STABILITEIT VAN STORTSTEEN

M.B. de Groot R 1976/7/L

Vloeistofmechanica
Afd. Weg- en Waterbouwkunde
Technische Hogeschool Delft

18-A-32

STABILITEIT VAN STORTSTEEN

M.B. de Groot

R 1976/7/L

STABILITEIT VAN STORTSTEEN

Bundeling van enig speurwerk

M.B. de Groot 1975

INHOUD

1. Inleiding.

2. Het verband tussen stroming rond een individuele steen en stroming over een bodem.

   2.1 Vier gevallen. Uitgangspunten.
   2.2 Geval I. Stroombeeld in détail.
   2.3 Geval II. Stroombeeld in détail.
   2.4 Geval III en IV. Stroombeeld in détail
   2.5 Impulsiebalanzen voor de ruimte rond de individuele steen.
   2.6 Balans van de impulsie in x-richting in de vier gevallen.
   2.7 Balans van de impulsie in z-richting. Geval II en III.
   2.8 Gevallen met drukgradiënt $\frac{\partial p}{\partial x}$ in de hoofdstroom.

3. Berekeningsmethode stabiliteit individuele steen.

   3.1 Principe.
   3.2 Huidweerstand.
   3.3 Waarden van C_D in verder ongestoorde stroom. Huid- en vormweerstand.
   3.4 Weerstand door het vrije oppervlak.
   3.5 Invloed van het loslaten van wervels en van turbulentie.
   3.6 Experimenten van Einstein en El-Samni.
   3.7 Experimenten van Chepil.
   3.8 C_{LB} C_{DB} $\frac{\varepsilon}{\varsigma}$ φ en u_∞ bij breuksteen.

4. Grenslaagontwikkeling.

   4.1 Algemeen. Basisvergelijkingen.
   4.2 Snelheidsprofiel in de grenslaag.
   4.3 Het oplossen van de basisvergelijkingen.
   4.4 Het begin van de grenslaag.

5. Toepassing in verschillende situaties.

   5.1 Over de volle hoogte ontwikkelde grenslaag: White, Shields en M598-V.
   5.2 Lange overlaat: M 711-II.
   5.3 Overlaat met scherpe kruin: M711-III.

6. Enige ideeën over de stabiliteit van stortsteen in niet-permanente stroom.

   6.1 Algemeen.
   6.2 De waarde van C_{MB}.
   6.3 Grenslaagvorming bij golven over vlakke bodem: theorie van Bijker.
   6.4 Grenslaagvorming op een drempelconstructie.

7. Samenvatting en suggesties voor verder speurwerk.

   Literatuur.

   Definities en symbolen.

BIJLAGEN

B1. Vergelijking geval III en geval II wat betreft stroombeeld stroomopwaarts van de steen.

B2. De drukterm in de impulsiebalanzen.

B3. Invloed van de traagheid van de steen.

B4. Basisvergelijkingen grenslaag en hoofdstroom.

B5. Toepassing logaritmische snelheidsprofielen op resultaten M598-V en M711-II.

B6. Korrelverdeling gebroken natuursteen.

B7. Velocity defect law.

B8. Analyse van twee proeven van M711-II. Overzicht resultaten M711-II en M711-III.

B9. Snelheidsprofielen en schuifspanningsprofielen.

1. INLEIDING.

In de waterbouwkunde wordt veel gebruik gemaakt van stortsteen. Stortstenen construkties zijn opgebouwd uit brokken natuursteen of betonnen blokken die min of meer willekeurig op elkaar gestort zijn. Men denke aan bodemverdedigingen, oeververdedigingen, drempels voor caisson-afsluitingen, dammen voor geleidelijke afsluitingen, havendammen en golfbrekers.

De stabiliteitsberekeningen dragen een sterk empirisch karakter. Dat geldt in het bijzonder, in gevallen waarbij het gaat om het vinden van de golfhoogte waarbij de grens van stabiliteit wordt bereikt, zoals in de formules van Iribarren en Hudson.
Maar toch ook in gevallen van permanentie, waarbij het gaat om het vinden van de stroomsnelheid of het verhang waarbij de grens van stabiliteit wordt bereikt. In dit rapport wordt voornamelijk aan deze gevallen aandacht besteed.

Terwille van de deltawerken, zijn in het Waterloopkundig Laboratorium enige formules afgeleid. Zie literatuuropgave (1) (3) en (4).
Deze hebben steeds een beperkte geldigheid: de een (M598-V) is toepasbaar op een bodem die over lange afstand egaal is; de ander (M711-II) op een lange overlaat; de derde (M711-III) op een overlaat met scherpe kruin.

Hoewel in de praktijk goed bruikbaar, geven de gevonden formules weinig inzicht in het verband tussen de gevallen onderling. De formules zijn niet gebaseerd op beschouwingen over de relatie tussen detailstroming rond de steen en de hoofdstroom verder van de steen af. Er is met name geen rekening gehouden met de verschillen in grenslaagdikte, hoewel deze een grote rol spelen.

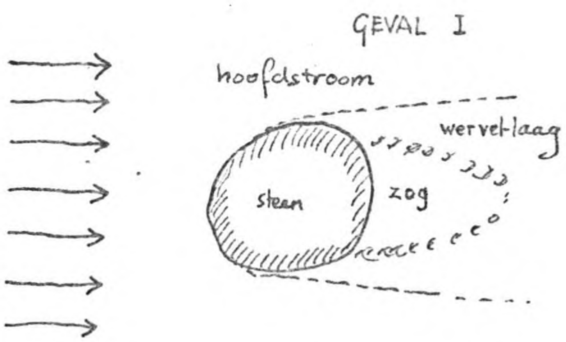
In de verdere literatuur is weinig te vinden over de situatie waar het hier om gaat: stroming over een pakket van enige tientallen stenen met een diameter van tenminste enige decimeters.

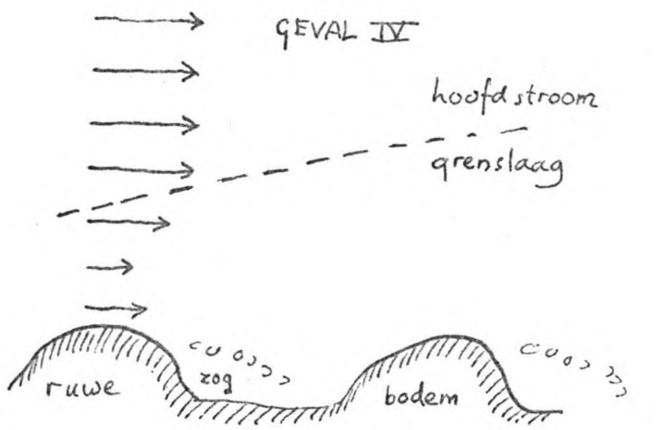
Enerzijds is wel veel bekend over de stroming met een over de volle hoogte ontwikkelde grenslaag over een bodem van vele, relatief kleine elementen (zand). Ondermeer de formules van White (5) en Shields (6). Hoewel deze formules, na omwerking, nog wel bruikbaar zijn in gevallen waarbij de grenslaag niet over de volle hoogte ontwikkeld is, geven ze geen enkel aanknopingspunt voor de berekening van de stabiliteit van stenen in situaties waarbij niet over een grenslaag gesproken kan worden. Dit hangt samen met het feit dat de krachten op individuele elementen (zandkorrels) allemaal tezamen genomen worden in een bodemschuifspanning. De detailstroming rond een individueel element komt niet aan de orde, zoda de kracht op de individuele elementen op een vrij willekeurige manier moet worden afgeleid uit de globale bodemschuifspanning.

Anderzijds zijn in de literatuur veel beschouwingen te vinden over de kracht die een oneindig uitgestrekte en verder ongestoorde stroom, uitoefent op een individueel element. Bijvoorbeeld de formule van Morison.

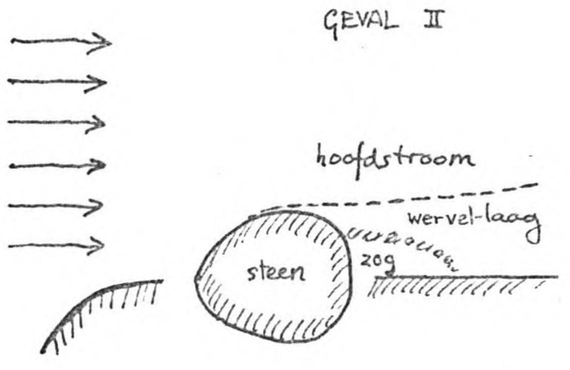
De resultaten zijn niet zondermeer toepasbaar wanneer het element maar voor een gedeelte omstroomd wordt. Maar bovendien komt hierbij zelden aan de orde wat het effect is van de uitwisseling van impulsie tussen water en elementen op het stromingspatroon stroomafwaarts van het element. Daardoor is het niet mogelijk de stabiliteit te berekenen van elementen die stroomafwaarts liggen van een eerste element. Daardoor geven deze resultaten ook geen inzicht in het verband met de andere formules.

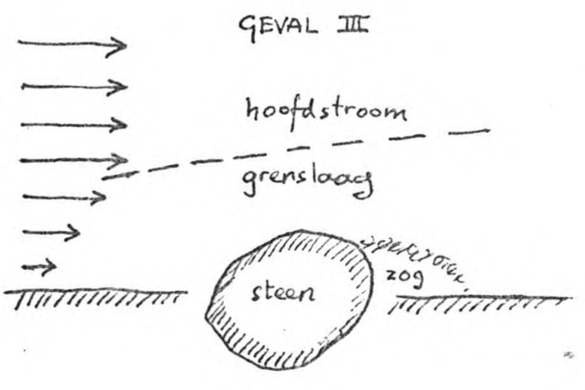
In dit rapport zal in eerste instantie (Hfdst 2) juist aandacht worden besteed aan dit verband. Daartoe zullen vier gevallen bestudeerd worden. Als ene uiterste het geval van een individuele steen in een verder ongestoorde stroom, als andere uiterste de stroming met goed ontwikkelde grenslaag over een ruwe bodem.





Waar het hier om gaat zijn juist de twee overgangsgevallen: De stroming rond een individuele steen waarbij stroomopwaarts van de steen nog geen noemenswaardige grenslaag boven de bodem aanwezig is en het geval waarbij die wel aanwezig is.





Voor deze gevallen wordt in hoofdstuk 3 een formule afgeleid die aangeeft wanneer de grens van stabiliteit wordt bereikt.

Deze formule is zowel bruikbaar in de grenslaag, als daar waar nog niet over een grenslaag gesproken kan worden. Als er een grenslaag is, moet wel het snelheidsprofiel en de grenslaag dikte bekend zijn. Dit wordt behandeld in hoofdstuk 4.

In hoofdstuk 5 worden de resultaten toegepast op de situaties die bestudeerd zijn door Shields, White en het Waterloopkundig Laboratorium.

In hoofdstuk 6 volgen enige ideeën over de mogelijkheden om voorgaande berekeningsmethoden toe te passen in gevallen met niet-permanente stroom.

Tenslotte bevat hoofdstuk 7 de samenvatting en enige suggesties voor verder speurwerk.

2. HET VERBAND TUSSEN STROMING ROND EEN INDIVIDUELE STEEN EN STROMING OVER EEN BODEM.

2.1 Vier gevallen. Uitgangspunten.

Zoals reeds vermeld in de inleiding, zullen de volgende vier gevallen bestudeerd worden:

I. Een individuele steen in een verder ongestoorde stroom.

II Een individuele steen op een verder vlakke poreuse bodem (stortstenen bed) in een overigens ongestoorde stroom.

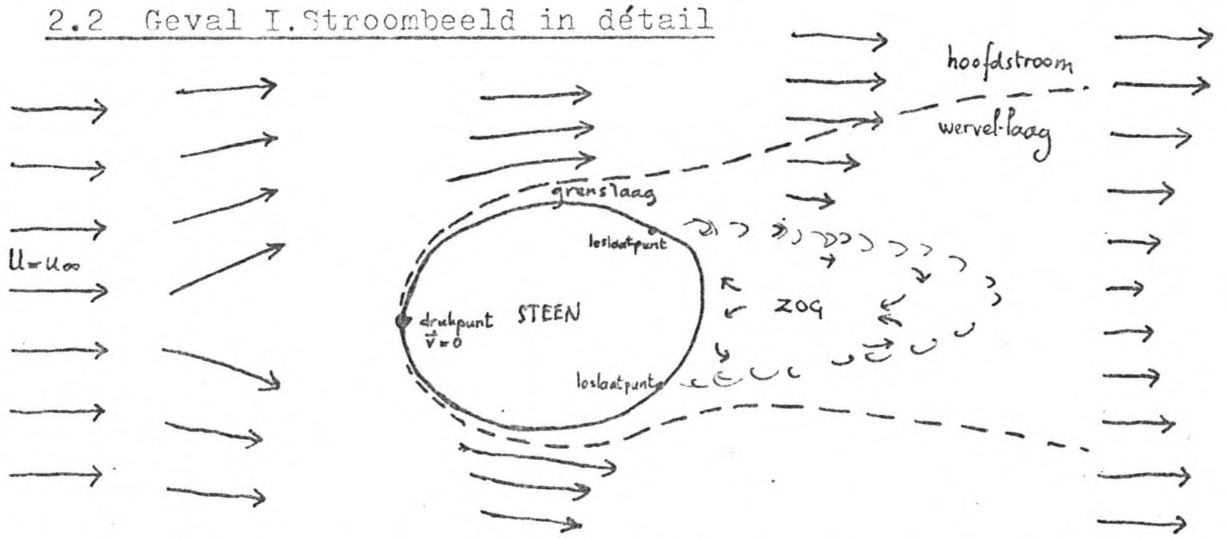
III Een individuele steen op een poreuse bodem (stortstenen bed) in een goed ontwikkelde grenslaag van toenemende dikte. We kunnen veronderstellen dat de grenslaag ontstaan is doordat stroomopwaarts een reeks soortgelijke, individuele stenen liggen.

IV Stroming met goed ontwikkelde grenslaag over een ruwe bodem.

In de vier gevallen zal steeds gelden:
- permanentie
- In de hoofdstroom $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ Stel in hoofdstroom $p = 0$

Om het effect van de uitwisseling van impulsie tussen stroom en stenen op een individuele steen te onderzoeken zal begonnen worden met een qualitatieve détailbeschouwing over de stromingspatronen rond de stenen. Om het effect op het globale stroompatroon te onderzoeken zal daarna steeds de balans van de impulsie in x-richting en die van de impulsie in z-richting worden ogesteld van een groot stuk stroombuis, rondom de individuele steen.

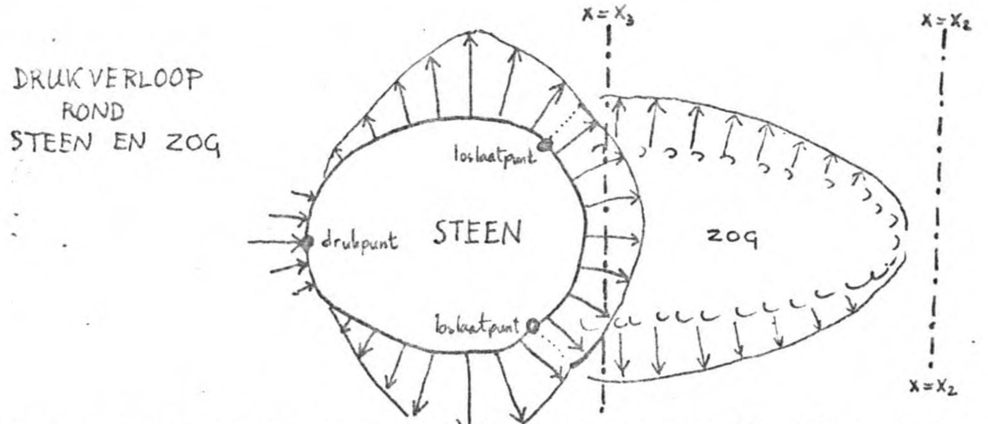
2.2 Geval I. Stroombeeld in détail



Langs de "huid" van de steen bevindt zich een grenslaag. De schuifspanning in deze grenslaag langs de huid van de steen, zorgt voor een deel van de kracht in de stroomrichting, die de stroom uitoefent op de steen. Zoals verderop (3.2) zal worden aangetoond is deze "huidweerstand" van geringe betekenis bij de hier interessante Reynoldsgetallen*). Wel is het van belang op te merken dat de huidweerstand rechtevenredig is met het kwadraat van de snelheid.

*) $Re = \frac{Ud}{\nu} > 0{,}3 \cdot 10^6$

Buiten deze dunne grenslaag en vóór het loslaatpunt, kan de stroom berekend worden als een potentiaalstroom. In het drukpunt, vooraan de steen is de snelheid nul en $p = \frac{1}{2}\rho u_\infty^2$ of



Boven en onder de steen is de stroomsnelheid aanzienlijk groter dan u_∞ (orde van grootte: $1{,}5\, u_\infty$). Daar geldt $p<0$ (orde van grootte $-\frac{1}{2}\rho u_\infty^2$). Indien de steen min of meer symmetrisch is, zal de kracht die de stroom op de steen uitoefent slechts een kleine component hebben loodrecht op de stroomrichting, daar $[p]_{onder} \approx [p]_{boven}$.

In het zog is de stroomsnelheid gering.
Uit de impulsievergelijking langs een lijn in vlak $x=x_3$, evenwijdig aan de z-as volgt, dat vlak achter de steen p constant is en ongeveer gelijk aan $[p]_{loslaatpunt}$. Samen met de positieve p rond het drukpunt zorgt deze negatieve p voor verreweg het grootste deel van de horizontale kracht op steen: "de vormweerstand".

Omdat p steeds evenredig is met u_∞^2 , geldt dit ook voor de vormweerstand, die voorts evenredig is met de grootte van het oppervlak, dus met d^2 . Dus ook K_x= huidweerstand + vormweerstand is rechtevenredig met $u_\infty^2 . d^2$. Aangezien K_x verder alleen afhankelijk is van de vorm van de steen en enigszins van het getal van Reynolds, kunnen we stellen:

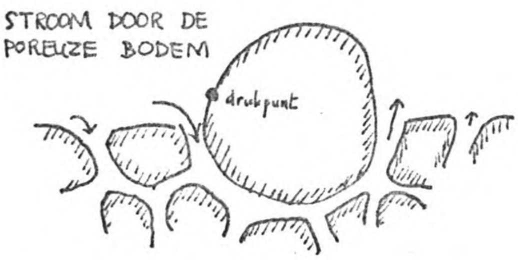
$K_x = C_D \cdot \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$, waarin C_D een dimensieloze coëfficient is die voornamelijk afhankelijk is van het soort vorm van de steen(kubus, dan wel gebroken als graniet, dan wel afgerond als grind) en verder enigszins van het getal van Reynolds.
De grootte van C_D hangt sterk af van (de plaats van) ~~het~~ loslaatpunt. Bevindt zich dat ongeveer op de plaats die op de tekening is aangegevenm, dan volgt uit het voorgaande dat de orde van grootte van C_D is: 1.

Uit de impulsie vergelijking langs een lijn in vlak $x=x_2$ evenwijdig aan z-as, waar de stroomlijnen weer recht zijn, volgt dat daar overal $p=0$ (zie ook bijlage B.2). De positieve drukgradiënt rond het zog maakt evenwicht met de schuifspanningen langs het zog. Er is namelijk een sterke uitwisseling van horizontale impulsie tussen het zog en de stroom erlangs, mogelijk door een sterke turbulentie in het grensgebied. De wervel-laag tussen neer en hoofdstroom veroorzaakt in vlak $x=x_2$ een gradiënt van de horizontale snelheid in verticale richting : $\frac{\partial u}{\partial z}$.

2.3 Geval II. Stroombeeld in détail

Als de steen ongeveer in twee gelijke delen wordt verdeeld door het vlak $z=z_{bodem}$, mag men in eerste benadering aannemen dat de stroom boven dit vlak gelijk is aan de stroom van geval I, voorzover boven het z-vlak door het midden van de steen van geval I.

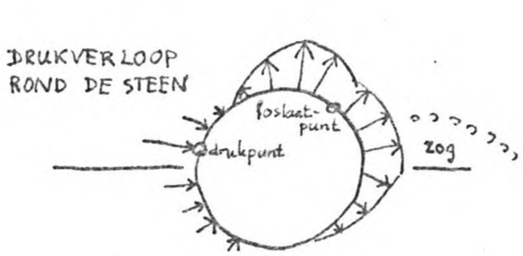
Hieruit volgt dat er een verschil in piëzometisch niveau is bij de bodem links van de steen en rechts van de steen. Dit veroorzaakt een stroom door de poreuze massa, in het bijzonder vlak onderlangs de steen. Hieruit volgt dat het drukpunt iets hoger moet liggen dan in het vlak $(z=z_{bodem})$. Dit zal waarschijnlijk geen noemenswaardige invloed hebben op de stroom boven de bodem.



Een ander verschil met geval I wordt veroorzaakt door de beperking van de mengweg in het zog en de wervellaag, door de aanwezigheid van de bodem. Er kunnen geen pakketjes vloeistof door het vlak $z=z_{bodem}$ ~~bodem~~ gaan, terwijl in geval I pakketjes vloeistof wèl door het symmetrie vlak kunnen gaan. De bodem dempt de turbulentie en daarmee de overdracht van horizontale impulsie. Het is de vraag of dit effect heeft op de kracht K_x. Als het effect heeft dan zal dit K_x eerder kleiner maken dan groter

Indien de weerstand die de stroom onder de steen door ondervindt gelijkmatig verdeeld is, mag men verwachten dat p lineair verloopt. Het lijkt waarschijnlijk dat het gedeelte van K_x onder vlak $z=z_{bodem}=0$ in deze situatie wat kleiner zal zijn dan het gedeelte erboven. We kunnen dit weergeven door invoering van een coëfficiënt c_3 .

$c_3 = \frac{[K_x]_{boven\ de\ bodem}}{[K_x]_{totaal}}$. Zie ook 2.6 . Misschien geldt $c_3 = 0{,}8$.



Concluderend mogen we, als de steen in ongeveer twee gelijke delen wordt verdeeld door vlak Z=Z bodem een kleinere K_x verwachten dan in geval I. Ter aanduiding van de orde van grootte: een factor ~~4, of~~ 2. We kunnen dit weergeven door te schrijven:

$$K_x = C_{DB} \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 \qquad C_{DB} < C_D$$

Liftkracht Kz

Zoals blijkt uit bovenstaand schetsje is $(\bar{p})_{bovenkant} < 0$, terwijl $(\bar{p})_{onderkant} \approx 0$ ~~onderkant~~. We mogen een flinke liftkracht verwachten. We kunnen stellen: $K_z = C_{LB} \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2$

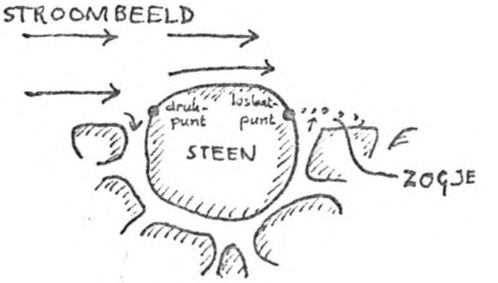
Uit het vorige (zie ook 2.2) volgt dat de orde van grootte van C_{LB} dezelfde is als van C_{DB} .

Het is van belang op te merken dat C_{DB} en C_{LB} niet alleen van de vorm van de steen (en Re), afhankelijk zijn, maar ook van hun ligging. In hoofdstuk 3 zullen C_{DB} en C_{LB} echter zodanig gedefinieerd worden dat ze alleen van de vorm (en Re) afhankelijk zijn, namelijk door aan te nemen dat er een karakteristieke ligging bestaat.

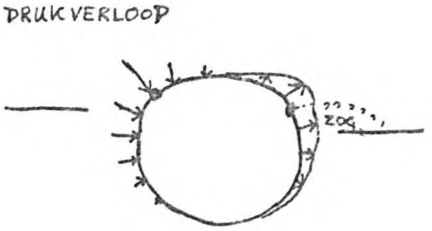
Effect mate van uitsteken boven de bodem.

Zodra de steen verder in de bodem wegzakt, neemt de stroomsnelheid vlak boven de steen aanzienlijk af. Daardoor schuift het loslaatpunt waarschijnlijk wat naar achteren. In iedergeval wordt p in het zog minder negatief. Verloopt p onder de steen weer lineair dan zal K_x duidelijk kleiner worden. Hetzelfde geldt voor K_z.

STROOMBEELD

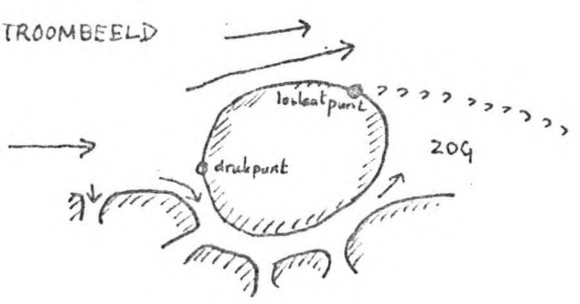


DRUKVERLOOP

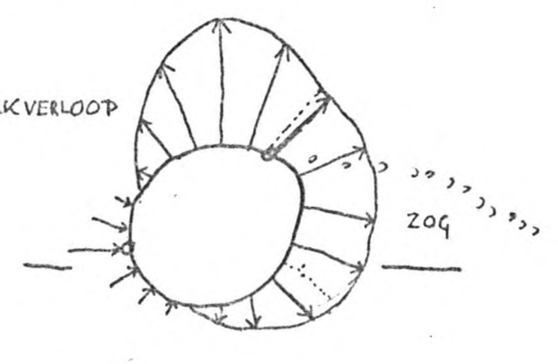


Omgekeerd zal de steen als hij flink boven de bodem uitsteekt waarschijnlijk een grotere K_x kunnen ondervinden dan in geval 1. Ook K_z zal eerst aanzienlijk groter worden, maar later juist weer afnemen als er veel water onder de steen door gaat stromen.

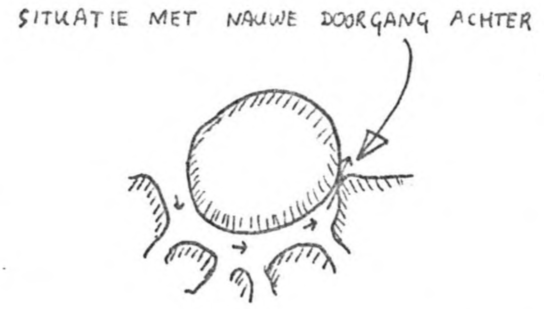
STROOMBEELD

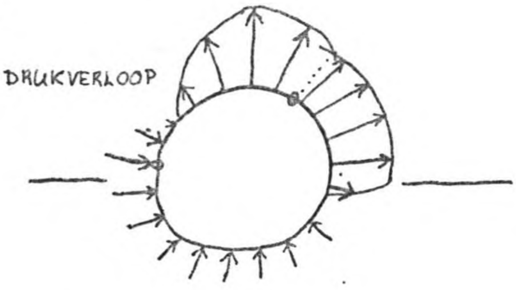


DRUKVERLOOP



Effect van geometrie poriën onder de steen.





Tot nu toe werd er een van uitgegaan dat de weerstand de waterstroom onder de steen ondervindt lineair verloopt. Dat is echter beslist niet juist als het water achter aan min of meer opgesloten wordt. Dan plant zich p van vóór de steen min of meer ongestoord voort tot de nauwe doorgang.

Pas daar zal p ineens sterk dalen.

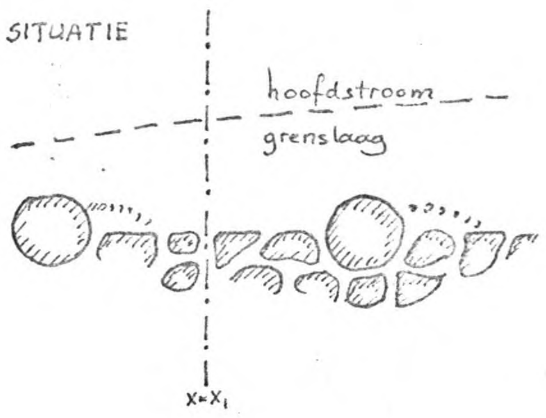
K_x zal wellicht enige tientallen procenten kleiner worden. K_z wordt daarentegen aanzienlijk groter. Werd daarstraks aangenomen dat $[p]_{onder} \approx 0$ nu zou $[p]_{onder}$ kunnen oplopen tot bijna 1, waardoor C_{LB} tot ongeveer tweemaal zo groot zou kunnen worden. $/\frac{1}{2}\rho u_\infty^2$

Precies het omgekeerde effect treedt op wanneer het water onder de steen aan de bovenstroomse zijde min of meer wordt afgesloten en aan de benedenstroomse zijde in geen verbinding staat met de neer.

Overigens lijkt het werkelijk "afsluiten" bij deze drie-dimensionale stroming zeer onwaarschijnlijk. Het effect zal aanzienlijk kleiner zijn dan bij een twee dimensionele stroming, bv. de stroming dwars over een stapel pijpen.

Wel moet men er rekening mee houden dat een zekere afsluititng achter te verwachten is op het moment dat de steen opwipt. Bij het opwippen is dus als gevolg hiervan een vergroting van de liftkracht te verwachten. Trouwens het opwippen zal een nog verdere vergroting van de liftkracht veroorzaken, doordat de steen meer boven het bed gaat uitsteken.

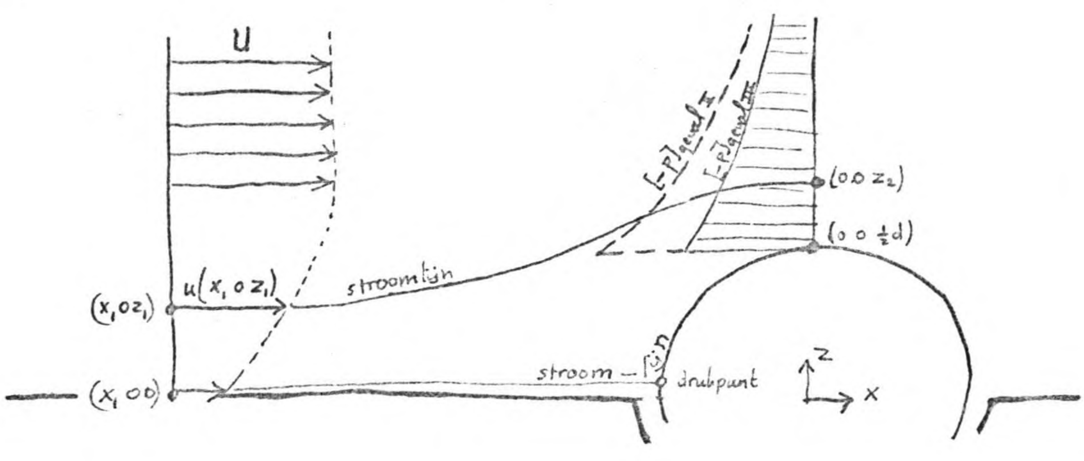
2.4 Geval III en IV . Stroombeeld in détail.



Als stroomafwaarts van de steen van geval II een volgende steen ligt, dan zijn de omstandigheden voor die tweede steen anders, omdat de eerste steen de hoofdstroom heeft verstoord met zog en wervels. Er is een grenslaag ontstaan, dwz een laag waarin impulsietransport loodrecht op de richting van de hoofdstroom plaatsvindt.

Geval III is de situatie van een steen uit een reeks stenen op/in een overigens gladde bodem, die poreus is. De reeks stenen stroomopwaarts heeft een grenslaag van beperkte dikte doen ontstaan. Het vlak $x=x_1$ wordt gekozen op een plek waar de stroomlijnen niet gekromd zijn.

Uit een vergelijking van geval III en geval II, wat betreft het stroombeeld stroomopwaarts van de steen, kunnen we het volgende concluderen (zie ook bijlage B1):



- In het drukpunt: $p=\frac{1}{2}\rho u^2(x_1 0 0)$, dus $\frac{[P]_{geval\ III}}{[P]_{geval\ II}} = \frac{u^2(x_1 0 0)}{U^2}$.
- In punt $(0\ 0\ \frac{1}{2}d)$: $\frac{u^2(x_1 0 0)}{U^2} < \frac{[P]_{geval\ III}}{[P]_{geval\ II}} < 1$.
- Het loslaatpunt ligt iets verder naar achteren: iets kleiner zog
- In het zog langs de wand van de steen: $\frac{u^2(x_1 0 0)}{U^2} \leq \frac{[P]_{geval\ III}}{[P]_{geval\ II}} < 1$
- Onder de steen op overeenkomstige plaatsen $\frac{u^2(x_1 0 0)}{U^2} \leq \frac{[P]_{geval\ III}}{[P]_{geval\ II}} < 1$

Daaruit volgt: $\frac{u^2(x_1 0 0)}{U^2} < \frac{[K_x]_{geval\ III}}{[K_x]_{geval\ II}} < 1$, zodat we kunnen

stellen: $[K_x]_{geval\ III} = C_{DB}\cdot\frac{1}{2}\rho u_\infty^2\cdot\frac{\pi}{4}d^2$, mits $u(x_1 0 0) < u_\infty < U$

De definitie van u_∞ "de waarde die u zou aannemen ter plaatse van de steen, indien deze er niet was", laat verschillende

waarden van u_∞ toe binnen de grenzen: $u(x, o\ o) \leq u_\infty \leq u(x_1\ 0\ \tfrac{1}{2}d)$
In hoofdstuk 3 zal blijken dat $u_\infty = u(x_1\ o\ \tfrac{1}{2}d)$ een bruikbare aanname is.

Ook K_z zal hier aanzienlijk kleiner zijn dan in geval II. Het is mogelijk dat:

$$\frac{[K_z]_{geval\ III}}{[K_z]_{geval\ II}} = \frac{[K_x]_{geval\ III}}{[K_x]_{geval\ II}}$$

Dat zou erg pleizierig zijn. Dan wordt het immers mogelijk te stellen:

$$[K_z]_{geval\ III} = C_{LB} \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2$$

waarbij dezelfde waarde voor u_∞ wordt aangenomen als voor K_x. In het vervolg (hoofdstuk 3) zal hier van worden uitgegaan, hoewel het, bij gebrek aan experimentele gegevens, niet mogelijk is dit aan te tonen.

Geval IV

Het stroombeeld van geval IV is gelijk aan dat van geval III .

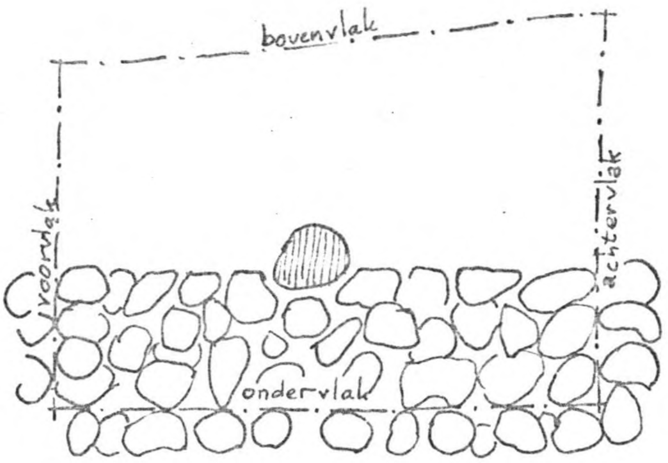
2.5 Impulsiebalansen voor de ruimte rond de individuele steen.

Op grote afstand van de individuele steen worden zes vlakken gekozen,die als volgt betiteld zullen worden:
- het "voorvlak", samenvallend met het $x=x_1$ vlak
- het "achtervlak", samenvallend met het $x=x_2$ vlak, gelegen in de hoofdstroom
- het "rechtervlak" (zij), samenvallend met het $y=y_2$ vlak
- het "linkervlak" (zij), samenvallend met het $y=y_1$ vlak
- het "ondervlak", samenvallend met het $z=z_1$ vlak; in geval I,echter, slechts ongeveer samenvallend daarmee
- het "bovenvlak", ongeveer samenvallend met het $z=z_2$ vlak

De twee zijvlakken en het bovenvlak vallen samen met stroomlijnen. Voor de twee zijvlakken is dat mogelijk doordat verondersteld wordt dat in $(0\ -2y_1\ 0)$ en $(0\ +2y_2\ 0)$ precies weer zo'n steen is. De zijvlakken zijn daardoor symmetrievlakken voor het stroombeeld.

Omdat de gemiddelde snelheid u in het achtervlak steeds kleiner is dan in het voorvlak, zal het achtervlak steeds iets groter zijn.

Voorzover de grensvlakken door het steenpakket lopen, wordt verondersteld dat overal in het grensvlak water is. Stenen van het steenpakket verschijnen alleen in het grensvlak waar zij raken aan andere stenen. Zij bezetten dan in dit vlak een oppervlakte nul. Zoals verderop zal blijken, worden de vlakken zover van de individuele steen gekozen, dat de stroomsnelheid in de vlakken steeds nul is.



De impulsiebalanzen zullen opgesteld worden voor dát gedeelte van de ruimte die door genoemde zes vlakken wordt omsloten, dat niet door stenen wordt bezet. De kracht die de stenen binnen de zes vlakken op het water uitoefenen, verschijnt dus als uitwendige kracht. De overdracht van impulsie tussen deze stenen en die buiten de zes vlakken verschijnt dus niet in de balansen.

Balans impulsie in x-richting

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{vol} \rho u\,dx\,dy\,dz = \iint_{voorvlak} \rho\, u^2(x_1)\,dy\,dz - \iint_{achtervlak} \rho\, u^2(x_2)\,dy\,dz \qquad \text{"convectie term(en)"}$$

$$+ \int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2} \left[p(x_1) - p(x_2)\right] dy\,dz \qquad \text{"druk term"}$$

$$- \sum K_x \qquad \text{"overdrachtsterm"}$$

K_x = Kracht in x-richting, veroorzaakt door isotrope druk en schuifspanning, uitgeoefend op een steen binnen de ruimte.
$\sum K_x$ = Som van K_x op alle stenen binnen de ruimte.

Balans impulsie in z-richting

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{vol} \rho w\,dx\,dy\,dz = \iint_{voorvlak} \rho\, u(x_1) w(x_1)\,dy\,dz - \iint_{achtervlak} \rho\, u(x_2) w(x_2)\,dy\,dz$$

$$+ \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} \left[p(z_1) - p(z_2)\right] dx\,dy$$

$$- \sum K_z$$

Gezien de permanentie is de term in het linkerlid van beide vergelijkingen steeds nul. In bijlage B2 zal worden aangetoond dat ook de druktermen steeds nul zijn. Voorts geldt:

$$\iint_{\text{voorvlak}} \rho u^2(x_1)\, dy\, dz = U \iint_{\text{voorvlak}} \rho u(x_1)\, dy\, dz - \iint_{\text{voorvlak}} \rho \{U - u(x_1)\} u(x_1)\, dy\, dz$$

$$\iint_{\text{achtervlak}} \rho u^2(x_2)\, dy\, dz = U \iint_{\text{achtervlak}} \rho u(x_2)\, dy\, dz - \iint_{\text{achtervlak}} \rho \{U - u(x_2)\} u(x_2)\, dy\, dz$$

waarbij, omdat het bovenvlak samenvalt met stroomlijnen:

$$\iint_{\text{voorvlak}} \rho u(x_1)\, dy\, dz = \iint_{\text{achtervlak}} \rho u(x_2)\, dy\, dz$$

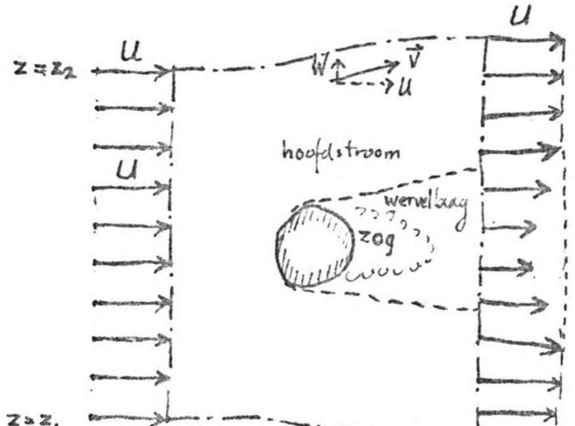
Uit een en ander volgt dat de impulsiebalansen als volgt geschreven kunnen worden:

$$\sum K_x = \iint_{\text{achtervlak}} \rho \{U - u(x_2)\} u(x_2)\, dy\, dz - \iint_{\text{voorvlak}} \rho \{U - u(x_1)\} u(x_1)\, dy\, dz$$

$$\sum K_z = \iint_{\text{voorvlak}} \rho\, u(x_1)\, w(x_1)\, dy\, dz - \iint_{\text{achtervlak}} \rho\, u(x_2)\, w(x_2)\, dy\, dz$$

2.6 Balans van de impulsie in x-richting in de vier gevallen

GEVAL I



$$K_x = \iint_{\text{achtervlak}} \rho \{U - u(x_2)\} u(x_2)\, dy\, dz$$

$$= \tfrac{1}{2}\rho U^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 \cdot \tfrac{8}{\pi} \iint_{\text{achtervlak}} \left\{1 - \frac{u(x_2)}{U}\right\} \frac{u(x_2)}{U}\, d\left(\frac{y}{d}\right) d\left(\frac{z}{d}\right)$$

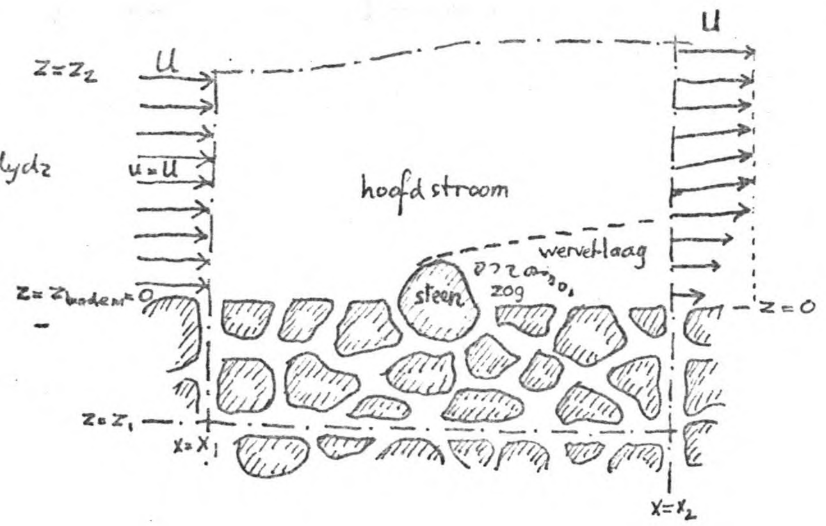
$$= C_D \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2$$

waarbij $u_\infty = U$

en $C_D = \dfrac{8}{\pi} \displaystyle\iint_{\text{achtervlak}} \left\{1 - \frac{u(x_2)}{U}\right\} \frac{u(x_2)}{U}\, d\left(\frac{y}{d}\right) d\left(\frac{z}{d}\right)$

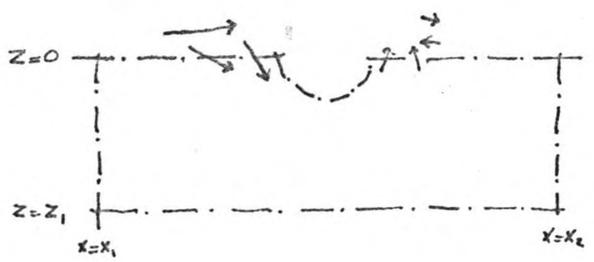
GEVAL II

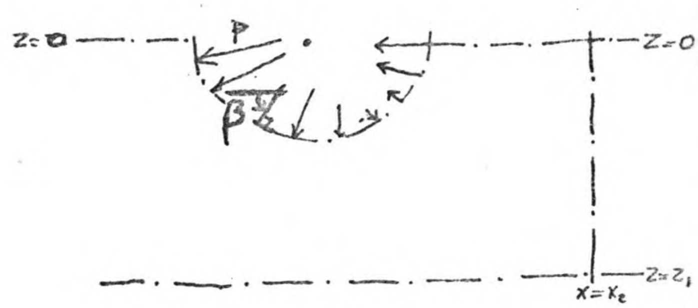
$$\Sigma K_x = \iint\limits_{\text{achter vlak}} \rho \{U - u(x_2)\} u(x_2)\, dy\, dz$$



Nu geldt $\Sigma K_x = [K_x]_{\text{individuele steen}} + [K_x]_{\text{steenpakket}}$

Stellen we de balans op van de impulsie in x-richting voor de ruimte rond de stenen van het steenpakket, dan volgt:





$$0 = \iint\limits_{\text{bodem oppervlak}} \rho\, u(x\,y\,0).\{-w(x\,y\,0)\}\, dx\, dy + \iint\limits_{\substack{\text{opp. grens met}\\ \text{individuele steen}}} p(-\cos\beta)\, dy\, dz - [K_x]_{\text{steenpakket}}$$

De convectie term zal wel een kleine positieve waarde hebben, daar u(x 0 0) stroomopwaarts van de individuele steen, een positieve waarde heeft, terwijl u(x 0 0) stroomafwaarts van de steen eerder een negatieve waarde heeft in de neer. Alleen vlak bij de steen heeft w(x 0 0) een redelijke waarde, omdat alleen daar een redelijk verhang bestaat. De convectie term is waarschijnlijk te verwaarlozen ten opzicht van de drukterm.

De drukterm zal negatief zijn: zie schets.

Uit een en ander volgt:

$$[K_x]_{\text{individuele steen}} \approx \iint\limits_{\text{achtervlak}} \rho \{U - u(x_2)\} u(x_2)\, dy\, dz + \iint\limits_{\substack{\text{opp. grens tussen}\\ \text{indiv. steen en pakket}}} p \cos\beta\, dy\, dz$$

$$= C_{DB} \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2$$

waarbij $u_\infty = U$ en $C_{DB} = \frac{8}{\pi} \iint\limits_{achtervlak} \left\{1 - \frac{u(x_2)}{U}\right\} \frac{u(x_2)}{U}\, d\left(\frac{y}{d}\right) d\left(\frac{z}{d}\right) + \frac{4}{\pi} \iint\limits_{\substack{\text{opp. grens tussen}\\ \text{ind. steen en pakket}}} \frac{p}{\frac{1}{2}\rho U^2} \cos\beta\, d\left(\frac{y}{d}\right) d\left(\frac{z}{d}\right)$

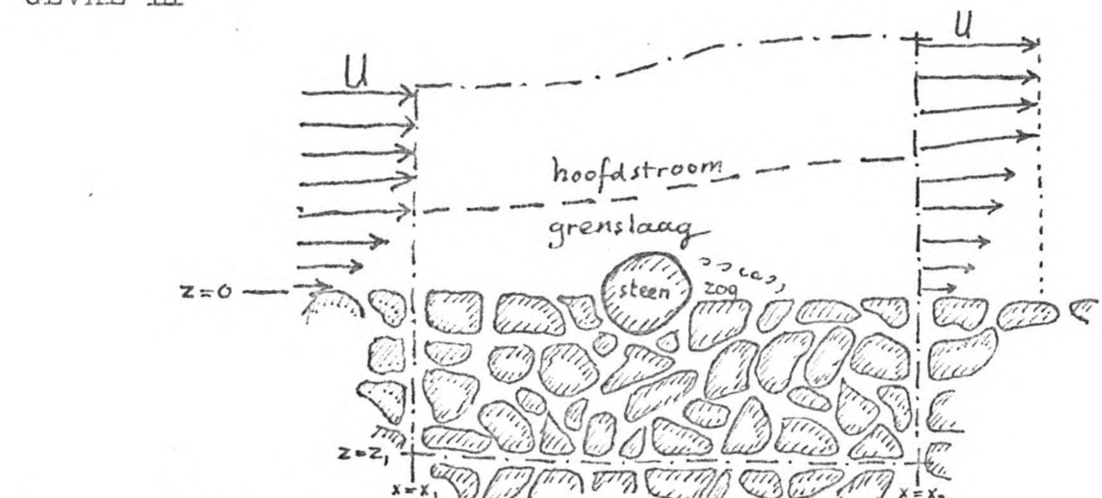
We zien dus dat $[K_x]_{\text{individuele steen}} > \sum K_x$

We kunnen dit weergeven door te stellen: $\sum K_x = c_3 K_x$

met c_3 = aandeel in $[K_x]_{\text{indiv. steen}}$ van het water boven de bodem.

Er geldt: $0 < c_3 < 1$. Bij gebrek aan experimentele gegevens, zullen we voorlopig de in 2.3 aangenomen waarde aanhouden: $c_3 = 0{,}8$

GEVAL III



$$\sum K_x = \iint\limits_{achtervlak} \rho \{U - u(x_2)\}\, u(x_2)\, dy\, dz - \iint\limits_{voorvlak} \rho \{U - u(x_1)\}\, u(x_1)\, dy\, dz$$

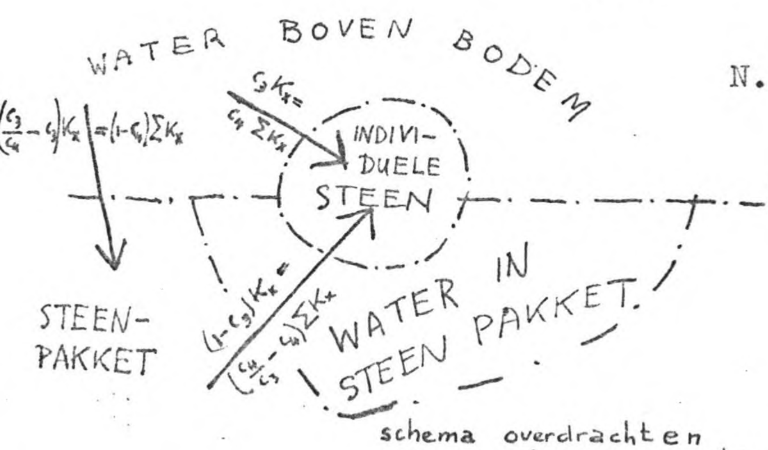
De grenslaag zal in het achtervlak dikker zijn dan in het voorvlak, zodat de eerste term groter zal zijn dan de tweede.

Overeenkomstig geval II kunnen we schrijven:

$$[K_x]_{\text{individuele steen}} \approx \iint\limits_{achtervlak} \rho \{U - u(x_2)\}\, u(x_2)\, dy\, dz - \iint\limits_{voorvlak} \rho \{U - u(x_1)\}\, u(x_1)\, dy\, dz + \iint\limits_{\substack{\text{opp. grens individuele}\\ \text{steen met steenpakket}}} p \cos\beta\, dy\, dz$$

We kunnen stellen: $[K_x]_{\substack{\text{individuele}\\ \text{steen}}} = C_{DB} \cdot \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$ waarin $u_\infty < U$

$\sum K_x = c_3 [K_x]_{\substack{\text{individuele}\\ \text{steen}}}$ met $0 < c_3 < 1$



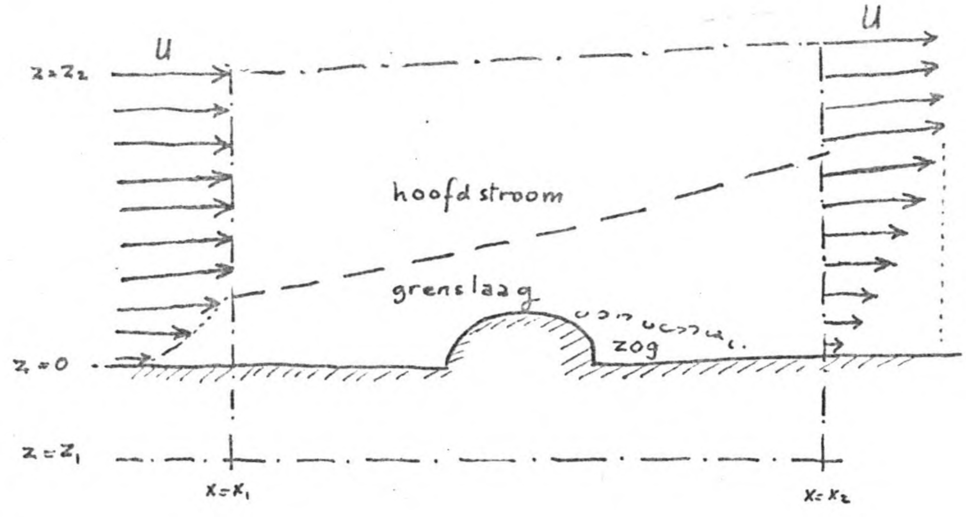
schema overdrachten van impulsie in x-richting

N.B. Als de bodem tussen de individuele stenen niet glad is, zal die bodem ook een deel van $\sum K_x$ leveren. Stel:

c_4 = Het deel van $\sum K_x$ (elders τ_b) dat opgenomen wordt door de individuele (elders "kritieke") stenen.

Dan: $\sum K_x = \frac{c_3}{c_4} [K_x]_{\text{individuele steen}}$

GEVAL IV



In feite wijkt dit geval niet af van geval III .

$$\Sigma K_x = \iint\limits_{\text{achtervlak}} \rho \{U - u(x_2)\} u(x_2)\, dy\, dz \; - \iint\limits_{\text{voorvlak}} \rho \{U - u(x_1)\} u(x_1)\, dy\, dz$$

Stel dat x_1 x_2 y_1 en y_2 zodanig gekozen zijn, dat het bodemoppervlak $(x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = \frac{1}{c_1}\frac{\pi}{4}d^2$, waarbij

c_1 = Aantal oneffenheden (stenen aan oppervlak) per stuk bodemoppervlak groot $\frac{\pi}{4}d^2$.

Dan kunnen we schrijven: $\tau_b = c_1 \dfrac{\Sigma K_x}{\frac{\pi}{4}d^2}$

Voorts geldt: $\Sigma K_x = \dfrac{c_3}{c_4} K_x$

zodat: $\Sigma K_x = \dfrac{c_3}{c_4} C_{DB} \cdot \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4}d^2$ met $u_\infty < U$ en $0 < c_3 < 1$ en $0 < c_4 < 1$

en: $\tau_b = \dfrac{c_1 c_3}{c_4} \cdot \dfrac{K_x}{\frac{\pi}{4}d^2}$ met τ_b = gemiddelde bodemschuifspanning

of: $\tau_b = \dfrac{c_1 c_3}{c_4} \cdot C_{DB} \cdot \frac{1}{2}\rho u_\infty^2$

In hoofdstuk 4 zal aandacht besteed worden aan de verhouding $\dfrac{u_\infty}{U}$ als functie van de grenslaagdikte δ . In hoofdstuk 3 wordt aandacht besteed aan de grootte van c_1 , c_4 en C_{DB} .
c_3 werd in 2.3 reeds geschat: $c_3 = 0{,}8$

Als we $u(x\ y\ z)$ middelen over y tussen y_1 en y_2 , dan kunnen we ook afleiden:

$$\frac{\tau_b}{\rho} = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{z_2} u^2(x\ z)\, dz$$

of

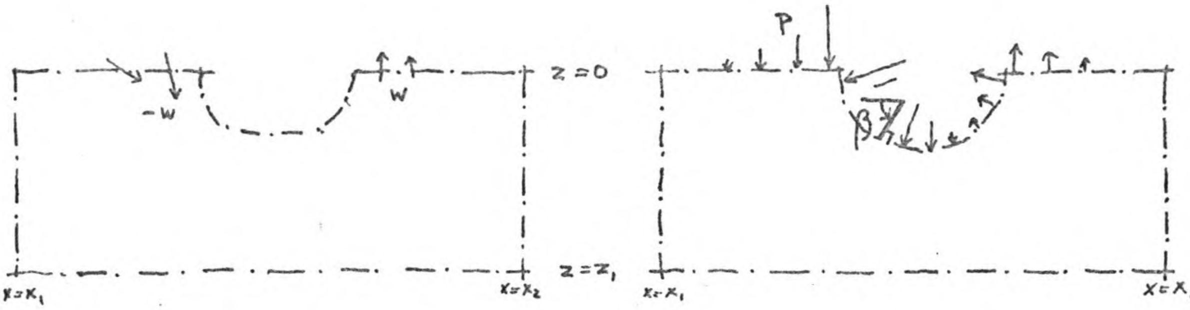
$$\frac{\tau_b}{\rho} = +\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{z_2} \{U - u(x\ z)\} u(x\ z)\, dz$$

2.7 Balans van de impulsie in z-richting. Geval II en geval III.

$$\sum K_z = \iint_{\text{voorvlak}} \rho u(x_1) w(x_1)\, dy dz \quad - \iint_{\text{achtervlak}} \rho u(x_2) w(x_2)\, dy dz$$

Het is aan te tonen dat zowel in vlak $x=x_1$ als in vlak $x=x_2$ $w \approx 0$
Hieruit volgt:

$$\sum K_z = 0$$



Stellen we de impulsiebalans in z-richting op van de vloeistof in de poreuze bodem, voorzover binnen de grensvlakken, dan volgt:

$$0 = -\iint_{\text{bodem}} \rho w^2 dx dy \quad - \iint_{\substack{\text{bodem buiten}\\ \text{de steen}}} p\, dx dy \quad - \iint_{\substack{\text{opp grens tussen}\\ \text{steen en bodem}}} p \sin\beta\, d \quad - \left[K_z\right]_{\text{stenen in bodem}}$$

De convectie term zal hier waarschijnlijk niet te verwaarlozen zijn. Daarentegen zal de derde term waarschijnlijk erg klein zijn, zodat:

$$\left[K_z\right]_{\text{steen}} = -\left[K_z\right]_{\substack{\text{stenen in}\\ \text{bodem}}} \approx \iint_{\substack{\text{bodem buiten}\\ \text{de steen}}} (\rho w^2 + p)\, dx dy$$

Het lijkt nu of een grotere porositeit van de bodem een grotere liftkracht impliceert. Doch het lijkt waarschijnlijk dat, zeker stroomopwaarts van de steen, $(\rho w^2 + p)$ onafhankelijk is van de porositeit.

2.8 Gevallen met drukgradiënt $\frac{\partial P}{\partial x}$ in de hoofdstroom.

Als langs een stroomlijn in de hoofdstroom $\frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$, doch $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial x}$, dan mogen we verwachten dat deze drukgradiënt ook tot op en tot in de bodem doordringt, omdat de stroomlijnen globaal recht zijn, zolang de bodem vlak is, op de individuele stenen na.

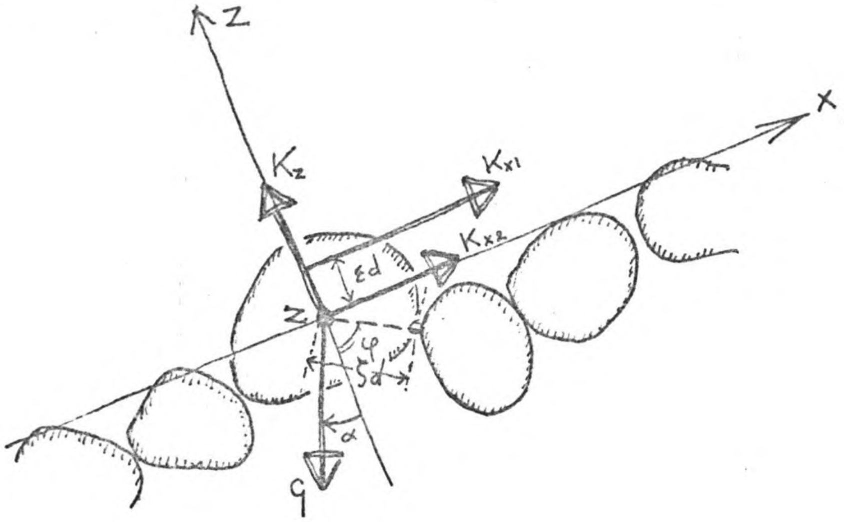
Zonder nader onderzoek zal hier voorlopig worden aangenomen, dat in dergelijke gevallen voor de kracht op de steen geldt:

$$K_x = C_{DB} \cdot \tfrac{1}{2} \rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 + \frac{\partial P}{\partial x} (\text{Vol. steen})$$

3 BEREKENINGSMETHODE STABILITEIT INDIVIDUELE STEEN

3.1 Principe.

Hieronder zal puntsgewijs het principe worden aangeduid waarmee de stabiliteit van een individuele steen, liggend in/op een steenpakket, kan worden berekend. Het gaat daarbij om alle gevallen met permanente stroming: met en zonder grenslaag; met en zonder drukgradiënt in de hoofdstroom; op horizontale en op hellende bodem.



De kritieke toestand is bereikt als:

$$\frac{1}{c_z}\left\{K_z \sin\varphi + K_{x1}\left(\cos\varphi + \frac{\varepsilon}{\zeta}\right)\right\} + K_{x2}\cos\varphi - G\sin(\varphi+\alpha) = 0$$

- Bepaal u_∞

  Als de grenslaagdikte $\delta = 0$, dan geldt $u_\infty = U$ (vergelijk geval II). In andere gevallen moet u_∞ zodanig zijn dat C_{DB} onafhankelijk is van de grenslaag, zoals aangeduid in paragraaf 2.4 (geval III). Door proeven zal vastgesteld moeten worden voor welke waarde van $\frac{z}{d}$ geldt dat $u_\infty = u(\frac{z}{d})$. Deze waarde van $\frac{z}{d}$ kan een functie zijn van δ. In ieder geval is $u(\frac{z}{d})$ een functie van de grenslaagdikte. In hoofdstuk 4 zal daar op worden ingegaan.

- $K_z = C_{LB} \cdot \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$

  Uit proeven zal bepaald moeten worden hoe groot C_{LB} is als functie van het soort vorm van de steen - impliciet daarmee van de ligging - en enigszins als functie van het getal van Reynolds.

- $K_{x1} = C_{DB} \cdot \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2$

  Uit proeven zal bepaald moeten worden hoe groot C_{DB} en $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ zijn, als functie van het soort vorm en enigszins het getal van Reynolds.

- $K_{x2} = -\frac{\pi}{6} d^3 \cdot \frac{\partial p}{\partial x}$

- $G = (\rho_s - \rho_w) g \frac{\pi}{6} d^3$

- Weerstand door vrije oppervlak
  Nagegaan moet worden of deze een rol speelt. Deze zal een extra kracht K_{x3} zijn met een eigen excentriciteit ε' en misschien ook een extra K_{z2}. Zie paragraaf 3.4.

- c_2 is een factor die de invloed van de turbulente fluctuaties aangeeft.
  De factor moet eveneens experimenteel bepaald worden. Hij zal afhangen van δ en wellicht ook van het getal van Strouhal (Zie paragraaf 3.5). Tevens moet de eventuele invloed van de traagheid bij deze fluctuaties er in verwerkt worden (ook paragraaf 3.5).

Het is niet uitgesloten dat C_{LB} en $\frac{\varepsilon}{\xi}$ afhankelijk zijn van de grenslaagdikte, als we eenmaal u_∞ zó hebben uitgekozen dat C_{DB} daarvan onafhankelijk is.

Chepil (lit. 8, blz 402) constateert bij proeven met halve-bol-vormige elementjes met een d_{bol}=0,0636 m, in een windtunnel, dat de verhouding lift gedeeld door sleepkracht, dus C_{LB}/C_{DB} aan het begin van de tunnel, waar de grenslaag 0,050 m dik is, "appeared to be somewhat higher" dan verderop in de tunnel, waar de grenslaag 0,270m dik is. Verder gaande tot waar de grenslaag 0,400m dik is, blijft die verhouding echter gelijk.

Voor de eenvoud zullen we toch maar aannemen dat ook C_{LB} en $\frac{\varepsilon}{\xi}$ onafhankelijk van de grenslaagdikte zijn.

Uiteraard variëren vorm (bij breuksteen) en ligging van steen tot steen. Toch wordt er van uitgegaan, dat voor een bepaald type stortsteen één karakteristieke waarde van C_{DB} vastgesteld kan worden en evenzo van C_{LB} en $\frac{\varepsilon}{\xi}$. Dit stemt overeen met ervaringen bij experimenten (lit.1) dat een betrekkelijk geringe verhoging van de karakteristieke grootheid (bijvoorbeeld U) ineens zowat de hele bodem in beweging brengt.

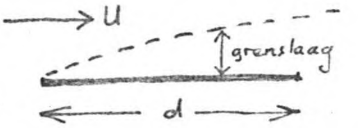
De stabiliteit van een steen kan nu gegeven worden door de formule:

$$\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = \frac{4}{3} c_2 \frac{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta \frac{\sin(\varphi+\alpha)}{\cos\varphi}}{C_{LB}\, tg\varphi + C_{DB}\left(1 + \frac{\varepsilon}{\xi}\frac{1}{\cos\varphi}\right)}$$

3.2 Huidweerstand

Het grenslaagje langs de huid van de steen (zie 2.2) draagt bij aan K_{X1}. Om de orde van grootte te bepalen, zouden we de huidweerstand kunnen beschouwen van een vlakke plaat, breed $\sqrt{\frac{\pi}{4}d^2}$ en lang $\sqrt{\frac{\pi}{4}d^2}$

Met Dailey en Harleman (lit 11, par. 10-2.2), kunnen we stellen:



$$K_{huid} = C_f \cdot \tfrac{1}{2}\rho U^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2$$

Dan volgt (D. en H. par. 10-2.2; 12-3.1;12-3.3):

$Re = \frac{dU}{\nu}$	C_f volgens Blasius voor laminaire grenslaag	volgens Schoenherr of Schultz-Grunow voor turbulente grenslaag met hydraulisch gladde wand	Volgens Prandtl en Schlichting voor turbulente grenslaag met ruwe wand: ruwheid $\approx \frac{d}{100}$	ruwheid $\approx \frac{d}{20}$
10^2	0,15			
10^3	0,04			
10^4	0,015			
10^5	0,004	0,008		
10^6	0,001	0,005		
10^7		0,003	0,02	0,05
10^8		0,002		
10^9		0,0015		

Het is veelal gebruikelijk om als kleinste steen van de kleinste breuksteencategorie een steen van 10kg te nemen. Daarvoor geldt dat $d \approx 0{,}15$m en, zoals we later zullen zien, $[U]_{kritiek}$ 2 à 3 m/s , mits de bodem horizontaal is. Dus geldt voor breuksteen:

$$Re > 0{,}3.10^6$$

De voor ons interessante gevallen zullen dus geen laminaire grenslaag kennen. Een hydraulisch ruwe wand met ruwheid $\approx \frac{d}{20}$ lijkt redelijk. Dan geldt dus steeds

$$C_f \approx 0{,}05 \qquad [K_x]_{huid} \approx 0{,}05 \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2$$

3.3 Waarden van C_D in verder ongestoorde stroom. Huid- en vormweerstand

Er zijn veel onderzoekingen gedaan naar waarden van C_D. Zo vindt men in (11), par 9-1 en 15-4 :

Voor een bol

$Re = \frac{u_\infty . d}{\nu}$	$C_D = \frac{K_x}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 . \frac{\pi}{4} d^2}$
10^2	1,2
10^3 à 3.10^5	0,5
3.10^5 à 1.10^6	0,08 à 0,15
1.10^6 à 5.10^6	0,15 à 0,25

		$Re = \frac{u_\infty d}{\nu}$	$C_D = \frac{K_x}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \text{opp} \perp \text{stroom}}$
Voor een plaat loodrecht op de stroom, vierkant of rond.	d	$>10^3$	1,1
Voor een cirkel cilinder loodrecht op de stroom met lengte = diameter	d	10^5	0,63
Idem, doch lengte oneindig		10^5 5.10^5	1,20 0,3
Voor een oneindig lange cilinder met vierkante doorsnede	d	$3,5.10^4$	$2,0 = \frac{K_x}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot d \cdot \ell}$
Idem, maar 45 gedraaid om eigen as	$d\sqrt{2}$	10^4 à 10^5	$1,6 = \frac{K_x}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot d\sqrt{2}}$

Bij een bol springt de waarde van C_D ineens van 0,5 naar 0,1 rond Re= 3.10^5 , het zogenaamde kritische getal van Reynolds, doordat de huidgrenslaag ineens van laminair naar turbulent wordt en tegelijk het loslaatpunt verder naar achteren schuift.

Zoals bleek in de vorige paragraaf, zitten we hier steeds boven dat getal van Reynolds. Er zijn helaas lang niet zoveel gegevens over bekend als bij lagere getallen van Reynolds. We zullen zien dat bij vele experimenten met stortsteen op model schaal, het Reynolds getal lager ligt dan 3.10^5.

Maar, zijn hoekige modelstenen gebruikt, dan zitten we waarschijnlijk toch boven de kritische waarde, omdat het loslaatpunt gefixeerd is en Re>1000: vergelijk de C_D van een plaat loodrecht op de stroom. Bovendien ligt het kritische getal van Reynolds, als het al bestaat, altijd lager als het water stroomopwaarts al enigszins turbulent is. Bij de gerapporteerde proeven is dat steeds zo, behalve bij M711-III.

In proeven, gedaan door de Rijkswaterstaat (Deltadienst, nota W-290b 1961) en door het Waterloopkundig Laboratorium ( ) zijn valsnelheden ver onder het wateroppervlak gemeten, waaruit men de C_D kan berekenen met: $\frac{1}{2}\rho\,(\text{valsnelheid})^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 \cdot C_D = (\rho_s - \rho_w)\, g\, \frac{\pi}{6} d^3$

	$d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} Vol}$	valsnelheid	$Re = \frac{u_\infty d}{\nu}$	$C_D = \frac{K_x}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}$
Gebroken natuursteen (RWS) $\rho_s = 2650$ kg/m³	0,18m à 0,34m	2,3 m/s	$5,5 . 10^5$	1,06 ± 0,25
Kubus (WL) $\rho_s = 2400$ kg/m³	0,133 m (ribbe=0,108m)	1,5 m/s	$1,6 . 10^5$	1,10, Maar voor $C_D^* = \frac{K_x}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot (\text{ribbe})^2} = 1,33$

Huid- en vormweerstandindividuele steen op/in steenpakket

Indien de stenen die voor de stabiliteit kritiek zijn, steeds voor ongeveer de helft boven een steenpakket uitsteken, is het waarschijnlijk dat $C_{DB} \approx 0,5 C_D$ (Zie par.2.3), dus $C_{DB} \approx 0,5$. Het is echter de vraag of dat wel zo is. Vooralsnog lijkt het betrouwbaarder om af te gaan op de experimentele resultaten van Einstein en El-Samni en Chepil. Zie paragraaf 3.6 en 3.7 .

3.4 Weerstand door vrije oppervlak

Als de individuele steen zich dicht bij of zelfs in het vrije oppervlak bevindt, kan extra weerstand optreden als onderdeel van de totale sleepweerstand. In tegenstelling tot huid- en vormweerstand, treedt deze weerstand ook op bij niet-visceuze vloeistoffen.

Ook in niet-visceuze vloeistoffen treden drukvariaties op rond een lichaam in de stroom. Diep onder het vrije oppervlak zullen deze geen netto sleepweerstand opleveren. Maar bevindt het lichaam zich dicht bij of in het vrije oppervlak (schip), dan zorgen deze drukvariaties voor waterverplaatsingen, die op hun beurt de drukvariaties weer zodanig beïnvloeden dat in het algemeen een netto sleepweerstand ontstaat.

Drukvariaties en waterverplaatsingen planten zich voort door het water: golven. Bij permanente stroming blijven zij echter steeds op dezelfde plaats ten opzichte van de steen.

3.5 Invloed van het loslaten van wervels en van turbulentie

In stationaire stroom zijn de krachten K_z en K_{x1} in het algemeen niet zuiver stationair.

Het loslaten van wervels

Het periodiek loslaten van wervels (Periode T_{wervel}) veroorzaakt drukfluctuaties. We mogen misschien aannemen dat de orde van grootte van de daardoor veroorzaakte fluctuaties in K_z en K_{x1} (een hoogste) een half maal het gemiddelde van die krachten is, afhankelijk van de grootte van het getal van Strouhal $\left(\frac{u\,T_{wervel}}{d}\right)$.
Als het maximum van K, dus bijvoorbeeld $\hat{K}=1,5\bar{K}$, niet groter is dan de kritieke K bij stationaire stroom, zal er geen beweging in de steen komen.

Is daarentegen $\hat{K} > [K]_{\substack{kritiek\\stationair}} > \bar{K}$, dan hoeft niet zondermeer instabiliteit te volgen. Wordt K slechts incidenteel overschreden, dwz geldt $T_{\substack{herhaling\\overschrijding\\kritieke\ K}} \gg T_{\substack{tijdsduur\ over-\\schrijding\ kritieke\ K}}$, dan is aan te tonen (Bijlage B3) , dat de traagheid van de steen een stabiliserende invloed heeft als

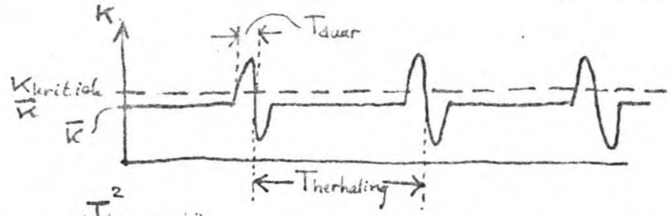
$$\frac{g\,T^2_{\substack{duur\ overschrijding\\kritieke\ waarde}}}{d} < 1000 \text{ à } 10\,000$$

Nu is de periode T_{wervel} waarmee wervels loslaten aan één zijde van een cilindervormig lichaam in een verder ongestoorde stroom, ongeveer gelijk aan $T_{wervel} = 5\frac{d}{u}$ *). Zie (11) paragraaf 15-4.
Zoals we in paragraaf 3.8 zullen zien, zal gelden voor de interessante, dwz de kritieke snelheden, dat $\frac{u^2}{gd}$ = 2 à 5 (horizontale bodem). Hieruit volgt dat voor de interessante periodes T_{wervel} geldt:

$$\frac{g\,T^2_{wervel}}{d} = 5 \text{ à } 125$$

*) Getal van Strouhal = 5

Als nu geldt $T_{\text{herhaling overschrijding kritieke } K} = T_{\text{wervel}}$ en $T_{\text{duur overschrijding kritieke } K} \leqslant \frac{1}{10} T_{\text{wervel}}$



dan volgt: $\frac{g T^2_{\text{duur overschrijding kritieke } K}}{d} = 0{,}2$ à $0{,}5$. De traagheid heeft dan een enorme invloed. Aan te tonen is (Bijlage B3) dat $\hat{K}$ dan zelfs 20 à 50 maal zo groot mag worden als $\bar{K}$, voordat K zoveel rotatie-impulsie aan de steen heeft overgedragen dat hij zijn stabiliteit verliest.

Zodra echter $T_{\text{duur overschrijding kritieke } K}$ niet meer $\ll T_{\text{herhaling overschrijding kritieke } K}$, dan kan de opgewipte steen door de stoot van het terugvallen in de rustpositie meteen weer opwippen en dan verder.

Turbulentie

Bevindt een individuele steen zich stroomafwaarts van andere stroomverstorende elementen, dan zullen de u_∞ en dus ook K_z en K_{x1} fluctueren tengevolge van turbulentie. Dit geldt met name in een bed met stenen, met uitzondering van het eerste gedeelte.

Chepil (9) bestudeerde dit geval. Hij deed proeven met bolletjes (d=0,0032m en d=0,0064m). Fluctuaties in de krachten konden volgens hem in redelijke mate beschreven worden met een normale verdeling. Standaardafwijking=0,49 maal de gemiddelde waarde.

Het leek hem redelijk om voor de stabiliteit van de korrels rekening te houden met een sleepkracht = gemiddelde + 3 maal de standaardafwijking. Een grotere kracht zou dan, volgens de normale verdeling, in 0,13% van het aantal fluctuaties voorkomen.

Chepil neemt aan dat sleepkracht en liftkracht volledig gekoppeld zijn en dus dat er tegelijk bepaalde maxima in de beide krachten optreden.

Het is interessant om na te gaan of de traagheid bij deze steentjes een stabiliserende invloed kan hebben. Uit zijn metingen blijkt $T_{\text{fluctuatie}} = 0{,}008$ à $0{,}012$ sec, zodat $\frac{g T^2_{\text{duur overschrijding kritieke } K}}{d} \approx 0{,}1$ à $0{,}5$.

De traagheid zal dus een sterk stabiliserende invloed hebben, mits $T_{\text{herhaling overschrijding kritieke } K} \gg T_{\text{duur overschrijding kritieke } K}$, dus bijvoorbeeld voor extreme fluctuaties die 5% van het totaal aantal fluctuaties voorkomen. Het percentage van 0,13% lijkt dan ook erg conservatief gekozen.

Als we de steentjes model beschouwen voor grote stortstenen volgens de Froude schaal (gelijke waarden voor $\frac{U^2}{gd}$), dan kunnen we dezelfde conclusies trekken mits $\frac{g T^2_{\text{fluctuatie}}}{d}$ gelijk blijft.

Gezien het gestelde in 3.5 is dit te verwachten.

Factor c_2

Voor de berekening van de stabiliteit van stenen moet men bij een fluctuerende sleep- en liftkracht een kleinere gemiddelde kracht aanhouden dan $K_{\text{kritiek stationair}}$, namelijk $\bar{K} = c_2 K_{\text{kritiek stationair}}$.

Volgens de maat die Chepil hanteert moet dus $c_2 = \frac{1}{1+3.0,49} = 0,4$, althans in de situatie van een stortstenen bed met goed ontwikkelde grenslaag. Deze waarde lijkt dus aan de conservatieve kant.

Uit de proeven van M598-V concludeert Bakker: $c_2 \approx 0,35$

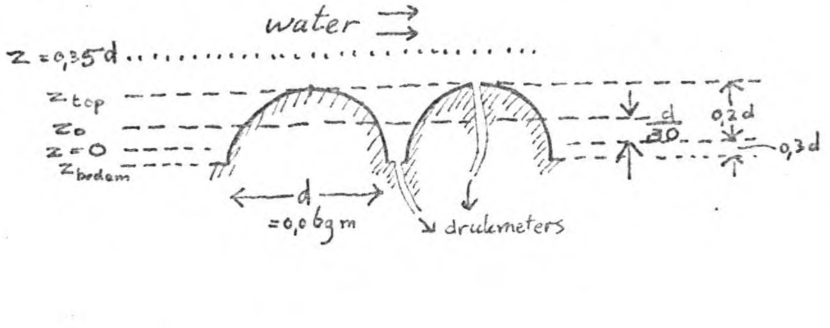
Het lijkt de moeite waard om de factor c_2 nader te onderzoeken, enerzijds door berekeningen over de rol van de traagheid, anderzijds door bestudering van de turbulente fluctuaties in lift- en sleepkracht.

3.6 Experimenten van Einstein en El-Samni

Ondanks de overvloed van experimenten, enerzijds ter bepaling van de τ_{kritiek} bij korrels op de bodem van een rivier of kanaal, anderzijds ter bepaling van C_D en C_L in verder ongestoorde stroom, zijn er zeer weinig gegevens over de grootheden C_{DB} C_{LB} en $\frac{\varepsilon}{\zeta}$. Voorzover bekend hebben alleen Einstein en El-Samni (7) en Chepil (8),(9) en (10) pogingen gedaan om deze grootheden te bepalen. Ook White heeft de liftkracht bestudeerd, maar komt op dubieuze grond tot de conclusie dat deze verwaarloosbaar klein is.

Zowel Einstein en El-Samni als Chepil meten drukken bij de korrel, meten het snelheidsprofiel en gaan uit van het eenvoudige logaritmische snelheidsprofiel, dat steeds goed met de metingen overeenkomt, mits men de lijn z=0 op een bepaalde plaats onder de top van de (halve) bollen kiest. Die afstand verschilt bij de verschillende proeven. Hetzelfde geldt voor $\frac{z_0}{d}$

Einstein en El-Samni doen metingen in water in een goed ontwikkelde grenslaag boven een veld met vastgecementeerde halve bollen (d=0,069m), die dicht op elkaar staan in een hexagonaal patroon. Zij doen tevens metingen boven een vergelijkbaar bed met grindkorrels. De belangrijkste resultaten zijn hieronder vermeld.



$$Re = \frac{d\,u(z_{top})}{\nu} = 2.10^4$$

Gemeten:

$$p(z_{bodem}) - p(z_{top}) = 0{,}178 \cdot \tfrac{1}{2}\rho u^2(0{,}35d)$$

Omgerekend met $u(z) = \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}\,\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$

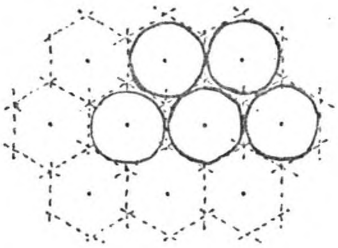
en $z_0 = \frac{d}{30}$ (gemeten)

en $z_{top} = 0{,}2d$ (gemeten)

blijkt $p(z_b) - p(z_{top}) = 3{,}0\,\tau_b$

Met deze gegevens kunnen we een schatting maken van de kracht die hele bollen op een poreus bed zouden ondervinden, als ze op dezelfde manier gerangschikt zouden zijn. Hieruit kunnen we C_{DB} en C_{LB} bepalen.

Volgens 2.6 geldt (geval IV): $\tau_b = \frac{c_1 c_3}{c_4} \; \frac{[K_x]_{bol}}{\frac{\pi}{4} d^2}$



De halve bollen liggen tegen elkaar aan volgens een hexagonaal patroon. Daar bedoelen zij waarschijnlijk mee wat hiernaast geschetst is. Dan mogen we waarschijnlijk wel concluderen:

$c_1 = \frac{\frac{\pi}{4} d^2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\, d^2} = 0,91$

$c_3 = 1$ Immers, de druk stroomafwaarts van de ene halve bol is meteen de druk stroomopwaarts van de volgende. Bij deze opstelling zullen waarschijnlijk geen drukverschillen bestaan aan de onderkant van de bollen, afgezien van de globale $\frac{\partial p}{\partial x}$. Maar die wordt apart in rekening gebracht (zie 2.8).

$c_4 = 1$ De bodem tussen de stenen zal wel geen schuifspanning opnemen.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Als nu } u_\infty = u(z_{top}) \\ \left.\begin{array}{r} z_{top} = 0{,}2d \\ z_0 = \frac{d}{30} \end{array}\right\} \text{Zie proefresultaten} \end{array}\right\} \rightarrow u_\infty = \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}\,\ln\left(\frac{0{,}2d}{\frac{d}{30}}\right) \;\downarrow\; \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 = 10\,\tau_b$$

$C_{DB} = \frac{K_x}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2} = 0,11$

Wat de liftkracht betreft, mogen we misschien stellen, overeenkomstig wat Chepil vond (zie 3.7) : $\frac{K_z}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{p(z_{bodem}) - p(z_{top})}{2,85}$

zodat $C_{LB} = \frac{K_z}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2} = \frac{1}{2,85} \cdot \frac{p(z_b) - p(z_{top})}{10\,\tau_b} = 0,105$

3.7 Experimenten van Chepil

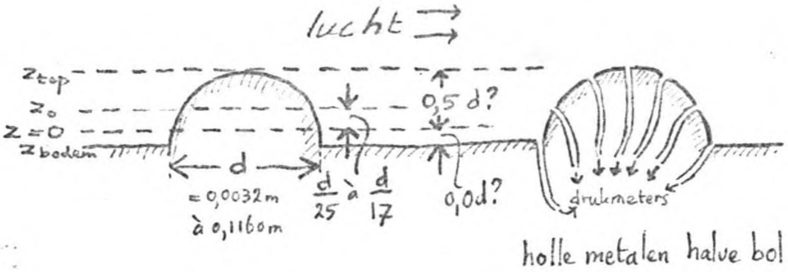
Chepil (8) meent dat een bed van korrels beter gerepresenteerd kan worden door halve bollen die op een grotere afstand van elkaar staan. Hij plaatst halve bollen (d=0,0032m à d=0,1160m) in een hexagonaal patroon op een onderlinge afstan van 3d in een windtunnel. Op een proef na, meet hij dáár waar de grenslaag goed ontwikkeld is.

Uit de gemeten drukverdeling berekent hij de kracht op de halve bol. Voor de liftkracht neemt hij aan dat onder de halve bol de druk gelijk is aan het gemiddelde van de druk in de vier meetpunten langs de onderrand. De τ_b berekent hij uit het gemeten snelheidsprofiel met behulp van de eenvoudige logaritmische formule:

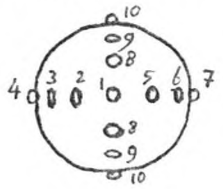
$$u(z) = \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}\,\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Resultaten Chepil:

$$Re = \frac{d \cdot u(z_{top})}{\nu} = 2.10^3 \text{ à } 3.10^4$$



holle metalen halve bol



$$\frac{\tau_b}{\frac{K_x}{\frac{\pi}{4}d^2}} = 0{,}25 \text{ voor } d = 0{,}0254\,m$$
$$= 0{,}20 \text{ voor } d = 0{,}0508\,m$$
$$= 0{,}18 \text{ voor } d = 0{,}1016\,m$$

$$\frac{\tau_b}{\frac{K_x}{\frac{\pi}{4}d^2}} = 0{,}21 \text{ gemiddeld}$$

$\frac{\text{liftkracht}}{\text{sleepkracht}} = 0{,}85$ De verdeling van de drukken over het oppervlak is zodanig dat geldt: $\frac{\text{liftkracht}}{\frac{\pi}{4}d^2} = \frac{\frac{1}{2}(p_4+p_7)-p_1}{2{,}85}$

Uit een en ander kunnen we opmaken wat de kracht op bollen in deze opstelling zou zijn. Daaruit kunnen we C_{DB} en C_{LB} bepalen.

Met de redenering van 2.3 volgt uit de resultaten van Chepil:

$$\tau_b = 0{,}21\,[K_x]_{\text{halve bol}} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{4}d^2} \qquad \text{waarin dus } 0{,}21 = \frac{c_1}{c_4}$$
$$= 0{,}21 \cdot c_3 \cdot [K_x]_{\text{hele bol}} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{4}d^2}$$

Als nu $u_\infty = u(z_{top})$
$\left.\begin{array}{l} z_{top} = 0{,}5d \\ z_0 = \frac{d}{20} \end{array}\right\}$ Zie proefresultaten $\Bigg\} \rightarrow u_\infty = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}\,\ln\left(\frac{0{,}5d}{\frac{d}{20}}\right)$

$$\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 = 16{,}5\ \tau_b$$

$$[C_{DB}]_{\text{hele bol}} = \frac{[K_x]_{\text{hele bol}}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4}d^2} = \frac{1}{16{,}5 \cdot 0{,}21 \cdot c_3} = \frac{0{,}29}{c_3}$$

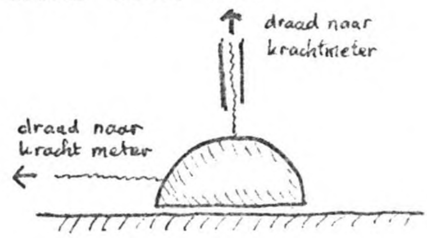
met $c_3 = 0{,}8$ $[C_{DB}]_{\text{hele bol}} = 0{,}36$

N.B. De halve bollen staan op grote afstand van elkaar (3d). Helaas geeft Chepil niet aan wat hij bedoelt met "hexagonaal patroon". Want hij geeft twee verschillende waarden voor c_1 op: $c_1 = 0{,}11$ (8) en $c_1 = 0{,}073$ (9). Uit $\frac{c_1}{c_4} = 0{,}21$ volgt dan $c_4 = 0{,}52$ c.q. $c_4 = 0{,}35$.

Er is geen reden om aan te nemen dat de liftkracht bij de halve bol erg zou verschillen van die bij de hele bol. Dus:

$$[C_{LB}]_{\text{helebol}} = 0{,}85 \cdot [C_{DB}]_{\text{halve bol}} = 0{,}25$$

Ook meet Chepil, ter controle, de kracht op de bol op directe wijze. De resultaten stemmen goed overeen. Zie schets.



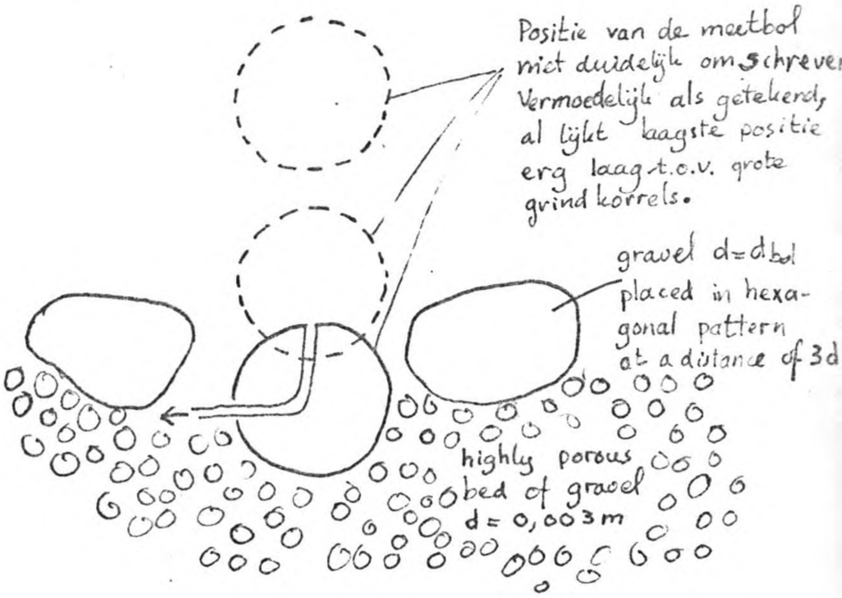
Voorts deed Chepil (9) proeven in de windtunnel met bolletjes (d = 0,0032m en d = 0,0042m) in een bed van losse korrels van dezelfde diameter. De gemiddelde sleepkracht en liftkracht komen goed overeen met de proeven op de halve bollen. Dit zou er op kunnen duiden dat eerder $c_3 > 0{,}8$ dan $c_3 < 0{,}8$.

Bij de grootste korrel in de hoogste positie vond hij $z_0 = \frac{d}{20}$

$$z_{top} - z_0 = 0{,}7d$$

Bij deze zelfde proeven komt hij, redenerenderwijs op $\varepsilon = 0{,}21$. Hij veronderstelt namelijk dat de kracht per loodrecht op de stroomrichting geprojecteerd oppervlakte, recht evenredig is met u (z) , berekend volgens het logaritmisch profiel.

Tenslotte deed Chepil (10) luchtdrukmetingen aan bollen die in, op en vlak boven een grindbed werden gehouden met grindkorrels van dezelfde diameter. Uit de drukmetingen bepaalde hij K_x en K_z , doch niet ε . Alleen enige resultaten met de grootste bollen (d=0,051m) worden hieronder vermeld.



<u>In laagste positie:</u>

$z_o = 0{,}09d$

$z_{top} = 0{,}5d$ (vermoedelijk)

$Re_{z_{top}} = \dfrac{d\,u(z_{top})}{\nu} = 1$ à $2{,}4 \cdot 10^4$

$\tau_b = 0{,}073$ à $0{,}156 \cdot \dfrac{K_x}{\frac{\pi}{4} d^2}$

Dus $\dfrac{c_1 c_3}{c_4} = 0{,}073$ à $0{,}156$

Indien weer $\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 = 16{,}5\,\tau_b$

dan $C_{DB} = 0{,}39$ à $0{,}83$

$\dfrac{K_z}{K_x} = 0{,}53$ à $0{,}76$

<u>Positie 0,25d hoger:</u>

$Re = 1{,}3$ à $3{,}2 \cdot 10^4$

$\tau_b = 0{,}072$ à $0{,}087 \cdot \dfrac{K}{\frac{\pi}{4} d^2}$

Dus $\dfrac{c_1 c_3}{c_4} = 0{,}072$ à $0{,}087$

Indien weer $\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 = 16{,}5\,\tau_b$, dan $C_{DB} = 0{,}70$ à $0{,}83$

$\dfrac{K_z}{K_x} = 0{,}19$ à $0{,}74$

<u>Positie 2d hoger:</u>

Liftkracht is niet meer waar te nemen. We kunnen nu wel aannemen dat de situatie practisch gelijk is aan die van een bol in verder ongestoorde stroom. Er is nog wel sprake van een grenslaag: de grenslaag hoogte is hier $\delta = 8d$. Maar de windsnelheidsgradient is reeds klein: $\frac{\partial u}{\partial z} \approx 0{,}16\,\frac{u(2d)}{d}$

$Re_{z_{midden}} = \dfrac{d \cdot u(z_{midden})}{\nu} = 2$ à $5 \cdot 10^4$ als $z_{midden} = 2d$

$C_D = \dfrac{K_x}{\frac{\pi}{4} d^2 \cdot \frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = 1{,}2$ à $1{,}3$

3.8 C_{LB} C_{DB} $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ φ en u_∞ bij breuksteen.

Een belangrijk verschil tussen de proeven van Einstein en El-Samni enerzijds en alle proeven van Chepil anderzijds, is de opstelling van de korrels. Dit verschil uit zich allereerst in de ligging van de lijn u=0 en in de waarden van z_o.
Voorts zijn sleepkracht en liftkracht bij Chepil, waar de korrels extreem geëxposeerd liggen, hoger dan bij Einstein en El-Samni, waar de korrels elkaar een onnatuurlijk grote bescherming bieden.

Desniettemin is het verschil in de gevonden waarden voor C_{LB} en C_{DB} betrekkelijk gering. Vergelijk de verschillen bij de in 5.1 behandelde formules. Dit is een positieve aanwijzing voor de bruikbaarheid van de begrippen "dragcoefficient" en "liftcoefficient" in deze situatie. Opvallend is overigens dat de verhouding $\frac{C_{LB}}{C_{DB}}$ nog minder verschilt in de ene en de andere opstelling, tenminste indien we de opstellingen waarbij de korrel boven de bodem wordt gehouden, buiten beschouwing laten.

Hoewel de proeven ons veel waardevolle informatie geven, is het eigenlijk nog niet mogelijk de coëfficiënten C_{LB} en C_{DB} met enige zekerheid te bepalen. Afgezien van het feit dat geen "normale" opstelling beproefd is, zijn de proeven namelijk nog in twee opzichten te beperkt voor ons doel:

- De getallen van Reynolds zijn erg laag
- Er zijn geen proeven gedaan aan het begin van een grenslaag

Voorlopig zullen voor C_{LB} C_{DB} en $\frac{\varepsilon}{\zeta}$ waarden aangehouden worden die ongeveer inliggen midden tussen de waarden van Einstein en El-Samni en die van Chepil:

$C_{LB} = 0{,}15$

$C_{DB} = 0{,}20$

$\frac{\varepsilon}{\zeta} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = 0{,}33$

Voorts zullen we het volgende aannemen:

$\varphi = 40^\circ$ Helaas vergeet men vaak deze grootheid te meten.

$u_\infty = u(z_{top})$ Dit is betrekkelijk willekeurig.

Met bovengenoteerde waarden wordt de formule voor de kritieke toestand (3.1):

$$\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 3{,}2 \cdot c_2 \left\{ \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\sin(40^\circ + \alpha)}{\cos 40^\circ} \Delta \right\}$$

en, als $\alpha = 0$:

$$\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 3{,}2 . c_2 \left\{ \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} + 0{,}84 \Delta \right\}$$

N.B. Als het eenvoudige logaritmische snelheidsprofiel van toepassing is ter hoogte van de steen, dan geldt:

$$u_\infty = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}} \ln\left(\frac{z_{top}}{z_0}\right)$$

Geldt voorts $\left.\begin{array}{l} z_{top} = 0{,}4d \\ z_o = \frac{d}{30} \end{array}\right\}$ dan: $\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 = 19{,}2 \, \tau_b$

Volgens 2.6 geldt echter $\tau_b = \frac{c_1 c_3}{c_4} \cdot C_{DB} \cdot \frac{1}{2}\rho u_\infty^2$

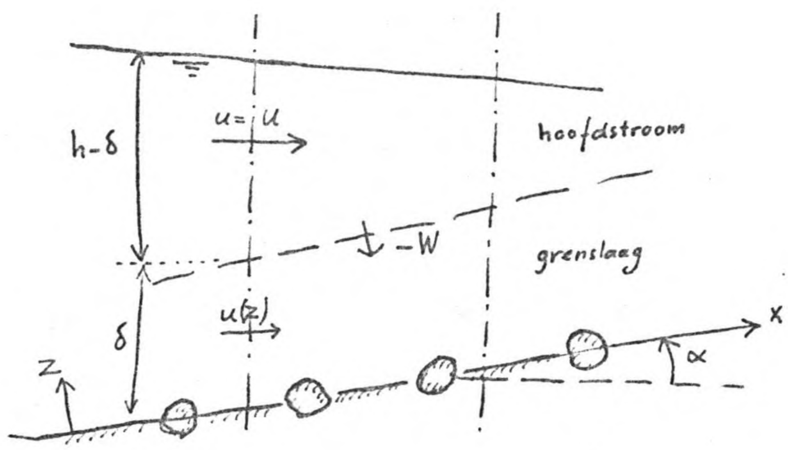
Dit klopt als we aannemen: $\frac{c_1 c_3}{c_4} = 0{,}26$ Vergelijk $\frac{c_1 c_3}{c_4} = 0{,}9$ (Einstein & El-Samni)

en $\frac{c_1}{c_4} = 0{,}21$ (Chepil)

4. GRENSLAAGONTWIKKELING

4.1 Algemeen. Basisvergelijkingen

Evenals reeds aangegeven in 2.6 en 3.1 is u_∞ een funktie van de grenslaagdikte δ. In 3.8 wordt aangeduid hoe de relatie is tussen u_∞ en het snelheidsprofiel door bijvoorbeeld te stellen $u_\infty = u(z_{top})$ en $z_{top} = 0{,}4 \cdot d$.
In dit hoofdstuk wordt aandacht besteed aan de grenslaagdikte en het snelheidsprofiel.



We kunnen de volgende vier vergelijkingen opschrijven:

- Continuïteitsvergelijking voor de grenslaag
- Continuïteitsvergelijking voor de hoofdstroom
- Balans voor de grenslaag van de impulsie in x-richting
- Vergelijking in de hoofdstroom van de impulsie in x-richting

Door de balans te nemen voor de hele grenslaag (ofwel: geïntegreerde impulsievergelijking) vermijden we grootheden (τ en u) die behalve van x en t, ook nog een funktie zijn voor z. In deze vier vergelijkingen (uitgeschreven in bijlage B4), verschijnen zeven funkties voor x en t:

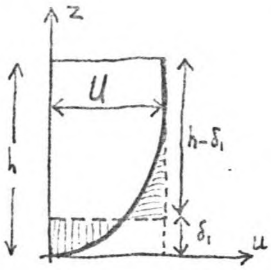
$$W(x,t)$$
$$U(x,t)$$
$$h(x,t)$$
$$\delta(x,t)$$
$$\int_0^\delta u\,dz\,(x,t)$$
$$\int_0^\delta u^2 dz\,(x,t)$$
$$\tau_b(x,t)$$

Er moeten, behalve de randvoorwaarden, dus nog drie vergelijkingen gevonden worden. Deze zijn te halen uit de semi-empirische formules voor het snelheidsprofiel in de grenslaag.

Het is echter gebruikelijk om in plaats van $\int_0^\delta u\,dz$ en $\int_0^\delta u^2 dz$ de grootheden δ_1 en δ_2 in te voeren. Deze worden als volgt gedefinieerd:

Verplaatsingsdikte δ_1

$$\delta_1 = \int_0^h \left(1-\frac{u}{U}\right)dz$$



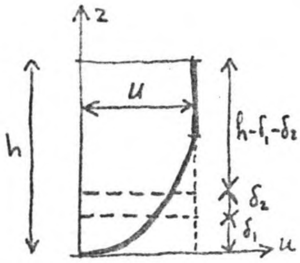
per definitie:

$$\rho(h-\delta_1)U = \int_0^h \rho u\,dz$$ = massa transport door een verticale doorsnede p.e.v. breedte (y)

= hoeveelheid impulsie p.e.v. lengte (x) en p.e.v. breedte (y)

Impulsverliesdikte δ_2

$$\delta_2 = \int_0^h \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dz$$



per definitie:

$$\rho(h-\delta_1-\delta_2)U^2 = \int_0^h \rho u^2 dz$$

= impulsie transport door een verticale doorsnede p.e.v. breedte.

N.B. Wil men uit gemeten waarden van experimenten de dikte van de grenslaag bepalen, dan is het niet raadzaam om de laagste waarde van z te nemen waar volgens de meting geen gradiënt meer is. Beter is het δ_1 te bepalen uit alle gemeten snelheden in de grenslaag om vervolgens δ te berekenen gebruik makend van een theoretisch snelheidsprofiel.

Uit de definities volgt ook: $\delta_1 = \int_0^\delta \left(1-\frac{u}{U}\right)dz$ en $\delta_2 = \int_0^\delta \frac{u}{U}\left(1-\frac{u}{U}\right)dz$

zodat: $\int_0^\delta u\,dz = U(\delta-\delta_1)$ en $\int_0^\delta u^2 dz = U^2(\delta-\delta_1-\delta_2)$

Om de grootheid $W(x,t)$ en één continuïteitsvergelijking te vermijden past men, in plaats van eerstgenoemde vier vergelijking, de volgende drie toe:

- Continuïteitsvergelijking gehele stroom: $\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{U(h-\delta_1)\right\}$

- Balans voor gehele stroom van impulsie in x-richting: $\frac{\partial}{\partial t}\left\{U(h-\delta_1)\right\} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{U^2(h-\delta_1-\delta_2)\right\} - gh\left(\frac{\partial h}{\partial x}+tg\alpha\right) - \frac{\tau_b}{\rho}$

- Vergelijking in de hoofdstroom van impulsie in x-richting: $\frac{\partial U}{\partial t} = -U\frac{\partial U}{\partial x} - g\left(\frac{\partial h}{\partial x}+tg\alpha\right)$

We houden dan de volgende vijf funkties van x en t over:

$U(x,t)$
$h(x,t)$
$\delta_1(x,t)$
$\delta_2(x\ t)$
$\tau_b(x\ t)$

Hoewel δ niet in bovenstaande drie vergelijkingen aanwezig is, is de grootheid niet te vermijden in de drie vergelijkingen die volgen uit het snelheidsprofiel in de grenslaag. Deze zullen in de volgende paragraaf behandeld worden.

N.B. Zie voor deze vergelijkingen ook Dailey and Harleman (11), par. 8-2.3 en Meddens (12) blz. 17,18. .

N.B. Waar het hier gaat om enkele grote, individuele stenen, kan het zin hebben om niet met continue grootheden te werken, met name bij de overgang van "geen grenslaag" naar " wel een grenslaag" (vergelijk geval II, in 2.3 en 2.7). De balans voor de gehele stroom van impulsie in x-richting was reeds in 2.5 opgeschreven. In iets andere vorm luidt hij hier:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\delta}^{h}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2}\rho U\,dx\,dy\,dz = \int_{0}^{h}\int_{y_1}^{x_2}\rho\left[u^2(x_1)-u^2(x_2)\right]dy\,dz + \tfrac{1}{2}\rho g(y_2-y_1)\left\{h^2(x_1)-h^2(x_2)-(x_2-x_1)\left[h(x_1)+h(x_2)\right]\mathrm{tg}\,\alpha\right\} - \sum K_x$$

of

$$= \rho U^2(x_1)\left\{h(x_1)-\delta_1(x_1)-\delta_2(x_1)\right\}\left\{y_2-y_1\right\} - U^2(x_2)\left\{h(x_2)-\delta_1(x_2)-\delta_2(x_2)\right\}\left\{y_2-y_1\right\}$$
$$+ \tfrac{1}{2}\rho g\left\{y_2-y_1\right\}\left\{h^2(x_1)-h^2(x_2)-(x_2-x_1)\left[h(x_1)+h(x_2)\right]\mathrm{tg}\,\alpha\right\} - \sum K_x$$

4.2 Snelheidsprofiel in de grenslaag

Voorop gesteld zij, dat er weinig bekend is over het eerste stuk van een grenslaag. Bijna alle formules gelden voor de goed ontwikkelde grenslaag. Bij vele berekeningen (o.a. Meddens (12)), wordt verondersteld dat het eerste deel van de grenslaag laminair is. In ons geval is dit geen logische veronderstelling. Op de huid van de eerste steen zal misschien een stukje laminaire grenslaag bestaan, maar niet in „de" grenslaag van de totale bodem.

Voor de berekening van de stabiliteit van de "eerste" steen (stroomopwaarts van die steen is nog geen grenslaag), is de grenslaagberekening niet nodig. Wel voor de daarop volgende stenen. Daar zal de grenslaag nog nauwelijks dikker zijn dan de stenen. Hij is nog niet "goed ontwikkeld" te noemen.

Verder is het van belang op te merken, dat bijna alle snelheidsprofielen bepaald zijn voor eenparige stroming, waarbij $\frac{\partial h}{\partial x}=0$. Dit met uitzondering van de over de volle hoogte ontwikkelde grenslaag ($\delta = h$) bij eenparige stroming door een kanaal of buis met constante $\frac{\partial h}{\partial x}$ (I)

De hier behandelde snelheidsprofielen zijn logaritmische profielen, gebaseerd op de mengweg theorie. Er zijn nog vele andere formules doch die zijn geen van alle afgeleid en getest voor de hoge Reynoldsgetallen die hier in het geding zijn.

Uitgangspunt van de mengweg-theorie is steeds: $\frac{\tau}{\rho}(z) = L^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$

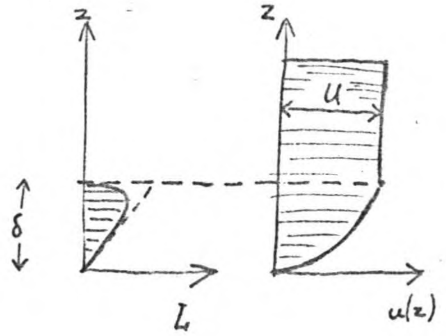
waarin: L = mengweg

Het eenvoudige logaritmische snelheidsprofiel

Neemt men nu voor $z \leq ez_0$ $\tau(z) = \text{constant} = \tau_b$

en voor $ez_0 \leq z \leq \delta$ $L = \kappa z\sqrt{1-\frac{z}{\delta}}$

$$\frac{\tau}{\rho}(z) = \frac{\tau_b}{\rho}\left(1-\frac{z}{\delta}\right)$$



Dan volgt: $u(z) = \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}\,\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$

$\frac{\partial u}{\partial z}(z) = \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}\,\frac{1}{z}$ dus $\frac{\partial u}{\partial z}(\delta) \neq 0$!

Dus ook: $\frac{\tau_b}{\rho U^2} = \frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}$

en : $\frac{u(z)}{U} = \frac{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}$

$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1}{\ln\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}$

$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{1}{\ln\left(\frac{\delta}{z_0}\right)} - \frac{2}{\ln^2\left(\frac{\delta}{z_0}\right)}$

Voorts gedaante a) $\frac{\tau_b}{\rho} = \frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}\left\{u(z_2)-u(z_1)\right\}^2$ $z_1 < z_2 < \delta$

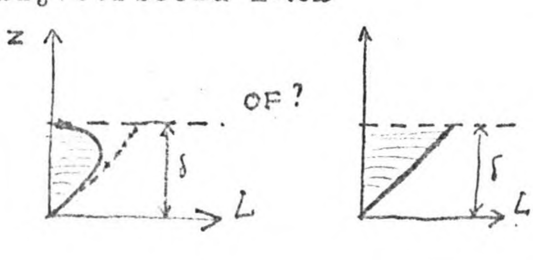
gedaante b) $\frac{\tau_b}{\rho} = \frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{h}{ez_0}\right)}\,\bar{u}^2$ $\bar{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u(z)\,dz$

gedaante c) $\frac{\tau_b}{\rho} = \frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{z}{z_0}\right)}\,u^2(z)$

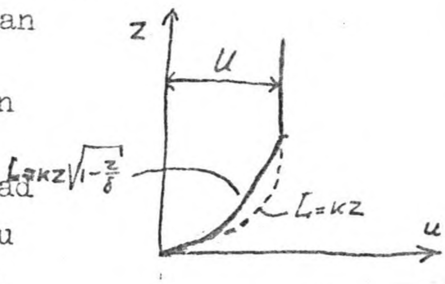
Wanneer we deze formule in verschillende gedaanten toepassen op de experimentele resultaten van M 598-V (1) en M 711-II (2) (2), dan blijken er nogal verschillende, tegenstrijdige resultaten uit te komen. Zie bijlage B5. Dit komt enerzijds door een onjuist gebruik van de formule, althans gedaante b. Voorts door de keuze van verschillende waarden van z_0.

Maar er blijken ondanks dat, nòg een aantal tegenstrijdigheden. We moeten wel tot de conclusie komen dat het snelheidsprofiel niet beantwoordt aan de hierboven genoemde basisformule. Zo blijkt deze formule, in gedaante c, systematisch een grotere τ_b op te leveren als een grotere z gekozen wordt en de op die hoogte gemeten $u(z)$ wordt ingevuld. Als we aannemen dat er geen systematische meetfout is, dan moet de funktie van z $\left(\frac{\tau_b}{\rho u^2}\right)$, die volgens (de) formule, (aan) $\frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{z}{z_0}\right)}$ gelijk is, sterker dalen bij toenemende z, dan volgens de formule het geval is.

Een oorzaak van de fout, kan zijn een verkeerde keuze van de formule voor de mengweg. Zo lijkt het niet erg waarschijnlijk dat de mengweg zodra z tot δ nadert, weer kleiner wordt, tenzij $\delta = h$, het geval van een over de volle hoogte ontwikkelde grenslaag.
Logischer lijkt bijvoorbeeld $L = \kappa z$



Veronderstelt men weer $\frac{\tau}{\rho}(z)=\frac{\tau_b}{\rho}\left(1-\frac{z}{\delta}\right)$ dan moet volgens $\frac{\tau}{\rho}=L^2\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ bij waarden van z dicht bij δ, kleinere waarden aannemen dan met $L=\kappa z\sqrt{1-\frac{z}{\delta}}$. Het snelheidsprofiel zal dan anders worden: vooral grotere waarden van $u(z)$, wanneer z de waarde δ nadert.



Dit impliceert dat in de formule $\frac{\tau_b}{\rho u^2(z)}$ inderdaad sterker daalt bij toenemende z dan indien zou gelden: $\frac{\tau_b}{\rho u^2}=\frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{z}{z_0}\right)}$. Maar is de veronderstelling $\frac{\tau}{\rho}(z)=\frac{\tau_b}{\rho}\left(1-\frac{z}{\delta}\right)$ wel juist?

Velocity defect law voor $z>0{,}15\delta$

Volgens Dailey en Harleman (lit. 11, 12-3.1 en 12-3.3) geldt voor permanentie en mits $\frac{\partial h}{\partial x}=0$:

voor $ez_0<z<0{,}15\delta$: $\left.\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\tau}{\rho}\right)=0\\ L=\kappa z\end{array}\right\}$ zelfde snelheidsprofiel: $u(z)=\frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$

voor $0{,}15\delta<z<\delta$ „Velocity Defect Law": $U-u(z)=-3{,}7\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}\ln\left(\frac{z}{\delta}\right)$

Hieruit volgt ondermeer (bijlage B7):

$$\frac{\tau_b}{\rho U^2}=\frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}$$

$$\frac{u(z)}{U}=\frac{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)} \qquad \text{voor } ez_0<z<0{,}15\delta$$

$$\frac{u(z)}{U}=1{,}53\,\frac{\ln\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}+1 \qquad \text{voor } 0{,}15\delta<z<\delta$$

$$\frac{\delta_1}{\delta}=\frac{1{,}5}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta}=\frac{1{,}5}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}-\frac{3{,}8}{\ln^2\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}$$

Men kan hieruit opmaken dat voor $z>0{,}15\delta$, $\frac{\tau_b}{\rho u^2}$ inderdaad sterker daalt bij toenemende z. Het zou interessant zijn om in détail na te gaan of deze toepassing van de velocity defect law homogenere resultaten oplevert bij toepassing op de metingen van M578-V en M711-II, oo al geldt bij de laatste niet $\frac{\partial h}{\partial x}=0$. Maar laten we eerst aandacht richten op het schuifspanningsverloop $\frac{\tau}{\rho}(z)$.

Snelheidsprofielen en schuifspanningsprofielen, ook als $\frac{\partial h}{\partial x}\neq 0$.

In de grenslaag geldt $\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z}=0$

De hierboven genoemde veronderstelling $\frac{\tau}{\rho}(z)=\frac{\tau_b}{\rho}\left(1-\frac{z}{\delta}\right)$ is alleen toelaatbaar, als $\frac{\partial}{\partial z}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}\right\}=0$.

Omdat hier $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ en omdat bij de bodem $u(x,t)=0$, is dit alleen zo als $\frac{\partial u}{\partial x}=0$ voor elke waarde van z.

Dit is ondermeer zo bij een over de volle hoogte ontwikkelde grenslaag. Maar verder is het een nogal uitzonderlijk geval.

In bijlage B9 is kwalitatief nagegaan welke snelheidsprofielen en schuifspanningsprofielen eventueel zouden kunnen bestaan. We kunnen er de volgende conclusies uittrekken:

- In de situatie waarvoor de velocity defect law zou gelden, nl $\frac{\partial h}{\partial x}=0$ mag inderdaad gesteld worden dat dicht bij de bodem $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\tau}{\rho}\right)=0$. Zie geval a).
- In de situatie van permanente stroom over een overlaat, dus het geval van M711- I en M711-II, tevens het geval dat is bestudeerd door Meddens, zou kunnen gelden dat $\frac{\tau}{\rho}(z)=\frac{\tau_b}{\rho}\left(1-\frac{z}{\delta}\right)$, (geval b2), maar even goed iets als $\frac{\tau}{\rho}(z)=\frac{\tau_b}{\rho}\left(1-\frac{z}{\delta}\right)^{\alpha}$, waarbij $\alpha>1$ (geval b1) of $\alpha<1$ (geval b3).
- Wanneer $\frac{\partial U}{\partial x}$ en U tegengesteld van teken zijn kan de stroomrichting in de grenslaag tegengesteld zijn aan die van de hoofdstroom: geval c2) of c3). Er bestaat dan een neer boven de bodem. Dergelijke situaties zijn echter zelden kritiek, omdat de τ_b zelden erg grote waarden bereikt.

N.B. Bij gelijkvormige snelheidsprofielen zal de verhouding $\frac{\int_0^\delta u\,dz}{\int_0^\delta u^2 dz}$ gelijk zijn.

Hetzelfde geldt voor de verhouding $\frac{\delta_1}{\delta_2}$. Volgens de logaritmische formules verandert $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ iets, maar niet veel, met $\frac{\delta}{z_0}$, dus met x.

Voor een "orthodox" snelheidsprofiel (geval b1 of b2) zal de verhouding $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ weinig afwijken van die welke volgt uit een van de logaritmische formules. Hij zal ook weinig veranderen met x. Dit blijkt ook uit de berekeningsresultaten van Meddens (lit. 12, blz 44 en 45; $\frac{\delta_1}{\delta_2}=H_{12}$).

Overzicht van enige waarden

$\frac{\delta}{z_0}$ $\left(\approx 30\frac{\delta}{d}\right)$	$\frac{\tau_b}{\rho U^2}$ Volgens eenvoudige logaritm. snelh. prof	$\frac{\tau_b}{\rho U^2}$ Volgens Velocity Def Law voor $z>0{,}15\delta$	$\frac{\delta_1}{\delta}$ eenvoudig log. sn. prof.	$\frac{\delta_1}{\delta}$ Velocity D. Law	$\frac{\delta_2}{\delta}$ Eenvoudig Log. sn. prof	$\frac{\delta_2}{\delta}$ Velocity D. Law	$\frac{\delta_1}{\delta_2}$ Eenvoudig Log. sn. prof	$\frac{\delta_1}{\delta_2}$ Vel. def. law.
10 *)	0,0300	0,0143	0,434	0,451	0,058	0,109	7,5	4,1
30 *)	0,0138	0,0081	0,294	0,338	0,122	0,145	2,4	2,3
100	0,0075	0,0050	0,217	0,266	0,123	0,146	1,76	1,82
300	0,0049	0,0035	0,175	0,223	0,114	0,139	1,53	1,61
1000	0,0033	0,0025	0,145	0,189	0,103	0,129	1,41	1,47

*) Formules eigenlijk niet toepasbaar, omdat $\delta < z_{top}$

N.B. Bij M598-V en M711-II zien we dat $\frac{\delta}{z_0}$ inligt tussen ongeveer 100 en 600.

Voorbeeld van enige waarden van $\frac{u_\infty}{U}$

Stel $u_\infty = u(z_{top})$

$z_{top} = 0{,}4\, d$

$z_0 = \frac{d}{30}$

$\frac{\delta}{z_0}$	$\frac{\delta}{d}$	$\frac{u_\infty}{U}$ Volgens eenvoudig log. snelh. profiel	$\frac{u_\infty}{U}$ Volgens Velocity Defect Law voor $z > 0{,}15\delta$
10 *)	0,3 *)	1,08 *)	1,08 *)
30**)	1 **)	0,73	0,68
100	3,3	0,54	0,44
300	10	0,43	0,37
1000	33	0,36	0,31

*) Kennelijk beide formules onjuist

**) Formules waarschijnlijk niet toepasbaar

4.3 Het oplossen van de basisvergelijkingen

Als we uitgaan van de Velocity Defect Law voor $z > 0{,}15\delta$, dan beschikken we in een permanent geval over de volgende vergelijkingen om de zes onbekenden $U(x\,t)$ $h(x\,t)$ $\delta(x\,t)$ $\delta_1(x\,t)$ $\delta_2(x\,t)$ en $\tau_b(x\,t)$ op te lossen:

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{U(h-\delta_1)\right\}$$

$$0 = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{U^2(h-\delta_1-\delta_2)\right\} - gh\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\mathrm{tg}\,\alpha\right) - \frac{\tau_b}{\rho}$$

$$0 = -U\frac{\partial U}{\partial x} - g\left(\frac{\partial h}{\partial x}+\mathrm{tg}\,\alpha\right) \qquad \text{of : Bernoulli}$$

$$\frac{\tau_b}{\rho U^2} = \frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{2{,}8\,\delta}{z_0}\right)}$$

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{1{,}5}{\ln\left(\frac{2{,}8\,\delta}{z_0}\right)}$$

$$\frac{\delta_2}{\delta} = \frac{1{,}5}{\ln\left(\frac{2{,}8\,\delta}{z_0}\right)} - \frac{3{,}8}{\ln^2\left(\frac{2{,}8\,\delta}{z_0}\right)}$$

In de meeste gevallen zal het niet mogelijk zijn deze vergelijkingen analytisch op te lossen.

Men kan dan pogen een numerieke oplossing te vinden met behulp van een computerprogramma. Voor het geval van permanente stroom over een overlaat heeft Meddens(12) een rekenprogramma ontwikkeld. Berekeningen uitgevoerd met dit programma, zijn vergeleken met metingen, gedaan op de Landbouwhogeschool in Wageningen. Het zou interessant zijn met dit programma de grenslaagontwikkeling en de bodemschuifspanning te berekenen voor de gevallen van M711-II.

Het ging Meddens om de exacte waarde van de afvoercoëfficient van de lange overlaat ten gevolge van de wrijving. Gaat het echter om de vraag: "hoe zwaar moet breuksteen zijn om in een bepaalde situatie nog juist stabiel te blijven?", dan is het wellicht voldoende om eerst $U(x)$ bij benadering te berekenen.

Men maakt daartoe een voorlopige schatting van $\delta_1(x)$ in de continuïteitsvergelijking. Dan zijn U(x) en h(x) te bepalen uit deze vergelijking, de impulsievergelijking van de hoofdstroom en de randvoorwaarden. De situatie is dan in de berekeningen identiek aan het geval zonder wrijving, waarbij men de bodem steeds met $\delta_1(x)$ verhoogt("schijnbare bodem").

Om τ_b δ δ_1 en δ_2 te vinden moet nu de geïntegreerde impulsievergelijking worden opgelost met behulp van de laatste drie vergelijkingen. We kunnen eerstgenoemde in de volgende vorm schrijven na toepassing van continuïteitsvergelijking en impulsievergelijking van de hoofdstroom (of Bernoulli).

$$0 = \frac{\partial \delta_2}{\partial x} + (2\delta_2 + \delta_1)\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\tau_b}{\rho U^2}$$

zodat: $$0 = \frac{\partial}{\partial x}\left[\left\{\frac{1{,}5}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)} - \frac{3{,}8}{\ln^2\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}\right\}\delta\right] + \left[\frac{4{,}5}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)} - \frac{7{,}6}{\ln^2\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}\right]\cdot\delta\cdot\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}$$

ofwel: $$0 = \left\{9{,}4\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right) - 33 + \frac{48}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}\right\}\cdot\frac{\partial\delta}{\partial x} + \left\{28\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right) - 48\right\}\cdot\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial x}\cdot\delta - 1$$

Als in deze vergelijking $U(x)$, als schatting bekend is, dan blijft alleen $\delta(x)$ als onbekende over.

Voorbeeld

$$\left.\begin{array}{l}\text{Stel juist } \operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{\partial\delta_1}{\partial x}\\ \text{en } \dfrac{\partial h}{\partial x} + \operatorname{tg}\alpha = 0\end{array}\right\} \text{Dan volgt } \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

zodat de geïntegreerde impulsievergelijking wordt:

$$0 = \left\{9{,}4\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right) - 33 + \frac{48}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}\right\}\cdot\frac{\partial\delta}{\partial x} - 1$$

N.B. In dit bijzondere geval is de functie $\delta(x)$ niet afhankelijk van U of h, alleen van z_0, dus van d.

Hoewel de exacte analytische oplossing hier nog niet eenvoudig is, kunnen we de waarde van $\delta(x)$ nu wel numeriek met de hand zeer snel bepalen:

$\frac{\delta}{z_0}$ $\left(\approx 30\frac{\delta}{d}\right)$	${}^{10}\log\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right) = 0{,}434 \ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)$	$9{,}4\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right) - 33 + \frac{48}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}$ $= 22\log\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right) - 33 + \frac{21}{\log\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}$	δ	δ_1
10 *)	1,45	14	$\delta = 0{,}070\,x$	$\delta_1 = 0{,}073\,x$
30 *)	1,93	20	$\delta = 0{,}050\,x$	$\delta_1 = 0{,}039\,x$
100	2,45	30	$\delta = 0{,}034\,x$	$\delta_1 = 0{,}021\,x$
300	2,93	39	$\delta = 0{,}026\,x$	$\delta_1 = 0{,}013\,x$
1000	3,45	49	$\delta = 0{,}020\,x$	$\delta_1 = 0{,}009\,x$

*) voor deze waarden is de formule eigenlijk niet van toepassing

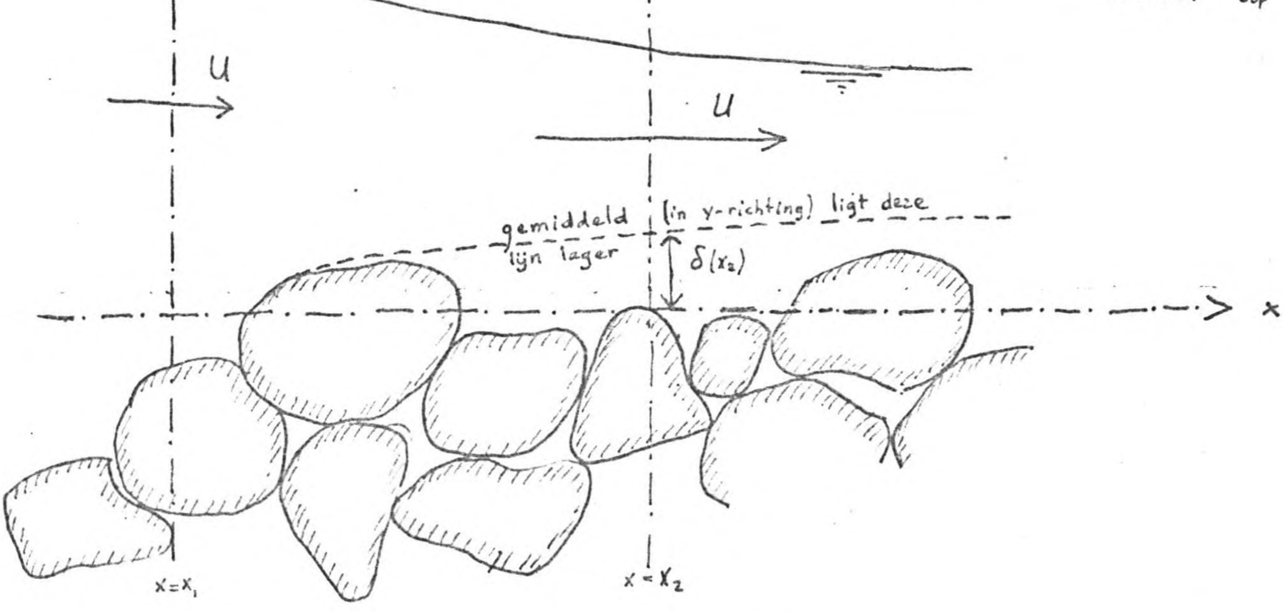
Met de gevonden waarden voor $\frac{\partial \delta_1}{\partial x}$ kan men nu de aannamen van U(x) en h(x) corrigeren. We zien echter, dat de waarden van nogal klein zijn voor situaties waar het hier meestal om gaat. Dus de correctie zou veel kleiner kunnen zijn dan de nauwkeurigheid van de berekeningen.

Dat hoeft echter niet te gelden voor het begin van de grenslaag. En ook daar moet men δ_1 schatten om te weten waar de schijnbare bodem ligt. Zonder dat is de schatting van U(x) en h(x) niet mogelijk.

4.4 Het begin van de grenslaag

Neem bv. $x_2 - x_1 = 3d$

Keuze $z=0$-lijn: zie 3.6 en 3.7 over waarden z_{top}



In eerste instantie kan men hier net zo te werk gaan. Men schat $\delta_1(x_2)$. Stel bijvoorbeeld (zie de tabel aan het eind van 4.2 en zie ook het einde van deze paragraaf):

$$\delta_1(x_2) \approx 0{,}3 \cdot \delta(x_2) \approx 0{,}1 \cdot d$$

Men schat ook $\delta(x)$ voor $x > x_2$, als dat nodig is om U(x) en h(x) te berekenen. Uit laatsgenoemde berekeningen volgt $U(x_1)$, $U(x_2)$, $h(x_1)$ en $h(x_2)$.

Nu is $K_x = C_{DB} \cdot \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = C_{DB} \cdot \frac{1}{2}\rho\, U^2(x_1) \cdot \frac{\pi}{4} d^2$

en $\sum K_x = \frac{c_3}{c_4} K_x$ (zie 2.6, geval II en geval III)

We houden de balans voor de impulsie in x-richting aan die op de laatste regel van 4.1 is opgeschreven. We kunnen deze omwerken door toepassing van de continuïteitsvoorwaarde en de impulsievergelijking voor de hoofdstroom (of Bernoulli), tot:

$$0 = U^2(x_2)\,\delta_2(x_2) - U^2(x_1)\,\delta_2(x_1) + \frac{1}{4}\left\{\delta_1(x_1) + \delta_1(x_2)\right\}\left\{U^2(x_2) - U^2(x_1)\right\} - \frac{\sum K_x}{\rho(y_2 - y_1)}$$

Met $\delta_1(x_1) = 0$ en $\delta_2(x_1) = 0$:

$$\delta_2(x_2) = \frac{\sum K_x}{\rho(y_2-y_1) \cdot U^2(x_2)} - \frac{1}{4}\,\delta_1(x_2)\left\{1 - \frac{U^2(x_1)}{U^2(x_2)}\right\}$$

Hieruit is $\delta_2(x_2)$ te bepalen met de geschatte $\delta_1(x_2)$.

Blijkt nu dat $\frac{\delta_1(x_2)}{\delta_2(x_2)} < 1{,}5$ of $\frac{\delta_1(x_2)}{\delta_2(x_2)} > 5$ (zie tabel in 4.2), dan zal de aanname voor $\delta_1(x_2)$ waarschijnlijk niet kloppen. Men moet dan een nieuwe schatting voor $\delta_1(x_2)$ maken en voor $\delta(x)$. Met steun van bovengenoemde formule is dat niet moeilijk. Men bedenke dat de eerste term van het rechter lid nauwelijks zal veranderen.

Stel bijvoorbeeld $\frac{\delta_1(x_2)}{\delta_2(x_2)} = 2{,}5$, dan is de vergelijking te schrijven als:

$$\delta_1(x_2) = \frac{1}{0{,}15\left\{\frac{U(x_2)}{U(x_1)}\right\}^2 - 0{,}25} \cdot \frac{c_3 \frac{\pi}{8} d^2 C_{DB}}{c_4 (y_2 - y_1)}$$

$$\text{Met bv.}\quad \left.\begin{aligned} c_3 &= 0{,}8 \\ c_4 &= 0{,}6 \\ y_2 - y_1 &= 2\,d \\ C_{DB} &= 0{,}2 \\ \left\{\frac{U(x_2)}{U(x_1)}\right\}^2 &= \frac{0{,}75}{0{,}65} \end{aligned}\right\} \quad \delta_1(x_2) \approx 0{,}1\ d$$

5. TOEPASSING IN VERSCHILLENDE SITUATIES

5.1 Over de volle hoogte ontwikkelde grenslaag: White, Shields en M598-V.

Met de in 3.8 gevonden waarden en bij een horizontale bodem, krijgen we:

$$\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 3,2\cdot c_2\left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0,84\Delta\right\}$$

Gaat het om eenparige stroom, dan geldt: $\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tau_b}{\rho g h}$

Vergelijking met de formule van White (5): $\left[\frac{\tau_b}{\rho g d}\right]_{kritiek} = c_1\, c_2\, \frac{2}{3}\, tg\varphi\, \Delta$

White voert geen c_4 (en evenmin een c_3) in, kennelijk aannemend dat de kritieke korrels (juist precies) de gehele τ_b opnemen. Volgens hem geldt: $c_1 = 0,4$.

Als we aannemen $u_\infty = u(z_{top})$

$z_{top} = 0,4d$, $z_0 = \frac{d}{30}$ } waarden die inliggen tussen die welke gevonden zijn door Einstein en El-Samni enerzijds en Chepil anderzijds.

dan volgt uit de eenvoudige logaritmische formule(zie 4.2):

$$\tau_b = 0,052\cdot\tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2$$

Stel voorts $h \approx 100d$ in $\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\tau_b}{\rho g h} \approx 0,007\left[\frac{\tau_b}{\rho g d}\right]$. $\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x}$ is dus verwaarloosbaar klein.

De formule van White wordt dan:

$$\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = c_1\cdot c_2\cdot 25,6\left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + tg\varphi\Delta\right\}$$

omdat $\varphi = 40^\circ$ en $c_1 = 0,4$ } $\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 10,2\cdot c_2\cdot\left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0,84\Delta\right\}$

Volgens Chepil (8), die de kritieke korrels op grote onderlinge afstand neemt, zou $c_1 = 0,11$, maar hij zou c_1 in de formule vervangen door $\frac{c_1}{c_4}$, waarin c_4 het aandeel is van de kritieke korrels in de bodemschuifspanning. Uit zijn experimenten concludeert hij $\frac{c_1}{c_4} = 0,21$. Zie ook 3.7. Vullen we 0,21 in i.p.v. 0,4, dan volgt:

met $\varphi = 40^\circ$ en $\frac{c_1 c_3}{c_4} = 0,21$ } $\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 5,3\cdot c_2\left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0,84\Delta\right\}$

Vergelijking met de formule van Shields (6): $\left[\frac{\tau_b}{\rho g d}\right]_{kritiek} = 0,059\,\Delta$

Als we deze formule op overeenkomstige wijze omwerken, dan volgt: $\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = \frac{2,7}{c_2}\cdot c_2\left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0,84\Delta\right\}$

en met $c_2 = 0,4$ (Chepil. Zie 3.5): $\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 6,8\cdot c_2\left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0,84\Delta\right\}$

Volgens de Vries (collegedictaat f10 "sediment transport", blz 12) geeft deze formule, toegepast op zand, nog enig transport. Om werkelijk de grens van stabiliteit bij stortsteen te krijgen zou de waarde 2 of 3 maal zo laag genomen moeten worden:

$\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = \frac{0,9}{c_2}$ à $\frac{1,4}{c_2}\cdot c_2\left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0,84\Delta\right\}$ en met $c_2 = 0,4$: $\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 2,3$ à $3,5\cdot c_2\left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0,84\Delta\right\}$

Vergelijking met de formule van Bakker (M598-V): $\left[\frac{\tau_b}{\rho g d}\right]_{kritiek} = 0{,}053$

Dit geldt voor breuksteen met $\Delta = 1{,}80$.
Volgens hem geldt: $c_2 = 0{,}35$

Omgewerkt wordt de formule: $\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 3{,}9 \cdot c_2 \left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0{,}84\Delta\right\}$

N.B. Bij zijn proeven is $Re \approx 3.10^4$ à 2.10^5

Conclusie

Als we uitgaan van het eenvoudig logaritmische profiel, $z_{top} = 0{,}4d$ en $z_0 = \frac{d}{30}$, dan worden de verhoudingen tussen het resultaat van de in 3.8 afgeleide formule en de andere formules:

resultaat formule 3.8 gedeeld door resultaat formule

$\frac{1}{3{,}2}$	van White, dus met $c_1 = 0{,}4$
$\frac{1}{2{,}2}$	Shields, met $\varphi = 40^\circ$ en $c_2 = 0{,}4$
$\frac{1}{1{,}65}$	White, maar met gegevens van Chepil: $c_1 = \frac{c_1}{c_4} = 0{,}21$
$\frac{1}{1{,}2}$	Bakker = White met $c_1 \mathrm{tg}\varphi = 0{,}126$ $c_2 = 0{,}35$ en $\Delta = 1{,}8$
$\frac{1}{1{,}1}$ à 1,4	Shields met correctie van de Vries met $\varphi = 40^\circ$ en $c_2 = 0{,}4$

5.2 Lange overlaat: M711-II

Vergelijking met de formule van van de Kreeke (M711-II):

$$\left[\frac{\bar{u}^2}{gd}\right]_{kritiek} = 1{,}4^2 \Delta \log^2\left(3{,}5\frac{h}{d}\right)$$

waarin $\bar{u}$ de u is die, behalve over de turbulentie ook over de hoogte is gemiddeld.

Deze formule leidde van de Kreeke af uit de experimentele resultaten. Hij ging daarbij uit van de juistheid van de formule van Shields. Berekent men echter τ_b volgens de Velocity defect law uit de gemeten $\bar{u}$ en δ, op het moment waarop de stenen in de experimenten van M711-II instabiel worden, dan blijkt dat die stabiliteit nog lang niet had mogen optreden volgens Shields. Zie bijlage B5 . Daarom veronderstelde van de Kreeke dat $\bar{u} = \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}\ln\left(c\frac{z}{d}\right)$, waarbij hij de c aanpaste aan de experimentele resultaten. Hoewel deze afleiding theoretisch aanvechtbaar is - hij houdt ook al geen rekening met de grenslaagdikte - , levert hij een practische formule op.

De formule op zich is niet zondermeer om te zetten in die van 3.8, omdat $\frac{u_\infty}{\bar{u}}$ afhangt van de grenslaagdikte, ofwel van U. Daarom worden in bijlage B8 twee gevallan geanalyseerd. Daaruit blijkt:

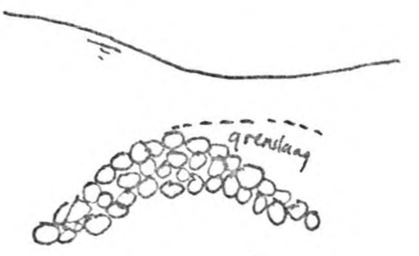
$$\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = \frac{1{,}8}{c_2} \cdot c_2 \left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0{,}84\Delta\right\} \quad \text{c.q.} \quad = \frac{1{,}4}{c_2} \cdot c_2 \left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0{,}84\Delta\right\}$$

en, als $c_2 = 0{,}4$: $\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 4{,}5 \cdot c_2 \left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0{,}84\Delta\right\}$ c.q. $= 3{,}5 \cdot c_2 \left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0{,}84\Delta\right\}$

Dus: $\frac{\text{resultaat formule 3.8}}{\text{resultaat formule van de Kreeke}} = \frac{1}{1{,}4}$ à $\frac{1}{1{,}1}$

N.B. Bij zijn proeven is $Re \approx 3.10^4$

5.3 Overlaat met scherpe kruin: M711-III .



Op de kruin is nog geen grenslaag.
Het lijkt waarschijnlijk dat juist dáár voor het eerst instabiliteit optreedt. Dan is $\alpha = 0$
Er zullen daar wellicht weinig turbulente fluctuatie zijn, zodat we mogen stellen: $c_2 = 1$.

Volgens het principe van de hier ontwikkelde formule zal gelden $u_\infty = U$. Men bedenke daarbij dat U boven de kruin nog wel degelijk variëert met de hoogte: $U = U(z)$. U is het grootst vlak boven de kruin.

Vergelijking met de formule van van Staal (M711-III):

Deze formule is afgeleid naar $\left[\frac{\bar{u}^2}{gd}\right]_{kritiek} = 1{,}4^2 \cdot \Delta \log^2\left(1{,}5\,\frac{h}{d}\right)$
analogie van die van van de Kreeke. Ook deze formule is niet om te werken tot die van 3.8 . Daarom hier de vergelijking van de resultaten volgens de berekening met de formule van 3.8 , met de waargenomen resultaten van alle testseries van M711-III.

N.B. bij zijn experimenten is Re 2,5 à $5{,}1 \cdot 10^4$

Testserie-nummer	$\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]$ berekend met formule van 3.8	$\left[\frac{U^2_{max\ a.d.top}}{gd}\right]$	$\frac{\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{berekend}}{\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{gemeten}}$
T1	4,2	9,8	$\frac{1}{2,3}$
T2	3,9	8,9	$\frac{1}{2,3}$
T3	3,9	7,7	$\frac{1}{2,0}$
T4	3,8	7,0	$\frac{1}{1,8}$
T5	2,9	7,0	$\frac{1}{2,4}$
T6	2,7	8,4	$\frac{1}{3,1}$
T7	2,8	5,3	$\frac{1}{1,9}$
T8	2,0	7,2	$\frac{1}{3,6}$
T9	2,6	7,0	$\frac{1}{2,7}$
T10	2,9	6,6	$\frac{1}{2,3}$
T11	4,2	11,1	$\frac{1}{2,4}$
T12	4,3	11,6	$\frac{1}{2,5}$

N.B. bij deze berekening is aangenomen dat $\varphi = 40^\circ$ en dat $\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} = -U(z_{kruin\ top}) \cdot \frac{\partial \bar{U}}{\partial x}$
met $\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} = \frac{\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{vlak\ vóór\ de\ kruin}}{\bar{U} - g\frac{q}{\bar{U}^2}}$ waarin q het gemeten debiet en $\bar{U}$ de gemeten gemiddelde snelheid

De steen blijkt veel stabieler te zijn dan uit de formule van 3.8 volgt, mits men aanneemt dat de grenslaag pas op de top begint. Begint hij eerder, dan is voor de stenen op de top $u_\infty < U$ en profiteren de stenen aan het begin van de grenslaag van de helling α die hun stabiliteit bevordert.

6 ENIGE IDEEEN OVER DE STABILITEIT VAN STORTSTEEN IN NIET-PERMANENTE STROOM

6.1 Algemeen

Belangrijke verschillen met permanente stroom:

A Kracht op steen door niet-stationaire versnelling van het water: $K_{x3} = C_{MB} \cdot \rho \frac{\partial u_\infty}{\partial t} \cdot \frac{\pi}{6} d^3$

waarin C_{MB} = massacoëfficiënt voor steen op bodem

B De coëfficiënten C_{LB} en C_{DB} kunnen anders zijn dan bij permanentie.

C Als ergens een grenslaag is, kan de dikte daar fluctueren.

D De massatraagheid van de steen kan invloed hebben op de stabiliteit.

Ad A Bij vele beschouwingen over het begin van beweging van materiaal onder invloed van oscillerende stroom (periode T, maximale snelheid $\hat{u}_\infty$, maximale versnelling $\frac{\partial \hat{u}_\infty}{\partial t}$), wordt geen aandacht besteed aan K_{x3}. Dit is veelal gerechtvaardigd omdat K_{x3} veel kleiner is dan K_{x1} bij het materiaal waar het meestal om gaat: zand, eventueel grind.

Bij stortstenen constructies kan K_{x3} echter wel een grote rol spelen. Immers:

$$\frac{\hat{K}_{x3}}{\hat{K}_{x1}} = \frac{4}{3} \frac{C_{MB}}{C_{DB}} \cdot \frac{\frac{\partial \hat{u}_\infty}{\partial t}}{\hat{u}_\infty^2} \cdot d$$

of $\frac{\hat{K}_{x3}}{\hat{K}_{x1}} = \text{constante} * \frac{d}{\hat{u}_\infty T}$ waarin $\hat{u}_\infty T$ een maat is voor de weg die de waterdeeltjes gedurende een periode afleggen. Bij ondiep-water golven zou men in plaats hiervan kunnen schrijven: $H.T.\sqrt{\frac{g}{h}}$

Blijft T gelijk en zou $\hat{u}_\infty$, als in het kritieke geval van permanentie, rechtevenredig zijn met $\sqrt{d}$, dan zou

$$\frac{K_{x3}}{K_{x1}} \text{ rechtevenredig zijn met } \sqrt{d}.$$

Bij grote constructies op de zeebodem spelen de instationaire traagheidskrachten zelfs een overwegende rol.

Overigens hebben deze constructies meestal te maken met de vrije waterspiegel en de refractie/diffractie die de constructies bij oppervlaktegolven teweegbrengen, omdat de verhouding d/L (L= golflengte) vrij groot is. Bij constructies als pijpleidingen, van dezelfde orde van grootte als stenen, speelt de refractie/diffractie geen belangrijke rol, omdat d veel kleiner is. Waar stortstenen dicht aan de oppervlakte komen , hoeft dit echter niet te gelden, omdat daar L weer kleiner kan zijn. Vergelijk ook paragraaf 3.4 .

Tenslotte moet worden opgemerkt dat K_{x3} in het geval van stortstenen bij uitstek een rol speelt bij stroomstoten, zoals optreden bij brekende golven. De tijdsperiode T waarin waterdeeltjes het grootste deel van hun weg afleggen, is dan veel korter dan bij oscillerende stroom.

In 6.2 volgt een oriënterende beschouwing over de grootte van C_{MB}.

Ad B Het stroompatroon (rond de steen) dat in geval van permanentie thuishoort bij een bepaalde u_∞, kan in het geval van niet-permanente stroom, anders zijn bij dezelfde u_∞, al naar gelang de u_∞ die even tevoren heerste. Bij oscillaties spreekt dit het sterkst rond de stroomkentering, wanneer wervels en neer naar de andere kant van de steen verhuizen. Vooral dàn mag men een afwijkende C_{LB} en C_{DB} verwachten.

C_{LB} en C_{DB} zullen echter ook gemiddeld over de hele periode T van een oscillatie een andere waarde kunnen hebben, indien T niet veel groter is dan T_{wervel}, de periode van het loslaten van wervels. Bij permanente stroom geldt $T_{wervel} = 5\frac{d}{u_\infty}$ (Zie ook 3.5).
Misschien geldt hier zoiets als $T_{wervel} = 5\frac{d}{\frac{2}{\pi}\hat{u}_\infty}$, dus, als d=0,1m tot 1m en $\hat{u}_\infty = [\hat{u}_\infty]_{kritiek}$, $T_{wervel} = 0,5$ sec á 3sec.
Bij korte golven en zeker bij stroomstoten kan dit fenomeen dus een rol spelen. In ieder geval zal de verhouding $\frac{T_{wervel}}{T} \approx \frac{10\, d}{T\, \hat{u}_\infty}$ (zie ad A) een belangrijke parameter zijn indien beoordeeld moet worden of C_{LB} en C_{DB} anders zijn dan bij permanente stroom.

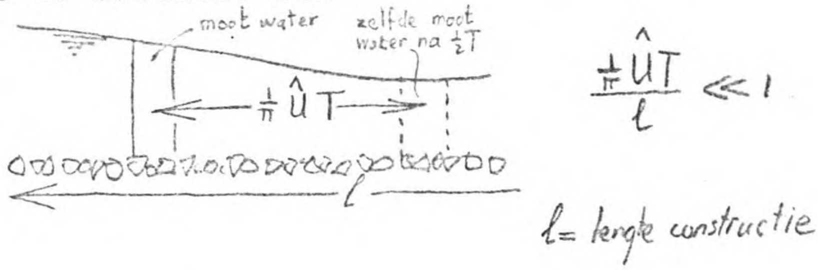
Het lijkt gerechtvaardigd om voor kwalitatieve beschouwingen van dit soort, gebruik te maken van de onderzoekingen ten bate van de berekening van golfkrachten op poten van platforms. Uit deze onderzoekingen blijkt (Zie o.a. lit. 14) dat C_D bij waarden van $\frac{10\, d}{T\frac{2}{\pi}\hat{u}_\infty}$ groter dan 1 sterk toeneemt bij een plaatvormig object (wervel kan niet volgroeien?), maar enigszins afneemt bij een rond object (loslaatpunt schuift naar achteren bij lagere u_∞ ?). De vorm van de steen kan dus een grote rol spelen indien T kleiner is dan T_{wervel}.

Ad C Bij een vlakke bodem onder permanente stroom kunnen we meestal aannemen dat de grenslaag zich uitstrekt over de volle hoogte en dat het eenvoudig logaritmische snelheidsprofiel van toepassing is (Zie 4.2). Bij oscillerende stroom over vlakke bodem blijft de grenslaagdikte meestal beperkt. Het is niet zondermeer te verwachten dat het snelheidsprofiel voldoet aan een logaritmische formule als de Velocity Defect Law (voor $z > 0{,}15\delta$). Aan laatstgenoemde theorie is immers de voorwaarde verbonden dat:

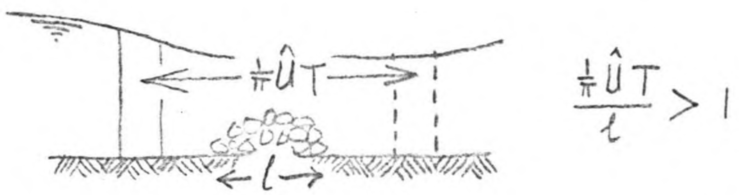
$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad , \quad \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad \text{en} \quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0$$

Verschillende onderzoekers, waaronder Bijker, hebben het geval bestudeerd van een vlakke bodem waarop losse elementen liggen, onder oscillerende stroom. In 6.3 zal worden nagegaan of de theorie van Bijker van toepassing zou kunnen zijn indien die losse elementen stortstenen zijn in plaats van het zand waarvoor hij zijn theorie ontwikkeld heeft.

Bij stortstenen constructies kunnen we overigens meestal niet spreken van een vlakke bodem. De constructie steekt meestal uit boven de bodem en is dan te beschouwen als een drempel. Mits T niet te klein is, is de situatie dan heel anders, omdat dezelfde watermoot steeds een andere bodemconfiguratie "tegenkomt".



In plaats van een constante grenslaag-dikte (zie 6.3), lijkt het hier logischer aan te nemen dat in een watermoot een grenslaag groeit vanaf het moment dat de watermoot de constructie bereikt.



De grenslaagdikte neemt toe van de bovenstroomse zijde naar de benedenstroomse zijde. Bij oscillerende stroom wisselen deze zijden en zal de grenslaagdikte op een plaats ook steeds variëren.

In 6.4 zal worden aangeduid hoe gerekend kan worden aan grenslaagdikte en snelheidsprofiel op basis van de berekeningen van hoofdstuk 4 en bijlage B9 .

Bij stroomstoten is het waarschijnlijk niet zinvol te spreken over een grenslaag. Wellicht mag dan veelal gesteld worden: $u_\infty = U$.

6.2 De waarde van C_{MB}

Om na te gaan in hoeverre C_{MB} bij een steen op de bodem, afwijkt van C_M bij dezelfde steen in een verder ongestoorde stroom, volgt eerst de kwalitatieve behandeling van enige gevallen van een steen in niet-viskeuze vloeistof.

Het kan behulpzaam zijn te bedenken dat K_{x3} de kracht is tengevolge van díe drukopbouw langs de steen en elders in de vloeistof, die nodig is om het stroombeeld (de snelheidsvectoren als functie van de plaats) behorend bij het ene moment, te veranderen in het stroombeeld van het volgende moment. Door die twee stroombeelden als het ware van elkaar af te trekken, krijgt men de versnellingen en daardoor het drukverloop. Het heeft dan ook zin de beschouwingen in hoofdstuk 1 over stroombeelden in het achterhoofd te houden.

I Steen in verder ongestoorde, niet-viskeuze vloeistof

GEGEVEN:
Langwerpige steen, op afgeronde uiteinden na cilindervormig, met cilinderas evenwijdig aan de stroom; lengte L, oppervlakte doorsnede = $\frac{\frac{\pi}{6}d^3}{L}$

Als de steen er niet zou zijn zou gelden:
$$\frac{\partial u_\infty}{\partial t} + u_\infty \frac{\partial u_\infty}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0$$
$$u_\infty(-\tfrac{1}{2}L) = u_\infty(+\tfrac{1}{2}L) \rightarrow \frac{\partial u_\infty}{\partial x} = 0$$
$$p(-\tfrac{1}{2}L) - p(+\tfrac{1}{2}L) = \rho \frac{\partial u_\infty}{\partial t} L$$

Indien nu rond de steen dezelfde druk zou heersen als rond de massa water die er zou zijn als de steen er niet was (de massa verplaatst water), dan zou:

$$K_{x3} = \rho \frac{\partial u_\infty}{\partial t} L \cdot \frac{\frac{\pi}{6}d^3}{L} = 1 \cdot \rho \frac{\partial u_\infty}{\partial t} \cdot \frac{\pi}{6}d^3$$ Dus dan zou $C_M = 1$

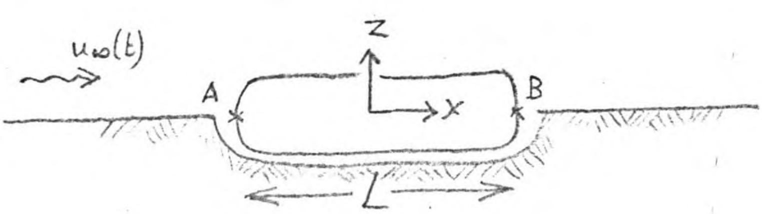
Dat het drukverschil tussen $x = -\frac{1}{2}L$ en $x = +\frac{1}{2}L$ groter moet zijn, en dus ook K_{x3} groter moet zijn, is op twee manieren in te zien:

a) Door de aanwezigheid van de steen kan de vl.st.vlak voor en vlak achter de steen niet mee versneld en vertraagd worden met de rest. Dus die vloeistof kan ook geen, of niet zo'n grote, drukgradiënt opnemen. De vloeistof wordt als het ware gedwongen zich min of meer net zo te gedragen als de steen: "toegevoegde massa". Het lichaam lijkt verlengd te worden tot $x = -\frac{1}{2}(L+\Delta L)$ en $x = +\frac{1}{2}(L+\Delta L)$. De gemiddelde druk tegen de kopse vlakken is gelijk aan de druk die in die punten zou heersen als de steen er niet was. $C_M = 1 + C_A$ (A van "added mass").

b) De snelheden vlak rond de steen, waar $-\frac{1}{2}L < x < +\frac{1}{2}L$, zijn bij permanente stroom groter dan ze zouden zijn als de steen er niet was. In het niet-permanente geval moet het water daar méér versneld of vertraagd worden dan elders. Het drukverschil tussen $x = -\frac{1}{2}L$ en $x = +\frac{1}{2}L$ moet dus ook groter zijn.

N.B. Bij een bolvormige steen geldt: $C_M = 1,5$

II Cilindrische steen gedeeltelijk in de bodem, niet-viskeuze vloeistof



II - 1 Bodem is symmetrievlak

Boven de bodem is het stroombeeld precies gelijk aan de situatie van een verder ongestoorde stroom. Het drukverloop boven de bodem, nodig om dit stroombeeld met de erbij horende variaties in de tijd, te krijgen, zal dus net zo zijn als in de situatie van een verder ongestoorde stroom.

Onder de steen is, gegeven de druk in A en B, een drukverloop te verwachten dat niet erg afwijkt van dat langs de bovenrand van de steen.

We mogen hier een ongeveer even grote C_M verwachten als bij de verder ongestoorde stroom. Het beeld van "massa verplaatste water + toegevoegde massa" is dus verraderlijk: men zou met dit beeld een half zo kleine C_M verwachten.

II - 2 De steen ligt iets hoger

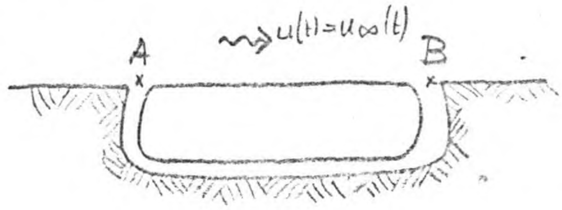
Net als bij permanente stroom, zal de u vlak boven de steen groter zijn dan in de situatie van verder ongestoorde stroom: de vloeistof die dáár onder de steen doorging, gaat er hier langs of overheen. Het drukverschil zal dus ook groter zijn. Evenzo C_M. Overigens zal dit effect bij een cilindrisch lichaam met zijn as loodrecht op de stroom veel sterker zijn.

II - 3 De steen ligt iets lager

De waarde van C_M zal nu kleiner zijn. Maar nog altijd groter dan 1, zoals duidelijk wordt uit:

II - 4 De steen ligt net verzonken in de bodem

Boven de bodem geldt: $u = u_\infty$.
T.p.v. de kopvlakken zal de druk ongeveer gelijk zijn aan de druk in A en B, zodat $C_M = 1$ (Zie berekening van geval I).



III Viskeuze vloeistof

Bij een viskeuze vloeistof wijkt het stroombeeld rond de steen af van dat bij niet-viskeuze vloeistof, voornamelijk door het bestaan van een zog en de produktie van wervels.

De grootte van het zog variëert. Bij oscillerende stroom is op een gegeven moment u_∞ erg klein en daardoor ook het zog , terwijl $\frac{\partial u_\infty}{\partial t}$ en dus K_{x3} erg groot zijn. Het zog groeit dan, als $\frac{\partial u_\infty}{\partial t}$ en u_∞ van hetzelfde teken zijn. Dit impliceert dat ter plaatse van het zog $|u|$ kleiner wordt. Hiervoor is een drukopbouw nodig die C_M groter maakt.

Is T kleiner dan T_{wervel}, dan zal de situatie nog wel iets anders zijn. Studies voor cilinders in verder ongestoorde stroom (lit 14) laten zien dat de vorm van het lichaam, net als op C_D ook op C_M een grote invloed heeft. Zonder experimenten is het moeilijk te zeggen of de invloed van de viscositeit een even grote rol speelt bij stenen op de bodem.

Conclusie: Voor een eerste benadering lijkt het gerechtvaardigd te stellen dat $C_{MB} = C_M$, dwz $C_{MB} = 1$ á 2 .

6.3 Grenslaagvorming bij golven over vlakke bodem: theorie van Bijker

Terwille van zandtransportberekeningen ontwikkelde Bijker (lit 15, hfdst III-3 en III-5) een theorie over de bodemschuifspanning die ontstaat bij een combinatie van stroom en golven, benevens een theorie over de bodemschuifspanning en het snelheidsprofiel in de grenslaag bij alleen maar golven. Hoewel de theorieën niet ontwikkeld en getest zijn voor het onderhavige probleem, is het toch interessant om na te gaan of zij toch toegepast kunnen worden.

Basisformule

Volgens de theorie van het eenvoudige logaritmische snelheidsprofiel (par. 4.2) geldt: voor $ez_0 \leq z \leq \delta$ $\quad u(z) = \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)$

dus: $\quad \tau_b = \rho\kappa^2\{u(ez_0)\}^2$

Overeenkomstig veronderstelt Bijker dat bij stroom en golven geldt:

$$\tau_b = \rho\kappa^2\left\{\vec{u}_{stroom}(ez_0) + \vec{u}_{golf}(ez_0)\right\}^2$$

waarbij $\vec{u}_{stroom}$ de snelheid is zoals hij zou zijn als alleen stroom heerste, en $\vec{u}_{golf}(ez)$ een min of meer fictieve snelheid die rechtevenredig is met de bodemsnelheid van de wrijvingsloze golf:

$$\vec{u}_{golf}(ez_0) = p\left[\vec{U}\right]_{bodem;\ volgens\ lineaire\ golftheorie} = p\,\vec{U}_0$$

Bijker bepaalde p d.m.v. experimenten. De grootheid blijkt onafhankelijk te zijn van de golfperiode: $\quad p \approx 0{,}45$

Als deze theorie wordt toegepast op de voor ons interessante situatie van alleen maar golven, dan volgt: $\tau_b = \rho\kappa^2 p^2 U_0^2$

Om na te gaan of p ook een fysiche betekenis heeft, stelt Bijker vervolgens een theorie op over het snelheidsprofiel in de grenslaag bij golven.

Veronderstel voor $z > \delta$ $\quad U(z) = \hat{U}(z)\sin\omega t$ en noem de fictieve snelheid die voor z=0 volgens deze formule zou gelden: U_0 .

Stel, voorts: voor $z \leq ez_0$ $\qquad \tau(z) = \text{constant} = \tau_b$

voor $ez_0 \leq z < \delta$ bewegingsvgl $\qquad \frac{\partial}{\partial t}\{U - u(z)\} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z}$

met (zie par. 4.2) $\qquad \tau(z) = \rho L^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial z}(z) \cdot \left|\frac{\partial u}{\partial z}(z)\right|$

en, nabij de bodem, $\qquad L = \kappa z$

Dan volgt uit de berekeningen van Bijker:

$$u(z) = \hat{U}_0\left[\sin\omega t - \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \sin\left\{\omega t + \ln\left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right\}\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(z) = 2^{\frac{3}{2}} \cdot \hat{U}_0 \cdot \frac{z_0^2}{z^3} \cdot \sin\left\{\omega t + \ln\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 + \frac{\pi}{4}\right\}$$

$$\tau(z) = \rho\kappa^2 \cdot \hat{U}_0^2 \cdot 8\left(\frac{z_0}{z}\right)^4 \cdot \sin^2\left\{\omega t + \ln\left(\frac{z_0}{z}\right)^2 + \frac{\pi}{4}\right\}$$

We zien dat volgens deze formule $\hat{u}(\delta) \neq \hat{U}_0$, maar dat $\hat{u}(\delta)$ nadert tot $\hat{U}_0$ voor δ nadert tot oneindig. Bijker stelt voor δ zodanig te kiezen dat $\hat{u}(\delta) = 0{,}95\ \hat{U}_0$, dus:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{0{,}05}} \cdot z_0 = 4{,}5\ z_0$$

Bijker neemt, net als bij de theorie van het eenvoudige logaritmische snelheidsprofiel,

$$z_0 = \frac{\text{ruwheid}}{33}$$

Daardoor geldt dan $\delta = 0{,}14$ x ruwheid. Volgens zijn waarnemingen klopt dat goed. Zie echter de opmerkingen aan het einde van deze paragraaf.

Uit de formules volgt verder: $\tau_b = \tau(ez_0) = \rho\kappa^2 \hat{U}_0 \cdot \frac{8}{e^4} \cdot \sin^2\{\omega t - 2 + \frac{\pi}{2}\}$

dus: $\hat{\tau}_b = \rho\kappa^2 p^2 \hat{U}_0^2$ mits: $p = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{e^2} = 0{,}39$

Deze waarde van p komt aardig overeen met die welke gevonden werd in experimenten met een combinatie van stroom en golven.

Het is interessant om de formule $\hat{\tau}_b = \rho\kappa^2 p^2 \hat{U}_0^2$ te vergelijken met $\tau_b = \rho\kappa^2 \frac{1}{\ln^2(\frac{\delta}{z_0})} U^2$ van het eenvoudige logaritmische snelheidsprofiel (par. 4.2) en met $\tau_b = \rho\kappa^2 \frac{1}{\ln^2(\frac{2{,}8\delta}{z_0})} U^2$ van de Velocity-Defect Law (bijlage B7). Vullen we in $\delta = 4{,}5 z_0$, dan blijkt volgens de eerste formule: $\tau_b = \rho\kappa^2 (0{,}67)^2 U^2$. De uitkomst is dus niet gelijk. Dit zien we trouwens ook aan het feit dat $\hat{u}(ez_0) \neq p\hat{U}_0$, terwijl volgens dit snelheidsprofiel immers geldt: $\tau_b = \rho\kappa^2 \{u(ez_0)\}^2$.

Bij de Velocity-Defect Law blijkt de waarde $\delta = 4{,}5\ z_0$ uit te komen op precies $\tau_b = \rho\kappa^2 (0{,}39)^2 U^2$! Het is frappant dat Bijkers formule, die een heel andere structuur heeft als de Velocity-Defect Law en, in tegenstelling tot de laatste maar één grenslaagdikte toelaat (bij gekozen ruwheid),toch bij die grenslaagdikte exact dezelfde relatie legt tussen τ_b en U . We kunnen het ook anders stellen: .. dat Bijkers formule tot dezelfde grenslaagdikte komt bij een gekozen verhouding $\frac{\tau_b}{\rho U^2}$.

In 2.6 werd afgeleid: $\tau_b = \frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{c_1 c_3}{c_4} \cdot C_{DB}$. Stel dat we hierin $\frac{c_1 c_3}{c_4}$ en C_{DB} kennen (ook voor niet-permanente stroom), dan is $\hat{u}_\infty$ uit Bijkers berekeningen en metingen te bepalen via: $\left(\frac{\hat{u}_\infty}{\hat{U}_0}\right)^2 = \frac{2\kappa^2 p^2 c_4}{c_1 c_3 C_{DB}}$

Met de voor permanente stroming geschatte waarden: $\frac{c_1}{c_4} = 0{,}21$ $c_3 = 0{,}8$ $C_{DB} = 0{,}20$

zou dit tot het vreemde resultaat leiden: $\frac{\hat{u}_\infty}{\hat{U}_0} = 1{,}4$

Maar hierin kan C_{DB} wel helemaal fout zijn (zie 6.1) .In ieder geval volgt dat $\frac{\hat{u}_\infty}{\hat{U}_0}$ constant is. Dit komt overeen met de constante grenslaagdikte.

Grenslaagdikte onafhankelijk van tijd en plaats?

In de door Bijker bestudeerde gevallen kan $\frac{\delta}{a}$ onafhankelijk van plaats en tijd zijn. Immers bij een lopende golf, met of zonder stroom, over een vlakke bodem zijn alle grootheden gelijk voor gelijke fase. Uit meerdere onderzoekingen volgt dat $\frac{\delta}{a}$ ook onafhankelijk is van de fase.Zie de formules van Manohar (16) en Kalkanis (17).

$\frac{\delta}{d}$ onafhankelijk van T en $\hat{U}_0$?

Dat bij Bijker p en $\frac{\delta}{d}$ ook van geval tot geval gelijk zijn, dus onafhankelijk van T en $\hat{U}_0$, is niet direct verklaarbaar. Zo zou men verwachten dat de grenslaagdikte tot de waterhoogte nadert als T naar oneindig nadert.

Uit de formules van Manohar (16) en Kalkanis (17) volgt beslist niet dat $\frac{\delta}{d}$ onafhankelijk is van T en $\hat{U}_0$. Als we, net als Bijker, stellen dat δ zodanig is dat geldt: $\frac{\hat{u}(\delta)}{\hat{U}} = 0{,}95$, dan blijkt δ in beide formules af te hangen van $\hat{U}$ en T.

MANOHAR: $\frac{\widehat{\{U - u(z)\}}}{\hat{U}} = e^{-z\sqrt{\frac{\omega}{2\varepsilon}}}$ waarin ε = eddy viscosity

$\hat{U}$ = de in de tijd maximale waarde die U aanneemt

u(z) = horizontale snelheid in de grenslaag

Stel dat $\frac{\hat{u}(z)}{\hat{U}} = 0{,}95$ ongeveer geldt als $\frac{\widehat{\{U - u(z)\}}}{\hat{U}} = 0{,}05$. Dan volgt dat $e^{-\delta\sqrt{\frac{\omega}{2\varepsilon}}} = 0{,}05$ dus $\delta = 4{,}2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\omega}}$

Waarschijnlijk zal ε afhankelijk van $\hat{U}$ zijn. Als ε eveneens afhankelijk is van ω, dan zeer waarschijnlijk niet rechtevenredig met ω. Eerder omgekeerd: grotere eddy viscosity bij kleinere golffrequentie.

KALKANIS : $\frac{\widehat{\{U - u(z)\}}}{\hat{U}} = \frac{1}{2}\, e^{-\frac{133 . z}{\hat{U}d}\sqrt{2\nu\omega}}$

Als hierin $\frac{1}{2} e^{-\frac{133\,\delta}{\hat{U}d}\sqrt{2\nu\omega}} = 0{,}05$ dan $\delta = 0{,}012\,\frac{\hat{U}d}{\sqrt{\nu\omega}}$

Uit beide formules blijkt dus (waarschijnlijk) dat δ groter wordt, zowel met $\hat{U}$ als met T .

$\frac{\delta}{d}$ inderdaad zo klein?

Indien er geen bodemribbels zijn, zoals (deze) bij de door Bijker bestudeerde gevallen bestaan, dan lijkt de grenslaagdikte volgens zijn formule wel erg klein. Want in dat geval geldt dat de ruwheid op zijn hoogst zo groot is als d . Dan zou volgen uit

$\delta = 0{,}14$ x ruwheid dat $\delta \leq 0{,}14$ x d

Met de formule van Kalkanis komen we tot δ = 8d , indien $\nu = 10^{-6}\, m^2/s$, $\omega = 2$ (T = 3 sec) en $\hat{U}$ = 1 m/s . Jonsson (18) komt op een grenslaagdikte van enige malen de bodemruwheid.

Conclusie

Het lijkt erop dat de door Bijker bestudeerde gevallen in enige essentiële opzichten afwijken van het geval van een vlakke bodem met stortsteen : Kleine waarde $\frac{\hat{u}d}{\nu}$; ribbels; niet veel spreiding in T .
Hierdoor is de formule van Bijker waarschijnlijk niet bruikbaar voor de bepaling van de relatie tussen $\hat{U}_0$ en τ_b . Of de formule voor het snelheidsprofiel bruikbaar is , is nog niet geheel duidelijk.

6.4 Grenslaagvorming op een drempelconstructie

Bij permanente stroom over een drempelconstructie zal een watermoot eerst over een vlakke bodem lopen, dan over de drempel en tenslotte over de vlakke bodem aan de andere kant. Bij het doorlopen van het traject over de drempel zal een grenslaag groeien, die later over het vlakke stuk weer verdwijnt.

Van een watermoot bij oscillerende stroom over een drempel kan veelal hetzelfde gezegd worden, mits $\frac{\pm\hat{U}T}{\ell} > 1$.
Wel zal, bij de terugkeer van dezelfde moot over de drempel, de turbulentie en dus de turbulente schuifspanningen wat groter zijn.

Verwaarlozen we dit effect, dan lijkt het mogelijk, althans buiten de tijd rond de stroomkentering, om de grenslaagdikte en het snelheidsprofiel op dezelfde manier te berekenen als bij permanente stroom. Daartoe dienen we de formules op te schrijven volgens de methode van Lagrange.

Zo zou in par. 4.2 op blz 33 onderaan $\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$ vervangen moeten worden door $\frac{du}{dt}$. Leest men ook in bijlage 9 steeds $\frac{du}{dt}$ of $\frac{dU}{dt}$ in plaats van $u\frac{\partial u}{\partial x}$ of $U\frac{\partial U}{\partial x}$, dan zijn min of meer dezelfde conclusies mogelijk (par. 4.2 , blz 34 bovenaan),als bij permanente stroom:

Men kan drie verschillende situaties onderscheiden, ieder met een eigen type snelheidsprofiel:

- $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$, dus wanneer de stroom in zijn fase van maximale stroomsterkte in een van beide richtingen is. Snelheidsprofiel type Velocity Defect Law.
- $U > 0$ en $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$ of $U < 0$ en $\frac{\partial h}{\partial x} > 0$, dus in de fase die aan bovengenoemde fase vooraf gaat.Snelheidsprofiel lijkt nog wel op een logaritmisch snelheidsprofiel.
- $U > 0$ en $\frac{\partial h}{\partial x} > 0$ of $U < 0$ en $\frac{\partial h}{\partial x} < 0$, dus in de fase waarin de hoofdstroom in sterkte afneemt. Snelheidsprofiel wijkt sterk af van de vorige. Na enige tijd, maar [illegible] voor de kentering in de hoofdstroom, verandert de stroomrichting in de grenslaag bij de bodem.

Voor de stabiliteit van stortsteen is meestal de middelste situatie (U en $\frac{\partial h}{\partial x}$ verschillend van teken) maatgevend, omdat dan u_∞ en $\frac{\partial u_\infty}{\partial t}$ meestal gelijk van teken zijn, waardoor traagheid en sleepkracht in dezelfde richting werken.

Het heeft dus waarschijnlijk wel zin om voor de stabiliteit van stortsteen een grenslaagberekening te maken als in par. 4.3 , waarin werd verondersteld dat het snelheidsprofiel in de grenslaag redelijk overeen kwam met de Velocity Defect Law voor $z > 0{,}15\,\delta$.

7 SAMENVATTING EN SUGGESTIES VOOR VERDER SPEURWERK

7.1 Theorie.

Het is theoretisch mogelijk de horizontale en verticale kracht die een permanente stroom op een individuele steen van een stortstenen bed uitoefent, weer te geven met één formulen-paar, dat toegepast kan worden, zowel in situaties waarin stroomopwaarts van de steen geen grenslaag is, als in situaties waarin die wel aanwezig is. Het formulen-paar luidt: (zie 2.3 & 2.4)

$$K_z = C_{LB} \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2$$
$$K_x = C_{DB} \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2$$

Hierin is u_∞ de snelheid evenwijdig aan de bodem, die zou heersen ter plaatse van de steen, indien deze er niet was, en wel ter plaatse van de top van de steen of van een nog nader uit proeven te bepalen hoogte boven of onder die top.
C_{LB} en C_{DB} zijn dimensieloze coëfficiënten, die, als het steeds gaat om de stenen die het eerst hun stabiliteit zullen verliezen, alleen afhankelijk zijn van de soort steenvorm en enigszins van het getal van Reynolds (zie 2.3 en 3.1).

Dit formulen-paar sluit aan bij de formules voor sleepkracht en liftkracht, uitgeoefend op een individueel element door een verder ongestoorde, permanente stroom:

$$K_z = C_L \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 \qquad C_L = \text{„Lift coefficient"}$$
$$K_x = C_D \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 \qquad C_D = \text{„Drag coefficient"}$$

De formule biedt daardoor ook aanknopingspunten voor de berekening van de stabiliteit van stortsteen in niet-permanente stroom. Vergelijk de formule van Morrison. Zie ook 6.5 .

De relatie met de schuifspanning over een bodem met gelijke ruwheid volgt uit de formule (2.6):

$$\tau_b = \frac{c_1 c_3}{c_4} \cdot C_{DB} \cdot \tfrac{1}{2}\rho u_\infty^2$$

Hierin is u_∞, overeenkomstig de definitie voor individuele stenen, de snelheid die ter hoogte van de top (of die andere nader te bepalen hoogte) van de ruwheden zou heersen volgens het theoretische snelheidsprofiel. De coëfficiënten c_1 c_3 en c_4 zijn constant, in ieder geval voor ieder soort steenvorm (Zie definities en symbolen en verder 2.3 en 2.6).

7.2 Situaties met grenslaag.

Genoemd formulen-paar lijkt zeker bruikbaar voor de berekening van de stabiliteit van stortsteen in alle situaties met goed ontwikkelde grenslaag.

Uit proeven van Einstein en El-Samni in grenslaagstroming, kan men afleiden voor een individuele, bolvormige steen, die maximale bescherming geniet van de omringende stenen (zie 3.6):

$$\left.\begin{aligned} C_{LB} &= 0{,}105 \\ C_{DB} &= 0{,}11 \\ \frac{c_1 c_3}{c_4} &= 0{,}9 \end{aligned}\right\} \quad \text{voor Re} = 2.10^4$$

Uit proeven van Chepil, eveneens in grenslaagstroming, kan men afleiden voor een individuele, bolvormige steen, die extreem geëxposeerd ligt (zie 3.7):

$$\left.\begin{aligned} C_{LB} &= 0{,}25 \\ C_{DB} &= 0{,}36 \\ \frac{c_1 c_3}{c_4} &= 0{,}17 \end{aligned}\right\}$$

voor Re = $2.\ 10^3$ à $3.\ 10^4$
mits $c_3 = 0{,}8$ (Als $c_3 = f.0{,}8$
dan $C_{LB} = \frac{1}{f} \cdot 0{,}25$ en $C_{DB} = \frac{1}{f} \cdot 0{,}36$
terwijl $\frac{c_1 c_3}{c_4} = f \cdot 0{,}17$)

Gegeven de grote verschillen in opstelling, is het verschil in de gevonden waarden voor C_{LB} en C_{DB} betrekkelijk klein. Dit is een positieve aanwijzing voor de bruikbaarheid van de begrippen "dragcoefficient" en "Liftcoefficient" in deze situatie.

Het is niet mogelijk om uit deze experimentele resultaten de waarden van C_{LB} en C_{DB} voor stortsteenconstructies met zekerheid af te leiden. Daarvoor zijn enerzijds de getallen van Reynolds te klein (zie voor de betekenis daarvan 3.3). Anderzijds ontbreken duidelijke resultaten van proeven gedaan aan het begin van de grenslaag.

Bovendien hebben de beschreven proeven betrekking op bolvormige lichamen i.pl.v. op gebroken natuursteen. Men zou ook kunnen stellen dat er niet één stel waarden C_{LB} en C_{DB} kan bestaan vanwege de onregelmatige vorm van de individuele steen en zijn ligplaats (de omringende stenen). Een statistische beschrijving lijkt juister, ook al vanwege de spreiding in steengrootte binnen één categorie stenen.

Hier moet echter worden opgemerkt, dat uit proeven (M598, M711) blijkt dat er een duidelijke grenstoestand is. Bij een weinig lagere snelheid komt practisch geen steen van zijn plaats; bij een weinig hogere komen vele stenen van hun plaats. Dit lijkt in strijd met proeven gedaan met zand (Shields). Men bedenke echter dat de spreiding in korrelgrootte daar in het algemeen veel groter is dan bij stortsteen. Men zou dus toch wel kunnen spreken van een karakteristieke steen op een karakteristieke ligplaats. Bij die steen hoort één C_{LB} en één C_{DB}.

Kiest men nu hiervoor de waarden (zie 3.8):

$$C_{LB} = 0{,}15$$
$$C_{DB} = 0{,}20$$
$$\frac{\varepsilon}{\zeta} = 0{,}33 \quad \text{(zie definitie-schets in 3.1)}$$

dan kan men daarmee tot op een nauwkeurigheid van enige tientallen procenten, de stabiliteit van stortsteen voorspellen in de gevallen M598-V (horizontale bodem) en M711-II (lange overlaat), mits we aannemen: $u_\infty = u(z_{top})$ $z_{top} = 0{,}4d$ $z_0 = \frac{d}{30}$ $\varphi = 40^\circ$ en c = 0,4 . Zie 5.1 en 5.2 .

Volgens de formules van White en Shields zou de stabiliteit van materiaal op een horizontale bodem echter 3x c.q. 2x zo groot moeten zijn. Het is echter niet uitgesloten dat zowel White als Shields een ander stabiliteitscriterium aangehouden hebben, dan voor stortstenen constructies toelaatbaar is. Brengen we de correctie in rekening die de Vries om deze reden adviseert, dan kloppen deze formules goed met de hier genoteerde C_{LB} en C_{DB}. (Zie 5.1).

7.3 Situaties zonder grenslaag.

Het is niet zondermeer duidelijk of het formulenpaar ook in de praktijk bruikbaar is voor situaties zonder grenslaag.

Bij toepassing van de waarden $C_{LB} = 0{,}15$ en $C_{DB} = 0{,}20$ op de situatie van M711-III, overlaat met scherpe kruin, zou men tot een veel kleinere stabiliteit concluderen dan blijkt uit de proeven, tenminste als men aanneemt dat de kritieke stenen juist horizontaal liggen (zie 5.3).

Men zou met een aanzienlijk kleinere C_{LB} en C_{DB} wel overeenstemming vinden. Met een kleinere C_{LB} en C_{DB} zou men ook de situaties met grenslaag kunnen doen kloppen, mits men u_∞ gelijk kiest aan een snelheid die een flink stuk boven de top van de steen heerst.

Verder speurwerk.

Het lijkt echter zinvoller om eerst de krachten te meten die uitgeoefend worden op een individuele steen op een vlakke bodem,
a) door een nog nauwelijks gestoorde stroom
b) door een stroom waarin nog nauwelijks een grenslaag bestaat,
en c) door een stroom met goed ontwikkelde grenslaag.

Men kan proberen de totale kracht te meten op de steen, door deze vast te maken aan bladveren met rekstroken. Men kan ook, net als Chepil, de drukken langs het oppervlak proberen te meten. Het is dan van belang ook de drukken onderaan de steen te meten.

7.4 De grootte van u_∞ en de groei van de grenslaag.

Als men de u_∞ wil schatten voor een individuele steen ergens in een grenslaag, moet men de grootte van de snelheid U en de grenslaagdikte kennen, waarna men een snelheidsprofiel moet aannemen.

Men kan dit doen met een numerieke procedure, zoals Meddens ontwikkeld heeft (4.3). Maar in het kader van de, vrij grove, berekeningen van de stabiliteit van stortsteen, lijkt een eenvoudige procedure aan te bevelen (zie 4.3):

- Men maakt een schatting van de verplaatsingsdikte δ_1 aan het begin van de grenslaag, bijvoorbeeld met de formule gegeven aan het eind van paragraaf 4.4 .
- Men maakt een schatting van de groei van δ_1 met de grenslaag.
- Men berekent de snelheden in de hoofdstroom $U(x)$, zoals in het identieke wrijvingsloze geval - althans wrijvingsloos waar geen neren zijn - , waarbij echter de bodem steeds δ_1 dikker gedacht wordt.
- Met deze $U(x)$ lost men de geïntegreerde impulsiebalans op. Hieruit volgt het verloop van de grenslaagdikte.
- Met behulp van de Velocity defect law berekent men u_∞ , veronderstellend $u_\infty = u(z_{top})$.

Verder speurwerk.

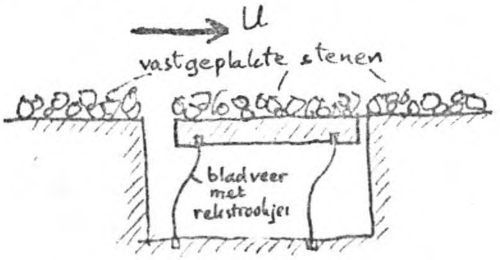
Berekeningen als hierboven genoemd, zijn gebaseerd op (semi-) empirische formules voor het grenslaagprofiel en de grenslaag-ontwikkeling.

Er bestaan niet zoveel gegevens over het snelheidsprofiel en de grenslaagontwikkeling bij hoge getallen van Reynolds, gecombineerd met een ruwe bodem, met name waar het gaat om het begin van de grenslaag. Evenmin is veel bekend over de invloed van de drukgradient $\frac{\partial p}{\partial x}$ in de hoofdstroom. Het lijkt nuttig de in de literatuur gerapporteerde gegevens te verzamelen.

Maar bovendien ligt waarschijnlijk een schat van informatie verborgen in de zorgvuldige metingen van het snelheidsprofiel, gedaan voor M598-V, M711-I en M711-II. Men kan uit elk profiel de verplaatsingsdikte δ_1 en de impulsverliesdikte δ_2 berekenen. Met de variaties van δ_1 en δ_2 in de stroomrichting kan de groei van de grenslaag goed bestudeerd worden (zie 4.1).

Het is ook interessant om met deze gegevens na te gaan in welk stadium van de grenslaag en bij welke $\frac{\partial p}{\partial x}$ het eenvoudige logaritmische profiel van toepassing is. Evenzo de Velocity defect law (zie 4.2). Men kan zich tegelijk afvragen welk schuifspanningsprofiel en welke mengweg in principe mogelijk zijn (zie ook bijlage B9). Het rekenmodel van Meddens kan gebruikt worden om de gemeten veranderingen van de grootheden in de stroomrichting achteraf te berekenen.

Deze onderzoeken zouden gecompleteerd moeten worden door nieuwe experimenten, waarbij ook de bodemschuifspanning wordt gemeten:



Misschien is het mogelijk de resultaten van deze experimenten te relateren aan die genoemd in de vorige paragraaf. De directe bepaling van de verhouding

$$\frac{\tau_b}{\dfrac{[K_{x1}]_{\text{individuele steen}}}{\frac{\pi}{4} d^2}} = \frac{c_1 c_3}{c_4}$$

lijkt namelijk zinvol, zeker in het begin van de grenslaag en bij hoge Reynoldsgetallen.

7.5 Niet-permanente stroom en het effect van turbulentie.

Verschillen met permanente stroming:

- Kracht op steen door niet-stationaire versnelling van het water: $K_{X3} = C_{MB} \cdot \rho \frac{\partial u_\infty}{\partial t} \cdot \frac{\pi}{6} d^3$ $\qquad C_{MB}$ = bodem-massacoëff.

  zodat: $K_x = C_{DB} \cdot \frac{1}{2} \rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 + C_{MB} \cdot \rho \frac{\partial u_\infty}{\partial t} \cdot \frac{\pi}{6} d^3$ (Morison, mits K_{X2}=0)
- De coëfficiënten C_{LB} en C_{DB} kunnen anders zijn.
- Als ergens een grenslaag is, kan de dikte daar fluctueren.
- De massatraagheid van de steen kan invloed hebben op de stabiliteit.

Hoe belangrijk deze verschillen zijn hangt af van de situatie. We kunnen onderscheiden:

a) Een oscillerende stroom met lange periode: $\frac{\hat{U} T}{\ell} \gg \pi$ en $\frac{g T^2}{d} > 1000$

b) Een oscillerende stroom met korte periode: $\frac{\hat{U} T}{\ell} \ll \pi$, $\frac{u_\infty T}{d} > 10$, en $\frac{g T^2}{d} > 10$

c) Stroomstoten, zoals optreden bij brekende golven: $\frac{u_\infty T}{d} < 10$ en $\frac{g T^2}{d} < 100$

C_{MB} C_{LB} en C_{DB} ; parameter $\frac{u_\infty T}{d}$ (Zie 6.2 en 6.1-ad B)

In de eerste twee situaties kan gesteld worden, althans voor de kritieke fase van een oscillatie (u_∞ niet veel kleiner dan $\hat{u}_\infty$; u_∞ en $\frac{\partial u_\infty}{\partial t}$ gelijk van teken) , enerzijds dat $C_{MB} \approx C_M$ (de massacoëfficiënt in verder ongestoorde stroom), dus C_{MB} = 1 á 2 , anderzijds dat voor C_{LB} en C_{DB} dezelfde waarden genomen kunnen worden als bij permanente stroom.

Deze conclusie mag waarschijnlijk getrokken worden overeenkomstig de resultaten van onderzoek naar golfkrachten op poten van platforms en op pijpleidingen (Zie bv lit.14) .

Een belangrijke parameter blijkt te zijn : $\frac{\hat{U} T}{d}$ of $\frac{\hat{u}_\infty T}{d}$
Zo blijkt C_D (dus C_{DB} en C_{LB}?) ongeveer gelijk te zijn aan de waarde thuishorend bij permanentie, zolang $\frac{\hat{u}_\infty T}{d} > 10$.

Dit houdt verband met het proces van groei en loslaten van wervels, een proces dat grote invloed heeft op de locale momentane druk rondom de steen. De frequentie waarmee bij permanentie wervels (aan een zijde) loslaten is $T_{wervel} = 5 \frac{d}{u_\infty}$.
Bij oscillerende stroom wellicht: $T_{wervel} \approx 5 \frac{d}{\frac{1}{2} \hat{u}_\infty}$.

Hieruit volgt dat $\frac{\hat{u}_\infty T}{d} > 10$ ongeveer equivalent is aan $\frac{T}{T_{wervel}} > 1$

Overigens is $\frac{\hat{u}_\infty T}{d}$ ook te lezen als:

$$\pi * \frac{\text{horizontale afstand die een vloeistofpakketje aflegt}}{\text{diameter steen}}$$

Grenslaag ; parameter $\frac{\hat{U}T}{\ell}$ (Zie 6.1-ad C)

Een vergelijkbare parameter speelt een rol bij de vraag of er een grenslaag als bij permanente stroom ontstaat of niet:

$$\frac{\hat{U}T}{\ell} = \pi * \frac{\text{horizontale afstand die een vloeistofmoot aflegt}}{\text{lengte van de constructie in de stroomrichting}}$$

De grenslaag kan berekend worden als bij permanentie, als deze parameter beduidend groter is dan π . Immers een moot water zal nu eerst over de bodem lopen zonder noemenswaardige grenslaag, dan over de constructie, waarbij de grenslaag op dezelfde wijze kan groeien als bij permanantie, inclusief logaritmisch snelheidsprofiel, en tenslotte weer over de bodem, waarbij een groot deel van de turbulentie weer uitdempt. Dit geldt overigens alléén voor een moot water die zich boven de stenen bevindt rond de fase van maximale stroomsnelheid.

Als de parameter beduidend kleiner is dan π , dan bevinden de meeste moten water zich voortdurend boven de constructie. Gaat het om een vlakke drempel, dan is de situatie vrijwel identiek aan een oscillerende stroom over een horizontale bodem. Er heerst een grenslaag van constante dikte. Misschien voldoen de snelheidsprofielen van Manohar (16) en/of Kalkanis (17).

Bij stroomstoten is waarschijnlijk niet meer van een grenslaag te spreken en kunnen we misschien stellen: $u_\infty = U$.

Massatraagheid van de steen ; parameter $\frac{gT^2}{d}$ (Zie bijlage 3)

Tenslotte kan de massatraagheid van de steen bijdragen aan de stabiliteit bij korte oscillaties en vooral bij stroomstoten. Bij korte oscillaties is soms ook het omgekeerde mogelijk.

Als $\frac{gT^2}{d} > 1000$, is de stabiliserende werking van de traagheid van de steen te verwaarlozen t.o.v. die van de zwaartekracht. Als de parameter kleiner is dan 0,04 , is juist de zwaartekracht te verwaarlozen t.o.v. de traagheid. Dan zijn niet meer de grootte van K_z en K_x van belang, doch: $\int_0^T K_z\,dt$ en $\int_0^T K_x\,dt$.

Als $\frac{gT^2}{d} \approx 10$, is de stabiliserende invloed van de traagheid van dezelfde orde van grootte als die van de zwaartekracht. K_z en K_x kunnen dan dus bijvoorbeeld tweemaal zo groot worden voordat de steen zijn stabiliteit verliest.

Uiteraard geldt dit alleen indien de herhalingsfrequentie van oscillaties niet ongeveer gelijk is aan de eigenfrequentie van de opwippende steen. Bij korte oscillaties kan de traagheid dan juist de instabiliteit bevorderen.

Turbulentiecoëfficiënt c_2 (Zie 3.5)

Voor de piek-stroomstoten t.g.v. turbulentie speelt de traagheid waarschijnlijk ook een grote rol bij permanentie. Dit is vooral belangrijk voor de turbulentie-coëfficiënt c_2.

Nu geldt:
$$c_2 = \frac{[\bar{K}_x]_{\text{kritiek bij turbulentie}}}{[K_x]_{\text{kritiek zonder turbulentie}}}$$

Nu zal $[K_x]_{\text{kritiek zonder turbulentie}}$ heel wat kleiner zijn dan de grootste $K_x(t)$ die eens in de zoveel tijd bereikt wordt, omdat laatstgenoemde $K_x(t)$ maar korte tijd duurt. Belangrijk is de overschrijdingsduur van extreem grote $K_x(t)$.
Om c_2 te bepalen zou men moeten nagaan welke combinaties van $K_x(t)$ en overschrijdingsduur maatgevend zijn voor de stabiliteit, gegeven de zwaartekracht en de massatraagheid.

Uit het verloop van $K_x(t)$ als functie van de tijd, zou kunnen worden geconcludeerd bij welke gemiddelde $\bar{K}_x$ zo'n combinatie net zo zelden voorkomt, dat slechts een aanvaardbaar klein aantal stenen per tijdseenheid zijn stabiliteit verliest.

Vervolgens zou men moeten nagaan of de eigenfrequentie van de opwippende steen niet valt in een deel van het energie-dichtheidsspectrum van de turbulente beweging met hoge dichtheid.

LITERATUUR

(1) Waterloopkundig Laboratorium, M.J. Bakker , M598-deel V "Stroombestendigheid los materiaal" , nov. 1960 .

(2) Waterloopkundig Laboratorium, M.J. Bakker, M711-deel I "Stroombestendigheid sluitgatdrempel", april 1961.

(3) Waterloopkundig Laboratorium, J. van de Kreeke, M711-deel II "Stroombestendigheid sluitgatdrempel met brede kruin", augustus 1963.

(4) Waterloopkundig Laboratorium, G. van Staal, M711-deel III "Stroombestendigheid sluitgatdrempel met scherpe kruin", februari 1964.

(5) C.M. White "The equilibrium of grains on the bed of a stream", Proc. Royal Soc. of London, Series A no 958 Vol 174, pp 322-338, febr. 1940.

(6) A. Shields "Die Anwendung der Aenlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung", Mitteilung der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Heft 26, Berlin 1936.

(7) H.A. Einstein & E.S.A. El-Samni "Hydrodynamic forces on a rough wall", Rev. Modern Physics, Vol 21, 1949, no 3, pp 520-524.

(8) W.S. Chepil "The use of evenly spaced hemispheres to evaluate aerodynamic forces on a soil surface" Trans. Am. Geoph. Union, Vol 39, 1958, no 3, pp 397-404.

(9) W.S. Chepil "Equilibrium of soil grains at the threshold of movement by wind" Soil Sci. Soc. of Am. Proc. 23, 1959, pp 422-428.

(10) W.S. Chepil The use of spheres to measure lift and drag on wind-eroded soil grains" Soil Science Soc. of Am. Proc. 25, 1961, pp 343-345.

(11) J.W. Dailey & D.R.F. Harleman "Fluid Dynamics", Addison-Wesley Cy, 1966.

(12) H.B.M. Meddens "Grenslaag ontwikkeling op een overlaat", TH Delft, Afd. Civiele Techniek, Vloeistofmech. R 1973/4/H, 1973.

(13) M. de Vries "Sediment transport", TH Delft, Afd. Civiele Techniek, collegedictaat f10.

(14) A. Paape & H.N.C. Breusers "The influence of pile dimensions on forces exerted by waves", Delft Hydr. Lab.,Publ.41, 1966.

(15) E.W. Bijker "Some considerations about scales for coastal models with movable bed", Delft Hydr. Lab., Publ.50, 1967.

(16) Manohar "Mechanics of bottom sediment movement due to wave action", Techn. Memorandum 75, U.S. Beach Erosion Board, 1955.

(17) Kalkanis "Transportation of bed material due to wave action", C.E.R.C., Techn. Memorandum 2, 1964.

(18) Jonsson "Measurements in turbulent wave boundary layer" Proc. 10th Congress I.A.H.R., London, 1963, p 85.

(19) J.W. Kamphuis "A mathematical model to advance the understanding of the factors involved in the movement of bottom sediment by wave action", Queen's Un.at Kingston, Civil Eng. Dep..

Voorts kan de volgende literatuur wellicht bruikbaar zijn bij de bestudering van de stabiliteit van stortsteen in niet-permanente stroom:

(20) Waterloopkundig Laboratorium "Filteropbouw voor los gestorte havendammen" M905-deel IV .

(21) Rance & Warren "The threshold of movement of coarse material in oscillatory flow", Conf. Coastal Eng. 1970 (?), chapter 30, pp 487-491.

(22) Grace & Casciano "Ocean wave forces on a subsurface sphere", J. Waterways and Harbors Div. ASCE, Vol 95, 1969, no WW3 .

OF: "An experimental pilot study of ocean wave-induced forces on a bottom-mounted sphere", Un. Hawaii, Center for Eng. Res., Report no PAC 6829, 1968.

DEFINITIES EN SYMBOLEN

"Hoofdstroom" - Hieronder wordt verstaan de stroom op grote afstand van de stenen en buiten iedere grenslaag. De stroomlijnen zijn hier niet, of betrekkelijk weinig, gekromd. Er heersen hier geen sterke gradiënten van het piëzometrisch niveau, zoals rond de stenen. De schuifspanningen zijn verwaarloosbaar klein.

"Grenslaag" - Het gebied van de stroom waarin de schuifspanningen een rol spelen.

Assenstelsel Orthogonaal. De x-as wordt evenwijdig aan de bodem genomen, tenzij er geen bodem is; x-as evenwijdig aan de richting van de hoofdstroom op de plaats van de steen als deze er niet was.
De z-as staat loodrecht op de bodem, als deze er is.
Het punt (0 0 0) ligt in het zwaartepunt van de individuele steen, als hier van sprake is.

c_1 Aantal oneffenheden/stenen aan het oppervlak per stuk bodemoppervlak groot $\frac{\pi}{4} d^2$.

c_2 Turbulentiefactor (3.5).

$$c_2 = \frac{\text{de kritieke, over de turbulentie gemiddelde } K_{x1}}{\text{de } K_{x1} \text{ die kritiek zou zijn zonder turbulentie}}$$

c_3 Het aandeel in K_{x1} veroorzaakt door het water boven de bodem (2.3)

c_4 Deel van de bodemschuifspanning dat opgenomen wordt door de kritieke stenen (2.6 geval III).

N.B. Uit de definities van c_1 c_3 en c_4 volgt $\left.\begin{array}{l} \Sigma K_{x1} = \frac{c_3}{c_4} K_{x1} \\ \text{en } \tau_b = \frac{c_1 c_3}{c_4} \cdot \frac{K_{x1}}{\frac{\pi}{4} d^2} \end{array}\right\}$ (eind 2.6)

C_D "Dragcoefficient" $C_D = \frac{[K_{x1}]_{\text{voor lichaam in verder ongestoorde stroom}}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}$.

C_L "Liftcoefficient" $C_L = \frac{[K_z]_{\text{voor lichaam in verder ongestoorde stroom}}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}$.

C_{DB} "Bodem-dragcoefficient" $C_{DB} = \frac{[K_{x1}]_{\text{voor lichaam op de bodem}}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}$.

C_{LB} "Bodem-liftcoefficient" $C_{LB} = \frac{[K_z]_{\text{voor lichaam op de bodem}}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 \cdot \frac{\pi}{4} d^2}$.

C_{MB} "Bodem-massacoëfficiënt" (6.1 6.2).

C_f Coefficient van de huidwrijving (3.2).

d Diameter van de steen $d = \sqrt[3]{\frac{6}{\pi} \frac{M}{\rho_s}}$

e Grondgetal natuurlijke logaritme.

g Versnelling van de zwaartekracht.

G Zwaartekracht.

h Hoogte wateroppervlak boven de bodem.

K Een stroomkracht.

K_x Kracht door stroom op individuele steen uitgeoefend in x-richting, zowel door schuifspanning, als door isotrope druk.

K_{x1} Dat gedeelte van K_x dat recht evenredig is met u_∞^2.

K_{x2} Dat gedeelte van K_x dat evenredig is met $\frac{\partial p}{\partial x}$ in de hoofdstroom.

K_{x3} Dat gedeelte van K_x dat evenredig is met $\frac{\partial u_\infty}{\partial t}$.

K_z Kracht door stroom op individuele steen uitgeoefend in z-richting.

ℓ (in 6.1 en 6.4) lengte van constructie in stroomrichting.

L Mengweg; in 6.2, echter, lengte van de steen.

M Massa van de steen.

p Piëzometrisch niveau maal ρg; $p = \text{druk} - \rho g z$ (als z verticaal is). In 6.3 is p een dimensieloze coëfficiënt.

P p in de hoofdstroom.

Re Getal van Reynolds $Re = \frac{u_\infty \cdot d}{\nu}$.

t Tijd.

T Periode van de golf of tijdsduur van een stroomstoot.

u Stroomsnelheid in x-richting.

u_∞ De waarde die u zou aannemen ter plaatse van de steen, als deze er niet was.

U De waarde van u in de hoofdstroom.

v Stroomsnelheid in y-richting.

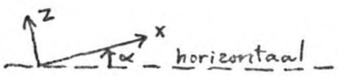
V De waarde van v in de hoofdstroom.

w Stroomsnelheid in z-richting.

W De waarde van w in de hoofdstroom, behalve in par. 4.1 en bijlage B4 waar W het volumetransport p.e.v. oppervlak van de grenslaag naar de hoofdstroom is.

z_0 De waarde van z waarvoor de logaritme in het logaritmische snelheidsprofiel nul wordt.

z_{top} De waarde van z ter plaatse van de top van de individuele steen.

α Helling van de bodem 

β Hoek, gedefiniëerd in de schets in 2.6 geval III en in 2.7.

δ Grenslaagdikte.

δ_1 Verplaatsingsdikte ⎫ Zie definitie 4.1.

δ_2 Impulsverliesdikte ⎭

Δ Relatieve soortelijke massa onder water. $\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho}$

ε Relatieve excentriciteit van K_{x1}; d is de absolute exc. ⎫ Zie schets

ζ Relatieve excentriciteit van het kantelpunt van de steen ⎭ 3.1

κ Constante van von Karman; $\kappa = 0{,}4$.

ν Kinematische vicositeit. Meestal voor water $\nu = 10^{-6}$ m²/sec
voor lucht $\nu = 16.10^{-6}$ m²/sec

ρ Soortelijke maasa voor water $\rho = 1000$ kg/m³ (of voor lucht $\rho = 1{,}22$ kg/m³).

ρ_s Soortelijke massa van de steen.

τ Schuifspanning.

τ_b Schuifspanning aan de bodem.

φ Hoek van interne wrijving bij stortsteen.

$\hat{\dots}$ De grootste waarde die ... gedurende een periode bereikt.

S T A B I L I T E I T   V A N   S T O R T S T E E N

BIJLAGEN

B1. Vergelijking geval III en geval II wat betreft stroombeeld stroomopwaarts van de steen.

B2. De drukterm in de impulsiebalanzen.

B3. Invloed van de traagheid van de steen.

B4. Basisvergelijkingen grenslaag en hoofdstroom.

B5. Toepassing logaritmische snelheidsprofielen op resultaten M598-V en M711-II .

B6. Korrelverdeling gebroken natuursteen.

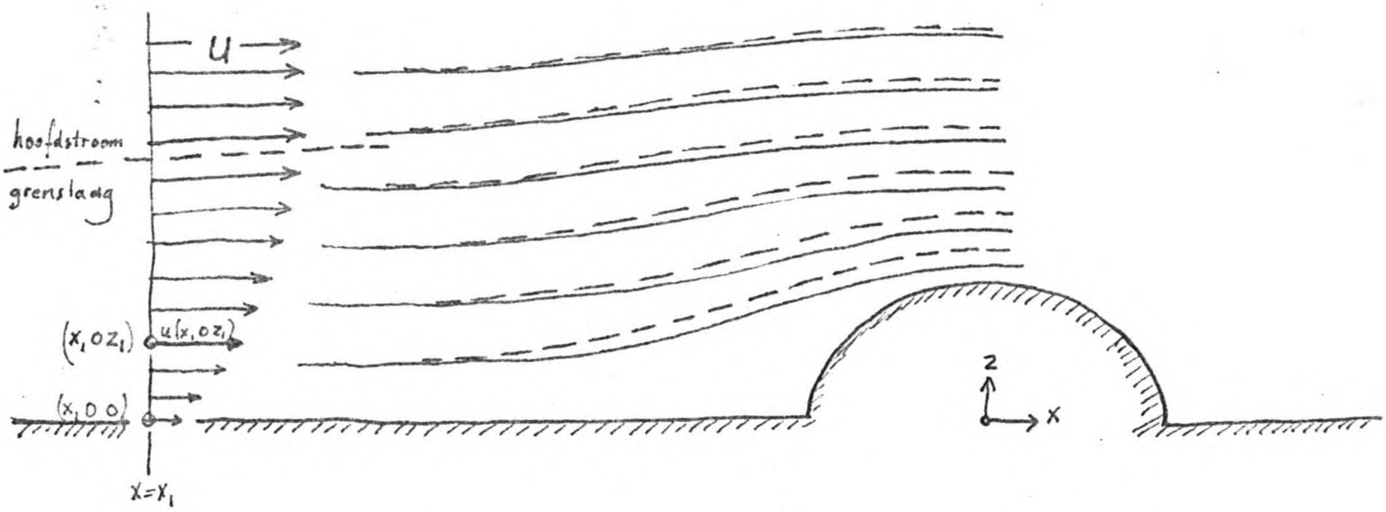
B7. Velocity defect law.

B8. Analyse van twee proeven van M711-II. Overzicht resultaten M711-II en M711-III.

B9. Snelheidsprofielen en schuifspanningsprofielen.

B 1. VERGELIJKING GEVAL III EN GEVAL II WAT BETREFT HET STROOMBEELD STROOMOPWAARTS VAN DE STEEN.

Zie ook 2.4 .

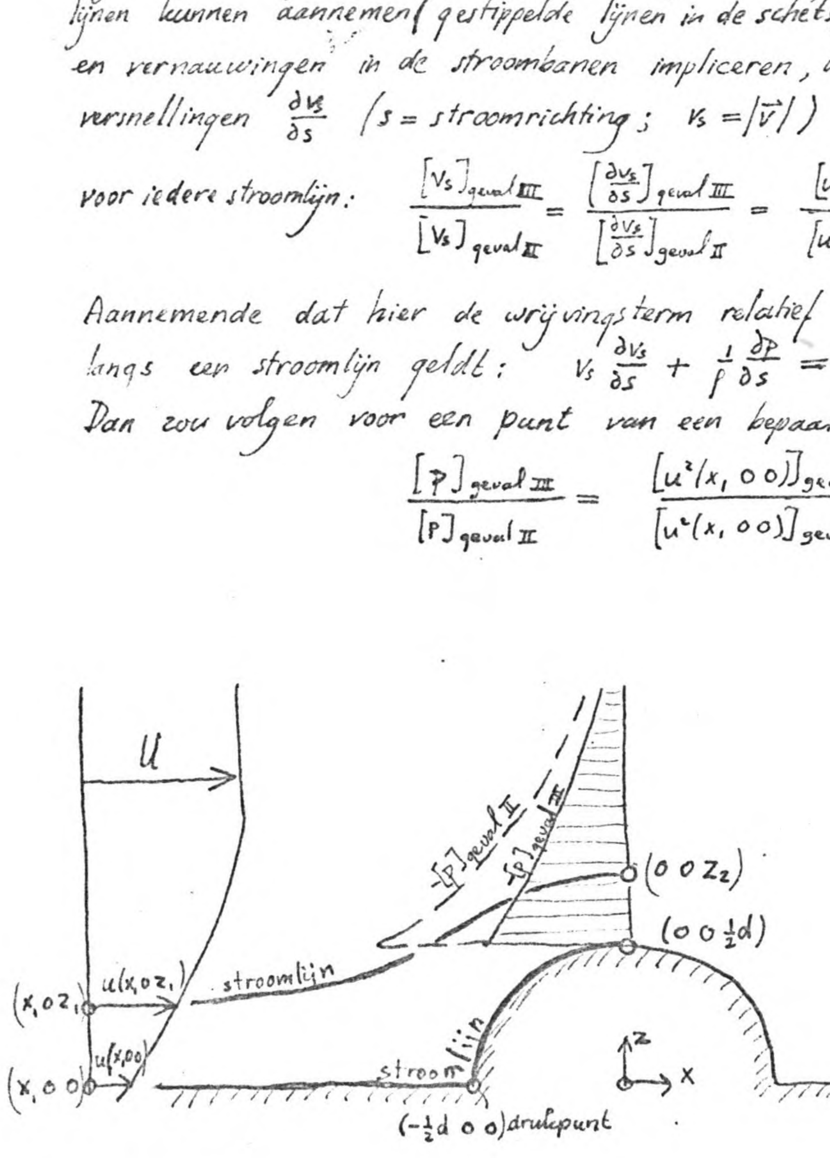


Uitgaande van geval II, zouden we voor geval III in eerste instantie dezelfde stroomlijnen kunnen aannemen (gestippelde lijnen in de schets). Dit zou dezelfde verwijdingen en vernauwingen in de stroombanen impliceren, dus ook relatief dezelfde versnellingen $\frac{\partial v_s}{\partial s}$ (s = stroomrichting ; $v_s = |\vec{v}|$) voor iedere stroomlijn. Dus:

voor iedere stroomlijn: $$\frac{[v_s]_{\text{geval III}}}{[v_s]_{\text{geval II}}} = \frac{\left[\frac{\partial v_s}{\partial s}\right]_{\text{geval III}}}{\left[\frac{\partial v_s}{\partial s}\right]_{\text{geval II}}} = \frac{[u\,(x_1)]_{\text{geval III}}}{[u\,(x_1)]_{\text{geval II}}}$$

Aannemende dat hier de wrijvingsterm relatief klein is, mogen we stellen dat langs een stroomlijn geldt: $v_s \frac{\partial v_s}{\partial s} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = 0$. Voorts is $p = 0$ voor $x = x_1$.
Dan zou volgen voor een punt van een bepaalde stroomlijn:

$$\frac{[p]_{\text{geval III}}}{[p]_{\text{geval II}}} = \frac{[u^2(x_1\ 0\ 0)]_{\text{geval III}}}{[u^2(x_1\ 0\ 0)]_{\text{geval II}}} = \frac{[u^2(x_1\ 0\ 0)]_{\text{geval III}}}{U^2}$$



Volgen we bijvoorbeeld de stroomlijn langs de bodem, dan volgt in het drukpunt: $p = \frac{1}{2}\rho u^2(x_1 0 0)$, zodat daar inderdaad geldt:

$$\frac{[p]_{\text{geval III}}}{[p]_{\text{geval II}}} = \frac{[u^2(x_1\ 0\ 0)]_{\text{geval III}}}{[u^2(x_1\ 0\ 0)]_{\text{geval II}}}$$

Maar volgen we deze stroomlijn nog verder, tot recht boven de steen, dan zou ook moeten gelden:

$$\frac{[p(0\,0\,\tfrac{1}{2}d)]_{\text{geval III}}}{[p(0\,0\,\tfrac{1}{2}d)]_{\text{geval II}}} = \frac{[u^2(x,0\,0)]_{\text{geval III}}}{[u^2(x,0\,0)]_{\text{geval II}}} = \frac{[u^2(x,0\,0)]_{\text{geval III}}}{U^2}$$

Evenzo zou in een punt daar recht boven, thuishorend in de stroomlijn door $(x, 0\, z_1)$, moeten gelden:

$$\frac{[p(0\,0\,z_2)]_{\text{geval III}}}{[p(0\,0\,z_2)]_{\text{geval II}}} = \frac{[u^2(x,0\,z_1)]_{\text{geval III}}}{[u^2(x,0\,z_1)]_{\text{geval II}}} = \frac{[u^2(x,0\,z_1)]_{\text{geval III}}}{U^2}$$

Zodat zou moeten gelden:

$$\left[\frac{p(0\,0\,z_2)}{p(0\,0\,\tfrac{1}{2}d)}\right]_{\text{geval III}} = \left[\frac{u^2(x,0\,z_1)}{u^2(x,0\,0)}\right]_{\text{geval III}} \cdot \left[\frac{p(0\,0\,z_2)}{p(0\,0\,\tfrac{1}{2}d)}\right]_{\text{geval II}}$$

Aangezien in geval III $\quad u(x,0\,0) < u(x,0\,z_1)$

zou moeten volgen:

$$\frac{\left[\frac{\partial p}{\partial z}\right]_{\text{geval III}}}{\left[\frac{\partial p}{\partial z}\right]_{\text{geval II}}} > 1$$

De veronderstelling van gelijke stroomlijnen impliceert echter ook overal gelijke kromtestralen. Aangezien loodrecht op de stroomlijnen geldt: $\dfrac{V_s^2}{R} + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial n} = 0$, Dus recht boven de steen: $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \dfrac{u^2(0\,0\,z)}{R}$,

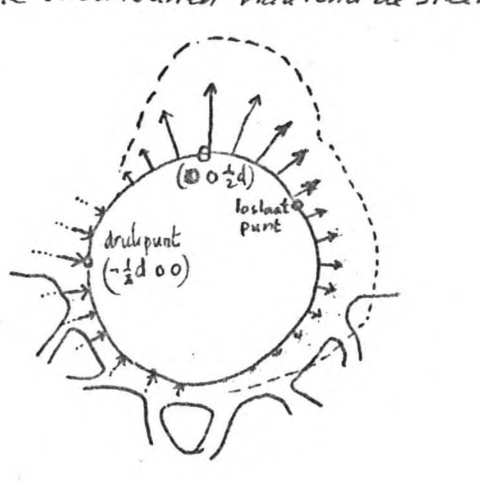
zou moeten gelden:

$$\frac{\left[\frac{\partial p}{\partial z}\right]_{\text{geval III}}}{\left[\frac{\partial p}{\partial z}\right]_{\text{geval II}}} = \frac{[u^2(x,0\,z)]_{\text{geval III}}}{U^2} < 1$$

Daarom lijkt het waarschijnlijker dat het stroomlijnenpatroon in geval III iets anders is dan in geval II: Vlak boven de steen liggen de stroomlijnen waarschijnlijk iets dichter bij elkaar; verder van de steen weg, iets verder van elkaar af (zie de getrokken lijnen) in de eerste figuur op de vorige bladzijde.

Vlak boven de steen zal het water relatief snel stromen, hetgeen relatief grote waarden van $\left|\frac{\partial p}{\partial s}\right|$ impliceert vlak rond de steen. Verderweg zijn relatief kleine waarden van $\left|\frac{\partial p}{\partial s}\right|$. Maar, aangezien $u(x,0\,z)$ toeneemt met z, en $\left|\frac{\partial p}{\partial s}\right|$ ongeveer recht evenredig is met $u^2(x,0\,z)$, zal de $\left|\frac{\partial p}{\partial s}\right|$ in stroombanen wat verder van de steen af, in absolute zin nauwelijks kleiner zijn dan in de stroombanen vlak rond de steen.

Ze zijn wel iets kleiner, zodat boven de steen $\frac{\partial p}{\partial z} > 0$, hetgeen overeenkomt met de kromming van de stroomlijnen. Maar $\left|\frac{\partial p}{\partial z}\right|$ zal daar erg klein zijn, hetgeen overeenkomt met de kleinere kromming en de kleinere absolute snelheid.



Uit een en ander kunnen we, mede met behulp van de hiernaast staande schets, een aantal conclusies trekken. Deze zijn vermeld in 2.4 .

B 2. DE DRUKTERM IN DE IMPULSIEBALANZEN. Zie ook 2.5 .

In het bovenvlak, ver boven de stenen en eventuele grenslagen, heerst de hoofdstroom. In de hoofdstroom geldt $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ (gegeven). In geval I geldt voor het ondervlak hetzelfde.
De stroomlijnen ter plaatse van de boven de bodem gelegen gedeelten van het voor- en achtervlak zijn recht, ook waar een grenslaag is. De stroomlijnen staan loodrecht of bijna loodrecht op deze vlakken, zodat langs een lijn evenwijdig aan de y-as in een van deze vlakken geldt: $\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} = 0$
en langs een lijn, evenwijdig aan de z-as: $\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} = 0$

In deze vergelijkingen is $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$ en $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$ (permanentie)
en $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ en $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$ (rechte stroomlijnen)

Dus: $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$

Op overeenkomstige wijze is aan te tonen dat ook in de zijvlakken, voorzover boven de bodem, geldt $\frac{\partial p}{\partial z} = 0$.

In elk boven de bodem gelegen punt van het voorvlak, achtervlak, de zijvlakken en het bovenvlak heerst dus dezelfde p.

Zouden we het voorvlak iets in de x-richting verplaatsen, dan zou daar ook weer dezelfde p heersen. Hetzelfde geldt voor het achtervlak en de zijvlakken. Hieruit valt af te leiden dat op de bodem ter plaatse van deze vier grensvlakken, de gradient van p in alle richtingen nul is.

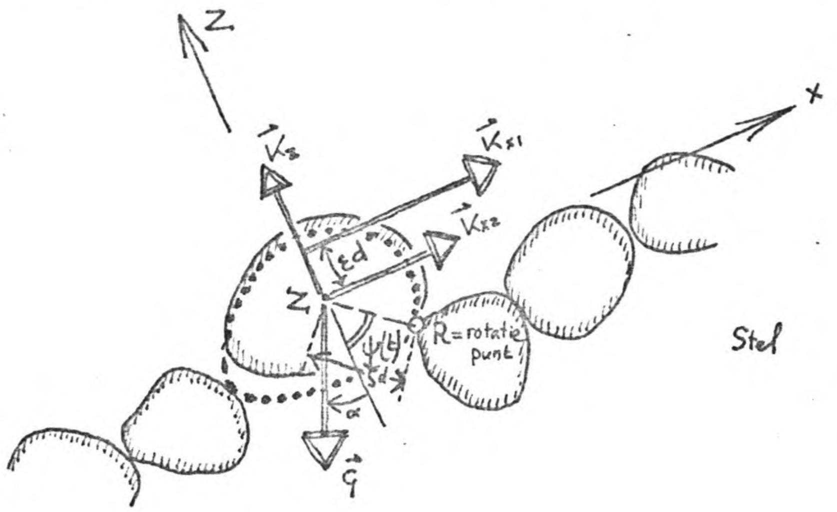
De impulsievergelijking van het water in de poreuze bodem bestaat in een permanent geval, globaal gesproken, uit twee termen: die voor het verhang van p en die voor de wrijving. Daarom zijn, ter plaatse van de genoemde vier grensvlakken alle snelheden nul en heeft p daar ook steeds dezelfde waarde. Het ondervlak ligt ver genoeg van de individuele steen af om ook voor dat vlak hetzelfde te kunnen stellen.

Uit dit alles volgt dat de drukterm in beide vergelijkingen steeds nul is.

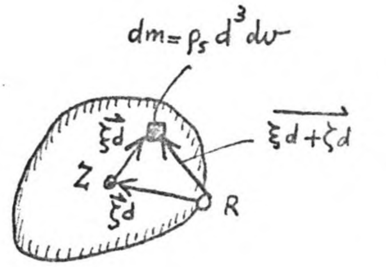
B 3 INVLOED VAN DE TRAAGHEID VAN DE STEEN

Bewegingsvergelijking

Het is van belang allereerst de bewegingsvergelijking van de steen op te schrijven. Vergelijk ook 3.1 .



Stel



Stel: I_{steen} = traagheidsmoment van de steen om de lijn evenwijdig aan de y-as door het zwaartepunt Z.

$= \rho_s \, d^5 \, i \cdot \frac{\pi}{6}$ mits $i = \frac{6}{\pi} \iiint_{vol} \xi^2 dv$

Volume steen $= \iiint_{vol} d^3 dv = d^3 \iiint dv$. Uit de definitie van d volgt : $\iiint dv = \frac{\pi}{6}$

$\dot{\psi} = -\omega$

Dan: Rotatie impulsie van de steen om R $= \vec{b}_{(R)} = \iiint_{vol} (\overrightarrow{\xi d + \zeta d}) \times \{\vec{\omega} \times (\overrightarrow{\xi d + \zeta d})\} \, dm$

Omdat, volgens „Handleiding bij het college b8", uitgave 1972, deel 1, appendix 2, blz 10, $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}$ en omdat hier $(\overrightarrow{\xi d + \zeta d}) \cdot \vec{\omega} = 0$

$$\vec{b}_{(R)} = \vec{\omega} \rho_s d^5 \iiint (\xi + \zeta)^2 dv$$

$$\vec{b}_{(R)} = \vec{\omega} \rho_s d^5 \iiint (\xi^2 + 2\xi\zeta + \zeta^2) dv$$

Omdat voorts $\iiint \xi \, dv = 0$ (zwaartepunt) en $\iiint dv = \frac{\pi}{6}$

$$\vec{b}_{(R)} = \vec{\omega} \rho_s d^5 \frac{\pi}{6} (\zeta^2 + i)$$

$$\dot{\vec{b}}_{(R)} = \dot{\vec{\omega}} \rho_s d^5 \frac{\pi}{6} (\zeta^2 + i)$$

Noem $I_R = \rho_s d^5 \frac{\pi}{6} (\zeta^2 + i)$ zodat $\dot{\vec{b}}_{(R)} = \dot{\vec{\omega}} I_R$

De bewegingsvergelijking van de steen luidt nu, mits $\psi(t) < \varphi$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{\text{Rotatie impulsie om } R\} = \Sigma \text{ momenten om } R$$

Dus:

$$|\dot{\vec{b}}_{(R)}| = K_z \zeta d \sin\psi + K_{x1} (\varepsilon d + \zeta d \cos\psi) + K_{x2} \zeta d \cos\psi - G \zeta d \sin(\psi + \alpha)$$

$$\dot{\omega} I_R = C_{LB} \cdot \tfrac{1}{2} \rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 \cdot d \zeta \sin\psi + C_{DB} \cdot \tfrac{1}{2} \rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 \cdot d (\varepsilon + \zeta \cos\psi) - \tfrac{\pi}{6} d^3 \tfrac{\partial p}{\partial x} \cdot \zeta d \cos\psi - (\rho_s - \rho_w) g \tfrac{\pi}{6} d^3 \cdot d \zeta \sin(\psi + \alpha)$$

$$\dot{\omega} I_R = M_u \cdot \frac{C_{LB} \zeta \sin\psi + C_{DB} (\varepsilon + \zeta \cos\psi)}{C_{LB} \zeta \sin\varphi + C_{DB} (\varepsilon + \zeta \cos\varphi)} - M_g \frac{\sin(\psi + \alpha)}{\sin(\varphi + \alpha)}$$

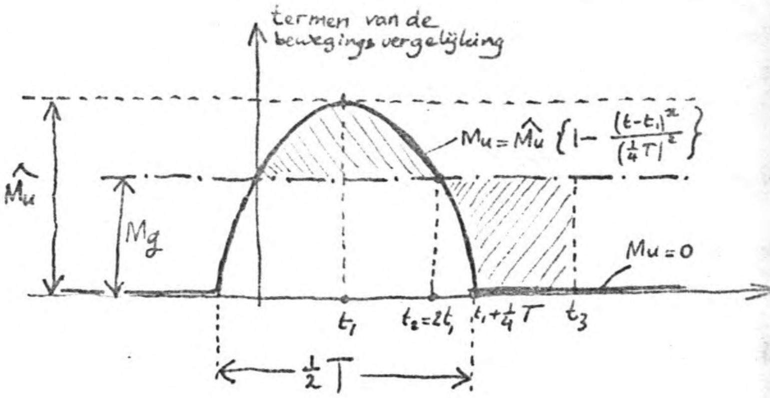
waarin per definitie

$$M_u = C_{LB} \cdot \tfrac{1}{2} \rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 \cdot d \zeta \sin\varphi + C_{DB} \cdot \tfrac{1}{2} \rho u_\infty^2 \cdot \tfrac{\pi}{4} d^2 \cdot d (\varepsilon + \zeta \cos\varphi)$$

$$M_g = (\rho_s - \rho) g \tfrac{\pi}{6} d^3 \cdot d \zeta \sin(\varphi + \alpha)$$

Eén enkele moment stoot

Stel in het hier volgende dat Mu steeds nul is, behalve gedurende een tijd $\frac{1}{2}T$, waarin Mu als maximale waarde $\hat{Mu}$ bereikt. Voor het gemak van de berekening, zal hier worden aangenomen dat Mu parabolisch verloopt. zie schets.



Nu geldt voor:

$t<0$ $\quad Mu<Mg$
$\psi=\varphi$
In de vergelijking ontbreekt nog een term die de steun van de stenen aan de linkerzijde van de individuele steen weergeeft. De vergelijking is dus niet geldig
De steen ligt stil

$t=0$ $\quad Mu=Mg$ (per definitie van $t=0$) $\rightarrow \hat{Mu}\left\{1-\left(\frac{t_1}{\frac{1}{4}T}\right)^2\right\}=Mg \rightarrow t_1=\frac{1}{4}T\sqrt{\frac{\hat{Mu}-Mg}{\hat{Mu}}}$
$\psi=\varphi$
De vergelijking is geldig: $\dot{\omega} I_R=0$
De steen beweegt zich nog net niet.

Blijft nu gelden in het vervolg dat $\{\varphi-f(t)\}\ll\varphi$, dus dat de steen nauwelijks opwipt, dan kunnen we bij benadering stellen:

$0<t<t_2$ $\quad -\dot{\psi}=\omega>0$
met $t_2=2t_1$
De vergelijking is geldig: $\dot{\omega} I_R \approx Mu-Mg>0$
De steen beweegt zich versnellend weg van de evenwichtspositie.

$t=t_2$ $\quad \omega>0$
De vergelijking is geldig: $\dot{\omega} I_R \approx Mu-Mg=0$
De steen beweegt zich eenparig weg van de evenwichtspositie.

$t_2<t<t_3$ $\quad \omega>0$
De vergelijking is geldig: $\dot{\omega} I_R \approx Mu-Mg<0$
De steen beweegt zich vertragend weg van de evenwichtspositie.

$t=t_3$ $\quad \omega=0$ (per definitie van t_3)
De vergelijking is geldig $\dot{\omega} I_R \approx Mu-Mg<0$
De steen staat, vertragend, stil.
N.B. Per definitie van t_3, geldt dus $\int_0^{t_3}(Mu-Mg)\,dt \approx 0$: gearceerde oppervlakken gelijk.

$t_3<t<t_4$ $\quad Mu<Mg$
$\omega<0$
De vergelijking is geldig $\dot{\omega} I_R \approx Mu-Mg<0$
De steen beweegt zich versnellend naar de evenwichtspositie.

$t=t_4$ $\quad \psi=\varphi$ (per definitie van t_4)
$Mu<Mg$
De vergelijking is niet meer geldig.
De steen is in z'n evenwichts positie, maar botst tegen de steen links.

$t > t_4$ De steen stuitert weer op. Indien de botsing volledig veerkrachtig is en M_u nog niet geheel gelijk aan nul is, zal de steen verder opwippen dan de eerste keer. Hier gaan we er echter van uit dat dat niet gebeurt. Na een paar keer opstuiteren zal de steen dan weer stil liggen in de evenwichtspositie.

Interessant is nu de grootte van $(\varphi-\psi)$ op $t=t_3$

Blijven we uitgaan van $(\varphi-\psi) \ll \varphi$, dan mogen we bij benadering stellen, mits $0<t<t_4$:

voor $0<t<t_1+\frac{1}{4}T$, dus voor $0<t<\frac{1}{4}T\left\{1+\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}\right\}$:

$$\dot{\omega} = \frac{\hat{M}_u}{I_R}\left\{1-\left(\frac{t-t_1}{\frac{1}{4}T}\right)^2\right\} - \frac{M_g}{I_R} \qquad \text{en met } t_1=\frac{1}{4}T\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}:$$

$$= \frac{\hat{M}_u}{I_R}\left[\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u} - \left\{\frac{t}{\frac{1}{4}T} - \sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}\right\}^2\right]$$

→ Als $t=0$ dan $\dot{\omega}=0$
→ Als $t=t_1=\frac{1}{4}T\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}$ dan $\dot{\omega}$ is maximaal
→ Als $t=t_2=\frac{1}{2}T\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}$ dan $\dot{\omega}=0$

$$\omega = \frac{\hat{M}_u T}{I_R}\left[-\frac{16}{3}\left(\frac{t}{T}\right)^3 + 4\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}\left(\frac{t}{T}\right)^2\right]$$

→ Als $t=0$ dan $\omega=0$
→ Als $t=t_3=\frac{3}{4}T\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}$ dan $\omega=0$

Dit laatste geldt mits $\frac{3}{4}T\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}} \leq \frac{1}{4}T\left\{1+\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}\right\}$

dus mits $\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u} \leq \frac{1}{4}$

$$\varphi-\psi = \frac{\hat{M}_u T^2}{I_R}\left[-\frac{4}{3}\left(\frac{t}{T}\right)^4 + \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}\left(\frac{t}{T}\right)^3\right]$$

→ Als $t=0$ dan $\varphi-\psi=0$

$\{\varphi-\psi(t)\}$ is maximaal als $t=\frac{3}{4}T\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}$ en mits $\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u} \leq \frac{1}{4}$

$$(\widehat{\varphi-\psi}) = \frac{9}{64}\frac{\hat{M}_u T^2}{I_R}\left\{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right\}^2$$

Als, daarentegen $\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u} > \frac{1}{4}$, dan geldt:

$$\omega = \frac{\hat{M}_u . T}{I_R}\left[-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)^{\frac{3}{2}}\right] - \frac{M_g . T}{I_R}\left[\frac{t}{T}-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}\right)\right]$$

$$t_3 = \frac{\hat{M}_u}{M_g}T\left[-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)^{\frac{3}{2}}\right] + \frac{1}{4}T\left(1+\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}\right)$$

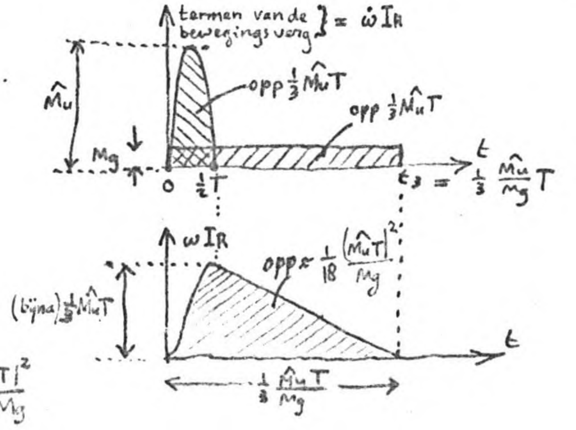
$$\varphi-\psi(t) = \frac{1}{48}\frac{\hat{M}_u T^2}{I_R}\left[-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)+2\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)^2\right] + \frac{\hat{M}_u T^2}{I_R}\left[-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)^{\frac{3}{2}}\right]\left\{\frac{t}{T}-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}\right)\right\}$$
$$- \frac{1}{2}\frac{M_g T^2}{I_R}\left\{\frac{t}{T}-\frac{1}{4}\left(1+\sqrt{\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}}\right)\right\}^2$$

$$(\widehat{\varphi-\psi}) = \frac{1}{48}\frac{\hat{M}_u T^2}{I_R}\left[-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)+2\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{M_u}\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{4}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{M_u}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\frac{\hat{M}_u T^2}{I_R}\cdot\frac{\hat{M}_u}{M_g}\left[-\frac{1}{12}+\frac{1}{4}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\hat{M}_u-M_g}{\hat{M}_u}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2$$

N.B. Uit deze formule volgt dat, als $\hat{M}_u \gg M_g$

$$(\widehat{\varphi-\psi}) \approx \frac{1}{18}\frac{(\hat{M}_u T)^2}{I_R M_g}$$

Dit is ook eenvoudig in te zien met behulp van nevenstaande schetsen. Als de stroom een korte hevige moment-stoot van $\frac{1}{3}\hat{M}_u T$ op de steen uitoefent, dan zal de steen op $t=\frac{1}{2}T \approx 0$ een rotatie snelheid $\frac{1}{3}\frac{\hat{M}_u T}{I_R}$ hebben. Het moment van de zwaartekracht M_g zal deze rotatie snelheid langzaam verminderen tot nul. In die tijd, durende $\frac{1}{3}\frac{\hat{M}_u T}{M_g}$, bereikt de steen $\widehat{\varphi-\psi} = \frac{1}{2}\frac{(\frac{1}{3}\hat{M}_u T)^2}{I_R M_g}$



Samenvattend kunnen we stellen, mits $(\varphi-\psi) \ll \varphi$, dat

voor $\dfrac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u} \leq \dfrac{1}{4}$

$$\widehat{\varphi-\psi} \approx \frac{9}{64}\,\frac{\hat{M}_u T^2}{I_R}\left\{\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right\}^2$$

$$= \frac{9}{64}\left[\frac{3}{4}\,\frac{\zeta\{C_{LB}\sin\varphi + C_{DB}(\frac{\varepsilon}{\zeta}+\cos\varphi)\}}{(\zeta^2+i)}\cdot\frac{\rho}{\rho_s}\cdot\left(\frac{\hat{u}_\infty T}{d}\right)^2 - 2\,\frac{\zeta\sin(\varphi+\alpha)}{\zeta^2+i}\cdot\left(1-\frac{\rho}{\rho_s}\right)\cdot\frac{gT^2}{d}\right.$$

$$\left. + \frac{4}{3}\,\frac{\zeta\sin^2(\varphi+\alpha)}{(\zeta^2+i)\{C_{LB}\sin\varphi + C_{DB}(\frac{\varepsilon}{\zeta}+\cos\varphi)\}}\cdot\frac{\rho}{\rho_s}\Delta^2\cdot\left(\frac{gT}{\hat{u}_\infty}\right)^2\right]$$

voor $\dfrac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u} \geq \dfrac{1}{4}$

$$\widehat{\varphi-\psi} \approx \frac{1}{48}\,\frac{\hat{M}_u T^2}{I_R}\left[-\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right) + 2\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right)^2\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\,\frac{\hat{M}_u T^2}{I_R}\cdot\frac{\hat{M}_u}{M_g}\cdot\left[-\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2$$

voor $\dfrac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u} \approx 1$

dus $\hat{M}_u \gg M_g$

$$\widehat{\varphi-\psi} \approx \frac{1}{2}\,\frac{(\frac{1}{3}\hat{M}_u T)^2}{I_R M_g}$$

waarin $\frac{1}{3}\hat{M}_u T$ de moment-stoot is die de stroom op de steen uitoefent.

$$= \frac{1}{32}\,\frac{\zeta\{C_{LB}\sin\varphi + C_{DB}(\frac{\varepsilon}{\zeta}+\cos\varphi)\}^2}{(\zeta^2+i)\sin(\varphi+\alpha)}\cdot\frac{\rho}{\rho_s\Delta}\cdot\frac{\hat{u}_\infty^4\cdot T^2}{gd^3}$$

N.B. Uit de formules blijkt ondermeer dat $\widehat{\varphi-\psi}$ onafhankelijk is van de diameter van de steen, zolang de Froude schaal wordt gehanteerd.

STABILITEITSKRITERIUM

De steen verliest zijn stabiliteit, als $\widehat{\varphi-\psi} = \varphi$, dus bijvoorbeeld als $\widehat{\varphi-\psi} = 0{,}7$ $(\varphi = 40^\circ)$. De bovenstaande formules voor $\widehat{\varphi-\psi}$ mogen echter niet worden toegepast bij zulke grote waarden van $\varphi-\psi$, zij zouden een te gunstig beeld geven. De berekende $\widehat{\varphi-\psi}$ is echter wel een goede maat om situaties met verschillende waarden voor I_R, T, $\hat{M}_u$ en M_g met elkaar te vergelijken. Daarom zal voor een voorbeeld-steen uitgezet worden welke waarde van $\dfrac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}$ nodig is om bij een gegeven $\dfrac{gT^2}{d}$ de waarde $\widehat{\varphi-\psi} = 0{,}4$ te laten bereiken, volgens bovenstaande formules.

Als nu geldt
$$\left.\begin{aligned} \alpha &= 0^\circ \\ \varphi &= 40^\circ \\ \varepsilon &= 0{,}2 \\ \zeta &= 0{,}6 \\ i &= 0{,}08 \\ \rho &= 1000\ \mathrm{kg/m^3} \\ \rho_s &= 2650\ \mathrm{kg/m^3} \end{aligned}\right\}\quad \text{Dan: } \left.\begin{aligned} M_g &= 0{,}330\cdot\rho g d^4 \\ I_R &= 0{,}610\cdot\rho d^5 \end{aligned}\right\}\quad \frac{M_g}{I_R} = 0{,}54\,\frac{g}{d}$$

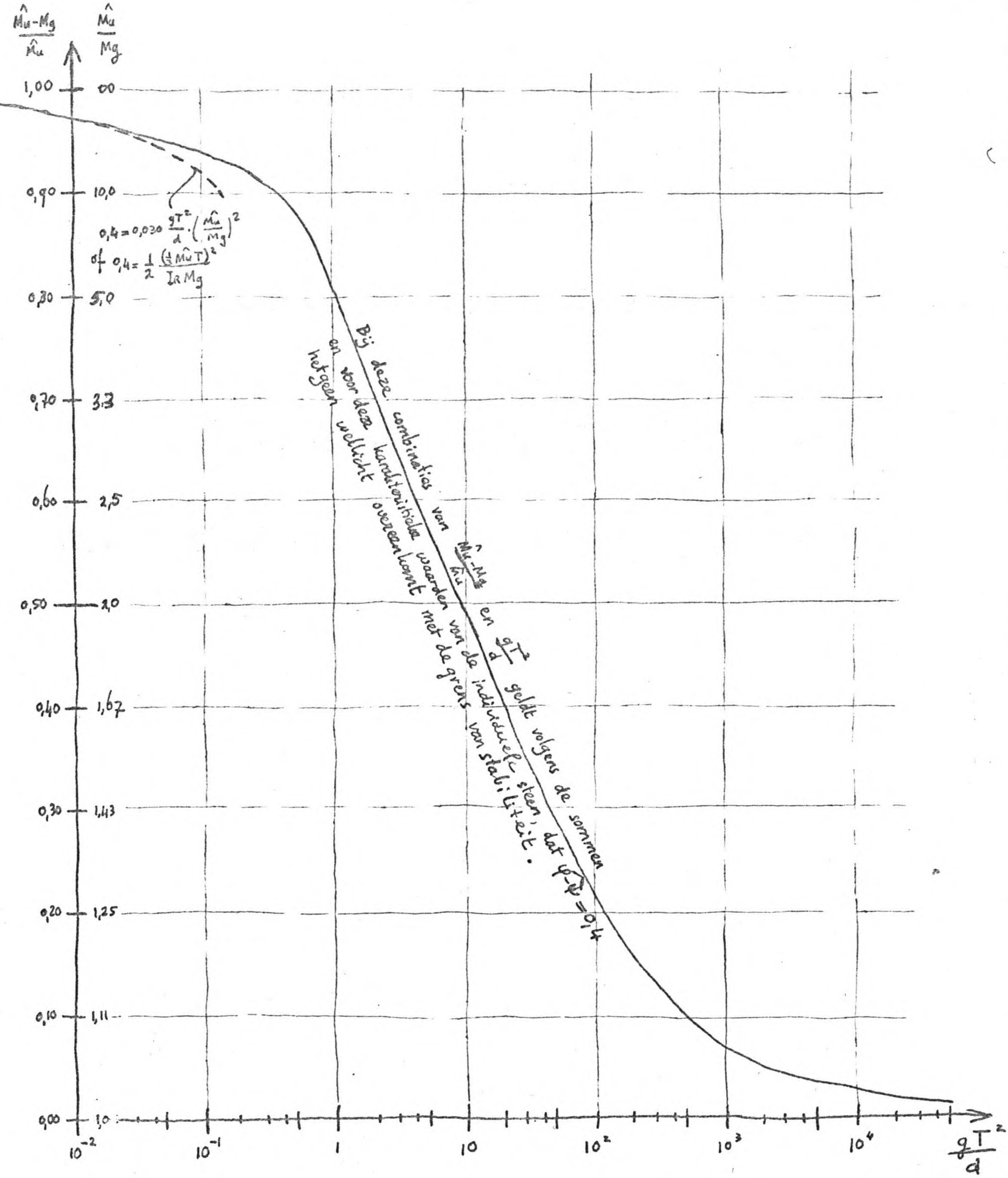
Met bovenvermeld stabiliteitskriterium volgt dan:

voor $\dfrac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u} \leq \dfrac{1}{4}$
$$0{,}4 = 0{,}076\cdot\frac{gT^2}{d}\cdot\frac{\hat{M}_u}{M_g}\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right)^2$$

voor $\dfrac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u} \geq \dfrac{1}{4}$
$$0{,}4 = 0{,}00280\cdot\frac{gT^2}{d}\cdot\frac{\hat{M}_u}{M_g}\left\{-1 + 6\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right) + 8\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right)^{\frac{3}{2}} + 3\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right)^2\right\}$$
$$+ 0{,}00187\cdot\frac{gT^2}{d}\cdot\left(\frac{\hat{M}_u}{M_g}\right)^2\left[-1 + 3\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right) + 2\left(\frac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u}\right)^{\frac{3}{2}}\right]^2$$

met als benadering, als $\dfrac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_u} \approx 1$
$$0{,}4 = 0{,}030\cdot\frac{gT^2}{d}\left(\frac{\hat{M}_u}{M_g}\right)^2$$

Deze formules worden uitgezet in een grafiek op de volgende bladzijde: het verband tussen $\dfrac{gT^2}{d}$ en $\left(\dfrac{\hat{M}_u - M_g}{\hat{M}_g}\right)$ wanneer de grens van stabiliteit ongeveer bereikt wordt.

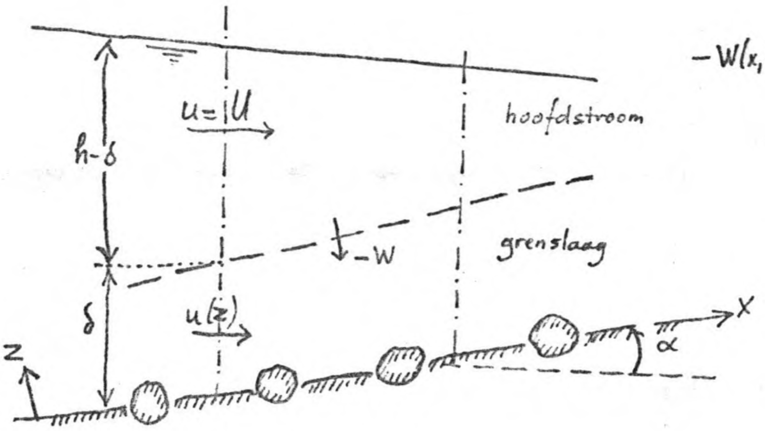


Uit de grafiek volgt ondermeer:

- Als $\frac{gT^2}{d} > 1000$, dan mag het maximale moment t.g.v. de stroom ($\hat{M}u$) nauwelijks groter zijn dan het maximale moment t.g.v. de zwaartekracht (Mg), of instabiliteit treedt op. Er hoeft bij stabiliteitsberekeningen geen rekening gehouden te worden met de traagheid.
- Als $\frac{gT^2}{d} < 0{,}4.10^{-2}$ of $\hat{M}u > 20\,Mg$, dan is het niet meer van belang $\hat{M}u$ en T apart te weten. De grootte van de momentstoot $\frac{1}{3}\hat{M}uT$ is bepalend voor de stabiliteit. Bij de gekozen karakteristieken van de steen, wordt de grens van stabiliteit ongeveer bereikt als $\frac{1}{3}\hat{M}uT = 0{,}4\,\rho\, d^4\sqrt{gd}$.

B 4. BASISVERGELIJKINGEN GRENSLAAG EN HOOFDSTROOM

Zie ook 4.1 .



$-W(x,t) =$ hier het debiet per eenheid van oppervlak dat van de hoofdstroom naar de grenslaag gaat door de gemeenschappelijke grens.

Continuïteitsvergelijking grenslaag: $\dfrac{\partial \delta}{\partial t} = -W - \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^\delta u\,dz\right\}$

Continuïteitsvergelijking hoofdstroom: $\dfrac{\partial (h-\delta)}{\partial t} = W - \dfrac{\partial}{\partial x}\left\{U(h-\delta)\right\}$

Continuïteitsvergelijking geheel: $\dfrac{\partial h}{\partial t} = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{U(h-\delta) + \int_0^\delta u\,dz\right\}$ of $= -\dfrac{\partial}{\partial x}\left\{\int_0^h u\,dz\right\}$

Balans voor de grenslaag van de impulsie in x-richting:

$$\underset{\text{in stuk grenslaag}}{\text{Toename impulsie}} = \underbrace{\text{door linker vlak instromende impulsie} - \text{door rechter vlak uitstromende impulsie}} + \text{instromende impulsie van uit hoofdstroom} + \text{kracht van drukverhang naar rechts} - \text{schuifspanning aan de bodem}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^\delta u\,dz\right\} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\int^\delta u^2 dz\right\} - W.U - g\delta.\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_b}{\rho}$$

of: $$\frac{\partial}{\partial t}\left\{U(\delta-\delta_1)\right\} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{U^2(\delta-\delta_1-\delta_2)\right\} - W.U - g\delta.\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\tau_b}{\rho}$$

Vergelijking langs een stroomlijn in de hoofdstroom van de impulsie in x-richting:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -U\frac{\partial U}{\partial x} - g\frac{\partial h}{\partial x}$$

B5. TOEPASSING LOGARITMISCHE SNELHEIDSPROFIELEN OP RESULTATEN M 598 – V EN M 711 – II.

Snelheden, gemeten bij vier series proeven op het moment van „Enige aantasting" (M598 – V), desbetreffend „Begin van beweging" (M711 – II), werden ingevuld in enige (gedaanten van) formules (Zie ook 4.2). Hieruit volgde steeds een τ_b. Deze is genoteerd in de kolommen.

	M 598 – V, $\rho_s = 2800\ kg/m^3$: SERIE 16, $d_{50\ zeef} = 0{,}028\ m$	M 598 – V, $\rho_s = 2800\ kg/m^3$: SERIE 18, $d_{50\ zeef} = 0{,}110\ m$	M 711 – II meetpunt 5: SERIE I a 3, $d_{50\ zeef} = 0{,}033\ m$	M 711 – II meetpunt 5: SERIE I b 3, $d_{50\ zeef} = 0{,}033\ m$
δ (geschat uit snelheids-profielen)	0,50 m	0,40 m	0,12 m	0,15 m
$\frac{\delta}{h}$	0,25	0,12	0,28	0,54
eenvoudig log. snelheidsprofiel gedaante a)	35 N/m^2 ($z_1 = 0{,}1\ m$, $z_2 = 0{,}4\ m$)	110 N/m^2 ($z_1 = 0{,}1\ m$, $z_2 = 0{,}4\ m$)	92 N/m^2 ($z_1 = 0{,}06\ m$, $z_2 = 0{,}10\ m$) à 130 N/m^2 ($z_1 = 0{,}03\ m$, $z_2 = 0{,}10\ m$) à 132 N/m^2 ($z_1 = 0{,}02\ m$, $z_2 = 0{,}06\ m$)	145 N/m^2 ($z_1 = 0{,}06\ m$, $z_2 = 0{,}13\ m$) à 154 N/m^2 ($z_1 = 0{,}03\ m$, $z_2 = 0{,}13\ m$) à 192 N/m^2 ($z_1 = 0{,}06\ m$, $z_2 = 0{,}10\ m$)
eenvoudig log. snelheidsprofiel gedaante b) met $z_0 = 0{,}025\ d$	12 N/m^2	55 N/m^2	22 N/m^2	20 N/m^2
eenvoudig log. snelheidsprofiel gedaante b) met $z_0 = 0{,}12\ d$	22 N/m^2	117 N/m^2	45 N/m^2	42 N/m^2
eenvoudig log. snelheidsprofiel gedaante c) met $z_0 = 0{,}025\ d$	10 N/m^2 à 14 N/m^2 ($z = 0{,}1\ m$) ($z = 0{,}4\ m$)	52 N/m^2 à 66 N/m^2 ($z = 0{,}1\ m$) ($z = 0{,}4\ m$)	11 N/m^2 à 23 N/m^2 à 28 N/m^2 ($z = 0{,}03\ m$) ($z = 0{,}06\ m$) ($z = 0{,}10\ m$)	4 N/m^2 à 15 N/m^2 à 24 N/m^2 ($z = 0{,}03\ m$) ($z = 0{,}06\ m$) ($z = 0{,}10\ m$)
eenvoudig log. snelheidsprofiel gedaante c) met $z_0 = 0{,}12\ d$	20 N/m^2 à 24 N/m^2 ($z = 0{,}1\ m$) ($z = 0{,}4\ m$)	136 N/m^2 à 155 N/m^2 ($z = 0{,}4\ m$) ($z = 0{,}1\ m$)	34 N/m^2 à 59 N/m^2 à 63 N/m^2 ($z = 0{,}03\ m$) ($z = 0{,}06\ m$) ($z = 0{,}10\ m$)	14 N/m^2 à 44 N/m^2 à 54 N/m^2 ($z = 0{,}03\ m$) ($z = 0{,}06\ m$) ($z = 0{,}10\ m$)
Velocity defect law voor $\frac{z}{\delta} > 0{,}15$ met $z_0 = 0{,}025\ d$	9 N/m^2	39 N/m^2	17 N/m^2	14 N/m^2
formule Shields: $(\tau_b)_{kritisch} = 0{,}05\ \rho_w \Delta g d$	30 N/m^2	115 N/m^2	44 N/m^2	44 N/m^2

B6. KORRELVERDELING GEBROKEN NATUURSTEEN

Bij de proeven van M 711 - II (3) werd basaltslag ($\rho = 2850\ \mathrm{kg/m^3}$) gebruikt, in meerdere groepen. De groepen werden gekenmerkt door hun $d_{50\,zeef}$. Men kan zich afvragen of elke groep niet beter gekarakteriseerd zou kunnen worden door

òf $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{M_{50\,AANTAL}}{\rho_s}}$ waarin $M_{50\,AANTAL}$ de massa is die door 50% van het <u>aantal</u> stenen overschreden wordt.

òf $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{M_{50\,MASSA}}{\rho_s}}$ waarin $M_{50\,MASSA}$ de massa is die door 50% van de totale massa stenen overschreden wordt,

òf $\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{\overline{M}}{\rho_s}}$ waarin $\overline{M}$ de gemiddelde massa van alle stenen is.

Deze grootheden zullen worden uitgerekend voor twee groepen basaltslag: de groep die gekenmerkt wordt door $d_{50\,zeef} = 0{,}033\ m$ en de groep die gekenmerkt wordt door $d_{50\,zeef} = 0{,}025\ m$. De gegevens worden ontleend aan figuur 1 van M 711 - II. Een en ander geeft ook een beeld van de spreiding van de massa's der individuele stenen. Als van elke groep 10 representatieve stenen worden gekozen, dan hebben ze de volgende massa's:

M_i met $i=1 \ldots 10$ in kg	Gesommeerde massa $\sum_{i=1}^{n} M_i \downarrow$	Gesommeerde massa $\sum_{i=n}^{10} M_i \uparrow$
$M_1 = 0{,}028$ kg	0,028	0,531
$M_2 = 0{,}037$	0,065	0,503
$M_3 = 0{,}042$	0,107	0,466
$M_4 = 0{,}046$	0,153	0,424
$M_5 = 0{,}050$	0,203	0,378
$M_{50\,AANTAL} = 0{,}052$ kg		
$M_6 = 0{,}054$	0,257	0,328
$M_7 = 0{,}059$	0,316	0,274
$M_8 = 0{,}064$	0,380	0,215
$M_9 = 0{,}070$	0,450	0,151
$M_{10} = 0{,}081$	0,531	0,081

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{M_1}{\rho_s}} = 0{,}027\ m$

50% v.d. totale massa = 0,265 kg

$M_{50\,MASSA} = 0{,}060$ kg

50% v.d. totale massa = 0,265 kg

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{M_{10}}{\rho_s}} = 0{,}038\ m$

$\overline{M} = \frac{0{,}531}{10} = 0{,}053$ kg

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{M_{50\,AANTAL}}{\rho_s}} = 0{,}033\ m$

$d_{50\,zeef} = 0{,}033\ m$

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{\overline{M}}{\rho_s}} = 0{,}033\ m$

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{M_{50\,MASSA}}{\rho_s}} = 0{,}034\ m$

M_i met $i=1 \ldots 10$ in kg	Gesommeerde massa (kg) $\sum_{i=1}^{n} M_i \downarrow$	Gesommeerde massa (kg) $\sum_{i=n}^{10} M_i \uparrow$
$M_1 = 0{,}0160$	0,0160	0,2469
$M_2 = 0{,}0186$	0,0346	0,2309
$M_3 = 0{,}0201$	0,0547	0,2123
$M_4 = 0{,}0214$	0,0761	0,1922
$M_5 = 0{,}0225$	0,0986	0,1708
$M_{50\,AANTAL} = 0{,}0230$		
$M_6 = 0{,}0241$	0,1227	0,1483
$M_7 = 0{,}0264$	0,1491	0,1242
$M_8 = 0{,}0288$	0,1779	0,0978
$M_9 = 0{,}0320$	0,2099	0,0690
$M_{10} = 0{,}0370$	0,2469	0,0370

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{M_1}{\rho_s}} = 0{,}022\ m$

50% v.d. totale massa = 0,1235 kg

$M_{50\,MASSA} = 0{,}0253$ kg

50% v.d. totale massa = 0,1235 kg

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{M_{10}}{\rho_s}} = 0{,}029\ m$

$\overline{M} = \frac{0{,}2469}{10} = 0{,}0247$ kg

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{M_{50\,AANTAL}}{\rho_s}} = 0{,}025\ m$

$d_{50\,zeef} = 0{,}025\ m$

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{\overline{M}}{\rho_s}} = 0{,}026\ m$

$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}\frac{M_{50\,MASSA}}{\rho_s}} = 0{,}026\ m$

B7. VELOCITY DEFECT LAW

Zie Dailey en Harleman (11), formule 12-43 en tabel 12-4

$e z_0 < z < 0{,}15\,\delta$	$0{,}15\,\delta < z < \delta$
$\dfrac{u(z)}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} = \dfrac{1}{\kappa}\ln\left(\dfrac{z}{k}\right) + 8{,}2$	$\dfrac{U-u(z)}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} = -8{,}6\log\left(\dfrac{z}{\delta}\right) = -3{,}7\ln\left(\dfrac{z}{\delta}\right)$
k = zandruwheid = 30 z_0, dus: $\dfrac{u(z)}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} = \dfrac{1}{\kappa}\ln\left(\dfrac{z}{z_0}\right)$	$\dfrac{u(z)}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} = \dfrac{U}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} + 3{,}7\ln\left(\dfrac{z}{\delta}\right)$
$\dfrac{u(0{,}15\delta)}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} = \dfrac{1}{\kappa}\ln\left(\dfrac{0{,}15\delta}{z_0}\right)$	$\dfrac{u(0{,}15\delta)}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} = \dfrac{U}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} + 3{,}7\ln(0{,}15)$

Dus:

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{0{,}15\delta}{z_0}\right) - 3{,}7\ln(0{,}15)$$

$$\frac{U}{\sqrt{\frac{\tau_b}{\rho}}} = \frac{1}{\kappa}\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)$$

$$\frac{\tau_b}{\rho U^2} = \frac{\kappa^2}{\ln^2\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}$$

$\dfrac{u(z)}{U} = \dfrac{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)}$	$\dfrac{u(z)}{U} = 1{,}53\,\dfrac{\ln\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\ln\left(\frac{2{,}8\delta}{z_0}\right)} + 1$

Berekening δ_1 en δ_2

N.B.
$$\delta_1 = \delta - \int_0^\delta \left(\frac{u}{U}\right) dz$$
$$\delta_2 = \delta - \delta_1 - \int_0^\delta \left(\frac{u}{U}\right)^2 dz$$

N.B.
$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z}\left\{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\right\} &= \frac{1}{z}\\
\frac{\partial}{\partial z}\left\{z\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)\right\} &= \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + 1\\
\frac{\partial}{\partial z}\left\{z\ln^2\left(\frac{z}{z_0}\right)\right\} &= \ln^2\left(\frac{z}{z_0}\right) + 2\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)
\end{aligned}\right\}
\qquad
\begin{aligned}
\int \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) dz &= z\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - z + C\\
\int \ln^2\left(\frac{z}{z_0}\right) dz &= z\ln^2\left(\frac{z}{z_0}\right) - 2z\ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + 2z
\end{aligned}$$

<u>Vervolg berekening δ_1 en δ_2 bij Velocity defect law voor $z > 0{,}15\delta$</u>

$$
\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta - \int_0^{0,15\delta} \left(\frac{u}{U}\right) dz - \int_{0,15\delta}^{\delta} \left(\frac{u}{U}\right) dz \\
&= \delta - \int_{z_0}^{0,15\delta} \frac{\ln\left(\frac{z}{z_0}\right)}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} dz - \int_{0,15\delta}^{\delta} 1{,}53 \frac{\ln\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} dz - \int_{0,15\delta}^{\delta} 1\, dz \\
&= \delta - \frac{1}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left[z \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) - z \right]_{z_0}^{0,15\delta} - \frac{1{,}53}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left[z \ln\left(\frac{z}{\delta}\right) - z \right]_{0,15\delta}^{\delta} - 0{,}85\delta \\
&= \delta - \frac{0{,}15\delta}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left\{ \ln\left(\frac{0{,}15\delta}{z_0}\right) - 1 \right\} + \frac{1{,}53 . 0{,}85\delta}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} + \frac{1{,}53 . 0{,}15\delta . \ln(0{,}15)}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} - 0{,}85\delta \\
&= 0{,}15\delta - \frac{0{,}15\delta}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left\{ \ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right) - \ln(18{,}7) \right\} + \frac{1{,}03\delta}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \\
&= \frac{1{,}47\delta}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_2 &= \delta - \delta_1 - \int_{z_0}^{0,15\delta} \frac{\ln^2\left(\frac{z}{z_0}\right)}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} dz - \int_{0,15\delta}^{\delta} 1{,}53^2 \frac{\ln^2\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} dz - \int_{0,15\delta}^{\delta} 2 . 1{,}53 \frac{\ln\left(\frac{z}{\delta}\right)}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} dz - \int_{0,15\delta}^{\delta} 1\, dz \\
&= \delta - \delta_1 - \frac{1}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left[z \ln^2\left(\frac{z}{z_0}\right) - 2z \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + 2z \right]_{z_0}^{0,15\delta} - \frac{1{,}53^2}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left[z \ln^2\left(\frac{z}{\delta}\right) - 2z \ln\left(\frac{z}{\delta}\right) + 2z \right]_{0,15\delta}^{\delta} + 2 \frac{1{,}53 \{0{,}85\delta + 0{,}15\delta \ln(0{,}15)\}}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} - 0{,}85\delta \\
&= \delta - \delta_1 - \frac{0{,}15\delta}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left\{ \ln^2\left(\frac{0{,}15\delta}{z_0}\right) - 2 \ln\left(\frac{0{,}15\delta}{z_0}\right) + 2 \right\} - \frac{1{,}53^2}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left\{ 2 . 0{,}85\delta - 0{,}15\delta \ln^2(0{,}15) + 2 . 0{,}15\delta \ln(0{,}15) \right\} + 2 \frac{0{,}87\delta}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} - 0{,}85\delta \\
&= \delta - \delta_1 - \frac{0{,}15\delta}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left\{ \ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right) - \ln(18{,}7) \right\}^2 + \frac{2 . 0{,}15\delta}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left\{ \ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right) - \ln(18{,}7) \right\} - \ldots \text{idem} \ldots + \text{idem} - \text{idem} \\
&\qquad - \frac{2 . 0{,}15\delta}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \\
&= \delta - \delta_1 - 0{,}15\delta + \frac{0{,}15\delta . 2 . \ln 18{,}7}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} - \frac{0{,}15\delta \ln^2(18{,}7)}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} + \frac{2 . 0{,}15\delta}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} - \ldots \text{idem} \ldots + \text{idem} - \text{idem} \\
&\qquad - \frac{2 . 0{,}15\delta \ln(18{,}7)}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} - \frac{2 . 0{,}15\delta}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \\
&= \left\{ \delta - 0{,}15\delta - 0{,}85\delta \right\} + \left\{ \frac{-1{,}47\delta + 0{,}15\delta . 2 \ln(18{,}7) + 2 . 0{,}15\delta + 2 . 0{,}87\delta}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \right\} + \\
&\qquad + \frac{1}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} \left\{ -0{,}15\delta \ln^2(18{,}7) - 2 . 0{,}15\delta \ln(18{,}7) - 2 . 0{,}15\delta - 2 . 1{,}53^2 \delta + 1{,}53^2 . 0{,}15\delta \ln^2(0{,}15) \right. \\
&\qquad\qquad \left. - 1{,}53^2 . 2 . 0{,}15\delta \ln(0{,}15) + 1{,}53^2 . 2 . 0{,}15\delta \right\} \\
&= + \frac{1{,}47\delta}{\ln\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)} - \frac{3{,}86\delta}{\ln^2\left(\frac{2,8\delta}{z_0}\right)}
\end{aligned}
$$

B 8. ANALYSE VAN TWEE PROEVEN VAN M711 – II
OVERZICHT RESULTATEN M711 – II EN M711 – III

Zie (3) en (4) . Zie 5.2

Helaas is de hoek van interne wrijving φ niet gemeten. Stel $\varphi = 40°$

Analyse proef no. I a 3

In meetpunt ⑤, waar de stenen het eerst hun stabiliteit verliezen, geldt:

$$d = 0{,}033\,m$$
$$\Delta = 1{,}85$$
$$h = 0{,}42\,m$$
$$\delta \approx 0{,}12\,m$$
$$[U]_{kritiek} = 2{,}15\ m/s$$
$$[\bar{u}]_{kritiek} = 1{,}91\ m/s$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -U\frac{\partial U}{\partial x} \approx -2{,}15\ m/s\ \frac{2{,}15\ m/s - 1{,}80\ m/s}{1{,}6\ m} = -0{,}47\ m/s^2$$
$$Re = \frac{u_\infty \cdot d}{\nu} = \frac{0{,}94\ m/s \cdot 0{,}033\,m}{10^{-6}\ m^2/s} = 3{,}1 \cdot 10^4$$

$$\left[\frac{\bar{u}^2}{gd}\right]_{kritiek} = 1{,}49^2\,\Delta\,\log^2\left(3{,}5\frac{h}{d}\right)$$

(in de formule van van de Kreeke staat 1,4 i.pl.v. 1,49)

Met behulp van de Velocity defect law voor $z > 0{,}15\delta$, kunnen we de relatie tussen $\bar{u}$ en U_∞ vaststellen.

Stel
$$u_\infty = u(z_{top}), \quad z_{top} = 0{,}4\,d, \quad z_0 = \frac{d}{30}$$
$$\frac{u_\infty}{U} = \frac{\ln\left(\frac{z_{top}}{z_0}\right)}{\ln\left(2{,}8\frac{\delta}{z_0}\right)} = 0{,}44$$
mits $z_{top} < 0{,}15\delta$ en dat is zo

Hieruit volgt $\bar{u} = \frac{1{,}91\ m/s}{2{,}15\ m/s}\cdot\frac{u_\infty}{0{,}44} = 2{,}04\,u_\infty$ en $\rightarrow \left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 1{,}82\left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + 0{,}84\,\Delta\right\}$

Analyse proef no. I b 3

In meetpunt ⑤ geldt:

$$d = 0{,}033\,m$$
$$\Delta = 1{,}85$$
$$h = 0{,}345\,m$$
$$\delta \approx 0{,}18\,m$$
$$[U]_{kritiek} = 2{,}05\ m/s$$
$$[\bar{u}]_{kritiek} = 1{,}74\ m/s$$
$$\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{1}{g}U\frac{\partial U}{\partial x} \approx -\frac{2{,}05\ m/s}{9{,}81\ m/s^2}\ \frac{2{,}05\ m/s - 1{,}65\ m/s}{1{,}60\ m} = -0{,}052$$

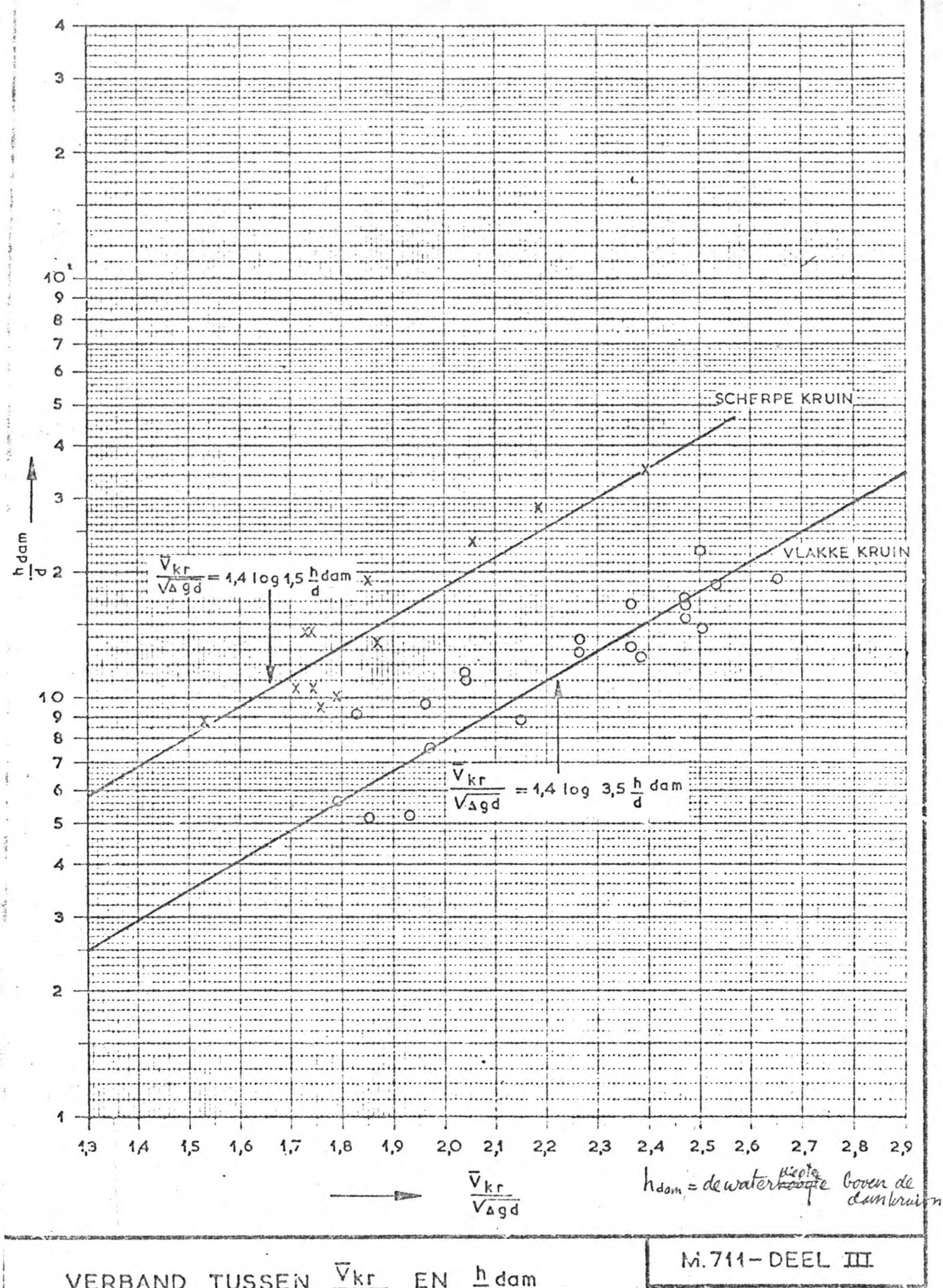
$$\left[\frac{\bar{u}^2}{gd}\right]_{kritiek} = 1{,}43^2\,\Delta\,\log^2\left(3{,}5\frac{h}{d}\right)$$

$$Re = \frac{0{,}84\ m/s \cdot 0{,}033\,m}{10^{-6}\ m^2/s} = 2{,}8 \cdot 10^4$$

Stel
$$u_\infty = u(z_{top}), \quad z_{top} = 0{,}4\,d, \quad z_0 = \frac{d}{30}$$
(Velocity defect law voor $z > 0{,}15\delta$) $\rightarrow \frac{u_\infty}{U} = \frac{\ln\left(\frac{z_{top}}{z_0}\right)}{\ln\left(2{,}8\frac{\delta}{z_0}\right)} = 0{,}41$ mits $z_{top} < 0{,}15\delta$ en dat is zo

Hieruit volgt $\bar{u} = \frac{1{,}74}{2{,}05}\cdot\frac{u_\infty}{0{,}41} = 2{,}08\,u_\infty$ en $\left[\frac{u_\infty^2}{gd}\right]_{kritiek} = 1{,}44\cdot\left\{\frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + \Delta\,\mathrm{tg}\,\varphi\right\}$

Overzicht resultaten



VERBAND TUSSEN $\frac{\bar{V}_{kr}}{\sqrt{\Delta g d}}$ EN $\frac{h}{d}$ dam

M.711 – DEEL III

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

FIG. 19

B9. SNELHEIDSPROFIELEN EN SCHUIFSPANNINGSPROFIELEN   Zie ook 4.2

geval a) : $U > 0$ $\quad \frac{\partial h}{\partial x} = 0$

Voor $\delta < z < h$ geldt $g\frac{\partial h}{\partial x} = 0$, dus (zie 4.1 , vergelijking III) $U\frac{\partial U}{\partial x} = 0$, dus $\frac{\partial U}{\partial x} = 0$

Voor $0 < z < \delta$ geldt $u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$

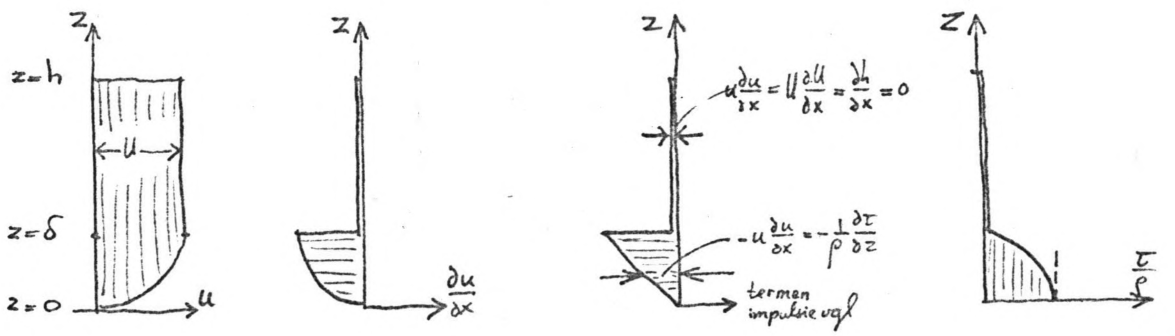
bovenin de grenslaag is $u \approx U$, dus $u > 0$ en $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$

lager in de grenslaag $0 < u < U$ en is $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ vermoedelijk kleiner dan boven

dus zeker $\left|u\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ kleiner dan boven.

over de hele grenslaag $u\frac{\partial u}{\partial x} < 0 \rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} < 0$

Stel $u\frac{\partial u}{\partial x}$ verloopt lineair met z .



geval b): $U > 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x} < 0$

Voor $\delta < z < h$ geldt $g\frac{\partial h}{\partial x} < 0$ dus $U\frac{\partial U}{\partial x} > 0$, dus $\frac{\partial U}{\partial x} > 0$

Voor $0 < z < \delta$ geldt dan $u\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{g\frac{\partial h}{\partial x}}_{<0} - \frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial z}}_{<0} = 0$

over de hele grenslaag $0 < u < U$

$\frac{\partial u}{\partial x} < \frac{\partial U}{\partial x}$ $\quad$ $\frac{\partial u}{\partial x}$ kan >0, dan $u\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ (b3)

$\frac{\partial u}{\partial x}$ kan <0, dan $u\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ (b1)

$$\frac{\partial u}{\partial z} > 0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} \tau > 0 \\ \tau_b > 0 \\ \tau(\delta) = 0 \end{array}\right\} \frac{\partial \tau}{\partial z} < 0$$

bij de bodem: $u \approx 0 \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx 0 \rightarrow -\frac{1}{\rho_w}\frac{\partial \tau}{\partial z} = -g\frac{\partial h}{\partial x} < 0$

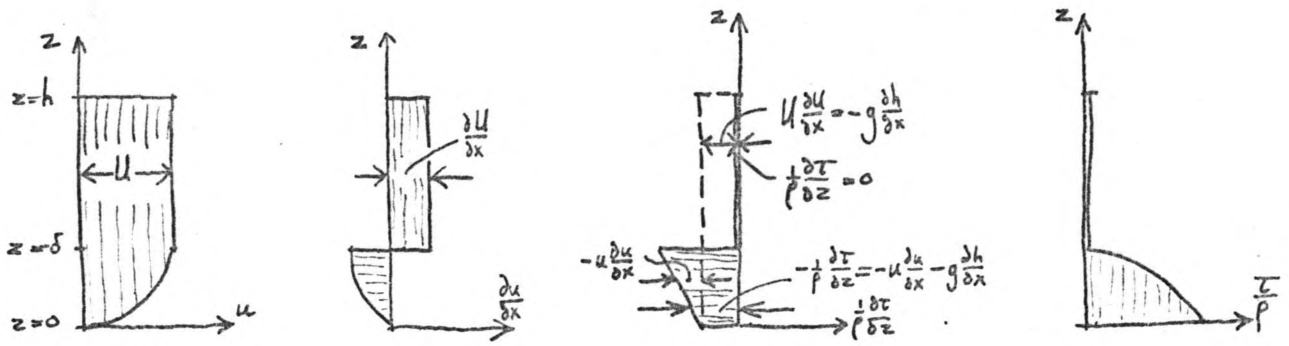
Voor $z \approx \delta$ $u = U$:
doch in de grenslaag

b1) $\frac{\partial u}{\partial x} < 0$ stel $u\frac{\partial u}{\partial x}$ verloopt lineair over de hoogte

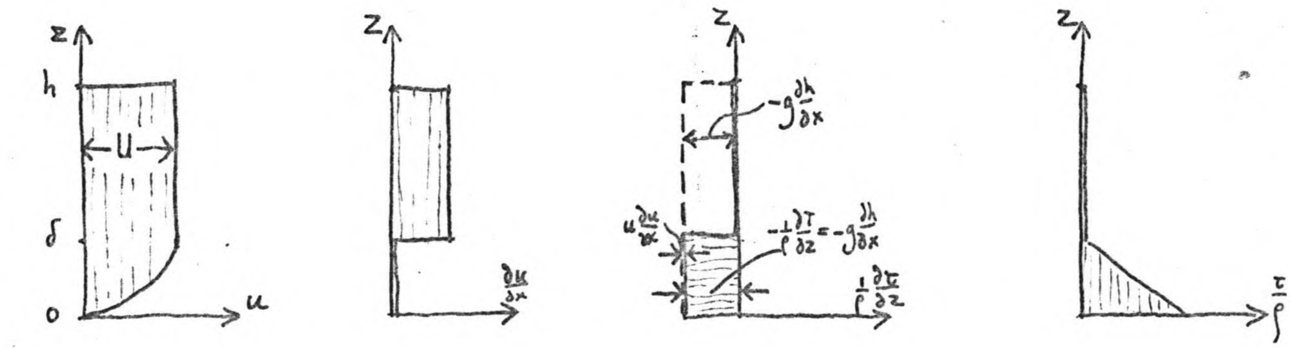
b2) $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ Stel $u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ over de hele grenslaag

b3) $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ Stel $u\frac{\partial u}{\partial x}$ verloopt lineair over de hoogte

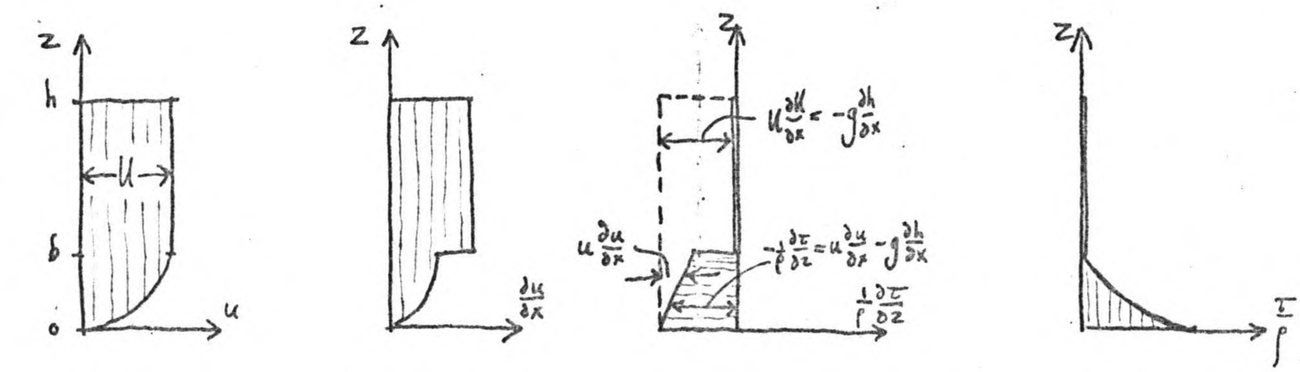
AL b1)



AL b2)



AL b3)



Geval c) : $U > 0 \quad \frac{\partial h}{\partial x} > 0$

Voor $\delta < z < h$ geldt $g\frac{\partial h}{\partial x} < 0$, dus $U\frac{\partial U}{\partial x} < 0$, dus $\frac{\partial U}{\partial x} < 0$

Voor $0 < z < \delta$ geldt $u\frac{\partial u}{\partial x} + \underbrace{g\frac{\partial h}{\partial x}}_{>0} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$

Voor $z \approx \delta$ $u \approx U > 0$ $\frac{\partial u}{\partial x} < \frac{\partial U}{\partial x} < 0 \rightarrow u\frac{\partial u}{\partial x} < 0$
doch in de grenslaag

c1) $\left|u\frac{\partial u}{\partial x}\right| > \left|g\frac{\partial h}{\partial x}\right| \rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} < 0$

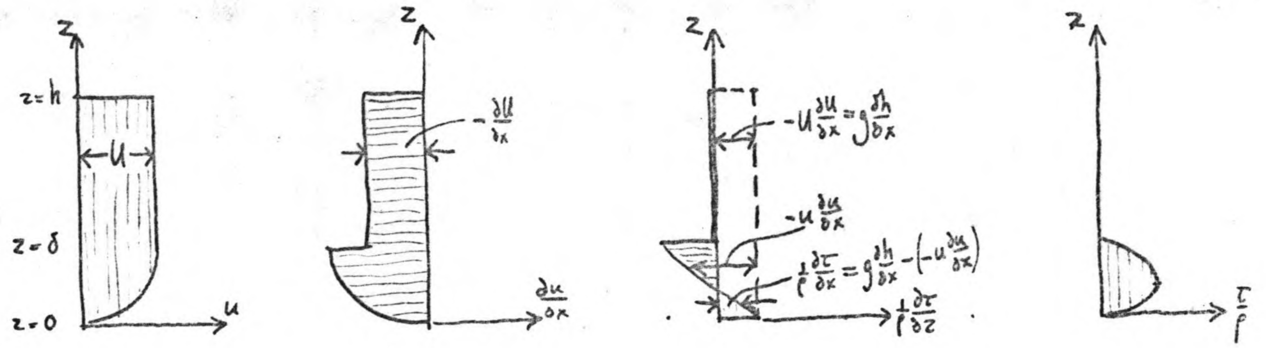
c2) $\left|u\frac{\partial u}{\partial x}\right| = \left|g\frac{\partial h}{\partial x}\right| \rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$

c3) $\left|u\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \left|g\frac{\partial h}{\partial x}\right| \rightarrow \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} > 0$ dus vlak beneden $z=\delta$: $\frac{\tau}{\rho} < 0$

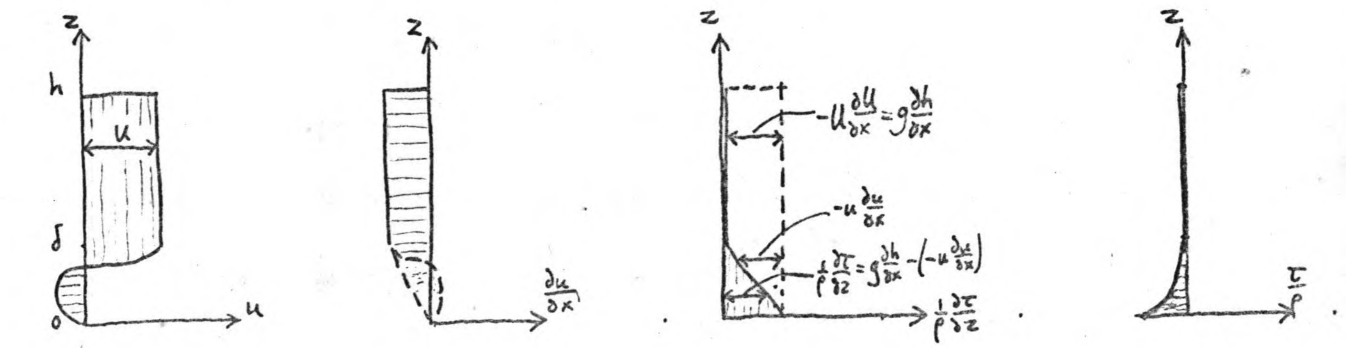
Voor $z = 0$ $u = 0$ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial z} = g\frac{\partial h}{\partial x} > 0$

Stel weer: $u\frac{\partial u}{\partial x}$ verloopt lineair met de hoogte .

AL c1)



VAL c2)



VAL c3)