Enkele aspecten van een zelfvarend schip in een kanaal

J.H. de Reus

R 1970-1-H

Vloeistofmechanica
Afd. Weg- en Waterbouwkunde
Technische Hogeschool Delft

Hoofdstuk I.

Bestaande gegevens.

Bekend is de theorie die Ir. Schijf in 1949 ontwikkeld heeft. Bij deze theorie wordt als vereënvoudiging het volgende aangenomen:

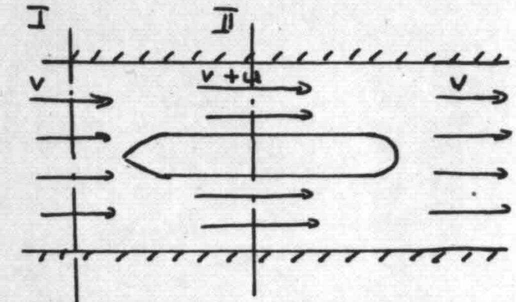
a) De retourstroom is gelijkmatig verdeeld over het dwarsprofiel.

b) De spiegeldaling is constant over de kanaalbreedte.

c) Het schip terplaatse van het grootspant de spiegeldaling volgt.

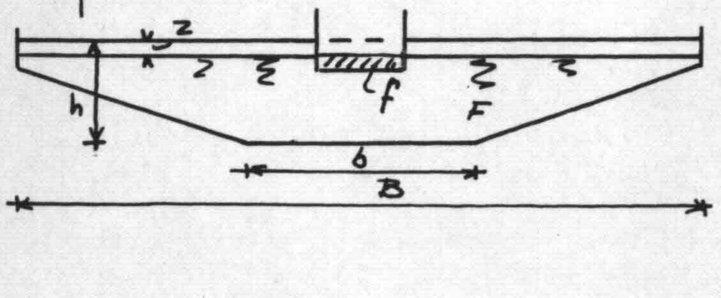
d) Wrijving en turbulentie te verwaarlozen zijn.

Wanneer het schip met constante snelheid vaart en men te doen heeft met een kanaal waarvan de afmetingen en waterstand constant zijn, dan heeft men te doen met een permanente stroom, als de beweging ten opzichte van het schip beschouwd wordt. (Assenkruis beweegt met het schip mee.)



v = vaarsnelheid schip.

u = snelheid retourstroom



F = dwarsprofiel van het kanaal

f = opperulak ondergedompeld deel van het grootspant van het schip.

z = spiegeldaling
B = kanaalbreedte

b = bodembreedte

$h = F/B$ = gemiddelde diepte

Continuiteitsvoorwaarde:

$$Q_I = Q_{II}$$

$$v.F = (v+u)(F - B.z - f). \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Bewegingsvergelijking:

Doordat wrijving en turbulentie verwaarloosd worden en de beweging ten opzichte van het schip bekeken wordt (permanente beweging), mag de vergelijking van Bernoulli toegepast worden

$$\frac{p_1}{\rho g} + z_1 + \frac{v^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + z_2 + \frac{(v+u)^2}{2g}.$$

Bekijkt men een punt aan het oppervlak dan is

$p_1 = p_2 = 0$

$z_1 = h$ en $z_2 = h - z$

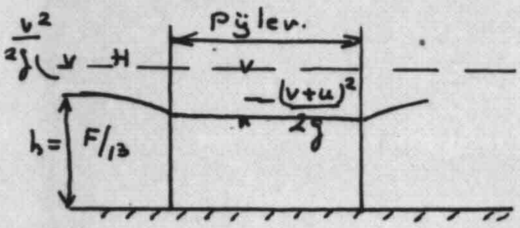
$$h + \frac{v^2}{2g} = h - z + \frac{(v+u)^2}{2g}.$$

$$z = \frac{(v+u)^2}{2g} - \frac{v^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Bij een gegeven kanaal, schip en vaarsnelheid van dat schip zijn f, v, F en B bekende grootheden. Twee onbekenden u en z blijven over, maar deze twee zijn uit de vergelijkingen (a) en (b) op te lossen.

Ir. Schijf kwam tot de principiële ontdekking n.m.l. het bestaan van de zogenaamde natuurlijke grenssnelheid. De natuurlijke grenssnelheid wil zeggen dat bij een bepaalde verhouding opper vlak schip tot oppervlak kanaal (f/F) een schip een maximale vaarsnelheid heeft. Opvoering van het motorvermogen van het schip heeft geen grotere vaarsnelheid ten gevolg, maar het meerdere vermogen geeft grotere golfvorming.

Physische is deze grens te verklaren door een schip, varend in stilwater, te vergelijken met een pijler in stromend water



Zonder opstuwing heeft het debiet een max. waarde als naast de pijler de watersnelheid gelijk is aan de grenssnelheid van het water (overgang tussen stromend - en schietend water).

$$\frac{(v+u)^2}{2g} = \frac{1}{3} H = \frac{1}{3}\left(h + \frac{v^2}{2g}\right)$$

De continuiteitsvergelijking is $z = \frac{(v+u)^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}$.

Door z te elimineren vond Ir. Schijf de waarde van u uitgedrukt in f/F, h en v en omgekeerd door u te elimineren vindt men de waarde van z

Dit geeft de volgende vergelijkingen.

$$1 - f/F - \frac{v^2}{2gh}\left\{\left(1 + \frac{u/\sqrt{gh}}{v/\sqrt{gh}}\right)^2 - 1\right\} - \left(1 + \frac{u/\sqrt{gh}}{v/\sqrt{gh}}\right)^{-1} = 0$$

$$1 - f/F - \frac{z}{h} - \left(1 + 2\,\frac{z/h}{v^2/gh}\right)^{-1/2} = 0.$$

In het collegedictaat van Prof. Ir. L. van Bendegom: <u>De waterbeweging veroorzaakt door scheepvaart</u> zijn diagrammen opgenomen, waaruit men $u/\sqrt{gh}$ of z/h kan opzoeken als f/F en $V/\sqrt{gh}$ bekend zijn.

In het algemeen geeft sneller varen een grotere waarde voor u en z maar bij een bepaalde f/F verhouding worden er boven een bepaalde snelheid geen hogere waarden voor $u/\sqrt{gh}$ en z/h meer gevonden. De hoogste krommen geven de grenssnelheid aan.

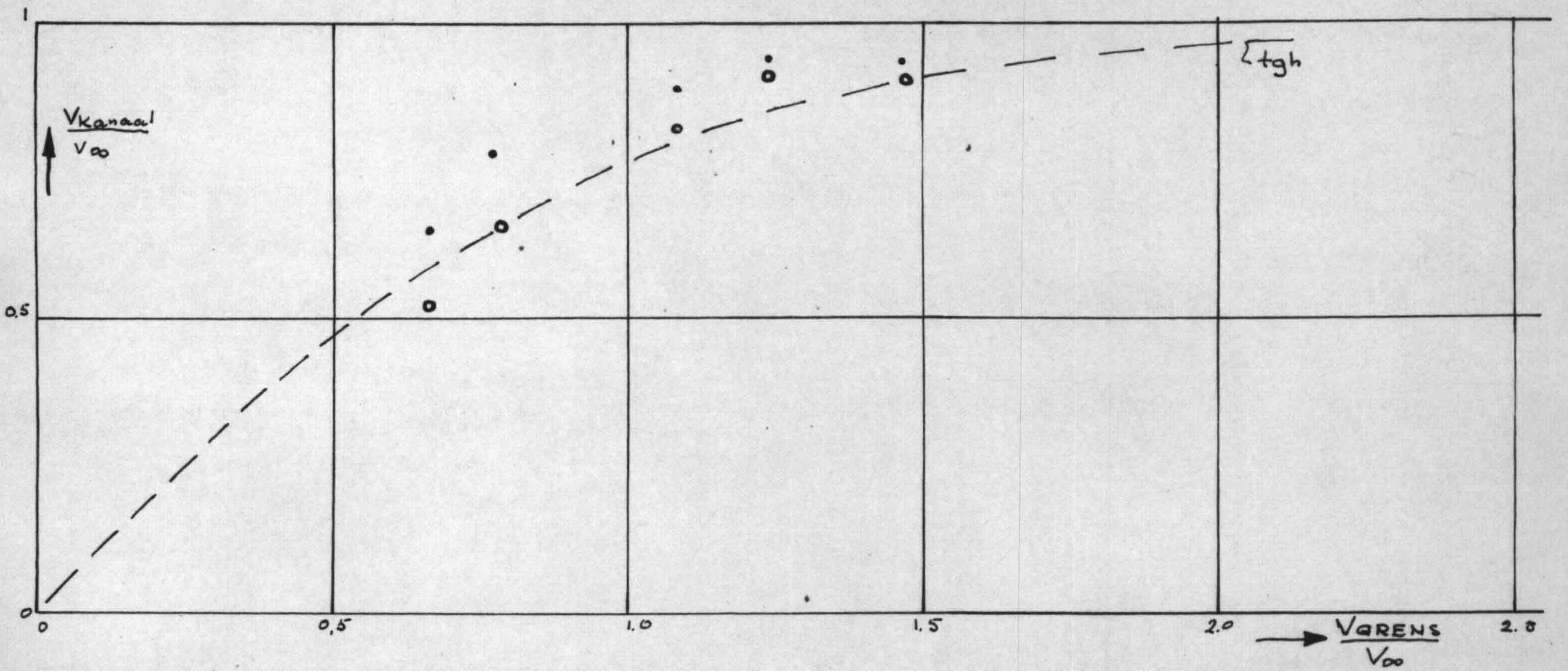
Volgens rapport M 415 van het Waterloopkundig Laboratorium te Delft geldt:

$$\frac{V_{kan.}}{V_{\infty}} = tgh\,\frac{V_{grens}}{V_{\infty}}$$

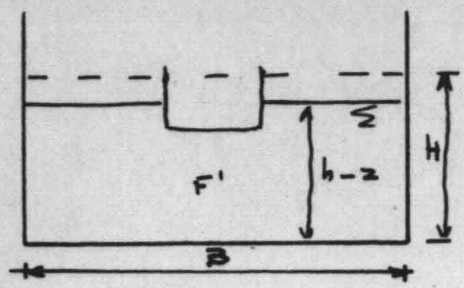
V_{kan} = de scheepssnelheid in een kanaal bij een bepaald vermogen.

V_{∞} = de scheepssnelheid in onbegrensd water met het <u>zelfde</u> vermogen.

V_{grens} = de max. snelheid, die het schip, gezien zijn afmetingen en die van het kanaal, op dat kanaal ooit kan halen.
(Dit is dus de grenssnelheid die onafhankelijk van het vermogen is).



o Gemeten door W.L. 1952
• Berekende punten geven hogere V_K dan gemeten is.



H = energiehoogte $= h - z + \frac{(v+u)^2}{2g}$

$h - z$ = waterdiepte naast het schip

$v + u$ = watersnelheid naast het schip als assenkruis met het schip meebeweegt.

$$(v+u) = \sqrt{2g(H-h+z)}$$

Beschikbaar doorstromingsprofiel is F'

$$F' = B(h-z) - f$$

zodat $Q = (v+u)\,F'$

$$Q = (v+u)(Bh - Bz - f)$$

$$Q = \sqrt{2g(H-h+z)}\,.\,(Bh - Bz - f)$$

Q_{max} als $\frac{dQ}{dh} = 0$

$$\frac{dQ}{dh} = \frac{1}{2}\frac{(Bh - Bz - f)}{\sqrt{2g(H-h+z)}}(-2g) + \sqrt{2g(H-h+z)}\,.\,B = 0$$

als $H - h + z \neq 0$

$$-(Bh - Bz - f) + 2B(H - h + z) = 0.$$

$$3B(h-z) = 2BH + f$$

$$\rightarrow (h-z) = \frac{2}{3}H + \frac{f}{3B}.$$

$$Q_{max} = \sqrt{2g\left\{H - \frac{2}{3}H - \frac{f}{3B}\right\}}\,.\,\left\{B\left(\frac{2}{3}H + \frac{f}{3B}\right) - f\right\}$$

$$Q_{max} = {}^{2}/_{3}\,B\,(H - f/B)^{3/2}\,({}^{2}/_{3}g)^{1/2}$$

Als $H - h + z = 0 \rightarrow H = h - z \rightarrow v + u = 0.$

d.w.z. een stilliggend schip. Hier boven is uitgegaan van een varend schip. dus men mag verder werken met $H - h + z \neq 0$. wat voor Q_{max} de waarde $2/3\, B\, (H - f/B)^{3/2} (2/3 g)^{1/2}$ geeft.

$$F' = B(h-z) - f =$$

$$B\,(2/3 H - f/3B) - f = 2/3\, B\, (H - \frac{f}{B}).$$

$$V_{max} = \frac{Q_{max}}{F'} = \frac{2/3\, B\,(H - f/B)^{3/2} (2/3\, g)^{1/2}}{\frac{2}{3} B\,(H - \frac{f}{B})} =$$

$$(H - f/B)^{1/2} \cdot (2/3\, g)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3} g\, (H - f/B)}$$

Verder is

$$H = h + \frac{V^2_{schip}}{2g}$$

$$\frac{H}{h} = 1 + \frac{V^2}{2gh} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{\sqrt{gh}}\right)^2$$

$$\frac{V_{max}}{\sqrt{gh}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{3} g\,(H - f/B)}}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left(\frac{H}{h} - \frac{f}{hB}\right)} \qquad h.B = F$$

$$\frac{V_{max}}{\sqrt{gh}} = \sqrt{\frac{2}{3}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{\sqrt{gh}}\right)^2 - \frac{f}{F}\right\}}$$

Eerder afgeleid is

$$Q_{max} = 2/3\, B\, (H - \frac{f}{B}) \sqrt{\frac{2}{3} g\, (H - \frac{f}{B})}$$

Door beide termen door $g^{1/2} B h^{3/2}$ te delen. krijgt men dimensieloze termen.

$$\frac{Q_{max}}{B g^{1/2} h^{3/2}} = \left\{2/3\left(\frac{H}{h} - \frac{f}{Bh}\right)\right\}^{3/2}$$

$$H = h + \frac{V^2_{schip}}{2g} \Longrightarrow \frac{H}{h} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{\sqrt{gh}}\right)^2$$

$$\frac{Q_{max.}}{B g^{1/2} h^{3/2}} = \left[\frac{2}{3}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{\sqrt{gh}}\right)^2 - \frac{f}{F}\right\}\right]^{3/2}$$

$Q_{nodig} = V.h.B$

dimensieloos.

$$\frac{Q_{nodig}}{B g^{1/2} h^{3/2}} = \frac{v \times h \times B}{B g^{1/2} h^{3/2}} = \frac{v}{\sqrt{gh}}$$

De grenssnelheid wordt bereikt bij de voorwaarde dat $Q_{max} = Q_{nodig}$.

$$Q_{max} = Q_{nodig} \Longrightarrow v = v_{grens}$$

$$\left[\frac{2}{3}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_{gr}}{\sqrt{gh}}\right)^2 - \frac{1}{F}\right\}\right]^{3/2} = \frac{v_{gr.}}{\sqrt{gh}}$$

$$\frac{2}{3}\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v_{gr}}{\sqrt{gh}}\right)^2 - \frac{1}{F}\right\} = \sqrt[3]{\left(\frac{v_{gr}}{\sqrt{gh}}\right)^2}$$

$$\left(\frac{v_{gr.}}{\sqrt{gh}}\right)^{2/3} - \frac{1}{3}\left(\frac{v_{gr.}}{\sqrt{gh}}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{F}\right) \qquad (A)$$

v = snelheid van het water voor en achter het schip t.o.v. het assenkruis dat eenparig met het schip meebeweegt.

$v+u$ = snelheid naast het schip.

$H = h - z + \frac{(v+u)^2}{2g}$ geldt naast het schip.

$$v + u = \sqrt{2g(H-h+z)}$$

$$Q = \{B(h-z) - f\}\sqrt{2g(H-h+z)}$$

$$\frac{Q}{B g^{1/2} h^{3/2}} = \frac{\{B(h-z) - f\}\sqrt{2g(H-h+z)}}{B g^{1/2} h^{3/2}}$$

$$= \frac{(h - z - f/B)\sqrt{2(H-h+z)}}{h^{3/2}}$$

$$= \left(\frac{h-z}{h} - \frac{1}{F}\right)\sqrt{2\left(\frac{H}{h} - \frac{h-z}{h}\right)} \quad (a) \qquad \frac{H}{h} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{\sqrt{gh}}\right)^2 \quad (b)$$

$$\frac{Q \text{ nodig}}{B g^{1/2} h^{3/2}} = \frac{V}{\sqrt{gh}} \quad (c)$$

Door combinatie van (a) en (b) en

gelijkstelling aan (c) geeft.

$$\left(\frac{h-z}{h} - \frac{f}{F}\right) \sqrt{2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{\sqrt{gh}}\right)^2 - \frac{h-z}{h}\right\}} = \frac{V}{\sqrt{gh}} \quad (d)$$

$$H = h + \frac{V^2}{2g} = h - z + \frac{(v+u)^2}{2g}$$

continuiteit $\Longrightarrow (v+u)\left\{(h-z).B - f\right\} = v.\, h.B = v.F$

$$v+u = \frac{v.\,F}{(h-z)B - f}$$

$$h + \frac{v^2}{2g} = (h-z) + \left(\frac{v.F}{(h-z)B - f}\right)^2 \cdot \frac{1}{2g}.$$

Hier uit is z op te lossen voor een zekere snelheid v

$$(d) \Rightarrow \left(\frac{h-z}{h} - \frac{f}{F}\right) \sqrt{2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{\sqrt{gh}}\right)^2 - \frac{h-z}{h}\right\}} = \frac{V}{\sqrt{gh}}$$

anders geschreven

$$\frac{f}{F} = \frac{h-z}{h} - \frac{V}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{\sqrt{gh}}\right)^2 - \frac{h-z}{h}\right\}}} \quad (B)$$

uit (A) volgt.

$$\frac{f}{F} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{V_{gr}}{\sqrt{gh}}\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{V_{gr}}{\sqrt{gh}}\right)^2 \quad (C)$$

gecombineerd $\frac{f}{F} = \frac{f}{F}$ geeft

$$\frac{h-z}{h} - \frac{V}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V}{\sqrt{gh}}\right)^2 - \frac{h-z}{h}\right\}}} = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{V_{gr}}{\sqrt{gh}}\right)^{3/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{V_{gr}}{\sqrt{gh}}\right)^2$$

Vaart een schip in een kanaal. dan is de water-snelheid naast het schip $(v+u)$.

De grotte van u is afhankelijk van de kanaal afmeting. Een groter kanaalprofiel (F groter) geeft een kleinere u.

Wanneer nu F naar ∞ gaat. dan zal u naar nul naderen.

Als onbegrensd water wordt nu genomen $F = \infty$ en $u = 0$.

Beschouwt men nu twee identieke schepen, één in een kanaal met dwarsprofiel F en de andere in onbegrensd water,

Bij gelijk vermogen van de motor zal de stuwkracht ook gelijk zijn dwz intreesnelheid. van het water. is ook gelijk.

Stelt men dat de snelheid. over het dwarsprofiel gelijkmatig is dan is de intree snelheid van het water in de schroef gelijk aan de watersnelheid naast het schip.

Noemt. men de watersnelheid voor en achter. het schip op het kanaal V_k en op onbegrensd. water V_∞ dan wordt de vergelijking tussen kanaal en onbegrensd water.

$$V_k + u = V_\infty$$

$$H = (h-z) + \frac{(v+u)^2}{2g} \qquad (V_k+u) = V_\infty \quad \text{ingevuld.}$$

$$H = h - z - \frac{V_\infty^2}{2g}.$$

H is ook gelijk aan $\frac{V_k^2}{2g} + l.$

$$h - z = \frac{V_k^2}{2g} + l - \frac{V_\infty^2}{2g}$$

$$\frac{h-z}{h} = \frac{V_k^2 - V_\infty^2}{2(\sqrt{gh})^2} + 1$$

$\frac{h-z}{h}$ in vergelijking (B) gesubstitueerd

$$\frac{f}{F} = \frac{V_k^2 - V_\infty^2}{2(\sqrt{gh})^2} + 1 - \frac{V_k}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\left\{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_k}{\sqrt{gh}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{V_k}{\sqrt{gh}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_\infty}{\sqrt{gh}}\right)^2 - 1\right\}}}$$

$$\frac{f}{F} = \frac{V_k^2 - V_\infty^2}{2(\sqrt{gh})^2} + 1 - \frac{V_k}{\sqrt{gh}} \cdot \frac{\sqrt{gh}}{V_\infty}$$

$$\frac{f}{F} = \frac{V_k^2 - V_\infty^2}{2(\sqrt{gh})^2} + 1 - \frac{V_k}{V_\infty}$$

Bij een gegeven kanaal (F en h), scheepsafmeting (f) en snelheid V_∞ op onbegrensd water bij een bepaald vermogen is met behulp van bovenstaande formule de snelheid op dat kanaal (bij het zelfde vermogen) uit te rekenen.

$$\frac{f}{F} = \frac{V_k^2 - V_\infty^2}{2(\sqrt{gh})^2} + 1 - \frac{V_k}{V_\infty}$$

Eerder afgeleide vergelijking (A) luidt.

$$\left(\frac{V_{gr.}}{\sqrt{gh}}\right)^{2/3} - \frac{1}{3}\left(\frac{V_{gr.}}{\sqrt{gh}}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{f}{F}\right)$$

Eliminatie van $\frac{f}{F}$ geeft

$$\left(\frac{V_{gr.}}{\sqrt{gh}}\right)^{2/3} - \frac{1}{3}\left(\frac{V_{gr}}{\sqrt{gh}}\right)^2 = \frac{2}{3}\left(\frac{V_k}{V_\infty} - \frac{V_k^2 - V_\infty^2}{2(\sqrt{gh})^2}\right.$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{V_{gr.}}{\sqrt{gh}}\right)^{2/3} - \frac{1}{2}\left(\frac{V_{gr.}}{\sqrt{gh}}\right)^2 = \frac{V_k}{V_\infty} - \frac{1}{2}\left(\frac{V_k}{\sqrt{gh}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{V_\infty}{\sqrt{gh}}\right)^2$$

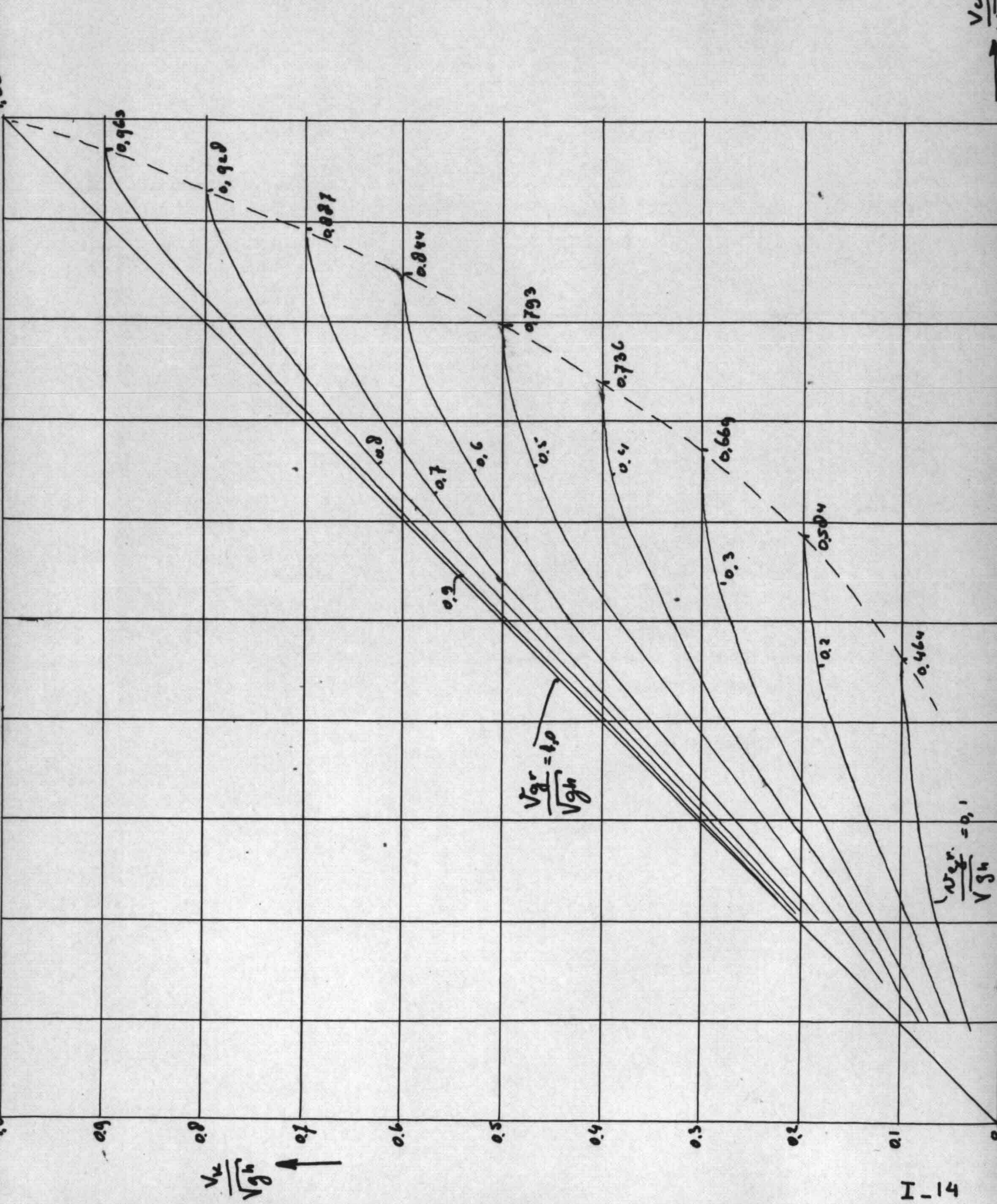
$$\frac{V_k}{\sqrt{gh}} = + \frac{\sqrt{gh}}{V_\infty} \pm \sqrt{\left(\frac{\sqrt{gh}}{V_\infty}\right)^2 + \left(\frac{V_\infty}{\sqrt{gh}}\right)^2 - 3\left(\frac{V_{gr}}{\sqrt{gh}}\right)^{2/3} + \left(\frac{V_{gr}}{\sqrt{gh}}\right)^2}$$

Uit physische overwegingen voldoet alleen het min teken, anders $V_k > V_\infty$

Het verband tussen $\frac{V_k}{\sqrt{gh}}$, $\frac{V_\infty}{\sqrt{gh}}$ en $\frac{V_{gr}}{\sqrt{gh}}$ ligt dus vast. zie grafiek volgende pagina.

$\frac{V_k}{\sqrt{gh}}$ kan alleen aan $\frac{V_\infty}{\sqrt{gh}}$ gelijk worden als

$$\frac{V_{gr.}}{\sqrt{gh}} = 1$$


0,965
0,929
0,887
0,844
0,793
0,736
0,669
0,504
0,464
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
$\frac{V_{gr}}{\sqrt{gh}} = 1,0$
$\frac{V_{gr}}{\sqrt{gh}} = 0,1$
$\frac{V_k}{\sqrt{gh}}$

Met behulp van formule (A) pag. I-9. is het mogelijk de Vgr als functie van h, f en F uit te rekenen. Door middel van de grafiek van pag I-14 is het tevens mogelijk, als vgr bekend is, het snelheids verschil van een schip in onbegrensd water en in beperkt water te bepalen.

Bij deze grafiek gelden de zelfde voorwaarden die Ir Schijf. aan zijn artikel verbond.

Hoofdstuk II.

Om een indruk van de schroefwerking te krijgen heb ik de volgende Literatuur geraadpleegd.

A Pulsating Ship Screw Propeller. Operating in Homogeneous. Water Flow, van Valter Kostilainen.

Het Wetenschappelijk onderzoek van de Voortstuwing van Schepen: Dr Ir. J.D. van Manen.

Weerstanden Voortstuwing van Schepen.:
Dr.Ir. W.P.A. van Lammeren met medewerking van Ir. L.Troost en Ir. J-G. Koning.

Analyse der voortstuwingscomponenten in verband met het schaaleffect bij scheepsmodelproeven: W.P.A. van Lammeren.

Literatuur over de scheepsbeweging in kanalen o.a.
Gegevens en beschouwingen over de Waterbeweging in kanalen veroorzaakt door Scheepvaart. in aansluiting op het college Scheep~~vaart~~vaartwegen van Prof. Ir. L.van Bendegom, samengesteld door Ir. F.van Rossum.

Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau Nr 27. Karlsruhe Sept. 1968.

Verslag M 415 van W.L.: Verschijnselen bij de vaart van één of twee schepen in een kanaal

Verslag van het XVII^e Internationale scheepvaartcongres te Lissabon 1949.

Verslag van het XVIII^e Internationale scheepvaartcongres te Rome 1953.

Der zweckmäßige Querschnitt von Binnenschiffahrtskanälen der Wasserstraßenklasse IV von Diplom-Ingenieur. Heiz-Graewe.

Untersuchung der Verformung der Wasseroberfläche durch die Verdrängungsströmung bei der Fahrt eines Schiffes auf seitlich beschränkten flachen Fahrwasser. : Sturtzel, Graff und Müller.

Verder zijn nog enkele boeken over golfopwekking en golfweerstand geraadpleegd.
o.a. Hydrodynamics van H. Lamb.

Hoofdstuk III.

Potentiaal stroming.

Het uitgangspunt is hier geweest of men de scheepsvorm en stroming in potentiaal- en stroom functie vast kan leggen, zodat, als het ware een wiskundig model ontstaat, die de stroming om een zich zelf voortstuwend schip varend in de as van een kanaal, nabootst.

Hierbij is gebruik gemaakt van het dictaat „Stromingsleer" (voortgezette cursus) geschreven door Prof. Ir. J.O. Hinze.

u_x is gedefinieerd als $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ ϕ = potentiaalfunctie

$$u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(massabalans)}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad \text{(wervelvrijheid)}.$$

ψ = stroomfunctie.

De potentiaalfuncties hebben de volgende waarden

voor par. stroom $\phi = U.x$

bron. $\phi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+y^2}$

wervel $\phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}$

dipool $\phi = \frac{m\,x}{2\pi\,(x^2+y^2)}$

waarbij dan bron, wervel en dipool in de oorsprong van het assenkruis staan.

De stroomfuncties hebben de volgende waarden

par. stroom $\psi = U . y$.

bron $\psi = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}$.

wervel $\psi = - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+y^2}$

dipool $\psi = - \frac{m\, y}{2\pi (x^2+y^2)}$.

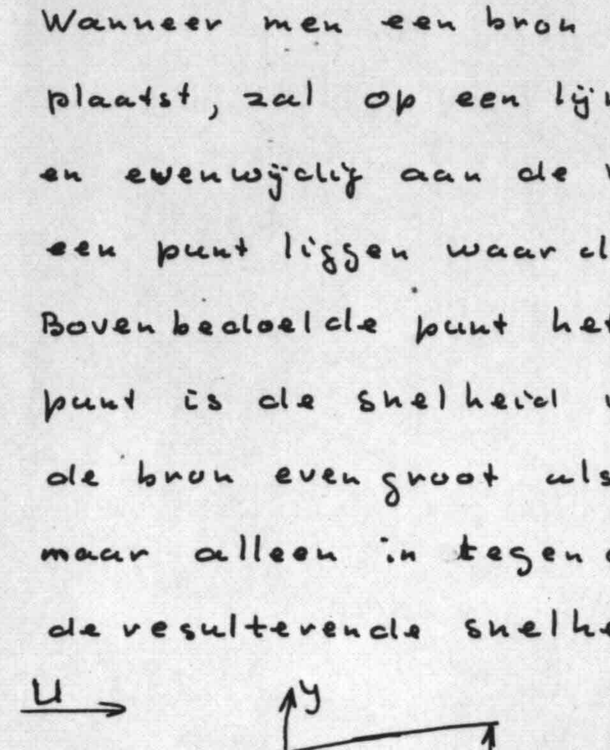
$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

In bovenstaande formules zijn x en y dimensieloze coördinaten.

Wanneer men een bron in een parallelstroom plaatst, zal op een lijn gaande door de bron en evenwijdig aan de richting van de parallelstroom, een punt liggen waar de snelheid nul is.

Bovenbedoelde punt heet het stuwpunt en in dat punt is de snelheid van een waterdeel tgv. de bron even groot als de snelheid tgv. par stroom maar alleen in tegen overgestelde richting, zodat de resulterende snelheid nul is.



Plaatst men in een bron in een par stroom en legt men de X-as in de richting van de par. stroom. en de Oorsprong. in het zelfde punt als de bron, dan ontstaat voor de ϕ de volgende vergelijking.

$$\phi = \phi_{parstroom} + \phi_{bron}$$

$$\phi = U.x + \frac{q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2+y^2}$$

$$u_x = U + \frac{q}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2}$$

Voor $x = -a$ treedt een stuwpunt op ($y=0$)

voor $x = -a$ $u_x = 0$

$$0 = U + \frac{q}{2\pi} \frac{-a}{a^2+0}$$

$$a = \frac{q}{2\pi U} \qquad q = 2\pi U a$$

Op een afstand $x = +\infty$ is de snelheid in y richting gelijkmatig verdeeld en wel U

Het debiet voor $x < -a$ is $q = U.y = U.\infty = \infty$.

Het debiet voor $x = +\infty$ is $q = U.(y-B) + B.U$

B te verwaarlozen t.o.v. $y = \infty$.

$$(B)_{x=+\infty} = \frac{q}{U} = \frac{2\pi U a}{U} = 2\pi a$$

De stroomlijn door het stuwpunt vormt de contour van het halflichaam.

pool coördinaten. $\rightarrow$ $\phi = U(r\cos\varphi + a \ln r)$

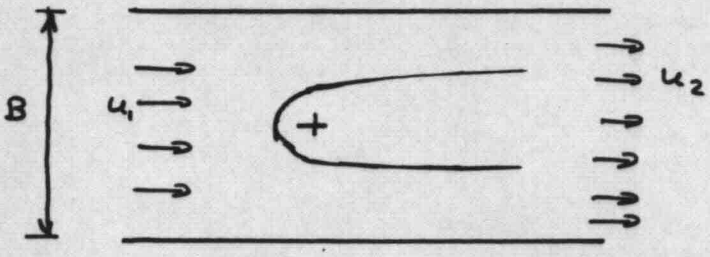
$\psi = U(r \sin\varphi + a\varphi$

De stroomlijn door het stuwpunt is de contour van het halflichaam.

voor $\varphi = \pi$ $\psi = U a \pi$

ψ is gelijk aan halve bronsterkte.

Contour $\frac{q\,b r}{2} = u \cdot y_c + \frac{q}{2\pi} \arctan \frac{y_c}{x_c}$

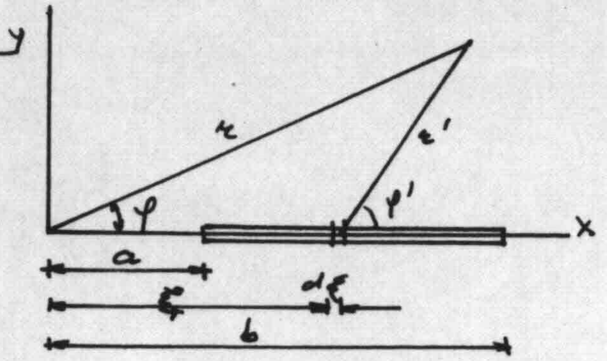


Voor de hiernaast getekende toestand gaan de aan het begin van dit hoofdstuk genoemde formules voor ϕ en ψ niet meer op doordat het water nu aan beide zijden op een eindige afstand begrensd wordt.

Continue verdeling van putten en bronnen in een oneindig brede parallelstroom.

bronsterkte per eenheid van lengte is q

belegging van $x = a$ tot $x = b$.



Voorwaarde voor een gesloten contour is.

$$\int_a^b q(\xi)\, d\xi = 0.$$

Als bovenstaande integraal $\neq 0$, dan blijft er een positieve - of negatieve waterproductie over.

Voor een pos. waterproductie is de contour aan $x = +\infty$ open (zie boven). en bij neg. waterproductie krijgt de contour de volgende gedaante.

Potentiaalfunctie

$$\varphi = U.x + \frac{1}{2\pi}\int_a^b d\xi\, q(\xi)\ln r' .$$

stroomfunctie.

$$\psi = U.y + \frac{1}{2\pi}\int_a^b d\xi\, q(\xi)\,\varphi'$$

$$= U.y + \frac{1}{2\pi}\int_a^b d\xi\, q(\xi)\arctan\frac{y}{x-\xi} .$$

De contour wordt bepaald door de stroomlijn door het stuwpunt $x < a \quad y = 0 \quad \varphi' = \pi$

$$\psi_c = \frac{1}{2\pi}\int_a^b d\xi\, q(\xi)\,\pi = \frac{1}{2}\underbrace{\int_a^b d\xi\, q(\xi)}_{0 \text{ bij gesloten contour.}} = 0$$

Voor een gesloten contour

$$\psi_c = 0 = U r_c \sin\varphi_c + \frac{1}{2\pi}\int_a^b d\xi\, q(\xi)\arctan\frac{r_c \sin\varphi_c}{r_c\cos\varphi_c - \xi} = 0$$

Dit geldt weer voor het geval dat de breedte niet begrensd is.

De stroom- en potentiaalfuncties voor bron-, parallelstroom etc. zijn in Bijlage afgeleid. Hier volgt alleen een samenvatting van de afgeleide formules.

<u>Parallelstroom</u>

$$\phi = U.x$$

$$\psi = U.y.$$

Bron:

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\left(\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y\right)$$

of

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\left(\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y\right).$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}x\,\sin\frac{\pi}{B}y}$$

$$u_x = \frac{Q}{2B}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}x}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

$$u_y = \frac{Q}{2B}.\,\frac{\sin\frac{2\pi}{B}y}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

Dipool

$$\phi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}x}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}\,\frac{\sin\frac{2\pi}{B}y}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

$$u_x = \frac{m}{2B}\,\frac{1 - \cosh\frac{2\pi}{B}x\,\cos\frac{2\pi}{B}y}{\left(\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y\right)^2}$$

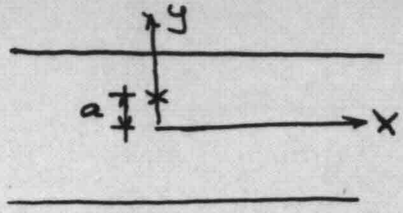
$$u_y = -\frac{m}{2B}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}x\,\sin\frac{2\pi}{B}y}{\left(\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y\right)^2}$$

Wervel

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}x\,\sin\frac{\pi}{B}y}$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\left(\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}.y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y\right).$$

bron op afstand $y = a$



$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln 4\left\{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x\,\sin\frac{\pi}{B}y+\cos\frac{\pi}{B}a\right)^2+\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y\right\}$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}x\,\sin\frac{\pi}{B}y+\cos\frac{\pi}{B}a}$$

$$u_x = \frac{Q}{2B}\,\frac{\cosh\frac{\pi}{B}x\,\sinh\frac{\pi}{B}x+\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cos\frac{\pi}{B}a\,\sin\frac{\pi}{B}y}{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x\,\cos\frac{\pi}{B}y+\cos\frac{\pi}{B}a\right)^2+\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

$$u_y = \frac{Q}{2B}\,\frac{\sin\frac{\pi}{B}y\,\cos\frac{\pi}{B}y+\cosh\frac{\pi}{B}x\,\cos\frac{\pi}{B}a\,\cos\frac{\pi}{B}y}{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x\,\cos\frac{\pi}{B}y+\cos\frac{\pi}{B}a\right)^2+\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

Continue verdeling van bronnen en putten van $x = a$ tot en met $x = b$

$$\phi = \frac{1}{2\pi}\int_a^b d\xi\, q(\xi)\,\frac{1}{2}\ln\left\{\cosh^2\frac{\pi}{B}(x-\xi)\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}(x-\xi)\,\cos^2\frac{\pi}{B}y\right\}$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\int_a^b d\xi\, q(\xi)\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}(x-\xi)\,\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}(x-\xi)\,\sin\frac{\pi}{B}y}$$

Kan men nu met behulp van bovenstaande formules de stroming om een schip in een kanaal voorstellen?

Als scheepstype is de „Johann Welker" gekozen.
Als kanaal is het „Main - Donau Kanal" gekozen.
Beiden zijn ontleent aan het Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau Nr. 27.

In. Bovengenoemde uitgaven zijn stroomsnelheiden net boven de bodem en talud opgenomen zodat deze prototype metingen vergeleken kunnen worden met berekende grootheden.

Het schip „Johann Welker"

Lang 80 m.

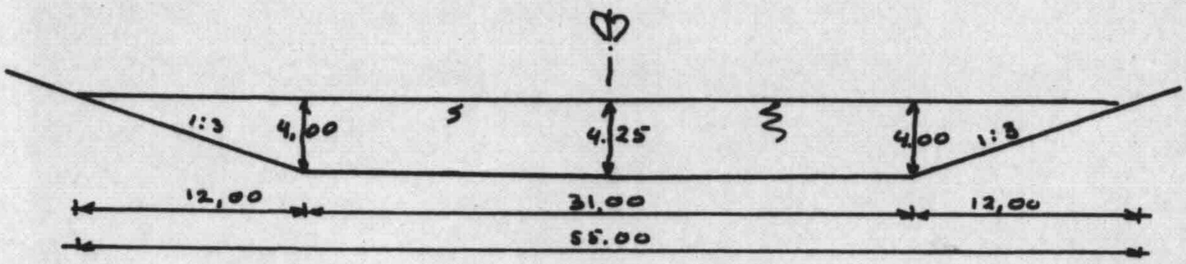
Breed 9.50 m.

Diepgang (afhankelijk van beladingsgraad)

in beschouwde gevallen steeds 2.50m.

Oppervlakte grootspant 9.50 x 2.50 = 23,75 m²

Dwarsprofiel Main – Donau kanaal.



F = kanaal oppervlak $= 31 \times \frac{4+4{,}25}{2} + 2 \cdot \frac{12 \times 4}{2} = 176\ m^2$

Geschematiseerd tot rechthoek met diepte 4 en breedte $\frac{176}{4} = 44$ m.

Voor schematisatie zie ook Hoofdstuk IV

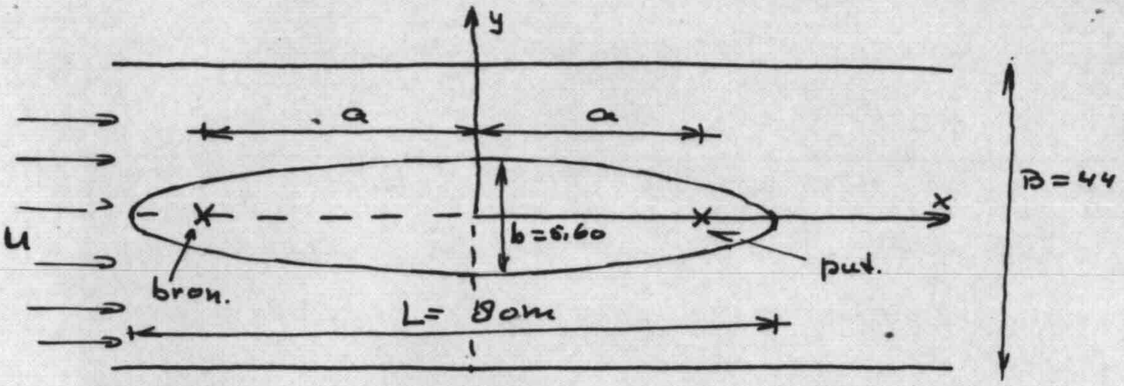
Het grootspant oppervlak wordt geschematiseerd tot een nieuwe breedte en nieuwe diepgang, waarbij de nieuwe diepgang de diepte van het geschematiseerde kanaal is. Zodoende wordt de nieuwe breedte $\frac{9.50 \times 2.50}{4} = 5{,}60$ m.

Hierdoor zijn de afmetingen in diepterichting vast.

Deze schematisatie is nodig omdat het wiskundig model slechts twee dimensionaal is.

Welke contour vorm geeft één put en één bron met dezelfde sterkte in een parallelstroom?

$$\phi = U.x + \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\left\{\cosh\frac{2\pi}{B}(x+a) - \cos\frac{2\pi}{B}y\right\}$$
$$- \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\left\{\cosh\frac{2\pi}{B}(x-a) - \cos\frac{2\pi}{B}y\right\}$$



$$u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} = U + \frac{Q}{2\pi}\,\frac{\pi}{B}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}(x+a)}{\cosh\frac{2\pi}{B}(x+a) - \cos\frac{2\pi}{B}y} +$$
$$- \frac{Q}{2\pi}\,\frac{\pi}{B}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}(x-a)}{\cosh\frac{2\pi}{B}(x-a) - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

$B = 44$

$$u_x = U + \frac{Q}{2.44}\,\frac{\sinh.\frac{2\pi}{44}(x+a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(x+a) - \cos\frac{2\pi}{44}y} - \frac{Q}{2.44}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(x-a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(x-a) - \cos\frac{2\pi}{44}y}$$

Als eis is nu gesteld dat de contour door de putten $x = +40, y = 0$, $x = -40$ $y = 0$

$x = 0$ $y = +\frac{5,60}{2}$ en $x = 0$ $y = -\frac{5,60}{2}$ moet gaan.

Bij deze eis wordt uitgerekend de afstand a. en de bron- en putsterkte Q zodat aan de eis voldaan wordt.

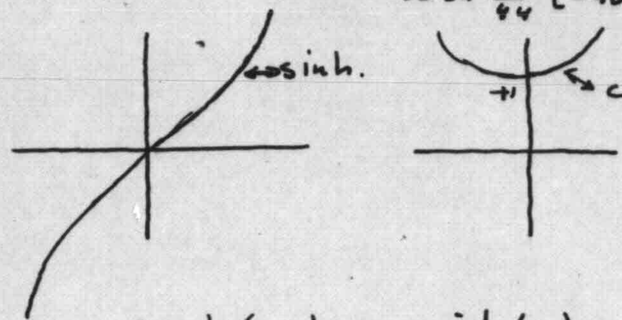
Voor $\left.\begin{array}{l} x = +40 \\ y = 0 \end{array}\right\} u = 0.$ (1)

$\left.\begin{array}{l} x = -40 \\ y = 0 \end{array}\right\} u = 0$ (2)

zodat de twee bovenstaande punten stuwpunten zijn.

$$(1) \rightarrow U_x = 0 = U + \frac{\mathcal{Q}}{2.44}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(40+a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(40+a)-1} - \frac{\mathcal{Q}}{2.44}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(40-a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(40-a)-1}$$

$$(2) \rightarrow U_x = 0 = U + \frac{\mathcal{Q}}{2.44}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(-40+a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(-40+a)-1} - \frac{\mathcal{Q}}{2.44}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(-40-a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(-40-a)-1}$$



$\sinh(-a) = -\sinh(a) \qquad \cosh(-a) = +\cosh(a).$

(2) verder uitgewerkt.

$$0 = U - \frac{\mathcal{Q}}{2.44}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(40-a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(40-a)-1} + \frac{\mathcal{Q}}{2.44}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(40+a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(40+a)+1} \qquad (a)$$

Dit is de zelfde vergelijking als de vergelijking die achter (1) $\rightarrow U_x = 0 = U +$ enz staat.

De algemene vergelijking voor een stroomlijn is.

$$\psi = Uy - \frac{\mathcal{Q}}{2\pi}\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{44}(x+a)\cos\frac{\pi}{44}y}{\cosh\frac{\pi}{44}(x+a)\sin\frac{\pi}{44}y} +$$

$$+ \frac{\mathcal{Q}}{2\pi}\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{44}(x-a)\cos\frac{\pi}{44}y}{\cosh\frac{\pi}{44}(x-a)\sin\frac{\pi}{44}y}.$$

Voor $x \leq -40$ en $x \geq +40$ is de contour van het schip de x-as (de lijn $y=0$). Het schip heeft hier een oneindig kleine breedte.

In het punt $x = -40$ splitst de contour zich in twee takken, die elk één zijkant van het schip voorstellen. Deze twee takken komen dan in het punt $x = +40$ weer samen om dan als één lijn (de x-as) verder te gaan.

De stroomlijn die de contour voorstelt moet dus door het punt $x = +40 \quad y = 0$ gaan.

$$\psi_c = u.0 - \frac{Q}{2\pi} \arctan\Big(\operatorname{tgh} \frac{\pi}{44}(40+a) \underbrace{\operatorname{cotg} 0}_{\infty}\Big) +$$

$$+ \frac{Q}{2\pi} \arctan\Big(\operatorname{tgh} \frac{\pi}{44}(40-a) \underbrace{\operatorname{cotg} 0}_{\infty}\Big)$$

$$\psi_c = 0 - \frac{Q}{2\pi} \arctan \infty + \frac{Q}{2\pi} \arctan \infty$$

$$\arctan \infty = \frac{\pi}{2}.$$

$$\psi_c = 0 - \frac{Q}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{Q}{2\pi} \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\psi_c = 0 = u.y_c - \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{44}(x_c+a) \cos \frac{\pi}{44} y_c}{\cosh \frac{\pi}{44}(x_c+a) \sin \frac{\pi}{44} y_c} +$$

$$+ \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{44}(x_c-a) \cos \frac{\pi}{44} y_c}{\cosh \frac{\pi}{44}(x_c-a) \sin \frac{\pi}{44} y_c}$$

Deze lijn moet ook door het punt $x = 0 \quad y = 2{,}80$ gaan.

$$0 = u.2{,}80 - \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{44} a \cos \frac{\pi}{44} 2{,}80}{\cosh \frac{\pi}{44} a \sin \frac{\pi}{44} \cdot 2{,}80} +$$

$$+ \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{44}(-a) \cos \frac{\pi}{44} 2{,}80}{\cosh \frac{\pi}{44}(-a) \sin \frac{\pi}{44} 2{,}80}$$

$$0 = U.2{,}80 - \frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctan} \frac{\sinh\frac{\pi}{44} a \cos\frac{\pi}{44} 2{,}80}{\cosh\frac{\pi}{44} a \sin\frac{\pi}{44} 2.80} - \frac{Q}{2\pi} \times$$

$$\times \operatorname{arctan} \frac{\sinh\frac{\pi}{44} a \cos\frac{\pi}{44} 2.80}{\cosh\frac{\pi}{44} a \sin\frac{\pi}{44} 2{,}80}.$$

$$U.2{,}80 = 2\frac{Q}{2\pi} \operatorname{arctan} \frac{\sinh\frac{\pi}{44} a \cos\frac{\pi}{44}.2{,}80}{\cosh\frac{\pi}{44} a \sin\frac{\pi}{44} 2{,}80} \qquad (b)$$

(a) was

$$U + \frac{Q}{2.44}\left(\frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(40+a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(40+a)-1} - \frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(40-a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(40-a)-1}\right) = 0$$

$$\frac{Q}{2\pi} = \frac{-U}{\frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(40+a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(40+a)-1} - \frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(40-a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(40-a)-1}} \cdot \frac{44}{\pi}$$

Boven staande waarde van $\frac{Q}{2\pi}$ in (b) ingevuld geeft.

$$U.\frac{2{,}80}{2} = \frac{44}{\pi} \frac{-U}{\frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(40+a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(40+a)-1} - \frac{\sinh\frac{2\pi}{44}(40-a)}{\cosh\frac{2\pi}{44}(40-a)-1}} \times$$

$$\times \operatorname{arctan} \frac{\sinh\frac{2\pi}{44} a \cos\frac{2\pi}{44}.2{,}80}{\cosh\frac{2\pi}{44} a \sin\frac{\pi}{44}.2{,}80}$$

Beide leden zijn door U te delen. Daarna volgt er een vergelijking waarin a de enige onbekende is. a is dus op te lossen.

Als a opgelost is, dan is met behulp van vergelijking (b) de verhouding tussen U en Q op te lossen.

De plaats van de put en de bron is dus onafhankelijk van de sterkte van de parallel-stroom U, terwijl de sterte van Q recht evenredig is met de sterkte van U.

Het reken werk is door de I.B.M. 360/65 van het Rekencentrum van T.H. Delft gedaan.

Vergelijking (b) is als volgt te schrijven

$$\text{(c)} \qquad \frac{\arctan \dfrac{\sinh \frac{\pi}{44} a \cos \frac{\pi}{44} \cdot 2{,}80}{\cosh \frac{\pi}{44} a \quad \sin \frac{\pi}{44} 2{,}80}}{\dfrac{\sinh \frac{2\pi}{44}(40+a)}{\cosh \frac{2\pi}{44}(40+a)-1} - \dfrac{\sinh \frac{2\pi}{44}(40-a)}{\cosh \frac{2\pi}{44}(40-a)-1}} = -1{,}40 \frac{\pi}{44} = -0{,}0999$$

In dit programma staat sinh steeds aangeduid als sink.

De volgende grootheden in het programma voor:

PI $= \pi = 3{,}14159$

QBR is de sterkte van de bron en de put.

Q is de bekende term van vergelijking (c)

Q $= -0{,}0999$.

A is de geschatte waarde van a

C is hulpgrootheid $\quad C = \pi/44$

D is hulpgrootheid. $D = C \times 2{,}80 = \frac{\pi}{44} \times 2{,}80$

E is hulpgrootheid. $E = 2 \times C = \frac{2\pi}{44}$

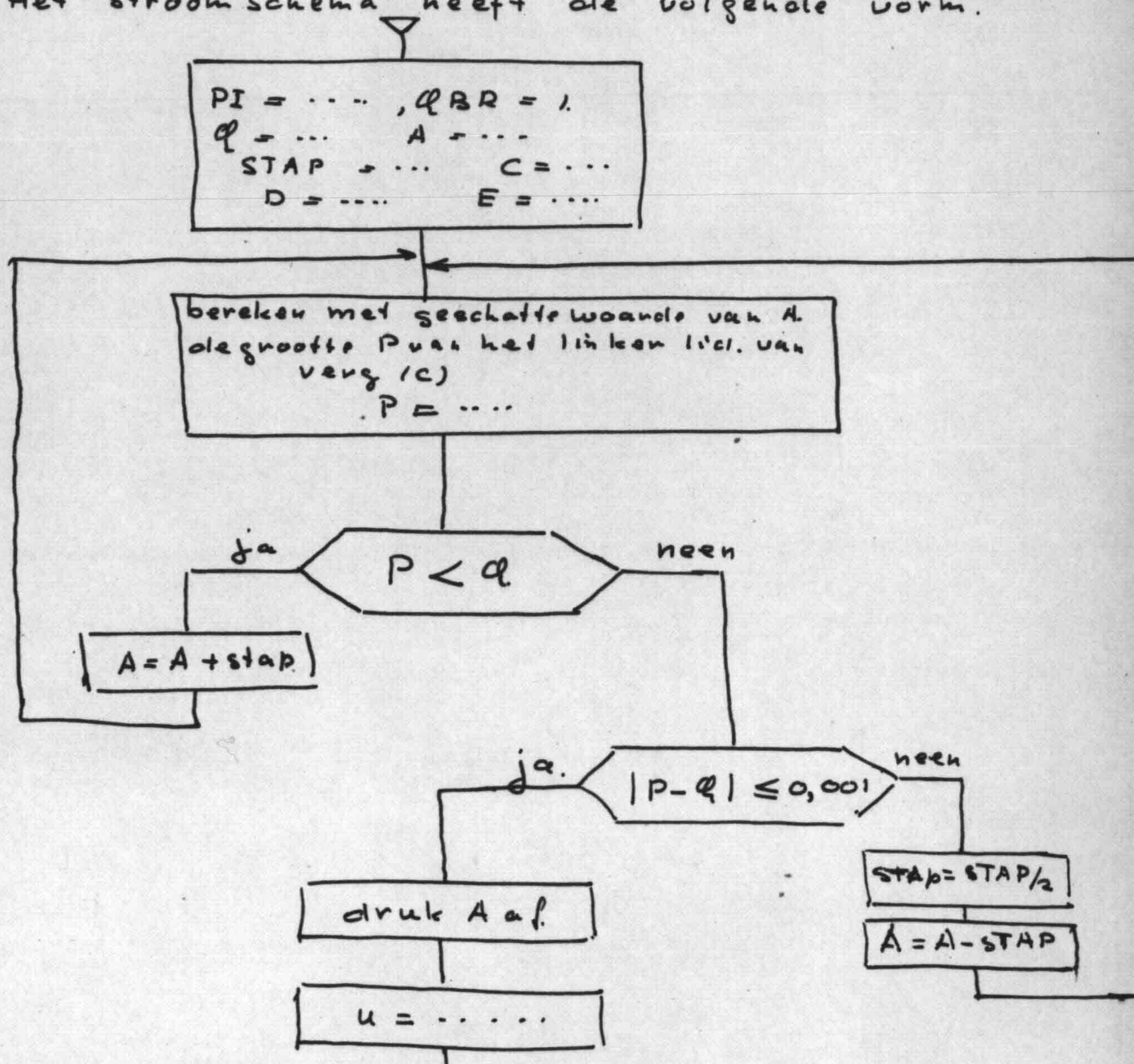
Verg. (c) met bovenstaande symbolen geschreven heeft de volgende gedaante

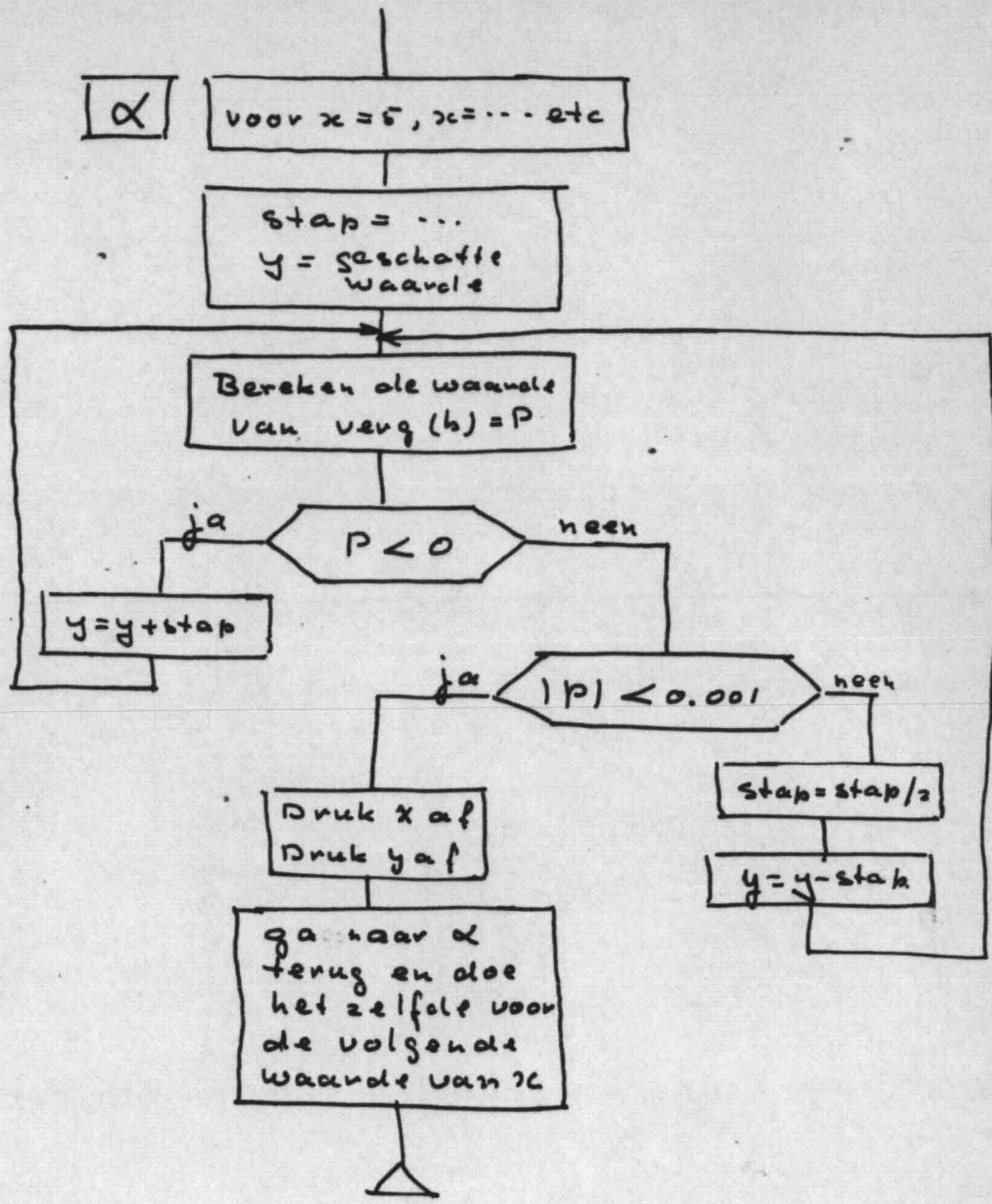
$$\frac{\arctan. \dfrac{\text{sink } C x a \cos D}{\cosh C x a \sin D}}{\dfrac{\text{sink } E x (40+a)}{\cosh E x (40+a)-1} - \dfrac{\text{sink } E x (40-a)}{\cosh E x (40-a)-1}} = Q.$$

Verder wordt nog een hulpgetal P gebruikt.

P is de waarde van linker lid bij een geschatte waarde van a. Deze waarde P wordt vergeleken met de waarde van rechterlid (Q). Is het verschil meer dan een bepaalde waarde, dan wordt een nieuwe schatting van a gedaan en het proces begint opnieuw net zolang dot het verschil tussen P en Q kleiner is dan een bepaalde waarde.

Het stroomschema heeft de volgende vorm.





De in het laatste deel van dit programma berekende waarden van y behorend bij een bepaalde waarden van x geven ~~de vormen~~ een verzameling punten waardoor de contour gaat, zodat men een indruk krijgt van de vorm die ontstaat.

Zie ook bijgevoegde I.B.M. uitvoer. (met kop W.WWB JR2
A)

Verder is het pakket ponskaarten bijgevoegd.

In het bovenstaande geval gaat de contour slechts door een paar voorgeschreven punten. Is het nu ook mogelijk om de contour voor te schrijven en daarbij een putten- en bronnen-belegging uit te rekenen?

Ja, dat is mogelijk. Men heeft dan een continue bronnenbelegging dus een oneindig groot aantal oneindige kleine bronnen en een oneindig aantal voorgeschreven punten waardoor de contour moet gaan. Zodoende heeft men ook een oneindig aantal vergelijkingen met evenzovele onbekenden.

Dit grote aantal vergelijking wordt samengevat in één vergelijking namelijk een integraalvergelijking.

De algemene potentiaalvergelijking voor een parallelstroom in een kanaal met bovendiën een gelijkmatige bronnenverdeling van 0 tot L is.

$$\phi = U.x + \frac{1}{2\pi}\int_0^L d\xi\, q(\xi)\, \tfrac{1}{2} \ln\left\{\cosh^2 \tfrac{\pi}{B}(x-\xi)\sin^2\tfrac{\pi}{B}y + \sinh^2\tfrac{\pi}{B}(x-\xi)\cos^2\tfrac{\pi}{B}y\right\}$$

De stroomlijn

$$\psi = U.y - \frac{1}{2\pi}\int_0^L d\xi\, q(\xi)\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}(x-\xi)\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}(x-\xi)\sin\frac{\pi}{B}y}$$

$$u_x = U + \frac{1}{2B}\int_0^L d\xi\, q(\xi)\frac{2\sinh\frac{\pi}{B}(x-\xi)\cosh\frac{\pi}{B}(x-\xi)}{\cosh^2\frac{\pi}{B}(x-\xi)\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}(x-\xi)\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

of

$$u_x = U + \frac{1}{2B}\int_0^L d\xi\, q(\xi)\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}(x-\xi)}{\cosh\frac{2\pi}{B}(x-\xi) - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

In de punten $x=0$ $y=0$ en $x=L$ $y=0$ treden stuwpunten op dus daar is $u_x = 0$

$$0 = u + \frac{1}{2B}\int_0^L d\xi\, q(\xi)\, \frac{\sinh \frac{2\pi}{B}(0-\xi)}{\cosh \frac{2\pi}{B}(0-\xi) - \cos 0}$$

$$0 = u + \frac{1}{2B}\int_0^L d\xi\, q(\xi)\, \frac{-\sinh \frac{2\pi}{B}\xi}{\cosh \frac{2\pi}{B}\xi - 1} \qquad (1)$$

$$0 = u + \frac{1}{2B}\int_0^L d\xi\, q(\xi)\, \frac{\sinh \frac{2\pi}{B}(L-\xi)}{\cosh \frac{2\pi}{B}(L-\xi) - 1} \qquad (2)$$

$$\sinh 2\alpha = 2 \sinh\alpha \cosh\alpha$$

$$\cosh 2\alpha - 1 = 2 \sinh^2\alpha.$$

$$\frac{\sinh 2\alpha}{\cosh 2\alpha - 1} = \frac{2\sinh\alpha \cosh\alpha}{2\sinh^2\alpha} = \frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha} \quad \text{als } \sinh\alpha \neq 0$$

bovenstaande op (1) en (2) toegepast.

$$0 = u - \frac{1}{2B}\int_0^L d\xi\, q(\xi)\, \frac{\cosh \frac{\pi}{B}\xi}{\sinh \frac{\pi}{B}\xi} \qquad (3)$$

$$0 = u + \frac{1}{2B}\int_0^L d\xi\, q(\xi)\, \frac{\cosh \frac{\pi}{B}(L-\xi)}{\sinh \frac{\pi}{B}(L-\xi)} \qquad (4)$$

Als in vergelijking (3)

$\xi = 0$ dan is $\sinh \frac{\pi}{B}\xi = 0$ en hebben we door nul gedeeld, wat niet veroorloofd is.

Teruggaande naar vergelijking (1).

$\xi = 0$ geeft.

$$0 = u + \frac{1}{2\pi}\int_0^L d\xi\, q(\xi)\, \frac{0}{1-1}$$

dus is integraal onbepaald.

Heeft ξ een kleine waarde δ

Dan geldt vergelijking (3)

$$0 = u + \frac{1}{2B}\int_0^L d\xi \, q(\xi) \, \frac{\cosh \frac{\pi}{B}\xi}{\sinh \frac{\pi}{B}\xi}$$

gaat ξ nu naar nul dan gaat.

$\dfrac{\cosh \frac{\pi}{B}\xi}{\sinh \frac{\pi}{B}\xi}$ naar ∞

Als $q(\xi)$ een bepaalde waarde heeft dan gaat dus de integraal $\dfrac{1}{2B}\int_0^L d\xi \, q(\xi) \dfrac{\cosh \frac{\pi}{B}\xi}{\sinh \frac{\pi}{B}\xi}$

naar ∞, waarna de gelijkheid niet meer opgaat 0 is niet gelijk aan $u + \infty$.

Als $q(\xi)$ voor $\xi = 0$ gelijk aan nul is dan wordt de waarde van $\dfrac{1}{2\pi}\int_0^L d\xi \, q(\xi) \dfrac{\cosh \frac{\pi}{B}\xi}{\sinh \frac{\pi}{B}\xi}$

onbepaald en kan dus de waarde u hebben zodat de gelijkheid $0 = u - u$ wel opgaat.

Een zelfde redenering kan men opzetten voor de vergelijking (2) maar nu voor $\xi = L$

Hieruit volgt dat $q(\xi)_{\xi=0} = 0$ en $q(\xi)_{\xi=L} = 0$.

Heeft de vergelijking $\psi = u.y - \frac{1}{2\pi}\int_0^L d\xi \, q(\xi) \times$

$$\times \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}(x-\xi) \cos \frac{\pi}{B} y}{\cosh \frac{\pi}{B}(x-\xi) \sin \frac{\pi}{B} y}$$ nog punten

waar deze functie onbepaald is?

voor $y \neq 0$

$\dfrac{\cos \frac{\pi}{B} y}{\sin \frac{\pi}{B} y}$ heeft dan een bepaalde waarde.

Als $x = \xi$

$\sinh \frac{\pi}{B}(x-\xi) = 0$

$\cosh \frac{\pi}{B}(x-\xi) = 1.$

$\psi = u.y - \frac{1}{2\pi}\int_0^L d\xi\, q(\xi)$ arctan 0

De integraal krijgt de waarde nul.

Als $y = 0$ dan wordt.

$$\frac{\cos\frac{\pi}{B} y}{\sin\frac{\pi}{B} y} = \infty = \frac{1}{0}$$

Als dan ooknog $x = \xi$.

dan wordt de integraal.

$$\int_0^L d\xi\, q(\xi) \arctan \frac{0 \cdot 1}{1 \cdot 0} =$$

$$\int_0^L d\xi\, q(\xi) \arctan (\text{iets onbepaalds}).$$

$y=0$ komt slechts in twee punten voor n.m.l. $x=0$ en $x=L$.

In deze twee punten is $q(\xi) = 0$.

Dus voor de punten $x=0$ en $x=L$ wordt de integraal. $\int d\xi\ .0.\ \arctan(\text{iets bepaalds}) = 0.$

De combinatie $y=0$ en $x=\xi$ geeft ook geen moeilijkheden.

De volgende combinatie $y=0$ en $x \neq \xi$

$$\int_0^L d\xi\, q(\xi) \arctan \frac{\sinh\frac{\pi}{B}(x-\xi)}{\cosh\frac{\pi}{B}(x-\xi)} \frac{1}{0} =$$

$$\int_0^L d\xi\, q(\xi) \arctan \infty = \int_0^L d\xi\, q(\xi) . \frac{\pi}{2} =$$

$$\frac{\pi}{2} \underbrace{\int_0^L d\xi\, q(\xi)}_{0} = 0.$$

Er blijft nog over de combinatie

$y \neq 0$ en $x \neq \xi$

Nu heeft zowel

$\dfrac{\sinh \pi/B(x-\xi)}{\cosh \frac{\pi}{B}(x-\xi)}$ als $\dfrac{\cos \frac{\pi}{B} y}{\sin \frac{\pi}{B} y}$ een bepaalde

waarde zodat de arctan $\dfrac{\sinh \cdots \cos \cdots}{\cosh \cdots \sin \cdots}$ ook

een bepaalde waarde krijgt.

waardoor de integraal $\int^{L} d\xi\, q(\xi) \arctan \frac{\cdots}{\cdots}$

ook een waarde krijgt die bepaald is.

Het schip wordt voorgesteld door de contour die ontstaat uit een parallel stroom, continue putten- en bronnenverdeling en iets dat de schroef werking weergeeft. De schroefwerking wordt voorgesteld door een put met debiet Q_s op een afstand E_s van de voorkant van het schip (zie ook Hoofdstuk IV: Schematisaties).

De algemene vergelijking van een stroomlijn is.

$$\psi = U.y - \frac{1}{2\pi}\int_0^L d\xi\, q(\xi) \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}(x-\xi) \cos \frac{\pi}{B} y}{\cosh \frac{\pi}{B}(x-\xi) \sin \frac{\pi}{B} y} +$$

$$- \frac{Q_s}{2\pi} \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}(x-E_s) \cos \frac{\pi}{B} y}{\cosh \frac{\pi}{B}(x-E_s) \sin \frac{\pi}{B} y}.$$

De gewenste contour gaat door het punt (0.0).

$$\psi_c = U.0. - \frac{1}{2\pi}\int_0^L d\xi\, q(\xi) \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}(0-\xi) \cos \frac{\pi}{B} 0}{\cosh \frac{\pi}{B}(0-\xi) \sin \frac{\pi}{B} 0} +$$

$$- \frac{Q_s}{2\pi} \arctan \frac{\sinh \pi/B(0-E_s) \cos \frac{\pi}{B} 0}{\cosh \pi/B(0-E_s) \sin \frac{\pi}{B} 0}.$$

$$\psi_c = 0 - 0 - \frac{q_s}{2\pi} \arctan \infty$$

$$\psi_c = -\frac{q_s}{2\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{q_s}{4}$$

De gevraagde contour is

$$\psi = \psi_c = u.y_c - \frac{1}{2\pi} \int_0^L d\xi \, q(\xi) \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}(x_c - \xi) \cos \frac{\pi}{B} y_c}{\cosh \frac{\pi}{B}(x_c - \xi) \sin \frac{\pi}{B} y_c} +$$

$$- \frac{q_s}{2\pi} \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}(x_c - E_s) \cos \frac{\pi}{B} y_c}{\cosh \frac{\pi}{B}(x_c - E_s) \sin \frac{\pi}{B} y_c} = -\frac{q_s}{4}$$

Zoals vergelijking nu geschreven is, is het deel

$\int_0^L d\xi \, q(\xi)$ .... op te vatten als een stuk.

met een oneindig groot aantal bronnen.

Met het oog op het oplossing van bovenstaande vergelijking met behulp van een computer is het aantal onbekende bronnen en putten terug gebracht tot n. n.m.l. q_1, q_2, q_3, q_4 ...... q_{n-2}, q_{n-1} en q_n resp. op afstand $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ ...... ξ_{n-2}, ξ_{n-1} en ξ_n.

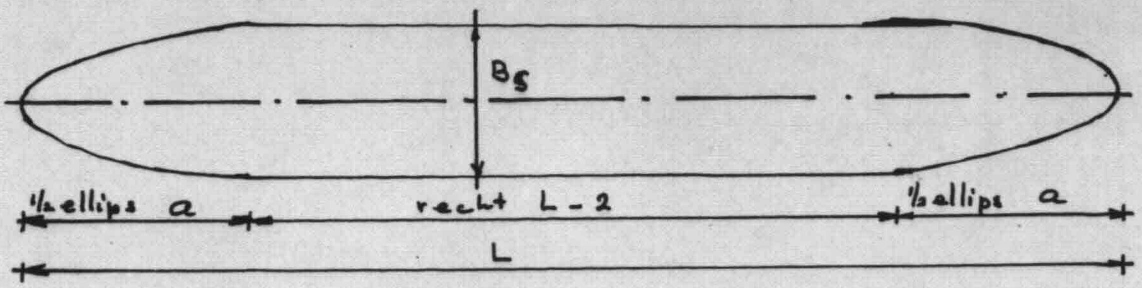
De vergelijking krijgt dan de volgende vorm

$$u.y_c - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{n} q_i \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}(x_c - \xi_i) \cos \frac{\pi}{B} y_c}{\cosh \frac{\pi}{B}(x_c - \xi_i) \sin \frac{\pi}{B} y_c} +$$

$$- \frac{q_s}{2\pi} \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}(x_c - E_s) \cos \frac{\pi}{B} y_c}{\cosh \frac{\pi}{B}(x_c - E_s) \sin \frac{\pi}{B} y_c} + \frac{q_s}{4} = 0$$

De contour ligt vast. bij een bepaalde x_c hoort een y_c zodat aan de van te voren vast gestelde contour wordt voldaan.

De contour wordt voor gesteld door twee halve ellipsen (eén aan de voorkant de andere aan de achterzijde) verbonden met rechten.



De breedte Bs ligt vast. de lengte van de halve ellips is nog variabel. in het programma en wordt door de verhouding D tussen a en ½Bs aangegeven. Het programma om de onbekende bronnen en putten uit te rekenen is als volgt opgesteld.

<u>De declaraties</u>:

L = scheepslengte

STAP = stapgrootte

K = Kanaalbreedte

HST = halve stapgrootte = STAP/2

HB = halve scheepsbreedte

BS = Scheepsbreedte

U = vaarsnelheid,

DX = stap in x-richting ¹)

DY = stap in y-richting ¹)

CW = verband tussen DX en DY ¹)

QS = de biet van de schroef (als bron)

ES = Afstand tussen voorkant schip en schroef

DE = hulpgrootheid.

I = index voor numerieke oplossing

J = index voor numerieke oplossing

AL = richting van de raaklijn aan de contour

M = aantal eindige bronnen en putten, die de continue verdeling vervangt.

S = indeling van x-coördinaten

T = indeling van y-coördinaten

V = index van snelheid.

W = index van snelheid.

TEL = telgrootheid

PAAR = aantal paren van U en Qs waarvan de waarden van U en Qs op de getal kaart gegeven zijn.

N = 1)

D = verhouding tussen lange en korte as van de ellips waarmee de voor- en achterkant van het schip worden voorgesteld.

E = De plaats van de bronnen.

B[1:m] = de sterkte van de onbekende bronnen en putten.

B[m+1] = het product van de matrix van de coefficienten van de onbekende putten en bronnen.

PI = 3.14159

C = hulpgrootheid = PI/K

P = hulpgrootheid = 2×C = (2×PI)/K

X = x-coördinaat

Y = y-coördinaat

Z = afstand tussen een bepaald punt X en de schroef.

SI = hulpgrootheid = SIN (C*Y)

CO = hulpgrootheid = COS (C*Y)

UXO = snelheid in het punt x=0, y=0.

UXL = snelheid in het punt x=L, y=a

UX = snelheid in X-richting.

UY = snelheid in Y-richting

TG = verhouding van de snelheden in x- en y-richting = UY/UX

ZA = afstand tussen een punt x en een bepaalde bron.

A = coefficienten van de vergelijking van de stroomlijn. A[ ] Q[ ] + A[ ]Q[ ]+.........

VX = snelheid in X richting

VY = snelheid in Y richting.

VT = $\sqrt{VX^2 + VY^2}$

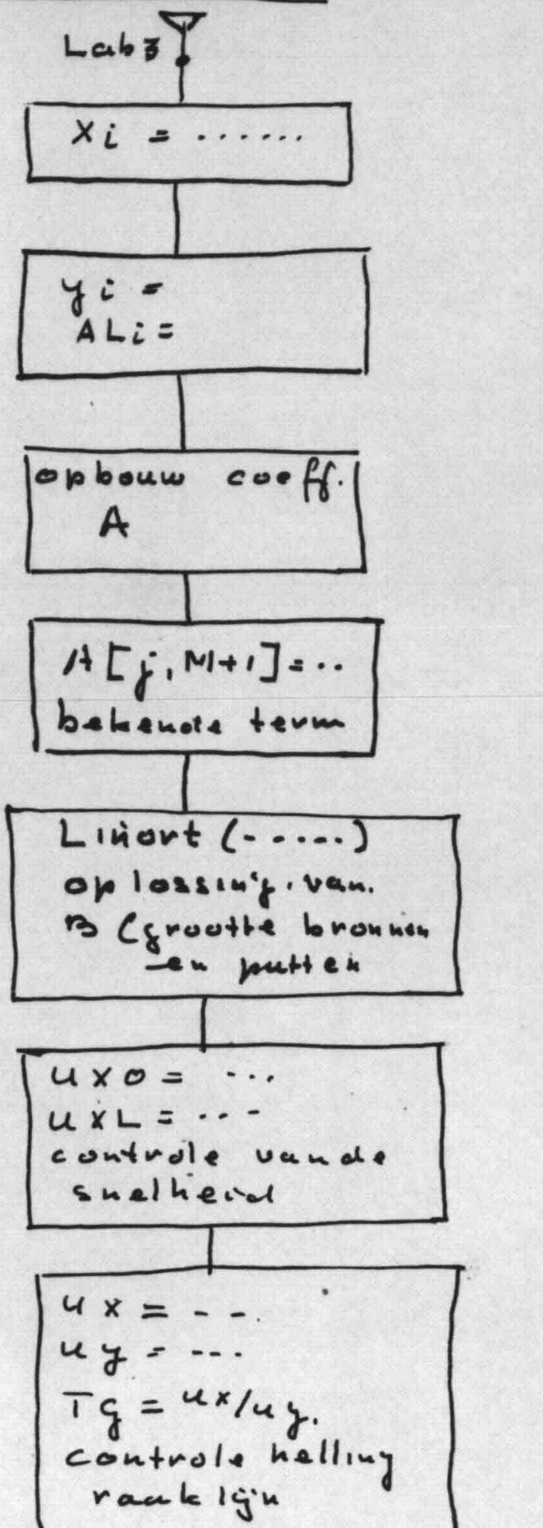
NO = hulpgrootheid

QI = hulpgrootheid

ZC = hulpgrootheid.

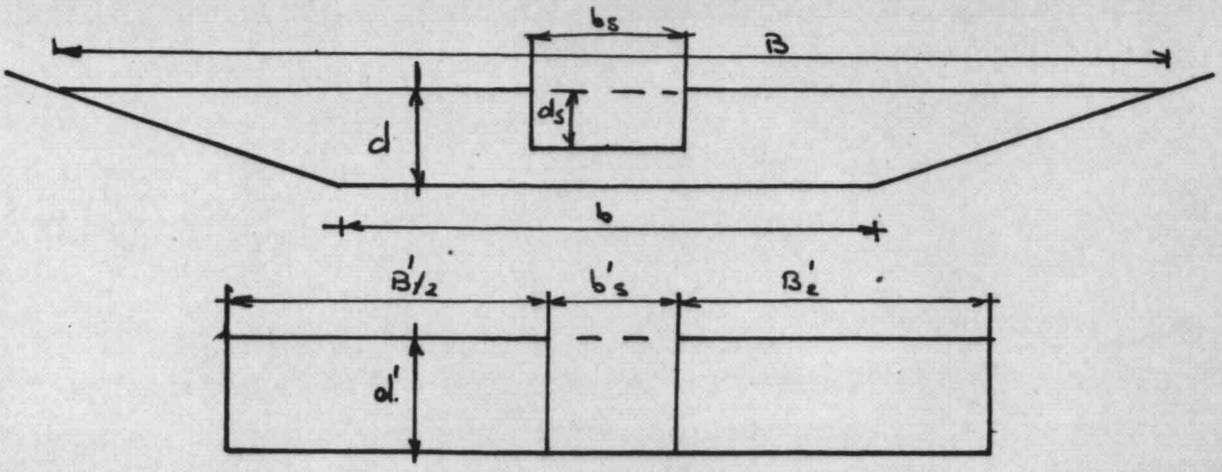
[1]) deze declaraties worden niet gebruikt. Door een andere verdeling van de punten X_1, X_2 etc. zijn ze overbodig geworden.

Stroomschema.



Het aantal stappen moet men niet veel groter dan 50 nemen, wil men in classe I vallen.
Doordat de kromming aan de uiteinden van een schip het grootst is, is hier voor de beide uiteinden een kleinere stapgrootte gekozen dan voor het midden gedeelte.
In het voorgaande is steeds voor een schip gesproken maar de voorgeschreven contour kan van alles zijn. b.v. een brugpijler. of. scheidings wanden in een uitwateringssluis.
Bij deze laatst genoemde voorbeelden geldt. natuurlijk wel. dat het schroefdebiet uitgeschakeld moet worden. Dit uitschakelen is. zeer éénvoudig te doen door. $Q_s = 0$ te geven. Door $Q_s = 0$ tegeven en een contour van een schip tegeven krijgt men de stroming om een gesleept schip. in een kanaal.
Bijgevoegd. is de computer uitvoer voor een schip waarbij $Q_s = 0$.
De laatste poging om ook goede uitvoer tekrijgen voor het geval $Q_s =$ bepaalde waarde, is mislukt, doordat. een kaart niet gelezen is, zodat er een foutboodschap volgde.

Hoofdstuk IV Schematisatie



Een kanaal zal meestal een trapezium vorm hebben, daar in't voorgaande hoofdstuk een potentiaalstroom berekening is uitgevoerd en deze berekening 2-dimensionaal is, zal men het dwarsprofiel moeten schematiseren tot een profiel dat over de waterdiepte constant is.

Bij de voorgaande berekening is de schematisatie als volgt uitgevoerd:

De diepte is gelijk gehouden $d = d'$

Het schip wordt gedacht als een smaller maar dieper schip. Zo diep dat de diepgang gelijk is aan de waterdiepte. De scheepsbreedte wordt dan

$$b'_s = \frac{b_s \cdot d_s}{d'} = \frac{b_s \cdot d_s}{d} \qquad (d = d').$$

En het overblijvende natte profiel blijft gelijk.

$$B' \cdot d' = \frac{B + b}{2} \cdot d - b_s \cdot d_s$$

Men kan zich afvragen is deze schematisatie de beste of zijn er betere schematisaties.

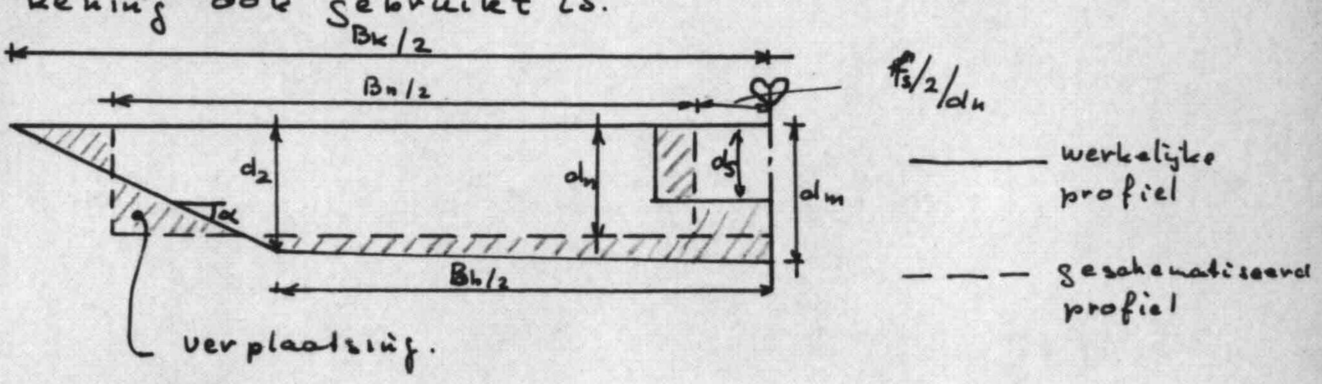
Er zijn echter 3 dingen waar men aan moet voldoen:

1. Het dwarsprofiel van het schip moet gelijk blijven. ($f = b_s \times d_s$)
2. Het dwarsprofiel van het kanaal moet gelijk-blijven
3. Het nieuwe profiel moet over de waterdiepte constant zijn.

Met deze eisen rekening krijgt men een bak-profiel waarvan d', B' en b'_s nog kunnen variëren met die beperking dat B' en b'_s beide functies van d' zijn.

Wat de ideale combinatie van d', B' en b'_s is, is in dit afstudeerwerk niet bekeken.

Wel is bekeken de uitkomst van het nieuwe profiel als men de som van de verplaatsingen zo klein mogelijk houdt, uitgaande van het profiel van het Main-Donau kanaal wat bij de voorgaande berekening ook gebruikt is.



Totale verplaatsing = G

Nu dn en bn zo gezocht dat G minimaal is

Met andere woorden men moet de combinatie van d_n en B_n vinden die aan de volgende voorwaarde voldoet

$$\frac{\partial G}{\partial d_n} + \frac{\partial G}{\partial B_n}\,\frac{dB_n}{dd_n} = 0$$

$$G = \left(\frac{d_m + d_z}{2} - d_n\right)\frac{B_b}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{(d_z - d_n)^2}{tg\alpha} + \frac{1}{2}\left\{\frac{B_n}{2} + \frac{f_s}{2d_n} + \right.$$

$$\left. - \left(\frac{B_b}{2} + \frac{d_z - d_n}{tg\alpha}\right)\right\}^2 tg\alpha + \frac{1}{2}\left\{\frac{B_k}{2} - \left(\frac{B_n}{2} + \frac{f_s}{2d_n}\right)\right\}^2 tg\alpha$$

$$+ \frac{f_s}{2} - \frac{f_s d_s}{2d_n} + \frac{f_s}{2} - \frac{f_s d}{2d_n}$$

$$\frac{\partial G}{\partial d_n} + \frac{\partial G}{\partial B_n}\cdot\frac{dB_n}{dd_n} = 0$$

$$\frac{tg\alpha}{2}\left(\frac{B_n}{2} + \frac{f_s}{2d_n} - \frac{B_b}{2} - \frac{d_z}{tg\alpha} + \frac{d_n}{tg\alpha}\right) - \frac{tg\alpha}{2}\left(\frac{B_k}{2} - \frac{B_n}{2} - \frac{f_s}{2d_n}\right) +$$

$$+ \left\{ - \frac{B_b}{2} - \frac{(d_z - d_n)}{tg\alpha} + tg\alpha\left(\frac{B_n}{2} + \frac{f_s}{2d_n} - \frac{B_b}{2} - \frac{d_z}{tg\alpha} + \frac{d_n}{tg\alpha}\right) \times \right.$$

$$\left. \times\left(-\frac{f_s}{2d_n^2} + \frac{1}{tg\alpha}\right) + tg\alpha\left(\frac{B_k}{2} - \frac{B_n}{2} - \frac{f_s}{2d_n}\right)\left(\frac{f_s}{2d_n^2}\right) + \frac{f_s d_s}{d_n^2}\right\} \times$$

$$\times \underbrace{\left\{ - \frac{B_b d_m}{2B_n^2} - \frac{B_k d_z}{2B_n^2} + \frac{f_s}{B_n^2}\right\}}_{\text{Dit gedeelte stelt } \frac{dB_n}{dd_n} \text{ voor.}} = 0$$

Verder uitgewerkt geeft dit een 4e graads vergelijking in d_n als men bij het uitwerken het verband tussen B_n en d_n ingevuld heeft.

$$(B_k d_z + B_b d_m)^2 + \left\{ (B_k d_z + B_b d_m)(-2B_k) + \right.$$

$$\left. - \frac{8 f_s d_s}{tg\alpha}\right\} d_n + \left(\frac{8 B_b}{tg\alpha} + \frac{16 d_z}{tg^2\alpha}\right) d_n^3 - \frac{16 d_n^4}{tg^2\alpha} = 0$$

De gegevens van het Main-Donau kanaal zijn de volgende

$B_b = 31.00$ m

$B_k = 55.00$ m

$d_a = 4.00$ m.

$d_m = 4.25$ m.

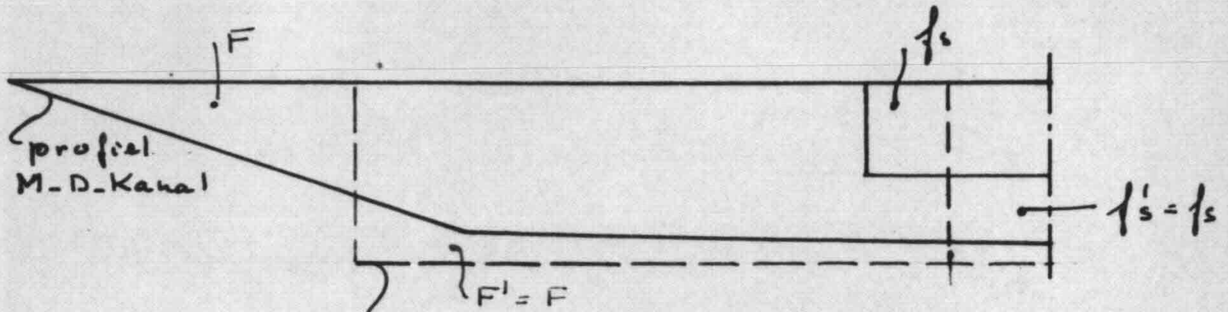
$d_s = 2.50$ m

$f_s = 9.50 \times 2.50$ m^2

$tg\,\alpha = 1/3$

De combinatie $d_n = 4.80$ m met bijbehorende

$B_n = 31.70$ m^2 geeft de minimale verplaatsing.



geschematiseerd profiel waarbij de verplaatsingen het kleinst zijn.

Wat de beste schematisatie is, is niet verder bekeken.

Schematisatie Schroef en berekening schroefdebiet.

Gegevens van een schroef, zoals bij een schip van het „Johann Welker" type, gebruikt wordt, zijn ontleent aan een artikel van Prof. Ir. J.H Krietenmeyer: „Transport in de toekomst is" uit Intermediair van 28 maart 1969.

Schroef diameter. $D = 1600$ mm.

Spoed $H = 1600$ mm op 0,7 R

$H/D = 1.0$.

$Fa/F = 0,55$

Aantal. bladen 4.

Aan het boek - Weerstand en Voortstuwing van Schepen - door. Dr.Ir. W.P.A. van Lammeren is de bijgevoegde schroefkarakteristiek van een vrijvarende schroef ontleend.

Voor bovenstaande gegevens gelden de met een pijltje aangegeven krommen.

De stuwkracht $S = \Delta p \times F$

Δp is drukverschil tussen voorkant en achterkant van de schroef

$S = \rho Q\, ca$ $\quad ca$ = snelheidvermeerdering.

$Q = F v_1$ $\quad v_1$ = snelheid t.p.v. de schroef.

Ve is snelheid. van het water t.o.v. schip.

Het volgende is ontleend aan het reeds op deze pag. genoemde boek. - Weerstand en Voortstuwing van Schepen.

$$C_a = \frac{S}{\rho Q} \qquad v_1 = v_e + \frac{c_a}{2}$$

$$Q = F\left(v_e + \frac{S}{2\rho Q}\right)$$

$$Q = F v_e + \frac{FS}{2\rho Q}.$$

$$Q^2 - F v_e Q - \frac{FS}{2\rho} = 0$$

$$Q = \frac{F v_e \pm \sqrt{F^2 v_e^2 + 4FS/2\rho}}{2}.$$

uit physische overwegingen voldoet alleen het + teken (− teken geeft neg. debiet).

$$Q = 1/2\, F v_e + \frac{1}{2}\sqrt{F^2 v_e^2 + \frac{2FS}{\rho}}$$

$$k_s = \frac{S}{\rho D^4 n^2} \qquad n = \text{toerental}$$

$$\Lambda = \frac{v_e}{nD}$$

Het verband tussen k_s en Λ is in de karakteristieke gegeven

$$Q = 1/2\, F v_e + \frac{1}{2}\sqrt{F^2 v_e^2 + 2\, F D^4 n^2 k_s}$$

Van bovenstaande vergelijking is Q te bepalen als k_s bekend is. en k_s is te bepalen uit grafiek als Λ bekend is, dit alles bij gegeven F, v_e en D en n.

Λ is te bepalen uit $\frac{v_e}{nD} = \Lambda$

In Mitteilungsblatt der Bundesanstalt für Wasserbau Nr 27. zijn een serie proeven opgenomen waarbij v en n gegeven zijn; zodat voor deze gevallen Q te berekenen is.

Tevens is in het genoemde blad het vermogen gegeven.

Vermogen in Pk $= \frac{Nw}{75}$, waarbij Nw het vermogen in kgm/sec is.

$Nw = 2\pi\ M\ n$ $\qquad$ M = askoppel in kgm.

Verder is.

$Km = \frac{M}{\rho D^5 n^2}$ zodat. Km bij een gegeven vermogen en diameter en toerental te berekenen is. Ook tussen Km en Ks bestaat een verband zoals aangegeven is in de schroef-karakteristiek.

Dus Q is op twee manieren te berekenen n.m.l. uitgaande van de watersnelheid. waarmee het water de schroef intreedt of uitgaande van het vermogen.

Neemt men aan dat de stroom rond het schip gelijkmatig verdeeld is, dan is de intree snelheid in de schroef $= \frac{V.F}{(F-f)}$ waarin V de snelheid van het water voor-en achter het schip t.o.v. het schip is.

Neemt men één bepaalde proef en berekent men de Q uit het vermogen en de watersnelheid dan komen daar twee verschillende waarden voor Q uit. De waarde berekend uit het vermogen is groter dan de uit de snelheid berekende waarde van Q. Dit laatste is te verklaren uit het feit dat de intree snelheid van de schroef te laag is. De werkelijke intreesnelheid is groter dan berekende gelijkmatige verdeelde snelheid doordat de gelijkmatige verdeling niet opgaat.

Het schroefdebiet is dan ook berekend uitgaande van het vermogen.

Voor de proeven 3.1 t/m 3.7 uit Mitteilungsblatt nr 27. zijn dat de in onderstaande tabel opgenomen waarden.

proef.	V m/s	n. u/min	PD. Pk	Km	Ks.	Q uit Ks m³/sec.	Q uit V.
3.1	1.76	100	1.667	0.00863	0.020	6.07	4.68
3.2	1.81	92	1.533	0.0120	0.042	5.91	4.58
3.3	2.39	157	2.62	0.00728	0.010	9.36	6.86
3.4	2.73	190	3.17	0.00758	0.012	11.27.	8.09
3.5	2.89	218	3.64	0.00755	0.012	12.94	9.09.
3.6	3.07	238	3.97	0.00765	0.012	14.06	9.70
3.7	3.205	275	4.58	0.00781	0.012	16.24	10.79

De schroef zuigt het water alzijdig aan en perst het in een straal achter weg.

In het programma is de aanzuiging benaderd door een bron met negatief debiet.

De wegpersing door een parallelstroom met een kleine breedte.

Denkt men de energie uitwisseling tussen schroefstraal en omliggende water enige meters achter het schip dan zal de schroefstraal zelf de stroming rond het schip niet beïnvloeden, zodat de invloed van deze extra parallelstroom in het programma te verwaarlozen is.
Vergelijkt men nu het debiet voor en achter het schip dan zal men een verschil vinden.
Men zal achter een debiet vinden dat kleiner is en wel zoveel kleiner als het debiet van de schroef is.

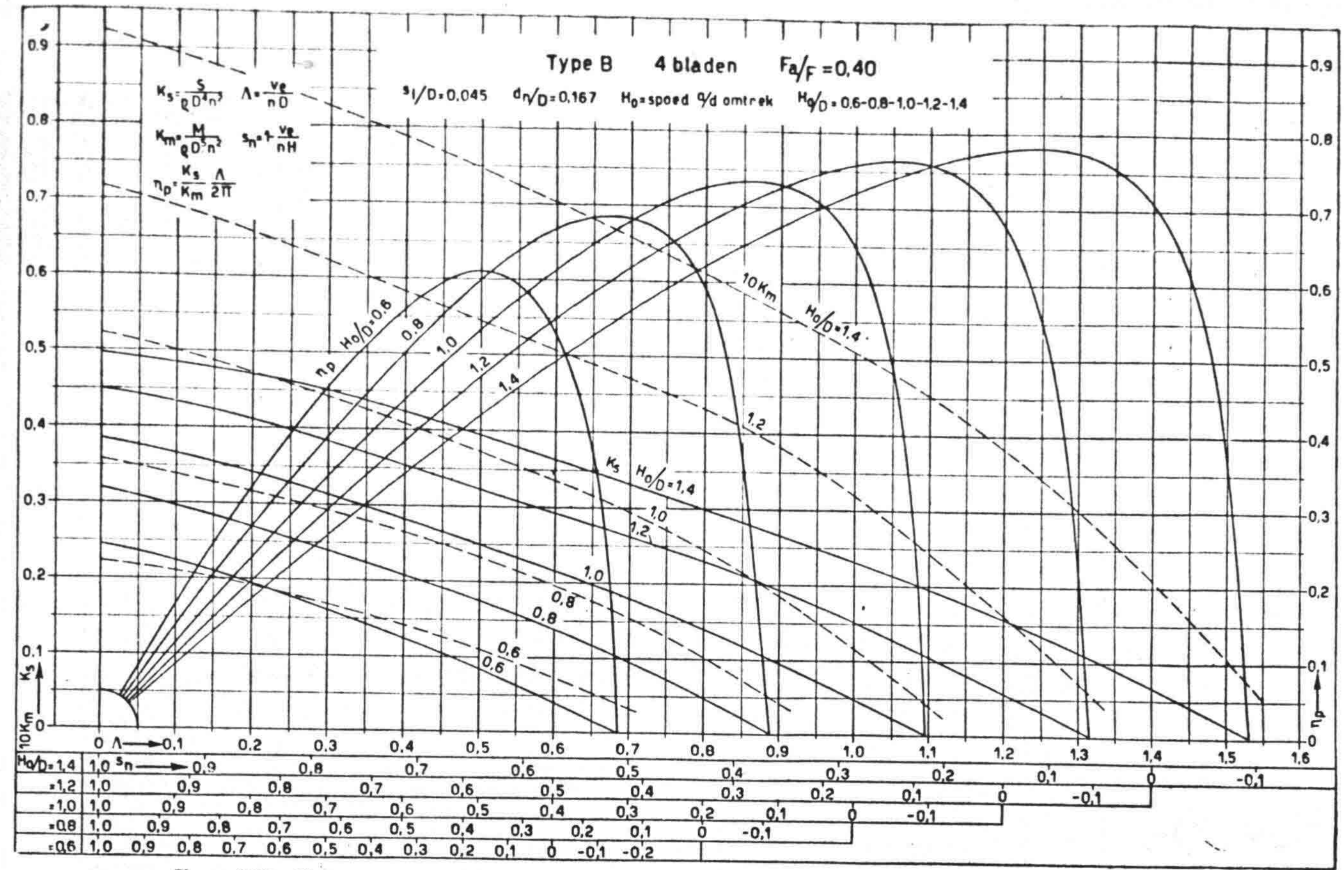


FIG. 109. RRSULTATEN VAN DE VRIJVARENDE VIERBLADIGE SCHROEVEN, TYPE B.4.40

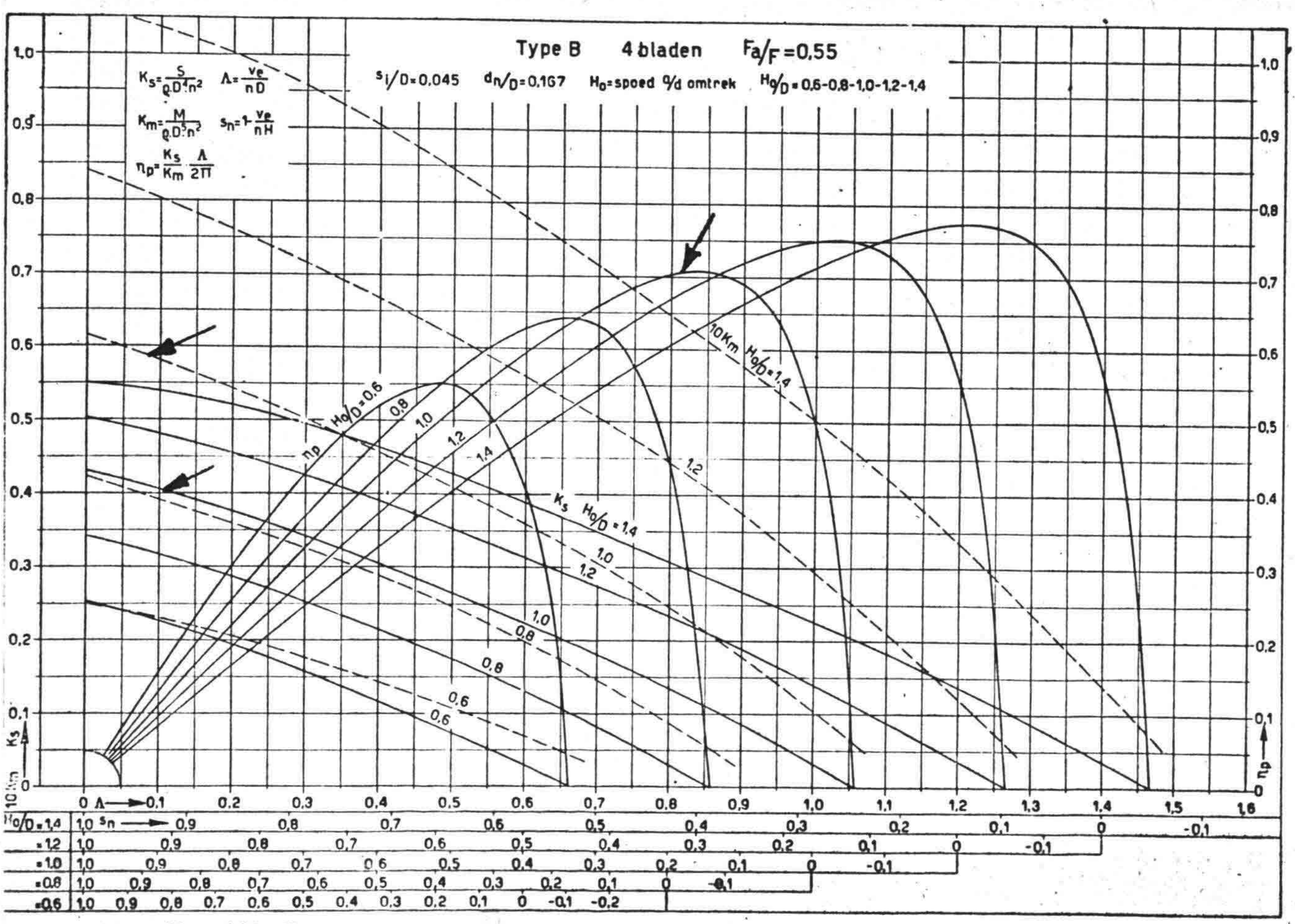
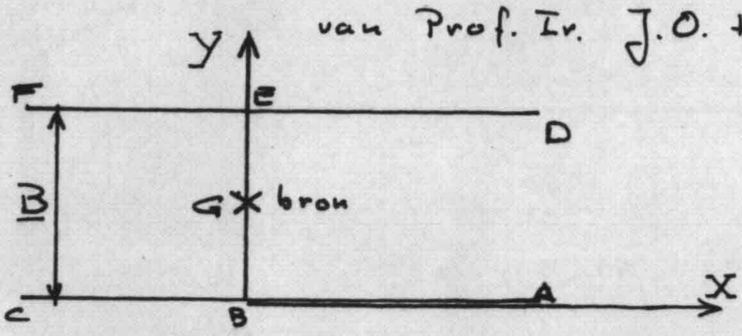


FIG. 110. RESULTATEN VAN DE VRIJVARENDE VIERBLADIGE SCHROEVEN, TYPE B.4.55

Bijlage I.

Voor de berekening van de potentiaal- en stroomfuncties in water met een begrensde breedte is gebruik gemaakt van complexe afbeeldingen

Literatuur: „Stromingsleer" voortgezette cursus van Prof. Ir. J.O. Hinze.



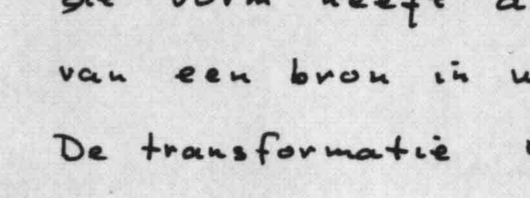
Is het mogelijk om de stroming ten gevolge van een bron in een kanaal met een bepaalde breedte in een ander vlak ~~zodat~~ af te beelden zodat in dat andere vlak de stroming dezelfde vorm heeft als de stroming ten gevolge van een bron in water met onbegrensde breedte.

De transformatie ζ (zeta) $= e^{z}$.

$z = x + iy \qquad i = \sqrt{-1}$

$\zeta = \rho e^{i\omega} = e^{z} = e^{x} . e^{iy}$

$\rho = e^{x} \qquad \omega = y.$



Een lijn $x =$ constant uit het XY vlak wordt in het ζ vlak afgebeeld als een cirkel met de oorsprong als middelpunt.

Voorbeeld. de lijn $x = 0 \Rightarrow \rho = 1$

Lijnen y = constant uit het $\bar{X}\bar{Y}$ vlak worden afgebeeld als rechte lijnen gaande door de oorsprong van het ζ vlak..

In bovenstaande zijn x en y dimensie loos

$x = \frac{\pi}{B}\bar{X}$ $\quad y = \frac{\pi}{B}\bar{Y}$ $\quad \bar{X}$ en $\bar{Y}$ hebben de dimensie van een lengte.

$$\zeta = e^{\frac{\pi}{B}X} e^{i\frac{\pi}{B}Y}$$

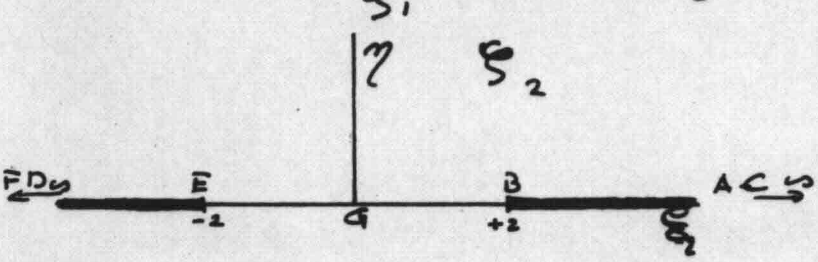
Dus punten uit de strook

$-\infty \le X \le +\infty$

$0 \le Y \le B$ kunnen worden afgebeeld in het gehele ζ vlak behalve in dat deel van het ζ vlak waar $\rho < 1$ is.

Deze eenheidscirkel $\rho = 1$ wordt tot een rechte getransformeerd door de transformatie

$$\zeta_2 = \zeta_1 + \frac{1}{\zeta_1} = e^z + \frac{1}{e^z} = e^z + e^{-z} = 2\cosh z$$



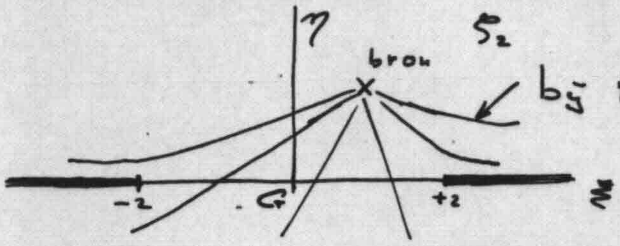
De lijn ABC uit $\bar{X}\bar{Y}$ vlak wordt afgebeeld op de ξ-as en wel van $+2$ tot $+\infty$.

De lijn DEF wordt eveneens op de ξ-as afgebeeld en wel van -2 tot $-\infty$.

De η-as uit het ζ_2 vlak is de lijn $y = B/2$ uit het $\bar{X}\bar{Y}$ vlak.

Wanneer nu in G een bron geplaatst wordt zal deze bron in het ς_2 vlak de zelfde stroom- en potentiaallijnen geven als een bron in onbegrensd water. Een verplaatsing van de bron naar een ander punt van de ξ-as zal de stroming niet beïnvloeden.

Staat de bron in elk ander punt van het ς_2 vlak dan zal de stroming wel door de wanden van $+2$ tot $+\infty$ en van -2 tot $-\infty$ beïnvloed worden.



bij bron in onbegrensd water zijn deze lijnen recht.

Als in G of in een ander punt van het ς_2 vlak een dipool of wervel geplaatst wordt dan geeft dit niet het zelfde beeld als een dipool of wervel in onbegrensd water, dit is weer de invloed van de wanden die van $-\infty$ tot -2 en van $+2$ tot $+\infty$ in het ς_2 vlak afgebeeld worden.

Transformatie van een bron in G geplaatst is dus wel mogelijk en wel met de transformatie $\varsigma = 2\cosh \frac{\pi}{B} z$ (z niet dimensieloos)

$z = x + iy$.

De complexe potentiaalfunctie is $\chi = \frac{Q}{2\pi} \ln \varsigma$

$$\chi = \frac{Q}{2\pi} \ln \left(2\cosh \frac{\pi}{B} z\right)$$

$$2\cosh\frac{\pi}{B}z = 2\cosh\frac{\pi}{B}(x+iy)$$

$$2\cosh\left(\frac{\pi}{B}x+\frac{\pi}{B}iy\right) = e^{\frac{\pi}{B}x+i\frac{\pi}{B}y} + e^{-\frac{\pi}{B}x-i\frac{\pi}{B}y}$$

$$\cos\frac{\pi}{B}y = \frac{e^{i\frac{\pi}{B}y}+e^{-i\frac{\pi}{B}y}}{2}$$

$$i\sin\frac{\pi}{B}y = \frac{e^{i\frac{\pi}{B}y}-e^{-i\frac{\pi}{B}y}}{2}$$

$$2\cosh\left(\frac{\pi}{B}x+\frac{\pi}{B}iy\right) = e^{\frac{\pi}{B}x}\cdot e^{i\frac{\pi}{B}y} + e^{-\frac{\pi}{B}x}\cdot e^{-i\frac{\pi}{B}y} =$$

$$e^{\frac{\pi}{B}x}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{B}y}+e^{-i\frac{\pi}{B}y}}{2}+\frac{e^{i\frac{\pi}{B}y}-e^{-i\frac{\pi}{B}y}}{2}\right)+$$

$$e^{-\frac{\pi}{B}x}\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{B}y}+e^{-i\frac{\pi}{B}y}}{2}-\frac{e^{i\frac{\pi}{B}y}-e^{-i\frac{\pi}{B}y}}{2}\right) =$$

$$e^{\frac{\pi}{B}x}\left(\cos\frac{\pi}{B}y+i\sin\frac{\pi}{B}y\right)+e^{-\frac{\pi}{B}x}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{B}y-i\sin\frac{\pi}{B}y\right)$$

$$\chi = \frac{Q}{2\pi}\ln\left(2\cosh\frac{\pi}{B}z\right)$$

$$\chi = \frac{Q}{2\pi}\ln\left\{e^{\frac{\pi}{B}x}\left(\cos\frac{\pi}{B}y+i\sin\frac{\pi}{B}y\right)+e^{-\frac{\pi}{B}x}\left(\cos\frac{\pi}{B}y-i\sin\frac{\pi}{B}y\right)\right\}$$

Hier van is $\frac{Q}{2\pi}\cdot\ln\left\{\cos\frac{\pi}{B}y\left(e^{\frac{\pi}{B}x}+e^{-\frac{\pi}{B}x}\right)\right\} =$

$\frac{Q}{2\pi}\ln\left\{2\cos\frac{\pi}{B}y\cosh\frac{\pi}{B}x\right.$ het reële deel

en $\frac{Q}{2\pi}\ln\left\{\sin\frac{\pi}{B}y\left(e^{\frac{\pi}{B}x}-e^{-\frac{\pi}{B}x}\right)\right\} =$

$\frac{Q}{2\pi}\ln\left\{2\sin\frac{\pi}{B}y\sinh\frac{\pi}{B}x\right\}$ het imag. deel

$$u_x = \mathrm{Re}\left(\frac{d\chi}{dz}\right)$$

$$u_y = -\mathrm{Img}\left(\frac{d\chi}{dz}\right)$$

$$\chi = \frac{q}{2\pi} \ln \left(2 \cosh \frac{\pi}{B} z\right)$$

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{q}{2\pi} \, \frac{\pi}{B} \, \frac{2 \sinh \frac{\pi}{B} z}{2 \cosh \frac{\pi}{B} z} = \frac{q}{2B} \cdot \frac{\sinh \frac{\pi}{B} z}{\cosh \frac{\pi}{B} z}$$

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{q}{2B} \cdot \frac{e^{\frac{\pi}{B}x}\left(\cos\frac{\pi}{B}y + i\sin\frac{\pi}{B}y\right) - e^{-\frac{\pi}{B}x}\left(\cos\frac{\pi}{B}y - i\sin\frac{\pi}{B}y\right)}{e^{\frac{\pi}{B}x}\left(\cos\frac{\pi}{B}y + i\sin\frac{\pi}{B}y\right) + e^{-\frac{\pi}{B}x}\left(\cos\frac{\pi}{B}y - i\sin\frac{\pi}{B}y\right)},$$

$$= \frac{q}{2B} \cdot \frac{\sinh\frac{\pi}{B}x \cos\frac{\pi}{B}y + i\cosh\frac{\pi}{B}x \sin\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}x \cos\frac{\pi}{B}y + i\sinh\frac{\pi}{B}x \sin\frac{\pi}{B}y} =$$

$$= \frac{q}{2B} \, \frac{\left(\sinh\frac{\pi}{B}x \cos\frac{\pi}{B}y + i\cosh\frac{\pi}{B}x \sin\frac{\pi}{B}y\right)}{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x \cos\frac{\pi}{B}y + i\sinh\frac{\pi}{B}x \sin\frac{\pi}{B}y\right)} \times$$

$$\times \frac{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x \cos\frac{\pi}{B}y - i\sinh\frac{\pi}{B}x \sin\frac{\pi}{B}y\right)}{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x \cos\frac{\pi}{B}y - i\sinh\frac{\pi}{B}x \sin\frac{\pi}{B}y\right)} =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \, \frac{\cos^2\frac{\pi}{B}y\left(\sinh\frac{\pi}{B}x \cosh\frac{\pi}{B}x\right) + \sin^2\frac{\pi}{B}y\left(\sinh\frac{\pi}{B}x \cosh\frac{\pi}{B}x\right) +}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x \cos^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x \sin^2\frac{\pi}{B}y}$$

$$+ \frac{i\left\{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\left(\sin\frac{\pi}{B}y \cos\frac{\pi}{B}y\right) - \sinh^2\frac{\pi}{B}x\left(\sin\frac{\pi}{B}y \cos\frac{\pi}{B}y\right)\right\}}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x \cos^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x \sin^2\frac{\pi}{B}y} =$$

$$\frac{d\chi}{dz} = \frac{q}{2B} \, \frac{\sinh\frac{\pi}{B}x \cosh\frac{\pi}{B}y + i\sin\frac{\pi}{B}y \cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x \cos^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x \sin^2\frac{\pi}{B}y}.$$

Re. deel:

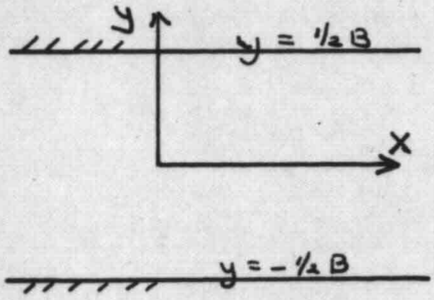
$$\frac{q}{2\pi} \, \frac{\sinh\frac{\pi}{B}x \cosh\frac{\pi}{B}y.}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x \cos^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x \sin^2\frac{\pi}{B}y} = u_x.$$

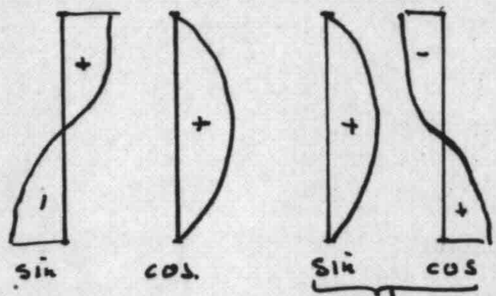
Img. deel:

$$\frac{q}{2\pi} \, \frac{\sin\frac{\pi}{B}y \cos\frac{\pi}{B}y.}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x \cos^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x \sin^2\frac{\pi}{B}y} = -u_y.$$

Bij de bovenstaande afleiding valt de X-as van het assenkruis samen met een zijkant van het kanaal en de andere zijkant valt samen met de lijn $y = B$.

Omdat in deze studie steeds een schip midden in het kanaal bekeken is, is het prettiger om de X-as naar het midden van het kanaal te verschuiven.





voor verschuiving assenkruis.

Bij de verschuiving gaat sin over in cos.
en cos wordt − sin.

$$U_x = \frac{Q}{2B}\,\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cosh\frac{\pi}{B}x}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}(y-\frac{1}{2}B)+\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}(y-\frac{1}{2}B)}$$

$$u_x = \frac{Q}{2B}\,\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cosh\frac{\pi}{B}x}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y+\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

$$u_y = -\frac{Q}{2B}\,\frac{\sin\frac{\pi}{B}(y-½B)\,\cos\frac{\pi}{B}(y-½B)}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}(y-\frac{1}{2}B)+\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}(y-\frac{1}{2}B)}$$

$$u_y = \frac{Q}{2B}\,\frac{\cos\frac{\pi}{B}y\,\sin\frac{\pi}{B}y.}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y+\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

De noemer. $\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y+\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y =$

$$\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,(1-\cos^2\frac{\pi}{B}y)+\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y =$$

$$\cosh^2\frac{\pi}{B}x+\cos^2\frac{\pi}{B}y\,(\underbrace{\sinh^2\frac{\pi}{B}x-\cosh^2\frac{\pi}{B}x}_{=1}) =$$

$$\cosh^2\frac{\pi}{B}x-\cos^2\frac{\pi}{B}y. =$$

$$\frac{\cosh 2\frac{\pi}{B}x+1}{2}-\frac{\cos 2\frac{\pi}{B}y+1}{2} = \frac{1}{2}\left(\cosh\frac{2\pi}{B}x-\cos\frac{2\pi}{B}y\right).$$

teller u_x . $\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cosh\frac{\pi}{B}x = \frac{1}{2}\sinh\frac{2\pi}{B}x.$

teller u_y $\sin\frac{\pi}{B}y\,\cos\frac{\pi}{B}y = \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{B}y.$

$$u_x = \frac{Q}{2B}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}x}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y} = \frac{Q}{2B}\,\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cosh\frac{\pi}{B}x}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

$$u_y = \frac{Q}{2B}\,\frac{\sin\frac{2\pi}{B}y.}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y} = \frac{Q}{2B}\,\frac{\sin\frac{\pi}{B}y\,\cos\frac{\pi}{B}y.}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

$$u_x = \frac{d\phi}{dx}$$

$$\phi = \int u_x\,dx.$$

$$\phi = \int \frac{Q}{2B}\,\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cosh\frac{\pi}{B}x}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}\cos^2\frac{\pi}{B}y}\,dx.$$

$$\phi = \frac{Q}{2B}\int \frac{\left(\sin^2\frac{\pi}{B}y + \cos^2\frac{\pi}{B}y\right)\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cosh\frac{\pi}{B}x.}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\cos^2\frac{\pi}{B}y}\,dx$$

$$= \frac{Q}{2B}\,\frac{B}{\pi}\,\frac{1}{2}\int \frac{2\sin^2\frac{\pi}{B}y\,\cosh\frac{\pi}{B}x\,\sinh\frac{\pi}{B}x + 2\cos^2\frac{\pi}{B}y\,\cosh\frac{\pi}{B}x\,\sinh\frac{\pi}{B}x}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}\,d(\tfrac{\pi}{B}$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\int \frac{d\left(\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y\right)}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\left(\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y\right).$$

of

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\left(\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y\right).$$

$$\psi = \int u_x\,dy$$

$$\psi = \frac{Q}{2B}\int \frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cosh\frac{\pi}{B}x.}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}\,dy.$$

$$d(\arctan a) = \frac{1}{1+a^2}\,da.$$

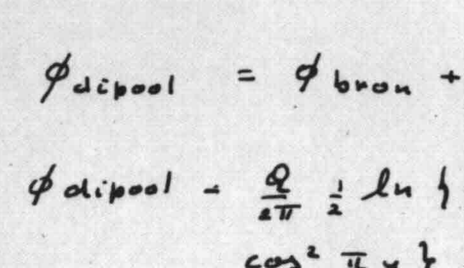
$$\psi = \frac{Q}{2B}\int \frac{\sinh\frac{\pi}{B}x \,\cosh\frac{\pi}{B}x}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}\,dy$$

$$\psi = \frac{Q}{2B}\int \frac{\dfrac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cosh\frac{\pi}{B}x.}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y}}{1 + \dfrac{\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y}}\,dy.$$

$$\psi = -\frac{Q}{2B}\,\frac{B}{\pi}\int \frac{d\left(\dfrac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cos\frac{\pi}{B}y.}{\cosh\frac{\pi}{B}x\,\sin\frac{\pi}{B}y}\right)}{1 + \dfrac{\sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y}}$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cos\frac{\pi}{B}y.}{\cosh\frac{\pi}{B}x\,\sin\frac{\pi}{B}y.}.$$

Een dipool is opgebouwd uit een put en een bron met de zelfde sterkte Q op een zeer kleine afstand van elkaar.



$$\phi_{dipool} = \phi_{bron} + \phi_{put}.$$

$$\phi_{dipool} = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\left\{\cosh^2\frac{\pi}{B}(x+\delta)\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}(x+\delta)\times \cos^2\frac{\pi}{B}y\right\} - \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\left\{\cosh^2\frac{\pi}{B}(x-\delta)\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}(x-\delta)\cos^2\frac{\pi}{B}y\right\}$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\left\{\cosh^2\frac{\pi}{B}(x+\delta) - \cos^2\frac{\pi}{B}y\right\} + - \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\left\{\cosh^2\frac{\pi}{B}(x-\delta) - \cos^2\frac{\pi}{B}y\right\}$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,\ln\frac{\cosh^2\frac{\pi}{B}(x+\delta) - \cos^2\frac{\pi}{B}y}{\cosh^2\frac{\pi}{B}(x-\delta) - \cos^2\frac{\pi}{B}y}.$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cosh^2\alpha = \frac{1+\cosh 2\alpha}{2}$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,\ln\frac{\frac{1+\cosh\frac{2\pi}{B}(x+\delta)}{2} - \frac{1+\cos\frac{2\pi}{B}y}{2}}{\frac{1+\cosh\frac{2\pi}{B}(x-\delta)}{2.} - \frac{1+\cos\frac{2\pi}{B}y}{2}}$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,\ln\frac{\cosh\frac{2\pi}{B}(x+\delta) - \cos\frac{2\pi}{B}y}{\cosh\frac{2\pi}{B}(x-\delta) - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(\frac{\cosh\frac{2\pi}{B}x\cosh\frac{2\pi}{B}\delta + \sinh\frac{2\pi}{B}x\sinh\frac{2\pi}{B}\delta - \cos\frac{2\pi}{B}y}{\cosh\frac{2\pi}{B}x\cosh\frac{2\pi}{B}\delta - \sinh\frac{2\pi}{B}x\sinh\frac{2\pi}{B}\delta - \cos\frac{2\pi}{B}y}\right)$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,\ln\left(1 + \frac{2\sinh\frac{2\pi}{B}x\,\sinh\frac{2\pi}{B}\delta}{\cosh\frac{2\pi}{B}(x-\delta) - \cos\frac{2\pi}{B}y}\right).$$

$$\ln(1+\Delta) \simeq \Delta.$$

$$\frac{2\sinh\frac{2\pi}{B}x\;\sinh\frac{2\pi}{B}\delta}{\cosh\frac{2\pi}{B}(x-\delta) - \cos\frac{2\pi}{B}y} = \Delta$$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,\frac{2\sinh\frac{2\pi}{B}x\;\sinh\frac{2\pi}{B}\delta}{\cosh\frac{2\pi}{B}(x-\delta) - \cos\frac{2\pi}{B}y}.$$

δ = zeer klein, en is ten opzichte van x te verwaarlozen.

Doordat δ klein is. $\Rightarrow \sinh\frac{2\pi}{B}\delta \simeq \frac{2\pi}{B}\delta$

$$\phi = \frac{q}{2\pi}\,\frac{2\pi}{B}\delta\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}x}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}.$$

$q\,\frac{2\pi}{B}\delta$ = m = dipool moment.

$$\phi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}x}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

$$\psi_{dipool} = \psi_{bron} + \psi_{put}$$

$$\psi_{dipool} = -\frac{q}{2\pi}\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}(x+\delta)\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}(x+\delta)\sin\frac{\pi}{B}y} +$$

$$+\frac{q}{2\pi}\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}(x-\delta)\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}(x-\delta)\sin\frac{\pi}{B}y}.$$

$$\psi = -\frac{q}{2\pi}\arctan\left\{\mathrm{tgh}\,\frac{\pi}{B}(x+\delta)\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{B}y\right\} + \frac{q}{2\pi}\times$$

$$\times\arctan\left\{\mathrm{tgh}\,\frac{\pi}{B}(x-\delta)\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{B}y\right\}.$$

$$\psi = -\frac{q}{2\pi}\,\frac{2\pi}{B}\delta\left\{\frac{\arctan\left[\mathrm{tgh}\frac{\pi}{B}(x+\delta)\mathrm{cotg}\frac{\pi}{B}y\right] - \arctan\left[\mathrm{tgh}\frac{\pi}{B}(x-\delta)\mathrm{cotg}\frac{\pi}{B}y\right]}{2\frac{\pi}{B}\delta}\right.$$

$$\delta \to 0$$

$$\frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}_{\Delta\to 0} = \frac{d f(x)}{d x}.$$

$$q\,\frac{2\pi}{B}\delta = m = \text{dipoolmoment}.$$

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}\,\frac{\frac{1}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\pi}{B}y}{1+\mathrm{tgh}^2\frac{\pi}{B}x\,\mathrm{cotg}^2\frac{\pi}{B}y}.$$

teller en noemer $\times \cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y \Longrightarrow$

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}\,\frac{\sin\frac{\pi}{B}y\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

overgaand op de dubbele hoek

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}\,\frac{\sin\frac{2\pi}{B}y.}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

$$u_x = \frac{d\phi}{dx} = \frac{m}{2\pi}\cdot\frac{2\pi}{B}\,\frac{\cosh^2\frac{2\pi}{B}x - \cosh\frac{2\pi}{B}x\cos\frac{2\pi}{B}y - \sinh^2\frac{2\pi}{B}x}{\left(\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y\right)^2}$$

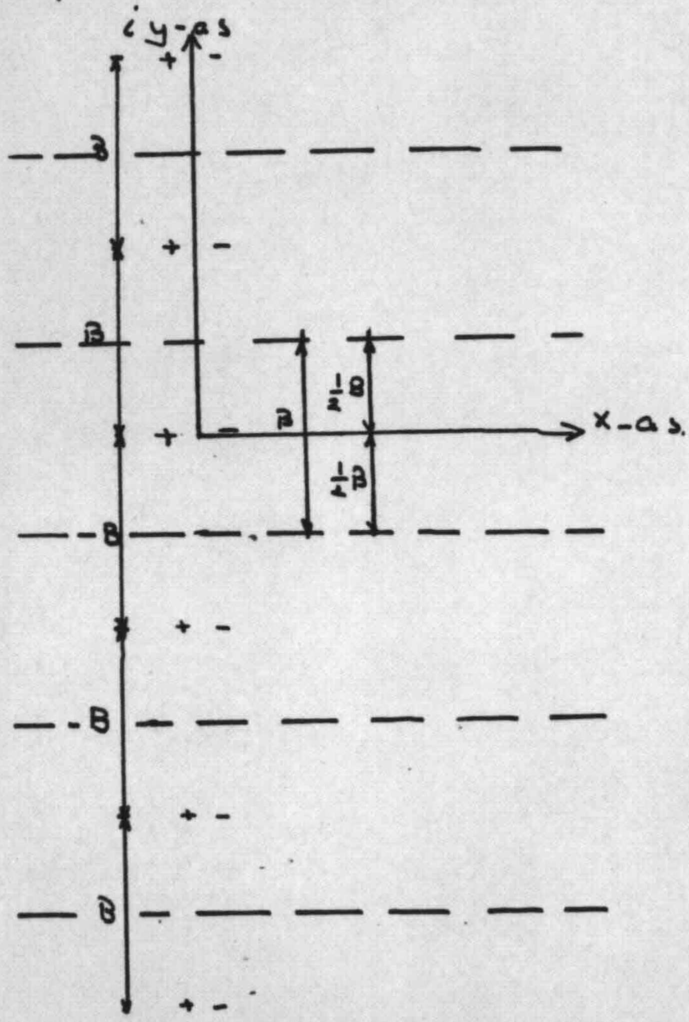
$$u_x = \frac{m}{2B}\,2\left\{\frac{1 - \cosh\frac{2\pi}{B}x\cos\frac{2\pi}{B}y.}{\left(\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y\right)^2}\right\}.$$

$$u_y = \frac{d\phi}{dy}$$

$$u_y = \frac{m}{2\pi}\,\frac{2\pi}{B}\;\frac{+\sinh\frac{2\pi}{B}x\,\sin\frac{2\pi}{B}y\,(-1)}{\left(\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y\right)^2}.$$

$$u_y = -\frac{m}{2B}\;\frac{2\,\sinh\frac{2\pi}{B}x\,\sin\frac{2\pi}{B}y}{\left(\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y\right)^2}$$

Bovenstaande vergelijkingen zijn voor een dipool nog op een andere manier af te leiden. namelijk door spiegelen
Hierbij plaatst men op de y-as een oneindig groot aantal dipolen op onderlinge afstand van B.



De complexe potentiaal van één dipool in de oorsprong is.

$$\chi = \frac{m}{2\pi\frac{\pi}{B}z}$$

Met meerdere dipolen

$$\chi = \frac{m}{2\pi} \times \left(\frac{1}{\frac{\pi}{B}z_1} + \frac{1}{\frac{\pi}{B}z_2} + \cdots\cdots + \frac{1}{\frac{\pi}{B}z_n} + \cdots\right)$$

$z = x + iy.$

$z_1 = x + iy_1 \qquad \frac{\pi}{B}|y_1 - y_2| = \pi.$

$z_2 = x + iy_2 \qquad \frac{\pi}{B}|y_n - y_{n-1}| = \pi$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$z_n = x + iy_n.$

$$\chi = \frac{m}{2\pi} \times \frac{1}{\frac{\pi}{B}(x+iy)} + \frac{m}{2\pi} \frac{1}{\frac{\pi}{B}(x+i(y-\pi))} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{m}{2\pi} \frac{1}{\frac{\pi}{B}(x+i(y-n\pi))} + \frac{m}{2\pi} \frac{1}{\frac{\pi}{B}(x+i(y+\pi))} + \cdots + \frac{m}{2\pi} \frac{1}{\frac{\pi}{B}(x+i(y+n\pi))}$$

$$\chi = \frac{m}{2\pi} \times \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{B}(x+iy)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\frac{\pi}{B}\{x + i(y-n\pi)\}} + \frac{1}{\frac{\pi}{B}\{x+i(y+n\pi)\}} \right\}$$

$$\chi = \frac{m}{2\pi} \times \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{B} z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\frac{\pi}{B}(z - in\pi)} + \frac{1}{\frac{\pi}{B}(z+in\pi)} \right\} \right\}$$

$$\chi = \frac{m}{2\pi} \times \frac{1}{i\frac{\pi^2}{B}} \left\{ \frac{1}{z/i\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z/i\pi - n} + \frac{1}{z/i\pi + n} \right) \right\}$$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{B}} \left\{ \frac{1}{z/i\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z/i\pi - n} + \frac{1}{z/i\pi + n} \right) \right\} = \pi \operatorname{cotg} \pi \frac{\pi}{B} z/i\pi$$

$$\chi = \frac{m}{2\pi} \frac{1}{i\pi} \pi \operatorname{cotg.} \frac{\pi}{B}\frac{z}{i} \qquad \begin{array}{l} z = x + iy \\ z/i = x/i + y. \end{array}$$

$$\chi = -\frac{m}{2\pi} i \operatorname{cotg} \frac{\pi}{B}\left(\frac{x}{i} + y\right)$$

$$\chi = -\frac{m}{2\pi} i \frac{\cos \frac{\pi}{B}\left(\frac{x}{i} + y\right)}{\sin \frac{\pi}{B}\left(\frac{x}{i} + y\right)} = -\frac{m}{2\pi} i \frac{\cos \pi/B\, z/i}{\sin \pi/B\, z/i}$$

$$\chi = -\frac{m}{2\pi} i \frac{e^{i\frac{\pi}{B}\frac{z}{i}} + e^{-i\frac{\pi}{B}\frac{z}{i}}}{\dfrac{e^{i\frac{\pi}{B}\frac{z}{i}} - e^{-i\frac{\pi}{B}\frac{z}{i}}}{i}} = +\frac{m}{2\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{B}z} + e^{-\frac{\pi}{B}z}}{e^{\frac{\pi}{B}z} - e^{-\frac{\pi}{B}z}}$$

$$\chi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{\cosh\frac{\pi}{B}z}{\sinh\frac{\pi}{B}z} = \frac{m}{2\pi}\,\frac{\cosh\frac{\pi}{B}(x+iy)}{\sinh\frac{\pi}{B}(x+iy)}$$

$$\chi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y + i\sinh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}y.}{\sinh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y + i\cosh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}y.}$$

teller en noemer $\times \sinh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - i\cosh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}y$

$$\chi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{\cosh\frac{\pi}{B}x\sinh\frac{\pi}{B}x - i\sin\frac{\pi}{B}y\cos\frac{\pi}{B}y}{\sinh^2\frac{\pi}{B}x + \sin^2\frac{\pi}{B}y.}$$

De noemer $\sinh^2\frac{\pi}{B}x + \sin^2\frac{\pi}{B}y =$

$$\cosh^2\frac{\pi}{B}x - 1 + 1 - \cos^2\frac{\pi}{B}y = \cosh^2\frac{\pi}{B}x - \cos^2\frac{\pi}{B}y.$$

ϕ = Re. deel

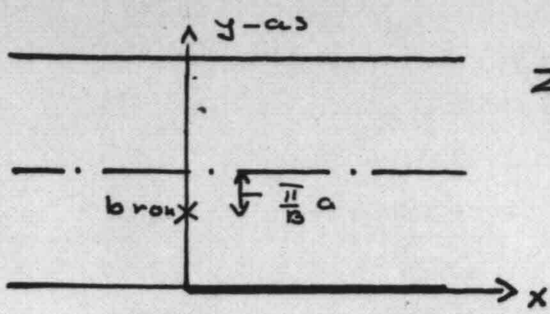
ψ = Img. deel

$$\phi = \frac{m}{2\pi}\,\frac{\cosh\frac{\pi}{B}x\sinh\frac{\pi}{B}y}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x - \cos^2\frac{\pi}{B}y.} = \frac{m}{2\pi}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}x.}{\underbrace{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}_{\text{dubbele hoek}}}$$

$$\psi = -\frac{m}{2\pi}\,\frac{\sin\frac{\pi}{B}y\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh^2\frac{\pi}{B}x - \cos^2\frac{\pi}{B}y.} = -\frac{m}{2\pi}\,\frac{\sin\frac{2\pi}{B}y}{\overbrace{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}}$$

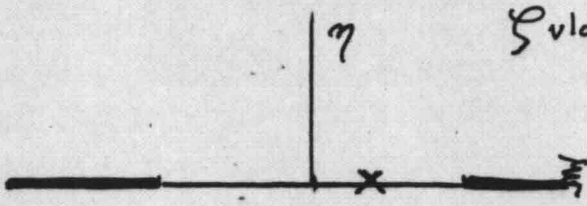
Deze waarden van ϕ en ψ voor een dipool.
zijn reeds eerder gevonden. (zie uitkomst
blz. 9. en 10. van deze bijlage).

Bepaling van de stroom en potentiaal functie
van een bron die op een afstand $\frac{\pi}{B}a$ uit
de as van het kanaal geplaatst is.
Dit is ook met behulp van ~~eene conforme~~-
de transformatie $\zeta = 2\cosh\frac{\pi}{B}z$ gedaan
waarin $z = x + iy$.



Z vlak

$$z = x + iy$$



ζ vlak

$$\zeta = \xi + i\eta$$

$$\zeta = 2\cosh \frac{\pi}{B} z = 2\cosh \frac{\pi}{B}(x+iy) =$$

$$2\left(\cosh \frac{\pi}{B} x \cos \frac{\pi}{B} y + i \sinh \frac{\pi}{B} x \sin \frac{\pi}{B} y\right).$$

bron $\quad x = 0 \quad y = \frac{\pi}{B}(\tfrac{1}{2}B - a)$

$$\xi + i\eta = 2\{\underbrace{\cosh 0}_{=1} \cos \frac{\pi}{B}(\tfrac{1}{2}B-a) + i \underbrace{\sinh 0}_{=0} \sin \frac{\pi}{B}(\tfrac{1}{2}B-a)$$

$$\xi + i\eta = 2\cos\frac{\pi}{B}(\tfrac{1}{2}B-a).$$

Hieruit volgt dat de bron in ζ-vlak afgebeeld wordt in het punt.

$$\xi = 2\cos\frac{\pi}{B}(\tfrac{1}{2}B-a), \quad \eta = 0.$$

$$\xi = 2\cos\frac{\pi}{B}(\tfrac{1}{2}B-a) = 2\cos(\tfrac{1}{2}\pi - a\frac{\pi}{B})$$

$$= 2\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{=0}\cos\frac{\pi}{B}a + \underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{=1}\sin\frac{\pi}{B}a$$

$\xi = 2\sin\frac{\pi}{B}a \quad \eta = 0 \quad$ is de plaats van de bron in het ζ vlak

De complexe potentiaal van bron is

$$X = \frac{Q}{2\pi}\ln\left(\xi - 2\sin\frac{\pi}{B}a + i\eta\right)$$

$$\zeta = 2\cosh\frac{\pi}{B}z$$

$$\zeta = \xi + i\eta \quad , \quad z = x + iy$$

$$\xi + i\eta = 2\cosh\frac{\pi}{B}(x+iy)$$

$$\xi + i\eta = 2\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y + 2i\sinh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}y.$$

$$\xi = 2\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y$$

$$\eta = 2\sinh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}y.$$

$$\chi = \frac{Q}{2\pi}\ln\left(\xi - 2\sin\frac{\pi}{B}a + i\eta\right)$$

$$\chi = \frac{Q}{2\pi}\ln 2\Big(\underbrace{\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a}_{\text{Re. deel.}} + i\underbrace{\sinh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}y}_{\text{Img. deel.}}\Big)$$

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\frac{1}{2}\ln 4\left\{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a\right)^2 + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\sin^2\frac{\pi}{B}y\right\}$$

$$\psi = \frac{Q}{2\pi}\arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a}$$

voor $a = 0 \rightarrow \sin\frac{\pi}{B}a = 0 \rightarrow \phi_{bron}$ en ψ_{bron} geplaatst in het midden van het kanaal.

$$u_x = \frac{Q}{2B}\left[\frac{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a\right)\sinh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y}{\left\{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a\right)^2 + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\sin^2\frac{\pi}{B}y\right\}} + \frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\cosh\frac{\pi}{B}x\sin^2\frac{\pi}{B}y}{\left\{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a\right)^2 + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\sin^2\frac{\pi}{B}y\right\}}\right]$$

$$u_x = \frac{Q}{2B}\frac{\cosh\frac{\pi}{B}x\sinh\frac{\pi}{B}x - \sinh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}a\cos\frac{\pi}{B}y}{\left(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a\right)^2 + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\sin^2\frac{\pi}{B}y}$$

$$u_y = \frac{Q}{2B}\left[\frac{(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a)\cosh\frac{\pi}{B}x(-\sin\frac{\pi}{B}y)}{\{(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a)^2 + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\sin^2\frac{\pi}{B}y\}} + \right.$$

$$\left.\frac{\sinh^2\frac{\pi}{B}x\ \sin\frac{\pi}{B}y\cos\frac{\pi}{B}y}{\{(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a)^2 + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\sin^2\frac{\pi}{B}y\}}\right]$$

$$u_y \simeq \frac{Q}{2B}\ \frac{-\sin\frac{\pi}{B}y\cos\frac{\pi}{B}y + \cosh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}a\sin\frac{\pi}{B}y}{(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y - \sin\frac{\pi}{B}a)^2 + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\sin^2\frac{\pi}{B}y}$$

Verplaatsing van het assenkruis naar het midden van het kanaal geeft de volgende formules

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\,\ln 4\{(\cosh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}y + \cos\frac{\pi}{B}a)^2 + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\cos^2\frac{\pi}{B}y\}$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\ \arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\ \cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}y + \cos\frac{\pi}{B}a}$$

$$u_x = \frac{Q}{2B}\ \frac{\cosh\frac{\pi}{B}x\sinh\frac{\pi}{B}x + \sinh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}a\sin\frac{\pi}{B}y}{(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y + \cos\frac{\pi}{B}a)^2 + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

$$u_y = \frac{Q}{2B}\ \frac{\sin\frac{\pi}{B}y\cos\frac{\pi}{B}y + \cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}a\cos\frac{\pi}{B}y.}{(\cosh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y + \cos\frac{\pi}{B}a)^2 + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\cos^2\frac{\pi}{B}y}$$

Voor water met een onbegrensde breedte zijn de stroom- en potentiaalfuncties voor een bron en een wervel van de volgende gedaante

$$\phi_{bron} = \frac{Q}{2\pi}\ \ln\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\psi_{wervel} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ \ln\sqrt{x^2+y^2} \qquad \Gamma = \text{wervelsterkte}$$

$$\psi_{bron} = \frac{Q}{2\pi}\ \arctan\frac{y}{x} \qquad \phi_{wervel} = \frac{\Gamma}{2\pi}\arctan\frac{y}{x}$$

$$u_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

$$u_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$u_{x\,bron} = \frac{\partial \phi_{bron}}{\partial x} = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$u_{y\,bron} = \frac{\partial \phi_{bron}}{\partial y} = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u_{x\,wervel} = \frac{\partial \psi_{wervel}}{\partial y} = -\frac{\Gamma}{2\pi}\,\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$u_{y\,wervel} = -\frac{\partial \psi_{wervel}}{\partial x} = +\frac{\Gamma}{2\pi}\,\frac{x}{x^2+y^2}$$

stel $\frac{Q}{2\pi} = c.\,\frac{\Gamma}{2\pi}.$

Dan is

$$\frac{1}{c}.\,u_{y\,bron} = -u_x\ wervel$$

$$\frac{1}{c}\,u_{x\,bron} = +u_y\ wervel$$

$$\phi = \int u_x\,dx = -\int u_y\,dx$$

$$\psi = \int u_y\,dy = \int u_x\,dy.$$

$$\frac{1}{c}\,\phi_{bron} = \frac{1}{c}\int u_{x\,bron}\,dx = \int u_{y\,wervel}\,dx = -\psi\ wervel$$

$$\frac{1}{c}\,\psi\ bron = \frac{1}{c}\int -u_{y\,bron}\,dx = \int u_{x\,wervel}\,dx = +\phi\ wervel$$

Uit bovenstaande volgt dat als de potentiaal- en stroomfunctie van een bron bekend is, ook de potentiaal- en stroomfunctie van een wervel in het zelfde punt bekend zijn.

ϕ wervel $= + \frac{1}{c}\ \psi$ bron.

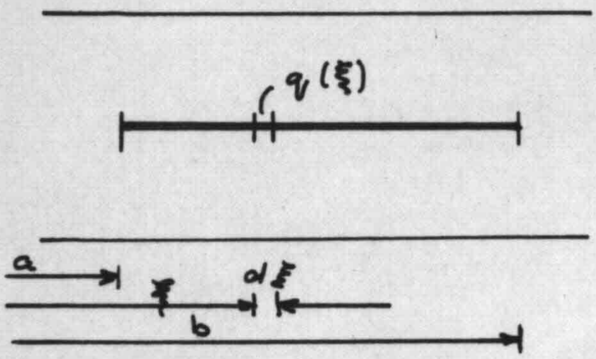
ψ wervel $= - \frac{1}{c}\ \phi$ bron. $\qquad c = \frac{Q}{\Gamma}$

Voor een bron in een kanaal met breedte B gelden de volgende potentiaal- en stroomfunctie.

$$\phi_{bron} = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\left(\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{B}y\right)$$

$$\psi_{bron} = -\frac{Q}{2\pi}\ \arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\,\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}x\,\sin\frac{\pi}{B}y}$$

Met bovenstaande formules kan men de stroom- en potentiaalfunctie bepalen van een continue putten en bronnen verdeling.



Een voorwaarde voor een gesloten contour is dat de $\int_a^b d\xi\ q(\xi) = 0$ geldt.

$$\phi = \frac{1}{2\pi}\int_a^b d\xi\ q(\xi)\,\frac{1}{2}\ln\left\{\cosh^2\frac{\pi}{B}(x-\xi)\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}(x-\xi)\cos^2\frac{\pi}{B}y\right\}$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi}\int_a^b d\xi\ q(\xi)\ \arctan\frac{\sinh\frac{\pi}{B}(x-\xi)\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}(x-\xi)\sin\frac{\pi}{B}y}$$

Stroomlijn door het stuwpunt op de X-as

$x = x_{st} \qquad y = 0$

Door dit stuwpunt gaat de stroomlijn die de contour voorstelt, die ontstaat door de putten en bronnenverdeling.

$$\psi_c = -\frac{1}{2\pi}\int_a^b d\xi\, q(\xi) \arctan \underbrace{\frac{\sinh\frac{\pi}{B}(x_{st}-\xi)\ 1}{\cosh\frac{\pi}{B}(x_{st}-\xi)\ 0}}_{\infty}$$

$$\arctan \infty = \frac{\pi}{2}$$

$$\psi_c = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi}{2}\int_a^b d\xi\, q(\xi)$$

$\int_a^b d\xi\, q(\xi) = 0$ voorwaarde voor een gesloten contour

$$\psi_c = -\frac{1}{2\pi}\,\frac{\pi}{2}\cdot 0 = 0$$

$$\psi_c = \frac{Q}{2\pi}\int_a^b d\xi\, q(\xi) \arctan \frac{\sinh\frac{\pi}{B}(x_c-\xi)\cos\frac{\pi}{B}y_c}{\cosh\frac{\pi}{B}(x_c-\xi)\sin\frac{\pi}{B}y_c} = 0.$$

Samenvatting van de afgeleide formules

<u>par. stroom.</u>

$$\phi = U.x$$

$$\psi = U.y$$

<u>bron</u>

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\left(\cosh^2\frac{\pi}{B}x\,\sin^2\frac{\pi}{B}y + \sinh^2\frac{\pi}{B}x\,\cos^2\frac{\pi}{y}\right)$$

of

$$\phi = \frac{Q}{2\pi}\,\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}\left(\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y\right).$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi}\arctan.\frac{\sinh\frac{\pi}{B}x\cos\frac{\pi}{B}y}{\cosh\frac{\pi}{B}x\sin\frac{\pi}{B}y}$$

$$U_x = \frac{Q}{2B}\,\frac{\sinh\frac{2\pi}{B}x}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

$$U_y = \frac{Q}{2B}\,\frac{\sin\frac{2\pi}{B}y}{\cosh\frac{2\pi}{B}x - \cos\frac{2\pi}{B}y}$$

Dipool

$$\phi = \frac{m}{2\pi} \frac{\sinh \frac{2\pi}{B}x}{\cosh \frac{2\pi}{B}x - \cos \frac{2\pi}{B}y}$$

$$\psi = -\frac{m}{2\pi} \frac{\sin \frac{2\pi}{B}y}{\cosh \frac{2\pi}{B}x - \cos \frac{2\pi}{B}y}$$

$$u_x = \frac{m}{2B} \frac{1 - \cosh \frac{2\pi}{B}x \cos \frac{2\pi}{B}y.}{\left(\cosh \frac{2\pi}{B}x - \cos \frac{2\pi}{B}y\right)^2}$$

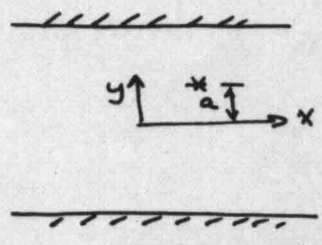
$$u_y = -\frac{m}{2B} \frac{\sinh \frac{2\pi}{B}x \ \sin \frac{2\pi}{B}y.}{\left(\cosh \frac{2\pi}{B}x - \cos \frac{2\pi}{B}y\right)^2}$$

Wervel.

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}x \cos \frac{\pi}{B}y}{\cosh \frac{\pi}{B}x \sin \frac{\pi}{B}y}$$

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{2} \ln \left(\cosh^2 \frac{\pi}{B}x \sin^2 \frac{\pi}{B}y + \sinh^2 \frac{\pi}{B}x \cos^2 \frac{\pi}{B}y\right).$$

Bron op afstand $y = +a$



$$\phi = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{2} \ln 4 \left\{\left(\cosh \frac{\pi}{B}x \sin \frac{\pi}{B}y + \cos \frac{\pi}{B}a\right)^2 + \sinh^2 \frac{\pi}{B}x \cos^2 \frac{\pi}{B}y\right\}$$

$$\psi = -\frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}x \cos \frac{\pi}{B}y.}{\cosh \frac{\pi}{B}x \sin \frac{\pi}{B}y + \cos \frac{\pi}{B}a}$$

$$u_x = \frac{Q}{2B} \frac{\cosh \frac{\pi}{B}x \sinh \frac{\pi}{B}x + \sinh \frac{\pi}{B}x \cos \frac{\pi}{B}a \sin \frac{\pi}{B}y.}{\left(\cosh \frac{\pi}{B}x \cos \frac{\pi}{B}y + \cos \frac{\pi}{B}a\right)^2 + \sinh^2 \frac{\pi}{B}x \cos^2 \frac{\pi}{B}y}$$

$$u_y = \frac{Q}{2B} \frac{\sin \frac{\pi}{B}y \cos \frac{\pi}{B}y + \cosh \frac{\pi}{B}x \cos \frac{\pi}{B}a \cos \frac{\pi}{B}y}{\left(\cosh \frac{\pi}{B}x \cos \frac{\pi}{B}y + \cos \frac{\pi}{B}a\right)^2 + \sinh^2 \frac{\pi}{B}x \cos^2 \frac{\pi}{B}y}$$

Continue verdeling van putten en bronnen

$$\int_a^b d\xi \; q(\xi) = 0$$

dit is een noodzakelijke voorwaarde voor een gesloten contour.

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int_a^b d\xi \; q(\xi) \frac{1}{2} \ln \left\{ \cosh^2 \frac{\pi}{B}(x-\xi) \sin^2 \frac{\pi}{B} y + \sinh^2 \frac{\pi}{B}(x-\xi) \cos^2 \frac{\pi}{B} y \right\}$$

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} \int_a^b d\xi \; q(\xi) \arctan \frac{\sinh \frac{\pi}{B}(x-\xi) \cos \frac{\pi}{B} y}{\cosh \frac{\pi}{B}(x-\xi) \sin \frac{\pi}{B} y}$$

Bijlage II.

Vergelijkingen.

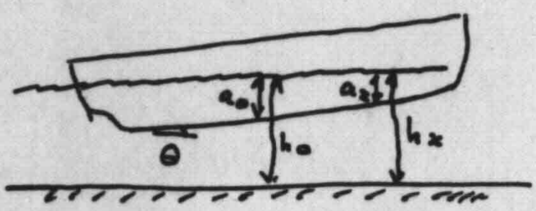
Het schip vaart met constante snelheid.

Waterhoogte in het kanaal is constant.

Dwarsprofiel van het kanaal blijft constant.

Assenkruis beweegt met het schip mee.

Nu heeft men te doen met een permanente toestand d.w.z. $\frac{\partial \dots}{\partial t} = 0$.



a_0 diepgang in het midden van het schip.

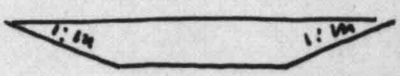
h_0 waterdiepte t.p.v. het scheepsmidden

θ = (hellingshoek) trimhoek

a_x en h_x de maten op een afstand x uit het midden van het schip.

$$h_x - a_x = h_0 - a_0 + \theta . x$$

$$a_x = h_x - h_0 + a_0 - \theta . x$$



F_x = dwarsprofiel kanaal

$$F_x = (b + n\, h_x)\, h_x$$

d_s = breedte van het schip

F_x met schip erin. = natte oppervlak

$$F_x = (b + m.h_x)\, h_x - b_s\,(h_x - h_0 + a_0 - \theta . x)$$

$$F(x + dx) = \left\{ b + m\left(h_x + \frac{dh_x}{dx}.dx\right)\right\}\left(h_x + \frac{dh_x}{dx}.dx\right) +$$

$$- b_s.\left\{ h_x + \frac{dh_x}{dx}.dx - h_0 + a_0 - \theta\,(x + dx)\right\}.$$

Continuiteitsvergelijking.

$$F_x \cdot V_x = F(x+dx)\left(V_x + \frac{dV_x}{dx}.dx\right).$$

$$(b+m\,h_x)h_x.V_x - b_s\,(h_x - h_o + a - \theta.x)\,V_x = \left(V_x + \frac{dV_x}{dx}.dx\right)\times$$

$$\times\left[\left\{b + m\left(h_x + \frac{dh_x}{dx}.dx\right)\right\}\left(h_x + \frac{dh_x}{dx}.dx\right) - b_s\left\{h_x + \frac{dh_x}{dx}.dx - h_o + a_o + \right.\right.$$

$$\left.\left. - \theta.x - dx.\theta\right\}\right].$$

uit gewerkt.

$$\left(bV_x + 2m\,h_x\,V_x - V_x b_s\right)\frac{dh_x}{dx} + \left(b h_x + m h_x^2 - b_s a_o + \right.$$

$$\left. + b_s\theta.x - b_s h_x + b_s h_o\right)\frac{dV_x}{dx} = -b_s\,\theta\,V_x$$

Vlugger geeft de vergelijking $\frac{dQ}{dx} = 0$ het zelfde resultaat.

$$Q = (b + m h_x)\,h_x V_x - b_s\,(h_x - h_o + a_o - \theta.x)\,V_x.$$

Over een lengte dx wordt door het schip de volgende hoeveelheid water verplaatst.

$$\frac{(a)_x + (a)_{x+dx}}{2} \times b_s \times dx.$$

$$= \frac{h_x - h_o + a_o - \theta.x + h_x + \frac{dh_x}{dx}dx - h_o + a_o - \theta.x - \theta.dx}{2} \times b_s \times dx$$

$$= \left\{h_x + a_o - h_o - \theta.x + \tfrac{1}{2}\frac{dh_x}{dx}dx - \tfrac{1}{2}\theta.dx\right\} \times b_s \times dx$$

Dit geeft een druk op de bodem groot

$\rho g \times$ verplaatste water.

$$\text{druk} = \rho g\left\{h_x - h_o + a_o - \theta.x + \tfrac{1}{2}\frac{dh_x}{dx}dx - \tfrac{1}{2}\theta dx\right)b_s.dx$$

$$\text{hor. comp} = \rho g\,\theta\left\{h_x - h_o + a_o - \theta.x + \tfrac{1}{2}\frac{dh_x}{dx}dx - \tfrac{1}{2}\theta.dx\right)b_s.dx.$$

De hydrostatische druk op de zijkant van een water mootje is. $\frac{1}{6}\rho g h_x^2 (3b + 2m.h_x)$. $\underbrace{-\frac{1}{2}\rho g b_s a_x^2}_{\text{t.g.v. schip.}}$

druk op afstand. $x + dx$.

$$\frac{1}{6}\rho g\left(h_x + \frac{dh_x}{dx}dx\right)^2 \left\{3b + 2m\left(h_x + \frac{dh_x}{dx}dx\right)\right\} +$$

$$-\frac{1}{2}\rho g b_s \left(h_x + \frac{dh_x}{dx}.dx - h_0 + a_0 - \Theta.x - \Theta.dx\right)^2$$

Resulterende druk $\longrightarrow$

$$dx\,\rho.g\left(-h_x^2.m.\frac{dh_x}{dx} - h_x.b.\frac{dh_x}{dx} + b_s.\Theta^2.x - b_s.\Theta.a_0 +\right.$$

$$+ b_s.a_0.\frac{dh_x}{dx} - b_s.\Theta.x.\frac{dh_x}{dx} - b_s\Theta h_x + b_s h_x \frac{dh_x}{dx} +$$

$$\left.- b_s.h_0.\frac{dh_x}{dx} + b_s h_0 \Theta\right)$$

Wrijving langs het schip. C_s (Chezy coëfficient).

$$K = -\rho g \frac{V_x|V_x|}{C_s^2} dx\,(b_s + 2h_x - 2h_0 + 2a_0 - 2\Theta.x)$$

$$= -\rho g \frac{V_x|V_x|}{C_s^2} dx\, O_s$$

$$O_s = b_s + 2h_x - 2h_0 + 2a_0 - 2\Theta.x$$

Wrijving langs de bodem.

Assenkruis beweegt zich met een snelheid V_1 t.o.v. de bodem.

Watersnelheid langs de bodem is $V_x - V_1$

$$K = -\rho g \frac{(V_x - V_1)|V_x - V_1|}{C_b^2} dx\,(b + 2h_x.\sqrt{m^2+1})$$

$$= -\rho g \frac{(V_x - V_1)|V_x - V_1|}{C_b^2} dx\, O_b$$

$$O_b = b + 2h_x.\sqrt{m^2+1}$$

Totale horizontale kracht.

$$dx\,\rho g\,\Big\{(h_x - h_o + a_o - \theta . x)\,\theta . b_s - h_x^2\, m \frac{dh_x}{dx} - h_x b \frac{dh_x}{dx} +$$

$$+ b_s \theta^2 x - b_s \theta a_o + b_s a_o \frac{dh_x}{dx} - b_s \theta x \frac{dh_x}{dx} - b_s \theta h_x +$$

$$+ b_s h_x \frac{dh_x}{dx} - b_s h_o \frac{dh_x}{dx} + b_s h_o \theta - \frac{V_x|V_x|}{c_s^2} O_s - \frac{(V_x - V_1)|V_x - V_1|}{c_b^2} O_b$$

$$K_{tot} = -\rho g\, dx \Big[\overbrace{\{(b + m h_x) h_x - b_s (h_x + h_o - a_o + \theta . x)\}}^{F_x} \frac{dh_x}{dx} +$$

$$+ \frac{V_x|V_x|}{c_s^2} O_s + \frac{(V_x - V_1)|V_x - V_1|}{c_b^2} O_b \Big]$$

$$\frac{K_{tot.}}{F} = -\rho g\, dx \Big\{ \frac{dh_x}{dx} + \frac{V_x|V_x|}{c_s^2 R_s} + \frac{(V_x - V_1)|V_x - V_1|}{c_b^2 R_b} \Big\}$$

$$\frac{O_s}{F} = \frac{1}{R_s} \qquad \frac{O_b}{F} = \frac{1}{R_b}$$

$$\frac{d(m.v)}{dt} = \Big[\rho \{(b + m h_x) h_x - (h_x - h_o + a_o - \theta . x) b_s\} dx \Big] \times$$

$$\times\, V_x \frac{dV_x}{dx}$$

$$K dt = d\,(m.v)$$

$$V_x \frac{dV_x}{dx} = -g \Big(\frac{dh_x}{dx} + \frac{V_x|V_x|}{c_s^2 R_s} + \frac{(V_x - V_1)|V_x - V_1|}{c_b^2 R_b} \Big)$$

Stel dat er geen wrijving is dan gaat de vergelijking over in de volgende vorm

$$V_x \frac{dV_x}{dx} = -g \frac{dh_x}{dx}$$

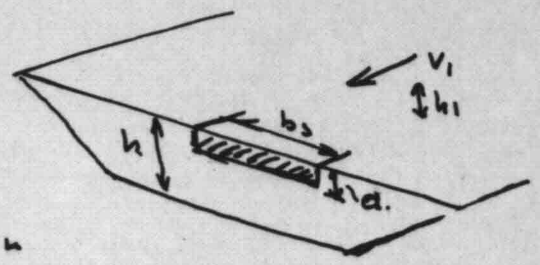
$$\frac{1}{2} \frac{d(V_x^2)}{dx} + g \frac{dh_x}{dx} = 0$$

geïntegreerd geeft $\frac{V_x^2}{2g} + h_x = C$

dit is de vergelijking van Bernoulli

Stroming bij de boeg.

Bij de boeg een gebied waar het water versnelt. Continuiteits vergelijking en de vergelijking van Bernoulli.



Continuiteitsvergelijking.

$$\{(b+mh).h - b_s.a\}\,v = (b+mh_1)\,h_1 v_1 = Q$$

Bernoulli $\quad \dfrac{v_1^2}{2g} + h_1 = \dfrac{v^2}{2g} + h.$

$$h = \frac{v_1^2 - v^2}{2g} + h_1$$

h in de continuiteitsverg. gesubstitueerd geeft.

$$\left[\left\{b + m\left(\frac{v_1^2-v^2}{2g}+h_1\right)\right\}\left(\frac{v_1^2-v^2}{2g}+h_1\right) - b_s.a\right]v =$$

$$(b+mh_1)\,h_1 v_1 = Q$$

$$a = h - h_0 + a_0 - \Theta.\tfrac{1}{2}L = \frac{v_1^2-v^2}{2g} + h_1 - h_0 + a_0 - \frac{\Theta.L}{2}$$

waarin L de lengte van het schip is.

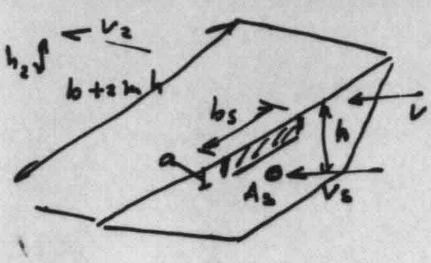
Θ = trimhoek

a_0 = diepgang t.p.v. het scheepsmidden.

h_0 = waterstand bij het midden van het schip.

$$\left[\left\{b + m\left(\frac{v_1^2-v^2}{2g}+h_1\right)\right\}\left(\frac{v_1^2-v^2}{2g}+h_1\right) - b_s\left\{\frac{v_1^2-v^2}{2g}+h_1-h_0+a_0 - \frac{\Theta.L}{2}\right\}\right].v = Q$$

v op te lossen als $b, b_s, m, h_1, v_1, h_0, a_0, \Theta$ en L bekend zijn.



Achtersteven.

Continuiteitsvergelijking.

$$\zeta(b+mh)h - b_s.a - A_s \zeta v + A_s V_s = (b+mh_2)h_2 v_2 = Q$$

V_s = snelheid schroefstraal

A_s = dwarsoppervlak schroefstraal

Gangvergelijking.

$$\overleftarrow{K dt} = \overleftarrow{d(m.v)}$$

$$\{\tfrac{1}{6}\rho g h^2 (3b+2mh) - \tfrac{1}{6}\rho g h_2^2 (3b+2mh_2) + k_s \} dt =$$

$$\rho v_2 dt\, h_2 (b+mh_2) v_2 - \rho v_s dt\, A_s V_s - \rho v dt \times$$

$$\times \{h(b+mh) - ab_s - A_s \zeta\, v.$$

$$\tfrac{1}{6}\rho g h^2 (3b+2mh) - \tfrac{1}{6}\rho g h_2^2 (3b+2mh_2) + k_s =$$

$$\rho h_2 (b+mh_2) v_2^2 - \rho A_s V_s^2 - \rho \{h(b+mh)$$

$$- ab_s - A_s \zeta\, v^2.$$

in de laatste term beter v^2 te vervangen door αv^2 door de onregelmatige snelheidsverdeling bij de achtersteven.