Onderzoek zwevend-sediment-transport in rivieren

A.C. Radder

Intern Rapport no. 8-79

Technische Hogeschool Delft

Afdeling Civiele Techniek

Vakgroep Vloeistofmechanica

Onderzoek zwevend-sedimenttransport in rivieren

door A.C. Radder

Technische Hogeschool Delft
Afdeling Civiele Techniek
Vakgroep Vloeistofmechanica

Intern Rapport no. 8-79

1. Inleiding

Doel van het onderzoek is de bestudering van wiskundige modellen, waarmee bij overwegend zwevend transport, bodemveranderingen in rivieren kunnen worden voorspeld (morfologische berekeningen). Voor een goed begrip van morfologische processen in (alluviale) rivieren is kennis van het sedimenttransport van groot belang.

Bodemveranderingen hangen nl. direkt samen met veranderingen in het transport. Voor zwevend transport is dit een tijdafhankelijk proces: bij een niet-stationaire en niet-uniforme stroming kan de bodem zich niet direkt aanpassen aan de veranderende stromingsomstandigheden, er treedt vertraging op. Deze wordt in de beschouwde wiskundige modellen beschreven met de diffusie-convectie vergelijking voor turbulent transport.

De hiermee samenhangende literatuur over water- en sedimentbeweging in rivieren is zeer uitgebreid. Een overzicht hiervan kan men bijv. vinden in Vreugdenhil (1973) voor de waterbeweging, en in Graf (1971) en Raudkivi (1976) voor het sedimenttransport. Literatuuronderzoek op het gebied van diffusie en suspensie van sediment is bijvoorbeeld verricht door van Wijngaarden (1973) en door Delvigne en Karelse (1978). Morfologische berekeningen worden behandeld door de Vries (1977), terwijl in het handboek van Jansen (1979) een overzicht wordt gegeven.

Een zeer fundamentele behandeling van twee-fasen stromingen bij hoge sedimentconcentraties is bijvoorbeeld te vinden in Buyevich and Shchelchkova (1978), die ook een goed overzicht geven van de literatuur en de mogelijkheden op dit gebied.

In par. 2 van dit rapport wordt een afleiding gegeven van een diffusie-convectievergelijking voor turbulent transport, met als belangrijkste veronderstelling dat de slipsnelheid van de sedimentdeeltjes nul is. Essentieel in het probleem is dan de formulering van de randvoorwaarde voor de concentratie bij de bodem, en de daarmee samenhangende vraag of en in hoeverre de afgeleide vergelijking nog geldig is in de grenslaag bij de bodem, waar hoge sedimentconcentraties optreden. Daartoe is in par. 3 een tweetal modellen voor evenwichtstransport nader onderzocht, waarbij geen (kunstmatig) onderscheid wordt gemaakt tussen zwevend transport en bodemtransport.

Er is een vergelijking gemaakt met een drietal, uit de literatuur bekende, transportformules, met als resultaat dat de overeenstemming veelal slecht is. De onderzochte modellen zijn dan ook als zodanig niet bruikbaar voor het voorspellen van transporten. Tenslotte worden er in par. 4 enige suggesties gegeven voor verder onderzoek op dit gebied.

2. Afleiding diffusie-convectie vergelijking voor turbulent transport

2.1. Algemeen

Door uit te gaan van de continuïteitsvergelijkingen voor een twee-fasen stroming, kan men een vergelijking afleiden voor turbulent transport van zwevend sediment, waarbij tevens rekening wordt gehouden met het door het sediment ingenomen volume. Hierbij worden de volgende veronderstellingen gemaakt:

- het sediment wordt niet-cohesief en uniform aangenomen (voor een behandeling van cohesief sediment, zie Graf (1971); voor niet-uniform sediment, zie Hunt (1969)).
- de stroming zij 2-dimensionaal in de verticaal, d.w.z. effecten in de breedterichting worden verwaarloosd.
- de slipsnelheid van de deeltjes is nul.
- het transport vindt plaats door convectie en turbulente diffusie van het gradiënt-type, waarbij de horizontale diffusie wordt verwaarloosd (Voor een definitie van deze begrippen, zie bijv. Delvigne en Karelse (1978)).

De sediment-flux is dan gegeven door:

$$\vec{p} = \vec{u}_s\, c + \overline{\vec{u}_s^{\,\prime}\, c^{\prime}} \tag{1}$$

en de water-flux door:

$$\vec{q} = \vec{u}_w(1-c) + \overline{\vec{u}_w^{\,\prime}(1-c^{\prime})} \tag{2}$$

waarin c, $\vec{u}_s$ en $\vec{u}_w$ resp. de tijdgemiddelden voorstellen van de volumecentratie, deeltjessnelheid en watersnelheid, terwijl de grootheden met accenten de turbulente fluctuaties zijn, met $\overline{c^{\prime}} = 0$, $\overline{\vec{u}_s^{\,\prime}} = 0$, $\overline{\vec{u}_w^{\,\prime}} = 0$.

De continuïteitsvergelijkingen luiden dan:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}\, \vec{p} = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial (1-c)}{\partial t} + \text{div}\, \vec{q} = 0 \tag{4}$$

Om het stelsel vergelijkingen compleet te maken, moeten hieraan worden toegevoegd de bewegingsvergelijkingen (impulsvergelijkingen) voor sediment en water. In overeenstemming met bovengenoemde veronderstellingen wordt de waterbeweging nu bekend en onafhankelijk van de sedimentconcentratie verondersteld, en de slipsnelheid van de deeltjes nul:

$$\left.\begin{aligned} u_s &= u \\ v_s &= v - W_s \end{aligned}\right\} \quad \text{(idem voor de turbulente fluctuaties)} \tag{5}$$

waarin u resp. v de horizontale en verticale gemiddelde snelheids componenten zijn, en W_s de valsnelheid ("terminal settling velocity") van het uniforme materiaal voorstelt.

De vergelijkingen (5) kunnen worden opgevat als bewegingsvergelijkingen voor het sediment, en zijn geldig voor niet te grof materiaal en niet te hoge concentraties (zie Drew (1975) voor een fundamentele beschouwing over deze benadering).

Het transport door turbulente diffusie zij van het gradiënt-type, d.w.z. er wordt aangenomen:

$$\overline{\vec{u}_s^1 \, c^1} = - \varepsilon_s \text{ grad } c \tag{6}$$

$$\overline{\vec{u}_w^1 (1-c^1)} = - \varepsilon_w \text{ grad } (1-c) \tag{7}$$

waarin ε_s resp. ε_w de uitwisselings (diffusie-) coëfficiënten zijn voor sediment en water. Als nu de valsnelheid W_s niet wordt beïnvloed door de turbulentie (d.w.z. geen "turbulente component" heeft), dan volgt uit (5), (6) en (7), dat

$$\varepsilon_s = \varepsilon_w \tag{8}$$

(vgl. Graf (1971), Chap. 8).

Dit geeft, met verwaarlozen van de horizontale diffusie, uitgeschreven in componenten:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_s \frac{\partial c}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial x}(uc) - \frac{\partial}{\partial y}(vc) + \frac{\partial}{\partial y}(W_s \, c) \tag{9}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_s \frac{\partial c}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial x}\left[u(1-c)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[v(1-c)\right] \tag{10}$$

Uit (9) en (10) is v te elimineren. Aftrekken van beide vergelijkingen geeft:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}(W_s \, c) = 0 \tag{11}$$

Integreren levert (met als randvoorwaarde dat de totale verticale flux door het oppervlak y = h nul is):

$$v = W_s \, c - \int_h^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \tag{12}$$

Dit invullen in (9) geeft tenslotte:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uc) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\varepsilon_s \frac{\partial c}{\partial y} + W_s \, c(1-c) + c\int_h^y \frac{\partial u}{\partial x} dy \right] \tag{13}$$

Deze vergelijking is een algemene continuïteitsvergelijking van het diffusie-convectie type, voor zwevend sediment in een niet-stationaire en een niet-uniforme stroming, waarbij bodemveranderingen kunnen optreden.

(Voor $c \ll 1$ en $v \ll W_s$ gaat (13) met behulp van (12) over in de meer bekende vorm:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_s \frac{\partial c}{\partial y} + W_s c\right);$$

deze vergelijking geldt dus niet dicht bij de bodem).
Om (13) te kunnen oplossen voor de concentratie $c(x,y,t)$ moeten nog gegeven zijn:

- de valsnelheid W_s, die nog een functie kan zijn van c,
- de diepte $h(x,t)$,
- de stroomsnelheid $u(x,y,t)$,
- de diffusiecoëfficiënt $\varepsilon_s(x,y,t)$,
- een beginvoorwaarde $c(x,y,o)$,
- drie randvoorwaarden: één voor $x = 0$, één voor $y = 0$ (bodem) en één voor $y = h$ (oppervlak).

Het sedimenttransport is dan te bepalen uit:

$$q_s\ (x,t) = \int_0^{h(x,t)} u(x,y,t)\, c(x,y,t)\ dy \tag{14}$$

De verandering van het bodemniveau z_b volgt dan uit (vgl. Ribberink (1978) voor de afleiding):

$$c_0 \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial q_s}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{c}h)}{\partial t} = 0 \tag{15}$$

waarin c_0 de sedimentconcentratie in de bodem is, en $\bar{c}$ de concentratie gemiddeld over de verticaal. In veel gevallen kan de laatste term in (15) worden verwaarloosd, zodat de gradient van het transport direkt de bodemverandering oplevert.

2.2. Randvoorwaarden aan oppervlak en bodem

Aan het oppervlak $y = h$ wordt gesteld, dat er geen transport plaatsvindt door dat oppervlak:

$$\varepsilon_s \frac{\partial c}{\partial y} + W_s\, c(1-c) = 0$$

Aan de bodem, waar sedimentatie en erosie kan optreden, is de situatie minder duidelijk. In de literatuur vindt men verscheidene mogelijkheden, waarvan de volgende worden genoemd:

- $c = c_a$, waarbij de referentieconcentratie c_a (ter plaatse $y = y_a$ vlak boven de bodem) bepaald wordt uit de lokale transportcapaciteit q_e met behulp van een geschikte transportformule voor evenwichtscondities (zie Kerssens (1974), Kerssens en van Rijn (1977), en Kerssens et al. (1979)

voor bijzonderheden). Hier is c_a dan nog afhankelijk van de keus van y_a en van de stromingstoestand. Als alternatief kan men c_a bepalen via een statistische theorie (zie bijv. van Schieveen (1979)), of semi-empirisch (zie bijv. Engelund and Fredsoe (1976)).

- $c = c_o$, waarbij c_o de concentratie is van losgepakt zand (zie Lavelle and Thacker (1978); Fleming and Hunt (1976). Hierbij wordt c_o dan onafhankelijk van de stromingstoestand aangenomen.
- $\varepsilon_s \frac{\partial c}{\partial y} + W_s\, c = E$, waarin E het nettotransport loodrecht op de bodem voorstelt, en hetzij empirisch, hetzij via een statistische theorie wordt bepaald (zie van Kooten (1974); Bouma (1978)). De grootheid E is sterk afhankelijk van de stromingstoestand: $E > 0$ geeft sedimentatie, $E = 0$ evenwicht, en $E < 0$ erosie.
- $\varepsilon_s \frac{\partial c}{\partial y} + (1-\alpha)\, W_s\, c + \gamma c_b = 0$,

  waarin: α = absorptiecoëfficiënt

  γ = "entrainment rate" coëfficiënt

  c_b = hoeveelheid sediment, per eenheid van oppervlak in de bodem opgeborgen.

  (zie bijv. Sayre (1969); Jobson and Sayre (1970); O'Connor (1975)).

De factoren α, γ en c_b zijn nog afhankelijk van de stromingstoestand; voor c_b is een aparte differentiaalvergelijking nodig die het "entrainment" proces beschrijft. Een nauwe samenhang met deze aanpak vertoont het zogenaamde "dode zône" model, vgl. Valentine and Wood (1977); Sabol and Nordin (1978); Yoon (1978). In dit model wordt de bedding van een rivier opgebouwd gedacht uit dode zônes, waarin wervels optreden en de gemiddelde stroomsnelheid nul is. Het uitwisselingsproces met de bodem ("entrainment") bestaat nu hieruit, dat zwevende deeltjes sediment of water tijdelijk worden ingevangen in zo'n dode zône, en na verloop van tijd weer worden losgelaten en opgepikt door de hoofdstroom. De sedimentflux van dode zône naar hoofdstroom wordt evenredig gesteld met de gemiddelde stroomsnelheid, en met het concentratieverschil tussen beide gebieden.

Het blijkt dus, dat de randvoorwaarde bij de bodem in het algemeen nog onbekende parameters bevat, die sterk afhankelijk zijn van de stromingstoestand. Voor deze parameters moet dan of een apart model worden opgezet, of ze moeten worden bepaald door middel van metingen. Van de vier genoemde randvoorwaarden zal in par. 3 de eenvoudigste (en wellicht meest fundamentele) randvoorwaarde : $c = c_o$, worden gekozen.

2.3. Valsnelheid

In een eerste benadering kan de valsnelheid constant worden aangenomen, n.l. gelijk aan de eindsnelheid van een vallend sedimentdeeltje in stilstaand water. Bij hogere concentraties is W_s nog een functie van de concentratie c (vgl. van Wijngaarden (1973) voor een overzicht). Een vaak gebruikte uitdrukking is:

$$W_s(c) = W_s(0)\ (1-c)^{\alpha} \tag{16}$$

met $\alpha = 4.45\ Re^{-0.1}$ voor $1 < Re = \frac{W_s D}{\nu} < 500$ volgens Richardson and Zaki (1954), of met $\alpha = 5$ volgens Thacker and Lavelle (1977).

De invloed van de turbulentie is vrij klein: er is een geringe toename van W_s ten gevolge van groepsvorming (vgl. Kranenburg en Geldof (1974)).

2.4. Waterbeweging

Bij morfologische berekeningen in rivieren kan men zich meestal beperken tot bijna-uniforme, quasi-stationaire stromingen, waarvoor de ondiepwater benadering mag worden toegepast(vgl. Vreugdenhil (1973)).Door te middelen over de verticaal kan het probleem van de waterbeweging dan tot één dimensie worden teruggebracht.

Men vindt dan vergelijkingen voor de gemiddelde watersnelheid $\bar{u}(x,t)$ en de diepte $h(x,t)$ (zie de Vries (1977) en Jansen (1979) voor de afleiding)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + g\frac{\partial (h + z_b)}{\partial x} + g\frac{\bar{u}\,|\bar{u}|}{C^2 h} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (h\bar{u})}{\partial x} = 0 \tag{18}$$

waarin C de Chezy - Coëfficiënt voorstelt en g de versnelling van de zwaartekracht is.

Voor lage Froude getallen ($\bar{u}/\sqrt{gh} << 1$) zijn de termen $\partial\bar{u}/\partial t$ en $\partial h/\partial t$ te verwaarlozen t.o.v. de andere termen; in dat geval reduceren (17) en (18) samen tot een gewone differentiaalvergelijking voor $\bar{u}$, die de stuwkromme beschrijft.

Om het probleem volledig te kunnen oplossen moeten de snelheidsverdeling $u(y)$ in de verticaal nog gegeven zijn, en de diffusiecoëfficiënt $\varepsilon_s(y)$. In de volgende paragraaf zal blijken, dat deze grootheden de concentratieverdeling $c(y)$ sterk beïnvloeden, en daarmee het transport q_s.

3. Modellen voor evenwichtstransport

3.1. Algemeen

Voor een stationaire en uniforme stroming gaat vergelijking (13) over in:

$$\varepsilon_s \frac{\partial c}{\partial y} + W_s\ c(1 - c) = 0 \tag{19}$$

Deze vergelijking is voor het eerst gegeven door Halbronn (1949), en later door Hunt (1954). Er is nog één randvoorwaarde nodig (die aan het oppervlak is nl. al gebruikt): stel $c = c_o$ voor $y = 0$. Verder wordt de valsnelheid W_s constant aangenomen. De aard van het model is nu sterk afhankelijk van de vorm van $\varepsilon_s(y)$. Ter bepaling van ε_s wordt uitgegaan van de Reynolds-analogie; d.w.z. volkomen analogie tussen transport van impuls ε_p en transport van massa, ε_w, waarbij ε_p is gedefiniëerd door de Boussinesq - hypothese:

$$\overline{\vec{u}^1 v^1} = - \varepsilon_p \text{ grad } v \tag{20}$$

zodat, met (8), $\varepsilon_s = \varepsilon_w = \varepsilon_p = \dfrac{\tau y}{\rho_w \, du/dy}$ (21)

waarin het verloop van de schuifspanning τy lineair wordt genomen:

$$\tau y = \rho_w \, u_*^2 \, (1 - y/h) \tag{22}$$

met schuifspanningssnelheid $u_* = \sqrt{ghi}$ en i = helling waterspiegel, ρ_w = dichtheid water.
De snelheidsverdeling $u(y)$ is nu bepalend voor het model.
Twee modellen worden hier bekeken:

3.2. Model I

Volgens de mengweghypothese van Prandtl geldt:

$$\tau_y = \rho_w \, l^2 \frac{du}{dy} \left| \frac{du}{dy} \right| \tag{23}$$

waarin de mengweglengte l gegeven is door het gelijk-vormigheidsprincipe van von Kármán:

$$l = \kappa \left| \frac{du}{dy} \right| \Big/ \left| \frac{d^2u}{dy^2} \right| \text{, met } \kappa \simeq 0{,}4 \tag{24}$$

Na integratie geeft dit:

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{2 \kappa \, h \left[B - \sqrt{1 - y/h} \right]} \tag{25}$$

waarin B een integratieconstante is.
Nogmaals integreren geeft de snelheidsverdeling (vgl. Hunt (1954); Fleming and Hunt (1976)):

$$u = u_{max} + \frac{u_*}{\kappa} \left[\sqrt{Y} + B \ln(1 - \sqrt{Y}/B) \right] \tag{26}$$

waarin $Y = 1 - y/h$ en u_{max}=snelheid voor $y = h$. De coëfficiënt ε_s volgt dan uit (21), (22) en (25):

$$\varepsilon_s = 2\,\kappa\, h\, u_* \, Y(B - \sqrt{Y}) \qquad (27)$$

en de vergelijking (19) is te integreren tot:

$$c = \frac{c_o}{c_o + (1 - c_o)\left[\frac{1 - B/\sqrt{Y}}{1 - B}\right]^Z} \qquad (28)$$

met $Z = \frac{W_s}{\kappa\, B\, u_*}$. Dit model is nu nog afhankelijk van de waarde van de parameter $B \geqslant 1$; B kan worden opgevat als een maat voor de uitwisseling van sediment tussen bodem en stroming, volgens vergelijking (27) voor ε_s: aan de bodem geldt nl. $\varepsilon_s(o) = 2\,\kappa\, h\, u_* \cdot (B - 1)$.

Voor $B \rightarrow 1$ krijgt u een logarithmische singulariteit aan de bodem, en wordt $c \equiv o$. Voor $B \rightarrow \infty$ gaat $u \rightarrow u_{max}$ en $c \rightarrow c_o$ (monotoon). In het algemeen is het transport q_s volgens (14) geen monotone functie van B, vanwege het feit dat u dicht bij de bodem negatief kan worden. Dit heeft tot gevolg dat het transport q_s negatief kan worden voor waarden van B zeer dicht bij 1. (Voor B = 1 is $q_s = 0$).

Aan de hand van een voorbeeld (ontleend aan Kerssens en van Rijn (1977)) is de gevoeligheid van het relatieve transport q_s/q_w ten opzichte van de parameter B getoetst, zie tabel I. Vaste parameters hierin zijn:

$\nu = 1{,}1_{10}{-6}\ m^2/s$; $c_o = 0{,}5$; $\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} = 1{,}61$; $\bar{u} = 0{,}50$ m/s ; $u_* = 0{,}04$ m/s ; $h = 0{,}39$ m.

Tabel I	Relatieve transport q_s/q_w voor model I	
B	D = 0,11 mm $W_s = 0{,}01$ m/s	D = 0,33 mm $W_s = 0{,}04$ m/s
1,001	29×10^{-3}	$1{,}4 \times 10^{-4}$
1,0001	$7{,}1 \times 10^{-3}$	$-0{,}32 \times 10^{-4}$
1,00001	$1{,}7 \times 10^{-3}$	$-0{,}08 \times 10^{-4}$
1,000001	$0{,}39 \times 10^{-3}$	$-0{,}01 \times 10^{-4}$

<u>Opmerking</u>:

Men kan altijd zorgen voor een positief transport q_s door B zo te kiezen, dat u = o voor y = o. Volgens (26) moet B dan voldoen aan:

$$1 + B \ln(1 - 1/B) + \kappa \frac{U_{max}}{u_*} = o$$

B wordt dan van de orde 1,01 á 1,0001. Uit de tabellen II en III blijkt echter, dat B ook nog een functie van W_s zal moeten zijn, en dus o.a. van de korreldiameter D afhangt.

In de tabellen II en III zijn bij variatie van een aantal stromingsparameters, de relatieve transporten $(q_s/q_w)_I$ (volgens model I) vergeleken met de resultaten van een drietal transportformules (nl. die van resp. Engelund and Hansen (1967); Ilo(1975) ; Yang (1976)).
Vaste parameters zijn : $\nu = 1{,}1_{10}{-6}$ m^2/s ; $c_o = 0{,}5$; $\frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} = 1{,}61$.

Tabel II Vergelijking van relatieve transporten ($*10^{-3}$);
$D = 0.11$ mm; $W_s = 0{,}01$ m/s ; $B = 1{,}000001$

$\bar{u}$	u_*	h	k	$\bar{u}_{II}$	$(\frac{q_s}{q_w})_I$	$(\frac{q_s}{q_w})_{II}$	$(\frac{q_s}{q_w})_{EH}$	$(\frac{q_s}{q_w})_{ILO}$	$(\frac{q_s}{q_w})_{YANG}$
0,50	0,04	0,39	0	1,07	0,39	1,1	0,15	0,30	0,09
1,05	0,04	0,39	0	1,07	0,50	1,1	0,31	1,3	0,33
0,50	0,02	0,39	0	0,50	0,001	0,03	0,02	0,08	0,007
0,50	0,04	0,39	0,025	0,48	0,39	29	0,15	0,30	0,09

Tabel III Vergelijking van relatieve transporten ($*10^{-4}$);
$D = 0{,}33$ mm; $W_s = 0{,}04$ m/s ; $B = 1{,}001$

$\bar{u}$	u_*	h	k	$\bar{u}_{II}$	$(\frac{q_s}{q_w})_I$	$(\frac{q_s}{q_w})_{II}$	$(\frac{q_s}{q_w})_{EH}$	$(\frac{q_s}{q_w})_{ILO}$	$(\frac{q_s}{q_w})_{YANG}$
0,50	0,04	0,39	0	1,07	1,4	0,02	0,50	1,0	0,28
1,05	0,04	0,39	0	1,07	6,0	0,02	1,1	4,4	0,95
0,50	0,02	0,39	0	0,50	1,9	0,000005	0,06	0,25	0,03
0,50	0,04	0,39	0,025	0,48	1,4	12	0,50	1,0	0,28

Het blijkt, dat variatie van de stromingsparameters $\bar{u}$ en u_* nog een orde verschil kan opleveren, zodat B verder aangepast zal moeten worden. Het model I is dus wel flexibel, maar inzicht in de afhankelijkheid van de waarde van B van de stromings- en sedimentparameters ontbreekt.

3.3. Model II

De oorzaak van het falen van het eerste model ligt gedeeltelijk aan het verwaarlozen van viskeuze krachten in de grenslaag bij de bodem.
Als snelheidsverdeling nemen we nu in het tweede model de zgn. "universele wandwet" voor een turbulente stroming langs een gladde wand, volgens Spalding (1961).

Ingevoerd worden daarbij de lengteschaal ν / u_* ; en de dimensieloze grootheden (zie Fig. 1):

$$\left.\begin{aligned} u^+ &= u/u_* \\ y^+ &= yu_*/\nu \\ h^+ &= hu_*/\nu \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

De snelheidsverdeling is dan gegeven door:

$$y^+ = u^+ + 0{,}1108\left[e^{\kappa u^+} - 1 - \kappa u^+ - \frac{(\kappa u^+)^2}{2!} - \frac{(\kappa u^+)^3}{3!} - \frac{(\kappa u^+)^4}{4!}\right] \qquad (30)$$

y^+ ≈1000

volledig turbulente laag ($\varepsilon_w \gg \nu$, $u^+ = 2{,}5 \ln y^+ + 5{,}5$)

≈ 30 á 70

bufferlaag ($\varepsilon_w = O(\nu)$, overgang)

≈ 5

viskeuze sublaag ($\varepsilon_w \ll \nu$, $u^+ = y^+$)

0

Fig. 1

Deze formule interpoleert tussen de lineaire snelheidsverdeling in de viskeuze sublaag, en de logarithmische snelheidsverdeling in de volledig turbulente laag (zie Fig. 1 en Fig. 2). De coëfficiënt ε_s is dan (vgl. (21)) gegeven door:

$$\varepsilon_s = \nu(1 - y^+/h^+)\,\frac{dy^+}{du^+} \qquad (31)$$

en $c(u^+)$ is te bepalen uit:

$$(1 - y^+/h^+)\,\frac{dc}{du^+} + \frac{W_s}{u_*}\,c(1 - c) = 0 \qquad (32)$$

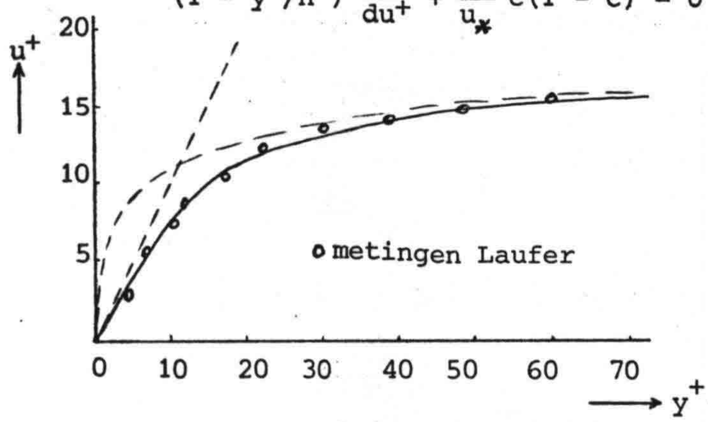

Fig. 2 (Spalding 1961)

Hierin speelt u^+ de rol van onafhankelijke variabele, en is y^+ gegeven door (30). De randvoorwaarde voor vergelijking (32) is dan $c = c_o$ voor $u^+ = 0$.

Integratie van (32) geeft:

$$c = \frac{c_o}{c_o + (1 - c_o)\ e^{I(u^+)}} \tag{33}$$

waarin

$$I(u^+) = \frac{W_s}{u_*} \int_o^{u^+} \frac{du^+}{1 - y^+/h^+} \tag{34}$$

Het transport volgt uit (14); (33) en (30):

$$q_s = \nu \int_o^{u^+_{max}} \left[u^+ c(u^+) \frac{dy^+}{du^+}\right] du^+ \tag{35}$$

en het debiet q_w is gegeven door

$$q_w = \nu \int_o^{u^+ max} \left[u^+ \frac{dy^+}{du^+}\right] du^+ \tag{36}$$

Voor een <u>ruwe</u> wand moet de lengteschaal ν/u_* vervangen worden door 0,30k, waarin k = equivalente zandruwheid van Nikuradse. Dit kan worden bereikt door te definiëren:

$$\left.\begin{aligned} y^+ &= y/y_k \\ h^+ &= h/y_k \\ \text{met} \quad y_k &= \nu/u_* + 0{,}30\ k \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Voor k = o reduceert (37) tot (29): gladde wand.
Voor een ruwe wand is $k >> \nu/u_*$, en dan wordt de snelheidsverdeling (30) en daarmee het transport onafhankelijk van de viskositeit ν , en een funktie van k.

In de tabellen II en III zijn enige resultaten gegeven. Het blijkt dat in het algemeen model II voor een gladde wand de gemiddelde snelheid $\bar{u}_{II} = q_w/h$ of te hoog voorspelt, of goed, maar met een te laag sedimenttransport. Het invoeren van de wandruwheid k volgens (37) heeft echter een averechts effect: de gemiddelde snelheid is nu goed, maar de sedimenttransporten zijn veel te hoog.

<u>Conclusie</u>: het model II is fysisch wel beter gefundeerd dan het model I, maar het is veel minder flexibel en in deze vorm niet bruikbaar voor het voorspellen van evenwichtstransporten.

4. Suggesties voor verder onderzoek

Afgezien van het feit, dat zelfs bij een gladde bodem zonder sediment de turbulente stroming een 3-dimensionaal verschijnsel is (zie bijv. Beljaars (1978); Ooms (1979)), treedt er bij de bodem een aantal komplikaties op, waarmee in het voorgaande geen rekening is gehouden:

- de concentratie c heeft invloed op de dynamische viskositeit μ_w: $\mu_{eff} \simeq \mu_w(1 + 2,5\ c)$, zie Ippen (1971).
- de concentratie c heeft invloed op de dichtheid van het mengsel sediment-water: $\rho_{eff} = \rho_s\ c + \rho_w(1 - c)$.
- de concentratie c heeft invloed op de schuifspanning: $\tau_{eff} = \tau_s + \tau_w$, zie Bagnold (1954).
- de concentratie beïnvloedt de turbulente structuur van de stroming, en dus de snelheidsverdeling, zie Einstein and Ning Chien (1955); Hassanzadeh (1979) (vgl. ook stromingen met dichtheidsverschillen, Hinze (1975); French (1977)).
- de beddingvorm heeft invloed op de turbulente beweging, en daardoor op de snelheids- en concentratieverdeling.

Deze invloeden kunnen, tenminste in principe, in rekening gebracht worden door naast de continuïteitsvergelijkingen (3) en (4), ook de impulsvergelijkingen (en, zonodig, de impulsmomentvergelijkingen) te bekijken. De impulsvergelijkingen luiden (vgl. Soo (1967); Drew (1979); Thacker and Lavelle (1977)):

$$c\rho_s\left(\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial t} + \vec{u}_s.\nabla\vec{u}_s\right) = -c\nabla p + f.(\vec{u}_w - \vec{u}_s) - c\rho_s\vec{g} + \rho_s\nabla\tau_s \tag{38}$$

$$(1 - c)\rho_w\left(\frac{\partial \vec{u}_w}{\partial t} + \vec{u}_w.\nabla\vec{u}_w\right) = -(1 - c)\nabla p + f.(\vec{u}_s - \vec{u}_w) - (1 - c)\rho_w\vec{g} + \rho_w\nabla\tau_w \tag{39}$$

waarin: p = gemiddelde vloeistofdruk,

f = weerstandskracht (per eenheid van slipsnelheid),

$\vec{g}$ = zwaartekrachtsvector, $|\vec{g}| = g$,

$$\left.\begin{aligned} \tau_s &= -\overline{c^1\ u_s^1\ u_s^1} \\ \tau_w &= -\overline{(1 - c^1)\ u_w^1\ u_w^1} \end{aligned}\right\} \text{Reynoldse spanningen.}$$

Om deze vergelijkingen te kunnen oplossen moeten nog vergelijkingen voor f, τ_s en τ_w gegeven worden:
de zgn. konstitutieve rheologische vergelijkingen (of toestandsvergelijkingen). In het algemeen is de slipsnelheid niet nul, en verder zal de weerstandskracht f een belangrijke rol spelen bijv. bij het erosieproces (zie Drew (1979); Coleman (1979); voor een goed overzicht van de mogelijkheden en problemen op dit gebied, zie Buyevich and Shchelchkova (1978), die ook een afleiding geven van de impulsmomentvergelijkingen).

De vergelijkingen voor de Reynoldse spanningen τ_s en τ_w leiden tot het zgn. sluitingsprobleem ("closure problem"), dat ook in één-fase turbulente stromingen een belangrijke rol speelt (zie bijv. Vreugdenhil (1973)). In dit verband zal ook de turbulente diffusie, anders dan van het gradiënt-type, onderzocht moeten worden.

Volgens Kranenburg (1977) leiden stochastische beschouwingen over deeltjesbanen (dwz. aanpak volgens Lagrange) dan, onder bepaalde voorwaarden, tot de diffusievergelijking

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\varepsilon 22\frac{\partial c}{\partial y} + \varepsilon_{21}\frac{\partial c}{\partial x} + \mu_s\left(\frac{\partial c}{\partial t} + u\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right] \tag{40}$$

Hierin is ε_s een tensor geworden, en de grootheid μ_s heeft te maken met de gemiddelde weg die de deeltjes afleggen in een inhomogeen turbulent snelheidsveld. De μ_s-termen kunnen het verschijnsel "negatieve diffusiviteit beschrijven, dat kan optreden bij neren en wervels bij de bodem (zie ook: Saffman (1977); Goldschmidt (1977) voor een overzicht van deze problematiek)

Het lijkt tenslotte nuttig om de theorie van het minimum energieverlies van Yang and Song (1979) nader te onderzoeken.

Referenties

Bagnold, R.A., 1954 Experiments on a gravity-free dispersion of large solid spheres in a Newtonian fluid under shear, Proc. Roy. Soc. London (A) 225, 49 - 63.

Beljaars, A.C.M., 1978 Het mechanisme van de turbulente uitwisseling, De Ingenieur 90 (14 Dec) 50, 961 - 963.

Bouma, W., 1978 Suspensietransport bij geleidelijk veranderende transportcapaciteit, TH-Delft, Afd. Civiele Techniek, Vakgroep Vloeistofmechanica.

Buyevich, Yu. A., and Shchelchkova, I.N. 1978 Flow of dense suspensions, Prog. Aerospace Sci. 18 (2), 121 - 150.

Coleman, N.L., 1979 Bed particle Reynolds modelling for fluid drag, J. Hydraulic Res. 17(2), 91 - 105.

Delvigne, G.A.L. en Karelse, M., 1978 Diffusiemechanismen in leidingen, kanalen, rivieren, estuaria en randzeeën (stromingen zonder dichtheidseffecten), verslag literatuuronderzoek, WL-rapport R895-2.

Drew, D.A., 1975 Turbulent sediment transport over a flat bottom using momentum balance, J. Appl. Mech. 42, 38 - 44.

Drew, D.A., 1979 Dynamic model for channel bed erosion, J. Hydr. Div. 105, ASCE(6), 721 - 736.

Einstein, H.A. and Ning Chien, 1955 Effects of heavy sediment concentration near the bed on velocity and sediment distribution, M.R.D. Sediment Series nr. 8, Univ. of Calif., Berkeley, California.

Engelund, F. and Fredsoe, J. 1976 A sediment transport model for straight alluvial channels, Nordic Hydrology 7, 293 - 306

Engelund, F., and Hansen, E., 1967 A monograph on sediment transport in alluvial streams, Teknisk Forlag, Copenhagen.

Fleming, C.A. and Hunt, J.N., 1976 A mathematical sediment transport model for unidirectional flow, Proc. Instn. Civ. Engrs 61, part 2, 297 - 310.

French, R.H., 1977 Modification of the vertical velocity profile by density stratification, in: POAC 77, 4th Int. Conf. Port and Ocean Eng. under Arctic Cond., Newfoundland, vol 2, 1007 - 1018

Goldschmidt, V.W., 1977 Turbulent transport: some general comments,in: Structure and Mechanisms of Turbulence II, Ed. H. Fiedler, Springer-Verlag, Berlin, 1 - 21.

Graf, W.H., 1971 Hydraulics of sedimenttransport. Mc.Graw-Hill, 1971.

Halbronn, G., 1949 Remarque sur la théorie de l'"Austausch" appliqué au transport des minéraux en suspension, in: Proc. 3rd Congr. IAHR, Grenoble, Subj. II, paper 9, II9.1 - II9.6

Hassanzadeh, Y., 1979 Distribution des vitesses et des concentrations dans un écoulement diphasique liquide/solide à surface libre, La Houille Blanche no. 1/1979, 43 - 49

Hinze, J.O., 1975 Turbulence. Mc.Graw-Hill, 1975 (2th ed)

Hunt, J.N., 1954 The turbulent transport of suspended sediment in open channels, Proc. Roy. Soc. A 224, 322 - 335

Hunt, J.N., 1969 On the turbulent transport of a heterogeneous sediment, Quart. Journ. Mech. and Applied Math., Vol. XXII, Pt. 2, 235 - 246

Ilo, C.G.,1975 Sediment Movement and Friction in Alluvial Streams, J. Hydr. Div. 101, ASCE, Dec. 1975, 1559 - 1566

Ippen, A.T. 1971 A new look at sedimentation in turbulent streams, Journal of the Boston Soc. of Civil Engrs.,Vol 58 nr. 3, 131 - 163

Jansen, P. Ph. (Ed), 1979 Principles of River Engineering. The non-tidal alluvial river. Pitman, London, 1979

Jobson, H.E., and Sayre, W.W., 1970 Vertical transfer in open channel flow, J. Hydr. Div. 96, ASCE, March 1970, 703 - 724

Kerssens, P.J.M., 1974 Aanpassingslengte van zwevend-zandverticalen, TH-Delft, Afd. Civ. Techniek, augustus 1974.

Kerssens, P.J.M. and van Rijn, L.C., 1977 Model for non-steady suspended sediment transport, Delft Hydr. Lab., publ. no. 191, Nov. 1977

Kerssens, P.J.M., Prins, A., and van Rijn, L.C., 1979 Model for suspended sediment transport, J. Hydr. Div. 105, ASCE, May 1979, 461 - 476

Kooten, F. van, 1974 Aspecten van het uitwisselingsproces van zwevend zand met de bodem in een open waterloop, I tekst, II bijlagen, TH-Delft, Afd. Civ. Techniek, Nov. 1974

Kranenburg, C., 1977 On the extension of gradient-type transport to turbulent diffusion in inhomogeneous flows, Appl. Scient. Res. 33, 163 - 175

Kranenburg, C., and Geldof, H.J., 1974 Concentration effects on settling-tube analysis, J. Hydr. Res. 12(3), 337 - 355.

Lavelle, J.W. and Thacker, W.C. 1978 Effects of hindered settling on sediment concentration profiles, J. Hydr. Res. 16(4), 347 - 355.

O'Connor, B.A., 1975 Sediment intrusion in a tidal lock, in: Proc. XVIth Congress IAHR, vol. 3, São Paulo (1975), 301 - 308

Ooms, G., 1979 Coherente structuren in turbulente stromingen, TH-Delft, 1979.

Raudkivi, A.J., 1976 Loose boundary hydraulics. Pergamon, 1976 (2th ed.)

Ribberink, J.S., 1978 Basisvergelijkingen voor sedimenttransport, TH-Delft, Afd. Civ. Techniek, Intern rapport no. 3-78

Richardson, Y.F., and Zaki, W.N., 1954 Sedimentation and Fluidization, part I, Trans. Inst. Chem. Eng. 32, 35 - 53

Sabol, G.V., and Nordin, C.F.Jr., 1978 Dispersion in rivers as related to storage zones, J. Hydr. Div. 104, ASCE, May 1978, 695 - 708.

Saffman, P.G., 1977 Problems and progress in the theory of turbulence, in Structure and Mechanisms of Turbulence II, Ed. H. Fiedler, Springer-Verlag, Berlin, 273 - 306.

Sayre, W.W., 1969 Dispersion of silt particles in open channel flow, J. Hydr. Div. 95, ASCE, May 1969, 1009 - 1038.

Schieveen, H.M. van ,1979 Een korte inleiding op- en een simpele toepassing van de Kalinske formules voor het zwevend en rollend zandtransport, Rijkswaterstaat, Dienst Informatieverwerking, Rapport DIV 1979984.

Soo, S.L., 1967 Fluid Dynamics of Multiphase Systems. Blaisdell 1967.

Spalding, D.B., 1961 A single formula for the "law of the wall", J. Appl. Mech. 28(3), 455 - 458

Thacker, W.C., and Lavelle, J.W., 1977 Two-phase flow analysis of hindered settling, The Physics of Fluids 20(9), 1577 - 1579

Valentine, E.M., and Wood, I.R., 1977 Longitudinal dispersion with dead zones, J. Hydr. Div. 103, ASCE, Sept. 1977, 975 - 990.

Vreugdenhil, C.B. (Ed), 1973 Computational methods for the vertical distribution of flow in shallow water, Report on literature study, W152, Delft Hydr. Lab., August 1973

Vries, M.de , 1977 Morphological computations. Lecturenotes f10a, Delft Univ. Techn., Dept. Civil Engng., 2nd ed. 1977.

Wijngaarden, N.J. van, 1973 Zandtransport in suspensie; studie diffusietheorie, Verslag literatuuronderzoek, R783 deel I, Waterloopkundig Laboratorium, dec. 1973.

Yang, C.T., 1976 Minimum unit stream power and fluvial hydraulics, J. Hydr. Div. 102, ASCE, July 1976, 919 - 934.
(Discussion: July 1977, Closure: Jan. 1978).

Yang, C.T., and Song, C.C.S., 1979 Theory of minimum rate of energy dissipation, J. Hydr. Div. 105, ASCE, July 1979, 769 - 784.

Yoon, T.H., 1978 Dead zones on longitudinal dispersion in natural streams, in: Proc. Int. Conf. on Water Resources Engrg., Bangkok, vol. I, Jan 1978, 69 - 88.

Belangrijkste symbolen

B	modelparameter
c	(tijd)gemiddelde concentratie
$\overline{c}$	concentratie, gem. over verticaal
c_a	referentieconcentratie
c_o	bodemconcentratie
D	korreldiameter
f	weerstandskracht
g	versnelling zwaartekracht
h	diepte
k	zandruwheid (Nikuradse)
l	mengweglengte
p	gemiddelde vloeistofdruk
$\vec{p}$	sedimentflux
q_s	sedimenttransport
q_w	watertransport
$\vec{q}$	waterflux
i	verhang waterspiegel
t	tijd
u	hor. snelheidscomponent
$\overline{u}$	snelheid, gem. over verticaal
u_*	schuifspanningssnelheid
$\vec{u}_s$	sedimentsnelheid
$\vec{u}_w$	watersnelheid
v	vert. snelheidscomponent
W_s	valsnelheid
x	hor. coördinaat
y	vert. coördinaat
z_b	bodemniveau

$\left.\begin{matrix}\varepsilon_p \\ \varepsilon_s \\ \varepsilon_w\end{matrix}\right\}$	diffusiecoëfficiënten van impuls, sediment en water
κ	constante van von Kármán
ν	kinematische viskositeit
ρ_s	dichtheid sediment
ρ_w	dichtheid water

$$\left.\begin{array}{l}\tau_y \\ \tau_s \\ \tau_w\end{array}\right\}$$ Schuifspanningen van impuls, sediment en water

$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ gradiënt-operator