

waterloopkundig laboratorium

zandtransport in suspensie

studie diffusietheorie

verslag literatuuronderzoek

R 783 deel I

december 1973

zandtransport in suspensie

studie diffusietheorie

verslag literatuuronderzoek

R 783 deel I

december 1973

INHOUD

	blz.
<u>1</u>	<u>Inleiding</u> 1
1.1	Opdracht 1
1.2	Probleemstelling en opzet onderzoek 1
<u>2</u>	<u>Afleiding diffusievergelijking</u> 2
2.1	Inleiding..... 2
2.2	Algemene afleiding 2
2.3	Afleiding volgens Hunt 6
<u>3</u>	<u>Oplossing diffusievergelijking</u> 8
3.1	ϵ_s constant 8
3.2	ϵ_s niet constant 9
3.2.1	Gebruikelijke oplossing..... 9
3.2.2	Oplossing volgens Hunt 12
3.2.3	Vergelijking gebruikelijke oplossing met oplossing volgens Hunt ... 14
3.3	Overeenkomst met experimenteel onderzoek..... 16
<u>4</u>	<u>Nadere beschouwing hydraulische parameters</u> 17
4.1	Inleiding..... 17
4.2	Uitwisselingscoëfficiënt 18
4.2.1	Onderzoek Jobson en Sayre..... 21
4.2.2	Onderzoek Coleman..... 25
4.3	Constante van Von Karman 28
4.3.1	Onderzoek Einstein en Ning Chien 28
4.3.2	Onderzoek Ippen 29
4.3.3	Onderzoek Einstein en Abdel-Aal 33
4.4	Valsnelheid 34
4.4.1	Invloed concentratie op valsnelheid..... 34
4.4.2	Invloed turbulentie op valsnelheid 38
<u>5</u>	<u>Invloed hydraulische parameters op concentratieverdeling</u> 39
5.1	Onderzoek Hjelmfelt en Lenau 39
5.2	Onderzoek Jobson en Sayre..... 44

INHOUD (vervolg)

	blz.	
<u>6</u>	<u>Invloed hoge concentratie bij bodem op snelheidsverdeling</u>	
	<u>en concentratieverdeling.....</u>	48
6.1	Onderzoek Einstein en Ning Chien.....	48
6.2	Onderzoek Ordonez en Ippen.....	51
<u>7</u>	<u>Berekeningsmethoden</u>	53
7.1	Berekening suspensietransport volgens Einstein.....	53
7.2	Berekening suspensietransport volgens Hunt	55
7.3	Berekening suspensietransport volgens Ippen.....	57
<u>8</u>	<u>Samenvatting en conclusies</u>	57

LITERATUUR

FIGUREN

- 1 Concentratieverdeling bij constante uitwisselingscoëfficiënt van sediment volgens Rouse
- 2 Verandering van concentratie bij constante uitwisselingscoëfficiënt van sediment en constante opname volgens Dobbins
- 3 Vergelijking concentratieverdelingen volgens Hunt en Rouse
- 4...7 Invloed constante B_s op concentratieverdeling volgens Hunt
- 8 Concentratieverdeling volgens Vanoni
- 9 Relatie tussen Z_1 en Z volgens Chien
- 10 Verticale verdeling van de uitwisselingscoëfficiënt van water volgens Jobson en Sayre
- 11 Verticale verdeling van de uitwisselingscoëfficiënt van sediment volgens Jobson en Sayre
- 12 Verticale verdeling van de uitwisselingscoëfficiënt van sediment volgens Coleman
- 13 Verschil gemeten en berekende waarde voor verschillende uitdrukkingen van de uitwisselingscoëfficiënt van sediment
- 14 Invloed sediment op constante van Von Karman volgens Einstein en Ning Chien
- 15 Invloed sediment op constante van Von Karman volgens Vanoni
- 16 Invloed sediment op constante van Von Karman volgens Ippen
- 17 Invloed sediment op constante van Von Karman volgens Einstein en Abdel-Aal
- 18 Invloed concentratie op valsnelheid volgens McNown en Lin. Re klein
- 19 Invloed concentratie op valsnelheid. Re klein
- 20 Invloed concentratie op valsnelheid volgens Stenhouse
- 21 Invloed concentratie op valsnelheid volgens Brauer en Kriegel
- 22 Vergelijking theoretische formule van Brauer en Kriegel met empirische formule van Richardson en Zaki
- 23 Invloed turbulentie op valsnelheid
- 24 Invloed valsnelheid als functie van concentratie op concentratieverdeling volgens Hjelmfelt en Lenau
- 25,26 Concentratieverdelingen volgens Hjelmfelt en Lenau. Invloed valsnelheid als functie van concentratie
- 27 Invloed hydraulische parameters op concentratieverdeling voor stroom met sediment

FIGUREN (vervolg)

- 28 Vergelijking van snelheidsverdeling voor stroom met sediment met die voor stroom zonder sediment volgens Einstein en Ning Chien
- 29 Vergelijking van snelheidsverdelingen volgens vgl. 6.14 met gemeten snelheidsverdelingen volgens Ordonez en Ippen
- 30 Relatie tussen ψ en K^1 voor verschillende waarden van Z_1 volgens Ordonez en Ippen
- 31 Verdeling van de concentratie over diepte volgens Ordonez en Ippen

SYMBOLLEN

		dimensie
A	waarschijnlijkheid, dat deeltje sedimenteert	-
D	korreldiameter	[L]
$E(i) = \psi$	dimensieloze uitwisselingscoëfficiënt in i-richting (numerieke notatie), geldt voor onderrand van differentiegebiedje	-
M	aantal kolommen per eenheid van lengte	-
N	aantal lagen in vertikaal	-
P	flux vector voor sediment	-
Q	flux vector voor water; debiet	- ; [L ³ T ⁻¹]
R	diameter van gemerkte bol gedeeld door diameter van omringende suspensie; hydraulische straal	- ; [L]
Re	getal van Reynolds	-
U	stroomsnelheid (vectoraanduiding)	[LT ⁻¹]
U_s	korrelsnelheid (vectoraanduiding)	[LT ⁻¹]
\bar{U}	gemiddelde stroomsnelheid (vectoraanduiding)	[LT ⁻¹]
\bar{U}_s	gemiddelde korrelsnelheid (vectoraanduiding)	[LT ⁻¹]
U'	stroomsnelheidsfluctuatie in tijd (vectoraanduiding)	[LT ⁻¹]
U'_s	korrelsnelheidsfluctuatie in tijd (vectoraanduiding)	[LT ⁻¹]
U'_{sf}	korrelsnelheidsfluctuatie in tijd ten opzichte van stroomsnelheid (vectoraanduiding)	[LT ⁻¹]
U'_{sfr}	radiale component van U'_{sf} (vectoraanduiding)	[LT ⁻¹]
U'_{sft}	tangentiale component van U'_{sf} (vectoraanduiding)	[LT ⁻¹]
U_r	omtreksnelheid van wervel	[LT ⁻¹]
$U(i) = \frac{1}{\mu}$	reciproque-waarde van dimensieloze snelheid, geldt voor midden differentiegebiedje (numerieke notatie)	-
$VS = W_s$	dimensieloze valsnelheid (numerieke notatie)	-
W	valsnelheid	[LT ⁻¹]
W(o)	valsnelheid bij concentratie c = 0	[LT ⁻¹]
W(c)	valsnelheid bij concentratie c	[LT ⁻¹]
$W_{rel} = \frac{W(c)}{W(o)}$	relatie tussen W(c) en W(o)	-

SYMBOLLEN (vervolg)

		dimensie
W_s	dimensieloze valsnelheid	-
$Z = \frac{W}{\beta K u_*}$	exponent in de concentratieverdeling	-
Z_1	exponent in de concentratieverdeling (gemeten)	-
a	amplitude; afstand tot bodem; dikte van door Einstein gedefinieerde bodemiaag; afstand tussen 2 korrels in korreelpatroon	[L]
c	concentratie	- ; [ML ⁻² T ⁻²]
\bar{c}	gemiddelde concentratie in tijd	- ; [ML ⁻² T ⁻²]
c'	concentratiefluctuatie in tijd	- ; [ML ⁻² T ⁻²]
c_m	gemiddelde concentratie over diepte	- ; [ML ⁻² T ⁻²]
c_o	maximum concentratie bij bodem	- ; [ML ⁻² T ⁻²]
d	door Krey gedefinieerde afstand tot bodem	[L]
g	versnelling van zwaartekracht	[LT ⁻²]
h	waterdiepte	[L]
i	verhang	-
i_t	totaal verhang	-
i_w	verhang ten gevolge van wand	-
i_b	aandeel bepaalde fractie in bodemtransport	-
i_s	aandeel bepaalde fractie in suspensietransport	-
k	maat voor bodemruwheid; constante	[L] ; -
l	lengte; mengweg van Von Karman	[L]
q	debiet per eenheid van breedte	[L ² T ⁻¹]
r	straal van wervel	[L]
s_b	bodemtransport per eenheid van breedte	[L ² T ⁻¹] ; [ML ⁻¹ T ⁻¹]
s_s	suspensietransport per eenheid van breedte	[L ² T ⁻¹] ; [ML ⁻¹ T ⁻¹]
t	tijd	[T]
u	stroomsnelheid in x-richting	[LT ⁻¹]
\bar{u}	gemiddelde stroomsnelheid in x-richting	[LT ⁻¹]
u'	stroomsnelheidsfluctuatie in tijd in x-richting	[LT ⁻¹]
u_*	schuifspanningssnelheid in x-richting	[LT ⁻¹]
v	stroomsnelheid in y-richting	[LT ⁻¹]
\bar{v}	gemiddelde stroomsnelheid in y-richting	[LT ⁻¹]

SYMBOLLEN (vervolg)

		dimensie
v'	stroomsnelheidsfluctuatie in tijd in y-richting	$[LT^{-1}]$
w	stroomsnelheid in z-richting	$[LT^{-1}]$
\bar{w}	gemiddelde stroomsnelheid in z-richting	$[LT^{-1}]$
w'	stroomsnelheidsfluctuatie in tijd in z-richting	$[LT^{-1}]$
x	horizontale afstand in stroomrichting	$[L]$
y	verticale afstand	$[L]$
z	horizontale afstand \perp stroomrichting	$[L]$
β	relatie tussen ϵ_s en ϵ_m	-
ϵ	uitwisselingscoëfficiënt	$[L^2T^{-1}]$
ϵ_c	uitwisselingscoëfficiënt met betrekking tot gebogen baan sediment	$[L^2T^{-1}]$
ϵ_m	uitwisselingscoëfficiënt van impuls	$[L^2T^{-1}]$
ϵ_s	uitwisselingscoëfficiënt van sediment	$[L^2T^{-1}]$
ϵ_{sx}	uitwisselingscoëfficiënt van sediment in x-richting	$[L^2T^{-1}]$
ϵ_{sy}	uitwisselingscoëfficiënt van sediment in y-richting	$[L^2T^{-1}]$
ϵ_t	uitwisselingscoëfficiënt met betrekking tot rechte lijnige snelheidsfluctuaties	$[L^2T^{-1}]$
ϵ_w	uitwisselingscoëfficiënt van water	$[L^2T^{-1}]$
η	relatieve diepte	-
K	constante van Von Karman	-
K'	gecorrigeerde constante van Von Karman	-
μ	dimensieloze snelheid	-
ν	kinematische viscositeit	$[L^2T^{-1}]$
ρ	dichtheid van water	$[ML^{-3}]$
ρ_s	dichtheid van sediment	$[ML^{-3}]$
τ	schuifspanning	$[ML^{-1}T^{-2}]$
τ_b	bodemschuifspanning	$[ML^{-1}T^{-2}]$
τ_y	schuifspanning op afstand y tot bodem	$[ML^{-1}T^{-2}]$
ψ	empirische correctiefactor van Ordonez;	
	dimensieloze uitwisselingscoëfficiënt	-
ω	hoeksnelheid	$[T^{-1}]$

ZANDTRANSPORT IN SUSPENSIE

Studie diffusietheorie

1 Inleiding

1.1 Opdracht

De Waterloopkundige Afdeling van de Deltadienst van Rijkswaterstaat heeft het Waterloopkundig Laboratorium opdracht gegeven te onderzoeken op welke wijze de nauwkeurigheid kan worden vergroot, waarmee bij overwegend zwevend transport bodemveranderingen kunnen worden voorspeld.

1.2 Probleemstelling en opzet onderzoek

Bodemveranderingen hangen direkt samen met de aanwezige transportcapaciteit van het water en de aangeboden hoeveelheid sediment. In tegenstelling tot bodemtransport, waarbij een direkte relatie bestaat tussen waterbeweging en sedimenttransport, treden bij zwevend transport bij verandering van omstandigheden tijdsafhankelijke processen op.

In opeenvolgende graad van moeilijkheid kunnen de volgende gevallen worden onderscheiden:

- 1 een permanente en eenparige stroming voor zand en water
- 2 een permanente en eenparige stroming voor water alleen
- 3 een permanente en niet-eenparige stroming met verwaarloosbare bodemveranderingen
- 4 een niet-permanente en niet-eenparige stroming met verwaarloosbare bodemveranderingen
- 5 een permanente en niet-eenparige stroming met bodemveranderingen
- 6 een niet-permanente en niet-eenparige stroming met bodemveranderingen

De basis voor alle gevallen is geval 1.

Voordat echter de hiervoor genoemde gevallen nader worden onderzocht, dient eerst een literatuurstudie te worden verricht, die beperkt is tot de literatuur, die betrekking heeft op de diffusietheorie.

In dit verslag wordt over deze literatuurstudie gerapporteerd. De studie is verricht door ir. N.J. v. Wijngaarden, die ook dit verslag heeft samengesteld.

2 Afleiding diffusievergelijking

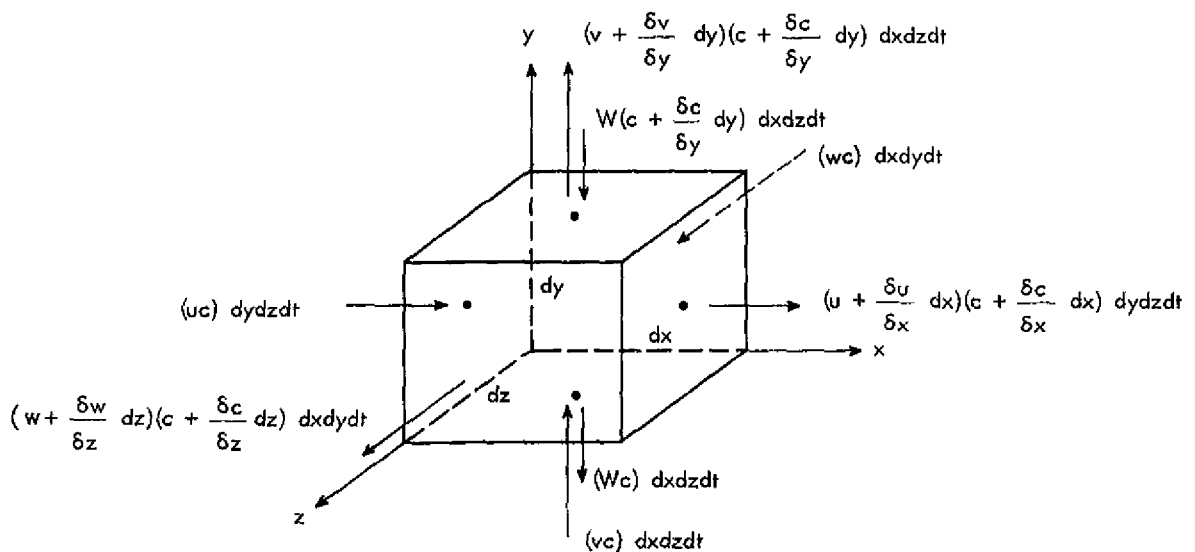
2.1 Inleiding

Verondersteld wordt, dat het materiaal in suspensie wordt gehouden door de turbulente menging van de stroom, waarbij de beweging van de deeltjes als een diffusieproces kan worden beschreven.

De hierna gegeven afleidingen zijn gebaseerd op zuiver kinematische overwegingen. Er wordt geen rekening gehouden met op het sediment aangrijpende krachten. Zolang echter de vergelijkingen gebruikt worden voor fijn materiaal met geringe massa is dit geen bezwaar.

2.2 Algemene afleiding

De afleiding van de meest algemene vergelijking berust op het principe van het behoud van massa: in een tijdje dt is de hoeveelheid sediment, die een volume-elementje binnenkomt verminderd met de hoeveelheid, die eruit gaat, gelijk aan de toename van de hoeveelheid sediment binnen het volume-elementje. De onderstaande schets toont de stroom van het sediment in de verschillende richtingen gedurende een tijdje dt .



De stroomsnelheden in de x-, y- en z-richting zijn respectievelijk u, v en w. De stroom van het sediment als gevolg van de sedimentatie door eigen gewicht wordt aangegeven door de termen met de valsnelheid W.

Toepassing van het principe van behoud van massa geeft:

$$\left[-u \frac{\delta c}{\delta x} - c \frac{\delta u}{\delta x} - v \frac{\delta c}{\delta y} - c \frac{\delta v}{\delta y} - w \frac{\delta c}{\delta z} - c \frac{\delta w}{\delta z} + W \frac{\delta c}{\delta y} \right] dx dy dz dt =$$

$$\left(\frac{\delta c}{\delta t} \right) dx dy dz dt \quad (2.1)$$

Hierbij zijn de moleculaire diffusie en de 2^{de} orde termen verwaarloosd.

Vergelijking (2.1) kan na enig omwerken ook als volgt worden geschreven:

$$\frac{\delta c}{\delta t} = - \frac{\delta(uc)}{\delta x} - \frac{\delta(vc)}{\delta y} - \frac{\delta(wc)}{\delta z} + W \frac{\delta c}{\delta y} \quad (2.2)$$

In een turbulente stroom wordt:

$$c = \bar{c} + c'$$

en

$$u = \bar{u} + u'$$

$$v = \bar{v} + v'$$

$$w = \bar{w} + w'$$

(2.3)

waarbij \bar{c} de gemiddelde concentratie is en c' de variatie van \bar{c} met de tijd.

Evenzo zijn \bar{u} , \bar{v} en \bar{w} de gemiddelde stroomsnelheden in respectievelijk de x, y en z-richting en u' , v' en w' de variaties van \bar{u} , \bar{v} en \bar{w} met de tijd.

Vergelijking (2.3) ingevuld in vergelijking (2.2) geeft na middeling over de tijd:

$$\frac{\delta \bar{c}}{\delta t} = - \frac{\delta(\bar{u}\bar{c})}{\delta x} - \frac{\delta(\bar{v}\bar{c})}{\delta y} - \frac{\delta(\bar{w}\bar{c})}{\delta z} - \frac{\delta(\bar{u}'c')}{\delta x} - \frac{\delta(\bar{v}'c')}{\delta y} - \frac{\delta(\bar{w}'c')}{\delta z} + W \frac{\delta \bar{c}}{\delta y} \quad (2.4)$$

Gesteld wordt:

$$\begin{aligned}\overline{u'c'} &= -\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta x} \\ \overline{v'c'} &= -\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta y} \\ \overline{w'c'} &= -\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta z}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Hierbij is ϵ_s de uitwisselingscoëfficiënt van sediment. Deze is gelijk verondersteld in de x-, y- en z-richting.

Met vergelijking (2.5) gaat vergelijking (2.4) over in:

$$\begin{aligned}\frac{\delta \bar{c}}{\delta t} &= -\frac{\delta(\bar{u}\bar{c})}{\delta x} - \frac{\delta(\bar{v}\bar{c})}{\delta y} - \frac{\delta(\bar{w}\bar{c})}{\delta z} + \frac{\delta}{\delta x} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta y} \right) + \\ &+ \frac{\delta}{\delta z} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta z} \right) + W \frac{\delta \bar{c}}{\delta y}\end{aligned}\tag{2.6}$$

Vergelijking (2.6) is de meest algemene vergelijking voor sediment in suspensie.

Voor de permanente toestand geldt: $\frac{\delta \bar{c}}{\delta t} = 0$, zodat (2.6) overgaat in:

$$\begin{aligned}-\frac{\delta(\bar{u}\bar{c})}{\delta x} - \frac{\delta(\bar{v}\bar{c})}{\delta y} - \frac{\delta(\bar{w}\bar{c})}{\delta z} + \frac{\delta}{\delta x} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta z} \right) + \\ + W \frac{\delta \bar{c}}{\delta y} = 0\end{aligned}\tag{2.7}$$

Is de stroming van het water bovendien eenparig en twee-dimensionaal, dan geldt:

$$\frac{\delta \bar{u}}{\delta x} = 0 \quad ; \quad v = 0 \quad ; \quad w = 0 \quad ; \quad \frac{\delta \bar{c}}{\delta z} = 0 \quad ; \quad \frac{\delta}{\delta z} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta z} \right) = 0$$

Vergelijking (2.7) wordt dan:

$$- u \frac{\delta \bar{c}}{\delta x} + \frac{\delta}{\delta x} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta y} \right) + W \frac{\delta \bar{c}}{\delta y} = 0 \quad (2.8)$$

Als ook het sediment transport eenparig is, dan geldt: $\frac{\delta \bar{c}}{\delta x} = 0$

Vergelijking (2.8) gaat dan over in:

$$\frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta y} \right) + W \frac{\delta \bar{c}}{\delta y} = 0$$

of anders geschreven:

$$\frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_s \frac{\delta \bar{c}}{\delta y} + W \bar{c} \right) = 0 \quad (2.9)$$

Als wordt verondersteld, dat geen resulterend transport van sediment door het wateroppervlak plaats vindt, gaat (2.9) over in:

$$\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} + Wc = 0 \quad (2.10)$$

waarbij voor \bar{c} gemakshalve c is geschreven.

Vergelijking (2.10) geldt dus voor een permanente, eenparige en twee-dimensionale stroom, waarbij het sediment transport eveneens permanent en eenparig is.

Vergelijking (2.10) is afgeleid voor het geval van lage sedimentconcentraties, waarbij geen rekening is gehouden met het door het sediment ingenomen volume.

2.3 Afleiding volgens Hunt

Hunt [16] heeft voor het eerst een afleiding van de diffusievergelijking gegeven voor het geval van hoge sedimentconcentraties, waarbij rekening wordt gehouden met het door het sediment ingenomen volume. In een permanente turbulente stroom wordt het transport van sediment bepaald door twee factoren: de turbulente diffusie en de sedimenteigenschappen.

Als gesteld wordt, dat $P(x, y, z, t)$ de flux vector is voor het sediment, $U_s(x, y, z)$ de snelheidsvector voor het sediment en c de concentratie van het sediment, dan is:

$$P = U_s c - \epsilon_s \quad (\text{gradiënt } c) \quad (2.11)$$

waarin ϵ_s de uitwisselingscoëfficiënt van sediment is.

Als op analoge wijze voor het water wordt gesteld, dat Q de flux vector is, U de snelheidsvector en $(1 - c)$ de concentratie, waarbij c is uitgedrukt in volumeprocenten, dan is:

$$Q = U(1 - c) - \epsilon_w \left\{ \text{gradiënt } (1 - c) \right\} \quad (2.12)$$

waarin ϵ_w de uitwisselingscoëfficiënt van water is.

De continuïteitsvergelijking is:

$$\text{div } (P + Q) = 0 \quad (2.13)$$

De verandering in de concentratie van het sediment op een bepaalde plaats is:

$$\frac{\delta c}{\delta t} = - \text{div } P \quad (2.14)$$

of:

$$\frac{\delta c}{\delta t} = \text{div} \left\{ \epsilon_s (\text{gradiënt } c) \right\} - \text{div } (U_s c) \quad (2.15)$$

Uit de vergelijkingen (2.12), (2.13) en (2.14) volgt:

$$\frac{\delta c}{\delta t} = \text{div} \left\{ \epsilon_w (\text{gradient } c) \right\} + \text{div} \left\{ U(1 - c) \right\} \quad (2.16)$$

Uitgeschreven in de x-, y- en z-richting worden de vergelijkingen (2.15) en (2.16):

$$\begin{aligned} \frac{\delta c}{\delta t} = & \frac{\delta}{\delta x} \left(\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left(\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta z} \right) - c \left(\frac{\delta u_s}{\delta x} + \frac{\delta v_s}{\delta y} + \frac{\delta w_s}{\delta z} \right) \\ & - u_s \frac{\delta c}{\delta x} - v_s \frac{\delta c}{\delta y} - w_s \frac{\delta c}{\delta z} \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta c}{\delta t} = & \frac{\delta}{\delta x} \left(\epsilon_w \frac{\delta c}{\delta x} \right) + \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_w \frac{\delta c}{\delta y} \right) + \frac{\delta}{\delta z} \left(\epsilon_w \frac{\delta c}{\delta z} \right) + (1 - c) \left(\frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z} \right) \\ & - u \frac{\delta c}{\delta x} - v \frac{\delta c}{\delta y} - w \frac{\delta c}{\delta z} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Voor het geval van een permanente eenparige en twee-dimensionale stroom, waarbij de concentratie constant is als functie van de tijd en alleen varieert in de y-richting worden de vergelijkingen (2.17) en (2.18):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} \right) - c \frac{\delta v_s}{\delta y} - v_s \frac{\delta c}{\delta y} &= 0 \\ \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_w \frac{\delta c}{\delta y} \right) + (1 - c) \frac{\delta v}{\delta y} - v \frac{\delta c}{\delta y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

De verticale snelheid van het sediment is:

$$v_s = v - W \quad (2.20)$$

waarin W de valsnelheid van het sediment in stilstaand water is. Door eliminatie van v_s en v in de vergelijkingen (2.19) en (2.20) wordt gevonden:

$$\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} + c \frac{\delta c}{\delta y} (\epsilon_w - \epsilon_s) + (1 - c) cW = 0 \quad (2.21)$$

Omdat c voor de hele vloeistof meestal klein is en ϵ_s niet veel verschilt van ϵ_w wordt $c(\epsilon_w - \epsilon_s)$ verwaarloosd ten opzichte van ϵ_s en vergelijking (2.21) wordt dan:

$$\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} + (1 - c) cW = 0 \quad (2.22)$$

Als verondersteld wordt dat $c \ll 1$ gaat vergelijking (2.22) over in vergelijking (2.10):

$$\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} + cW = 0 \quad (2.10)$$

3 Oplossing diffusievergelijking

3.1 ϵ_s constant

De veronderstelling: ϵ_s is constant, is niet in overeenstemming met de waarnemingen. Coleman [6] heeft dit duidelijk aangetoond. Een situatie, waarbij ϵ_s wel constant is, is evenwel in het laboratorium na te bootsen. Rouse [30] en Hurst [17] hebben dit gedaan. Het door hun gebruikte apparaat bestond uit een verticale cilinder met daarin een roterend of oscillerend raamwerk, waardoor over de gehele hoogte eenzelfde graad van turbulentie werd bereikt, evenwel zonder een permanente stroom.

Bij de theoretische afleiding van de concentratieverdeling gingen Rouse en Hurst uit van vergelijking (2.10). De oplossing bij constante ϵ_s is dan:

$$\frac{c}{c_a} = e^{-\frac{W}{\epsilon_s} (y - a)} \quad (3.1)$$

waarin c_a de concentratie is op de hoogte $y = a$.

De vorm van vergelijking (3.1) voldoet volgens de experimenten goed (zie figuur 1). Alleen voor de grotere deeltjes ($> 0,9$ mm) zijn de waarnemingen niet meer in overeenstemming met de theorie. Rouse heeft dit toegeschreven aan het feit, dat voor de grotere deeltjes ook de traagheid van de deeltjes in de beschouwing moet worden betrokken.

Dobbins [8] deed experimenten in eenzelfde apparaat als Rouse en Hurst gebruikten, maar nu voor een situatie, waarbij $\delta c / \delta t \neq 0$. De verandering van de concentratie voor het geval van een constante opname van materiaal vanaf de bodem is weergegeven in figuur 2. Het blijkt, dat de voor dit geval af te leiden verdeling eveneens in overeenstemming is met de resultaten.

3.2 ϵ_s niet constant

3.2.1 Gebruikelijke oplossing

In een permanente, eenparige en twee-dimensionale stroom geldt:

$$\tau_y = \tau_b \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (3.2)$$

Voor de bodemschuifspanning τ_b kan worden geschreven:

$$\tau_b = \rho u_*^2 \quad (3.3)$$

Analoog aan de viskeuze schuifspanning wordt de turbulente schuifspanning evenredig gesteld met de snelheidsgradiënt, zodat:

$$\tau_y = \rho \epsilon_m \frac{du}{dy} \quad (3.4)$$

waarbij ϵ_m de uitwisselingscoëfficiënt van impuls is.

De turbulente schuifspanning wordt ook wel Reynoldsschuifspanning genoemd en wordt geschreven als:

$$\tau_y = \rho \overline{u'v'} \quad (3.5)$$

Volgens de mengwegtheorie geldt:

$$u' = l \frac{du}{dy} \quad (3.6)$$

Voor v' wordt eenzelfde uitdrukking aangenomen:

$$v' = l \frac{dv}{dy} \quad (3.7)$$

De turbulente schuifspanning wordt dan:

$$\tau_y = \rho l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \left| \frac{dv}{dy} \right| \quad (3.8)$$

De lengte l (= mengweg) is een maat voor de gemiddelde afstand waarover de deeltjes zich bewegen ten opzichte van de gemiddelde stroom.

Uit de vergelijkingen (3.4) en (3.8) volgt:

$$\epsilon_m = l^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \quad (3.9)$$

Prandtl gaat uit van:

$$\tau_y = \tau_b \quad (3.10)$$

en hij neemt voor de mengweg:

$$l = \kappa y \quad (3.11)$$

Uit de vergelijkingen (3.3), (3.8), (3.10) en (3.11) volgt dan:

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{\kappa y} \quad (3.12)$$

Na integratie geeft vergelijking (3.12) een logaritmische snelheidsverdeling:

$$u - u_{\max} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{y}{h} \quad (3.13)$$

Vergelijking (3.10) geldt echter alleen voor een gebied dichtbij de bodem ($\eta < 0,1$ à $0,2$). Voor de gehele waterdiepte moet vergelijking (3.2) worden gebruikt. Omdat de logarithmische snelheidsverdeling voor de gehele waterdiepte een goede benadering is, wordt voor de mengweg geschreven:

$$l = K_y \sqrt{1 - \frac{y}{h}} \quad (3.14)$$

Dit houdt in, dat voor $y = 0$ de mengweg $l = 0$; anders gezegd: er is geen uitwisseling aan de bodem.

De logarithmische snelheidsverdeling geldt niet voor dichtbij de bodem, omdat daar volgens vergelijking (3.13) de snelheid nadert tot ∞ . Aangenomen wordt verder, dat de uitwisselingscoëfficiënt van impuls (ϵ_m) gerelateerd is aan de uitwisselingscoëfficiënt van sediment (ϵ_s) via de coëfficiënt β :

$$\epsilon_s = \beta \epsilon_m \quad (3.15)$$

Uit de vergelijkingen (3.9), (3.12), (3.14) en (3.15) volgt dan:

$$\epsilon_s = \beta K_y u_* \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (3.16)$$

Verondersteld wordt, dat $c \ll 1$, zodat kan worden uitgegaan van de diffusievergelijking volgens vergelijking (2.10):

$$\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} + cW = 0 \quad (2.10)$$

Vergelijking (3.16) ingevuld in vergelijking (2.10) geeft:

$$\frac{dc}{c} = - \frac{Wdy}{\beta K_y u_* y \left(1 - \frac{y}{h}\right)} \quad (3.17)$$

Voor $\frac{W}{\beta K_y u_*}$ wordt meestal Z geschreven.

Vergelijking (3.17) partiëel geïntegreerd van a tot y geeft:

$$\int_a^y \frac{dc}{c} = \int_a^y d(\ln c) = \ln \frac{c}{c_a} \quad (3.18)$$

$$\int_a^y \frac{Z}{y \left(1 - \frac{y}{h}\right)} dy = \int_a^y d \left\{ \ln \left(\frac{h-y}{y} \right)^Z \right\} = \ln \left\{ \left(\frac{h-y}{y} \right) \left(\frac{a}{h-a} \right) \right\}^Z$$

De resulterende relatie wordt dan:

$$\frac{c}{c_a} = \left\{ \left(\frac{h-y}{y} \right) \left(\frac{a}{h-a} \right) \right\}^Z \quad (3.19)$$

waarin c_a de concentratie is in een punt $y = a$ boven de bodem.

De door vergelijking (3.19) gegeven concentratieverdeling levert voor $y = 0$ een concentratie aan de bodem op van $c = \infty$. Dit is het gevolg van de gebruikte snelheidsverdeling, die, zoals reeds eerder is opgemerkt, niet geldt in de directe omgeving van de bodem.

3.2.2 Oplossing volgens Hunt

Hunt [16] veronderstelt het diffusieproces voor sediment gelijksoortig aan dat van water, maar niet gelijk. Hij gebruikt de vergelijkingen (3.2), (3.3) en (3.8) van par. 3.2.1 met het verschil, dat voor u geschreven wordt: u_s (de snelheid van het sediment).

Voor de mengweg neemt hij aan:

$$l_s = K_s \frac{du_s}{dy} \left(\frac{d^2 u_s}{dy^2} \right)^{-1} \quad (3.20)$$

Uit de vergelijkingen (3.2), (3.3), (3.8) en (3.20) volgt dan:

$$u_*^2 \left(1 - \frac{y}{h}\right) = k_s^2 \left(\frac{du_s}{dy}\right)^4 \left(\frac{d^2 u_s}{dy^2}\right)^{-2} \quad (3.21)$$

Vergelijking (3.21) geeft na integratie:

$$\frac{du_s}{dy} = \frac{u_*}{2 k_s h \left\{ B_s - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}} \quad (3.22)$$

waarin B_s een integratieconstante is.

Een volgende integratie geeft dan de snelheidsverdeling:

$$u_{\max} - u_s = -\frac{u_*}{k_s} \left\{ \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{2}} + B_s \ln \left(\frac{B_s - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{2}}}{B_s} \right) \right\} \quad (3.23)$$

Analoog aan vergelijking (3.4) wordt gesteld:

$$\epsilon_s = \frac{\tau_y}{\rho \frac{du_s}{dy}} \quad (3.24)$$

Uit de vergelijkingen (3.2), (3.3), (3.22) en (3.24) volgt:

$$\epsilon_s = 2 k_s h u_* \left(1 - \frac{y}{h}\right) \left\{ B_s - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.25)$$

Als $y = 0$ wordt $\epsilon_s = 2 k_s h u_* (B_s - 1)$,

zodat voor $B_s \neq 1$ er uitwisseling met de bodem plaats vindt.

Hunt gebruikt de diffusievergelijking volgens vergelijking (2.22):

$$\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} + (1 - c) cW = 0 \quad (2.22)$$

De oplossing van deze vergelijking is:

$$\ln \frac{c}{1-c} = -W \int \frac{dy}{\epsilon_s} + \text{constante} \quad (3.26)$$

Vergelijking (3.25) wordt nu ingevuld in vergelijking (3.26). Dit geeft de relatie:

$$\left(\frac{c}{1-c} \right) \left(\frac{1-c_a}{c_a} \right) = \left\{ \left(\frac{1-\frac{y}{h}}{1-\frac{a}{h}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B_s - \left(1-\frac{a}{h}\right)^{\frac{1}{2}}}{B_s - \left(1-\frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} Z_s \quad (3.27)$$

waarin $Z_s = \frac{W}{B_s K_s u_*}$ en c_a de concentratie is in een punt $y = a$ boven de bodem.

3.2.3 Vergelijking gebruikelijke oplossing met oplossing volgens Hunt

Het verschil tussen de gebruikelijke oplossing (Rouse) en de oplossing volgens Hunt is de aanname van de mengweg (en daarmee van de snelheidsverdeling) en het gebruik van de diffusievergelijking voor hoge sedimentconcentraties.

In onderstaande tabel worden de verschillende uitgangspunten nog eens naast elkaar weergegeven:

	Hunt	Rouse
diffusie vgl:	$\epsilon_s \frac{dc}{dy} + (1-c) cW = 0$	$\epsilon_s \frac{dc}{dy} + cW = 0$
mengweg:	$l = K \frac{du}{dy} \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right)^{-1}$	$l = K y \sqrt{1 - \frac{y}{h}}$
uitwiss. coëff.:	$\epsilon_s = 2 K u_* h \left(1 - \frac{y}{h}\right) \left\{ B_s - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \right\}$	$\epsilon_s = \beta K u_* y \left(1 - \frac{y}{h}\right)$

In figuur 3 zijn voor verschillende waarden van Z de beide concentratieverdelingen weergegeven. Vergelijking (3.27) is hiervoor in de volgende vorm geschreven:

$$\frac{c}{c_a} = \frac{\left\{ \left(\frac{h-y}{h-a} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B_s - \left(\frac{h-a}{h} \right)^{\frac{1}{2}}}{B_s - \left(\frac{h-y}{h} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right\}^{Z_s}}{(1 - c_a) + c_a \left\{ \left(\frac{h-y}{h-a} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{B_s - \left(\frac{h-a}{h} \right)^{\frac{1}{2}}}{B_s - \left(\frac{h-y}{h} \right)^{\frac{1}{2}}} \right) \right\}^{Z_s}} \quad (3.27)$$

Ten behoeve van een zo goed mogelijke vergelijking en om de verschillen duidelijk te laten uitkomen is $B_s = 1$ en $c_a = 0,1$. Het blijkt, dat de concentratieverdeling volgens Hunt grotere relatieve concentraties geeft. De verschillen nemen gaande in de richting van het wateroppervlak toe.

Het nadeel van de concentratieverdeling volgens Hunt is, dat de constante B_s bekend moet zijn. Uit het onderzoek van Hunt blijkt, dat B_s waarden aanneemt, die tussen 0,995 en 1,005 inliggen.

Om de invloed van deze constante op de concentratieverdeling te kunnen nagaan, is voor verschillende waarden van Z de constante B_s gevarieerd (zie de figuren 4 t/m 7). Het blijkt, dat voor waarden van $B_s > 1$ de relatieve concentratie toeneemt en voor waarden van $B_s < 1$ de relatieve concentratie afneemt. De verschillen zijn met name voor kleine waarden van Z procentueel niet groot. Een vergelijking van figuur 3 met de figuren 4 t/m 7 leert, dat de concentratieverdeling volgens Hunt voor de voorkomende waarden van B_s gelijke of grotere relatieve concentraties geeft dan de concentratieverdeling volgens Rouse.

3.3 Overeenkomst met experimenteel onderzoek

Vanoni [34] voerde laboratoriumproeven uit, waarvan de resultaten uitgezet op dubbel-logaritmisch papier op een rechte lijn liggen met een helling van:

$$Z = \frac{\log \frac{c}{c_a}}{\log \left\{ \left(\frac{h-y}{y} \right) \left(\frac{a}{h-a} \right) \right\}} \quad (3.28)$$

Hiermee is aangetoond, dat de concentratieverdeling de vorm heeft van vergelijking (3.19).

Een typisch voorbeeld van de relatieve concentratie als functie van de relatieve diepte is gegeven in figuur 8. De getrokken lijn is volgens vergelijking (3.19).

Metingen van Anderson [1] in de Enoree River geven volgens Graf [13] overeenkomstige resultaten.

De vorm van vergelijking (3.19) voldoet dus goed, hoewel de Z-waarde niet gelijk is aan $W/\beta K u_*$. Meestal wordt gesproken over de Z_1 -waarde, wanneer deze verkregen is uit de gemeten concentratieverdeling.

Chien [5] heeft metingen gedaan zowel in het laboratorium als in de natuur. Het resultaat van de metingen is gegeven in figuur 9, waarin Z_1 tegen Z is uitgezet. Z is berekend, waarbij K gevonden is uit de snelheidsverdeling en voor W de valsnelheid in stilstaand water is genomen. Het blijkt, dat $Z_1 < Z$ en dat de afwijking groter wordt naarmate Z groter wordt. Een gelijke tendens is waar te nemen bij de resultaten van metingen van andere onderzoekers, zoals bijvoorbeeld Anderson (Enoree River). Het verschil tussen Z_1 en Z kan worden veroorzaakt door:

- 1 de waarde van β
- 2 de waarde van K
- 3 de waarde van W

De invloed van de concentratieverandering op u_* door de verandering in dichtheid van de vloeistof is verwaarloosbaar klein. Einstein en Ning Chien [10] schrijven het verschil tussen Z_1 en Z toe aan het verwaarlozen van de hogere orde termen bij de afleiding van de diffusievergelijking. Zij spreken dan ook van een "first approximation". Bij hun "second approximation" worden de hogere orde termen wél meegenomen. Verschillende gevallen worden bekeken. Het geval, waarbij zowel de mengweg als de snelheidsfluctuatie in de y -richting een waarschijnlijkheidsfunctie volgen, biedt volgens hen de beste mogelijkheden. Zij vinden het volgende verband tussen Z_1 en Z :

$$Z_1 = \frac{Z}{e^{-L^2 Z^2 / \pi} + ZL \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{ZL \sqrt{2/\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx} \quad (3.29)$$

met

$L = \ln(1 + Bk)$, waarbij B een constante is.

$x = \ln y$

De beste overeenkomst met de meetresultaten wordt gevonden voor

$Bk = 0,3$ (zie figuur 9).

4 Nadere beschouwing hydraulische parameters

4.1 Inleiding

In 3.3 is aangetoond, dat de afgeleide vergelijkingen voor de concentratieverdeling over de hoogte (3.19) en (3.27) qua vorm goed voldoen.

De (gemeten) Z_1 -waarde kwam echter niet overeen met de (theoretische) Z -waarde. Als mogelijke oorzaak werd genoemd de waarde van de verschillende parameters. Hierna worden deze parameters ieder afzonderlijk nader geanalyseerd.

4.2 Uitwisselingscoëfficiënt

Algemeen wordt aangenomen, dat de uitwisseling van sediment en de uitwisseling van water van dezelfde soort is als de uitwisseling van impuls. Volgens Reynolds is de uitwisseling van water gelijk aan de uitwisseling van impuls zowel in verdeling als in absolute waarde (Reynoldsanalogie). Door verschillende onderzoekers uitgevoerde experimenten hebben aangetoond, dat voor de stroming in kanalen de afwijking van deze analogie gering is. De aanname, dat de uitwisseling van sediment van dezelfde soort is als de uitwisseling van impuls, is reeds vastgelegd in vergelijking (3.15):

$$\epsilon_s = \beta \epsilon_m \quad (3.15)$$

Het feit, dat de gemeten concentratieverdeling goed overeenkomt met de met behulp van vergelijking (3.15) afgeleide theoretische verdeling, wordt vaak aangevoerd als een bewijs van de aanname van vergelijking (3.15). Jobson [20] toont echter aan, dat de concentratieverdeling niet erg gevoelig is voor de verdeling van ϵ_s .

Uitgaande van (3.15) komt men bovendien tot een verschillende waarde van β . Zo zegt Carstens [4], dat $\beta < 1$, omdat de sedimentdeeltjes niet volledig de turbulente beweging van de waterdeeltjes volgen. Singamsetti [31] zegt, dat $\beta > 1$, omdat de turbulentie bestaat uit wervels, waarin de sedimentdeeltjes naar buiten worden geworpen, zodat de diffusie wordt vergroot. Beide onderzoekers beschrijven twee verschillende processen die echter ook tegelijkertijd kunnen optreden. Carstens beschouwt de turbulentie als rechtlijnige snelheidsfluctuaties. Singamsetti denkt de turbulentie samengesteld uit wervels met een grote wervelactiviteit. Een beschrijving van de beweging van een sedimentdeeltje kan dit verduidelijken.

De momentane snelheid van een deeltje wordt gedefinieerd als (vectoraanduiding):

$$U_s = \bar{U}_s + U_s' \quad (4.1)$$

met:

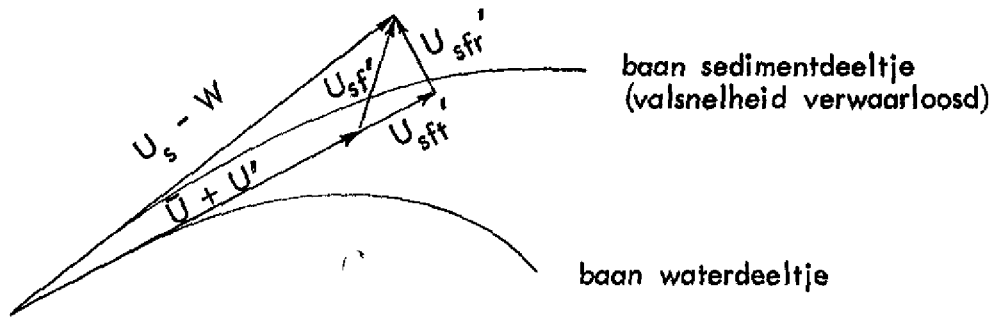
$$U_s = \bar{U} + W$$

$$U_s' = U' + U_{sf}'$$

zodat:

$$U_s = \underbrace{\bar{U} + U'}_{\text{snelheid water}} + \underbrace{W + U'_{sf}}_{\text{snelheid sediment f.o.v. water}} \quad (4.2)$$

U'_{sf} wordt gesplitst in een radiale en tangentiële component, respectievelijk U'_{sfr} en U'_{sft} .



In coördinaten geschreven:

$$U_{si} = \bar{U}_i + U_i' + W_i + U_{sfti}' + U_{sfri}' \quad (4.3)$$

Er geldt:

$$\epsilon_{si} \frac{\delta c}{\delta x_j} = - \overline{U_{si}' c'} \quad (4.4)$$

waarbij:

$$U_{si}' = U_i' + U_{sfti}' + U_{sfri}' \quad (4.5)$$

Vergelijking (4.5) gesubstitueerd in (4.4) geeft:

$$\epsilon_{si} \frac{\delta c}{\delta x_j} = - \underbrace{\overline{U_i' c'}}_{\text{Carstens}} - \underbrace{\overline{U_{sfti}' c'}}_{\text{Singamsetti}} - \underbrace{\overline{U_{sfri}' c'}}_{\text{Singamsetti}} \quad (4.6)$$

Vergelijking (4.6) kan dus in twee delen worden geschreven:

$$\epsilon_{ti} \frac{\delta c}{\delta x_i} = - \overline{U_i' c'} - \overline{U_{sfti}' c'} \quad \text{tangenciaal} \quad (4.7)$$

$$\epsilon_{ci} \frac{\delta c}{\delta x_i} = - \overline{U_{sfri}' c'} \quad \text{radiaal} \quad (4.8)$$

De uitwisselingscoëfficiënt wordt dan:

$$\epsilon_s = \epsilon_t + \epsilon_c \quad (4.9)$$

Verondersteld wordt nu:

- 1^o De theorie van Carstens heeft betrekking op ϵ_t , die van dezelfde soort is als ϵ_m . Hieruit volgt, dat vergelijking (3.15) geldt als ϵ_t veel groter is dan ϵ_c . Als ϵ_c gelijk aan nul is, zal ϵ_s altijd gelijk of kleiner zijn dan ϵ_m .
- 2^o ϵ_c wordt belangrijk als de wervels groot worden in vergelijking met de diameter van het sediment. ϵ_c lijkt evenredig met U_r^2/r , waarbij U_r de omtreksnelheid van de wervel is en r de straal. Maximum waarden treden op als r klein is en U_r groot. Singamsetti's theorie is gebaseerd op proeven, waarbij goed ontwikkelde wervels optraden (zandwaterstraal).

De meest recente onderzoeken naar de uitwisselingscoëfficiënt zijn verricht door Jobson en Sayre [21] en Coleman [6].

Jobson en Sayre hebben proeven gedaan, waarbij over de gehele breedte van een open waterloop materiaal werd geïnjecteerd. In de permanente en eenparige stroom werd op verschillende plaatsen benedenstrooms van het injectiepunt de concentratieverdeling over de vertikaal gemeten. Met behulp van een geïntegreerde vorm van de diffusievergelijking konden op een bepaalde hoogte zowel de uitwisselingscoëfficiënt als de turbulente valsnelheid worden berekend.

Coleman heeft voor een permanente, uniforme en twee-dimensionale stroom onder verschillende stroomcondities op een aantal punten de concentratie gemeten. Voor ieder punt kon uit de concentratieverdeling de uitwisselingscoëfficiënt worden bepaald, omdat voor de valsnelheid de valsnelheid in stilstaand water is aangehouden.

4.2.1 Onderzoek Jobson en Sayre

Het onderzoek had tot doel voor een twee-dimensionale stroom de uitwisselingscoëfficiënten van water en sediment te berekenen, als mede de valsnelheid van het sediment. Dit werd bereikt door zowel de concentratieverdeling als de snelheidsverdeling te meten in situaties, waar de concentratie verandert in de stroomrichting. Met behulp van een geïntegreerde vorm van de diffusievergelijking kon hieruit de uitwisselingscoëfficiënt en de valsnelheid op een bepaalde hoogte worden berekend.

Het onderzoek vond plaats in een recirculatie-goot met een lengte van ca. 60 m, een breedte van ca. 2,40 m een diepte van 1,20 m. De ruwheid bestond uit houten klossen. De goothelling was instelbaar en de waterdiepte werd constant gehouden.

Het uitgangspunt is de algemene diffusievergelijking volgens vergelijking (2.6). Jobson en Sayre gebruiken een iets andere schrijfwijze:

$$\frac{\delta c}{\delta t} + U_{si} \frac{\delta c}{\delta x_i} = \frac{\delta}{\delta x_i} \left(\epsilon_{si} \frac{\delta c}{\delta x_i} \right) \quad (4.10)$$

Voor een permanente, uniforme en twee-dimensionale stroom gaat (4.10) over in

$$U \frac{\delta c}{\delta x} = \epsilon_{sx} \frac{\delta^2 c}{\delta x^2} + \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_{sy} \frac{\delta c}{\delta y} + Wc \right) \quad (4.11)$$

waarin:

W = valsnelheid

$U_s = U$ (aangenomen, dat de sedimentdeeltjes dezelfde snelheid hebben als het water)

De randvoorwaarden zijn:

$$\text{aan het wateroppervlak: } \epsilon_{sy} \frac{\delta c}{\delta y} + Wc = 0 \quad (4.12)$$

$$\text{aan de bodem: } \epsilon_{sy} \frac{\delta c}{\delta y} + (1 - A) Wc = 0 \quad (4.13)$$

waarbij A = de waarschijnlijkheid, dat een deeltje sedimenteert.

Jobson [20] heeft gevonden, dat de longitudinale uitwisselingsterm ($\epsilon_{sx} \delta^2 c / \delta x^2$) in vergelijking tot de andere termen is te verwaarlozen en dat onder zekere voorwaarden de stroom als twee-dimensionaal kan worden beschouwd. Vergelijking (4.11) wordt dimensieloos gemaakt door vermenigvuldigen met $\frac{h}{u_*}$ waarbij $X = \frac{x}{h}$ en $\eta = \frac{y}{h}$, zodat:

$$\frac{u}{u_*} \frac{\delta c}{\delta X} = \frac{\delta}{\delta \eta} \left(\frac{\epsilon_{sy}}{hu_*} \frac{\delta c}{\delta \eta} + \frac{W}{u_*} c \right) \quad (4.14)$$

Vervolgens wordt (4.14) van η_1 tot aan het wateroppervlak geïntegreerd:

$$\int_{\eta_1}^1 \frac{u}{u_*} \frac{\delta c}{\delta X} d\eta = \int_{\eta_1}^1 \frac{\delta}{\delta \eta} \left(\frac{\epsilon_{sy}}{hu_*} \frac{\delta c}{\delta \eta} + \frac{W}{u_*} c \right) d\eta \quad (4.15)$$

of

$$\frac{\delta}{\delta X} \int_{\eta_1}^1 \frac{uc}{u_*} d\eta = - \left[\frac{\epsilon_{sy}}{hu_*} \right]_{\eta_1} \left[\frac{\delta c}{\delta \eta} \right]_{\eta_1} - \left[\frac{W}{u_*} \right]_{\eta_1} [c]_{\eta_1} \quad (4.16)$$

Vergelijking (4.16) mag op deze wijze worden geschreven, omdat u geen functie is van X. Verder is de randvoorwaarde aan het wateroppervlak in dimensieloze vorm toegepast.

Met behulp van (4.16) kan op een bepaalde hoogte η_1 uit de gemeten snelheids- en concentratieverdelingen de uitwisselingscoëfficiënt en de valsnelheid worden uitgerekend.

De waarde van de uitwisselingscoëfficiënt van water (ϵ_w) kan uit de resultaten van het onderzoek worden berekend met (4.16), waarbij $W = 0$, zodat:

$$\left[\frac{\epsilon_w}{hu_*} \right]_{\eta_1} = \frac{-\frac{\delta}{\delta x} \int_{\eta_1}^1 \frac{uc}{u_*} d\eta}{\left[\frac{\delta c}{\delta \eta} \right]_{\eta_1}} \quad (4.17)$$

De waarde van de uitwisselingscoëfficiënt van impuls (ϵ_m) wordt verkregen uit:

$$\frac{\epsilon_m}{hu_*} = \frac{1 - \eta}{\frac{\delta}{\delta \eta} \left(\frac{u}{u_*} \right)} \quad (4.18)$$

Voor een logarithmische snelheidsverdeling gaat vergelijking (4.18) over in:

$$\frac{\epsilon_m}{hu_*} = K \eta (1 - \eta) \quad (4.19)$$

Figuur 10 laat de verdeling van ϵ_w over de hoogte zien. De getrokken lijn stelt de uitkomst van de metingen voor, terwijl de stippellijn vergelijking (4.19) voorstelt voor $K = 0,392$. De arcering geeft de spreiding in de meetresultaten aan.

Bij het berekenen van de uitwisselingscoëfficiënt van sediment (ϵ_s) wordt eveneens gebruik gemaakt van (4.16). Er zijn nu twee onbekenden. Voor de oplossing wordt van de volgende twee methoden gebruik gemaakt:

- 1 de methode van de kleinste kwadraten
- 2 de methode van gemiddelden

Op deze wijze wordt dan het verloop van ϵ_s/hu_* en W/u_* met η gevonden. Figuur 11 toont het verloop van ϵ_s voor fijn materiaal (A) en grof materiaal (B). Als gevolg van het karakter van de ruwheid zal de maximum wervelactiviteit plaats vinden op ongeveer $\eta = 0,1$. Jobson en Sayre nemen aan, dat ϵ_c hier

maximaal is en gaande in de richting van de bodem en het wateroppervlak afneemt tot nul. Bovendien wordt aangenomen, dat ϵ_c zal toenemen met de derde macht van de afstand tot de bodem en het wateroppervlak. Zo komen zij tot de volgende betrekking voor ϵ_s :

$$\frac{\epsilon_s}{hu_*} = \alpha_1 \left\{ (1 - \eta) \eta + \alpha_2 \left(\frac{1 - \eta}{0,9} \right)^3 \right\} \quad \text{als } \eta \geq 0,1 \quad (4.20)$$

$$\frac{\epsilon_s}{hu_*} = \underbrace{\alpha_1 \left\{ (1 - \eta) \eta \right\}}_{\frac{\epsilon_t}{hu_*} \sim \frac{\epsilon_m}{hu_*}} + \underbrace{\alpha_2 \left(\frac{\eta}{0,1} \right)^3}_{\frac{\epsilon_c}{hu_*}} \quad \text{als } \eta \leq 0,1$$

α_1 en α_2 zijn constanten en afhankelijk van de eigenschappen van het materiaal. Uit de resultaten blijkt, dat α_1 is 0,98 en 0,49 en α_2 is 0,038 en 0,10 voor respectievelijk fijn en grof materiaal. Gelet op de grote spreiding in de resultaten moet de geldigheid van vergelijking (4.20) voor grof materiaal (zie figuur 11B) in twijfel worden getrokken.

Aan de hand van het hiervoor beschreven onderzoek komen Jobson en Sayre tot de volgende conclusies:

- 1 De Reynoldsanalogie, die zegt, dat de uitwisseling van impuls en de uitwisseling van water gelijk zijn, is, zo niet exact, toch tenminste een erg goede benadering.
- 2 De verticale uitwisseling is het resultaat van tenminste twee gedeeltelijk onafhankelijke processen, die sommeerbaar zijn, te weten:
 - a) de uitwisseling als gevolg van de tangentiële componenten van de turbulente snelheidsfluctuaties (ϵ_t).
 - b) de uitwisseling als gevolg van de centrifugaalkracht, die ontstaat door de gebogen baan van de sedimentdeeltjes (ϵ_c).
- 3 Geval a) overheerst bij fijn materiaal en bij alle materiaal in stromen zonder een sterke wervelactiviteit. De waarde van ϵ_t is evenredig met de waarde van ϵ_m . De evenredigheidscoëfficiënt is gelijk of

- kleiner dan 1 en neemt af bij toenemende afmetingen van de deeltjes.
- 4 Geval b) geldt voor grof materiaal in stromen met een grote wervel-activiteit. De waarde van ϵ_c is maximaal in het gebied met de grootste wervelactiviteit en neemt daar buiten sterk af. De waarde van ϵ_c neemt toe met de afmetingen van de sedimentdeeltjes.

4.2.2 Onderzoek Coleman

Coleman [6] gebruikte voor zijn onderzoek een goot, die onder een bepaalde helling kon worden geplaatst. Het water stroomde in een gesloten circuit. Bij de monsternamen voor het meten van de concentraties werd isokinetisch afgezogen. Er was juist zoveel materiaal in suspensie, dat er geen zandbed kon worden gevormd.

Aangenomen wordt, dat voor een permanente, uniforme en twee-dimensionale stroom (2.10) geldt:

$$\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} + Wc_s = 0 \quad (2.10)$$

De uitwisselingscoëfficiënt van sediment kan dan worden geschreven als:

$$\epsilon_s = - \frac{Wc}{\frac{dc}{dy}} \quad (4.21)$$

waarbij zowel c als dc/dy uit de concentratieverdeling kunnen worden afgeleid. De enige onbekende is de valsnelheid W . Omdat in de literatuur hierover de gegevens elkaar tegenspreken neemt Coleman hiervoor de valsnelheid in stilstaand water voor de enkele korrel (kurve van Vanoni). Gesteld wordt:

$$\frac{\epsilon_s}{hu_*} = f \left(\frac{y}{h}, \frac{W}{u_*} \right) \quad (4.22)$$

met:

$$u_*^2 = g h (i_f - i_w) \quad (4.23)$$

waarbij i_w een correctiefactor is voor de wandinvloed (afhankelijk van de waterdiepte, afvoer en gootafmetingen) en i_f de helling van de energielijn.

De resultaten van het onderzoek van Coleman worden gegeven in figuur 12A.

Ter vergelijking wordt in figuur 12B ϵ_s/hu_* als functie van y/h en W/u_* gegeven voor de Enoree River (volgens metingen van Anderson).

Uit zowel figuur 12A als figuur 12B blijkt, dat ϵ_s/hu_* varieert over de eerste 20 tot 40 % van de waterdiepte. Daarboven blijkt ϵ_s/hu_* tot aan de waterspiegel constant. Over de gehele hoogte is ϵ_s/hu_* bovendien een functie van W/u_* . Er moet nog worden opgemerkt, dat bij het onderzoek van Coleman, evenals bij het onderzoek van Jobson en Sayre, er geen zandbed was, zodat er ook geen ribbels optraden. Voor het meten is dit een gunstige situatie, omdat het gemeten snelheidsprofiel ieder moment hetzelfde is (permanentie) en volledig past bij de gemeten concentratieverdeling. Het uitwisselingsmechanisme bij de bodem ontbreekt echter. Het nadeel van de riviermetingen van Anderson is, dat dergelijke metingen een beperkte nauwkeurigheid hebben.

De samensteller van dit verslag heeft met behulp van de methode van de kleinste kwadraten een uitdrukking ontwikkeld voor ϵ_s/hu_* , die zowel een functie is van y/h als van W/u_* en die zo goed mogelijk aansluit bij de waarnemingen van Coleman en Anderson:

$$\text{als } \eta = \frac{y}{h} < a_4 \left(\frac{W}{u_*} \right) + a_5 :$$

$$\frac{\epsilon_s}{hu_*} = \left\{ a_1 + a_2 \left(\frac{W}{u_*} \right)^{a_3} \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{[a_4 \left(\frac{W}{u_*} \right) + a_5] - \eta}{a_4 \left(\frac{W}{u_*} \right) + a_5} \right)^{a_6} \right\} \quad (4.24)$$

$$\text{als } \eta = \frac{y}{h} > a_4 \left(\frac{W}{u_*} \right) + a_5 :$$

$$\frac{\epsilon_s}{hu_*} = a_1 + a_2 \left(\frac{W}{u_*} \right)^{a_3}$$

De parameters α_1 tot en met α_6 hebben de volgende waarden:

parameter	laboratoriumproeven Coleman	riviermetingen Anderson
α_1	0,099 \pm 0,012	0,129 \pm 0,006
α_2	0,377 \pm 0,033	0,197 \pm 0,015
α_3	4,313 \pm 0,809	2,119 \pm 0,329
α_4	0,219 \pm 0,103	0,094 \pm 0,084
α_5	0,128 \pm 0,071	0,412 \pm 0,069
α_6	1,248 \pm 0,331	1,725 \pm 0,321

De gegeven variatie in de gemiddelde waarde is de standaardafwijking.

Vergelijking (4.24) is in figuur 12A weergegeven voor $W/u_* = 0,414$ en in figuur 12B voor $W/u_* = 0,376$.

Ter vergelijking zijn in de figuren 12A en 12B tevens de vergelijkingen (3.16) en (4.20) weergegeven. De parameters zijn met behulp van de methode van de kleinste kwadraten zodanig gekozen, dat de vergelijkingen zo goed mogelijk aansluiten bij de waarnemingen, zodat:

vergelijking (3.16):

parameter	laboratoriumproeven Coleman	riviermetingen Anderson
βk	0,875 \pm 0,048	0,762 \pm 0,035

vergelijking (4.20):

parameter	laboratoriumproeven Coleman	riviermetingen Anderson
$\alpha_1 k$	0,879 \pm 0,060	0,809 \pm 0,044
α_2	- 0,002 \pm 0,019	- 0,030 \pm 0,018

Welke vergelijking het beste aansluit bij de waarnemingen blijkt uit figuur 13. Een volledige overeenkomst tussen gemeten en berekende waarden treedt op, wanneer $(\epsilon_s/hu_*)_{\text{gemeten}} / (\epsilon_s/hu_*)_{\text{berekend}} = 1$.

Voor elke vergelijking is in figuur 13 de afwijking tot de volledige overeenkomst uitgezet tegen het bijbehorend percentage waarnemingen. Het blijkt, dat (4.24)

het beste aansluit bij de waarnemingen en dat (4.20) geen verbetering is ten opzichte van (3.16). Alle vergelijkingen sluiten beter aan bij de riviermetingen van Anderson dan bij de laboratoriumproeven van Coleman.

4.3 Constante van Von Karman

In een stroom zonder sediment is de produktie aan turbulente energie gelijk aan $\tau du/dy$. De produktie is het grootst bij de bodem. Het grootste deel wordt direkt ter plaatse onder invloed van de viscositeit omgezet in warmte. De rest wordt door grote wervels naar boven getransporteerd. Bij deze energieverdeling heeft k de constante waarde van 0,4. Wanneer deze energieverdeling wordt verstoord, is het redelijk aan te nemen, dat het turbulentiepatroon in de hoofdstroom en dus ook k verandert.

In een stroom met sediment blijkt inderdaad, dat k andere waarden heeft dan 0,4. Bij toenemende concentratie neemt k af. Verschillende onderzoekers hebben gefracht een relatie op te stellen, waarmee de waarde van k kan worden voorspeld.

Einstein en Ning Chien [11] vonden een relatie, waarin k een functie is van het deel in de totale energie, dat nodig is om het sediment in suspensie te houden.

Ippen [18] vond, dat k een functie is van de concentratie bij de bodem en onafhankelijk van de vorm en afmetingen van het sediment.

Einstein en Abdel-Aal [12] losten k op uit het gemeten transport met behulp van de formule van Einstein voor het totaal transport (1950) en vonden, dat k een functie is van de afmetingen en vorm van het sediment en van de stroomcondities, maar onafhankelijk van de concentratie bij de bodem.

4.3.1 Onderzoek Einstein en Ning Chien

Einstein en Ning Chien [11] onderscheiden twee gebieden in de stroom met sediment: namelijk een gebied met weinig sediment (the light fluid zone) en een (veelal klein) gebied met veel sediment nabij de bodem (the heavy fluid zone). Bij de overgang van het ene gebied naar het andere wordt de uitwisseling van impuls minder effectief door reductie van de massa van de uitwisselingsstroom.

Omdat in de h.f.z. de schuifspanning ook door de bewegende sedimentdeeltjes wordt overgebracht, wordt een groter deel van de geproduceerde turbulente energie omgezet in warmte. Bovendien wordt er turbulente energie verbruikt om het sediment in suspensie te houden. Het deel van de turbulente energie, dat door grote wervels naar boven wordt getransporteerd is daardoor kleiner dan bij de stroom zonder sediment, zodat ook K kleiner is. De reductie van K wordt nu gecorreleerd aan de energie, die nodig is om het sediment in suspensie te houden. Het gebruik van de schuifspanningsenergie per eenheid van gewicht en per eenheid van tijd om het sediment in suspensie te houden, kan worden geschreven als:

$$\sum \left(\frac{c_m W}{\bar{u}_i} \right) \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \quad (4.25)$$

waarbij:

c_m = gemiddelde concentratie over de hoogte

W = valsnelheid van een bepaalde korrel

\bar{u} = gemiddelde stroomsnelheid over de hoogte

i = verhang

\sum = sommatie over de verschillende korrels.

De gevonden correlatie is weergegeven in figuur 14. Ondanks de grote spreiding is er toch duidelijk een tendens van een afname van K bij een toename van de energie, die nodig is om het sediment in suspensie te houden. Deze beschouwing gaat echter alleen op, wanneer het soortelijk gewicht van het materiaal groter is dan dat van water.

4.3.2 Onderzoek Ippen

Volgens Ippen [18] zijn de grote variaties in K het gevolg van de grote concentraties van het sediment bij de bodem. Hierdoor verschilt de kinematische viscositeit ν' voor een stroom met sediment sterk van ν voor een stroom zonder sediment. A. Einstein gaf de volgende relatie tussen ν' en ν :

$$\nu' = \nu (1 + 2,5 c_o) \quad (4.26)$$

waarbij c_o de concentratie is bij de bodem.

Verondersteld wordt, dat bij de bodem de viskeuze schuifspanning overheerst, zodat:

$$\tau_b' = \rho \nu' \frac{du}{dy} = \rho \nu \frac{du}{dy} (1 + 2,5 c_o) \quad (4.27)$$

In een stroom met sediment kan voor de bodemschuifspanning worden geschreven:

$$\tau_b' = \rho g h i \left\{ 1 + \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \int_0^h \frac{c dy}{h} \right\} \quad (4.28)$$

of:

$$\tau_b' = \rho g h i \left\{ 1 + c_m \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \right\} \quad (4.29)$$

waarin c_m de gemiddelde concentratie is over de diepte.

Uit (4.27) en (4.29) volgt:

$$\frac{du}{dy} = \frac{g h i}{\nu} \left\{ \frac{1 + c_m \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)}{1 + 2,5 c_o} \right\} \quad (4.30)$$

Voor een stroom zonder sediment geldt: $g h i = u_*^2$.

Ingevuld in vergelijking (4.30) geeft dit:

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*^2}{\nu} \left\{ \frac{1 + c_m \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)}{1 + 2,5 c_o} \right\} \quad (4.31)$$

Vergelijking (4.31) geeft de snelheidsgradiënt bij de bodem voor een stroom met sediment.

Voor de hoofdstroom maakt Ippen gebruik van de volgende snelheidsverdeling:

$$\frac{u - u_{\max}}{u_*} = \frac{du_*}{\nu} \ln \frac{1 + \frac{y}{d}}{1 + \frac{h}{d}} \quad (4.32)$$

waarbij d een door Krey gedefiniëerde kleine afstand is tot de bodem.

Vergelijking (4.32) is equivalent aan de vergelijking van Von Karman-Prandtl:

$$\frac{u - u_{\max}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{h} \quad (3.13)$$

Als d erg klein is ten opzichte van y en h volgt uit (4.32) en (3.13):

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{du_*}{v} \quad (4.33)$$

Ippe berekende met behulp van waarnemingen, dat (4.33) juist is.

Voor de snelheidsgradiënt van de hoofdstroom kan nu worden geschreven:

$$\frac{du}{dy} = \left(\frac{du_*}{v} \right) \left(\frac{u_*}{y+d} \right) = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{u_*}{y+d} \right) \quad (4.34)$$

Gesteld wordt, dat op de hoogte $y + d = d'$ boven de bodem de vergelijkingen (4.31) en (4.34) aan elkaar gelijk zijn en tevens, dat:

$$\frac{1}{\kappa'} = \frac{d' u_*}{v}$$

zodat geldt:

$$\frac{d' u_*}{v} = \frac{1}{\kappa'} = \frac{1}{\kappa} \left\{ \frac{1 + 2,5 c_o}{1 + c_m \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)} \right\} \quad (4.35)$$

Omdat de factor, waarmee $1/\kappa$ wordt vermenigvuldigd, voor het gebruikelijke sediment altijd groter is dan 1, is κ' altijd kleiner dan κ of d' altijd groter dan d . Dit wordt gestaafd door waarnemingen in het laboratorium en in de natuur.

Aan de hand van (4.35) kunnen de volgende opmerkingen worden gemaakt:

- 1 De maximum concentratie (c_0) bij de bodem beïnvloedt primair de K -waarde.
- 2 De gemiddelde concentratie over de diepte (c_m) is meestal veel kleiner dan de maximum concentratie (c_0) en is daardoor minder van invloed op de K' -waarde.
- 3 Grote veranderingen in de K -waarde treden op bij deeltjes met een soortelijk gewicht, dat ongeveer gelijk is aan water. Deze veranderingen zijn uitsluitend afhankelijk van c_0 , omdat de term $c_m (\rho_s - \rho) / \rho$ tot nul nadert. In dit geval is c_m echter ongeveer gelijk aan c_0 .
- 4 De K -waarde wordt alleen beïnvloed door de maximum concentratie c_0 bij de bodem en niet door andere grootheden, zoals de vorm en afmeting van de deeltjes.
- 5 Door de snelheidsverdeling uit te zetten op semi-logaritmisch papier kan de K' -waarde worden gevonden en daarmee de concentratie c_0 bij de bodem.

Evenals Einstein en Ning Chien heeft ook Vanoni de K -waarde gecorreleerd aan de energie, die nodig is om het sediment in suspensie te houden. Zijn waarnemingen zijn gegeven in figuur 15A. Ook treedt er in dit geval een grote spreiding op. Wanneer echter de energie, die nodig is om het sediment in suspensie te houden, geconcentreerd wordt gedacht in een laag van 0,001 h tot 0,01 h bij de bodem is er wel een duidelijk verband (zie figuur 15B). Deze benadering heeft waarschijnlijk meer succes, omdat de gemiddelde concentratie in de dunne bodemlaag de maximum concentratie c_0 benadert, die in vergelijking (4.35) wordt gebruikt. In figuur 16 wordt de K' -waarde volgens (4.35) vergeleken met de waarnemingen. De overeenkomst van (4.35) met de waarnemingen is erg bevredigend.

4.3.3 Onderzoek Einstein en Abdel-Aal

De aanname bij de afleiding van de formule van Einstein voor het totaal transport, dat de coëfficiënt van Von Karman κ constant is en gelijk aan 0,4, bleek niet in overeenstemming met de waarnemingen in de Missouri River, waar $\kappa < 0,4$ is. Dit was voor Einstein en Abdel-Aal [12] aanleiding om deze aanname te laten schieten. Er moest dan echter een relatie komen, waaruit de waarde van κ kon worden afgeleid.

De κ -waarde speelt zowel in de snelheidsverdeling als in de concentratieverdeling een rol. Uit onderzoek [11] is gebleken, dat er een gemiddelde waarde van κ bestaat zowel voor de snelheidsverdeling als de concentratieverdeling voor een gebied van dichtbij de bodem tot aan het wateroppervlak. De theorie van Einstein voor het totaal transport kan daarom onverkort worden gehandhaafd, alleen is κ nu een onbekende. Als uit een laboratoriumproef of uit een riviermeting het totaal transport bekend is, kan dus met behulp van de formule van Einstein de κ -waarde worden berekend. Het is onmogelijk de tamelijk gecompliceerde vergelijkingen direct voor κ op te lossen. Het is daarom met de computer gedaan volgens de "trial-and-error" methode. Overigens kan κ ook direct worden verkregen uit de snelheidsverdeling, maar naar de mening van Einstein en Abdel-Aal is dit veel minder nauwkeurig, met name voor fijn materiaal. De waarde van κ is met het computerprogramma berekend voor eigen laboratoriumproeven, voor laboratoriumproeven van anderen en voor metingen uit de natuur.

De waarde van κ blijkt een functie van de afmetingen van het sediment en nauwelijks van de concentratie in de bodemlaag (zie figuur 17A en B). Dit is geheel in tegenspraak met Ippen (par. 4.3.2), die zegt, dat κ alleen wordt beïnvloed door de concentratie in de bodemlaag en niet door andere grootheden, zoals de afmetingen van het sediment.

De waarde van κ is echter niet alleen een functie van de sedimentafmetingen, maar ook van de stromingsparameters: κ blijkt een functie van $W_{35} D_{65} / v$ (zie figuur 17C), waarin W_{35} = de valsnelheid voor de representatieve korrel van D_{35} en waarin D_{65} = de korrelafmeting, die een maat is voor de bodemruwheid. Met name geven de riviermetingen een grote spreiding te zien. Dit is het gevolg van het grote verschil in samenstelling van het materiaal in

suspensie en aan de bodem. De minste spreiding in meetresultaten treedt op, wanneer (zie figuur 17D):

$$K = f \left(\frac{W_{35} D_{65}}{q^{\frac{1}{2}} j^{\frac{1}{2}} \nu^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Einstein en Abdel-Aal stellen voor deze relatie te gebruiken voor de voorspelling van K .

Het bezwaar tegen het onderzoek van Einstein en Abdel-Aal is, dat K wordt gebruikt als een "vergaarbak". Zo is bij de afleiding van de formule voor het totaal transport ondermeer aangenomen, dat de viscositeit niet door het sediment wordt beïnvloed en de valsnelheid gelijk is aan de valsnelheid van de enkele korrel in stilstaand water (concentratie \approx nul).

4.4 Valsnelheid

In een turbulente stroom met sediment geldt voor de valsnelheid niet de valsnelheid voor de enkele korrel in stilstaand water. Door de aanwezigheid van andere korrels zal er een verandering in de stroming rond een korrel optreden en daardoor een verandering in de valsnelheid. Bovendien is er de invloed van de turbulentie.

De invloed van de concentratie op de valsnelheid is het onderwerp van studie geweest voor veel onderzoekers. Het meeste onderzoek vond plaats in stilstaand water. Hieruit blijkt, dat de valsnelheid vermindert bij een toenemende concentratie. De invloed van de turbulentie op de valsnelheid is moeilijk vast te stellen. Er zijn echter aanwijzingen, dat er een kleine toename van de valsnelheid zal optreden.

4.4.1 Invloed concentratie op valsnelheid

Alle hierna beschreven onderzoekingen zijn, met uitzondering van die van Richardson en Zaki, uitgevoerd in stilstaand water.

Door McNown en Lin [26] is de invloed van de concentratie op de valsnelheid W voor kleine Reynoldsgetallen berekend. Proeven met kleine

concentraties bevestigen hun resultaat (zie figuur 18).

Als eerste benadering geldt:

$$W_{rel} = \frac{W(c)}{W(o)} = \left(1 + 1,3 \frac{D}{a}\right)^{-1} \quad (4.36)$$

waarin:

D = de diameter van de deeltjes

a = de afstand tussen de deeltjes

Oliver [28] berekent op vrijwel gelijke wijze:

$$W_{rel} = (1 - kc^{1/3}) \quad (4.37)$$

Hij brengt hierbij ook de viscositeit van de suspensie in rekening. Dat is niet juist, daar deze alleen voor de suspensie als geheel geldt. Na aanpassing aan de meetresultaten vindt hij:

$$W_{rel} = (1 - 2,15 c) (1 - 0,75 c^{1/3}) \quad (4.38)$$

Door Richardson en Zaki [29] zijn zeer veel proeven gedaan. De vóornaamste resultaten zijn:

Re = $\frac{W \cdot D}{\nu}$ < 0,2	$W_{rel} = (1 - c)^{4,65}$	(4.39)
0,2 < Re < 1	$W_{rel} = (1 - c)^{4,35} Re^{-0,03}$	
1 < Re < 200	$W_{rel} = (1 - c)^{4,45} Re^{-0,1}$	
Re > 500	$W_{rel} = (1 - c)^{2,39}$	

Voor andere deeltjes dan bollen verandert de exponent bij Re > 500 in:

kubus : 2,5
cilinder met hoogte d : 2,4
plaat met dikte 1/4d : 2,01

Voor het sediment, dat bij suspensietransport gebruikelijk is, geldt doorgaans: 1 < Re < 200, zodat van de vergelijkingen (4.39) de volgende relatie voor

W_{rel} van toepassing is:

$$W_{rel} = (1 - c)^{4,45} Re^{-0,1} \quad (4.39)$$

De vergelijkingen (4.36), (4.38) en (4.39) worden voor $Re < 1$ vergeleken in figuur 19. Het blijkt, dat de formule van Richardson en Zaki te hoge waarden geeft bij kleine concentraties. De metingen in dit gebied zijn echter moeilijk.

De hiervoor genoemde proeven tonen algemeen aan, dat een verkleining van de valsnelheid optreedt als gevolg van een zekere concentratie. Kaye en Boardman [25] werden echter met een onverwachte toename van de valsnelheid geconfronteerd in het gebied waar de concentratie tussen 0,1 % (2,65 gr/l) en 3 % (79,5 gr/l) ligt. Als oorzaak wordt door hen genoemd het optreden van "clusters", samenballingen van een groep deeltjes, die met hun snelheidsveld elkaars valsnelheid vergroten. Het versnellend effect blijkt echter niet alleen te ontstaan als gevolg van de concentratie, maar is ook afhankelijk van de mogelijkheid om clusters te vormen met bollen van ongeveer gelijke grootte.

Johne [23] heeft, geïnspireerd door het werk van Kaye en Boardman, een model ontwikkeld, waarmee hij het aanvankelijk versnellende en daarna vertragende effect van de toenemende concentratie kwantificeert.

Stenhouse [32] vergelijkt het werk van Kaye en Boardman met dat van Johne. Hij vindt, dat de meetresultaten van beide onderzoekers goed bij elkaar aansluiten. Figuur 20 laat de invloed op de valsnelheid voor de kleine concentraties zien. Daaruit blijkt het volgende:

- Er treedt steeds bij een concentratie van 1,3 % (34,5 gr/l) een maximum van de relatieve valsnelheid op.
- De grootte van dit maximum neemt af naarmate de verhouding $R = D_{\text{gemerkte bol}} / D_{\text{suspensie}}$ groter is. (De valsnelheid van de bol werd gemeten).

De resultaten van het onderzoek van Kaye en Boardman en Johne moeten met voorzichtigheid worden gehanteerd. Het is namelijk de vraag of in een turbulente stroom van clusters kan worden gesproken.

Braueren Kriegel [2] , later aangevuld door Kaskas [24] , hebben op het gebied van de suspensies bestaande uit meerdere korrels een belangrijk stuk theoretisch en experimenteel werk verricht.

De belangrijkste elementen van het fysisch proces zijn:

- 1 Het vallen van de korrels, waardoor een retourstroom ontstaat. De gemiddelde snelheid van deze retourstroom moet in mindering worden gebracht op de "bruto" valsnelheid.
- 2 De aanwezigheid van de korrels verstoort het stroombeeld en veroorzaakt tijdelijk en plaatselijk grote snelheidsfluctuaties, waarmee een verhoogde impulsuitwisseling gepaard gaat (te vergelijken met verhoogde viscositeit). Hierdoor ontstaat een extra vertragingseffekt.

Wanneer de volledige formule van Braueren Kriegel voor een suspensie van twee korrels wordt gereduceerd tot een formule voor een suspensie van de enkele korrel, ontstaat de volgende relatie:

$$W_{rel} = \frac{1 - c}{\left\{ 1 + \frac{c}{(1 - c)^2} \right\} \left\{ 1 + \frac{1,2}{\sqrt{1 + \left(\frac{\pi/12}{c} \right)^2}} - \frac{1}{2} \right\}} \quad (4.40)$$

Deze theoretische formule is weergegeven in figuur 21 en stemt redelijk goed overeen met een groot aantal metingen.

Brauer en Kriegel vergelijken hun theoretische formule volgens vergelijking (4.40) met de empirische formule van Richardson en Zaki, die geldt voor $Re < 0,2$, namelijk:

$$W_{rel} = (1 - c)^{4,65} \quad (4.39)$$

Zij constateren een vergaande overeenstemming tussen beide formules (zie figuur 22).

Gelet op de resultaten uit figuur 21 stemt de formule van Richardson en Zaki hiermee beter overeen dan de formule van Brauer en Kriegel. Het voordeel van de eerste is, dat ze eenvoudiger van vorm is.

4.4.2 Invloed turbulentie op valsnelheid

Brush [3] heeft door numerieke integratie van de bewegingsvergelijking van een deeltje in een periodiek bewegende watermassa de reductie van de valsnelheid berekend (zie figuur 23). De berekende waarden stemmen goed overeen met metingen. Voor een schatting van de invloed van de turbulentie in een parallelstroom is het nodig de frequenties volgens Lagrange te kennen, daar de korrel vrijwel met de stroom mee beweegt. Een schatting hiervoor is

$$\omega = 2 \pi n = 2 \pi \left(\frac{v'}{2\pi l} \right) \quad (4.41)$$

waarin:

v' = de snelheidsfluctuaties volgens Lagrange

l = de afmeting van de wervels.

Wordt nu voor $l = 0,05 h$ en voor $v' = 2 u_*$ genomen, dan wordt:

$$\omega = \frac{40 u_*}{h}$$

De waarde van de parameter $a\omega^2 / g$, waarin a = de amplitude van de waterbeweging, wordt dan:

$$\frac{0,05 h \left(\frac{40 u_*}{h} \right)^2}{g} = \frac{4 \lambda \bar{u}^2}{gh} \quad (4.42)$$

$$\text{waarin: } \lambda = \frac{8 u_*^2}{\bar{u}^2}$$

Daar meestal $\bar{u}^2 / gh < 1$ en $\lambda < 0,1$ is, zal de grootheid $a\omega^2 / g < 0,4$ zijn. Voor deze waarde is er vrijwel geen reductie van de valsnelheid (zie figuur 23). Brush berekent wél een belangrijke reductie van de valsnelheid, omdat hij de frequenties volgens Euler berekent, hetgeen onjuist is.

Voor een parallelstroom kan ook van belang zijn de inhomogeniteit van de turbulentie, waardoor de waterdeeltjes versnellingen ondergaan (zie hiervoor Irmay [19]). Ver van de bodem zijn deze negatief en alleen dichtbij de bodem positief. Deze negatieve versnelling, die ook een kracht op het deeltje veroorzaakt, kan de reden zijn, dat L' Hermitte [14] vindt, dat de valsnelheid van de korrels in een parallelstroom groter is dan in stilstaand water.

Jobson en Sayre [21] vinden eenzelfde tendens als L' Hermitte. Zij hebben proeven uitgevoerd, waarbij in een permanente, uniforme en twee-dimensionale stroom gelijkmatig over de breedte materiaal wordt geïnjecteerd. Met behulp van een geïntegreerde vorm van de diffusievergelijking hebben zij uit de gemeten snelheids- en concentratieverdeling de valsnelheid berekend. Deze lijkt door twee factoren te worden beïnvloed: groepsvorming door injectie en turbulentie. Door de groepsvorming zal de valsnelheid toenemen. Voor het grof materiaal is dit niet significant. Voor het fijn materiaal schijnt het de hoofdoorzaak van de toename te zijn. Hoewel het effect van de turbulentie niet geheel kon worden geïsoleerd, wijzen de gegevens toch op een toename van de valsnelheid door turbulentie, zij het in geringe mate.

5 Invloed hydraulische parameters op concentratieverdeling

5.1 Onderzoek Hjelmfelt en Lenau

Het is gebruikelijk bij de oplossing van de diffusievergelijking voor de valsnelheid de valsnelheid van de enkele korrel in stilstaand water te nemen. In 4.4 is gebleken, dat de valsnelheid onder andere een functie is van de concentratie. Hjelmfelt en Lenau [15] hebben berekend, wat de invloed van de valsnelheid als functie van de concentratie op de concentratieverdeling is.

Voor de diffusievergelijking wordt aangenomen vergelijking (2.10):

$$\epsilon_s \frac{dc}{dy} + cW = 0 \quad (2.10)$$

met de randvoorwaarde: $y = a$; $c = c_a$.

Voor de uitwisselingscoëfficiënt wordt aangenomen vergelijking (3.16):

$$\epsilon_s = \beta K u_* y \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (3.16)$$

met $\beta \approx 1$.

Voor de valsnelheid als functie van de concentratie wordt de door McNown en anderen [27] voorgestelde betrekking gebruikt:

$$\frac{W(c)}{W(o)} = 1 + kc^{1/3} + k^2 c^{2/3} \quad (5.1)$$

met $k \approx 0,175$.

Deze formule is afgeleid voor kleine waarden van het getal van Reynolds ($Re = WD/\nu$) en geldt alleen voor $c < 10$ ‰ (265 gr/l). Er wordt nu een oplossing van (2.10) aangenomen, die van een vergelijkbare nauwkeurigheid is:

$$\frac{c}{c_a} = C_1 + c_a^{1/3} C_2 + c_a^{2/3} C_3 + c_a C_4 + \dots \quad (5.2)$$

waarbij C_1, C_2 , enz. onafhankelijk zijn van c_a .

Vergelijking (5.2) wordt gesubstitueerd in (5.1) en ontwikkeld in machten van $c_a^{1/3}$, zodat:

$$\frac{W(c)}{W(o)} = 1 - kc_a^{1/3} C_1^{1/3} - \frac{kc_a^{2/3} C_2}{3 C_1^{2/3}} + 0(c_a) \quad (5.3)$$

waarbij $0(c_a)$ staat geschreven voor alle overige termen, die verwaarloosbaar klein zijn.

Vergelijking (2.10) en (3.16) geven samen, als $X = \frac{h-y}{y}$, de uitdrukking:

$$Z \frac{W(c)}{W(o)} c - X \frac{dc}{dX} = 0 \quad (5.4)$$

met $Z = \frac{W(o)}{\beta K u_*}$

Vergelijking (5.2) en (5.3) worden gesubstitueerd in (5.4) en de resulterende vergelijking wordt ontwikkeld in machten van $c_a^{1/3}$. Door coëfficiënten van gelijke machten te scheiden ontstaat een systeem van vergelijkingen, dat oneindig is. De eerste drie zijn:

$$ZC_1 = X \frac{dC_1}{dX} \quad (5.5)$$

$$Z (C_2 - k C_1^{4/3}) = X \frac{dC_2}{dX} \quad (5.6)$$

$$Z (C_3 - 4/3 k C_1^{1/3} C_2) = X \frac{dC_3}{dX} \quad (5.7)$$

Voor $X = X_a = \frac{h - a}{a}$ is $\frac{c}{c_a} = 1$, zodat (zie vergelijking 5.2):

$$C_1 = 1, C_2 = 0, C_3 = 0, \text{ enz.}$$

De vergelijkingen (5.5), (5.6) en (5.7) hebben de vorm:

$$X \frac{dC_k}{dX} - Z C_k = f_k (X) \quad (5.8)$$

met $k = 1, 2, 3$

De algemene oplossing hiervan is:

$$C_k = X^Z \int X^{-1-Z} f_k (X) dX + QX^Z \quad (5.9)$$

met Q is constant.

Voor (5.5) geldt: $f_1 = 0$, zodat:

$$C_1 = QX^Z \quad (5.10)$$

Als $X = X_a$ is $C_1 = 1$ (zie hiervoor), zodat:

$$C_1 = \left(\frac{X}{X_a} \right)^Z \quad (5.11)$$

Uit de vergelijkingen (5.6), (5.8) en (5.11) volgt:

$$f_2 = -kZ \left(\frac{X}{X_a} \right)^{4Z/3} \quad (5.12)$$

en

$$C_2 = QX^Z - 3k \left(\frac{X}{X_a} \right)^{4Z/3} \quad (5.13)$$

Als $X = X_a$ is $C_2 = 0$ (zie hiervoor), zodat:

$$C_2 = 3k \left(\frac{X}{X_a} \right)^Z \left\{ 1 - \left(\frac{X}{X_a} \right)^{Z/3} \right\} \quad (5.14)$$

Op dezelfde wijze wordt verkregen:

$$C_3 = 6k^2 \left(\frac{X}{X_a} \right)^Z \left\{ 1 - \left(\frac{X}{X_a} \right)^{Z/3} \right\}^2 \quad (5.15)$$

Een combinatie van de vergelijkingen (5.2), (5.11), (5.14) en (5.15) geeft:

$$\frac{c}{c_a} = \left(\frac{X}{X_a} \right)^Z \left[1 + 3k \left\{ 1 - \left(\frac{X}{X_a} \right)^{Z/3} \right\} c_a^{1/3} + 6k^2 \left\{ 1 - \left(\frac{X}{X_a} \right)^{Z/3} \right\}^2 c_a^{2/3} + O(c_a) \right] \quad (5.16)$$

waarin de term $O(c_a)$ staat voor alle overige termen, die verwaarloosbaar klein zijn.

De invloed van de afname van de valsnelheid met de concentratie op de concentratieverdeling ($W(c_y)$ ten opzichte van $W(o)$) is weergegeven in figuur 24A. Het blijkt, dat de relatieve concentratie over de gehele diepte toeneemt.

Voor $Z = 0,25$ hebben Hjelmfelt en Lenau de concentratieverdeling volgens 2 verschillende methoden berekend:

- 1 Volgens hun eigen methode, waarbij de valsnelheid als functie van de concentratie varieert met de hoogte. In figuur 24B aangeduid met $W(c_y)$.
- 2 Volgens de gebruikelijke methode met constante valsnelheid, waarbij echter voor de valsnelheid de gereduceerde valsnelheid volgens vergelijking (5.1) op de hoogte $y = a$ is aangehouden, zodat $Z = 0,175$. In figuur 24B wordt dit aangeduid met $W(c_a)$.

Beide methoden worden in figuur 24B met elkaar vergeleken. Er blijkt een grote overeenkomst te bestaan in de gevonden concentratieverdelingen. Het is echter de vraag of deze overeenkomst ook zal bestaan voor andere waarden van Z . De samensteller van dit verslag heeft daarom deze procedure ook voor andere waarden van Z toegepast. De resultaten worden gegeven in de figuren 25 en 26. De lijnen voor $W(c_y)$ gelden weer voor het geval de valsnelheid als functie van de concentratie varieert met de hoogte en de lijnen voor $W(c_a)$ voor het geval, dat er een constante valsnelheid wordt aangehouden als functie van de concentratie op de hoogte $y = a$. Figuur 25 geeft de resultaten voor een concentratie $c_a = 5 \%$ en figuur 26 voor $c_a = 10 \%$. Het blijkt, dat gerekend vanaf de bodem tot een hoogte van $y = 0,2 h$ de verschillen voor alle gebruikte waarden van Z erg klein zijn. Daarboven nemen de verschillen toe met name voor de grotere waarden van Z . Dit is begrijpelijk, daar naar boven toe bij grotere waarden van Z de concentratie sterk afneemt, waardoor $W(c_y)$ toeneemt (methode 1), terwijl $W(c_a)$ constant is over de gehele hoogte (methode 2). Hjelmfelt en Lenau hebben dus een, voor de door hun geconstateerde grote overeenkomst, gunstige Z -waarde gebruikt. Bovendien blijken de verschillen afhankelijk van de concentratie nabij de bodem (c_a). De verschillen zijn groter bij grotere concentraties.

5.2 Onderzoek Jobson en Sayre

Jobson en Sayre [22] hebben een computerprogramma ontwikkeld voor de numerieke oplossing van de diffusievergelijking voor een permanente, uniforme en twee-dimensionale stroom. Zij gaan uit van de reeds in par. 4.2.1 gegeven algemene diffusievergelijking:

$$\frac{\delta c}{\delta t} + U_{si} \frac{\delta c}{\delta x_i} = \frac{\delta}{\delta x_i} \left(\epsilon_{si} \frac{\delta c}{\delta x_i} \right) \quad (4.10)$$

Voor een permanente, uniforme en twee-dimensionale stroom wordt dat:

$$u \frac{\delta c}{\delta x} = \epsilon_{sx} \frac{\delta^2 c}{\delta x^2} + \frac{\delta}{\delta y} \left(\epsilon_{sy} \frac{\delta c}{\delta y} + Wc \right) \quad (4.11)$$

met de randvoorwaarden:

$$\text{aan het wateroppervlak: } \epsilon_{sy} \frac{\delta c}{\delta y} + Wc = 0 \quad (4.12)$$

$$\text{aan de bodem: } \epsilon_{sy} \frac{\delta c}{\delta y} + (1 - A) Wc = 0 \quad (4.13)$$

Vergelijking (4.12) geeft aan, dat er geen transport is door het wateroppervlak. Vergelijking (4.13) geeft de mate van transport aan naar de bodem, waarbij A de waarschijnlijkheid is, dat een deeltje neerslaat. Een andere, nog noodzakelijke randvoorwaarde is de concentratieverdeling op een bepaalde begin-plaats (de bron-conditie). Jobson [20] vond, dat voor de twee-dimensionale stroom de longitudinale uitwisselingsterm $\epsilon_{sx} \delta^2 c / \delta x^2$ kan worden verwaarloosd. Vergelijking (4.11) wordt dimensieloos gemaakt door invoering van de volgende parameters:

$\frac{\Sigma}{h} = \eta$	relatieve diepte	} (5.17)
$\frac{W}{k u_*} = \frac{W_s}{6}$	dimensieloze valsnelheid	
$\frac{u}{u_*} = \mu$	dimensieloze snelheid	
$\frac{\epsilon_{sy}}{\bar{\epsilon}_m} = \frac{\delta \epsilon_{sy}}{k h u_*} = \psi$	dimensieloze uitwisselingscoëfficiënt	
$\frac{x \bar{\epsilon}_m}{\bar{u} h^2} = \frac{k x u_*}{6 \bar{u} h} = X$	dimensieloze afstand tot de bron	

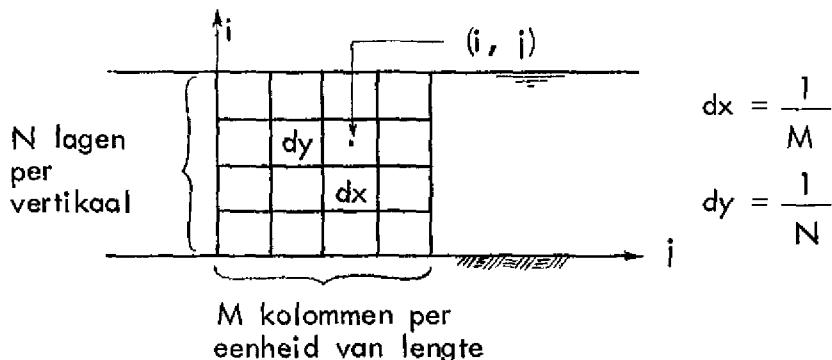
waarbij:

$\bar{\epsilon}_m = \frac{k h u_*}{6}$ = de gemiddelde uitwisselingscoëfficiënt bij een logaritmische snelheidsverdeling en een lineaire verdeling van de schuifspanning.

x wordt dimensieloos gemaakt met $\bar{u} h^2 / \bar{\epsilon}_m$, waarin $h^2 / \bar{\epsilon}_m$ een index van de tijd is, die nodig is voor complete menging in de vertikaal, ook wel de tijdschaal voor diffusie genoemd (Euler).

Vergelijking (4.11) gaat over in:

$$\mu \frac{\delta c}{\delta X} = \frac{\delta}{\delta \eta} \left(\psi \frac{\delta c}{\delta \eta} + W_s c \right) \quad (5.18)$$



Per eenheid van lengte zijn er dus $(N \times M)$ differentiegebiedjes.

Vergelijking (5.18) wordt:

$$\left\{ dxUI(i) \right\}^{-1} \left\{ c(i, j+1) - c(i, j) \right\} = \frac{1}{dy^2} \left[E(i+1) \left\{ c(i+1, j) - c(i, j) \right\} - E(i) \left\{ c(i, j) - c(i-1, j) \right\} \right] + \frac{VS}{dy} \left\{ c(i+1, j) - c(i, j) \right\} \quad (5.19)$$

waarbij:

$$UI(i) = \frac{1}{\mu} \text{ en geldt voor het midden van een differentiegebiedje}$$

$$E(i) = \psi \text{ en geldt voor de onderrand van een differentiegebiedje}$$

$$VS = W_s$$

Vergelijking (5.19) kan expliciet worden opgelost voor $c(i, j+1)$. Om ook oplossingen te kunnen krijgen voor de randen moeten de vergelijkingen (4.12) en (4.13) in een eindige vorm worden omgezet en worden gesubstitueerd in (5.19). Door de numerieke oplossingsmethode vindt er een verandering van de uitwisselingscoëfficiënt plaats. De effectieve uitwisselingscoëfficiënt wordt:

$$\psi_{\text{eff}} = \psi + \frac{1}{2} W_s dy$$

Als $dy = 0,02$ en $W_s = 3$ wordt de numerieke toevoeging:

$$\frac{1}{2} W_s dy = 0,03$$

Dit is acceptabel. Wat het effect is van de hogere orde termen (met $\delta^3 c / \delta \eta^3$) is niet zo gemakkelijk te overzien.

De numerieke oplossing is vergeleken met de analytische volgens Dobbins. Wanneer $dy = 0,02$ is de afwijking 0,1 % bij $W_s = 0$. De afwijking neemt toe bij toenemende waarden van W_s en dy . De numerieke oplossing is ook vergeleken met experimentele gegevens. Hij voldoet niet goed dichtbij de bron. Daarom wordt de eerste gemeten verdeling als bron-conditie gebruikt. Een dergelijke werkwijze levert goede resultaten. De afwijkingen met de experimentele gegevens zijn klein.

Jobson en Sayre gebruiken deze numerieke oplossing van de diffusievergelijking voor het berekenen van de invloed van de hydraulische parameters op de concentratieverdeling. De resultaten van hun berekeningen worden gegeven in figuur 27A t/m D. Alle figuren hebben één groep krommen gemeen. De tot deze groep behorende krommen zijn aangeduid als getrokken lijnen en worden bepaald door:

- 1 een logaritmisch snelheidsprofiel met $k = 0,4$
- 2 $\psi = 6\eta (1 - \eta)$
- 3 $W_s = 3,0$
- 4 de waarschijnlijkheid van neerslaan (A) = 0,3
- 5 de bron-conditie is de gemeten verdeling op $X = 0,05$.

Figuur 27A geeft de invloed van de verdeling van de uitwisselingscoëfficiënt op de concentratieverdeling. De gemiddelde waarde van elke verdeling van ψ is 1,0. Het blijkt, dat de concentratieverdeling niet erg gevoelig is voor de verdeling van de uitwisselingscoëfficiënt.

Figuur 27B geeft de invloed van de absolute waarde van de uitwisselingscoëfficiënt op de concentratieverdeling. Het blijkt, dat de mate van verdunning van de piek-concentratie varieert met de absolute waarde van de uitwisselingscoëfficiënt, maar anderzijds blijven de concentratieverdelingen gelijkvormig. De snelheid, waarmee de piek-concentratie zich naar beneden beweegt, wordt nauwelijks beïnvloed door de absolute waarde van de uitwisselingscoëfficiënt. Figuur 27C geeft de invloed van de valsnelheid op de concentratieverdeling. Het blijkt, dat de snelheid van neerslaan van sediment hoofdzakelijk bepaald wordt door de valsnelheid.

Figuur 27D geeft de invloed van de waarschijnlijkheid van neerslaan (A) op de concentratieverdeling. De waarde van A blijkt duidelijk van invloed op de verdeling nabij de bodem. Aan de hand van bovenstaande resultaten komen Jobson en Sayre tot de volgende conclusies:

- De valsnelheid beïnvloedt de mate van neerslaan van de suspensie, maar heeft weinig invloed op de spreiding.
- De absolute waarde van de uitwisselingscoëfficiënt daarentegen beïnvloedt juist de spreiding en heeft weinig invloed op de mate van neerslaan.
- De concentratieverdeling is niet erg gevoelig voor de verdeling van de uitwisselingscoëfficiënt.

6 Invloed hoge concentratie bij bodem op snelheidsverdeling en concentratieverdeling

Zoals reeds is opgemerkt in 4.3.1 zijn er twee gebieden te onderscheiden, namelijk een dunne laag dichtbij de bodem met veel sediment en de rest van de stroom met weinig sediment. In het laatst genoemde gebied kunnen de snelheids- en concentratieverdeling met de in de voorgaande hoofdstukken besproken theorie worden beschreven. Bij de bodem is de concentratie zo hoog, dat daar het fysisch gebeuren geheel anders is. Omdat het gaat om een dunne laag dichtbij de bodem is het moeilijk met de bestaande meetapparatuur de stroomsnelheid en concentratie te meten, zonder deze te beïnvloeden. De beschikbare gegevens moeten daarom met de nodige reserve worden gehanteerd.

6.1 Onderzoek Einstein en Ning Chien

Einstein en Ning Chien [11] leiden een algemene vergelijking af voor de schuifspanning. Zij stellen, dat niet alleen de uitwisseling van waterdeeltjes bijdraagt tot het impulsietransport, maar ook de uitwisseling van sediment. Zij komen tot de volgende uitdrukking voor de schuifspanning:

$$\tau_y = \left\{ 1 + \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) c \right\} \rho \epsilon_m \frac{du}{dy} = \tag{6.1}$$

$$\left\{ 1 + \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) c \right\} \rho l_m^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy}$$

Voor $y/h > 0,1$ (of daar waar $c < 100$ gr/l) blijkt het sediment nauwelijks invloed uit te oefenen op de verdeling van de schuifspanning. Voor dit gebied geldt:

$$\tau_y = \rho \epsilon_m \frac{du}{dy} = \rho l_m^2 \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy} \tag{6.2}$$

Aangenomen wordt, dat in dit gebied de "similarity hypothesis" van Von Karman geldt:

$$l_m = K \frac{du}{dy} \left(\frac{d^2u}{dy^2} \right)^{-1} \quad (6.3)$$

Als gevolg van de grote concentratie bij de bodem is voor de stroom met sediment de beschikbare turbulentie-energie kleiner dan bij een stroom zonder sediment en wordt er extra energie verbruikt om het sediment in suspensie te houden. Dit speelt zich af dichtbij de bodem. Voor het overige deel van de stroom kan K constant worden beschouwd. Daarom mag vergelijking (6.3) ingevuld worden in vergelijking (6.2) en de laatste worden opgelost voor u :

$$u = \frac{2,3}{K} u_* \log \left(\frac{Ay}{k} \right) \quad (6.4)$$

met k = de ruwheid van Nikuradse.

Tussen K en A bestaat de volgende uit metingen gevonden relatie:

$$K = 0,132 \log (35,45 A) \quad (6.5)$$

Vergelijking (6.5) ingevuld in (6.4) geeft:

$$\frac{u}{u_*} = 17,4 + \frac{2,3}{K} \log \left(\frac{y}{35,45 k} \right) \quad (6.6)$$

waarbij K wordt verkregen uit de relatie, zoals die door Einstein en Ning Chien is gegeven (zie figuur 14).

Voor $y/h < 0,1$ wordt aangenomen, dat de mengweg de orde van grootte heeft van de ruimte, die de wervel heeft om te groeien:

$$l_m = K y \quad (6.7)$$

met $K \approx 0,4$

De schuifspanning bij de bodem wordt benaderd door:

$$\tau_b = \int_0^h \left\{ \rho + (\rho_s - \rho) c \right\} g dy \quad (6.8)$$

Vergelijking (6.7) en (6.8) worden gesubstitueerd in (6.1) waarbij c constant wordt beschouwd en gelijk is aan c_0 (de concentratie aan de oppervlakte van de bodemlaag), zodat:

$$\frac{u}{u_*} = 5,75 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \frac{1}{h} \int_0^h c dy}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) c_0}} \log \frac{A'y}{k} \quad (6.9)$$

De vergelijkingen (6.6) en (6.9) beschrijven, zoals figuur 28 laat zien, de snelheidsverdeling goed. Het punt, waar vergelijking (6.9) eindigt en vergelijking (6.6) begint is echter onbekend, omdat door de beperkte metingen in het gebied dichtbij de bodem de waarde A' niet kan worden gegeven.

Voor het bepalen van de gemiddelde stroomsnelheid kan (6.6) worden gebruikt:

$$\left(\frac{\bar{u}}{u_*} \right)_s = 17,4 + \frac{2,3}{k} \log \left(\frac{h}{96,5 k} \right) \quad (6.10)$$

Voor de stroom zonder sediment geldt:

$$\left(\frac{\bar{u}}{u_*} \right)_c = 5,75 \log \left(12,27 \frac{h}{k} \right) \quad (6.11)$$

Om te zorgen, dat de vergelijkingen (6.10) en (6.11) aan elkaar gelijk zijn voor $k = 0,4$ moet de constante in vergelijking (6.10) enigszins worden veranderd, zodat:

$$\left(\frac{\bar{u}}{u_*} \right)_s = 17,66 + \frac{2,3}{k} \log \left(\frac{h}{96,5 k} \right) \quad (6.12)$$

Bij dezelfde waterdiepte (h), dezelfde helling van de energielijn (i) en hetzelfde bodemmateriaal (k) is de gemiddelde stroomsnelheid voor de stroom met sediment groter: $\bar{u}_s / \bar{u}_c > 1$.

Vanoni had dit al eens eerder geconstateerd. Fysisch betekent het, dat als gevolg van de demping van de turbulentie door het sediment er een minder grote uitwisseling plaats vindt, waardoor er een kleinere inwendige wrijving optreedt.

Voor het gebied met weinig sediment geven Einstein en Ning Chien de uitdrukking voor de concentratieverdeling van vergelijking (3.19), waarbij niet de exponent $Z = W/k' u_{*}$, maar Z_1 moet worden gebruikt. Z_1 wordt dan uitgedrukt in Z volgens vergelijking (3.29).

Voor het gebied bij de bodem met veel sediment wordt voor de diffusie-vergelijking vergelijking (2.22) genomen:

$$\epsilon_s \frac{dc}{dy} + (1 - c) cW = 0 \quad (2.22)$$

Samen met vergelijking (6.1) geeft dit:

$$\frac{dc}{dy} = - \left\{ 1 + \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) c \right\} c (1 - c) W(c) \frac{du}{dy} \frac{\rho}{\tau} \quad (6.13)$$

Wanneer $W(c)$ bekend is, kan met vergelijking (6.13) de concentratieverdeling worden beschreven voor het gebied dichtbij de bodem.

6.2 Onderzoek Ordonez en Ippen

Voor het gebied $y/h < 0,1$ hebben Ordonez en Ippen [18] aan de hand van vele gegevens een empirische correctie toegepast op de snelheidsverdeling:

$$\frac{u - u_{\max}}{u_*} = \frac{1}{k'} \ln \left(\frac{y}{h} - \psi \ln \frac{y}{h} \right) \quad (6.14)$$

Hierin stelt ψ een kleine diepte voor. Volgens figuur 29 varieert de waarde van ψ tussen de 0,0005 en 0,02 en geeft vergelijking (6.14) goede resultaten. Ordonez en Ippen hebben getracht een relatie te vinden tussen de parameters Z_1 (verkregen uit experimenten), K' (die volgens Ippen in de eerste plaats afhangt van de maximum concentratie c_0 bij de bodem) en ψ (uit vergelijking (6.14)). Figuur 30 toont, dat zo'n verband bestaat voor zover de gebruikte gegevens hiertoe als een bewijs kunnen worden aangevoerd.

De snelheidsgradiënt van de vergelijking (6.14) gegeven snelheidsverdeling wordt:

$$\frac{du}{dy} = \frac{u_*}{K'y} \left(\frac{\frac{y}{h} - \psi}{\frac{y}{h} - \psi \ln \frac{y}{h}} \right) \quad (6.15)$$

Wanneer wordt gesteld, dat de maximum concentratie c_0 bij de bodem optreedt voor $y/h = \psi$, dan kan voor de concentratieverdeling worden geschreven:

$$\ln \frac{c}{c_0} = \frac{W}{K'u_*} \int_{\frac{y}{h}}^{\psi} \frac{\frac{y}{h} - \psi}{\frac{y}{h} (1 - \frac{y}{h}) (\frac{y}{h} - \psi \ln \frac{y}{h})} d\left(\frac{y}{h}\right) \quad (6.16)$$

Vergelijking (6.16) verschilt van vergelijking (3.19) door de introductie van K' uit vergelijking (4.35) en de snelheidsgradiënt volgens vergelijking (6.15). De K' -waarde veroorzaakt een verandering in de helling van de op dubbel-logarithmisch papier uitgezette concentraties van het sediment en du/dy geeft aan de bodem een afwijking van de exponentiële verdeling (gebied $y/h < 0,1$). Zoals uit figuur 31 blijkt, komen de experimentele resultaten goed overeen met vergelijking (6.16). Er moet in dit verband worden opgemerkt, dat de krommen in figuur 30 eindigen bij $y/h = \psi$ en $c = c_0$. Het is duidelijk, dat de maximum concentratie moet worden bepaald door extrapolatie van de experimentele resultaten tot $y/h = \psi$ of uit vergelijking (4.35) als door moeilijkheden met het meten dichtbij de bodem geen resultaten beschikbaar zijn. Gezien de herkomst is de parameter ψ meer een referentieparameter dan een kwantitatieve grootheid.

7 Berekeningmethoden

7.1 Berekening suspensietransport volgens Einstein

Het suspensietransport per eenheid van tijd en per eenheid van breedte wordt gegeven door:

$$s_s = \int_a^h c u dy \quad (7.1)$$

waarbij $y = a$ de dikte is van de laag aan de bodem, die door Einstein [9] wordt gedefinieerd als de laag, waar geen suspensietransport optreedt. Met de concentratieverdeling volgens vergelijking (3.19) en de logarithmische snelheidsverdeling volgens Von Karman-Prandtl wordt vergelijking (7.1):

$$s_s = \int_a^h \left[c_a \left\{ \left(\frac{h-y}{y} \right) \left(\frac{a}{h-a} \right) \right\}^Z \right] \left[5,75 u_* \log \frac{30,2 y}{k} \right] dy \quad (7.2)$$

Als gesteld wordt, dat $A_E = a/h$ kan vergelijking (7.1) worden geschreven als:

$$\begin{aligned} s_s &= \int_{A_E}^1 c u h dy \\ &= h u_* c_a \left(\frac{A_E}{1 - A_E} \right)^Z 5,75 \int_{A_E}^1 \left(\frac{1-y}{y} \right)^Z \log \left(\frac{30,2 y}{k/h} \right) dy \quad (7.3) \end{aligned}$$

of:

$$\begin{aligned} s_s &= 5,75 c_a u_* h \left(\frac{A_E}{1 - A_E} \right)^Z \left\{ \log \left(\frac{30,2 h}{k} \right) \int_{A_E}^1 \left(\frac{1-y}{y} \right)^Z dy \right. \\ &+ 0,434 \int_{A_E}^1 \left(\frac{1-y}{y} \right)^Z \ln y dy \left. \right\} \quad (7.4) \end{aligned}$$

Voor de oplossing van (7.4) stelt Einstein een numerieke oplossing voor van de beide integralen voor verschillende waarden van A_E en Z :

$$I_1 = 0,216 \frac{A_E^{Z-1}}{(1 - A_E)^Z} \int_{A_E}^1 \left(\frac{1-y}{y} \right)^Z dy \quad (7.5)$$

$$I_2 = 0,216 \frac{A_E^{Z-1}}{(1 - A_E)^Z} \int_{A_E}^1 \left(\frac{1-y}{y} \right)^Z \ln y dy$$

Vergelijking (7.4) wordt dan:

$$s_s = 11,6 c_a u_* a \left\{ (2,303 \log \frac{30,2 h}{k}) I_1 + I_2 \right\} \quad (7.6)$$

Let wel, vergelijking (7.6) geeft het transport voor één bepaalde korreldiameter! Volgens vergelijking (3.19) is de concentratie voor $y = 0$ oneindig. Dit is in strijd met de metingen. Vergelijking (3.19) geldt dus niet dichtbij de bodem. Einstein heeft, zoals al werd gezegd, een laag bij de bodem gedefinieerd, waar geen suspensie transport optreedt. De dikte van de laag a is gesteld op twee maal de korreldiameter van het sediment. Einstein veronderstelt, dat in deze laag bodemtransport optreedt en bepaalt aan de hand hiervan de concentratie c_a :

$$c_a = \frac{i_b^{s_b}}{11,6 u_* a} \quad (7.7)$$

waarin $i_b^{s_b}$ het bodemtransport is voor een bepaalde korreldiameter. Er moet in dit verband worden opgemerkt, dat Einstein uitgaat van een bed zonder ribbels.

Vergelijking (7.6) geeft met vergelijking (7.7):

$$i_{s_s} = i_b^{s_b} \left\{ (2,303 \log \frac{30,2 h}{k}) I_1 + I_2 \right\} \quad (7.8)$$

Vergelijking (7.8) geldt dus slechts voor één korreldiameter en i_{s_s} en i_{b_b} geven het transport voor alleen die ene korreldiameter respectievelijk als suspensietransport en als bodemtransport.

7.2 Berekening suspensietransport volgens Hunt

Het suspensietransport in gewicht per eenheid van breedte en per eenheid van tijd wordt gegeven door:

$$s_s = \rho' \int_0^h c u_s dy \quad (7.9)$$

met ρ' = de dichtheid van het gesuspendeerde materiaal.

Uit vergelijking (3.27) volgt:

$$c = \frac{\left\{ \left(\frac{Y}{a'} \right) \left(\frac{B_s - a'}{B_s - Y} \right) \right\}^{Z_s}}{\frac{1 - c_a}{c_a} + \left\{ \left(\frac{Y}{a'} \right) \left(\frac{B_s - a'}{B_s - Y} \right) \right\}^{Z_s}} = \frac{1}{\frac{1 - c_a}{c_a} \left\{ \left(\frac{Y}{a'} \right) \left(\frac{B_s - a'}{B_s - Y} \right) \right\}^{-Z_s+1}} \quad (7.10)$$

waarbij:

$$Y = (1 - y/h)^{\frac{1}{2}}$$

$$a' = (1 - a/h)^{\frac{1}{2}}$$

$$dy = - 2 h Y dY$$

Volgens vergelijking (3.23) geldt:

$$u_s = u_m + \frac{u_*^*}{K_s} \left\{ Y + B_s \ln \left(\frac{B_s - Y}{B_s} \right) \right\} \quad (7.11)$$

met de randvoorwaarden:

$$\text{aan de bodem: } \frac{Y}{h} = 1 - B_s^2 \rightarrow Y = \left(1 - \frac{Y}{h} \right)^{\frac{1}{2}} = B_s$$

aan het wateroppervlak: $y = h \rightarrow Y = 0$

Vergelijking (7.9) wordt dan:

$$s_s = 2 h \rho' \int_0^{B_s} \frac{u_m + \frac{u_*}{K_s} \left\{ Y + B_s \ln \left(\frac{B_s - Y}{B_s} \right) \right\}}{1 + \frac{1 - c_a}{c_a} \left\{ \frac{Y}{a'} \left(\frac{B_s - a'}{B_s - Y} \right) \right\}^{-Z_s}} Y dY \quad (7.12)$$

Deze vergelijking kan ook als volgt worden geschreven:

$$s_s = 2 h \rho' \left\{ u_m I_1 + \frac{u_*}{K_s} I_2 \right\} \quad (7.13)$$

waarbij:

$$I_1 = \int_0^{B_s} \frac{Y dY}{1 + K \left(\frac{Y}{B_s - Y} \right)^{-Z_s}} \quad (7.14)$$

$$I_2 = \int_0^{B_s} \frac{Y \left\{ Y + B_s \ln \left(\frac{B_s - Y}{B_s} \right) \right\}}{1 + K \left(\frac{Y}{B_s - Y} \right)^{-Z_s}} dY$$

$$\text{met: } K = \left(\frac{1 - c_a}{c_a} \right) \left(\frac{B_s - a'}{a'} \right)^{-Z_s}$$

Hoe I_1 en I_2 in tabel worden gebracht is afhankelijk van het gebruik van de formule. De experimenten van Vanoni sterken de algemene vorm van de oplossing, maar er zijn meer gegevens nodig om de kwantitatieve waarden van de betrokken parameters te kunnen vaststellen (B_s en K_s).

7.3 Berekening suspensietransport volgens Ippen

Vergelijking (7.1) kan worden opgelost met behulp van de vergelijkingen (6.14) en (6.16). De oplossing is echter zó complex, dat dit alleen met behulp van een computer mogelijk is.

De concentratie c_0 is hierbij de concentratie voor $y/h = \psi$ en kan worden berekend met behulp van (4.35).

8 Samenvatting en conclusies

Voor de permanente, eenparige en twee-dimensionale stroom, waarbij de concentratie constant is in de tijd, geldt de volgende diffusievergelijking:

$$\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} + (1 - c) cW = 0 \quad (2.22)$$

Voor kleine concentraties gaat vergelijking (2.22) over in:

$$\epsilon_s \frac{\delta c}{\delta y} + cW = 0 \quad (2.10)$$

Om de diffusievergelijking te kunnen oplossen moet ϵ_s bekend zijn. De meest gebruikelijke uitdrukking voor ϵ_s is:

$$\epsilon_s = \beta K u_* y \left(1 - \frac{y}{h}\right) \quad (3.16)$$

Hunt [16] komt tot de volgende uitdrukking:

$$\epsilon_s = 2 K_s h u_* \left(1 - \frac{y}{h}\right) \left\{ B_s - \left(1 - \frac{y}{h}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (3.25)$$

Jobson en Sayre [21] hebben de invloed van de wervelactiviteit op de menging in de uitdrukking voor ϵ_s ingebouwd en onderscheiden twee gebieden:

$$\eta \geq 0,1 : \frac{\epsilon_s}{hu_*} = \alpha_1 K (1 - \eta) \eta + \alpha_2 \left(\frac{1 - \eta}{0,9} \right)^3 \quad (4.20)$$

$$\eta \leq 0,1 : \frac{\epsilon_s}{hu_*} = \alpha_1 K (1 - \eta) \eta + \alpha_2 \left(\frac{\eta}{0,1} \right)^3$$

waarbij:

fijn	grof
$\alpha_1 = 0,98$	$\alpha_1 = 0,49$
$\alpha_2 = 0,038$	$\alpha_2 = 0,10$

Uit het onderzoek van Coleman [6] blijkt, dat ϵ_s niet alleen een functie is van y/h , maar ook van W/u_* . Een zo goed mogelijk bij de waarnemingen van Coleman aansluitende uitdrukking voor ϵ_s is:

als $\eta < \alpha_4 (W/u_*) + \alpha_5$:

$$\frac{\epsilon_s}{hu_*} = \left\{ \alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{W}{u_*} \right)^{\alpha_3} \right\} \left\{ 1 - \left(\frac{[\alpha_4 \left(\frac{W}{u_*} \right) + \alpha_5] - \eta}{\alpha_4 \left(\frac{W}{u_*} \right) + \alpha_5} \right)^{\alpha_6} \right\} \quad (4.24)$$

als $\eta > \alpha_4 (W/u_*) + \alpha_5$:

$$\frac{\epsilon_s}{hu_*} = \alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{W}{u_*} \right)^{\alpha_3}$$

waarbij:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 0,099 \pm 0,012 \\ \alpha_2 &= 0,377 \pm 0,033 \\ \alpha_3 &= 4,313 \pm 0,809 \\ \alpha_4 &= 0,219 \pm 0,103 \end{aligned}$$

$$\alpha_5 = 0,128 \pm 0,071$$

$$\alpha_6 = 1,248 \pm 0,331$$

In tegenstelling tot de vergelijkingen (3.16), (3.25) en (4.20) neemt volgens (4.24) ϵ_s niet af tot nul bij de waterspiegel.

Uit figuur 13 blijkt, dat (4.24) het beste aansluit bij de waarnemingen en dat (4.20) geen verbetering is ten opzichte van (3.16).

Voor een stroom met sediment is de constante van Von Karman $K \neq 0,4$. Verscheidene onderzoekers hebben getracht een uitdrukking te vinden voor K . Einstein en Ning Chien [11] geven een relatie tussen K en de energie, die nodig is om het sediment in suspensie te houden:

$$K = f \left\{ \sum \left(\frac{c_m W}{\bar{u}i} \right) \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \right\} \quad (\text{fig. 14})$$

Ippen [18] komt tot de volgende uitdrukking:

$$\frac{1}{K'} = \frac{1}{0,385} \left\{ \frac{1 + 2,5 c_o}{1 + c_m \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right)} \right\} \quad (4.35)$$

waarin K' met name afhankelijk is van de concentratie bij de bodem (c_o). Einstein en Abdel-Aal [12] vinden, dat K onafhankelijk is van c_o en geven de volgende relatie:

$$K = f \left(\frac{W_{35} D_{65}}{q^{\frac{1}{2}} i^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}} \right) \quad (\text{fig. 17D})$$

Zij gebruiken echter de formule van Einstein voor het totaal transport, zodat K de vergaarbak is van alle invloeden, die niet goed door deze formule zijn weergegeven.

De uitdrukking van Ippen lijkt de meest betrouwbare.

Bij het oplossen van de diffusievergelijking wordt voor W gewoonlijk de valsnelheid van de enkele korrel in stilstaand water genomen. Het blijkt echter, dat de valsnelheid afneemt bij toenemende concentratie. De invloed van de turbulentie op de valsnelheid is gering en wordt verwaarloosd. Voor het sediment, dat bij suspensietransport gebruikelijk is, kan het beste de formule van Richardson en Zaki [29] worden gebruikt:

$$W_{rel} = \frac{W(c)}{W(o)} = (1 - c)^{4,45 Re^{-0,1}} \quad (4.39)$$

met $Re = \frac{WD}{\nu}$

Hjelmfelt en Lenau [15] hebben berekend wat de invloed is van de afname van de valsnelheid met de concentratie op de concentratieverdeling en vinden een toename van de concentratie over de gehele diepte.

De meest gebruikelijke oplossing van de diffusievergelijking is:

$$\frac{c}{c_a} = \left\{ \left(\frac{h-y}{y} \right) \left(\frac{a}{h-a} \right) \right\}^Z \quad (3.19)$$

met voor $y = a$: $c = c_a$

en $Z = \frac{W}{\beta K u_*}$

Einstein en Ning Chien [11] onderscheiden twee gebieden en geven voor elk gebied een andere oplossing van de diffusievergelijking:

$$\frac{y}{h} > 0,1 : \quad \frac{c}{c_a} = \left\{ \left(\frac{h-y}{y} \right) \left(\frac{a}{h-a} \right) \right\}^{Z_1} \quad (3.19)$$

$$\text{met: } Z_1 = \frac{Z}{e^{-L^2 Z^2 / \pi} + ZL \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{ZL\sqrt{2/\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \text{waarbij: } Z &= \frac{W}{\beta K u_*} \\ L &= \ln(1 + BK) \\ x &= \ln y \end{aligned}$$

$$\frac{y}{h} < 0,1 : \frac{dc}{dy} = - \left\{ 1 + \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) c \right\} c (1 - c) W(c) \frac{du}{dy} \frac{\rho}{\tau} \quad (6.13)$$

Voor elk gebied geldt ook een andere snelheidsverdeling:

$$\frac{y}{h} > 0,1 : \frac{u}{u_*} = 17,66 + \frac{2,3}{K} \log \left(\frac{y}{35,45 k} \right) \quad (6.6)$$

$$\frac{y}{h} < 0,1 : \frac{u}{u_*} = 5,75 \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) \frac{1}{h} \int_0^h c dy}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho} \right) c_0}} \log \frac{A'y}{k} \quad (6.9)$$

Ordonez en Ippen [18] passen een empirische correctie toe op de snelheidsverdeling voor het gebied $y/h < 0,1$:

$$\frac{u - u_{\max}}{u_*} = \frac{1}{K'} \ln \left(\frac{y}{h} - \psi \ln \frac{y}{h} \right) \quad (6.14)$$

Zij vinden voor de concentratieverdeling:

$$\ln \frac{c}{c_0} = \frac{W}{K' u_*} \int_{\frac{\Sigma}{h}}^{\Psi} \frac{\frac{\Sigma}{h} - \Psi}{\frac{\Sigma}{h} (1 - \frac{\Sigma}{h}) (\frac{\Sigma}{h} - \Psi \ln \frac{\Sigma}{h})} d \left(\frac{\Sigma}{h} \right) \quad (6.16)$$

Uit een onderzoek van Jobson en Sayre [22] met behulp van een numerieke oplossing van de diffusievergelijking blijkt de invloed van verschillende hydraulische parameters op de concentratieverdeling:

- De valsnelheid beïnvloedt de mate van sedimentatie, maar heeft geen invloed op de spreiding.
- De absolute waarde van de uitwisselingscoëfficiënt beïnvloedt juist de spreiding en heeft weinig invloed op de mate van sedimentatie.
- De concentratieverdeling is niet erg gevoelig voor de verdeling van de uitwisselingscoëfficiënt.

Einstein [9] geeft de volgende uitdrukking voor het suspensietransport:

$$i_{s_s} = i_{b_b} \left\{ \left(2,303 \log \frac{30,2 h}{k} \right) l_1 + l_2 \right\} \quad (7.8)$$

waarbij:

i_{s_s} = suspensietransport van een bepaalde korreldiameter

i_{b_b} = bodemtransport van een bepaalde korreldiameter

Voor l_1 en l_2 zijn tabellen beschikbaar.

Hunt [16] vindt voor het suspensietransport:

$$S_s = 2 h p' \left\{ u_m l_1 + \frac{u_*}{K_s} l_2 \right\} \quad (7.13)$$

De integralen l_1 en l_2 hebben één constante (B_s) meer dan die van Einstein en zijn eveneens in tabellen gegeven.

LITERATUUR

- 1 ANDERSON, A.G. (1942): "Distribution of Suspended Sediment in a Natural Stream", *Trans. Am. Geophys. Union*, Vol. 23.
- 2 BRAUER, H. en E. KRIEDEL (1966): " Kornbewegung bei der Sedimentation", *Chem. Ing. Techn.* 38, p. 321-330.
- 3 BRUSH, L.M. en anderen (1962): "A Study of Sediment in Suspension", *Int. Ass. of Scient. Hydrol., Comm. of Land Erosion, Symp. of Bari*, Publ. nr. 59, p. 293-310.
- 4 CARSTENS, M.R. (1952): "Accelerated Motion of a Spherical Particle", *Trans. of the Am. Geophysical Union*, Vol. 33, nr. 5, p. 713-720.
- 5 CHIEN, N. (1954): "The Present Status of Research on Sediment Transport", *Proc. ASCE*, Vol. 80.
- 6 COLEMAN, N.L. (1970): "Flume Studies of the Sediment Transfer Coefficient", *Water Resources Research*, Vol. 6, nr. 3, p. 801-809.
- 7 CRANK, J. (1955): "The Mathematics of Diffusion", *Oxford Univ. Press*, New York, p. 1-8.
- 8 DOBBINS, W.E. (1943): "Effect of Turbulence on Sedimentation", *Trans. ASCE*, Vol. 109.
- 9 EINSTEIN, H.A. (1950): "The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows", *U.S. Dept. of Agriculture, Soil Conservation Service*, T.B. nr. 1026.
- 10 EINSTEIN, H.A. en N. CHIEN (1954): "Second Approximation to the Solution of the Suspended-Load Theory", *Univ. Calif. Inst. Eng. Res.*, nr. 3.

LITERATUUR (vervolg)

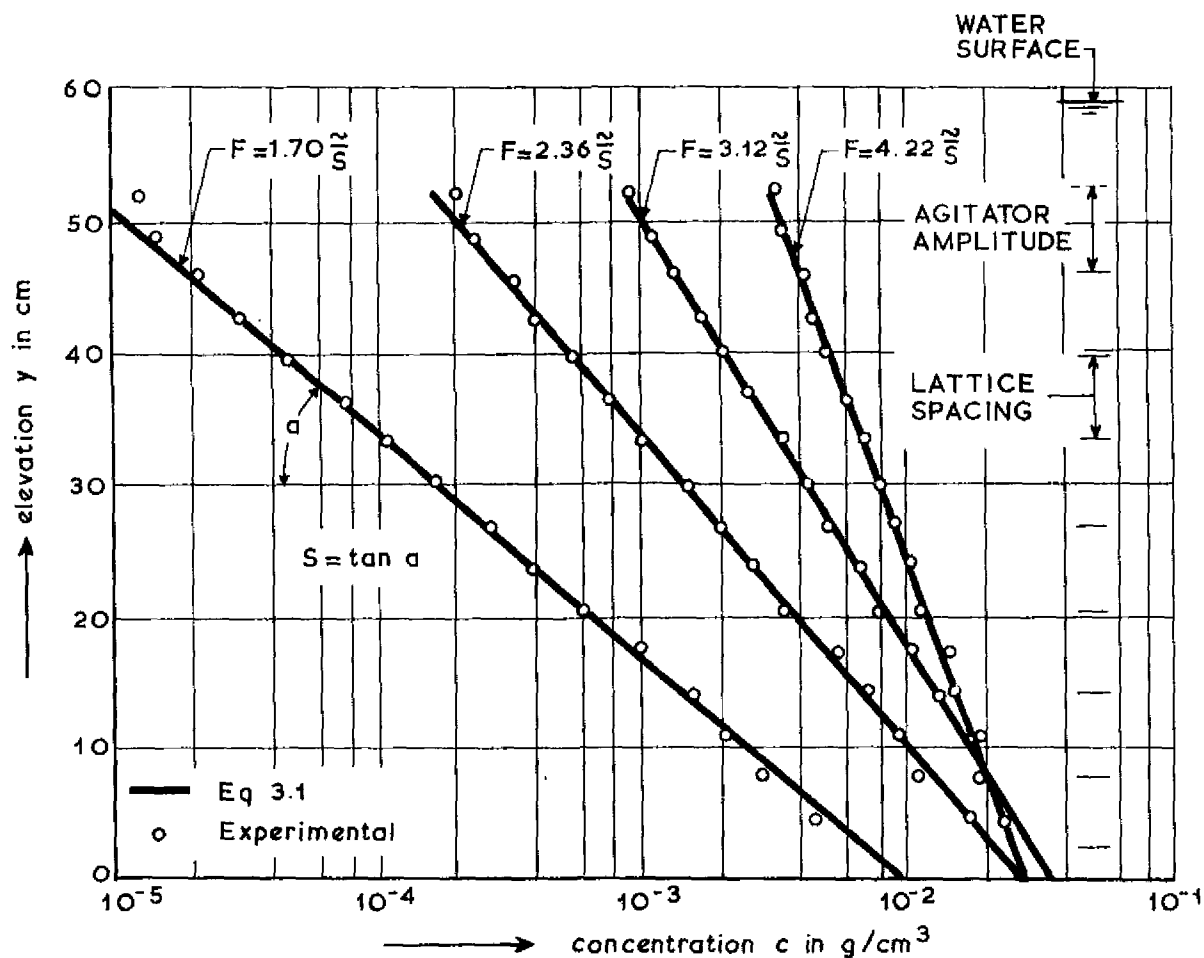
- 11 EINSTEIN, H.A. en N. CHIEN (1955): "Effects of Heavy Sediment Concentration near the Bed on Velocity and Sediment Distribution", M.R.D. Sediment Series nr. 8, Univ. of Calif., Berkeley, California.
- 12 EINSTEIN, H.A. en F.M. ABDEL-AAL (1972): "Einstein Bed-Load Function at High Sediment Rates", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 98 nr. HY1, p. 137-151.
- 13 GRAF, W.H. (1971): "Hydraulics of Sediment Transport", McGraw-Hill, New York, p. 164-202.
- 14 L'HERMITTE, P. (1962): "Influence de la Turbulence sur la Vitesse de Chute des Particules Solides dans les Fluides Pesants", Annales des Ponts et des Chaussées, 132, nr. 3, p. 245-273.
- 15 HJELMFELT, A.T. en C.W. LENAU (1969): "Effect of Concentration on Sediment Distribution", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 95 nr. HY5, p. 1775-1779.
- 16 HUNT, J.N. (1954): "The Turbulent Transport of Suspended Sediment in Open Channels", Proc. Roy. Soc. London, Vol. 224A, p. 322-335.
- 17 HURST, H.E. (1929): "The Suspension of Sand in Water", Proc. Roy. Soc. London, Vol. 157A.
- 18 IPPEN, A.T. (1971): "A New Look at Sedimentation in Turbulent Streams", Journal of the Boston Soc. of Civil Engrs., Vol. 58 nr. 3, p. 131-163.
- 19 IRMAY, S. (1960): "Acceleration and Mean Trajectories in Turbulent Channel Flow", Trans. ASME, Ser. D., J. Basic Eng. 82, nr. 4, p. 961-972.

LITERATUUR (vervolg)

- 20 JOBSON, H.E. (1968): "Vertical Mass Transfer in Open Channel Flow", Open File Report, U.S. Geological Survey, Fort Collins, Colo.
- 21 JOBSON, H.E. en W.W. SAYRE (1970): "Vertical Transfer in Open Channel Flow", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 96 nr. HY3, p. 703-724.
- 22 JOBSON, H.E. en W.W. SAYRE (1970): "Predicting Concentration Profiles in Open Channels", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 96 nr. HY10, p. 1983-1996.
- 23 JOHNE, R. (1965): "Einfluss der Konzentration einer monodispersion Suspension auf die Sinkgeschwindigkeit ihrer Teilchen", Diss. Karlsruhe.
- 24 KASKAS, A.A. (1970): "Schwarmgeschwindigkeiten in Mehrkornsuspension am Beispiel der Sedimentation", Diss. Techn. Univ. Berlin.
- 25 KAYE, B.N. en R.P. BOARDMAN (1962): "Cluster Formation in Dilute Suspensions", Symp. Interaction between Fluids and Particles, p A17, Inst. Chem. Engrs.
- 26 McNOWN, J.S. en P.N. LIN (1952): "Sediment Concentration and Fall Velocity", Proc. 2nd. Midwestern Conf. Fluid Mech. Ohio State Univ., p. 401-411.
- 27 McNOWN, J.S. en anderen: "Influence of Boundary Proximity on the Drag of Spheres", State Univ. of Iowa, Eng. Reprint nr. 81.
- 28 OLIVER, D.R. (1961): "The Sedimentation of Suspension of Closely-sized Spherical Particles", Chemical Engng Science 15, p. 230-242.
- 29 RICHARDSON, Y.F. en W.N. ZAKI (1954): "Sedimentation and Fluidization part I", Trans. Inst. Chem. Eng. 32, p. 35-53.

LITERATUUR (vervolg)

- 30 ROUSE, H. (1938): "Experiments on the Mechanics of Sediment Suspension", Proc. 5th. Intern. Congr. Appli. Mech., Cambridge, Mass.
- 31 SINGAMSETTI, S.R. (1966): "Diffusion of Sediment in a Submerged Jet, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 92 nr. HY2, p. 153-168.
- 32 STENHOUSE, J.I.T. (1967): "Settling of Particles in Dilute Suspensions. Filtration and Separation", Vol. 4 nr. 5, p. 477-482.
- 33 Task Committee (1963): "Sediment Transportation Mechanics; Suspension of Sediment", Progress Report Task Committee on Preparation of Sedimentation Manual, Committee on Sedimentation, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 89 nr. HY5, p. 45-76.
- 34 VANONI, V.A. (1946): "Transportation of Suspended Sediment by Water", Trans. ASCE, Vol. 111.



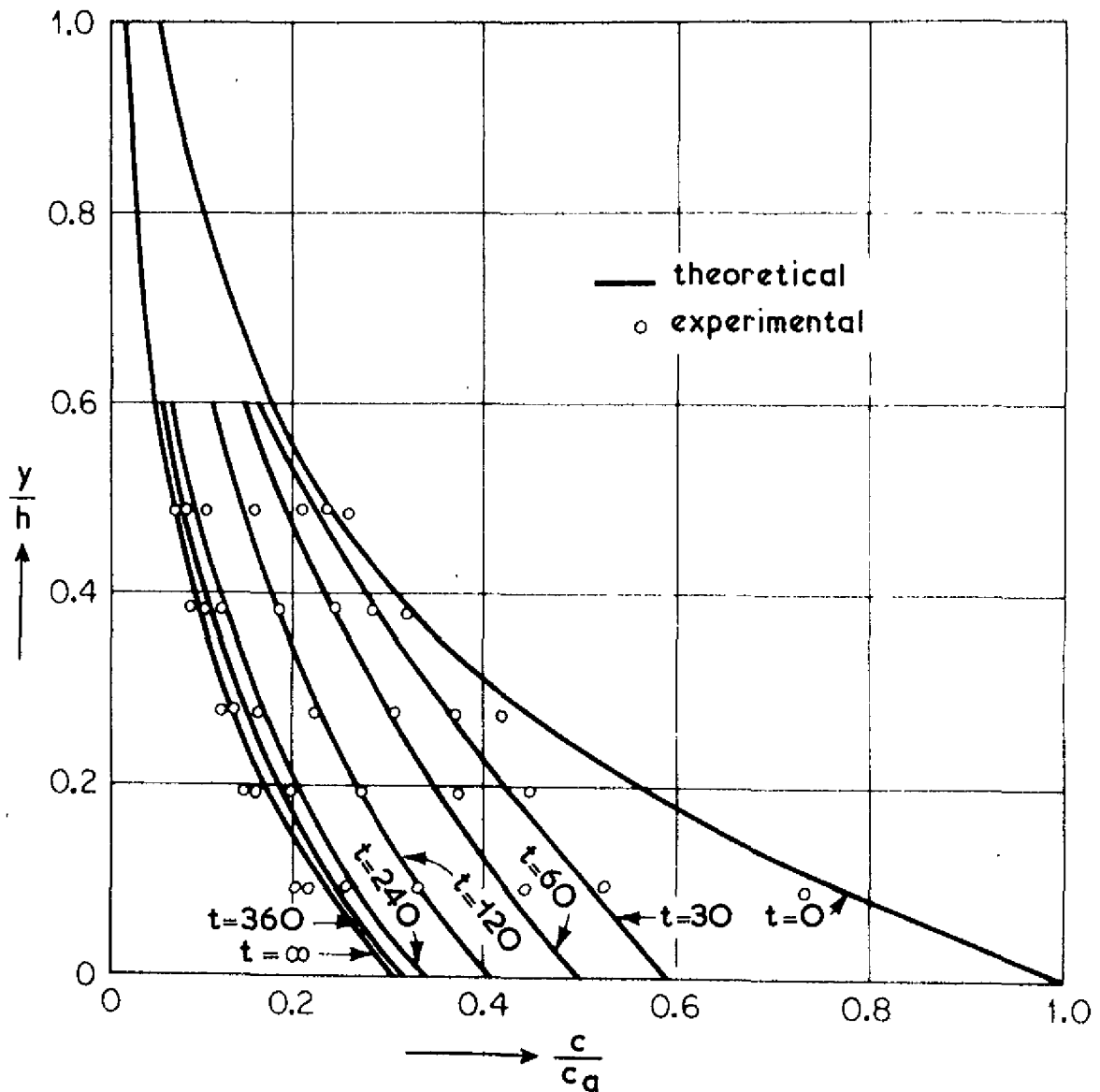
$F =$ frequentie oscillerend raamwerk
 $D_{50} = 125 \mu$

CONCENTRATIEVERDELING BIJ CONSTATE
 UITWISSELINGS-COEFFICIENT VAN SEDIMENT
 VOLGENS ROUSE

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R. 783

FIG. 1

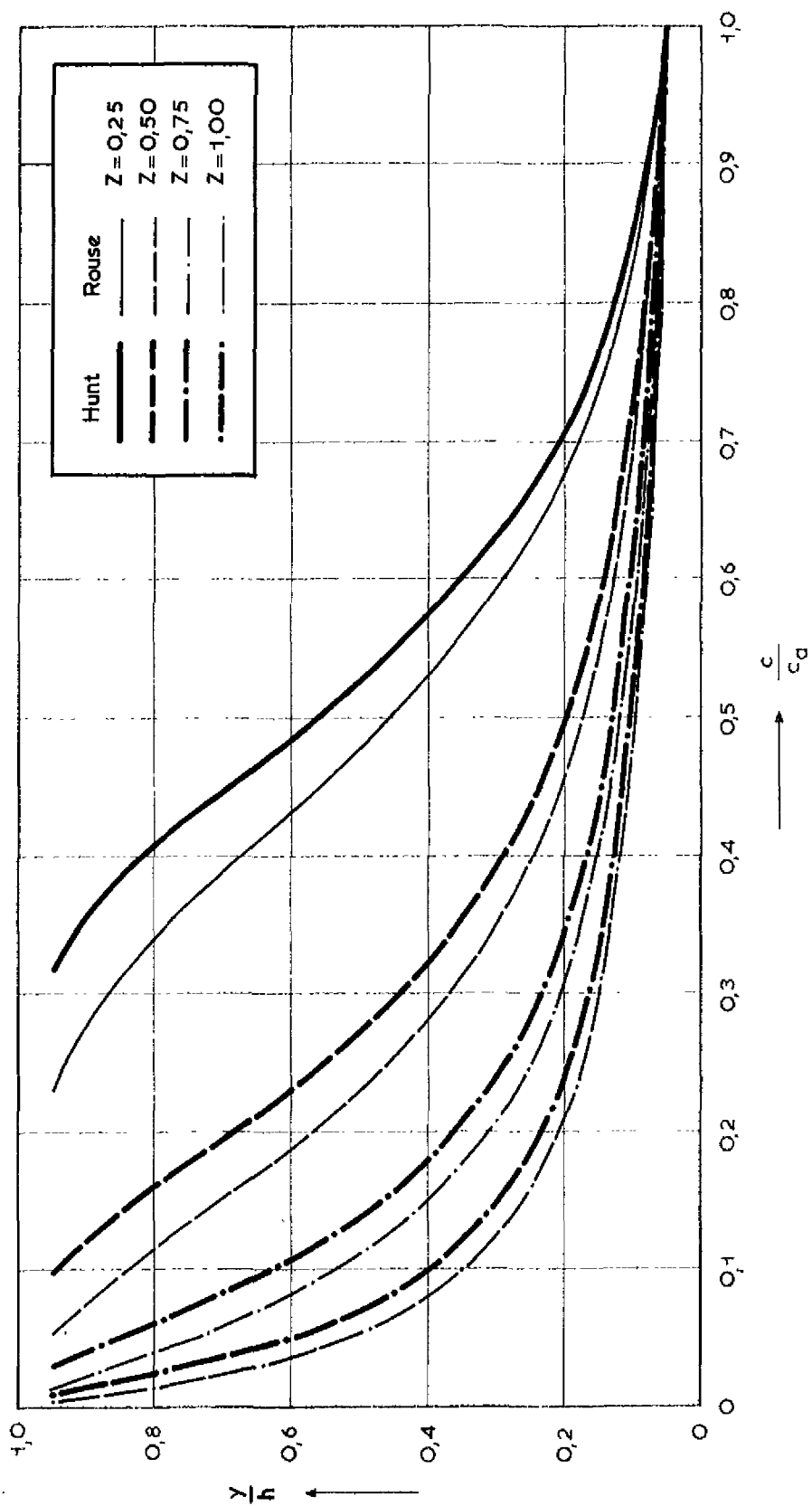


t = tijd na aanvang proef in s

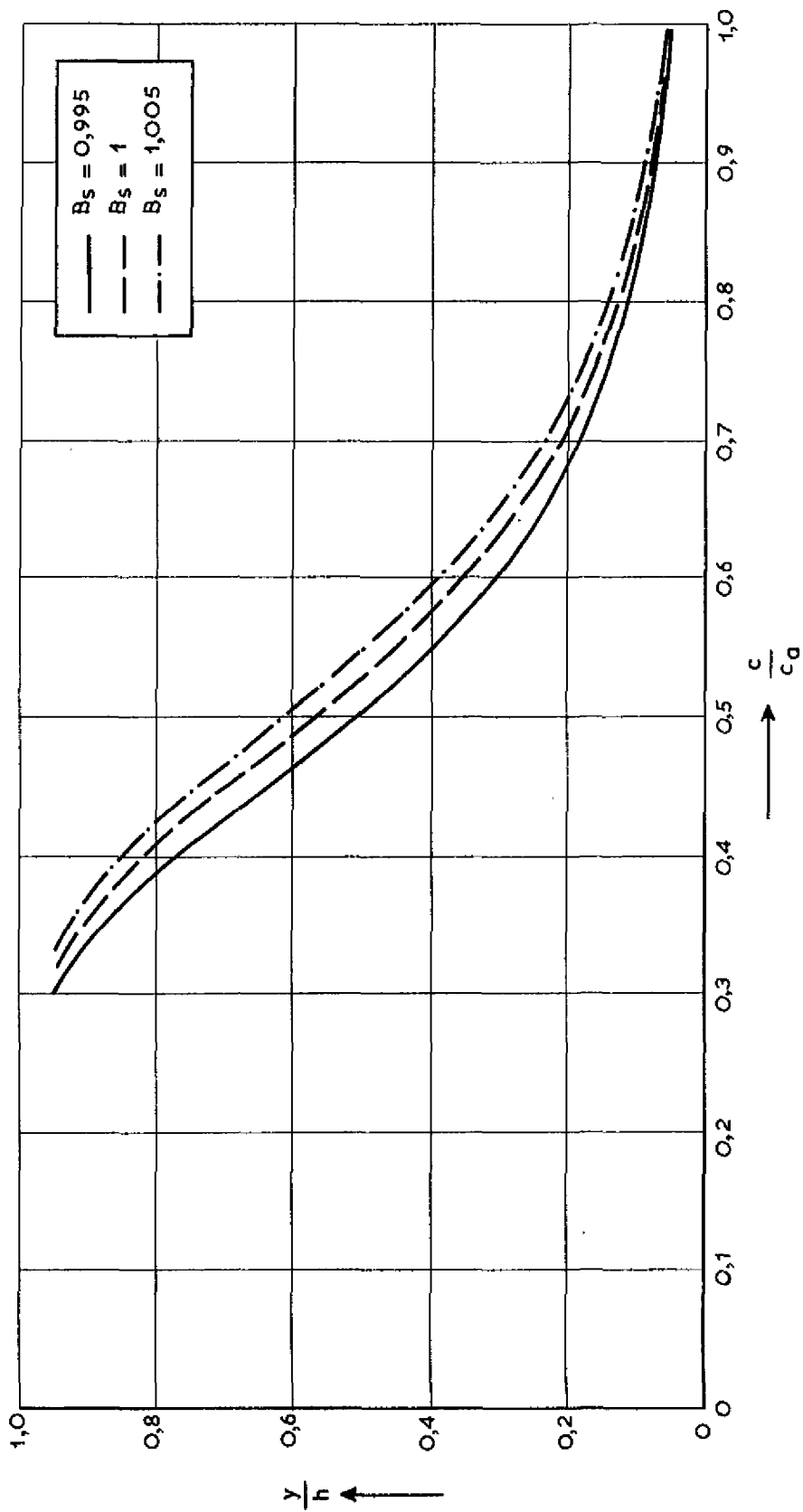
$$\frac{W}{\varepsilon_s} = 0,0638 \text{ cm}^{-1}$$

$$h = 45,2 \text{ cm}$$

VERANDERING VAN CONCENTRATIE BIJ CONSTANTE
 UITWISSELINGS-COEFFICIENT VAN SEDIMENT EN
 CONSTANTE OPNAME VOLGENS DOBBINS



VERGELIJKING CONCENTRATIEVERDELINGEN
VOLGENS HUNT EN ROUSE



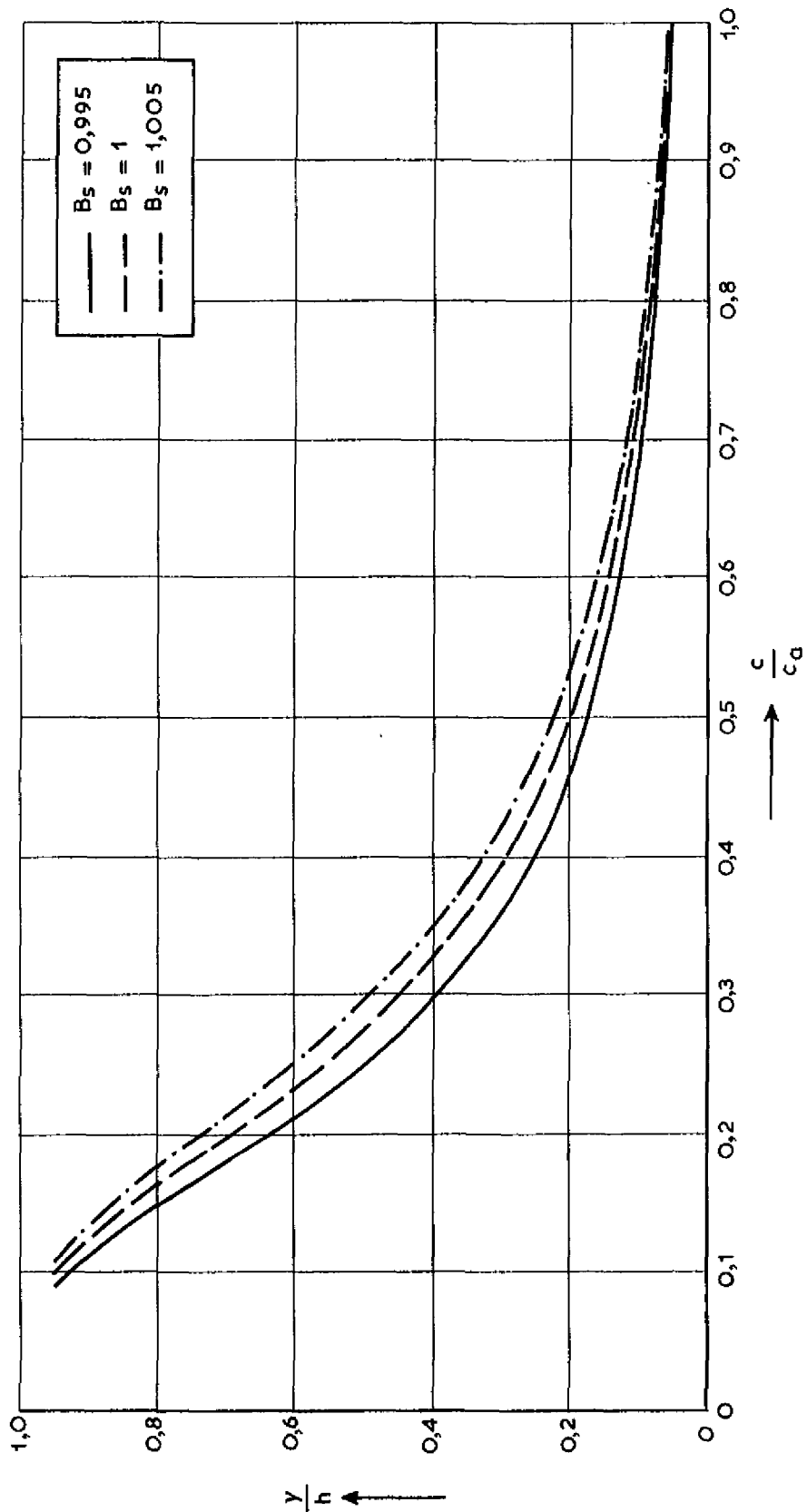
INVLOED CONSTATE B_s OP CONCENTRATIE -
VERDELING VOLGENS HUNT

$Z = 0,25$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R. 783

FIG. 4



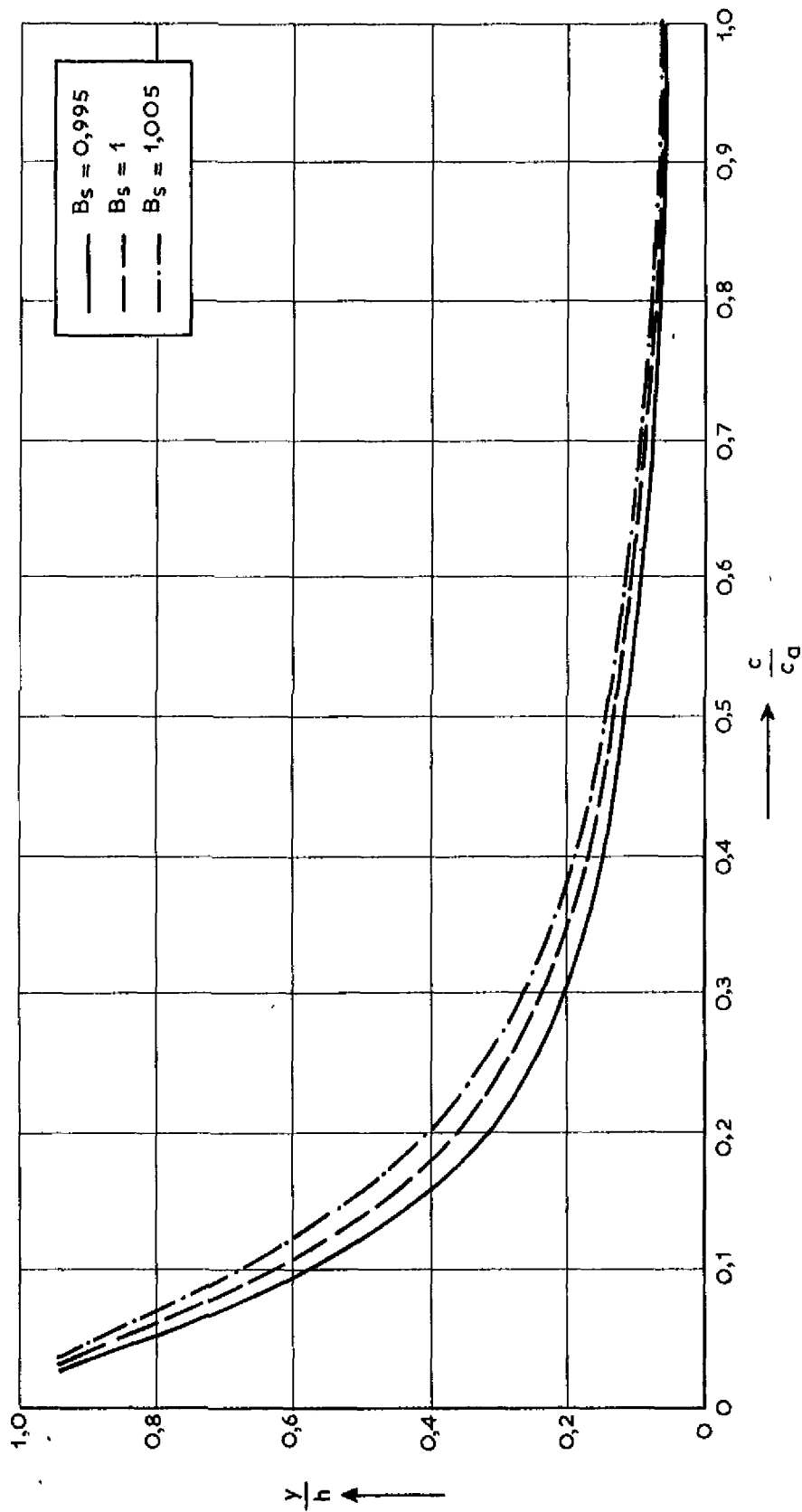
INVLOED CONSTATE B_s OP CONCENTRATIE -
VERDELING VOLGENS HUNT

$Z = 0,50$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R. 783

FIG. 5



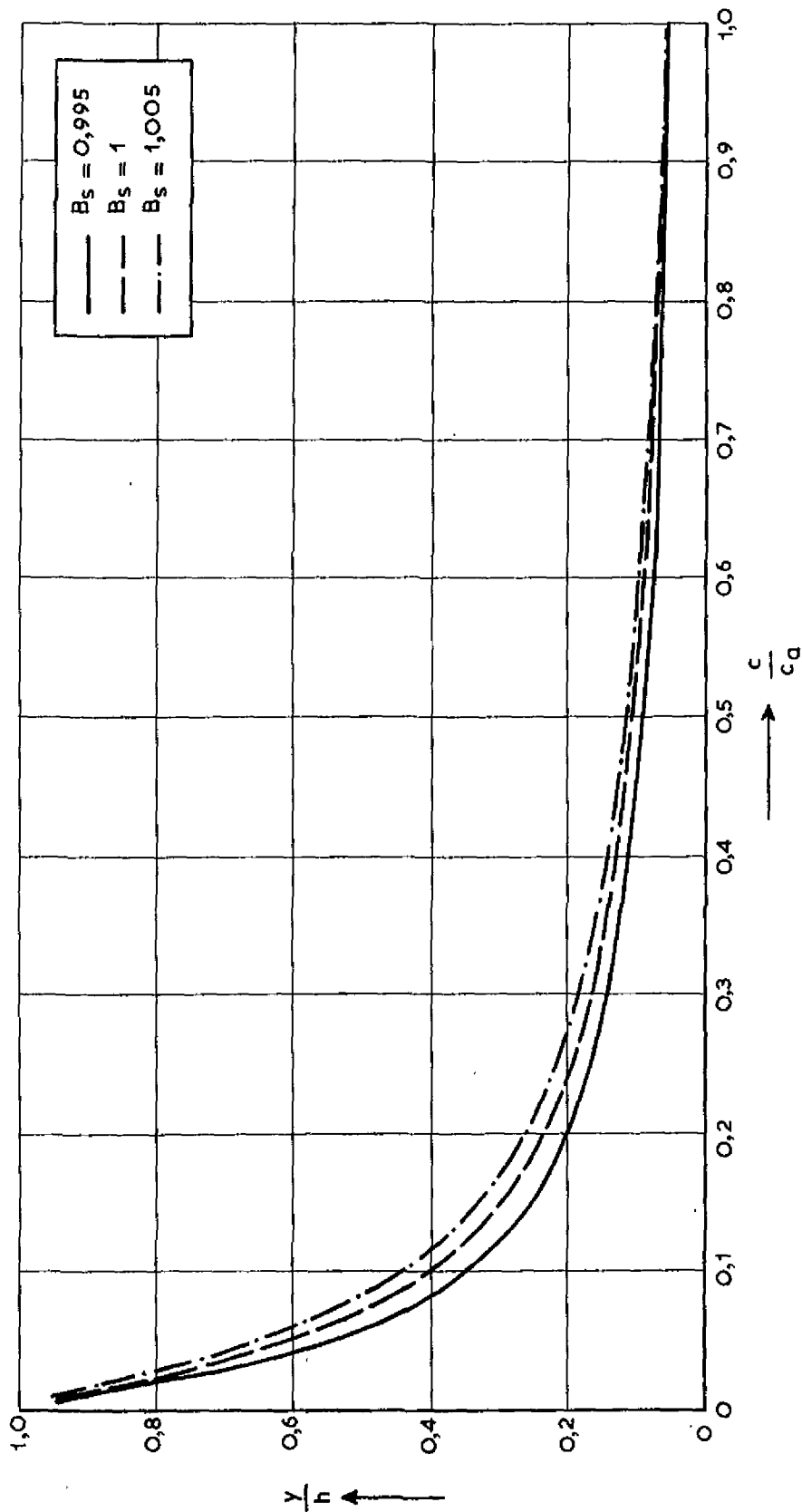
INVLOED CONSTATE B_s OP CONCENTRATIE -
VERDELING VOLGENS HUNT

$z = 0,75$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R. 783

FIG. 6



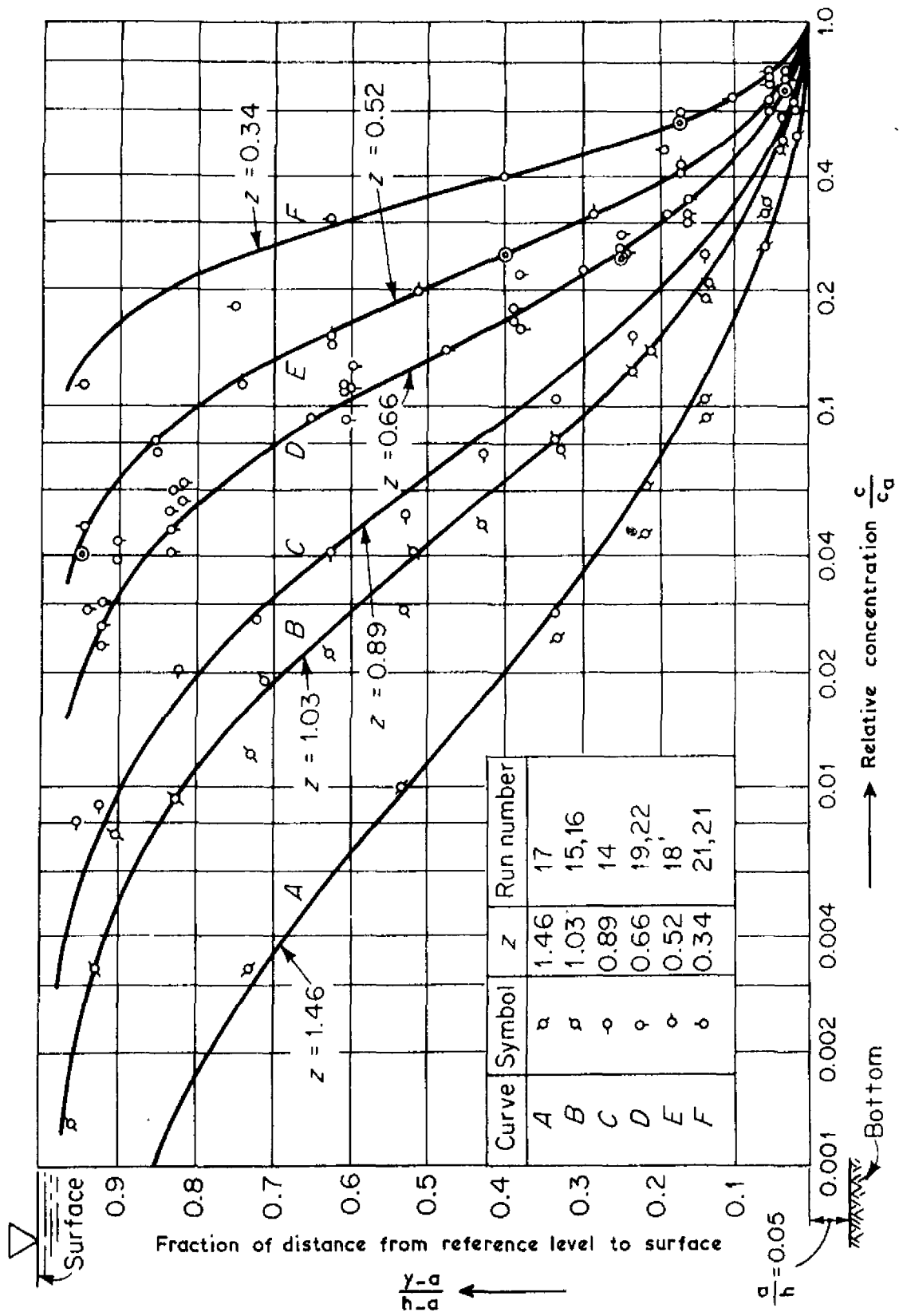
INVLOED CONSTATE B_s OP CONCENTRATIE -
VERDELING VOLGENS HUNT

$Z = 1,00$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R. 783

FIG. 7

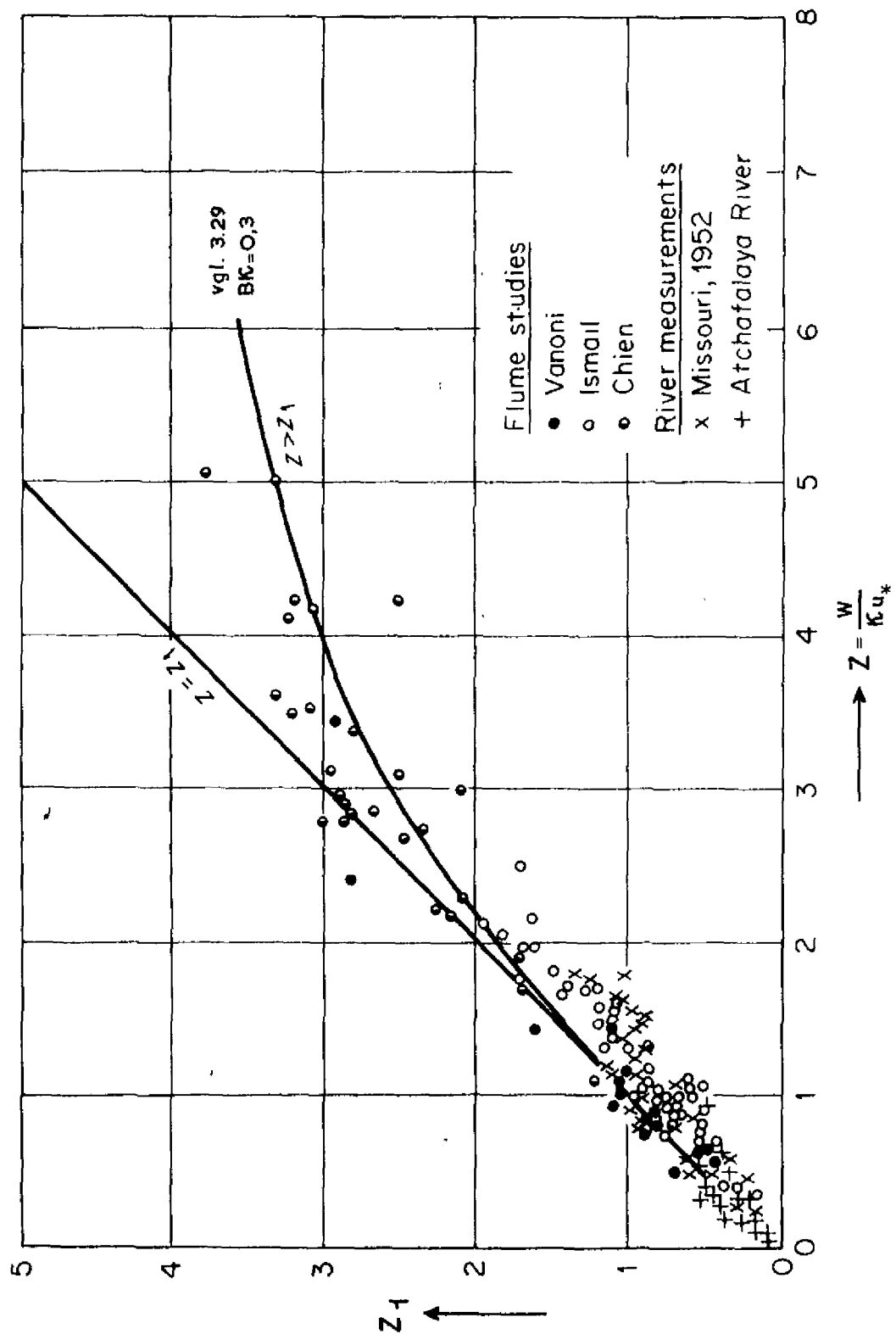


CONCENTRATIEVERDELING VOLGENS VANONI

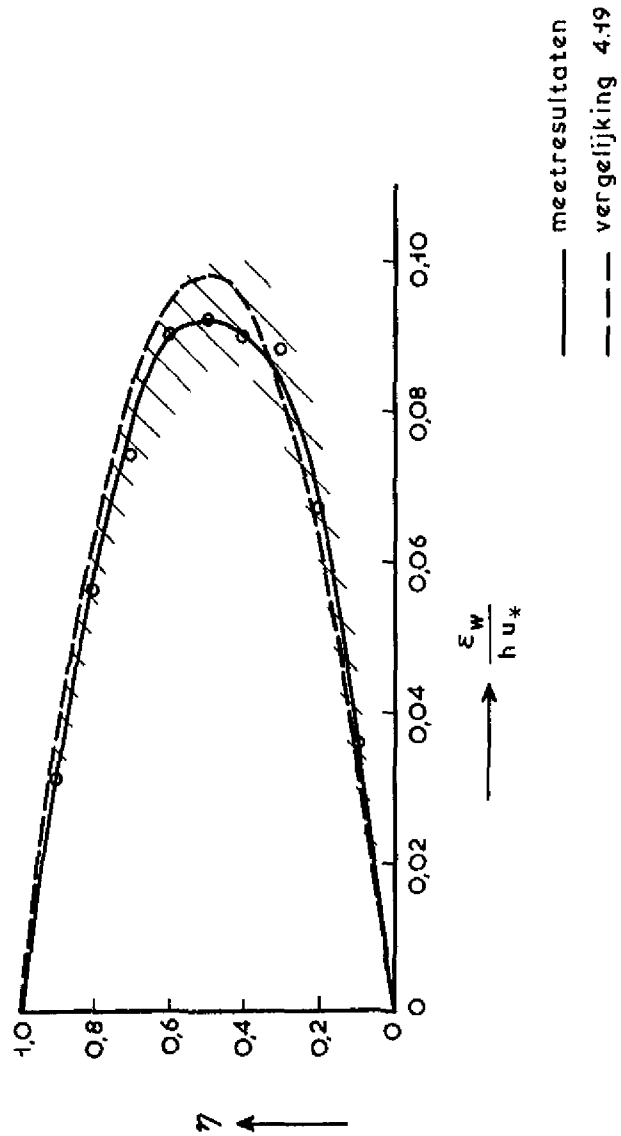
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R. 783

FIG. 8



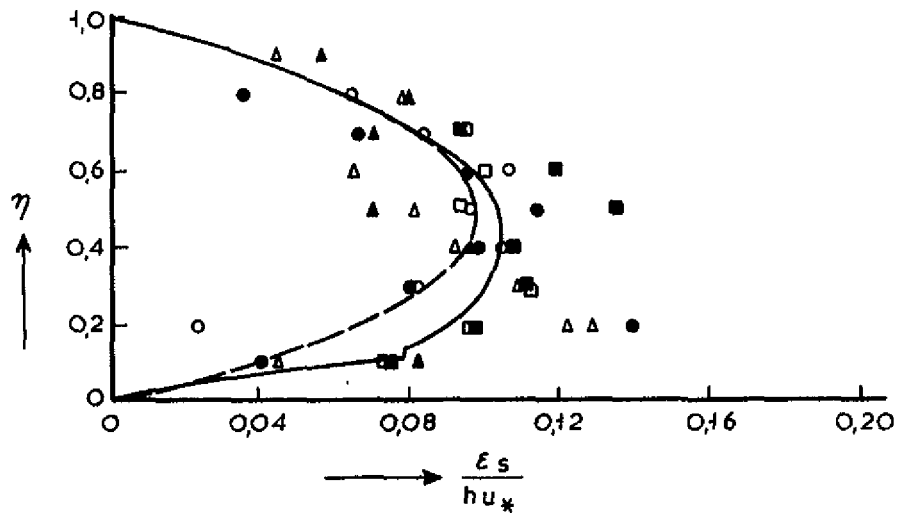
RELATIE TUSSEN Z_1 EN Z VOLGENS CHIEN



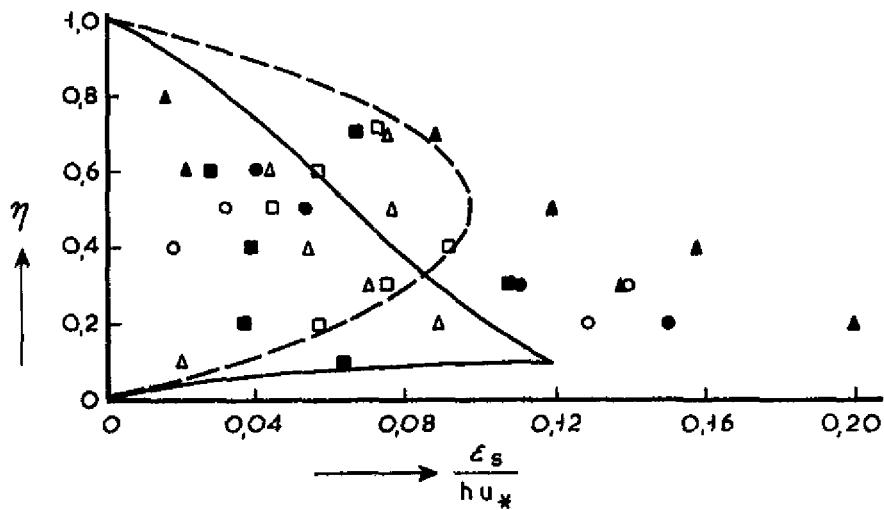
VERTICALE VERDELING VAN DE UITWISSELINGS-
 COEFFICIENT VAN WATER VOLGENS JOBSON
 EN SAYRE

STROOMSNELHEID A B C
 kleinste kwadraten ○ △ □
 gemiddelden ● ▲ ■

————— vergelijking 4.20
 - - - - - vergelijking 4.19

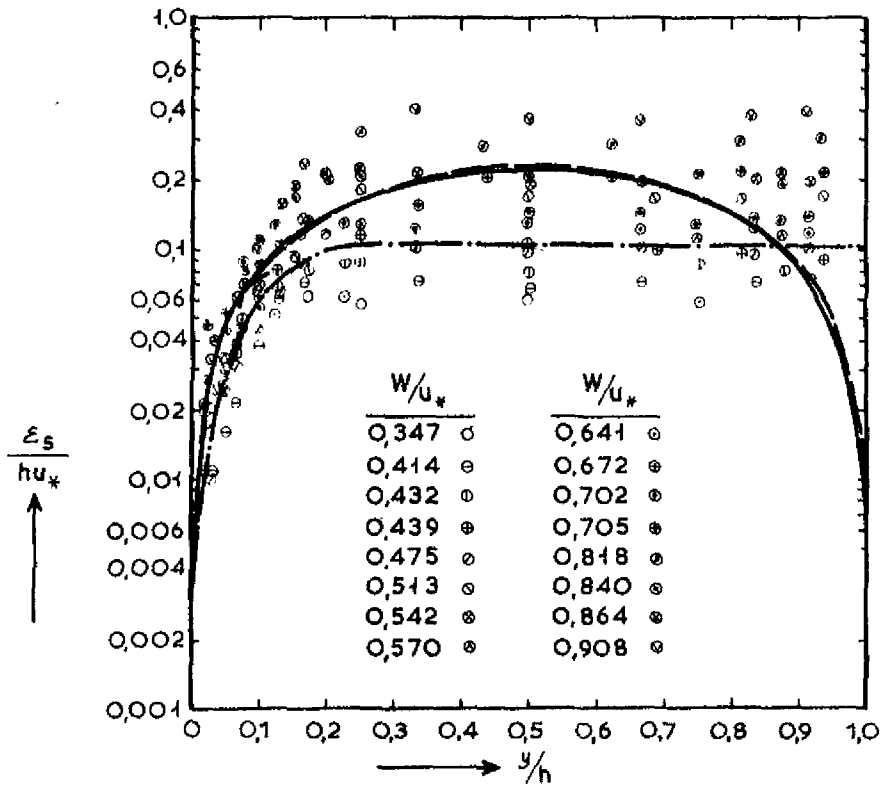


A. fijn materiaal

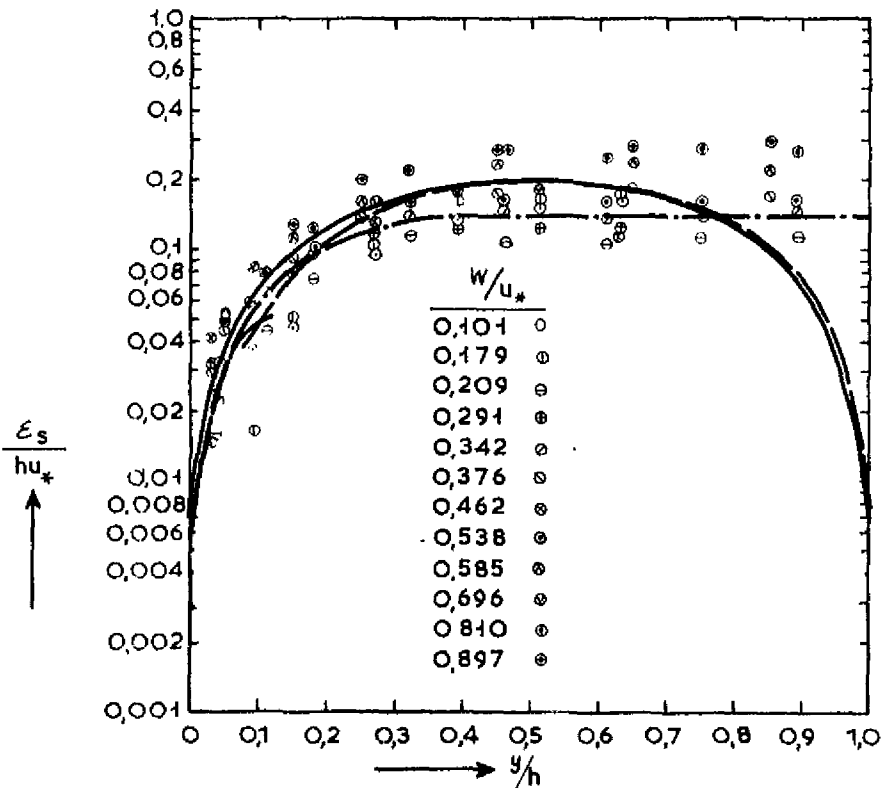


B. grof materiaal

VERTICALE VERDELING VAN DE UITWISSELINGS-
 COEFFICIENT VAN SEDIMENT VOLGENS JOBSON
 EN SAYRE



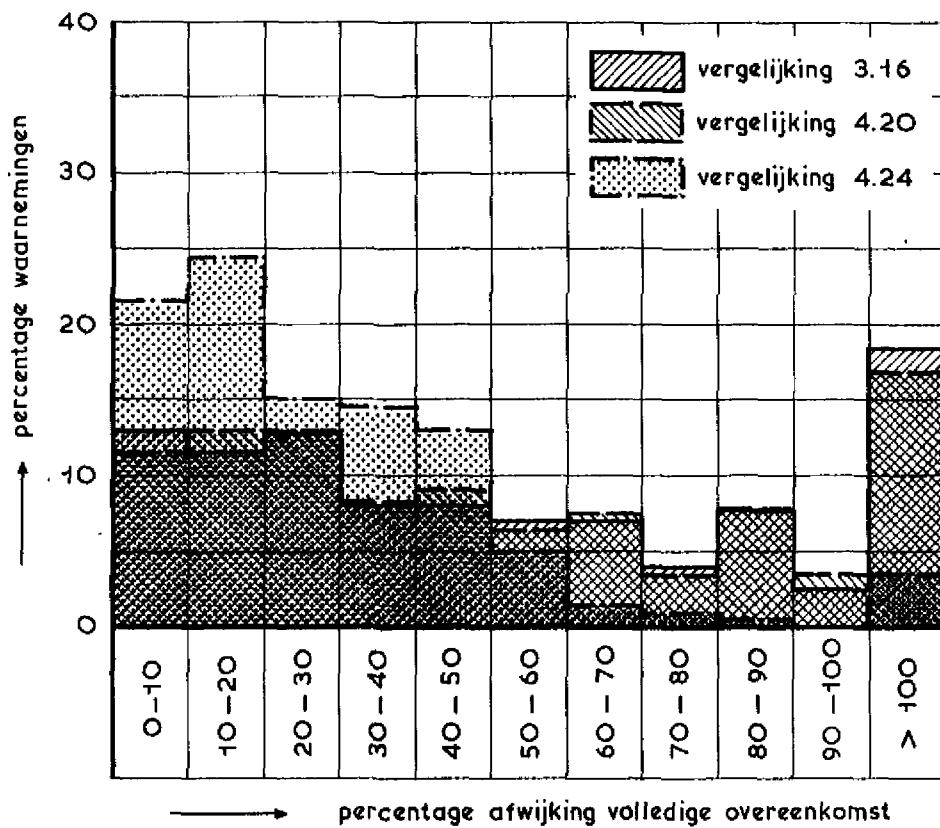
A. Laboratoriumproeven door N.L. Coleman



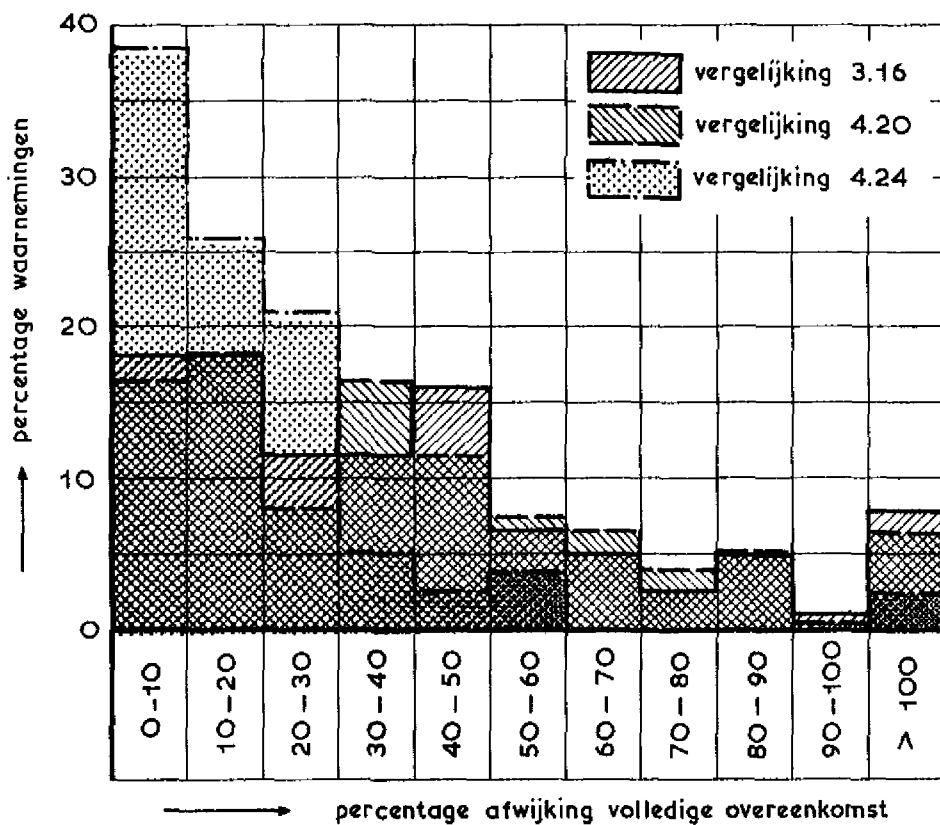
B. Metingen van Anderson in de Enoree river

VERTICALE VERDELING VAN DE UITWISSELINGS-
COEFFICIENT VAN SEDIMENT VOLGENS COLEMAN

— vergelijking 3.16
 — vergelijking 4.20
 - - - vergelijking 4.24

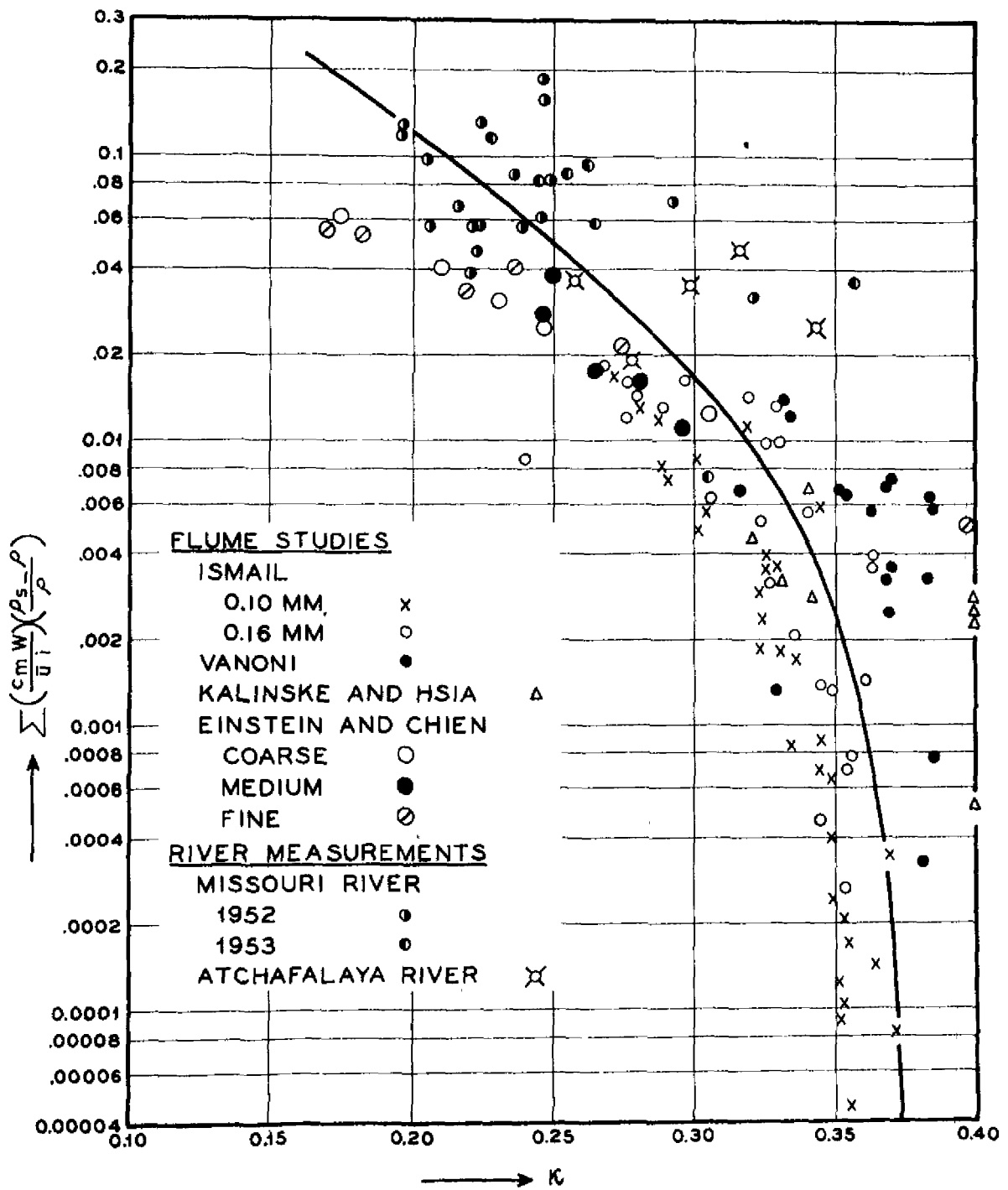


A. Laboratoriumproeven door N.L. Coleman (122 waarnemingen)

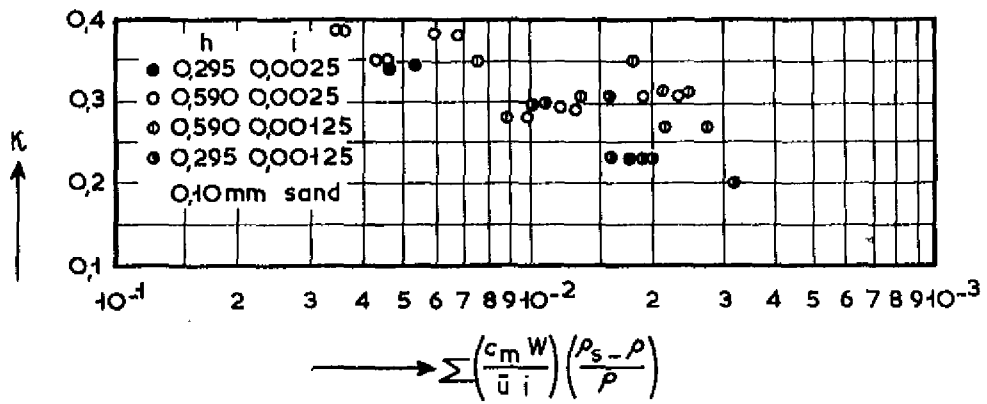


B. Metingen van Anderson in de Enoree river (78 waarnemingen)

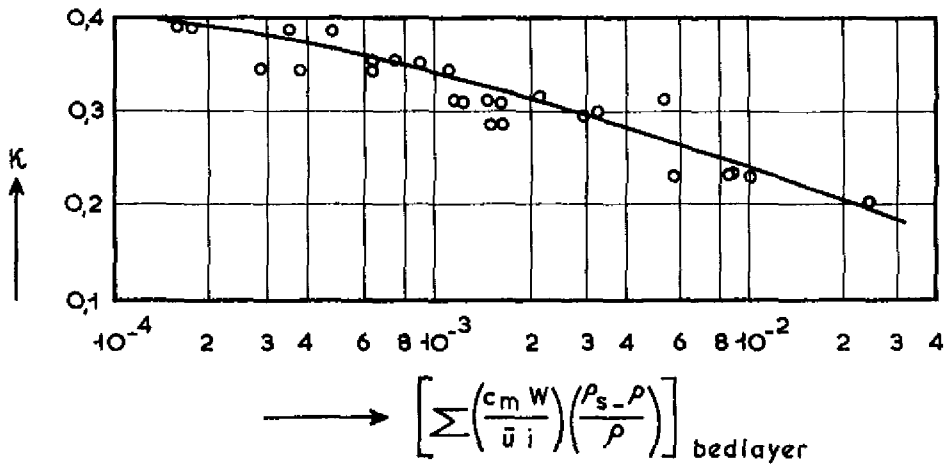
VERSCHIL GEMETEN EN BEREKENDE WAARDE
 VOOR VERSCHILLENDE UITDRUKKINGEN VAN DE
 UITWISSELINGSCOËFFICIËNT VAN SEDIMENT



INVLOED SEDIMENT OP CONSTATE VAN VON
KARMAN VOLGENS EINSTEIN EN NING CHIEN

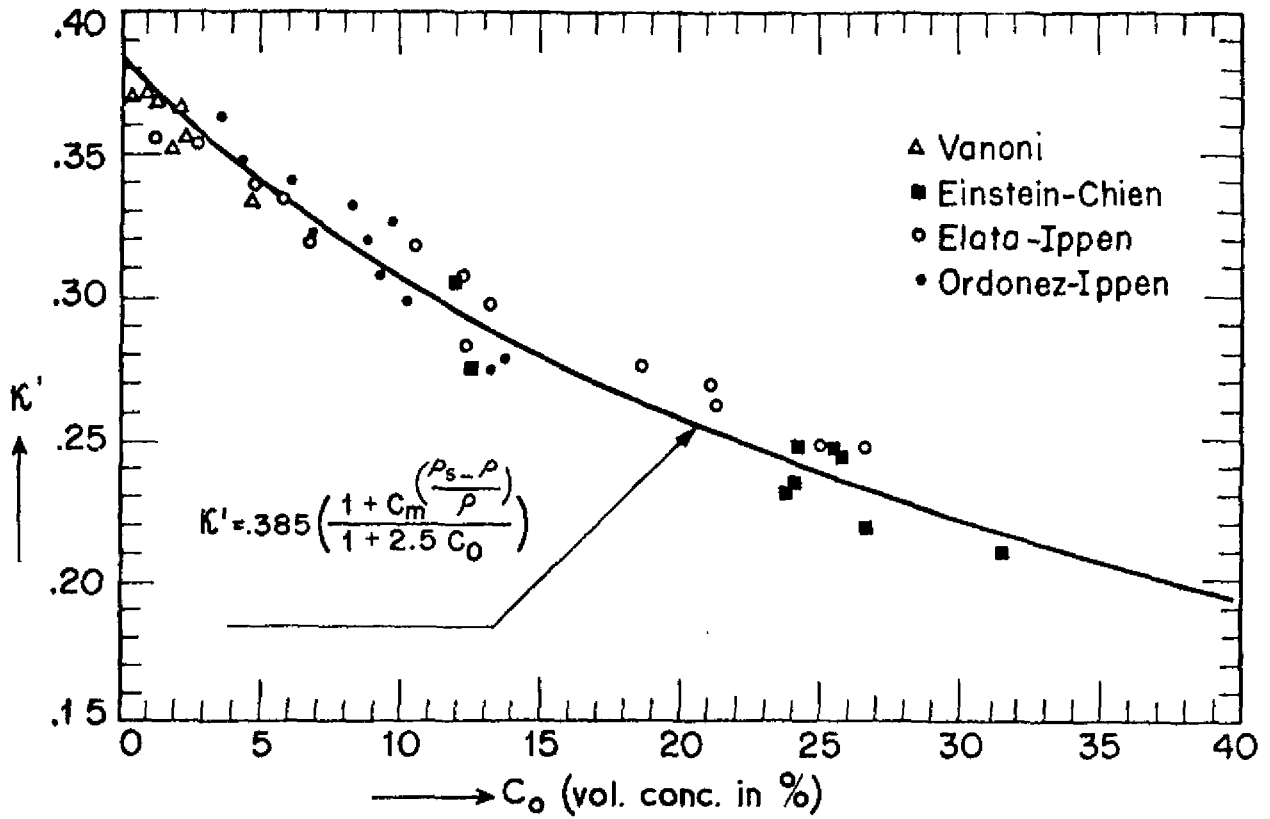


A. over de gehele hoogte



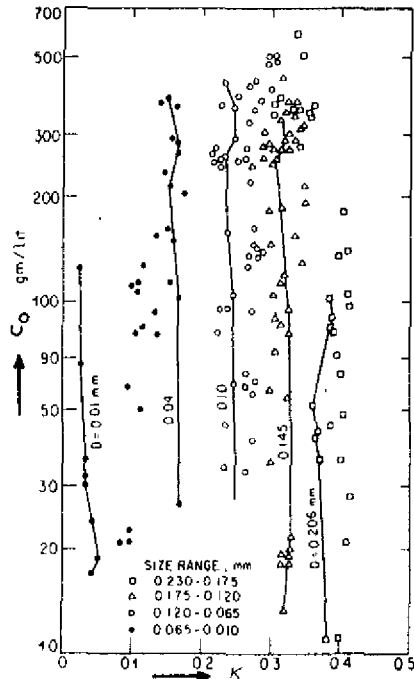
B. over een laag bij de bodem van 0,004 h tot 0,04 h

INVLOED SEDIMENT OP CONSTATE VAN VON
KARMAN VOLGENS VANONI

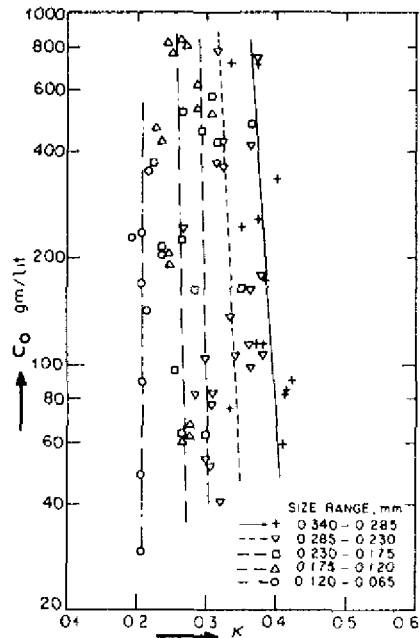


INVLOED SEDIMENT OP CONSTATE VAN VON
KARMAN VOLGENS IPPEN

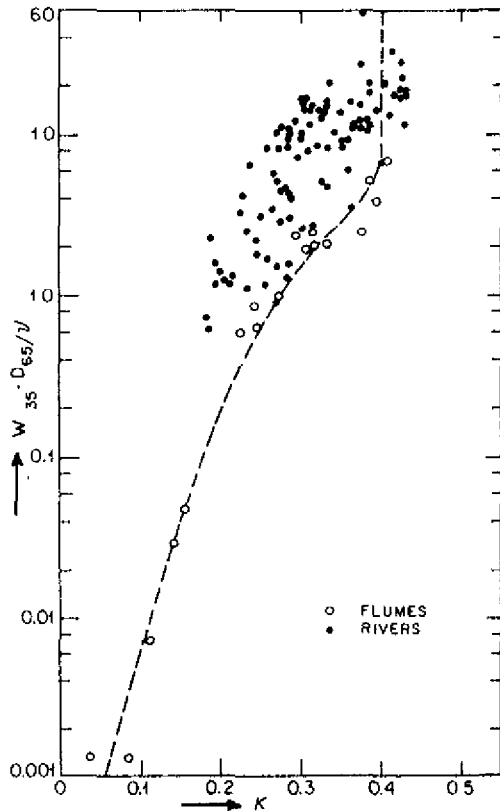
De coëfficiënt van VON KARMAN (κ) als functie van de concentratie (C_0) in de bodemlaag



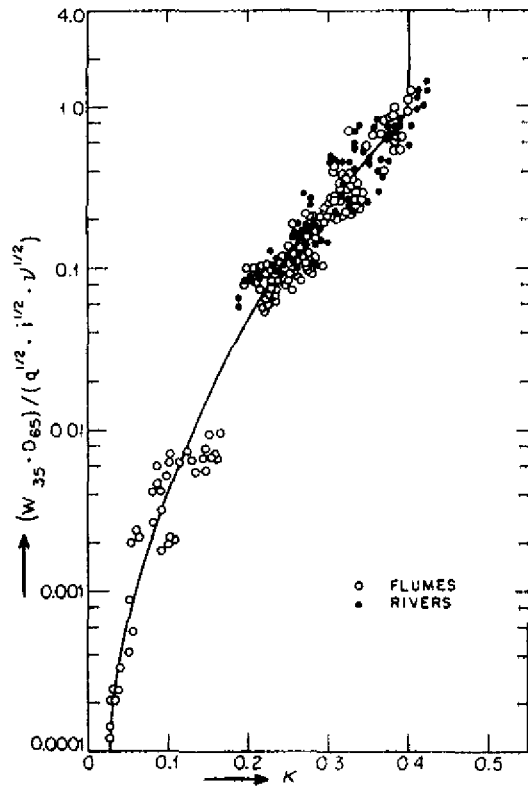
A. voor goten



B. voor rivieren

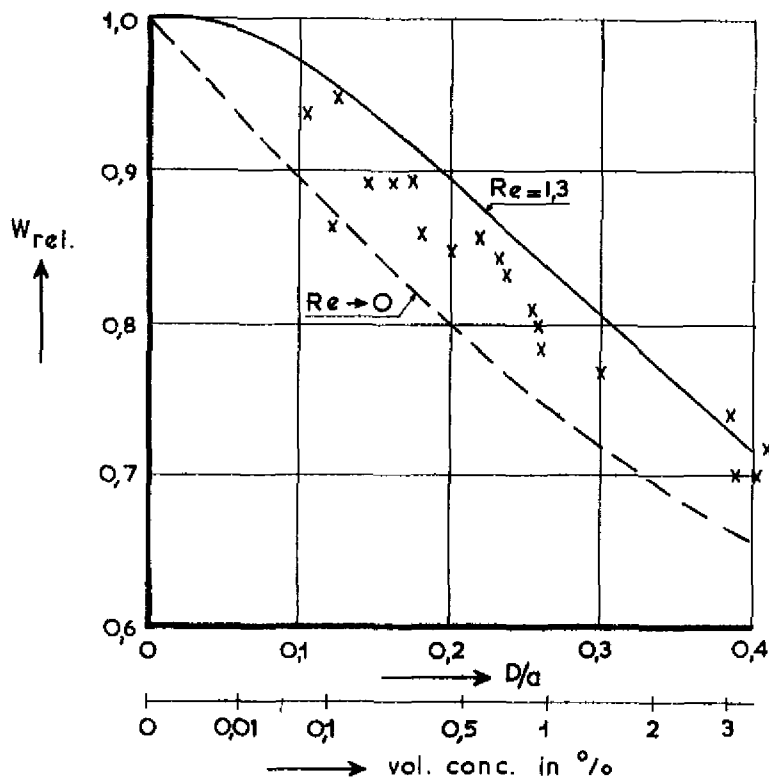


C. κ als functie van $\frac{W_{35} D_{65}}{\nu}$



D. κ als functie $\frac{W_{35} D_{65}}{q^{1/2} \nu^{1/2}}$

INVLOED SEDIMENT OP CONSTATE VAN VON KARMAN VOLGENS EINSTEIN EN ABDEL-AAL



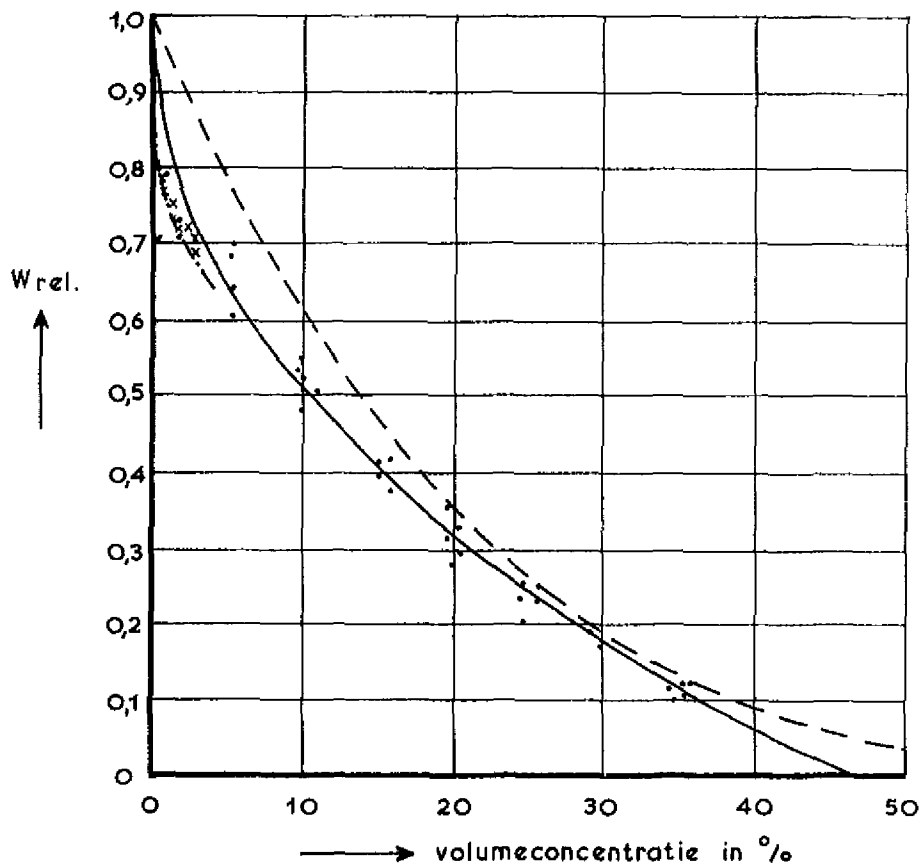
x = metingen
a = afstand deeltjes
D = diameter deeltjes

INVLOED CONCENTRATIE OP VALSNELHEID
VOLGENS Mc NOWN EN LIN. Re KLEIN

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R. 783

FIG. 18



- Oliver
- · - · McNown en Lin
- - - Richardson en Zaki
- x proeven van McNown en Lin
- . proeven van Oliver

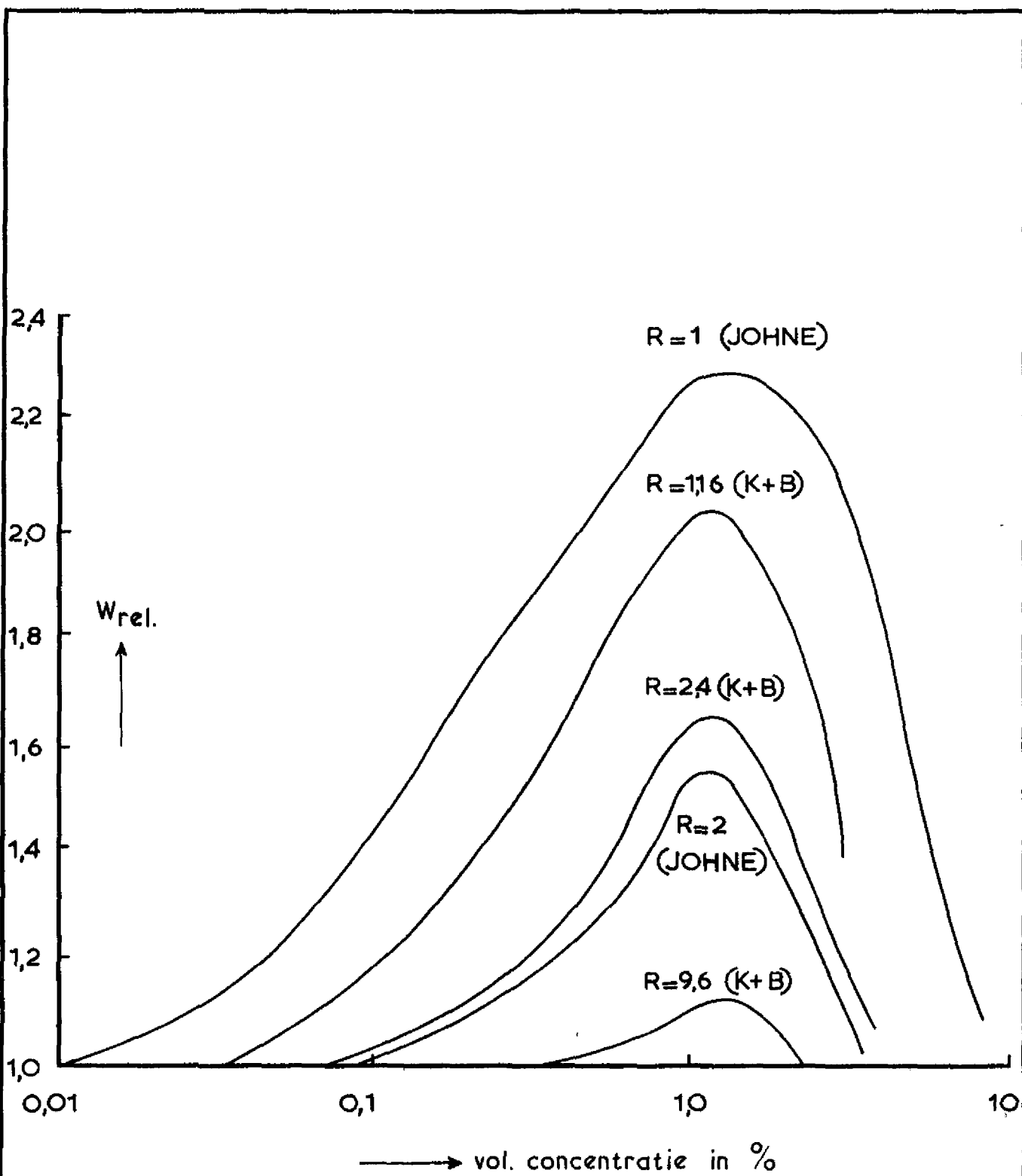
INVLOED CONCENTRATIE OP VALSNELHEID

Re KLEIN

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R. 783

FIG. 19

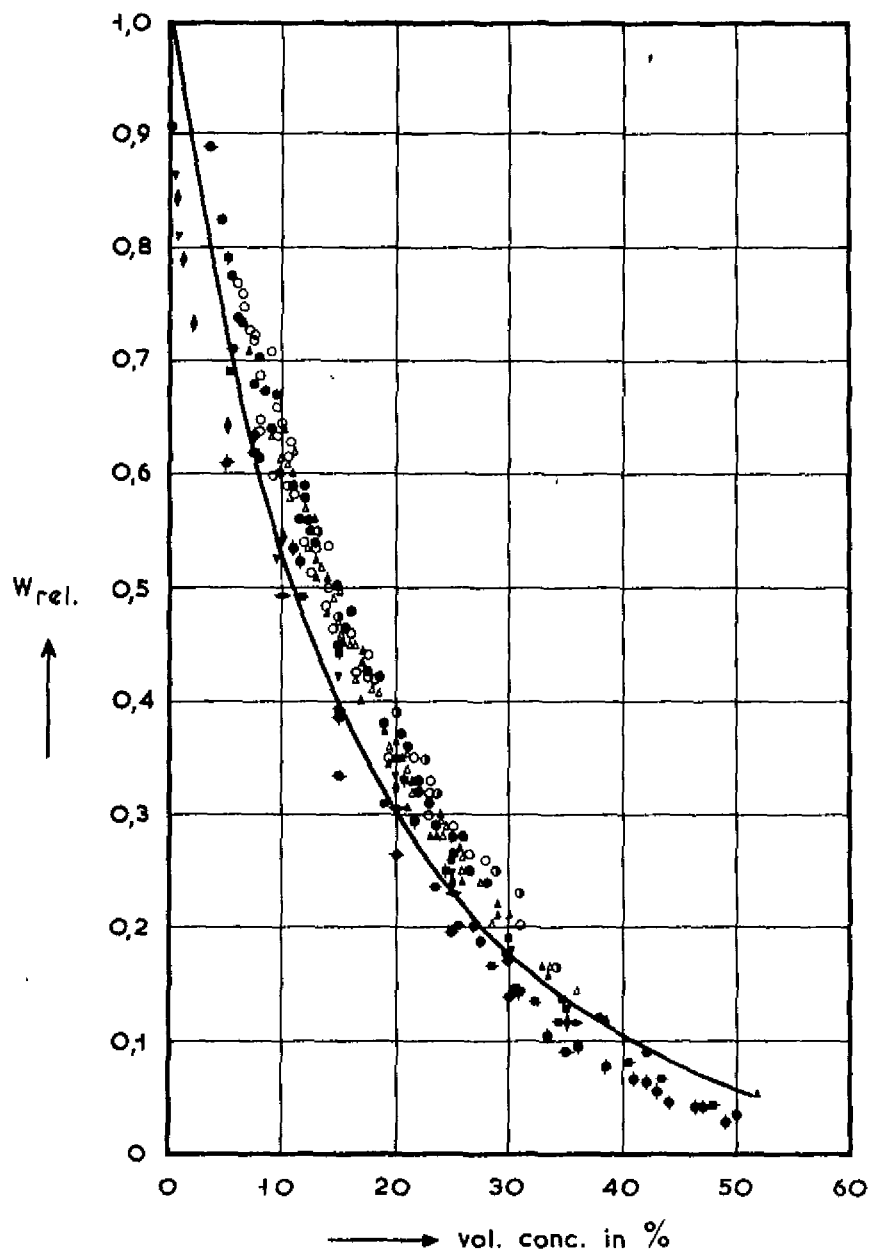


INVLOED CONCENTRATIE OP VALSNELHEID
VOLGENS STENHOUSE

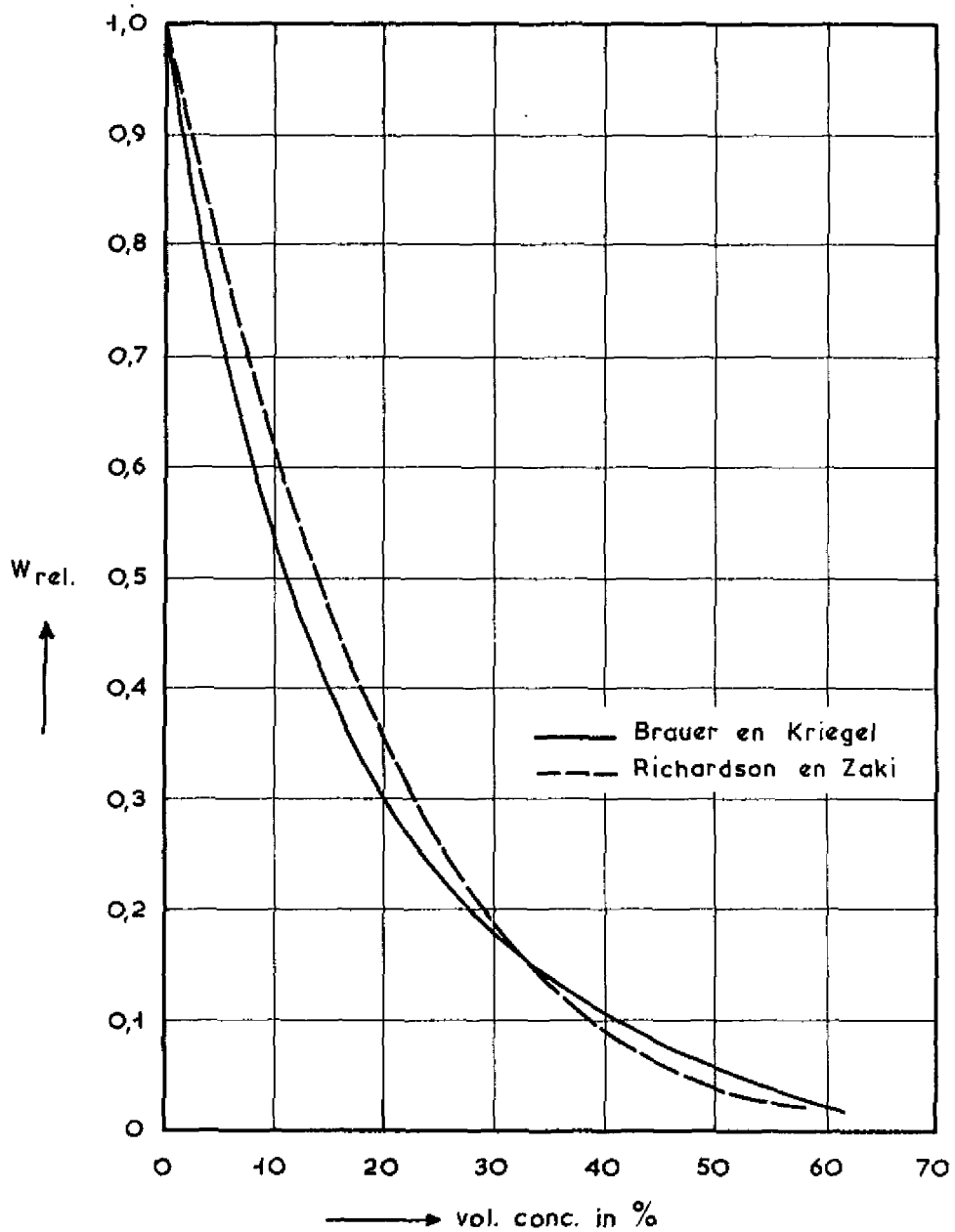
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R. 783

FIG. 20



INVLOED CONCENTRATIE OP VALSNELHEID
VOLGENS BRAUER EN KRIEDEL



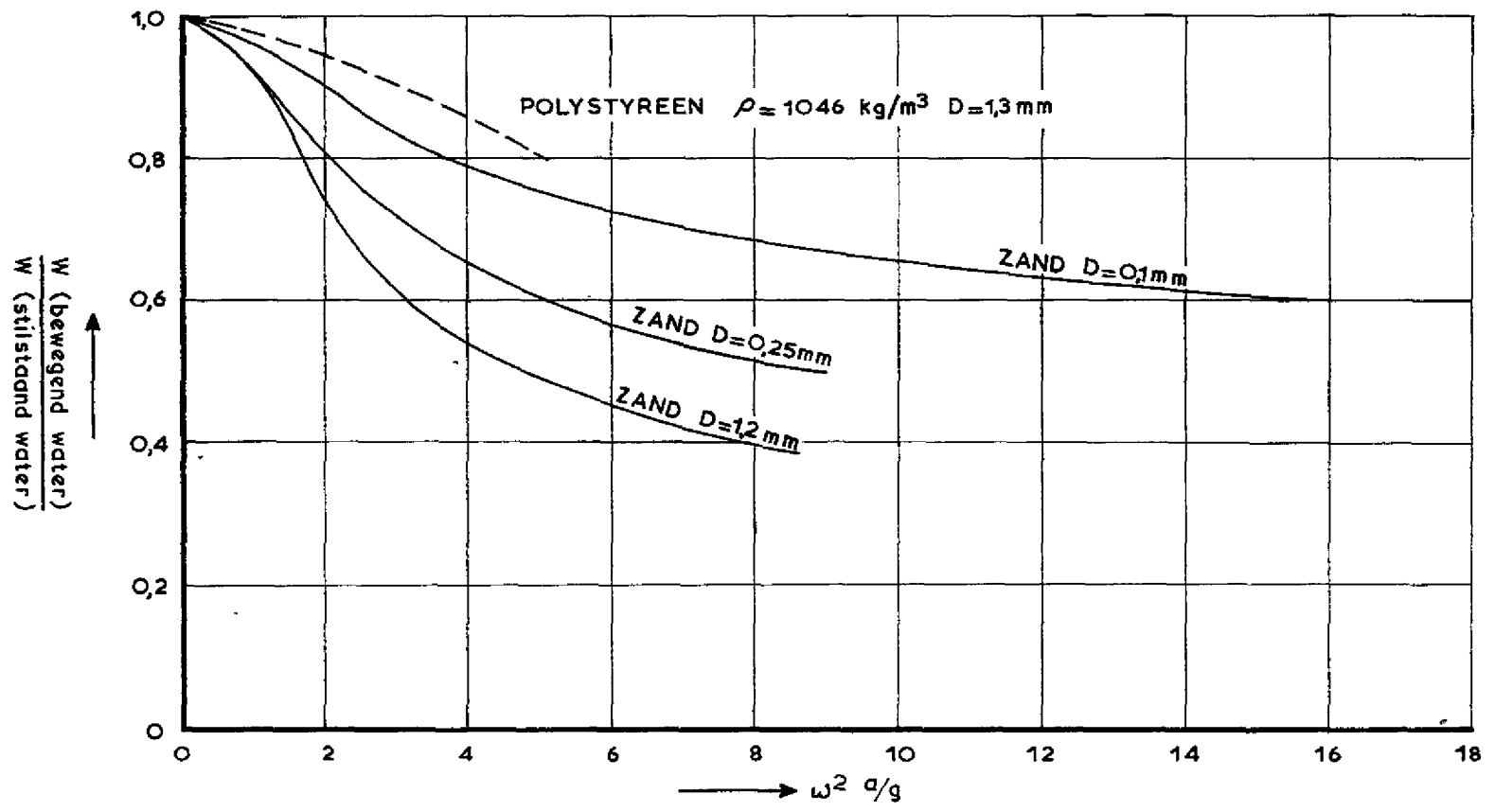
VERGELIJKING THEORETISCHE FORMULE VAN
BRAUER EN KRIEGEL MET EMPIRISCHE
FORMULE VAN RICHARDSON EN ZAKI

INVLOED TURBULENTIE OP VALSNELHEID

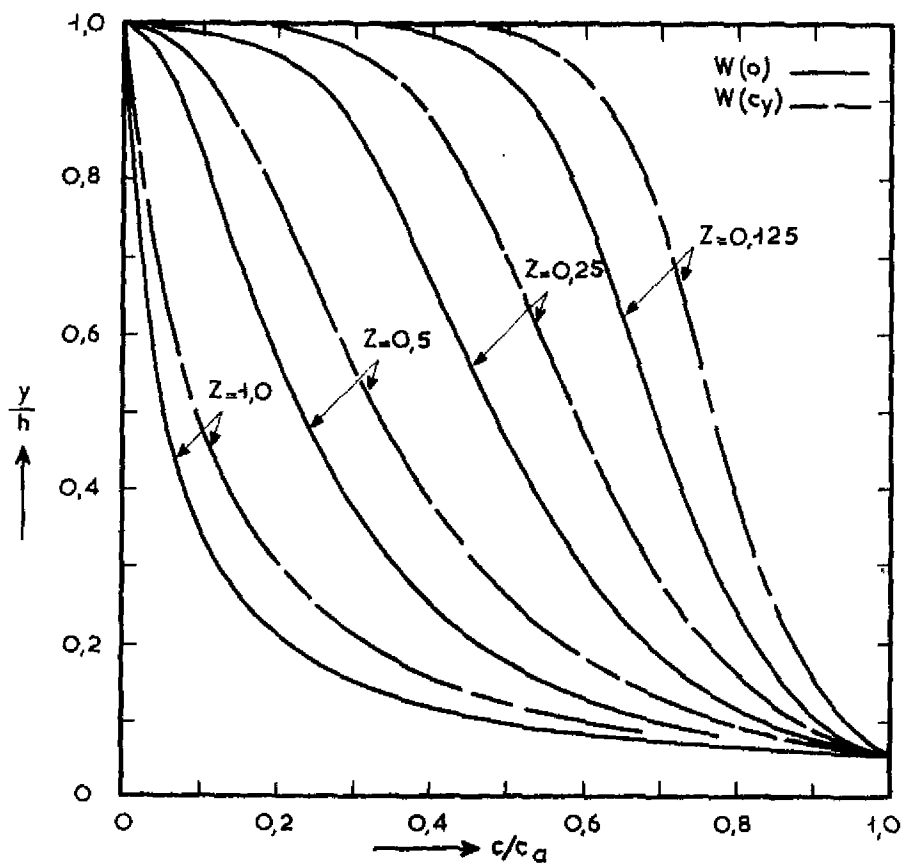
WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

R. 783

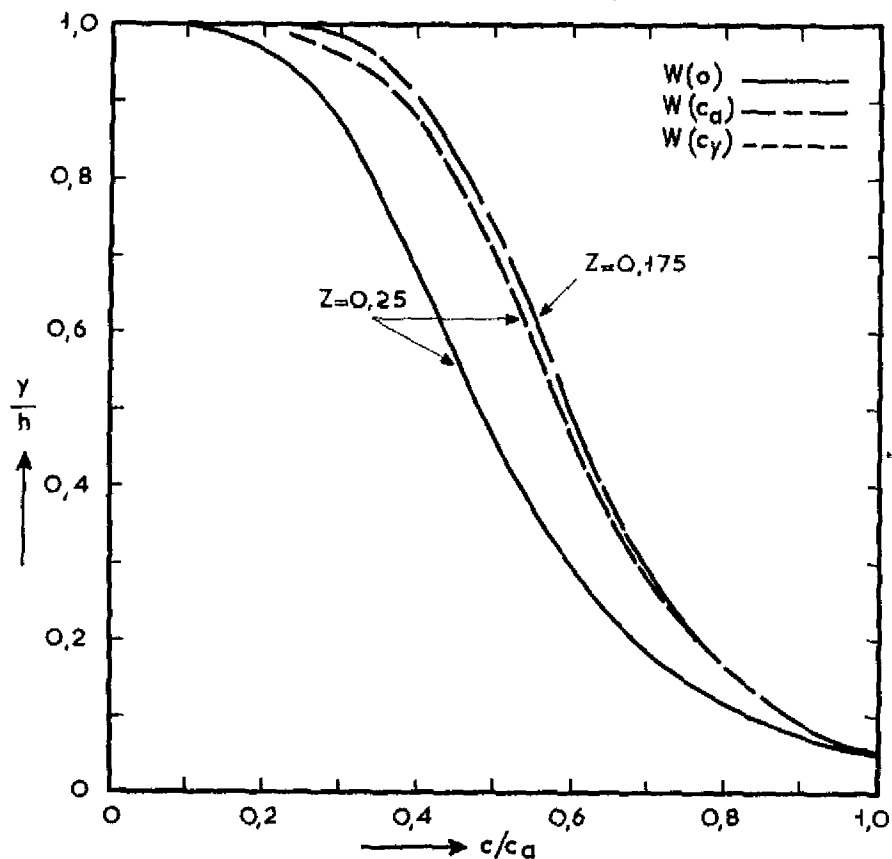
FIG. 23



a = amplitude van de waterbeweging
 ω = frequentie van de waterbeweging



A. Invloed afname valsnelheid met de concentratie op de concentratieverdeling



B. Een vergelijking van de gebruikelijke oplossing met de onderhavige theorie

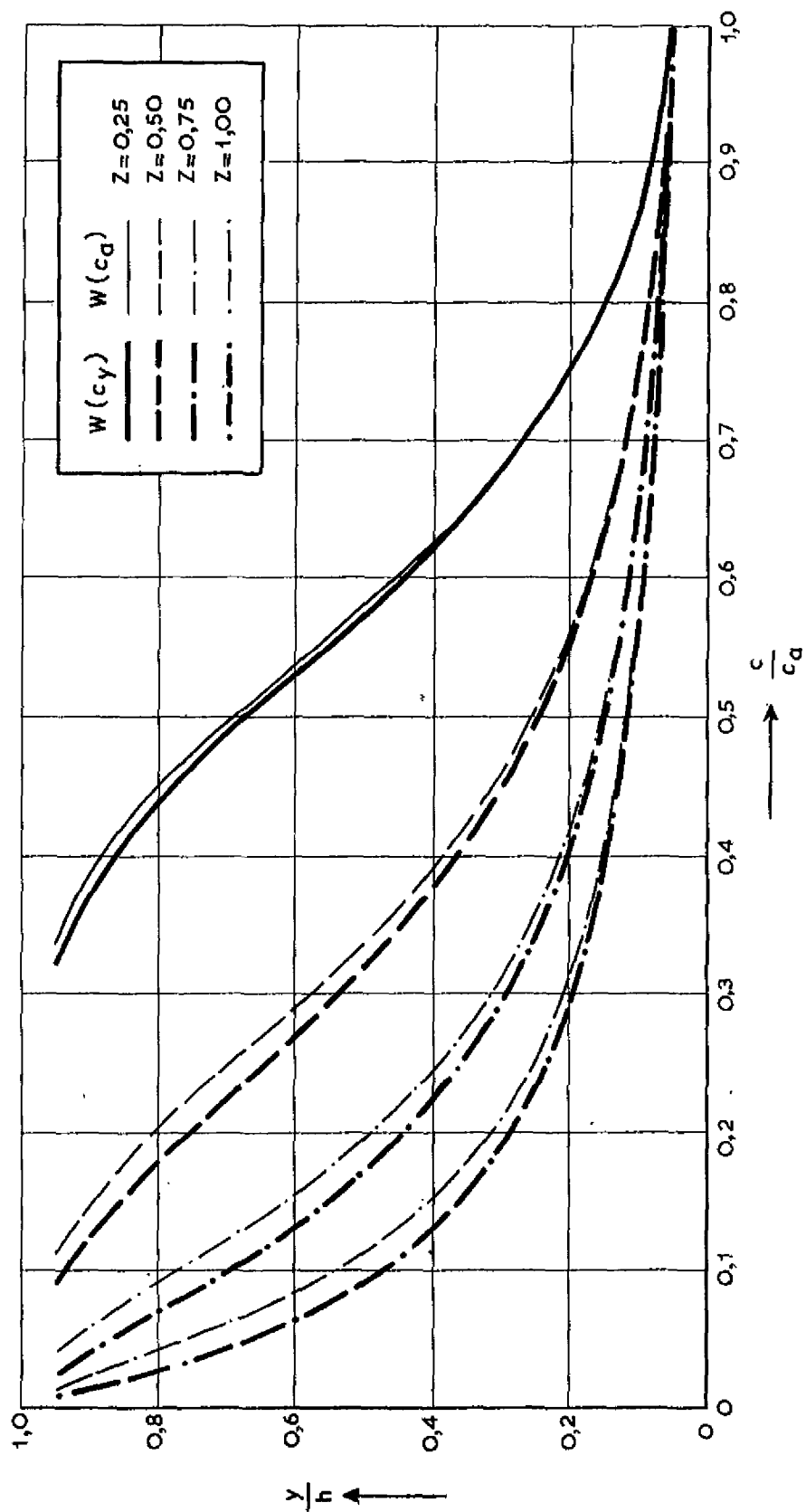
INVLOED VALSNELHEID ALS FUNCTIE VAN
CONCENTRATIE OP CONCENTRATIEVERDELING
VOLGENS HJELMFELT EN LENAU

$c_d = 5\%$

WATERLOOPKUNDIG LABORATORIUM

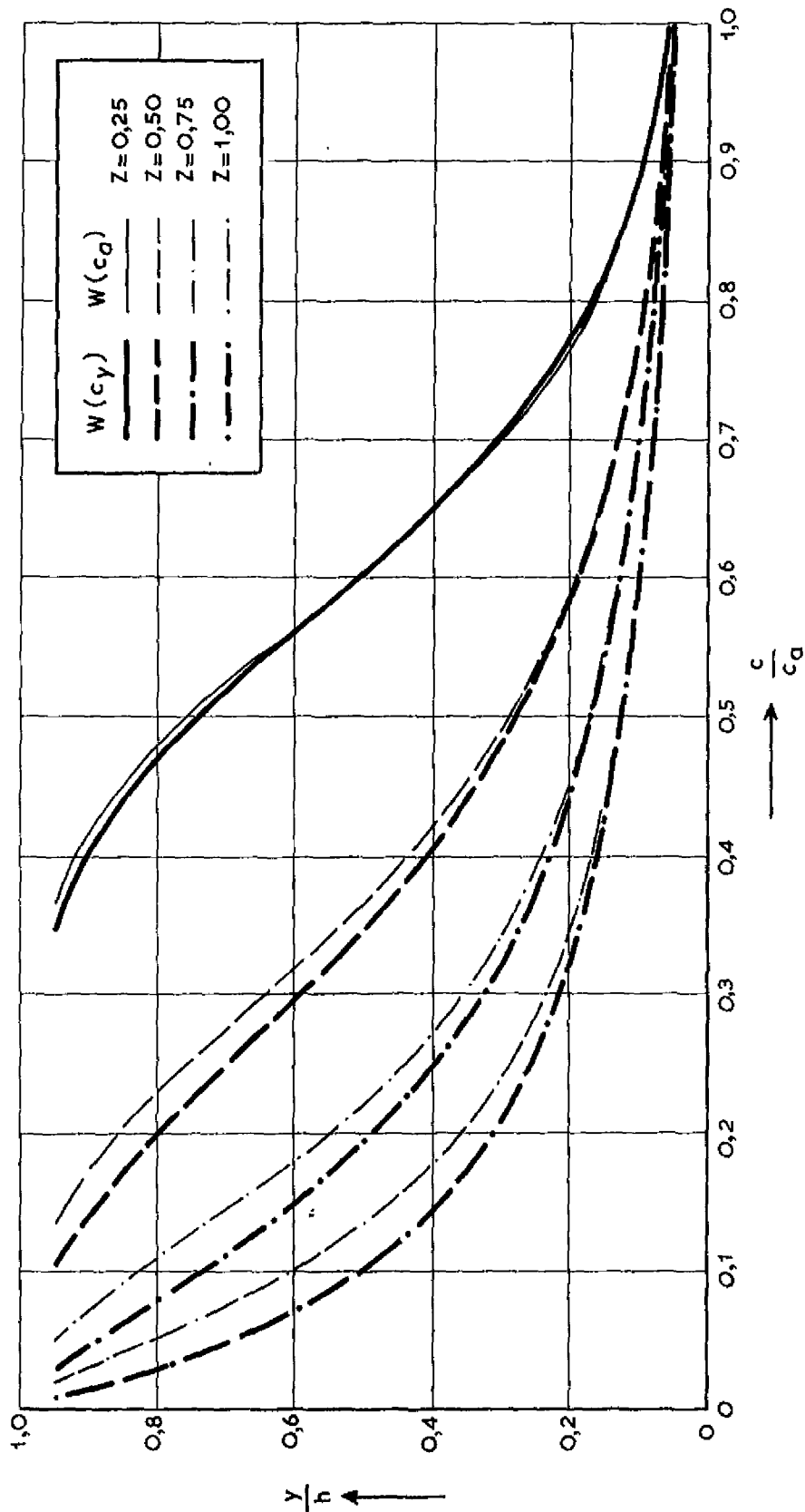
R. 783

FIG. 24



CONCENTRATIEVERDELINGEN VOLGENS HJELMFELT
 EN LENAU. INVLOED VAN VALSNELHEID ALS
 FUNCTIE VAN CONCENTRATIE

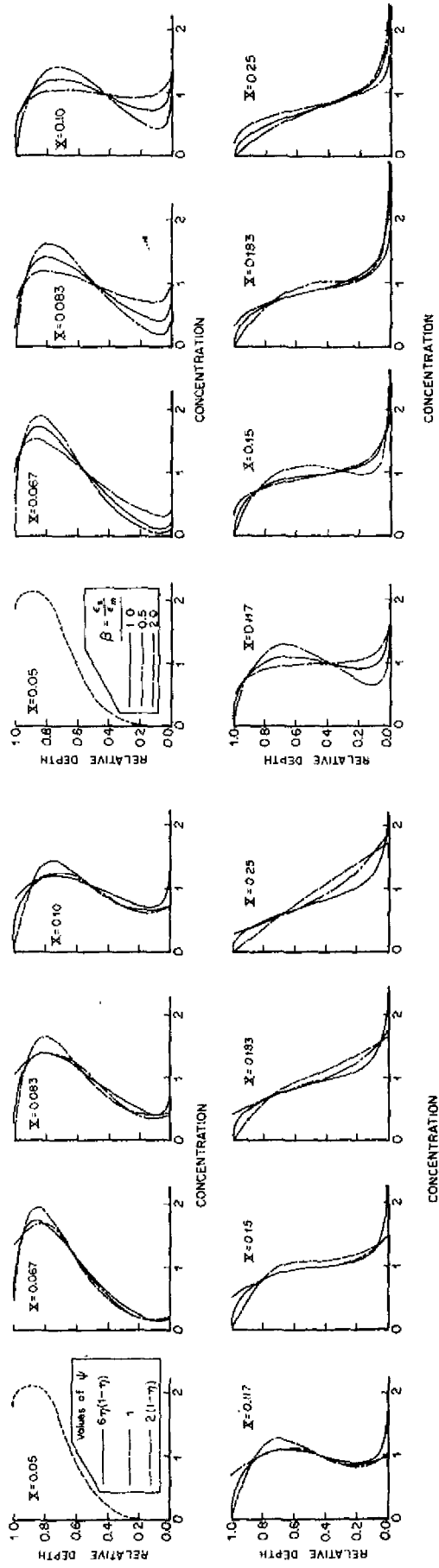
$c_d = 5 \%$



CONCENTRATIEVERDELINGEN VOLGENS HJELMFELT
 EN LENAU. INVLOED VAN VALSNELHEID ALS
 FUNCTIE VAN CONCENTRATIE

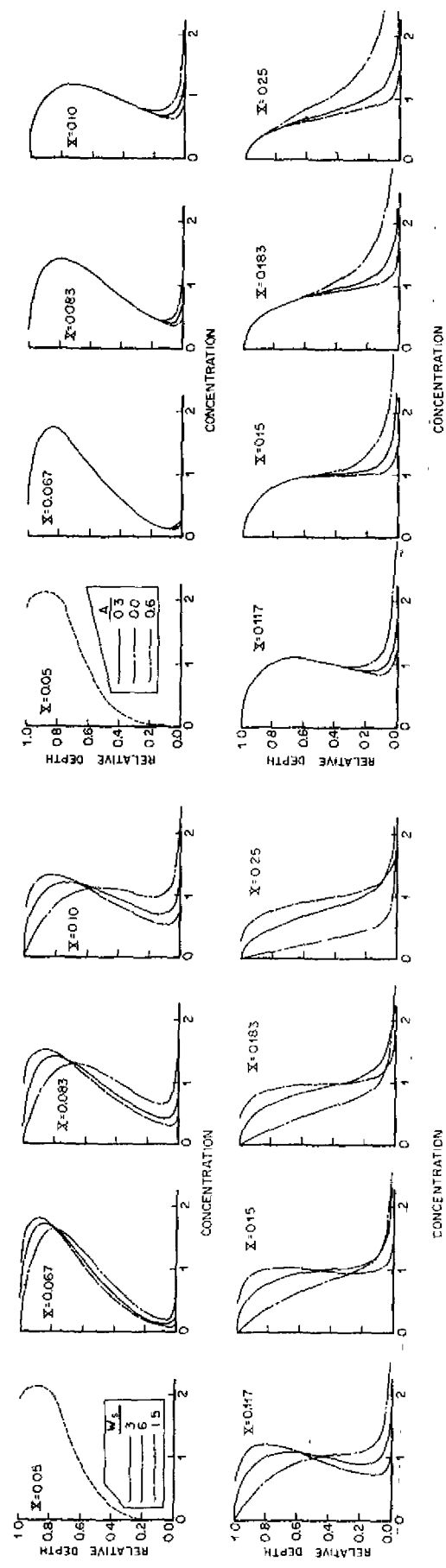
$c_d = 10 \%$

INVLOED HYDRAULISCHE PARAMETERS OP
CONCENTRATIEVERDELING VOOR STROOM
MET SEDIMENT



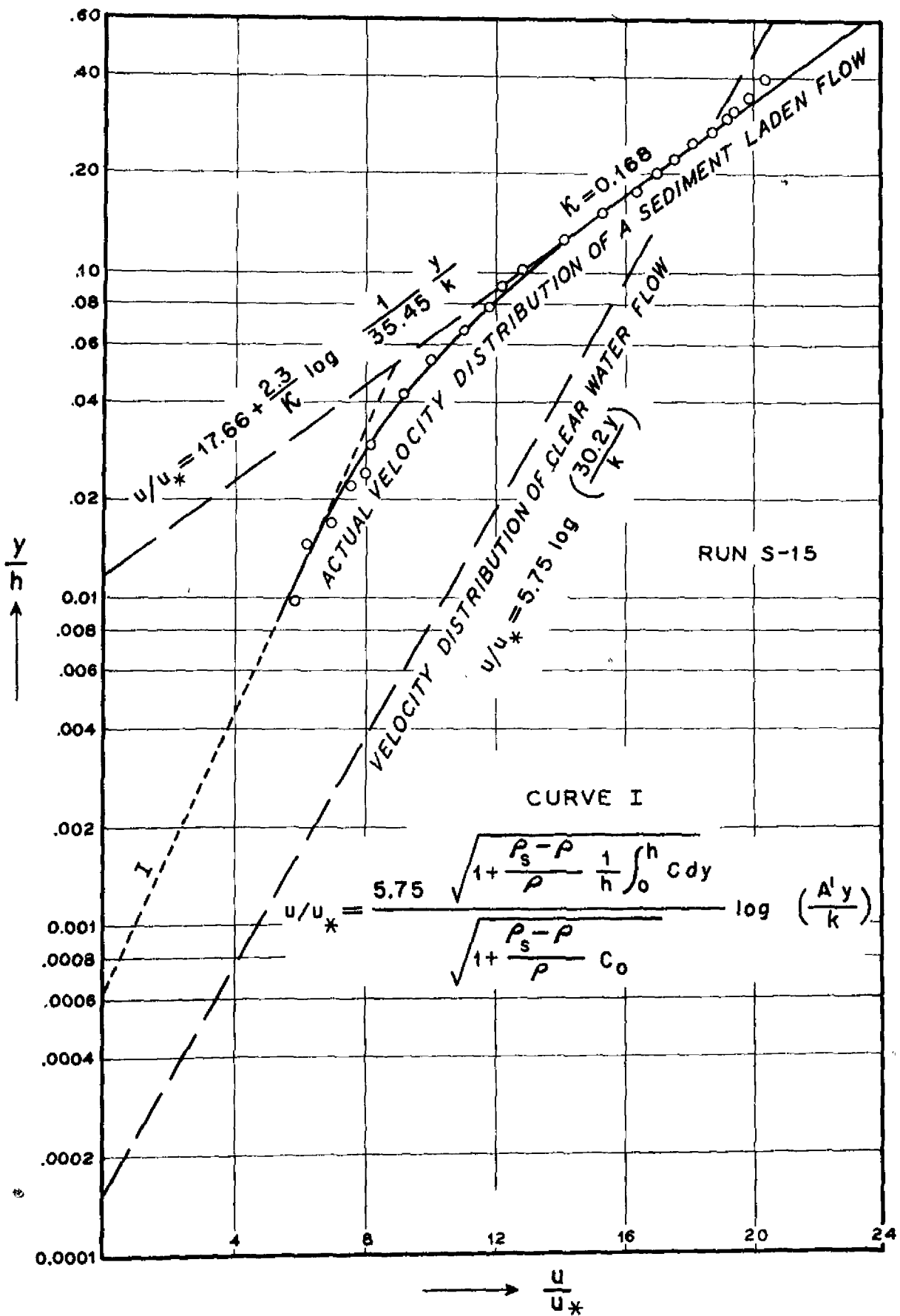
A. Invloed van de verdeling van de uitwisselingscoëfficiënt (ϵ_s) op de concentratieverdeling

B. Invloed van de absolute waarde van de uitwisselingscoëfficiënt (ϵ_s) op de concentratieverdeling

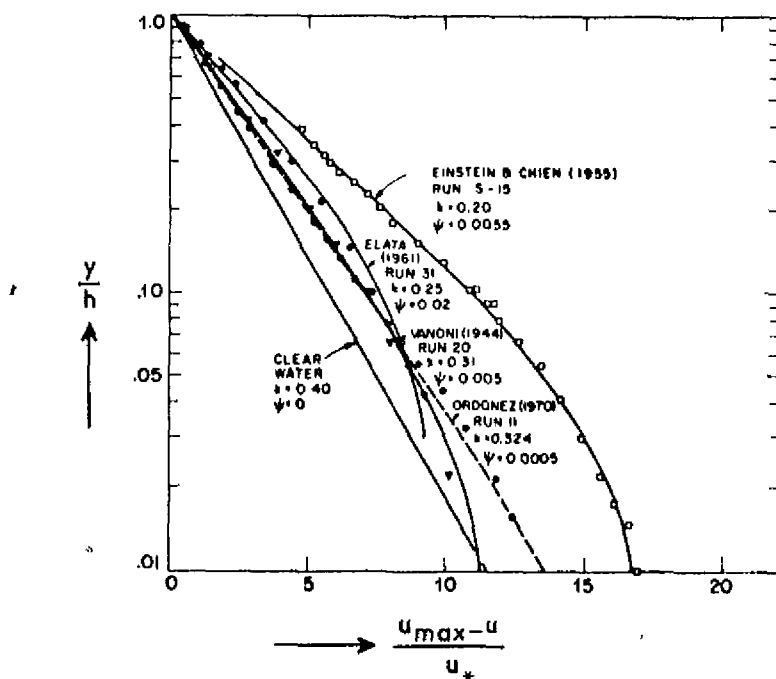
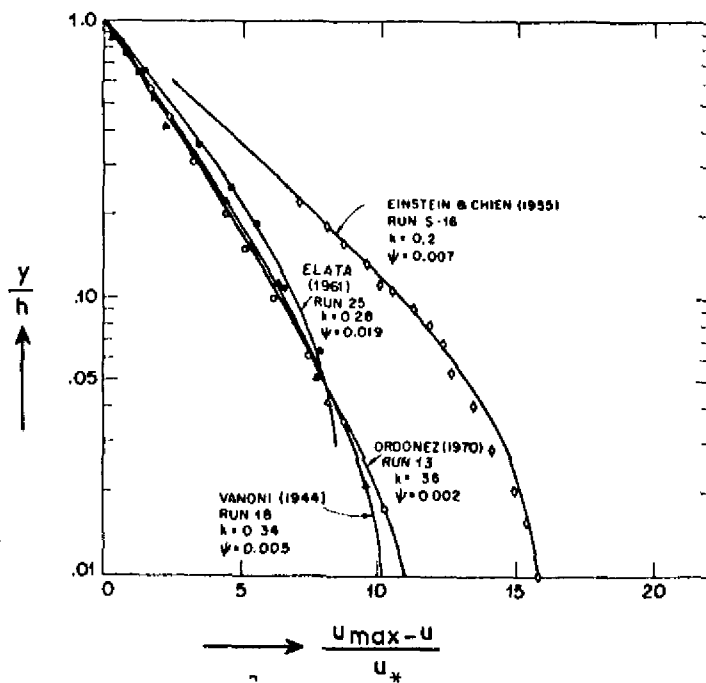


C. Invloed van de velsnelheid op de concentratieverdeling

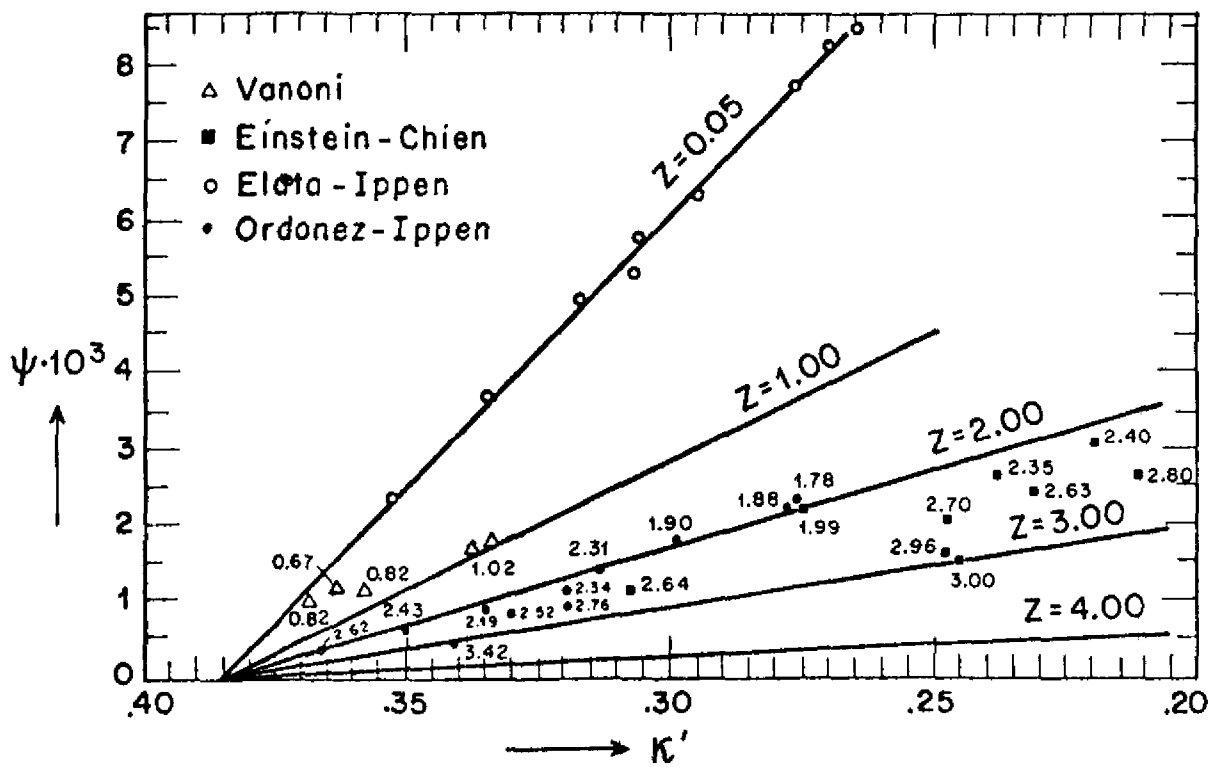
D. Invloed van de waarschijnlijkheid van neerslaan (A) op de concentratieverdeling



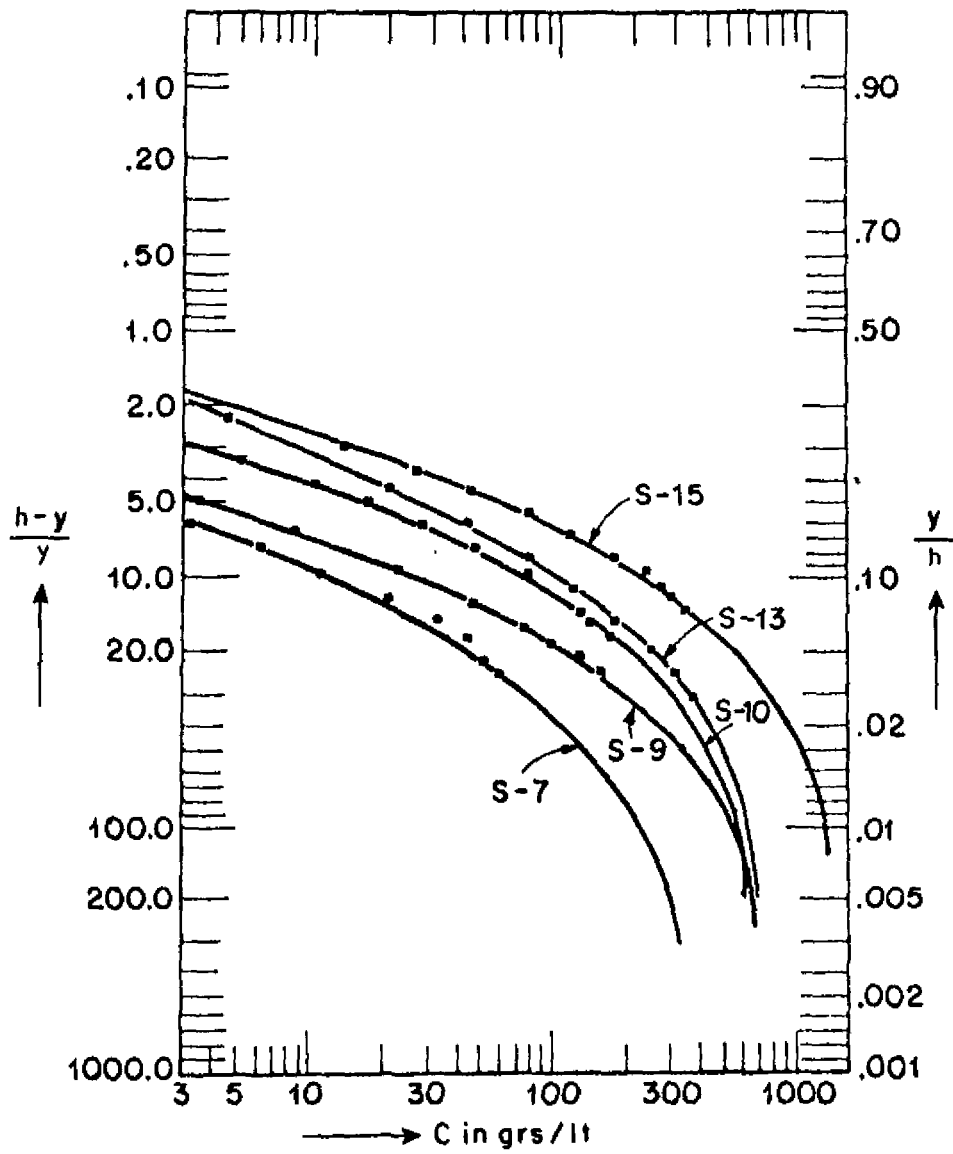
VERGELIJKING VAN SNELHEIDSVERDELING VOOR STROOM MET SEDIMENT MET DIE VOOR STROOM ZONDER SEDIMENT VOLGENS EINSTEIN EN NING CHIEN



VERGELIJKING VAN SNELHEIDSVERDELINGEN
VOLGENS VGL. 6.14 MET GEMETEN SNELHEIDS-
VERDELINGEN VOLGENS ORDONEZ EN IPPEN



RELATIE TUSSEN ψ EN κ' VOOR VERSCHILLENDE
 WAARDEN VAN Z , VOLGENS ORDONEZ EN IPPEN



VERDELING VAN DE CONCENTRATIE OVER DIEPTE
VOLGENS ORDONEZ EN IPPEN

waterloopkundig laboratorium postbus 177 delft