstudenten aan de afdeling Elektrotechniek van de TH-Delft. De aanpak bleek echter al ras ook docenten

aan de HTS-en aan te spreken.

Na een bondige uiteenzetting van de basisbegrippen worden behandeld de netwerkstellingen, bestuurd bronnen, wisselstromen en wisselspanningen, complexe grootheden en enkele eigenschappen van netwerken. Daarna komen aan de orde gekoppelde spoelen en (ideale) transformatoren, driefasensystemen, complexe frequentie, Fourier-analyse en schakelverschijnselen. Het boek wordt afgesloten met een hoofdstuk over computergerichte analyse.

340 pag., ISBN 90-6562-004-4

VRAAGSTUKKEN ELEKTRISCHE NETWERKEN

door **ir. A. Henderson**

De stof in deze bundel is verdeeld in hoofdstukken, die parallel lopen met het boek Elektrische Netwerken.

De bundel is voorzien van antwoorden.

152 pag., ISBN 90-6562-005-2

ELEKTRISCHE SCHAKELVERSCHIJSSELEN

door **ir. A. Henderson**

Het hoofdstuk schakelverschijnselen uit de theorie van de elektrische netwerken is een dankbaar onderdeel. Enerzijds heeft het de charme van een streng mathematisch betoog, anderzijds komt men voortdurend in aanraking met de fysische werkelijkheid.

Soms blijken mathematische begrippen onverwacht een fysische betekenis te hebben. Vele uitgewerkte voorbeelden en vraagstukken zijn opgenomen.

128 pag., ISBN 90-6562-061-3

DISCRETE SIGNALLEN

door **ir. A. Henderson**

Digitale signaalbewerking komt steeds meer in de belangstelling. Niet alleen de digitale filters zijn in opmars, ook bij computergerichte netwerkanalyse komt men in aanraking met discrete signalen.

Bij de bestudering van deze stof wordt men getroffen door de analogie met de theorie van de continue signalen, zoals schakelverschijnselen, stationaire toestand, toestandsvergelijkingen, wiskundige transformaties, beginvoorwaarden, polen en nulpunten, enz. Kennis van de theorie van continue signalen is echter niet noodzakelijk voor de bestudering van deze stof. Wel wordt bekendheid verondersteld met gelijk- en wisselstroomtheorie, complexe grootheden, reeksen en

(eenvoudige) matrixrekening.

72 pag., ISBN 90-6562-044-3

ELEKTRISCHE EN MAGNETISCHE VELDEN

door **ir. A. Henderson**

In dit beknopte boek wordt de theorie van de elektrische en magnetische velden voor technici behandeld; daarbij wordt naast de noodzakelijke formules ook aandacht gegeven aan de ontwikkeling van het fysisch inzicht.

In een inleidend hoofdstuk wordt een beknopt overzicht gegeven van de vectoralgebra. Daarna volgen de elektrostatica, de elektrische stromen en magnetische velden, en vervolgens de wetten van Maxwell in integraalvorm. Daarbij komen ook de voor de netwerktheorie noodzakelijke wetten van Kirchhoff naar voren.

Tenslotte volgen de wetten in differentiaalvorm, waarbij tevens wordt ingegaan op de beginselen van de vectoranalyse.

Tevens is een zeventigtal vraagstukken met een antwoordenlijst opgenomen.

96 pag., ISBN 90-6562-027-3

bedrijfszekerheidstechniek

BEDRIJFSZEKERHEIDSTECHNIEK (Reliability Engineering)

door **dr.ir. K.B. Klaassen e.a.**

Bedrijfszekerheid speelt, bij een toenemende complexiteit van systemen, een steeds belangrijker rol. Voorbeelden van gebieden in de techniek waar de bedrijfszekerheid een zeer belangrijke grootheid is, zijn de vliegtuigindustrie en elektronische geïntegreerde schakelingen (zoals microprocessors) die uit een enorm groot aantal componenten bestaan.

Dit boek behandelt elementaire theorie waarmee men zich een basis kan eigen maken. Behalve deterministische bedrijfszekerheidstechniek (het bepalen van een faaloorzaak) en statistische bedrijfszekerheidstechniek (het statistisch bepalen van parameters als: de gemiddelde levensduur, de onderhoudbaarheid, de onderhoudstrategie en het al dan niet nuttig zijn van enige vorm van onderhoud) worden evaluatiemethoden (voornamelijk faal-bomen) behandeld. Het boek besluit met een uitgebreide literatuurlijst.

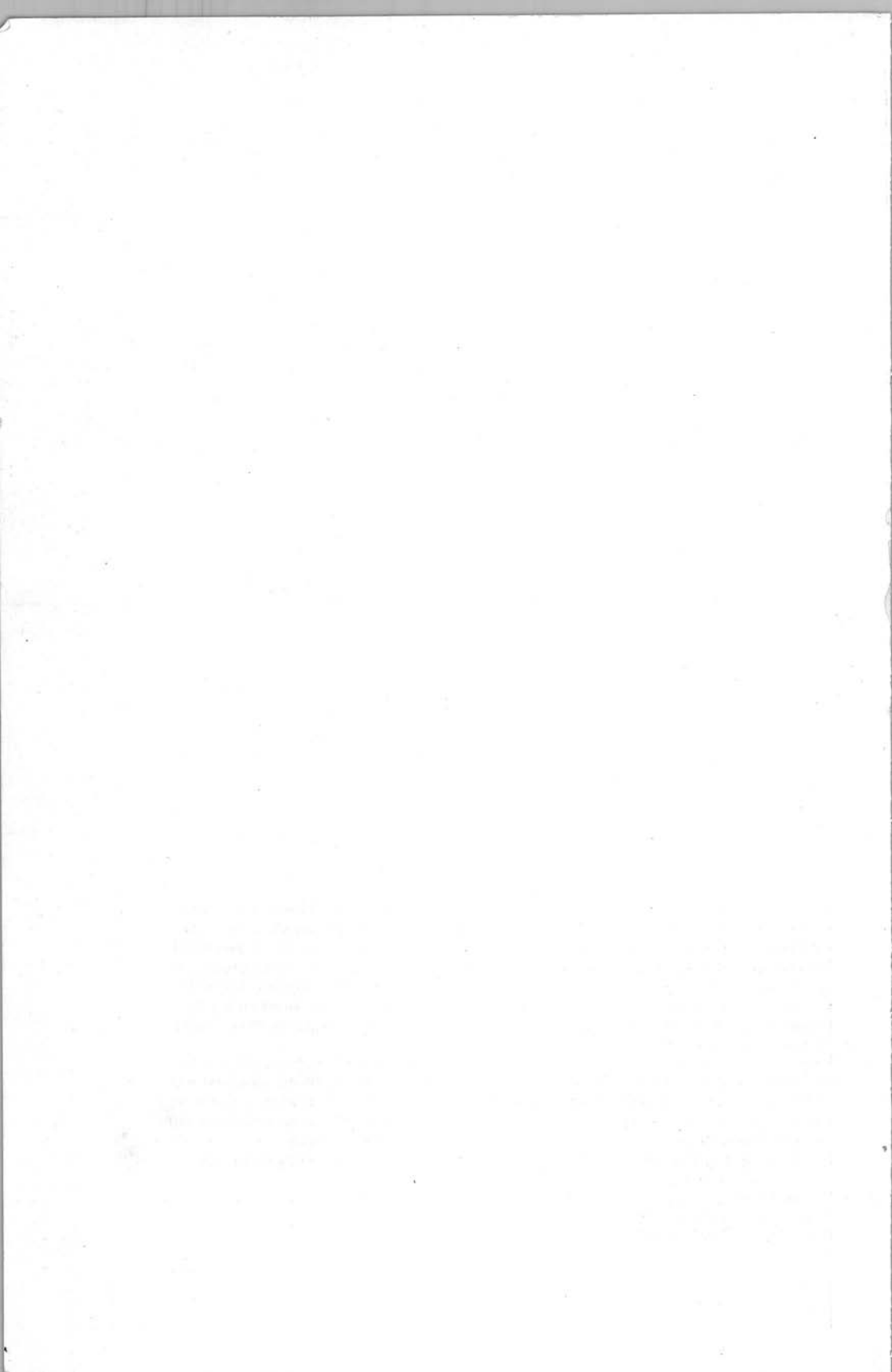
ca. 160 pag., ISBN 9065620737
(verschijnt medio 1986)

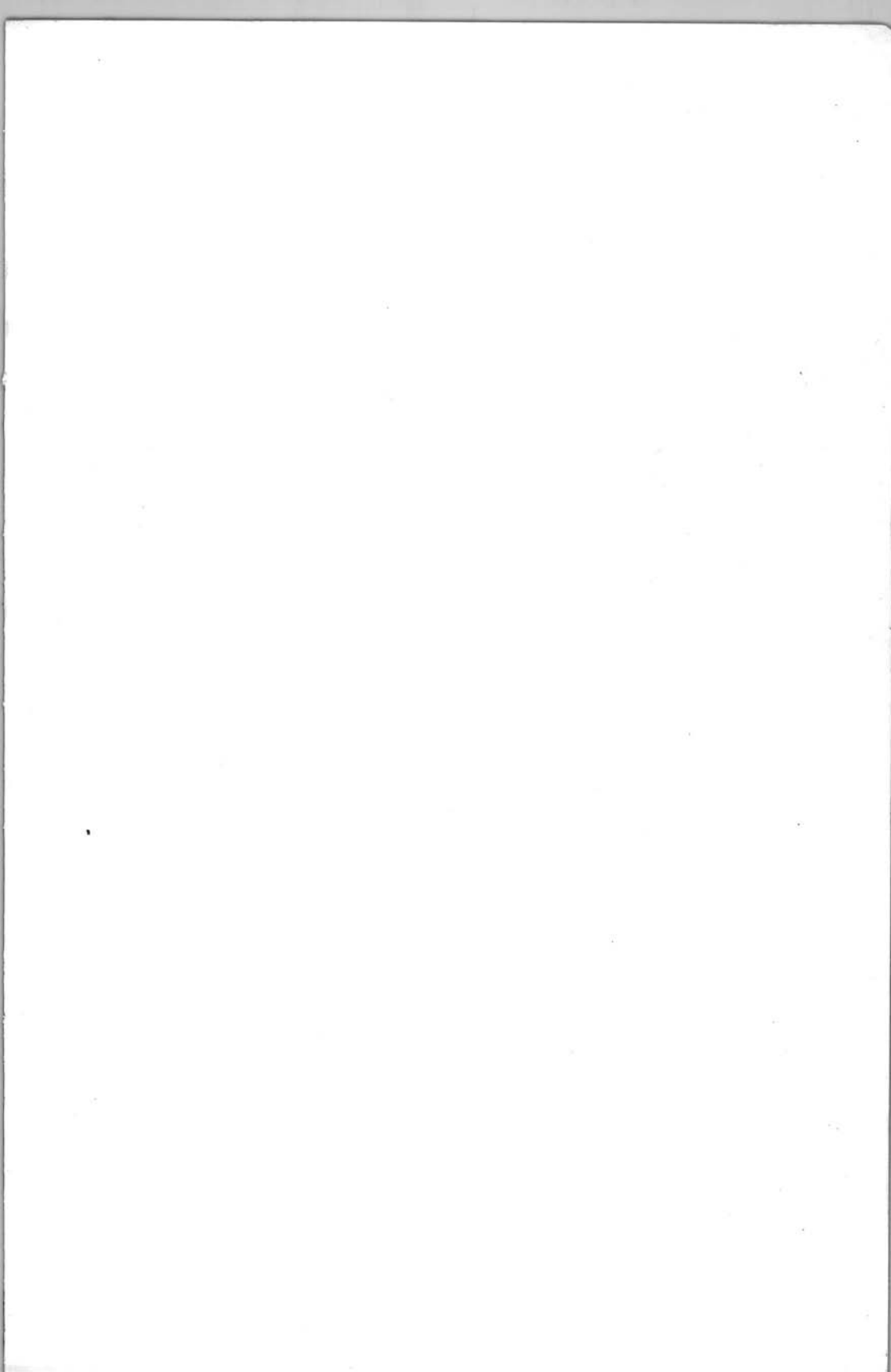
De DELFTSE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ (DUM) is de uitgever van een reeks belangwekkende studieboeken op technisch-wetenschappelijk terrein. De teksten komen i.h.a. voort uit het onderwijs aan de Technische Hogeschool Delft, maar omdat bij de samenstelling en presentatie van de stof een grote rol speelt dat ze ook elders met vrucht gebruikt moeten kunnen worden, blijft de verspreiding niet tot Delft beperkt. De belangstelling voor deze boeken bij het Hoger Beroeps Onderwijs getuigt ervan dat de auteurs dikwijls in deze opzet slagen.

Vele vakgebieden komen in het fonds van de DUM aan bod: computerkunde, elektrotechniek, wiskunde (analyse, lineaire algebra, statistiek en stochastiek), theoretische en toegepaste mechanica, materiaalkunde, natuurkunde, fysische chemie, fysische en chemische technologie, landmeetkunde, vastgoedinformatie, en ook enkele werken over het schrijven en spreken in het Engels.

Met steeds nieuwe edities en nieuwe titels worden de ontwikkelingen in deze vakgebieden gevolgd.

Belangstelling? Vraag de nieuwe fondscatalogus aan bij de
DELFTSE UITGEVERS MAATSCHAPPIJ,
Postbus 2851, 2601 CW Delft, tel. 015-123725.





Dit boek wordt ten behoeve van de Vereniging voor Studie- en Studentenbelangen te Delft (VSSD) uitgegeven door de Delftse Uitgevers Maatschappij.

De VSSD is een vereniging van studenten aan de Technische Hogeschool Delft, die zich ten doel stelt de belangen van de studenten te behartigen.

Deze belangenbehartiging heeft vele, overigens samenhangende, kanten. De verdediging van de kwaliteit van het onderwijs, bezinning op de beroepspraktijk en het bevorderen van de toegankelijkheid van het wetenschappelijk onderwijs voor alle lagen van de bevolking zijn de hoofdzaken van wat de 'ideële' kant van de belangenbehartiging genoemd zou kunnen worden.

De 'materiële' kant betreft het opkomen voor een aanvaardbaar inkomen voor de student, voor goede leefomstandigheden (huisvesting, voedsel) en goedkoop studiemateriaal e.d.

Bij het verzorgen en doen uitgeven van boeken zoals deze zijn de beide aspecten vertegenwoordigd: de beschikbaarheid van goede en handzame werken vergroot de kwaliteit van het onderwijs en verbetert de studieresultaten, anderzijds worden de boekwerkjes zo goedkoop mogelijk (d.i. tegen kostprijs) aan de leden van de VSSD beschikbaar gesteld. Daarbij kunnen ook anderen tegen een, zij het (vanwege de verkoopkosten) hogere, doch ook nog lage prijs deze werkjes kopen.

ISBN 90 6562 065 6