

Rapport LR-431

# Mechanica van composietmaterialen theorie en toepassing

Juni 1984

Th. de Jong

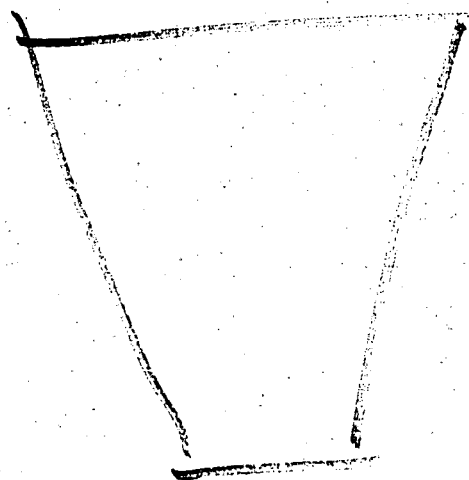
---

# Mechanica van composietmaterialen theorie en toepassing

Th. de Jong

WACHT OP

TITELPAG.



## VERANTWOORDING

In dit rapport is de stof weergegeven van een cursus 'Mechanica van Composietmaterialen' die de auteur gedurende het cursusjaar 1983/1984 heeft verzorgd voor wetenschappelijke personeel van ENKA B.V., een firma die zich o.a. bezighoudt met het fabriceren van vezels die in moderne composietmaterialen worden gebruikt. De cursus besloeg in totaal 11 middagen.

De onderwerpen zijn gekozen in overleg met de deelnemers. Omdat ervan moest worden uitgegaan dat niet alle cursisten (nog) vertrouwd waren met de elasticiteitsleer zijn hoofdstukken toegevoegd met elementaire onderwerpen als vervormingsleer en spanningsleer. Als basis voor deze hoofdstukken heeft gediend het college 'Elasticiteitstheorie' van prof.dr.ir. W.T. Koiter.

De wijze van behandelen van spanningsconcentraties in anisotrope platen met gaten is overgenomen uit het collegedictaat 'Versterkte Materialen' van prof.ir. G.J. Spiess, evenals een aantal uitgewerkte voorbeelden. De kwalitatieve methode voor het analyseren van kokerconstructies is van prof.dr.ir. A. van der Neut. Het hoofdstuk over het wikkelen van drukvaten bevat resultaten van eigen onderzoek van de vakgroep 'Vormgeving, Fabricage en Materialen' waartoe de auteur behoort.

Belangrijke onderwerpen als dynamische belasting van composieten, knik en invloed van de omgeving (temperatuur en vocht) zijn niet behandeld. De onderwerpen die wel zijn behandeld zijn gekozen omdat zij inzicht geven in het mechanisch gedrag van de composietmaterialen zelf, maar vooral ook in het functioneren van deze materialen in hun structurele omgeving (de constructie).

Mijn bijzondere dank gaat uit naar mw. M. van Laren die mij door haar snelle en goede typewerk iedere week in staat stelde de cursisten van documentatie te voorzien.

BLANKO BLZ. NR. -ii-

INHOUDSOPGAVE

	<u>blz</u>
1. <u>Vervormingsleer</u>	1
1a. Verplaatsingen	1
1b. Vervormingen	2
1c. Transformatie van rekken	9
1d. De hoofdrekken	13
1e. Compatibiliteitsvergelijkingen	16
2. <u>Spanningsleer</u>	20
2a. Het spanningsbegrip	20
2b. Algemeen evenwicht	24
2c. Transformatie van spanningen	26
2d. Hoofdspanningen en de cirkel van Mohr	27
3. <u>Het verband tussen spanning en vervormingen</u>	35
3a. De algemene wet van Hooke	35
3b. De wet van Hooke voor isotrope materialen	37
3c. De vergelijkingen van Navier-Gauchy en van Beltrami-Michel	41
4. <u>De klassieke laminatentheorie</u>	44
4a. Het gedrag van de enkelvoudige laag	44
4b. Elastische eigenschappen van de enkelvoudige laag onder een hoek met de materiaalassen	51
4c. De algemene vervormingstoestand van laminaten	60
4d. De invloed van de B-matrix	69
5. <u>Spanningsconcentraties in platen</u>	72
5a. De vlakke vervormingstoestand en de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand	72
5b. De spanningsfunctie van Airy	77
5c. De compatibiliteit	78
5d. De differentiaalvergelijking voor de spanningsfunctie van Airy	78
5e. De differentiaalvergelijking voor isotroop materiaal	79
5f. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking	80
5g. De randvoorwaardenformules voor de belastingen	86
5h. De complexe materiaalparameters $\mu_k$	88
5i. Spanningen rond een elliptisch gat in een in zijn vlak belaste plaat	89
5j. Een numeriek voorbeeld	100
5k. De benaderingen volgens de breukmechanica	105
6. <u>Breuk</u>	110
6a. Breuk van de enkelvoudige laag	110
6b. Breukcriteria	113
6c. Breuk van laminaten	125
6d. De sterkte van laminaten bij niet-homogene spanningsvelden	130
7. <u>Enkele constructieve aspecten</u>	133
7a. Het begrip schuifstroom	134
7b. De torsiedoos	137
7c. De koker belast door een dwarskracht	139
7d. De koker belast door een wringend moment	153
7e. De koker onder gecombineerde belasting	156
7f. Gordingen en verstijvers; stabiliteit	158

	<u>blz</u>
8. <u>Het wikkelen van drukvaten</u>	162
8a. De ligging van de vezels	162
8b. De vorm van de meridiaan	163
8c. Karakteristieken van het drukvat	164
8d. De vormparameter $q$	166
8e. Enkele grootheden van het optimale drukvat	168
8f. Wikkelen volgens de 'continuümtheorie'	170
8g. Enkele voorbeelden	173
Literatuur	176

## HOOFDSTUK 1

### VERVORMINGSLEER

#### 1a. Verplaatsingen

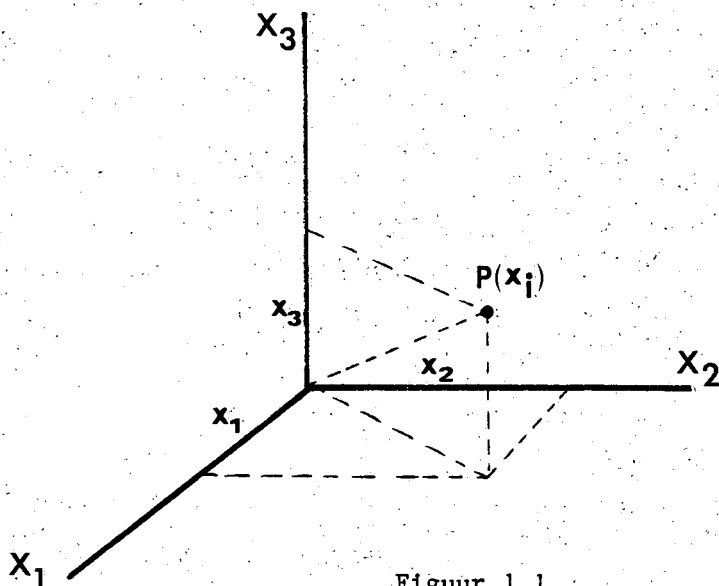
Beschouw een lichaam dat onder invloed van uitwendige krachten van vorm kan veranderen.

Topologische eisen zijn:

- twee punten die voor de vervorming oneindig dicht bij elkaar liggen blijven ook na de vervorming oneindig dicht bij elkaar; dus geen opengaande scheuren;
- een punt op de rand (resp. in het inwendige) blijft op de rand (resp. in het inwendige).

Verder nemen we aan dat de som van de uitwendige krachten en het resulterend moment nul zijn zodat het lichaam niet 'weg vliegt' of gaat draaien.

Een willekeurig punt van het lichaam bevindt zich voor de vervorming in P waarvan we de coördinaten  $(x_1, x_2, x_3)$  of kortweg  $x_i$  (met  $i = 1, 2, 3$ ) noemen.



Figuur 1.1

Na vervorming van het lichaam bevindt het willekeurig punt zich in  $P'$  met de coördinaten  $x'_i$  waarbij

$$x'_i = x_i + U_i \quad (i = 1, 2, 3)$$



$U_i$  zijn hierin de componenten van de verplaatsingsvector  $U$ . De verplaatsingsvectoren van alle punten van het lichaam vormen samen een vectorveld (in dit geval dus een verplaatsingsveld) voor het lichaam onder de beschouwde uitwendige krachten. Er zijn nu voor de beschrijving van het veld twee mogelijkheden.

a. De vectoren worden beschouwd als (continue en zo nodig in voldoende mate differentieerbare) functies van  $x_i$ , ofwel de verplaatsingscomponenten  $U_i$  zijn functies van de posities  $x_i$  die de punten vóór de deformatie innemen.

Te schrijven als:

$$U_i = U_i(x_k) \quad (1.1)$$

b. De vectoren worden beschouwd als functies van  $x'_k$ , ofwel de verplaatsingscomponenten  $U_i$  zijn functies van de posities  $x'_k$  die de punten na de vervorming innemen.

Te schrijven als:

$$U_i = U_i(x'_k) \quad (1.2)$$

Nu is het een fundamentele veronderstelling van de klassieke elasticiteitsleer dat verplaatsingen tijdens de vervorming klein zijn. Daarmee verdwijnt het verschil in schrijfwijzen (1.1) en (1.2).

De fundamentele veronderstelling betekent een grote vereenvoudiging. Zo kan bij gevallen waarbij successieve vervormingen worden aangebracht de invloed van de vormverandering zelf (op b.v. het spanningsvraagstuk) buiten beschouwing worden gelaten. Hetzelfde geldt uiteraard ook bij continue aangebrachte vervormingen.

#### 1b. Vervormingen (deformaties, rekken)

We beschouwen nu de verplaatsing van een punt in  $P(x_j)$  en de verplaatsing van een punt in  $Q$  met coördinaten  $x_j + dx_j$  dicht in de buurt van  $P$ . voor de verplaatsingsvector van het punt  $Q$  wordt nu geschreven:

$$U_i(Q) = U_i(P) + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}(P) dx_j + \text{hogere orde termen}$$

waarmee dus de verplaatsingsvector in  $Q$  is uitgedrukt in de verplaatsingsvector in  $P$  en zijn afgeleiden. Ligt  $Q$  inderdaad in een voldoende kleine omgeving van  $P$  dan mogen de hogere orde termen worden verwaarloosd en is dus

$$U_i(Q) = U_i(P) + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}(P) dx_j \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

Met de sommatie-conventie (sommen over de index die tweemaal in een term voorkomt) kan voor de tweede term achter het gelijkteken worden geschreven, met weglating van (P):

$$\text{voor } i = 1 \quad \frac{\partial U_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_1}{\partial x_3} dx_3$$

$$\text{voor } i = 2 \quad \frac{\partial U_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_2}{\partial x_3} dx_3$$

$$\text{voor } i = 3 \quad \frac{\partial U_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial U_3}{\partial x_3} dx_3$$

of in matrix-notatie:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x_1} & \frac{\partial U_1}{\partial x_2} & \frac{\partial U_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} & \frac{\partial U_2}{\partial x_2} & \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_3}{\partial x_1} & \frac{\partial U_3}{\partial x_2} & \frac{\partial U_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{Bmatrix}$$

Terwijl U een vector is met 3 componenten  $U_j$  is  $\partial U_i / \partial x_j$  een tensor met 9 termen (2e-orde tensor). Deze tensor wordt uitgesplitst in een symmetrische tensor  $e_{ij}$  en een anti-symmetrische tensor  $\omega_{ij}$  en wel zö dat

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_j} = e_{ij} - \omega_{ij}$$

$$\text{waarin } e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.4)$$

$$\text{en } \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \quad (1.5)$$

Met (1.4) en (1.5) kan (1.3) worden geschreven als

$$U_i(Q) = U_i(P) - \omega_{ij}(P) dx_j + e_{ij}(P) dx_j \quad (1.6)$$

(1.6) geeft dus drie vergelijkingen voor de drie verplaatsingscomponenten in Q (dus voor  $i = 1, 2$  en  $3$ ) met ieder 7 termen achter het gelijkteken.  $\omega_{ij}$  wordt rotatie-tensor genoemd,  $e_{ij}$  de vervormingstensor.

N.B.: Aan het begrip tensor zal hier verder geen inhoud worden gegeven.

De rotatie-tensor en vervormingstensor zijn in het voorgaande nogal formeel ingevoerd. Bij nadere beschouwing van (1.6) blijkt echter dat het verplaatsingsveld in een voldoend kleine omgeving van P tot stand komt door superpositie van 3 verschillende 'soorten' verplaatsingen met een duidelijk physische betekenis en wel:

- 1e de translatie  $U_i(P)$  (als een stukje star, dus onvervormbaar lichaam rond P)
- 2e de rotatie  $-\omega_{ij}(P) dx_j$  (als een stukje star, dus onvervormbaar lichaam rond P)
- 3e de vervorming  $e_{ij}(P) dx_j$  van het stukje lichaam rond P.

ad 1e Het is duidelijk dat met

$$U_i(Q) = U_i(P) \quad (1.7)$$

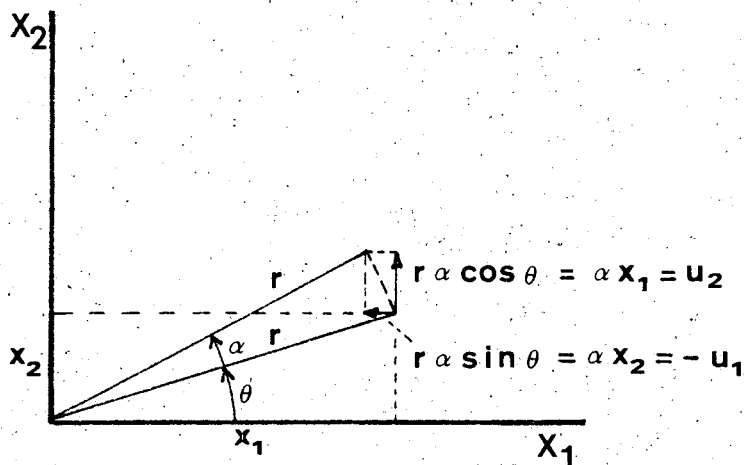
de verplaatsingen in Q en P gelijk zijn en het beschouwde stukje lichaam rond P bij een verplaatsingsveld (1.7) zich als een onvervormd, star lichaam beweegt.

ad 2e De physische betekenis van  $\omega_{ij}$  is bijvoorbeeld af te leiden uit

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \right)$$

waarin  $\omega_{12}$  de draaiingshoek (infinitesemaal) van een element om de  $X_3$ -as is.

$$\text{Met } \frac{\partial U_1}{\partial x_2} = -\alpha \text{ en } \frac{\partial U_2}{\partial x_1} = \alpha$$



Figuur 1.2

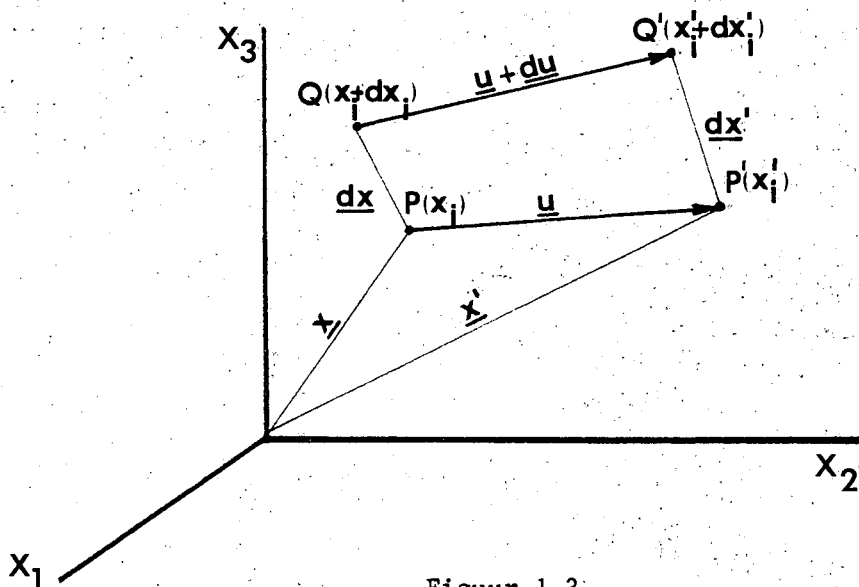
wordt  $\omega_{12} = \alpha$ .

Zo geven  $U_1(Q) = -\omega_{12}(P) dx_2 = -\alpha dx_2$

en  $U_2(Q) = -\omega_{21}(P) dx_1 = \alpha dx_1$

de verplaatsingscomponenten van het punt in Q bij een rotatie over de draaiingshoek  $\alpha$  om een as evenwijdig de  $X_3$ -as door P.

ad 3e De fysische betekenis van de vervormingstensor  $e_{ij}$  wordt onderzocht door te kijken naar de lengte  $d\ell'$  van het lijnstukje  $P'Q'$ , waarbij P' en Q' de plaatsen zijn waar de punten die zich oorspronkelijk in P resp. Q bevonden na de vervorming zijn terechtgekomen, en naar de lengte  $d\ell$  van lijnstukje PQ.



Figuur 1.3

Die lengtes worden gecombineerd tot  $\frac{1}{2}\{(d\lambda')^2 - (d\lambda)^2\}$ .

Beschouw eerst

$$(d\lambda)^2 = dx_i \cdot dx_i = \delta_{ij} dx_i dx_j. \quad (1.8)$$

$\delta_{ij}$  is hierin de Kronecker delta,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{voor } i = j \\ 0 & \text{voor } i \neq j \end{cases}$$

Verder is

$$(d\lambda')^2 = dx'_i dx'_i \quad (1.9)$$

ofwel, met

$$dx'_i = dx_i + dU_i = dx_i + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$(d\lambda')^2 = dx_i dx_i + 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_i dx_j + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_j \frac{\partial U_i}{\partial x_k} dx_k$$

waarin om verwarring te voorkomen in de laatste term één (dode) index  $j$  is vervangen door  $k$ . Dit mag uiteraard als  $k$  de zelfde waarden 1, 2 en 3 doorloopt als  $j$ . We verwaarlozen overigens die laatste (2e-graads) term zodat

$$\begin{aligned} (d\lambda')^2 &= dx_i dx_i + 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_i dx_j \\ &= (\delta_{ij} + 2 \frac{\partial U_i}{\partial x_j}) dx_i dx_j \\ &= (\delta_{ij} + 2e_{ij} - 2\omega_{ij}) dx_i dx_j \end{aligned}$$

Met  $\omega_{ij} dx_i dx_j = 0$

is dan  $(d\lambda')^2 = (\delta_{ij} + 2e_{ij}) dx_i dx_j \quad (1.10)$

Met (1.8) wordt dus gevonden:

$$\frac{1}{2} \{ (d\ell')^2 - (d\ell)^2 \} = e_{ij} dx_i dx_j \quad (1.11)$$

We kiezen nu P en Q op de  $X_1$ -as en zorgen ervoor dat zij ook na de vervorming op de  $X_1$ -as liggen. Dit betekent dat  $dx_2$  en  $dx_3$  nul zijn en (1.11) overgaat in

$$\frac{1}{2} \{ (d\ell')^2 - (d\ell)^2 \} = e_{11} (dx_1)^2 \quad (1.12)$$

In deze vervormingssituatie is uiteraard

$$d\ell = dx_1$$

zodat uit (1.12) volgt

$$e_{11} = \frac{(d\ell')^2 - (d\ell)^2}{2(d\ell)^2} = \frac{d\ell' - d\ell}{d\ell} \cdot \frac{d\ell' + d\ell}{2d\ell} \approx \frac{d\ell' - d\ell}{d\ell} \quad (1.13)$$

Uit (1.13) blijkt dat  $e_{11}$  de relatieve verlenging van een element met de lengte  $d\ell$  in  $X_1$ -richting is. We noemen  $e_{11}$  de rek in  $X_1$ -richting. Op identieke wijze blijken  $e_{22}$  en  $e_{33}$  de rekken te zijn in resp.  $X_2$ - en  $X_3$ -richting.

Voor het antwoord op de vraag wat de termen  $e_{ij}$  voor  $i \neq j$  voorstellen kijken we bijvoorbeeld naar de vervorming van een lijnelement in het  $X_1$ - $X_2$ -vlak en schrijven daartoe (1.10) voluit:

$$(d\ell')^2 = (1 + 2e_{11})(dx_1)^2 + (1 + 2e_{22})(dx_2)^2 + 4e_{12} dx_1 dx_2$$

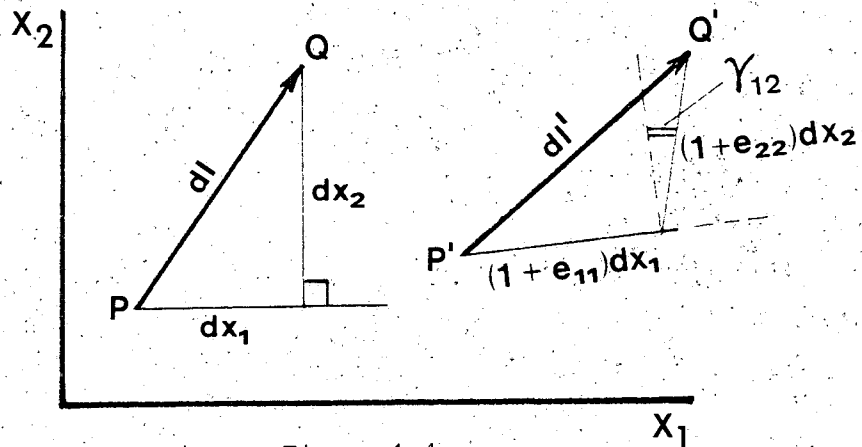
of, met de benadering

$$1 + e_{11} = \sqrt{1 + 2e_{11}} \quad \text{etc.}$$

$$(d\ell')^2 + \{ (1 + e_{11}) dx_1 \}^2 + \{ (1 + e_{22}) dx_2 \}^2 + 4e_{12} dx_1 dx_2 \quad (1.14)$$

waarin  $(1 + e_{11}) dx_1$  de lengte na vervorming is van het lijnelement  $dx_1$  dat oorspronkelijk in  $X_1$ -richting liep en  $(1 + e_{22}) dx_2$  de lengte na vervorming van het lijnelement dat oorspronkelijk in  $X_2$ -richting liep.

In tekening:



Figuur 1.4

Met de cosinus-regel uitgerekend wordt

$$(dl')^2 = \{(1 + e_{11}) dx_1\}^2 + \{(1 + e_{22}) dx_2\}^2 - 2(1 + e_{11}) dx_1 (1 + e_{22}) dx_2 \cos \left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{12}\right) \quad (1.15)$$

Vergelijking van (1.15) en (1.14) geeft

$$-\cos \left(\frac{\pi}{2} + \gamma_{12}\right) = \frac{2e_{12}}{(1 + e_{11})(1 + e_{22})}$$

ofwel 
$$\sin \gamma_{12} = \frac{2e_{12}}{(1 + e_{11})(1 + e_{22})}$$

Bij kleine  $e_{11}$ ,  $e_{22}$  en  $e_{12}$  geldt bij benadering

$$\gamma_{12} = 2e_{12}$$

ofwel 
$$e_{12} = \frac{1}{2} \gamma_{12} \quad (1.16)$$

$\gamma_{12}$  wordt de afschuifhoek genoemd; kennelijk is  $e_{12}$  een maat voor deze afschuifhoek.

In de techniek worden vaak gebruikt de notaties

verplaatsingen  $U$ ,  $V$  en  $W$  in resp.  $X$ -,  $Y$ - en  $Z$ -richting

$$\text{rekken } \epsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \epsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} \text{ en } \epsilon_z = \frac{\partial W}{\partial z} \quad (1.17)$$

afschuifhoeken

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1.18)$$

Vergelijken van (1.18) en (1.4) geeft

$$\epsilon_x = e_{11}, \gamma_{xy} = 2e_{12} \text{ etc.}$$

In verband met de factor 2 bij de relatie tussen afschuifhoek en de term van de vervormingstensor is het raadzaam bij het raadplegen van literatuur altijd te controleren hoe de afschuifvervormingen zijn gedefinieerd.

#### 1c. Transformatie van rekken

Het is regelmatig nodig (vooral bij de mechanica van anisotrope materialen zoals laminaten) de rekken, die in het ene coördinaatassenstelsel bekend zijn, te kennen in een ander stelsel dat t.o.v. het oorspronkelijke assenstelsel gero- teerd is.

Bij rotatie van het oude assenstelsel  $X_i$  naar het nieuwe assenstelsel  $\bar{X}_i$  geldt:

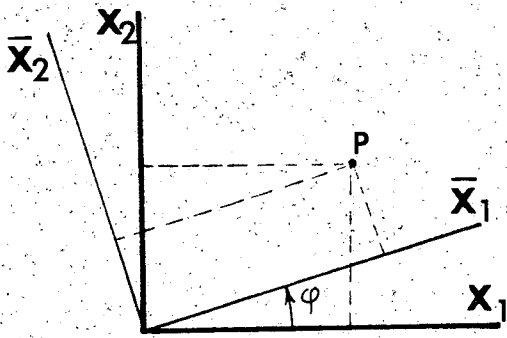
$$\bar{x}_i = A_{ij} x_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.19)$$

ofwel de componenten van een vector  $\underline{x}$  in een nieuw assenstelsel  $\bar{X}_i$  zijn lineaire functies van de componenten van die vector in het oude assenstelsel. In (1.19) zijn  $A_{ij}$  de richtingscosinussen tussen de  $\bar{X}_i$ -as en de  $X_j$ -as, waarvoor geldt:

$$A_{ij} A_{ik} = \delta_{jk} \quad (\delta_{jk}: \text{Kronecker delta}) \quad (1.20)$$

N.B.: Betrekkingen (1.19) en (1.20) zijn eenvoudig te verifiëren door bijvoorbeeld een rotatie om de  $X_3$ -as te beschouwen.





Figuur 1.5

$$\bar{x}_1 = \cos(\bar{X}_1, X_1) \cdot x_1 + \cos(\bar{X}_1, X_2) \cdot x_2$$

$$= x_1 \cos \varphi + x_2 \sin \varphi$$

$$\bar{x}_2 = \cos(\bar{X}_2, X_1) \cdot x_1 + \cos(\bar{X}_2, X_2) \cdot x_2$$

$$= -x_1 \sin \varphi + x_2 \cos \varphi$$

$$A_{ij} A_{ik} = \delta_{jk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad \text{echter } \cos(\bar{X}_3, X_1) = 0 \text{ etc.}$$

zodat

$$\cos(\bar{X}_1, X_1) \cos(\bar{X}_1, X_1) + \cos(\bar{X}_2, X_1) \cos(\bar{X}_2, X_1) = 1 \quad \text{en}$$

$$\cos(\bar{X}_1, X_2) \cos(\bar{X}_1, X_2) + \cos(\bar{X}_2, X_2) \cos(\bar{X}_2, X_2) = 1$$

ofwel

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

$$\cos^2(\pi/2 - \varphi) + \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

De grootheid  $\frac{1}{2}\{(d\ell')^2 - (d\ell)^2\}$  uit (1.11) (samengesteld uit gekwadrateerde lengtes) is een scalaire grootheid en daarom onafhankelijk van het assenstelsel waarin hij wordt uitgerekend. Dus ook in het nieuwe assenstelsel  $\bar{X}_i$  met de vervormingstensor  $\bar{e}_{ij}$  is

$$\frac{1}{2}\{(d\ell')^2 - (d\ell)^2\} = \bar{e}_{ij} \bar{dx}_i \bar{dx}_j \quad (1.21)$$

$$\text{zodat: } \bar{e}_{ij} \bar{dx}_i \bar{dx}_j = e_{ij} dx_i dx_j \quad (1.22)$$

$$\text{Met } \bar{dx}_i = A_{i\ell} dx_\ell \quad (\ell = 1, 2, 3)$$

$$\text{en } \bar{dx}_j = A_{jk} dx_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

$$\text{wordt } \bar{e}_{ij} \bar{dx}_i \bar{dx}_j = \bar{e}_{ij} A_{i\ell} dx_\ell A_{jk} dx_k$$

of, na omruilen van de dode indices  $\ell$  en  $k$  met respectievelijk de dode indices  $i$  en  $j$  in de term achter het gelijkteken

$$\overline{e_{ij}} \overline{dx_i} \overline{dx_j} = \overline{e_{lk}} A_{li} dx_i A_{kj} dx_j$$

Vergelijking met (1.22) geeft dan

$$\overline{e_{ij}} = A_{li} A_{kj} \overline{e_{lk}} \quad (1.23)$$

Links en rechts van het gelijkteken vermenigvuldigen met  $A_{mi}$  en  $A_{nj}$  geeft

$$\begin{aligned} \overline{e_{ij}} A_{mi} A_{nj} &= A_{li} A_{mi} A_{kj} A_{nj} \overline{e_{lk}} \\ &= \delta_{lm} \delta_{kn} \overline{e_{lk}} \\ &= \overline{e_{mn}} \end{aligned} \quad (1.24)$$

waarmee de belangrijke transformatieformule voor de vervormingstensor is gevonden

$$\overline{e_{kl}} = A_{ki} A_{lj} \overline{e_{ij}} \quad (1.25)$$

We zullen later uitsluitend rotaties om de  $X_3$ -as beschouwen zoals weergegeven in Figuur 1.5. Voor dergelijke rotaties wordt (1.25) uitgeschreven:

$$\overline{e_{11}} = e_{11} \cos^2 \varphi + e_{22} \sin^2 \varphi + 2e_{12} \sin \varphi \cos \varphi \quad (1.26)$$

$$\overline{e_{22}} = e_{11} \sin^2 \varphi + e_{22} \cos^2 \varphi - 2e_{12} \sin \varphi \cos \varphi \quad (1.27)$$

$$\overline{e_{12}} = (e_{22} - e_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + e_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad (1.28)$$

$$\overline{e_{13}} = e_{13} \cos \varphi + e_{23} \sin \varphi \quad (1.29)$$

$$\overline{e_{23}} = e_{23} \cos \varphi - e_{13} \sin \varphi \quad (1.30)$$

$$\overline{e_{33}} = e_{33} \quad (1.31)$$

Sommatie van (1.26), (1.27) en (1.31) geeft

$$\overline{e_{11}} + \overline{e_{22}} + \overline{e_{33}} = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

waaruit het invariante karakter van  $e_{11}$  (dus onafhankelijk van de keuze van het assenstelsel) blijkt. Later zullen we hierop nog terugkomen.

De termen met  $\sin \varphi$  in (1.26) t/m (1.28) zijn gevoelig voor het teken van  $\varphi$ . De rotatierichting wordt positief genomen als de  $\bar{X}_1$ -as t.o.v. de  $X_1$ -as roteert in de richting van de positieve  $X_2$ -as.

Door de transformatieformules voor  $\bar{e}_{11}$  en  $\bar{e}_{12}$  iets anders te schrijven

$$\bar{e}_{11} - \frac{e_{11} + e_{22}}{2} = \frac{e_{11} - e_{22}}{2} \cos 2\varphi + e_{12} \sin 2\varphi \quad (1.32)$$

$$\bar{e}_{12} = -\frac{e_{11} - e_{22}}{2} \sin 2\varphi + e_{12} \cos 2\varphi \quad (1.33)$$

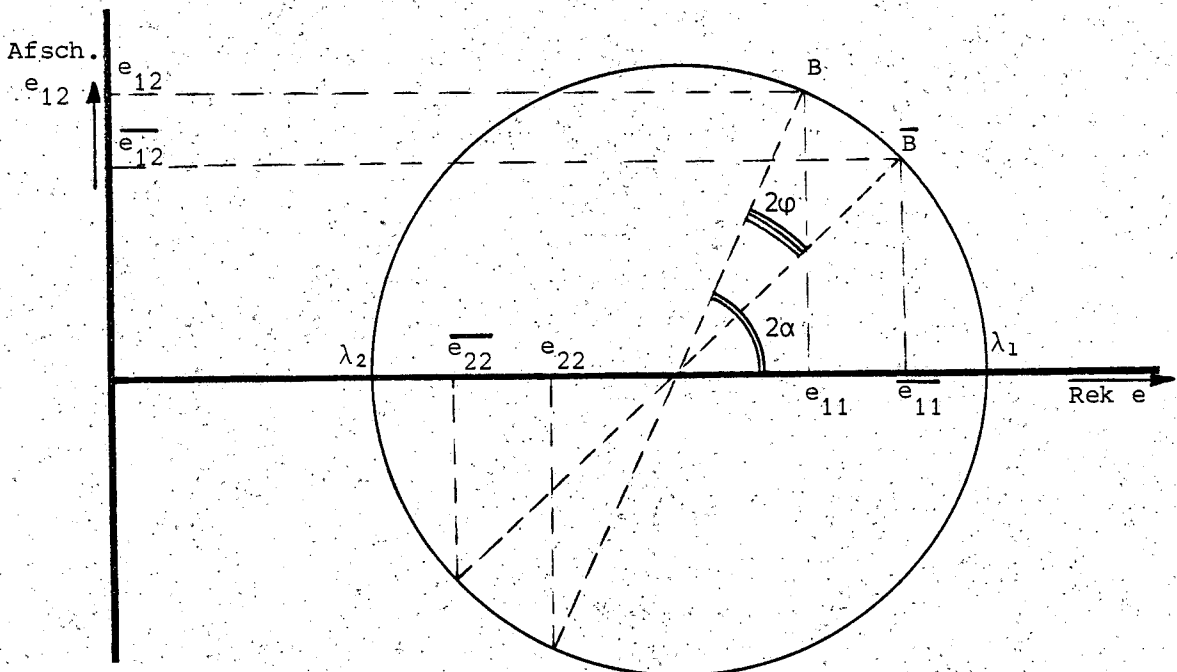
en deze herschreven uitdrukkingen te kwadrateren en op te tellen wordt  $\varphi$  geëlimineerd:

$$\left(\bar{e}_{11} - \frac{e_{11} + e_{22}}{2}\right)^2 + \bar{e}_{12}^2 = \left(\frac{e_{11} - e_{22}}{2}\right)^2 + e_{12}^2$$

De beeldpunten van de rek- en afschuifvervormingen in een 'rek-afschuivingsvlak' liggen kennelijk op een cirkel met straal

$$R = \left\{ \left(\frac{e_{11} - e_{22}}{2}\right)^2 + e_{12}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

en met middelpunt  $\left(\frac{e_{11} + e_{22}}{2}, 0\right)$ .



Figuur 1.6

Uit deze cirkel zijn de betrekkingen (1.32) en (1.33) eenvoudig terug te vinden:

$$\bar{e}_{11} - \frac{e_{11} + e_{22}}{2} = R \cos (2\alpha - 2\varphi) = \frac{e_{11} - e_{22}}{2} \cos 2\varphi + e_{12} \sin 2\varphi$$

$$\bar{e}_{12} = R \sin (2\alpha - 2\varphi) = -\frac{e_{11} - e_{22}}{2} \sin 2\varphi + e_{12} \cos 2\varphi$$

De cirkel wordt de vervormingscirkel van Mohr genoemd. Zij is niets anders dan een graphische voorstelling van de transformatieformules (1.26) t/m (1.28) voor een rotatie om de  $X_3$ -as.

#### 1d. De hoofdrekken

Bij een rotatie van het assenstelsel om de  $X_3$ -as over  $180^\circ$  zijn de getransformeerde vervormingscomponenten weer gelijk aan die in de Ausgangssituatie. De cirkel van Mohr uit Figuur 1.6 is bij een dergelijke rotatie volledig, dus over  $360^\circ$  doorlopen. Er wordt nu verondersteld dat de vervormingscomponenten  $e_{13}$  en  $e_{23}$  nul zijn. Uit Figuur 1.6 is dan af te lezen dat er kennelijk twee onderling loodrechte richtingen zijn waarin de vervormingen uitsluitend rekken zijn en waarin geen afschuifvervormingen (noch in het  $X_1$ - $X_2$ -vlak, noch in de  $X_2$ - $X_3$ - en  $X_3$ - $X_1$ -vlakken) optreden. Deze rekken,  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$ , worden hoofdrekken genoemd; de richting waarin zij optreden de hoofdrichtingen. Omdat  $e_{23}$  en  $e_{33}$  nul zijn is  $e_{33} = \lambda_3$  eveneens een hoofdrekk en de  $X_3$ -richting een hoofdrichting.

Er zijn dus drie onderling loodrechte richtingen waarin uitsluitend rekken optreden. Overigens mag  $e_{33}$  ook nul worden verondersteld. De vervormingssituatie waarin het  $X_1$ - $X_2$ -vlak zich dan bevindt wordt een vlakke-vervormingstoestand genoemd.

In de situatie waarin  $e_{13}$  en  $e_{23}$  nul zijn, zijn de hoofdrichtingen eenvoudig te vinden t.o.v. de richtingen waarin  $e_{11}$  (resp.  $e_{22}$ ) en  $e_{12}$  bekend zijn. Formule (1.28) geeft met  $\bar{e}_{12} = 0$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2e_{12}}{e_{11} - e_{22}} \quad (1.34)$$

Deze betrekking is ook zeer eenvoudig uit Figuur 1.6 terug te vinden.

In het hierna volgende wordt aan het begrip hoofdrekken een meer mathematische inhoud gegeven. We beschouwen daartoe een algemene vervormingstoestand en gaan daarvoor terug naar Figuur 1.3 waaruit is af te lezen

$$\underline{dU} = \underline{U(Q)} - \underline{U(P)}$$

ofwel  $dU_i = U_i(Q) - U_i(P) = e_{ij} dx_j$  (1.35)

waarbij we de rotatie-tensor  $\omega_{ij}$  buiten beschouwing hebben gelaten. We vragen ons nu af of het mogelijk is dat  $\underline{dx}$  (het lijnelement tussen P en Q) bij vervorming wel van lengte doch niet van richting verandert. Dat kan alleen als

$$\underline{dU} = \lambda \underline{dx}$$

of  $dU_i = \lambda dx_i$  (1.36)

Met  $\underline{dx'} = \underline{dx} + \underline{dU}$

is eenvoudig in te zien dat

$$\lambda = \frac{dx'_i - dx_i}{dx_i}$$

een rek is.  $\lambda$  is echter een scalair (geeft de grootte van de rek) en is de reeds eerder genoemde hoofdrek.

Uit (1.35) en (1.36) volgt nu

$$e_{ij} dx_j - \lambda dx_i = 0$$

ofwel met de Kronecker delta

$$(e_{ij} - \lambda \delta_{ij}) dx_j = 0 \quad (1.37)$$

Deze vergelijkingen kunnen worden opgevat als drie homogene vergelijkingen voor de drie onbekenden  $dx_j$  die slechts een van nul verschillende oplossing toelaten als de coëfficiënten-determinant nul is

$$\left| e_{ij} - \lambda \delta_{ij} \right| = 0$$

of, voluit geschreven:

$$\begin{vmatrix} e_{11}-\lambda & e_{12} & e_{13} \\ e_{12} & e_{22}-\lambda & e_{23} \\ e_{13} & e_{23} & e_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Uitgeschreven geeft de determinant

$$\lambda^3 - (e_{11} + e_{22} + e_{33}) \lambda^2 + (e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11} - e_{12}^2 - e_{23}^2 - e_{31}^2) \lambda - \det\{e_{ij}\} = 0$$

Deze derde-graads vergelijking heeft drie reële wortels  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  en  $\lambda_3$  die voldoen aan

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= e_{11} + e_{22} + e_{33} & (1.38) \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 &= e_{11}e_{22} + e_{22}e_{33} + e_{33}e_{11} + e_{12}^2 - e_{23}^2 - e_{31}^2 \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= \det\{e_{ij}\} \end{aligned}$$

De richtingen van de hoofdrekken kunnen als volgt worden gevonden. Normeer  $\underline{dx}$  op de eenheid zodat  $dx_j dx_j = 1$  en  $dx_j = \cos(\underline{dx}, dx_j) = \cos \alpha_j$ . Formule (1.37) wordt dan geschreven als

$$\lambda \cos \alpha_i = e_{ij} \cos \alpha_j \quad (i, j = 1, 2, 3)$$

Een wortel  $\lambda$  ingevuld in deze drie vergelijkingen bepaalt de verhoudingen  $\cos \alpha_1 / \cos \alpha_3$  en  $\cos \alpha_2 / \cos \alpha_3$  zodat met

$$\cos \alpha_j \cos \alpha_j = 1$$

de bij deze hoofdrekk behorende richting bekend is.

De drie hoofdrekken bepalen in feite 3 cirkels van Mohr:

- tussen  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  bij rotatie om  $X_3$ -as,
- tussen  $\lambda_2$  en  $\lambda_3$  bij rotatie om  $X_1$ -as,
- tussen  $\lambda_3$  en  $\lambda_1$  bij rotatie om  $X_2$ -as.

Figuur 1.6 is dan ook niet compleet. Bij de cirkels van Mohr voor de spanningen zal hierop nog nader worden ingegaan.

Bij de rotatie van het assenstelsel rond een as evenwijdig met de  $X_3$ -as is reeds gewezen op het invariante karakter van  $e_{ii}$  (zie formules (1.26) etc.). De fysieke betekenis van (1.38)

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = e_{ii} \quad (i = 1, 2, 3)$$

is eenvoudig in te zien als een parallellepipedum met zijden  $a_1$ ,  $a_2$  en  $a_3$  evenwijdig aan de hoofdrichtingen van de vervormingen wordt genomen. Na vervorming van dit parallellepipedum zijn de lengtes van de zijden resp.  $a_1(1+\lambda_1)$ ,  $a_2(1+\lambda_2)$  en  $a_3(1+\lambda_3)$  zodat de volumeverandering is

$$\begin{aligned} \Delta V &= a_1 a_2 a_3 (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3) - a_1 a_2 a_3 \\ &\approx a_1 a_2 a_3 (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = V(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat

$$e_{ii} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\Delta V}{V}$$

de relatieve volumeverandering is.

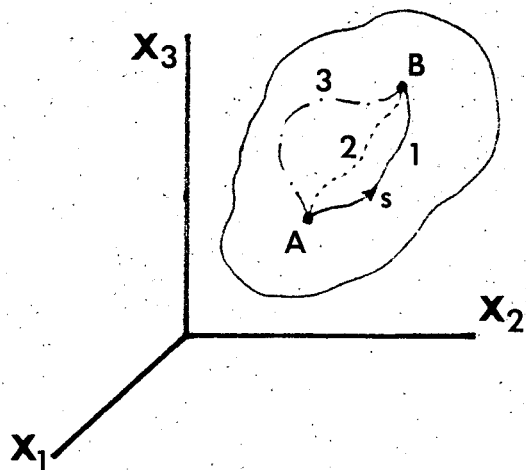
Een voor de techniek interessant geval treedt op als in een vlakke-vervormings-situatie de hoofdrekken  $\lambda_1$  en  $\lambda_2$  gelijk van grootte doch met tegengesteld teken zijn. Het middelpunt van de cirkel van Mohr komt dan in de oorsprong te liggen en het is eenvoudig in te zien dat onder  $45^\circ$  met de hoofdrichtingen ( $90^\circ$  in de cirkel van Mohr) een toestand van zuivere afschuifvervorming (dus zonder rekken!) heerst.

Een ander interessant geval is de vervormingstoestand waarbij  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ . De cirkel van Mohr schrompelt dan ineen tot een punt: kennelijk zijn dan in alle richtingen de vervormingen rekken (gelijk aan de hoofdrekken). Bij isotrope materialen kan deze vervormingstoestand veroorzaakt worden door hydrostatische druk.

#### 1e. Compatibiliteitsvergelijkingen

De zes vervormingscomponenten  $e_{ij}$  zijn afhankelijk van de drie verplaatsingscomponenten  $U_i$ . Er zullen dus verbanden moeten zijn tussen de vervormingscomponenten: deze verbanden zijn de compatibiliteitsvergelijkingen of aansluitvoorwaarden. Zij vormen de noodzakelijke en voldoende voorwaarden om uit een gegeven deformatie de verplaatsingen te bepalen. De compatibiliteitsvergelijkingen zijn de mathematische vorm waarin de fysische voorwaarden zijn gegoten waaraan de vervormingen moeten voldoen ter voorkoming van het ontstaan van discontinuïteiten (holtes, gaten). Vandaar ook de tweede naam: aansluitvoorwaarden.

Beschouw in een willekeurig lichaam twee punten A en B. In A zijn zowel de componenten  $U_{iA}$  van de verplaatsing als de rotatiecomponenten  $\omega_{ijA}$  bekend. De vraag is nu of we die componenten in B zouden kunnen vinden als  $dU_i/ds$  en  $d\omega_{ij}/ds$  langs een willekeurige kromme S die A en B verbindt bekend zijn.



Figuur 1.7

$$U_{iB} = U_{iA} + \int_A^B \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{ds} ds$$

$$= U_{iA} + \int_A^B \frac{\partial U_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$U_{iB} - U_{iA} = \int_A^B (e_{ij} - \omega_{ij}) dx_j \quad (1.39)$$

$U_{iB} - U_{iA}$  moet steeds het zelfde zijn, ongeacht de weg (bijv. weg 1, 2 of 3 in Figuur 1.7) tussen A en B waarlangs wordt geïntegreerd.  $U_{iB}$  moet uitsluitend afhangen van de coördinaten van B t.o.v. die van A. Bij enkelvoudig samenhangende gebieden (lichamen) is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde hiervoor dat

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (e_{ij} - \omega_{ij}) = \frac{\partial}{\partial x_j} (e_{ik} - \omega_{ik}) \quad (1.40)$$

Met behulp van (1.4) en (1.5) is eenvoudig in te zien dat hieraan triviaal is voldaan.

Voor de rotatie in B ligt de zaak iets gecompliceerder

$$\omega_{ijB} - \omega_{ijA} = \int_A^B \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h} dx_k$$

We gaan nu over op de eenvoudiger index-notatie

$$\omega_{ij,h} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_h}$$

en schrijven:



$$\begin{aligned}
 \omega_{ij,h} &= \frac{1}{2}(U_{j,ih} - U_{i,jh}) \\
 &= \frac{1}{2}(U_{j,ih} + U_{h,ji} - U_{h,ji} - U_{i,jh}) \\
 &= \frac{1}{2}\{(U_{j,h} + U_{h,j})_{,i} - (h_{h,i} + U_{i,h})_{,j}\} \\
 &= e_{hj,i} - e_{hi,j}
 \end{aligned}$$

zodat 
$$\omega_{ij_B} - \omega_{ij_A} = \int_A^B (e_{hj,i} - e_{hi,j}) dx_h \quad (1.41)$$

Ook hier geldt dat de integraal uitsluitend afhangt van de coördinaten van A en B en niet van de contour van de integratieweg als

$$(e_{hj,i} - e_{hi,j})_{,k} = (e_{kj,i} - e_{ki,j})_{,h}$$

dus als 
$$e_{hi,jk} + e_{jk,hi} - e_{hj,ik} - e_{ik,hj} = 0 \quad (1.42)$$

i, j, k en h kunnen volledig onafhankelijk van elkaar worden gekozen. Dit houdt in dat er in principe  $3^4 = 81$  vergelijkingen (1.42) zijn. Vele daarvan vallen echter samen of geven de identiteit  $0 = 0$  (bijv. als  $i = j = k = h = 1$ ). Er blijven dan ook slechts 6 over, en wel

$$2 \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x_1^2} \quad (1.43)$$

(door de cyclische verwisseling  $x_1, x_2, x_3 \rightarrow x_2, x_3, x_1 \rightarrow x_3, x_1, x_2$  worden nog 2 gevonden)

en 
$$\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left( -\frac{\partial e_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial e_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial e_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (1.44)$$

(plus nog 2 door cyclische verwisseling).

De compatibiliteitsvoorwaarden zijn bij enkelvoudig samenhangende gebieden de noodzakelijk en voldoende voorwaarden om uit gegeven deformaties eenduidig de verplaatsingen te kunnen bepalen.

N.B.: In het voorgaande is enkele keren het begrip 'enkelvoudig samenhangend' gebruikt. Dit begrip houdt in dat in Figuur 7 bijvoorbeeld weg 3 door continue deformatie uit weg 2 afgeleid gedacht kan worden.

Bevindt zich echter tussen weg 2 en weg 3 een holte dan kan dat niet meer en is het gebied meervoudig (in dit geval tweevoudig) samenhangend. De voorwaarden (1.40) en (1.41) die erop neerkomen dat

$$(e_{ij} - \omega_{ij}) dx_j \quad \text{uit (1.39)}$$

$$\text{en } (e_{hj,i} - e_{hi,j}) dx_h \quad \text{uit (1.41)}$$

totale differentiaal (perfect differentials) moeten zijn, zijn dan nog wel noodzakelijk doch niet meer voldoende. Hier wordt echter verder niet op ingegaan.

Als voorbeeld wordt hier de vraag gesteld of het mogelijk is uit de veranderingen

$$e_{11} = C x_2^2$$

$$e_{22} = C x_1^2$$

andere zijn nul, C is een constante, de verplaatsingen te bepalen. De gegeven vervormingen geven in 5 van de 6 vergelijkingen (1.43) en (1.44) de identiteit 0 = 0 en alleen

$$2e_{12,12} = e_{11,22} + e_{22,11}$$

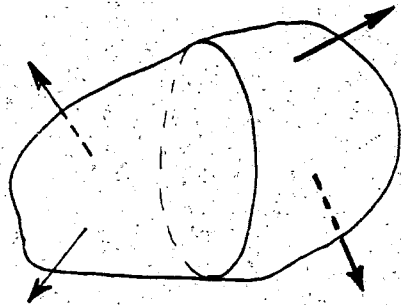
geeft  $0 = 4C$

Dit betekent dat niet aan alle compatibiliteitsvergelijkingen is voldaan en het antwoord op bovengestelde vraag is dus ontkennend.

HOOFDSTUK 2

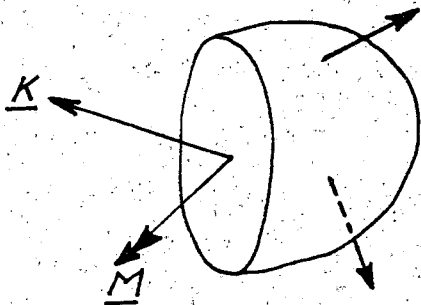
SPANNINGSLEER

2a. Het spanningsbegrip



Figuur 2.1.

Als een lichaam belast is door krachten en het is in evenwicht dan is er op elk snijvlak door dat lichaam een krachten- en momentenpaar te tekenen. Het beginsel actie = reactie geeft de waarborg dat de krachtwerking van het linker deel op het rechter deel even groot is (doch met tegengesteld teken) als de krachtwerking van rechts op links.



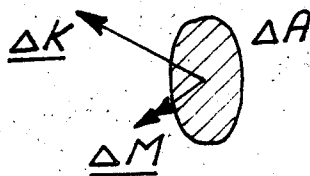
Figuur 2.2.

Met de resultanten van de krachtwerking van het linker deel op het rechter deel kan nu het beeld van Figuur 2.2 worden geschetst. K is daarin de resulterende kracht en M het resulterend moment.

De grootte en de richting van zowel K als M zijn hierbij gedicteerd door de evenwichtsvoorwaarden van dit rechter deel.

Nu zal het duidelijk zijn dat de krachtenwerking van links op rechts in werkelijkheid niet als resultanten in één punt is geconcentreerd doch continu is verdeeld over het snijvlak. Daarom wordt

een oppervlakte-elementje  $\Delta A$  van het snijvlak beschouwd waarop een resulterend krachtje  $\Delta K$  en een resulterend momentje  $\Delta M$  werken, zie Figuur 2.3. Het lijkt aannemelijk dat bij verschrompeling van  $\Delta A$  tot een punt



Figuur 2.3.

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta A} = p \text{ bestaat en}$$

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta A} = 0$$

$\underline{p}$  wordt de spanningsvector in het beschouwde punt genoemd. Een dergelijke spanningsvector kan in elk punt van het snijvlak worden gedefinieerd.

$\underline{p}$  heeft als elke vector een grootte en een richting. Bij het begrip spanning denkt men echter meteen aan een vlak waarop deze spanning werkt in tegenstelling tot een kracht waarvan alleen grootte en richting (met werklijn) moeten worden aangegeven.

N.B.: 1. De kracht  $\Delta K$  wordt een oppervlaktekracht genoemd, dit is de kracht die de omringende materie op een oppervlak uitoefent. Massa-krachten en schijnkrachten worden voorlopig buiten beschouwing gelaten. Dat mag als de te beschouwen volumes zeer klein zijn: de massa-krachten zijn via de massa evenredig met de dimensie  $L^3$  en zij vallen in het niet vergeleken bij de oppervlakte-krachten die evenredig zijn met de dimensie  $L^2$ .

2. Een noodzakelijke voorwaarde voor de limietovergang  $\Delta A \rightarrow 0$  is dat het materiaal geïdealiseerd is, dus atomaire structuur en micro-scheurtjes worden buiten beschouwing gelaten.

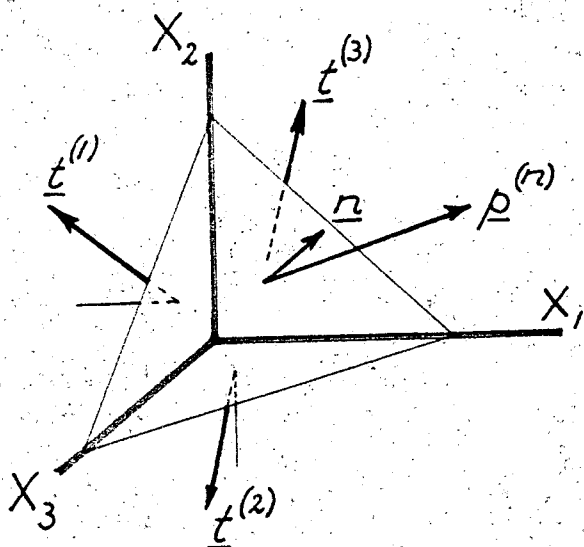
Bij de spanningsvector moet dus het oppervlakte-element waarop hij werkt mede in beschouwing worden genomen. Nu zijn er door een punt  $\infty^2$  oppervlakte-elementen denkbaar, bepaald door de twee vrij te kiezen richtingscosinussen van de normaal op het element (de derde ligt immers door  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$  vast). In een punt is de spanningsvector dan eveneens afhankelijk van  $\infty^2$  factoren.

Het is gemakkelijker om in plaats van de richtingscosinussen van de normaal op een oppervlakte-element gebruik te maken van de componenten  $n_i$  van de eenheidsnormaalvector  $\underline{n}$  waarvan er ook twee vrij te kiezen zijn en de derde vastligt door  $|\underline{n}| = (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{\frac{1}{2}} = 1$  en waarvoor geldt

$$\cos(\underline{n}, x_i) = n_i$$

Dus: De spanningsvector  $\underline{p}$  hangt niet alleen af van de positie van het inwendig punt waar  $\underline{p}$  aangrijpt, maar is tevens afhankelijk van de eenheidsnormaalvector  $\underline{n}$  in dat punt. We schrijven  $\underline{p}^{(n)}$ , daarmee aangevend dat hij werkt op een oppervlakte-element met eenheidsnormaalvector  $\underline{n}$ .

Belangrijk is nu dat  $\underline{p}$  bekend is op alle  $\infty^2$  vlakken door een punt als  $\underline{p}$  bekend is op slechts drie vlakken door dat punt, of, anders gezegd: er is een verband tussen de spanningsvectoren op vier verschillende vlakken door een punt (Cauchy, 1822). Om dit te bewijzen gebruiken we een infinitesimaal tetraeder waarvan de



Figuur 2.4.

rechthoeksvlakken de vlakken  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  en  $x_3 = 0$  zijn. Deze vlakken zullen worden aangegeven met  $x_1$ -vlak, resp.  $x_2$ -vlak en  $x_3$ -vlak omdat hun normaalvectoren evenwijdig aan de coördinaatassen lopen. Het schuine vlak van het tetraeder heeft een eenheidsnormaalvector  $\underline{n}$ . Op de rechthoeksvlakken werken spanningsvectoren  $\underline{t}^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) en op het schuine vlak  $\underline{p}^{(n)}$ .

Een probleem is nog dat de vier vlakken van het tetraeder niet door één punt gaan en dat de vier spanningsvectoren  $\underline{t}^{(i)}$  en  $\underline{p}^{(n)}$  ook niet in dat ene punt aangrijpen, zij worden nl. geacht in de zwaartepunten van de respectievelijke

zijvlakken aan te grijpen. Wordt echter het viervlak inderdaad zeer klein gekozen dan wordt aangenomen dat in het viervlak een punt kan worden gevonden waar de spanningsvectoren gelijk zijn aan die op de zijvlakken, ofwel er wordt verondersteld dat tussen dat punt en de aangrijpingspunten op de zijvlakken de spanningsvectoren niet variëren.

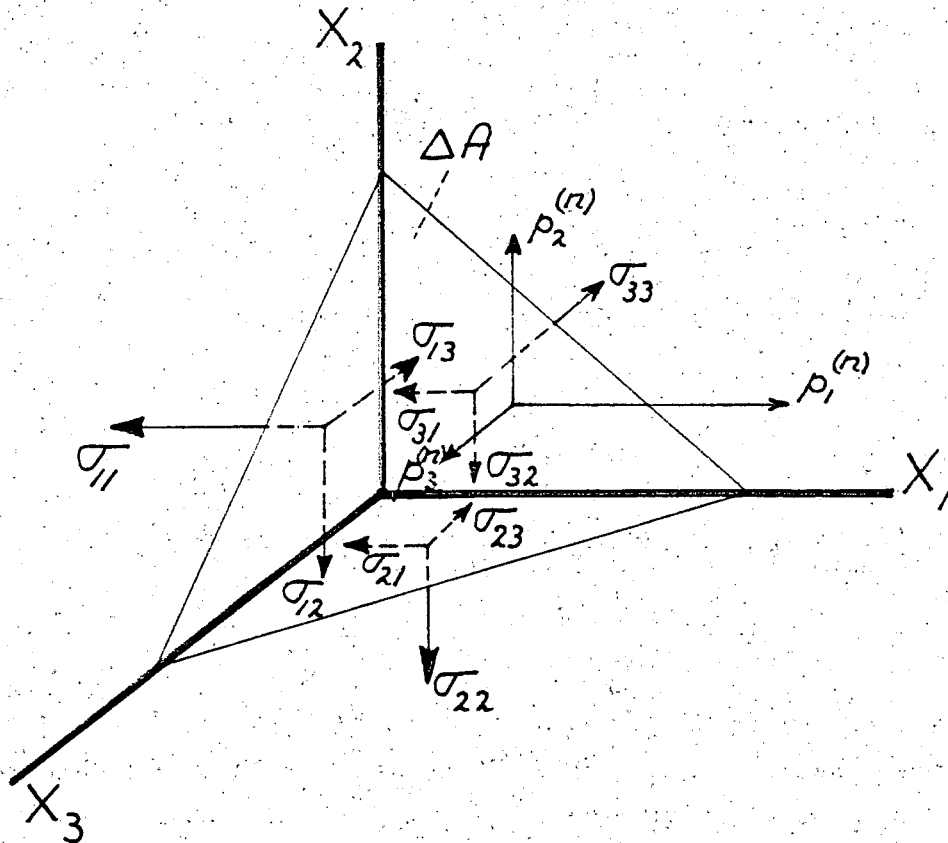
De spanningsvector  $\underline{p}^{(n)}$  wordt nu ontbonden in de drie componenten  $\underline{p}_i^{(n)}$  evenwijdig aan de coördinaatassen. In het algemeen staan deze componenten dus niet loodrecht op noch liggen in het  $n$ -vlak.

De drie spanningsvectoren  $\underline{t}^{(i)}$  worden ieder ontbonden in drie componenten  $\underline{t}_j^{(i)}$  loodrecht op of liggend in de rechthoeksvlakken. De in totaal negen componenten  $\underline{t}_j^{(i)}$  worden de spanningen  $\sigma_{ij}$  genoemd, dus

$$\sigma_{ij} = t_j^{(i)}$$

In woorden:  $\sigma_{ij}$  is de spanning werkend op het  $x_i$ -vlak in de  $x_j$ -richting. Een spanning is positief als hij op een vlak met de normaal in positieve  $x_i$ -richting werkt in de positieve  $x_j$ -richting.

De componenten  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  en  $\sigma_{33}$  worden de normaalspanningen genoemd. In de techniek worden zij aangegeven met  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  en  $\sigma_z$ , positief bij trek en negatief bij druk.  $\sigma_{12}$  etc. worden schuifspanningen genoemd, in de techniek  $\tau_{xy}$  etc.



Figuur 2.5.

De evenwichtsvergelijkingen voor het tetraeder worden nu, zie Figuur 2.5:

$$P_i^{(n)} \Delta A - \sigma_{1i} \Delta A n_1 - \sigma_{2i} \Delta A n_2 - \sigma_{3i} \Delta A n_3 = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

ofwel 
$$\underline{P_i^{(n)}} = \sigma_{ji} n_j \quad (2.1)$$

(2.1) is de grondformule van de spanningsleer bij de afleiding waarvan we het spanningsbegrip hebben geïntroduceerd. Let op dat de spanningen altijd evenwijdig met één van de coördinaatassen zijn; bij de spanningsvectoren is dat juist meestal niet het geval.

Het is eenvoudig in te zien dat de negen getallen  $\sigma_{ji}$  een tensor vormen. We beschouwen hiertoe een rotatie van het assenstelsel  $X_i$  naar  $\bar{X}_i$  waarbij

$$\bar{n}_i = A_{ij} n_j$$

en 
$$\bar{\sigma}_{kl} \bar{n}_k \bar{n}_l = \bar{\sigma}_{kl} A_{ki} n_i A_{lj} n_j \quad (2.2)$$

Het scalair produkt

$$p_i^{(n)} n_i = \sigma_{ji} n_j n_i$$

is invariant tegenover een rotatie van het assenstelsel, dus is

$$\sigma_{ji} n_j n_i = \bar{\sigma}_{kl} \bar{n}_k \bar{n}_l$$

ofwel met (2.2)

$$\sigma_{ji} = A_{ki} A_{lj} \bar{\sigma}_{kl} \tag{2.3}$$

$\sigma_{ji}$  transformeert dus als een tensor; vergelijk met formules (1.23) en (1.25) voor de vervormingstensor.  $\sigma_{ji}$  wordt de spanningstensor genoemd.

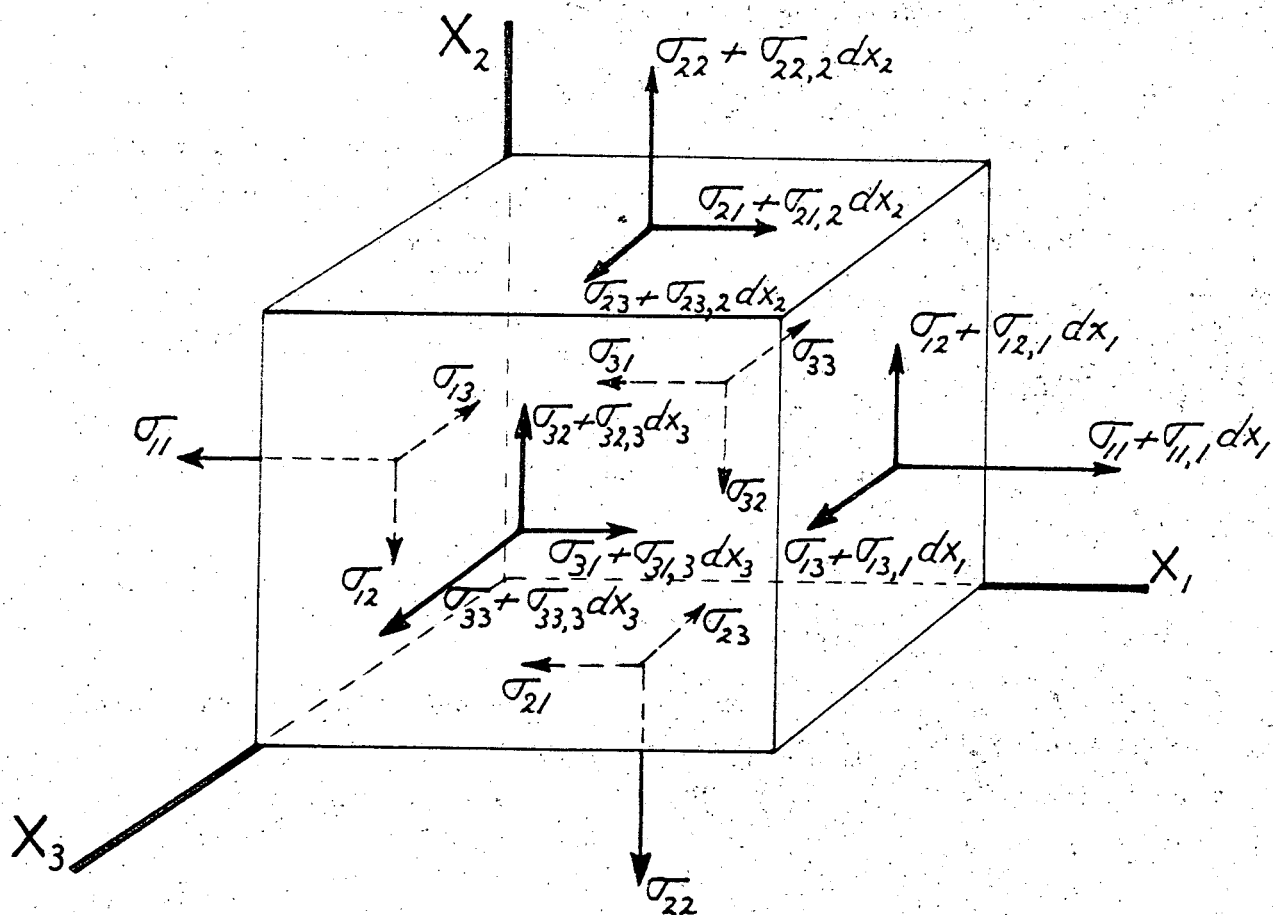
2b. Algemeen evenwicht

In het voorgaande hebben we een volume-element beschouwd waarbij we ons beperkt hebben tot het evenwicht van krachten klein van de 2e-orde. Krachten klein van de 3e-orde zoals massakrachten hebben we daarbij buiten beschouwing gelaten. Dit kon omdat we impliciet hebben verondersteld dat het volume-element in een homogene spanningstoestand verkeerde: de spanningen waren geen functies van de coördinaten.

Voor algemeen evenwicht is het echter nodig dat ieder, willekeurig deeltje van een lichaam in evenwicht is onder invloed van de daarop werkende krachten. Voor bestudering van dat algemene evenwicht tekenen we nu een blokje dat in een niet-homogene spanningstoestand verkeert. De spanningen variëren dus met de coördinaten en dat betekent dat de krachten op tegenover elkaar liggende vlakken verschillen met krachten klein van de 3e-orde. Dit laatste is de reden waarom nu ook de andere krachten klein van de 3e-orde, nl. de massakrachten in de beschouwing worden betrokken.

Krachtenevenwicht van het blokje uit Figuur 2.6 geeft voor de krachten klein van de 3e-orde:

$$\sigma_{ji,j} + F_i = 0 \quad (i = 1,2,3) \tag{2.4}$$



Figuur 2.6.

terwijl het momentenevenwicht geeft (eveneens voor krachten klein van de 3e orde)

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} \quad \sigma_{31} = \sigma_{13} \quad (2.5)$$

In (2.4) is  $F_i$  de kracht per volume-eenheid die door uitwendige oorzaken (zwaartekracht, traagheidskrachten) in  $X_i$ -richting wordt uitgeoefend. Uit (2.5) blijkt dat de spanningstensor symmetrisch is, dus

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad (2.6)$$

Met (2.4) en (2.5) zijn de evenwichtsvoorwaarden voor de krachten en voor de momenten vervangen door drie partiële differentiaalvergelijkingen en drie symmetrie-relaties voor de spanningen waaraan in elk punt van het lichaam moet zijn



voldaan. Aan het uitwendig oppervlak kunnen bovendien nog randvoorwaarden gelden voor de spanningen in de vorm van voorgeschreven waarden van de spanningsvector.

Het vraagstuk van de spanningsverdeling in een lichaam kan niet worden opgelost met de evenwichtsvergelijkingen (2.4) en de symmetrie-voorwaarden (2.5). Er zijn immers negen spanningen  $\sigma_{ij}$  en slechts zes vergelijkingen. De drie aanvullende vergelijkingen komen uit de Elasticiteitsleer: de leer van de relaties tussen spanningen en vervormingen.

### 2c. Transformatie van spanningen

Zoals eerder reeds opgemerkt is  $\sigma_{ij}$  een (symmetrische) tensor die transformeert volgens

$$\bar{\sigma}_{kl} = A_{ki} A_{lj} \sigma_{ij} \quad (2.7)$$

waarin  $A_{ki}$  (resp.  $A_{lj}$ ) de richtingscosinussen zijn tussen de  $\bar{X}_k$ -assen (resp.  $\bar{X}_l$ ) en de  $X_i$ -assen (resp.  $X_j$ ). De overstreepte assen zijn de nieuwe, gerooteerde assen. We zullen regelmatig gebruik maken van rotaties om de  $X_3$ -as. De formules die dan gevonden worden zijn identiek aan die van de vervormingen.

$$\bar{\sigma}_{11} = \sigma_{11} \cos^2 \varphi + \sigma_{22} \sin^2 \varphi + 2 \sigma_{12} \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.8)$$

$$\bar{\sigma}_{22} = \sigma_{11} \sin^2 \varphi + \sigma_{22} \cos^2 \varphi - 2 \sigma_{12} \sin \varphi \cos \varphi \quad (2.9)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = (\sigma_{22} - \sigma_{11}) \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \quad (2.10)$$

$$\bar{\sigma}_{13} = \sigma_{13} \cos \varphi + \sigma_{23} \sin \varphi \quad (2.11)$$

$$\bar{\sigma}_{23} = \sigma_{23} \cos \varphi + \sigma_{13} \sin \varphi \quad (2.12)$$

$$\bar{\sigma}_{33} = \sigma_{33} \quad (2.13)$$

Ook hier wordt gewezen op het invariante karakter van

$$\sigma_{ii} = \bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} + \bar{\sigma}_{33} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

Op identieke wijze als bij de vervormingen kan uit (2.8) t/m (2.10) de cirkel van Mohr, echter nu voor de spanningen, worden geconstrueerd. Hierop wordt in de volgende paragraaf nader ingegaan.

Worden  $\sigma_{13}$  en  $\sigma_{23}$  nul verondersteld en is de richting  $\alpha$  met  $\sigma_{11}$  (of  $\sigma_{22}$ ) bekend waarin  $\bar{\sigma}_{12}$  nul is dan zijn  $\bar{\sigma}_{11}$ ,  $\bar{\sigma}_{22}$  en  $\bar{\sigma}_{33}$  hoofdspanningen, de richtingen waarin zij optreden hoofdrichtingen voor de spanningen.

Is bovendien  $\sigma_{33} = 0$  dan is de spanningstoestand waarin het  $X_1$ - $X_2$ -vlak zich bevindt een vlakspanningstoestand.

Er zij hier opgemerkt dat uitsluitend bij isotrope materialen de hoofdrichtingen voor de spanningen altijd samenvallen met die voor de rekken.

2d. Hoofdspanningen en de cirkel van Mohr

Een spanningsvector  $p^{(n)}$  kan worden ontbonden in een component loodrecht op het  $n$ -vlak (de normaalspanningscomponent) en een component evenwijdig met het  $n$ -vlak (de schuifspanningscomponent). Er zijn nu in ieder punt altijd drie onderling loodrechte vlakken aan te wijzen waarop de componenten van de spanningsvector evenwijdig met die vlakken nul zijn. Anders gezegd: er zijn in ieder punt drie onderling loodrechte vlakken waarop de spanningsvector loodrecht staat. Deze vlakken worden hoofdvlakken genoemd.

De spanningsvector op een hoofdvlak is evenredig met de normaalvector op dat vlak:

$$p^{(n)} = \rho \underline{n}$$

ofwel  $p_i^{(n)} = \rho n_i$

waarin  $\rho$  een scalair is.  $\rho$  wordt hoofdspanning genoemd, geeft dus de grootte van de spanning. Met

$$p_i^{(n)} = \sigma_{ij} n_j$$

wordt  $\sigma_{ij} n_j - \rho n_i = 0$  (2.14)

ofwel  $(\sigma_{ij} - \rho \delta_{ij}) n_j = 0$  (2.15)

Uitgeschreven geeft (2.15):

$$\begin{aligned}(\sigma_{11} - \rho) n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 &= 0 \\ \sigma_{12} n_1 + (\sigma_{22} - \rho) n_2 + \sigma_{23} n_3 &= 0 \\ \sigma_{13} n_1 + \sigma_{23} n_2 + (\sigma_{33} - \rho) n_3 &= 0\end{aligned}$$

Deze vergelijkingen kunnen worden opgevat als drie homogene vergelijkingen voor de richtingscosinussen  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die alleen een van nul verschillende oplossing toelaten als de coëfficiëntendeterminant nul is. De verdere uitwerking is identiek aan die bij de vervormingen.

$$\begin{aligned}\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 &= \sigma_{ii} = \text{invariant} & (2.16) \\ \rho_1 \rho_2 + \rho_2 \rho_3 + \rho_3 \rho_1 &= \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 \\ \rho_1 \rho_2 \rho_3 &= \det \{ \sigma_{ij} \}\end{aligned}$$

Bij een vlakspanningstoestand is één van de hoofdspansingen nul, en is dus ook

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 = \det \{ \sigma_{ij} \} = 0 \quad (2.17)$$

Bij een lijnspanningstoestand zijn twee van de hoofdspansingen nul, en is dus ook

$$\rho_1 \rho_2 + \rho_2 \rho_3 + \rho_3 \rho_1 = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2 = 0 \quad (2.18)$$

Bij bekende spanningen  $\sigma_{ij}$  zijn deze spanningstoestanden door (2.17) en (2.18) altijd gemakkelijk te herkennen.

De hoofdspansingsrichtingen zijn te vinden door de wortel  $\rho_1$  (resp.  $\rho_2$  en  $\rho_3$ ) in (2.14) te substitueren en de verhoudingen van de richtingscosinussen uit te rekenen. Met  $n_i n_i = 1$  zijn dan de richtingscosinussen zelf te vinden waarmee het eerste (resp. tweede en derde) hoofdvlak bekend is.

We nemen als assenstelsel het hoofdassenstelsel, m.a.w. de coördinaatassen vallen samen met de hoofdrichtingen van de spanningssituatie, zie Figuur 2.7. De spanningsvector  $p^{(n)}$  kan op twee manieren worden ontbonden, nl.

- in de componenten  $p_i^{(n)}$  evenwijdig aan de coördinaatassen. Dit is gedaan in Figuur 2.5

- in de normaalspanningscomponent  $\sigma$  loodrecht op het  $n$ -vlak en schuifspanningscomponent  $\tau$  evenwijdig met het  $n$ -vlak. Hieraan is reeds gerefereerd bij het introduceren van het begrip hoofdvlakken.

Voor de verschillende componenten (zie Figuur 2.7): geldt de betrekking

$$\sigma^2 + \tau^2 = \{p_1^{(n)}\}^2 + \{p_2^{(n)}\}^2 + \{p_3^{(n)}\}^2 \quad (2.19)$$

waarin, volgend uit (2.1)

$$\begin{aligned} p_1^{(n)} &= \rho_1 n_1 \\ p_2^{(n)} &= \rho_2 n_2 \\ p_3^{(n)} &= \rho_3 n_3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

terwijl voor de normaalspanningscomponent  $\sigma$  op het  $n$ -vlak met de transformatieformule (2.7) wordt gevonden

$$\sigma = \rho_1 n_1^2 + \rho_2 n_2^2 + \rho_3 n_3^2 \quad (2.21)$$

en voor de schuifspanningscomponent, volgend uit (2.19), (2.20) en (2.21)

$$\tau^2 = \rho_1^2 n_1^2 + \rho_2^2 n_2^2 + \rho_3^2 n_3^2 - \sigma^2 \quad (2.22)$$

(2.21) en (2.22) geven dus uitdrukkingen voor de normaalspanning en de schuifspanning op een willekeurig vlak als functies van de hoofdspansingen en de richtingscosinussen van het willekeurig vlak.

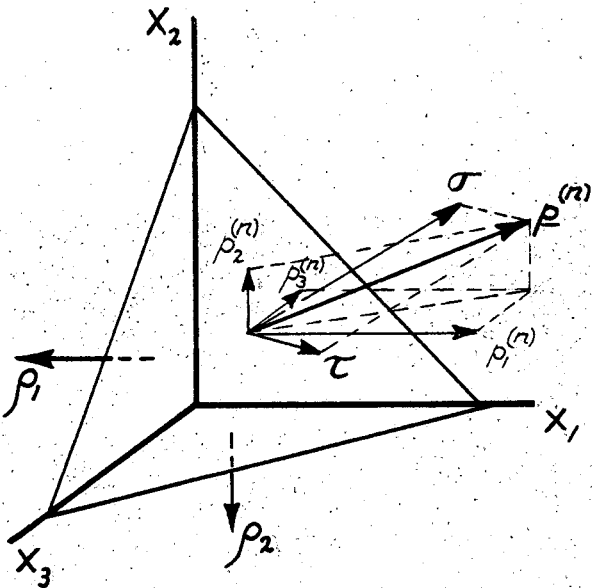
Met (2.21) en (2.22) kunnen in een  $\sigma$ - $\tau$ -vlak beeldpunten van de spanningsvector  $p^{(n)}$  worden gecreëerd. Hiertoe wordt met  $n_1 n_1 = 1$  eerst bijvoorbeeld  $n_2^2$  uit (2.21) en (2.22) geëlimineerd, waarna elimineren van  $n_1^2$  resulteert in

$$\tau^2 + \{\sigma - \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)\}^2 = \frac{1}{4}(\rho_1 - \rho_2)^2 + (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_1) n_3^2 \quad (2.23)$$

Voor een bepaalde waarde van  $n_3$  geeft (2.23) dus het verband tussen  $\sigma$  en  $\tau$  op vlakken met dezelfde hoek met de  $X_3$ -as. Is bijvoorbeeld  $n_3 = 0$  (dus  $\cos(\underline{n}, x_3) = 0$ ) dan zijn dit vlakken die loodrecht op het  $X_1$ - $X_2$ -vlak staan.

Vergelijking (2.23) geeft in het  $\sigma$ - $\tau$ -vlak een cirkel weer met straal

$$R_3 = \left\{ \frac{1}{4}(\rho_1 - \rho_2)^2 + (\rho_3 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_1) n_3^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$



Figuur 2.7.

en middelpunt

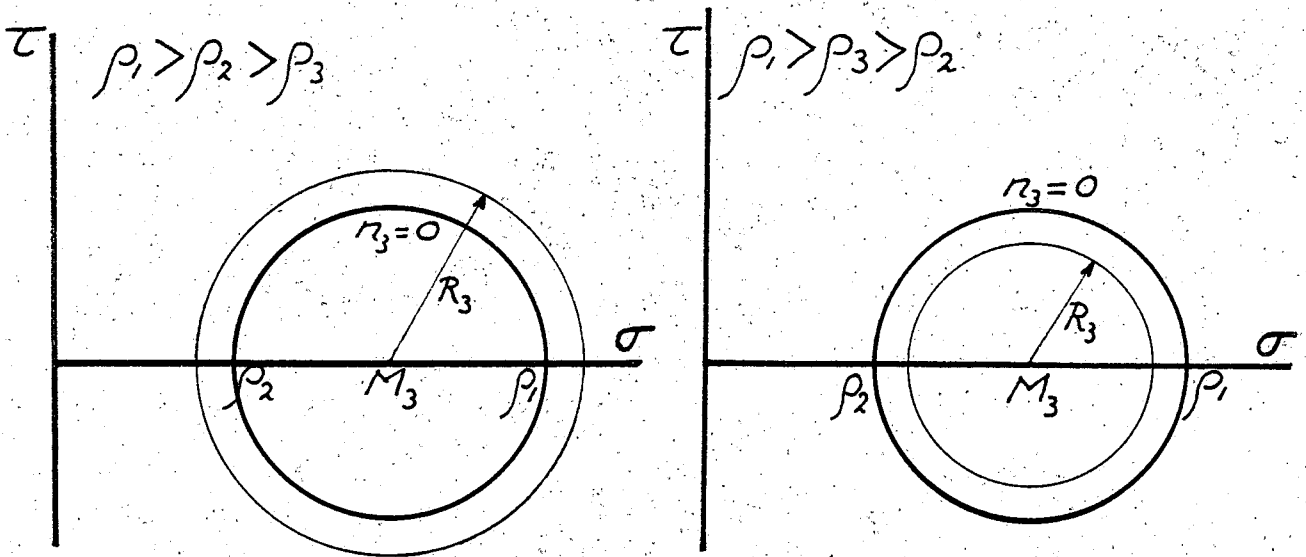
$$M_3 \left\{ \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2), 0 \right\}$$

Voor  $n_3 = 0$  is  $R_3 = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)$

voor  $n_3 \neq 0$  is  $R_3 > \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)$  als  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$

en  $R_3 < \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)$  als  $\rho_1 > \rho_3 > \rho_2$

In Figuur 2.8 zijn deze gevallen getekend.



Figuur 2.8.

Was in (2.21) en (2.22) eerst  $n_1^2$  geëlimineerd en daarna  $n_3^2$  dan was voor het  $\sigma$ - $\tau$  verband gevonden

$$\tau^2 + \left\{ \sigma - \frac{1}{2}(\rho_2 + \rho_1) \right\}^2 = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_3)^2 + (\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3) n_2^2 \quad (2.24)$$

Deze uitdrukking geeft voor een bepaalde waarde van  $n_2$  de relatie tussen  $\sigma$  en  $\tau$  op vlakken met dezelfde hoek met de  $X_2$ -as. Is  $n_2 = 0$  dan zijn dit dus vlakken loodrecht op het  $X_2$ - $X_3$ -vlak.

(2.24) geeft in het  $\sigma$ - $\tau$  vlak een cirkel met straal

$$R_2 = \left\{ \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_3)^2 + (\rho_2 - \rho_1)(\rho_2 - \rho_3) n_2^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

en middelpunt

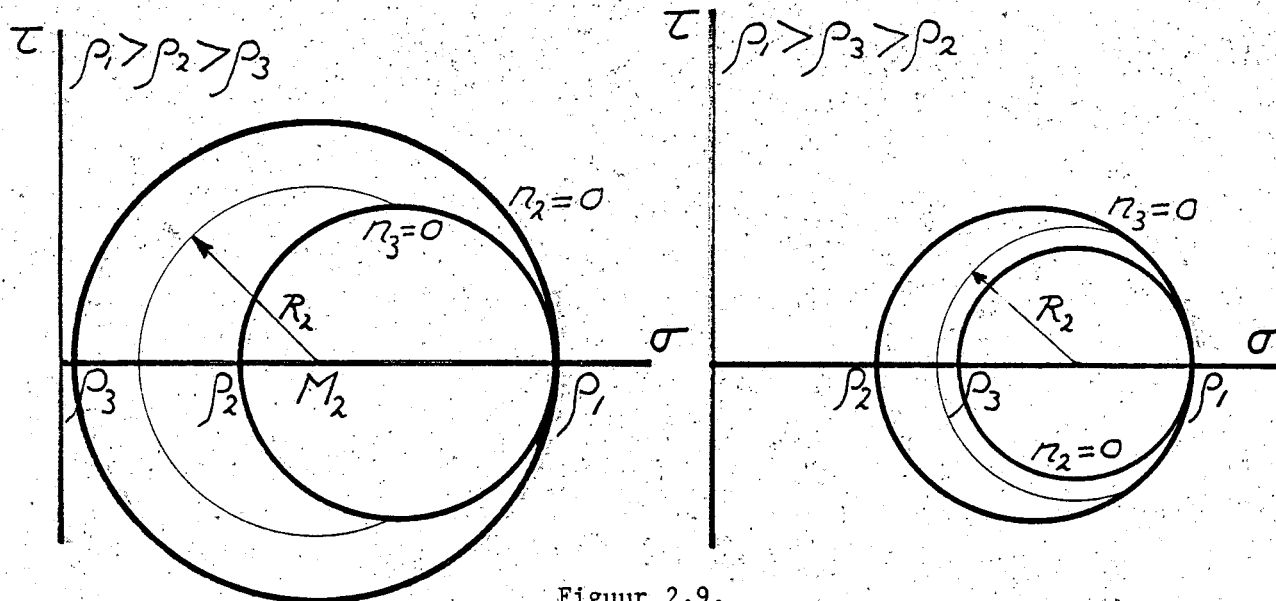
$$M_2 \left\{ \frac{1}{2}(\rho_3 + \rho_1), 0 \right\}$$

Voor  $n_2 = 0$  is  $R_2 = \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_3)$

voor  $n_2 \neq 0$  is  $R_2 < \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_3)$  als  $\rho_1 > \rho_2 > \rho_3$

en  $R_2 > \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_3)$  als  $\rho_1 > \rho_3 > \rho_2$ .

Deze gevallen zijn ingetekend in Figuur 2.8, resulterend in Figuur 2.9.



Figuur 2.9.

De derde manier van elimineren van richtingscosinussen, nl. eerst  $n_3^2$  en daarna  $n_2^2$  geeft.

$$\tau^2 + \left\{ \sigma - \frac{1}{2}(\rho_2 + \rho_3) \right\}^2 = \frac{1}{4}(\rho_2 - \rho_3)^2 + (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3) n_1^2 \quad (2.25)$$

met straal

$$R_1 = \left\{ \frac{1}{4}(\rho_2 - \rho_3)^2 + (\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3) n_1^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

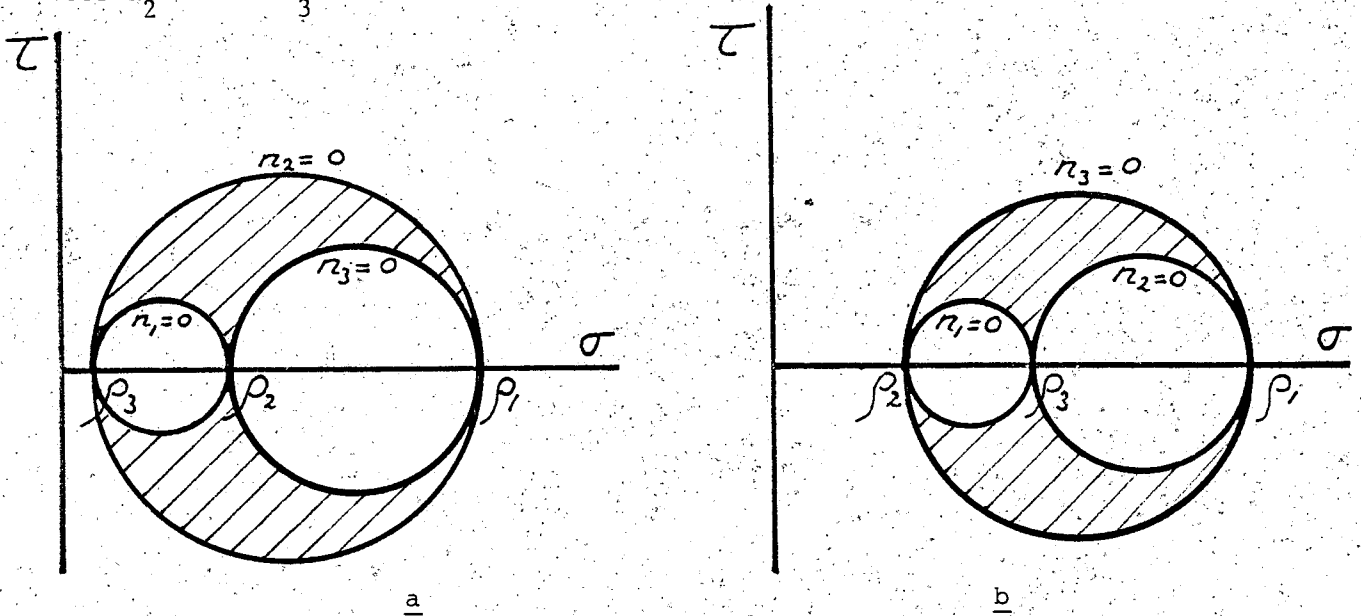
en middelpunt

$$M_1 \left\{ \frac{1}{2}(\rho_2 + \rho_3), 0 \right\}$$

Voor  $n_1 = 0$  is  $R_1 = \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_3)$

voor  $n_1 \neq 0$  is altijd  $R_1 > \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_3)$

In Figuur 2.10 is (2.25) getekend voor  $n_1 = 0$ , te zamen met de cirkels van Mohr voor  $n_2 = 0$  en  $n_3 = 0$ .



Figuur 2.10.

Het beeldpunt van een spanningsvector op een willekeurig vlak zal altijd in één van de gearceerde gebieden van Figuur 2.10 liggen. Met bekende hoofdspansingen  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  en  $\rho_3$  en (twee) bekende richtingscosinussen kan dit punt in Figuur 2.10 'geconstrueerd' worden.

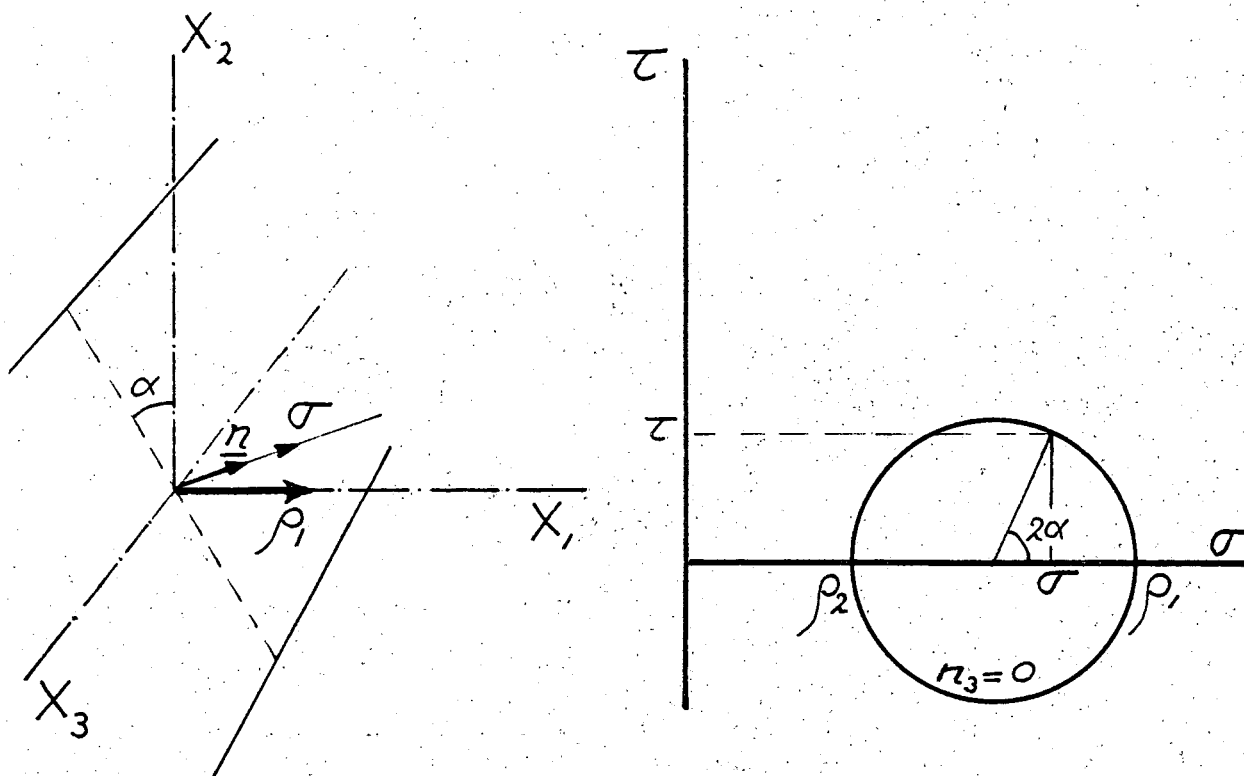
Voor de 'spanningen op de cirkels' in Figuur 2.10 is het eenvoudig de richting te vinden met één van de hoofdspansingen, of anders gezegd het is eenvoudig de richting te vinden van het vlak waarop de spanningen werken t.o.v. één van de hoofdvlakken. Neem bijvoorbeeld de vlakken  $n_3 = 0$ , dit zijn de vlakken loodrecht op het  $X_1$ - $X_2$ -vlak. Is de hoek tussen één van deze vlakken en het eerste hoofdvlak  $\alpha$ , dan is

$$\cos \alpha = \cos(\underline{n}, x_1) = n_1$$

en wordt (2.21), met  $n_1^2 + n_2^2 = \cos^2 \alpha + n_2^2 = 1$

$$\begin{aligned} \sigma &= (\rho_1 - \rho_2) \cos^2 \alpha + \rho_2 \\ &= \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2) \cos 2\alpha \end{aligned}$$

ofwel 
$$\cos 2\alpha = \frac{\sigma - \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)}{\frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2)} \quad (2.26)$$



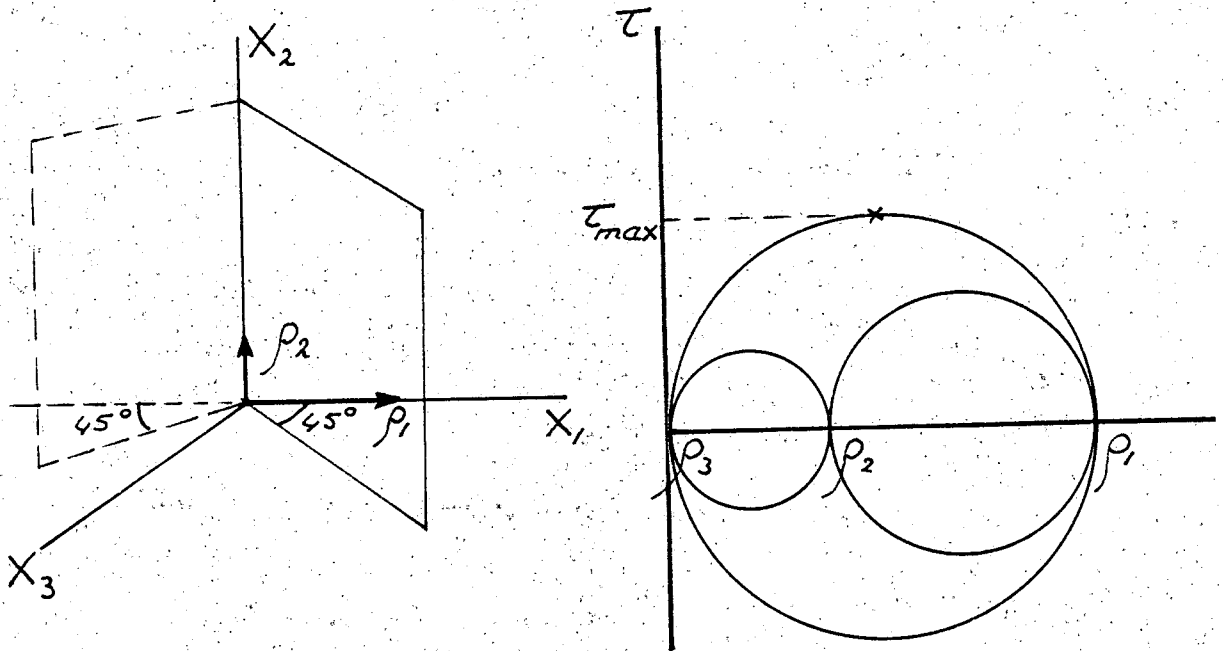
Figuur 2.11.

Bij bekende  $\sigma$ ,  $\rho_1$  en  $\rho_2$  is voor  $n_3 = 0$  de stand t.o.v. het eerste hoofdvlak (of de richting van  $\sigma$  t.o.v. de eerste hoofdspinning) direct uit (2.26) te vinden of in de cirkel van Mohr te 'construeren'. Let op dat een rotatie van  $90^\circ$  van het beschouwde vlak in de cirkel van Mohr overeenkomt met een rotatie over  $180^\circ$ .

Uit Figuur 2.10 blijkt dat de bisectrice-vlakken tussen de vlakken die de uiterste hoofdspinningen dragen de grootste schuifspanningen dragen. In Figuur 2.10a is het  $X_2$ - $X_3$ -vlak ( $n_2 = n_3 = 0$ ) het vlak dat  $\rho_1$  draagt en op het  $X_1$ - $X_2$ -vlak ( $n_1 = n_2 = 0$ ) werkt  $\rho_3$ . De bisectrice-vlakken zoals getekend in Figuur 2.12 dragen dus de grootste schuifspanningen. Vooral bij vlakspanningstoestanden moet hierop goed worden gelet. Is bijvoorbeeld  $\rho_3 = 0$  dan treedt de grootste schuifspanning op op een vlak onder  $45^\circ$  met het spanningsloze ofwel vlakspanningsvlak.

Een lijnspanningstoestand is een ontaarde vlakspanningstoestand waarbij twee hoofdspinningen, b.v.  $\rho_2$  en  $\rho_3$  nul zijn. De spanningsvectoren op willekeurige vlakken lopen altijd evenwijdig met de snijlijn van de twee vlakspanningsvlakken.





Figuur 2.12.

N.B.: In het voorgaande is gebleken dat bij spanningen altijd moet worden gedacht aan de vlakken waarop (in richtingen loodrecht op of evenwijdig met) zij werken. Toch wordt bij vlakspanningstoestanden zoals die bijvoorbeeld optreden in dunne platen vaak gesproken over spanningen in het vlak van de plaat. Formeel is de plaat juist het spanningsloze derde hoofdvlak. Het zal echter duidelijk zijn dat dit spanningsloze betrekking heeft op de normaalspanning loodrecht op de plaat en niet op de spanningsvectoren (of hun componenten) die in het vlak van de plaat liggen, doch formeel werken op vlakken loodrecht op de plaat.

### HOOFDSTUK 3

#### HET VERBAND TUSSEN SPANNINGEN EN VERVORMINGEN

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat in een niet-homogene spannings-situatie de evenwichtsvergelijkingen niet voldoende zijn voor oplossing van het spanningsvraagstuk. Er zijn aanvullende relaties nodig, en wel relaties tussen de vervormingen en de rekken. Voor deze relaties dient de algemene wet van Hooke als basis.

De behandeling van deze wet concentreert zich voornamelijk op de elasticiteitscoëfficiënten die de relaties tussen spanningen en rekken geven. Deze elasticiteitscoëfficiënten zijn materiaaleigenschappen. De wet zal zowel voor isotrope materialen als voor anisotrope materialen worden behandeld; bij de laatste komt dan de klassieke laminatentheorie aan de orde (Hoofdstuk 4).

Voor isotrope materialen zal worden aangegeven hoe een compleet stel vergelijkingen wordt verkregen voor oplossing van het spanningsprobleem. Voor anisotrope materialen zal in Hoofdstuk 5 een dergelijk probleem worden opgelost.

#### 3a. De algemene wet van Hooke

De algemene wet van Hooke is een generalisatie van ervaringen met constructies. Ervaringen in die zin dat waargenomen verplaatsingen van punten van constructies evenredig zijn met de belastingen op die constructies. Verplaatsingen zijn dus lineaire functies van de belastingen.

Het generaliseren naar inwendige verplaatsingen en belastingen leidt als vanzelfsprekend naar de evenredigheid van de plaatselijke vervormingen en de plaatselijke spanningen, ofwel:

$$e_{ij} = A_{ijhk}^* \sigma_{hk} \quad (3.1)$$

Hierin is  $A_{ijhk}^*$  een tensor van elasticiteitscoëfficiënten met  $3^4 = 81$  kentallen en dus zijn er 81 coëfficiënten die relaties geven tussen 9 vervormingen en 9 spanningen. Van deze 81 coëfficiënten zijn er in het algemene geval echter slechts 21 onafhankelijk.

Dit kan als volgt worden ingezien:

- de vervormingstensor  $e_{ij}$  is symmetrisch; dit betekent dat  $A_{ijhk}^*$  ook symmetrisch moet zijn in de kentallen  $i$  en  $j$ . In plaats van 9 groepen ( $i, j = 1, 2, 3$ ) van 9 coëfficiënten ( $h, k = 1, 2, 3$ ) zijn er slechts 6 'groepen' van 9 coëfficiënten.
- De spanningstensor  $\sigma_{hk}$  is eveneens symmetrisch waardoor een eventueel keersymmetrisch deel van  $A_{ijhk}^*$  geen rol kan spelen in de relatie tussen rekken en spanningen. Immers, veronderstel dat  $A_{ijhk}'$  een niet symmetrische tensor is. Splits deze dan in een symmetrisch en een keersymmetrisch deel en beschouw

$$A_{ijhk}' \sigma_{hk} = \frac{1}{2}(A_{ijhk}' + A_{ijkh}') \sigma_{hk} + \frac{1}{2}(A_{ijhk}' - A_{ijkh}') \sigma_{hk}$$

Hieruit valt door de symmetrie van  $\sigma_{hk}$  de tweede term achter het gelijkteken weg zodat in  $A_{ijhk}' \sigma_{hk}$  alleen een eventueel symmetrisch deel

$$A_{ijhk}^* = \frac{1}{2}(A_{ijhk}' + A_{ijkh}') = A_{ijkh}^*$$

een rol speelt. Er zijn daardoor nog slechts 6 'groepen' van 6 coëfficiënten over.

- Het aantal coëfficiënten wordt verder teruggebracht tot 21 door de stelling van Maxwell. Deze zegt dat de arbeid die door een krachtenstelsel 1 wordt verricht bij een verplaatsing die door een krachtenstelsel 2 wordt veroorzaakt gelijk is aan de arbeid die wordt verricht door krachtenstelsel 2 bij de verplaatsing die door krachtenstelsel 1 is veroorzaakt. Ofwel:

$$\sigma_{ij}^{(1)} e_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} e_{ij}^{(1)}$$

waarmee

$$A_{ijhk}^* \sigma_{hk}^{(2)} \sigma_{ij}^{(1)} = A_{ijhk}^* \sigma_{hk}^{(1)} \sigma_{ij}^{(2)}$$

Na verwisseling van de dode indices  $i, j$  met  $h, k$  in de term achter het gelijkteken wordt

$$(A_{ijhk}^* - A_{hkij}^*) \sigma_{hk}^{(2)} \sigma_{ij}^{(1)} = 0$$

en dat kan alleen als  $A_{ijhk}^* = A_{hkij}^*$

Met de nog resterende 21 elasticiteitsconstanten wordt de wet van Hooke nu geschreven als een relatie tussen 6 spanningen en 6 rekken:

$$\begin{Bmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ e_{23} \\ e_{31} \\ e_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1111} & A_{1122} & A_{1133} & A_{1123} & A_{1131} & A_{1112} \\ & A_{2222} & A_{2233} & A_{2223} & A_{2231} & A_{2212} \\ & & A_{3333} & A_{3323} & A_{3331} & A_{3312} \\ & & & A_{2323} & A_{2331} & A_{2312} \\ & \text{symmetrisch} & & & A_{3131} & A_{3112} \\ & & & & & A_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

en uiteraard is  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  en  $e_{ij} = e_{ji}$ .

Het is belangrijk op te merken dat in de algemene wet van Hooke een koppeling bestaat tussen normaalspanningen en afschuifvervormingen en tussen schuifspanningen en rekken.

### 3b. De wet van Hooke voor isotrope materialen

Bij een eenvoudige trekproef op een homogene prismatische staaf blijkt er een lineair verband te zijn tussen de specifieke verlenging (de rek) van de staaf en de spanning in de staaf, althans zolang de rekken klein zijn.

$$\text{Dus} \quad \sigma = E \varepsilon \quad (3.3)$$

waarin E de elasticiteitsmodulus wordt genoemd. Behalve een verlenging zal de staaf echter ook een dwarscontractie ondergaan. Als het materiaal isotroop is zal dan ook elk lijnelement loodrecht op de as van de staaf een gelijke specifieke verkorting ondergaan

$$\varepsilon_d = -\nu \frac{\sigma}{E} \quad (3.4)$$

waarin  $\nu$  de (dimensieloze) dwarscontractie-coëfficiënt van Poisson wordt genoemd. Verder zal er door de isotropie in de staaf geen neiging tot hoekverdraaiingen (afschuifvervormingen) bestaan zodat  $\varepsilon$  en  $\varepsilon_d$  de enige vervormingen zijn ten gevolge van de trekspanning  $\sigma$  in langsricting van de staaf.

Beschouwen we nu een rechthoekig blokje met zijden  $dx_1$ , waarop een hoofdspanning  $\rho_1$  werkt. De hierdoor veroorzaakte rekken zullen hoofdrekken zijn omdat het materiaal isotroop is:

$$\lambda_1 = \frac{\rho_1}{E} \quad \lambda_2 = -\nu \frac{\rho_1}{E} \quad \lambda_3 = -\nu \frac{\rho_1}{E}$$

Een tweede hoofdspanning  $\rho_2$  zal als rekken geven:

$$\lambda_1 = -\nu \frac{\rho_2}{E} \quad \lambda_2 = \frac{\rho_2}{E} \quad \lambda_3 = -\nu \frac{\rho_2}{E}$$

en een derde hoofdspanning  $\rho_3$ :

$$\lambda_1 = -\nu \frac{\rho_3}{E} \quad \lambda_2 = -\nu \frac{\rho_3}{E} \quad \lambda_3 = \frac{\rho_3}{E}$$

Als de rekken klein zijn geeft superpositie van de rekken ten gevolge van  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  en  $\rho_3$  samen:

$$\lambda_1 = \frac{\rho_1}{E} - \frac{\nu}{E} (\rho_2 + \rho_3)$$

$$\lambda_2 = \frac{\rho_2}{E} - \frac{\nu}{E} (\rho_1 + \rho_3)$$

$$\lambda_3 = \frac{\rho_3}{E} - \frac{\nu}{E} (\rho_1 + \rho_2)$$

ofwel:

$$\lambda_i = \frac{1+\nu}{E} \rho_i - \frac{\nu}{E} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.5)$$

Na substitutie van (3.5) in de transformatieformule

$$e_{ij} = A_{li} A_{kj} \overline{e_{lk}}$$

(voor de overgestreepte rekken moeten dus de hoofdrekken worden genomen) wordt met de transformatieformule:

$$\sigma_{ij} = A_{li} A_{kj} \overline{\sigma_{lk}}$$

(de overgestreepte spanningen zijn hierin de hoofdspanningen) gevonden:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{hh} \delta_{ij} \quad (3.6)$$

(3.6) is de gegeneraliseerde wet van Hooke voor isotrope materialen voor een willekeurige spanningssituatie in een willekeurig assenstelsel. In één uitdrukking zijn hierin zowel de normaalspanningstermen als de afschuifspanningstermen opgenomen. Uitgeschreven:

$$\begin{aligned} e_{11} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ e_{22} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{22} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \\ e_{33} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{33} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$e_{12} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12}, \quad e_{23} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23}, \quad e_{31} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{31} \quad (3.8)$$

Formules (3.8) kunnen met behulp van de technische afschuifhoek  $\gamma_{12} = 2e_{12}$  etc. geschreven worden als

$$\sigma_{12} = \gamma_{12} \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3.9)$$

etc.

waarin  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

de glijdingsmodulus wordt genoemd.

De wet van Hooke kan ook in 'geïnverteerde' vorm worden gegeven. Deze is eenvoudig uit (3.6) af te leiden. Hiertoe worden de drie hoofdrekken volgens (3.5) opgeteld:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{1-2\nu}{E} (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3)$$

Nu is  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \text{invariant} = e_{hh}$

en  $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = \text{invariant} = \sigma_{hh}$

zodat  $\sigma_{hh} = \frac{E}{1-2\nu} e_{hh} \quad (3.10)$

Uit (3.6) volgt dan

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e_{hh} \delta_{ij}) \quad (3.11)$$

(3.11) wordt ook wel geschreven als

$$\sigma_{ij} = \mu \cdot 2 e_{ij} + \lambda e_{hh} \delta_{ij} \quad (3.12)$$

waarin  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  (= G)

en  $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

de constanten van Lamé worden genoemd.

Hoewel bij isotrope materialen het elastisch gedrag altijd wordt gekenmerkt door drie elasticiteitsgrootheden

- de elasticiteitsmodulus E
- de dwarscontractiecoëfficiënt  $\nu$
- de glijdingsmodulus G

blijkt uit het voorgaande dat slechts twee van deze grootheden onafhankelijk zijn. De derde is afhankelijk via de relatie tussen G,  $\nu$  en E.

We kunnen bij kleine vervormingen iedere spanningstoestand opvatten als een superpositie van twee andere spanningstoestanden. We gaan nu een willekeurige spanningstoestand  $\sigma_{ij}$  splitsen in een hydrostatische spanningstoestand

$$\sigma_{ij}^{(k)} = p \delta_{ij}$$

en de resterende spanningstoestand

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad (3.13)$$

p kan vele waarden aannemen; er is echter slechts één waarde waarvoor de specifieke arbeid verricht door de spanningen in het ontbonden systeem gelijk is aan de arbeid verricht door de spanningen in het niet-ontbonden systeem. Deze waarde is:

$$p = \frac{1}{3} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} \sigma_{hh} \quad (3.14)$$

Met (3.10) kunnen we nu schrijven

$$p = \frac{E}{3(1-2\nu)} \epsilon_v \quad (3.15)$$

waarin  $\epsilon_v = e_{hh} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{\Delta V}{V}$  de relatieve volume-verandering is en  $\frac{E}{3(1-2\nu)}$  de compressie-modulus.

Met de gegeneraliseerde wet van Hooke (3.11) en (3.15) wordt (3.13):

$$\begin{aligned} S_{ij} &= \sigma_{ij} - p \delta_{ij} = \frac{E}{1+\nu} (e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} \epsilon_v \delta_{ij}) - \frac{E}{3(1-\nu)} \epsilon_v \delta_{ij} \\ &= \frac{E}{1+\nu} (e_{ij} + \frac{\nu \epsilon_v \delta_{ij}}{1-2\nu} - \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \epsilon_v \delta_{ij}) \\ &= \frac{E}{1+\nu} (e_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_v \delta_{ij}) \end{aligned}$$

$S_{ij}$  wordt de spanningsdeviator genoemd en

$$e_{ij} - \frac{1}{3} \epsilon_v \delta_{ij} = \epsilon_{ij}$$

de vervormingsdeviator. We kunnen dus ook schrijven

$$S_{ij} = 2G \epsilon_{ij} \quad (3.16)$$

Bij isotrope materialen is de hydrostatische spanning verantwoordelijk voor de volumeverandering en de spanningsdeviator is verantwoordelijk voor de vormverandering. Bepaalde breukhypothesen gebruiken deze spanningsdeviator voor het bepalen van de grensspanningstoestand. Zij stellen daarbij de vormverandering en niet de volumeverandering van een elementair deel verantwoordelijk voor breuk of voor afwijking van het lineair gedrag. Fysisch gezien past deze zienswijze bij begrippen als glijvlakken en dislokatiebewegingen.

### 3c. De vergelijkingen van Navier-Cauchy en van Beltrami-Michel

Voor de oplossing van een spanningsvraagstuk moet tegelijk worden voldaan aan 3 evenwichtsvergelijkingen (2.4), aan 6 relaties (3.6) tussen spanningen en vervormingen en aan 6 compatibiliteitsvergelijkingen (1.43) en (1.44). Er zijn dus 15 vergelijkingen voor 6 spanningen, 6 vervormingen en 3 verplaatsingscomponenten. Het is nu in het algemeen moeilijk oplossingen te vinden die aan het uitwendig oppervlak corresponderen met hetzij gegeven spanningsvectoren hetzij



gegeven verplaatsingen. Worden voor een zelfde deel van dat oppervlak spanningsvector en verplaatsingen tegelijk voorgeschreven dan heeft het spanningsvraagstuk zelfs geen oplossing.

Het spanningsvraagstuk kan als opgelost worden beschouwd als de 3 verplaatsingscomponenten in ieder punt van lichaam bekend zijn. Immers dan zijn ook de vervormingen en via de wet van Hooke de spanningen bekend. De vergelijkingen waaraan de verplaatsingscomponenten moeten voldoen opdat tegelijkertijd aan de evenwichtsvoorwaarden, de wet van Hooke en de compatibiliteitsvergelijkingen is voldaan worden de vergelijkingen van Navier-Cauchy genoemd. Zij kunnen eenvoudig worden gevonden door rechtstreekse substitutie van

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i})$$

in  $\sigma_{ij} = \mu \cdot 2e_{ij} + \lambda e_{hh} \delta_{ij}$

en daarna de spanningen  $\sigma_{ij}$  te substitueren in de evenwichtsvoorwaarden

$$(\lambda + G) u_{j,ji} + G u_{i,jj} + F_i = 0 \quad \text{Navier-Cauchy} \quad (3.17)$$

Met  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_j}$  (Operator van Laplace)

$$\lambda + G = \frac{G}{1-2\nu}$$

en  $u_{j,ji} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_V$

kan (3.17) ook worden geschreven als

$$G \left[ \frac{1}{1-2\nu} \epsilon_{V,i} + \nabla^2 u_i \right] + F_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.18)$$

De oplossing van het spanningsvraagstuk wordt dus gegeven door de 3 verplaatsingscomponenten  $u_i$  die aan de 3 vergelijkingen van Navier-Cauchy (3.18) voldoen en aan het uitwendig oppervlak voorgeschreven waarden hebben of aanleiding geven tot voorgeschreven waarden van de spanningsvectoren. Is dat laatste het geval, dan moeten deze randvoorwaarden voor de spanningen vertaald worden naar randvoorwaarden naar de verplaatsingen. Dit kan met (2.1) voor de spanningsvectoren  $T_i$  op het uitwendig oppervlak:

$$T_i = \sigma_{ji} n_j$$

Zo is bijvoorbeeld, met (3.12) voor  $i = 1$

$$\begin{aligned} T_1 &= \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\ &= \{ \lambda e_{hh} + \mu 2e_{11} \} n_1 + \mu 2e_{12} n_2 + \mu 2e_{13} n_3 \\ &= \lambda e_{hh} + \mu (e_{1j} + e_{j1}) n_j \\ &= \lambda u_{j,j} n_1 + \mu (e_{1,j} + u_{j,1}) n_j \end{aligned}$$

In het algemeen wordt deze randvoorwaarde dus

$$T_i = \lambda u_{j,j} n_i + \mu (u_{i,j} + u_{j,i}) n_j \quad (3.19)$$

Het spanningsprobleem is uiteraard ook als opgelost te beschouwen als overal de 6 spanningscomponenten bekend zijn. De vraag kan dan ook worden gesteld aan welke vergelijkingen de spanningen moeten voldoen opdat tegelijkertijd aan het evenwicht, de wet van Hooke en aan de compatibiliteitsvergelijkingen is voldaan. De vergelijkingen waaraan de spanningen moeten voldoen worden de vergelijkingen van Beltrami-Michel genoemd. Zij zullen hier slechts worden vermeld en niet worden afgeleid. Omdat bij hun afleiding gebruik is gemaakt van de gedifferentieerde vergelijkingen van Navier-Cauchy kunnen de vergelijkingen ook oplossingen geven die niet aan de evenwichtsvergelijkingen voldoen. Die oplossingen moeten worden geëlimineerd door te stellen dat de spanningen aan de evenwichtsvergelijkingen moeten voldoen. De vergelijkingen van Beltrami-Michel worden dan ook gezamenlijk met die evenwichtsvergelijkingen vermeld:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} \sigma_{hh,ij} + \frac{\nu}{1-\nu} F_{h,h} \delta_{ij} + F_{i,j} + F_{j,i} &= 0 \\ \sigma_{ij,j} + F_i &= 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

Bij oplossingen van problemen uit de elasticiteitstheorie vormen de vergelijkingen van Navier-Cauchy of die van Beltrami-Michel het uitgangspunt. Het spreekt vanzelf dat zij uitsluitend gelden voor isotrope materialen.

## HOOFDSTUK 4

### DE KLASSIEKE LAMINATENTHEORIE

Veel voorkomende constructie-elementen in anisotrope materialen zijn elementen waarvan de lengte en breedte zeer veel groter zijn dan hun dikte en die worden aangeduid met laminaten. Laminaten mogen in het algemeen worden verondersteld in een vlakspanningstoestand te verkeren, evenals hun samenstellende lagen. Door aan een referentievlak in het laminaat (meestal het geometrische middenvlak) drie vervormingscomponenten, een specifieke torsieverdraaiing en twee krommingen toe te kennen kan met behulp van de algemene wet van Hooke voor de afzonderlijke lagen een verband worden gelegd tussen de vervormingen en krommingen van het referentievlak enerzijds en de resulterende normaalkrachten, schuifkrachten, wringende en buigende momenten anderzijds. Aldus wordt de klassieke laminatentheorie verkregen waarin het spanningsprobleem wordt beschreven met eenvoudige vergelijkingen in plaats van de partiële differentiaalvergelijkingen (3.18) en (3.20) zoals die zijn afgeleid voor algemene elasticiteitsproblemen in isotrope materialen. Voordat nu de laminatentheorie kan worden opgebouwd moet eerst het (anisotrope) gedrag van de enkelvoudige laag worden bestudeerd.

#### 4a. Het gedrag van de enkelvoudige laag

Een belangrijke veronderstelling bij de behandeling van elasticiteitsproblemen in anisotrope materialen is dat de materialen macroscopisch homogeen zijn. De micro-structuur zoals die bij breukverschijnselen een belangrijke rol speelt wordt dus geheel buiten beschouwing gelaten. Verder wordt lineaire elasticiteit verondersteld en wordt het niet-lineaire gedrag van met name kunstharsen buiten beschouwing gelaten.

De algemene wet van Hooke (3.2) geeft door middel van 21 onafhankelijke elasticiteitsconstanten

$$A_{ijhk} = A_{jihk} = A_{ijkh} = A_{khij}$$

een relatie tussen 6 spanningscomponenten en 6 vervormingscomponenten. We herschrijven (3.2) nu in matrix-notatie:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (4.1)$$

symmetrisch

of korter

$$e_i = S_{ij} \sigma_j \quad i, j = 1 \text{ t/m } 6 \quad (4.2)$$

waarin

$$\begin{aligned} e_1 &= e_{11} & e_2 &= e_{22} & e_3 &= e_{33} \\ e_4 &= 2e_{23} = \gamma_{23} & e_5 &= 2e_{31} = \gamma_{31} & e_6 &= 2e_{12} = \gamma_{12} \\ \sigma_1 &= \sigma_{11} & \sigma_2 &= \sigma_{22} & \sigma_3 &= \sigma_{33} \\ \sigma_4 &= \sigma_{23} = \tau_{23} & \sigma_5 &= \sigma_{31} = \tau_{31} & \sigma_6 &= \sigma_{12} = \tau_{12} \end{aligned}$$

In (4.1) en (4.2) zijn de afschuifhoeken dus de technische afschuifhoeken  $\gamma$  en niet de componenten  $\frac{1}{2}\gamma$  van de vervormingstensor.

$S_{ij}$  uit (4.2) wordt de compliantiematrix genoemd. Inverteren van (4.2) geeft de algemene wet van Hooke waarin de spanningen als functies van de vervormingen worden geven:

$$\sigma_i = C_{ij} e_j$$

$C_{ij}$  wordt de stijfheidsmatrix genoemd.

N.B.: Het lijkt onlogisch voor de compliantiematrix de  $S$  en voor de stijfheidsmatrix de  $C$  te gebruiken. Deze notatie is echter in overeenstemming met de meeste literatuur op dit gebied. Bij raadpleging van literatuur moet de betekenis van de symbolen  $S$  en  $C$  altijd geverifieerd worden!

De meeste materialen zijn elastisch symmetrisch. En hoewel er vele vormen van symmetrie mogelijk zijn is voor laminaten meestal alleen van belang de symmetrie t.o.v. een orthogonaal assenstelsel. Het materiaal wordt dan orthotroop genoemd. Worden de coördinaatassen (het assenstelsel waarin de spanningen en vervormingen

zijn beschreven) evenwijdig gelegd met de orthotropie-assen (materiaalassen, assen van elastische symmetrie, principal material axes) dan verdwijnt in de algemene wet van Hooke (4.1) de koppeling tussen normaalspanningen en afschuifvervormingen en die tussen schuifspanningen en rekken. (4.1) vereenvoudigt tot

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

waarin zich nog 9 onafhankelijke elasticiteitsconstanten bevinden.

Bestaat een laag uit evenwijdige vezels in het  $X_1$ - $X_2$ -vlak die in de  $X_2$ - $X_3$ -doorsnede niet geordend, doch geheel willekeurig verspreid zijn dan is de  $X_2$ - $X_3$ -doorsnede isotroop en zijn in die doorsnede de eigenschappen niet richtingsafhankelijk. De  $X_2$ - en  $X_3$ -as zijn in dat geval gelijkwaardig geworden hetgeen tot gevolg heeft dat

$$S_{22} = S_{33}$$

$$S_{12} = S_{13}$$

$$S_{55} = S_{66}$$

terwijl in de isotrope doorsnede de typische isotrope relatie geldt

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\nu_{23})} = \frac{E_3}{2(1+\nu_{32})}$$

waardoor  $S_{44} = 1/G_{23}$  niet meer een onafhankelijke grootheid in de compliantie-matrix is.

(4.3) vereenvoudigt nu tot

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{66} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

waarin zich nog 5 onafhankelijke termen bevinden en wel

$$S_{11} \quad S_{12} \quad S_{22} \quad S_{66}$$

en naar keuze  $S_{23}$  of  $S_{44}$ .

In het voorgaande is het aantal onafhankelijke compliantietermen teruggebracht van 21 naar 5 door uitsluitend orthotrope materialen met isotrope  $X_2$ - $X_3$ -doorsnede te beschouwen. Door nu bovendien uitsluitend naar een bijzonder belastingsgeval op het laminaat te kijken kan het aantal compliantietermen nog verder worden teruggebracht. Dit belastingsgeval is de vlakspanningstoestand ('state of generalized plane stress'). Deze spanningstoestand ontstaat als op de buitenvlakken van een (relatief) dun laminaat geen spanningsvectoren werken en daar dus de spanningen  $\sigma_3 = \sigma_{33}$ ,  $\sigma_4 = \tau_{23}$  en  $\sigma_5 = \tau_{31}$  nul zijn. Bij dunne laminaten uitsluitend belast door spanningsvectoren 'in het vlak' van het laminaat zullen dan overal  $\sigma_{33}$ ,  $\tau_{23}$  en  $\tau_{31}$  nul zijn. (4.4) voor de enkelvoudige laag vereenvoudigt daardoor nog verder tot

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ & S_{22} & 0 \\ \text{symmetrisch} & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\text{en} \quad e_3 = S_{12}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \quad (4.6)$$

Hoewel er dus nog wel 5 onafhankelijke compliantietermen zijn, zijn er voor de oplossing van het spanningsvraagstuk in een vlakspanningstoestand nog slechts 4 interessant, nl.  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{22}$  en  $S_{66}$ . De 5e is alleen nog van belang indien men  $e_3$  zou willen uitrekenen met de van (4.5) onafhankelijke vergelijking (4.6).

De complianties  $S_{ij}$  uit (4.5) kunnen worden uitgedrukt in de zogenaamde 'engineering constants'.

- $E_\alpha$ , de elasticiteitsmodulus van de enkele laag in de stiffste richting, bij unidirektionele lagen dus de richting van de vezels.
- $E_\beta$ , de elasticiteitsmodulus van de enkele laag in de richting loodrecht op de  $\alpha$ -richting.
- $\nu_{\alpha\beta}$ , de dwarscontractiecoëfficiënt die de dwarscontractie in  $\beta$ -richting geeft als gevolg van een spanning in  $\alpha$ -richting.
- $G_{\alpha\beta}$ , de glijdingsmodulus in de materiaalasrichtingen.

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_\alpha} & S_{22} &= \frac{1}{E_\beta} \\ S_{12} &= -\frac{\nu_{\alpha\beta}}{E_\alpha} & S_{66} &= \frac{1}{G_{\alpha\beta}} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Inverteren van (4.5) geeft

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ \text{symmetrisch} & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

waarin symbool Q wordt gebruikt voor de stiffheidstermen om aan te geven dat het hier gaat om een bijzondere laag in een bijzondere spanningstoestand en dus niet om het algemene geval zoals in (4.3) waar voor de stiffheidstermen de C is gebruikt. In (4.8) is

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{12} - S_{12}^2} = \frac{E_\alpha}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} \\ Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{\beta\alpha}E_\alpha}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} = \frac{\nu_{\alpha\beta}E_\beta}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_\beta}{1 - \nu_{\alpha\beta}\nu_{\beta\alpha}} \\ Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} = G_{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.9)$$

Er wordt op gewezen dat door de definitie van  $\nu_{\alpha\beta}$  in (4.5) formeel geldt

$$S_{12} = -\nu_{\beta\alpha}/E_{\beta}$$

en  $S_{21} = -\nu_{\alpha\beta}/E_{\alpha}$

Op grond van de symmetrie van  $S_{ij}$  (Maxwell) is echter

$$\frac{\nu_{\beta\alpha}}{E_{\beta}} = \frac{\nu_{\alpha\beta}}{E_{\alpha}} \quad (4.10)$$

of  $\nu_{\beta\alpha}E_{\alpha} = \nu_{\alpha\beta}E_{\beta} \quad (4.11)$

Relaties (4.10) en (4.11) worden veelvuldig gebruikt. Het is gebleken dat  $\nu_{\alpha\beta}$  (of  $\nu_{\beta\alpha}$ ) bij anisotrope materialen soms (relatief) hoge waarden heeft in de buurt van de eenheid. Bij isotrope materialen ligt  $\nu$  meestal in de buurt van 0.33.

$E_{\alpha}$ ,  $E_{\beta}$ ,  $\nu_{\alpha\beta}$  en  $G_{\alpha\beta}$  worden ook wel hoofdconstanten genoemd. Er zijn verschillende theorieën om ze uit de eigenschappen van de samenstellende materialen van een composiet te berekenen. Uiteraard kunnen ze ook experimenteel worden bepaald. Hier wordt daar verder niet op ingegaan.

N.B.1.: In een vlakspanningssituatie is de isotrope  $X_2$ - $X_3$ -doorsnede van een laag niet een noodzakelijke voorwaarde om tot een eenvoudige vervormingsspanningsrelatie te komen. Immers met  $\sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = 0$  wordt uit (4.3) altijd gevonden.

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ & S_{22} & 0 \\ \text{symmetrisch} & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}$$

of geïnverteerd:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ & & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \end{Bmatrix}$$

Voor een eventuele berekening van  $e_3$  bij niet-isotrope  $X_2$ - $X_3$ -doorsnede



$$e_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \quad (\text{vergelijk (4.6)})$$

is dan echter wel één extra materiaalgegeven nodig, nl.  $S_{13}$  (ofwel  $\nu_{\alpha\gamma}$ ;  $\gamma$  is de derde orthotropie-as).

N.B.2.: Het is uiteraard ook mogelijk een vlakke vervormingstoestand voor een laminaat te veronderstellen, hoewel die bij dunne laminaten minder realistisch is. Voor het onderzoek van de vlakke vervormingstoestand van een laag met één isotrope doorsnede is het handig (4.4) eerst te inverteren

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & Q'_{22} & Q'_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & Q'_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & Q'_{44} & 0 & 0 \\ & \text{symmetrisch} & & & Q'_{66} & 0 \\ & & & & & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{Bmatrix}$$

en daarna  $e_3 = e_4 = e_5 = 0$  te stellen zodat

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ & Q'_{22} & 0 \\ & & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

$\sigma_3 = Q'_{12}e_1 + Q'_{23}e_2$  is de spanning loodrecht op het vlak van de laag, nodig om de vlakke vervormingssituatie te handhaven.

Het is duidelijk dat  $Q'_{ij}$  uit (4.12) niet gelijk is aan  $Q_{ij}$  uit (4.8). Immers  $Q'_{ij}$  is ontstaan door inverteren van de hele matrix in (4.4) en daarna zijn bepaalde rekken nul gesteld.  $Q_{ij}$  daarentegen is ontstaan door inverteren van de veel kleinere matrix in (4.5) nadat bepaalde spanningen nul waren gesteld. Zo is bijvoorbeeld

$$Q'_{11} = \frac{S_{22} + S_{23}}{S_{11}(S_{22} + S_{23}) - 2S_{12}^2} \quad (4.13)$$

$$\text{terwijl } Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$

In een vlakspanningstoestand heeft een laag dan ook andere 'stijfheden' dan in een vlakke vervormingstoestand.

Zou een laag in een vlakke vervormingstoestand geen isotrope  $X_2$ - $X_3$ -doorsnede hebben, dan moet niet (4.4) maar (4.3) worden geïnverteerd om het verband

$$\sigma_i = Q'_{ij} e_j$$

te vinden. De uitdrukking die dan bijvoorbeeld voor  $Q'_{11}$  wordt gevonden is aanzienlijk gecompliceerder dan uitdrukking (4.13).

N.B.3.: Een orthotroop materiaal onderscheid zich van isotroop materiaal door

$$E_\alpha \neq E_\beta \quad \text{of} \quad E_\alpha/E_\beta = S_{22}/S_{11} \neq 1$$

$$\text{en} \quad G_{\alpha\beta} \neq \frac{E_\alpha}{2(1+\nu_{\alpha\beta})} \quad \text{of} \quad \frac{E_\alpha}{2G_{\alpha\beta}} - \nu_{\alpha\beta} = \frac{2S_{12} + S_{66}}{2S_{11}} \neq 1$$

Er zijn dus twee orthotropie parameters, namelijk

$$r^2 = S_{22}/S_{11} \quad (\text{directionality factor})$$

$$\text{en} \quad a = \frac{2S_{12} + S_{66}}{2S_{11}} \quad (\text{angularity factor})$$

Voorwaarde voor isotropie is  $a = r = 1$ . Bij orthotrope materialen kunnen nooit beide gelijk één zijn!

#### 4b. Elastische eigenschappen van de enkelvoudige laag onder een hoek met de materiaalassen

In de vorige paragraaf is het aantal onafhankelijke elasticiteitsconstanten teruggebracht

- van 21 naar 9 door coördinaatassen en materiaalassen te laten samen vallen
- van 9 naar 5 door materialen te beschouwen met één isotrope doorsnede
- van 5 naar 4 door uitsluitend een bijzondere spanningstoestand te beschouwen, nl. de vlakspanningstoestand.

In laminaten zijn de afzonderlijke lagen meestal in verschillende richtingen georiënteerd. Om het gedrag van een laminaat als geheel te kennen is het daarom nodig het gedrag van de afzonderlijke lagen in willekeurige richtingen (in het vlak van de lagen) te kennen. In het hiervoor beschreven vereenvoudigde geval van een laag (met één isotrope doorsnede) in een vlakspanningstoestand zijn die eigenschappen in een willekeurige richting betrekkelijk eenvoudig te vinden met de transformatieformules voor de vervormingen en de spanningen zoals die in Hfdst. 1 en 2 zijn gegeven voor rotaties om de  $X_3$ -as. We schrijven formules (1.26) t/m (1.28) met de technische afschuifhoek  $\gamma_{12} = 2e_{12} = e_6$  en  $m = \cos \varphi$ ,  $n = \sin \varphi$ :

$$\begin{aligned}\bar{e}_1 &= m^2 e_1 + n^2 e_2 + mn e_6 \\ \bar{e}_2 &= n^2 e_1 + m^2 e_2 - mn e_6 \\ \bar{e}_6 &= 2mn(e_2 - e_1) + (m^2 - n^2) e_6\end{aligned}$$

of, in matrixnotatie

$$\begin{Bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \end{Bmatrix} = [N] \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

Inverteren van (4.14) geeft

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -mn \\ n^2 & m^2 & mn \\ 2mn & -2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_6 \end{Bmatrix} = [N^{-1}] \begin{Bmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_6 \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

De transformatieformules voor spanningen (2.8) t/m (2.10) worden met  $\sigma_{12} = \sigma_6$  geschreven als

$$\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [M] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

Uit (4.15) en (4.16) blijkt dat  $[N^{-1}] = [M]^T$  zodat we kunnen schrijven:

$$e_j = [M]^T \overline{e}_j \quad j = 1, 2, 6 \quad (4.17)$$

$$\overline{\sigma}_i = [M] \sigma_i \quad i = 1, 2, 6 \quad (4.18)$$

Door (4.17) te substitueren in de wet van Hooke zoals die in (4.8) is gegeven in de richting van de materiaalassen

$$\sigma_i = Q_{ij} e_j \quad i, j = 1, 2, 6$$

en daarna  $\sigma_i$  te substitueren in (4.18) wordt gevonden

$$\overline{\sigma}_i = [M] Q_{ij} [M]^T \overline{e}_j$$

$$\text{ofwel} \quad \overline{\sigma}_i = \overline{Q}_{ij} \overline{e}_j \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (4.19)$$

(4.19) is dus de wet van Hooke voor een orthotrope laag in een vlakspanningstoestand in een willekeurige richting t.o.v. de materiaalassen.

$$\overline{Q}_{ij} = [M] Q_{ij} [M]^T$$

geeft uitgewerkt de zeer belangrijke relaties voor de stijfheidstermen  $\overline{Q}_{ij}$  in een willekeurige richting:

$$\begin{aligned} \overline{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4\varphi + Q_{22} \sin^4\varphi + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\varphi \cos^2\varphi \\ \overline{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4\varphi + Q_{22} \cos^4\varphi + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2\varphi \cos^2\varphi \\ \overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2\varphi \cos^2\varphi + Q_{12} (\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) \\ \overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2\varphi \cos^2\varphi + Q_{66} (\sin^4\varphi + \cos^4\varphi) \\ \overline{Q}_{16} &= (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos\varphi \sin^3\varphi - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3\varphi \sin\varphi \\ \overline{Q}_{26} &= (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3\varphi \sin\varphi - (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos\varphi \sin^3\varphi \end{aligned} \quad (4.20)$$

Er wordt aan herinnerd dat  $Q_{ij}$  uitgedrukt in 'engineering constants' in (4.9) is gegeven.

Door substitutie van

$$\sigma_j = [M^{-1}] \overline{\sigma}_j$$

in  $e_i = S_{ij} \sigma_j$

en daarna  $e_i$  te substitueren in

$$\overline{e}_i = [M^{-1}]^T e_i$$

wordt gevonden

$$\overline{e}_i = \overline{S}_{ij} \overline{\sigma}_j \quad (4.21)$$

waarin  $\overline{S}_{ij} = [M^{-1}]^T S_{ij} [M^{-1}]$  de relaties zijn voor de compliantietermen in een willekeurige richting.

Uitgewerkt:

$$\overline{S}_{11} = S_{11} \cos^4 \varphi + S_{22} \sin^4 \varphi + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \frac{1}{E_{11}}$$

$$\overline{S}_{22} = S_{11} \sin^4 \varphi + S_{22} \cos^4 \varphi + (2S_{12} + S_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi = \frac{1}{E_{22}}$$

$$\overline{S}_{12} = (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + S_{12} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = -\frac{\nu_{12}}{E_{11}} = -\frac{\nu_{21}}{E_{22}} \quad (4.22)$$

$$\overline{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66}) \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi + S_{66} (\sin^4 \varphi + \cos^4 \varphi) = \frac{1}{G_{12}}$$

$$\overline{S}_{16} = (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \cos \varphi \sin^3 \varphi - (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \cos^3 \varphi \sin \varphi$$

$$\overline{S}_{26} = (2S_{22} - 2S_{12} - S_{66}) \cos^3 \varphi \sin \varphi - (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66}) \cos \varphi \sin^3 \varphi$$

waarin de compliantietermen  $S_{ij}$  uitgedrukt in de 'engineering constants' zijn gegeven in (4.7).

In het algemene geval zijn  $\overline{Q}_{16}$ ,  $\overline{Q}_{26}$ ,  $\overline{S}_{16}$  en  $\overline{S}_{26}$  dus niet nul zoals dat wel het geval is bij samenvallende coördinaatassen en materiaalassen en bij isotrope materialen.

De elementen  $\overline{S}_{16}$  en  $\overline{S}_{26}$  geven aanleiding tot het invoeren van nieuwe 'engineering constants' via

$$\overline{S}_{16} = \frac{\eta_{12,1}}{\overline{E}_{11}} = \frac{\eta_{1,12}}{\overline{G}_{12}} \quad (4.23)$$

$$\overline{S}_{26} = \frac{\eta_{12,2}}{\overline{E}_{22}} = \frac{\eta_{2,12}}{\overline{G}_{12}}$$

waarin de  $\eta$ 's de 'coëfficiënten van wederzijdse beïnvloeding' (coefficient of mutual influence) worden genoemd:

$\eta_{i,ij} = \frac{\overline{e}_i}{\overline{\gamma}_{ij}}$  is de coëfficiënt van de eerste soort, geeft de rek in i-richting t.g.v. een afschuifspanning  $\overline{\tau}_{ij}$  (alle andere spanningen nul).

$\eta_{ij,i} = \frac{\overline{\gamma}_{ij}}{\overline{e}_i}$  is de coëfficiënt van de tweede soort, geeft de afschuifvervorming in ij-richting t.g.v. een normaalspanning  $\overline{\sigma}_i$  (alle andere spanningen nul).

Er moet bij de hier behandelde materialen goed onderscheid worden gemaakt tussen:

- de hoofdrichtingen van het materiaal (de assen van elastische symmetrie),
- de hoofdrichtingen van de spanningen (geen afschuifspanningen),
- de hoofdrichtingen van de rekken (geen afschuifvervormingen).

De hoofdrichtingen van de spanningen vallen meestal niet samen met de hoofdrichtingen van de rekken. Veronderstel:

- het  $\overline{X}_1$ - $\overline{X}_2$ -assenstelsel geeft de hoofdrichtingen voor de spanningen,
- het  $\overline{X}_1$ - $\overline{X}_2$ -assenstelsel geeft de hoofdrichtingen voor de rekken,
- de hoek tussen de twee assenstelsels is  $\theta$ ,

dan is in het  $\overline{X}_1$ - $\overline{X}_2$ -assenstelsel:

$$\overline{e}_i = \overline{S}_{ij} \overline{\sigma}_j$$

ofwel, met  $\overline{\sigma}_6 = 0$  (hoofdspanningen!)

$$\overline{e}_1 = \overline{S}_{11} \overline{\sigma}_1 + \overline{S}_{12} \overline{\sigma}_2$$

$$\overline{e}_2 = \overline{S}_{12} \overline{\sigma}_1 + \overline{S}_{22} \overline{\sigma}_2$$

$$\overline{e}_6 = \overline{S}_{16} \overline{\sigma}_1 + \overline{S}_{26} \overline{\sigma}_2$$

De rekken in het  $\overline{X}_1$ - $\overline{X}_2$ -assenstelsel zijn met de transformatieformules (4.14) uit die in het  $X_1$ - $X_2$ -assenstelsel te vinden. Voor de afschuifhoek is die formule

$$\begin{aligned} \overline{e}_6 &= -(\overline{e}_1 - \overline{e}_2) 2 \sin \theta \cos \theta + \overline{e}_6 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ &= -(\overline{e}_1 - \overline{e}_2) \sin 2\theta + \overline{e}_6 \cos 2\theta \end{aligned}$$

Echter  $\overline{e}_6 = 0$  (hoofdrekken!)

zodat 
$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{\overline{e}_6}{\overline{e}_1 - \overline{e}_2} = \frac{\overline{S}_{16} \overline{\sigma}_1 + \overline{S}_{26} \overline{\sigma}_2}{(\overline{S}_{11} - \overline{S}_{12}) \overline{\sigma}_1 + (\overline{S}_{12} - \overline{S}_{22}) \overline{\sigma}_2} \quad (4.24)$$

De hoek tussen de hoofdrichtingen voor de spanningen en die voor de rekken is dus afhankelijk van de verhouding van de hoofdspanningen en van de compliantie-termen  $S_{ij}$ .

Een konsekwentie van het niet samenvallen van de verschillende hoofdrichtingen is dat uit metingen waarbij rekken zijn bepaald (en dat gebeurt bij de meeste meetmethoden: rekstrookjes, holografie, Moiré, maar ook simpelweg verplaatsings-opnemers!) niet zonder meer voldoende informatie voor het berekenen van spanningen wordt verkregen.

Bij proeven op anisotrope materialen moeten de randvoorwaarden altijd goed gedefinieerd worden. Als toelichting daarvan dient het volgende.

De elasticiteitsmodulus  $E$  geeft het verband tussen een trekspanning in een bepaalde richting en de rek in die richting bij afwezigheid van andere spanningen.

Moet nu van een bepaald materiaal de elasticiteitsmodulus worden bepaald onder een hoek met de materiaalassen dan geldt

$$\overline{\sigma}_i = Q_{ij} \overline{e}_j$$

Een normale trekbank waarin dergelijke proeven worden gedaan laat geen afschuifvervorming van het proefstuk toe omdat daar de inklembekken niet voor zijn ingericht. Dus is  $\overline{e_6} = 0$ . Bovendien zal bij een aangebrachte trekspanning  $\overline{\sigma_1}$  de

- spanning  $\overline{\sigma_2}$  nul zijn bij smalle proefstaven en  $\overline{e_2} \neq 0$ ,

- de rek  $\overline{e_2}$  nul zijn bij brede proefstaven en  $\overline{\sigma_2} \neq 0$ .

Er zijn bij een eenvoudige trekproef nu 4 verschillende randvoorwaarden mogelijk:

1. Smalle proefstaaf, inklembekken niet draaibaar.

$$\overline{\sigma_1} = \overline{Q_{11}} \overline{e_1} + \overline{Q_{12}} \overline{e_2} \quad (4.25)$$

$$\overline{\sigma_2} = \overline{Q_{12}} \overline{e_1} + \overline{Q_{22}} \overline{e_2} = 0 \quad (4.26)$$

$$\overline{\sigma_6} = \overline{Q_{16}} \overline{e_1} + \overline{Q_{26}} \overline{e_2} \neq 0 \quad (4.27)$$

uit (4.25) en (4.26) volgt:

$$\overline{\sigma_1} = \left( \overline{Q_{11}} - \frac{\overline{Q_{12}^2}}{\overline{Q_{22}}} \right) \overline{e_1} \quad (4.28)$$

waarin  $\overline{Q_{11}} - \frac{\overline{Q_{12}^2}}{\overline{Q_{22}}} = \overline{E_{11}}$  dus een schijnbare elasticiteitsmodulus is.

2. Brede proefstaven, inklembekken niet draaibaar.

$$\overline{\sigma_1} = \overline{Q_{11}} \overline{e_1}$$

$$\overline{\sigma_2} = \overline{Q_{12}} \overline{e_1} \neq 0$$

$$\overline{\sigma_6} = \overline{Q_{16}} \overline{e_1} \neq 0$$

Hierbij is  $\overline{Q_{11}} = \overline{E_{11}}$  de schijnbare elasticiteitsmodulus.

3. Smalle proefstaven, inklembekken draaibaar waardoor een afschuifvervorming wordt toegelaten en  $\overline{\sigma_6} = 0$ .

We gebruiken nu

$$\overline{e_i} = \overline{S_{ij}} \overline{\sigma_j}$$



waaruit volgt

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 &= \bar{S}_{11} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{e}_2 &= \bar{S}_{12} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{e}_6 &= \bar{S}_{16} \bar{\sigma}_1 \end{aligned} \tag{4.29}$$

omdat  $\bar{\sigma}_2 = \bar{\sigma}_6 = 0$  geeft  $\bar{S}_{11} = 1/\bar{E}_{11}$  volgens de definitie dus de echte elasticiteitsmodulus.

4. Brede proefstaven, inklembekken draaibaar.

$$\bar{e}_1 = \bar{S}_{11} \bar{\sigma}_1 + \bar{S}_{12} \bar{\sigma}_2 \tag{4.30}$$

$$\bar{e}_2 = \bar{S}_{12} \bar{\sigma}_1 + \bar{S}_{22} \bar{\sigma}_2 = 0 \tag{4.31}$$

$$\bar{e}_6 = \bar{S}_{16} \bar{\sigma}_1 + \bar{S}_{26} \bar{\sigma}_2$$

(4.30) en (4.31) geven

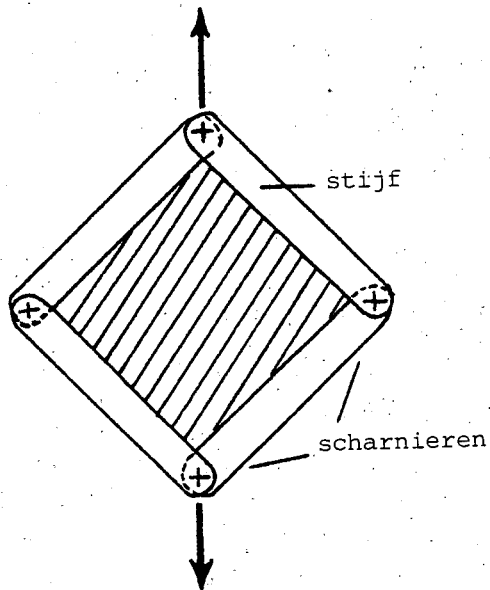
$$\bar{e}_1 = \left( \bar{S}_{11} - \frac{\bar{S}_{12}^2}{\bar{S}_{22}} \right) \bar{\sigma}_1 \tag{4.32}$$

waarin  $\bar{S}_{11} - \frac{\bar{S}_{12}^2}{\bar{S}_{22}} = \frac{1}{\bar{E}_{11}}$  weer een schijnbare elasticiteitsmodulus geeft.

Een ander voorbeeld van de zorgvuldigheid waarmee randvoorwaarden moeten worden gehanteerd is de afschuifproef op een plaat door middel van een stijf frame ter bepaling van de glijdingsmodulus.

De glijdingsmodulus  $G$  geeft het verband tussen een schuifspanning in een bepaalde richting en de afschuifvervorming in die richting bij afwezigheid van andere spanningen.

Maken de materiaalassen een hoek met de belastingsrichting dan wordt een schijnbare glijdingsmodulus gemeten. Immers een stijf frame geeft een afschuifvervorming maar zal de rekken  $\bar{e}_1$  en  $\bar{e}_2$  verhinderen waardoor



Figuur 4.1.

$$\overline{\sigma}_1 = \overline{Q}_{16} \overline{e}_6 \neq 0$$

$$\overline{\sigma}_2 = \overline{Q}_{26} \overline{e}_6 \neq 0$$

$$\overline{\sigma}_6 = \overline{Q}_{66} \overline{e}_6$$

en  $\overline{Q}_{66} = \overline{G}_{12}$  is dus de schijnbare glijdingsmodulus.

Wordt de proef zo ingericht dat de rekken  $\overline{e}_1$  en  $\overline{e}_2$  niet worden verhinderd dan kunnen er geen normaalspanningen ontstaan.

Dan geeft in

$$\overline{e}_6 = \overline{S}_{66} \overline{\sigma}_6$$

$\overline{S}_{66} = 1/\overline{G}_{12}$  de echte glijdingsmodulus.

In de hiernavolgende tabel zijn de schijnbare  $\overline{E}_{11}$  voor smalle proefstaven en de echte  $E_{11}$ , samen met de schijnbare en de echte  $\overline{G}_{12}$  gegeven van een materiaal met de volgende hoofdconstanten:

$$E_\alpha = 145 \text{ GPa}$$

$$E_\beta = 7 \text{ GPa}$$

$$G_{\alpha\beta} = 3,5 \text{ GPa}$$

$$\nu_{\alpha\beta} = 0.34$$

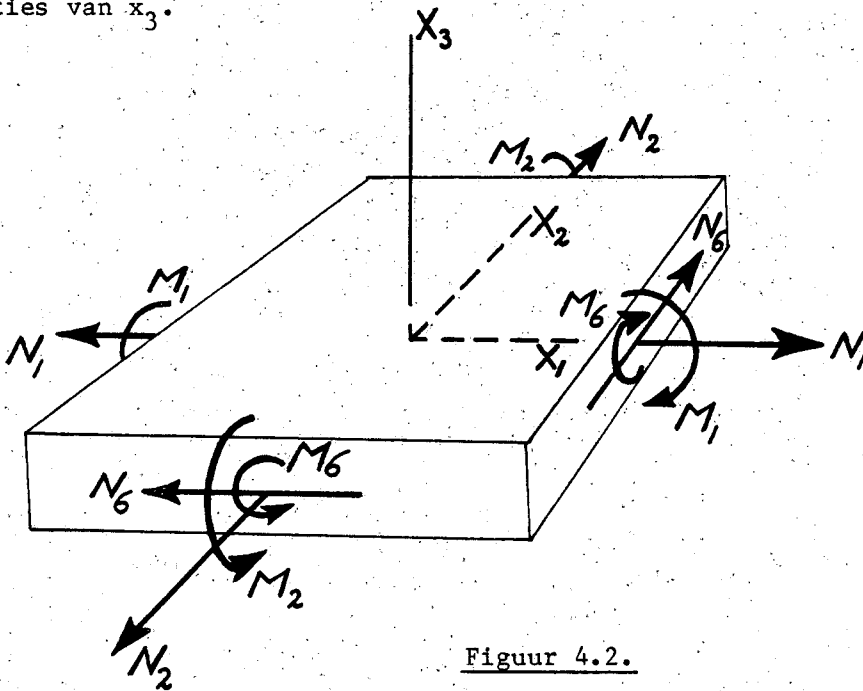
$\varphi$  is de hoek tussen materiaalassen en belastingsrichting

$\varphi =$	$\overline{E}_{11}$ schijn GPa	$\overline{E}_{11}$ echt GPa	$\overline{G}_{12}$ schijn GPa	$\overline{G}_{12}$ echt GPa
0°	145	145	3,5	3,5
15°	113,55	41,31	11,88	3,95
30°	40,31	15,27	28,64	5,34
45°	12,86	9,29	37,02	6,47

4c. De algemene vervormingstoestand van laminaten

Bij de behandeling van de algemene vervormingstoestand van uit verschillende lagen samengestelde laminaten wordt de vlakspanningstoestand van de afzonderlijke lagen en het laminaat als geheel nog steeds als uitgangspunt genomen. Echter nu zullen ook de verplaatsingen in  $X_3$ -richting, alsmede buigende en wringende momenten op de plaatranden in de beschouwing worden betrokken.

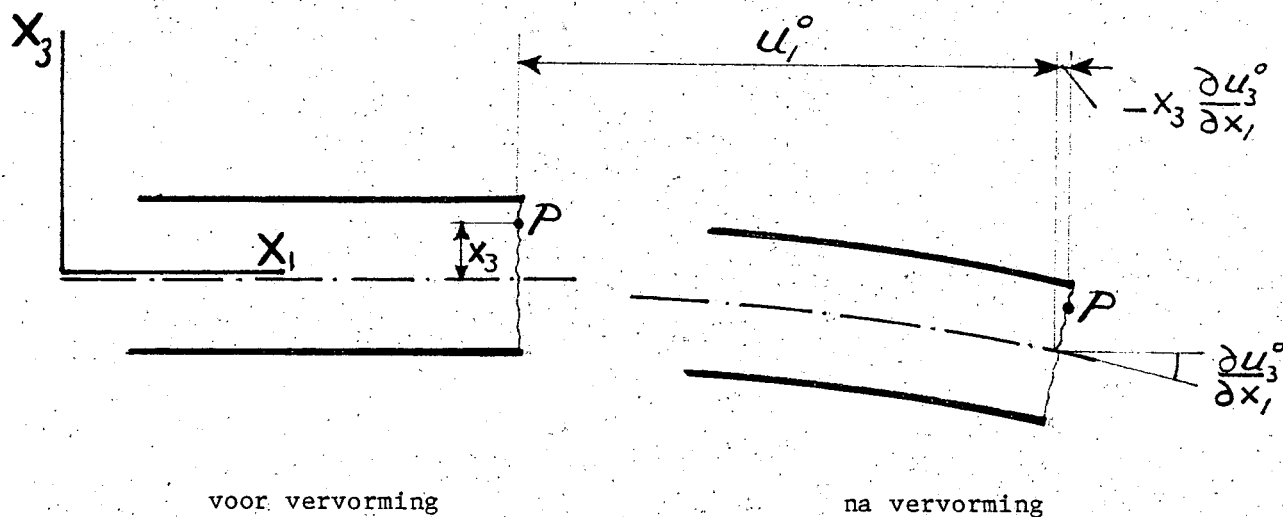
In Figuur 4.2 is een plaatdeel uit een laminaat getekend met als lengte en breedte de eenheid en dikte  $h$ . De getekende randbelastingen gelden dus per lengte- resp. breedte-eenheid. Het  $X_1$ - $X_2$ -vlak wordt op de halve dikte gelegd; het zal het referentievlak worden genoemd. Er wordt aangenomen dat de lagen onderling onverbrekkelijk aan elkaar zijn gelijmd. Vervormingen zijn dan continue functies van  $x_3$ .



Figuur 4.2.

- De krachten in het vlak van het referentievlak, de z.g. 'in-plane' krachten  $N_1$ ,  $N_2$  en  $N_{12} = N_6$  geven in eerste instantie de verplaatsingen  $u_1^0$  en  $u_2^0$  van de punten van dat referentievlak in  $X_1$ - resp.  $X_2$ -richting.
- De momenten  $M_1$ ,  $M_2$  en  $M_{12} = M_6$  op de plaatranden geven in eerste instantie de verplaatsing  $u_3^0$  van de punten van het referentievlak in  $X_3$ -richting. Een moment heeft een positieve kromming tot gevolg als de bolle kant na kromming zich aan de kant van de positieve  $X_3$ -as bevindt.

Uit Figuur 4.3 kan nu worden afgeleid dat voor de verplaatsing van  $u_1$  van een willekeurig punt P op afstand  $x_3$  van het referentievlak geldt:



Figuur 4.3.

$$u_1 = u_1^0 - x_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \quad (4.33)$$

Evenzo geldt voor de verplaatsing  $u_2$  in  $X_2$ -richting:

$$u_2 = u_2^0 - x_3 \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \quad (4.34)$$

N.B.: Er is hierbij stilzwijgend verondersteld dat rechte doorsneden loodrecht op het referentievlak na vervorming nog steeds loodrecht op het referentievlak staan en recht zijn gebleven hetgeen erop neerkomt dat overal  $\gamma_{13} = \gamma_{23} = 0$  is verondersteld. Bovendien is verondersteld dat de afstand  $x_3$  van P tot het referentievlak niet is veranderd, hetgeen neerkomt op  $e_3 = 0$  en in strijd is met de aangenomen vlakspanningstoestand voor de lagen. Bij kleine vervormingen zal de fout echter zeer klein zijn. De veronderstellingen  $\gamma_{13} = \gamma_{23} = e_3 = 0$  bij buigen van dunne platen worden de Kirchhoff-hypothese genoemd.

Met (4.33) en (4.34) worden de vervormingen in P:

$$e_{11} = \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} - x_3 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} = e_{11}^0 + x_3 \rho_{11} \quad (4.35)$$

$$e_{22} = \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} - x_3 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} = e_{22}^0 + x_3 \rho_{22} \quad (4.36)$$

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right) - x_3 \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2} = e_{12}^0 + x_3 \rho_{12}$$

ofwel, met de technische afschuifhoek  $\gamma_{12} = 2e_{12}$

$$\gamma_{12} = \gamma_{12}^0 + x_3 2\rho_{12} \quad (4.37)$$

$\rho_{11} = -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2}$  en  $\rho_{22} = -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2}$  zijn de krommingen van het referentievlak t.g.v.

$M_1$  resp.  $M_2$ . De torsiekromming  $\rho_{12} = -\frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1 \partial x_2}$  wordt wel de 'specifieke hoekverdraaiing' t.g.v. het torsiemoment  $M_{12}$  genoemd.

Met

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \rho_1 \\ \rho_{22} &= \rho_2 \\ 2\rho_{12} &= \rho_6 \end{aligned}$$

worden (4.35), (4.36) en (4.37) geschreven als

$$e_i = e_i^0 + x_3 \rho_i \quad (i = 1, 2, 6) \quad (4.38)$$

Als het laminaat bestaat uit n lagen en de willekeurige  $k^e$ -laag wordt begrensd door  $(x_3)_{k-1}$  en  $(x_3)_k$  dan worden de krachten en momenten uit Figuur 4.2 (let wel: per lengte- of breedte-eenheid!).

$$N_i = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_i dx_3 = \sum_{k=1}^n \int_{(x_3)_{k-1}}^{(x_3)_k} \sigma_i^{(k)} dx_3 \quad (i = 1, 2, 6) \quad (4.39)$$

$$M_i = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_i x_3 dx_3 = \sum_{k=1}^n \int_{(x_3)_{k-1}}^{(x_3)_k} \sigma_i^{(k)} x_3 dx_3 \quad (i = 1, 2, 6) \quad (4.40)$$

waarin de overstreepte  $\sigma$ 's worden gebruikt omdat de materiaalassen van de  $k^e$ -laag in het algemeen een hoek maken met de in Figuur 4.2 getekende coördinaatassen.

Voor de  $k^e$ -laag geeft de wet van Hooke (4.19) met uitdrukking (4.38) voor de vervormingen van die laag:

$$\overline{\sigma}_i^{(k)} = \overline{Q}_{ij}^{(k)} \overline{e}_j^{(k)} = \overline{Q}_{ij}^{(k)} (e_j^0 + x_3 \rho_j)$$

waarmee uit (4.39) en (4.40) volgt:

$$N_i = e_j^0 \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} \{(x_3)_k - (x_3)_{k-1}\} + \rho_j \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} \frac{1}{2} \{(x_3)_k^2 - (x_3)_{k-1}^2\} \quad (4.41)$$

$$M_i = e_j^0 \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} \frac{1}{2} \{(x_3)_k^2 - (x_3)_{k-1}^2\} + \rho_j \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} \frac{1}{3} \{(x_3)_k^3 - (x_3)_{k-1}^3\} \quad (4.42)$$

Er wordt aan herinnerd dat  $\overline{Q}_{ij}$  is gegeven in (4.20)

$$\text{Met } A_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} \{(x_3)_k - (x_3)_{k-1}\} \quad (4.43)$$

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} \frac{1}{2} \{(x_3)_k^2 - (x_3)_{k-1}^2\} \quad (4.44)$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^n \overline{Q}_{ij}^{(k)} \frac{1}{3} \{(x_3)_k^3 - (x_3)_{k-1}^3\} \quad (4.45)$$

kunnen (4.41) en (4.42) worden geschreven:

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_j^0 \\ \rho_j \end{Bmatrix} \quad (i, j = 1, 2, 6) \quad (4.46)$$

A, B en D zijn submatrices die worden bepaald door de  $\overline{Q}_{ij}$ , de dikte en de volgorde van de diverse lagen. De hele 'ABD' matrix wordt vaak de koppelmatrix genoemd. Alle termen van deze matrix die niet nul zijn geven een verband tussen een N of M en een e of  $\rho$ . In het algemeen kunnen bij laminaten normaalkrachten, schuifkrachten, buigende en wringende momenten elk voor zich zowel als in combi-

natie dus rekken, afschuifvervormingen, buiging en torsie of combinaties daarvan tot gevolg hebben. We zullen ter toelichting een aantal gevallen nader bestuderen.

1. De isotrope plaat

Omdat  $(x_3)_k^2 - (x_3)_{k-1}^2 = 0$  is  $B_{ij} = 0$ , dus geen koppeling  $N - \rho$   
 en geen koppeling  $M - e$ .

Omdat  $\overline{Q_{16}} = \overline{Q_{26}} = 0$  is  $A_{16} = A_{26} = 0$ , dus geen koppeling  $\sigma - \gamma$   
 en geen koppeling  $\tau - e$

en  $D_{16} = D_{26} = 0$ , dus geen koppeling  $M_1(M_2) - \rho_6$   
 en geen koppeling  $M_6 - \rho_1(\rho_2)$

Voor de isotrope plaat vereenvoudigt (4.46) daarom tot twee (van elkaar onafhankelijke) stelsels vergelijkingen:

$$\begin{aligned} N_1 &= Q_{11} h e_1^0 + Q_{12} h e_2^0 \\ N_2 &= Q_{12} h e_1^0 + Q_{22} h e_2^0 \\ N_6 &= Q_{66} h e_6^0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned} M_1 &= (\rho_1 Q_{11} + \rho_2 Q_{12}) \frac{h^3}{12} \\ M_2 &= (\rho_1 Q_{12} + \rho_2 Q_{22}) \frac{h^3}{12} \\ M_6 &= \rho_6 Q_{66} \frac{h^3}{12} \end{aligned} \tag{4.48}$$

Met  $Q_{11} = Q_{22} = \frac{E}{1-\nu^2}$        $Q_{12} = \frac{\nu E}{1-\nu^2}$        $Q_{66} = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

en  $I = \frac{1}{12} h^3$  (bij breedte de eenheid)

worden (4.47)

$$\sigma_i = C_{ij} e_j^0$$

en (4.48), na inverteren

$$\rho_1 = \frac{M_1}{EI} - \frac{\nu M_2}{EI} \tag{4.49}$$

$$\rho_2 = -\frac{\nu M_1}{EI} + \frac{M_2}{EI} \quad (4.50)$$

$$\rho_{12} = \frac{(1+\nu) M_6}{EI} \quad (4.51)$$

In (4.51) is  $M_6$  het wringmoment per eenheid van lengte of breedte. Op een plaat met lengte  $a$  en breedte  $b$  geeft  $M_6$  dus als torsie-moment over de totale lengte en breedte  $M_6 \cdot a$  resp.  $M_6 \cdot b$ , zie Figuur 4.4. Deze momenten kunnen worden gerepresenteerd door 2 krachten  $M_6$  in ieder hoekpunt van de plaat die in paren het uitwendig  $M_w$  geven.

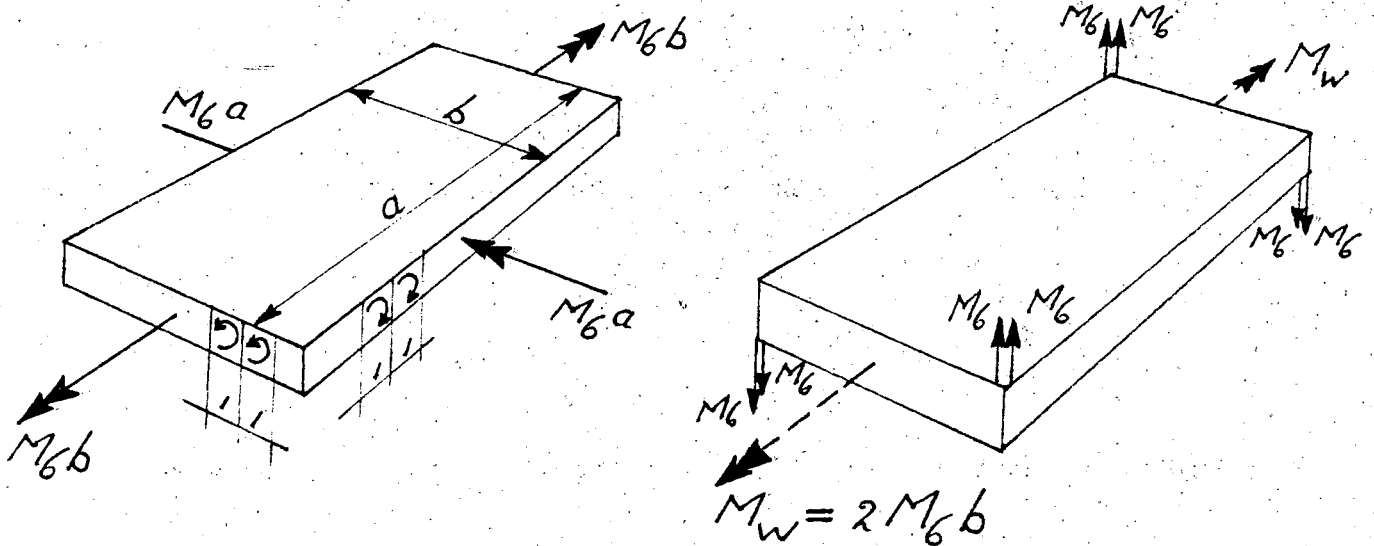
Kennelijk kan  $M_6$  (het moment per lengte- resp. breedte-eenheid) op alle zij-kanten vertaald worden uit een uitwendig moment  $M_w$  met

$$M_6 = \frac{M_w}{2b} \quad (4.52)$$

In de laatste formule (4.48) geeft dit

$$M_w = \frac{1}{3} G h^3 b \rho_{12}$$

en dit is de formule voor de relatie tussen de specifieke hoekverdraaiing en een uitwendig wringmoment op een dunne ( $b \gg h$ ) isotrope plaat zoals die onder meer in 'Theory of Elasticity' van Timoshenko en Goodier is gegeven.



Figuur 4.4.



2. De unidirectionele plaat

Ook hier geldt altijd

$$(x_3)_k^2 - (x_3)_{k-1}^2 = 0 \text{ zodat } B_{ij} = 0, \text{ dus } \underline{\text{geen}} \text{ koppeling } N - \rho$$

$$\text{en } \underline{\text{geen}} \text{ koppeling } M - e$$

$$A_{ij} = \overline{Q_{ij}} h \text{ geeft } \overline{\sigma}_i = \overline{Q_{ij}} e_j$$

$$D_{ij} = \overline{Q_{ij}} \frac{1}{12} h^3 \text{ geeft } M_i = \overline{Q_{ij}} \frac{1}{12} h^3 \rho_j$$

$$\text{of geïnverteerd } \frac{1}{12} h^3 \rho_i = \overline{S_{ij}} M_j$$

Bij een rechthoekige plaat, lengte  $a$  in  $X_1$ -richting en breedte  $b$ , en de materiaalassen onder een hoek met de lengte-richting, hebben  $\overline{S_{16}}$  en  $\overline{S_{26}}$  een waarde en zal een buigmoment  $M_1$  als zadelkromming  $\rho_2$  niet wordt verhinderd ( $a \gg b$ ) tot gevolg hebben.

$$\rho_1 = \frac{\overline{S_{11}} M_1}{\frac{1}{12} h^3}$$

$$\rho_2 = \frac{\overline{S_{12}} M_1}{\frac{1}{12} h^3}$$

$$2\rho_{12} = \frac{\overline{S_{16}} M_1}{\frac{1}{12} h^3}$$

Dus behalve zadelkromming  $\rho_2$  geeft een buigmoment  $M_1$  ook een torsiekromming

$$\rho_{12} = \frac{\overline{S_{16}}}{2\overline{S_{11}}} \rho_1$$

Zou, zoals bij een brede plaat,  $\rho_2$  worden verhinderd dan heeft  $M_2$  een waarde die volgt uit

$$\rho_2 = 0 = \frac{\overline{S_{12}}}{\frac{1}{12} h^2} M_1 + \frac{\overline{S_{22}}}{\frac{1}{12} h^3} M_2$$

$$\text{en is } \rho_1 = \left( \overline{S_{11}} - \frac{\overline{S_{12}^2}}{\overline{S_{22}}} \right) \frac{M_1}{\frac{1}{12} h^3}$$

$$\text{en } 2\rho_{12} = \left( \overline{S_{16}} - \frac{\overline{S_{26} S_{12}}}{\overline{S_{22}}} \right) \frac{M_1}{\frac{1}{12} h^3}$$

Een brede plaat biedt een andere weerstand tegen buigen dan een smalle.

### 3. De cross-ply

Bestaat een laminaat uit één of meerdere lagen met materiaalassen in  $X_1$ -richting en één of meerdere lagen met de materiaalassen loodrecht daarop en zijn de lagen van identiek materiaal dan is

$$\begin{aligned} \overline{Q_{16}}^{(k)} = \overline{Q_{26}}^{(k)} = 0 \text{ en dus is } A_{16} = A_{26} = 0 \\ B_{16} = B_{26} = 0 \\ D_{16} = D_{26} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{en } \overline{Q_{12}}_{0^\circ} = \overline{Q_{12}}_{90^\circ}$$

$$\overline{Q_{66}}_{0^\circ} = \overline{Q_{66}}_{90^\circ} \text{ zodat ook } B_{12} = B_{66} = 0$$

immers met betrekking tot  $\overline{Q_{12}}$  en  $\overline{Q_{66}}$  gedraagt het laminaat zich als één laag en is dus  $(x_3)_k^2 - (x_3)_{k-1}^2 = 0$ .

De relaties tussen krachten en momenten enerzijds en vervormingen en krommingen anderzijds wordt nu voluit geschreven:

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & 0 \\ B_{11} & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_6 \end{Bmatrix} \quad (4.53)$$

Uit (4.53) blijkt dus de zeer bijzondere koppeling tussen trekkrachten  $N_1$  en  $N_2$  en krommingen  $\rho_1$  en  $\rho_2$ . Wordt bijvoorbeeld een rechthoekige plaat van een willekeurige cross-ply uitsluitend belast door een trekkracht  $N_1$  dan zal toch een kromming  $\rho_1$  optreden! Wordt  $\rho_1$  verhinderd door een moment  $M_1$  dan zal de plaat een andere stijfheid hebben. Bij eenvoudige trekproeven waarbij de inklembekken van de trekbank geen  $\rho_1$  toelaten en dus een  $M_1$  introduceren wordt van een dergelijke willekeurige cross-ply dus een schijnbare elasticiteitsmodulus gemeten.

N.B.:  $B_{11}$  en  $B_{22}$  worden uitsluitend nul bij een symmetrische opbouw van de cross-ply. Hierop wordt in de volgende paragraaf teruggekomen.

#### 4. De angle-ply

Een laminaat met één of meerdere lagen onder een hoek  $\varphi$  met de  $X_1$ -as en één of meerdere lagen onder  $-\varphi$  wordt een 'angle-ply' genoemd. Bestaat de angle-ply uit 2 identieke lagen (de angle-ply is dan anti-symmetrisch) dan is

$$\overline{Q_{16}}^{(1)} = -\overline{Q_{16}}^{(2)}$$

$$\overline{Q_{26}}^{(1)} = -\overline{Q_{26}}^{(2)}$$

$$\text{waardoor } A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$$

$$\overline{Q_{11}}^{(1)} = \overline{Q_{11}}^{(2)}$$

$$\overline{Q_{22}}^{(1)} = \overline{Q_{22}}^{(2)}$$

$$\overline{Q_{12}}^{(1)} = \overline{Q_{12}}^{(2)}$$

$$\text{waardoor } B_{11} = B_{12} = B_{22} = 0$$

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_6 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & 0 & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{26} \\ 0 & 0 & A_{66} & B_{16} & B_{26} & 0 \\ 0 & 0 & B_{16} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{26} & D_{12} & D_{22} & 0 \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_6 \\ \rho_1 \\ \rho_2 \\ \rho_6 \end{Bmatrix} \quad (4.54)$$

Met  $N_2 = 0$  en  $\rho_6 = 0$  wordt uit de eerste twee vergelijkingen (4.54) gevonden

$$\frac{N_1}{h} = \sigma_1 = \left( \overline{Q_{11}} - \frac{\overline{Q_{12}^2}}{\overline{Q_{22}}} \right) e_1$$

zodat bij een trekproef op een angle-ply waarbij torsie wordt verhinderd een schijnbare elasticiteitsmodulus

$$E_{11} = \overline{Q_{11}} - \frac{\overline{Q_{12}^2}}{\overline{Q_{22}}}$$

wordt verkregen. Vergelijking met (4.28) laat zien dat deze elasticiteitsmodulus dezelfde is als die welke wordt gemeten bij een trekproef op een enkele laag met materiaalassen onder hoek  $\varphi$  met de trekrichting als de inklembecken niet draaiend zijn en geen afschuifvervorming toelaten. Bij de angle-ply dwingen de lagen elkaar tot zodanige vervormingen dat geen afschuifvervormingen in de afzonderlijke lagen kunnen optreden. Om  $\rho_6 = 0$  te houden is een moment  $M_6$  nodig dat uit de laatste vergelijking (4.54) wordt verkregen:

$$M_6 = -\frac{N_1 h}{4} \frac{\overline{Q_{16}} \overline{Q_{22}} - \overline{Q_{12}} \overline{Q_{26}}}{\overline{Q_{11}} \overline{Q_{22}} - \overline{Q_{12}^2}}$$

Zou  $M_6 = 0$  zijn en heeft daardoor  $\rho_6$  een waarde (de angle-ply krijgt dan bij pure trek  $N_1$  een torsiekromming!) dan wordt dus een andere elasticiteitsmodulus gemeten.

#### 4d. De invloed van de B-matrix

Ieder element van de B matrix legt een koppeling tussen normaal- of afschuifkrachten en krommingen door buiging of torsie of een koppeling tussen buig- of wringmomenten en rekken of afschuifvervormingen. Over het algemeen zijn deze koppelingen ongewenst. Niet alleen geven zij onverwachte vervormingen onder mechanische belasting van laminaten, ook bij de produktie van die laminaten kunnen zij door warmtespanningen ongewenste resultaten geven.

In het voorgaande is reeds gebleken dat B-elementen nul werden om verschillende redenen. In

$$\sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}}^{(k)} \frac{1}{2} \{ (x_3)_k^2 - (x_3)_{k-1}^2 \} \quad (4.55)$$

was soms  $\overline{Q_{ij}}^{(k)}$  nul of bij voor alle lagen identieke  $\overline{Q_{ij}}^{(k)}$  werd (4.55) nul omdat met betrekking tot die  $\overline{Q_{ij}}^{(k)}$  het laminaat zich gedroeg als één laag waardoor  $(x_3)_k^2 - (x_3)_{k-1}^2 = 0$ .

Een principiële methode om alle B-elementen nul te maken is de symmetrische opbouw van het laminaat t.o.v. het referentievlak.

Dit is eenvoudig in te zien met

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}}^{(k)} \frac{1}{2} \{ (x_3)_k^2 - (x_3)_{k-1}^2 \} = \sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}}^{(k)} \{ (x_3)_k - (x_3)_{k-1} \} \frac{(x_3)_k + (x_3)_{k-1}}{2} \\ &= \sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}}^{(k)} t_k (x_3)_{\text{gem } k} \end{aligned}$$

waarin  $t_k$  de dikte van de  $k^e$ -laag is en  $(x_3)_{\text{gem } k}$  de gemiddelde afstand van de  $k^e$ -laag tot het referentievlak. Bij een symmetrische opbouw van het laminaat is voor laag 1 en laag n het produkt  $\overline{Q_{ij}} t_k$  identiek terwijl  $(x_3)_{\text{gem}}$  gelijk is doch met tegengesteld teken. Het zelfde geldt voor laag 2 en laag n-1 etc., zodat alle elementen  $B_{ij}$  nul worden.

Aangetoond kan worden dat de grootte van de elementen  $B_{ij}$  omgekeerd evenredig is met het aantal lagen. In laminaten met veel lagen is hun effect dan ook gering. Bij laminaten met weinig lagen moet met hun invloed echter wel degelijk rekening worden gehouden.

Is  $B_{ij} = 0$  dan is altijd

$$N_i = \sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}}^{(k)} t_k e_j$$

ofwel 
$$\sigma_i = \sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}}^{(k)} \frac{t_k}{h} e_j$$

Met 
$$Q_{ij_{lam}} = \sum_{k=1}^n \overline{Q_{ij}}^{(k)} \frac{t_k}{h} \quad (4.56)$$

wordt dan 
$$\sigma_i = Q_{ij_{lam}} e_j \quad (4.57)$$

(4.56) is de 'rule of mixtures' voor de 'inplane' stijfheidsgrootheden van het laminaat. Het spreekt vanzelf dat deze regel niet geldt voor de complianties van het laminaat. Deze kunnen alleen worden berekend door inversie van (4.56) en niet door 'optellen' van de complianties van de afzonderlijke lagen.

## HOOFDSTUK 5

### SPANNINGSCONCENTRATIES IN PLATEN

Bij de behandeling van de relatie tussen spanningen en vervormingen is aangenomen dat spanningen en vervormingen geen functie zijn van de coördinaten  $x_1$  en  $x_2$ . Vlakken (lagen) evenwijdig aan het  $X_1$ - $X_2$ -vlak werden verondersteld in een homogene spanningssituatie te verkeren. In werkelijkheid komen homogene spanningsvelden zelden voor door constructieve oorzaken als krachtsinleidingen (verbindingen), gaten en doorsnede-varianten. De niet-homogene spanningsvelden en de daarmee samenhangende spanningsconcentraties worden in dit hoofdstuk behandeld.

Ook als een laminaat zich in een homogene spanningssituatie bevindt verschillen in het algemeen de spanningen van laag tot laag. Desalniettemin zullen laminaten worden beschouwd als vlakke platen van elastische, homogene materialen met anisotrope eigenschappen. In ieder punt is er een vlak van elastische symmetrie evenwijdig aan het middenvlak van het laminaat.

In de vorige hoofdstukken is reeds uitvoerig gewerkt met begrippen als vlakspannings- en vlakke vervormingstoestand. De hier beschouwde homogene, anisotrope platen, belast door krachten in hun eigen vlak, zullen zich echter bevinden in een zogenaamde gegeneraliseerde vlakspanningstoestand. Dit begrip zal in de volgende paragraaf worden toegelicht waar zal blijken dat de vergelijkingen voor het oplossen van de spanningen in een vlakke vervormingstoestand gelijk zijn aan die voor een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand.

#### 5a. De vlakke vervormingstoestand en de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand

Het  $X_1$ - $X_2$ -vlak wordt in het middenvlak van de homogene anisotrope plaat gelegd. De plaat verkeert nu per definitie in een vlakke vervormingstoestand, bijvoorbeeld parallel met het  $X_1$ - $X_2$ -vlak, als

- de verplaatsing  $u_3$  overal nul is
- de verplaatsingen  $u_1$  en  $u_2$  uitsluitend afhangen van  $x_1$  en  $x_2$ .

Omdat er in ieder punt een vlak van elastische symmetrie evenwijdig met het  $X_1$ - $X_2$ -vlak is verondersteld is er in willekeurige richtingen  $\bar{X}_1$  en  $\bar{X}_2$  ( $\bar{X}_3 \equiv X_3$ ) geen koppeling tussen  $\bar{\gamma}_{23}$ ,  $\bar{\gamma}_{31}$ ,  $\bar{\tau}_{23}$  en  $\bar{\tau}_{31}$  enerzijds en de andere vervormingen en spanningen anderzijds.

Dus

$$\overline{\gamma_{23}} = \overline{s_{44}} \overline{\tau_{23}} + \overline{s_{45}} \overline{\tau_{31}} \quad (5.1)$$

$$\overline{\gamma_{31}} = \overline{s_{45}} \overline{\tau_{23}} + \overline{s_{55}} \overline{\tau_{31}}$$

Echter, door de gedefinieerde vervormingssituatie is

$$\overline{\gamma_{23}} = \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_2} = 0$$

en

$$\overline{\gamma_{31}} = \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial x_3} + \frac{\partial \overline{u_3}}{\partial x_1} = 0$$

zodat uit (5.1) volgt:

$$\overline{\tau_{23}} = \overline{\tau_{31}} = 0$$

Omdat  $u_3$  overal nul is is uiteraard  $e_{33} = \partial u_3 / \partial x_3$  overal nul, zodat een vlakke vervormingssituatie ook is gedefinieerd door

$$e_{33} = \overline{\tau_{23}} = \overline{\tau_{31}} = 0 \quad (5.2)$$

De evenwichtsvergelijkingen (2.4) vereenvoudigen nu tot

$$\frac{\partial \overline{\sigma_{11}}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{\tau_{12}}}{\partial x_2} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{\tau_{12}}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overline{\sigma_{22}}}{\partial x_2} = 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial \overline{\sigma_{33}}}{\partial x_3} = 0 \text{ of } \overline{\sigma_{33}} = \text{constant over de dikte van het laminaat}$$

$\sigma_{33}$  werkt ook op de zijvlakken van de plaat: fysisch gezien is het de spanning loodrecht op het plaatvlak nodig om de vlakke vervormingstoestand te handhaven.

De relatie tussen spanningen en vervormingen voor een vlakke vervormingstoestand wordt:



$$\overline{e_{11}} = \overline{s_{11}} \overline{\sigma_{11}} + \overline{s_{12}} \overline{\sigma_{22}} + \overline{s_{13}} \overline{\sigma_{33}} + \overline{s_{16}} \overline{\tau_{12}}$$

$$\overline{e_{22}} = \overline{s_{12}} \overline{\sigma_{11}} + \overline{s_{22}} \overline{\sigma_{22}} + \overline{s_{23}} \overline{\sigma_{33}} + \overline{s_{26}} \overline{\tau_{12}}$$

$$\overline{e_{33}} = \overline{s_{13}} \overline{\sigma_{11}} + \overline{s_{23}} \overline{\sigma_{22}} + \overline{s_{33}} \overline{\sigma_{33}} + \overline{s_{36}} \overline{\tau_{12}}$$

$$\overline{\gamma_{12}} = \overline{s_{16}} \overline{\sigma_{11}} + \overline{s_{26}} \overline{\sigma_{22}} + \overline{s_{36}} \overline{\sigma_{33}} + \overline{s_{66}} \overline{\tau_{12}}$$

ofwel, met  $e_{33} = 0$  en na elimineren van  $\sigma_{33}$

$$\overline{e_{11}} = \overline{s_{11}^*} \overline{\sigma_{11}} + \overline{s_{12}^*} \overline{\sigma_{22}} + \overline{s_{16}^*} \overline{\tau_{12}}$$

$$\overline{e_{22}} = \overline{s_{12}^*} \overline{\sigma_{11}} + \overline{s_{22}^*} \overline{\sigma_{22}} + \overline{s_{26}^*} \overline{\tau_{12}} \quad (5.4)$$

$$\overline{\gamma_{12}} = \overline{s_{16}^*} \overline{\sigma_{11}} + \overline{s_{26}^*} \overline{\sigma_{22}} + \overline{s_{66}^*} \overline{\tau_{12}}$$

waarin

$$\overline{s_{ij}^*} = \overline{s_{ij}} - \frac{\overline{s_{i3}} \overline{s_{j3}}}{\overline{s_{33}}} \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (5.5)$$

de gereduceerde complianties worden genoemd.

N.B.: Het gebruik van het woord reduceren heeft te maken met het reduceren van een algemene spannings- of vervormingstoestand naar een vereenvoudigde toestand. Zo zijn bijvoorbeeld de  $Q_{ij}$ 's in (4.9) gereduceerde stijfheidstermen.

Veronderstel nu een homogene, anisotrope plaat die dun is met dikte h en met zijvlakken parallel aan het middelvlak die vrij zijn van uitwendige belastingen.

Dat betekent dat

$$\overline{\tau_{31}}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \pm h/2) = \overline{\tau_{23}}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \pm h/2) = \overline{\sigma_{33}}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \pm h/2) = 0$$

Uit de evenwichtsvergelijkingen (2.4) voor  $i = 3$

$$\frac{\partial \overline{\tau_{31}}}{\partial \overline{x_1}} + \frac{\partial \overline{\tau_{23}}}{\partial \overline{x_2}} + \frac{\partial \overline{\sigma_{33}}}{\partial \overline{x_3}} = 0$$

volgt dan voor die zijvlakken met

$$\frac{\partial \overline{\tau_{31}}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \pm h/2)}{\partial \overline{x_1}} = \frac{\partial \overline{\tau_{23}}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \pm h/2)}{\partial \overline{x_2}} = 0$$

dat

$$\frac{\partial \overline{\sigma_{33}}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \pm h/2)}{\partial \overline{x_3}} = 0$$

Dus behalve dat  $\overline{\sigma_{33}}(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \pm h/2) = 0$  is aan de zijvlakken ook de afgeleide naar  $\overline{x_3}$  nul. Dit betekent dat  $\overline{\sigma_{33}}$  over de (kleine) dikte van de plaat klein zal zijn en overal nul mag worden verondersteld.

Door nu de andere twee evenwichtsvergelijkingen als volgt te integreren

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \frac{\partial \overline{\sigma_{11}}}{\partial \overline{x_1}} + \frac{\partial \overline{\tau_{12}}}{\partial \overline{x_2}} + \frac{\partial \overline{\tau_{13}}}{\partial \overline{x_3}} \right) d\overline{x_3} = 0$$

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \left( \frac{\partial \overline{\tau_{12}}}{\partial \overline{x_1}} + \frac{\partial \overline{\sigma_{22}}}{\partial \overline{x_2}} + \frac{\partial \overline{\tau_{23}}}{\partial \overline{x_3}} \right) d\overline{x_3} = 0$$

wordt met

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial \overline{\tau_{13}}}{\partial \overline{x_3}} d\overline{x_3} = \overline{\tau_{13}} \Big|_{-h/2}^{+h/2} = 0$$

en

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \frac{\partial \overline{\tau_{23}}}{\partial \overline{x_2}} d\overline{x_3} = \overline{\tau_{23}} \Big|_{-h/2}^{+h/2} = 0$$

gevonden

$$\frac{\partial \overline{\sigma_{11}^*}}{\partial \overline{x_1}} + \frac{\partial \overline{\tau_{12}^*}}{\partial \overline{x_2}} = 0$$

$$\frac{\partial \overline{\tau_{12}^*}}{\partial \overline{x_1}} + \frac{\partial \overline{\sigma_{22}^*}}{\partial \overline{x_2}} = 0$$

(5.6)

waarin 
$$\overline{\sigma_{11}^*} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \overline{\sigma_{11}} dx_3$$
 (5.7)

en 
$$\overline{\sigma_{22}^*} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \overline{\sigma_{22}} dx_3$$

de gemiddelde waarden van  $\overline{\sigma_{11}}$  resp.  $\overline{\sigma_{22}}$  over de plaatdikte zijn.

De spanningssituatie waarbij  $\sigma_{33}$  overal nul is en  $\overline{\tau_{13}}$  en  $\overline{\tau_{23}}$  op de zijvlakken evenwijdig aan het middenvlak nul zijn wordt een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand genoemd.

Bij een dunne plaat zal in het algemeen  $u_3$  klein zijn en de variaties van  $\overline{u_1}$  en  $\overline{u_2}$  over de plaatdikte gering.  $\overline{u_1(x_1, x_2, x_3)}$  en  $\overline{u_2(x_1, x_2, x_3)}$  worden dan ook vervangen door hun gemiddelden over de plaatdikte.

$$\overline{u_1^*(x_1, x_2)} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \overline{u_1(x_1, x_2, x_3)} dx_3$$
 (5.8)

$$\overline{u_2^*(x_1, x_2)} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{+h/2} \overline{u_2(x_1, x_2, x_3)} dx_3$$

Met in ieder punt een vlak van elastische symmetrie evenwijdig aan het  $\overline{X_1 - X_2}$ -vlak kan er ook in een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand geen koppeling zijn tussen enerzijds  $\overline{\gamma_{23}}$ ,  $\overline{\gamma_{31}}$ ,  $\overline{\tau_{23}}$  en  $\overline{\tau_{31}}$  en anderzijds de andere vervormings- en spanningscomponenten. Met  $\overline{\tau_{33}} = 0$  worden de spannings-vervormingsrelaties in een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand dan ook

$$\overline{e_{11}} = \overline{S_{11}} \overline{\sigma_{11}} + \overline{S_{12}} \overline{\sigma_{22}} + \overline{S_{16}} \overline{\tau_{12}}$$

$$\overline{e_{22}} = \overline{S_{12}} \overline{\sigma_{11}} + \overline{S_{22}} \overline{\sigma_{22}} + \overline{S_{26}} \overline{\tau_{12}}$$

$$\overline{\gamma_{12}} = \overline{S_{16}} \overline{\sigma_{11}} + \overline{S_{26}} \overline{\sigma_{22}} + \overline{S_{66}} \overline{\tau_{12}}$$

of, na middeling over de plaatdikte

$$\overline{e_{11}^*} = \frac{\partial \overline{u_1^*}}{\partial \overline{x_1}} = \overline{S_{11}} \overline{\sigma_{11}^*} + \overline{S_{12}} \overline{\sigma_{22}^*} + \overline{S_{16}} \overline{\tau_{12}^*}$$

$$\overline{e_{22}^*} = \frac{\overline{\partial u_2^*}}{\partial x_2} = \overline{S_{12}} \overline{\sigma_{11}^*} + \overline{S_{22}} \overline{\sigma_{22}^*} + \overline{S_{26}} \overline{\tau_{12}^*} \quad (5.9)$$

$$\overline{\gamma_{12}^*} = \left( \frac{\overline{\partial u_1^*}}{\partial x_2} + \frac{\overline{\partial u_2^*}}{\partial x_1} \right) = \overline{S_{16}} \overline{\sigma_{11}^*} + \overline{S_{26}} \overline{\sigma_{22}^*} + \overline{S_{66}} \overline{\tau_{12}^*}$$

Vergelijking van (5.3) en (5.6) en van (5.4) en (5.9) laat zien dat

- in een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand de gemiddelde waarden van de spanningen  $\overline{\sigma_{11}}$ ,  $\overline{\tau_{12}}$  en  $\overline{\sigma_{22}}$  (over de plaatdikte) moeten voldoen aan dezelfde vergelijkingen als die voor een vlakke vervormingstoestand.
- de vergelijkingen voor de relaties tussen spanningen en vervormingen eveneens gelijk zijn. In een vlakke vervormingstoestand moeten in de vergelijkingen de gereduceerde complianties (5.5) worden gebruikt. In een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand gelden de relaties voor de gemiddelde waarden van de spanningen en de vervormingen.

In Hoofdstuk 2 is op formele wijze de vlakspanningstoestand geïntroduceerd door één van de hoofdspanningen nul te stellen, doch zonder de vraag te stellen hoe zo'n vlakspanningstoestand zou kunnen ontstaan. Dunne platen die in hun vlak worden vervormd door krachten die eveneens in hun vlak werken verkeren in een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand. Oplossing van het spanningsprobleem geeft dus niet de echte spanningen doch hun gemiddelde waarden over de plaatdikte. De echte spanningen kunnen uiteraard een vlakspanningssituatie geven volgens de formele definitie van Hoofdstuk 2.

In het voorgaande is steeds uitdrukkelijk gesproken over de homogene, anisotrope plaat. Bij laminaten zullen de in afzonderlijke lagen optredende spanningen uit de  $\sigma_{ij}$  en  $e_{ij}$  resp.  $\sigma_{ij}^*$  en  $e_{ij}^*$  van het laminaat als geheel moeten worden berekend met behulp van de laminatentheorie uit Hoofdstuk 4. In de zin van de laminatentheorie is de  $\sigma_{ij}$  bij de vlakke-vervormingstoestand dus ook een gemiddelde spanning!

#### 5b. De spanningsfunctie van Airy

De evenwichtsvoorwaarden (2.4) zullen nu gebruikt worden in de vorm

$$\frac{\partial \overline{\sigma}_{11}}{\partial \overline{x}_1} + \frac{\partial \overline{\tau}_{12}}{\partial \overline{x}_2} = 0 \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial \overline{\tau}_{12}}{\partial \overline{x}_1} + \frac{\partial \overline{\sigma}_{22}}{\partial \overline{x}_2} = 0$$

waarbij het verschil tussen de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand met  $\overline{\sigma}_{ij}^*$  en de vlakke vervormingstoestand met  $\overline{\sigma}_{ij}$  verder buiten beschouwing wordt gelaten.

Uit (5.10) blijkt dat er altijd een functie  $U(x_1, x_2)$  moet bestaan waarmee de spanningen als volgt kunnen worden uitgedrukt:

$$\overline{\sigma}_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial \overline{x}_2^2} \quad \overline{\sigma}_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial \overline{x}_1^2} \quad \overline{\tau}_{12} = - \frac{\partial^2 U}{\partial \overline{x}_1 \partial \overline{x}_2} \quad (5.11)$$

Het is duidelijk dat spanningen, gedefinieerd door (5.11) altijd aan de evenwichtsvoorwaarden (5.10) voldoen.  $U(x_1, x_2)$  wordt de spanningsfunctie van Airy (1862) genoemd.

### 5c. De compatibiliteit

De spanningen, gedefinieerd door (5.11) voldoen weliswaar aan de evenwichtsvoorwaarden doch hoeven nog geen vervormingen te geven die met een werkelijk verplaatsingsveld overeenkomen. Daarvoor moeten de door de spanningen veroorzaakte vervormingen voldoen aan de compatibiliteitsvergelijkingen. De enige compatibiliteitsvergelijking waaraan de vervormingen in een vlakke vervormingstoestand of een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand niet triviaal voldoen is

$$2 \frac{\partial^2 \overline{e}_{12}}{\partial \overline{x}_1 \partial \overline{x}_2} = \frac{\partial^2 \overline{\gamma}_{12}}{\partial \overline{x}_1 \partial \overline{x}_2} = \frac{\partial^2 \overline{e}_{11}}{\partial \overline{x}_2^2} + \frac{\partial^2 \overline{e}_{22}}{\partial \overline{x}_1^2} \quad (5.12)$$

De vervormingen zoals die in (5.4) of (5.9) zijn gegeven moeten dus voldoen aan (5.12) om een zodanig verplaatsingsveld te geven dat het vervormde materiaal aaneengesloten blijft.

### 5d. De differentiaalvergelijking voor de spanningsfunctie van Airy

Worden de spanningen (5.11) gesubstitueerd in de uitdrukkingen (5.4) of (5.9) voor de vervormingen en worden de vervormingen daarna gesubstitueerd in de compatibiliteitsvergelijking (5.12), dan ontstaat de volgende differentiaal-

vergelijking in  $U(x_1, x_2)$ :

$$\begin{aligned} \overline{s_{22}} \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} - 2 \overline{s_{26}} \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 \partial x_2} + (2 \overline{s_{12}} + \overline{s_{66}}) \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \\ - 2 \overline{s_{16}} \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 \partial x_2^3} + \overline{s_{11}} \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0 \end{aligned} \quad (5.13)$$

Er wordt wellicht ten overvloede op gewezen dat  $\overline{s_{ij}}$  in de vlakke-vervormingstoestand de gereduceerde complianties (5.5) zijn. Worden nu de  $\overline{X_1}$ - $\overline{X_2}$ -richtingen gekozen in de elastische hoofdrichtingen van het laminaat als geheel dan wordt (5.13) met  $\overline{s_{26}} = \overline{s_{16}} = 0$

$$\overline{s_{22}} \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + (2 \overline{s_{12}} + \overline{s_{66}}) \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \overline{s_{11}} \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0 \quad (5.14)$$

ofwel, met de 'directionality factor'

$$r^2 = \overline{s_{22}} / \overline{s_{11}} \quad (5.15)$$

en de 'angularity factor'

$$a = (2 \overline{s_{12}} + \overline{s_{66}}) / 2 \overline{s_{11}} \quad (5.16)$$

$$r^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 2 a \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0 \quad (5.17)$$

De functie  $U(x_1, x_2)$  als oplossing van (5.17) gerandeert dus dat

- de spanningen  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  en  $\tau_{12}$  aan de evenwichtsvergelijkingen voldoen
- de door de spanningen veroorzaakte vervormingen aan de compatibiliteitsvoorwaarden voldoen.

De spanningen zelf kunnen met een zeer eenvoudig differentiatie-recept uit de functie  $U(x_1, x_2)$  worden afgeleid.

#### 5e. De differentiaalvergelijking voor isotroop materiaal

Voor isotroop materiaal geldt zowel voor de vlakke vervormingstoestand als voor de gegeneraliseerde vlakspanningstoestand:

$$r^2 = S_{22}/S_{11} = S_{22}^*/S_{11}^* = 1$$

$$a = (2 S_{12} + S_{66})/2 S_{11} = (2 S_{12}^* + S_{66}^*)/2 S_{11}^* = 1$$

waarin gebruik is gemaakt van de isotrope betrekking

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Voor isotroop materiaal vereenvoudigt (5.17) dus tot

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0 \quad (5.18)$$

(5.18) wordt de biharmonische differentiaalvergelijking genoemd en de oplossingen ervan zijn biharmonische functies. Terwijl in de differentiaalvergelijking (5.17) voor anisotrope materialen via  $r$  en  $a$  materiaalconstanten voorkomen komen deze niet voor in (5.18). Kennelijk zijn spanningsverdelingen in isotrope materialen onafhankelijk van de materiaaleigenschappen. In platen van verschillende materialen doch met gelijke geometrie en gelijke belastingen zijn de spanningsverdelingen dus identiek. Bij anisotrope materialen is dat zeer zeker niet het geval: de materiaaleigenschappen hebben daar een zeer essentiële invloed op de spanningsverdelingen en daarmee op de spanningsconcentratiefactoren.

#### 5f. De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

Vergelijking (5.17) wordt in operator vorm

$$\left(\mu_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) \left(\mu_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right) U = 0 \quad (5.19)$$

of

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\mu_1 \partial x_2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\mu_1 \partial x_2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\mu_2 \partial x_2}\right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\mu_2 \partial x_2}\right) U = 0 \quad (5.20)$$

Vergelijking van (5.19) met (5.17) geeft

$$\mu_1^2 \cdot \mu_2^2 = r^2 \quad (5.21)$$

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 = -2a$$

Vergelijkingen (5.21) hebben behalve als wortels

$$\mu_1 = \sqrt{\frac{r-a}{2}} + i \sqrt{\frac{r+a}{2}} \quad (5.22)$$

$$\mu_2 = -\sqrt{\frac{r-a}{2}} + i \sqrt{\frac{r+a}{2}}$$

ook als wortels

$$-\mu_2 = \overline{\mu_1} \quad (5.23)$$

en  $-\mu_1 = \overline{\mu_2}$

(de streep betekent hier: toegevoegd complexe).

Er worden nu 4 complexe grootheden gedefinieerd

$$z_k = x_1 + \mu_k x_2 \quad k = 1, 2 \quad (5.24)$$

en  $\overline{z_k} = x_1 + \overline{\mu_k} x_2 \quad k = 1, 2 \quad (5.25)$

waarmee (5.20) wordt geschreven als

$$\frac{\partial^4 U}{\partial z_1 \partial z_2 \partial \overline{z_1} \partial \overline{z_2}} = 0 \quad (5.26)$$

N.B.: Het is eenvoudig in te zien dat de stap van (5.20) naar (5.26) kan worden gemaakt. Immers:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{d}{dz_k} \frac{\partial z_k}{\partial x_1} = \frac{d}{dz_k} \\ \frac{\partial}{\partial(\mu_k x_2)} &= \frac{d}{dz_k} \frac{\partial z_k}{\partial(\mu_k x_2)} = \frac{d}{dz_k} \end{aligned} \right\} \frac{d}{dz_k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial(\mu_k x_2)} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\mu_k \partial x_2} \right) \quad (5.27)$$

In (5.26) worden uiteraard  $\partial$ 's gebruikt i.p.v.  $d$ 's omdat  $U$  van 4 variabelen  $z_k$  afhangt.

Uit (5.26) volgt dat iedere, willekeurige differentieerbare functie  $F_1(z_1)$  zal voldoen aan de differentiaalvergelijking. Immers, er geldt altijd



$$\frac{dF_1(z_1)}{dz_1} = 0$$

N.B.: Een functie  $F(z)$  van de complexe  $z = x_1 + ix_2$  differentiëren naar de toegevoegd complexe  $\bar{z} = x_1 - ix_2$ , geeft altijd nul. Dit kan worden ingezien met (5.27) voor  $\bar{z}$

$$\frac{d}{d\bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$$

en de Cauchy-Riemann relaties voor differentieerbare (analytische) functies

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = - \frac{\partial v}{\partial x_1}$$

waarin  $u$  en  $v$  het reële resp. imaginaire deel van de functie zijn:

$$F(z) = u + iv$$

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{d\bar{z}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} (u+iv) - i \frac{\partial}{\partial x_2} (u+iv) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} - \frac{\partial v}{\partial x_2} + i \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right) = 0 \end{aligned}$$

Voor een functie  $F_k(z_k)$  van de complexe  $z_k = x_1 + \mu_k x_2$  is het bewijs iets gecompliceerder omdat  $\mu_k$  zowel imaginair als complex kan zijn. Er kan echter altijd worden geschreven  $z_k = x_1^* + ix_2^*$  en  $F_k(z_k) = u^* + iv^*$  waarmee het bewijs identiek wordt met het bovenstaande.

Uiteraard geldt ook dat iedere, willekeurige differentieerbare functie  $F_2(z_2)$  zal voldoen aan (5.26), evenals iedere functie  $F_3(\bar{z}_1)$  en  $F_4(\bar{z}_2)$ . De algemene oplossing van de differentiaalvergelijking is dan ook:

$$U = F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(\bar{z}_1) + F_4(\bar{z}_2)$$

$U$  moet een reële, differentieerbare functie zijn om reële spanningen te kunnen geven. De imaginaire delen van  $F_1$  t/m  $F_4$  moeten dan ook tegen elkaar wegvallen en dat kan alleen als

$$F_3(\bar{z}_1) = \bar{F}_1(\bar{z}_1)$$

$$F_4(\bar{z}_2) = \bar{F}_2(\bar{z}_2)$$

(U kan nog een eventuele particuliere oplossing  $C_1x_1 + C_2x_2 + C_3$  hebben die echter voor de oplossing van het spanningsvraagstuk geen betekenis heeft.)

Uiteindelijk wordt U

$$U = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)} \quad (5.28)$$

$$= 2\text{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (5.29)$$

N.B.: U volgens (5.28) of (5.29) kan nooit aan de relaties van Cauchy-Riemann voldoen en is daarom geen analytische functie.

Met (5.28) kan nu de algemene oplossing voor de spanningen (5.11) en via de wet van Hooke dus ook die voor de vervormingen of de verplaatsingen worden opgeschreven.

Zo is

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \frac{dF_1(z_1)}{dz_1} \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \frac{dF_2(z_2)}{dz_2} \frac{\partial z_2}{\partial x_2} + \frac{d\overline{F_1(z_1)}}{d\bar{z}_1} \frac{\partial \bar{z}_1}{\partial x_2} + \frac{d\overline{F_2(z_2)}}{d\bar{z}_2} \frac{\partial \bar{z}_2}{\partial x_2} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ \mu_1 \frac{dF_1(z_1)}{dz_1} + \mu_2 \frac{dF_2(z_2)}{dz_2} + \mu_1 \frac{d\overline{F_1(z_1)}}{d\bar{z}_1} + \mu_2 \frac{d\overline{F_2(z_2)}}{d\bar{z}_2} \right] \end{aligned}$$

We noemen hierin

$$\frac{dF_k(z_k)}{dz_k} = \phi_k(z_k)$$

zodat

$$\frac{d^2 F_k(z_k)}{dz_k^2} = \frac{d}{dz_k} \phi_k(z_k) = \phi_k'(z_k)$$

waarmee

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2) + \mu_1^2 \overline{\phi_1'(z_1)} + \mu_2^2 \overline{\phi_2'(z_2)} \\ &= 2\text{Re} [\mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2)] \end{aligned}$$

Dergelijke formules kunnen uit (5.11) worden gevonden voor de  $\sigma_{22}$  en  $\tau_{12}$ . De algemene oplossing voor de spanningen is nu:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= 2\text{Re}[\mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2)] \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re}[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2)] \\ \tau_{12} &= -2\text{Re}[\mu_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \phi_2'(z_2)]\end{aligned}\quad (5.30)$$

De algemene oplossing voor de verplaatsingen volgt uit die voor de spanningen door integratie van de rekken

$$\begin{aligned}e_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = S_{11} \sigma_{11} + S_{12} \sigma_{12} \\ &= 2\text{Re}[(S_{11} \mu_1^2 + S_{12}) \phi_1'(z_1) + (S_{11} \mu_2^2 + S_{12}) \phi_2'(z_2)] \\ e_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = S_{12} \sigma_{11} + S_{22} \sigma_{22} \\ &= 2\text{Re}[(S_{12} \mu_1^2 + S_{22}) \phi_1'(z_1) + (S_{12} \mu_2^2 + S_{22}) \phi_2'(z_2)]\end{aligned}$$

resultierend in

$$\begin{aligned}u_1 &= 2\text{Re}[(S_{11} \mu_1^2 + S_{12}) \phi_1(z_1) + (S_{11} \mu_2^2 + S_{12}) \phi_2(z_2)] + C_1 x_2 + C_2 \\ u_2 &= 2\text{Re}\left[\frac{S_{12} \mu_1^2 + S_{22}}{\mu_1} \phi_1(z_1) + \frac{S_{12} \mu_2^2 + S_{22}}{\mu_2} \phi_2(z_2)\right] + C_3 x_1 + C_4\end{aligned}$$

Uit

$$\gamma_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = -S_{66} 2\text{Re}[\mu_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \phi_2'(z_2)]$$

kan worden afgeleid dat

$$C_3 = -C_1$$

De termen  $u_1 = C_2$  en  $u_2 = C_4$  zijn plaatsonafhankelijk en stellen daarom een translatie van een star lichaam voor, de termen  $u_1 = C_1 x_2$  en  $u_2 = -C_1 x_1$  geven een rotatie om de oorsprong van het coördinatenstelsel.

$$\text{Met } p_k = S_{11} \mu_k^2 + S_{12} \quad k = 1, 2 \quad (5.31)$$

$$q_k = \frac{S_{12} \mu_k^2 + S_{22}}{\mu_k} \quad k = 1, 2 \quad (5.32)$$

worden de algemene oplossingen voor de verplaatsingen  $u_1$  en  $u_2$  geschreven als

$$u_1 = 2\text{Re}[p_1 \phi_1(z_1) + p_2 \phi_2(z_2)] + C_1 y + C_2 \quad (5.33)$$

$$u_2 = 2\text{Re}[q_1 \phi_1(z_1) + q_2 \phi_2(z_2)] - C_1 x + C_4$$

Een spanningsprobleem oplossen voor een gegeneraliseerde vlakspanningstoestand of een vlakke vervormingstoestand betekent dus het zoeken naar twee analytische functies van de complexe variabelen  $z_1$  resp.  $z_2$ . In het voorgaande is echter reeds gesteld dat iedere analytische functie van  $z_1$  resp.  $z_2$  aan differentiaalvergelijking (5.17) voldoet en dus als algemene oplossing kan gelden. Aan de evenwichtsvoorwaarden en de compatibiliteitsvergelijkingen is dan altijd voldaan. Het zal echter duidelijk zijn dat de analytische functies zó moeten worden gekozen dat zij op de rand(en) van de beschouwde plaat

∂f voorgeschreven belastingen (of spanningen) geven; randvoorwaardenprobleem van de 1e soort

∂f voorgeschreven verplaatsingen geven; randvoorwaardenprobleem van de 2e soort

∂f voorgeschreven belastingen op gedeelten van de rand en voorgeschreven verplaatsingen op andere gedeelten geven ('Mixed boundary problems').

Zijn de spanningen op de randen voorgeschreven dan kunnen formules (5.30) als randvoorwaardenformules worden gebruikt; hetzelfde geldt voor formules (5.31) als de verplaatsingen zijn voorgeschreven. Voor voorgeschreven belasting zullen in de volgende paragraaf formules worden afgeleid.

Met bekende algemene oplossingen is het oplossen van spanningsvraagstukken in vlakke platen dus een randvoorwaardenprobleem geworden. Omdat de algemene oplossing is gebaseerd op het voorstellen van de reële functie  $U(x_1, x_2)$  door complexe functies van de complexe variabelen  $z_k$  wordt de hier gepresenteerde methode van oplossen wel de 'complexe methode' genoemd. De methode maakt gebruik van een aantal 'prettige' eigenschappen van analytische functies.

N.B.: Voor isotroop materiaal is

$$\nu = \mu = 1$$

en worden

$$\mu_1 = \mu_2 = i$$

zodat (5.26) wordt

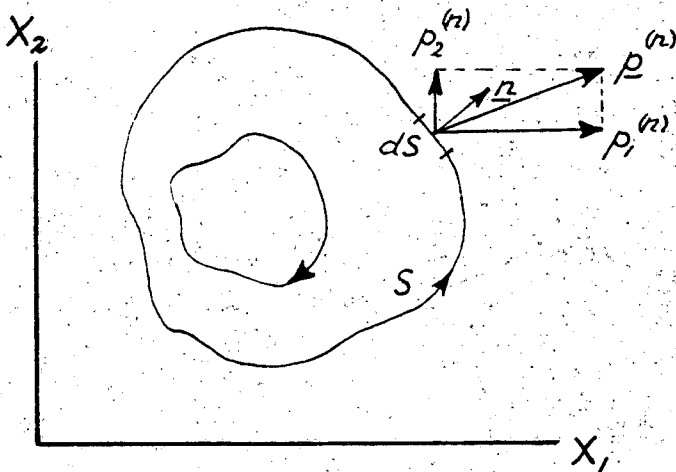
$$\frac{\partial^4 U}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0.$$

Hieraan voldoet behalve iedere willekeurige differentieerbare functie  $G(z)$  of  $\bar{G}(\bar{z})$  ook iedere functie  $\bar{z} F(z)$  of  $z \bar{F}(\bar{z})$ . De algemene oplossing voor isotroop materiaal is dan ook

$$U = z \bar{F}(\bar{z}) + \bar{z} F(z) + G(z) + \bar{G}(\bar{z}) \quad (5.34)$$

waaruit op dezelfde wijze als bij anisotrope materialen de formules voor de spanningen en de verplaatsingen zijn af te leiden.

5g. De randvoorwaardenformules voor de belastingen.



Figuur 5.1.

Een stukje  $ds$  van de omtrek van een belast gebied wordt positief gerekend in die richting gaand waarbij het gebied links ligt. De spanningsvector  $\underline{p}^{(n)}$  als uitwendige belasting op  $ds$  wordt ontbonden in een horizontale en een verticale component (positief in de richting van de positieve  $X_1$ - resp.  $X_2$ -as) waarvoor (2.1) geeft

$$\begin{aligned} p_1^{(n)} &= \sigma_{11} \cos(\underline{n}, X_1) + \tau_{12} \cos(\underline{n}, X_2) \\ p_2^{(n)} &= \tau_{12} \cos(\underline{n}, X_1) + \sigma_{22} \cos(\underline{n}, X_2) \end{aligned} \quad (5.35)$$

Vergelijkingen (5.35) zijn de evenwichtsvergelijkingen voor een elementair deeltje begrensd door  $ds$ ,  $dx_1$  en  $dx_2$ .

In de situatie van Figuur 5.1 met het gebied links is

$$\cos(\underline{n}, X_1) = \frac{dx_2}{ds}$$

$$\cos(\underline{n}, X_2) = -\frac{dx_1}{ds}$$

Verder is

$$\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{dx_2}{ds}$$

zodat (5.35) wordt

$$p_1^{(n)} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U}{\partial x_2} \right) \tag{5.36}$$

$$p_2^{(n)} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U}{\partial x_1} \right)$$

ofwel

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \int p_1^{(n)} ds + C_1 \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = -\int p_2^{(n)} ds + C_2$$

Met 
$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = \phi_1(z_1) + \phi_2(z_2) + \overline{\phi_1(z_1)} + \overline{\phi_2(z_2)}$$

$$= 2\text{Re}[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)]$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = \mu_1 \phi_1(z_1) + \mu_2 \phi_2(z_2) + \overline{\mu_1 \phi_1(z_1)} + \overline{\mu_2 \phi_2(z_2)}$$

$$= 2\text{Re}[\mu_1 \phi_1(z_1) + \mu_2 \phi_2(z_2)]$$

worden (5.37)

$$2\operatorname{Re}[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] = - \int p_2^{(n)} ds + C_5 \quad (5.38)$$

$$2\operatorname{Re}[\mu_1 \phi_1(z_1) + \mu_2 \phi_2(z_2)] = \int p_1^{(n)} ds + C_6$$

(5.38) zijn de randvoorwaardenformules voor de belastingen op een plaat in vlakke vervormingstoestand of gegeneraliseerde vlakspanningstoestand.

De constanten  $C_5$  en  $C_6$  in (5.38) betekenen dat  $\phi_1(z_1)$  en  $\phi_2(z_2)$  in het algemeen constante delen zullen bevatten. Omdat  $\phi_1(z_1)$  en  $\phi_2(z_2)$  voor het bepalen van de spanningen moeten worden gedifferentieerd spelen de constanten verder geen rol.

#### 5h. De complexe materiaalparameters $\mu_k$

In paragraaf 5.6 is voor  $\mu_k$  gegeven:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \sqrt{\frac{r-a}{2}} + i \sqrt{\frac{r+a}{2}} \\ \mu_2 &= -\sqrt{\frac{r-a}{2}} + i \sqrt{\frac{r+a}{2}} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Evenals  $r$  en  $a$  zijn  $\mu_1$  en  $\mu_2$  (als in principe complexe grootheden) een maat voor de anisotropie van het materiaal.

Als  $r > a$  zijn de parameters  $\mu_k$  complex en wordt geschreven:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \alpha + i\beta \\ \mu_2 &= -\alpha + i\beta \end{aligned} \quad (5.39)$$

Is  $r < a$  dan zijn de parameters zuiver imaginair

$$\mu_k = i \beta_k \quad k = 1,2 \quad (5.40)$$

De situatie  $r = a$  kan alleen optreden als  $r = a = 1$ ; dus bij isotrope materialen. Dan is, zoals reeds in paragraaf 5.7 is vermeld

$$\mu_1 = \mu_2 = i$$

Reële parameters  $\mu_k$  zouden alleen kunnen worden verkregen in de situatie  $r+a < 0$ , ofwel met

$$r^2 = \frac{E_\alpha}{E_\beta}$$

en 
$$a = \frac{E_\alpha}{2G_{\alpha\beta}} - \nu_{\alpha\beta}$$

in de situatie waarin

$$\nu_{\alpha\beta} > \frac{E_\alpha}{2G_{\alpha\beta}} + \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} > \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}}$$

Volgens de wet van Maxwell

$$\frac{\nu_{\alpha\beta}}{E_\alpha} = \frac{\nu_{\beta\alpha}}{E_\beta}$$

is in die situatie dan ook

$$\nu_{\beta\alpha} > \frac{E_\beta}{2G_{\alpha\beta}} + \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} > \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}}$$

zodat dan

$$\nu_{\alpha\beta} \nu_{\beta\alpha} > \sqrt{\frac{E_\alpha}{E_\beta}} \cdot \sqrt{\frac{E_\beta}{E_\alpha}} = 1$$

en 
$$1 - \nu_{\alpha\beta} \nu_{\beta\alpha} < 0.$$

Dit laatste betekent bijvoorbeeld dat de gereduceerde stijfheidscoëfficiënt

$$\frac{E_\alpha}{1 - \nu_{\alpha\beta} \nu_{\beta\alpha}}$$

negatief is hetgeen zou inhouden dat trek in  $\alpha$ -richting bij verhinderde dwarscontractie in  $\beta$ -richting een negatieve rek in  $\alpha$ -richting zou geven en dit is fysisch onwaarschijnlijk. De materiaalparameters zijn dus altijd complex of imaginair.

### 51. Spanningen rond een elliptisch gat in een in zijn vlak belaste plaat

Een belangrijke veronderstelling is dat de plaat oneindig groot is. Voor praktische constructies betekent dit dat de lengte en breedte van een plaat een aantal malen de karakteristieke afmeting van het gat (bij een ellips bijvoorbeeld de lange as) moeten zijn. Bij isotrope platen mag een breedte van 3x de

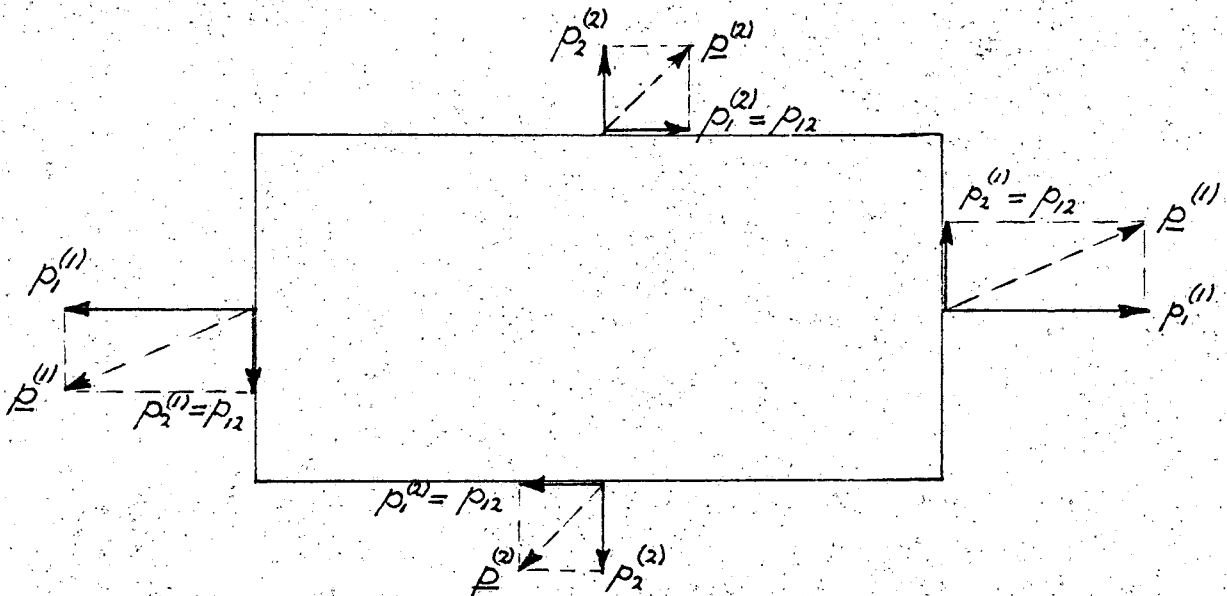


diameter van een aanwezig cirkelvormig gat reeds als oneindig worden beschouwd, bij anisotrope materialen is dat getal afhankelijk van de aard van het materiaal en de oriëntatie. Desalniettemin is de aanname van de oneindig grote afmetingen in de meeste gevallen geoorloofd.

We veronderstellen verder een belastingssituatie die aanleiding geeft tot evenwicht en die aangegeven kan worden met

- spanningen  $p_1$  en  $p_{12}$  op de randen van de plaat evenwijdig met de  $X_2$ -as,
- spanningen  $p_2$  en  $p_{12}$  op de randen van de plaat evenwijdig met de  $X_1$ -as.

Hier wordt dus het symbool  $p$  dat normaal wordt gebruikt voor de ontbondenen van de spanningsvector  $p^{(n)}$  in de richting van de coördinaatassen gebruikt voor de spanningen op de plaat in het oneindige. Dit mag omdat deze ontbondenen in de  $X_1$ - resp.  $X_2$ -richting loodrecht staan op en evenwijdig zijn met de randen van de plaat en daarmee per definitie spanningen zijn. Voorwaarde voor evenwicht van de plaat is uiteraard dat  $p_2^{(1)}$  even groot is als  $p_1^{(2)}$ , zie Figuur 5.2.



Figuur 5.2.

Zou de plaat geen gat hebben dan is er sprake van een homogene spannings situatie met overall spanningen

$$\sigma_{11} = p_1$$

$$\sigma_{22} = p_2$$

$$\tau_{12} = p_{12}$$

en dit betekent dat in die situatie de gedifferentieerde functies  $\phi'_k(z_k)$  uit formules (5.30) voor de spanningen constant moeten zijn en de functies zelf lineaire functies van  $z_k$ . Stel bijvoorbeeld in dat geval dat

$$\phi_k(z_k) = g^{(k)} z_k \quad (5.42)$$

De spanningsformules (5.30) worden hiermee

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\text{Re}[\mu_1^2 g^{(1)} + \mu_2^2 g^{(2)}] = p_1 \\ \sigma_{22} &= 2\text{Re}[g^{(1)} + g^{(2)}] = p_2 \\ \tau_{12} &= -2\text{Re}[\mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)}] = p_{12} \end{aligned} \quad (5.43)$$

ofwel

$$\begin{aligned} \mu_1^2 g^{(1)} + \mu_2^2 g^{(2)} + \overline{\mu_1^2 g^{(1)}} + \overline{\mu_2^2 g^{(2)}} &= p_1 \\ g^{(1)} + g^{(2)} + \overline{g^{(1)}} + \overline{g^{(2)}} &= p_2 \\ \mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)} + \overline{\mu_1 g^{(1)}} + \overline{\mu_2 g^{(2)}} &= -p_{12} \end{aligned} \quad (5.44)$$

$g^{(1)}$  en  $g^{(2)}$  zijn in het algemeen complexe coëfficiënten waardoor (5.43) drie vergelijkingen geeft met vier onbekenden, nl. twee reële delen van  $g^{(k)}$  en twee imaginaire. Of, anders gesteld: de vergelijkingen (5.44) zijn drie vergelijkingen voor de vier onbekenden  $g^{(1)}$ ,  $g^{(2)}$ ,  $\overline{g^{(1)}}$  en  $\overline{g^{(2)}}$ .

Er moet dus nog een vierde vergelijking bijkomen die zo gekozen moet worden dat de formules (5.43) of (5.44) niet aangetast worden. Deze vergelijking kan bijvoorbeeld zijn

$$\text{Im } g^{(1)} = -\text{Im } g^{(2)}$$

of, op het zelfde neerkomend

$$g^{(1)} + g^{(2)} - \overline{g^{(1)}} - \overline{g^{(2)}} = 0 \quad (5.45)$$

Oplossing van (5.44) en (5.45) geeft uiteindelijk

$$g^{(1)} = \frac{p_1 - p_2 \mu_2^2 - p_{12}(\mu_1 + \mu_2)}{2(\mu_1^2 - \mu_2^2)} \quad (5.46)$$

$$g^{(2)} = \frac{p_1 - p_2 \mu_1^2 - p_{12}(\mu_2 + \mu_1)}{2(\mu_2^2 - \mu_1^2)} \quad (5.47)$$

waarmee de complexe (spannings)funkties voor een oneindig grote plaat in een homogene spanningssituatie met randspanningen  $p_1$ ,  $p_2$  en  $p_{12}$  kennelijk zijn:

$$\phi_k(z_k) = \frac{p_1 - p_2 \mu_\lambda^2 - p_{12}(\mu_k + \mu_\lambda)}{2(\mu_k^2 - \mu_\lambda^2)} z_k \quad \begin{matrix} k = 1, 2 \\ \lambda = 3 - k \end{matrix} \quad (5.48)$$

N.B.: Omdat (5.45) in feite willekeurig is gekozen zijn de funkties (5.48) niet volledig bepaald door de randvoorwaarden. Een andere vergelijking (5.45) zou ook andere funkties (5.48) geven die echter in de randvoorwaardenformules (5.43) weer dezelfde waarden voor de randspanningen geven. (5.45) is zo gekozen omdat in het resultaat (5.48) de indices  $k$  en  $\lambda$  cyclisch verwisselbaar zijn.

Het spreekt vanzelf dat (5.48) ook geldt voor situaties met bijvoorbeeld alleen een trekspanning  $p_1$  op de plaat in het oneindige,  $p_2$  en  $p_{12}$  zijn dan nul.

Heeft de plaat nu ergens een opening dan zal het homogene spanningsveld verstoord worden en de spanningen zijn dan uiteraard niet meer constant en overall gelijk. Wel is het zo dat de verstoring beperkt blijft tot de naaste omgeving van de oorzaak en de plaat veraf zich gedraagt alsof er geen verstoring in het spanningsveld is. Veraf 'gedraagt de plaat zich dus volgens de funkties (5.48)', de stoorkfunkties die gesuperponeerd moeten worden mogen alleen plaatselijk hun invloed doen gelden.

We zullen uitsluitend ellipsvormige gaten beschouwen; uiteraard vallen hieronder ook het cirkelvormig gat en de platte ellips of 'scheur'. Lange- en korte as worden langs de coördinaatassen gelegd.

In paragraaf 5.7 is reeds geconstateerd dat de funkties  $\phi_k(z_k)$  analytische, d.w.z. naar  $z_k$  differentieerbare funkties zijn. Ook hun afgeleiden zijn dan analytisch. Een eigenschap van analytische funkties is dat ze kunnen worden

voorgesteld door machtreeksen. De eerste afgeleide van de functie zoals die voorkomt in de spanningsformules (5.30) stellen we dan ook als volgt voor:

$$\phi'_k(z_k) = g^{(k)} + A_k z_k^{-1} - (g_1^{(k)} z_k^{-2} + 2g_2^{(k)} z_k^{-3} + \dots) \quad (5.49)$$

waarin  $g^{(k)}$  dus voor het constante, homogene spanningsveld zorgt zoals in het voorgaande is besproken. De rest van de termen in (5.49) vertegenwoordigt de verstoring door het gat in het homogene spanningsveld. De algemene vorm van een reeksontwikkeling voor een analytische functie bevat ook positieve machten van  $z_k$ ; deze zouden in de oneindig grote plaat echter aanleiding geven tot oneindig grote spanningen in het oneindige en dit zou in strijd zijn met de gegeven randspanningen die eindig zijn. Positieve machten van  $z_k$  mogen in de gedifferentieerde functies zoals die voorkomen in de spanningsformules niet aanwezig zijn. De functies zelf worden gevonden door integratie van (5.49):

$$\phi_k(z_k) = g^{(k)} z_k + A_k \ln z_k + \sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(k)} z_k^{-n} + \text{const.} \quad (5.50)$$

Vergelijk hierin de homogene termen  $g^{(k)} z_k$  met (5.42). Deze termen geven in de verplaatsingsformules waarin  $\phi_k(z_k)$  in niet gedifferentieerde vorm voorkomen aanleiding tot oneindig grote verplaatsingen in het oneindige.

Dit is vanzelfsprekend omdat constante spanningen constante vervormingen geven die geïntegreerd naar het oneindige resulteren in oneindig grote verplaatsingen.

De termen  $A_k \ln z_k$  moeten in de spanningsfuncties aanwezig zijn als op de gatrand krachten werken die een resultante ongelijk nul geven. Hier zullen echter uitsluitend onbelaste gatranden worden beschouwd en daarom worden de termen  $A_k \ln z_k$  weggelaten.

De constante in (5.50) is voor de oplossing van het spanningsprobleem niet interessant en wordt eveneens weggelaten. Schrijven we voor de reeks in (5.50) de functie  $\phi_k^{\circ}(z_k)$  dan werken we dus verder met

$$\phi_k(z_k) = g^{(k)} z_k + \phi_k^{\circ}(z_k) \quad (5.51)$$

Bij een onbelaste gatrand zijn de componenten  $p_i^{(n)}$  van de spanningsvectoren op de gatrand uiteraard overal nul en dus worden de randvoorwaarden voor de belastingen (5.38) op de rand van een onbelast gat in een in het oneindige belaste plaat:

$$2\operatorname{Re}[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2)] = 0 \quad (5.52)$$

$$2\operatorname{Re}[\mu_1 \phi_1(z_1) + \mu_2 \phi_2(z_2)] = 0$$

Ook in (5.52) zijn de constanten ( $C_5$  en  $C_6$ , zie (5.38)) weggelaten. Zij samen zouden de niet interessante constanten in (5.50) bepalen.

Met (5.51) wordt (5.52) nu:

$$2\operatorname{Re}[g^{(1)} z_1 + g^{(2)} z_2 + \phi_1^\circ(z_1) + \phi_2^\circ(z_2)] = 0$$

$$2\operatorname{Re}[\mu_1 g^{(1)} z_1 + \mu_2 g^{(2)} z_2 + \mu_1 \phi_1^\circ(z_1) + \mu_2 \phi_2^\circ(z_2)] = 0 \quad (5.53)$$

waarin, met  $z_k = x_1 + \mu_k x_2$  (zie 5.24)

$$2\operatorname{Re}[g^{(1)} z_1 + g^{(2)} z_2] = 2\operatorname{Re}[x_1(g^{(1)} + g^{(2)}) + x_2(\mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)})]$$

$$= 2x_1 \operatorname{Re}[g^{(1)} + g^{(2)}] + 2x_2 \operatorname{Re}[\mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)}] \quad (5.54)$$

$$2\operatorname{Re}[\mu_1 g^{(1)} z_1 + \mu_2 g^{(2)} z_2] = 2x_1 \operatorname{Re}[\mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)}]$$

$$+ 2x_2 \operatorname{Re}[\mu_1^2 g^{(1)} + \mu_2^2 g^{(2)}]$$

Hierin zijn, zie (5.43)

$$2\operatorname{Re}[g^{(1)} + g^{(2)}] = p_2$$

$$2\operatorname{Re}[\mu_1 g^{(1)} + \mu_2 g^{(2)}] = -p_{12} \quad (5.55)$$

$$2\operatorname{Re}[\mu_1^2 g^{(1)} + \mu_2^2 g^{(2)}] = p_1$$

De randvoorwaarden voor de belastingen op de gatrand (5.53) worden dan ook met (5.54) en (5.55)

$$2\operatorname{Re}[\phi_1^\circ(z_1) + \phi_2^\circ(z_2)] = -p_2 x_1 + p_{12} x_2 \quad (5.56)$$

$$2\operatorname{Re}[\mu_1 \phi_1^\circ(z_1) + \mu_2 \phi_2^\circ(z_2)] = p_{12} x_1 - p_1 x_2$$

Formules (5.56) zijn de randvoorwaarden voor de rand van het elliptische gat.  $x_1$  en  $x_2$  in de rechter leden van (5.56) zijn de coördinaten van de punten van die gatrand. De zelfde (reële) coördinaten komen uiteraard voor in de complexe coördinaten  $z_k$  in de machtreeksen, echter op zeer ingewikkelde wijze via de negatieve machten van  $z_k$ . Zonder meer oplossen van  $g_n^{(k)}$  uit (5.56) teneinde de spanningsfuncties volledig te kennen is dan ook niet mogelijk. We zullen daarom een vertaling (transformatie) gaan toepassen van de door algemene oplossing van het spanningsprobleem geïntroduceerde  $z_k$  naar eenvoudiger te 'verwerken' coördinaten. Bij die vertaling maken we gebruik van de eenheidscirkel

$$\sigma = \cos \theta + i \sin \theta \tag{5.57}$$

N.B.: In het zogenaamde complexe vlak kan een meetkundige voorstelling van een complex getal  $z = x_1 + ix_2$  worden gegeven. De  $X_1$ -as is dan de reële as en de  $X_2$ -as de imaginaire.

Oz is een vector waarvan de lengte  $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  de modulus van het complexe getal wordt genoemd.

Met

$$x_1 = R \cos \theta$$

$$x_2 = R \sin \theta$$

kan een complex getal ook in de poolcoördinaten  $R$  en  $\theta$  worden uitgedrukt

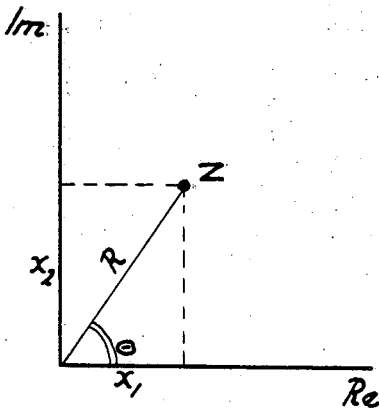
$$z = x_1 + ix_2 = R \cos \theta + iR \sin \theta$$

Voor de eenheidscirkel, die we  $\sigma$  zullen noemen, geldt per definitie  $R = 1$ , zodat

$$\sigma = \cos \theta + i \sin \theta$$

Met behulp van reeksontwikkeling is aan te tonen dat

$$\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$$



zodat voor de eenheidscirkel geldt

$$\sigma = e^{i\theta}$$

Verder is

$$\bar{\sigma} = \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}$$

ofwel

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \tag{5.58}$$

Van deze laatste betrekking, die uitsluitend voor de eenheidscirkel geldt, zal veel gebruik worden gemaakt. Verder geldt uiteraard

$$\cos \theta = \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2} \tag{5.59}$$

$$\sin \theta = \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2i} \tag{5.60}$$

De vergelijking voor een ellips met halve as  $d$  op de  $X_1$ -as en halve as  $b$  op de  $X_2$ -as is

$$\frac{x_1^2}{d^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$$

ofwel  $x_1 = d \cos \theta = d \frac{\sigma + \bar{\sigma}}{2}$  (5.61)

$$x_2 = b \sin \theta = b \frac{\sigma - \bar{\sigma}}{2i} \tag{5.62}$$

Met (5.61) en (5.62) kunnen dus de reële coördinaten  $x_1$  en  $x_2$  in de rechterleden van (5.56) worden uitgedrukt in de complexe eenheidscirkel  $\sigma$ . In de linkerleden staan echter nog steeds reeksen van de complexe grootheden  $z_k$ , die eveneens eenvoudig in  $\sigma$  kunnen worden uitgedrukt via

$$\begin{aligned} z_k &= x_1 + i\mu_k x_2 \\ &= \frac{d - i\mu_k b}{2} \sigma + \frac{d + i\mu_k b}{2} \frac{1}{\sigma} \end{aligned} \quad k = 1, 2 \tag{5.63}$$

Met bijvoorbeeld

$$z_k^{-1} = \frac{2}{d - i\mu_k b} \frac{1}{\sigma} \left( \frac{1}{d + i\mu_k b} \frac{1}{1 + \frac{1}{d - i\mu_k b} \frac{1}{\sigma^2}} \right)$$

$$= \frac{2}{d - i\mu_k b} \frac{1}{\sigma} \text{ (reeks van negatieve machten van } \sigma \text{)}$$

kan worden ingezien dat (op de gatrand) de reeksen met negatieve machten van  $z_1$  resp.  $z_2$  beide mogen worden vervangen door reeksen van negatieve machten van de eenheidscirkel  $\sigma$

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(1)} z_1^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} h_n^{(1)} \sigma^{-n} = \phi_1^{\circ}(\sigma)$$

(5.64)

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n^{(2)} z_2^{-n} = \sum_{n=2}^{\infty} h_n^{(2)} \sigma^{-n} = \phi_2^{\circ}(\sigma)$$

waarmee dus randvoorwaarden formules (5.56) voor de gatrand van een elliptisch gat in het (reële) coördinaatassenstelsel  $X_1-X_2$  geheel zijn uitgedrukt in de complexe eenheidscirkel  $\sigma$ , en wel

$$2\text{Re} [\phi_1^{\circ}(\sigma) + \phi_2^{\circ}(\sigma)] = -p_2 d \frac{\sigma + \sigma^{-1}}{2} + p_{12} b \frac{\sigma - \sigma^{-1}}{2i}$$

(5.56)

$$2\text{Re}[\mu_1 \phi_1^{\circ}(\sigma) + \mu_2 \phi_2^{\circ}(\sigma)] = p_{12} d \frac{\sigma + \sigma^{-1}}{2} - p_1 b \frac{\sigma - \sigma^{-1}}{2}$$

of

$$\phi_1^{\circ}(\sigma) + \phi_2^{\circ}(\sigma) + \overline{\phi_1^{\circ}(\sigma) + \phi_2^{\circ}(\sigma)} = -\frac{\sigma}{2} (p_2 d + i p_{12} b) - \frac{\sigma^{-1}}{2} (p_2 d - i p_{12} b)$$

$$\mu_1 \phi_1^{\circ}(\sigma) + \mu_2 \phi_2^{\circ}(\sigma) + \overline{\mu_1 \phi_1^{\circ}(\sigma) + \mu_2 \phi_2^{\circ}(\sigma)} = \frac{\sigma}{2} (p_{12} d + i p_1 b) + \frac{\sigma^{-1}}{2} (p_{12} d - i p_1 b)$$

Na elimineren van  $\phi_2^{\circ}(\sigma)$  resp.  $\phi_1^{\circ}(\sigma)$  wordt hieruit verkregen

$$(\mu_{\ell} - \mu_k) \phi_k^{\circ}(\sigma) + (\mu_{\ell} - \bar{\mu}_k) \overline{\phi_k^{\circ}(\sigma)} + (\bar{\mu}_{\ell} - \mu_{\ell}) \overline{\phi_{\ell}^{\circ}(\sigma)} =$$

$$- \frac{\sigma}{2} \{d(p_2 \mu_{\ell} + p_{12}) + i b(p_{12} \mu_{\ell} + p_1)\}$$

$$- \frac{\sigma^{-1}}{2} \{d(p_2 \mu_{\ell} + p_{12}) - i b(p_{12} \mu_{\ell} + p_1)\}$$

(5.66)

$k = 1, 2$   
 $\ell = 3 - k$

(5.66) geeft twee vergelijkingen met ieder drie complexe resp. toegevoegd complexe functies. De toegevoegd complexe functies worden nu verwijderd door toepassing van de integraalvoorstelling van Cauchy. Deze zegt dat voor een



funktie  $\phi_k^\circ(\zeta_k)$  die analytisch is in  $\zeta_k$  op en buiten een gesloten contour en waarvoor geldt

$$\lim_{\zeta_k \rightarrow \infty} \phi_k^\circ(\zeta_k) = 0$$

kan worden geschreven

$$\phi_k^\circ(\zeta_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\phi_k^\circ(\sigma)}{\sigma - \zeta_k} d\sigma \quad (5.67)$$

waarin  $\phi_k^\circ(\sigma)$  de randwaarde van de funktie  $\phi_k^\circ(\zeta_k)$  is en  $\sigma$  de randwaarde van  $\zeta_k$ . De in (5.66) voorkomende funkties zijn inderdaad randwaarden van funkties die analytisch zijn en omdat het stoorfunkties zijn een limiet nul in het oneindige hebben. En hoewel  $\sigma$  is geïntroduceerd als de eenheidskring is  $\sigma$  tevens de randwaarde van twee variabelen  $\zeta_1$  en  $\zeta_2$ . Dat dit zo is kan worden ingezien door (5.63) te beschouwen als een kwadratische vergelijking in  $\sigma$  met wortels

$$\text{voor } k=1 \quad \sigma = \frac{z_1 \pm \sqrt{z_1^2 - \mu_1^2 b^2 - d^2}}{d - i\mu_1 b} \quad (5.68)$$

$$\text{voor } k=2 \quad \sigma = \frac{z_2 \pm \sqrt{z_2^2 - \mu_2^2 b^2 - d^2}}{d - i\mu_2 b} \quad (5.69)$$

en de nieuwe variabelen in te voeren

$$\zeta_1 = \frac{z_1 \pm \sqrt{z_1^2 - \mu_1^2 b^2 - d^2}}{d - \mu_1 b} \quad (5.70)$$

$$\zeta_2 = \frac{z_2 \pm \sqrt{z_2^2 - \mu_2^2 b^2 - d^2}}{d - i\mu_2 b} \quad (5.71)$$

Op de gatrاند van de ellips met

$$z_1 = d \cos \theta + \mu_1 b \sin \theta$$

en 
$$z_2 = d \cos \theta + \mu_2 b \sin \theta$$

zijn  $\zeta_1$  en  $\zeta_2$  weliswaar gelijk, en wel

$$\zeta_1 = \zeta_2 = \sigma = \cos \theta + i \sin \theta \quad (5.72)$$

echter buiten de gatrand zijn zij verschillend.

Voor de toegevoegd complexe functies geldt volgens Cauchy onder de genoemde omstandigheden

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{\phi_k^{\circ}(\sigma)}{\sigma - \zeta_k} = 0 \quad (5.73)$$

Linker- en rechterlid van (5.66) vermenigvuldigen met

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\sigma - \zeta_k}$$

en daarna de kringintegraal nemen levert direkt volgens (5.67) en (5.73)

$$\begin{aligned} (\mu_{\lambda} - \mu_k) \phi_k^{\circ}(\zeta_k) = & - \frac{d(p_2 \mu_{\lambda} + p_{12}) + ib(p_{12} \mu_{\lambda} + p_1)}{2 \cdot 2\pi i} \oint \frac{\sigma d\sigma}{\sigma - \zeta_k} \\ & - \frac{d(p_2 \mu_{\lambda} + p_{12}) - ib(p_{12} \mu_{\lambda} + p_1)}{2} \frac{1}{\zeta_k} \end{aligned} \quad (5.74)$$

waarin  $\oint \frac{\sigma d\sigma}{\sigma - \zeta_k}$  nog een complicatie geeft omdat  $\sigma$  niet de randwaarde is van een functie die een limiet nul in het oneindige heeft. Echter  $\frac{\sigma}{\sigma - \zeta_k}$  is wel de randwaarde van een functie die binnen de beschouwde contour geen singulariteiten heeft zodat

$$\oint \frac{\sigma d\sigma}{\sigma - \zeta_k} = 0$$

en de stoorfuncties worden dan ook

$$\phi_k^{\circ}(\zeta_k) = \frac{d(p_2 \mu_{\lambda} + p_{12}) - ib(p_{12} \mu_{\lambda} + p_1)}{2(\mu_k - \mu_{\lambda})} \frac{1}{\zeta_k} \quad (5.75)$$

Kennelijk hebben de stoorfuncties, uitgedrukt in  $\zeta_k$ , slechts één term!

De coëfficiënten  $g_n^{(k)}$  uit de machtreeksen van  $z_k$  zijn nog steeds niet opgelost. Dat is nu echter ook niet meer nodig. De spanningsfuncties, bestaande uit een homogeen deel als functie van  $z_k$  en een stoordeel als functie van  $\zeta_k$  is via (5.70) resp. (5.71) afhankelijk van  $z_k$  alleen, en differentiëren naar  $z_k$ , nodig voor het berekenen van spanningen, levert geen problemen.

De complexe spanningsfuncties voor een met  $p_1$ ,  $p_2$  en  $p_{12}$  in het oneindige belaste plaat met een ellipsvormig gat met halve assen  $d$  en  $b$  langs de coördinaatassen worden uiteindelijk

$$\phi_k(z_k) = \frac{p_1 - p_2 \mu_k^2 - p_{12}(\mu_k + \mu_\ell)}{2(\mu_k^2 - \mu_\ell^2)} z_k + \frac{d(p_2 \mu_\ell + p_{12}) - ib(p_{12} \mu_\ell + p_1)}{2(\mu_k - \mu_\ell)} \frac{d - i\mu_k b}{z_k \pm \sqrt{z_k^2 - \mu_k^2 b^2 - d^2}} \quad (5.76)$$

We zullen ons niet uitlaten over de keuze van het + of - teken in (5.76) en werken verder met het + teken. De gedifferentieerde functies worden dan

$$\phi_k'(z_k) = \frac{p_1 - p_2 \mu_\ell^2 - p_{12}(\mu_k + \mu_\ell)}{2(\mu_k^2 - \mu_\ell^2)} - \frac{d(p_2 \mu_\ell + p_{12}) - ib(p_{12} \mu_\ell + p_1)}{2(\mu_k - \mu_\ell)} \frac{d - i\mu_k b}{z_k + \sqrt{z_k^2 - \mu_k^2 b^2 - d^2}} \frac{1}{\sqrt{z_k^2 - \mu_k^2 b^2 - d^2}} \quad (5.77)$$

$k = 1, 2$   
 $\ell = 3 - k$

Door voor de punten van de gatrand van de ellips te schrijven

$$z_k = d(\cos \theta + \mu_k \frac{b}{d} \sin \theta)$$

is eenvoudig in te zien dat de door (5.77) gegeven spanningsverdelingen uitsluitend afhankelijk zijn van de assenverhouding  $b/d$  en niet van de absolute grootte van de ellips. Overeenkomstige punten op ellipsen van verschillende grootte doch gelijke verhouding  $b/d$  hebben de zelfde spanningen. Het zelfde geldt voor overeenkomstige punten buiten de gatranden van de ellipsen.

### 5j. Een numeriek voorbeeld

Beschouwd wordt een plaat, in het oneindige belast door uitsluitend  $p_2$  in  $X_2$ -richting. De gedifferentieerde spanningsfuncties (5.77) worden in dat geval

$$\phi_k'(z_k) = - \frac{p_2 \mu_\ell^2}{2(\mu_k - \mu_\ell^2)} - \frac{dp_2 \mu_\ell}{2(\mu_k - \mu_\ell)} \frac{d - i\mu_\ell b}{z_k + \sqrt{z_k^2 - \mu_k^2 b^2 - d^2}} \frac{1}{\sqrt{z_k^2 - \mu_k^2 b^2 - d^2}} \quad (5.78)$$

Meestal zijn alleen spanningen op de gatrand zelf van belang omdat daar in het algemeen de hoogste waarden voorkomen. Voor de gatrand worden de functies (5.78)

met

$$z_k = d \cos \theta + \mu_k b \sin \theta$$

$$\phi'_k(z_k) = -\frac{p_2 \mu_k^2}{2(\mu_k^2 - \mu_\lambda^2)} - \frac{dp_2 \mu_\lambda}{2(\mu_k - \mu_\lambda)} \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)} \frac{1}{\{i(d \sin \theta - \mu_k b \cos \theta)\}}$$

waarmee spanning  $\sigma_{11}$  op de gatrand wordt (zie formule (5.30))

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\text{Re}[\mu_1^2 \phi'_1(z_1) + \mu_2^2 \phi'_1(z_2)] \\ &= 2\text{Re}\left[\frac{-p_2 \mu_2^2 \mu_1^2}{2(\mu_1^2 - \mu_2^2)} - \frac{dp_2 \mu_2 \mu_1^2}{2(\mu_1 - \mu_2)} \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)} \frac{1}{\{i(d \sin \theta - \mu_1 b \cos \theta)\}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{p_2 \mu_1^2 \mu_2^2}{2(\mu_2^2 - \mu_1^2)} - \frac{dp_2 \mu_1 \mu_2^2}{2(\mu_2 - \mu_1)} \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)} \frac{1}{\{i(d \sin \theta - \mu_2 b \cos \theta)\}} \right] \end{aligned}$$

of, verder uitgewerkt:

$$\frac{\sigma_{11}}{p_2} = \mu_1 \mu_2 \sin \theta \text{Re} \left[ \frac{i(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\sin \theta - \mu_1 \frac{b}{d} \cos \theta)(\sin \theta - \mu_2 \frac{b}{d} \cos \theta)} \right] \quad (5.79)$$

waarin  $\mu_1 \mu_2$  altijd reëel is. Op de zelfde wijze wordt gevonden voor de gatrand

$$\frac{\sigma_{22}}{p_2} = 1 + \text{Re} \left[ \frac{\{i(\mu_1 + \mu_2) \frac{b}{d} \cos \theta - i \sin \theta\}(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\sin \theta - \mu_1 \frac{b}{d} \cos \theta)(\sin \theta - \mu_2 \frac{b}{d} \cos \theta)} \right] \quad (5.80)$$

$$\frac{\tau_{12}}{p_2} = -\mu_1 \mu_2 \frac{b}{d} \cos \theta \text{Re} \left[ \frac{i(\cos \theta - i \sin \theta)}{(\sin \theta - \mu_1 \frac{b}{d} \cos \theta)(\sin \theta - \mu_2 \frac{b}{d} \cos \theta)} \right] \quad (5.81)$$

waarin gebruik is gemaakt van het feit dat  $\mu_1 + \mu_2$  altijd imaginair is. De verhoudingen  $\sigma/p$  worden spanningsconcentraties genoemd.

Met formules (5.79) t/m (5.81) kunnen direkt de spanningen in een aantal 'karakteristieke' punten worden bepaald.

Zo is voor de snijpunten van de ellips met de  $X_1$ -as,  $\theta = 0$  of  $\pi$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{p_2} &= 0 \\ \frac{\sigma_{22}}{p_2} &= 1 + \frac{d}{b} \frac{i(\mu_1 + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2} \\ \frac{\tau_{12}}{p_2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.82)$$

Voor een cirkelvormig gat ( $\frac{d}{b} = 1$ ) in isotroop materiaal ( $\mu_1 = \mu_2 = i$ ) wordt voor die punten de bekende factor gevonden

$$\frac{\sigma_{22}}{p_2} = 3 \quad (5.83)$$

Voor de snijpunten van de ellips met de  $X_2$ -as,  $\theta = \frac{\pi}{2}$  of  $\frac{3}{2} \pi$  wordt gevonden

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{p_2} &= \mu_1 \mu_2 \\ \frac{\sigma_{22}}{p_2} &= 0 \\ \frac{\tau_{12}}{p_2} &= 0 \end{aligned} \quad (5.84)$$

Kennelijk zijn de spanningen daar onafhankelijk van de verhouding  $\frac{b}{d}$ . Voor isotrope materialen wordt voor die punten de bekende factor gevonden

$$\frac{\sigma_{11}}{p_2} = -1 \quad (5.85)$$

In Figuur 5.3 zijn de spanningen gegeven langs de rand van een cirkelvormig gat in een drietal karakteristieke laminaten van C.F.R.P. (carbon fiber reinforced plastic) waarvan de eigenschappen in de hiernavolgende tabel zijn vermeld. Gepresenteerd is de omtreksspanning  $\sigma_\theta/p_{22}$  waarin

$$\sigma_\theta = \sigma_{11} + \sigma_{22}$$

Figuur 5.4 geeft de schuifspanningen langs de gatrand.

	Uni-Directioneel Vezels in X <sub>2</sub> -richting	Quasi-Isotroop	±45° Angle-Ply
E <sub>11</sub> GPa	7		12,86
E <sub>22</sub> GPa	145		12,86
G <sub>12</sub> GPa	3,5		37,02
ν <sub>12</sub>	0,0164		0,837
ν <sub>21</sub>	0,34		0,837
i(μ <sub>1</sub> +μ <sub>2</sub> )	-1,5513	-2	-0,8206
μ <sub>1</sub> μ <sub>2</sub>	-0,2197	-1	-1

Eigenschappen van drie karakteristieke C.F.R.P. laminaten,

$$V_f = 60\%$$

Voor de berekening van spanningen in punten buiten de gatrand moeten uiteraard formules (5.77) worden gebruikt. Figuren 5.5 en 5.6 geven het verloop van σ<sub>22</sub> langs resp. de X<sub>1</sub>-as en de X<sub>2</sub>-as. We zullen deze formules verder toepassen op een platte ellips (b=0) ofwel scheur met lengte 2d op de X<sub>1</sub>-as. Voor die scheur geldt, bij belasting p<sub>2</sub> in het oneindige

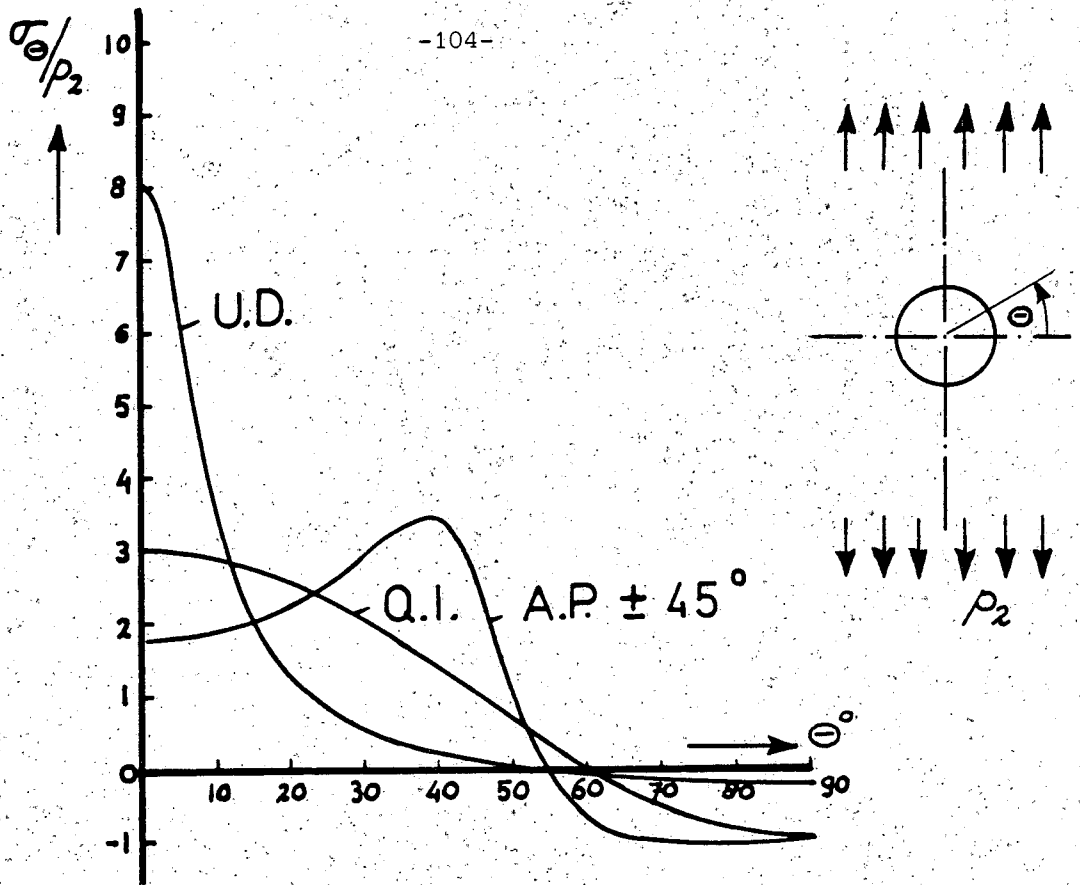
$$\phi'_k(z_k) = -\frac{p_2 \mu_k^2}{2(\mu_k^2 - \mu_l^2)} - \frac{d^2 p_2 \mu_k}{2(\mu_k - \mu_l)} \frac{1}{z_k + \sqrt{z_k^2 - d^2}} \frac{1}{\sqrt{z_k^2 - d^2}}$$

waarmee de spanningen worden

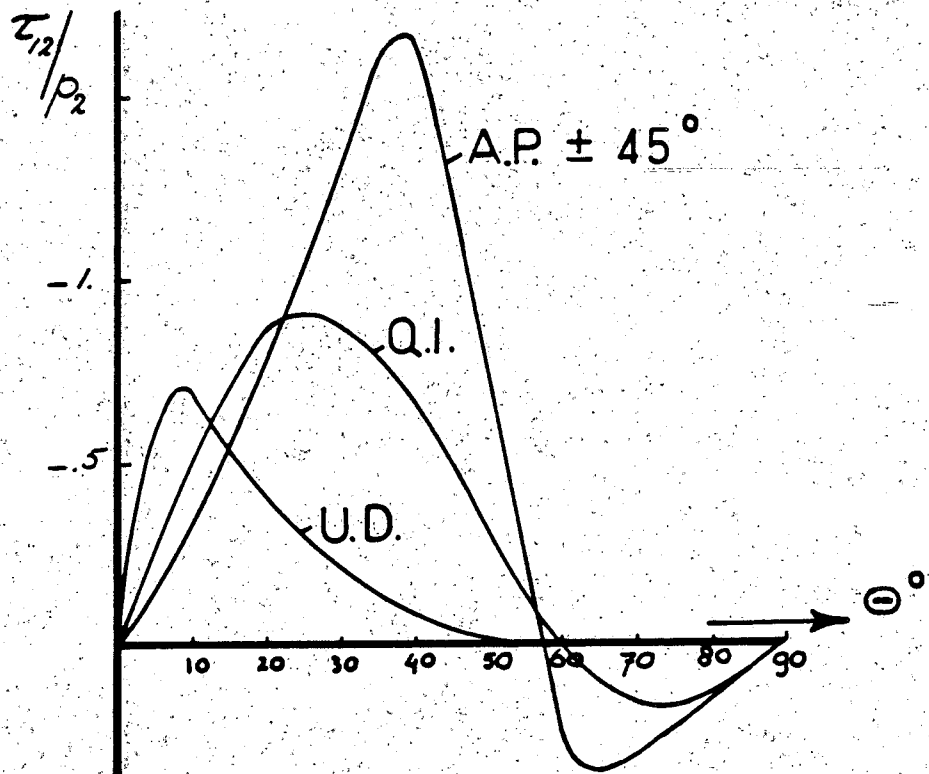
$$\frac{\sigma_{11}}{p_2} = \text{Re} \left[ \frac{d^2 \mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \frac{\mu_1}{z_1^2 - d^2 + z_1 \sqrt{z_1^2 - d^2}} - \frac{\mu_2}{z_2^2 - d^2 + z_2 \sqrt{z_2^2 - d^2}} \right\} \right] \quad (5.86)$$

$$\frac{\sigma_{22}}{p_2} = 1 + \text{Re} \left[ \frac{d^2}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \frac{\mu_2}{z_1^2 - d^2 + z_1 \sqrt{z_1^2 - d^2}} - \frac{\mu_1}{z_2^2 - d^2 + z_2 \sqrt{z_2^2 - d^2}} \right\} \right] \quad (5.87)$$

$$\frac{\tau_{12}}{p_2} = -\text{Re} \left[ \frac{d^2 \mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \frac{1}{z_1^2 - d^2 + z_1 \sqrt{z_1^2 - d^2}} - \frac{1}{z_2^2 - d^2 + z_2 \sqrt{z_2^2 - d^2}} \right\} \right] \quad (5.88)$$



Figuur 5.3. Omtrekspanning rond een gat in een op trek belaste plaat in C.F.R.P.



Figuur 5.4. Schuifspanning rond een gat in een op trek belaste plaat in C.F.R.P.

Voor de  $X_1$ -as is  $z_k = x_1$  ( $k = 1, 2$ ) waarmee de spanningen langs die as worden voor  $|x_1| > d$

$$\frac{\sigma_{11}}{p_2} = \frac{-d^2 \mu_1 \mu_2}{x_1^2 - d^2 + x_1 \sqrt{x_1^2 - d^2}} \quad (5.89)$$

$$\frac{\sigma_{22}}{p_2} = 1 + \frac{d^2}{x_1^2 - d^2 + x_1 \sqrt{x_1^2 - d^2}} \quad (5.90)$$

$$\frac{\tau_{12}}{p_2} = 0$$

Volgens (5.90) is  $\sigma_{22}/p_2$  langs de  $X_1$ -as onafhankelijk van de materiaaleigenschappen!

Voor  $|x_1| < d$  is  $x_1^2 - d^2 < 0$  en wordt (5.86)

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{p_2} &= \operatorname{Re} \frac{d^2 \mu_1 \mu_2}{x_1^2 - d^2 + ix_1 \sqrt{d^2 - x_1^2}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{-d^2 \mu_1 \mu_2 (x_1^2 - d^2 - ix_1 \sqrt{d^2 - x_1^2})}{(x_1^2 - d^2)^2 + x_1^2 (d^2 - x_1^2)} \quad (5.91) \\ &= \frac{-d^2 \mu_1 \mu_2 (x_1^2 - d^2)}{(x_1^2 - d^2)^2 + x_1^2 (d^2 - x_1^2)} = \mu_1 \mu_2 \end{aligned}$$

Langs de hele boven- en onderrand van de scheur is  $\sigma_{11}/p_2$  constant. Voor isotrope materialen wordt daar

$$\frac{\sigma_{11}}{p_2} = -1$$

$\frac{\sigma_{22}}{p_2}$  is langs de hele boven- en onderrand nul.

### 5k. De benaderingen volgens de breukmechanica

In de vorige paragraaf zijn formules afgeleid voor de spanningen rond een scheur



in een anisotrope plaat. De daar afgeleide formules worden wel de exacte formules genoemd. De breukmechanica maakt echter gebruik van benaderingsformules die uitsluitend geldig zijn in een klein gebiedje rond de scheurtip. Deze benaderingsformules zullen hier worden afgeleid voor het geval van de scheur met lengte  $2d$  langs de  $X_1$ -as in een oneindig grote plaat die in  $X_2$ -richting is belast met  $p_2$ .

In formules (5.86) t/m (5.88) komt steeds de uitdrukking voor

$$\frac{d^2}{z_k^2 - d^2 + z_k \sqrt{z_k^2 - d^2}} \quad (k = 1, 2) \quad (5.92)$$

Het centrum van het coördinaatensysteem wordt nu verplaatst naar de scheurtip waartoe nieuwe coördinaten worden ingevoerd

$$z_k^\circ = z_k - d$$

(5.92) wordt in die nieuwe coördinaten

$$\frac{d^2}{z_k^2 - d^2 + z_k \sqrt{z_k^2 - d^2}} = \frac{1}{\frac{z_k^{\circ 2}}{d^2} + 2 \frac{z_k^\circ}{d} + \left(\frac{z_k^\circ}{d} + 1\right) \sqrt{\frac{z_k^{\circ 2}}{d^2} + 2 \frac{z_k^\circ}{d}}}$$

Voor punten in de buurt van de scheurtip is  $\frac{z_k^\circ}{d} \ll 1$ . Door nu  $\frac{z_k^{\circ 2}}{d^2}$  te verwaarlozen

ten opzichte van  $\frac{z_k^\circ}{d}$  en  $\frac{z_k^\circ}{d}$  ten opzichte van 1 wordt

$$\frac{d^2}{z_k^2 - d^2 + z_k \sqrt{z_k^2 - d^2}} \approx \frac{1}{2 \frac{z_k^\circ}{d} + \sqrt{2 \frac{z_k^\circ}{d}}} = \frac{1}{\sqrt{2 \frac{z_k^\circ}{d}} \left(1 + \sqrt{2 \frac{z_k^\circ}{d}}\right)} \approx$$

$$\sqrt{\frac{d}{2z_k^\circ}} \left(1 - \sqrt{2 \frac{z_k^\circ}{d}}\right) = \sqrt{\frac{d}{2z_k^\circ}} - 1 \quad (5.93)$$

De formules voor de spanningen worden met (5.93)

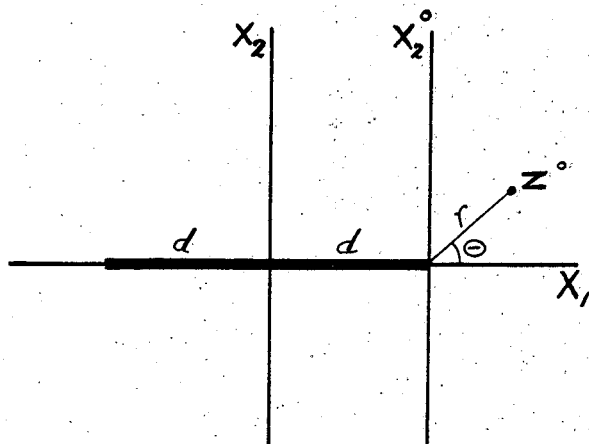
$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{11}}{p_2} &= \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \mu_1 \sqrt{\frac{d}{2z_1^\circ}} - \mu_2 \sqrt{\frac{d}{2z_2^\circ}} - \mu_1 + \mu_2 \right\} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \mu_1 \sqrt{\frac{d}{2z_1^\circ}} - \mu_2 \sqrt{\frac{d}{2z_2^\circ}} \right\} \right] + \mu_1 \mu_2 \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{22}}{p_2} &= 1 + \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \mu_2 \sqrt{\frac{d}{2z_1^\circ}} - \mu_1 \sqrt{\frac{d}{2z_2^\circ}} - \mu_2 + \mu_1 \right\} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \mu_2 \sqrt{\frac{d}{2z_1^\circ}} - \mu_1 \sqrt{\frac{d}{2z_2^\circ}} \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{\tau_{12}}{p_2} = -\operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \sqrt{\frac{d}{2z_1^\circ}} - \sqrt{\frac{d}{2z_2^\circ}} \right\} \right] \quad (5.96)$$

Met behulp van de poolcoördinaten  $r$  en  $\theta$  wordt

$$z_k^\circ = r \cos \theta + \mu_k r \sin \theta$$



In deze poolcoördinaten worden de spanningen

$$\sigma_{11} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right\} \right] + p_2 \mu_1 \mu_2 \quad (5.97)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (5.98)$$

$$\tau_{12} = - \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right\} \right] \quad (5.99)$$

waarin

$$K = p_2 \sqrt{\pi d} \quad (5.100)$$

de spanningsintensiteitsfactor wordt genoemd.

Deze factor wordt gebruikt als toestandsparameter voor het vergelijken van experimentele resultaten.

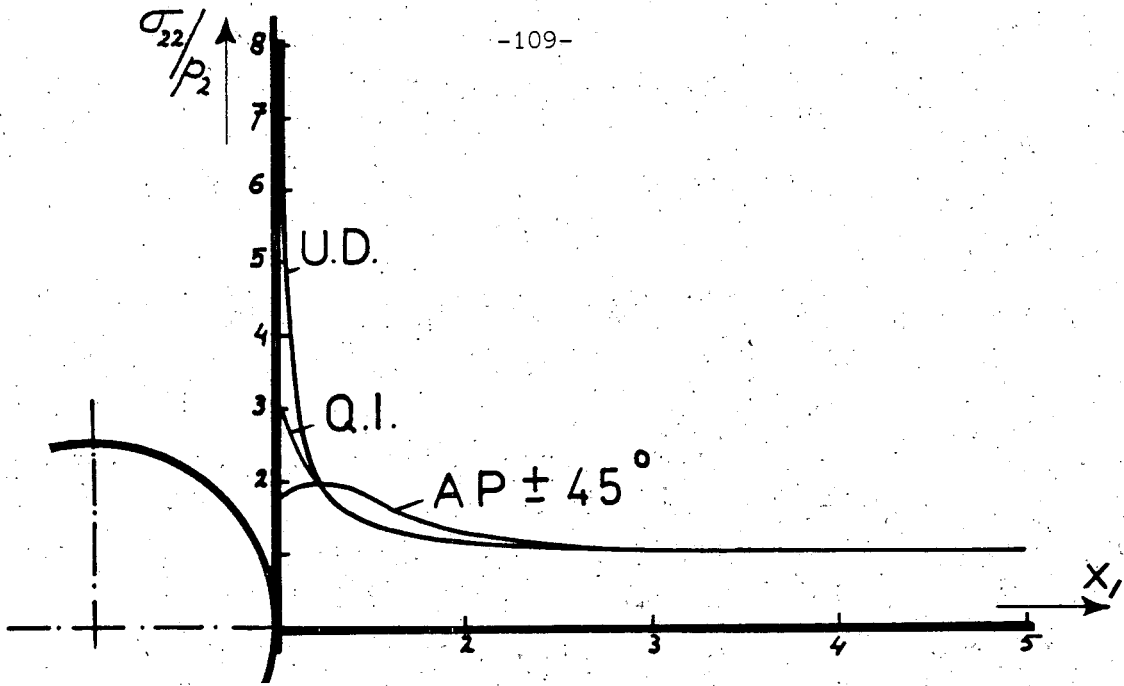
Voor isotrope materialen is  $\mu_1 = \mu_2 = i$  en krijgen formules (5.97) t/m (5.99) de onbepaalde vorm 0/0. Het toepassen van de l'Hôpital (teller en noemer afzonderlijk naar bijvoorbeeld  $\mu_1$  differentiëren en daarna  $\mu_1 = \mu_2 = i$  substitueren) levert dan de bekende breukmechanicaformules voor isotrope materialen

$$\sigma_{11} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{1}{2} \theta \left\{ 1 - \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{3}{2} \theta \right\} - p_2 \quad (5.101)$$

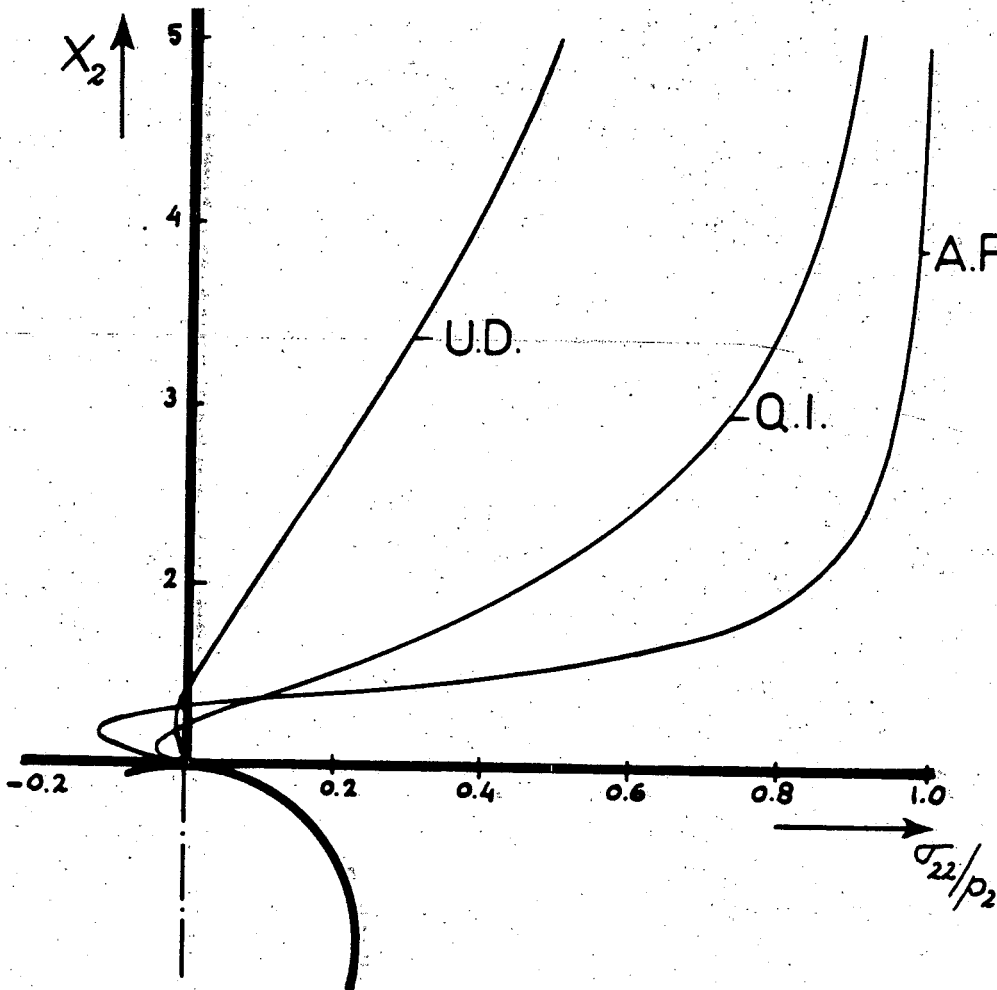
$$\sigma_{22} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{1}{2} \theta \left\{ 1 + \sin \frac{1}{2} \theta \sin \frac{3}{2} \theta \right\} \quad (5.102)$$

$$\tau_{12} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{1}{2} \theta \sin \frac{1}{2} \theta \cos \frac{3}{2} \theta \quad (5.103)$$

Het spreekt vanzelf dat dergelijke formules kunnen worden afgeleid voor andere belastingen op de plaat.



Figuur 5.5.  $\sigma_{22}$  langs de  $X_1$ -as voor drie laminaten van C.F.R.P.



Figuur 5.6.  $\sigma_{22}$  langs de  $X_2$ -as voor drie laminaten van C.F.R.P.

## HOOFDSTUK 6

### BREUK

De klassieke manier voor de besturing van statische breuk van composietmaterialen is:

- Bestudering van de verschillende breukmechanismen op micromechanisch niveau.
- Bestudering van verschillende breukcriteria zoals zij op de enkele laag worden toegepast; het gedrag van de enkele laag onder een hoek met de materiaalassen.
- Berekening van de sterkte van laminaten op basis van de sterkte van de samenstellende lagen.
- Berekening van de sterkte van laminaten met niet-homogene spanningsvelden.

In de micromechanica is het materiaal per definitie heterogeen en wordt de interactie tussen de matrix en de vezels beschouwd. Door de zeer complexe aard van breuk in composietmaterialen is er echter geen theorie beschikbaar die breuk op voldoende nauwkeurige wijze kan voorspellen. En hoewel kennis van de verschillende breukmechanismen essentieel is voor een goed begrip van het functioneren van composieten zal de micromechanica hier niet worden behandeld.

Wel wordt opgemerkt dat het bij composietmaterialen altijd de bedoeling is dat de (sterke) vezels de belasting dragen; de weinig meedragende zwakke matrix zal doorgaans echter het eerst bezwijken. Scheuren in de matrix breiden zich dan ook vaak niet uit in een richting loodrecht op de belasting maar in andere richtingen omdat de vezels als scheurstoppers functioneren.

In de macromechanica wordt het materiaal als homogeen beschouwd met bekende (met de micromechanica berekende of experimenteel gemeten) eigenschappen. Deze aanpak zal worden gebruikt voor de bestudering van de enkelvoudige laag met als doel de berekening van de sterkte van het laminaat waarvan de lagen de bouwstenen vormen. Niet aan de orde zullen komen overigens wel belangrijke onderwerpen als invloed van temperatuur en vocht, gedrag onder dynamische belasting, invloed van eindige geometrie zoals randeffecten en niet-lineair gedrag veroorzaakt door gaten in overgens wel lineair elastische materialen.

#### 6a. Breuk van de enkelvoudige laag

Bij composieten kunnen grote verschillen voorkomen in de trek- en druksterkte. Er moet dan ook onderscheid worden gemaakt tussen

$X_t$  de treksterkte in de richting van een materiaalas. Hiervoor wordt de 'sterkste' materiaalas gekozen

$X_c$  de druksterkte in de zelfde richting

$Y_t$  de treksterkte in de richting van de andere materiaalas, in dit geval dus de 'zwakste' materiaalas

$Y_c$  de druksterkte in die richting

Soms worden de sterktes niet in de richtingen van de materiaalassen gedefinieerd maar in de richtingen van de coördinaatassen.

De afschuifsterkte van de enkele laag in de richting van de materiaalassen zal worden aangegeven met  $S$ . De waarde ervan is uiteraard ongevoelig voor het teken van  $S$ .

Alleen de sterkte  $X_t$  van een uni-directionele laag kan redelijk goed worden berekend uit de eigenschappen van de basismaterialen vezels en hars. Uitgaande van de veronderstelling dat de breukrek van de hars niet kleiner is dan die van de vezels en dat vezels en hars altijd dezelfde rek ondergaan geeft de 'law of mixtures' voor de treksterkte in vezelrichting

$$X_t = v_f t_f + v_m \sigma_m = \left( v_f + v_m \frac{E_m}{E_f} \right) t_f \quad (6.1)$$

waarin  $v_f$  en  $v_m$  de volumepercentages van respectievelijk vezels en hars zijn,  $t_f$  de treksterkte van de vezels en  $\sigma_m$  de spanning in de hars op het moment van breken van de vezels (ofwel de spanning in de hars die optreedt bij een rek gelijk aan de breukrek van de vezels). Bij stijve vezels en relatief slappe hars is een goede en in de techniek veel gebruikte benadering

$$X_t = v_f t_f$$

De druksterkte  $X_c$  in vezelrichting is niet te berekenen en is meestal lager dan de treksterkte. Dat is o.a. een gevolg van het uitknikken (micro-knik) van de vezels in de hars.

De treksterkte  $Y_t$  van een unidirectionele laag loodrecht op de vezelrichting wordt sterk beïnvloed door de spanningsconcentraties in de hars veroorzaakt door de vezels en eventueel aanwezige holtes. Deze spanningsconcentraties zijn hoger naarmate de vezels dichter bij elkaar liggen, zij veroorzaken scheuren in de hars zelf maar ook in het grensvlak tussen vezels en hars. Scheuren kunnen

worden geïnitieerd door de holtes ('voids') en door eventueel aanwezige minischeuren die tijdens het uithardingsproces van de hars door warmte-spanningen ontstaan. Berekening van de treksterkte loodrecht op de vezels is dan ook alleen mogelijk in theoretische, zeer sterk geschematiseerde gevallen. De druksterkte in die richting wordt niet bepaald door scheurvorming op plaatsen met hoge spanningsconcentraties. Deze sterkte is dan ook meestal aanzienlijk hoger dan de treksterkte.

Voor de afschuifsterkte geldt min of meer hetzelfde als voor  $Y_t$ ; vezels en holtes geven spanningsconcentraties, echter veel minder geprononceerd.  $S$  ligt meestal in de buurt van de afschuifsterkte van de zuivere hars.

Voor weefsels zijn er geen theorieën beschikbaar die de sterktes enigermate betrouwbaar kunnen voorspellen. Door het weven verliezen de vezels al een deel van hun sterkte. Op de knooppunten van vezels in schering- en inslagrichting zijn de vezels gebogen. Onder belasting zullen zij de neiging hebben zich te strekken. Dit heeft niet veel invloed op de elasticiteitsmodulus van de laag, echter wel op de treksterktes omdat de hars gedeeltelijk losbreekt ('witslaan' bij glasvezel-hars composieten). De afschuifstijfheid en afschuifsterkte in de richtingen van de materiaalassen worden door de aanwezigheid van de knooppunten juist hoger, onder  $45^\circ$  met die richtingen (de sterke richting voor afschuiving) geldt dit niet.

Bij experimentele bepaling van sterktes van composieten moet in principe rekening worden gehouden met de zelfde moeilijkheden als die welke optreden bij het meten van de elasticiteitsgrootheden. Zo kan bij een treksterkte-meting in vezelrichting bij een brede proefplaat scheurvorming langs de vezels plaatsvinden door aanwezige dwarsspanningen veroorzaakt door verhindering van de dwarsconcentratie. Bij een 'off-axis' trekproef voor de bepaling van de sterkte onder een hoek met de materiaalassen wordt naast een trekkracht meestal ook een schuifkracht geïntroduceerd die de meting onzuiver maakt. Bovendien eindigen buiten de inklembecken van de trekbank alle vezels op een vrije rand en hebben daar geen trekspanning. De daardoor optredende randeffecten geven hoge schuifspanningen in de hars (de vezels moeten over een kleine afstand volledig opgeladen worden) die de sterkte beïnvloeden. Op plaatsen aan de rand waar volbelaste vezels (die wel in de inklembecken uitkomen) grenzen aan onbelaste zijn de schuifspanningen nog hoger: meestal treedt daar dan ook de eerste breuk op.

## 6b. Breukcriteria

Als een laag met bekende sterktes een gecombineerde belasting heeft zal een breukcriterium moeten aangeven welke combinaties van de optredende spanningen  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  en  $\tau_{12}$  tot breuk zullen leiden. Er zijn vele breukcriteria, hier zullen slechts enkele met hun achtergrond worden behandeld.

### Het maximum spanningscriterium

Het maximum spanningscriterium zegt dat geen breuk optreedt als de spanningen in de hoofdrichtingen van de laag de respectievelijke sterkte waarden in die richtingen niet overschrijden. Dus moet gelden:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &< X \\ \sigma_{22} &< Y \\ \tau_{12} &< S\end{aligned}\tag{6.3}$$

(de indices t en c voor trek en druk zijn hier eenvoudigheidshalve weggelaten; in berekeningen moet uiteraard wel rekening worden gehouden met de verschillende sterkte-waarden voor trek en druk).

Het maximum spanningscriterium houdt geen rekening met mogelijke interactie tussen de spanningen; voor  $\sigma_{11}$  is dit niet erg omdat de sterkte X vrijwel uitsluitend door de vezels wordt bepaald en  $\sigma_{22}$  en  $\tau_{12}$  weinig invloed op de maximale waarde van  $\sigma_{11}$  kunnen uitoefenen.  $\sigma_{22}$  en  $\tau_{12}$  leveren beide voornamelijk belastingen op de hars en zullen in combinatie bepalen wanneer harsbreuk optreedt; hierbij kan  $\sigma_{11}$  (dus voor zover het harsbreuk betreft) ook nog een rol spelen. Het maximum spanningscriterium lijkt dan ook alleen bruikbaar voor vezel-gedichteerde breuk, dus voor gevallen met uitsluitend trek of druk in of ten naaste bij in vezelrichting.

### Het maximum rekriterium

Het maximum rekriterium zegt dat geen breuk optreedt als de rekken in de hoofdrichtingen van de laag de respectievelijke maximaal toelaatbare waarden niet overschrijden. Dus moet gelden:

$$\begin{aligned}e_{11} &< X_e \\ e_{22} &< Y_e \\ \gamma_{12} &< S_e\end{aligned}\tag{6.4}$$



waarin  $X_e$ ,  $Y_e$  en  $S_e$  de maximaal toelaatbare waarden van de rekken zijn (ook hier zijn de indices t en c voor trek en druk weggelaten).

Wordt lineaire elasticiteit tot breuk verondersteld dan kan (6.4) met de wet van Hooke worden geschreven als

$$\begin{aligned} S_{11}\sigma_{11} + S_{12}\sigma_{22} &< X_e \\ S_{12}\sigma_{11} + S_{22}\sigma_{22} &< Y_e \\ S_{66}\tau_{12} &< S_e \end{aligned} \quad (6.5)$$

Kennelijk is via  $S_{12}$  de maximaal toelaatbare waarde van  $\sigma_{11}$  nu mede afhankelijk van de waarde van  $\sigma_{22}$  en omgekeerd. Fysisch is dit een merkwaardige interactie omdat  $\sigma_{11}$  voornamelijk door de vezels wordt gedragen en de maximale waarde ervan door de vezels wordt bepaald terwijl  $\sigma_{22}$  voornamelijk de hars belast.

#### Het Tsai-Hill criterium

Het Tsai-Hill criterium is een analogie van het voor Mises-Huber-Hencky criterium voor het vloeien van metalen. Dit laatste criterium gaat er vanuit dat de spanningsdeviator

$$\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{hh} \quad (3.13) \text{ en } (3.14)$$

(dit zijn dus de spanningen die de vormverandering van een isotroop elementair blokje veroorzaken en niet de volumeverandering) verantwoordelijk is voor afwijking van het lineair gedrag, het vloeien, of breuk. De specifieke arbeid, geleverd door de spanningsdeviator, mag een bepaalde waarde niet overschrijden. Voor een vlakspanningssituatie is deze specifieke arbeid (G is de glijdingsmodulus)

$$\frac{\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{12} + \sigma_{22}^2}{6G} + \frac{\sigma_{12}^2}{2G} = A_{\text{spec}} \quad (6.6)$$

De toelaatbare waarde  $A_{\text{spec.t}}$  kan met een eenvoudige trekproef worden bepaald. Bij trek in  $X_1$ -richting is op het moment dat vloeien begint (of bij brosse materialen breuk optreedt)

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_{\text{toel}} \\ \sigma_{22} &= 0 \\ \tau_{12} &= 0 \end{aligned}$$

Deze waarden gesubstitueerd in (6.6) geven

$$A_{\text{spec.t}} = \frac{\sigma_{\text{toel}}^2}{6G}$$

waarmee het breukcriterium van voor Mises-Huber-Hencky voor een vlakspannings-toestand wordt

$$\sigma_{11}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{22}^2 + 3\tau_{12}^2 < \sigma_{\text{toel}}^2 \quad (6.7)$$

(6.7) houdt in dat er een verband bestaat tussen de maximaal toelaatbare waarde van de schuifspanning  $S$  en  $\sigma_{\text{toel}}$ . Immers, bij zuivere afschuiving

$$\tau_{12} = S$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = 0$$

wordt 
$$S = \frac{1}{3} \sigma_{\text{toel}} \cdot \sqrt{3} \quad (6.8)$$

Voor materialen die niet te ductiel zijn geldt deze relatie inderdaad.

Hill stelde voor anisotrope materialen een analoog kwadratisch criterium, dus ook gebaseerd op maximale vervormingsenergie, voor

$$\begin{aligned} & (G + H) \sigma_{11}^2 + (F + H) \sigma_{22}^2 + (F + G) \sigma_{33}^2 \\ & - 2H\sigma_{11}\sigma_{22} - 2G\sigma_{11}\sigma_{33} - 2F\sigma_{22}\sigma_{33} \\ & + 2L\tau_{23}^2 + 2M\tau_{13}^2 + 2N\tau_{12}^2 < 1 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Door beurtelings

$$\begin{aligned} & \sigma_{11}, \sigma_{22} \\ & \sigma_{22}, \sigma_{33} \\ & \sigma_{33}, \sigma_{11} \\ & \tau_{12}, \tau_{23} \\ & \tau_{23}, \tau_{31} \\ & \tau_{31}, \tau_{12} \end{aligned}$$

nul te stellen kunnen de coëfficiënten in (6.9) worden opgelost als functies van de verschillende sterktes X, Y en S. Voor een vlakspanningstoestand wordt dan gevonden:

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{X}\right)^2 - \frac{\sigma_{11}\sigma_{22}}{X^2} + \left(\frac{\sigma_{22}}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{12}}{S}\right)^2 < 1 \quad (6.10)$$

Tsai stelde dat dit breukcriterium bruikbaar is voor een composietlaag door de sterktes te beschouwen als de sterktes van die laag in de hoofdrichtingen.

Het Tsai-Hill criterium gaat er evenals het voor Mises-Huber-Hencky criterium vanuit dat de vervorming en niet de volumeverandering van een elementair blokje uiteindelijk tot vloeien of breuk leidt. Bij isotrope materialen kunnen de vormveranderende spanningen altijd eenvoudig worden gevonden door de spannings-toestand te splitsen in de hydrostatische spanningen  $\frac{1}{3} \sigma_{ii}$  (die de volumeverandering geven) en de deviator. Bij anisotrope materialen is dit echter niet zo omdat de spanningsdeviator daar ook volume-verandering geeft en de hydrostatische spanningen vormverandering. Formeel kan het Tsai-Hill criterium dan ook geen vervormingsenergie criterium worden genoemd, hoewel dat wel vaak gebeurt. Bij het fysisch uitgangspunt moet overigens voor composieten een vraagteken worden geplaatst. Bij isotrope materialen past de theorie van maximale vervormingsenergie goed bij begrippen als glijvlakken en dislokatiebewegingen, bij composieten met hun vezelstructuur is dit uiteraard niet het geval. Desalniettemin geeft het Tsai-Hill criterium vaak goede overeenstemming met experimenteel gevonden sterktewaarden.

Een voordeel van het Tsai-Hill criterium is de interactie tussen alle spanningen. Een probleem bij het gebruik in de praktijk is de gevoeligheid van de term  $\sigma_{11}\sigma_{22}/X^2$  voor het teken (trek of druk) van de spanningen  $\sigma_{11}$  en  $\sigma_{22}$ . Vandaar dat deze term wel wordt vervangen door de tekenongevoelige term  $\sigma_{11}\sigma_{22}/XY$ .

Voor een spanning  $\overline{\sigma_{11}}$  onder een hoek  $\theta$  met de materiaalassen geldt

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \overline{\sigma_{11}} \cos^2 \theta \\ \sigma_{22} &= \overline{\sigma_{11}} \sin^2 \theta \\ \tau_{12} &= \overline{\sigma_{11}} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (6.11)$$

waarmee (6.10) kan worden geschreven als

$$\frac{\sigma_{11}^2}{X^2} \left\{ \frac{\cos^4 \theta}{X^2} + \left( \frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{\sin^4 \theta}{Y^2} \right\} \leq 1 \quad (6.12)$$

(6.12) kan worden gebruikt voor berekening van de 'off-axis' sterkte van de enkele laag.

#### Het criterium van Puck

Het criterium van Puck maakt onderscheid tussen

- vezelbreuk (trek of druk resp. micro-knik),
- matrixbreuk.

Puck stelt dat voor matrixbreuk het criterium van Tsai-Hill kan worden gebruikt.

Wordt een laag belast door spanningen  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{22}$  en  $\tau_{12}$  dan kan bij benadering worden gesteld dat de spanningen in de matrix zijn:

$$(\sigma_{11})_m \approx e_{11} E_m \approx \left( \frac{\sigma_{11}}{E_f v_f} \right) E_m \approx 0 \text{ bij grote } E_f/E_m$$

$$(\sigma_{22})_m \approx \sigma_{22}$$

$$(\tau_{12})_m \approx \tau_{12}$$

Het tweedelige breukcriterium wordt daarmee:

voor de vezels:

$$\frac{\sigma_{11}}{X} \leq 1$$

voor de matrix:

(6.13)

$$\left( \frac{\sigma_{22}}{Y} \right)^2 + \left( \frac{\tau_{12}}{S} \right)^2 \leq 1$$

#### Het Tsai-Wu tensorcriterium

Het Tsai-Wu criterium omvat in feite alle vorige criteria. Het bestaat uit

- lineaire termen waardoor op eenvoudige wijze rekening wordt gehouden met de verschillen in trek- en druksterktes,
- kwadratische termen die een koppeling geven tussen de verschillende toelaatbare spanningen.

In meest algemene vorm is het criterium

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j < 1 \quad (i, j = 1 \text{ t/m } 6) \quad (6.14)$$

waarin de 6 constanten  $F_i$  en de 21 constanten  $F_{ij}$  ( $F_{ij}$  is symmetrisch) experimenteel moeten worden bepaald. Voor een vlakspanningstoestand vereenvoudigt (6.14) echter tot

$$\begin{aligned} F_1 \sigma_{11} + F_2 \sigma_{22} + F_6 \tau_{12} \\ + F_{11} \sigma_{11}^2 + F_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + F_{16} \sigma_{11} \tau_{12} \\ + F_{21} \sigma_{22} \sigma_{11} + F_{22} \sigma_{22}^2 + F_{26} \sigma_{22} \tau_{12} \\ + F_{61} \tau_{12} \sigma_{11} + F_{62} \tau_{12} \sigma_{22} + F_{66} \tau_{12}^2 < 1 \end{aligned} \quad (6.15)$$

De afschuifsterkte in de richting van de materiaalassen is onafhankelijk van het teken van de schuifspanning. In een zuivere schuifspanningstoestand  $\tau_{12}$  (positief of negatief) zou op het moment van breuk dan moeten gelden

$$F_6 \tau_{12} + F_{55} \tau_{12}^2 = 1$$

$$-F_6 \tau_{12} + F_{66} \tau_{12}^2 = 1$$

en dit kan alleen als  $F_6 = 0$ . Het zelfde geldt voor  $F_{16}$  en  $F_{26}$ . (6.15) vereenvoudigt dan ook verder tot

$$F_1 \sigma_{11} + F_2 \sigma_{22} + F_{11} \sigma_{11}^2 + 2F_{12} \sigma_{11} \sigma_{22} + F_{22} \sigma_{22}^2 + F_{66} \tau_{12}^2 < 1 \quad (6.16)$$

$F_1$  en  $F_{11}$  kunnen worden bepaald uit een trek- en drukproef in de  $X_1$ -richting. Voor de breukwaarden  $X_t$  en  $X_c$  geldt

$$F_1 X_t + F_{11} X_t^2 = 1$$

$$F_1 X_c + F_{11} X_c^2 = 1$$

waaruit volgt:

$$F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}$$

$$F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c}$$

(6.17)

Uit een trek- en drukproef in  $X_2$ -richting wordt gevonden

$$\begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c} \\ F_{22} &= -\frac{1}{Y_t Y_c} \end{aligned} \tag{6.18}$$

Uit een afschuifproef

$$F_{66} = \frac{1}{s^2} \tag{6.19}$$

$F_{12}$  kan worden bepaald met (bijvoorbeeld) een trekproef onder  $45^\circ$  met de hoofd-richtingen. Op het moment van bereiken van de maximale trekspanning  $\overline{X_{45}}$  is

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{1}{2} \overline{X_{45}} \\ \sigma_{22} &= \frac{1}{2} \overline{X_{45}} \\ \tau_{12} &= \frac{1}{2} \overline{X_{45}} \end{aligned}$$

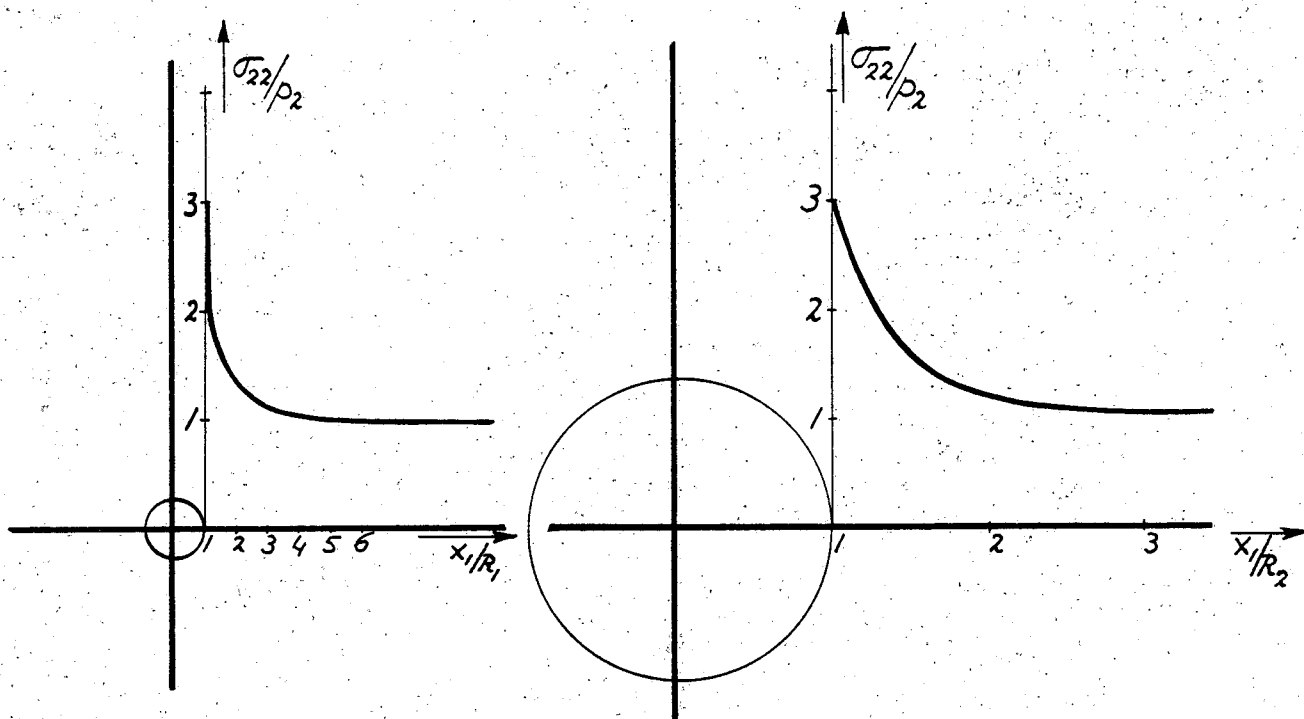
waarmee uit (6,16) volgt

$$F_{12} = \frac{2}{\overline{X_{45}^2}} - (F_1 + F_2) \frac{1}{\overline{X_{45}}} - \frac{1}{2}(F_{11} + F_{22} + F_{66}) \tag{6.20}$$

Breukcriteria met schaalears

In paragraaf 5i is voor oneindig grote platen aangegeven dat overeenkomstige punten op en buiten ellipsvormige gaten van verschillende grootte doch gelijke assenverhouding  $b/d$  dezelfde spanning hebben. Met overeenkomstige punten worden bedoeld punten met gelijke dimensieloze coördinaten  $x_1/d$  resp.  $x_2/d$ . Trekproeven op platen met gaten van verschillende grootte (en overigens dezelfde plaatgeometrie-gatgeometrie-verhoudingen) tonen echter aan dat grotere gaten grotere reducties van de sterkte geven dan kleinere. Er zijn breukcriteria die met dit gat-grootte effect rekening houden (Whitney en Nuismer).

In Figuur 6.1 zijn de spanningsverdelingen gegeven langs de  $X_1$ -as in isotrope platen met cirkelvormige gaten met respectievelijke stralen  $R_1$  en  $R_2 = 5R_1$ .



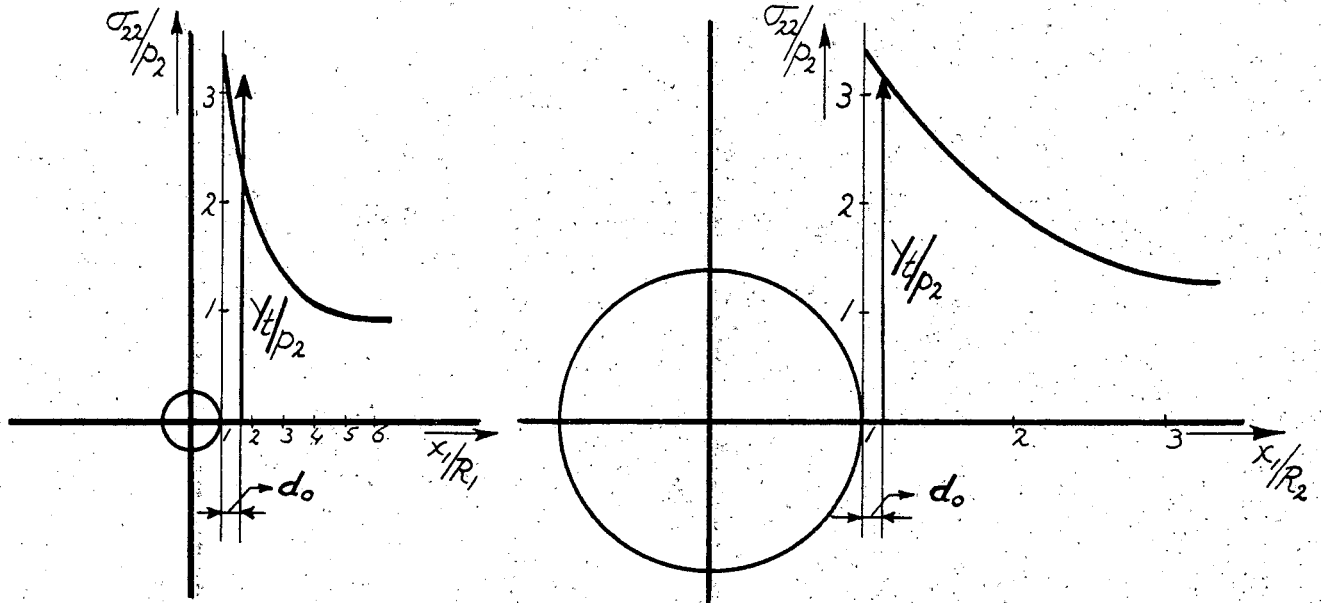
Figuur 6.1. De spanningsverdeling  $\sigma_{22}/p_2$  naast gaten van verschillende grootte.

De platen worden ver van de gaten belast met trekspanning  $p_2$ , zij hebben dezelfde breedte-gatdiameterverhouding en deze is zo groot dat de formule voor de spanningsverdeling in een oneindig grote plaat kan worden gebruikt

$$\frac{\sigma_{22}}{p_2} = 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R}{x_1} \right)^2 + \frac{3}{2} \left( \frac{R}{x_1} \right)^4$$

Hoewel de numerieke waarden van  $\sigma_{22}/p_2$  in punten met gelijke  $x_1/R$  gelijk zijn is het hoogst belaste gebied naast het grote gat veel groter dan dat naast het kleine. Bij brosse materialen zou in beide gevallen theoretisch breuk optreden als de spanning op de gatrand de waarde  $Y_t$  bereikt en dit gebeurt bij  $p_2 = Y_t/3$ , ongeacht de grootte van het gat. Breuk wordt bij brosse materialen echter geïnitieerd door in het materiaal aanwezige z.g. inherente fouten en de kans dat een kritische fout aanwezig is in het grote hoogbelaste gebied bij het grote gat is veel groter dan bij het kleine gat, resulterend in een lagere sterkte van de plaat met het grote gat. Bovendien zal er altijd sprake zijn van enige plastische vervorming van het materiaal op plaatsen met de spanningspieken. De piek bij het kleine gat is echter veel localer en sterker dan die bij het grote gat waardoor gemakkelijker spanningsherverdeling optreedt van hoogbelaste plaatsen via plastische vervorming ('meegeven') naar naastliggende lager belaste plaatsen, resulterend in een nog hogere sterkte van de plaat met het kleine gat ten opzichte van die met het grote.

Voor orthotrope materialen zal de spanningsverdeling langs de  $X_1$ -as uiteraard anders zijn dan die gegeven in Figuur 6.1, deze is immers afhankelijk van de materiaaleigenschappen. In Figuur 6.2 is een, overigens fictieve, verdeling gegeven voor gaten met dezelfde stralen als die van Figuur 6.1.



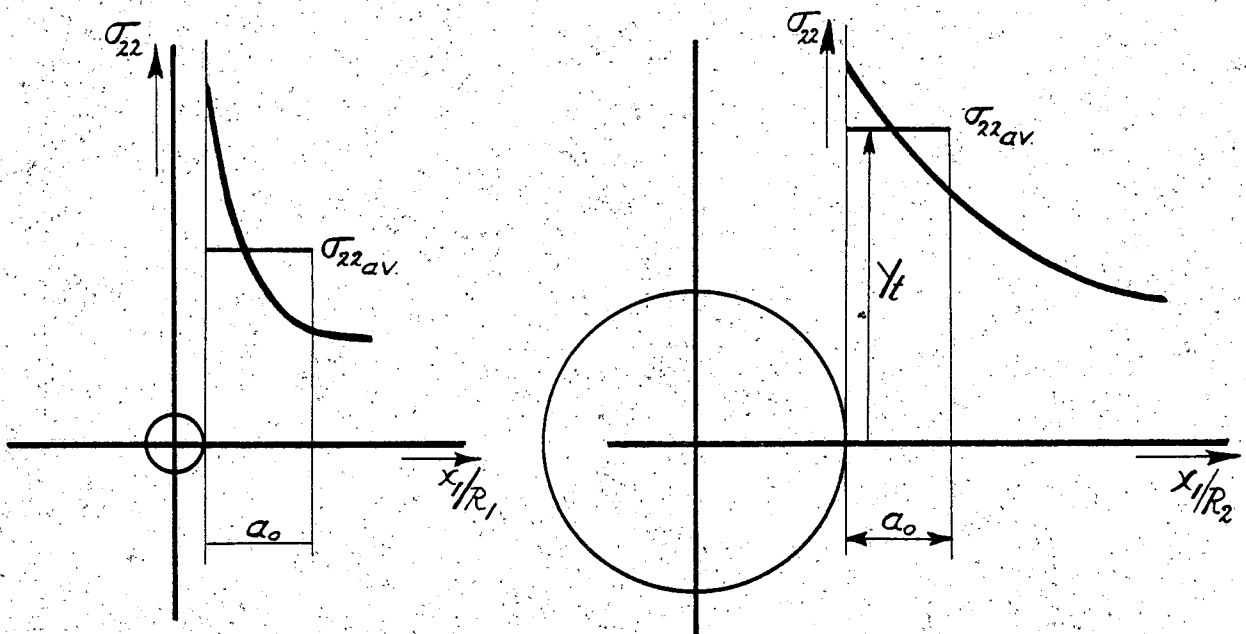
Figuur 6.2. Illustratie van het 'point-stress' criterium.

Het 'point-stress' criterium zegt nu dat breuk optreedt als de spanning  $\sigma_{22}$  op een bepaalde afstand  $d_0$  van de gatrand de kritische waarde  $Y$  overschrijdt.  $d_0$  is de afstand waarover het materiaal kritisch moet worden belast om breuk te veroorzaken, binnen afstand  $d_0$  is dus een voldoende grote inherente fout aanwezig om breuk te initiëren.  $d_0$  is in feite een materiaaleigenschap, hij wordt de  karakteristieke afstand  genoemd. Figuur 6.2 verklaart eenvoudig waarom de plaat met het grote gat een lagere sterkte heeft dan die met het kleine.

Het 'average stress' criterium gaat er vanuit dat breuk optreedt als de  gemiddelde  spanning over een bepaalde afstand  $a_0$  naast het gat (zie Figuur 6.3) de kritische waarde  $Y$  overschrijdt.

Het probleem met het 'point-stress' en het 'average stress' criterium is uiteraard dat de afstanden  $d_0$  en  $a_0$  bekend moeten zijn, en niet alleen langs de  $X_1$ -as zoals in Figuren 6.2 en 6.3, maar langs de hele gatrand. Hiervoor moeten dan verdelingen worden aangenomen die voorspellingen mogelijk moeten maken wanneer en  waar  breuk optreedt. Het aannemen van die verdelingen beperkt het nut van deze criteria sterk.





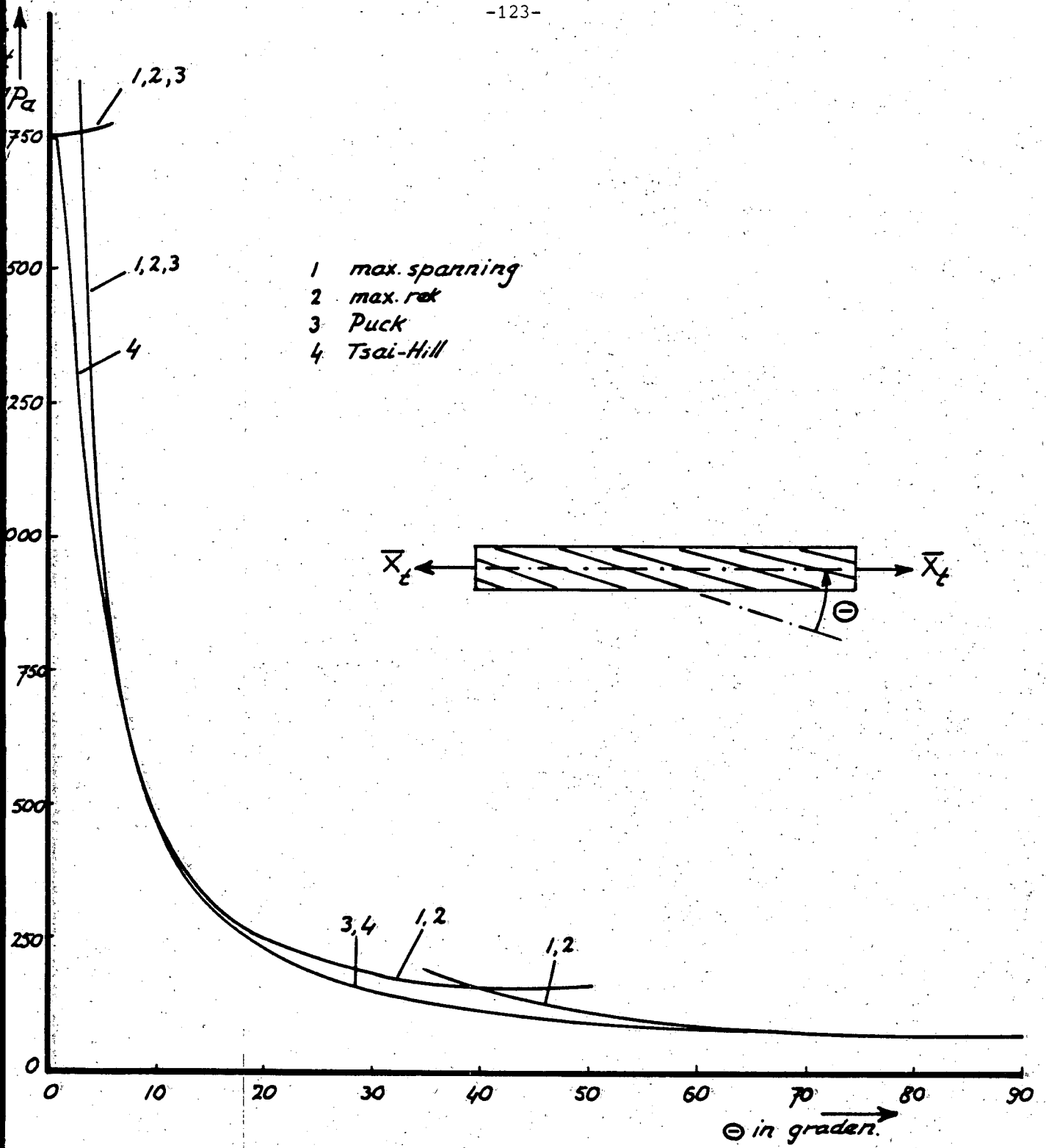
Figuur 6.3. Illustratie van het 'average-stress' criterium.

Enkele numerieke waarden

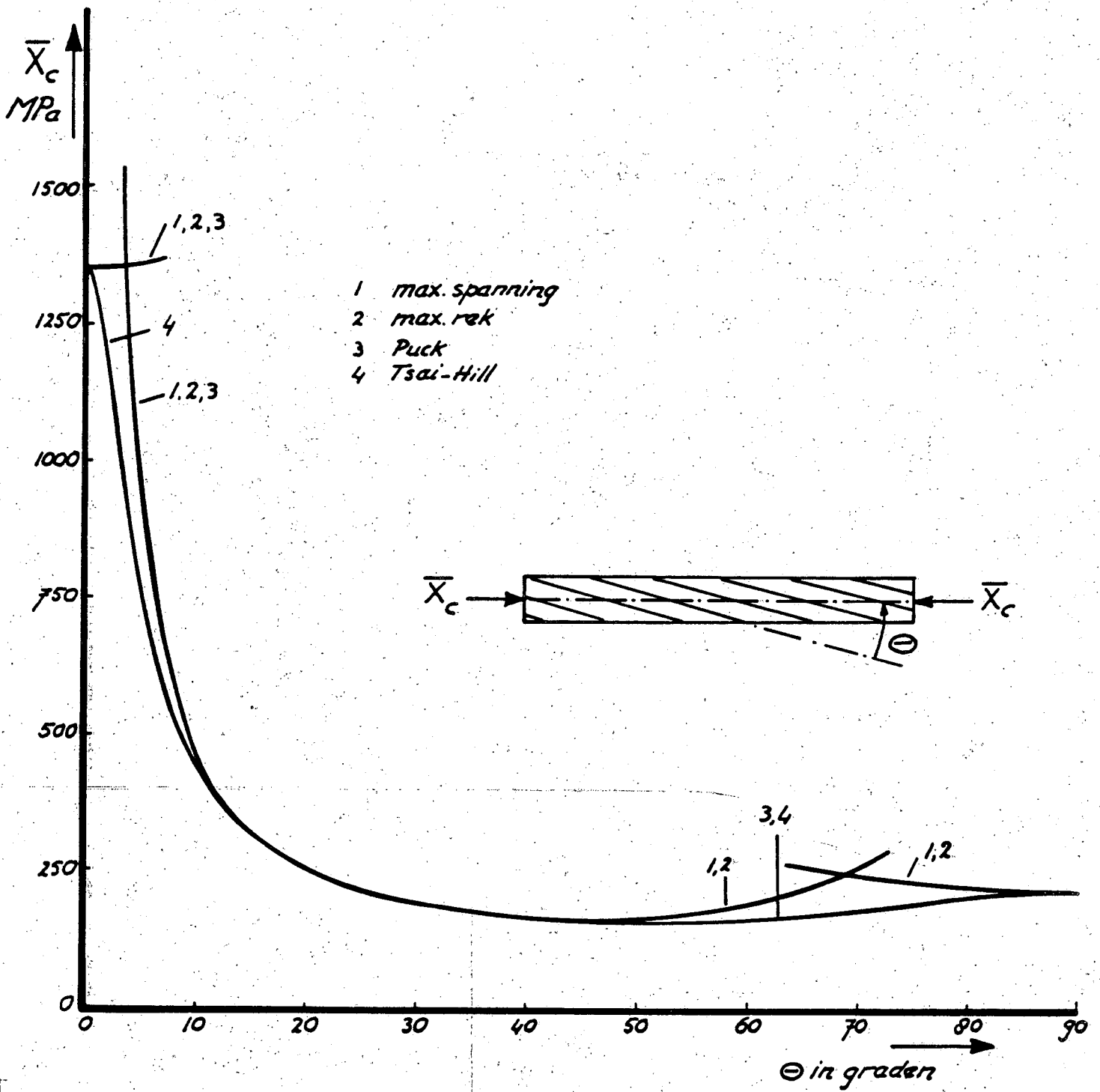
In de Figuren 6.4 en 6.5 is de treksterkte resp. druksterkte van een unidirectionele C.F.R.P.-laag gegeven, berekend volgens de in de figuren genoemde breukcriteria. De sterktes zijn uitgezet tegen de hoek  $\theta$  tussen belastingsrichting en vezelrichting. In de criteria zijn de transformaties (6.11) gebruikt, voor Tsai-Hill leidend tot (6.12). De gehanteerde sterktes zijn

$$\begin{aligned}
 X_t &= 1750 \text{ MPa} \\
 X_c &= -1350 \text{ MPa} \\
 Y_t &= 63 \text{ MPa} \\
 Y_c &= -210 \text{ MPa} \\
 S &= 80 \text{ MPa}
 \end{aligned}
 \tag{6.21}$$

Uit de figuren blijkt dat het maximum spannings- en maximum rek criterium, evenals het criterium van Puck onder kleine hoeken met de vezelrichting een geringe toename van de sterkte geven. Daarna volgt een zeer snelle teruggang in de sterkte, het Tsai-Hill criterium met interactie tussen alle spanningen geeft deze teruggang al direct. Bij kleine hoeken zijn de verschillen tussen enerzijds maximum spannings-, maximum rek- en Puck-criterium en anderzijds het criterium van Tsai-Hill erg groot. Desalniettemin geeft ook het meest optimistische criterium bij  $5^\circ$  al bijna een halvering van de sterkte.



Figuur 6.4. De treksterkte van een unidirectionele C.F.R.P. laag onder een hoek met de hoofdrichtingen.



Figuur 6.5. De druksterkte van een unidirectionele C.F.R.P. laag onder een hoek met de hoofdrichtingen.

Ook zijn er relatief grote verschillen bij overgang van de afschuifdominante breuk naar dwarsbreuk (bij trek bij ca 40° en bij druk bij ca 70°).

### 6c. Breuk van laminaten

Als de richting van de belasting niet nauwkeurig is gedefinieerd maar variabel is, of als er meerassige belastingen optreden, moeten laminaten worden toegepast. Bij breuk van laminaten moet onderscheid worden gemaakt tussen

- eerste blijvende schade (first significant damage)
- uiteindelijke breuk (ultimate failure) waarmee de totale desintegratie van het materiaal wordt bedoeld.

Ter toelichting dient het volgende.

Stel een cross-ply heeft de meeste lagen in de belastingsrichting (0°) en enkele lagen in de 90°-richting. De lagen met de vezels in de 90°-richting hebben een elasticiteitsmodulus in de belastingsrichting van 7 GPa (zie de tabel in paragraaf 5j) en een treksterkte in die richting van 63 MPa (zie de tabel in de volgende paragraaf). De breukrek van de dwarslagen in de belastingsrichting is daarmee 0,9%. De lagen met de vezels in de belastingsrichting zijn bij die rek echter nog niet kapot. Bij een treksterkte van 1750 MPa en een elasticiteitsmodulus van 145 GPa hebben zij een breukrek van 1,21%. Zij blijven dus nog dragen met hoogstens een gering verlies aan stijfheid door breuk van de eigen hars. In een spannings-rek diagram van zo'n cross-ply geeft een 'knie' aan waar eerste beschadiging is opgetreden (meestal geen punt in het diagram maar een overgangsgebied van hogere elasticiteitsmodulus naar lagere). Als het kapot gaan van de dwarslagen desastreus is voor de goede werking van de constructie of voor de duurzaamheid dan is de toegestane belasting dus slechts 75% van de belasting die uiteindelijk breuk geeft.

Soms treden eerste blijvende beschadiging en uiteindelijk breuk tegelijk op, bijvoorbeeld bij een optimaal gewikkeld drukvat waarvoor een taaie hars (grote breukrek) en stijve vezels (met kleine breukrek) zijn gebruikt. De wijze van breken is dan explosief, hetgeen voor een constructie een zeer ongewenste eigenschap is. Uit het oogpunt van sterkte-gewichtsverhouding kan een dergelijk drukvat optimaal zijn, uit het oogpunt van veiligheid moet dan toch een laag belastingsniveau worden voorgeschreven.

### Laagsgewijs onderzoek van laminaten

Voor het bepalen van de belasting waarbij de eerste beschadiging optreedt moet voor elke laag van een laminaat één van de eerder behandelde breukcriteria uitwijzen bij welke belasting op het laminaat de bewuste laag kapot gaat. Daarbij blijkt dan welke laag het eerst kapot gaat en hoe dat gebeurt. Daarna kan de reststerkte van de overblijvende lagen (of wellicht een tweede niveau van blijvende schade) op dezelfde wijze worden berekend. De eerst bezweken laag kan daarbij geheel worden verwaarloosd of gedeeltelijk in rekening worden gebracht door  $E_{\beta} = G_{\alpha\beta} = 0$  te stellen.

Een nadeel van deze aanpak is dat niet in rekening kan worden gebracht dat een laag als onderdeel van een laminaat zich anders gedraagt dan een afzonderlijke laag. Lagen in een laminaat beïnvloeden elkaar door b.v. scheurstoppende werking door sterke lagen uitgeoefend op zwakkere, maar ook door scheurinitiërende werking van de zwakke lagen. Bovendien oefenen lagen in een laminaat randkrachten op elkaar uit omdat zij elkaar tot min of meer dezelfde vervormingen dwingen. Deze randkrachten veroorzaken drie-dimensionale spanningen die onbekend zijn en waarmee in de laagsgewijze behandeling van de sterkte geen rekening wordt gehouden. Een methode om deze problematiek te omzeilen is de toepassing van breukcriteria op het laminaat als geheel waarbij dan gewerkt wordt met de sterktewaarden van het laminaat zelf. Bij de (experimentele) bepaling van die sterktes hebben de genoemde interacties hun rol dan reeds gespeeld.

Voor het laagsgewijs onderzoek van laminaten wordt uitgegaan van randbelastingen  $P_1, P_2, P_{12}$  op het laminaat. Van dat laminaat worden bekend verondersteld de compliantiematrix  $[S_{qr}]_{\lambda}$  (in de richtingen van de coördinaatassen  $X_1-X_2$ ) of de stijfheidsmatrix  $[C_{qr}]_{\lambda}$ .

Verder wordt aangenomen dat de elasticiteitseigenschappen van de afzonderlijke lagen in de richtingen van hun materiaalassen bekend zijn. Deze materiaalassen zullen in een laminaat in het algemeen een hoek  $\varphi$  met de coördinaatassen maken. Zo zijn dus van de  $k^e$ -laag bekend de  $[C_{ij}]_k$  of  $[S_{ij}]_k$  in de richtingen van de  $\overline{X_1}-\overline{X_2}$ -assen die een hoek  $\varphi$  maken met de coördinaatassen.

Voor het laminaat als geheel geldt nu in de  $X_1-X_2$ -richtingen:

$$\{e_q\} = [S_{qr}]_{\lambda} \{p_r\} \quad (6.22)$$

De rekken in de  $\overline{X_1}-\overline{X_2}$ -richtingen worden gevonden door transformatie:

$$\{e_j\}_\varphi = [M_{jq}]_\varphi^{-1} \{e_q\} = [M_{jq}]_\varphi^{-1} [S_{qr}]_\lambda \{p_r\} \quad (6.23)$$

Als er vanuit wordt gegaan dat alle lagen de zelfde vervormingen ondergaan dan is dus

$$\{e_j\}_k \equiv \{e_j\}_\varphi$$

waarin  $\{e_j\}_k$  de vervormingen van de  $k^e$ -laag zijn. Met de spannings-rek-relatie in de richting van de materiaalassen

$$\{\sigma_i\}_k = [C_{ij}]_k \{e_j\}_k$$

wordt nu voor die  $k^e$ -laag gevonden:

$$\{\sigma_i\}_k = [C_{ij}]_k [M_{jq}]_\varphi^{-1} [S_{qr}]_\lambda \{p_r\}$$

ofwel, met

$$[C_{ij}]_k [M_{jq}]_\varphi^{-1} [S_{qr}]_\lambda = [T_{ir}]_k \quad (6.24)$$

$$\{\sigma_i\}_k = [T_{ir}]_k \{p_r\} \quad (6.25)$$

Een breukcriterium moet nu aangeven welke laag (k) het eerst breekt, dus bij welk niveau van de belastingen  $p_r$  op het laminaat. Zo kan bijvoorbeeld de sterkte  $X_\lambda$  van het laminaat in  $X_1$ -richting worden bepaald ( $X_\lambda$  is dus de maximaal toelaatbare waarde van  $p_1$ )

$$\sigma_{11}_k = T_{11}_k p_1$$

$$\sigma_{22}_k = T_{21}_k p_1$$

$$\tau_{12}_k = T_{31}_k p_1$$

Het breukcriterium van Tsai-Hill geeft

$$\left\{ \left( \frac{T_{11}}{X} \right)^2 + \left( \frac{T_{21}}{Y} \right)^2 - \frac{T_{11}T_{21}}{XY} + \left( \frac{T_{31}}{S} \right)^2 \right\}_k p_1^2 < 1$$

$$\text{ofwel } (X_\lambda)_k = \left\{ \left( \frac{T_{11}}{X} \right)^2 + \left( \frac{T_{21}}{Y} \right)^2 - \frac{T_{11}T_{21}}{XY} + \left( \frac{T_{31}}{S} \right)^2 \right\}_k^{-\frac{1}{2}} \quad (6.26)$$

De laagste waarde van  $(X_\lambda)_k$  geeft dus de sterkte van het laminaat in  $X_1$ -richting en welke laag (k) het eerst breekt.

Als coördinaatassen  $X_1$ - $X_2$  zullen meestal de materiaalassen van het laminaat als geheel worden gekozen. Wil men de sterkte  $\bar{X}_\lambda$  van het laminaat in een willekeurige richting  $\theta$  met de  $X_1$ -as weten dan geldt voor de belasting op het laminaat

$$\{p_r\} = \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \end{Bmatrix} \bar{p}_1$$

waarin  $\bar{p}_1$  de belasting onder hoek  $\theta$  met de  $X_1$ -as is. Voor de spanningen in de  $k^e$ -laag geldt dan

$$\{\sigma_i\}_k = [T_{ir}]_k \{p_r\} = [T_{ir}]_k \begin{Bmatrix} \cos^2 \theta \\ \sin^2 \theta \\ \sin \theta \cos \theta \end{Bmatrix} \bar{p}_1 = \{P_i\}_k \bar{p}_1$$

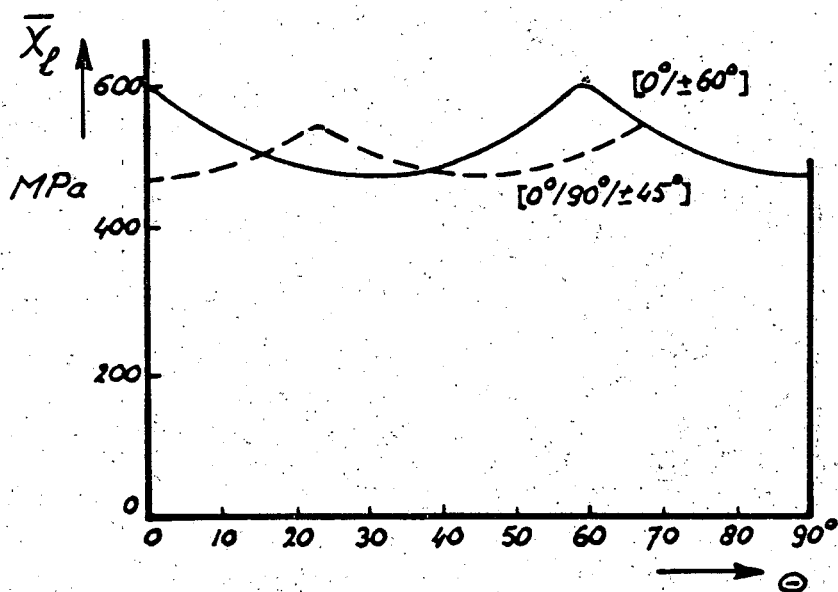
Het criterium van Tsai-Hill geeft voor de maximale waarde  $\bar{X}_\lambda$  van  $\bar{p}_1$

$$(\bar{X}_\lambda)_k = \left\{ \left( \frac{P_1}{X} \right)^2 + \left( \frac{P_2}{Y} \right)^2 - \frac{P_1 P_2}{XY} + \left( \frac{P_3}{S} \right)^2 \right\}_k^{-\frac{1}{2}} \quad (6.27)$$

In Figuur 6.6 is de treksterkte van twee quasi-isotrope laminaten in verschillende richtingen uitgezet waarbij het criterium van Tsai-Hill in de vorm (6.27) is gebruikt. Uit de figuur blijkt dat, hoewel de laminaten qua elastische eigenschappen isotroop zijn, de sterkte anisotroop is. Voor de lagen zijn de sterkte-waarden (6.21) gebruikt.

Als een laminaat in willekeurige richting op afschuiving  $\bar{p}_{12}$  wordt belast dan geldt:

$$\{p_r\} = \begin{Bmatrix} -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{Bmatrix} \bar{p}_{12}$$



Figuur 6.6. De treksterkte  $\bar{X}_l$  van twee quasi-isotrope C.F.R.P. laminaten, berekend met het criterium van Tsai-Hill.

De spanningen in de  $k^e$ -laag zijn dan

$$\{\sigma_i\}_k = [T_{ir}]_k \begin{Bmatrix} -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta \\ \cos 2\theta \end{Bmatrix} \bar{p}_{12} = [Q_i]_k \bar{p}_{12}$$

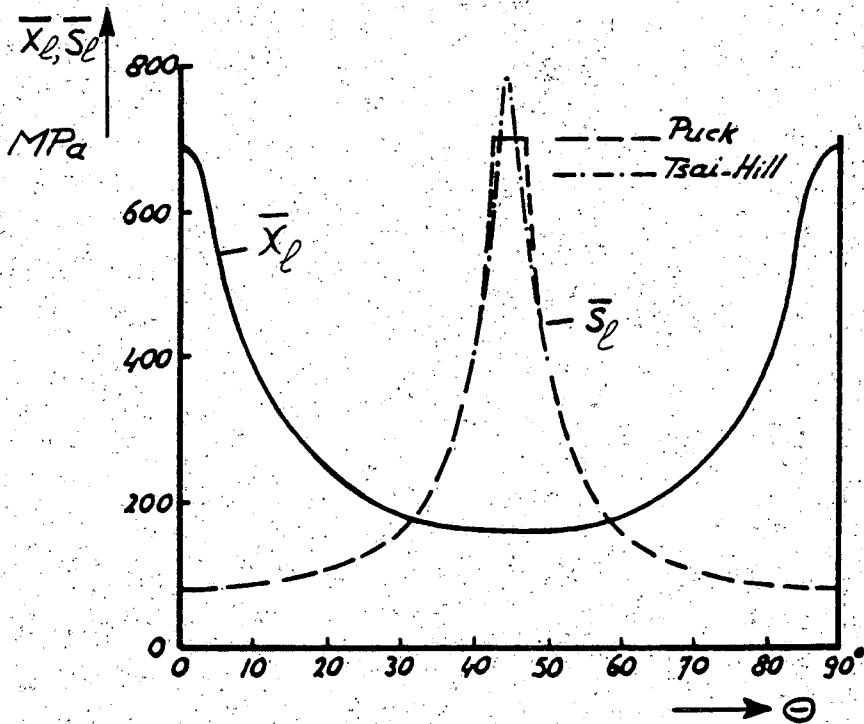
en het breukcriterium van Tsai-Hill geeft voor de maximale waarde  $\bar{S}_l$  van  $\bar{p}_{12}$

$$(\bar{S}_l)_k = \left\{ \left(\frac{Q_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{Q_2}{Y}\right)^2 - \frac{Q_1 Q_2}{XY} + \left(\frac{Q_3}{S}\right)^2 \right\}_k^{-\frac{1}{2}} \quad (6.28)$$

In Figuur 6.7 zijn de treksterkte en de afschuifsterkte van een  $0^\circ/90^\circ$  laminaat uitgezet, berekend met (6.27) respectievelijk (6.28). Ook is uitgezet de afschuifsterkte berekend met het criterium van Puck. Bij  $\theta = 45^\circ$  is de  $0^\circ/90^\circ$  cross-ply in feite een  $\pm 45^\circ$  angle-ply met lage treksterkte en hoge afschuif-



sterkte. Alleen bij 45° verschillen de afschuifsterktes volgens Tsai-Hill en Puck enigszins.



Figuur 6.7. De treksterkte en de afschuifsterkte van een C.F.R.P. cross-ply.

6d. De sterkte van laminaten bij niet-homogene spanningsvelden

In hoofdstuk 5 zijn niet-homogene spanningsvelden behandeld, veroorzaakt door ellipsvormige gaten in oneindig grote platen. Deze platen werden verondersteld homogeen te zijn met anisotrope elastische eigenschappen. Laminaten zijn uiteraard gelaagd en daarom niet homogeen van samenstelling. De oplossingen van hoofdstuk 5 kunnen voor laminaten dan ook alleen gemiddelde spanningen over de dikte van het laminaat geven. De berekening van de spanningen in de afzonderlijke lagen, het toepassen van een breukcriterium en het bepalen van het niveau van de belastingen op het laminaat op grond van breuk van de eerste laag gaat op precies dezelfde wijze als in de vorige paragraaf.

Het grote verschil met homogene spanningsvelden is uiteraard dat bij niet-homogene velden de gemiddelde spanningen over de dikte van punt tot punt verschillen. In principe moet dan ook de berekening van de vorige paragraaf voor

Ieder punt worden gedaan, zeker in de buurt van de verstoorder (het gat) van het homogene veld. Een intuïtieve benadering is de berekening alleen te doen voor die punten die de hoogste theoretische spanningsconcentratiefactoren geven. Dat dit tot foute conclusies kan leiden blijkt uit de volgende voorbeelden.

In Figuur 5.3 is de omtrekspanning rond een cirkelvormig gat in een met  $p_2$  belaste plaat van drie verschillende laminaten gegeven. De hoogste spanningsconcentratie wordt gevonden voor het UD materiaal met de vezels in  $X_2$ -richting, nl. 8,06 bij  $\theta = 0^\circ$ . De treksterkte in vezelrichting van UD materiaal is 1750 MPa, de toegestane waarde van de trekspanning  $p_2$  op het laminaat (het laminaat bestaat hier dus uit één laag vezels in  $X_2$ -richting) zou dan ook zijn

$$Y_{\ell t} = 1750/8,06 = 217 \text{ MPa}$$

Overschrijding van deze waarde zou scheuren geven naast het gat in een richting loodrecht op de richting van de vezels).

Wordt de rand van het gat in het UD materiaal echter puntsgewijs onderzocht dan geeft

Tsai-Hill:  $Y_{\ell t} = 124,6 \text{ MPa}$

Puck:  $Y_{\ell t} = 127,5 \text{ MPa}$

Bij beide criteria is  $\theta = 8^\circ$  de kritieke plaats, beide geven een veel lagere waarde dan de eerder berekende 217 MPa. Bij  $\theta = 8^\circ$  is de omtrekspanning gedaald tot 4,48  $p_2$ , volgens Figuur 5.4 is de schuifspanning er echter het hoogst, en wel 0,62  $p_2$ . In de breukcriteria blijken de afschuiftermen dominant te zijn en breken van de plaat zal dan ook door uitschuiven van de stroken boven en onder het gat plaatsvinden volgens scheuren evenwijdig met de belastingsrichting, beginnend bij  $\theta = 8^\circ$  (en uiteraard  $172^\circ$ ,  $188^\circ$  en  $352^\circ$ ). Deze breukvorm is experimenteel eenvoudig te constateren. De plaat versterken tegen de hoge trekspanningsconcentratie 8,06 naast het gat is dan ook zinloos. De plaat breekt op de (numeriek weliswaar veel lagere) schuifspanningsconcentratie, waarvan de fysieke reden is de zeer lage afschuifsterkte van UD materiaal. De afschuifsterkte moet dan ook verbeterd worden door toevoeging van  $\pm 45^\circ$  lagen rondom het gat.

Een meer praktisch voorbeeld van een laminaat is een  $[90_2^{\circ}/+45^{\circ}/-45^{\circ}]$  laminaat. Bij zo'n laminaat moet de maatgevende belasting dus worden gevonden door punts-

gewijs in alle afzonderlijke lagen een breukcriterium toe te passen. De hoogste omtrekspanning bij een dergelijk laminaat met cirkelvormig gat wordt gevonden bij  $\theta = 0^\circ$ ; de waarde is  $3,51 p_2$ , dus veel lager dan die voor het UD materiaal. En toch is in dit geval het punt  $\theta = 0^\circ$  kritiek voor de maximale waarde van  $p_2$ .

Volgens Tsai-Hill:  $Y_{\lambda t} = 288,4$  MPa, breukvorm is afschuiving in de  $\pm 45^\circ$  lagen bij  $\theta = 0^\circ$ .

Volgens Puck:  $Y_{\lambda t} = 276,6$  MPa, vezelbreuk in de  $90^\circ$ -lagen (!) bij  $\theta = 0^\circ$ .

Zowel bij Tsai-Hill als bij Puck liggen de waarden van  $Y_{\lambda t}$  gebaseerd op de berekening van alle afzonderlijke lagen dicht bij elkaar, zodat tegelijk bezwijken van meerdere lagen bij  $\theta = 0^\circ$  zeer waarschijnlijk is. Wordt overigens de breuksterkte van het laminaat zonder gat berekend met de zelfde criteria (op basis van de sterkte waarden van de afzonderlijke lagen) dan geeft

Tsai-Hill:  $Y_{\lambda t} = 1015$  MPa

Puck:  $Y_{\lambda t} = 968$  MPa.

De efficiency van de constructie met gat is volgens beide criteria dan ook 28,5%, hetgeen specifiek een gunstig getal is ten opzichte van de 33% bij metalen.

Een geval van meer academisch belang is de  $\pm 45^\circ$  angle-ply. De hoogste omtrekspanning is  $3,47 p_2$  (zie Figuur 5.3), toch is  $\theta = 0^\circ$  met de veel lagere spanning  $1,82 p_2$  kritiek voor de belasting. De toelaatbare waarden zijn hier

volgens Tsai-Hill:  $Y_{\lambda t} = 87,3$  MPa

volgens Puck:  $Y_{\lambda t} = 87,1$  MPa.

De angle-ply zonder gat heeft in  $X_2$ -richting een sterkte van 158 MPa zodat de efficiency van het laminaat met gat toch zo'n 55% is. Vergelijk deze waarde met de 28,5% van het voor trek in  $X_2$ -richting veel geschiktere  $[90_2^\circ/+45^\circ/-45^\circ]$  laminaat en de  $(124,6/1750 \times 100) = 7,12\%$  van het bij uitstek geschikte UD materiaal met de vezels in  $X_2$ -richting. Kennelijk wordt een voor een bepaalde taak zeer geschikt materiaal door een verstoring veel essentiëler verzwakt dan een minder geschikt materiaal.

## HOOFDSTUK 7

### ENKELE CONSTRUCTIEVE ASPECTEN

De weerstand die een constructie biedt tegen vervorming wordt bepaald door:

- de geometrie van de constructie,
- de eigenschappen van het materiaal waaruit de constructie is opgebouwd.

Een vlakke plaat, in zijn vlak belast door drukkrachten, zal weinig weerstand bieden en snel uitknikken. Krijgt de plaat echter een andere geometrie door hem tot een profiel te vouwen dan blijkt hij wel degelijk draagkracht te hebben en een zekere weerstand te bieden tegen uitknikken.

Een vlak laminaat, onder  $\pm 45^\circ$  gelamineerd met de belastingrichting biedt meer weerstand tegen afschuifvervorming in zijn vlak dan bijvoorbeeld unidirectioneel materiaal of een  $[0^\circ/90^\circ]$  laminaat.

Een interessant aspect van het construeren met composietmaterialen is dat er tussen de geometrie van de constructie en de eigenschappen van het toegepaste materiaal een relatie bestaat die gevoelig is voor optimaliseren. Deze relatie bestaat bij isotrope materialen niet omdat daar de elasticiteitseigenschappen vaste gegevens zijn die niet kunnen worden gevarieerd.

Enkele voorbeelden van de relatie tussen materiaaleigenschappen en geometrie bij constructies van composietmaterialen:

- De klassieke laminatentheorie geeft een verband tussen belastingen op en vervormingen van een laminaat

$$\begin{Bmatrix} N_i \\ M_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ij} & B_{ij} \\ B_{ij} & D_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_j^\circ \\ \rho_j \end{Bmatrix} \quad (4.46)$$

De A,B,D-termen bevatten relaties tussen de elasticiteitsgrootheden van de lagen van het laminaat en geometrische grootheden als de dikte van de lagen en hun afstand tot een referentievlak. Deze relaties kunnen worden geoptimaliseerd naar b.v. minimale vervorming onder belasting of maximale draagkracht. Zo is het verstandig bij een laminaat op buiging belast de vezels in belastingrichting aan de buitenkant te leggen. Bij een plaat op wringing belast is

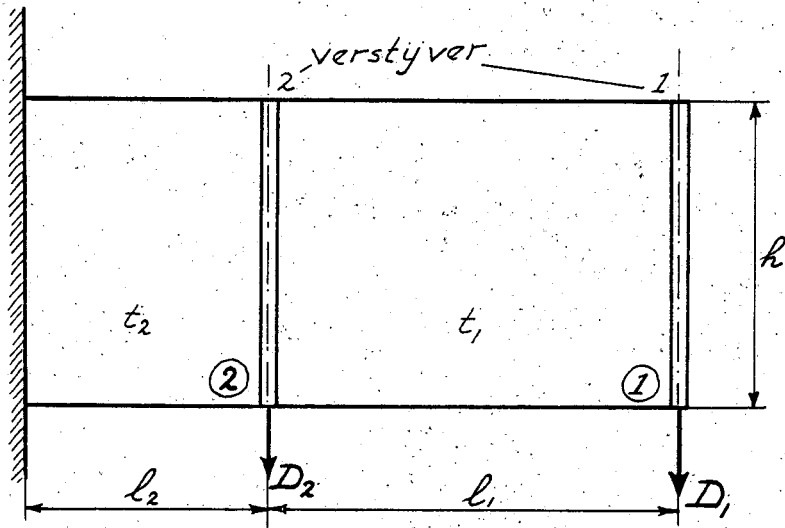
het daarentegen beter de lagen aan de buitenkant onder  $\pm 45^\circ$  te leggen.

- Voor de reeds genoemde tot profiel gevouwen plaat lijkt het in eerste instantie logisch de vezels in de richting van de drukkracht te leggen. In formules voor de kritieke kniklast zijn geometrische eigenschappen van het profiel echter gekoppeld aan de D-termen van de koppel-matrix uit (4.46). Onder bepaalde omstandigheden, nl. die waarbij de geometrie van het profiel zo is gekozen dat locale knik optreedt, zijn  $\pm 45^\circ$  laminaten beter dan andere. Optimalisatie kan plaatsvinden door profielgeometrie en laminaat zo op elkaar af te stemmen dat locale knik en totale instabiliteit (Euler-knik) tegelijk optreden.
- Voor een metalen drukvat is de meest optimale vorm de bol. Bij een drukvat gewikkeld uit vezels wordt de optimale vorm (isotensoïde) medebepaald door de eigenschappen van de vezels. Een isotensoïde van b.v. glasvezels heeft dan ook een iets andere geometrie dan één van koolstofvezels.

Bij het ontwerpen van constructies in composietmateriaal moet het ontwerpen van het materiaal zelf altijd in het ontwerpproces worden betrokken. Aan de hand van de beschrijving van een kokerbalk zal dit worden toegelicht. Dit voorbeeld is gekozen omdat de kokerbalk in velerlei uitvoering voorkomt in constructies die op buiging en op wringing worden belast zoals boten, rompen van vliegtuigen, vliegtuigvleugels, moderne hijskranen etc. Karakteristiek voor de genoemde voorbeelden is dat de wanddikte klein is ten opzichte van de overige afmetingen. Voor b.v. ski's, tennisrackets, masten, onderdelen van vele constructies, geldt dat niet. Desondanks zijn de hier toe te lichten facetten van het construeren in versterkte kunststoffen ook op die voorbeelden van toepassing.

#### 7a. Het begrip schuifstroom

Bij het analyseren van kokerconstructies wordt veelal met het begrip schuifstroom gewerkt. Dit begrip wordt toegelicht aan de hand van een zeer eenvoudig voorbeeld: twee aangrenzende plaatvelden die door dwarskrachten in hun vlakken en door elkaar op afschuiving worden belast, zie Figuur 7.1.

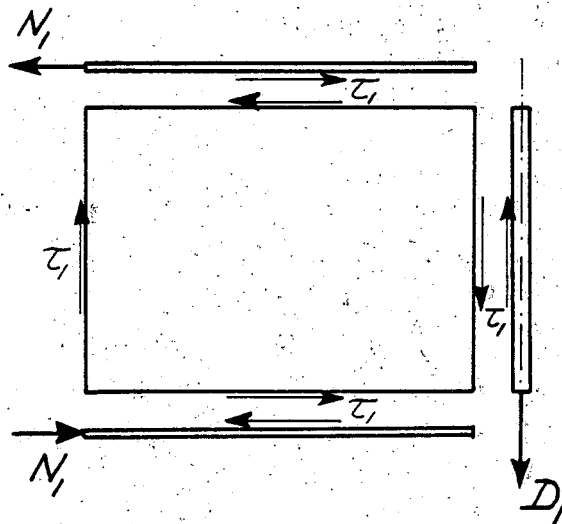


Figuur 7.1.

Verstijver 1, belast door  $D_1$ , geeft in plaatveld 1 een schuifspanning

$$\tau_{12}^{(1)} = D_1 / ht_1 \quad (7.1)$$

waarin  $t_1$  de dikte van de plaat is. Plaatveld 1 kan alleen in evenwicht zijn als op alle vier randen deze schuifspanning werkt, zie formule (2.5). Op de boven- en onderrand moet die schuifspanning worden verzorgd door gordingen, zie Figuur 7.2.

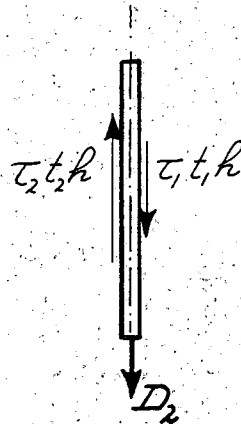


Figuur 7.2.

Die gordingen zijn in evenwicht door normaalkrachten (trek boven en druk onder) die naar nul afnemen naar de einden van de gordingen.

$$N_1 = \tau_{12}^{(1)} t_1 l_1 \quad (7.2)$$

In plaatdikte 2 heerst een schuifspanning  $\tau_{12}^{(2)}$  waarvan de grootte berekend kan worden met behulp van het evenwicht van verstijver 2, zie Figuur 7.3.



Figuur 7.3.

$$\tau_{12}^{(2)} t_2 = \tau_{12}^{(1)} t_1 + D_2/h \quad (7.3)$$

Het product  $\tau t$  wordt schuifstroom (shear-flow) genoemd, de dimensie is kracht-eenheid per lengte-eenheid. Essentieel is nu dat als op verstijver 2 geen kracht werkt ( $D_2 = 0$ ) voor de schuifstromen in plaatvelden 1 en 2 geldt

$$\tau_{12}^{(1)} t_1 = \tau_{12}^{(2)} t_2 \quad (7.4)$$

met andere woorden de schuifstroom in de plaatvelden is gelijk als op de grens tussen de plaatvelden geen uitwendige kracht werkt.

Is  $t_1 \neq t_2$ , dan is eveneens  $\tau_{12}^{(1)} \neq \tau_{12}^{(2)}$ . De schuifspanning verandert dan bij overgang van plaatveld 1 naar plaatveld 2 wel; de schuifstroom echter niet. Dit is een prettige eigenschap bij de behandeling van kokerconstructies.

Plaatveld 2 heeft ook gordingen nodig voor evenwicht, de normaalkracht in die gordingen bij de inklemming (gearceerd in Figuur 7.1) zal zijn:

$$N_2 = \tau_{12}^{(1)} t_1 \lambda_1 + \tau_{12}^{(2)} t_2 \lambda_2 \quad (7.5)$$

afnemend naar  $N_1$  bij de overgang van plaatveld 2 naar plaatveld 1. Op de linker-rand van plaatveld 2 wordt door de inklemming een schuifspanning  $\tau_{12}^{(2)}$  uitgeoefend.

In het theoretische geval van oneindig grote stijfheden van plaatvelden, verstijvers en gordingen zijn de vervormingen onder belasting nul en verlopen de normaalkrachten in de gordingen lineair. Anders gezegd: het opladen van de gordingen door de constante schuifstromen op de randen van de plaatvelden geeft lineair verlopende normaalkrachten in de gordingen.

Bij eindige stijfheden van de constructie-elementen zullen deze altijd verschillend ten opzichte van elkaar willen vervormen onder de opgelegde belastingen. Door onderlinge gedwongen aanpassing van de vervormingen zullen stoorkrachten worden geïntroduceerd die het normaalkrachtenverloop in de gordingen niet-lineair maken en de schuifstromen op de randen van de platen niet constant over de lengte. Op dit probleem van spanningsconcentraties wordt hier verder niet ingegaan, wel wordt opgemerkt dat b.v. plotselinge dikte-veranderingen in de gordingen plaatselijk hoge schuifspanningsconcentraties kunnen geven.

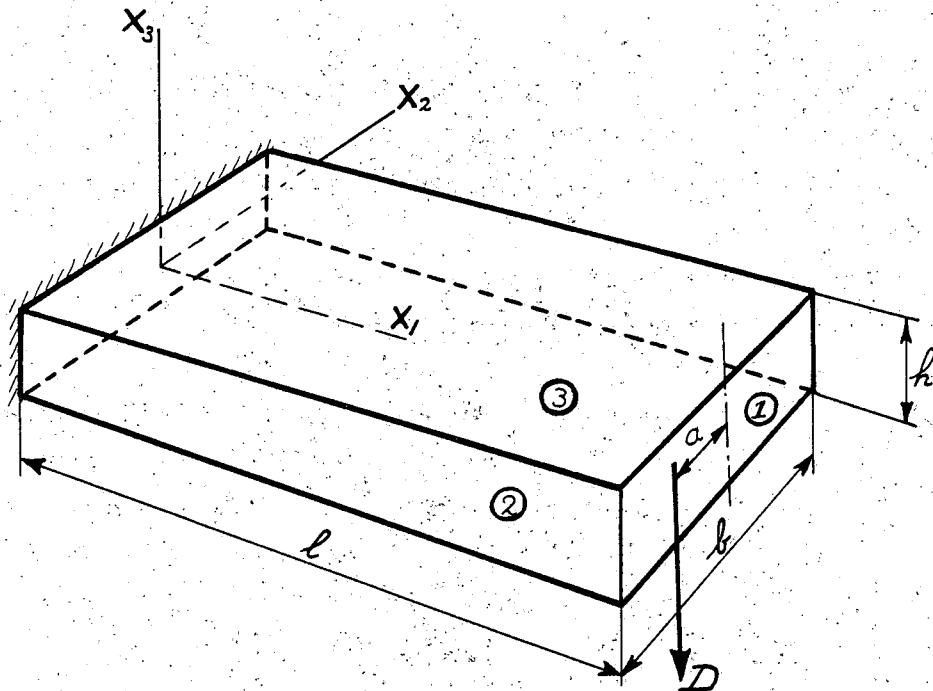
#### 7b. De torsiedoos

De torsiedoos is een kokerconstructie die op buiging en op wringing kan worden belast. Essentieel daarbij is dat de platen (of de huid) die de koker vormen de dragende functie hebben; andere elementen van de constructie dienen om de platen te ondersteunen (en daarmee de dragende functie mogelijk te maken) en om belastingen in of uit te leiden. Een dergelijke constructie is de tegenhanger van de vakwerkconstructie waarbij geen plaatvelden aanwezig hoeven te zijn. Het zal duidelijk zijn dat kokerconstructies een mogelijk toepassingsgebied zijn voor laminaten van versterkte kunststoffen.

Hoe kan nu een plaatveld als huid een essentiële dragende functie vervullen? Immers, een plaat kan in zijn vlak uitsluitend op trek en afschuiving worden belast en dat laatste alleen als de dimensies zo zijn dat geen plooivorming optreedt. Tegen druk of buiging uit z'n vlak biedt een plaat nauwelijks weerstand. En hoe kunnen de specifieke mogelijkheden die versterkte kunststoffen bieden daarbij worden uitgebuit?



De koker waarmee dit probleem zal worden geanalyseerd is getekend in Figuur 7.4. De analyse zal uitsluitend kwalitatief zijn en dus niet leiden tot gekwantificeerde grootheden. De koker is aan één kant vast ingeklemd gedacht; goede constructieve uitvoeringen van inklemmingen zijn voor werkelijke constructies uiteraard van groot belang, er zal hier echter geen aandacht aan worden geschonken.



Figuur 7.4.

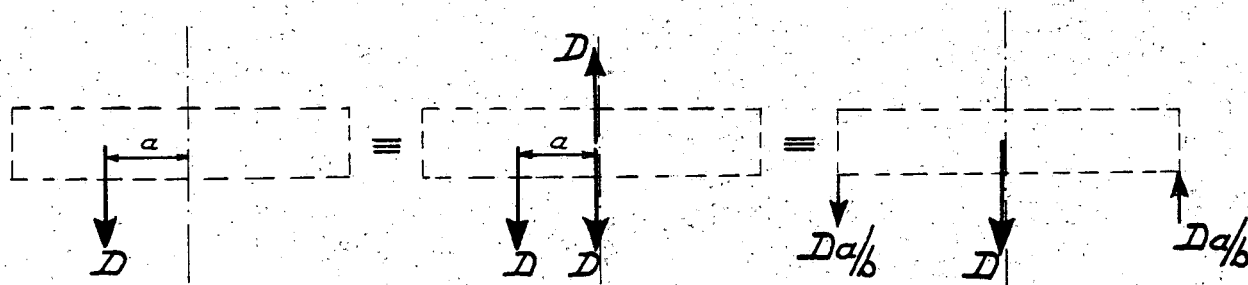
Aan het andere uiteinde wordt de koker belast door een dwarskracht  $D$ . Eindschot, zijplaat en bovenplaat zijn aangegeven met resp. ①, ② en ③. De tegenoverliggende platen zullen voorlopig niet worden beschouwd, zij spelen in de analyse dezelfde rol. In Figuur 7.4 is tevens een coördinaatassenstelsel  $X_1$ - $X_2$ - $X_3$  ingetekend. Belastingen etc. worden aangegeven in dit coördinatensysteem. Als restrictie wordt gegeven dat de assen van elastische symmetrie van de toe te passen laminaten in de richtingen van de coördinaatassen lopen en dat die laminaten zo zijn opgebouwd dat er geen bijzondere koppel-effecten (in de zin van klassieke laminatentheorie) optreden.

De dwarskracht  $D$  grijpt aan op een willekeurige plaats op het eindschot waardoor de koker zowel zal doorbuigen als torderen. Door de aan de toe te passen laminaten opgelegde restricties kan het belastingsgeval worden gescheiden in (zie Figuur 7.5)

- een dwarskracht  $D$  aangrijpend in het symmetrievlak van de koker die uitsluitend buiging veroorzaakt;

- een wringend moment door krachten  $Da/b$  in de hoekpunten dat zuiver torderen van de koker geeft.

Opgemerkt wordt dat een eindschot belast door een dwarskracht  $D$  op een willekeurige plaats constructief om een andere oplossing vraagt dan een eindschot belast door krachten in symmetrievlak en hoekpunten.



Figuur 7.5.

De twee gevallen, nl. buiging door een dwarskracht en zuivere wringing zullen apart worden behandeld.

7c. De koker belast door een dwarskracht

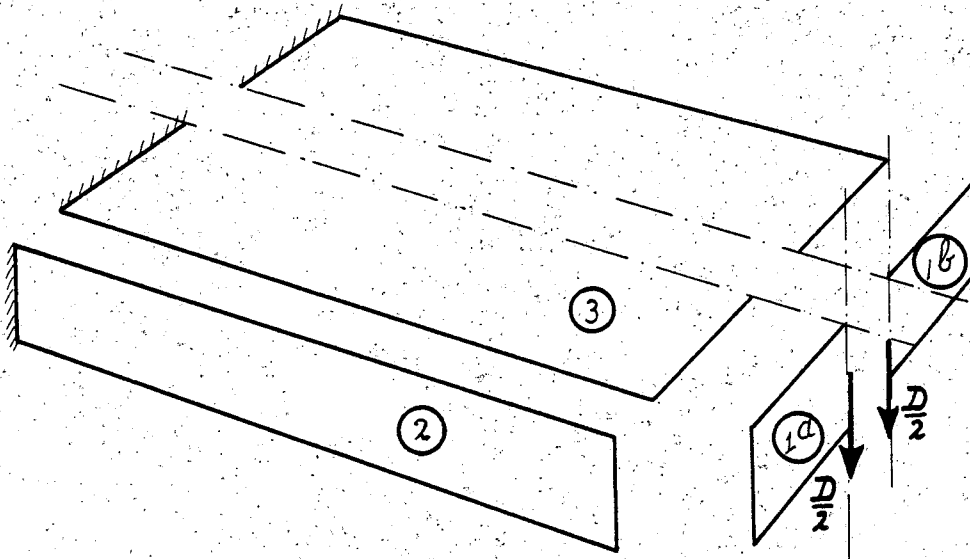
De koker wordt uit elkaar gehaald en gedeeld over het symmetrievlak als getekend in Figuur 7.6.

In Figuur 7.7 is helft (1a) van het eindschot getekend. De kracht  $D/2$  moet door een verstijver in het plaatveld worden ingeleid via een schuifstroom (voortaan aangeduid met  $q$ )

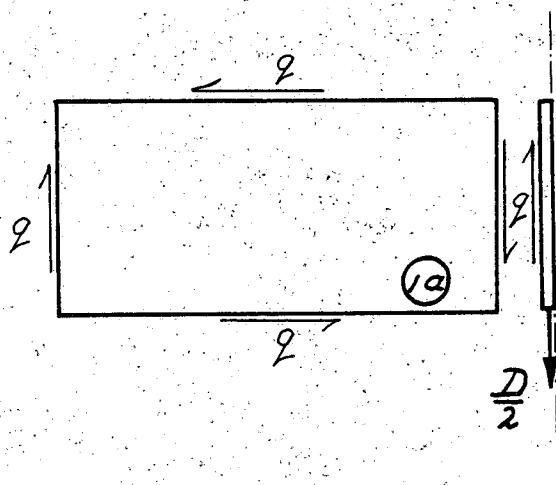
$$q = \frac{D}{2h} \tag{7.6}$$

die voor evenwicht van de plaat (1a) op alle vier randen moet werken.

De schuifstromen op boven-, onder- en linkerzijrand moeten komen uit de afsteuningen van plaat (1a) door middel van andere platen van de koker of eventuele verstijvers, gordingen of andere constructie-elementen.

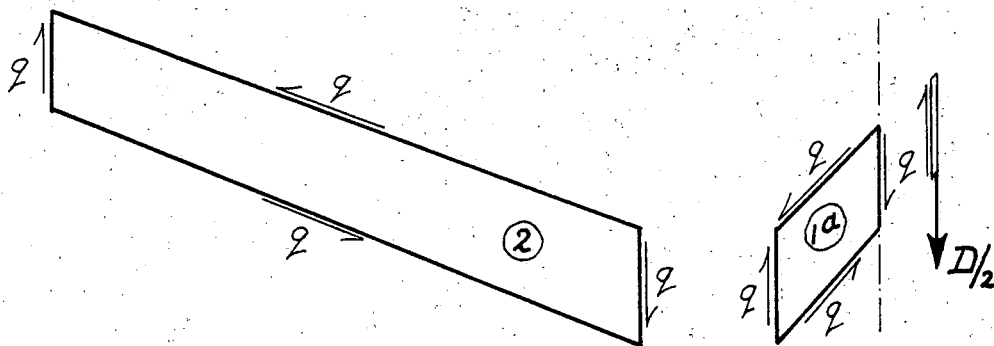


Figuur 7.6.



Figuur 7.7.

De voorrand van de zijplaat (2) wordt door eindschothelft (1a) belast met  $q$ , zie Figuur 7.8. Ook hier geldt dat voor evenwicht van plaat (2) schuifstroom  $q$  op de andere randen moet werken.



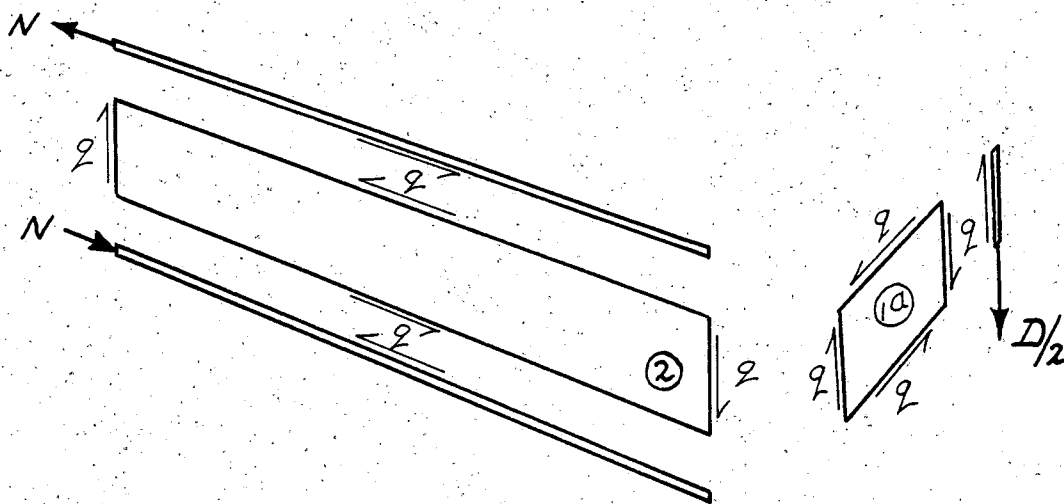
Figuur 7.8.

De afsteuning van de achterzijde van plaat (2) wordt door de inklemming van de koker verzorgd. Deze geeft daar dus in verticale richting een kracht  $qh = D/2$  op de constructie. Samen met de  $D/2$  op de tegenoverliggende zijplaat en belasting  $D$  op het eindschot is de koker in verticale richting dus in evenwicht.

Voor de boven- en onderrand van plaat (2) kan de afsteuning worden verzorgd door - gordingen. Deze zijn nodig als de inklemming van de constructie via geconcentreerde krachten plaatsvindt. De zijkant van de koker vormt op zichzelf dan een ligger bestaande uit lijfplaat (shear-web) en gordingen.  
- een boven- resp. onderplaat. Deze situatie is reeds getekend in Figuur 7.4. Hierbij vindt de inklemming van de boven- en onderplaat via (min of meer) gelijkmatig verdeelde krachten plaats.

Afsteuning door gordingen

De gordingen aan boven- en onderrand van plaat (2) worden opgeladen door  $q$  en in evenwicht gehouden door normaalkrachten  $N$ , zie Figuur 7.9.



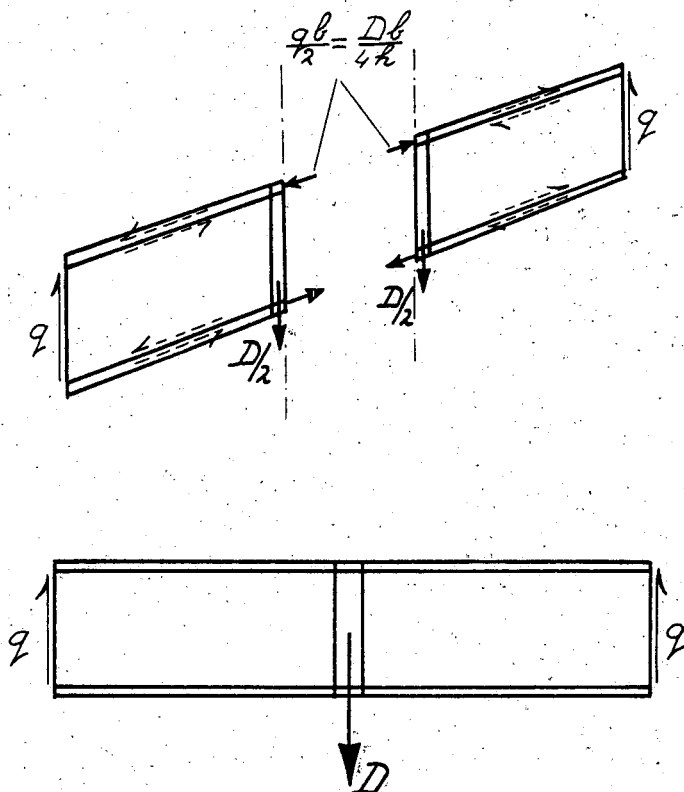
Figuur 7.9.

De krachten N zijn de eerdergenoemde geconcentreerde krachten bij de inklemming; hun grootte is

$$N = ql = \frac{Dl}{2h} \quad (7.7)$$

Zij zijn horizontaal onderling in evenwicht en het horizontale evenwicht van de hele koker is daarmee dus verzorgd. Samen met dwarskracht D op het eindshot verzorgen zij ook het momentenevenwicht van de constructie. In het belastingsgeval van dwarskracht D in het symmetrievlak van de koker is er bij gebruik van gordingen kennelijk geen boven- resp. onderplaat nodig om plaat (2) af te steunen.

De boven- en onderrand van het eindshot zijn nog niet gesteund. Omdat er geen boven- en onderplaten zijn moet dat eveneens gebeuren met gordingen. In Figuur 7.10 is aangegeven hoe de krachten op de halve eindschotten in evenwicht zijn en hoe dit schot als geheel in feite zelf een ligger vormt op driepuntsbuiging belast.

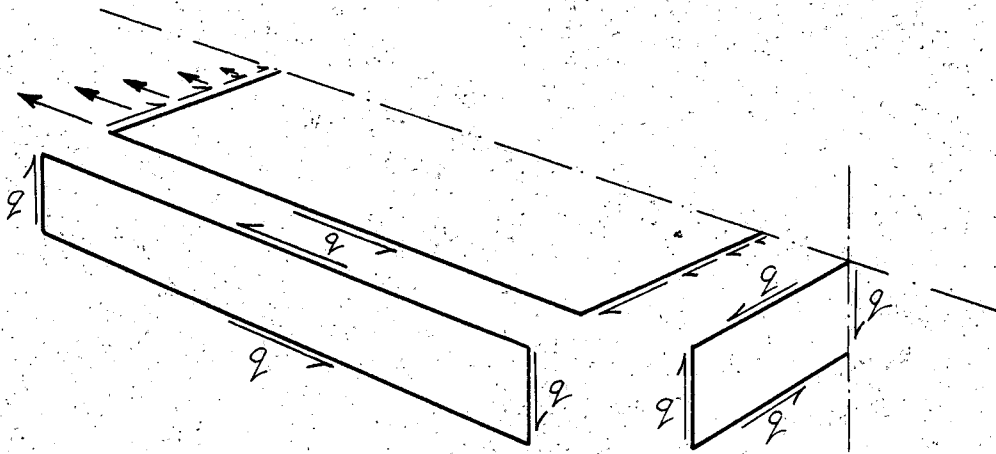


Figuur 7.10.

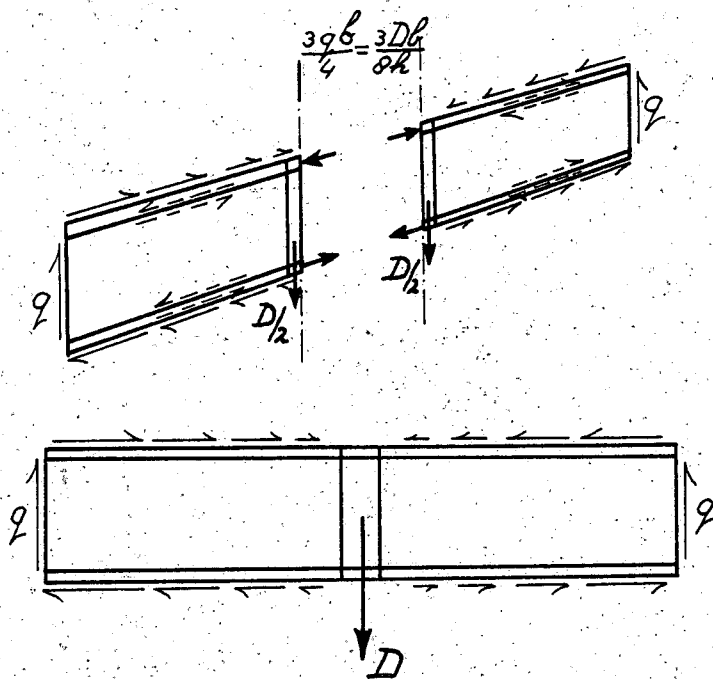
Afsteuning door platen

Figuur 7.11 laat zien hoe de (halve) bovenplaat door de zijplaat wordt belast met schuifstroom  $q$ . Belangrijk is nu dat er in het symmetrievlak van de bovenplaat geen schuifstroom aanwezig kan zijn. Die zou immers moeten komen uit de andere, identiek belaste helft van de bovenplaat. Aan de voor- en achterrand van de bovenplaat moet de schuifstroom dan ook afnemen van  $q$  aan de zijkant tot nul bij het symmetrievlak. Bij de inklemming wordt de bovenplaat verder afgesteund door (min of meer) gelijkmatig verdeelde trekspanningen die als resultante  $D/2h$  (vergelijk (7.7)) moeten hebben.

Uit Figuur 7.11 blijkt dat de afnemende schuifstroom op de voorrand van de bovenplaat niet in staat is de schuifstroom  $q$  op de bovenrand van het eindschot te verzorgen, zij hebben immers dezelfde richting. Ook nu, dus bij gebruik van boven- en onderplaat, zijn er dus nog gordingen nodig die een tweeledige functie hebben: afsteuning van de bovenplaat (resp. onderplaat) en afsteuning van de plaat van het eindschot. In Figuur 7.12 is aangegeven hoe de krachten op de halve eindschotten weer in evenwicht zijn en hoe het eindschot als geheel een ligger vormt op driepuntsbuiging en door schuifstromen belast.



Figuur 7.11.



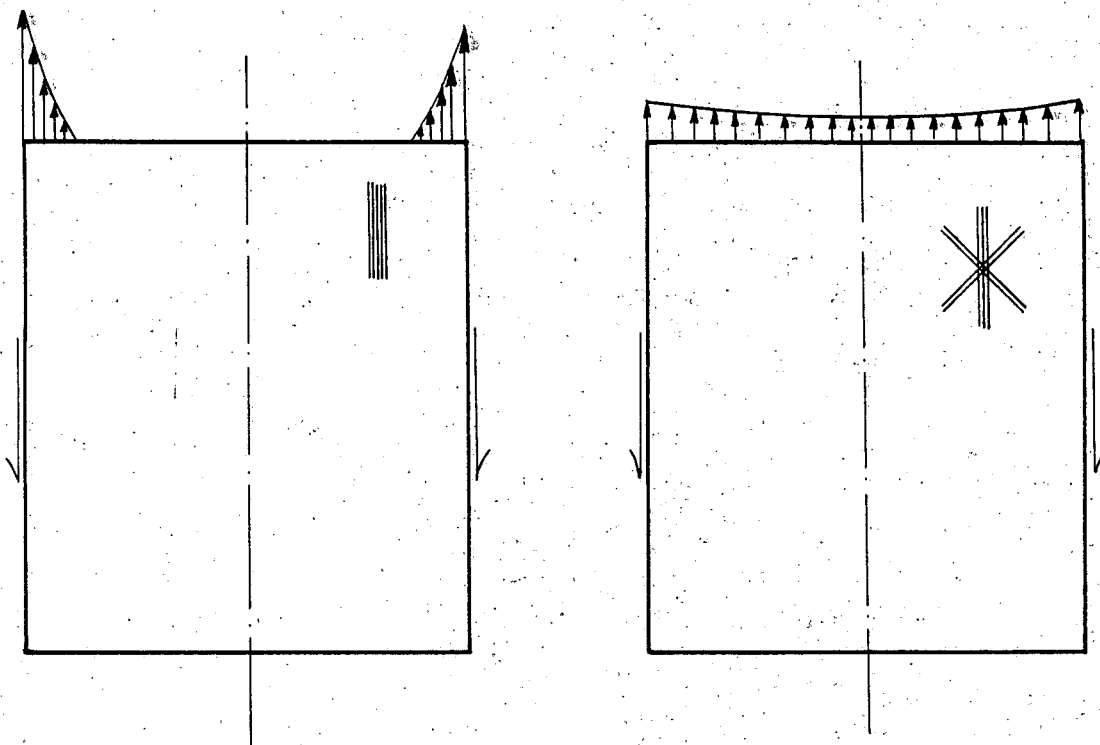
Figuur 7.12.

De keuze van de laminaten

De keuze van de laminaten is door de voorgaande analyse in principe vrij eenvoudig geworden.

De plaat van het eindschot en de zijplaten worden op zuivere afschuiving belast. Hiervoor is een  $\pm 45^\circ$  laminaat dus het meest geschikt. Voor eventuele gordingen, waarin door de schuifstromen normaalspanningen worden opgebouwd, lijkt toepassing van unidirectioneel materiaal voor de hand liggend (hierop wordt nog kort teruggekomen in paragraaf 7f). De doorsnede van de gordingen zal gelijkmatig kunnen verlopen.

Bij een intuïtieve benadering van het probleem van de kokerconstructie belast door een dwarskracht wordt meestal geconcludeerd dat boven- en onderplaat moeten bestaan uit unidirectioneel materiaal met de vezels in  $X_1$ -richting. De parallel met b.v. een I-balk van isotroop materiaal ligt hieraan ten grondslag: veel (en stijf) materiaal ver weg van de neutrale lijn. Een nadere beschouwing van de belastingen op de bovenplaat laat zien dat dit niet juist is. Belangrijk hierbij is de functie van de bovenplaat in herinnering te roepen: het omzetten van de schuifstromen  $q$  op de zijranden in (min of meer) gelijkmatig verdeelde normaalspanningen op de ingeklemde achterrand.



a: de unidirectionele bovenplaat

b: een  $0^\circ/\pm 45^\circ$  laminaat als bovenplaat.

Figuur 7.13.



Figuur 7.13 geeft de bovenplaat twee maal weer. In Figuur 7.13a bestaat de plaat uit unidirectioneel materiaal, in Figuur 7.13b uit een laminaat waarin zich unidirectioneel materiaal en  $\pm 45^\circ$  lagen bevinden. Omdat het unidirectionele materiaal een zeer lage glijdingsmodulus heeft in het niet goed in staat de schuifstroom op de zijranden om te zetten in normaalspanningen op de achterrand. Het materiaal bij het symmetrievlak zal 'achterblijven' en niet worden opgeladen. In feite doet de plaat precies hetzelfde als gordingen zouden doen: de schuifstroom omzetten in min of meer geconcentreerde krachten. Het zal duidelijk zijn dat dit geen efficiënte oplossing is omdat de bovenplaat niet functioneel is: het middestuk doet helemaal niet mee bij het dragen van de belasting.

Figuur 7.13b geeft een betere oplossing, hoewel ook hier het middendeel van de plaat altijd zal achterblijven (bij metalen constructies staat dit bekend als het 'shear-lag' probleem). Door toevoegen van  $\pm 45^\circ$  lagen verbetert de glijdingsmodulus aanzienlijk en is de bovenplaat dus beter in staat de schuifstromen op de zijranden om te zetten in uitgesmeerde normaalspanningen op de achterrand.

Uit de voorgaande beschouwingen blijkt duidelijk het belang van de aanwezigheid van  $\pm 45^\circ$  lagen in een door een dwarskracht in feite op buiging belaste constructie. Wel wordt er op gewezen dat de efficiënte bovenplaat bij overschrijden van de breuklast een explosieve breukvorm kan hebben hetgeen meestal ongewenst is.

#### Enkele eenvoudige formules.

Bij buiging van constructies wordt voor berekeningen in eerste benadering vaak teruggesproken naar de z.g. 'vergeetmijnietjes' waarmee voor lange slanke constructies van isotroop materiaal doorzakkingen en hoekverdraaiingen kunnen worden berekend. De vraag is nu of deze eenvoudige formules mogen worden toegepast op constructies, als beschreven in het voorgaande, gemaakt van composieten.

Voor de beantwoording van deze vraag zullen de uitgangspunten en de beperkingen van de 'vergeetmijnietjes' nader worden beschouwd.

De formule die ten grondslag ligt aan de 'vergeetmijnietjes' is formule (4.49) voor  $M_2 = 0$  en isotrope materialen

$$\rho_1 = \frac{M_1}{EI} \quad (7.8)$$

waarin  $\rho_1$  de kromming is ten gevolge van de buiging  
 $M_1$  is het buigend moment

E de elasticiteitsmodulus van het toegepaste materiaal

I het traagheidsmoment dat van iedere mathematisch te beschrijven doorsnede te berekenen is

Formule (7.8) geldt voor zuivere buiging (dus niet buiging t.g.v. een dwarskracht) en enkele aannames die zijn gedaan bij de afleiding ervan zijn:

- de vervormingen zijn klein, de kromming van de neutrale vezel is in ieder punt van die vezel gelijk en kan worden benaderd met

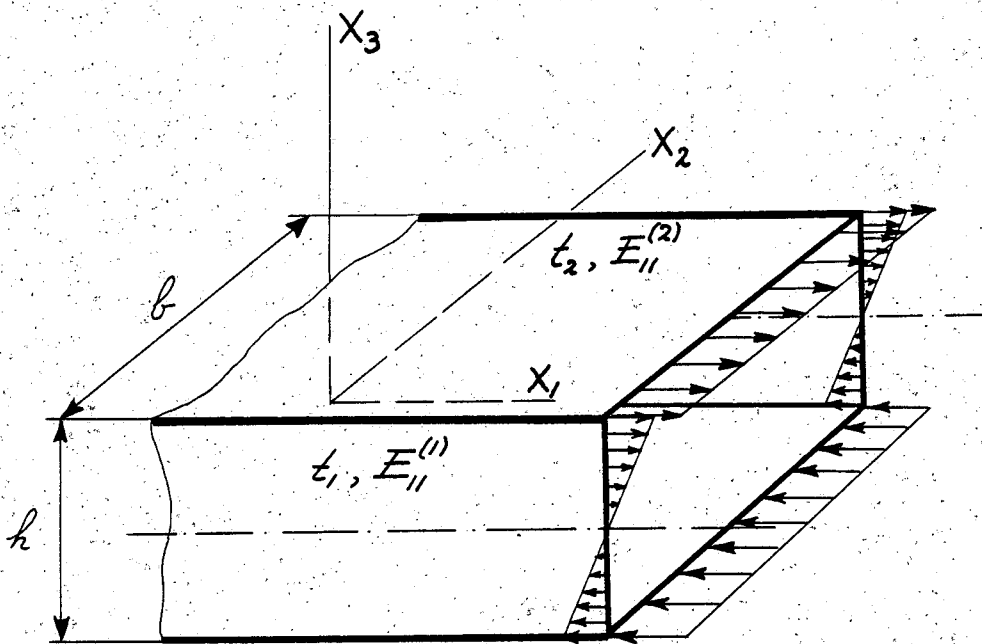
$$\rho_1 = - \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} \quad (7.9)$$

(vergelijk formules 4.35 t/m 4.37 etc.).

- vlakke doorsneden van de constructie blijven onder belasting vlak
- het materiaal is homogeen over de hele doorsnede, dus overal heeft het materiaal dezelfde E.

De eerste aanname is uiteraard voor metalen constructies net zo beperkend als voor composietconstructies. Voor de tweede aanname lijkt hetzelfde te gelden. Dat is echter niet juist; deze aanname is meer beperkend voor een koker met boven- en onderplaat van unidirectioneel materiaal waarbij het middendeel achterblijft onder vervorming. Boven- en onderplaat gaat welven waardoor de tweede aanname niet meer juist is.

De derde aanname is zeker niet juist als de boven- en onderplaat enerzijds en de zijvlakken anderzijds van verschillende laminaten zijn gemaakt. Een identieke afleiding als die welke ten grondslag ligt aan de koppelmatrix van de klassieke laminatentheorie geeft voor het buigend moment in een willekeurige doorsnede van de koker loodrecht op de  $X_1$ -as (waarbij de normaalspanningen in boven- en onderplaat constant over de breedte van de platen zijn verondersteld, niet over de dikte, zie Figuur 7.14).



Figuur 7.14.

$$\begin{aligned}
 M_1 &= 2 \left[ t_1 \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{11}^{(1)} x_3 dx_3 + b \int_{h/2-t_2/2}^{h/2+t_2/2} \sigma_{11}^{(2)} x_3 dx_3 \right] \\
 &= 2 \left[ t_1 \int_{-h/2}^{+h/2} E_{11}^{(1)} x_3^2 \rho_1 dx_3 + b \sum_{k=1}^n \int_{(x_3)_{k-1}}^{(x_3)_k} Q_{11}^{(k)} x_3^2 \rho_1 dx_3 \right] \\
 &= 2 \left[ t_1 E_{11}^{(1)} \frac{1}{12} h^3 \rho_1 + \rho_1 b \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} Q_{11}^{(k)} \left\{ (x_3)_k^3 - (x_3)_{k-1}^3 \right\} \right] \quad (7.10)
 \end{aligned}$$

waarin gebruik is gemaakt van relatie (4.35) voor zuiver buigen ( $e_{11}^0 = 0$ ).

Omdat de referentievlakken van boven- en onderplaat ver buiten die platen liggen (het vlak  $x_3 = 0$  is immers het middenvlak van de constructie als geheel) mogen de volgende benaderingen worden gedaan:

$$(x_3)_k^3 - (x_3)_{k-1}^3 = \left\{ (x_3)_k - (x_3)_{k-1} \right\} \left\{ (x_3)_k^2 + (x_3)_k (x_3)_{k-1} + (x_3)_{k-1}^2 \right\} = t_k^3 (x_3)_{\text{gem}}^2$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{3} Q_{11}^{(k)} \{ (x_3)_k^3 - (x_3)_{k-1}^3 \} \approx \sum_{k=1}^n \frac{1}{3} Q_{11}^{(k)} t_k^3 (x_3)_{\text{gem}}^2 = E_{11}^{(2)} t_2 (h/2)^2$$

zodat (7.10) wordt

$$\begin{aligned} M_1 &= 2\rho_1 \left[ \frac{1}{12} t_1 h^3 E_{11}^{(1)} + b t_2 (h/2)^2 E_{11}^{(2)} \right] \\ &= \rho_1 \left[ (EI)_{\text{zijplaten}} + (EI)_{\text{boven- en onderplaat}} \right] \end{aligned} \quad (7.11)$$

Met de 'law of mixtures' voor elasticiteitsmoduli in  $X_1$ -richting en traagheidsmomenten ten opzichte van het middenvlak

$$E^*I^* = (EI)_{\text{zijplaten}} + (EI)_{\text{boven- en onderplaat}} \quad (7.12a)$$

wordt (7.11)

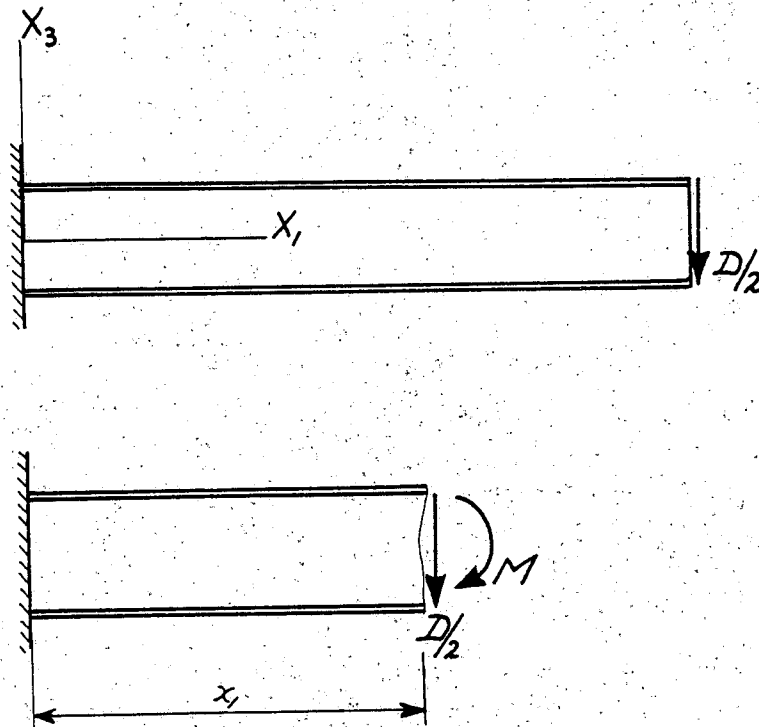
$$\rho_1 = \frac{M_1}{E^*I^*} \quad (7.13)$$

Het spreekt vanzelf dat als de constructie is uitgevoerd met gordingen geldt

$$E^*I^* = (EI)_{\text{lijfplaten}} + (EI)_{\text{gordingen}} \quad (7.12b)$$

(7.13) en (7.8) zijn gelijke betrekkingen. Bij het gebruik van (7.13) moet echter worden bedacht dat de formule een benadering is voor composietconstructies en dat  $E^*I^*$  dus moet worden samengesteld uit de eigenschappen van de afzonderlijke elementen. Overigens zal  $E_{11}^{(1)}$  (de elasticiteitsmodulus in  $X_1$ -richting van een  $\pm 45^\circ$  laminaat) klein zijn ten opzichte van  $E_{11}^{(2)}$  (de elasticiteitsmodulus van een laminaat met voldoende vezels in  $X_1$ -richting of van unidirectioneel materiaal) en kan  $(EI)_{\text{zijplaten}}$  in (7.12) meestal worden verwaarloosd.

Er is reeds opgemerkt dat formules (7.8) en (7.13) uitsluitend gelden voor het belastingsgeval van zuivere buiging. De tot nu toe beschouwde kokerconstructie wordt echter niet op zuivere buiging belast doch op buiging door een dwarskracht. Wat dit voor consequenties heeft ten aanzien van het gebruik van (7.13) wordt duidelijk gemaakt door de zijplaat van een koker voorzien van gordingen te beschouwen (De redenering voor de uitvoering met boven-onderplaat is in wezen gelijk). De zijplaat met gordingen vormt een zelfstandige ligger aan het einde belast door een dwarskracht  $D/2$  in de richting van de negatieve  $X_3$ -as, zie Figuur 7.15.



Figuur 7.15.

In een doorsnede van de ligger op afstand  $x_1$  van de inklemming is behalve de dwarskracht  $D/2$  ook een moment werkzaam

$$M_1 = -\frac{D}{2} (l - x_1) \quad (7.14)$$

( $M_1$  is volgens in Hoofdstuk 4 gemaakte afspraken positief,  $D/2$  is negatief). Het is dit moment  $M_1$  waarop formule (7.13) van toepassing is. Substitutie van (7.9) en (7.14) in (7.13) geeft na twee keer integreren voor het uiteinde van de balk de doorzakking  $w_m$

$$w_m = U_3^0 = \frac{D}{2} \frac{l^3}{3E^*I^*} \quad (7.15)$$

(Met  $D/2 = P$  en  $E^*I^* = EI$  is (7.15) het klassieke 'vergeetmijnetje' voor de doorzakking aan het einde van een lange, slanke isotrope balk belast door een dwarskracht  $P$ ).

De dwarskracht  $D/2$  werkzaam op de in Figuur 7.15 getekende doorsnede van de con-

structie veroorzaakt aan het uiteinde uiteraard ook een doorzakking die  $w_d$  genoemd zal worden. Deze doorzakking wordt veroorzaakt door afschuiving, die door de plaat (en niet door de aanwezige gordingen) wordt opgenomen.

Met 
$$\tau_{13}^{(1)} = \frac{D/2}{ht_1}$$

en voor de hier beschouwde vervormingsmogelijkheid

$$\gamma_{13} = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} + \frac{\partial U_3}{\partial x_1} = \frac{\partial U_3}{\partial x_1}$$

wordt 
$$\frac{\partial U_3}{\partial x_1} = \frac{D/2}{ht_1 G_{13}}$$

waarmee aan het einde van de ligger de doorzakking ten gevolge van afschuiving van de plaat wordt

$$w_d = \frac{D/2 \ell}{ht_1 G_{13}} \quad (7.16)$$

(De indices 1 en 3 zijn hier om formele redenen gebruikt. De plaat staat immers verticaal evenwijdig aan het  $X_1$ - $X_3$ -vlak.)

Uit (7.15) blijkt dus dat de doorzakking ten gevolge van het door  $D/2$  ontstane moment evenredig is met  $\ell^3$ , uit (7.16) volgt dat de doorbuiging ten gevolge van afschuiving slechts evenredig is met  $\ell$ . Het zal duidelijk zijn dat voor lange, slanke balken (7.15) sterk overheerst en bij toepassingen van metaal wordt (7.16) dan ook altijd verwaarloosd ten opzichte van (7.15). Mag dat nu ook als composieten worden gebruikt? Belangrijk bij de beantwoording van deze vraag is hoe groot de verhouding  $w_d/w_m$  is (omdat het hier om onderlinge vergelijking gaat is de absolute waarde van de doorzakkingen niet zo interessant).

Wordt de bijdrage  $(EI)_{\text{plaat}}$  in  $E^*I^*$  verwaarloosd dan is dus

$$E^*I^* = (EI)_{\text{gordingen}}$$

en wordt 
$$\frac{w_d}{w_m} = \frac{3(EI)_{\text{gordingen}}}{G_{13} \ell^2 t_1 h}$$

ofwel 
$$\frac{w_d}{w_m} = \frac{E_{\text{gordingen}}}{G_{13} \ell^2}$$

Voor metalen is altijd  $\frac{E}{G} = 2(1+\nu) \approx \frac{8}{3}$

zodat voor isotrope materialen

$$\frac{w_d}{w_m} \div \frac{2,7}{l^2} \quad (7.17)$$

Zou de hele ligger van unidirectioneel materiaal worden gebouwd met

$$\begin{aligned} E_{11} &= 145 \text{ GPa} \\ C_{13} &= 3,5 \text{ GPa} \end{aligned}$$

dan is

$$\frac{w_d}{w_m} \div \frac{41,4}{l^2} \quad (7.18)$$

Wordt de goede oplossing gekozen met het  $\pm 45^\circ$  laminaat als plaat

$$G_{13} = 37,02 \text{ GPa}$$

dan is

$$\frac{w_d}{w_m} \div \frac{3,9}{l^2} \quad (7.19)$$

Bij deze berekeningen zijn uiteraard de geometrische grootheden  $I$ ,  $t_1$  en  $h$  voor alle gevallen gelijk verondersteld.

Uit (7.17), (7.18) en (7.19) blijkt dat de afschuifcomponent van de doorzakking bij de unidirectionele plaat veel groter is dan bij een metalen of  $\pm 45^\circ$  plaat, en dus tot veel grotere waarden van  $l$  niet mag worden verwaarloosd. Voor de oplossing met de  $\pm 45^\circ$  plaat mag de afschuifcomponent globaal reeds bij dezelfde lengte worden verwaarloosd ten opzichte van de andere component als bij metalen constructies. Bij een goed ontworpen, functionele constructie uit composietmateriaal is de toepasbaarheid van (7.15) dus even goed als de toepasbaarheid van (7.8) bij metalen.

Met relatie (4.35) voor  $e_{11}^0 = 0$

$$e_{11} = x_1 p_1$$

wordt gevonden na substitutie van (7.13)

$$e_{11} = \frac{M_1 x_3}{E^* I^*} \quad (7.20)$$

(7.20) kan worden gebruikt voor de berekening van spanningen. Bij de constructie

met gordingen geldt voor deze gordingen, die lang en slank zijn

$$e_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E_{\text{gordingen}}}$$

waarmee 
$$\sigma_{11} = \frac{M_1 \times E_{\text{gordingen}}}{E \cdot I^*} \quad (7.21)$$

In de buitenste vezels van de gordingen is de spanning het hoogst, nl.

$$\sigma_{11_{\text{max}}} = \frac{M_1 \cdot h/2 \cdot E_{\text{gordingen}}}{E \cdot I^*} \quad (7.22)$$

Voor isotrope materialen geeft deze formule met  $W = \frac{I}{h/2}$  de welbekende formule

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{M_1}{W}$$

Voor de constructie met boven- en onderplaat geeft (7.20) voor iedere lamel van die platen de vervorming waarmee met de stijfheidsmatrix van de respectievelijke lamellen in het  $X_1$ - $X_2$ -assenstelsel de spanningen kunnen worden bepaald.

#### 7d. De koker belast door een wringend moment

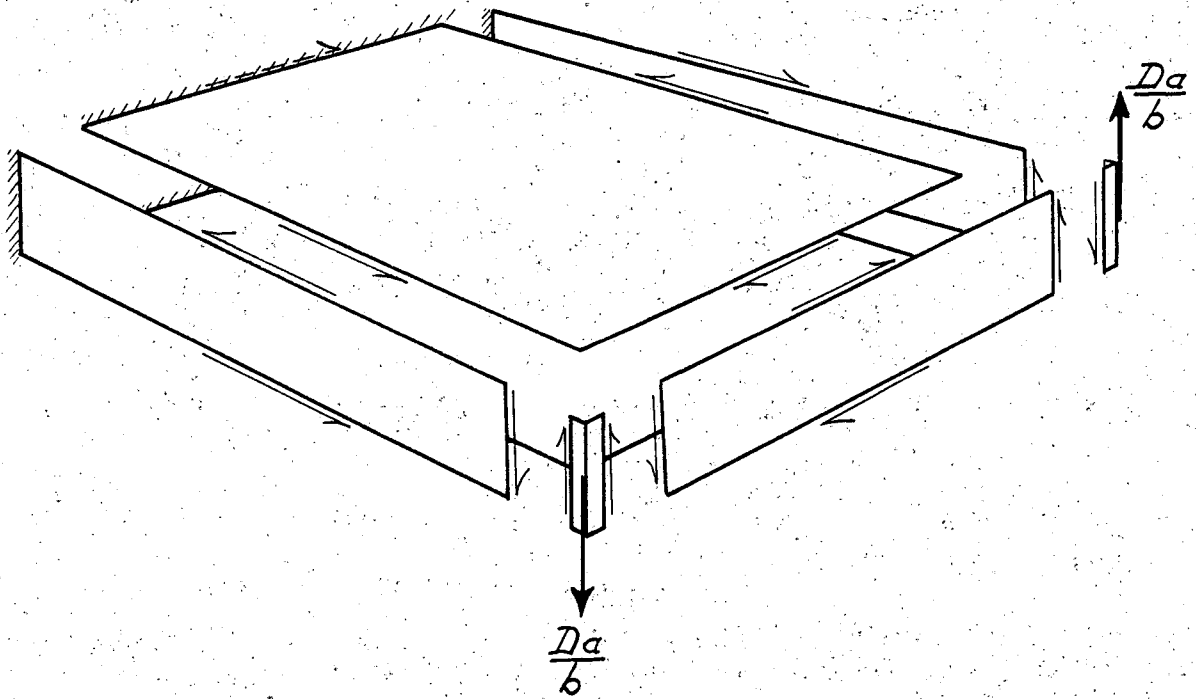
In Figuur 7.16 wordt het wringend moment verzorgd door twee krachten  $Da/b$ , aangrijpend op verstijvers in de hoekpunten. Die verstijvers worden afgesteund door even grote schuifstromen in eindschot- en zijplaten,

$$q = \frac{Da}{2bh} \quad (7.23)$$

De koker op wringing belast wordt niet zo uitvoerig behandeld als de koker belast door een dwarskracht. Figuur 7.16 is voor een goed begrip voldoende.

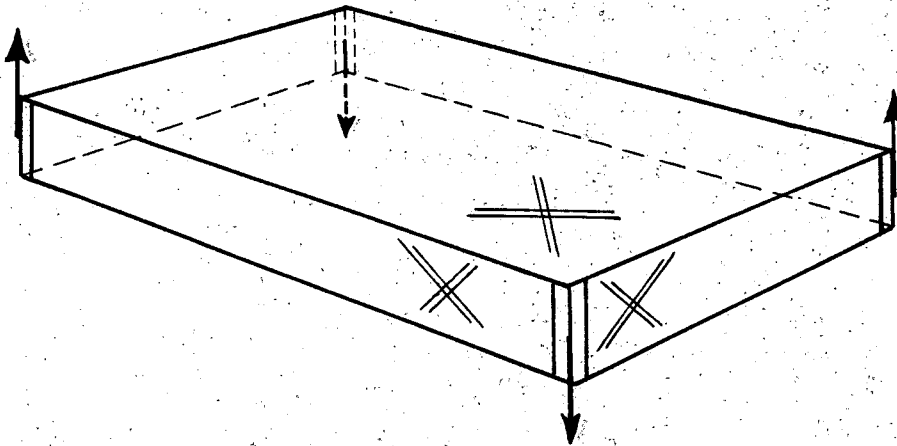
Uit Figuur 7.16 blijkt dat de voor-, zij-, boven- en onderplaat volledig in staat zijn elkaar te steunen en gordingen zijn dan ook nergens nodig. Eventueel aanwezige gordingen voor de buigfunctie van de koker hebben bij wringing dus geen functie.





Figuur 7.16.

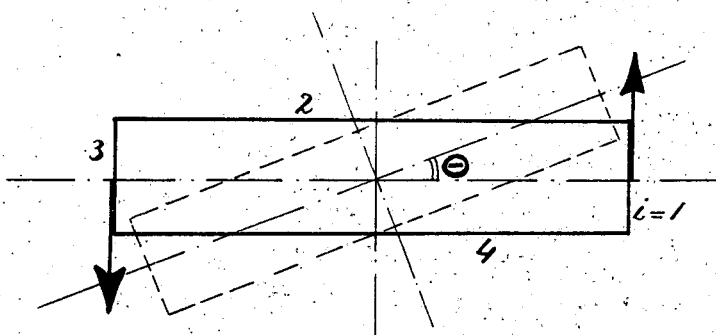
Alle vlakken van de getordeerde koker worden puur op afschuiving belast, zodat overal  $\pm 45^\circ$  laminaten kunnen worden gebruikt. Wordt de achterkant van de koker niet gelijkmatig ingeklemd doch voorzien van een plaat met verstijvers in de hoeken dan is de zeer torsiestijve gesloten doos verkregen die in evenwicht is als getekend in Figuur 7.17.



Figuur 7.17.

Enkele eenvoudige formules

Onder de gegeven restricties met betrekking tot de laminaateigenschappen (materiaalassen vallen samen met coördinaatassen, geen bijzondere koppelingen in de zin van de klassieke laminatentheorie) gelden de formules van Bredt. Voor de afleiding ervan wordt verwezen naar de betreffende literatuur. In Figuur 7.18 is een doorsnede van een kokerconstructie voor en na vervorming van de koker door een wringend moment  $M_w$  gegeven



Figuur 7.18.

$$q = \frac{M_w}{20} \tag{7.24}$$

waarin  $\theta$  het oppervlak is van de doorsnede (vergelijk (7.23) met  $\theta = bh$  en  $M_w = Da$ ).

Verder is

$$\frac{d\theta}{dx_1} = \frac{M_w}{40^2} \sum_i \frac{\lambda_i}{G_i t_i} \tag{7.25}$$

waarin  $\lambda_i$  de lengte is van de zijden van de in Figuur 7.18 getekende doorsnede

$t_i$  de dikte van de bijbehorende platen

$G_i$  de glijdingsmodulus in  $X_1$ - $X_2$ -richting van de laminaten waaruit de platen zijn gemaakt (de  $X_1$ -as valt samen met de momentenvector van  $M_w$ ,  $X_2$  is de geroteerde  $X_2$ -as, is uiteraard voor de respectievelijke zijden verschillend).

$d\theta/dx_1$  is de specifieke hoeverdraaiing uitgedrukt in radialen per lengte-eenheid. Is het rechterlid van (7.25) constant over de lengte van de koker (dus

geen functie van  $x_1$ ) dan is

$$\frac{\theta}{x_1} = \frac{M_w}{40^2} \sum_i \frac{l_i}{G_i t_i} \quad (7.26)$$

Bij isotrope materialen is  $G_i$  een constante grootte en kan in (7.26) voor het sommatie-teken worden geplaatst. Bij composieten kan men voor de verschillende zijden laminaten kiezen met verschillende glijdingsmoduli, b.v. omdat de koker ook nog een andere functie heeft. Formule (7.26) is dan ook een voorbeeld van de mogelijkheid die composieten bieden om te optimaliseren tussen geometrische en materiaalgrootheden.

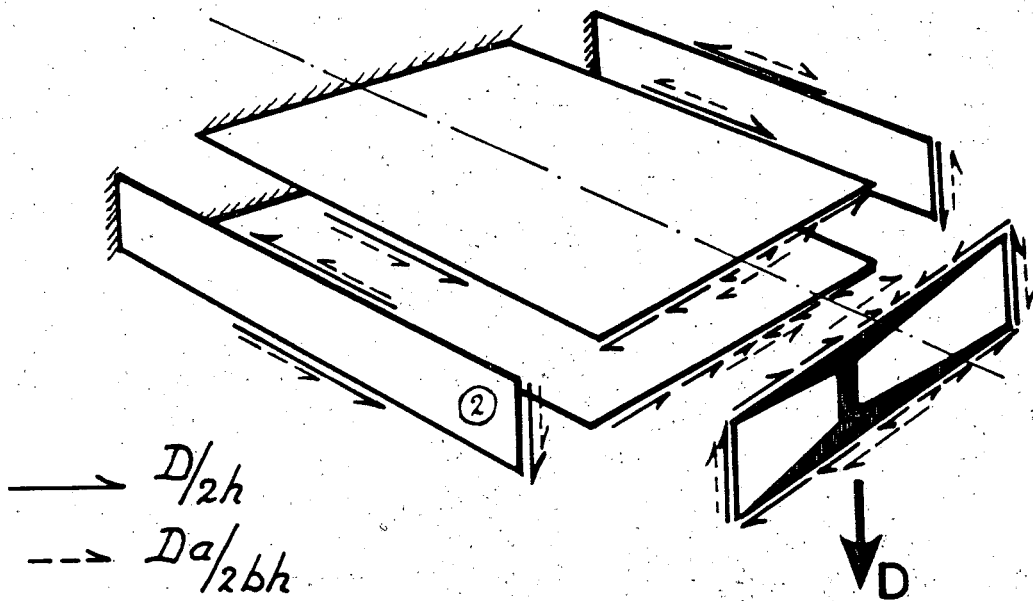
#### 7e. De koker onder gecombineerde belasting

Als de dwarskracht  $D$  op het eindschot van de koker aangrijpt op een willekeurige afstand  $a$  van het symmetrie-vlak dan wordt de koker dus gebogen en getordeerd. Vervormingen en spanningen kunnen dan worden bepaald door superpositie van de vervormingen en spanningen behorend bij de in het voorgaande twee belastings-situaties. Uiteraard mag dit alleen zolang de vervormingen klein zijn en het elastisch gedrag van de materialen lineair is.

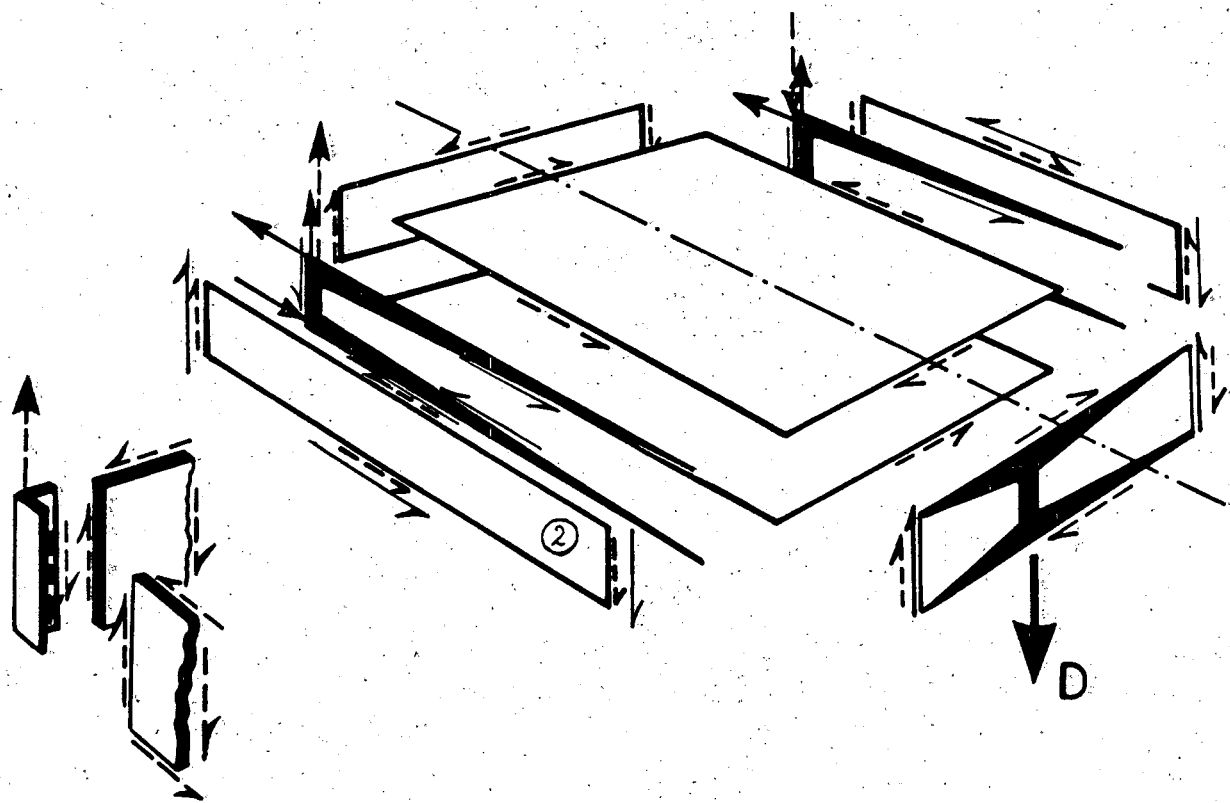
Figuur 7.19 geeft de superpositie bij de koker met boven- en onderplaat zonder gordingen, Figuur 7.20 geeft de situatie bij de koker met gordingen en gesloten achterkant.

In de Figuren 7.19 en 7.20 geven de getrokken pijlen de schuifstromen en krachten behorend bij de belastingssituatie buiging door de dwarskracht, de gestreepte pijlen horen bij de torsie. Het blijkt dat in beide gevallen zijplaat 2 wordt afgeschoven door schuifstromen die hetzelfde teken hebben. Bij de berekening van de dikte van zijplaat 2 moet daar uiteraard terdege rekening mee worden gehouden. Het tegenoverliggende plaatveld wordt juist belast door schuifstromen met tegengesteld teken, deze plaat zal dus dunner kunnen zijn.

Juist bij het beschouwen van de gecombineerde belastingen blijkt het grote belang van de aanwezigheid van voldoende  $\pm 45^\circ$  lagen.

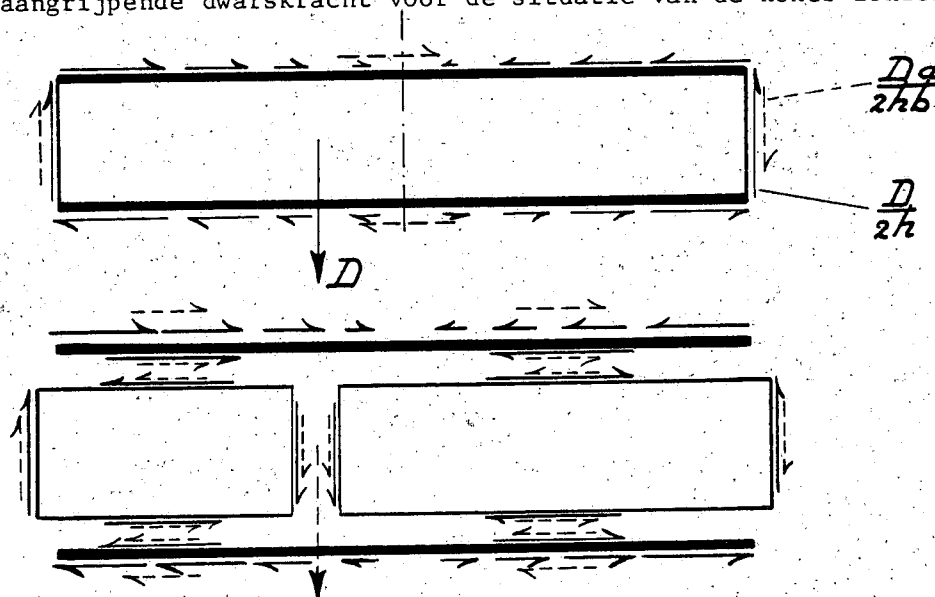


Figuur 7.19.



Figuur 7.20.

In Figuur 7.21 is een analyse gegeven van het eindschot van de koker met de niet in het midden aangrijpende dwarskracht voor de situatie van de koker zonder gordingen.



Figuur 7.21.

De in Figuur 7.21 getekende, niet evengrote plaatvelden zijn in evenwicht. De af- en toenemende schuifstromen op de gordingen, veroorzaakt door de 'buigfunctie' van de boven- en onderplaat, zijn ook in evenwicht. De rest van de schuifstromen op de gordingen is in evenwicht volgens:

$$\left(\frac{D}{2h}\right) \left(\frac{b}{2} - a\right) - \left(\frac{D}{2h}\right) \left(\frac{b}{2} + a\right) + 2\left(\frac{D}{2h} \frac{a}{b}\right) b = 0$$

#### 7f. Gordingen en verstijvers; stabiliteit

In de vorige paragrafen is beschreven dat op verschillende plaatsen in de koker gordingen en verstijvers aanwezig moeten zijn. In eerste instantie wordt hiervoor meestal gedacht aan profielen die op de plaatvelden zijn gelijmd of geklonken zoals dat bij metalen constructies gebeurt. Bij lijmverbindingen kan de gelaagheid van composieten een negatieve rol spelen met betrekking tot de sterkte van de verbinding (o.a. losscheuren van de buitenste laag). Een goede optie bij composieten is echter het 'wegwerken' van verstijvers en gordingen in de laminaten van de plaatvelden zodat de platen en de verstijvers en gordingen worden geïntegreerd. Gebeurt het wegwerken laagsgewijs tussen de lamellen van de laminaten dan wordt het aantal contactvlakken tussen platen en verstijvers c.q. gordingen verveelvoudigd. Ter plaatse zijn feitelijk laminaten van de  $[0^\circ/\pm 45^\circ]$ -

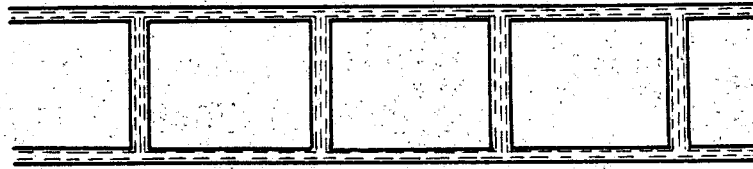
familie aanwezig.

Voor het opklinken van verstijvers en gordingen moet worden gewaarschuwd. Immers, deze elementen zullen in verband met hun functie vaak unidirectioneel worden uitgevoerd. De voor de klinknagels geboorde gaten zullen desastreuze gevolgen hebben voor de sterkte van de betreffende elementen, tussen de gaten zullen de stroken materiaal in vezelrichting gemakkelijk kunnen uitschuiven zoals reeds in het vorige hoofdstuk is beschreven. Bij geïntegreerde verstijvers en gordingen heeft het laminaat ter plaatse redelijk goede vlaktedrukeigenschappen. Gaten die nodig zijn, bijvoorbeeld voor het inleiden van krachten, zullen dan minder invloed hebben door de steunende werking van de  $\pm 45^\circ$  lagen op de unidirectionele lagen van de verstijvers of gordingen.

De tot nu toe gehanteerde figuren om kokerconstructies te analyseren suggereren een vrij kleine lengte t.o.v. de breedte van de koker. Realistische constructies hebben meestal een veel grotere lengte-breedte verhouding en bij de dimensionering ervan gaat de stabiliteit van de plaatdelen een essentiële rol spelen. Zo zal zijplaat 2 onder invloed van de schuifstromen kunnen gaan plooiën en de onderplaat zal onder invloed van de drukkrachten uitknikken.

Een belangrijk wapen om de knik- of plooilast te verhogen is het 'verkleinen' van de plaatvelden door het aanbrengen van verstijvers. Deze geven door hun ruimtelijke vormgeving (profielen) plaatselijk een aanzienlijke verstijving waardoor de plaatvelden niet alleen aan hun randen maar ook in de velden zelf op meerdere plaatsen worden gesteund. De plaatselijke verstijving vormt als het ware een barrière tegen het ontstaan van plooiën.

Uiteraard geeft de bevestiging van de verstijvers de reeds genoemde problemen. Verstijvers ter verbetering van de kniklast kunnen niet integraal in de laminaaten worden ingebouwd omdat zij hun functie immers ontleen aan de ruimtelijke vormgeving. Een aantrekkelijk alternatief is dan ook gegeven in Figuur 7.22, waarop overigens vele varianten mogelijk zijn.



Figuur 7.22.

Figuur 7.22 stelt een cellulair paneel als onderplaat (dus niet als hele koker!) voor. Het laminaat is ruimtelijk uit elkaar gehaald en de verstijvende werking door de ruimtelijke vormgeving is in het laminaat ingebouwd. De celafmetingen in relatie tot de materiaal eigenschappen kunnen zo worden geoptimaliseerd dat lokale knik en algemene instabiliteit tegelijk optreden.

Figuur 7.22 geeft een tussenvorm tussen verstijfde plaatconstructie en de echte sandwichconstructie zoals getekend in Figuur 7.23.



Figuur 7.23.

De platen van de sandwich moeten sterk en stijf zijn in richtingen in hun vlak. Voor de kern geldt dat niet, deze moet juist stijf zijn in een richting loodrecht daarop om de platen op afstand van elkaar te houden en om te garanderen dat deze vlak blijven ter voorkoming van lokale knik. Een essentiële eis is verder dat de kern afschuifstijf is zodat de sandwich dwarskrachten kan opnemen (dit laatste is te vergelijken met de functie van  $\pm 45^\circ$ -zijplaten van de koker).

De werking van de sandwich berust in feite op de vergroting van EI uit formule (7.8) waardoor de buigstijfheid (maar ook de weerstand tegen uitknikken) aanzienlijk verhoogt in vergelijking met een even zware constructie zonder kern en op elkaar gelijmde platen. Het inleiden van belastingen in sandwiches kan problemen geven omdat de krachten niet in één, maar in twee gelijkwaardige platen

moeten worden ingeleid. Hiervoor zijn dan ook meestal zeer bijzondere constructies nodig.

Een nadeel van sandwiches uit composietmateriaal is hun gevoeligheid voor stootbelastingen. Sandwiches zijn bedoeld om de stabiliteit van de constructie te vergroten, zij verkleinen echter tevens de mogelijkheid om plaatselijk 'mee te geven' bij een stootbelasting (anti-kreukel-zone werking). Voor metalen die een grote plastische rek hebben voordat breuk optreedt is dat geen probleem: een plaatselijke blijvende vervorming van zowel plaat als kern beïnvloedt de werking van de sandwich niet of nauwelijks. Composietmaterialen (zeker die met koolstofvezels) hebben echter een relatief kleine breukrek die bovendien voor het grootste deel elastisch is. Een plaatselijke stoot doet òf het materiaal bezwijken (witslaan), òf inveren en daarna terugveren. Dit laatste kan loslating van de kern tot gevolg hebben. Zeker onder invloed van wisselende belastingen kan het gebied van loslating zich uitbreiden waardoor op den duur de werking van de sandwich volledig verloren gaat. Een tweede nadeel van sandwiches van composietmateriaal is de gevoeligheid voor vocht. De platen zijn nooit helemaal waterdicht waardoor vocht zich kan ophopen in de kleine cellen van het kernmateriaal. Met name de eigenschappen van de lijm die is gebruikt voor de verbinding tussen kern en platen worden hierdoor sterk beïnvloed waardoor uiteindelijk eveneens loslating kan optreden.



## HOOFDSTUK 8

### HET WIKKELEN VAN DRUKVATEN

In dit hoofdstuk wordt het ontwerp van gewikkelde drukvaten behandeld volgens de 'netting-theorie'. Deze theorie veronderstelt dat de stijfheid en daarmee de draagkracht van het matrix-materiaal verwaarloosbaar klein is ten opzichte van de stijfheid van de vezels. De vezels kunnen volgens deze theorie dus geen belasting op elkaar overdragen via afschuiving in de hars. Het systeem van draden in een gewikkelde constructie moet dan ook worden opgevat als één lange, ononderbroken draad met een overal even grote trekbelasting.

Er wordt bij het ontwerpen van drukvaten aangenomen dat tijdens het productieproces de vezels geen wrijving ondervinden van het onderliggende oppervlak; omdat zij bovendien geen buigstijfheid hebben zullen zij tussen twee punten op het oppervlak de kortste weg zoeken. Geometrisch houdt dat in dat de vezels in een gewikkeld lichaam liggen langs geodetische lijnen.

Het probleem van het ontwerp van een drukvat wordt nu teruggebracht tot de vraag welke vorm de meridiaan van het drukvat moet hebben opdat het systeem van draden met overal dezelfde trekbelasting en liggend volgens geodetische lijnen, kan voldoen aan het evenwicht onder hydrostatische druk.

#### 8a. De ligging van de vezels

Op een omwentelingsoppervlak zullen voorgestreekte vezels gaan liggen volgens een geodetische lijn

$$y \sin \alpha = \text{constant} \quad (8.1)$$

waarin  $\alpha$  de hoek is tussen een vezel en de meridiaan in een bepaald punt en  $y$  de afstand van dat punt tot de omwentelingsas. Bij de poolopeningen van een drukvat 'keren de vezels tijdens het wikkelen om' zodat daar  $\alpha = \pi/2$ . Is de straal van de poolopening  $y_0$  dan wordt (8.1) dus

$$y_0/y = \sin \alpha \quad (8.2)$$

Een drukvat is een dunwandige constructie zodat de invloed van het 'aangroeien' van de wanddikte tijdens het wikkelp proces op formule (8.2) buiten beschouwing

wordt gelaten. In een bepaald punt van het drukvat hebben dus alle vezels dezelfde wikkelhoek  $\alpha$  resp.  $-\alpha$ .

8b. De vorm van de meridiaan

Een noodzakelijke veronderstelling bij het gebruik van de netting-theorie is dat het drukvat een membraan is. Dit betekent:

- er zijn geen dwarskrachten op de wand
- er zijn geen momenten met vector in het vlak van de wand
- spanningen zijn gelijkmatig over de dikte van de wand verdeeld.

Uit Figuur 8.1 kan worden afgeleid dat voor de component van de vezelkracht  $F$  in X-richting op een willekeurige snede van het drukvat loodrecht op de X-as geldt

$$F_x = F \cos \alpha \cos \varphi$$

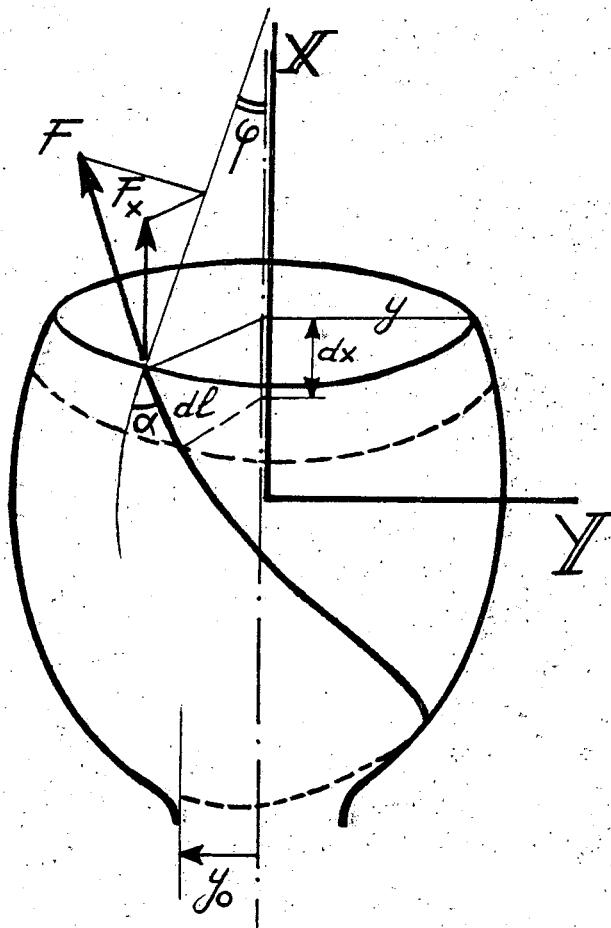
Alle  $n$  vezels samen geven dan de kracht die de vezels in de X-richting leveren,

$$nF \cos \alpha \cos \varphi.$$

Deze kracht moet in evenwicht zijn met de druk op het 'weggesneden' deel van het drukvat, zodat moet gelden

$$nF \cos \alpha \cos \varphi = \pi y^2 p \quad (8.3)$$

waarin  $\cos \alpha = (1 - y_0^2/y^2)^{\frac{1}{2}}$



Figuur 8.1.

en  $\cos \varphi = \left[ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}}$

Evenwichtsvergelijking (8.3) kan dan ook worden geschreven als

$$\frac{nF}{\pi p} (1 - y_0^2/y^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = y^2$$

of, in dimensieloze grootheden

$$X = x/y_0$$

$$Y = y/y_0$$

$$a = nF/\pi p y_0^2$$

$$a(1-1/Y^2)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \left( \frac{dY}{dX} \right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} = Y^2 \quad (8.4)$$

Uit (8.4) volgt

$$\frac{dX}{dY} = \pm \frac{Y^3}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} \quad (8.5)$$

ofwel 
$$X = \pm \int \frac{Y^3 dY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} + K \quad (8.6)$$

waarin  $K = 0$  als het centrum van het assenstelsel op de rotatie-as t.p.v. de maximale straal  $Y_u$  wordt gelegd. Het + of - teken kan worden weggelaten als slechts één helft van het axiaalsymmetrische drukvat wordt beschouwd. De vorm die door (8.6) wordt beschreven is een isotensoïde.

(8.6) wordt nu als volgt gebruikt:

$$X = - \int_{Y_u}^{Y(X)} \frac{Y^3 dY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} \quad (8.7)$$

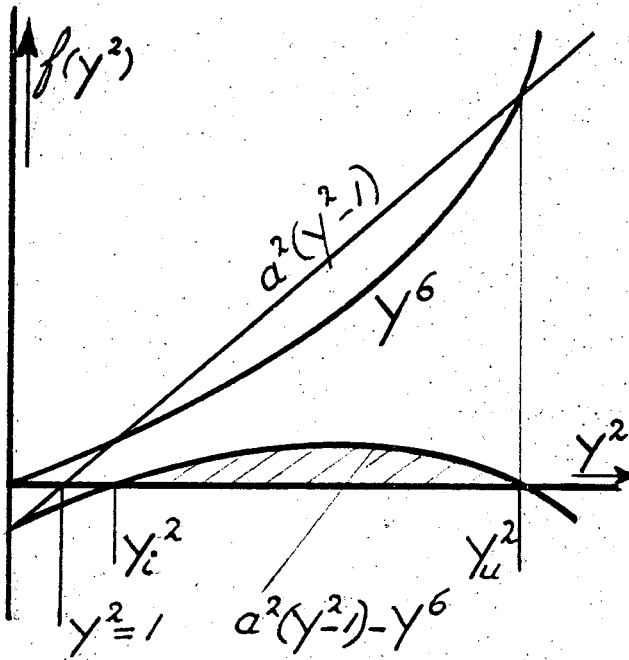
X kan als functie van Y slechts met numerieke methoden worden opgelost. Toch kunnen uit (8.7) reeds interessante conclusies over de vorm van de meridiaan van een optimaal drukvat worden getrokken. De meest interessante daarvan is wellicht dat de vorm het resultaat van het ontwerpproces is en niet een uitgangspunt.

### 8c. Karakteristieken van het drukvat

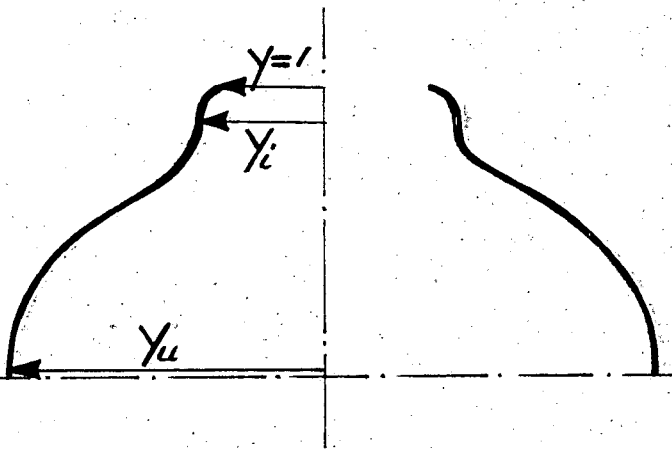
In de noemer van (8.7) moet

$$a^2(Y^2-1) - Y^6 > 0 \quad (8.8)$$

Het is meteen in te zien dat  $y = y_0$ , dus  $Y = 1$  niet aan deze voorwaarde voldoet. Dit verklaart waarom (8.3) voor  $y = y_0$  en dus  $\alpha = \pi/2$  tot een tegenstrijdigheid leidt. In de buurt van de poolopeningen zijn er kennelijk gebieden waar de belasting door inwendige overdruk niet geheel door de vezels kan worden opgenomen. Er zijn echter grenzen te bepalen waarbinnen dit wel kan.



Figuur 8.2.



Figuur 8.3.

Uit Figuur 8.2 blijkt dat voor reële waarden van  $Y$  tussen  $Y_i$  en  $Y_u$  aan voorwaarde (8.8) wordt voldaan:

In  $Y_i$  en  $Y_u$  is

$$\frac{dY}{dX} = \text{tg } \varphi = 0$$

Zodat de vorm van het optimale drukvat moet zijn als in Figuur 8.3 is weergegeven.

Hierin moet dus worden onderscheiden:

1.  $Y = 1$ , de straal van de pool- of omkeeropening,
2.  $Y = Y_i$ , de kleinste straal waar de volgens geodetische lijnen gewikkelde vezels de belasting door inwendige overdruk nog volledig kunnen opnemen,
3.  $Y = Y_u$ , de grootste straal van het drukvat.

De meridiaan heeft tussen  $Y_i$  en  $Y_u$  een buigpunt waar

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 0$$

Met (8.5) in de vorm

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 = \frac{a^2(y^2-1) - Y^6}{Y^6}$$

wordt voor het buigpunt

$$2 \frac{dY}{dX} \frac{d^2Y}{dX^2} = 0 = \frac{a^2(-4Y^2+6)}{Y^7} \frac{dY}{dX}$$

ofwel  $Y^2 = \frac{3}{2}$

Voor de wikkelhoek geldt in het buigpunt

$$\sin \alpha_b = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8.9}$$

waarmee  $\alpha_b = 54,7^\circ$ . (8.10)

Van alle meridianen die door (8.7) worden beschreven ligt het buigpunt onveranderlijk bij  $Y = (3/2)^{\frac{1}{2}}$  en is de wikkelhoek t.p.v. het buigpunt onveranderlijk  $54,7^\circ$ .

8d. De vormparameter q

De vergelijking

$$a^2(Y^2-1) - Y^6 = 0 \tag{8.11}$$

is een derdegraadsvergelijking in  $Y^2$  waarvan  $Y_1^2$  en  $Y_u^2$  wortels zijn. Omdat de coëfficiënt van  $Y^4$  in (8.11) nul is kan de derde wortel  $Y_3^2$  eenvoudig worden gevonden met

$$Y_1^2 + Y_u^2 + Y_3^2 = 0.$$

Deze derde wortel is overigens niet interessant: hij geeft aanleiding tot imaginaire waarden van  $Y_3$ .

Ingevoerd wordt nu de vormparameter

$$q = Y_u^2/Y_1^2 \tag{8.12}$$

Voor de wortels  $Y_1^2$  en  $Y_u^2 = q Y_1^2$  wordt (8.11)

$$a^2(Y_i^2-1) - Y_i^6 = 0 \quad (8.13)$$

$$\text{resp. } a^2(qY_i^2-1) - q^3Y_i^6 = 0 \quad (8.14)$$

Elimineren van  $a^2$  geeft

$$Y_i^2 = \frac{q^2 + q + 1}{q(q+1)} \quad (8.15)$$

Met (8.12) wordt dan

$$Y_u^2 = \frac{q^2 + q + 1}{q + 1} \quad (8.16)$$

De vorm van het optimale drukvat wordt door slechts één grootte bepaald, namelijk de verhouding van de grootste en de kleinste diameter van het optimale gedeelte.

$$\text{Voor } q = 1 \text{ wordt } Y_i = Y_u = (3/2)^{\frac{1}{2}} \quad (8.17)$$

$q = 1$  geeft een cilinder met straal  $(3/2)^{\frac{1}{2}}$  en wikkelhoek  $\alpha = 54,7^\circ$ . Dit is dezelfde straal resp. wikkelhoek als die voor het buigpunt van een meridiaan voor willekeurige  $q$ .

Omdat een volgens geodetische lijnen gewikkelde cilinder voor  $Y < Y_i$  de belasting niet meer geheel kan opnemen zal van een cilinder met eindschotten alleen het cilindrische gedeelte optimaal kunnen worden gewikkeld en moeten de eindschotten worden versterkt. Een oneindig lange cilinder is een limietgeval van het in Figuur 8.3 geschetste type van drukvaten.

$$\text{Met } \sin \alpha = 1/Y \quad (8.18)$$

worden voor de wikkelhoeken t.p.v.  $Y_i$  en  $Y_u$  gevonden:

$$\sin \alpha_i = \left\{ \frac{q(q+1)}{q^2 + q + 1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8.19)$$

$$\text{resp. } \sin \alpha_u = \left\{ \frac{q + 1}{q^2 + q + 1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (8.20)$$

Uit (8.20) volgt dat voor een drukvat met  $q > 1$  de wikkelhoek t.p.v.  $Y_u$  altijd kleiner is dan  $54,7^\circ$ . Wordt t.p.v.  $Y_u$  tussen twee isotensoiden een cilindrisch tussenstuk gewikkeld dan heeft dit tussenstuk een wikkelhoek  $< 54,7^\circ$  en het moet

dan ook in omtreksrichting versterkt worden met extra vezels. Worden op dit cilindrisch tussenstuk alle vezels evenveel belast dan zullen overal de rekken gelijk zijn en treden er geen discontinuïteiten op tussen cilindrisch tussenstuk en eindschotten. De formule die het optimaal aantal vezels in omtreksrichting geeft is

$$n_h/n_u = (2q^2 - q - 1) / \{q(q^2 + q + 1)^{\frac{1}{2}}\} \quad (8.21)$$

waarin  $n_h$  het aantal vezels op het cilindrisch gedeelte in omtreksrichting is en  $n_u$  het aantal vezels dat onder hoek  $\alpha_u$  de overgang tussen eindschot en cilindrisch gedeelte kruist, beide per lengte-eenheid.

Voor  $q \gg 1$  wordt het niet-optimale gedeelte tussen  $Y = 1$  en  $Y = Y_i$  zeer klein. Zo is voor  $q = 5$  de straal  $Y_i$  reeds dicht tot 1 genaderd. In de praktijk is het wel degelijk mogelijk geheel optimale drukvaten te wikkelen door  $q$  groot te kiezen. De altijd aanwezige versterkingen rond de poolopeningen (afsluitingen en aansluitingen) kunnen dan zo klein mogelijk worden gehouden.

#### 8e. Enkele grootheden van het optimale drukvat

##### Het gewicht per volume-eenheid

Uit Figuur 8.1 wordt gevonden

$$dl \cos \alpha \cos \varphi = dx$$

waarin volgens (8.3)

$$\cos \alpha \cos \varphi = \frac{\pi y^2 p}{nF}$$

zodat 
$$\frac{dl}{dx} = \frac{nF}{\pi p} \frac{1}{y^2}$$

of, in dimensieloze grootheden

$$\frac{dL}{dX} = \frac{a}{y^2}$$

Met  $\frac{dL}{dY} = \frac{dL}{dX} \frac{dX}{dY}$  en uitdrukking (8.5) wordt nu

$$\frac{dL}{dY} = \frac{a}{y^2} \frac{dX}{dY} = \frac{-aY}{\{a^2(Y^2 - 1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}}$$

De lengte van een vezel tussen  $Y_u$  en  $Y_i$  is dan

$$L = a \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{-Y dY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} \quad (8.22)$$

Als  $C$  het gewicht per lengte-eenheid is van de geïmpregneerde vezel dan is het gewicht van het optimale gedeelte van het drukvat

$$w = 2nCl = 2nCly_o = -2Cn a y_o \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{Y dY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} \quad (8.23)$$

Het volume van het optimale gedeelte is

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{X(Y_i)} Y^2 dX = 2\pi \int_{Y_u}^{Y_i} Y^2 \frac{dX}{dY} dY \\ &= -2\pi \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{Y^5 dY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} \\ &= -2\pi \int_{Y_u}^{Y_i} \left[ \frac{\frac{1}{6} (6Y^5 - 2a^2Y)}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{3} a^2Y}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} \right] dY \\ &= \frac{2\pi}{3} \{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}} \Big|_{Y_u}^{Y_i} - \frac{2a^2\pi}{3} \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{Y dY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

waarin de eerste term nul is zodat het volume van het optimale gedeelte

$$v = V y_o^3 = \frac{-2a^2\pi y_o^3}{3} \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{Y dY}{\{a^2(Y^2-1) - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} \quad (8.24)$$

dezelfde integraal bevat als formule (8.23) voor het gewicht.

Het gewicht per volume-eenheid wordt dan ook

$$\frac{w}{v} = C \frac{3p}{F} \quad (8.25)$$

Omdat  $C$  het gewicht per lengte-eenheid van de geïmpregneerde vezels is is

$$\frac{F}{C} = \frac{\sigma}{\gamma}$$

en wordt (8.25)

$$\frac{w}{v} = 3p \frac{\gamma}{\sigma} \quad (8.26)$$



Bij een optimaal gewikkeld drukvat is het gewicht per volume-eenheid van het optimale gedeelte onafhankelijk van de vorm, dus van  $q$ , en wordt uitsluitend bepaald door de inwendige overdruk en de toegelaten specifieke spanning  $\sigma/\gamma$  in de geïmpregneerde vezels. Deze specifieke spanning kan de specifieke breukspanning zijn (de inwendige overdruk is dan de barstdruk) of bijvoorbeeld de specifieke spanning waarbij uitsluitend de hars bezwijkt (de inwendige overdruk is dan de zweetdruk). Bij zeer brosse vezels treedt breuk in de vezels op bij een lagere rek dan de breukrek van de hars en is  $\sigma/\gamma$  dus de specifieke breuksterkte van de geïmpregneerde vezels; zweetdruk en barstdruk vallen dan samen.

#### De relatie aantal vezels - inwendige overdruk

Voor het afleiden van de relatie tussen het aantal vezels  $n$  en de inwendige overdruk  $p$  kan (8.4) als uitgangspunt worden genomen.  $n$  is het aantal vezels dat iedere doorsnede loodrecht op de rotatie-as snijdt, dus ook de doorsnede t.o.v. de grootste straal  $Y_u$ . Voor  $Y_u$  is

$$a = \frac{nF}{\pi p y_0^2} = \frac{Y_u^3}{(Y_u^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$$

of, met uitdrukking (8.16) voor  $Y_u$

$$\frac{nF}{\pi p y_0^2} = \frac{(q^2 + q + 1)^{3/2}}{q(q+1)} \quad (8.27)$$

$nF$  is de totale kracht in alle  $n$  vezels; deze vezels worden echter in de vorm van bundels gewikkeld (rovings, tows). Het is dan ook eenvoudiger voor  $n$  het aantal bundels te nemen en voor  $F$  de trekkracht in de bundels vezels; de toelaatbare trekkracht  $F$  (bij vezelbreuk of harsbreuk) is immers relatief eenvoudig te meten met behulp van unidirectionele proefstaven waarin het aantal bundels bekend is.

Is voor een drukvat de maximale overdruk voorgeschreven en zijn  $q$  en  $y_0$  gekozen dan geeft (8.27) dus het aantal bundels  $n$  (met toelaatbare trekkracht  $F$ ) dat nodig is om de inwendige overdruk te weerstaan.

#### 8f. Wikkelen volgens de 'continuümtheorie'

De 'netting-theorie' is goed toepasbaar als de vezels zeer stijf zijn in vergelijking met de hars. Voor het bepalen van de optimale vorm voor een zo hoog mogelijke zweetdruk is de theorie echter niet geschikt. Zijn de vezels bovendien relatief slap dan zullen de eigenschappen van de hars mede de optimale vorm van

het drukvat bepalen. In dat geval zal voor het ontwerpen van een optimaal drukvat gebruik moeten worden gemaakt van de 'continuümtheorie' die een composiet als een continuüm beschouwd waarvan de eigenschappen door vezels en hars samen worden bepaald.

In het drukvat mogen de vezels nu niet worden beschouwd als losliggende draden en kan dus niet als uitgangspunt een overal gelijke vezelkracht worden genomen. Er moet nu als ontwerpvoorwaarde worden gesteld dat de vezels overal gelijk belast moeten worden en dat kan alleen worden bereikt als het drukvat zo is ontworpen dat onder inwendige overdruk overal in alle richtingen de rekken gelijk zijn. Pas dan is met zekerheid te zeggen dat ook de vezelkracht overal gelijk is.

Voor een drukvat met vezels langs geodetische lijnen kan de vorm nu worden afgeleid uit de eis van overal gelijke rekken en de evenwichtsvoorwaarde van een oppervlakte-element onder inwendige overdruk.

De formules volgend uit de continuümtheorie zullen hier niet worden afgeleid. Zij worden zonder verder toelichting hier gegeven.

De vorm van de meridiaan wordt gegeven door

$$X = \pm \int_{Y_u}^{Y_i} \frac{Y^3 dY}{C_2 \{C(Y^2 - C_1)^2 - Y^6\}^{\frac{1}{2}}} \quad (8.28)$$

$$q = \frac{Y_u^2}{Y_i^2}$$

$$Y_i^2 = C_1 (q^{3/C_2 - 1}) / (q^{3/C_2 - q}) \quad (8.29)$$

$$Y_u^2 = q C_1 (q^{3/C_2 - 1}) / (q^{3/C_2 - q}) \quad (8.30)$$

$$C = C_1^{C_1 + 1} (q^{3/C_2 - 1})^3 / \{ (q - 1)^{C_2} (q^{3/C_2 - q})^{C_1 + 1} \} \quad (8.31)$$

$$C_1 = (1 - \nu_{\beta\alpha} / \nu_{\alpha\beta}) / (1 + \nu_{\beta\alpha}) \quad (8.32)$$

$$C_2 = 2 - C_1 \quad (8.33)$$

$\nu_{\beta\alpha}$  resp.  $\nu_{\alpha\beta}$  is de dwarscontractie-coëfficiënt van de toegepaste geïmpregneerde bundel vezels.

De gewichts-volumeverhouding wordt gegeven door

$$\frac{w}{v} = 3p C_3 \gamma / \sigma \quad (8.34)$$

waarin

$$C_3 = (1 - \nu_{\beta\alpha} \nu_{\alpha\beta}) / (1 + 2\nu_{\beta\alpha} + \nu_{\beta\alpha} / \nu_{\alpha\beta})$$

en  $\sigma/\gamma$  de specifieke spanning waarbij harsbreuk optreedt.

Het totaal aantal bundels vezels  $n$  met toegestane bundelkracht  $F$  in iedere doorsnede loodrecht op de rotatie-as kan worden uitgerekend met

$$\frac{nF}{\pi p y_0^2} = \frac{Y_u^3 C_2 C_3 (Y_u^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{Y_u^2 - C_1} \quad (8.35)$$

Voor een cilinder is  $q=1$  en is dus

$$Y_1^2 = Y_u^2 = 3C_1 / (C_1 + 1) \quad (8.36)$$

De hierbij behorende wikkelhoek wordt gevonden met

$$\sin \alpha_{cyl} = \{(C_1 + 1) / 3C_1\}^{\frac{1}{2}} \quad (8.37)$$

$\alpha_{cyl}$  zal volgens de continuümtheorie groter zijn dan de  $54,7^\circ$  van de nettingtheorie.

De vorm, wikkelhoeken, gewichts-volumeverhouding en alle andere eigenschappen van gewikkelde drukvaten volgens de continuümtheorie zijn blijkens bovenstaande formules mede afhankelijk van de materiaaleigenschappen van de toegepaste vezels, uitgedrukt in de materiaalconstanten  $C_1$ ,  $C_2$  en  $C_3$ . Voor de nettingtheorie zijn deze constanten 1 omdat de dwarskrachtcoëfficiënt  $\nu_{\beta\alpha}$  in die theorie nul is. Voor  $C_1 = C_2 = C_3 = 1$  zijn de netting-theorieformules dan ook eenvoudig terug te vinden uit die van de continuümtheorie.

8g. Enkele voorbeelden

In Figuur 8.4 is een aantal isotensoiden gegeven voor verschillende materialen en verschillende q-waarden. De in de berekeningen gebruikte materiaaleigenschappen zijn gegeven in Tabel 8.1.

	$\nu_{\alpha\beta}$	$\nu_{\beta\alpha}$
E-glas-epoxy	0,26	0,039
S-glas-epoxy	0,26	0,032
Aramid-epoxy	0,33	0,031
Carbon H.T.-epoxy	0,30	0,0184
Carbon H.M.-epoxy	0,30	0,0143

Tabel 8.1: Dwarscontractiecoëfficiënten van verschillende composietmaterialen (unidirectioneel).

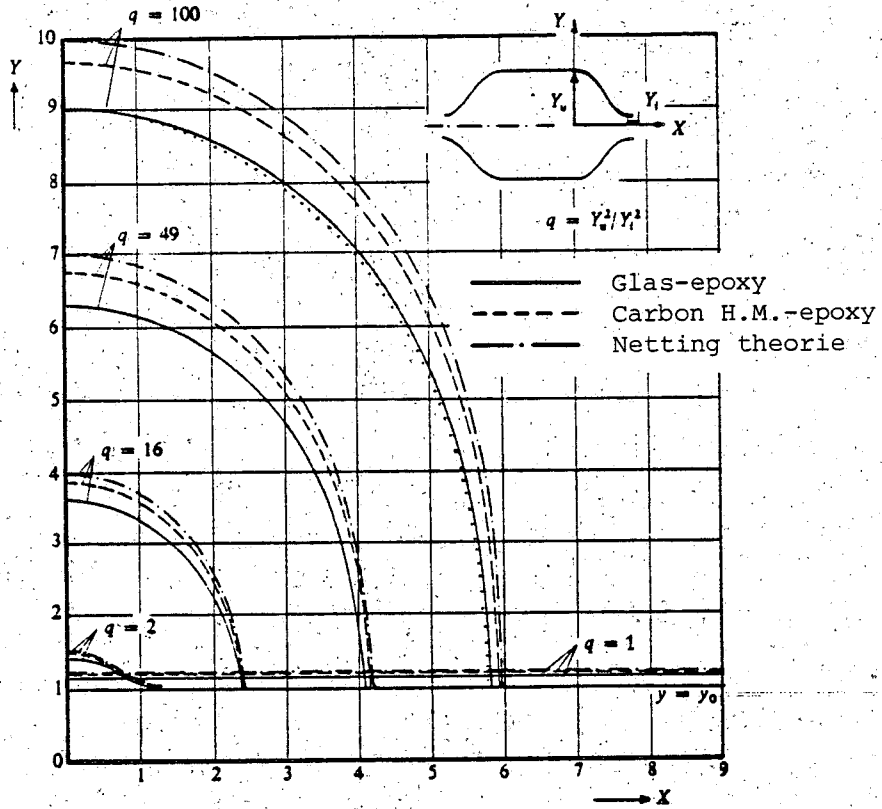
In Tabel 8.2 is de gewichts-volumeverhouding (w/v)/p gegeven waarbij voor de continuümtheorie een zweetspanning (weeping-stress)  $\sigma_w$  is aangenomen behorend bij 1% rek in de vezels. Voor de breukspanning in de netting-theorie is de breukspanning van de bundels bij  $v_f = 60\%$  gebruikt. In de meeste gevallen zal daar harsbreuk aan vooraf zijn gegaan. Voor de in het voorbeeld gebruikte carbon H.M. vezels is  $\sigma_w = \sigma_{br}$ . Voor een drukvat van die vezels is de zweetdruk dus tevens barstdruk en het ontwerp volgens de continuümtheorie is lichter dan dat volgens de netting-theorie omdat de hars 'meedraagt'.

E-glas	$\gamma$ $10^4 \text{N/m}^3$	<u>Continuüm-theorie</u>		<u>Netting-theorie</u>	
		$\sigma_w$ MN/m <sup>2</sup>	(w/v)/p m <sup>-1</sup>	$\sigma_{br}$ MN/m <sup>2</sup>	(w/v)/p m <sup>-1</sup>
E-glas-epoxy	2,05	432	$1,1475 \cdot 10^{-4}$	2070	$3,5969 \cdot 10^{-5}$
S-glas-epoxy	2,01	522	$9,6502 \cdot 10^{-5}$	2748	$2,1943 \cdot 10^{-5}$
Aramid-epoxy	1,35	750	$4,6234 \cdot 10^{-5}$	1620	$2,5000 \cdot 10^{-5}$
Carbon H.T.-epoxy	1,55	1440	$2,9243 \cdot 10^{-5}$	1870	$2,4866 \cdot 10^{-5}$
Carbon H.M.-epoxy	1,62	1800	$2,4978 \cdot 10^{-5}$	1800	$2,700 \cdot 10^{-5}$

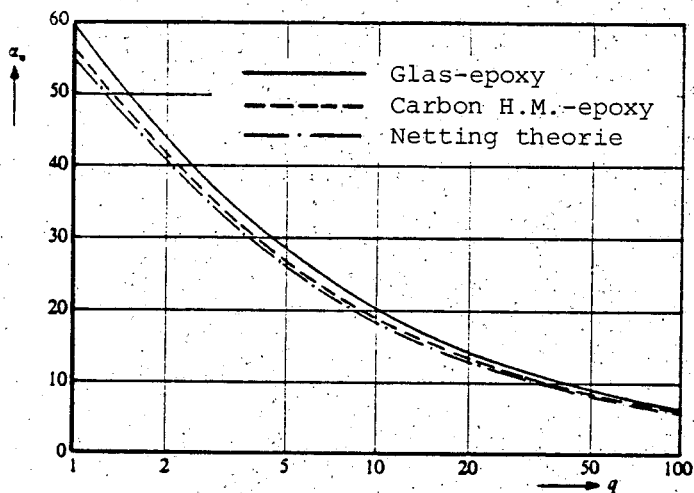
Tabel 8.2: De gewichts-volumeverhouding voor drukvaten uit verschillende materialen.

In Figuur 8.5 is de wikkelhoek  $\alpha_u$  t.p.v. de grootste straal  $Y_u$  gegeven als functie van  $q$ . Voor de verschillende materialen is bij  $q=1$  dus de wikkelhoek voor cilinders af te lezen.

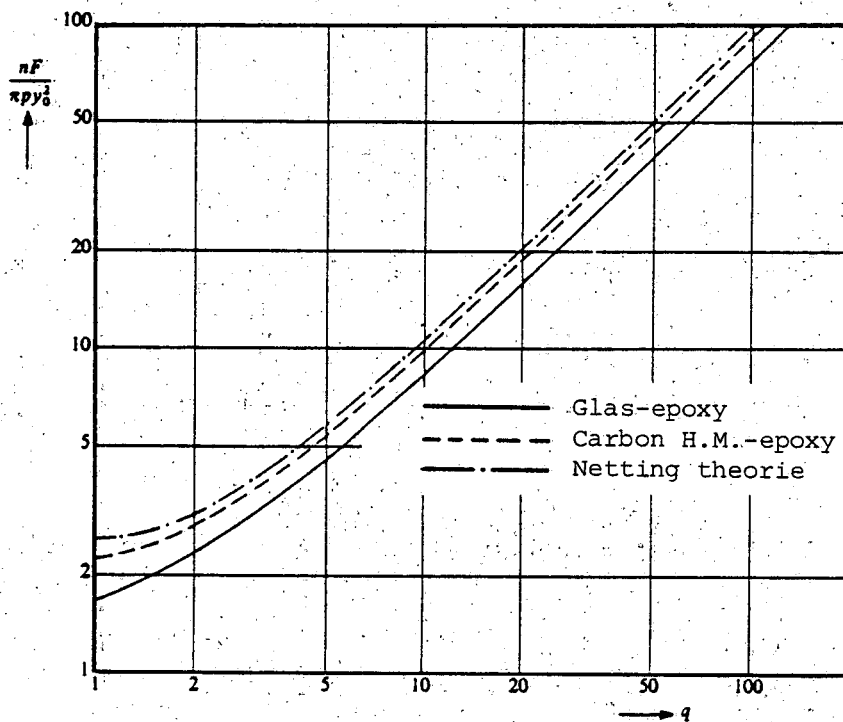
Figuur 8.6 geeft de relatie voor het aantal bundels vezels met toegestane trekkracht  $F$  in een willekeurige doorsnede loodrecht op de rotatie-as als functie van  $q$ .



Figuur 8.4. Isothermen voor een aantal  $q$ -waarden.



Figuur 8.5. De wikkelhoek t.p.v. de grootste straal als functie van  $q$ .



Figuur 8.6. Het aantal bundels vezels van gegeven sterkte  $F$  voor een bepaalde druk  $p$  als functie van  $q$ .

## LITERATUUR

De klassieke literatuur op het gebied van de elasticiteitsleer is zeer uitgebreid. Enkele titels zijn:

1. Love, A.E. 'A treatise on the mathematical theory of elasticity'. Diverse drukken.
2. Muskhelishvili, N.T. 'Some basic problems of the mathematical theory of elasticity', Noordhoff Groningen, 1953.
3. Sokolnikoff, I.S. 'Mathematical theory of elasticity', 2nd edition, McGraw-Hill, 1956.

Genoemde literatuur geeft ingang tot vele andere boeken door uitgebreide referentie-opgaven.

Inmiddels klassieke literatuur op het gebied van de elasticiteitstheorie van anisotrope materialen is:

4. Lekhnitskii, S.G. 'Anisotropic Plates', Gordon and Breach, 1968.
5. Lekhnitskii, S.G. 'Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body', San Fransisco, 1963.

Een boek dat veel toepassingen geeft van zowel de isotrope als anisotrope elasticiteitsleer is:

6. Savin, G.N. 'Stress Concentrations around Holes', Pergamon Press, 1961.

De titels 4, 5 en 6 behandelen anisotrope materialen als homogene materialen met anisotrope eigenschappen. De laminatentheorie is in de zestiger jaren ontwikkeld, te zamen met een groot aantal breukcriteria. Literatuur op het gebied van de laminatentheorie verschijnt nog regelmatig. Enkele titels:

7. Pister, K.S. and Dong, S.B. 'Elastic Bending of Layered Plates', J.Eng.Mech.Div. ASCE, 1959.

8. Reissner, E. and Stavsky, Y. 'Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous Anisotropic Elastic Plates, J.Appl.Mech., 1961.
9. Ashton, J.E., Halpin, J.C. and Petit, P.H. 'Primer on Composite Materials: Analysis', Technomic Publishing Company, 1969.
10. Tsai, S.W. 'Structural Behaviour of Composite Materials', NASA CR-71, 1964.
11. Azzi, V.D. and Tsai, S.W. 'Elastic moduli of laminated Anisotropic Composites', Exp.Mech., 1965.
12. Ashton, J.E. and Whitney, J.M. 'Theory of laminated Plates', Technomic, 1970.

Literatuur no. 10 behandelt tevens de elasticiteitseigenschappen van de afzonderlijke laag. Andere literatuur op dit gebied (micromechanica van de enkele laag).

13. Hashin, Z. and Rosen, B.W. 'The elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials', J.Appl.Mech., 1964.
14. Chamis, C.C. and Sendeckyj, G.P. 'Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of Fibrous Composites', J.Composite Materials, 1968.

Literatuur op het gebied van breukcriteria:

15. Hill, R. 'The mathematical theory of plasticity', Oxford University Press, London, 1950.
16. Tsai, S.W. 'Strength Theories of Filamentary Structures' in R.T. Schwartz and H.S. Schwartz (eds), 'Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites', Wiley Interscience, New York, 1968.
17. Tsai, S.W. and Wu, E.M. 'A general theory of strength of Anisotropic Materials', J.Composite Materials, 1971.



Een boek dat composieten zeer uitgebreid behandelt en een vrij complete bibliografie bevat is:

18. Jones, R.M. 'Mechanics of Composite Materials', Scripta Book Co., Washington DC.

Periodieken die volledig gewijd zijn aan composietmaterialen of periodieken waarin regelmatig artikelen over composietmaterialen verschijnen zijn:

19. Journal of Composite Materials.
20. Composites.
21. Kunststoffe.
22. Modern Plastics.
23. SAMPE Journal en SAMPE Quarterly, Proceedings van SAMPE congressen.
24. Journal of Applied Mechanics.
25. AIAA Journal.
26. ASTM Conference Proceedings zoals:
  - ASTM STP 460, 'Composite Materials: Testing and Design', 1969.
  - ASTM STP 521, 'Analysis of the Test Methods for High Modulus Fibers and Composites', 1973.



Rapport 431



60141070497