

H/12 1947.

# DE BELASTING VAN VLIEGTUIGEN DOOR SYMMETRISCHE REMOUSSTOOTEN

P R O E F S C H R I F T

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN  
DE TECHNISCHE WETENSCHAP AAN DE TECHNISCHE  
HOOGESCHOOL TE DELFT KRACHTENS ARTIKEL 2 VAN  
HET KONINKLIJK BESLUIT VAN 16 SEPTEMBER 1927,  
STAATSBLAD No. 310, EN OP GEZAG VAN DEN RECTOR  
MAGNIFICUS Dr Ir H. I. WATERMAN, HOOGLEERAAR IN  
DE AFDEELING DER SCHEIKUNDIGE TECHNOLOGIE, VOOR  
EEN COMMISSIE UIT DEN SENAAAT TE VERDEDIGEN OP  
WOENSDAG 17 DECEMBER 1947 DES NAMIDDAGS TE 2 UUR

DOOR

JOHAN HENDRIK GREIDANUS

GEBOREN TE AMSTERDAM



1021 1149

Dit proefschrift is goedgekeurd door den promotor  
Prof. Dr Ir H. J. van der Maas

AAN MIJN MOEDER

*De schrijver van dit proefschrift betuigt hiermede zijn dank aan*

- *den Directeur Generaal van de Rijksluchtvaartdienst voor de verleende toestemming, resultaten van in opdracht van hem uitgevoerde onderzoekingen zonder voorafgaande publicatie in dit proefschrift op te nemen.*
- *de directie van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium voor de aan den schrijver toegestane vrijheid, hem opgedragen onderzoekingen de voor dit proefschrift wenschelijk geachte vorm en afwerking te geven, alsmede voor de beschikbaarstelling van het zetsel van een gelijktijdig met dit proefschrift verschenen laboratoriumpublicatie over dit werk (Deel XIV van de Verslagen en Verhandelingen van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium), ten behoeve van den druk van dit proefschrift.*

**DE BELASTING VAN VLIEGTUIGEN DOOR SYMMETRISCHE  
REMOUSSTOOTEN.**

I N H O U D.

	Blz.
01 Inleiding . . . . .	1
02 Preciseering van de vraagstelling . . . . .	2— 6
03 Grondslagen voor een theoretisch onderzoek der remousbelasting	6—14
04 Het standpunt, ingenomen ten opzichte van de literatuur . . .	14—15
05 Elementaire berekening van den belastingsfactor . . . . .	15—21
06 Invloed op de belasting van de traagheid, waarmede de draag- kracht zich instelt . . . . .	21—31
07 De invloed van de draaiingen van het vliegtuig om zijn dwars- as op de belasting . . . . .	31—49
08 De remousbelasting op een buigenden vleugel . . . . .	49—61
09 De draagkrachtverdeeling over vleugel en horizontaal staartvlak	61—63
10 Theorie en meetmateriaal . . . . .	63—71
11 Samenvatting . . . . .	72—74
12 Literatuurlijst . . . . .	75
13 Appendix: De transformatie van Laplace . . . . .	76—77
Uittreksel in de Engelsche taal . . . . .	78—82

---

## 01. Inleiding.

De constructie-deelen van een vliegtuig moeten zóó zijn gedimensioneerd, dat zij alle belastingen waaraan zij tijdens de vlucht, den start en de landing worden blootgesteld, zonder breukgevaar kunnen verdragen. Het is de opgave van het sterkteonderzoek, van te voren zoo goed mogelijk te controleeren of deze eisch bij het streven naar een klein constructiegewicht niet in het gedrang is gekomen. De grondslag van dit voornamelijk rekenenderwijs uitgevoerde onderzoek wordt gevormd door een serie exact gedefinieerde „belastingsgevallen”, die men getracht heeft zóó te omschrijven, dat zij de grootste in werkelijkheid door verschillende oorzaken te verwachten belastingen voldoende nauwkeurig voorstellen.

Bij het ontwerp van deze belastingsgevallen moeten ook de belastingen in aanmerking worden genomen, die worden gevormd door de min of meer onregelmatig fluctueerende krachten, welke op een vliegtuig werken bij een vlucht in onrustige lucht, in „remous”. Daartoe is vereischt, dat men de hoofdeigenschappen dezer belasting kent, waarbij de extreme waarden die zij kan bereiken natuurlijk vooral van belang zijn.

De bepaling van deze gegevens vordert een uitvoerig onderzoek, dat ondanks het vele reeds verrichte en in een omvangrijke literatuur gepubliceerde werk nog niet tot resultaten leidde, welke in alle opzichten bevredigend zijn. Het wordt vooral bemoeilijkt door het gebrek aan regelmaat in de atmosferische storingen, welke de beweging van het vliegtuig beïnvloeden, door het groote aantal graden van vrijheid van het vliegtuig en door het instationnaire karakter — in een dergelijke situatie — van de strooming om vleugel en staartvlakken.

De voornaamste bezwaren, die bij bestudeering van de desbetreffende literatuur te voorschijn komen, kunnen in hoofdzaak in een viertal punten worden samengevat.

Ten eerste zijn ook de uitvoerigste der beschikbare berekeningen van de belasting bij gegeven intensiteit en verdeling der atmosferische verstoring — welke berekeningen de ruggegraat van het theoretisch onderzoek vormen — nog juist te onvolledig om uit de uitkomsten alle gewenschte details van het gedrag van de maximale belasting te kunnen afleiden. Met name is de vermoedelijk niet geheel onbetekenende invloed van de zwaartepuntsligging van het vliegtuig langs dezen weg nog onvoldoende onderzocht.

Het tweede bezwaar geldt de systematiek van het theoretisch onderzoek. Het zeer groote aantal parameters van vliegtuig en vliegtoestand, waarvan de belasting in principe afhankelijk is, gevoegd

bij de oneindige variatie van den vorm der remousstoring maakt het in het onderhavige geval bijzonder noodig, primaire en secundaire invloeden met zorg te scheiden. In verband met de groote bewerkelijkheid der numerieke berekeningen moeten voor deze scheiding zooveel mogelijk algemeene gezichtspunten worden ontwikkeld. Worden deze richtlijnen verwaarloosd, dan ontstaat het gevaar, dat zelfs de uitkomsten van een zeer omvangrijk rekenwerk door onoverzichtelijkheid en ongeschikte vergelijkbaarheid — kortom: door gebrek aan systeem — onvoldoende hanteerbaar worden. In het bijzonder wordt de samenvatting van alle uit de literatuur bekende uitkomsten tot één geheel door dergelijke moeilijkheden belemmerd.

In de derde plaats blijkt het tot nu toe uitgevoerde onderzoek bijna uitsluitend te zijn toegespitst op de belasting, welke door de constructie-deelen van den vleugel moet worden opgenomen. Hoewel daarvoor ongetwijfeld zeer bijzondere belangstelling bestaat, is daarmee niet gezegd, dat de belasting op romp en staartvlakken geen aandacht verdient.

Tot besluit kan — in de vierde plaats — op den nog onbevredigenden stand van het experimenteel onderzoek worden gewezen. Dit is niet in het minst een gevolg van de omstandigheid, dat vele vragen, welke op de remousbelasting betrekking hebben, experimenteel alleen kunnen worden beantwoord aan de hand van een meetmateriaal van zeer grooten omvang, waarvan de verzameling soms principieel over een tijdvak van jaren moet worden uitgestrekt.

Het ligt in de bedoeling, te trachten het theoretisch onderzoek der remousbelasting in deze verhandeling tot een afgerond en behoorlijk hanteerbaar geheel te maken. Het blijkt gewenscht, de bestaande berekeningen der belasting daartoe binnen het kader van een zorgvuldig ontworpen, zoo eenvoudig mogelijk gehouden systeem ten deele te herhalen. Voor een ander deel dienen zij tot grooter nauwkeurigheid en volledigheid te worden verscherpt. Daarbij zal ook de belasting op romp en staartvlakken in het onderzoek worden betrokken. De eenige beperking welke het onderzoek, voor zooverre bekend, in navolging van de geheele literatuur zal bevatten, bestaat uit de veronderstelling, dat de op het vliegtuig werkende krachtenstelsels een voortdurend exact symmetrische verdeling vertoonen ten opzichte van het symmetrievlak van het vliegtuig.

Aan de eigenlijke uitwerking der theorie zal een kritische behandeling van de probleemstelling voorafgaan.

De verwerking van de uitkomsten van het onderzoek in veiligheidsvoorschriften of sterkteberekeningen wordt buiten beschouwing gelaten.

## 02. Preciseering van de vraagstelling.

02.1. Het uiteindelijk criterium voor de beoordeeling van de vraag of er gevaar bestaat dat een bepaald constructieonderdeel bij een gegeven belasting blijvend zal vervormen of zal breken, wordt gevormd door de grootste spanning, die de belasting in het materiaal, waaruit het onderdeel is gemaakt, te voorschijn roept. Dit geldt zoowel voor statische als voor veranderlijke belastingen, al zal men in beide gevallen niet dezelfde spanningen toelaten, omdat bij fluctueerende belastingen met vermoeiingsverschijnselen rekening moet worden gehouden. De sterkteberekening voor een mechanisch systeem moet dus in laatste instantie neerkomen op een berekening van de grootste spanningen, die onder in aanmerking komende omstandigheden optreden in de constructiedeelen, waaruit het systeem is samengesteld.

De op een bepaald tijdstip in een systeem optredende spanningen of de daarmee in het elastische gebied volgens de wet van Hooke evenredige vervormingen kunnen worden berekend, wanneer zijn gegeven:

- a. het door het gewicht van het systeem gevormde krachtenstelsel.
- b. het stelsel der overige uitwendige krachten.
- c. het stelsel der in het systeem op dat moment werkende traagheidskrachten.

De wiskundige vergelijkingen, die deze berekening mogelijk maken, zijn de differentiaalbetrekkingen, die het krachtenevenwicht beschrijven voor een willekeurig infinitesimaal elementje van het systeem en de vergelijkingen, welke het verband tusschen spanningen en vervormingen vastleggen. De oplossing van deze vergelijkingen is betrekkelijk eenvoudig, wanneer de voornoemde krachtenstelsels explicite zijn gegeven. In het algemeen is dat alleen het geval, wanneer de belastingen niet van den tijd afhangen, d.w.z. statisch zijn. Er treedt dan geen beweging in het systeem op en de traagheidskrachten zijn dus nul.

Moelijker is de behandeling reeds, wanneer een eveneens statische belasting van de deformaties van het systeem afhankelijk is. Zij is dan gewoonlijk niet van te voren bekend, doch wordt door deze als gegeven te beschouwen afhankelijkheid implicite bepaald.

In het meest algemeene geval echter zijn de belastende krachtenstelsels veranderlijk. De uitwendige krachten kunnen dan niet alleen van de deformaties zelve, doch bovendien van de veranderingen daarvan, en van plaats en beweging van het systeem-als-geheel afhankelijk zijn, terwijl gewicht en traagheidskrachten op de bekende wijze resp. van de ruimtelijke oriëntatie en van de in het systeem optredende versnellingen afhangen. De spanningsberekening wordt dan haast zonder uitzondering een mathematisch uiterst gecompliceerde opgave, die alleen met goed gevolg kan worden opgelost, wanneer men erin slaagt, de behandeling door geschikt gekozen benaderingen te vereenvoudigen.

Een zeer radicale vereenvoudiging is mogelijk in die gevallen, waarin het te onderzoeken systeem een zoo groote stijfheid heeft, dat de vervormingen, welke er door de belastende krachten in worden geforceerd, zoo klein blijven, dat de terugwerking dezer vervormingen op de belasting kan worden verwaarloosd. In dat geval zullen de belastende krachtenstelsels immers bij benadering, voor zoover zij niet explicite zijn gegeven, uitsluitend afhankelijk worden van de ruimtelijke oriëntatie en van de beweging van en om het zwaartepunt van het systeem-als-geheel.

Dit laatste gezichtspunt blijkt een grondslag te vormen voor de spanningsberekening in de constructiedeelen van een vliegtuig, dat tijdens de vlucht aan remousstoringsen is onderworpen. De voorwaarden, die moeten worden gesteld, luiden in meer nauwkeurigen vorm:

- a. dat de traagheidskrachten, verbonden aan de wijziging der vervormingen (als zoodanig komen in het gegeven geval buigingen en tordeeringen van vleugel, staartvlakken en romp in aanmerking) moeten kunnen worden verwaarloosd vergeleken bij de traagheidskrachten, verbonden aan de versnellingen van de beweging van het vliegtuig als geheel.
- b. dat het stelsel der op het vliegtuig werkende luchtkrachten (d.i. der uitwendige krachten) niet merkbaar door de vervormingen wordt beïnvloed.

De vervorming mag in dit geval aanvankelijk nul worden gesteld, het vliegtuig dus als een volkomen stijf geheel worden behandeld. Tusschen de belastende krachtenstelsels der luchtkrachten en der traagheidskrachten bestaat dan het betrekkelijk eenvoudige verband, dat wordt gegeven door de zes bewegingsvergelijkingen van het vliegtuig als geheel. Wanneer de luchtkrachten nu zijn gegeven als functies van den tijd, de zes plaatscoördinaten van het vliegtuig en eventueel hun afgeleiden naar den tijd van desnoods willekeurige orde, kan de variatie van de resulterende belasting in beginsel explicite (als functie van den tijd alléén) worden bepaald door deze zes vergelijkingen op te lossen. De berekening van de spanningen is dan verder vergelijkbaar met het eenvoudigste statische belastingsgeval, waarbij de belasting volledig bekend is. Mèt de spanningen kunnen ook de in werkelijkheid nog optredende kleine vervormingen bekend worden geacht.

Dat het onderzoek der remousbelasting op een vliegtuig inderdaad op den zoo juist beschreven vereenvoudigden grondslag mag worden betrokken, zal later (punt 08) uitvoerig worden aangetoond.

02.2. Om de op één bepaald moment in de constructiedeelen van een vliegtuig (dat wordt opgevat als een bijna volkomen stijf systeem) optredende spanningen te kunnen berekenen is het noodig en voldoende, de oriëntatie van het vliegtuig in de ruimte (waardoor de richting der gewichtskrachten wordt bepaald) en het stelsel der op het vliegtuig werkende luchtkrachten voor dát moment te geven. Want het door de drie lineaire

en de drie hoekversnellingscomponenten volledig bepaalde stelsel der traagheidskrachten kan dan worden ontleend aan de 6 bekend te veronderstellen bewegingsvergelijkingen van het vliegtuig.

Omgekeerd uit de bewegingsvergelijkingen bij gegeven versnellingen het stelsel der luchtkrachten af te leiden is zonder verdere gegevens natuurlijk niet mogelijk, omdat de luchtkrachten slechts gesommeerd tot resulterende kracht en resulterend moment in deze vergelijkingen voorkomen. Deze afleiding wordt pas uitvoerbaar, wanneer bovendien bepaalde gegevens met betrekking tot de verdeling van de luchtkrachten ter beschikking staan. Is dat het geval, dan kunnen als uitgangspunt voor een spanningsberekening verder de componenten van de lineaire en de hoekversnelling dienst doen.

Het mag aannemelijk heeten, dat daarbij een bijzondere beteekenis zal mogen worden toegekend aan de grootste waarden, die deze versnellingen bereiken. Toeh is het goed dat men zich realiseert, dat er geen direct verband bestaat tusschen deze maxima en de maxima van de spanningen in het constructiemateriaal van het vliegtuig, waar het tenslotte op aan komt. Strikt genomen is het dus niet geheel voldoende, uitsluitend de maximale waarden der versnellingen vast te stellen. Wel is het juist, dat een vermenigvuldiging van alle versnellingscomponenten met eenzelfde factor  $n$  bij gegeven krachtverdeling tot  $n$  maal zoo hooge spanningen leidt. Het verband tusschen spanningen en versnellingen is immers lineair.

02.3. Heel wat eenvoudiger wordt het onderzoek, wanneer dit — zooals in de bedoeling ligt — wordt beperkt tot de symmetrische remousbelastingen, d.w.z. tot die gevallen, waarin alle krachtenstelsels exact symmetrisch zijn t.o.v. het symmetrievlak van het vliegtuig. In dit geval is en blijft ook de beweging van het vliegtuig symmetrisch.

De mogelijkheid de symmetrische toestanden als afzonderlijke, zelfstandige klasse te behandelen berust natuurlijk op den symmetrischen bouw van het vliegtuig. Kleine soms aanwezige afwijkingen van deze symmetrie worden dan ook verwaarloosd. Deze worden in principe b.v. gevormd door de in den regel éézijdige draairichting der motoren (schroeven).

In een symmetrischen toestand wordt de beweging van het als een volkomen stijf geheel opgevatte vliegtuig beheerscht door slechts drie bewegingsvergelijkingen. Twee daarvan kunnen geacht worden het evenwicht der krachten in de richting van de langsas en van de topas te formuleeren, in de derde mag de formulering van het evenwicht van de momenten om de dwarsas worden gezien. Daarbij is het rechthoekige assenkruis zoo aangenomen, dat de oorsprong in het (in het symmetrievlak van het vliegtuig gelegen) zwaartepunt van het vliegtuig valt, de naar voren positief gerekende X-as evenwijdig loopend met de aerodynamische koorde in het symmetrievlak van het vliegtuig ligt, de naar boven positief gerekende topas eveneens in dit vlak ligt en de dwarsas hier, naar stuurboord positief, loodrecht op staat.

Worden de luchtkrachten eveneens in componenten ontbonden, welke in de richtingen van de

langsas en van de topas wijzen, dan kan het stelsel, gevormd door de laatstgenoemde componenten, gevoelig met het stelsel der „dragende” luchtkrachten worden geïdentificeerd, en de componenten in de richting van de langsas met de weerstandskrachten, vermeerderd met een gering aandeel der dragende krachten. Daar nu de veranderingen van de dragende krachten, welke tot stand komen onder den invloed van de groote veranderingen van de invalshoeken, veroorzaakt door remousstroomingen in het omringend stroomingsveld, de veranderingen van de weerstandskrachten in absolute grootte verre overtreffen (zoodat in de richting van de topas veel grotere versnellingen ontstaan dan in de richting van de langsas), wordt de remousbelasting practisch beheerscht door het gedrag van de dragende krachten. Het geheele stelsel der luchtkrachtencomponenten in de richting van de langsas kan daarom bij de behandeling der remousbelasting buiten beschouwing worden gelaten. Dit geldt te meer, daar krachten in deze richting veel gemakkelijker dan de dragende luchtkrachten door de vliegtuigconstructie worden opgenomen. (Er zijn immers geen doorsneden, die in de richting van de langsas een met de dikte van den vleugel vergelijkbare geringe afmeting hebben).

Bedenkt men verder, dat het aandeel van de luchtkrachten op den romp in het stelsel der dragende krachten maar heel klein is, dan komt men tot de conclusie, dat de symmetrische remousbelasting uiteindelijk wordt beheerscht door de grootte en de verdeling van de dragende luchtkrachten op den vleugel en op het horizontale staartvlak.

Worden luchtkrachten op den romp, evenals de bijdrage van de weerstandskrachten in het moment om de dwarsas, verwaarloosd, dan kan men zich de twee zoojuist genoemde deelen van de totale draagkracht verbonden denken met:

- 1<sup>o</sup>. de langshelling van het vliegtuig (welke de richting van de gewichtskraft vastlegt) en de versnelling, in de richting van de topas, van de zwaartepuntsbeweging, waarbij de bewegingsvergelijking, welke het krachtenevenwicht in de richting van de topas formuleert, de verbindingsschakel is.
- 2<sup>o</sup>. de versnelling van de draaiing om de dwarsas, waarbij de momentenvergelijking de verbinding levert.

De drie hierdoor aangewezen variabelen kunnen tot twee worden teruggebracht door aan de versnelling van de zwaartepuntsbeweging in de richting van de topas den component in die richting van de versnelling van de zwaartekracht toe te voegen. Deze som wordt ook door een meetinstrument voor componenten eener versnelling aangewezen, wanneer dit in het zwaartepunt van het vliegtuig zóó wordt opgesteld, dat het de versnellingen in de richting van de topas meet. Zij moge kortheids halve „totale versnelling” worden genoemd.

Mede op grond van wat in punt 02.2 werd besproken kan de symmetrische remousbelasting dus klaarblijkelijk nauwkeurig genoeg bepaald



worden gedacht door de zooeven gedefinieerde totale versnelling, de hoekversnelling van de draaiing om de dwarsas en de functies, welke de verdeling van de draagkracht over den vleugel en over het horizontale staartvlak voorstellen. Deelt men de eerste versnelling door de zwaartekrachtsversnelling  $g$  en de tweede door het quotiënt van  $g$  en één of andere typische lengte-afmeting van het vliegtuig, dan worden 2 gemakkelijk hanteerbare dimensielooze parameters verkregen, die bij het verdere onderzoek goede diensten zullen bewijzen.

02.4. Het onderzoek der symmetrische belastingen zou op zijn beurt kunnen worden vereenvoudigd, wanneer het overbodig zou zijn, de draagkrachtverdelingen in de beschouwingen te betrekken. Dit zou b.v. het geval zijn, wanneer de bekende wetmatigheid der circulatieverdeling in stationnaire vlucht, zooals die door de vergelijking van Prandtl wordt gegeven, ook in het niet-stationnaire geval geldig bleef. Jammer genoeg is de zaak echter niet zoo eenvoudig, zooals uit de navolgende kwalitatieve beschouwing blijkt.

In stationnaire vlucht wordt de verdeling van de draagkracht — d.i. van het verschil van de drukken aan onder- en bovenzijde van den vleugel — *langs een koorde* van het draagvlak in eerste instantie bepaald door de eigenschappen van het draagvlakprofiel. Hierin liggen althans de beheerschende factoren, als de slankheid de orde van grootte heeft, welke bij vliegtuigvleugels gebruikelijk is. (Is de slankheid klein, zooals bij staartvlakken soms het geval is, dan gaat ook zij de draagkrachtverdeling langs een koorde beïnvloeden. Deze invloed bestaat uit een verplaatsing naar achteren van het drukpunt). Voor dunne, ongewelfde vleugels wordt zooals bekend is een verdeling gevonden, waarbij het drukpunt op ongeveer een kwart van de koorde achter den neus van den vleugel ligt. De verdeling van de draagkracht over de *vleugelbreedte* stemt overeen met de circulatieverdeling en hangt volgens de vergelijking van Prandtl (welke eveneens alleen bruikbaar is, wanneer de slankheid niet té klein is) in hoofdzaak af van

- 1°. het verloop van de koorde (ellipsvorm, tapscheid);
- 2°. het verloop van den meetkundigen invalshoek (wrong van het draagvlak).

Zooals bekend bevat de vergelijking van Prandtl den invalshoek, die het stationnaire wervelsysteem in het zog van den vleugel ter plaatse van den vleugel induceert.

Bij een vlucht in onrustige lucht treedt een niet stationnaire circulatie om den vleugel op. Ook voor dit geval kan men langs theoretischen weg aantoonen, dat het drukpunt bij een dunnen vleugel in het kwart-koorde punt ligt. Hierbij wordt alleen een relatief onbelangrijk krachtcomplex, dat uitgelegd kan worden als traagheidswerking

van een door den vleugel versnelde hoeveelheid lucht, buiten beschouwing gelaten.

De draagkrachtverdeling over de vleugelbreedte echter verschilt van den in het stationnaire geval aangetroffen vorm, omdat de wervelconfiguratie in het zog van den vleugel geheel anders is. Dientengevolge is de vergelijking van Prandtl nu niet meer geldig.

Oogenschijnlijk is er dus niet aan te ontkomen, bij het onderzoek der remousbelasting de studie der in aanmerking komende verdelingen der instationnaire kracht in te sluiten. Daarmede wordt een hoogst ingewikkeld aerodynamisch vraagstuk aan de orde gesteld. Feitelijk zou immers niet minder dan een complete theorie voor de draagkracht op vleugels van eindige afmetingen in niet-stationnaire strooming moeten worden ontwikkeld. Op het oogenblik is een dergelijke theorie alleen voor den vleugel in twee-dimensionale strooming beschikbaar. Voor de *resulteerende* draagkracht kan men hieraan ook voor vleugels van eindige afmetingen een redelijk nauwkeurige uitkomst ontleenen, ten aanzien van de *draagkrachtverdeling* echter is een verdere uitwerking van het drie-dimensionale geval noodzakelijk. Dit is een probleem, dat binnen het kader van deze verhandeling niet kan worden opgelost. Men dient hier de toekomstige ontwikkeling der aerodynamische theorie af te wachten.

Het lijkt op het eerste gezicht, dat bij dezen stand van zaken een ontoelaatbare leemte in het onderzoek der remousbelasting open zal blijven. Gelukkig blijkt echter — een uitvoerige bespreking is in punt 09 opgenomen — dat men twee grensgevallen, waardoor de verdeling der instationnaire draagkracht wordt ingesloten, op grond van louter kwalitatieve overwegingen kan aanwijzen. Deze hierbij behoorende verdelingen liggen zoo dicht bij elkaar, dat de sterkteberekening er, ondanks wenschelijk blijvende precisering, zonder al te groot bezwaar op kan worden gebaseerd. Dat in de geheele literatuur over de remousbelasting niets over het gesignaleerde probleem te vinden is, berust blijkbaar op de niet geheel gerechtvaardigde veronderstelling, dat de sterkteberekening, voor wat betreft de krachtverdeling over de vleugelbreedte, reeds over een bevredigende werkbasis beschikt.

02.5. Denkt men zich de nog aan een beslissend onderzoek ontsnappende krachtverdeling in een of anderen aannemelijken vorm gegeven, dan kan de remousbelasting verder ten volle met behulp van de twee aan het slot van punt 02.3 gedefinieerde dimensielooze versnellingsparameters worden beschreven. Hiervan zal de eerste, welke aan de totale versnelling in het zwaartepunt van het vliegtuig is ontleend, de belangrijkste blijken te zijn. Hierdoor wordt de gebruikelijke naam „belastingsfactor” voor deze grootheid gerechtvaardigd.

02.6. Op grond van al deze beschouwingen kan de vraagstelling van het onderzoek der remousbelasting, met de voor het vervolg wenschelijke precisie, als volgt onder woorden worden gebracht:

Gevraagd wordt de grootste waarde te bepalen, welke de *belastingsfactor*  $\left( = \frac{\text{totale versnelling}}{g} \right)$

in remous bereikt; hoe groot de versnelling van de draaiing om de dwarsas, welke daarbij wordt aangetroffen, hoogstens is en hoe deze twee grootheden vlak vóór en vlak na het oogenblik, waarop de belastingsfactor maximaal wordt, in het algemeen varieren.

Verder is het gewenscht althans eenige richtlijnen op te sporen voor een schatting van de circulatieverdelingen van vleugel en horizontaal staartvlak, die in dat tijdsinterval gewoonlijk op zullen treden.

Voor zoover het vliegtuig in berekeningen over de remousbelasting als een elastisch volkomen stijf geheel wordt behandeld, dient deze vereenvoudiging tot besluit nader te worden gemotiveerd en eventueel te worden gecorrigeerd.

02.7. Het is misschien tot besluit van dit hoofdstuk niet ondienstig aan een paar eenvoudige voorbeelden expliciete te laten zien, hoe men spanningen in de vliegtuigconstructie uit een gegeven belastingsfactor, gegeven hoekversnelling en gegeven krachtverdelingen over de breedte van vleugel en horizontaal staartvlak kan afleiden. Om echter niet in problemen uit de elasticiteitstheorie verzeild te raken, is het noodzakelijk daarbij de elastische spanningen zelve door integralen over bepaalde doorsnijdingsoppervlakken, d.w.z. door de totale elastische krachten, te vervangen. Verder wordt het vliegtuig natuurlijk opgevat als een volkomen stijf systeem. Vleugel en horizontaal staartvlak worden verondersteld de eenvoudigste, vrijdragende constructie te vertoonen. De Z-as van het coördinatenstelsel wordt *thans* loodrecht op, de X-as dus in de richting van, de baan aangenomen.

02.7.1. Wanneer de elastische spanning in het constructiemateriaal van den vleugel wordt geïntegreerd over het oppervlak van een willekeurige dwarsdoorsnede door dit onderdeel, verkrijgt men een elastische kracht  $K$ , waarvan de Z-component kan worden afgeleid uit de vergelijking, die het evenwicht van de krachten, in de richting van de Z-as, op het „afgesneden stuk” van den vleugel formuleert. De X- en Y-componenten van  $K$  worden kennelijk nul, wanneer luchtkrachten in de richtingen van de X- en Y-as worden verwaarloosd en ook geen dwarshelling van het vliegtuig aanwezig is (symmetrische vlucht). Deze vergelijking bevat:

- 1°. de component  $K_z$  van  $K$ .
- 2°. het deel van de draagkracht van den vleugel, dat op het afgesneden stuk werkt. Is  $L$  de totale draagkracht, dan kan men hiervoor schrijven:  $fL$ , waarin  $f$  een factor is, die bij gegeven ligging van de doorsnede uitsluitend van de circulatieverdeling van den vleugel afhangt
- 3°. een traagheidskracht  $-m_A a_p$ , waarin  $m_A$  de (bekende) massa is van het afgesneden stuk en  $a_p$  de versnelling in de richting van de Z-as in het zwaartepunt daarvan.

- 4°. de component  $-m_A g \cos \theta$  van het gewicht van het afgesneden stuk ( $\theta$  is de langshellingshoek van het vliegtuig).

Zij luidt:

$$K_z + fL - m_A a_p - m_A g \cos \theta = 0.$$

Nu ligt het zwaartepunt van het afgesneden stuk nooit ver buiten de dwarsas van het vliegtuig. Ook wanneer een hoekversnelling  $\omega$  van de draaiing van het vliegtuig om de dwarsas optreedt, verschilt  $a_p$  daarom toch niet veel van  $a_z$ , de overeenkomstige versnelling in het zwaartepunt van het vliegtuig. Men kan daarom  $a_p$  zonder veel bezwaar door  $a_z$  vervangen en vindt zoo:

$$K_z = m_A (a_z + g \cos \theta) - fL.$$

$a_z + g \cos \theta$  is echter de vroeger gedefinieerde totale versnelling. In de plaats hiervan kan dus  $ng$  worden geschreven, als  $n$  de belastingsfactor voorstelt.

Dus

$$K_z = m_A ng - fL. \quad (02.1)$$

Doeh uit het krachtenevenwicht voor het geheele vliegtuig volgt

$$L - m a_z - mg \cos \theta = L - mng = 0. \quad (02.2)$$

Aandeelen van andere deelen van het vliegtuig dan de vleugel in de totale draagkracht zijn verwaarloosd.

Uit (02.1) en (02.2) volgt direct

$$K_z = (m_A - fm) ng. \quad (02.3)$$

De kracht  $K_z$  kan met deze formule worden berekend, wanneer behalve de massaverdeling de grootheden  $n$  — de belastingsfactor — en  $f$  — de draagkrachtverdeling van den vleugel — zijn gegeven.

02.7.2. Vervolgens wordt een dwarsdoorsnede door het horizontale staartvlak aangebracht. Ook in dit geval kan de Z-component der geïntegreerde spanning uit de evenwichtsvergelijking van het afgesneden stuk worden afgeleid. Deze luidt

$$K_z + f_s L_s - m_A (a_z - h_s \dot{\omega}) - m_A g \cos \theta = 0, \quad (02.4)$$

waarin  $f_s$  de factor is, die het deel van de totale draagkracht  $L_s$  op het horizontale staartvlak geeft, dat op het afgesneden stuk werkt. Deze factor is dientengevolge afhankelijk van de draagkrachtverdeling voor het horizontale staartvlak. Verder is  $h_s$  de afstand van de zwaartepuntlijn van dit vlak tot het zwaartepunt van het vliegtuig, zoodat  $a_z - h_s \dot{\omega}$  de versnelling geeft ter plaatse van het horizontale staartvlak (de draaiing van het vliegtuig om de dwarsas wordt achterover positief gesteld).

Als  $B$  het traagheidsmoment van het vliegtuig is om de dwarsas en  $M_v$  het moment van de luchtkrachten om die as (de luchtkrachten op de staartvlakken niet meegerekend), dan kan het momenten-evenwicht van het geheele vliegtuig bij benadering in den vorm

$$-B\dot{\omega} + M_v - h_s L_s = 0 \quad (02.5)$$

worden geschreven. Voert men nu voor  $M_v$  de benadering

$$M_v \approx M_o + \frac{\partial M}{\partial L} L \quad (02.6)$$

in, met twee bekende constanten  $M_o$  en  $\frac{\partial M}{\partial L}$ , dan leidt men uit (02.5), (02.6) en (02.2) zonder moeite de navolgende betrekkingen af:

$$\begin{aligned} L_s &= \frac{M_v - B\dot{\omega}}{h_s} = \frac{M_o + \frac{\partial M}{\partial L} L - B\dot{\omega}}{h_s} = \\ &= \frac{M_o + \frac{\partial M}{\partial L} m n g - B\dot{\omega}}{h_s}. \end{aligned}$$

Substitueert men dit in (02.4), dan is het resultaat

$$\begin{aligned} K_z &= m_A \left( a_z + g \cos \theta - h_s \dot{\omega} \right) - \\ &- \frac{f_s}{h_s} \left( M_o + \frac{\partial M}{\partial L} m n g - B\dot{\omega} \right) = \\ &= m_A \left( n g - h_s \dot{\omega} \right) - \frac{f_s}{h_s} \left( M_o + \frac{\partial M}{\partial L} m n g - B\dot{\omega} \right), \end{aligned}$$

of, bepaalde termen samennemend

$$\begin{aligned} K_z &= n g \left( m_A - \frac{f_s}{h_s} \frac{\partial M}{\partial L} m \right) - \\ &- \dot{\omega} \left( m_A h_s - \frac{f_s}{h_s} B \right) - \frac{f_s}{h_s} M_o. \quad (02.7) \end{aligned}$$

Deze formule laat zien, dat  $K_z$  kan worden berekend, wanneer, behalve een aantal parameters die eigenschappen van het vliegtuig vastleggen, zijn gegeven  $n$ ,  $\dot{\omega}$  en  $f_s$ , d.w.z. de belastingsfactor, de hoekversnelling van de draaiing om de dwarsas en de draagkrachtverdeling van het horizontale staartvlak.

### 03. Grondslagen voor een theoretisch onderzoek der remousbelasting.

03.1. Remous is uit ervaring bekend als een complex min of meer onregelmatig verdeelde en varieerende *storende luchtstromingen* in de atmosfeer. Komt een vliegtuig in een deel van de atmosfeer terecht, waarin zulke storingen worden aangetroffen en dat met de benaming „remousveld” moge worden aangeduid, dan wordt het aan een fluctueerend krachtensysteem onderworpen, dat een verstoring van de vliegtuigbeweging veroorzaakt.

Om de twee versnellingen en eventueel de twee draagkrachtverdelingen, die tezamen de remousbelasting op het vliegtuig bepalen, onder die omstandigheden met de vereischte nauwkeurigheid te kunnen berekenen, dient op zijn minst de stroomingsverdeling in het remousveld in een mathematisch behoorlijk geformuleerden vorm te zijn gegeven. Het ligt voor de hand, dat het bij der-

gelijke berekeningen niet uitvoerbaar is, rekening te houden met alle denkbare mogelijkheden. De eerste vraag is daarom, welke karakteristieke eigenschappen van de stroomingsverdeling aanleiding geven tot hoge belastingen en door welke geschematiseerde — mathematisch exact omschreven — stroomingsverdelingen deze kunnen worden getypeerd.

De richting, waarin het antwoord moet worden gezocht, wordt direct door de ervaring gegeven. Het is immers bekend, dat de ernstigste verschijnselen der remouswerking op het vliegtuig worden gevormd door de „klappen”, welke het vliegtuig treffen. Deze hebben het karakter van een zeer plotselinge inzet van een storend krachtensysteem op het vliegtuig. Er is geen twijfel aan, dat de typische eigenschap der stroomingsverdeling in de atmosfeer, die zoo'n verschijnsel tot stand brengt, bestaat uit een plotselinge verandering van een storende stroomsnelheid over een zeer kort traject van de vliegbaan.

De tot uitersten eenvoud geschematiseerde stoorsnelheidsverdeling, die deze eigenschap vertoont, bestaat uit een combinatie van 2, door een plat vlak gescheiden te denken, atmosferische velden, waarin gelijk (en evenwijdig aan het scheidingsvlak) gerichte luchtstromingen van verschillende grootte optreden. In ieder dezer velden kan de strooming naar ruimte en tijd onveranderlijk worden aangenomen. Een vliegtuig, dat in deze atmosfeer vliegt, wordt door den remousstoot getroffen op het oogenblik, waarop het het scheidingsvlak passeert. De belasting op de vliegtuigconstructie is symmetrisch, als het symmetrievlak van het vliegtuig loodrecht op het scheidingsvlak staat.

Een snelheidsverdeling van dit sterk geschematiseerde type zal in den vervolge „scherp begrensd remousveld” worden genoemd. Het vormt in de omvangrijke literatuur over de remousbelasting één der meest gebruikte punten van uitgang voor het mathematisch onderzoek. Het spreekt echter vanzelf, dat het te eenvoudig is, om de plotselinge snelheidsveranderingen, die in werkelijke remousvelden optreden, geheel bevredigend weer te geven. Van physisch standpunt mag het immers onwaarschijnlijk worden genoemd, dat in de atmosfeer strikte discontinuïteiten der stroomsnelheid zouden optreden. Men zal dus een nauwkeuriger aanpassing bij de werkelijkheid verkrijgen, als de sprong in de stroomsnelheid wordt vervangen door een meer geleidelijken overgang, zij het ook, dat deze op relatief kort traject tot stand dient te komen. Door deze wijziging wordt het scherp begrensd remousveld veranderd in wat in den vervolge een „remousveld met overgangsgebied” zal worden genoemd. Binnen het overgangsgebied kan de geleidelijke verandering van de stoorsnelheid zoo worden aangenomen, dat zij wiskundig door één of andere eenvoudige formule kan worden voorgesteld.

Er is nog een derde elementaire vorm der snelheidsverdeling denkbaar, die een stoot op het vliegtuig zal veroorzaken, en wel een snelheidsveld, waarin uitsluitend in een smal, door twee onderling evenwijdige dicht bij elkaar gelegen platte vlakken begrensd gebied een storende strooming optreedt. Ook in dit geval zullen de

snelheidsveranderingen gewoonlijk geleidelijk zijn, waardoor de snelheidsvariatie het karakter van een golf krijgt en dan ook later met den naam „remousgolf” zal worden betiteld. Hoewel men gemakkelijk kan aantonen, dat de remousgolf bij een gegeven waarde der grootste stoorsnelheid minder hooge belastingen veroorzaakt dan een snel inzettende en daarna onveranderlijk blijvende stoorstrooming, is er reden toch dezen vorm der snelheidsverdeling in de beschouwingen te betrekken, omdat zij opgevat kan worden als typisch element uit die in werkelijkheid zoo vaak voorkomende remousvelden, waarbinnen de storingen zeer onregelmatig zijn verdeeld.

Tot slot wordt er de aandacht op gevestigd, dat er weinig reden is, rekening te houden met de veranderingen die de storingen in een werkelijk remousveld in den loop van den tijd kunnen en in het algemeen zullen vertoonen. Door een geschikte keuze der ruimtelijke snelheidsverdeling langs de vliegbaan zal men een veranderlijk remousveld immers door een „stationnair” veld kunnen vervangen, dat het vliegtuig practisch op gelijke wijze beïnvloedt, al kunnen beide toestanden theoretisch in het algemeen niet exact gelijkwaardig gemaakt worden.

03.2. In de veronderstelling, dat het remousveld één der drie zoojuist beschreven geschematiseerde vormen vertoont, wordt een coördinaatas  $X_r$  aangebracht, welke loodrecht staat op de daarin aangetroffen platte scheidingsvlakken. Loodrecht op deze as wordt een coördinaatas  $Z_r$  aangenomen, welke evenwijdig is aan de richting der storende strooming.

Betrokken op deze assen, kan het scherp begrensde remousveld, wanneer de oorsprong van het assenkruis wordt gelegd in het eenige daarin aanwezige scheidingsvlak, mathematisch worden beschreven door de formules

$$\begin{aligned} w_r &= 0 & \text{voor } X_r \leq 0, \\ w_r &= w_o & \text{voor } X_r > 0. \end{aligned} \quad (03.01)$$

Hierin stelt  $w_r$  de snelheid der storende strooming voor, die aan de eene zijde van het scheidingsvlak, zonder afbreuk te doen aan de algemeenheid, nul is gesteld. Fig. 1 licht het snelheidsverloop toe.

In een overeenkomstig gekozen assenkruis kan het remousveld met overgangsg gebied worden beschreven door

$$\begin{aligned} w_r &= 0 & \text{voor } X_r < 0, \\ w_r &= \frac{1}{2} w_o \left( 1 - \cos \frac{\pi X_r}{s_g} \right) & \text{voor } 0 \leq X_r \leq \bar{s}_g, \\ w_r &= w_o & \text{voor } X_r > \bar{s}_g. \end{aligned} \quad (03.02)$$

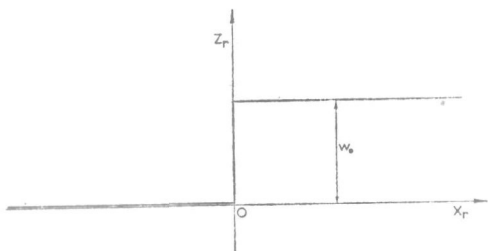


Fig. 1.

Deze verdeling wordt door fig. 2 geïllustreerd. De breedte van het overgangsg gebied wordt vastgelegd door den parameter  $\bar{s}_g$ . Het snelheidsverloop wordt hier door de middelste der formules (03.02) bepaald, die zoo is gekozen, dat de geheele

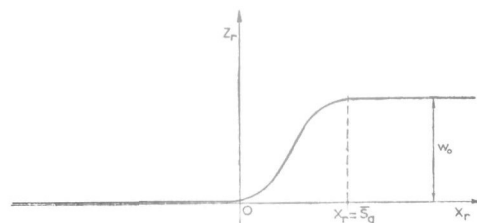


Fig. 2.

snelheidsverdeling continu is en geen knikken bevat.

Tot besluit kan een remousgolf worden bepaald door

$$\begin{aligned} w_r &= 0 & \text{voor } X_r < 0, \\ w_r &= \frac{1}{2} w_o \left( 1 - \cos \frac{\pi X_r}{s_g} \right) & \text{voor } 0 \leq X_r \leq 2\bar{s}_g, \\ w_r &= 0 & \text{voor } X_r > 2\bar{s}_g. \end{aligned} \quad (03.03)$$

De parameter  $\bar{s}_g$  bepaalt nu de breedte van de golf, die gelijk wordt aan  $2\bar{s}_g$ . De intensiteit van de storing wordt door  $w_o$  — de grootste stoorsnelheid — vastgelegd. De definitie wordt door fig. 3

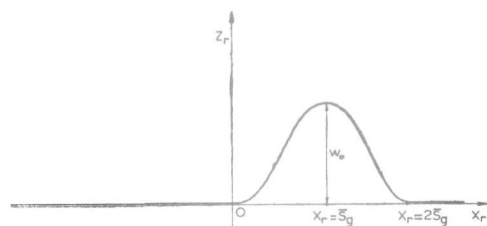


Fig. 3.

toegelicht. De snelheidsverdeling is opnieuw continu en vrij van knikken.

Daar het uitsluitend de zoojuist vermelde definities zijn, die bij de zoo straks uit te voeren berekeningen van de belasting het remousveld zullen karakteriseeren, is het wellicht dienstig nog een oogenblik de vraag te bezien, welke draagwijdte de daarin vervatte veronderstellingen met betrekking tot de snelheidsverdeling in overgangsg gebied en remousgolf hebben.

Consequent vasthoudend aan de opvatting, dat de plotselinge stoot — in zijn elementairsten vorm gerepresenteerd door het scherp begrensde remousveld — de gevaarlijkste facet van de remousbelasting op een vliegtuig vormt, kan de op fysieke gronden bepleite aanwezigheid van een smal overgangsg gebied, waar het vliegtuig in een fractie van een seconde doorheen vliegt (omdat bij breder overgangsg gebieden het stoot-karakter van den krachtinzet verloren gaat) als een wijziging worden opgevat, die in de einduitkomsten een verandering zal brengen, welke de orde van grootte

eener correctie heeft. Detailwijzigingen in de in ieder geval „geleidelijk” aan te nemen snelheidsvariatie zullen vervolgens een „correctie op een correctie” veroorzaken. Het heeft weinig zin, te trachten deze in rekening te brengen. Dientengevolge is de opvatting gerechtvaardigd, dat met de formule, welke werd aanvaard voor de snelheidsverdeling in het overgangsgebied, *geen* veronderstelling werd ingevoerd, welke de uitkomsten op noodzakelijk nader te toetsen *bijzondere* wijze beïnvloedt. De op enkele plaatsen in de literatuur aangetroffen uitvoerige berekeningen over den invloed van de snelheidsverdeling in het overgangsgebied mogen op grond van deze overwegingen als tamelijk overbodig worden aangemerkt, zooals ten overvloede uit hun geheel met de verwachting strookende uitkomsten blijkt.

Voor de remousgolf, welke in het systeem der belastingsberekeningen de rol van een „nevengeval” zal spelen, kan de overbodigheid van een onderzoek naar den invloed van het detail der snelheidsverdeling worden gedemonstreerd aan de uitkomsten zelve, welke de op de definitie (03.03) betrokken berekening zal opleveren. Deze zijn van dien aard, dat dit geval, hoewel interessant, niet van beslissend belang blijkt te zijn.

03.3. In de zoojuist gedefinieerde schema's voor de snelheidsverdeling, waarop het verder onderzoek wordt betrokken, worden de eigenschappen van het atmosferische stroomingsveld vastgelegd door 2 parameters:  $w_0$  en  $s_0$ , waaraan echter als derde zou kunnen worden toegevoegd de hoek, dien de vector der storende strooming met den verticaal insluit. Het is de vraag, welke getallenwaarden voor deze drie grootheden in aanmerking komen, een vraag, die aanleiding geeft tot de navolgende overwegingen.

Remous is een verschijnsel, dat een zeer uiteenlopende *intensiteit* kan vertoonen. Deze intensiteit is niet aan een maximum gebonden: boven iederen nog zoo hevigen remousstoot is een nog heviger stoot denkbaar. Voor zoover het mogelijk is, de intensiteit in een getallenwaarde uit te drukken, heeft het dus niet veel zin, naar een absoluut maximum hiervoor te vragen. Daar het voor de hand ligt, de intensiteit van de storing, welke de in punt 03.2 gedefinieerde schema's representeren, aan de waarde van den parameter  $w_0$  af te meten, kan voor  $w_0$  dus geen grootste waarde worden opgegeven. Het gegeven, dat in zoo'n geval het meest in aanmerking komt ter vervanging der exacte quantitative maat is de kromme, welke op grondslag van een zoo omvangrijk mogelijk aantal metingen weergeeft, hoeveel keer een willekeurige intensiteit — waarde van  $w_0$  dus — in het verleden gemiddeld werd ontmoet per tijdseenheid van den vliegduur, of per lengte-eenheid van het gevlogen traject. Bij het samenstellen van een dergelijke statistiek kan met voordeel tevens de invloed in rekening worden gebracht, welke het geografisch traject en het jaargetijde zonder twijfel bezitten.

Kent men nu het *algemeene* verband tusschen den parameter  $w_0$  en b.v. het maximum van de belasting, welke de remousstoot te voorschijn roept,

dan kan de statistiek der remous-intensiteit tot een belastings-statistiek worden omgewerkt. Deze statistiek geeft aan hen, die de sterkteberekeningen uitvoeren en aan hen, die de veiligheid der vliegtuigconstructie beoordeelen, alle gewenschte inlichtingen. De vraag, hoe de verstrekte inlichtingen verder dienen te worden gebruikt, kan bij het eigenlijke onderzoek der remousbelasting buiten beschouwing blijven. Wat dit onderzoek betreft, volgt uit het voorgaande, dat het noodzakelijk is de parameter  $w_0$  als te variëren grootte in de berekeningen der belasting op te nemen.

De statistiek voor  $w_0$  moet natuurlijk direct of indirect aan het experiment worden ontleend. Practisch is echter de directe weg afgesloten. Het directe onderzoek van het atmosferisch stroomingsveld, zooals dat door meteorologen met behulp van lichte, door de luchtstromingen nagenoeg traagheidsvrij meegevoerde ballonnetjes wordt verricht, is immers in uitvoering en vooral uitwerking dermate moeizaam, dat er niet aan valt te denken, op deze wijze een materiaal bijeen te brengen, dat den vereischten omvang bezit en dat bovendien de zeer uiteenlopende weers- en trajectomstandigheden dekt, welke het vliegtuig kan ontmoeten. Aan metingen van deze soort (zie b.v. de onder de nummers 1, 2, 3 in de literatuurlijst geciteerde publicaties) kunnen hoogstens enkele algemeene gegevens worden ontleend. Zoo blijkt b.v. dat veranderingen van de verticale snelheid op kort traject, ter grootte van 2—5 m/sec veelvuldig voorkomen, terwijl een enkele keer (lit. 5) vrij abrupte snelheidssprongen van 10 à 12 m/sec zijn geconstateerd.

Als indirecte methode van onderzoek komt uitsluitend in aanmerking de analyse van de door de atmosferische stroomingen veroorzaakte storingen van den vliegtoestand van een vliegtuig. Worden deze storingen geregistreerd, dan kan uit de registraties in theorie eerst het storend krachtsysteem, en vervolgens hieruit een benadering van de intensiteit en de verdeling (representatieve waarde van  $\bar{s}_0$ !) der atmosferische stroomingen worden afgeleid. Daar zich hier de geheele gecompliceerde dynamica van het vliegtuig tusschen de meting en de einduitkomst indringt, kan ook deze methode niet letterlijk worden gevolgd. Er bestaat echter een veelbelovende vereenvoudiging. Men registreert daarbij uitsluitend de belasting in den vorm van hetzij de „totale versnelling”, hetzij een rek (d.i. spanning) in een of ander hoofdconstructiedeel, b.v. een vleugelligger. Uit deze registratie kan met relatief geringe moeite een statistiek der versnellings-, resp. spannings-extremen worden afgeleid. Op grond van het feit, dat de waarden van de grootheden  $w_0$  en  $\bar{s}_0$  beslissend voor de grootste belastingen worden geacht, moet het dan omgekeerd mogelijk zijn, uit een statistiek van de extremen der belasting informaties te verkrijgen aangaande de *representatieve* waarden van  $w_0$  en  $\bar{s}_0$ . Feitelijk vormt de scheiding van den invloed van deze twee parameters van de remous in theorie de eenige moeilijkheid. Daar voor een schatting van  $\bar{s}_0$  nog andere aanknoopingspunten beschikbaar blijken te zijn, is deze moeilijkheid

echter niet onoverkomelijk. Inderdaad zijn haast alle op het oogenblik beschikbare gegevens langs dezen weg verkregen. Hiertoe behoort ook de waarde  $w_0 = 10$  m/sec, die in vele landen in de voorschriften voor den bouw van vliegtuigen als grondslag voor bepaalde sterkteberekeningen is opgenomen.

Dat deze werkwijze nog geen scherp omljnde uitkomsten heeft opgeleverd, is eensdeels een gevolg van gebreken van het bovendien nog niet voldoende omvangrijke materiaal, dat tot nu toe werd verzameld, en anderdeels van den nog niet geheel bevredigenden stand van het theoretisch onderzoek der remousbelasting. De verwachting is gerechtvaardigd, dat de toekomst op beide punten verbeteringen zal brengen.

Het is misschien niet overbodig er nog even op te wijzen, dat de getallen, die men op de zoeven besproken wijze voor  $w_0$  vindt, het voordeel hebben meteen „representatieve waarden” voor de remousintensiteit te vormen, die een automatische correctie voor een deel der kleinere onnauwkeurigheden zouden kunnen inhouden, welke de theorie der remousbelasting noodgedwongen bevat. Op grond daarvan komt aan hen zelfs een verhoogde beteekenis toe in vergelijking met aan directe meting ontleende uitkomsten.

De zoojuist terloops in uitzicht gestelde aanknoopingspunten voor een schatting van  $\overline{s_g}$  zijn drieledig, n.l.

- 1°. de wetenschap, dat de remousklap een abrupt verschijnsel is, dat zich in een fractie van een seconde kan afspelen. Dit beteekent, dat de orde van grootte van de overgangsbreedte  $\overline{s_g}$  met hoogstens enkele tientallen meters overeen moet komen, daar een vergrooing tot honderdtallen het stootkarakter verloren zou doen gaan.
- 2°. het feit, dat belastingsregistraties bijna nooit sporen bevatten, die doen besluiten tot het optreden van goed-ontwikkelde vleugeltrillingen.
- 3°. het feit, dat daarvoor in aanmerking komende rek- en versnellingsregistraties globaal het verband vertoonen, dat bij een volkomen stijve vliegtuigconstructie aanwezig dient te zijn<sup>1)</sup>.

De twee laatste gegevens hangen nauw met elkaar samen. Men kan er een minimum voor  $\overline{s_g}$  uit afleiden. Deze afleiding zal uitvoerig in punt 08 worden besproken, alwaar de vraag wordt behandeld, in hoeverre het geoorloofd was, het vliegtuig bij de berekening der belasting als een volkomen stijf systeem op te vatten.

Door deze gegevens wordt de gezochte representatieve waarde van  $\overline{s_g}$  reeds vrij scherp bepaald. Toch kan de uitkomst niet in één getal worden samengevat, ten deele omdat het experimenteele materiaal, waaraan de onder 2°. en 3°. samen-

<sup>1)</sup> De in dit en het voorgaande punt vervatte uitspraken zullen mogelijkerwijs geen geldigheid hebben voor de tegenwoordig gebouwde groote viermotorige vliegtuigen, die vleugels hebben waarvan de buigstijfheid relatief klein is. Verg. hoofdstuk 08.

gevatte gegevens zijn ontleend, nog gebrekkig is, en voor een ander deel, omdat voor den invloed van de breedte van het overgangsgebied (golfgebied) niet  $\overline{s_g}$  zelf, doch de „gereduceerde” waarde  $\frac{\overline{s_g}}{l}$  ( $l$  is de halve vleugelkooorde) maatgevend zal blijken te zijn, welk getal bij gegeven representatieve breedte van het overgangsgebied verschillend uitvalt voor vliegtuigen van verschillende grootte. Het gevolg is, dat het noodzakelijk is, ook de grootte  $\frac{\overline{s_g}}{l} = s_g$  als een binnen een vrij scherp omschrijfbaar interval te varieeren parameter in de berekeningen der remousbelasting in te voeren. Naderhand kunnen dan de in aanmerking komende getallenwaarden worden ingevuld, waarbij rekening kan worden gehouden met in de toekomst zeker te verwachten verbeterde experimenteele uitkomsten.

Feitelijk moet tot besluit ook nog worden aangegeven, welke richting de storende stroomingen in de atmosfeer in het algemeen hebben. Erg belangrijk is dit echter niet, omdat de belasting alleen maar afhangt van de hoek, waaronder deze stroomingen het vliegtuig treffen. De invloed van deze hoek zal zoo dadelijk nader worden gezien. Voorloopig is het genoeg te vermelden, dat de in de atmosfeer aanwezige stroomingen alle mogelijke richtingen kunnen hebben, hoewel blijkt, dat de opwaarts gerichte de nederwaarts gerichte in intensiteit gemiddeld overtreffen.

03.4. Bij symmetrische remous wordt aangenomen, dat de vector der storende stroomsnelheid in ieder geval evenwijdig is aan het symmetrievlak van het vliegtuig. De richting, waaronder de strooming het vliegtuig treft, kan onder die voorwaarde worden gepreciseerd met behulp van den in fig. 4 en 5 aangegeven „invalshoek”  $\alpha_r$ , d.w.z. door den hoek tusschen den stroomingsvector en de langsas van het vliegtuig.

De richting van de langsas van het vliegtuig is hierbij evenwijdig aan de aerodynamische koorde van den vleugel van het vliegtuig aangenomen. Op grond hiervan, geldt voor de draagkrachtverande-

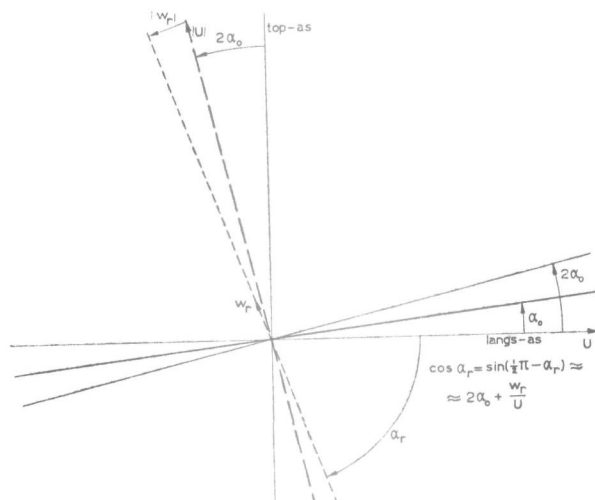


Fig. 4.

ring, geïnduceerd door de storende strooming in een scherp begrensde veld, op een moment, waarop het vliegtuig nog geen gelegenheid heeft gehad op den stoot met een uitwijkende beweging te reagee-

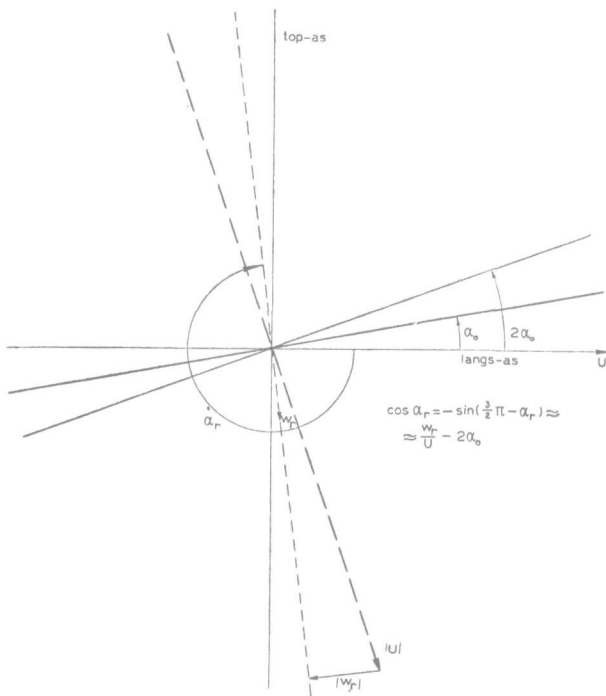


Fig. 5.

ren of om de dwarsas te draaien en in de veronderstelling, dat gebruik mag worden gemaakt van de algemeen bekende eenvoudige formule ter bepaling van de draagkracht

$$\Delta L = F \cdot \frac{1}{2} \rho (U + w_r \cos \alpha_r)^2 \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \left( \alpha_0 + \text{bg tg} \frac{w_r \sin \alpha_r}{U + w_r \cos \alpha_r} \right) - F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \cdot \alpha_0$$

of

$$\Delta L = F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \left[ \left( 1 + \frac{w_r}{U} \cos \alpha_r \right)^2 \left( \alpha_0 + \text{bg tg} \frac{\frac{w_r}{U} \sin \alpha_r}{1 + \frac{w_r}{U} \cos \alpha_r} \right) - \alpha_0 \right]$$

Volgens Mac-Laurin is echter

$$\begin{aligned} \left( 1 + \frac{w_r}{U} \cos \alpha_r \right)^2 \left( \alpha_0 + \text{bg tg} \frac{\frac{w_r}{U} \sin \alpha_r}{1 + \frac{w_r}{U} \cos \alpha_r} \right) &= \alpha_0 + \frac{w_r}{U} (2 \alpha_0 \cos \alpha_r + \sin \alpha_r) + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{w_r}{U} \right)^2 \cdot 2 \cos \alpha_r (\alpha_0 \cos \alpha_r + \sin \alpha_r) + \dots \end{aligned}$$

Daar men mag aannemen, dat  $w_r$  altijd belangrijk kleiner is dan  $U$ , wordt reeds een hoge nauwkeurigheid verkregen, wanneer in de bovenstaande ontwikkeling alleen de uitgeschreven termen in aanmerking worden genomen. Daaruit volgt:

$$\begin{aligned} \Delta L = F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \cdot \left[ \frac{w_r}{U} (2 \alpha_0 \cos \alpha_r + \sin \alpha_r) + \right. \\ \left. + \left( \frac{w_r}{U} \right)^2 \cos \alpha_r (\alpha_0 \cos \alpha_r + \sin \alpha_r) \right] \quad (03.04) \end{aligned}$$

De extremen van  $\Delta L$  bij variatie van  $\alpha_r$  worden bepaald door de voorwaarde

$$\frac{d\Delta L}{d\alpha_r} = 0$$

welke bij gebruik van (03.04) de vergelijking

$$\begin{aligned} 2 \frac{w_r}{U} \cos^2 \alpha_r + \cos \alpha_r - \frac{w_r}{U} - 2 \alpha_0 \sin \alpha_r - \\ - 2 \alpha_0 \frac{w_r}{U} \sin \alpha_r \cos \alpha_r = 0 \quad (03.05) \end{aligned}$$

oplevert.

Men veronderstelt, dat deze vergelijking een oplossing heeft, waarvoor  $\cos \alpha_r$  van dezelfde orde van grootte is als  $\frac{w_r}{U}$ . Daar ook  $\alpha_0$  van deze orde van grootte — welke door het symbool  $\delta$  worden voorgesteld — is, gelden voor de 5 termen in bovenstaande vergelijking dan achtereenvolgens de schattingen

$$\pm \delta^3, \pm \delta, -\delta, \pm \delta, \pm \delta^3$$

zoodat de eerste en de laatste wel kunnen worden verwaarloosd. Er blijft over

$$\cos \alpha_r - \frac{w_r}{U} = 2 \alpha_0 \sin \alpha_r \quad (03.06)$$

of, quadrateerend,

$$\cos^2 \alpha_r - 2 \frac{w_r}{U} \cos \alpha_r + \left( \frac{w_r}{U} \right)^2 = 4 \alpha_0^2 (1 - \cos^2 \alpha_r).$$

In het rechterlid dient de term met  $\cos^2 \alpha_r$  kennelijk weer te worden geschrapt, daar zij van de orde  $\delta^4$  is, terwijl alle andere van de orde  $\delta^2$  zijn.

De verkregen vierkantsvergelijking heeft de wortels

$$\begin{aligned} (\cos \alpha_r)_1 &= \frac{w_r}{U} + 2 \alpha_0; \\ (\cos \alpha_r)_2 &= \frac{w_r}{U} - 2 \alpha_0 \quad (03.07) \end{aligned}$$

Substitueert men deze in (03.06), dan komt er achtereenvolgens

$$\begin{aligned} 2 \alpha_0 &\approx 2 \alpha_0 \sin \alpha_r \\ \text{en } 2 \alpha_0 &\approx -2 \alpha_0 \sin \alpha_r \quad (03.08) \end{aligned}$$

zoodat bij den eersten wortel  $(\sin \alpha_r)_1 \approx 1$  en bij den tweeden  $(\sin \alpha_r)_2 \approx -1$  behoort. Beide wortels voldoen aan de gemaakte veronderstelling dat  $\cos \alpha_r \sim \delta$  is, zoodat zij ook de vergelijking (03.05) met redelijke nauwkeurigheid bevredigen.

De twee toestanden, (03.07); (03.08), welke de draagkracht tot een extreem maken, zijn in de figuren 4 en 5 geschetst (de constructie dezer figuren bevat een op  $\frac{w_r}{U} \ll 1$  gebaseerde benadering). De storende strooming moet blijkbaar onder een hoek, die wat kleiner dan  $90^\circ$  is, van anderen invallen, of onder een hoek, welke in de buurt van de  $270^\circ$  ligt, van boven. Het is op fysieke gronden duidelijk, dat het extreem, wanneer alleen op de absolute waarden van  $\Delta L$  wordt gelet, in beide gevallen een *maximum* is.

Substitueert men de waarden

$$\cos \alpha_r = \frac{w_r}{U} \pm 2 \alpha_o \quad \sin \alpha_r = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_r}$$

in (03.04), dan vindt men daaruit voor de grootte van het extreem in de door  $\delta^2$  vastgestelde benadering:

$$|\Delta L|_{\max} \approx \approx F \cdot \frac{1}{2} \rho U w_r \cdot \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{w_r}{U} \mp 2 \alpha_o \right)^2 \right] \quad (03.09)$$

Een even groote storende strooming, welke langs de topas invalt ( $\alpha_r = \frac{1}{2} \pi$  of  $\alpha_r = \frac{3}{2} \pi$ ,  $\cos \alpha_r = 0$ ,  $\sin \alpha_r = \pm 1$ ) veroorzaakt een draagkrachtverandering van de grootte

$$|\Delta L|_o = F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \cdot \text{bg tg } \frac{w_r}{U} \approx F \cdot \frac{1}{2} \rho U w_r \cdot \frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$$

hetgeen in het algemeen slechts zeer weinig van (03.09) verschilt. Men neme b.v.

$$\alpha_o = \frac{1}{20} (= \text{ca } 3^\circ), \quad \frac{w_r}{U} = \frac{1}{5}, \quad \frac{w_r}{U} + 2 \alpha_o = 0,3.$$

Dan wordt

$$\frac{|\Delta L|_{\max} - |\Delta L|_o}{|\Delta L|_o} \approx \frac{1}{2} \cdot 0,3^2 = 0,045$$

zoodat beide draagkrachtveranderingen dan minder dan 5% verschillen.

De conclusie is, dat de langs de topas invallende storende strooming een draagkrachtverandering veroorzaakt, welke nagenoeg gelijk is aan de grootste draagkrachtverandering, welke deze strooming, onder willekeurigen hoek symmetrisch invallend, te voorschijn kan roepen. Gevallen, waarin het verschil meer dan 5% bedraagt, zullen bijna nooit worden ontmoet. Daar het er vooral om gaat, de grootste belastingen te bepalen die remousstroomingen kunnen opleveren, kan men het onderzoek dientengevolge zonder essentieel bezwaar beperken tot die gemakkelijker te behandelen gevallen, waarbij de storende strooming langs de topas invalt<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Hierbij kan in het midden worden gelaten, hoe de ligging van het assenkruis precies gedefinieerd is, mits de topas ongeveer loodrecht staat op de lijn, die de richting van de strooming geeft, welke geen draagkracht doet ontstaan.

Daarenboven is het geoorloofd te veronderstellen, dat het vliegtuig zich vóór het moment, waarop het door de remousstrooming werd getroffen, in een rechthoekige, horizontale en stationnaire vlucht bevond. De bijpassende remousstrooming kan dan verticaal worden aangenomen.

Het is niet onmogelijk een geval te construeeren, waarin het quotiënt  $\frac{w_r}{U}$  zoo groot is, dat de in de bovenstaande berekening verwerkte benaderingen niet langer toelaatbaar zijn. Men denke aan een zweefvliegtuig, dat geen grooter voorwaartsche snelheid dan b.v. 20 m/sec behoeft te hebben, en dat zich in remous met  $w_r = \text{ca } 10$  m/sec bevindt! Dit exceptioneele geval kan echter worden afgedaan met de opmerkingen, dat ten eerste de remousbelastingen evenredig met de vliegsnelheid zullen blijken te zijn, zoodat de gevallen, waarin de vliegsnelheid zeer gering is, relatief onbelangrijk zijn, en dat ten tweede in zoo'n toestand invalshoeken zullen optreden, die met overtrokken toestanden gepaard zullen gaan, waardoor iedere basis voor nadere berekening wegvalt.

03.5 De twee versnellingen, die voor de symmetrische remousbelasting maatgevend zijn, kunnen in de thans nauwkeurig omschreven omstandigheden worden berekend met behulp van de 3 bewegingsvergelijkingen voor symmetrische bewegingen van het vliegtuig. Doordat deze vergelijkingen in hun meest doelmatigen vorm ten deele tamelijk gecompliceerd zijn, vordert de quantitative bepaling van volledige oplossingen becijferingen, die te bewerkelijk zijn om voor werkelijke systematische uitvoering in aanmerking te komen.

Deze situatie wordt, niet het minst, veroorzaakt door de omstandigheid, dat het vermoedelijk niet geoorloofd zal zijn, het gedrag van de luchtkrachten op den vleugel te ontleenen aan de bekende eenvoudige formules, die bij stationnaire stroomingstoestanden gebruikelijk zijn. Men kan immers den stoot, waartoe de instelling van de draagkrachtverandering in het gegeven geval nadert, gevoegelijk opvatten als elementair grondtype van een niet-stationnair verschijnsel. Daar de instationnaire draagvlaktheorie leert, dat de instelling van dragende krachten gepaard gaat met vertragingverschijnselen, mag a priori niet worden verwacht, dat deze in de berekening der remousbelasting zouden mogen worden verwaarloosd.

Het is in verband met de zoojuist genoemde bezwaren noodzakelijk, zorgvuldig na te gaan, welke vereenvoudigingen nog in den wiskundigen grondslag der berekeningen kunnen worden aangebracht, zonder dat de uitkomsten voor de versnellingen daardoor te onnauwkeurig worden. Te dien einde worde het navolgende overwogen:

Juist omdat de hooge belasting is verbonden aan den stoot, welke de instelling van het door de remous geïnduceerde krachtenstelsel benadert, is het uitsluitend noodig de beweging van het vliegtuig te onderzoeken in een zeer kort tijdsinterval, dat onmiddellijk aansluit op het tijdstip, waarop het vliegtuig het remousveld binnendringt. Hoe de gestoorde beweging van het vliegtuig zich



later ontwikkelt, is op zichzelf misschien interessant, van „belastingsstandpunt” echter onbelangrijk. Wanneer de door de remous ingeleide stootbeweging zich immers zoo mocht ontwikkelen, dat ook later in theorie toestanden zouden optreden, die hoge belastingen inhouden — een ontwikkeling, die men b.v. mag verwachten, wanneer de vliegtuigtoestand dynamisch onstabiel was — dan geschiedt dit toch zóó langzaam, dat de bestuurder van het vliegtuig corrigerend kan en zoo noodig dus zal ingrijpen.

Zooals later zal blijken, kan de duur van het tijdsinterval, dat moet worden onderzocht, hoogstens op ongeveer  $\frac{40l}{U}$  sec worden gesteld (21 is de gemiddelde koorde van het vliegtuig,  $U$  de vlieg-snelheid in de oorspronkelijk stationnaire vlucht). Deze tijdsduur is zoo klein, dat een ingrijpende wijziging van den vliegtuigtoestand daarin reeds bij voorbaat onwaarschijnlijk mag worden genoemd. In precieseren vorm wil dat zeggen, dat zoowel de snelheid, die in de richting loodrecht op de baan ontstaat, als de verandering van de voorwaartsche snelheid binnen dit tijdsinterval vermoedelijk klein zullen blijven vergeleken bij de vliegsnelheid, terwijl ook de langshelling van het vliegtuig nauwelijks zal veranderen. Overwegende, dat een kleine verandering van de snelheid in de richting van de baan maar een kleinen invloed heeft op de draagkracht en dientengevolge op de versnelling in de richting van de topas, welke de remousbelasting in eerste instantie beheerscht, ligt het voor de hand, deze kleine verandering geheel te verwaarloozen. Het mathematisch onderzoek wordt daardoor ingrijpend vereenvoudigd, daar onder deze omstandigheden één der drie bewegingsvergelijkingen, n.l. de vergelijking, die het evenwicht der krachten in de richting van de langsas formuleert, geheel buiten beschouwing kan worden gelaten.

Een op het eerste gezicht gelijkwaardige vereenvoudiging bestaat uit de verwaarloozing van de kleine wijziging van de langshelling. Is deze verwaarloozing geoorloofd, dan kan nóg een bewegingsvergelijking worden geschrapt, n.l. de vergelijking voor de momenten om de dwarsas. Er is echter in dit geval reden om voorzichtiger te zijn, daar een kleine verandering van de langshelling wellicht toch een grootte zou kunnen bereiken, die eenigermate vergelijkbaar wordt met den invalshoek van de strooming aan den vleugel, welke hoek immers eveneens slechts klein is. Dan is echter de mogelijkheid aanwezig, dat de draagkracht op den vleugel merkbaar wordt beïnvloed, hetgeen kennelijk niet onbelangrijk is. Daarbij komt nog, dat met de verwijdering van de vergelijking voor het momentenevenwicht tevens de grondslag zou verdwijnen voor het onderzoek der hoekversnelling der draaiingen om de dwarsas. Deze versnelling is echter reeds gebleken één der grootheden te zijn, waarvan sommige belastingen (b.v. de belasting op de horizontale staartvlakken) primair afhankelijk zijn.

De eerstgenoemde vereenvoudiging: de veronderstelling, dat de vliegsnelheid onveranderd blijft,

zal in het geheele onderzoek worden aangebracht. In verband hiermede is een scherper motiveering van de toelaatbaarheid dezer vereenvoudiging niet misplaatst. Dat deze reeds in dit stadium op basis van een betrekkelijk eenvoudige schatting kan worden gegeven, berust op de reeds eerder aangestipte omstandigheid, dat in het krachtenstelsel, dat het krachtenevenwicht in de richting van de langsas na het passeeren van de grens van het remousveld verbreekt, de component van de draagkrachtwijziging in het algemeen overheerscht. Dit kan als volgt worden toegelicht.

In de richting van de vliegbaan werken aanvankelijk — vóór het invliegen in het remousveld — alleen door den schroeftrek gecompenseerde weerstandskrachten, daar de draagkracht loodrecht op de vliegbaan staat. Bij het passeeren van de grens van het remousveld verandert

- 1°. de grootte der eigenlijke weerstandskrachten, en wel voornamelijk tengevolge van de verandering van den geïnduceerden weerstand;
- 2°. de grootte van de draagkracht, welke verandering het krachtenevenwicht in de richting van de langsas echter op zichzelf niet beïnvloedt;
- 3°. de richting van de draagkracht, omdat de draagkracht loodrecht staat op de richting der strooming ten opzichte van den vleugel en deze door de remousstrooming wordt gewijzigd. Tengevolge van deze wijziging staat de draagkrachtvector niet langer loodrecht op de baan en ontstaat een component in de baanrichting. Fig. 6 geeft hierop een nadere toelichting.

Dat het onder 3°. genoemde effect het onder 1°. genoemde in het algemeen in grootte niet onbe-

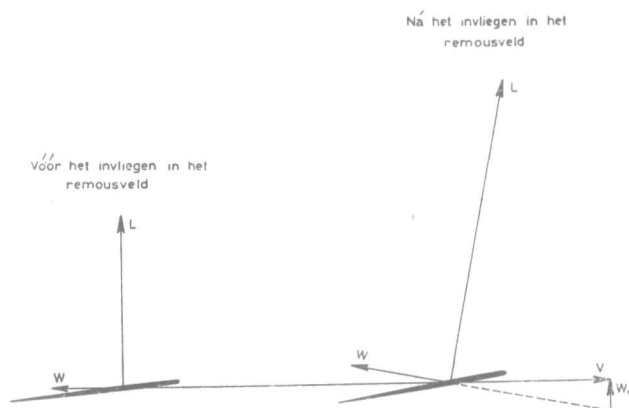


Fig. 6.

langrijk overtreft, mag bij voorbaat aannemelijk worden genoemd met het oog op de tamelijk groote waarde, die de verdraaiingshoek van den relatief zeer grooten draagkrachtvector bij een hevigen remousstoot bereikt. Daar een nauwkeuriger motiveering tot uitvoerige beschouwingen aanleiding zou geven, moge zij worden weggelaten.

Wanneer  $L$  de draagkracht voorstelt en  $\alpha_{inst}$  het verschil der invalshoeken  $\alpha$  en  $\alpha_0$  van de

strooming aan den vleugel ná en vóór het passeeren van de grens van het remousveld, geldt voor de overheerschende niet door den schroef-trek gecompenseerde kracht in de richting van de vliegbaan volgens het voorgaande de benadering

$$\Delta W = -L \cdot \alpha_{inst}.$$

Verder luidt de voorwaarde voor de horizontale versnelling

$$m \frac{dU}{dt} = -\Delta W$$

en die voor de verticale, als  $w$  de verticale snelheid is,

$$m \frac{dw}{dt} = L - mg.$$

Bovendien zal men, als de draaiing die de remoussstoring aan het vliegtuig geeft wordt verwaarloosd, voor de draagkracht  $L$  althans in ruwe benadering (de strooming is instationnair!) kunnen schrijven

$$L = \frac{\alpha_{inst} + \alpha_o}{\alpha_o} \cdot mg.$$

Deze formules leiden tot de navolgende relatie voor  $\frac{dU}{dt}$ :

$$\begin{aligned} m \frac{dU}{dt} &= L \alpha_{inst} = \left( m \frac{dw}{dt} + mg \right) \frac{\alpha_o (L - mg)}{mg} = \\ &= m \frac{\alpha_o}{g} \left( \frac{dw}{dt} + g \right) \frac{dw}{dt}. \end{aligned}$$

Voert men in plaats van den tijd een dimensielooze coördinaat

$$s = \frac{Ut}{l}$$

langs de vliegbaan in ( $l$  is de halve gemiddelde vleugelkooorde), dan kan dit verder worden omgewerkt tot

$$\begin{aligned} \frac{1}{U} \frac{dU}{ds} &= \\ &= \alpha_o \cdot \frac{U^2}{lg} \cdot \left( \frac{gl}{U^2} + \frac{1}{U} \frac{dw}{ds} \right) \cdot \frac{1}{U} \frac{dw}{ds}. \quad (03.10) \end{aligned}$$

Men kan nu aan later volgende uitvoerige berekeningen vast de uitkomst ontleenen, dat de *topwaarde* van de „versnelling”  $\frac{1}{U} \frac{dw}{ds}$  onder alle in aanmerking komende omstandigheden ongeveer gelijk aan

$$0,7 \cdot \frac{w_o}{U} \cdot C$$

is. Hierin is  $w_o$  de grootste stoorsnelheid in het remousveld en  $C$  een parameter, bepaald door vliegtuig en vliegtoestand, welke waarden kan bezitten, die gewoonlijk tusschen 0,02 en 0,05 liggen. Hiervan kan gebruik worden gemaakt bij het schatten van de waarde van de integraal ( $s=0$  bepaalt de grens van het remousveld)

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{U} &= \\ &= \int_0^s \alpha_o \left( 1 + \frac{U^2}{lg} \cdot \frac{1}{U} \frac{dw}{ds} \right) \cdot \frac{1}{U} \frac{dw}{ds} \cdot ds. \quad (03.11) \end{aligned}$$

Als zoodanig komt in aanmerking de formule

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U}{U} &\approx \\ &\approx \frac{2}{3} \cdot \alpha_o \cdot \left( 1 + \frac{U^2}{lg} \cdot 0,7 \frac{w_o}{U} C \right) \cdot 0,7 \frac{w_o}{U} C \cdot s, \quad (03.12) \end{aligned}$$

waarbij de schatting vervat is in den factor  $\frac{2}{3}$ , gecombineerd met de substitutie van  $\left( \frac{dw}{ds} \right)_{max}$  in de plaats van  $\frac{dw}{ds}$ <sup>1)</sup>. Zij is gebaseerd op een beoordeeling van later uitvoerig te behandelen gegevens met betrekking tot de functie  $\frac{dw}{ds}$ .

Daar  $\frac{\Delta U}{U}$  volgens de laatste formule bijzonder groot wordt, als de waarde van den parameter  $C$  groot is, is het wenschelijk hiervoor een groote waarde, b.v. 0,05 te substitueeren. Deze parameter blijkt echter evenredig te zijn met de gemiddelde vleugelkooorde  $2l$  en omgekeerd evenredig met de vleugelbelasting  $\frac{mg}{F}$ . Men mag de groote waarde 0,05 dus alleen combineeren met een relatief groote waarde voor  $l$  en een vrij kleine waarde van  $G/F$ . Aanvaardbaar is uiterlijk

$$l = 2 \text{ m}; \quad \frac{G}{F} = 75 \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}.$$

Het quotiënt  $\frac{w_o}{U}$  zal de waarde  $\frac{1}{6}$  nauwelijks overtreffen. Zelfs mag  $U$  dan niet te groot zijn, hoogstens b.v. gelijk aan 60 m/sec. Daar voor den invalshoek  $\alpha$  de formule

$$\alpha_o = \frac{mg}{F} \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \frac{\partial c_a}{\partial \alpha}}$$

geldt, vindt men hiervoor, als  $\rho = 0,1 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$  en  $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} = 4,25$  (zie later) wordt genomen, in combinatie met de reeds vermelde getallen de opnieuw royale waarde

$$\alpha_o = \text{ca. } 0,1 \text{ rad.}$$

Wordt het geheele zoojuist vastgelegde complex getallen in de formule (03.12) gesubstitueerd, dan komt de navolgende uitkomst voor den dag, die gevoegelijk geacht kan worden de *uiterste* verandering van de voorwaartsche snelheid te bepalen,

<sup>1)</sup> De schatting geldt alleen voor de relatief kleine waarden van  $s$ , die het baantraject definiëren, waarbinnen het extreem der belasting valt en dat dientengevolge voor nader onderzoek in aanmerking komt.

waarmede bij het berekenen van belastingen rekening zou moeten worden gehouden.

$$\frac{\Delta U}{U} \approx 0,0008 \text{ s.} \quad (03.13)$$

Daar de maximale belasting gemeenlijk wordt bereikt in een punt van de vliegbaan, waarvoor  $s$  de waarde 25 à 35 heeft, zou dit maximum gecorrigeerd moeten worden met betrekking tot veranderingen van de voorwaartsche snelheid, die hoogstens tot een procent of drie kunnen oplopen. Daar de belasting met den stuwdruk, dat is met het kwadraat van de snelheid, evenredig gesteld kan worden, kan de correctie op de belasting dus tot ca. 6 % oplopen. Daaraan ware toe te voegen, dat de correctie het positieve teken heeft bij een opwaartschen en het negatieve bij een neerwaartschen remousstoot.

De conclusie is, dat de verandering van de voorwaartsche snelheid aanleiding geeft tot correcties op de grootste belastingen, die tot luttele procenten beperkt blijven. Dit is te weinig om een gedetailleerd en bewerkelijk onderzoek van dit effect te motiveeren.

is echter practisch vooral daarom niet van veel beteekenis, omdat is gebleken, dat een niet-stationnaire strooming om den vleugel minder vlug loslaat dan een stationnaire, d.w.z. dat de kritische invalshoek bij instationnaire strooming grooter is dan „normaal”. (Zie lit. 5 voor nadere gegevens).

03.6. De versnellingen der vliegtuigbeweging, die in het volgende hoofdstuk in alle uitvoerigheid zullen worden berekend, zijn vanzelfsprekend afhankelijk van bepaalde eigenschappen van het vliegtuig, die in de berekening door een reeks „vliegtuigparameters” worden voorgesteld. Aan de meeste van deze parameters kunnen vaste, als gemiddelden op te vatten getallenwaarden worden toegekend, die geacht kunnen worden een „standaard-vliegtuig” te typeeren. Sommige parameters echter kunnen zoo uiteenloopende getallenwaarden vertoonen, dat zij binnen bepaalde grenzen moeten worden gevarieerd.

Om zoo straks te gebruiken getallen niet steeds opnieuw te moeten toelichten is hieronder een tabel opgenomen, die enkele dikwijls benoodigde „gemiddelde” vliegtuiggegevens bevat<sup>1)</sup>.

Samenvatting van standaardwaarden voor eenige later benoodigde vliegtuiggegevens						
Vliegtuigtype	$\lambda$	$\frac{2b}{\lambda}$ (m)	$G/F$ ( $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$ )	$F_s/F$	$U_{\text{kruis}}$ m/sec	$C$ <sup>1)</sup>
Sportvliegtuig .....	7	1,5	40	0,16	40	0,039
Verkeers-   ouder type .....	7	3,5	70	0,16	50	0,052
vliegtuig   nieuw type .....	7	3,0	120	0,16	70	0,026
Jachtvliegtuig .....	7	1,8	160	0,16	150	0,0135

<sup>1)</sup> Deze parameter wordt gedefinieerd door de formule (05.08). De opgegeven waarden gelden voor  $k = 4,25$  en  $\rho = 0,1 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$ .

Ook de tweede vereenvoudiging: de veronderstelling dat de langshelling van het vliegtuig niet verandert, zal aanvankelijk in een heele serie berekeningen worden aangebracht. In deze gevallen wordt dan alleen de „totale versnelling” berekend. Deze werkwijze blijkt doelmatig te zijn, omdat de kleine draaiing om de dwarsas, die in werkelijkheid optreedt, voor een groot deel veranderingen in de berekeningen brengt die de orde van grootte van correcties hebben. Het gevolg is, dat de volledige berekening — welke de draaiing om de dwarsas in aanmerking neemt — door gebruikmaking van uitkomsten, die gelden wanneer deze draaiing ontbreekt, kan worden vergemakkelijkt.

Aan de hierboven besproken veronderstellingen, welke de grondslagen der berekening in een practisch bruikbaren vorm brengen, dient feitelijk, onder alle omstandigheden, de voorwaarde te worden toegevoegd dat — ook tengevolge van de storende strooming — geen invalshoeken optreden, die zoo groot zijn, dat de strooming aan den vleugel loslatingsverschijnselen gaat vertoonen. Natuurlijk impliceert deze voorwaarde een zekere beperking van het geldigheidsgebied der berekeningen. Deze

De in deze tabel aangetroffen symbolen hebben de navolgende beteekenis:

$$\lambda: \text{slankheid van den vleugel} = \frac{4b^2}{F}$$

$2b$ : vleugelwijdte.

$G$ : totaalgewicht van het vliegtuig.

$F$ : vleugeloppervlak.

$F_s$ : oppervlak van de horizontale staartvlakken.

$U$ : vliedsnelheid.

$$k: \frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$$

#### 04. Het standpunt, ingenomen ten opzichte van de literatuur.

Op het gebied der remousbelasting staat op het oogenblik een reeds zeer omvangrijke, voornamelijk Duitse, Engelsche en Amerikaansche literatuur ter beschikking. Een groot gedeelte hiervan moet alweer als verouderd worden opgevat, omdat daar-

<sup>1)</sup> Deze gegevens hebben betrekking op den vlak voor den oorlog bereikten stand van de luchtvaarttechniek.

in de eerst in de laatste 10 jaren volledig uitgewerkte uitkomsten der instationnaire draagvlaktheorie niet konden worden verwerkt. Hiertoe behoort b.v. het meerendeel der „Reports and Memoranda”, die het Engelse Aeronautical Research Committee over dit onderwerp deed verschijnen.

Het valt bij bestudeering van de literatuur op, dat het onderzoek bijna overal van een beperkte vraagstelling uitgaat. Men berekent uitsluitend den eerder gedefinieerden belastingsfactor en laat daarmee zoowel de versnellingen van de draaiing om de dwarsas als de krachtverdelingen over vleugel en horizontaal staartvlak buiten beschouwing. Het probleem der krachtverdeling wordt gewoonlijk niet eens vermeld. Voor zoover bekend is er slechts één enkele publicatie (lit. 11), waarin naast den belastingsfactor ook de hoekversnelling in het onderzoek is opgenomen. De hierin opgenomen uitkomsten bevatten echter de relatief groote fouten, die optreden wanneer de vertraagde instelling van de draagkracht wordt verwaarloosd.

In de voorgaande deelen is voldoende uitvoerig uiteengezet, waarom deze beperkingen, ondanks de zonder twijfel bijzonder belangrijke rol, die de belastingsfactor speelt, onbevredigend zijn. Daarbij komt, dat met de hoekversnelling zonder uitzondering de geheele draaiing om de dwarsas buiten beschouwing wordt gelaten, waardoor de berekening relatief eenvoudig wordt, doch ten koste van de nauwkeurigheid, óók ten aanzien van den belastingsfactor.

Deze critiek moge een voldoende verontschuldiging vormen voor het feit, dat in het theoretisch gedeelte van deze verhandeling slechts weinig verwijzingen naar de literatuur worden aangetroffen. In dit verband kan verder worden vermeld, dat de numerieke uitwerking van die berekeningen, die in gelijkwaardigen vorm in de literatuur worden aangetroffen, eveneens zelfstandig is uitgevoerd. Dergelijke berekeningen moesten volledigheidshalve in deze verhandeling worden opgenomen. De zelfstandig herhaalde uitwerking werd eensdeels ter verificatie, anderdeels om redenen van systematiek, uitgevoerd.

Te dezer plaatse moge de aandacht worden gevestigd op de publicatie van Küssner, die in de literatuurlijst onder no. 16 is vermeld. Deze publicatie heeft niet direct op de remousbelasting betrekking, doch op de berekening van de aerodynamische kracht op een draagvlak bij niet-stationnaire stroomingstoestand, waarbij met name het geval wordt behandeld, dat het atmosferische veld storende stroomingen bevat. Deze verhandeling heeft den grondslag geleverd voor de behandeling der draagkrachtinstelling bij de zoo straks volgende berekeningen, voor zoover daarbij met het vertragsverschijnsel rekening wordt gehouden. Voor het onderzoek der remousbelasting mag deze grondslag alleszins voldoende worden geacht, zoodat het niet noodig is, enkele van Amerikaanse zijde voorgestelde aanvullingen (lit. 18) in aanmerking te nemen, die nog niet een geheel bevredigenden vorm vertoonen.

Tot besluit worde vermeld, dat een uitvoerige uiteenzetting van de theorie der „transformatie

van Laplace” — een mathematische methode, die in deze verhandeling herhaaldelijk wordt gebruikt — te vinden is in het boek van Doetsch, dat onder no. 29 in de literatuurlijst is geciteerd. Hiernaar voor alle nadere inlichtingen verwijzend, is in den appendix een uiterst kort en uitsluitend op de in deze verhandeling aangetroffen toepassingen toegespitste beschrijving van deze functionaaltransformatie opgenomen, die de noodzakelijkste inlichtingen bevat. Van practisch standpunt is deze methode — voor wat de gemaakte toepassingen betreft — equivalent met de „operatorenrekening”, die bij de berekening van remousbelastingen voor het eerst door Jones is gebruikt.

De bovenstaande omschrijving van de houding, die ten opzichte van de literatuur is aangenomen, heeft met name betrekking op de theoretische behandeling van het vraagstuk. Deze wijze van handelen speelt echter in het geheele onderzoek een overheersende rol. Daar waar het nog weinig omvangrijke statistisch uitgewerkte meetmateriaal ter sprake komt, worden de bronnen vanzelfsprekend op de gebruikelijke wijze vermeld.

## 05. Elementaire berekening van den belastingsfactor<sup>1)</sup>.

05.1. Het is gewenscht ter inleiding der berekeningen het hoofdgegeven: den belastingsfactor, op zoo eenvoudig mogelijke basis te berekenen. Daartoe worden in de eerste plaats beide vereenvoudigingen ingevoerd, welke uitvoerig in punt 03.5 werden besproken. Deze komen daarop neer, dat wordt aangenomen dat de remousstoring noch het evenwicht der langskrachten, noch het evenwicht der momenten verbreekt. De geheele stoorbeweging van het vliegtuig wordt dan beheerscht door de enkele vergelijking, die het evenwicht formuleert van de krachten in de richting van de topas.

In de tweede plaats wordt het gedrag van de draagkracht op den vleugel ontleend aan de gebruikelijke eenvoudige formules der stationnaire theorie, zoodat de vertraagde instelling wordt verwaarloosd.

05.2. Aangenomen wordt, dat het vliegtuig, voordat de remousstrooming het treft, een stationnaire horizontale symmetrische vlucht beschrijft; dat het remousveld „scherp begrensd” is en dat de storende strooming verticaal naar boven is gericht. De bewegingsvergelijking wordt betrokken op een assenstelsel, dat vast aan het vliegtuig is verbonden en waarvan de oorsprong in het zwaartepunt valt. De X-as (langsas) wordt aanvankelijk (en in het gegeven geen draaiingen in aanmerking nemende geval dus voortdurend) horizontaal aangenomen en de Z-as (topas) verticaal. De X-coördinaat wordt naar voren en de Z-coördinaat naar boven positief geteld. Het zoo vastgelegde assenkruis wordt ook in alle later volgende berekeningen — indien niet anders is vermeld — gebruikt.

<sup>1)</sup> Alle in deze verhandeling opgenomen berekeningen zijn gemaakt in de jaren 1941 en 1942.

Wanneer  $\alpha_0$  de invalshoek is in de aanvankelijk stationnaire vlucht, gemeten t.o.v. de richting van die stationnaire parallelstromingen, die geen dragende kracht op den vleugel te voorschijn roepen, dan geldt in dien vliegttoestand

$$mg = F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \cdot \alpha_0. \quad (05.01)$$

De coëfficiënt  $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$  is nagenoeg constant, zolang de invalshoek niet zoo groot is, dat „loslatingsverschijnselen” gaan optreden. In den vervolge zal zij door de letter  $k$  worden voorgesteld. De waarde ervan hangt af van de slankheid van den vleugel en kan in het algemeen met voldoende nauwkeurigheid worden ontleend aan de bekende formule

$$k = \frac{5,3}{1 + 1,7/\lambda} \quad (05.02)$$

waarin  $\lambda$  de slankheid is, dus

$$\lambda = \frac{4b^2}{F} \quad (05.03)$$

( $b$  = halve spanwijdte). Voor  $\lambda = 7$  — de waarde, die het meest wordt aangetroffen — geeft (05.02)

$$(k)_{\lambda=7} \approx 4,25, \quad (05.04)$$

een getal, dat in alle numerieke berekeningen zal worden ingevuld.

Zoodra de vleugel van het vliegtuig de grens van het scherp begrensde remousveld is gepasseerd, geldt in plaats van (05.01):

$$m\dot{w} = -mg + F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot k \cdot \left( \alpha_0 + \text{bg tg } \frac{w_0 - w}{U} \right). \quad (05.05)$$

$w_0$  is overeenkomstig (03.1) de binnen het remousveld naar ruimte en tijd constante snelheid der storende strooming.

Aangenomen wordt, dat de toestanden, waarvoor achtereenvolgens (05.01) en (05.05) gelden, op elkaar aansluiten, zoodat de complicatie, die zich voordoet in het uiterst korte tijdsinterval, gedurende hetwelk de vleugel eerst ten deele het grensvlak van het scherp begrensde remousveld is gepasseerd, buiten beschouwing wordt gelaten.

Daar  $w_0$  en  $w$  beide veel kleiner dan  $U$  zijn, is

$$\text{bg tg } \frac{w_0 - w}{U} \approx \frac{w_0 - w}{U},$$

waarmede uit (05.05) en (05.01) volgt

$$m\dot{w} = F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot k \cdot \frac{w_0 - w}{U}. \quad (05.06)$$

Hoewel zulks hier feitelijk geen voordeel biedt, is het met het oog op de vergelijkbaarheid met later te vermelden berekeningen gewenscht, de tijdsvariabele  $t$  te vervangen door den afgelegden weg  $s$ , gemeten met de halve vleugelkooorde  $l$  als lengte-eenheid.

Men heeft

$$s = \frac{Ut}{l}; \quad \frac{d}{dt} = \frac{U}{l} \frac{d}{ds}.$$

Dan kan i. p. v. (05.06) de dimensielooze vergelijking worden gesteld

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{w}{U} \right) + \frac{F \cdot \frac{1}{2} \rho l k}{m} \cdot \frac{w}{U} &= \\ &= \frac{F \cdot \frac{1}{2} \rho l k}{m} \cdot \frac{w_0}{U}; \quad s \geq 0 \end{aligned} \quad (05.07)$$

Aangenomen is, dat  $s=0$  het snijpunt geeft van de vliegbaan met het platte grensvlak van het remousveld.

In de laatste formule treedt een dimensielooze factor

$$\frac{F \cdot \frac{1}{2} \rho l k}{m} = \frac{\frac{1}{2} \rho g l k}{G/F} = (\text{ter afkorting}) C \quad (05.08)$$

op, die men ook later voortdurend zal ontmoeten<sup>1)</sup>, en die ook reeds eerder terloops werd vermeld.

De oplossing van (05.07), aangepast aan de beginvoorwaarde

$$\left( \frac{w}{U} \right)_{s=0} = 0$$

luit bij gebruik van de afkorting (05.08)

$$\frac{w}{U} = \frac{w_0}{U} \left( 1 - e^{-Cs} \right); \quad s \geq 0.$$

Hieruit berekent men de versnelling

$$\dot{w} = \frac{U}{l} \frac{dw}{ds} = w_0 \frac{U}{l} C \cdot e^{-Cs}, \quad s \geq 0 \quad (05.09)$$

waaraan men volledigheidshalve kan toevoegen

$$\dot{w} = 0 \quad \text{voor } s < 0. \quad (05.10)$$

De berekening levert voor den belastingsfactor

$$n = \frac{g + \dot{w}}{g} \quad \text{dus de uitkomst} \quad n = 1 \quad \text{voor } s < 0, \quad (05.11)$$

$$n = 1 + \frac{w_0 U}{lg} C e^{-Cs} \quad \text{voor } s \geq 0.$$

Door  $n=1$  wordt de belasting gedefinieerd, welke door het eigen gewicht wordt gevormd. Dit aandeel in de totale belasting kan zonder bezwaar buiten beschouwing worden gelaten. De door de remous veroorzaakte belasting wordt gegeven door de grootte  $n-1$ .

Ter vergemakkelijking eener vergelijking van de uitkomst (05.11) van de zoeven beëindigde berekening met de uitkomsten van zoo straks uit te voeren meer volledige berekeningen blijkt het wenschelijk te zijn, de remousbelasting vast te leggen door een nieuwen dimensieloozen para-

<sup>1)</sup> De waarde van  $C$  ligt gewoonlijk tusschen 0,007 (jachtvliegtuig met kleine vleugelkooorde en hooge vleugelbelasting, vliegend op groote hoogte) en 0,065 (groot ouderwetsch vliegtuig met lage vleugelbelasting, vliegend op geringe hoogte).

meter  $\Lambda$ , die op de navolgende wijze met de versnelling  $\dot{w}$  en met den belastingsfactor is verbonden:

$$\Lambda = \frac{\dot{w}}{\frac{U}{l} C} = \frac{\dot{w}}{w_0 \cdot \frac{\frac{1}{2} \rho g k U}{G/F}} = \frac{g(n-1)}{w_0 \frac{U}{l} C}. \quad (05.12)$$

Aan dezen parameter wordt de naam „(remous-) belastingscoëfficiënt” gegeven.

Met behulp van dezen coëfficiënt kan de uitkomst (05.11) in den vorm

$$\Lambda = 0 \text{ voor } s < 0; \Lambda = e^{-Cs} \text{ voor } s \geq 0$$

worden geschreven.

De verkregen uitkomst kan als volgt onder woorden worden gebracht:

de remousbelasting springt direct bij het passeeren van de grens van een scherp begrensd remousveld van nul op een maximale waarde, welke wordt vastgelegd door de waarde één (n.l.  $e^{-C \cdot 0}$ ) van den belastingscoëfficiënt, om vervolgens exponentieel — op den duur weer tot nul — uit te dempen. De snelheid dezer uitdemping is uitsluitend afhankelijk van de waarde van den parameter  $C$ .

Op grond van het door (05.12) gegeven verband tusschen den coëfficiënt  $C$  en den eigenlijken factor  $n-1$  der remousbelasting is het maximum der remousbelasting zelf, dat in het punt  $s=0$  van de vliegbaan optreedt, in de uitgewerkte benadering:

- recht evenredig met de snelheid  $w_0$  der storende strooming in het scherp begrensde veld.
- recht evenredig met de vliegsnelheid  $U$ .
- omgekeerd evenredig met de vleugelbelasting  $G/F$ .
- recht evenredig met den coëfficiënt  $k = \frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$  van den vleugel, welke grooter is naarmate de slankheid van den vleugel grooter is.
- recht evenredig met de luchtdichtheid  $\rho$ .

Deze in de literatuur overbekende uitkomst vormt natuurlijk slechts een ruwe benadering.

De einduitkomst (05.12) kan desgewenscht in een anderen, voor bepaalde doeleinden geschikteren vorm worden gebracht. Men kan n.l., na de afkorting  $C$  weer door de volledige uitdrukking (05.08) te hebben vervangen, met behulp van (05.01) hetzij de vleugelbelasting  $G/F$ , hetzij de vliegsnelheid  $U$  elimineeren. Vervangt men in (05.01)  $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \alpha_0$  eenvoudig door  $c_a$ , dan is het resultaat in het eerste geval

$$\frac{\dot{w}}{g} = n-1 = \frac{k}{c_a} \cdot \frac{w_0}{U} \cdot \Lambda \quad (05.13)$$

en in het tweede

$$\frac{\dot{w}}{g} = n-1 = w_0 \cdot k \Lambda \cdot \sqrt{\frac{\rho}{2 c_a G/F}}. \quad (05.14)$$

Hieruit blijkt — daar  $\Lambda_{\max} = 1$  is — dat de grootste remousbelasting bij een gegeven waarde van den draagkrachtscoëfficiënt omgekeerd evenredig met de vliegsnelheid of met den wortel uit de vleugelbelasting, moet worden gesteld.

De laatste formules bieden gelegenheid verschillende vliegtuigen en vliegt toestanden met eenzelfde  $c_a$ -waarde onderling te vergelijken, hetgeen nog al eens wordt gewenscht.

Uit (05.13) en (05.14) volgt in aansluiting op (05.12)

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{\dot{w}}{g} \cdot \frac{c_a U}{k w_0} = \\ &= \frac{\dot{w}}{g} \cdot \frac{1}{k w_0} \cdot \sqrt{\frac{2 c_a G/F}{\rho}}. \end{aligned} \quad (05.15)$$

05.3. Het ligt in de bedoeling, het gedrag van de remousbelasting in den vervolge steeds te beschrijven met behulp van den coëfficiënt  $\Lambda$ , welke door (05.12) of (05.15) wordt gedefinieerd. Het is daarom misschien goed, wanneer er hier nog even de aandacht op wordt gevestigd, dat deze coëfficiënt *evenredig* is met de versnelling  $\dot{w}$ , welke de remousbelasting direct bepaalt (tenminste voor zoover de hoekversnelling van draaiingen om de dwarsas, evenals de krachtverdelingen, buiten beschouwing blijven). De versnelling  $\dot{w}$  levert, betrokken op de versnelling van de zwaartekracht, de grootheid  $n-1$ .

Ter vergemakkelijking van de omrekening van  $\Lambda$  op  $n-1$  is het diagram van fig. 7 opgesteld, dat de formule (05.12), nadat daarin is gesubstitueerd

$$\rho = 0,1 \frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}; \quad k = 4,25$$

in grafischen vorm bevat.

05.4. Wanneer het remousveld een overgangsgebied heeft, moet de constante  $w_0$  in (05.05) worden vervangen door de snelheidsverdeling, die wordt gedefinieerd door de formules (03.2). Daar het bij de in punt 03 opgenomen beschouwingen volkomen onverschillig is, met welke eenheid van lengte de breedte  $\bar{s}_g$  van het overgangsgebied wordt gemeten, is er geen bezwaar tegen van nu af aan consequent aan te nemen, dat dit de halve vleugelkooorde is. Dit heeft het voordeel, dat  $s_g$  en de baancoördinaat  $s$  (ingevoerd in het vorige punt) vergelijkbare dimensielooze grootheden worden. Deze reductie van de breedte van het overgangsgebied wordt in de notatie tot uitdrukking gebracht door de bovenstreeping weg te laten ( $s_g$  i. p. v.  $\bar{s}_g$ ).

De grondvergelijkingen, die bij aanwezigheid van een overgangsgebied de vergelijking (05.05) dienen te vervangen, luiden:

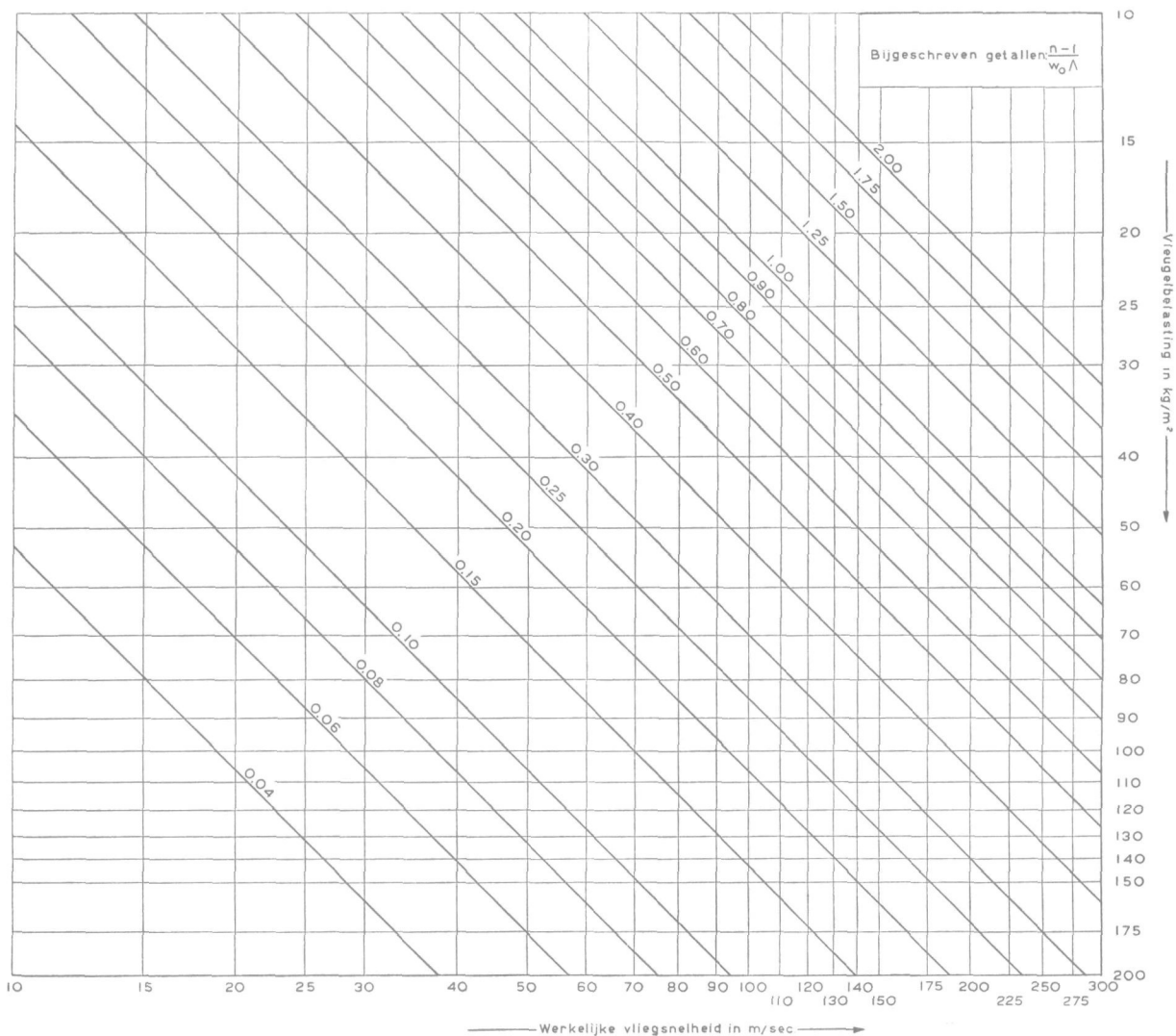


Fig. 7.

$$\left. \begin{aligned} m\dot{w} &= -mg + F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot k \cdot \left( \alpha_0 + \frac{\frac{1}{2} w_0 \left( 1 - \cos \frac{\pi s}{s_g} \right) - w}{U} \right) \text{ voor } 0 \leq s \leq s_g; \\ m\dot{w} &= -mg + F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot k \cdot \left( \alpha_0 + \frac{w_0 - w}{U} \right) \text{ voor } s > s_g, \end{aligned} \right\}$$

of,  $\frac{d}{dt}$  door  $\frac{U}{l} \frac{d}{ds}$  vervangend en meteen van de afkorting (05.08) gebruik makend, mede op grond van (05.01)

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{ds} \left( \frac{w}{U} \right) + C \frac{w}{U} &= \frac{1}{2} C \frac{w_0}{U} \left( 1 - \cos \frac{\pi s}{s_g} \right) \text{ voor } 0 \leq s \leq s_g; \\ \frac{d}{ds} \left( \frac{w}{U} \right) + C \frac{w}{U} &= C \frac{w_0}{U} \text{ voor } s > s_g. \end{aligned} \right\} \quad (05.16)$$

De oplossing van de eerste vergelijking (05.16), aangepast aan de beginwaarde  $\left( \frac{w}{U} \right)_{s=0} = 0$  luidt

$$\frac{w}{U} = \frac{1}{2} \frac{w_0}{U} \left[ 1 - e^{-Cs} - C \frac{C \cos \frac{\pi s}{s_g} + \frac{\pi}{s_g} \sin \frac{\pi s}{s_g} - C e^{-Cs}}{C^2 + \frac{\pi^2}{s_g^2}} \right],$$

waaruit volgt

$$\Lambda = \frac{\dot{w}}{w_0 \frac{U}{l} C} = \frac{1}{w_0 C} \frac{dw}{ds} = \frac{1}{2} \left[ e^{-Cs} - \frac{\pi}{s_g} \frac{\frac{\pi}{s_g} \cos \frac{\pi s}{s_g} - C \sin \frac{\pi s}{s_g} + C^2 \frac{s_g}{\pi} e^{-Cs}}{C^2 + \frac{\pi^2}{s_g^2}} \right] \quad (05.17)$$

hetgeen geldt voor

$$0 \leq s \leq s_g.$$

De oplossing van de tweede vergelijking (05.16), die in het punt  $s = s_g$  aansluit op de oplossing (05.17) van de eerste, luidt:

$$\frac{w}{U} = \frac{w_0}{U} \left[ 1 - \frac{1}{2} e^{-Cs} \left( 1 - \frac{C^2}{C^2 + \frac{\pi^2}{s_g^2}} \right) (1 + e^{Cs_g}) \right] \quad (05.18)$$

waaruit volgt

$$\Lambda = \frac{1}{2} e^{-Cs} \left( 1 - \frac{C^2}{C^2 + \frac{\pi^2}{s_g^2}} \right) (1 + e^{Cs_g}). \quad (05.19)$$

Deze formule geldt dus voor  $s \geq s_g$ .

De uitkomsten (05.17) en (05.19) kunnen worden gecompleteerd met:

$$\Lambda = 0 \text{ voor } s < 0. \quad (05.20)$$

$$\Lambda = 0; S < 0$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \left[ e^{-C_g S} - \frac{\pi^2 \cos \pi S - \pi C_g \sin \pi S + C_g^2 e^{-C_g S}}{C_g^2 + \pi^2} \right]; 0 \leq S \leq 1$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} e^{-C_g S} \left( 1 - \frac{C_g^2}{C_g^2 + \pi^2} \right) (1 + e^{C_g}); S > 1.$$

Om de betekenis van deze uitkomsten goed te kunnen overzien, moeten zij in den vorm van grafieken worden gebracht. Het verdient echter aanbeveling, de formules eerst te transformeeren op een nieuwe variabele

$$S = s/s_g$$

daar zij dan een vorm aannemen, waarin uitsluitend het product  $Cs_g$  als parameter optreedt. (Oorspronkelijk traden naast de variabele  $s$  twee parameters,  $s_g$  en  $C$ , op). Schrijft men

$$Cs_g = C_g \quad (05.21)$$

dan blijkt het resultaat te zijn:

$$(05.22)$$

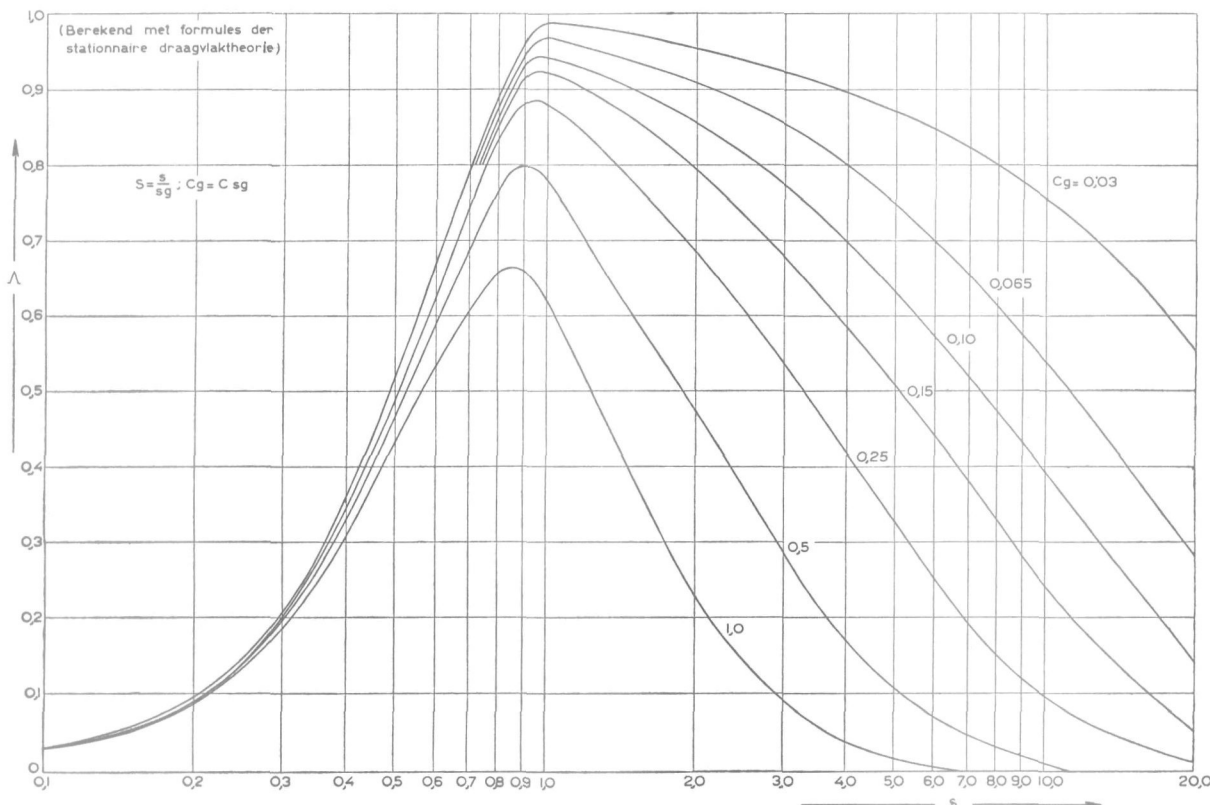


Fig. 8.



Het gedrag van de belasting, dat door deze formules wordt voorgesteld, is in fig. 8 in den vorm van een grafiek weergegeven. In deze figuur is de  $S$ -schaal logarithmisch genomen om goed te kunnen toonen, hoe de belasting binnen het overgangsgebied ( $0 \leq S \leq 1$ ) varieert. Dit gebied wordt bij gebruik van een lineaire schaal tot een wel zeer smal interval gecomprimeerd.

Fig. 8 bevestigt de verwachting, dat

- 1°. de plotselinge inzet der belasting overgaat in een geleidelijke toename.
- 2°. de grootste waarde, die de belasting (en dus de belastingscoëfficiënt) bereikt, kleiner is naarmate het overgangsgebied breder is (dus  $C_g = Cs_g$  groter is).

Uit het feit, dat de door het overgangsgebied veroorzaakte terugloop van de maximale waarde van den belastingscoëfficiënt  $\Lambda$  uitsluitend afhankelijk is van de waarde van den parameter  $C_g = Cs_g$  volgt onmiddellijk, dat een overgangsgebied van gegeven relatieve — d.i. op de halve vleugelkooorde betrokken — breedte, tot een aanzienlijker reductie leidt, naarmate de waarde van  $C$  groter is, d.i. (volgens (05.08)) naarmate de vleugelbelasting kleiner is. Daar  $s_g$  voor een overgangsgebied van gegeven absolute breedte omgekeerd evenredig is met de halve vleugelkooorde  $l$ , en  $C$  volgens (05.08) recht evenredig is met dezen parameter, blijkt verder, dat de vermindering van de belasting, veroorzaakt door een overgangsgebied van bepaalde absolute breedte, niet afhangt van de afmetingen van het vliegtuig.

Om de bepaling van de maximale belasting te vergemakkelijken, is in fig. 9 in een hulpgrafiek

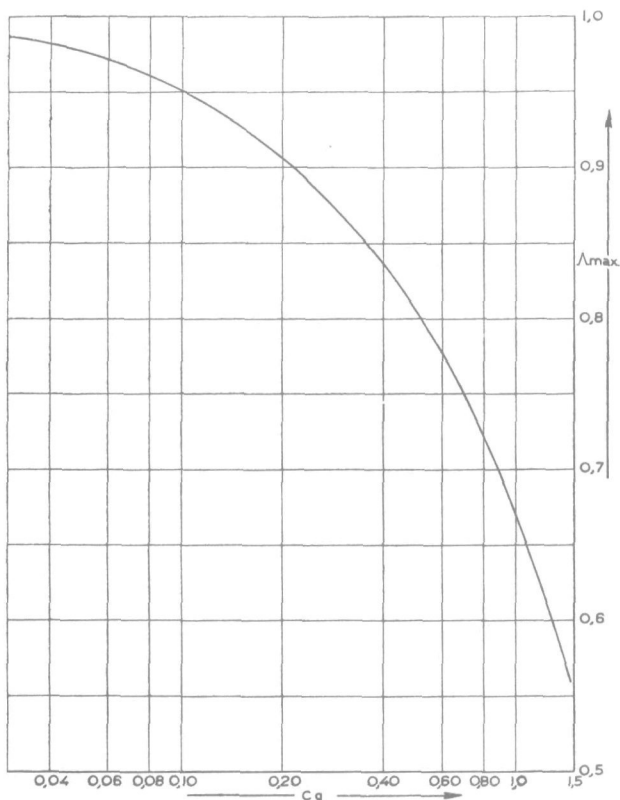


Fig. 9.

het verband aangegeven tusschen de maximale waarde van den coëfficiënt  $\Lambda$  en de waarde van den parameter  $C_g$ . Dit verband is ontleend aan de hoofdgrafiek. De grootste belasting zelve wordt uit  $\Lambda_{max}$  hetzij met behulp van fig. 7, hetzij met de daarbij behorende formule

$$n - 1 = \frac{\dot{w}}{g} = \frac{w_0 U}{g l} \cdot \Lambda C \quad (05.23)$$

afgeleid.

Mede hiervan gebruik makend kunnen de conclusies als volgt worden gecompleteerd en samengevat:

Het maximum der remousbelasting

- wordt bereikt binnen het overgangsgebied. Dit volgt niet alleen uit de figuur, doch ook direct uit de laatste formule van het stel (05.22), welke immers leert, dat voor  $S > 1$  niet anders dan de reeds eerder ontmoete exponentieele uitdemping van de belasting optreedt.
- is recht evenredig met de grootste stoorsnelheid  $w_0$  in het remousveld en met de vliegsnelheid.
- is kleiner, naarmate de absolute breedte van het overgangsgebied groter is.
- is bij een remousveld met overgangsgebied van bepaalde absolute breedte onafhankelijk van de kooorde van den vleugel van het vliegtuig.
- is afhankelijk van de waarde van den parameter  $C$ , dus van de vleugelbelasting van het vliegtuig, van de vlieghoogte en van den coëfficiënt  $k = \frac{\partial c_i}{\partial \alpha}$ . Deze afhankelijkheid wordt bepaald door de combinatie van de hulpgrafiek fig. 9 en de formule (05.23) en is van dien aard, dat de belasting naarmate  $C$  groter is minder toeneemt, dan met de door (05.23) alléén voorgestelde rechte evenredigheid overeenkomt. Dientengevolge begunstigt (in den zin van een verlaging der belasting) een overgangsgebied dus vooral vliegtuigen met lage vleugelbelasting, die op geringe hoogte vliegen (waardoor de waarde van  $C$  en die van  $C_g$  groot worden,  $\Lambda_{max}$  dus relatief klein uitvalt).

Omdat de logarithmische schaal, die in fig. 8 (hoofdgrafiek) is aangebracht, een verteekening introduceert, die de beoordeeling van het verloop van de belasting in zeker opzicht bemoeilijkt, is in fig. 10 de coëfficiënt  $\Lambda$  nog eens op een lineaire schaal uitgezet. Bovendien is deze figuur niet op de formules (05.22) betrokken, doch op (05.17) en (05.19). Daarbij is van de twee parameters, die in deze formules optreden,  $C$  op de vaste waarde 0,05 vastgelegd, zoodat alleen  $s_g$  is gevarieerd. De uitkomst voor  $s_g = 0$  is ontleend aan de onder 05.1 tot 05.3 opgenomen berekening.

Het is van eenig belang op te merken, dat de nauwkeurigheid van de einduitkomst (05.22) sterk afhangt van de waarde van  $s_g$ . Voor zeer kleine waarden van  $s_g$  is zij op reeds eerder (punt 03.5) besproken gronden slecht. Daar echter aan de instelling van de draagkracht naarmate  $s_g$  groter is het typisch instationnaire stootkarakter steeds meer wordt ontnomen (de wijzigingen, die de

invalshoek per tijdseenheid ondergaat worden steeds kleiner), worden ook de fouten, veroorzaakt door het gebruik der „stationnaire” formule voor de dragende kracht op den vleugel dan voortdurend kleiner. Wanneer  $s_g$  een zekere later nader vast

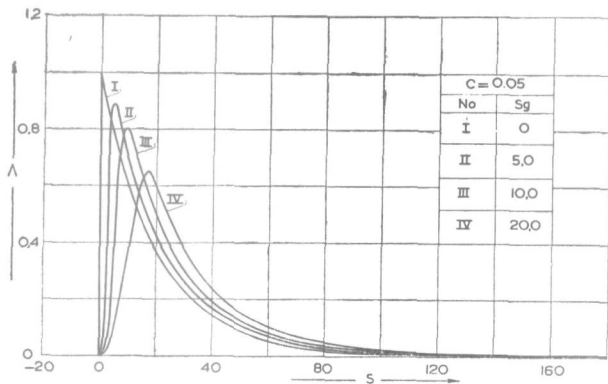


Fig. 10.

te stellen minimumwaarde overschrijdt, moeten deze fouten zelfs tot een te verwaarloozen rest terugloopen. De eenige wellicht niet onbelangrijke fout, die (05.22) dan nog bevat, wordt veroorzaakt door de verwaarloozing der draaiingen om de dwarsas.

#### 06. De invloed op de belasting van de traagheid, waarmede de draagkracht zich instelt.

06.1. De in het vorig punt opgenomen berekening kan aanmerkelijk worden verbeterd door — zonder verdere wijzigingen — de vertraagde instelling van de draagkracht naar de aanwijzingen der instationnaire draagvlaktheorie erin te verwerken. Het zal geschikt zijn de uitkomsten, die deze theorie ten aanzien van de draagkrachtinstelling oplevert, vooraf in kort overzicht te bespreken.

06.2. Het theoretisch-aerodynamisch vraagstuk van de niet-stationnaire strooming om een draagvlak is in afgesloten vorm alleen uitgewerkt voor het geval der „twee-dimensionale” strooming om een dunnen vleugel. De behandeling wordt in de literatuur op twee bijzondere gevallen toegespitst, n.l. ten eerste op het harmonisch trillende draagvlak en ten tweede op het draagvlak, waarvan de invalshoek een plotselinge wijziging ondergaat. In het eerste geval wordt aangenomen, dat het draagvlak zich in een op zichzelf (d.i. afgezien van de door het draagvlak veroorzaakte storing) stationnaire parallelstrooming bevindt, terwijl in het tweede geval naast dezen stroomingstoestand ook rekening wordt gehouden met de mogelijkheid, dat de wijziging van den invalshoek wordt veroorzaakt door een „remousstoring” in het stroomingsveld. De basis der theorie wordt gevormd door:

- 1°. de veronderstelling, dat de lucht mag worden behandeld als een onsamendrukbare ideale vloeistof.
- 2°. de veronderstelling, dat de in het stroomingsveld reeds aanwezige of door het draagvlak

geïnduceerde storingssnelheden klein zijn, vergeleken bij de stationnaire aan te nemen „vlieg-snelheid”. Deze veronderstelling maakt het mogelijk de theorie op gelineariseerde vergelijkingen op te bouwen.

- 3°. de stelling van Kutta-Joukowski, dat de stroomsnelheid bij den scherpen achterrand van het draagvlak eindig moet blijven.
- 4°. de veronderstelling, dat de invloed van in een door een „remousstrooming” gestoord veld aanwezige, niet door de aanwezigheid van het draagvlak veroorzaakte, wervels op de dragende krachten mag worden verwaarloosd.

Deze grondslag wordt — afgezien van de onder 4°. genoemde veronderstelling — ook in de stationnaire theorie aanvaard en is aldaar, getoetst aan het experiment, binnen voldoende wijde grenzen aanvaardbaar bevonden. Ook de onder 4°. genoemde veronderstelling veroorzaakt naar alle waarschijnlijkheid — een beperkte experimenteele contrôle is beschikbaar — geen fouten van betekenis.

In de theorie der remousbelasting vormt de plotselinge verandering van den invalshoek den grondslag der aerodynamische berekeningen, zoodat de trillende vleugel buiten beschouwing kan worden gelaten. Een dergelijke wijziging kan op drieërlei wijze tot stand worden gebracht. Ten eerste kan aan den vleugel (die zich met de stationnaire vliegsnelheid  $U$  voortbeweegt) plotseling een snelheid  $w$  worden gegeven in een richting, loodrecht op zijn eigen vlak. Wordt  $w$  naar boven positief gerekend, dan resulteert daaruit een plotselinge wijziging van den aanstreamingshoek ten bedrage  $\Delta\alpha = -\frac{w}{U}$  (aannemend, dat  $w \ll U$  is). Ten tweede kan de vleugel plotseling om een in zijn vlak gelegen, evenwijdig aan den neus loopende as over een hoek  $\Delta\alpha$  worden gedraaid. Ten derde kan de vleugel plotseling in een (scherp begrensd) gebied van het vloeistofveld terecht komen, waar een constante (remous-) strooming heerscht ter grootte  $w_0$  in een richting, loodrecht op het vlak van den vleugel. Deze strooming veroorzaakt een invalshoekverandering ter grootte  $\Delta\alpha = \frac{w_0}{U}$  als  $w_0 \ll U$  is.

De twee eerstgenoemde gevallen zijn in hooge mate aequivalent, omdat ze beide een overal gelijke simultane wijziging van den invalshoek langs de geheele koorde van het draagvlak bevatten. In het laatste geval echter is er een weliswaar kort, doch eindig tijdsinterval, waarin de vleugel het gebied der storende strooming binnendringt, d.w.z. waarin de grens van het stoorveld van den neus tot den achterrand over den vleugel schuift.

Dit verschil weerspiegelt zich in de uitkomsten, die van den navolgenden aard zijn:

Zij  $s$  de reeds eerder gebruikte dimensielooze coördinaat langs de vliegbaan, die den afgelegden weg uitdrukt in de halve vleugelkoorde, ditmaal echter met de preciseering, dat de plaatsbepaling betrekking heeft op de positie van het *midden van de vleugelkoorde* (zoodat dit punt voor  $s=0$  in

het nulpunt van de vliegbaan valt), dan wordt de verandering van de draagkracht per eenheid van breedte, veroorzaakt door

- een plotselinge wijziging  $\Delta\alpha$  van den invalshoek langs de geheele koorde van den vleugel, aangebracht in het punt  $s=0$  (d.i. op het moment, waarop het midden van de vleugelkoorde het nulpunt van de vliegbaan passeert), beschreven door de formule

$$\Delta L = \pi \rho l U^2 k_1(s) \cdot \Delta\alpha; s > 0, \quad (06.01)$$

waarin  $k_1(s)$  een mathematisch zeer gecompliceerd gebouwde functie van  $s$  is, die het door fig. 11 toegelichte verloop heeft. (De getallen voor deze en de hieronder genoemde  $k_2(s)$  functie zijn ontleend aan lit. 16).

- het invliegen van een stoorveld, waarbinnen een stroomsnelheid  $w_0$  heerscht, gericht loodrecht op het vlak van den vleugel, en waarvan de grens in het punt  $s=0$  ligt (zoodat de neus van den vleugel dit punt passeert als  $s=-1$  is!), beschreven door de formule

$$\Delta L = \pi \rho l U w_0 k_2(s); s > -1, \quad (06.02)$$

waarin  $k_2(s)$  een eveneens gecompliceerde functie van  $s$  is, die ook in fig. 11 in den vorm van een grafiek is weergegeven.

Er zij nogmaals op gewezen, dat de formule (06.02) het geleidelijk indringen van den vleugel in het stoorveld in acht neemt, hieruit resulteert het verschil met de formule (06.01).

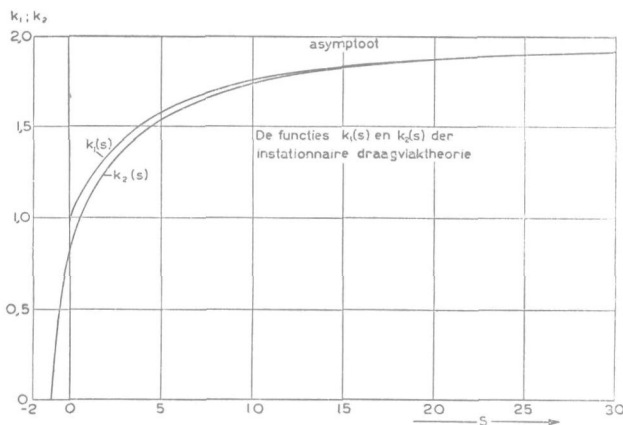


Fig. 11.

Uit de formules en de grafieken van fig. 11 blijkt, dat de draagkracht zich ten deele met een vertraging op den invalshoek instelt. De eindwaarde, zoowel van  $k_1(s)$  als van  $k_2(s)$  bedraagt 2, zoodat de formule (06.01) uiteindelijk geeft

$$\begin{aligned} (\Delta L)_{s=\infty} &= 2 \pi \rho l U^2 \Delta\alpha = \\ &= 2 l \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2 \pi \Delta\alpha, \end{aligned} \quad (06.03)$$

hetgeen (bedenkend dat  $\Delta L$  op de breedte-eenheid van den vleugel is betrokken) naar behooren overeenkomt met de bekende stationnaire uitkomst

$$\Delta L = 2 l \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \frac{\partial c_a}{\partial \alpha} \Delta\alpha \quad (06.04)$$

als voor  $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$  de „theoretische waarde”  $2\pi$  wordt ingevuld.

Evenzoo geeft de formule (06.02) op correcte wijze

$$(\Delta L)_{s=\infty} = 2 \pi \rho l U w_0 = 2 l \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2 \pi \frac{w_0}{U}. \quad (06.05)$$

De beginwaarde van de functie  $k_1(s)$  bedraagt  $k_1(0)=1$ , zoodat de draagkracht zich gelijktijdig met de verandering van den invalshoek ten halve instelt om — overeenkomstig fig. 11 — daarna geleidelijk tot de volle waarde aan te groeien.

Bij een stoorveld raakt de neus van den vleugel — zooals reeds werd vermeld — aan het grens-

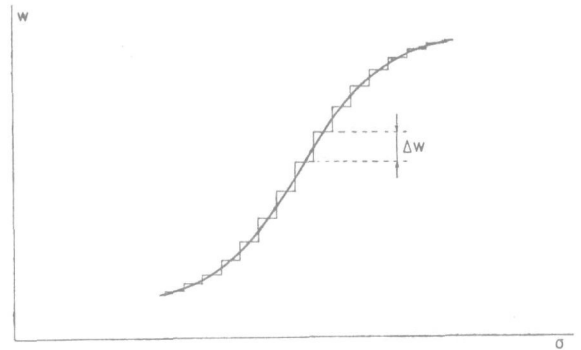


Fig. 12.

vlak op het moment, waarop de coördinaat  $s$ , die de plaats vastlegt van het midden van den vleugel, de waarde  $-1$  bereikt. Op dit moment zet de draagkracht, geïnduceerd door het stoorveld, in. Het ligt voor de hand dat de beginwaarde in dit geval nul zal bedragen, zooals inderdaad ook door de formule (06.02) wordt aangegeven, daar volgens figuur 11  $k_2(-1)=0$  is. Net als in het vorige geval groeit de draagkracht vervolgens geleidelijk aan tot de stationnaire eindwaarde, die in theorie eerst bij  $s=\infty$  wordt bereikt.

Bij een vlucht in onrustige lucht treden geen strikt momentane eindige veranderingen van den invalshoek op, terwijl de remousvelden niet altijd scherp begrensd zijn. De formules voor de draagkracht, die deze meer algemeene toestanden beheerschen, kunnen uit de formules (06.01) en (06.02) door een eenvoudige generaliseering en een kleine toevoeging worden verkregen. Het is n.l. in verband met den gelineariseerden vorm der aerodynamische theorie geoorloofd de krachtwerkingen, geïnduceerd door een willekeurige reeks kleine veranderingen van den invalshoek of door een willekeurige samenstelling van scherp begrenste stoorvelden lineair te superponeren. Wordt nu de veranderlijke snelheid, die de vleugel in een richting loodrecht op zijn eigen vlak bezit, in afhankelijkheid van den baancoördinaat  $\sigma$  gegeven door de functie  $w=w(\sigma)$ , dan kan de variatie dezer snelheid naar de aanwijzingen van fig. 12 worden „ontbonden” in een groote reeks kleine discontinue veranderingen  $\Delta w$  van het type, dat bij de formule (06.01) behoort. Dientengevolge roept de verandering  $\Delta w$ , aanwezig in het wille-

keurige punt  $s = \sigma$ , een draagkracht te voorschijn van de grootte

$$\Delta L = -\pi\rho l U^2 \cdot k_1(s - \sigma) \cdot \frac{\Delta w}{U}.$$

Schrijft men

$$\Delta w = \left( \frac{dw}{ds} \right)_{s=\sigma} d\sigma$$

dan wordt door superponeering voor de totale draagkracht, aanwezig op het moment, waarop de vleugel het willekeurige punt  $s$  van de baan bereikt, als de storing  $w(\sigma)$  in het punt  $s = s_1$  inzet (dus  $w(\sigma) \equiv 0$  is voor  $\sigma < s_1$ ), de formule

$$L = -\pi\rho l U \int_{s_1}^s k_1(s - \sigma) \frac{dw}{d\sigma} d\sigma; \quad s \geq s_1 \quad (06.06)$$

verkregen.

Op analoge wijze vindt men voor een geleidelijk inzettend stoorveld, waarvan de grens in het punt  $s_1$  valt (zoodat  $w_r(\sigma) \equiv 0$  is voor  $\sigma < s_1$ ) de formule

$$L = \pi\rho l U \int_{s_1}^s k_2(s - \sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma; \quad s \geq s_1 - 1. \quad (06.07)$$

Verondersteld is, dat de functie  $w_r(\sigma)$  de snelheidsverdeling in het stoorveld vastlegt.

De volledige aerodynamische theorie leert, dat bij de zoojuist gevolgde beschouwingswijze een component der totale aerodynamische kracht in de uitkomst ontbreekt, die kan worden voorgesteld door de formule

$$L = -\pi\rho l U \frac{dw}{ds}. \quad (06.08)$$

Deze uitdrukking behoort, daar zij de functie  $w(\sigma)$  bevat, aan de uitkomst (06.06) te worden toegevoegd. Zij beschrijft de bekende „virtueele” vergroting van de massa van den vleugel. Daar immers

$$-\pi\rho l U \frac{dw}{ds} = -\rho \cdot \pi l^2 \cdot \frac{dw}{dt} \quad (06.09)$$

is, kan zij worden opgevat als een traagheidskracht op een massa van de grootte  $\rho\pi l^2 \cdot 1$ , d.i. als een traagheidskracht op de lucht, die zich bevindt binnen den cylinder, die om den vleugel kan worden beschreven. Het is, alsof deze hoeveelheid lucht vast aan den vleugel was verbonden. In overeenstemming met deze opvatting grijpt de kracht (06.09) op den vleugel aan in het midden van de koorde.

De kracht (06.08) ontsnapt bij de bepaling van de gevolgen eener momentane wijziging van den invalshoek (formules (06.01) en (06.02)), omdat bij de bestudeering hiervan de krachtswerking op het moment zelve, waarop deze verandering wordt aangebracht, buiten beschouwing wordt gelaten.

$$L = F \cdot \frac{1}{2} \rho U \cdot \left[ -\pi \frac{dw}{ds} - \frac{1}{2} k \int_{s_1-1}^s k_1(s - \sigma) \frac{dw}{d\sigma} d\sigma + \frac{1}{2} k \int_{s_1}^s k_2(s - \sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma \right]; \quad s > s_1 - 1. \quad (06.11)$$

Een plotselinge eindige verandering is fysisch niet uitvoerbaar, daar er oneindig groote krachten voor noodig zouden zijn, volgens (06.08) niet alleen, omdat de vleugel een massaal en dus traag systeem is, maar ook omdat de lucht een traagheidswerking te voorschijn roept.

Samenvattend kan de dragende kracht per eenheid van breedte op een oneindig breeden vleugel, die zich zonder draaien met constante vliegsnelheid  $U$  en een willekeurige snelheid  $w(\sigma)$  in een richting, loodrecht op zijn eigen vlak voortbeweegt in een stroomingsveld, dat storende stroomingen bevat, die den vleugel loodrecht treffen en waarvan de snelheidsverdeling langs de vliegbaan door de functie  $w_r(\sigma)$  wordt voorgesteld (mits  $w(\sigma) \ll U$  en  $w_r(\sigma) \ll U$  is) worden ontleend aan de formule

$$L = -\pi\rho l U \frac{dw}{ds} - \pi\rho l U \int_{s_1-1}^s k_1(s - \sigma) \frac{dw}{d\sigma} d\sigma + \pi\rho l U \int_{s_1}^s k_2(s - \sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma; \quad s > s_1 - 1. \quad (06.10)$$

In overeenstemming met de opvatting, dat de verticale bewegingen van den vleugel door de storende stroomingen werden veroorzaakt, is daarbij aangenomen, dat de vliegtuigbeweging voor  $s < s_1 - 1$  stationnair was.

Om de voorgenomen berekening der belasting uit te kunnen voeren is een formule van het type (06.10) noodig, echter in een voor vleugels van eindige spanwijdte geldigen vorm. In exacten vorm is deze niet beschikbaar, daar het vleugelwijdte-effect tot nu toe nog niet in bevredigenden vorm in de „niet-stationnaire” aerodynamische theorie kon worden opgenomen. Het is min of meer gebruikelijk geworden, voor de daaruit voortvloeiende moeilijkheid een oplossing te improviseren, die bestaat uit een simpele vervanging der factoren  $\pi$  in (06.10) door  $\frac{1}{2} k = \frac{1}{2} \frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$ . Daardoor wordt bereikt, dat de eindwaarde van de draagkracht precies de juiste grootte krijgt. Neemt men in aanmerking, dat er geen enkele reden is om te verwachten, dat de eindige, doch nog altijd vrij groote slankheid van vleugels met de gebruikelijke afmetingen een aanmerkelijke wijziging in de aangroeiingssnelheid van de draagkracht zal brengen, dan vervalt daarmede ieder motief, deze eenvoudige „aanpassing” te wantrouwen.

Met de aanvaarding van de gewijzigde formule (06.10) wordt een door Jones (lit. 18) uitgewerkte, doch nog onbevredigende poging, om het effect van de eindige breedte van den vleugel op meer volledige wijze in rekening te brengen, buiten beschouwing gelaten.

De uiteindelijk voor de draagkracht op den geheelen vleugel in den vervolge te gebruiken formule (06.10) geldt voor de kracht per eenheid van breedte) luidt volgens het voorgaande

Er wordt de aandacht op gevestigd, dat de component (vergelijk (06.08))

$$(L)_T = -F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \pi \frac{d}{ds} \left( \frac{w}{U} \right)$$

in een berekening van de beweging van het vliegtuig kan worden opgenomen, door een toeslag op de massa (van den vleugel) van het vliegtuig te leggen, die volgens (06.09) de grootte

$$\rho \pi l^2 \cdot 2b = \frac{\pi}{2} \rho F l \quad (06.12)$$

heeft. Het aangrijppingspunt van dezen component van de totale kracht ligt, zooals reeds eerder werd medegedeeld, in het midden van de vleugelkooorde.

De krachten (06.06) en (06.07), welke — anders dan (06.08) — zijn gebonden aan het optreden van een circulatie om den vleugel, grijpen beide aan in het punt, dat op een kwart van de koorde achter den neus van den vleugel ligt. Voor den component (06.07) heeft deze aanwijzing der theorie eenig opzien gebaard. Zij schijnt echter door het experiment te worden bevestigd (zie lit. 4).

06.3. Terugkeerend tot de berekening van den belastingsfactor, verschaft de formule (06.11) de gelegenheid, de in no. 05 opgenomen berekening in dien zin te verbeteren, dat de trage instelling van de draagkracht in acht wordt genomen. Met (06.11) luidt de formule voor het verticale krachtenevenwicht

$$\begin{aligned} mg &= F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot k \alpha_0; \quad t < 0 \\ m\dot{w} &= -mg + F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot k \alpha_0' + \\ &+ F \cdot \frac{1}{2} \rho U \cdot \left[ -\pi \frac{dw}{ds} - \frac{1}{2} k \int_{s_1-1}^s k_1(s-\sigma) \frac{dw}{d\sigma} d\sigma + \frac{1}{2} k \int_{s_1}^s k_2(s-\sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma \right]; \quad t > 0. \end{aligned} \quad (06.13)$$

Daarbij is aangenomen, dat de vleugel op het moment  $t=0$  met den neus aan het zich bij  $s=s_1$  bevindende grensvlak van het remousveld raakt. Voor  $t < 0$  is de vlucht stationnair, rechtlijnig en horizontaal. Uit beide bovenstaande vergelijkingen volgt door aftrekken, mede  $\frac{d}{dt}$  door  $\frac{U}{l} \frac{d}{ds}$  vervangend:

$$\begin{aligned} m \frac{U}{l} \frac{dw}{ds} &= \\ &= F \cdot \frac{1}{2} \rho U \cdot \left[ -\pi \frac{dw}{ds} - \frac{1}{2} k \int_{s_1-1}^s k_1(s-\sigma) \frac{dw}{d\sigma} d\sigma + \frac{1}{2} k \int_{s_1}^s k_2(s-\sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma \right]; \quad s > s_1 - 1. \end{aligned} \quad (06.14)$$

Om deze uitdrukking uiterlijk nog een weinig te vereenvoudigen, worde

- 1°. de term  $-\pi \frac{dw}{ds}$  geschrapt, hetgeen ten volle geoorloofd is, als in ruil daarvoor op de massa  $m$  van het systeem den toeslag (06.12) wordt

aangebracht. In den vervolge wordt aangenomen, dat dit is geschied.

- 2°. de parameter  $s_1$ , die de plaats van de uiterste grens van het remousveld vastlegt, gelijk aan nul genomen.
- 3°. de definitie van  $s$  in dien zin gewijzigd, dat deze coördinaat van nu af aan de plaats vastlegt van den neus van den vleugel en niet de plaats van het midden van den vleugel. Deze kleine wijziging maakt het mogelijk, de in (06.14) optredende termen  $-1$  te verwijderen.

Stelt men tevens

$$k_2^*(s) \equiv k_2(s-1) \quad (06.15)$$

en neemt men den factor  $C$ , gedefinieerd door (05.08) weer in de formule op, dan verkrijgt (06.14) uiteindelijk de gedaante

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} &= \frac{1}{2} C \left[ -\int_0^s k_1(s-\sigma) \frac{dw}{d\sigma} d\sigma + \right. \\ &\left. + \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma \right]. \end{aligned} \quad (06.16)$$

06.4. Wanneer de bewegingsvergelijking (06.16) vooreerst wordt gespecialiseerd op het geval, dat het remousveld een scherp begrensd veld is —  $w_r$  dus door de formules (03.1) wordt gegeven — neemt zij den vorm

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} + \frac{1}{2} C \int_0^s k_1(s-\sigma) \cdot \frac{dw}{d\sigma} d\sigma &= \\ &= \frac{1}{2} C w_0 k_2^*(s) \end{aligned} \quad (06.17)$$

aan.

Deze vergelijking kan zeer geschikt worden opgelost door herhaalde benadering, waarbij een reeds

vrij goede eerste benadering met behulp van de navolgende overwegingen wordt bepaald:

Ook wanneer het remousveld scherp begrensd is, vertoont de snelheid  $w$  geen discontinue veranderingen. De wijzigingen van den invalshoek, die uit deze snelheid voortkomen, zijn dus minder „abrupt” dan de wijzigingen, die de remousstroom-

ming veroorzaakt. Dientengevolge ligt het vermoeden voor de hand, dat het nog met eenige redelijkheid mogelijk moet zijn, de draagkracht, die aan de eerstbedoelde wijziging van den invalshoek is verbonden, te ontleenen aan de eenvoudige formule der „stationnaire” theorie. Dat geschiedt, door de  $k_1$  in formule (06.17) door de constante 2 te vervangen, waarna overblijft

$$\frac{dw}{ds} + Cw = \frac{1}{2} C w_0 k_2^*(s).$$

Dit is een gewone differentiaalvergelijking. De oplossing ervan, aangepast aan de voorwaarde  $w(0) = 0$ , luidt

$$(w)_1 = \frac{1}{2} C w_0 e^{-Cs} \int_0^s e^{C\sigma} k_2^*(\sigma) d\sigma.$$

Dit is de benadering, die aan het begin staat van het iteratieproces.

Men heeft:

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)_1 = \frac{1}{2} C w_0 k_2^*(s) - \frac{1}{2} C^2 w_0 e^{-Cs} \int_0^s e^{C\sigma} k_2^*(\sigma) d\sigma.$$

Betere benaderingen volgen nu direct uit (06.17), naar het schema

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)_2 = \frac{1}{2} C w_0 k_2^*(s) - \frac{1}{2} C \int_0^s k_1(s-\sigma) \left(\frac{dw}{d\sigma}\right)_1 d\sigma$$

$$\left(\frac{dw}{ds}\right)_3 = \frac{1}{2} C w_0 k_2^*(s) - \frac{1}{2} C \int_0^s k_1(s-\sigma) \left(\frac{dw}{d\sigma}\right)_2 d\sigma \quad (06.18)$$

enz.

Overeenkomstig de verwachting leert de numerieke uitwerking, dat de functie  $\left(\frac{dw}{ds}\right)_n$  zeer snel naar de exacte oplossing van (06.17) convergeert. Het blijkt praktisch ruimschoots voldoende te zijn, de iteratie voort te zetten tot en met  $\left(\frac{dw}{ds}\right)_3$ . In de numerieke berekening worden de in de formules aangetroffen integralen met behulp van numerieke integratiemethoden uitgewerkt.

Volgens (05.17) wordt de belastingscoëfficiënt  $\Lambda$  bepaald door de betrekking

$$\Lambda = \frac{1}{w_0 C} \frac{dw}{ds}. \quad (06.19)$$

Substitueert men dit in (06.17), dan verkrijgt men:

$$\Lambda(s) + \frac{1}{2} C \int_0^s k_1(s-\sigma) \Lambda(\sigma) d\sigma = \frac{1}{2} k_2^*(s),$$

waaruit blijkt, dat de formule voor de functie

$$\Lambda \equiv \Lambda(s)$$

uitsluitend den coëfficiënt  $C$  als parameter bevat.

Het resultaat der numerieke berekening, die is uitgevoerd voor

$$C = 0,01; 0,02; 0,03; 0,05 \text{ en } 0,09$$

en die is opgebouwd op de benadering (06.18) voor  $\frac{dw}{ds}$ , is vervat in fig. 13.

Deze figuur bevat alleen het beginverloop der  $\Lambda(s)$ -krommen, het weinig interessante stuk, dat lang na het bereiken der maximale  $\Lambda$ -waarden de vroeger gevonden exponentieele uitdamping der

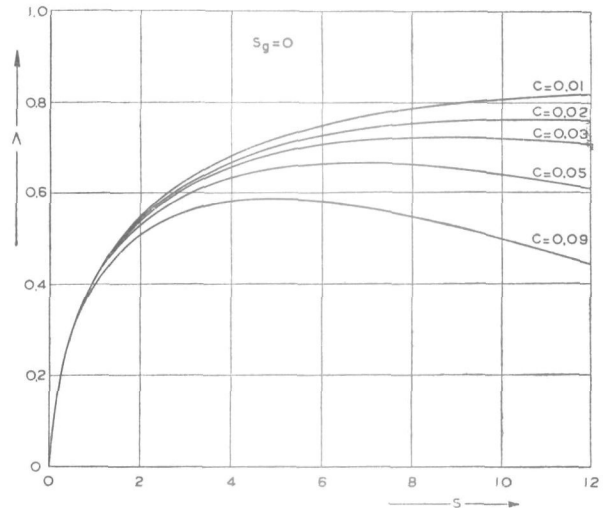


Fig. 13.

belasting in een thans iets anderen vorm weer geeft, is ter besparing op het rekenwerk niet berekend.

Het valt direct op, dat de grootste  $\Lambda$ -waarden belangrijk beneden de waarde 1 blijven, dat het bereikte maximum een functie is van  $C$ , en dat dit maximum niet onmiddellijk, doch eerst bij  $s = 6$  à  $12$  wordt bereikt, één en ander in afwijking van de „primitieve” uitkomst (05.13), verkregen in punt 05 (alwaar  $\Lambda_{\max} = 1$ , onafhankelijk van  $C$ , bij  $s = 0$  werd verkregen). De belangrijkste uitkomst is, dat de maximale waarde van den belastingscoëfficiënt en dus ook van den remousbelastingsfactor door de trage draagkrachtinstelling voor het scherp begrensde remousveld belangrijk (20 tot 35 %, afhankelijk van  $C$ ) wordt verkleind.

Daar

$$\frac{\dot{w}}{g} = \frac{w_0 \Lambda U C}{lg} \quad \text{en} \quad C = \frac{\frac{1}{2} \rho g l k}{G/F} \quad (06.20)$$

is, geldt dat de remousbelasting in een scherp begrensde remousveld

- weliswaar afneemt naarmate de vleugelbelasting groter is, doch minder snel dan met een omgekeerde evenredigheid overeenstemt.
- wel toeneemt, naarmate  $\rho$  en  $k$  groter zijn, doch niet naar evenredigheid.

06.5. Wanneer het remousveld een overgangsbied vertoont — overeenkomstig de in de vergelijkingen (03.2) vervatte definitie — luidt de in aanmerking te nemen bewegingsvergelijking volgens (06.16):

$$\frac{dw}{ds} + \frac{1}{2} C \int_0^s k_1(s-\sigma) \frac{dw}{d\sigma} d\sigma = \frac{1}{2} C \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma \quad (06.21)$$

met

$$w_r(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2} w_0 \left( 1 - \cos \frac{\pi\sigma}{s_g} \right) & \text{voor } 0 \leq \sigma \leq s_g. \\ w_0 & \text{voor } \sigma \geq s_g. \end{cases} \quad (06.22)$$

De vergelijking (06.21) kan net als (06.17) worden opgelost door herhaalde benadering. Zooals Jones (lit. 19) heeft opgemerkt, komt echter ook een toepassing der z.g. operatorenrekening in aanmerking. Hoewel de technische voordeelen van deze laatste werkwijze in de praktijk tegenvallen, moge zij ter kennismaking aan het door de bovenstaande vergelijkingen gedefinieerde voorbeeld worden gedemonstreerd. Het is echter beter, daarbij de operatorenmethode door de aequivalente behandeling met de transformatie van Laplace te vervangen.

Men stelle ter afkorting

$$\int_0^s k_2^*(s-\sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma = f(s). \quad (06.23)$$

In verband met (06.22) kan deze functie als een bekende functie van  $s$  worden opgevat. De voornog onbekende functie, die ontstaat wanneer  $\frac{dw}{ds}$  aan een transformatie van Laplace wordt onderworpen, stelle men voor door de letter  $X^1$ ). Dus

$$X(u) = L \left\{ \frac{dw}{d\sigma} \right\} = \int_0^\infty e^{-u\sigma} \frac{dw}{d\sigma} d\sigma. \quad (06.24)$$

Daar, wanneer  $p(s)$  en  $q(s)$  twee willekeurige voor een Laplace-transformatie toegankelijke functies zijn, in het algemeen

$$L \left\{ \int_0^s p(s-\sigma) q(\sigma) d\sigma \right\} = L \{ p(s) \} \cdot L \{ q(s) \}$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2} C \frac{L \{ f \}}{1 + \frac{1}{2} C \left( \frac{2}{u} - \frac{0,33}{u + 0,0455} - \frac{0,67}{u + 0,300} \right)} = \\ &= \frac{u^3 + 0,3455 u^2 + 0,01365 u}{u^3 + \left( 0,3455 + \frac{C}{2} \right) u^2 + \left( 0,01365 + 0,5615 \frac{C}{2} \right) u + 0,02730 \frac{C}{2}} \cdot \frac{1}{2} CL \{ f \}. \end{aligned} \quad (06.27)$$

is, ontstaat, wanneer de geheele vergelijking (06.21) (zie ook (06.23)) aan deze transformatie wordt onderworpen, de betrekking

$$X + \frac{1}{2} C \cdot L \{ k_1 \} \cdot X = \frac{1}{2} C L \{ f \}.$$

Hieruit lost men op

$$X = \frac{1}{2} C \frac{L \{ f \}}{1 + \frac{1}{2} CL \{ k_1 \}}. \quad (06.25)$$

Deze „oplossing” moet naderhand worden „teruggetransformeerd”.

Ondanks den uiterlijken eenvoud van deze herleiding zou men praktisch niet veel verder komen, wanneer de gecompliceerd gebouwde functie  $k_1$  niet met succes kon worden benaderd door een elementaire functie, die buitengewoon goed in de bovenstaande formules past. Deze benadering wordt gevormd door de eerste drie termen van de ontwikkeling der  $k_1$ -functie in een reeks van Dirichlet:

$$k_1(s) = a_0 + \sum_1^\infty a_n e^{\lambda_n s}.$$

Neemt men

$$\begin{aligned} a_0 &= 2; \quad a_1 = -0,33; \quad \lambda_1 = -0,0455; \\ a_2 &= -0,67; \quad \lambda_2 = -0,300 \end{aligned}$$

dan ontstaat bij verwaarloozing van alle hogere termen nl. een fout, die op de reële as nergens boven de  $1\frac{1}{2}\%$  uitkomt. Daar dit geringe defect van geen belang is, kan men dus zonder eenig bezwaar rekenen met de formule (Jones l.c.):

$$k_1(s) = 2 - 0,33 e^{-0,0455 s} - 0,67 e^{-0,300 s}. \quad (06.26)$$

Doch dan wordt <sup>2)</sup>

$$L \{ k_1 \} = \frac{2}{u} - \frac{0,33}{u + 0,0455} - \frac{0,67}{u + 0,300}$$

en dus, volgens (06.25)

Nu worde de breuk in het rechterlid van (06.27) in partieele breuken ontbonden. Men stelt daartoe

$$\begin{aligned} u^3 + \left( 0,3455 + \frac{C}{2} \right) u^2 + \\ \left( 0,01365 + 0,5615 \frac{C}{2} \right) u + 0,02730 \frac{C}{2} = 0 \end{aligned} \quad (06.28)$$

en lost deze vergelijking naar  $u$  op. Daar zij van den 3den graad is en reële coëfficiënten heeft, is er altijd één reële wortel. Deze blijkt negatief te

<sup>1)</sup> Ten behoeve van den lezer, die niet met de transformatie van Laplace bekend is, is in den Appendix het voor het volgen der behandeling allernoodzakelijkste vermeld.

<sup>2)</sup> Zie den Appendix.

zijn. De twee andere wortels zijn — afhankelijk van de waarde van  $C$  — òf eveneens reëel en negatief, òf toegevoegd complex met negatief reëel deel. Stelt men deze wortels voor door  $-u_1$ ,  $-u_2$  en  $-u_3$  (dus  $u_i$  = het tegengestelde van den  $i$ den wortel), dan kan (06.27) worden ontwikkeld tot

$$X = \frac{1}{2} CL \{ f \} \cdot u \cdot \left( \frac{A_1}{u + u_1} + \frac{A_2}{u + u_2} + \frac{A_3}{u + u_3} \right), \quad (06.29)$$

waarin  $A_1$ ,  $A_2$  en  $A_3$  constanten zijn (waarvan er twee toegevoegd complex uitvallen, wanneer (06.28) complexe wortels heeft), die volgens bekende regels kunnen worden berekend met de formules

$$A_i = \frac{u_i^2 - 0,3455 u_i + 0,01365}{3 u_i^2 - (0,6910 + C) u_i + \left( 0,01365 + 0,5615 \frac{C}{2} \right)}$$

Deze uitkomsten in het oog houdend, kan de vergelijking (06.25) als volgt worden teruggetransformeerd.

Men heeft

$$\frac{1}{u + u_i} = L \left\{ e^{-u_i s} \right\} \quad i = 1; 2; 3$$

en

$$L \left\{ e^{-u_i s} \right\} \cdot L \{ f \} = L \left\{ \int_0^s e^{-u_i(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right\}.$$

Verder is

$$\begin{aligned} \frac{A_i u}{u + u_i} &= A_i \frac{u + u_i - u_i}{u + u_i} = \\ &= A_i - A_i \frac{u_i}{u + u_i} \quad i = 1; 2; 3. \end{aligned}$$

Dan echter wordt

$$X = \frac{1}{2} C \left[ \sum_1^3 A_i L \{ f \} - \sum_1^3 A_i u_i L \left\{ \int_0^s e^{-u_i(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma \right\} \right]; \quad i = 1; 2; 3,$$

waaruit onmiddellijk volgt

$$\frac{dw}{ds} = L^{-1} \{ X \} = \frac{1}{2} C f(s) \cdot \sum_1^3 A_i - \frac{1}{2} C \sum_1^3 A_i u_i e^{-u_i s} \int_0^s e^{u_i \sigma} f(\sigma) d\sigma \quad (06.30)$$

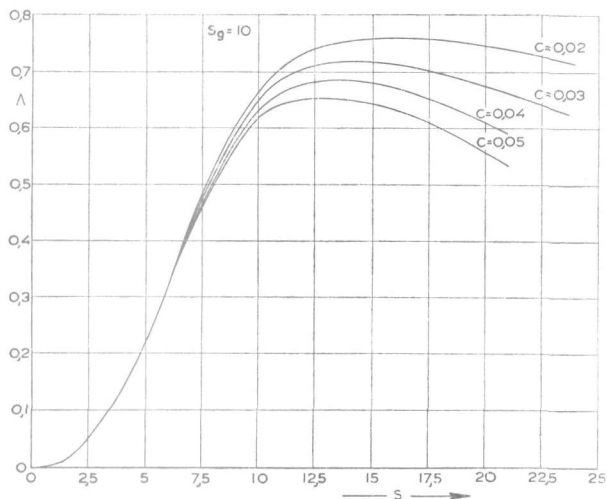


Fig. 15.

Hiermede is de oplossing van (06.21) gevonden. De in (06.30) optredende integralen kunnen langs numerieke weg worden uitgewerkt.

Met behulp van de formule (06.30) zijn — na omrekening van  $\frac{dw}{ds}$  op den belastingscoëfficiënt  $\Lambda$

met behulp van (06.19) — de krommen berekend, die zijn opgenomen in de figuren 14, 15 en 16. Aan de twee in (06.30) optredende parameters  $C$  en  $s_g$  (zie (06.22)) zijn de volgende combinaties

van waarden toegekend:

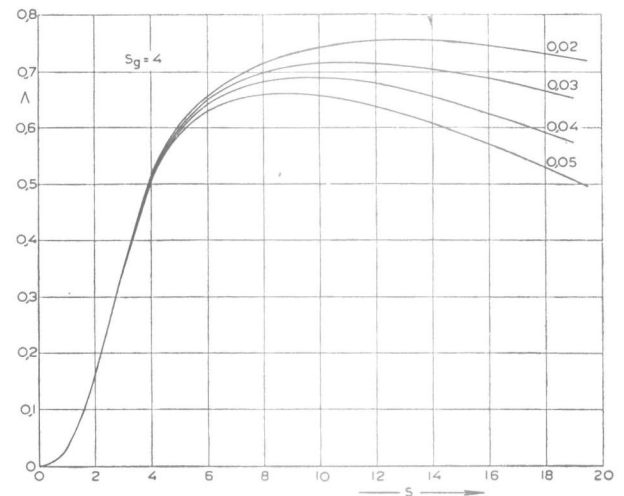


Fig. 14.

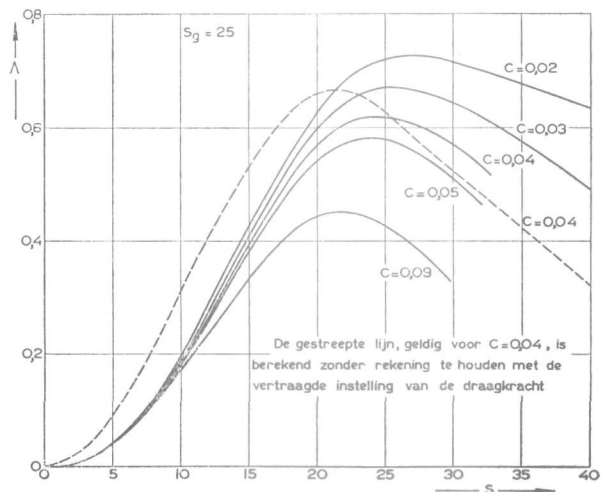


Fig. 16.



$C =$	0,02	0,03	0,04	0,05	0,02	0,03	0,04	0,05	0,02	0,03	0,04	0,05	0,09
$s_g =$	4	4	4	4	10	10	10	10	25	25	25	25	25

06.6. Om de interpretatie en vergelijking der verkregen resultaten te vergemakkelijken, zijn alle krommen der figuren 14, 15 en 16, tezamen met die van fig. 13 — welke overeenkomstige uitkomsten geven voor  $s_g = 0$  — in fig. 17 nog eens in één figuur samengevat.

Verder is de in deze figuren afgelezen maximale waarde van den belastingscoëfficiënt  $\Lambda$ , welke maximale waarde een functie is van  $C$  en  $s_g$ , in fig. 18 uitgezet als functie van  $C$  met  $s_g$  als parameter, en in fig. 19 als functie van  $s_g$  met  $C$  als parameter.

*Opmerking.*

Bij nauwkeurige bestudeering van fig. 19 blijkt, dat alle krommen in het interval  $0 \leq s_g \leq 4$  iets aflopend geteekend moesten worden om hen door de voor  $s_g = 0$  berekende punten te brengen. Dat de maximale belasting zich inderdaad zoo zou gedragen, is onwaarschijnlijk. In dit kleine defect komt kennelijk de verschillende methode, waarlangs de punten voor  $s_g = 0$  en voor  $s_g \neq 0$  werden bepaald, te voorschijn. De beide groepen uitkomsten strooken niet „exact”. De oorzaak moet liggen in

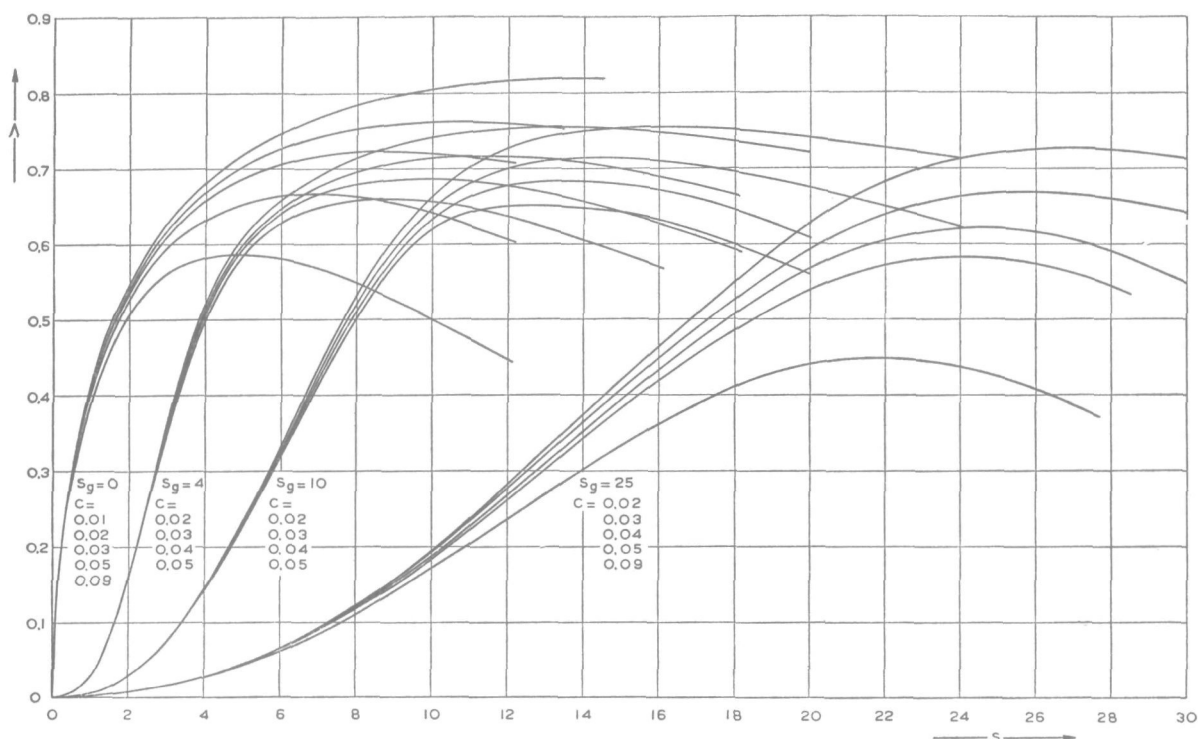


Fig. 17.

De meest markante conclusie, die kan worden getrokken, is de navolgende (fig. 19):

De grootste belasting (eigenlijk de grootste waarde van den belastingsfactor  $\frac{\dot{w} + g}{g}$ ) is voor kleine waarden van  $s_g$  (b.v.  $s_g < \text{ca. } 20$ ) slechts in zeer geringe mate van  $s_g$  afhankelijk, zulks in afwijking van wat op grond van de in fig. 8/9 samengevatte uitkomsten der „primitieve berekening”, gemaakt in punt 05, werd verwacht. Een gevolg hiervan is, dat de breedte van het overgangsgebied van een remousveld, mits „smal”, niet bekend behoeft te zijn, om de belasting te kunnen schatten.

de verschillend gearde benaderingen, welke beide berekeningsmethoden inhouden (voor  $s_g = 0$  een beperkte iteratie, voor  $s_g \neq 0$  een vereenvoudiging van de  $k$ -functie). De afwijking is zoo klein, dat het overbodig is er nadere aandacht aan te besteden.

06.7. De zoojuist beëindigde berekening maakt het mogelijk, iets meer te zeggen over de grootte van de fouten, die worden gemaakt, wanneer men de draagkrachtverandering met behulp van de „stationnaire” formules beschrijft, zooals in punt 05 geschiedde. Om een aanknoopingspunt te hebben, is vooreerst de in punt 05 berekende kromme voor

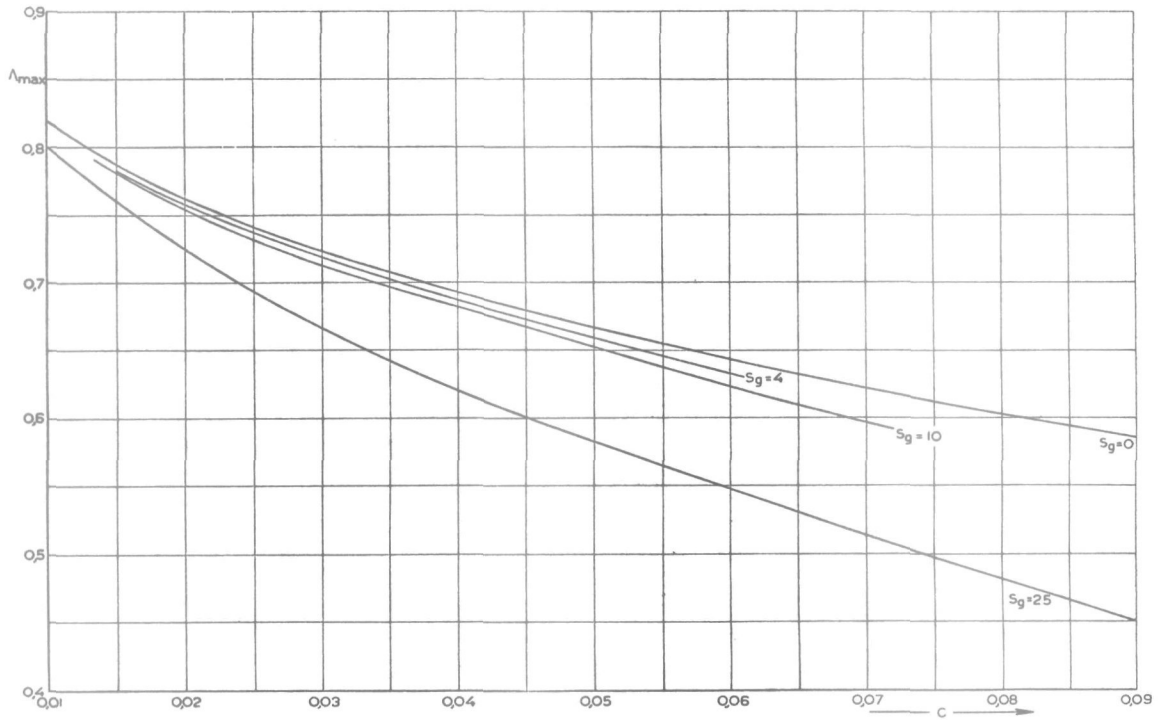


Fig. 18.

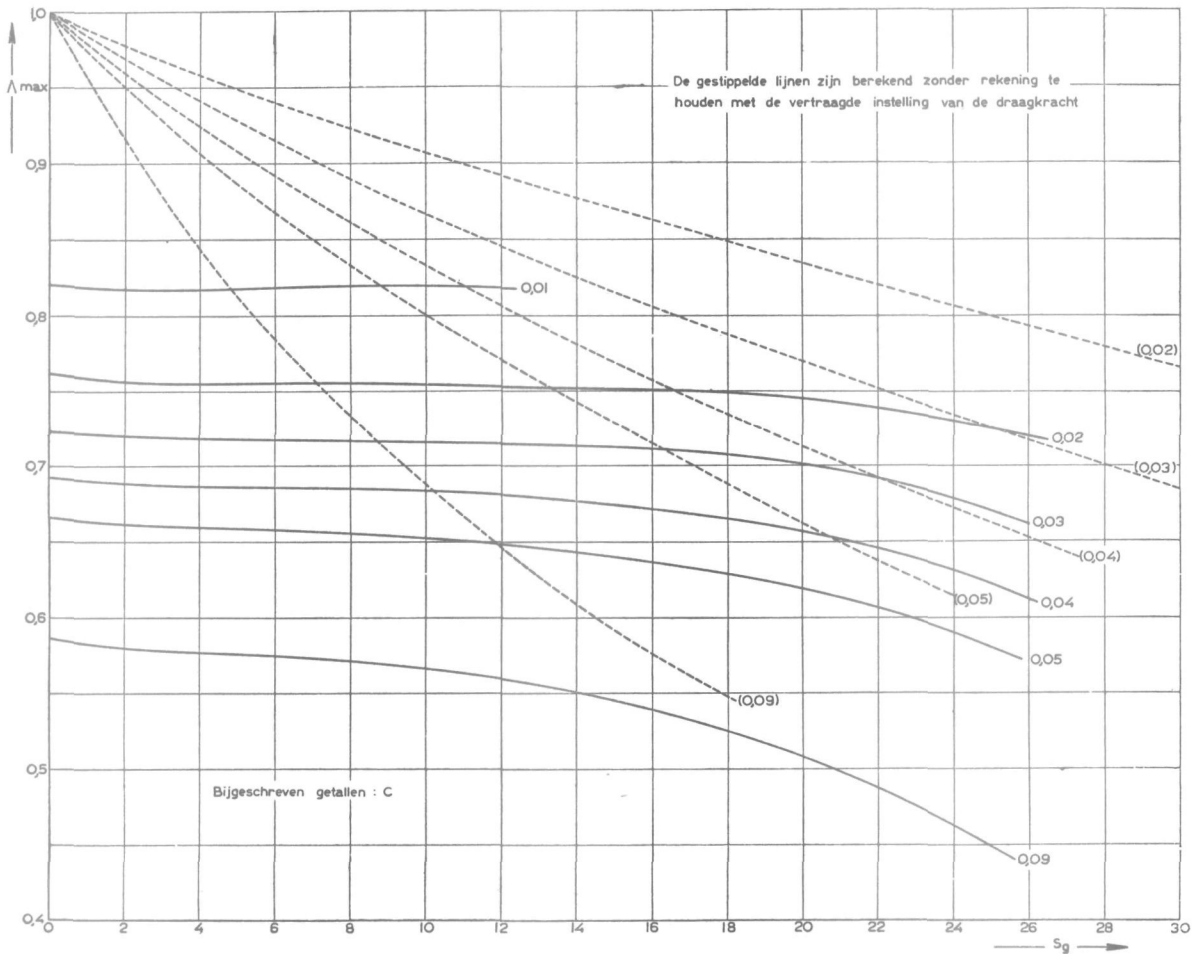


Fig. 19.

Handwritten notes at the bottom right of the page:

$\frac{S_g}{c}$   
 $\frac{1}{c}$   
 $\frac{1}{S_g}$

$\Lambda_{\max}$  in een remousveld met overgangsgebied naar fig. 19 overgebracht in een vorm, waarin de parameter  $C_g$  weer in zijn bestanddeelen  $C$  en  $s_g$  is ontleed. Deze krommen zijn direct met de overeenkomstige zoojuist verkregen uitkomsten vergelijkbaar.

Opnieuw blijkt direct, dat het gebruik der „stationnaire” formules volkomen ontoelaatbaar is, wanneer  $s_g$  klein is. Geheel overeenkomstig de verwachting blijkt echter tevens, dat het resultaat aanmerkelijk beter wordt, wanneer  $s_g$  groot is, vooral als ook de waarde van  $C$  groot is. Wat  $\Lambda_{\max}$  betreft, zou men voor  $C = 0,09$  reeds vanaf  $s_g \approx 20$  met de vereenvoudigde formules kunnen rekenen, voor  $C = 0,05$  vanaf  $s_g \approx 30$  en voor  $C \approx 0,02$  wellicht vanaf  $s_g \approx 50$ .

Om meer volledig te overzien, in hoeverre deze conclusie kan worden generaliseerd, is in fig. 16

inderdaad twee wegeenheden naar rechts moeten worden verschoven.

06.8. De met behulp van de vergelijking (06.21) te berekenen uitkomsten zijn eveneens uitgewerkt voor het geval dat het remousveld het karakter van een remousgolf heeft. Het is daartoe alleen noodig de formule (06.22) door (03.03) te vervangen, de gang der berekening blijft voor het overige praktisch ongewijzigd.

De uitwerking is uitgevoerd voor de navolgende getallencombinaties van de parameters  $C$  en  $s_g$ :

$C$	0,025	0,04	0,025	0,04	0,04
$s_g$	4	4	10	10	25

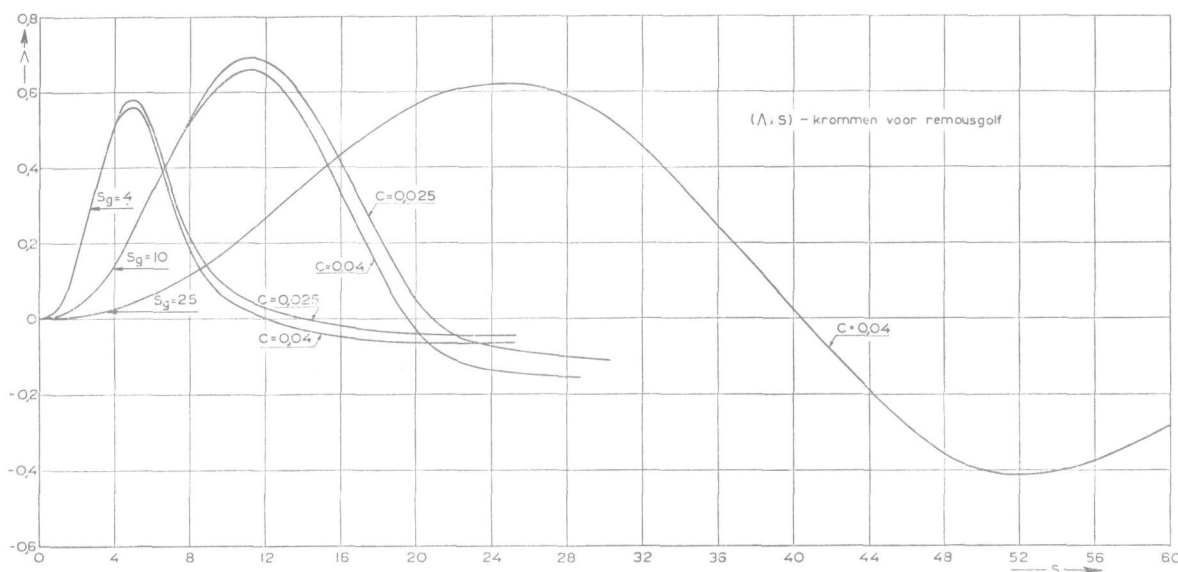


Fig. 20.

tevens één geheele  $\Lambda$ -kromme — welke in no. 05 op vereenvoudigden grondslag werd berekend — overgebracht (na vervanging der in no. 05 gebruikte  $S$ -schaal door de  $s$ -schaal van fig. 16). De waarde van  $C$  bedraagt 0,04, die van  $s_g$  25, zoodat men reeds een enigszins redelijke overeenstemming verwacht met de in fig. 16 eveneens aanwezige meer exacte kromme. Deze overeenstemming zou inderdaad heel behoorlijk zijn, wanneer men de „stationnaire” kromme ca. twee wegeenheden naar rechts zou mogen verplaatsen. Dit laatste nu is inderdaad niet onredelijk, want in fig. 16 geeft  $s$  de plaats aan van den vleugelneus, die in het punt  $s = 0$  juist aan het grensvlak van het remousveld raakt. Binnen het interval  $0 < s < 2$  dringt de vleugel in het remousveld door. Dit verschijnsel moest echter in punt 05 buiten beschouwing worden gelaten, hetgeen tot een zekere mate van willekeur in de beteekenis van het nulpunt der  $s$ -schaal aanleiding geeft. Het is niet minder aannemelijk den inzet van de belasting in zoo'n geval te rekenen vanaf het moment, waarop de geheele vleugel in het remousveld terecht is gekomen. Op deze basis echter zou de „quasi-stationnaire” kromme in fig. 16

Het resultaat is vervat in fig. 20 en in de daaruit afgeleide fig. 21, welke  $\Lambda_{\max}$  geeft als functie van  $s_g$  met  $C$  als parameter. In de laatste figuur zijn tevens twee uit fig. 19 overgenomen krommen aangebracht, die gelden voor het remousveld met overgangsgebied.

De belangrijkste en wellicht niet verwachte conclusie is, dat het kort aanhouden der stoorsnelheid in het gebied van de remousgolf eerst een verlagenden invloed van eenige beteekenis op de belasting heeft, als de golf in een zéér smal gebied van de vliegbaan is samengedrongen. Reeds vanaf  $s_g = 10$ , dus reeds vanaf een „golfengte” ( $2s_g$ ) ten bedrage van slechts 10 vleugelkoorden (d.i. van 20—40 m) bereikt de grootste belasting nagenoeg het maximum, dat wordt gevonden, wanneer de storende strooming onveranderd aanhoudt na het bereiken van zijn grootste waarde. Vanaf  $s_g = 15$  kan het verschil tusschen beide maxima onvoorwaardelijk geheel worden verwaarloosd.

Verder treedt in — of ten deele eigenlijk na — een remousgolf ook een negatieve belasting op. Deze komt overeen met een neerwaarts gerichte versnelling langs de topas, dus met een vertraging

der opwaartsche snelheid. De wijze, waarop dit verschijnsel tot stand komt is zoo doorzichtig, dat een toelichting overbodig is. In absolute waarde blijkt deze negatieve belasting volgens fig. 21 altijd aanmerkelijk kleiner te blijven dan de grootste positieve belasting. Dientengevolge is zij relatief onbelangrijk.

Het feit, dat de grootste belasting in een remousgolf alleen met uitzondering van in werkelijkheid vermoedelijk zelden voorkomende zeer kleine golf-lengten nauwelijks verschilt van het maximum, dat

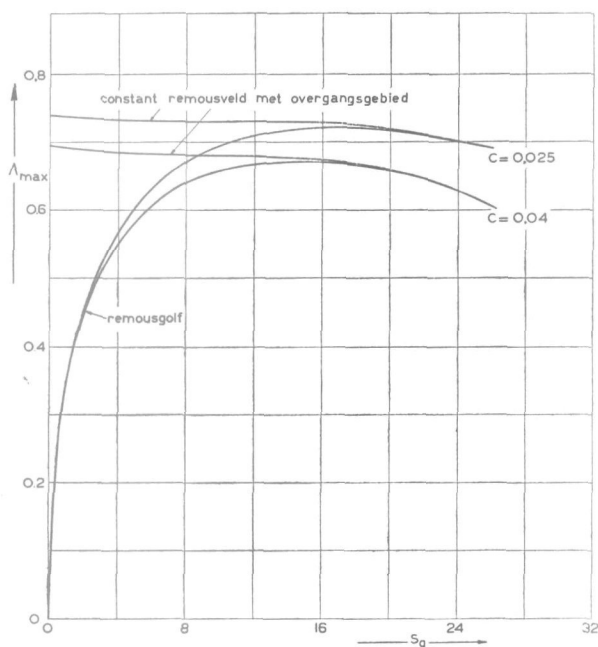


Fig. 21.

wordt bereikt in een remousveld met overgangsgebied, maakt het toelaatbaar, de remousgolf in den vervolge als apart te onderzoeken geval buiten beschouwing te laten. Tevens wordt de verwachting versterkt, dat de theorie, die is opgebouwd op de in punt 03.1 ontwikkelde grondslagen, een succesvolle algemeene toepassing op remousbelastingen zal kunnen vinden. De maxima der belasting worden immers door de zoojuist verkregen uitkomst nog verder dan aanvankelijk kon worden vermoed losgemaakt van de *details* der stoorsnelheidsverdeling, die nooit volledig door een theorie omvat kunnen worden.

#### 07. De invloed van de draaiingen van het vliegtuig om zijn dwarsas op de belasting.

Het onderzoek heeft thans het stadium bereikt, waarin een begin gemaakt kan worden met de ontwikkeling van berekeningen, die ook de draaiingen om de dwarsas in aanmerking nemen, welke door de remous worden veroorzaakt. Daarmede zal het onderzoek tevens de in punt 03 op algemeene overwegingen uitgewerkte richtlijnen volledig omvatten.

De door de genoemde draaiing gevormde graad van vrijheid van het vliegtuig maakt het noodig aan de tot nu toe gebruikte bewegingsvergelijking

een tweede toe te voegen, n.l. de vergelijking, die het evenwicht der momenten om de dwarsas van het vliegtuig formuleert. Bij de afleiding van deze vergelijking en bij de afleiding der wijzigingen, die in de eerste bewegingsvergelijking moeten worden aangebracht, kan men zich volgens punt 03.5 op het standpunt stellen, dat de langshelling, die tengevolge van de draaiing ontstaat, binnen het baan-interval dat moet worden onderzocht, gering blijft.

07.1. De beweging van het vliegtuig wordt betrokken op een coördinatenstelsel, dat vast aan het vliegtuig is verbonden en dat dus de draaiing daarvan mede uitvoert. De richting van de Z-as wordt zoodanig gekozen, dat deze as in de aanvankelijk stationnaire, horizontale en rechtlijnige vlucht verticaal is. De coördinaat  $s$  langs de vliegbaan bepaalt — evenals in de vorige berekening — de plaats van den vleugelneus. Het grensvlak van het remousvlak snijdt de vliegbaan in het punt  $s = 0$ .

Dan geldt

a. voor  $s \leq 0$

$$0 = -mg + Z_0$$

$$0 = M_0$$

b. voor  $s \geq 0$

$$m(\dot{w} + U\omega) = -mg + Z_0 + Z_r$$

$$B\dot{\omega} = M_0 + M_r = M_r.$$

Hierin is

$Z_0$  de Z-component van de in de stationnaire vlucht aanwezige luchtkrachtresultante;

$M_0$  het moment om de dwarsas van de in de stationnaire vlucht aanwezige luchtkrachten;

$Z_r$  de Z-component van de door de remousstrooming veroorzaakte wijziging van de resulterende luchtkracht;

$M_r$  de door de remousstrooming veroorzaakte verandering van het moment der luchtkrachten om de dwarsas;

$\omega$  de hoeksnelheid van de draaiing om de dwarsas (dus voor  $s = 0$ ;  $\omega = 0$ );

$B$  het traagheidsmoment om de dwarsas van het vliegtuig.

Uit deze vergelijkingen volgt

$$m(\dot{w} + U\omega) = Z_r; \quad s \geq 0 \quad (07.01)$$

$$B\dot{\omega} = M_r; \quad s \geq 0 \quad (07.02)$$

Natuurlijk worden ter bepaling van  $Z_r$ , als vroeger, alléén de krachten op den vleugel in aanmerking genomen. Bovendien worden de uiterst kleine invloeden, die de hoeksnelheid  $\omega$  en de hoekversnelling  $\dot{\omega}$  op de draagkracht hebben, verwaarloosd. De hoekversnelling  $\dot{\omega}$  geeft feitelijk aanleiding tot het optreden van een term, welke een traagheidswerking van medegevoerde lucht voorstelt. Deze zou men door een toeslag op het traagheidsmoment in rekening kunnen brengen,

welke echter zoo klein is, dat zij iedere praktische beteekenis mist. De hoeksnelheid  $\omega$  veroorzaakt een dynamische verandering van den invalshoek, welke langs de koorde niet constant is (zij veroorzaakt de bekende „dynamische profielkromming”), doch die in verband met de ligging van de draais t.o.v. den vleugel, en in verband met de kleine waarden der optredende hoeksnelheid (die in het punt  $s = 0$  zelfs nog nul is) in ieder geval een slechts onbeteekenend effect op de draagkracht zal hebben.

Vermeerderd men de massa van den vleugel — als in punt 06 — weer met de massa van de lucht binnen den omschreven cylinder, dan kan voor  $Z_r$  met alleszins voldoende nauwkeurigheid volgens (06.11) en (06.16) worden geschreven

$$Z_r = F \cdot \frac{1}{2} \rho U \left[ -\frac{1}{2} k \int_0^s k_1(s-\sigma) \frac{dw}{d\sigma} d\sigma + \frac{1}{2} k \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma \right]. \quad (07.03)$$

Feitelijk dient men in den tweeden term tusschen de vierkante haken  $\frac{d(w_r \cos \theta)}{d\sigma}$  te schrijven in plaats van  $\frac{dw_r}{d\sigma}$ , daar de langshelling  $\theta$  echter gering blijft, kan de cosinus bij benadering één worden gesteld.

Volgens (07.01) en (07.03) geldt dus

$$m(\dot{w} + U\omega) = F \cdot \frac{1}{2} \rho U \left[ -\frac{1}{2} k \int_0^s k_1(s-\sigma) \frac{dw}{d\sigma} d\sigma + \frac{1}{2} k \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma \right]. \quad (07.04)$$

Het is misschien niet overbodig, aan deze vergelijking de onderstaande nadere toelichting te verbinden, omdat de formulering van op draaiende assen betrokken bewegingsvergelijkingen de in de term  $mU\omega$  vervatte kleine moeilijkheid bevat.

De formule (07.03) laat zien, dat de kracht  $Z_r$  een functie is van beide invalshoeken  $-\frac{w}{U}$  en  $\frac{w_r}{U}$ . Zij kan afkortend in den vorm

$$Z_r = f\left(-\frac{w}{U}\right) + f^*\left(\frac{w_r}{U}\right)$$

worden geschreven. Nu had men de beweging ook kunnen betrekken op een assenkruis, dat weliswaar met het vliegtuig meebeweegt, doch zonder draaien, zoodat de Z-as verticaal blijft, als zij eenmaal zoo is aangenomen. Is  $w_1$  de component van de snelheid langs de nieuwe verticale as, dan gaat de hoek  $-\frac{w}{U}$  volgens fig. 22 bij benadering over in

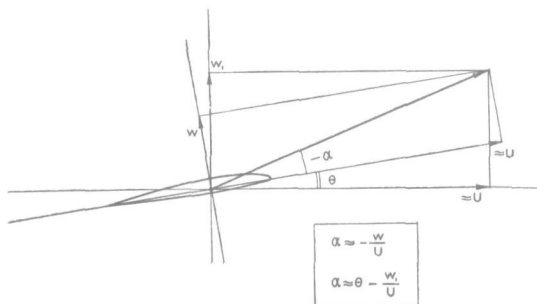


Fig. 22.

den hoek  $\theta - \frac{w_1}{U}$ . In de aangehouden benadering wordt het evenwicht der verticale krachten dus voorgesteld door de vergelijking

$$m\dot{w}_1 = f\left(\theta - \frac{w_1}{U}\right) + f^*\left(\frac{w_r}{U}\right). \quad (07.05)$$

Volgens fig. 22 geldt echter

$$\frac{w}{U} \approx \frac{w_1}{U} - \theta; \text{ dus } w_1 = w + U\theta$$

en dientengevolge is ook

$$\dot{w}_1 = \dot{w} + U\dot{\theta} = \dot{w} + U\omega. \quad (07.05a)$$

Substitueert men dit in (07.05), dan ontstaat de vergelijking

$$m(\dot{w} + U\omega) = f\left(-\frac{w}{U}\right) + f^*\left(\frac{w_r}{U}\right)$$

die met (07.04) volledig overeenstemt.

Vervang in (07.04)

$$\frac{d}{dt} \text{ door } \frac{U}{l} \frac{d}{ds}$$

en voer de constante  $C$ , gedefinieerd door (05.08) in. Het resultaat is

$$\begin{aligned} \frac{dw}{ds} + \frac{1}{2} C \int_0^s k_1(s-\sigma) \cdot \frac{dw}{d\sigma} \cdot d\sigma + \\ + l\omega = \frac{1}{2} C \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \cdot \frac{dw_r}{d\sigma} \cdot d\sigma. \end{aligned} \quad (07.06)$$

07.2. Een analoge uitwerking van de tweede bewegingsvergelijking vergt een analyse van het moment  $M_r$ . Dit moment wordt in 4 deelen  $M_1$  .....  $M_4$  gesplitst:

- $M_1$  = de wijziging van het moment (om de dwarsas) tengevolge van de verandering van de luchtkrachten op den vleugel;
- $M_2$  = de wijziging van het moment tengevolge van de verandering van de luchtkrachten op het horizontale staartvlak, echter slechts voor zoover deze verband houdt met de verstoring van de beweging van het vliegtuig;
- $M_3$  = de wijziging van het moment tengevolge van de verandering van de luchtkrachten op het horizontale staartvlak, echter slechts voor zoover deze direct wordt veroorzaakt door de neerstrooming;
- $M_4$  = de wijziging van het moment tengevolge van de verandering van de luchtkrachten op het horizontale staartvlak, echter alleen voor zoover deze verband houdt met de neerstrooming achter den vleugel.

In deze splitsing ontbreken 2 effecten, die moeilijk mathematisch te omschrijven zijn en die daarom terecht of ten onrechte moeten worden verwaarloosd. Dit zijn de gevolgen van de verandering van de luchtkrachten op den romp en van de verandering van den slipstroominvloed op de horizontale staartvlakken.

Het moment  $M_1$ .

De door (07.03) voorgestelde verandering van de draagkracht op den vleugel grijpt volgens de aerodynamische theorie aan in het punt, dat op

$$M_3 = -\beta l \cdot F_s \cdot \frac{1}{2} \rho U \cdot \frac{1}{2} k_s \cdot \int_0^s k_2^* (\gamma s - \gamma \sigma) \cdot \frac{dw_r(\sigma - \beta)}{d\sigma} \cdot d\sigma \quad (07.09)$$

ongeveer  $\frac{1}{4}$  van de koorde achter den neus van den vleugel ligt. Men zal daarom voor  $M_1$  kunnen schrijven (vergelijk ook (07.01)) :

$$M_1 = \varepsilon l Z_r = \varepsilon l m (\dot{w} + U\omega). \quad (07.07)$$

Hierin is  $\varepsilon l$  de X-coördinaat van het aangrijpingspunt van  $Z_r$ . De parameter  $\varepsilon$  is dus in theorie uitsluitend afhankelijk van de ligging van het zwaartepunt van het geheele vliegtuig, omdat de oorsprong van het coördinatenstelsel daarin wordt gelegd. Daar de uiterste liggingen van het zwaartepunt die toelaatbaar zijn, slechts zeer zelden meer dan 15 % van de koorde uit elkaar liggen, bedraagt het variatie-interval van  $\varepsilon$  hoogstens 0,3.

Het moment  $M_2$ .

Zij  $\beta l$  de (normaal positief te rekenen) afstand van het drukpunt van het horizontale staartvlak tot het zwaartepunt van het vliegtuig, dan kan de opwaartse snelheid bij het horizontale staartvlak, veroorzaakt door de beweging van het vliegtuig, gelijk worden gesteld aan

$$w_s = w - \beta l \omega.$$

Deze snelheid kan geacht worden een verandering van den invalshoek aan het horizontale staartvlak te veroorzaken ten bedrage:

$$\Delta\alpha_s = -\frac{w - \beta l \omega}{U}.$$

De hieraan verbonden verandering van de draagkracht op het horizontale staartvlak zal worden ontleend aan de eenvoudige formule der stationnaire theorie

$$\Delta Z_s = -F_s \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot k_s \cdot \frac{w - \beta l \omega}{U}, \quad (07.08)$$

waarin  $F_s$  het oppervlak van het horizontale staartvlak is en  $k_s$  de parameter  $\frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$  van het staartvlak.

In het gegeven geval is deze reeds herhaaldelijk te onnauwkeurig gebleken formule bruikbaar, omdat

1°. de invalshoek  $\Delta\alpha_s$  altijd geleidelijk verandert, waardoor het instationnaire effect aanmerkelijk terugloopt (men denke aan de

snelle convergentie der iteratieve oplossing van de vergelijking (06.17)) ;

2°. de koorde van het horizontale staartvlak altijd belangrijk kleiner is dan de vleugelkoorde, waardoor de vertraging der krachtinstelling bij het horizontale staartvlak veel kleiner is dan bij den vleugel.

Het moment  $M_3$ .

Voor het moment  $M_3$  kan met zeer bevredigende nauwkeurigheid worden geschreven

waarin

$$\gamma = \frac{t}{t_s} \quad (07.10)$$

de verhouding is van de koorden van vleugel en horizontaal staartvlak. De functie  $w_r(s)$  geeft immers de stoorsnelheid ter plaatse van den neus van den vleugel. Daar men den afstand van den vleugelneus tot den neus van het horizontale staartvlak wel gelijk aan  $\beta l$  kan stellen, bedraagt de stoorsnelheid bij den neus van het horizontale staartvlak

$$[w_r(s)]_{s \rightarrow s - \beta} = w_r(s - \beta).$$

Het moment  $M_4$ .

De bepaling van dit moment vergt een berekening van de neerstrooming ter plaatse van het horizontale staartvlak. Bij de ontwikkeling van deze berekening stuit men op de moeilijkheid, dat geen afgesloten instationnaire aerodynamische theorie beschikbaar is voor den vleugel van eindige afmetingen. Deze moeilijkheid kan worden opgelost door de berekening te baseeren op den vereenvoudigden vorm der wervelverdeling over vleugel en zog, die in het stationnaire geval overgaat in den bekenden enkelvoudigen hoefijzerwervel. Daar deze voorstelling der wervelconfiguratie in het stationnaire geval ter berekening van de neerstrooming bij de staartvlakken tamelijk bruikbaar is gebleken, kan deze oplossing aanvaardbaar worden geacht.

Nu strooming en circulatie niet stationnaire zijn, dient het beeld van den hoefijzerwervel als volgt te worden gegeneraliseerd.

De vleugel wordt onveranderd vervangen door een enkelen werveldraad (gebonden wervel) met een lengte gelijk aan  $2b'$ , waarin  $b'$  wat kleiner dan  $b$  wordt genomen. Deze werveldraad kan in de kwartkoordlijn van den werkelijke vleugel worden gelegd. Haar sterkte kan — net als in de stationnaire theorie — worden ontleend aan de formule

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta Z}{\rho U \cdot 2b'}. \quad (07.11)$$

Zij varieert dus op precies dezelfde wijze als  $\Delta Z$ . Daar de totale rotatie in het vloeistofveld volgens een bekende stelling der hydrodynamica onveran-

derlijk is moet bij iedere wijziging van  $\Delta\Gamma$  een tegengesteld draaiende vrije wervel in het zog achterblijven. Het geheele zog kan dus geacht worden te bestaan uit een vlak van werveldraden, die alle evenwijdig aan den vleugelwervel zijn en die een lengte hebben, welke voor alle werveldraden gelijk aan  $2b'$  is. Deze wervels moeten, omdat alle werveldraden uiteindelijk tot gesloten figuren moeten kunnen worden gecombineerd, vervolgens in de uiteinden door „sleepende wervels” met den vleugelwervel zijn verbonden (fig. 23).

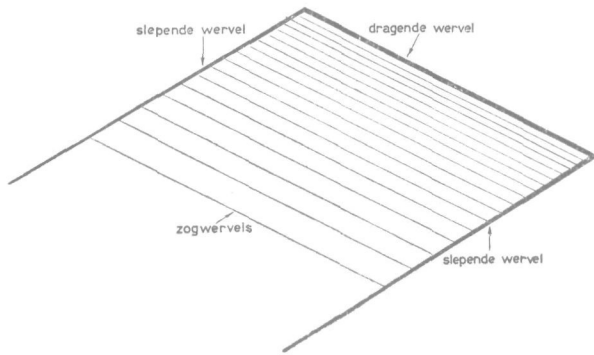


Fig. 23.

Het is duidelijk, dat men in vervolg hierop de geheele configuratie der wervels, die zijn ontstaan na het oogenblik, waarop de neus van den vleugel het grensvlak van het remousveld passeerde, in rechthoekwervels kan ontbinden. (De hoefijzerwervel, die oorspronkelijk aanwezig was, kan buiten beschouwing worden gelaten, omdat alleen de veranderingen der wervelverdeling van belang zijn, die direct of indirect door de remous worden veroorzaakt). Een verandering  $d\Gamma = \frac{d\Gamma}{ds} ds$  van de totale circulatie om den vleugel, die tot stand komt in het punt  $s = s_1$  van de baan, geeft immers aanleiding tot de vorming van een vrijen wervel in dat punt met de sterkte

$$- \frac{d\Gamma}{ds} ds.$$

Deze vrije wervel blijft in het zog achter, terwijl de gebonden wervel door den vleugel wordt meegevoerd. Is de vleugel in het punt  $s = s_2$  aangekomen, dan is dus een rechthoekwervel ontstaan met de afmetingen  $2b'$  en  $(s_2 - s_1)l$  en de sterkte

$$\left| d\Gamma \right| = \left| \left( \frac{d\Gamma}{ds} ds \right)_{s=s_1} \right|.$$

Vervolgens wordt aangenomen, dat alleen de neerstrooming in het punt

$$x = \beta l ; z = hl \quad (07.12)$$

den invalshoek bepaalt, die door de neerstrooming ter plaatse van het horizontale staartvlak wordt geïnduceerd. De keuze  $x = \beta l$  behoeft niet te worden toegelicht. Hieraan is de  $z$ -coördinaat  $hl$  toegevoegd om het punt, waarvoor de neerstrooming wordt bepaald, buiten het vlak van het zog te houden, dat met het XY-vlak zal worden ge-

identificeerd. Dit is gewenscht, niet zoozeer omdat de staartvlakken zich in werkelijkheid inderdaad buiten het zog bevinden, als wel ter vermindering van een kleine — in principe onbelangrijke — moeilijkheid in de berekening<sup>1)</sup>. Het is te verwachten, dat de waarde van  $h$ , mits

$$h \ll \beta \quad \text{en} \quad h \ll \frac{b'}{l} \quad (07.13)$$

wordt genomen, de einduitkomsten nauwelijks zal beïnvloeden.

De eerste stap der berekening bestaat uit de bepaling van de neerstrooming, die in het punt (07.12) door één der rechthoekwervels, welke het wervelveld samenstellen, wordt geïnduceerd. De grondslag hiervoor levert de formule van Biot en Savart

$$dv = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} d\zeta$$

waarin notaties zijn gebruikt, die door fig. 24 worden vastgelegd. Eenvoudigheidshalve wordt de vleugelwervel in de dwarsas van het vliegtuig gelegd. De positieve richtingen der coördinaatassen worden genomen, zooals in fig. 24 is aangegeven.

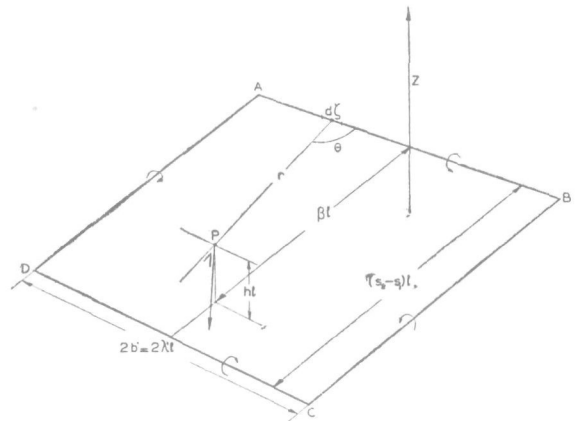


Fig. 24.

Naar de aanwijzingen van fig. 25 kan voor de

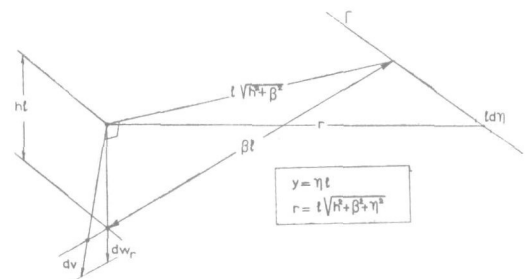


Fig. 25.

snelheid, die het stuk  $AB$  van den rechthoekwervel induceert, worden geschreven

<sup>1)</sup> Veroorzaakt door de oneindig groote inductie, die een zogwervel in het punt (07.12) met  $z = 0$  te voorschijn zou roepen op het moment, dat zij dit punt passeert.

$$(w_n)_{AB} = - \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\lambda'}^{+\lambda'} \frac{l \sqrt{h^2 + \beta^2}}{l \sqrt{h^2 + \beta^2 + \eta^2}} \cdot \frac{1}{l^2 (h^2 + \beta^2 + \eta^2)} \cdot \frac{l\beta}{l \sqrt{h^2 + \beta^2}} \cdot l d\eta$$

$\sin \theta$ 
 $1/r^2$ 
 $\cos(dv; -dw_n)$

of

$$(w_n)_{AB} = - \frac{\Gamma}{4\pi} \cdot \frac{\beta}{l} \cdot \int_{-\lambda'}^{+\lambda'} \frac{d\eta}{(h^2 + \beta^2 + \eta^2)^{3/2}} = \frac{-2\lambda'}{(h^2 + \beta^2) \sqrt{h^2 + \beta^2 + \lambda'^2}} \cdot \frac{\Gamma\beta}{4\pi l} \quad (07.14)$$

Op analoge wijze geeft het stuk *BC* van den wervel

$$(w_n)_{BC} = - \frac{\Gamma\lambda'}{4\pi l} \frac{1}{h^2 + \lambda'^2} \left( \frac{\beta}{\sqrt{h^2 + \beta^2 + \lambda'^2}} + \frac{s_2 - s_1 - \beta}{\sqrt{h^2 + \lambda'^2 + (s_2 - s_1 - \beta)^2}} \right) \quad (07.15)$$

Het stuk *AD* induceert een even groote snelheid

$$(w_n)_{AD} = (w_n)_{BC} \quad (07.16)$$

Tenslotte geeft het stuk *CD*

$$(w_n)_{CD} = - \frac{\Gamma(s_2 - s_1 - \beta)}{4\pi l} \frac{2\lambda'}{[h^2 + (s_2 - s_1 - \beta)^2] \cdot \sqrt{h^2 + (s_2 - s_1 - \beta)^2 + \lambda'^2}} \quad (07.17)$$

Door optelling van (07.14), (07.15), (07.16) en (07.17) volgt voor de totale geïnduceerde snelheid in de Z-richting

De totale verandering van de neerstroaming bij de staartvlakken, welke optreedt na het oogenblik, waarop het vliegtuig door de remousstoring werd

$$(w_n)_{ABCD} = - \frac{\Gamma}{4\pi l} \left[ \frac{2\lambda'\beta}{\sqrt{h^2 + \beta^2 + \lambda'^2}} \cdot \frac{2h^2 + \beta^2 + \lambda'^2}{(h^2 + \beta^2)(h^2 + \lambda'^2)} + \frac{2\lambda'(s_2 - s_1 - \beta)}{\sqrt{h^2 + \lambda'^2 + (s_2 - s_1 - \beta)^2}} \cdot \frac{2h^2 + \lambda'^2 + (s_2 - s_1 - \beta)^2}{(h^2 + \lambda'^2)[h^2 + (s_2 - s_1 - \beta)^2]} \right]$$

Deze uitkomst kan nu op grond van (07.13) eenigermate worden vereenvoudigd. Men bedenke echter, dat  $h$  niet onder alle omstandigheden klein is in vergelijking met  $s_2 - s_1 - \beta$ . Het resultaat luidt

getroffen, vindt men met behulp van (07.19) door te sommeren over alle rechthoekwervels, die zijn ontstaan sinds de vleugelneus het punt  $s=0$  van de vliegbaan passeerde.

$$(w_n)_{ABCD} = - \frac{\Gamma}{2\pi\lambda'l} \left[ \frac{\sqrt{\beta^2 + \lambda'^2}}{\beta} + \frac{(s_2 - s_1 - \beta) \sqrt{\lambda'^2 + (s_2 - s_1 - \beta)^2}}{h^2 + (s_2 - s_1 - \beta)^2} \right] \quad (07.18)$$

Deze uitkomst kan in den vorm

$$(w_n)_{ABCD} = - \frac{\Gamma}{2\pi\lambda'l} \cdot N(s_2 - s_1) \quad (07.19)$$

worden geschreven. De functie  $N(s)$  wordt dan gedefinieerd door de formule

$$N(s) = \frac{\sqrt{\beta^2 + \lambda'^2}}{\beta} + \frac{(s - \beta) \sqrt{\lambda'^2 + (s - \beta)^2}}{h^2 + (s - \beta)^2} \quad (07.20)$$

Volgens (07.01) en (07.11) geldt

$$\Delta\Gamma = \frac{m\Delta(\dot{w} + U\omega)}{\rho U \cdot 2b'} = \frac{m}{2\rho U \lambda' l} \frac{d(\dot{w} + U\omega)}{ds} \Delta s,$$

of, wegens

$$\dot{w} = \frac{U}{l} \frac{dw}{ds},$$

in iets anderen vorm

$$d\Gamma = \frac{m}{2\rho\lambda'l^2} \left( \frac{d^2w}{ds^2} + l \frac{dw}{ds} \right) ds \quad (07.21)$$



Deze formule bepaalt de sterkte der rechthoekwervels. Substitueert men haar in (07.19) voor  $\Gamma$ , dan volgt door integratie van de totale neerstrooming ter plaatse van het horizontale staartvlak

$$w_n = - \frac{m}{4 \pi \rho \lambda'^2 l^3} \int_0^s N(s-\sigma) \left( \frac{d^2 w}{d\sigma^2} + l \frac{d\omega}{d\sigma} \right) d\sigma. \quad (07.22)$$

Met deze uitkomst kan het moment  $M_4$  zonder moeite worden opgeschreven. Men kan daarbij, evenals vroeger bij  $M_2$ , zonder veel bezwaar gebruik maken van de „stationnaire” formule voor de draagkracht. Het resultaat luidt dan

$$M_4 = \frac{F_s U G \beta k_s}{8 \pi \lambda'^2 l^2 g} \cdot \int_0^s N(s-\sigma) \left( \frac{d^2 w}{d\sigma^2} + l \frac{d\omega}{d\sigma} \right) d\sigma. \quad (07.23)$$

07.3. Terugkeerend naar de formule (07.02) wordt

$$\dot{\omega} \text{ door } \frac{U}{l} \frac{d\omega}{d\sigma} \text{ en } B \text{ door } m j^2 l^2 \quad (07.24)$$

vervangen ( $j l =$  traagheidsstraal) en voor  $M_r$  de som  $M_1 + M_2 + M_3 + M_4$  ingevuld.

$$m j^2 U \frac{d\omega}{d\sigma} = \varepsilon m U \left( \frac{d w}{d\sigma} + l \omega \right) + \beta l F_s \cdot \frac{1}{2} \rho U k_s (w - \beta l \omega) - \beta l F_s \cdot \frac{1}{2} \rho U \cdot \frac{1}{2} k_s \int_0^s k_2^* (\gamma s - \gamma \sigma) \frac{d w_r (\sigma - \beta)}{d\sigma} d\sigma + \frac{F_s U G \beta k_s}{8 \pi \lambda'^2 l^2 g} \int_0^s N(s-\sigma) \left( \frac{d^2 w}{d\sigma^2} + l \frac{d\omega}{d\sigma} \right) d\sigma. \quad (07.25)$$

Stel ter afkorting

$$\frac{\frac{1}{2} \rho g k_s l F_s}{G} \cdot \frac{\beta^2}{j^2} = \frac{\frac{1}{2} \rho g k l F}{G} \cdot \frac{k_s F_s}{k F} \cdot \frac{\beta^2}{j^2} = C \cdot \frac{k_s F_s}{k F} \cdot \frac{\beta^2}{j^2} = C_s \quad (07.26)$$

en

$$\beta \cdot \frac{k_s F_s}{8 \pi \lambda'^2 j^2 l^2} = E. \quad (07.27)$$

Dan kan i.p.v. (07.25) worden geschreven

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\sigma} + \left( C_s - \frac{\varepsilon}{j^2} \right) \omega - E \int_0^s N(s-\sigma) \cdot \frac{d\omega}{d\sigma} d\sigma - \frac{\varepsilon}{j^2 l} \frac{d w}{d\sigma} - \frac{C_s}{\beta l} w - \\ - \frac{E}{l} \int_0^s N(s-\sigma) \cdot \frac{d^2 w}{d\sigma^2} d\sigma = - \frac{C_s}{2 \beta l} \int_0^s k_2^* (\gamma s - \gamma \sigma) \frac{d w_r (\sigma - \beta)}{d\sigma} d\sigma. \end{aligned} \quad (07.28)$$

Deze vergelijking moet worden toegevoegd aan de hieronder herhaalde vergelijking (07.06)

$$\frac{d w}{d\sigma} + \frac{1}{2} C \int_0^s k_1 (s-\sigma) \frac{d w}{d\sigma} d\sigma + l \omega = \frac{1}{2} C \int_0^s k_2^* (s-\sigma) \frac{d w_r}{d\sigma} d\sigma. \quad (07.29)$$

De vergelijkingen (07.28); (07.29) vormen een stelsel van twee simultane integro-differentiaalvergelijkingen. Deze langs directen weg op te los-

sen is moeilijk en leidt tot zeer bewerkelijke bereijferingen. Het is daarom zeer wenschelijk te trachten, tot eenige vereenvoudiging te komen. Daartoe is de navolgende werkwijze gekozen:

De twee termen in (07.28), die den parameter  $E$  als factor bevatten, worden samengenomen, waarna voor

$$\frac{1}{l} \frac{d^2 w}{d\sigma^2} + \frac{d\omega}{d\sigma},$$

welke som volgens de vergelijking (07.05a) gelijk is aan  $\frac{1}{l} \cdot \frac{d^2 w_1}{d\sigma^2}$ , de oplossing wordt ingevuld, die bepaald werd in punt 06. Dit is geoorloofd te achten, omdat  $w_1$  de verticale snelheid is, welke in punt 06 is berekend onder verwaarlozing van

de draaiing om de dwarsas en waarvoor daar diensengevolge een benaderingsoplossing werd verkregen. Deze is goed genoeg om in het relatief kleine deel van het totale moment, gevormd door het neerstroomingsmoment, te worden ingevoerd.

In volledigen vorm ziet de in (07.28) aan te brengen wijziging er dus zóó uit

$$E \int_0^s N(s-\sigma) \left( \frac{1}{l} \frac{d^2 w}{d\sigma^2} + \frac{d\omega}{d\sigma} \right) \rightarrow \frac{E}{l} \int_0^s N(s-\sigma) \frac{d^2 w_1}{d\sigma^2} d\sigma$$

waarin  $w_1$  een bekende functie van  $s$  is, die aan punt 06 kan worden ontleend. Het stelsel der grondvergelijkingen kan dan als volgt worden samengevat

$$\frac{d\omega}{ds} + \left(C_s - \frac{\varepsilon}{j^2}\right) \omega - \frac{\varepsilon}{j^2 l} \frac{dw}{ds} - \frac{C_s}{\beta l} w = G_1(s), \quad (07.30)$$

$$\frac{dw}{ds} + \frac{1}{2} C \int_0^s k_1(s-\sigma) \frac{dw}{d\sigma} d\sigma + l \cdot \omega = lG_2(s) \quad (07.31)$$

met in de rechter leden de twee volgende bekende functies van  $s$

$$G_1(s) = -\frac{C_s}{2\beta l} \int_0^s k_2^*(\gamma s - \gamma \sigma) \cdot \frac{dw_r(\sigma - \beta)}{d\sigma} \cdot d\sigma + \frac{E}{l} \int_0^s N(s-\sigma) \frac{d^2 w_1}{d\sigma^2} d\sigma, \quad (07.32)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\varepsilon}{j^2} & a_4 &= 0,3455 + \frac{1}{2} C \\ a_2 &= \frac{C_s}{\beta} & a_5 &= 0,01365 + 0,2808 C \\ a_3 &= C_s - \frac{\varepsilon}{j^2} & a_6 &= 0,01365 C. \end{aligned}$$

$$G_2(s) = \frac{C}{2l} \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \cdot \frac{dw_r}{d\sigma} \cdot d\sigma. \quad (07.33)$$

07.4. De vergelijkingen (07.30); (07.31) zijn toegankelijk voor een behandeling met de transformatie van Laplace. Daar de versnellingen  $\frac{dw}{ds}$  en  $\frac{d\omega}{ds}$  worden gevraagd, stelle men

$$L \left\{ \frac{1}{l} \frac{dw}{ds} \right\} = X \quad L \left\{ \frac{d\omega}{ds} \right\} = Y, \quad (07.34)$$

dus

$$L \{ w \} = L \left\{ \int_0^s \frac{dw}{d\sigma} d\sigma \right\} = l \frac{X}{u};$$

$$L(\omega) = L \left\{ \int_0^s \frac{d\omega}{d\sigma} d\sigma \right\} = \frac{Y}{u}.$$

Er komt

$$-\frac{\varepsilon}{j^2} X - \frac{C_s}{\beta} \frac{X}{u} + Y + \left(C_s - \frac{\varepsilon}{j^2}\right) \frac{Y}{u} = L \{ G_1 \} \quad (07.35)$$

$$X + \frac{1}{2} CL \{ k_1 \} \cdot X + \frac{Y}{u} = L \{ G_2 \}. \quad (07.36)$$

Voor de functie  $k_1$  wordt nu de reeds eerder gebruikte zeer goede benadering weer ingevoerd, die wordt gegeven door de formule (06.26). Dan geldt

$$L \{ k_1 \} = \frac{2}{u} - \frac{0,33}{u + 0,0455} - \frac{0,67}{u + 0,300}.$$

Mede met behulp hiervan kan men i.p.v. (07.35); (07.36) schrijven

$$-(a_1 u + a_2) X + (u + a_3) Y = u L \{ G_1 \} \quad (07.37)$$

$$(u^3 + a_4 u^2 + a_5 u + a_6) X + (u^2 + a_7 u + a_8) Y = (u^3 + a_7 u^2 + a_8 u) L \{ G_2 \} \quad (07.38)$$

met

$$\left. \begin{aligned} a_7 &= 0,3455 \\ a_8 &= 0,01365 \end{aligned} \right\} \quad (07.39)$$

Uit (07.37); (07.38) wordt opgelost

$$X = -\frac{u(u^2 + a_7 u + a_8) L \{ G_1 \} - u(u^3 + c_0 u^2 + c_1 u + c_2) L \{ G_2 \}}{u^4 + c_3 u^3 + c_4 u^2 + c_5 u + c_6} \quad (07.40)$$

$$Y = \frac{u(u^3 + a_4 u^2 + a_5 u + a_6) L \{ G_1 \} + u(c_7 u^3 + c_8 u^2 + c_9 u + c_{10}) L \{ G_2 \}}{u^4 + c_3 u^3 + c_4 u^2 + c_5 u + c_6}. \quad (07.41)$$

Hierin zijn de navolgende nieuwe afkortingen verwerkt

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= a_3 + a_7 = 0,3455 + C_s - \frac{\varepsilon}{j^2} \\ c_1 &= a_8 + a_3 a_7 = 0,01365 + 0,3455 \left(C_s - \frac{\varepsilon}{j^2}\right) \\ c_2 &= a_3 a_8 = 0,01365 \left(C_s - \frac{\varepsilon}{j^2}\right) \\ c_3 &= a_1 + a_3 + a_4 = 0,3455 + \frac{1}{2} C + C_s \\ c_4 &= a_1 a_7 + a_2 + a_5 + a_3 a_4 = 0,01365 + 0,3455 C_s + \\ &\quad + C \left(0,2808 + \frac{1}{2} C_s - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{j^2}\right) + \frac{C_s}{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (07.42)$$

$$\left. \begin{aligned}
 c_5 &= a_2 a_7 + a_6 + a_3 a_5 + a_1 a_8 = 0,01365 C_s + C \left( 0,01365 + 0,2808 C_s - 0,2808 \frac{\varepsilon}{j^2} \right) + 0,3455 \frac{C_s}{\beta} \\
 c_6 &= a_3 a_6 + a_2 a_8 = 0,01365 \frac{C_s}{\beta} + 0,01365 C \left( C_s - \frac{\varepsilon}{j^2} \right) \\
 c_7 &= a_1 = \frac{\varepsilon}{j^2} \\
 c_8 &= a_1 a_7 + a_2 = \frac{C_s}{\beta} + 0,3455 \frac{\varepsilon}{j^2} \\
 c_9 &= a_1 a_8 + a_2 a_7 = 0,01365 \frac{\varepsilon}{j^2} + 0,3455 \frac{C_s}{\beta} \\
 c_{10} &= a_2 a_8 = 0,01365 \frac{C_s}{\beta} .
 \end{aligned} \right\} (07.42)$$

Stel nu dat de algebraïsche vergelijking

$$f(u) = u^4 + c_3 u^3 + c_4 u^2 + c_5 u + c_6 = 0 \quad (07.43)$$

de wortels  $-u_1, -u_2, -u_3$  en  $-u_4$  heeft. Dan geldt

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{u(u^2 + a_7 u + a_8)}{f(u)} &= \frac{u g_1(u)}{f(u)} = \sum_1^4 \left[ \frac{g_1(-u_i)}{f'(-u_i)} - \frac{u_i g_1(-u_i)}{(u + u_i) f'(-u_i)} \right] \\
 \frac{u(u^3 + c_0 u^2 + c_1 u + c_2)}{f(u)} &= \frac{u g_2(u)}{f(u)} = \sum_1^4 \left[ \frac{g_2(-u_i)}{f'(-u_i)} - \frac{u_i g_2(-u_i)}{(u + u_i) f'(-u_i)} \right] \\
 \frac{u(u^3 + a_4 u^2 + a_5 u + a_6)}{f(u)} &= \frac{u g_3(u)}{f(u)} = \sum_1^4 \left[ \frac{g_3(-u_i)}{f'(-u_i)} - \frac{u_i g_3(-u_i)}{(u + u_i) f'(-u_i)} \right] \\
 \frac{u(c_7 u^3 + c_8 u^2 + c_9 u + c_{10})}{f(u)} &= \frac{u g_4(u)}{f(u)} = \sum_1^4 \left[ \frac{g_4(-u_i)}{f'(-u_i)} - \frac{u_i g_4(-u_i)}{(u + u_i) f'(-u_i)} \right] .
 \end{aligned} \right\} (07.44)$$

Nu is

$$\begin{aligned}
 g_1(-u_i) &= u_i^2 - a_7 u_i + a_8 \\
 g_2(-u_i) &= -u_i^3 + c_0 u_i^2 - c_1 u_i + c_2 \\
 g_3(-u_i) &= -u_i^3 + a_4 u_i^2 - a_5 u_i + a_6 \\
 g_4(-u_i) &= -c_7 u_i^3 + c_8 u_i^2 - c_9 u_i + c_{10} \\
 f'(-u_i) &= -4 u_i^3 + 3 c_3 u_i^2 - 2 c_4 u_i + c_5 .
 \end{aligned}$$

Het kost dan verder geen moeite, de oplossingen (07.40); (07.41) in den vorm

$$\begin{aligned}
 X &= -L \{ G_1 \} \sum_1^4 A_{1i} \left( 1 - \frac{u_i}{u + u_i} \right) + \\
 &+ L \{ G_2 \} \sum_1^4 A_{2i} \left( 1 - \frac{u_i}{u + u_i} \right) \quad (07.45)
 \end{aligned}$$

Voert men dus de 12 constanten

$$\begin{aligned}
 A_{1i} &= \frac{u_i^2 - a_7 u_i + a_8}{-4 u_i^3 + 3 c_3 u_i^2 - 2 c_4 u_i + c_5} \\
 A_{2i} &= \frac{-u_i^3 + c_0 u_i^2 - c_1 u_i + c_2}{-4 u_i^3 + 3 c_3 u_i^2 - 2 c_4 u_i + c_5} \\
 &\quad i=1 \dots \dots 4 \\
 A_{3i} &= \frac{-u_i^3 + a_4 u_i^2 - a_5 u_i + a_6}{-4 u_i^3 + 3 c_3 u_i^2 - 2 c_4 u_i + c_5} \\
 A_{4i} &= \frac{-c_7 u_i^3 + c_8 u_i^2 - c_9 u_i + c_{10}}{-4 u_i^3 + 3 c_3 u_i^2 - 2 c_4 u_i + c_5}
 \end{aligned}$$

in, dan kunnen de rechterleden der uitdrukkingen (07.44) in den vorm

$$\sum_1^4 A_{ni} \left( 1 - \frac{u_i}{u + u_i} \right)$$

worden geschreven, als voor de eerste vergelijking  $n=1$  wordt genomen, voor de tweede  $n=2$ , voor de derde  $n=3$  en voor de vierde  $n=4$ .

$$\begin{aligned}
 Y &= L \{ G_1 \} \sum_1^4 A_{3i} \left( 1 - \frac{u_i}{u + u_i} \right) + \\
 &+ L \{ G_2 \} \sum_1^4 A_{4i} \left( 1 - \frac{u_i}{u + u_i} \right) \quad (07.46)
 \end{aligned}$$

te brengen.

Nu is

$$\begin{aligned}
 \frac{u_i}{u + u_i} L \{ G \} &= u_i L \left\{ e^{-u_i s} \right\} \cdot L \{ G \} = \\
 &= u_i L \left\{ \int_0^s e^{-u_i(s-\sigma)} G(\sigma) d\sigma \right\} ,
 \end{aligned}$$

zoodat de toepassing der reciproke transformatie op (07.45) en (07.46) de volgende uitkomst oplevert

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \frac{dw}{ds} = & -G_1(s) \sum_1^4 A_{1i} + \sum_1^4 A_{1i} u_i e^{-u_i s} \int_0^s e^{u_i \sigma} G_1(\sigma) d\sigma + \\ & + G_2(s) \sum_1^4 A_{2i} - \sum_1^4 A_{2i} u_i e^{-u_i s} \int_0^s e^{u_i \sigma} G_2(\sigma) d\sigma, \end{aligned} \quad (07.47)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{ds} = & G_1(s) \sum_1^4 A_{3i} - \sum_1^4 A_{3i} u_i e^{-u_i s} \int_0^s e^{u_i \sigma} G_1(\sigma) d\sigma + \\ & + G_2(s) \sum_1^4 A_{4i} - \sum_1^4 A_{4i} u_i e^{-u_i s} \int_0^s e^{u_i \sigma} G_2(\sigma) d\sigma. \end{aligned} \quad (07.48)$$

Tot besluit kan men aan  $\frac{dw}{ds}$  een dimensieloozen belastingscoëfficiënt

$$\Lambda_z = \frac{1}{w_0 C} \frac{dw}{ds}, \quad (07.49)$$

ontlenen, die *niet* met den vroeger gebruikten coëfficiënt  $\Lambda$  overeenkomt, omdat de laatste evenredig is met de totale versnelling in de richting

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega = & H_1(s) \sum_1^4 A_{3i} - H_2(s) \sum_1^4 A_{4i} - \\ & - \sum_1^4 A_{3i} u_i e^{-u_i s} \int_0^s e^{u_i \sigma} H_1(\sigma) d\sigma - \\ & - \sum_1^4 A_{4i} u_i e^{-u_i s} \int_0^s e^{u_i \sigma} H_2(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (07.43)$$

$$H_1(s) = -\frac{C_s}{2\beta C} \int_0^s k_2^*(\gamma s - \gamma \sigma) \cdot \frac{1}{w_0} \frac{dw_r(\sigma - \beta)}{d\sigma} \cdot d\sigma + E \int_0^s N(s - \sigma) \frac{d\Lambda_1}{d\sigma} d\sigma \quad (07.54)$$

van de topas, terwijl  $\frac{dw}{ds}$  in het gegeven geval alleen de lineaire versnelling definieert, waarbij men de centrifugaalversnelling moet optellen om de totale versnelling te krijgen.

De hoekversnelling  $\frac{d\omega}{ds}$ , kan eveneens door een dimensieloozen coëfficiënt worden gegeven, waaraan de formule

$$\Lambda_\omega = \frac{l}{w_0 C} \frac{d\omega}{ds} \quad (07.50)$$

een geschikte definitie geeft. Daar de totale versnelling in de richting van de topas wordt gegeven door

$$\dot{w} + U_\omega = \frac{U}{l} \frac{dw}{ds} + U_\omega = \frac{U}{l} \left( \frac{dw}{ds} + l\omega \right)$$

bestaat tusschen den eerder gebruikten coëfficiënt  $\Lambda$  en de nieuwe coëfficiënten  $\Lambda_z$  en  $\Lambda_\omega$  het verband

$$\Lambda = \frac{1}{w_0 C} \left( \frac{dw}{ds} + l\omega \right) = \Lambda_z + \int_0^s \Lambda_\omega d\sigma. \quad (07.51)$$

Men heeft volgens (07.47) en (07.48), mede op (07.32) en (07.33) teruggrijpend

$$\begin{aligned} \Lambda_z = & -H_1(s) \sum_1^4 A_{1i} + H_2(s) \sum_1^4 A_{2i} + \\ & + \sum_1^4 A_{1i} u_i e^{-u_i s} \int_0^s e^{u_i \sigma} H_1(\sigma) d\sigma - \\ & - \sum_1^4 A_{2i} u_i e^{-u_i s} \int_0^s e^{u_i \sigma} H_2(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (07.52)$$

Uiteindelijk wordt  $\Lambda$  met behulp van (07.51) uit  $\Lambda_z$  en  $\Lambda_\omega$  afgeleid.

07.5. Het zal nauwelijks gezegd behoeven te worden, dat de numerieke uitwerking der zoojuist afgeleide formules nog altijd tot zeer omvangrijke becijferingen leidt. Dit maakt het noodzakelijk, het aantal numeriek volledig te onderzoeken gevallen zooveel mogelijk te beperken. Dit komt daarop neer, dat aan de in de formules aanwezige parameters zooveel mogelijk vaste, een „standaardvliegtuig” typeerende waarden moeten worden toegekend.

Al eerder is gebleken, dat dit niet voor alle parameters mogelijk is. Zoo straks zal blijken, dat behalve de parameter  $C$ , alleen de parameter  $\varepsilon$  onvermijdelijk als te variëren grootte moet worden behandeld. Deze parameter legt n.l. de zwaartepuntsligging van het vliegtuig ten opzichte van het kwart-koorde punt van den vleugel vast en daarmee de grootte der statische langsstabiliteit, welke vanzelfsprekend een beslissenden invloed heeft op de grootte der draaiingen, welke de remous te voorschijn roept.

Als derde variabele parameter treedt in de formules de breedte  $s_j$  van het overganggebied van het remousveld op.

De lijst der in de numerieke berekening ingevoerde standaardwaarden van de vaste parameters luidt als volgt

1.  $k = 4,25$  (vergelijk (05.04)).
2.  $k_s = 2,50$  Een aanknoopingspunt levert de formule (05.02). Wanneer de slankheid  $\lambda_s$  van het horizontale staartvlak op de vaak aangetroffen waarde 3 wordt gesteld, geeft die formule:  $k_s \approx 3,4$ . Het is echter gewenscht (en gebruikelijk) deze waarde te vermenigvuldigen met een factor voor het nuttig effect van het horizontale staartvlak, welke wellicht op 0,7 à 0,8 kan worden gesteld. Daarom is aangenomen  $k_s \approx 0,75 \times 3,4$ .
3.  $\frac{F_s}{F} = 0,16$  Deze waarde werd met slechts kleine spreiding bij een groot aantal vliegtuigen aangetroffen.
4.  $\beta = 5,5$  Als voren.
5.  $\lambda = 7,0$  Als voren.
6.  $j = 1,8$  Als voren. De aangetroffen spreiding is grooter dan in de voorgaande gevallen, doch niet zóó, dat men niet met dit gemiddelde zou kunnen rekenen.
7.  $\lambda' = 0,9 \lambda = 6,3$ . De waarde van  $\lambda'$  hangt af van de circulatieverdeling van den vleugel. In aanmerking komen waarden tusschen 0,80  $\lambda$  en 0,95  $\lambda$ .
8.  $h = 0,50$  Deze parameter treedt alleen in de  $N$ -functie op (zie (07.20)). Het is niet te verwachten, dat de waarde ervan veel invloed op de te verkrijgen uitkomsten zal hebben.
9.  $t/t_s = \gamma = 2,0$ .

Hieraan kan worden toegevoegd, dat het voor de parameters  $C$  en  $\varepsilon$  in aanmerking komende variatie-interval ongeveer wordt gegeven door

$$0,01 < C < 0,06; \\ -0,3 < \varepsilon < 0,5.$$

Ten aanzien van de grenzen van  $\varepsilon$  moge het volgende worden opgemerkt.

De zwaartepuntsligging van het vliegtuig heeft een beslissenden invloed op de statische langsstabiliteit van het vliegtuig. Deze kan kwantitatief worden gegeven door de afgeleide  $\frac{\partial c_m}{\partial \alpha}$  van den momentencoefficiënt  $c_m$ . Wanneer de bijdrage van de luchtkrachten op den romp en de slipstroominvloed — zooals dat ook in de zoojuist beëindigde berekening geschiedde — worden verwaarloosd, neemt het verband tusschen de afgeleide  $\frac{\partial c_m}{\partial \alpha}$  en den parameter  $\varepsilon$  wiskundig een eenvoudigen vorm aan. Men vindt deze betrekking gemakkelijk door het verschil der momenten om de dwarsas te vormen, welke in twee naburige stationnaire vliegtuigtoestanden optreden.

Hiervoor geldt (de beteekenis van  $\xi$  wordt zoo dadelijk vermeld)

$$\Delta M = F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot l \frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \Delta \alpha = \\ F \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot k \Delta \alpha \cdot \varepsilon l - F_s \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot k_s \Delta \alpha \cdot \beta l + \\ F_s \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot k_s \xi \Delta \alpha \cdot \beta l. \quad (07.56)$$

In het rechterlid stelt de eerste term de bijdrage van den vleugel in de verandering van het moment voor en de laatste twee de bijdragen van het horizontale staartvlak, gesplitst in een eerste stuk, direct teweeg gebracht door de verandering van den (meetkundigen) invalshoek en een tweede stuk, veroorzaakt door de verandering van de neerstroaming achter den vleugel. De invalshoek, die de neerstroaming bij het horizontale staartvlak induceert, is gelijkgesteld aan  $\xi \Delta \alpha$ . De factor  $\xi$  kan worden afgeleid uit een neerstroomberekening, die in zijn elementairsten vorm op de hoefijzervoorstelling van het stationnaire wervelveld kan worden betrokken. Aan de uitvoerige en meer nauwkeurige berekening, die door W. Richter zijn uitgevoerd (lit. 30) ontleent men voor dezen factor getallenwaarden, die tusschen 0,3 en 0,7 liggen. Voor een algemeene beschouwing lijkt 0,5 een aanvaardbare waarde. Daarmede volgt uit (07.56)

$$\varepsilon k = \frac{\partial c_m}{\partial \alpha} + 0,5 \frac{F_s}{F} \beta k_s.$$

Worden hierin de eerder genoemde standaardwaarden voor  $k$ ,  $k_s$ ,  $\beta$  en  $\frac{F_s}{F}$  ingevuld, dan krijgt men

$$\varepsilon = \frac{1}{4,25} \frac{\partial c_m}{\partial \alpha} + 0,26.$$

De algebraïsch grootste waarde, die voor  $\frac{\partial c_m}{\partial \alpha}$  wordt toegelaten, bedraagt nul. In dat geval is de stabiliteit van het vliegtuig juist indifferent. Men vindt dus:  $\varepsilon_{\max} \approx 0,26$ . Daar de grootste verschillen der zwaartepuntsligging, die in de practijk worden toegelaten, slechts uiterst zelden de 15 % van de koorde overschrijden ( $\Delta \varepsilon = 0,3$ ), ware  $\varepsilon_{\min}$  op ca.  $-0,04$  te stellen. Dat zou overeenkomen met

$$\frac{\partial c_m}{\partial \alpha} \approx -0,93.$$

In dien toestand zou het vliegtuig statisch zéér stabiel zijn.

Als deze getallen kwantitatief correct waren, zou het beladingsvoorschrift van een vliegtuig altijd zoo moeten zijn ingericht, dat het zwaartepunt tusschen

$$0,25 - \frac{1}{2} \cdot 0,04 \rightarrow 23 \% \quad \text{en} \quad 0,25 + \frac{1}{2} \cdot 0,26 \rightarrow 38 \%$$

van de gemiddelde aerodynamische koorde (achter den neus) terecht komt. Het mag bekend worden geacht, dat het interval, waarbinnen het zwaartepunt moet liggen, in werkelijkheid in zijn geheel een 5—7 % meer naar voren ligt. Het verschil moet worden geweten aan de vereenvoudigingen en benaderingen, welke bij de afleiding van de bovenstaande schattingen werden aangebracht.

Daar bij de berekening van de belasting in wezen van dezelfde vereenvoudigingen en benaderingen gebruik is gemaakt, zou men kunnen besluiten, dat de nauwkeurigheid der einduitkomsten globaal de variatie, die een zwaartepuntsverschuiving van een vijftal procenten ( $\Delta\varepsilon=0,1$ ) daarin veroorzaakt, niet veel zal overtreffen.

In de numerieke berekeningen is  $\varepsilon$  tengevolge van een misverstand gevarieerd tusschen de grenzen 0 en +0,4, zoodat bij de in de practijk vaak aangetroffen meer vóórlijke zwaartepuntsliggingen geen voorbeeld is uitgewerkt. Het blijkt echter, dat de voornaamste uitkomsten op zoo regelmatige wijze van de zwaartepuntsligging afhangen, dat een extrapolatie naar de gewenschte omstandigheden zonder bezwaar mogelijk lijkt. Het werd daarom overbodig geacht, het zeer tijdroovende cijferwerk uit te breiden.

Met de hiervoor genoemde getallen wordt

$$C_s = 0,879 C \quad \text{vergelijk (07.26)}$$

$$\frac{\varepsilon}{j^2} = 0,309 \varepsilon$$

$$\frac{C_s}{\beta} = 0,160 C$$

en, uitgaande van (07.27)

$$\begin{aligned} E &= \beta \frac{k_s F_s}{8 \pi \lambda'^2 j^2 l^2} = \beta \frac{k_s}{8 \pi j^2} \cdot \frac{F_s}{F} \cdot \frac{F}{\lambda'^2 l^2} = \\ &= \beta \frac{k_s}{8 \pi j^2} \cdot \frac{F_s}{F} \cdot \frac{4}{\lambda'^2} = 0,01907. \end{aligned}$$

Verder, volgens (07.20)

$$\begin{aligned} N(s) &= 1,52 + \\ &+ \frac{(s-5,5) \sqrt{39,69 + (s-5,5)^2}}{0,25 + (s-5,5)^2} \quad (07.57) \end{aligned}$$

een functie, die door fig. 26 wordt geïllustreerd.

Wat de waarden, toe te kennen aan de parameters  $\varepsilon$ ,  $C$  en  $s_g$  betreft werden de volgende combinaties onderzocht:

C	0,02						0,05							
	0,2	0,3	0,4	0	0,2	0,3	0,4	0	0,2	0,3	0,4			
$s_g$	25	10	25	0	10	25	0	25	10	25	25	0	10	25

Van dit programma mag worden verwacht, dat het bij een zoo klein mogelijk aantal bijzondere gevallen nog juist tot voldoende overzichtelijke resultaten zal leiden.

07.7. De eerste stap bestaat uit de berekening van de functies  $H_1(s)$  en  $H_2(s)$ . De laatste kan voor  $s_g=10$  en  $s_g=25$  direct aan punt 06 worden ontleend, want

$$H_2(s) \equiv \frac{1}{2 w_0} f(s),$$

waarin  $f(s)$  door (06.23) wordt gegeven. De

functie  $f(s)$  was door numerieke integratie bepaald.

Voor  $s_g=0$  wordt

$$H_2(s) \equiv \frac{1}{2} k_2^*(s).$$

Ook deze functie is reeds bekend.

De functie  $H_1(s)$  bestaat uit twee stukken. Het eerste stuk

$$-\frac{1}{2\beta} \frac{C_s}{C} \int_0^s k_2^*(\gamma s - \gamma \sigma) \cdot \frac{1}{w_0} \frac{dw_r(\sigma - \beta)}{d\sigma} d\sigma$$

kan net als  $H_2(s)$  door numerieke integratie worden bepaald. Voor  $s_g=0$  wordt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\beta} \frac{C_s}{C} \int_0^s k_2^*(\gamma s - \gamma \sigma) \frac{1}{w_0} \frac{dw_r(\sigma - \beta)}{d\sigma} d\sigma &\equiv \\ &\equiv -\frac{1}{2\beta} \frac{C_s}{C} k_2^*(\gamma s - \gamma \beta). \end{aligned}$$

Het tweede stuk van  $H_1(s)$ ,

$$E \int_0^s N(s - \sigma) \frac{d\Lambda_1}{d\sigma} d\sigma, \quad (07.58)$$

is minder geschikt voor een berekening door numerieke integratie, i.v.m. het karakter voor de functie  $N(s)$  (zie fig. 26). Bovendien is in no. 06  $\frac{d\Lambda_1}{ds}$  niet apart berekend, en dit alsnog te doen kost

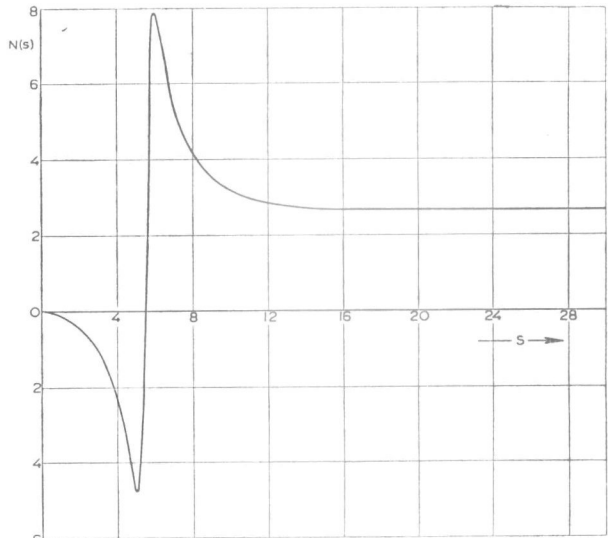


Fig. 26.

extra rekenwerk. Daarom wordt (07.58) eerst partieel geïntegreerd

$$\begin{aligned} E \int_0^s N(s - \sigma) \frac{d\Lambda_1}{d\sigma} d\sigma &= E \left[ N(s - \sigma) \Lambda_1 \right]_0^s + \\ &+ E \int_0^s \frac{dN(s - \sigma)}{d(s - \sigma)} \Lambda_1 d\sigma = \\ &= E \int_0^s N'(s - \sigma) \Lambda_1 d\sigma, \quad (07.59) \end{aligned}$$

want  $\Lambda_1(0) = 0$  en  $N(0) = 0$ .

Berekent men nu uit (07.57) de afgeleide  $N'(s)$ , dan vindt men (met een onbetekenende verwaarloozing)

$$N'(s) = \frac{39,19 [0,25 - (s - 5,5)^2]}{[0,25 + (s - 5,5)^2]^2 \cdot \sqrt{39,69 + (s - 5,5)^2}} \quad (07.60)$$

en deze functie vertoont het grillige verloop, dat door fig. 27 wordt gegeven. Voor numerieke be-

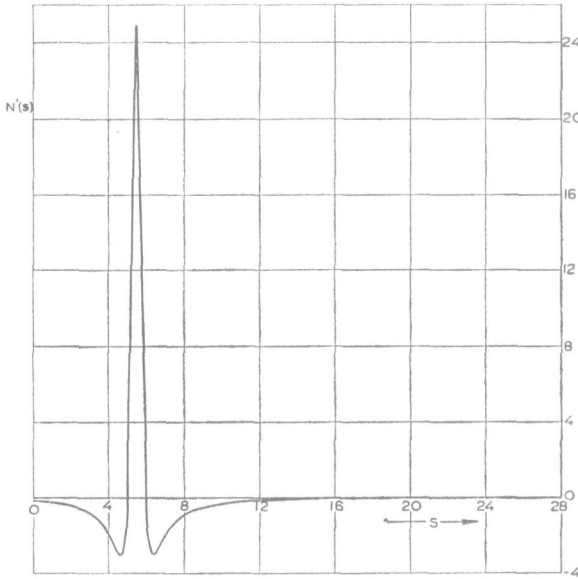


Fig. 27.

werkingen is zij oogenschijnlijk nog minder geschikt dan de functie  $N(s)$  zelf. Nu kan echter het integratiegebied  $0 \rightarrow s$

— wanneer  $s > \beta + \frac{1}{2}$  worden verdeeld in de

$$\text{stukken } \int_0^{s-\beta-\frac{1}{2}} + \int_{s-\beta-\frac{1}{2}}^{s-\beta+\frac{1}{2}} + \int_{s-\beta+\frac{1}{2}}^s.$$

— wanneer  $\beta - \frac{1}{2} < s < \beta + \frac{1}{2}$  worden verdeeld

$$\text{in de stukken } \int_0^{s-\beta+\frac{1}{2}} + \int_{s-\beta+\frac{1}{2}}^s.$$

— wanneer  $s < \beta - \frac{1}{2}$  onverdeeld worden gelaten.

Dan blijkt uit fig. 27 en de figuren 13 t/m 16, welke de  $\Lambda_1$ -krommen bevatten, dat de numerieke uitwerking der deelintegralen

$$\int_0^{s-\beta-\frac{1}{2}} \quad \text{en} \quad \int_{s-\beta+\frac{1}{2}}^s$$

geen moeilijkheden oplevert. Alleen de integraal

$$\int_{s-\beta-\frac{1}{2}}^{s-\beta+\frac{1}{2}} \quad \text{of} \quad \int_0^{s-\beta+\frac{1}{2}}$$

kan niet zoo gemakkelijk op directe wijze worden berekend.

Nu varieert de functie  $\Lambda_1$  in het kleine interval

$s - \beta - \frac{1}{2} \rightarrow s - \beta + \frac{1}{2}$  bijna nooit erg veel, zoodat men met zeer goede nauwkeurigheid kan schrijven

$$\Lambda_1(\sigma) = \Lambda_1(s - \beta) + (\sigma - s + \beta) \Lambda_1'(s - \beta);$$

$$s - \beta - \frac{1}{2} < \sigma < s - \beta + \frac{1}{2}. \quad (07.61)$$

Op grond daarvan is

$$\int_{s-\beta-\frac{1}{2}}^{s-\beta+\frac{1}{2}} N'(s - \sigma) \Lambda_1 d\sigma =$$

$$= \Lambda_1(s - \beta) \int_{s-\beta-\frac{1}{2}}^{s-\beta+\frac{1}{2}} N'(s - \sigma) d\sigma +$$

$$+ \Lambda_1'(s - \beta) \int_{s-\beta-\frac{1}{2}}^{s-\beta+\frac{1}{2}} N'(s - \sigma) \cdot$$

$$(\sigma - s + \beta) d\sigma =$$

$$= -\Lambda_1(s - \beta) [N(\beta - \frac{1}{2}) - N(\beta + \frac{1}{2})] +$$

$$+ \frac{1}{2}$$

$$+ \Lambda_1'(s - \beta) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} N'(\beta - \zeta) \cdot \zeta \cdot d\zeta.$$

Doch volgens (07.60) is, daar  $\beta = 5,5$ ,

$$N'(\beta - \zeta) = \frac{39,19 (0,25 - \zeta^2)}{(0,25 + \zeta^2)^2 \cdot \sqrt{39,69 + \zeta^2}} \approx$$

$$\approx \frac{39,19}{\sqrt{39,69}} \frac{0,25 - \zeta^2}{(0,25 + \zeta^2)^2} \text{ als } -\frac{1}{2} < \zeta < +\frac{1}{2}.$$

Dan is echter

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} N'(\beta - \zeta) \cdot \zeta \cdot d\zeta \approx$$

$$\approx \frac{39,19}{2\sqrt{39,69}} \int_{\zeta=-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \frac{0,25 - \zeta^2}{(0,25 + \zeta^2)^2} d\zeta^2 = 0$$

en dus, met voldoende nauwkeurigheid,

$$\int_{s-\beta-\frac{1}{2}}^{s-\beta+\frac{1}{2}} N'(s - \sigma) \Lambda_1 d\sigma =$$

$$= -\Lambda_1(s - \beta) [N(\beta - \frac{1}{2}) - N(\beta + \frac{1}{2})]$$

$$= -\Lambda_1(s - \beta) [N(5) - N(6)];$$

$$s > \beta + \frac{1}{2} = 6. \quad (07.62)$$

On analoge wijze wordt

$$\int_0^{s-\beta+\frac{1}{2}} N'(s - \sigma) \Lambda_1 d\sigma =$$

$$= -\Lambda_1(s - \beta) \cdot \{ N(\beta - \frac{1}{2}) - N(s) \} +$$

$$+ \Lambda_1'(s - \beta) \int_{\beta-s}^{\frac{1}{2}} N'(\beta - \zeta) \cdot \zeta \cdot d\zeta.$$

Ditmaal volgt

$$\int_{\beta-s}^{\frac{1}{2}} N'(\beta-\zeta) \cdot \zeta \cdot d\zeta = \frac{39,19}{2\sqrt{39,69}} \int_{\zeta=\beta-s}^{\frac{1}{2}} \frac{-(\zeta^2 + 0,25 - 0,50)}{(\zeta^2 + 0,25)^2} d(\zeta^2 + 0,25) =$$

$$= 3,11 \left\{ \lg \frac{(\beta-s)^2 + 0,25}{0,50} + \frac{0,25 - (\beta-s)^2}{0,25 + (\beta-s)^2} \right\}. \quad (07.63)$$

Samenvattend gebruikt men ter berekening van

$$\int_0^s N(s-\sigma) \frac{d\Lambda_1}{d\sigma} d\sigma$$

dus de formules:

a. als  $s > \beta + \frac{1}{2}$

$$\int_0^s N(s-\sigma) \Lambda_1' d\sigma = \int_0^{s-\beta-\frac{1}{2}} N'(s-\sigma) \cdot \Lambda_1 \cdot d\sigma +$$

$$+ \int_{s-\beta+\frac{1}{2}}^s N'(s-\sigma) \cdot \Lambda_1 \cdot d\sigma -$$

$$- \Lambda_1(s-\beta) \cdot [N(5) - N(6)]. \quad (07.64)$$

b. als  $\beta - \frac{1}{2} < s < \beta + \frac{1}{2}$

$$\int_0^s N(s-\sigma) \Lambda_1' d\sigma = \int_0^{s-\beta+\frac{1}{2}} N'(s-\sigma) \cdot \Lambda_1 d\sigma -$$

$$- \Lambda_1(s-\beta) [N(5) - N(s)] + 3,11 \Lambda_1'(s-\beta) \cdot$$

$$\cdot \left[ \lg \frac{(\beta-s)^2 + 0,25}{0,50} + \frac{0,25 - (\beta-s)^2}{0,25 + (\beta-s)^2} \right] \quad (07.65)$$

In deze formule heeft voor  $\Lambda_1'$  niet een bijzonder nauwkeurige waarde te worden ingevuld.

c. als  $s < \beta - \frac{1}{2}$

$$\int_0^s N(s-\sigma) \cdot \Lambda_1' d\sigma = \int_0^s N'(s-\sigma) \cdot \Lambda_1 \cdot d\sigma. \quad (07.66)$$

### 07.8 Uitkomsten.

De uitkomsten, die de numerieke berekeningen hebben opgeleverd voor de belastingscoëfficiënten  $\Lambda$  en  $\Lambda_\omega$ , zijn samengevat in de figuren 28, 29 en 30. Men ziet direct <sup>1)</sup>, dat de lijnen, die het verband tusschen  $\Lambda$  en  $s$  aangeven, naar vorm en ligging niet veel verschillen van de overeenkomstige lijnen, die in punt 06 werden bepaald zonder met de draaiing om de dwarsas rekening te houden. Deze draaiing veroorzaakt dus, wat  $\Lambda$  betreft, niet veel meer dan kleine correcties. Men zal zich herinneren, dat hiervan in de berekening reeds gebruik is gemaakt, zonder dat toen de toelaatbaarheid daarvan afdoend kon worden beoordeeld.

Uit de lijnen (fig. 28, 29 en 30), die het verband tusschen  $\Lambda_\omega$  en  $s$  voorstellen, blijkt dat voor  $\varepsilon > 0$  aanvankelijk altijd positieve hoekver-

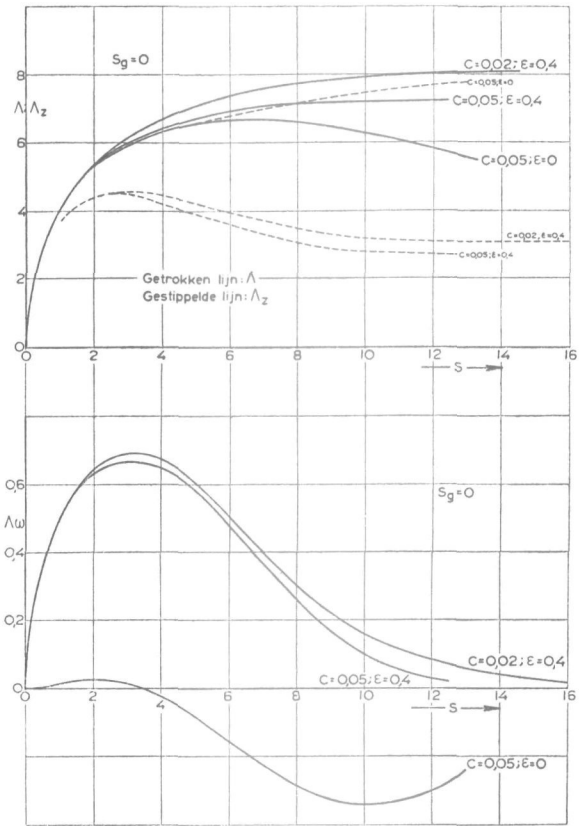


Fig. 28.

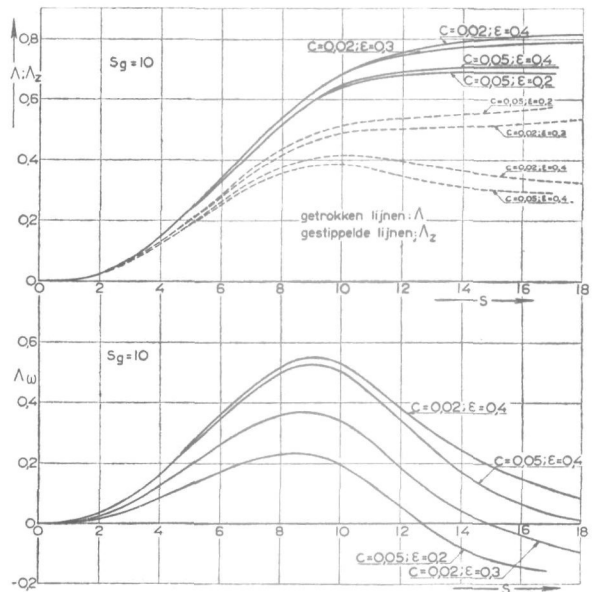


Fig. 29.

<sup>1)</sup> De  $\Lambda$ - en  $\Lambda_\omega$  schalen in fig. 28 en de  $\Lambda_\omega$  schaal in fig. 29 zijn abusievelijk met 10 vermenigvuldigd. (Verg. fig. 30, alwaar deze vergissing niet is gemaakt).

snellingen ontstaan, zoodat het vliegtuig in den beginne achterover wordt gedraaid. Gezien de achterlijke zwaartepuntligging was niet anders



te verwachten. De positieve hoekversnelling bereikt spoedig een grootste waarde, kennelijk tengevolge van het feit, dat even na den vleugel ook de staartvlakken in het remousveld terechtkomen.

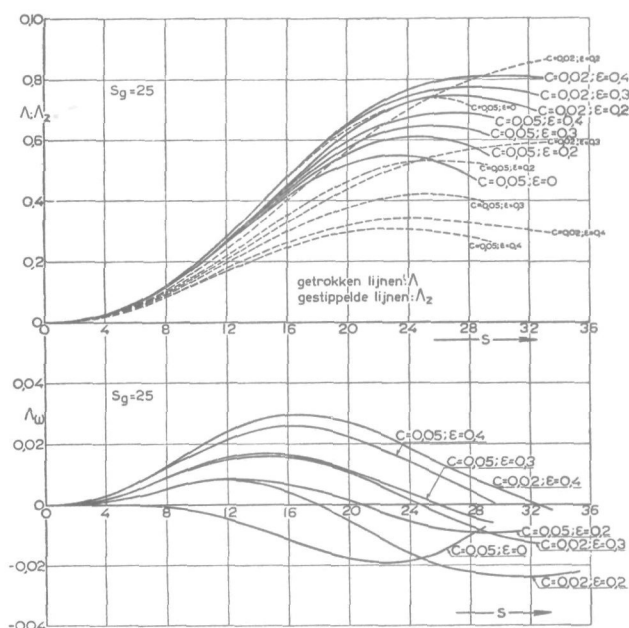


Fig. 30.

De vervolgens optredende afname van den coëfficiënt  $\Lambda_\omega$  zet zich in den regel voort tot negatieve waarden van  $\Lambda_\omega$ , hetgeen op een afremming van de draaiing wijst. Sommige lijnen wekken den indruk, dat de hoekversnelling later weer gaat toenemen, echter eerst op een oogenblik, dat niet zoo erg belangrijk meer is, omdat het eerst lang nadat  $\Lambda$  zijn maximum bereikte optreedt.

Wanneer  $\epsilon = 0$  is, zet de draaiing óók met een positieve hoekversnelling in. In dit geval blijft deze versnelling aanvankelijk relatief klein. Later treden negatieve waarden van  $\Lambda_\omega$  op. Het mag vanzelfsprekend worden genoemd, dat voor  $\epsilon < 0$  van den beginne af aan negatieve hoekversnellingen zullen optreden.

Een bijzonderheid, die de aandacht verdient, is dat de waarde, die de coëfficiënt  $\Lambda_\omega$  heeft op het moment, waarop de coëfficiënt  $\Lambda$  zijn maximum bereikt, in alle uitgewerkte gevallen relatief gering is.

Om eenigermate vertrouwd te raken met de maat, welke de coëfficiënt  $\Lambda_\omega$  voor de draaiingen om de dwarsas vormt, is het gewenscht enkele der verkregen getallen als volgt toe te lichten.

Ten eerste blijkt uit de figuren 28, 29 en 30, dat de orde van grootte van de hoekversnellingen, die in het onderzochte baantraject optreden, door de waarde 0,03 van den coëfficiënt  $\Lambda_\omega$  kan worden voorgesteld. Daar

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{U}{l} \frac{d\omega}{ds} = \frac{U}{l^2} w_0 C \left( \frac{l}{w_0 C} \frac{d\omega}{ds} \right) = \frac{U w_0}{l^2} C \Lambda_\omega$$

is, vindt men hierbij voor

$C = 0,03$ ;  $U = 100$  m/sec;  $w_0 = 10$  m/sec;  $l = 1,5$  m de hoekversnelling

$$\frac{d\omega}{dt} \sim 0,4 \frac{\text{rad}}{\text{sec}^2}. \quad (07.67)$$

Dit getal geeft de orde van grootte der hoekversnellingen weer, die door een hevigen remousstoot te voorschijn kunnen worden geroepen.

Voor de langshelling  $\theta$  geldt de formule

$$\theta = \int_0^t \omega dt = \int_0^t \int_0^t \dot{\omega} (dt)^2 = \frac{U w_0}{l^2} C \int_0^s \int_0^s \Lambda_\omega \frac{l^2 ds^2}{U^2}$$

of

$$\theta(s) = \frac{w_0}{U} \cdot C \cdot \int_0^s \int_0^s \Lambda_\omega (ds)^2. \quad (07.68)$$

De dubbele integraal is langs numerieken weg uitgerekend voor het verloop van  $\Lambda_\omega$ , dat in fig. 29 voor

$$C = 0,02; \epsilon = 0,4; s_g = 10$$

is weergegeven. Dit voorbeeld is gekozen, omdat er zeer groote waarden van  $\Lambda_\omega$  bij optreden. De uitkomst toont fig. 31. Hieruit leest men af, dat

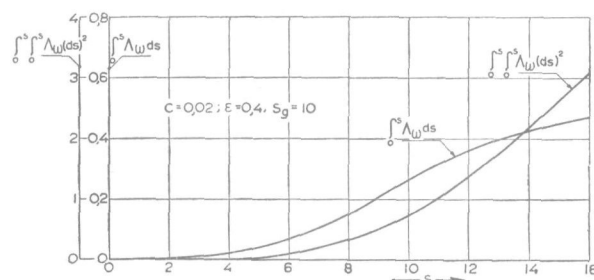


Fig. 31.

de waarde, die de dubbele integraal bereikt op het oogenblik, waarop de coëfficiënt  $\Lambda$  maximaal is, ongeveer 3 bedraagt. Daaruit volgt, dat de langshelling  $\theta$  in het uitgezochte voorbeeld ( $C = 0,02$ ) op dit oogenblik ongeveer gelijk aan  $\frac{6}{100}$  wordt

van den hoek  $\frac{w_0}{U}$ .

Daar de functie  $\Lambda_\omega$  volgens fig. 28, 29 en 30 bij constante waarden van  $\epsilon$  en  $s_g$  maar weinig door den parameter  $C$  wordt beïnvloed, kan de verandering van de langshelling volgens (07.68) in ruwe benadering evenredig worden gesteld met de waarde van  $C$ . Daaruit volgt, dat de verandering van de langshelling  $\theta$  voor de groote waarde 0,06 van  $C$  op het moment, waarop  $\Lambda$  maximaal is, tot ongeveer 18% van den hoek  $w_0/U$  zou kunnen oplopen. Hierbij dient echter te worden bedacht, dat een voorbeeld is gekozen, waarbij de zwaartepuntsligging zeer achterlijk is ( $\epsilon = 0,4$ ), zoo achterlijk, dat de vliegtuigtoestand zeker niet meer statisch stabiel zal zijn. In een meer normaal geval zullen de hellingsveranderingen daarom aanmerkelijk kleiner blijven.

Van primair belang is het gedrag van den coëfficiënt  $\Lambda$ . Tengevolge van het betrekkelijk kleine aantal numeriek onderzochte gevallen zal een volledig overzicht daarvan niet zonder drastische interpolaties en extrapolaties kunnen worden samengesteld. De aan de figuren 28, 29 en 30 ontleende uitkomsten, die daarvoor den grondslag moeten vormen, zijn in de onderstaande tabel samengevat.

Tabel van aan de berekeningen ontleende waarden van $\Lambda_{\max}$				
	$\varepsilon$	$s_g = 0$	$s_g = 10$	$s_g = 25$
$C = 0,02$	0	—	—	—
	0,2	—	—	0,748
	0,3	—	0,783	0,776
	0,4	0,815	0,812	0,808
$C = 0,05$	0	0,667	—	0,552
	0,2	—	0,692	0,608
	0,3	—	—	0,646
	0,4	0,726	0,712	0,689

Behalve deze getallen staan als richtlijn voor interpolaties tevens de uitkomsten ter beschikking, die werden verkregen in punt 06, waar de draaiing om de dwarsas niet in rekening was gebracht. Dit materiaal is verwerkt in de figuren 32, 33 en 34.

wordt de grootste belasting (zie de fig. 32 en 34) — voor zoover deze door den coëfficiënt  $\Lambda$  wordt bepaald — door de draaibaarheid om de dwarsas verhoogd, tenzij het overgangsgebied van het remousveld breed is ( $s_g = \text{ca } 25$ ). In dit laatste geval wordt reeds een kleine verlaging gevonden, als het zwaartepunt vlak achter het aerodynamisch centrum ligt ( $\varepsilon = 0$  tot hoogstens 0,1). Ligt het zwaartepunt vóór het aerodynamisch centrum, dan wordt de grootste belasting altijd verkleind.

Deze veranderingen blijven in het algemeen wel klein, doch zijn toch niet geheel zonder beteekenis. Zij zijn kennelijk nagenoeg onafhankelijk van den parameter  $C$  (de lijnen in fig. 34, die voor één-zelfde waarde van  $s_g$  gelden, zijn immers onderling nagenoeg evenwijdig).

Uit alle figuren volgt, dat de zwaartepuntsligging een grooter invloed krijgt, naarmate het remousveld een breeder overgangsgebied heeft. B.v. veroorzaakt een zwaartepuntsverplaatsing naar achteren over 5% van de koorde ( $\Delta\varepsilon = 0,1$ ) volgens fig. 33 een verhooging van den belastingscoëfficiënt, die voor  $s_g = 0$  globaal gelijk is aan 0,015, d.i. ongeveer 2%, en die voor  $s_g = 25$  tusschen 0,02 ( $\varepsilon \sim 0$ ) en 0,045 ( $\varepsilon \sim 0,35$ ) ligt, hetgeen met 3 tot 6% overeenkomt. Het feit, dat  $\frac{\Delta\Lambda}{\Delta\varepsilon}$  (volgens fig. 33) vooral voor grootere waarden van  $s_g$  toeneemt, naarmate  $\varepsilon$  grooter is, wijst erop dat achterlijke zwaartepuntsliggingen een toenemend ongunstigen invloed op de belasting hebben.

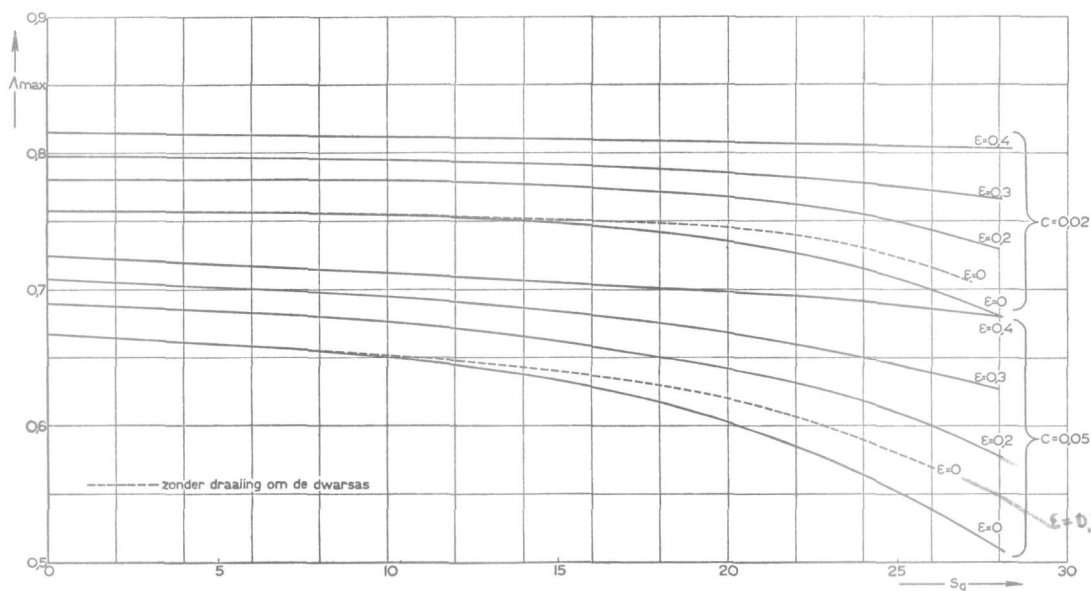


Fig. 32.

Deze figuren toonen, dat het maximum van den coëfficiënt  $\Lambda$  op zóó eenvoudige wijze van de parameters  $C$ ,  $\varepsilon$  en  $s_g$  afhangt, dat het beschikbare materiaal toereikend is voor de constructie van een volledig en nauwkeurig overzicht. Het lijkt overbodig, de interpolaties welke de figuren bevatten, nader toe te lichten. De meest markante conclusies zijn de navolgende:

Zoolang het zwaartepunt van het vliegtuig achter het aerodynamisch centrum van den vleugel ligt,

Tengevolge van het zeer regelmatige gedrag van de belastingsveranderingen, welke worden veroorzaakt door de draaiing om de dwarsas, kunnen de reeds in punt 06 vermelde conclusies aangaande den invloed van de breedte van het overgangsgebied en van de waarde van den parameter  $C$  onveranderd worden gehandhaafd. Hiertoe behoort b.v. de belangrijke uitkomst, dat het maximum van den coëfficiënt slechts weinig afhangt van de breedte van het overgangsgebied, mits dit smal

blijft. Aan deze omstandigheid dankt men het, dat het niet zoo erg is, wanneer het niet mocht gelukken, de representatieve waarde van  $s_g$  nauwkeurig vast te stellen.

Volledigheidshalve wordt eraan herinnerd, dat

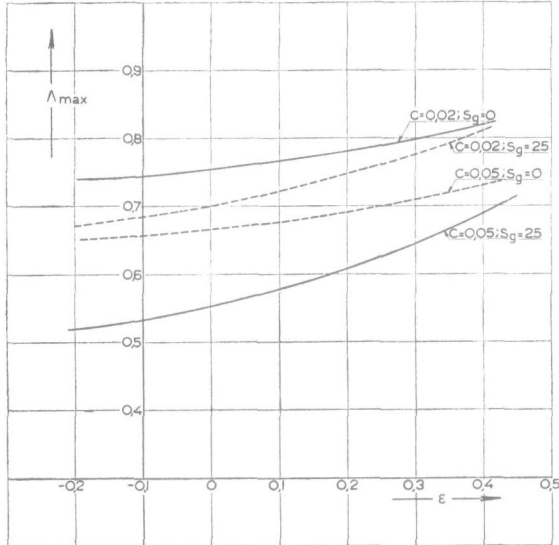


Fig. 33.

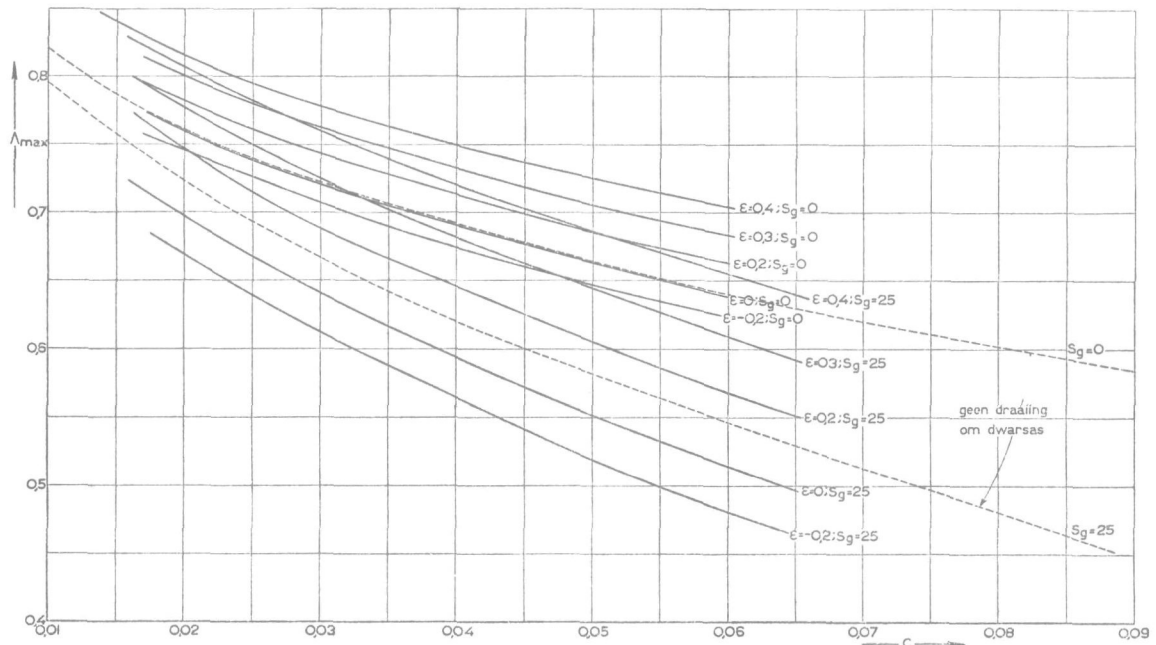


Fig. 34.

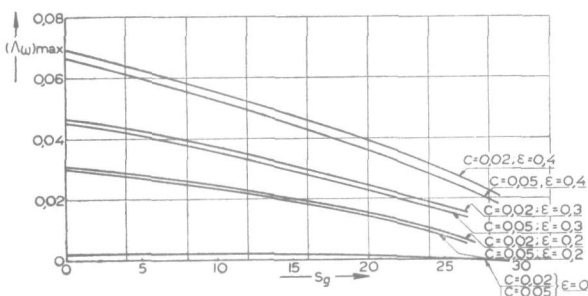


Fig. 35.

de uitkomsten voor de belasting, die onder inachtneming van de draaiing om de dwarsas zijn verkregen, mogelijk een onzekerheidsmarge bevatten, die de weerspiegeling is van de kleine afwijking, die bij de herleiding van de zwaartepuntsligging  $\epsilon$

tot den parameter  $\frac{\partial c_m}{\partial \alpha}$  der statische langsstabiliteit aan den dag trad. De beschouwingen welke werden vastgeknoot aan de formule (07.56) leiden tot het vermoeden, dat een kleine positieve correctie ( $\delta\epsilon \sim 0,1?$ ) op de werkelijke waarde van  $\epsilon$  iets nauwkeuriger uitkomsten zal opleveren. Deze correctie zou de berekende belasting in geringe mate verhoogen.

Er dient nog te worden onderzocht, welke richtlijnen te voorschijn komen voor het gedrag van de hoekversnelling, en vooral van de extreme waarden, welke deze vertoont. Vooreerst blijkt uit de figuren 28 t/m 30, dat de functie  $\Lambda_\omega$  zoowel maxima als minima heeft, doch dat de omvang der berekeningen van dien aard is, dat alleen het gedrag van de maxima met eenige volledigheid onderzocht kan worden<sup>1)</sup>. Het resultaat van het onderzoek is vervat in fig. 35. Hoewel in het gegeven geval geen richtsnoer voor interpolaties aan de in punt 06 opgenomen berekeningen kan worden ontleend, blijkt het gedrag van den

coëfficiënt  $\Lambda_\omega$  zoo eenvoudig te zijn, dat uit de weinige uitgewerkte gevallen een redelijk volledig en betrouwbaar overzicht voor de variatie van  $(\Lambda_\omega)_{max}$  kan worden afgeleid.

Het blijkt, dat  $(\Lambda_\omega)_{max}$  sterk afhangt van de zwaartepuntsligging  $\epsilon$  en van de breedte  $s_g$  van het overgangsgebied van het remousveld, en dat

<sup>1)</sup> Hier blijkt, dat het jammer is, dat geen gevallen met negatieve  $\epsilon$ -waarden zijn uitgewerkt. Erg belangrijk is dat echter niet, omdat grotere negatieve waarden van  $\epsilon$  praktisch toch slechts zelden zullen vóórkomen.

de waarde van  $C$  ditmaal van weinig beteekenis is, hetgeen daarop neerkomt (zie 07.50), dat de versnelling — dat is de belasting zelve<sup>1)</sup> — globaal evenredig is met de waarde van  $C$ . De grootste waarden van  $\Lambda_\omega$  worden bereikt, wanneer het zwaartepunt ver naar achteren ligt en wanneer het remousveld zeer steil aanloopt.

Er wordt nog even de aandacht op gevestigd, dat het maximum van den coëfficiënt  $\Lambda_\omega$  verdwijnt, wanneer  $\varepsilon=0$  wordt, en dat voor de negatieve waarde van  $\varepsilon$  niet onderzochte negatieve extremen beslissend zullen zijn.

Uit bij elkaar behorende waarden van  $\Lambda$  en  $\Lambda_\omega$  kan de verdeling van de versnelling in de richting van de topas over de lengte van het vliegtuig worden berekend.

Zij  $P$  een punt van de langsas, dat op een afstand  $\xi l$  achter het zwaartepunt van het vliegtuig ligt, dan geldt aldaar voor den bovengenoemden versnellingscomponent (vergelijk ook 07.51)

$$\begin{aligned} a(\xi) &= \dot{w} + U\dot{\omega} - \xi\dot{\omega} \\ &= \frac{U}{l} \frac{dw}{ds} + U\dot{\omega} - \xi \frac{U}{l} l \frac{d\omega}{ds} \\ &= \frac{U}{l} \cdot w_0 C \cdot \left[ \Lambda_\xi + \int_0^s \Lambda_\omega ds - \xi \Lambda_\omega \right] \\ &= \frac{U}{l} \cdot w_0 C \cdot (\Lambda - \xi \Lambda_\omega), \end{aligned}$$

zoodat men een belastingcoëfficiënt  $\Lambda(\xi)$  kan definiëren door de betrekking

$$\Lambda(\xi) = \Lambda - \xi \Lambda_\omega, \quad (07.69)$$

die de versnelling in het punt  $\xi_1$  bepaalt. Bij numerieke controle blijkt, dat het aandeel  $\xi \Lambda_\omega$  voor alle punten van het vliegtuig zoo klein blijft vergeleken bij  $\Lambda$ , dat althans  $\Lambda_{\max}(\xi)$  nauwelijks van  $\Lambda_{\max}$  verschilt. Wanneer  $\xi$  voor de staartvlakken gelijk aan  $\beta$  wordt genomen ( $\beta=5,5$ ), worden voor  $\Lambda(\xi)$  voor enkele gevallen, die zéér groote draaiingen om de dwarsas bevatten, de lijnen van fig. 36 verkregen. Het geringe verschil tusschen vergelijkbare maxima van  $\Lambda(\xi)$  en  $\Lambda$  valt direct op bij vergelijking met fig. 28. De beteekenis hiervan is, dat het deel der belastingen op de onderdeelen van het vliegtuig, dat afkomstig is van de traagheidskrachten, bijna geheel door den coëfficiënt  $\Lambda$  wordt beheerscht<sup>2)</sup>.

De totale belasting op andere constructiedelen van de vleugel wordt niet uitsluitend door den coëfficiënt  $\Lambda(\xi)$  vastgelegd. Reeds in punt 02 werd immers vastgesteld, dat voor de staartvlakken bijvoorbeeld een uitdrukking van het type (02.7) kan worden opgesteld. Stelt men hierin ter vereenvoudiging  $M_0=0$  (deze term heeft maar weinig

beteekenis) en neemt men  $h_s = \beta l$ , dan kan men deze formule in den vorm

$$K_z = m_A (ng - \beta l \dot{\omega}) - \frac{f_s}{\beta l} \left( m \frac{\partial M}{\partial L} \cdot ng - B \dot{\omega} \right) \quad (07.70)$$

schrijven. De eerste term in het rechterlid is kennelijk evenredig met  $\Lambda(\beta)$  en afkomstig van de traagheidskrachten, de tweede moet, daar zij de

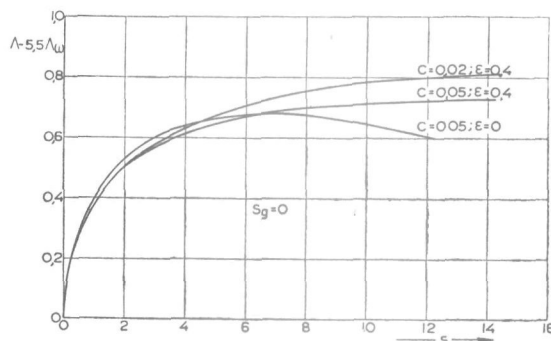


Fig. 36.

factor  $f_s$  bevat, met de aerodynamische krachten samenhangen. Naast  $\Lambda(\xi)$  is voor de staartvlakken dus de combinatie

$$m \frac{\partial M}{\partial L} \cdot ng - B \dot{\omega}$$

van de lineaire en de hoekversnelling van beteekenis.

Stelt men (zie 07.07)

$$\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial L} &= \varepsilon l \\ B &= m j^2 l^2 \\ (n-1)g &= \frac{U}{l} w_0 C \Lambda \\ \dot{\omega} &= \frac{U}{l} \frac{d\omega}{ds} = \frac{U}{l^2} w_0 C \cdot \Lambda_\omega \end{aligned}$$

dan wordt

$$\begin{aligned} m \frac{\partial M}{\partial L} ng - B \dot{\omega} &= \\ &= m U w_0 C [\varepsilon \Lambda - j^2 \Lambda_\omega] + m \varepsilon l g, \quad (07.71) \end{aligned}$$

zoodat voor de luchtkrachtbelasting op de horizontale staartvlakken de coëfficiënt

$$\beta \Lambda_s = \varepsilon \Lambda - j^2 \Lambda_\omega \quad (07.72)$$

beslissend is<sup>1)</sup>. Bedenkt men, dat  $\varepsilon$  zeer goed nul kan zijn, dan blijkt hieruit, dat de coëfficiënt  $\Lambda_\omega$

<sup>1)</sup> De factor  $\beta$  in het linkerlid is toegevoegd, om het quotiënt van de twee termen in het rechterlid van (07.70) — in de eerste het aandeel  $-m_A \beta l \dot{\omega}$  verwaarloozend — in de eenvoudige gedaante

$$-\frac{m_A}{f_s m} \cdot \frac{\Lambda}{\Lambda_s}$$

te kunnen schrijven.

<sup>1)</sup> Voor zoover zij door de hoekversnelling wordt veroorzaakt.

<sup>2)</sup> Natuurlijk vooropgesteld, dat de belasting symmetrisch is.

bij de bepaling van de belasting op het horizontale staartvlak wel degelijk van beteekenis kan zijn. De traagheidsstraal  $j_l$  gelijk aan de standaardwaarde 1,8 stellend en  $\beta$  gelijk aan 5,5, vindt men voor den coëfficiënt  $\Lambda_s$  het door de figuren 37 t/m 39 geïllustreerde verloop.

Het blijkt ditmaal niet zoo gemakkelijk te zijn, uit de grafieken voor  $\Lambda_s$  de verandering van het maximum der belasting bij variatie van de para-

uit den weg te ruimen door de uitwerking van tijdroovende aanvullende berekeningen, omdat de waarde van  $(\Lambda_s)_{max}$  vooral voor kleine veranderingen van de waarde van  $\varepsilon$  (waarvan de effectieve waarde toch al niet erg nauwkeurig vastligt) zoo gevoelig is, dat het uiteindelijk toch niet mogelijk zou zijn, voor een gegeven vliegtuig een vliegtoestand een geheel betrouwbaar en representatief getal voor  $(\Lambda_s)_{max}$  aan te geven. Men moet zich

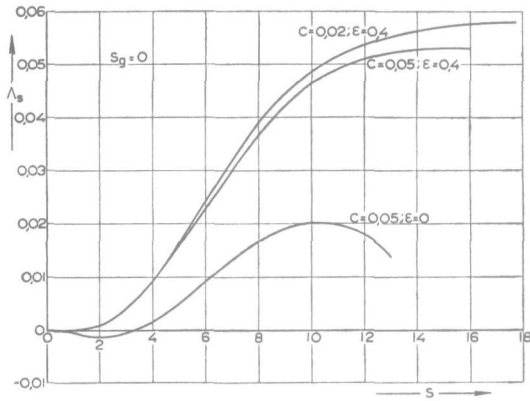


Fig. 37.

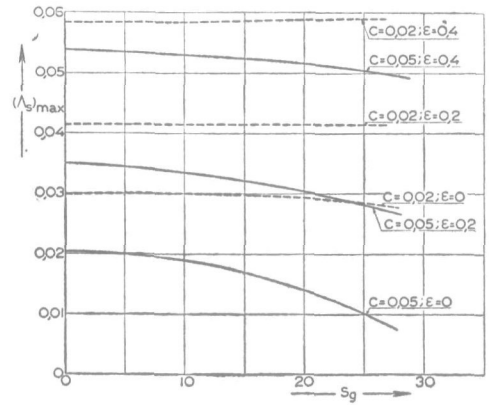


Fig. 40.

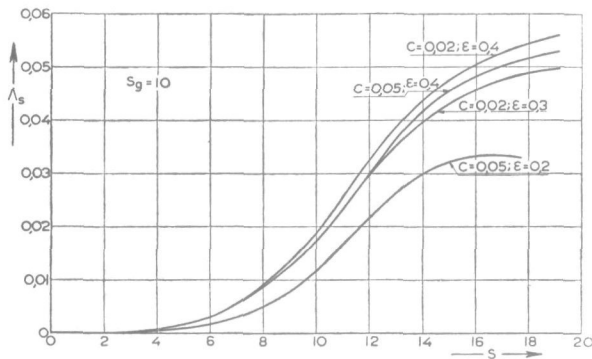


Fig. 38.

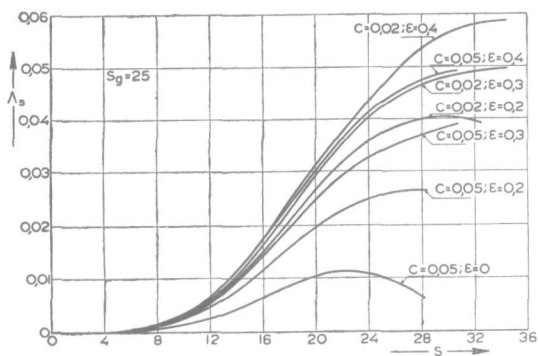


Fig. 39.

meters af te leiden. Voor zoover zich richtlijnen laten vaststellen, hebben deze niet de tot nu toe bereikte nauwkeurigheid. Dit is eensdeels een gevolg van het feit, dat vooral voor  $C = 0,02$  het aantal uitgewerkte gevallen eigenlijk te klein is en anderdeels van het feit, dat bij  $\Lambda_s$  spreidingen te voorschijn komen, die met de beperkte reken-nauwkeurigheid samenhangen. Het heeft weinig zin, te trachten de hier ontmoete moeilijkheden

hier dus altijd met een schatting vergenoegen, waarvoor het beschikbare materiaal echter toe-reikend is en waarvoor de figuren 40, 41 en 42

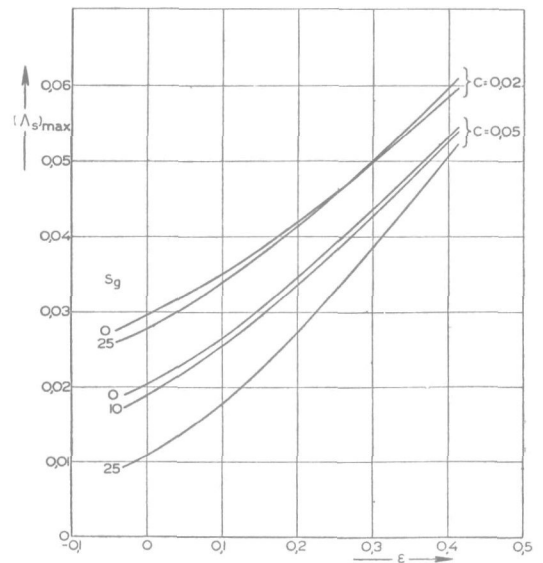


Fig. 41.

de basis kunnen vormen. Deze figuren zijn ge-construeerd door de gegevens, welke voor  $(\Lambda_s)_{max}$  aan fig. 37, 38 en 39 kunnen worden ontleend, zoo goed mogelijk door interpolatie en extrapolatie te completeren. Fig. 41 licht den reeds aangestipten grooten invloed toe van de zwaartepuntsligging. Hoe achterlijker deze is, hoe grootere de belasting wordt. Volgens fig. 42 heeft ook de waarde van  $C$  vooral voor grootere waarden van  $s_g$  een niet te verwaarloozen invloed. Wat deze betreft zijn kleine waarden van  $C$  oogenschijnlijk ongunstig, dus b.v. een groote vleugelbelasting  $G/F$ . Men dient echter te bedenken, dat de belasting — voor zoover zij

door de luchtkrachten wordt veroorzaakt — volgens (07.70), (07.71) en (07.72) evenredig is met het product  $\Lambda_s C$ , zoodat de afname (bij toenemende waarde van  $C$ ) van den coëfficiënt  $\Lambda_s$  uiteindelijk alleen ertoe leidt, dat de belasting zelve minder dan evenredig met  $C$  toeneemt. Want toenemen blijkt zij in het algemeen te blijven doen. Alleen als

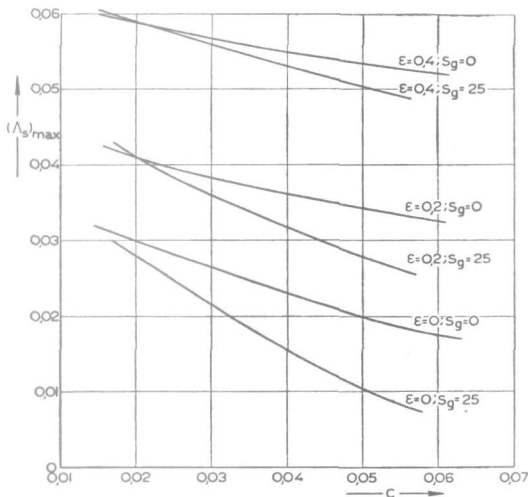


Fig. 42.

$\varepsilon = 0$  is en het overgangsgebied breed is, volgt uit fig. 42 in combinatie met de zoeven aangehaalde formules, dat de invloed van den parameter  $C$  door compensatie nagenoeg wegvalt. In dergelijke gevallen — die zich overigens in de practijk niet zelden zullen voordoen — verliezen de in  $C$  samengetrokken parameters hun invloed op de staartvlakbelasting door luchtkrachten bijna geheel. Volgens figuur 40 schijnt de belasting op de staartvlakken bij kleine waarden van  $C$  in hooge mate onafhankelijk te worden van de breedte van het overgangsgebied. Bij groote waarden van  $C$ , gecombineerd met voorlijke zwaartepuntsligging, zou de invloed van deze grootte echter aanmerkelijk toenemen, in dien zin, dat het gunstig is, wanneer het overgangsgebied breed is.

Tot besluit moge erop worden gewezen, dat men een poging kan doen de luchtkrachtbelasting op de staartvlakken te berekenen op een wijze, die wat eenvoud betreft met de in punt 05 opgenomen berekening van de vleugelbelasting overeenkomt. Men wordt dan echter min of meer gedwongen, de twijfelachtige veronderstelling in te voeren, dat zoowel de vleugel als het staartvlak gelijktijdig (op het oogenblik  $t=0$ ) door de remous in het scherp begrensde veld worden beïnvloed. Op basis hiervan vindt men voor de met  $\Lambda = 1$  (vleugelbelasting) overeenkomende „primitieve” waarde van  $\Lambda_s$

$$\Lambda_s = \frac{k_s}{k} \cdot \frac{F_s}{F}$$

Substitueert men de in punt 07.5 vermelde standaardwaarden, dan wordt dit

$$\Lambda_s = \text{ca. } 0,095.$$

Volgens de figuren 38 t/m 42 wordt deze waarde

in werkelijkheid vooral bij voorlijke zwaartepuntsligging lang niet bereikt, zoodat deze rekenwijze — veel meer nog dan in het overeenkomstige geval voor den vleugel — ontoelaatbaar is.

Bij de beoordeeling van alle uitkomsten, die het onderzoek van de belasting op de horizontale staartvlakken heeft opgeleverd, moet er rekening mee worden gehouden, dat uitsluitend aandacht is besteed aan de belasting, die optreedt direct na het oogenblik, waarop het vliegtuig in het remousveld terecht komt. Tevens is verondersteld, dat het hoogteroer noch onder den invloed der remousbelasting zelf, noch door ingrijpen van den vliegtuigbestuurder wordt verstoord. De vraag, hoe de staartvlakbelasting zich verder — later na het invliegen in het remousveld — ontwikkelt, blijft dus geheel open en is voor een onderzoek op de tot nu toe aanvaarde grondslagen ook niet toegankelijk. Immers, op langer traject moet er rekening mee worden gehouden, dat het detail der stoorsnelheidsverdeling in het remousveld aan invloed wint, zoodat de beperking tot de uiterst eenvoudige schematiseringen, gevormd door het „scherpbegrensde remousveld” en het „remousveld met overgangsgebied” niet langer geschikt is, terwijl verder bijna zeker op een ingrijpen der stuurorganen in de ontwikkeling van den vliegtuigtoestand moet worden gerekend, met alle onoverzienbare mogelijkheden, die dit biedt.

## 08. De remousbelasting op een buigenden vleugel.

08.1. In het vorig punt is de belasting berekend op den grondslag, die in de punten 02 en 03 als doeltreffend is aangemerkt, echter met dien verstande, dat nog niet werd aangetoond, dat het inderdaad geoorloofd is, het vliegtuig te behandelen als een volkomen stijf en dus niet vervormbaar mechanisch systeem. Dit vraagstuk zal nu nader worden onderzocht.

In verband met het feit, dat het primaire gevolg der remousstoring bestaat uit een kracht op den vleugel, kan erop worden gerekend, dat groote vervormingen, indien deze optreden, zeker aan dit onderdeel te voorschijn zullen komen, en op grond van den aard van belasting en stijfheidsverdeling valt in het bijzonder een *buiging* van den vleugel te verwachten. Het zal dan ook geoorloofd zijn, bij het onderzoek naar den invloed van deformaties op de belasting in eerste instanties te veronderstellen, *dat door de remous uitsluitend buigingsvervormingen van den vleugel worden veroorzaakt*. Aan de hand van de uitkomsten, die dit onderzoek oplevert, zal kunnen worden beoordeeld, of het noodzakelijk is ook andere vervormingen in aanmerking te nemen. Het zal blijken, dat daarvoor weinig aanleiding is.

08.2. Het is gewenscht, de gebeurtenissen die zich afspelen bij het invliegen in een remousveld, aan een wat nauwkeuriger, hoewel voorloopig nog kwalitatieve, beschouwing te onderwerpen. Lettend op een willekeurig gelegen smal dwarsstrookje van den vleugel zal hierop na het passeeren van de grens van het remousveld een „remouskracht”

moeten worden aangebracht, die aan dit strookje een bepaalde eventueel met een draaiing om de „dwarsas” gepaarde verticale beweging zal trachten te geven. Indien de vleugel daarbij als geheel spanningsvrij zou blijven, zou deze beweging bij gebrek aan elastische krachten op het beschouwde strookje, verder uitsluitend van zijn massa en traagheidsmoment afhangen. Dit geval zal zich kennelijk dan voordoen, als *alle* strookjes van den vleugel op grond van hun massa's en traagheidsmomenten op de erop werkende remouskrachten met precies dezelfde beweging reageeren, daar de samenhang van den vleugel dan, niet door eenigerlei vervorming begeleid, behouden zou blijven. Voorwaarde hiervoor is dat de massa van ieder strookje evenredig is met de daarop werkende „remouskracht” en het traagheidsmoment van ieder strookje met het moment van deze kracht. In ruwe benadering voldoet de rechthoekige vleugel met in koorde- en spanwijdterichting *homogene* gewichtsverdeling aan deze voorwaarde. Bij een dergelijken vleugel zijn in een (symmetrisch) remousveld dus géén buigingsvervormingen van beteekenis te verwachten. In feite beteekent dit niet minder, dan dat de geheele remousbelasting op het constructiemateriaal wegvalt. (De berekening van punt 02.7.1 reproduceert de gestelde voorwaarde in den vorm:  $m_A - f m = 0$  voor alle dwarsdoorsneden).

Werkelijke vliegtuigen onderscheiden zich van een „homogenen vliegende vleugel” door een aanzienlijke concentratie van het constructiegewicht in het midden, of in het middenstuk, van den vleugel. Deze draagt daar immers den zwaren romp, en ook de zware motoren, brandstoftanks, enz. worden gewoonlijk (wat de brandstoftanks betreft tegenwoordig niet altijd) niet in de buitenste stukken van den vleugel aangebracht. De buitenste stukken van een werkelijken vleugel zijn dus „relatief te licht” en het product van massa en versnelling van in deze buurt gelegen strookjes is niet toereikend om de remouskracht te compenseren. Derhalve ontstaan vervormingen, vergezeld van het evenwicht voor deze strookjes herstellende elastische krachten. Wanneer de vleugel zelf zeer licht en de romp van het vliegtuig zwaar is, kunnen de traagheidskrachten op het vleugel-materiaal worden verwaarloosd en moeten de elastische krachten de remouskracht dus in hun eentje compenseren. In dit geval ontstaan derhalve vervormingen, die bij gegeven verdeling van de stijfheid van de vleugelconstructie, alleen van de verdeling van de remouskrachten afhangen (welke krachten alle tezamen door de rompreactie worden gecompenseerd). Deze vervorming wijzigt zich in het begin — in antwoord op het plotseling inzetten van de remouskracht — zeer snel en daarna — in antwoord op het langzaam uitdempen van de remouskracht — relatief langzaam. Ondanks haar veranderlijkheid moge aan deze vervorming de naam statische vervorming worden gegeven. Doordat de massa van den vleugel in werkelijkheid niet nul bedraagt, ontstaan in den vleugel wel traagheidskrachten. Het kan echter geoorloofd zijn, deze te verwaarloosen. Voorwaarde daartoe is, dat de alsdan toch weer als statisch op te vatten ver-

vorming *voortdurend* slechts langzaam verandert. Wijzigt zij zich ergens abrupt, dan schiet de werkelijke vervorming tengevolge van de traagheidskrachten over de (langzaam veranderlijke) evenwichtswaarde heen, welk verschijnsel de inleiding wordt van een buigingstrilling (indien thans weer alleen buigingsvervormingen in de beschouwing worden opgenomen). Het is duidelijk, dat dergelijke gebeurtenissen, zoo zij bij de remousbelasting een rol spelen, in aansluiting op de *snelle* veranderingen direct na het passeeren van de grens van het remousveld te verwachten zijn. De buigingstrilling heeft strikt genomen een gecompliceerd karakter. Zij bestaat n.l. uit een combinatie van alle „harmonische” buigingseigen trillingen van het continu-elastische vleugelsysteem. Tot welk bedrag iedere harmonische component in deze combinatie is vertegenwoordigd, hangt af van de verdeling van de kracht, die de trilling inleidde. Deze is in het gegeven geval kennelijk van dien aard, dat de „buigingsgrondtoon” zoo aanzienlijk bevoordeeld wordt, dat de rest wel kan worden verwaarloosd, hetgeen de zaak natuurlijk aanzienlijk eenvoudiger maakt.

De trillingsvorm van den buigingsgrondtoon hangt op zichzelf af van de massaverdeling en de stijfheidsverdeling van den vleugel.

Uit deze beschouwingen blijkt, dat bij de bestudeering van de remousbelasting op een buigenden vleugel twee op elkaar te superponeren buigingsvervormingen in aanmerking moeten worden genomen, n.l. de grondtoon-trillingsvorm en de statische deformatie (waarbij de laatste feitelijk, wat den vorm betreft, niet geheel ondubbelzinnig vastligt, omdat de remouskracht niet alleen een variabele grootte, doch tevens een eenigszins veranderlijke verdeling vertoont). Naar den vorm verschillen deze twee deformaties echter uiterlijk niet veel. Zij vertoonen beide n.l. tusschen wortel en tip geen knopen en voldoen in het midden (t.p.v. den romp) en bij de vleugeleinden aan dezelfde „randvoorwaarden”. Deze uiterlijke gelijkheid maakt het mogelijk, beide deformaties naar den vorm desnoods met elkaar te identificeren. In de hieronder volgende berekeningen zal van deze mogelijkheid gebruik worden gemaakt, daar de berekening anders te bewerkelijk wordt. Deze procedure komt feitelijk daarop neer, dat men aanneemt, dat de vleugel slechts op één bepaalde manier *kan* vervormen. Zijn als continu-elastisch systeem in principe oneindig aantal graden van vrijheid worden daarmede in feite tot slechts één gereduceerd, aan welken resterenden graad de parameter, die de *grootte* der deformatie zal vastleggen, als „coördinaat” is toegevoegd. Daar deze behandelingswijze, die in het gegeven geval ongetwijfeld zeer bruikbare benaderingen zal opleveren, in de toegepaste mechanica veelvuldig wordt gebruikt, lijkt het overbodig er te dezer plaatse nog verder op in te gaan.

In aansluiting op het bovenstaande wordt aangenomen, dat de buigingsvervorming van den vleugel kan worden voorgesteld door de betrekking

$$z(y) = qz_1(y) \quad (08.01)$$

waarin

$z(y)$  de aan de deformatie verbonden verplaatsing is van de punten van het vlak van den vleugel in een richting, loodrecht op dat vlak, als functie van een coördinaat  $y$  langs de dwarsas van het vliegtuig;

$z_1(y)$  de bekend te veronderstellen functie is, die de gedaante der optredende vervormingen met de vereischte nauwkeurigheid weer geeft;

$q$  de enkele „gegeneraliseerde coördinaat” is, die de grootte der vervorming bepaalt.

De bewegingsvergelijkingen van het door het geheele vliegtuig gevormde systeem kunnen dan worden gevormd met behulp van de methode van Lagrange. Daarvoor moet eerst de grootte van de kinetische energie van het bewegende systeem worden vastgesteld (waarbij men kan afzien van de

$$-\frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2l \cdot dy \cdot \frac{1}{2} k \int_0^s k_1(s-\sigma) \cdot \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\dot{Z} + \dot{q}z_1(y)}{U} \right) d\sigma + \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2l \cdot dy \cdot \frac{1}{2} k \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \cdot \frac{1}{U} \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma \quad (08.06)$$

onveranderlijke voorwaartsche beweging van het vliegtuig in de vlucht). Men vindt aan de hand

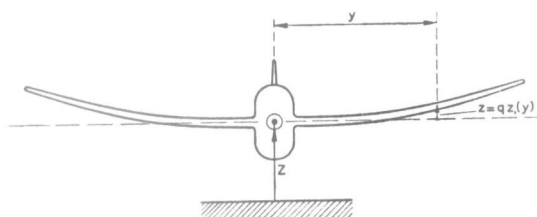


Fig. 43.

van fig. 43, wanneer wordt aangenomen, dat géén draaiingen om de dwarsas optreden,

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_R \dot{Z}^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^b \mu(y) \{ \dot{Z} + \dot{q}z_1(y) \}^2 dy. \quad (08.02)$$

Hierin is  $m_R$  de massa van den romp en  $\mu(y)$  de functie, die de massa per breedte-eenheid van den vleugel geeft.

$$A_q = \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2 \int_0^b 2lz_1(y) \cdot \frac{1}{2} k \left[ \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \frac{1}{U} \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma - \int_0^s k_1(s-\sigma) \cdot \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\dot{Z} + \dot{q}z_1(y)}{U} \right) d\sigma \right] dy. \quad (08.08)$$

Men kan (08.02) omwerken tot

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \dot{Z}^2 + 2 \dot{q} \int_0^b \mu(y) \cdot z_1(y) \cdot dy + 2 \cdot \frac{1}{2} \dot{q}^2 \int_0^b \mu(y) \cdot z_1^2(y) \cdot dy \quad (08.03)$$

waarin thans  $m$  de massa van het complete vliegtuig voorstelt.

De potentieele energie is evenredig met het kwadraat der vervorming, zoodat hiervoor kan worden geschreven

$$E_{pot} = c \cdot q^2, \quad (08.04)$$

waarin  $c$  de evenredigheidsconstante is.

De vergelijkingen van Lagrange voor de twee coördinaten  $Z$  en  $q$  luiden dan

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{Z} + 2\dot{q} \int_0^b \mu(y) \cdot z_1(y) \cdot dy &= A_Z; \\ \ddot{Z} \int_0^b \mu(y) \cdot z_1(y) \cdot dy + \\ + \dot{q} \int_0^b \mu(y) \cdot z_1^2(y) \cdot dy + cq &= \frac{1}{2} A_q, \end{aligned} \right\} \quad (08.05)$$

waarin  $A_Z$  en  $A_q$  arbeidscoëfficiënten van de luchtkrachten zijn. Deze vindt men als volgt:

In de veronderstelling, dat op een willekeurig gelegen strook tusschen dwarsdoorsneden  $y$  en  $y + dy$  van den vleugel de luchtkrachten

werken (vergelijk (06.10)), is de arbeid, dien deze verrichten

1°. bij een virtueele wijziging  $\delta Z$  van  $Z$  eenerzijds gelijk aan de uitdrukking (08.06), vermenigvuldigd met  $2\delta Z$  en geïntegreerd over één vleugelhelte, d.i. von 0 tot  $b$ , en anderzijds gelijk aan  $A_Z\delta Z$ . Daaruit volgt

$$A_Z = \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot \left[ F \cdot \frac{1}{2} k \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \frac{1}{U} \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma - 2 \int_0^b \left\{ 2l \cdot \frac{1}{2} k \cdot \int_0^s k_1(s-\sigma) \cdot \frac{d}{d\sigma} \left( \frac{\dot{Z} + \dot{q}z_1(y)}{U} \right) d\sigma \right\} dy \right]; \quad (08.07)$$

2°. bij een virtueele wijziging  $\delta q$  van  $q$  eenerzijds gelijk aan de uitdrukking (08.06), vermenigvuldigd met  $\delta q z_1(y) \cdot 2$  en geïntegreerd over één vleugelhelte en anderzijds gelijk aan  $A_q\delta q$ . Daaruit volgt

Om de zaak wat gemakkelijker te kunnen overzien, is het gewenscht, de uitdrukkingen voor de arbeidscoëfficiënten ook vast te stellen voor het geval, dat de luchtkrachten worden ontleend aan de „stationnaire” draagkrachtformules. De uitkomst wordt door (08.07) en (08.08) gegeven, wanneer daarin

$$k_1(s-\sigma) = k_2^*(s-\sigma) \equiv 2$$

wordt gesteld, met het resultaat

$$A_Z = \frac{1}{2} \rho U^2 k \left[ F \frac{w_r - \dot{Z}}{U} - 2 \dot{q} \int_0^b 2l \frac{z_1(y)}{U} dy \right]. \quad (08.09)$$



$$A_q = \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2k \int_0^b 2l \frac{\dot{w}_r - \dot{Z} - \dot{q} z_1(y)}{U} z_1(y) dy. \quad (08.10)$$

Substitueert men voorloopig *deze* uitdrukkingen in (08.05), en stelt men

$$\dot{Z} = w \quad (08.11)$$

dan vindt men de uitkomst:

$$m\dot{w} + \frac{1}{2} \rho U F k \cdot w + 2\ddot{q} \int_0^b \mu z_1 dy + \dot{q} \cdot \frac{1}{2} \rho U \cdot 2k \int_0^b 2l z_1 dy = \frac{1}{2} \rho U F k \cdot w_r \quad (08.12)$$

$$\begin{aligned} \dot{w} \int_0^b \mu z_1 dy + w \cdot \frac{1}{2} \rho U k \int_0^b 2l z_1 dy + \ddot{q} \int_0^b \mu z_1^2 dy + \\ + \dot{q} \cdot \frac{1}{2} \rho U k \int_0^b 2l z_1^2 dy + q \cdot c = \\ = \frac{1}{2} \rho U k \cdot w_r \cdot \int_0^b 2l z_1 dy. \end{aligned} \quad (08.13)$$

Daar de krachten, die in deze vergelijkingen worden gerepresenteerd, door de termen met factoren  $\dot{q}$  en  $w$ , volgens (08.09) en (08.10) altijd tegen de door  $\dot{q}$  en  $w$  bepaalde bewegingen in gericht zijn, waardoor deze bewegingen worden afgeremd, kan erop worden gerekend dat de verwachte trilling een *gedempte* trilling zal zijn. Dat de vergelijkingen (08.12) en (08.13) echter een juiste waarde voor de demping zullen opleveren, mag niet worden aangenomen, omdat met een buigings-trilling zóó snelle veranderingen van den invalshoek verbonden zullen zijn, dat de daaruit voortvloeiende variaties van de draagkracht niet meer nauwkeurig kunnen worden voorgesteld door de bij de afleiding van (08.12) en (08.13) gebruikte formules der stationnaire draagvlaktheorie. Deze fout zou kunnen worden hersteld, door de bewuste termen te vervangen door met de veel nauwkeurigere formules (08.07) en (08.08) berekende remplaçanten. Dat men echter ook op deze wijze geen in alle opzichten bevredigend resultaat krijgt, hangt samen met een tweede bij de afleiding van (08.12) en (08.13) ingevoerde vereenvoudiging, n.l. met de veronderstelling, dat de vervorming van den vleugel alleen uit buiging bestaat. Uit de theorie der onstabiele vleugeltrillingen is immers bekend, dat een buigingstrilling van een vleugel tengevolge van een „massa-koppeling” altijd door een torsie-trilling wordt vergezeld, waardoor de *demping* een aanzienlijke wijziging kan ondergaan. In theorie bestaat zelfs de mogelijkheid, dat de demping *negatief* wordt, al zal een dergelijke onstabiele toestand zich in de practijk nooit mogen voordoen. Een gelijksoortig effect op de demping kan een

trilling van het rolroer hebben, die eveneens door een interne koppeling met de buigingstrilling verbonden kan zijn.

De moeilijkheid, dat de demping van de trilling niet de juiste waarde zal vertoonen, wanneer de aan vleugelbuiging gekoppelde trillingen niet in de grondvergelijkingen worden opgenomen (die anders veel te gecompliceerd zouden worden) kan formeel tot een oplossing worden gebracht, door de termen in (08.12) en (08.13), die de factor  $\dot{q}$  bevatten, te vermenigvuldigen met een reductiefactor  $\kappa$ , die naderhand zóó wordt gekozen, dat de trilling, die in de oplossing is vervat, juist ongedempt uitvalt. Hoewel hierdoor de gesignaleerde vereenvoudigingen natuurlijk niet worden opgeheven, wordt wel bereikt, dat de invloed van de buiging van den vleugel op de belasting in geen geval te klein uitvalt, wanneer het onderzoek wordt gebaseerd op de formules (08.12), (08.13). Dat is een resultaat, dat bevredigend mag worden genoemd.

Dezelfde factor mag men *niet* toevoegen aan de termen met de snelheid  $w$ , omdat deze termen een beslissende invloed hebben op de eigenschappen van de betrekkelijk langzaam veranderlijke component, die de beweging bevat en die na uitdemping van de trilling alléén overblijft. Ernstig bezwaar tegen deze ongelijke behandeling is er niet, omdat de termen met  $w$  de trilling niet veel zullen beïnvloeden, daar de zware romp hieraan toch maar relatief weinig deelneemt. Daar bovendien reeds is gebleken (bij de oplossing der vergelijking (06.17) in punt 06) dat de draagkracht, die zich instelt op den overheerschend langzamen component der  $w$ -beweging zonder al te groote fout aan de stationnaire draagkrachtformule kan worden ontleend, kan worden besloten, dat de termen in (08.12) en (08.13), die den factor  $w$  bevatten, zonder ernstig bezwaar in den neergeschreven vorm kunnen worden gehandhaafd. Wat tenslotte de termen betreft, die het rechterlid dezer vergelijkingen vormen, is wegens de snelle verandering van  $w_r$  een omwerking op grondslag der formules (08.07) en (08.08) noodzakelijk.

Wanneer al deze aanwijzingen worden opgevolgd, ontstaan uit (08.12) en (08.13) de twee navolgende grondvergelijkingen voor de schatting van den invloed van de vleugelbuiging op de belasting:

$$\begin{aligned} \dot{w} \cdot m + w \cdot \frac{1}{2} \rho U F k + \ddot{q} \cdot 2 \int_0^b \mu z_1 dy + \\ + \dot{q} \cdot \kappa \cdot \frac{1}{2} \rho U \cdot 2k \int_0^b 2l z_1 dy = \\ = \frac{1}{2} \rho U F k \cdot \frac{1}{2} \int_0^b k_2^* (s - \sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma \end{aligned} \quad (08.14)$$

$$\begin{aligned} & \dot{w} \int_0^b \mu z_1 dy + w \cdot \frac{1}{2} \rho U k \int_0^b 2 l z_1 dy + \ddot{q} \int_0^b \mu z_1^2 dy + \\ & + \dot{q} \cdot \kappa \cdot \frac{1}{2} \rho U k \int_0^b 2 l z_1^2 dy + q \cdot c = \\ & = \frac{1}{2} \rho U k \int_0^b 2 l z_1 dy \cdot \frac{1}{2} \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma. \quad (08.15) \end{aligned}$$

Vervangt men hierin de variabele  $t$  met behulp van de betrekking

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{U}{l} \frac{d}{ds}$$

door de variabele  $s$ , dan kan hiervoor bij gebruik der afkortingen

$$\begin{aligned} \frac{2 \int_0^b \mu z_1 dy}{ml} &= \mu_{12}; & \frac{2 \int_0^b \mu z_1^2 dy}{ml^2} &= \mu_{22}; \\ \frac{\int_0^b z_1 dy}{bl} &= \lambda_{12}; & \frac{\int_0^b z_1^2 dy}{bl^2} &= \lambda_{22} \quad (08.16) \end{aligned}$$

na een eenvoudige omwerking worden geschreven (met  $C$  volgens (08.08) en  $f(s)$  volgens (06.23))

$$\begin{aligned} & w' + Cw + \mu_{12} U q'' + \kappa \lambda_{12} C U q' = \\ & = \frac{1}{2} C \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma = \frac{1}{2} C f(s) \quad (08.17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \mu_{12} w' + \lambda_{12} C w + \mu_{22} U q'' + \kappa \lambda_{22} C U q' + \frac{2c}{mU} q = \\ & = \lambda_{12} \cdot \frac{1}{2} C \int_0^s k_2^*(s-\sigma) \frac{dw_r}{d\sigma} d\sigma = \lambda_{12} \cdot \frac{1}{2} C f(s). \quad (08.18) \end{aligned}$$

Zoals steeds, is aangenomen, dat de vleugel rechthoekig,  $l$  dus constant is.

Stel nu in (08.14) en (08.15) de luchtkrachttermen (die alle de luchtdichtheid  $\rho$  als factor bevatten) eens nul. Er blijft dan over

$$\begin{aligned} & \dot{w} \cdot m + \ddot{q} \cdot 2 \int_0^b \mu z_1 dy = 0 \\ & \dot{w} \cdot \int_0^b \mu z_1 dy + \ddot{q} \int_0^b \mu z_1^2 dy + q \cdot c = 0 \end{aligned}$$

of, op grond van (08.16)

$$\begin{aligned} & \dot{w} + \mu_{12} \ddot{q} = 0 \\ & \mu_{12} \dot{w} + \mu_{22} \ddot{q} + \frac{2c}{ml} q = 0. \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen kunnen worden opgelost door

$$\begin{aligned} w &= w_0 e^{ivt} \\ q &= q_0 e^{ivt} \end{aligned}$$

te stellen. Substitutie hiervan geeft

$$\begin{aligned} & iv \cdot w_0 - \mu_{12} lv^2 q_0 = 0 \\ & iv \mu_{12} \cdot w_0 + \left( \frac{2c}{ml} - \mu_{22} lv^2 \right) q_0 = 0, \end{aligned}$$

zoodat

$$\begin{vmatrix} iv & -\mu_{12} lv^2 \\ iv \mu_{12} & \frac{2c}{ml} - \mu_{22} lv^2 \end{vmatrix} = 0$$

moet zijn, waaruit (behalve een wortel  $v=0$ ) volgt

$$v = \sqrt{\frac{1}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \cdot \frac{2c}{ml^2}}.$$

Dit moet kennelijk de eigenfrequentie  $v_0$  der fundamentele symmetrische buigingseigen trilling van den vleugel zijn<sup>1)</sup>, die voor de meeste vliegtuigen tusschen 2 en 10 Hertz ( $v_0 = 2\pi \cdot 2 \approx 12$  tot  $2\pi \cdot 10 \approx 60$ ) ligt.

Op grond van de laatste uitkomst geldt

$$\begin{aligned} \frac{2c}{mU} &= (\mu_{22} - \mu_{12}^2) \cdot \left( \frac{v_0 l}{U} \right)^2 \cdot U = \\ &= (\mu_{22} - \mu_{12}^2) \cdot U \omega_0^2 \quad (08.19) \end{aligned}$$

waarin  $\omega_0$  de zgn. gereduceerde waarde van  $v_0$  is, gedefinieerd door de formule

$$\omega_0 = \frac{v_0 l}{U}. \quad (08.20)$$

Voor een zeer groot vliegtuig kan  $\omega_0$  b.v. gelijk zijn aan  $\approx \frac{12.2}{100} = 0,24$ , voor een jachtvliegtuig kan ongeveer gelden  $\frac{60.1}{150} = 0,4$ , voor een sportvliegtuig  $\frac{40.1}{50} = 0,8$ , voor een verkeersvliegtuig bij kleine snelheid misschien ca.  $\frac{25.1,5}{50} = 0,75$ . In het algemeen valt de waarde van  $\omega_0$  tusschen de grenzen 0,25 en 1,0, een schatting, waarvan zoo straks gebruik zal worden gemaakt.

08.3. Alvorens het oplossen van de vergelijkingen (08.17) en (08.18) ter hand te nemen zal worden nagegaan, waarmede de belasting van het constructiemateriaal van den deformeeren vleugel in het gegeven geval evenredig kan worden gesteld. Juist omdat het systeem nu niet langer vrij van vervorming is, is de versnelling van het vliegtuig als geheel n.l. niet langer maatstaf voor de belasting.

Het antwoord op de gestelde vraag is buitengewoon eenvoudig. Het zijn uiteindelijk de spanningen in het constructiemateriaal, die de toets-

<sup>1)</sup> Het verschil  $\mu_{22} - \mu_{12}^2$  is altijd positief. In den regel is  $\mu_{22}$  zelfs veel grooter dan  $\mu_{12}^2$ .

steen voor de belasting vormen. Deze spanningen zijn echter bij elastische deformatie evenredig met de vervorming. De belasting is dus evenredig met de grootte der deformatie. De grootte van de deformatie van den buigenden vleugel wordt echter in de zoojuist afgeleide formules vastgelegd door de „gegeneraliseerde coördinaat”  $q$ . In het gegeven geval vormt deze grootte dus tevens de maatstaf voor de belasting.

Wanneer nu uit de vergelijkingen (08.17), (08.18)  $q$  wordt opgelost en de extremen daarvan worden bepaald, is daarmee de belasting weliswaar vastgelegd, echter op een wijze, die het treffen van een vergelijking met de in vorige nummers verkregen uitkomsten niet direct toelaat. In deze moeilijkheid kan worden voorzien door  $q$  op de navolgende wijze in een „aequivalente versnelling” om te zetten:

Men vermenigvuldigt (08.17) met  $\lambda_{12}$  en trekt de uitkomst af van de vergelijking (08.18). Zoo ontstaat de betrekking

$$(\mu_{12} - \lambda_{12})w' + (\mu_{22} - \lambda_{12}\mu_{12})Uq'' + \kappa CU(\lambda_{22} - \lambda_{12}^2)q' + \frac{2c}{mU}q = 0$$

of, op grond van (08.19)

$$(\mu_{12} - \lambda_{12})w' + (\mu_{22} - \lambda_{12}\mu_{12})Uq'' + CU(\lambda_{22} - \mu_{12}^2)q' + (\mu_{22} - \mu_{12}^2)U\omega_0^2 \cdot q = 0. \quad (08.21)$$

Deze formule toont explicite, dat de door  $q$  bepaalde belasting in het gegeven geval niet evenredig is met de versnelling  $\dot{w} = \frac{U}{l} \frac{dw}{ds}$  in het zwaartepunt van het vliegtuig.

Vervolgens kan worden aangenomen, dat de stoorsnelheidsverdeling in het remousveld een zoodanig bijzonderen vorm heeft, dat, uitgaande van een geschikten nader te bepalen aanvangstoestand, een *onveranderlijke* belasting wordt veroorzaakt,  $q$  dus constant uitvalt ( $q' = 0$  en  $q'' = 0$ ).

Volgens de betrekking (08.21) moet ook  $w'$  dan constant zijn, terwijl er tevens weer evenredigheid is tusschen de belasting en de versnelling  $w'$ . Als  $w'$  constant is, geldt echter voor  $w$  zelf

$$w = w(0) + w's$$

en daarmee volgt uit (08.17) wegens  $q' = q'' = 0$ :

$$w' = C \left[ \frac{1}{2} f(s) - w(0) - w'(s) \right]$$

$$Y = \frac{u}{u^3 + \frac{\mu_{22} - \mu_{12}\lambda_{12} + \kappa(\lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12})}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} Cu^2 + \left[ \omega_0^2 + \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} C^2 \right] u + \omega_0^2 C} \cdot \frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \cdot \frac{1}{2} CL\{f\}. \quad (08.28)$$

hetgeen kan worden opgevat als een vergelijking voor  $w(0)$  en  $f(s)$ , of voor  $w(0)$  en  $w_r \equiv w_r(s)$ . De oplossingen van deze vergelijking bepalen de aanvangstoestanden en de stoorsnelheidsverdelingen, waarbij constante belastingen behooren. Het is niet van belang, deze oplossing nader te onderzoeken.

Uit (08.21) volgt als  $q' = q'' = 0$  is:

$$q = \frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{(\mu_{22} - \mu_{12}^2)\omega_0^2 U} w'.$$

Deze betrekking maakt het mogelijk de met  $q$  evenredige belasting voor de beschouwde bijzondere toestanden op de gewone wijze uit te drukken in de versnelling  $w'$ . Daarmede is dan echter een sleutel voor de uitdrukking der belasting in een versnelling gevonden, die het mogelijk maakt, ook *willekeurige* uitkomsten voor de vervormings- en belastingsmaatstaf  $q$  in een vorm te brengen, die een directe vergelijking met in vorige nummers opgenomen uitkomsten toelaat. Volgens de laatste formule wordt de „aequivalente versnelling” gedefinieerd door:

$$w'_{\text{aequ.}} = \frac{\mu_{22} - \mu_{12}^2}{\lambda_{12} - \mu_{12}} \omega_0^2 U \cdot q. \quad (08.22)$$

08.4. Terugkeerend tot de vergelijkingen (08.17), (08.18) wordt vooreerst de coëfficiënt  $\frac{2c}{mU}$  door (08.19) vervangen

$$w' + Cw + \mu_{12}Uq'' + \kappa\lambda_{12}CUq' = \frac{1}{2} Cf(s) \quad (08.23)$$

$$\mu_{12}w' + \lambda_{12}Cw + \mu_{22}Uq'' + \kappa\lambda_{22}CUq' + (\mu_{22} - \mu_{12}^2)\omega_0^2 Uq = \lambda_{12} \cdot \frac{1}{2} Cf(s) \quad (08.24)$$

Deze twee gewone lineaire differentiaalvergelijkingen kunnen naar klassiek recept worden opgelost. Het is echter eenvoudiger weer gebruik te maken van de transformatie van Laplace. Men stelle

$$L\{w\} = X \quad \text{en} \quad L\{Uq\} = Y. \quad (08.25)$$

Toepassing der transformatie op het stelsel (08.23), (08.24) geeft, daar

$$w(0) = q(0) = q'(0) = 0$$

is, de volgende uitkomst

$$(u + C)X + (\mu_{12}u^2 + \kappa\lambda_{12}Cu)Y = \frac{1}{2} CL\{f\} \quad (08.26)$$

$$(\mu_{12}u + \lambda_{12}C)X + [\mu_{22}u^2 + \kappa\lambda_{22}Cu + (\mu_{22} - \mu_{12}^2)\omega_0^2]Y = \lambda_{12} \cdot \frac{1}{2} CL\{f\}. \quad (08.27)$$

Daar de met  $q$  evenredige belasting wordt gevraagd, wordt voorloopig alleen  $Y$  opgelost. De uitkomst is

Nu moeten de wortels worden bepaald van de vergelijking

$$u^3 + \frac{\mu_{22} - \mu_{12}\lambda_{12} + \kappa(\lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12})}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} Cu^2 + \left[ \omega_0^2 + \kappa \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} C^2 \right] u + \omega_0^2 C = 0. \quad (08.29)$$

Te dien einde herinnere men zich, dat het de bedoeling was, den parameter  $\kappa$  zóó vast te leggen, dat de beweging een juist ongedempte trilling gaat bevatten. Dat komt echter daarop neer, dat  $\kappa$  zóó moet worden gekozen, dat (08.29) een paar zuiver imaginaire wortels van tegengesteld teeken verkrijgt. Stelt men deze voor door  $\pm iu_0$ , en den overblijvenden reëlen wortel door  $u_1$ , dan moet (08.29) dientengevolge van den vorm

$$(u^2 + u_0^2)(u - u_1) \equiv \equiv u^3 - u_1 u^2 + u_0^2 u - u_1 u_0^2 \quad (08.30)$$

zijn. Het ligt voor de hand te beproeven

$$u_0 = \omega_0(1 + \delta_\omega) \quad u_1 = -C(1 + \delta_c) \quad (08.31)$$

met

$$\delta_\omega \ll 1; \quad \delta_c \ll 1. \quad (08.32)$$

Door vergelijking van (08.30) met (08.29) volgt dan, als quadraten en onderlinge producten van  $\delta_\omega$  en  $\delta_c$  t.o.v. de eenheid worden verwaarloosd:

$$1 + \delta_c = \frac{\mu_{22} - \mu_{12}\lambda_{12} + \kappa(\lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12})}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \quad (08.33)$$

$$2\delta_\omega = \kappa \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \cdot \frac{C^2}{\omega_0^2} \quad (08.34)$$

$$2\delta_\omega + \delta_c = 0. \quad (08.35)$$

Dus

$$\begin{aligned} \mu_{22} - \mu_{12}^2 - \kappa(\lambda_{22} - \lambda_{12}^2) \frac{C^2}{\omega_0^2} &= \\ = \mu_{22} - \mu_{12}\lambda_{12} + \kappa(\lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12}). \end{aligned}$$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \mu_{12}(\lambda_{12} - \mu_{12}) &= \kappa \left[ \lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12} + \right. \\ &\left. + (\lambda_{22} - \lambda_{12}^2) \frac{C^2}{\omega_0^2} \right] \approx \kappa(\lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12}) \end{aligned}$$

want volgens de bij (08.20) gemaakte schatting en de tabel van punt 03.6 is  $\frac{C}{\omega_0} < 0,1$ , zoodat  $\frac{C^2}{\omega_0^2}$  vergeleken bij 1 wel kan worden geschrapt, terwijl  $\lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12}$  en  $\lambda_{22} - \lambda_{12}^2$  van gelijke orde van grootte zijn<sup>1)</sup>.

Dus

$$\kappa \approx \mu_{12} \frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{\lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12}}. \quad (08.36)$$

Mede met het oog op latere toepassing is het gewenscht thans even een redelijk goede schatting van de waarden van de parameters  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\mu_{12}$  en  $\mu_{22}$  te maken. Dit geschiedt het gemakkelijkst aan de hand van de in fig. 44 weergegeven grafiek.

Punten van uitgang zijn krommen  $\frac{z_1(y)}{l}$ , waarbij  $z_1(y)$  aan den tip ( $y=b$ ) op  $l$  genormeerd is, en  $\frac{\mu(y)b}{m}$ . Voor beide is een „aannemelijk” verloop aanvaard, dat kwalitatief geheel verantwoord is

en quantitatief de orden van grootte redelijk goed weergeeft. Wat de  $z_1/l$ -lijn betreft behoeft dit niet te worden toegelicht — de buigingsdeformatie heeft globaal zoo'n vorm — en wat de  $\mu b/m$ -lijn betreft houde men in het oog dat

- 1°. een werkelijke vleugel dikwijls een zeer onregelmatige massaverdeeling te zien geeft, dien men echter altijd kan „strooken” door een continue kromme zonder knikken met groote waarden in de omgeving van het midden van den vleugel ( $y=0$ ) en zéér veel kleinere in de omgeving van het vleugeluiteinde;
- 2°. een werkelijke vleugel in het midden zoo zwaar kan zijn, dat het product  $\mu(0) \cdot b$  grooter wordt dan de massa van het geheele vliegtuig, en  $\frac{\mu(0) \cdot b}{m}$  aldaar dus groter dan 1 wordt. Dit behoeft echter niet het geval te zijn, en in ieder geval wordt  $\frac{\mu(y)b}{m}$  in alle normale gevallen reeds voor bescheiden waarden van  $y$  kleiner dan 1.

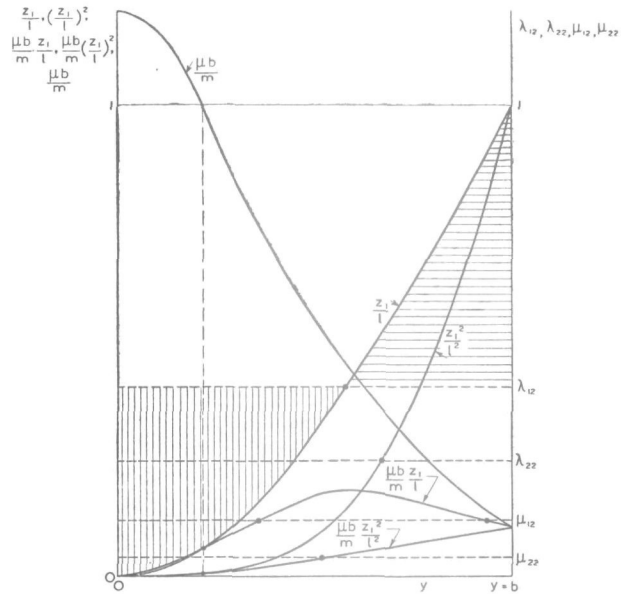


Fig. 44.

Beide bijzonderheden slepen geen beperkingen van de geldigheid der te trekken conclusies met zich.

De krommen  $\left(\frac{z_1}{l}\right)^2$ ,  $\frac{\mu b}{m} \frac{z_1}{l}$  en  $\frac{\mu b}{m} \frac{z_1^2}{l^2}$  volgen op ondubbelzinnige wijze uit de twee eerder genoemde. Het is duidelijk, dat de waarden van de coëfficiënten  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{22}$ ,  $\mu_{12}$  en  $\mu_{22}$  vervolgens op de in de figuur aangegeven as worden uitgesneden door zoodanig gekozen horizontale lijnen, dat de ter verduidelijking voor één der krommen in de figuur horizontaal en verticaal gearceerde oppervlakken aan elkaar gelijk worden. Het blijkt dat

$$\lambda_{12} > \lambda_{22}, \quad \mu_{12} > \mu_{22}, \quad \lambda_{12} > \mu_{12}, \quad \lambda_{22} > \mu_{22}$$

is, waarbij de laatste twee ongelijkheden vrij sterk zijn, zoodat b.v.  $\mu_{12}$  ook nog een stuk kleiner is dan  $\lambda_{22}$ .

<sup>1)</sup> Zie onder.

Uitsluitend op de orde van grootte lettend, blijkt uit deze schattingen, dat

$$\frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{\lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12}} \sim 1 \quad (\text{hoewel } > 1)$$

is, en (zie 08.36) dat

$$\kappa \sim \mu_{12} \ll 1 \quad (08.41)$$

is, zoals werd verwacht.

Nu wordt volgens (08.34) en (08.36)

$$\begin{aligned} \delta\omega &= \frac{1}{2} \mu_{12} \frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{\lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12}} \cdot \frac{\lambda_{22} - \lambda_{12}^2}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \cdot \frac{C^2}{\omega_0^2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\mu_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \right] \cdot \left[ \frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{\lambda_{22} - \lambda_{12}\mu_{12}} \right] \cdot [\lambda_{22} - \lambda_{12}^2] \frac{C^2}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

De drie factoren tusschen vierkante haken zijn alle op grond van de schattingen (08.37) t/m (08.40) hoogstens van de orde van grootte 1, zoodat  $\delta\omega$  hoogstens van dezelfde orde van grootte is als  $\frac{C^2}{\omega_0^2} \ll 1$ . Volgens (08.35) is  $\delta_c = -2\delta\omega$ , zoodat ook  $\delta_c$  hoogstens van de orde van grootte  $\frac{C^2}{\omega_0^2}$  is. Aan de twee eischen (08.32) is dus voldaan.

Tevens blijkt, dat in eerste benadering, en met een fout-percentagte hoogstens van de orde  $\frac{C^2}{\omega_0^2} \times 100\% < 1\%$

$$u_0 = \omega_0 \quad \text{en} \quad u_1 = -C \quad (08.42)$$

is. De nauwkeurigheid van deze uitkomst is beseft voldoende om haar in het vervolg der berekeningen te mogen gebruiken.

Wegens (08.42) kan men i.p.v. (08.28) stellen

$$\begin{aligned} Y &\approx \frac{u}{(u+C)(u^2+\omega_0^2)} \cdot \frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \cdot \frac{1}{2} CL\{f\} = \\ &= \left[ -\frac{C}{\omega_0^2 + C^2} \cdot \frac{1}{u+C} + \frac{i}{2(\omega_0 + iC)} \cdot \frac{1}{u+i\omega_0} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2(\omega_0 - iC)} \cdot \frac{1}{u-i\omega_0} \right] \cdot \frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \cdot \frac{1}{2} CL\{f\}. \end{aligned}$$

Hiervoor kan men (als  $C^2$  nog eens ten opzichte van  $\omega_0^2$  wordt verwaarloosd) ook schrijven

$$\begin{aligned} Y &\approx \left[ -\frac{C}{\omega_0^2} L\{e^{-Cs}\} + \frac{i}{2(\omega_0 + iC)} L\{e^{-i\omega_0 s}\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2(\omega_0 - iC)} L\{e^{i\omega_0 s}\} \right] \cdot \frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \cdot \frac{1}{2} CL\{f\} \end{aligned}$$

of

$$\begin{aligned} Y &\approx \frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \cdot \frac{1}{2} C \cdot L \left\{ -\frac{C}{\omega_0^2} \int_0^s e^{-C(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{C}{\omega_0^2} \int_0^s \cos \omega_0(s-\sigma) \cdot f(\sigma) d\sigma - \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\omega_0} \int_0^s \sin \omega_0(s-\sigma) \cdot f(\sigma) d\sigma \right\}. \end{aligned}$$

Stel

$$\begin{aligned} \frac{C}{\omega_0^2} &= \rho \sin \omega_0 \varepsilon \quad \text{en} \quad \frac{1}{\omega_0} = \rho \cos \omega_0 \varepsilon \\ \rho &= \sqrt{\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{C^2}{\omega_0^4}} \approx \frac{1}{\omega_0}; \quad \text{tg } \omega_0 \varepsilon = \frac{C}{\omega_0}, \quad (08.43) \end{aligned}$$

dan vindt men, wanneer tevens de reciproke transformatie wordt toegepast, op grond van (08.25):

$$\begin{aligned} Uq &\approx \frac{\lambda_{12} - \mu_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{C}{\omega_0} \cdot \left[ -\frac{C}{\omega_0} \int_0^s e^{-C(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^s \sin \omega_0(s-\sigma + \varepsilon) \cdot f(\sigma) d\sigma \right]. \end{aligned}$$

Omdat het de bedoeling was, de belasting uit te drukken in  $w'_{\text{aequ}}$ , moet  $q$  nu overeenkomstig (08.22) worden vervangen door  $w'_{\text{aequ}}$ , hetgeen oplevert:

$$\begin{aligned} w'_{\text{aequ}} &= \frac{1}{2} C^2 \left[ -\int_0^s e^{-C(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_0}{C} \int_0^s \sin \omega_0(s-\sigma + \varepsilon) \cdot f(\sigma) \cdot d\sigma \right]. \quad (08.44) \end{aligned}$$

In deze formule kan men  $w'_{\text{aequ}}$  nog door  $w_0 C \Lambda_{\text{aequ}}$  vervangen, met het resultaat

$$\begin{aligned} \Lambda_{\text{aequ}} &= \frac{1}{2} C \left[ -\int_0^s e^{-C(s-\sigma)} \frac{f(\sigma)}{w_0} d\sigma + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_0}{C} \int_0^s \sin \omega_0(s-\sigma + \varepsilon) \cdot \frac{f(\sigma)}{w_0} \cdot d\sigma \right]. \quad (08.45) \end{aligned}$$

08.5. Omdat het de bedoeling is, na te gaan in hoeverre de buiging de belasting *verhoogt*, is het gewenscht tevens vast te stellen, welke vereenvoudiging de einduitkomst (08.44) ondergaat, wanneer de buiging ontbreekt. Daar de buiging kan worden onderdrukt door den vleugel steeds stijver, dus  $\nu_0$  en  $\omega_0$  hooger te nemen, komt dit daarop neer, dat de limiet van (08.44) voor  $\omega_0 \rightarrow \infty$  wordt gevraagd. Deze limiet kan als volgt worden gevonden.

Wanneer  $\omega_0$  zeer hoog is, is de „golfenlgte”  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  van de sinuslijn  $\sin \omega_0 \sigma$  zéér kort. Binnen één volledige golf zal  $f(\sigma)$  dus in het algemeen zéér weinig variëren. Men zal dus binnen iedere golf

$$f(\sigma) = f(\sigma_k) + f'(\sigma_k) \cdot (\sigma - \sigma_k),$$

kunnen stellen, waarin  $\sigma_k$  het midden van de golf markeert. Schrijf nu, uitgaande van de veronderstelling, dat  $s \gg \frac{2\pi}{\omega_0}$  is:

$$\int_0^s \sin \omega_0(s - \sigma + \varepsilon) \cdot f(\sigma) \cdot d\sigma \approx$$

$$\approx \sum_{s_k \approx 0}^{s_k \approx s} \int_{s_k - \frac{\pi}{\omega_0}}^{s_k + \frac{\pi}{\omega_0}} \sin \omega_0(s - \sigma + \varepsilon) \cdot f(\sigma) \cdot d\sigma \approx$$

$$\approx \sum_{s_k \approx 0}^{s_k \approx s} \int_{s_k - \frac{\pi}{\omega_0}}^{s_k + \frac{\pi}{\omega_0}} \sin \omega_0(s - \sigma + \varepsilon) \cdot [f(s_k) +$$

$$+ f'(s_k) \cdot (\sigma - s_k)] d\sigma.$$

Gemakkelijk blijkt (de integraal van de sinusfunctie alleen over één golf is nul), dat voor deze uitdrukking ook kan worden geschreven (de notatie voor de sommatie gemakshalve meteen vereenvoudigend)

$$\sum_0^s \frac{f'(s_k)}{\omega_0^2} \int_{\sigma = s_k - \frac{\pi}{\omega_0}}^{s_k + \frac{\pi}{\omega_0}} \sin \omega_0(s - \sigma + \varepsilon) \cdot$$

$$\cdot [\omega_0(s - \sigma + \varepsilon)] d[\omega_0(s - \sigma + \varepsilon)].$$

Omdat

$$\int_{a-\pi}^{a+\pi} x \sin x dx = - \left| x \cos x \right|_{a-\pi}^{a+\pi} +$$

$$+ \int_{a-\pi}^{a+\pi} \cos x dx = - \left| x \cos x \right|_{a-\pi}^{a+\pi}$$

is, leidt de uitvoering der integratie in de voorlaatste formule tot de uitkomst

$$- \sum_0^s \frac{f'(s_k)}{\omega_0^2} \left[ \omega_0 \left( s - s_k - \frac{\pi}{\omega_0} + \varepsilon \right) - \right.$$

$$\left. - \omega_0 \left( s - s_k + \frac{\pi}{\omega_0} + \sigma \right) \right] = \frac{2\pi}{\omega_0^2} \sum_0^s f'(s_k).$$

Nu vertoont de punten  $s_k$  onderlinge afstanden ter grootte  $\frac{2\pi}{\omega_0}$ , stel  $= h$ . Dan is

$$\frac{2\pi}{\omega_0^2} \sum_0^s f'(s_k) = \frac{1}{\omega_0} \sum_0^s h \cdot f'(s_k) \approx$$

$$\approx \frac{1}{\omega_0} \int_0^s f'(\sigma) d\sigma = \frac{f(s)}{\omega_0},$$

dus

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \omega_0 \int_0^s \sin \omega_0(s - \sigma + \varepsilon) \cdot f(\sigma) d\sigma = f(s). \quad (08.46)$$

Daarnaast wordt:

$$\lim_{\omega_0 \rightarrow \infty} \Lambda_{\text{aequ}} =$$

$$= \frac{1}{2} C \left[ - \int_0^s e^{-C(s-\sigma)} \cdot \frac{f(\sigma)}{\omega_0} d\sigma + \frac{f(s)}{\omega_0 C} \right]. \quad (08.47)$$

Bij deze formule kan onmiddellijk worden opgemerkt, dat zij dient aan te sluiten bij de in punt 06 uitgewerkte resultaten. Zij geldt immers voor den aldaar zorgvuldig bestudeerden oneindig stijven — d.i. niet buigenden — vleugel. De mate, waarin de verwachte overeenstemming bij de numerieke uitwerking aanwezig zal blijken te zijn, levert een extra contrôle op de toelaatbaarheid van de in de bovenstaande formules opgenomen veronderstelling, dat de door de verticale snelheid  $w$  van het vliegtuig geïnduceerde luchtkracht door de formules der stationnaire theorie mag worden weergegeven.

08.6. Het is wenschelijk tot besluit ook na te gaan, hoe zich de versnelling gedraagt, die optreedt in den romp van het vliegtuig en die met een aldaar opgestelden versnellingsmeter kan worden gemeten. De berekening van deze versnelling kan geschieden, door ook de onbekende  $X$  uit de grondvergelijkingen (08.26)—(08.29) op te lossen. De hieronder volgende methode is echter eenvoudiger:

Wanneer men de grootte  $w$  elimineert uit de vergelijkingen (08.23) en (08.24) en in de uitkomst de kleine dempingstermen (die den factor  $\kappa$  bevatten) eenvoudigheidshalve verwaarloost, verkrijgt men de betrekking

$$w' \approx \frac{\mu_{22} - \mu_{12}\lambda_{12}}{\lambda_{12} - \mu_{12}} Uq'' + \frac{\mu_{22} - \mu_{12}^2}{\lambda_{12} - \mu_{12}} U\omega_0^2 q$$

of, wegens (08.22),

$$w' \approx w'_{\text{aequ}} + \frac{\mu_{22} - \mu_{12}\lambda_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \left( \frac{w_{\text{aequ}}^{\text{III}}}{\omega_0^2} \right). \quad (08.48)$$

Nu volgt echter uit (08.44)

$$w''_{\text{aequ}} = \frac{1}{2} C^2 \left[ C \int_0^s e^{-C(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma - f(s) + \right.$$

$$+ \frac{\omega_0^2}{C} \int_0^s \cos \omega_0(s - \sigma + \varepsilon) \cdot f(\sigma) d\sigma +$$

$$\left. + \frac{\omega_0}{C} \sin \omega_0 \varepsilon \cdot f(s) \right].$$

Daar echter volgens (08.43)

$$\sin \omega_0 \varepsilon \approx \frac{C}{\omega_0}$$

is, vallen de twee termen met  $f(s)$  in eerste benadering tegen elkaar weg. Daarom volgt verder

$$w^{\text{III}}_{\text{aequ}} \approx \frac{1}{2} C^2 \left[ -C^2 \int_0^s e^{-C(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma + Cf(s) - \frac{\omega_0^3}{C} \int_0^s \sin \omega_0(s-\sigma+\varepsilon) f(\sigma) d\sigma + \frac{\omega_0^2}{C} \cos \omega_0 \varepsilon \cdot f(s) \right]$$

of, daar  $\cos \omega_0 \varepsilon \approx 1$  is en  $\frac{C^2}{\omega_0^2}$  vergeleken bij 1 kan worden verwaarloosd,

$$\left( \frac{w^{\text{III}}_{\text{aequ}}}{\omega_0^2} \right) \approx \frac{1}{2} C^2 \left[ -\frac{C^2}{\omega_0^2} \int_0^s e^{-C(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma + \frac{f(s)}{C} - \frac{\omega_0}{C} \int_0^s \sin \omega_0(s-\sigma+\varepsilon) f(\sigma) d\sigma \right]. \quad (08.49)$$

Deze uitkomst tezamen met (08.44) in (08.48) substitueerend, volgt

$$w' = \frac{1}{2} C^2 \left[ -\left( 1 + \frac{C^2}{\omega_0^2} \frac{\mu_{22} - \mu_{12} \lambda_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \right) \int_0^s e^{-C(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma + \left( 1 - \frac{\mu_{22} - \mu_{12} \lambda_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \right) \frac{\omega_0}{C} \cdot \int_0^s \sin \omega_0(s-\sigma+\varepsilon) f(\sigma) d\sigma + \frac{\mu_{22} - \mu_{12} \lambda_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \frac{f(s)}{C} \right]. \quad (08.50)$$

Deze formule voor de gezochte versnelling kan nog een weinig worden vereenvoudigd door verwijdering van de term met den factor  $\frac{C^2}{\omega_0^2}$ . Gebruik makend van de door de formules (08.30) t/m (08.41) gegeven schattingen kan men n.l. laten zien, dat de grootheid  $\left| \frac{\mu_{22} - \mu_{12} \lambda_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \right|$  weliswaar niet ongeveer gelijk aan 1 is, doch wel deze orde van grootte bezit, zoodat de hieraan in de genoemde term toegevoegde factor  $\frac{C^2}{\omega_0^2}$  inderdaad tot een product leidt, dat vergeleken bij 1 kan — en ter wille van de consequentie zelfs moet — worden verwaarloosd. Het uiteindelijke resultaat luidt dus

$$w' = \frac{1}{2} C^2 \left[ -\int_0^s e^{-C(s-\sigma)} f(\sigma) d\sigma + \frac{\mu_{22} - \mu_{12} \lambda_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \cdot \frac{f(s)}{C} + \left( 1 - \frac{\mu_{22} - \mu_{12} \lambda_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \right) \cdot \frac{\omega_0}{C} \int_0^s \sin \omega_0(s-\sigma+\varepsilon) f(\sigma) d\sigma \right]. \quad (08.51)$$

Voor  $w_0 \rightarrow \infty$  moet deze versnelling natuurlijk in  $w'_{\text{aequ}}$  overgaan. Rekening houdend met (08.46)

komt in dit geval inderdaad (daar  $\Lambda_{\text{aequ}} = \frac{w_{\text{aequ}}'}{w_0 C}$  is) de formule (08.47) weer te voorschijn.

Geeft men aan de formule (08.51) den gelijkwaardigen vorm

$$w' = w_{\text{aequ}}' + \frac{1}{2} C \frac{\mu_{22} - \mu_{12} \lambda_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2} \left\{ f(s) - \omega_0 \int_0^s \sin \omega_0(s-\sigma+\varepsilon) f(\sigma) d\sigma \right\}$$

dan ziet men, dat de mate, waarin de in den romp gemeten versnelling afwijkt van de „equivalente versnelling”, die de belasting van het constructiemateriaal van den vleugel beheerscht, evenredig is met den factor

$$\frac{\mu_{22} - \mu_{12} \lambda_{12}}{\mu_{22} - \mu_{12}^2}.$$

08.7. Schrijft men (08.46) in den vorm

$$(\Lambda_{\text{aequ}})_{\omega_0 = \infty} = \frac{1}{2} \frac{f(s)}{w_0} - \frac{1}{2} C \int_0^s e^{-C(s-\sigma)} \frac{f(\sigma)}{w_0} d\sigma \quad (08.52)$$

dan blijkt, dat de invloed van de waarde van  $C$  op de belasting uitsluitend door den tweeden term in het rechterlid wordt beschreven. Deze invloed is kwalitatief en kwantitatief op grond van de in punt 06 uitgevoerde berekening reeds bekend. Voor de toetsing van (08.47) aan de uitkomsten van punt 06 kan er dus mee worden volstaan, de formule voor één enkele waarde van  $C$  numeriek uit te werken.

Wordt nu voor (08.45) geschreven

$$\Lambda_{\text{aequ}} = -\frac{1}{2} C \int_0^s e^{-C(s-\sigma)} \frac{f(\sigma)}{w_0} d\sigma + \frac{1}{2} \omega_0 \int_0^s \sin [\omega_0(s-\sigma) + \omega_0 \varepsilon] \frac{f(\sigma)}{w_0} d\sigma, \quad (08.53)$$

en vergelekt men dit met (08.52), dan blijkt dat de invloed van de beperkte buigstijfheid op de belasting ten volle in den 2<sup>den</sup> term van het rechterlid is vervat. Deze term bevat de parameter  $C$  uiterlijk niet, is echter toch van deze grootheid

afhankelijk, omdat de hoek  $\omega_0 \varepsilon$  overeenkomstig (08.43) ongeveer gelijk is aan  $\frac{C}{\omega_0}$ . Deze afhankelijkheid zal echter bij numerieke uitwerking geen aanzienlijke gevolgen hebben, omdat de hoek  $\omega_0$  in alle normale gevallen veel kleiner dan  $\frac{1}{2} \pi$  blijft. Dit beteekent, dat de verhooging van de belasting, samenhangend met de buiging van den vleugel, slechts in geringe mate afhankelijk is van de waarde van  $C$ . Op grond hiervan is besloten, de numerieke uitwerking der formules, die nog altijd zeer tijdrovend is, uitsluitend uit te voeren voor één waarde van  $C$ , n.l. het aannemelijke gemiddelde

$$C = 0,04.$$

De twee andere in de formules optredende parameters hebben in de 16 numeriek uitgewerkte gevallen de volgende waarden:

$$\begin{matrix} \omega_0 = & \underbrace{0,3} & \underbrace{0,6} & \underbrace{1,2} & \underbrace{\infty^1)} \\ s_g = 0 & 0; 4; 10; 25 & 0; 4; 10; 25 & 0; 4; 10; 25 & 0; 4; 10; 25 \end{matrix}$$

08.8. De uitkomsten van de numerieke berekeningen zijn samengevat in de figuren 45 t/m 48.

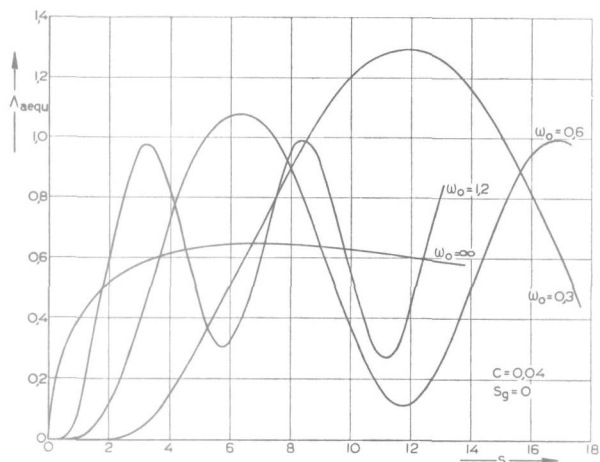


Fig. 45.

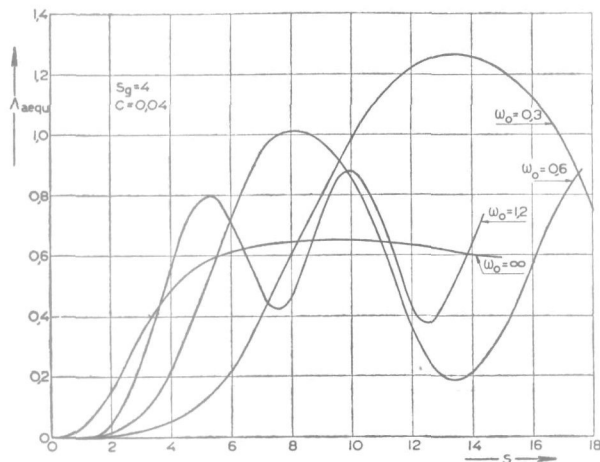


Fig. 46.

Zij toonen op overtuigende wijze, dat de buiging van den vleugel een enormen invloed op de belasting kan hebben, welke invloed kennelijk samen-

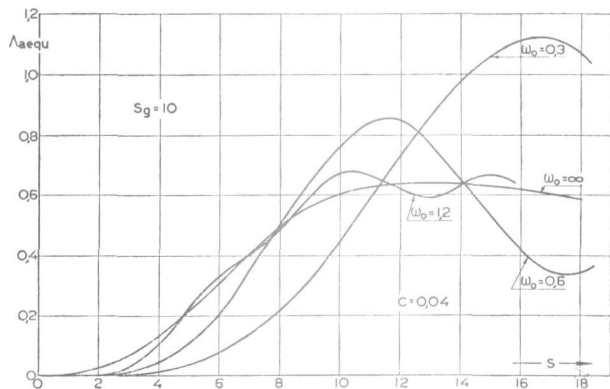


Fig. 47.

hangt met het ontstaan eener vleugeltrilling. Alvorens de gevolgen der buigingstrilling nader te onderzoeken is het wenschelijk, de aan het slot van punt 08.5 besproken verificatie uit te voeren, d.w.z. de in fig. 45 t/m 48 voor  $\omega_0 = \infty$  vervatte uitkomsten te vergelijken met de gegevens, die fig. 17 bevat. Deze vergelijking valt gunstig uit. Quali-

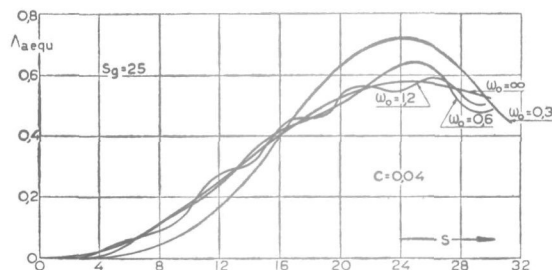


Fig. 48.

tatief is het gedrag van den belastingscoëfficiënt in beide gevallen hetzelfde. De quantitative overeenstemming kan worden beoordeeld aan de navolgende getallen voor de maximale waarde van den belastingscoëfficiënt:

- volgens fig. 45 t/m 48 voor  $s_g = 0, 4, 10$  en  $25$  resp.  $\Lambda_{\max} = 0,65; 0,65; 0,63, 0,58$ ;
- volgens fig. 18 voor  $C = 0,04$  en voor dezelfde waarden van  $s_g$ :  $\Lambda_{\max} = 0,69; 0,69; 0,68; 0,62$ .

De verschillen bedragen telkens ongeveer 6%, een percentage dat in het gegeven geval van geen belang is. Worden nu de uitkomsten die voor eindige waarden van  $\omega_0$  zijn uitgewerkt, nader bestudeerd, dan blijkt direct, dat de buiging een zéér uiteenlopenden invloed op de belasting kan hebben. Deze is bijzonder groot — zóó groot, dat de maximale waarde van  $\Lambda$  bijna kan worden verdubbeld — als  $s_g$  en  $\omega_0$  beide klein zijn; hij loopt echter reeds voor  $s_g = 25$  tot een betrekkelijk kleine

<sup>1)</sup> Dit geval levert de contróle op formule (08.47).



rest terug, die voor hooge waarden van  $\omega_0$  zelfs onbeteekenend wordt. Om tot een nauwkeuriger oordeel te komen kan men trachten, uit de figuren 45 t/m 48 een grafiek af te leiden voor het verband tusschen de maximale waarde van den coëfficiënt  $\Lambda_{\text{aequ}}$  en de parameters  $s_g$  en  $\omega_0$ . Bij de constructie van deze grafiek stuit men echter op het bezwaar, dat de functie  $\Lambda_{\text{aequ}}(s)$  in vele gevallen meer dan één maximum vertoont. Van mathematisch standpunt bezien zou ieder dezer extremen, in de volgorde waarin zij worden bereikt, het best afzonderlijk kunnen worden onderzocht. Het resultaat hiervan zou echter uit een heele bundel krommen bestaan, waarvan vele technisch van ondergeschikte beteekenis zouden zijn, omdat tenslotte alleen het absoluut hoogste maximum voor de beoordeeling van de vereischte sterkte van de constructie beslissend is. Bovendien kan worden opgemerkt, dat tengevolge van de op nul teruggebrachte demping het eerste maximum een weinig en alle volgende steeds meer te hoog

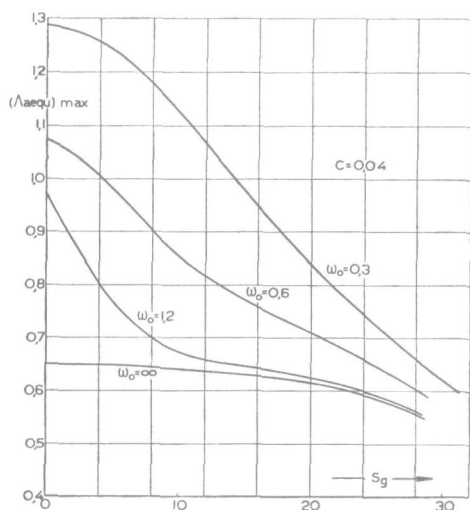


Fig. 49.

moeten zijn uitgevallen. Getracht is aan deze bezwaren te ontkomen, door in iedere  $\Lambda_{\text{aequ}}$ -lijn uit de figuren 45 t/m 48 één maximum aan te wijzen, dat als maatgevend kan worden opgevat (dit blijkt bij beschouwing der figuren in den regel geen moeite op te leveren), en alleen voor deze maxima zoo goed mogelijk een ondubbelzinnig verband met de parameters  $\omega_0$  en  $s_g$  aan te geven. Langs dezen weg is de grafiek van fig. 49 verkregen. Men is geneigd op grond van deze grafiek de conclusie te trekken, dat het in het algemeen — vooral bij minder stijve vleugels — niet geoorloofd zal zijn, de buiging van den vleugel buiten beschouwing te laten bij de berekening van de belasting op het constructiemateriaal van den vleugel. Tegenover deze conclusie moge nu echter het resultaat worden gesteld van juist op dit punt uitgevoerde proef-ondervindelijke onderzoeken. Dit kan in 2 uitspraken worden samengevat:

- registratie van den rek, die in het constructiemateriaal van den vleugel optreedt onder de inwerking der remousbelasting, bevat slechts bij uitzondering sporen, die wijzen op het

optreden van buigingstrillingen van den vleugel;

- bij systematische vergelijking van belastingen, afgeleid uit simultaan uitgevoerde versnellingsmetingen, opgenomen in den romp van het vliegtuig, en rekmetingen in het constructiemateriaal van den vleugel, wordt geen verschil van beteekenis geconstateerd (zie lit. 23).

Deze 2 feiten, die natuurlijk met elkaar in verband staan, wijzen er op, dat  $\Lambda_{\text{aequ}}$  in werkelijkheid niet aanzienlijk verschilt van  $(\Lambda_{\text{aequ}})_{\omega_0 = \infty}$ , of liever van den coëfficiënt  $\Lambda$ , behoorend bij de zwaartepuntsversnelling. De in fig. 49 vervatte uitkomsten hiermede in verband brengend komt men tot de slotsom, dat de in werkelijkheid aangetroffen remousvelden in overgrootte meerderheid zoo breede overgangsgebieden vertoonen, dat slechts betrekkelijk onbeteekenende buigingstrillingen van den vleugel en dus slechts zeer beperkte verhoogingen van de belasting te voorschijn worden geroepen.

Het kleinste getal, dat voor de effectieve waarde van  $s_g$  in aanmerking komt, ware op minstens 25 te stellen, welk getal aan een vliegtuig van middelbare afmetingen zou kunnen worden toegevoegd. Fig. 49 levert immers eerst voor dergelijke waarden van  $s_g$  en een normale waarde van  $\omega_0$  (b.v.  $\omega_0 \approx 0,6$ ) een belastingsverhoging, die onder de grens komt, welke een redelijk nauwkeurig experiment te voorschijn moet brengen. Daarmede is voor den moeilijk te beoordeelen parameter  $s_g$  op betrouwbare basis in ieder geval een onderste grenswaarde vastgelegd, die men ook bij alle vroeger — in voorgaande punten — verkregen uitkomsten in aanmerking zal mogen nemen.

Daar het aantal proeven, waarbij rekken en versnellingen gelijktijdig zijn gemeten, nog niet heel groot is en daarbij ook geen moderne groote vliegtuigen met slappen vleugel zijn gebruikt, verdient het aanbeveling, voorloopig rekening te houden met de mogelijkheid, dat de buiging van den vleugel toch een niet te verwaarloozen belastingsverhoging op het constructiemateriaal van den vleugel te voorschijn roept, wanneer het vliegtuig heel groot is (waardoor  $s_g$  bij gegeven werkelijke breedte van het remousveld kleiner uitvalt) en de vleugel zóó slap is, dat  $\omega_0$  in de buurt van 0,3 terecht komt. De toeslag, die onder zulke

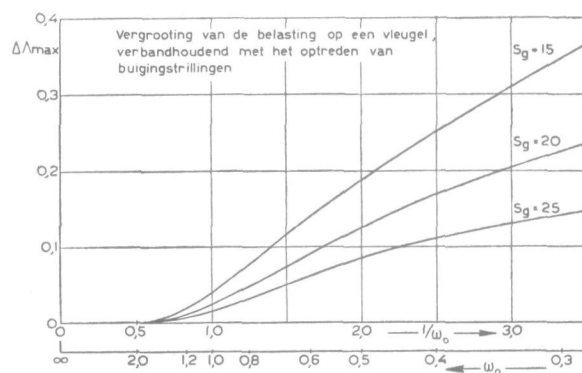


Fig. 50.

omstandigheden op uitkomsten zal moeten worden gelegd, welke zijn verkregen zonder de buiging van den vleugel in aanmerking te nemen, kan worden afgelezen uit fig. 50, welke fig. is afgeleid uit de grafiek van fig. 49.

Een afdoende conclusie zal kunnen worden getrokken, wanneer meer experimenteel materiaal beschikbaar komt.

### 09. De draagkrachtverdeeling over vleugel en horizontaal staartvlak.

Reeds in punt 02.3 werd er de aandacht op gevestigd, dat voor het vraagstuk van de verdeling van het niet-stationnaire aandeel van de dragende kracht over de breedte van vleugel of horizontaal staartvlak — een vraagstuk, dat deel uitmaakt van de algemeene aerodynamische theorie voor de luchtkrachten op een draagvlak van eindige breedte bij niet-stationnaire stroomingstoestand — tot nu toe nog geen bruikbare oplossing werd gevonden, al zijn er aanwijzingen (lit. 17), dat hierin binnen afzienbaren tijd wel verandering zal komen.

Hoewel dus geen definitief resultaat te verwachten is, is het desalniettemin wenschelijk het vraagstuk der draagkrachtverdeling hier met eenige uitvoerigheid aan de orde te stellen. Het blijkt n.l., dat men zich op betrekkelijk eenvoudige en aanschouwelijke wijze een inzicht kan verschaffen in de kwalitatieve eigenschappen van het stroomingsveld om den vleugel van eindige breedte. Op grond hiervan kan een poging worden gewaagd althans tot een schatting te komen van de draagwijdte en vooral van de praktische beteekenis, die aan de leemte toekomt, welke de meer exacte kennis blijft vertoonen. De slotsom zal zijn, dat deze niet zoo ernstig is, als op het eerste gezicht misschien wordt verwacht.

Het uitgangspunt van de hieronder volgende beschouwingen wordt gevormd door de veronderstelling, dat de vleugel mag worden vervangen door een enkele dragende werveldraad. Zooals bekend is dit een veronderstelling, waarvan de aerodynamische theorie van het draagvlak van eindige breedte in een stationnaire strooming met succes gebruik maakt. Hoewel op grond van den aard van het wervelveld in het zog van den vleugel verwacht moet worden, dat deze opvatting in het instationnaire geval minder doelmatig zal blijken te zijn, lijkt het toelaatbaar, haar voor een uitsluitend kwalitatief onderzoek te accepteren. In het gegeven geval zal de sterkte van dezen „gebonden wervel”, een functie zijn van:

- 1°. de parameters, die de meetkundige eigenschappen van den vleugel vastleggen (dat zijn in eerste instantie de gedaante in bovenaanzicht en de wrong);
- 2°. de parameters, die de snelheidsverdeling in het remousveld bepalen (dat zijn de grootheden  $w_0$  en  $s_g$  wanneer wordt aangenomen dat het atmosferische stroomingsveld een remousveld met overgangsg gebied is);
- 3°. een coördinaat  $y$  langs de dwarsas van het vliegtuig;

- 4°. de sinds het invliegen in het remousveld afgelegden weg  $s$ .

Het is soms gewenscht, de onder 3°. en 4°. genoemde afhankelijkheid expliciete aan te geven, hetgeen geschiedt door te schrijven

$$\Gamma = \Gamma(y; s).$$

Als deze functie voor één of ander geval bekend is, ligt daarmede voor dat geval tevens de geheele wervelverdeling in het zog van den vleugel vast. Volgens een bekende grondstelling der hydrodynamica moet immers het geheele wervelsysteem in het vloeistofveld in gesloten wervellijnen, ieder voorstellende een wervel met bepaalde constante intensiteit, kunnen worden ontbonden. Daar iedere wervel verder — wanneer wordt afgezien van de wijziging van de positie van de wervels door de door hen zelf geïnduceerde stoorsnelheden — in het zog achterblijft op de plaats, waar hij werd gevormd, valt hieruit af te leiden, dat het zog twee stelsels werveldraden bevat; n.l. sleepende wervels, die evenwijdig aan de vliegbaan loopen, en „parallel-wervels”, die evenwijdig aan de dragende wervel zijn. Deze kunnen onderling, mede gebruik makend van den vleugelwervel, tot rechthoeken worden gecombineerd. De sleepende wervel op een afstand  $y$  van het symmetrievlak van het vliegtuig heeft in het punt  $s = \sigma$  van de baan de sterkte

$$\left| d\Gamma_s(y; \sigma) \right| = \left| \frac{\partial \Gamma(y; \sigma)}{\partial y} dy \right| \quad (09.1)$$

terwijl de parallel-wervel aldaar de sterkte

$$\left| d\Gamma_p(y; \sigma) \right| = \left| \frac{\partial \Gamma(y; \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma \right| \quad (09.2)$$

heeft. Het is te verwachten, dat de sleepende wervels vooral in de omgeving van de vleugeleinden zullen zijn geconcentreerd, zooals dat ook bij stationnaire stroomingstoestanden het geval is. Deze veronderstelling vormt de basis van de in punt 07 opgenomen berekening van de niet-stationnaire neerstrooming ter plaatse van de staartvlakken.

Over den aard van de functie  $\Gamma(y; s)$  kan vervolgens eenige kwalitatieve kennis worden vergaard door den gedachtengang te generaliseeren, die bij stationnaire stroomingstoestand de bekende vergelijking van Prandtl voor de circulatieverdeling oplevert. Deze gedachtengang kan als volgt worden ingekleed. Men beschouwt een willekeurig gelegen smal strookje van den vleugel en splitst het geheele wervelveld in 2 componenten, waarvan de eerste identiek is met den enkelen oneindig langen wervel, die aanwezig zou zijn als het strookje van een oneindig breeden vleugel deel uitmaakte. Als die eerste component er alléén was, zou het verband tusschen wervelsterkte en invalshoek worden gegeven door de bekende formule der twee-dimensionale theorie

$$\Delta L = \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2 l \Delta y \cdot k_\infty \alpha = \rho U \Gamma \Delta y. \quad (09.3)$$

Vervolgens wordt aangenomen, dat de invloed van

den tweeden component van het wervelveld op de instelling van de circulatie in rekening kan worden gebracht door bemiddeling van den invalshoek, die dit wervelsysteem ter plaatse van het strookje induceert. Wordt deze door  $\alpha_{\text{ind}}$  voorgesteld, dan leidt deze superponeering op grond van (09.3) tot de formule:

$$\rho U \Gamma = \frac{1}{2} \rho U^2 \cdot 2l \cdot k_{\infty} (\alpha + \alpha_{\text{ind}}). \quad (09.4)$$

In wezen is dit de vergelijking van Prandtl voor de als onbekend opgevatte functie  $\Gamma \equiv \Gamma(y)$ , die er behalve expliciete in het linkerlid bovendien implicite in de functie  $\alpha_{\text{ind}}$  in vóórkomt.

Nu kan een formule van het type (09.4) in het niet-stationnaire geval eveneens direct worden opgeschreven. Vervangt men n.l. de vroeger voortdurend gebruikte  $k_2$ -functie door de  $k_1$ -functie op grond van de overweging, dat de samentrekking van den vleugel op een werveldraad geen gelegenheid open laat, rekening te houden met het geleidelijk binnendringen van den vleugel in het remousveld, dan levert de theorie voor het 2-dimensionale stroomveld de betrekking

$$\begin{aligned} \Delta L &= \\ &= \left[ \rho U l \cdot \frac{1}{2} k_{\infty} \int_0^s k_1(s - \sigma) \frac{\partial}{\partial \sigma} (w_r - w) d\sigma \right] \Delta y = \\ &= \rho U \Gamma \Delta y. \end{aligned} \quad (09.5)$$

Daar de afgelegde weg  $s$  bij gebruik van deze formule op de koorde van den vleugel dient te zijn betrokken, is eenvoudigheidshalve aangenomen, dat de vleugel rechthoekig is. Is dat niet het geval, dan moet in de laatste formule strikt genomen een transformatie worden opgenomen, die de reductie van den weg door één bepaalde vooraf aan te wijzen koorde in rekening brengt.

Men beschouwe den vleugel nu vooreerst op het moment, waarop hij in het remousveld binnendringt. Daar op dit moment nog geen verstoring in het stroomingsveld aanwezig is, die een willekeurig strookje van den vleugel ervoor kan waarschuwen, dat het deel uitmaakt van een vleugel van eindige afmetingen is het evident, dat de draagkracht in exacte overeenstemming met de formule (09.5) der tweedimensionale theorie moet inzetten. Is de vleugel rechthoekig, dan is de draagkrachtverdeling in het allereerste begin dientengevolge eveneens rechthoekig. Volgens (09.1) moeten zich in dezen toestand echter sterke nagenoeg geheel bij de vleugeleinden geconcentreerde sleepende wervels vormen. Om de verdere ontwikkeling te kunnen voorspellen, moet daarom de bij de bespreking van de vergelijking van Prandtl vermelde splitsing van het wervelveld worden uitgevoerd. Deze is aangegeven in fig. 51. Het blijkt, dat de component, die het tweedimensionale karakter van het stroomingsveld verstoort, uit 2 U-vormige wervels bestaat. De werking van deze kan nu weer in rekening worden gebracht door bemiddeling van de invalshoeken, die zij induceeren ter plaatse van den dragenden wervel, waarna de terugwerking op de wervelverdeling kan worden ontleend aan de formule (09.5), nadat hierin  $w_r - w$  door  $U\alpha_{\text{ind}}$  is vervangen.

Met het oog op de structuur van de inductieformule van Biot en Savart

$$dw_{\text{ind}} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} dl$$

is het evident, dat de snelheden, die de beide U-wervels ter plaatse van den dragenden wervel induceeren, wanneer men de onmiddellijke omgeving van de vleugeleinden uitsluit, uiterst klein zullen zijn, zoolang de U erg nauw, het verbindingsstuk der beenen dus kort is. Alleen vlak bij de vleugeleinden zullen groote, kennelijk negatieve invalshoeken worden geïnduceerd, die de draagkracht aldaar onmiddellijk sterk moeten reduceeren. Dientengevolge moet de in het allereerste moment rechthoekige draagkrachtverdeling enkele oogenblikken na het invliegen in het remousveld aan de vleugeleinden een scherp afrondingsproces ondergaan.

Het gevolg hiervan is, dat de sleepende wervels

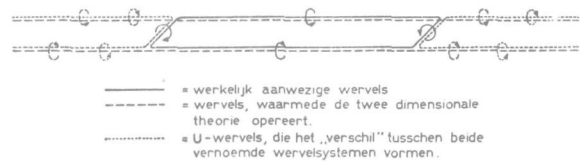


Fig. 51.

in de omgeving van de vleugeleinden, die daar eerst een sterke concentratie vertoonen, zich over een breeder bandje verspreiden. Dit verschijnsel, gevoegd bij de verlenging van de reeds aanwezige sleepende wervels en het verder uiteenvallen van de beenen der eerstaanwezige U-wervels, moet tot gevolg hebben, dat allengs ook verder binnen de vleugeleinden negatieve invalshoeken van merkbare grootte worden geïnduceerd. Deze inductie zal een zich geleidelijk steeds meer naar binnen voortzettend afrondingsproces van de draagkrachtverdeling veroorzaken. Men realiseere zich, dat de totale draagkracht daarbij nog voortdurend snel zal aangroeien.

Daar het systeem der wervels, die tot den geïnduceerden invalshoek bijdragen<sup>1)</sup>, zich steeds uitbreidt, ontstaat al gauw een toestand, die weinig overzichtelijk is, waardoor het met name onmogelijk wordt, de zich instellende wijzigingen quantitatief met enig succes te schatten. Het eenige, wat nog kan worden voorspeld is, dat het afrondingsproces van de draagkrachtverdeling zich geleidelijk aan verder zal ontwikkelen, waarbij op den duur een toestand zal worden bereikt, die nagenoeg de gebruikelijke verdeling der stationnaire draagkracht op den vleugel te zien zal geven. Deze toestand wordt bereikt nadat de draagkracht, te voorschijn geroepen door de remousstrooming, zijn eindwaarde bijna heeft bereikt en de verticale beweging van het vliegtuig nog slechts langzame wijzigingen van den invalshoek veroorzaakt. De toestand krijgt dan immers practisch de gebruikelijke stationnaire kenmerken.

<sup>1)</sup> die meer algemeen zoolw uit U-vormige als uit rechthoekige wervels bestaan (de rechthoekige vallen alleen op het eerste moment, direct na het binnendringen, weg).

Het is thans duidelijk, dat de draagkrachtverdeling, aanwezig op het moment, waarop de belasting zijn grootste waarde bereikt, de draagkrachtverdeling dus, waarom het eigenlijk begonnen is, precies tot de toestanden behoort, die het moeilijkst te beoordeelen zijn. Het eenige wat hierover — voor den rechthoekigen vleugel — kan worden gezegd is, dat zij *tusschen de rechthoekige en de normaal-stationnaire in zal liggen*. Daarbij moet als normaal-stationnaire die draagkrachtverdeling worden opgevat, die is toegevoegd aan den vorm van den vleugel *zonder* wrong, daar een wrong van den vleugel voor de remousbelasting kennelijk geen primaire beteekenis heeft.

Neemt men in aanmerking, dat de in werkelijkheid aangetroffen remousvelden bijna altijd een vrij breed overgangsgebied bleken te bezetten, waardoor de ontwikkeling van stationnaire kenmerken wordt bevorderd, dan ligt het vermoeden voor de hand, dat de gezochte draagkrachtverdeling wel niet al te veel van de normaal-stationnaire zal verschillen. Daarmede is dan echter tevens een werkbasis aangewezen voor de uitvoering van de sterkteberekening, waarvan kan worden gezegd, dat zij aanvaardbaar is, zoolang een niet overbodige preciseering niet beschikbaar is.

Wanneer de vleugel niet rechthoekig is, wordt de structuur van het zich ontwikkelende wervelveld nog minder overzichtelijk. Het is aannemelijk, dat de draagkrachtverdeling in dit geval op het allereerste moment vrijwel overeen zal stemmen met het verloop van de koorde langs de vleugelbreedte. Dientengevolge ontstaan reeds van het eerste oogenblik af over de geheele vleugelbreedte verspreide sleepende wervels, waardoor de „2e component” van het wervelveld, bepaald voor een willekeurig strookje van den vleugel, reeds direct uit een heele collectie wervels bestaat, die ten deele den vorm van U-wervels hebben en die ten deele gesloten rechthoeken vormen. Ook het veld der geïnduceerde snelheden wordt daardoor reeds direct meer gecompliceerd. Bovendien echter heeft de draagkracht de neiging zich dáár sneller op den invalshoek in te stellen, waar de koorde het kleinst is. De mogelijkheid bestaat dus, dat de beginverdeling thans bij een sterk tapschen vleugel naar buiten toe een verhooging ondergaat. Over de toestanden, die daarbij ontstaan, valt zonder nadere, meer volledige gegevens, niet veel te zeggen. Het eenige wat zeker is, is dat uiteindelijk de normaal-stationnaire verdeling, toegevoegd aan het koordeverloop van den vleugel (dus *wrong* buiten beschouwing gelaten), weer moet worden benaderd. Ook in dit geval zal de sterkteberekening deze verdeling vermoedelijk zonder daarmede een ernstige fout te maken kunnen gebruiken.

Nog gecompliceerder wordt het vraagstuk der draagkrachtverdeling over het horizontale staartvlak, omdat dit vlak zich in het „vreemde” stroomveld bevindt, dat de vleugel te voorschijn roept. Het beste wat men kan doen is de draagkrachtverdeling uitrekenen, die optreedt in stationnaire vliegt toestanden, waarbij zich in het zog van den vleugel vol-ontwikkelde sleepende wervels bevinden. Deze berekening lijkt nog juist uitvoerbaar. Het

is echter zeer de vraag, of de uitkomst de moeite zal loonen. In den regel zal men wel rekenen met de normaal-stationnaire verdeling, die het onverwongen staartvlak in een ongestoord stroomingsveld vertoont.

## 10. Theorie en meetmateriaal.

10.1. Nu uit de in de voorgaande nummers opgenomen berekeningen een redelijk volledig theoretisch overzicht van het gedrag van de remousbelasting is verkregen, kan een vergelijking van de theorie met — en toepassing van de theorie op — belastingmetingen worden beproefd.

Het is goed er zich bij voorbaat van bewust te zijn, dat althans wat een toetsing van de theorie aan het experiment betreft, hooggespannen verwachtingen niet op hun plaats zijn. Ten eerste is n.l. de nauwkeurigheid van belastingmetingen, tijdens de vlucht in een vliegtuig uit te voeren, in het algemeen niet hoog (voor versnellingsmetingen op zijn best ca. 0,1 g, d.i. vaak bijna 10% van de hoogste door remous veroorzaakte versnellingen) en ten tweede is niet alleen de detailstructuur van het stoorveld altijd onbekend, doch zijn zelfs over de weinige in principe voor een statistische opgave toegankelijke hoofdeigenschappen van het remousveld bijna nooit gegevens beschikbaar. In verband met de verwachting, dat de theorie voor werkelijke remousbelastingen belangrijke inlichtingen zal kunnen verschaffen, wordt bij deze inconveniënten nog afgezien van het feit, dat de geïdealiseerde toestanden, die toch in ieder geval den *grondslag* van de theorie vormen, in werkelijkheid nooit in hun „zuiveren” vorm worden aangetroffen.

Als derde bezwaar kan worden genoemd, dat het gebruik van literatuurgegevens vaak ernstig wordt belemmerd door het ontbreken van elementaire gegevens over vliegtuig en vliegtuigtoestand (de parameter  $C!$ ), die men bij een volledige discussie van de belastingmetingen noodig heeft.

De tweede groep der zoojuist genoemde moeilijkheden vervalt voor het grootste deel bij versnellingsmetingen, uitgevoerd in een z.g. remoustunnel aan vliegtuigmodellen. Remoustunnels zijn in Nederland niet aanwezig; zooals bekend is, beschikt echter het National Advisory Committee for Aeronautics (NACA) in het Langley Memorial Aeronautical Laboratory (U.S.A.) over een dergelijke installatie. De moeilijkheden, die men zonder twijfel ondervindt bij de constructie van vliegtuigmodellen, wier dynamische eigenschappen vergelijkbaar blijven met die van een vliegtuig op ware grootte, heeft men weten te overwinnen. Uit de enkele gepubliceerde meetresultaten leidt men af, dat de instandhouding van een bevredigende meetnauwkeurigheid de zwakste plek van deze methode van onderzoek is. Daar de metingen in principe een directe toetsing van de theorie toelaten, ligt het voor de hand in de eerste plaats het resultaat hiervan nader te bezien.

10.2. Een beschrijving van de tunnelinstallatie is opgenomen in de „Technical Note” No. 706 (Mei 1939, lit. 20) van het NACA, welke mede-

deeling tevens de eenige metingen bevat, welke zijn gepubliceerd. De bouw is zeer eenvoudig en kan zeer in het kort als volgt worden geschetst.

Het vliegtuigmodel wordt met correct ingestelde roeren (motoren ontbreken) met een kleine catapult-startinstallatie „afgeschoten” en passeert in vrije vlucht een bijna horizontaal baantraject, waarlangs een door een tunnel geleverde verticaal naar boven gerichte „stoorstreaming” heerscht, om aan het eind daarvan in een net te worden opgevangen. Door de vliegbaan op geringen afstand boven den tunnelmond te houden, wordt een zeer

De metingen, welke voor een vergelijking met de uitkomsten der theorie in het gegeven geval in aanmerking komen, zijn verricht aan vijf verschillende vliegtuigmodellen. Dit waren alle zuivere verkleiningen van een normaal type middendekker. Alleen de motoren ontbraken. Drie modellen hadden een rechthoekigen vleugel en twee een trapeziumvleugel. De vleugels waren zoo stijf geconstrueerd, dat zelfs in ongunstige gevallen geen buigingstrillingen te verwachten waren. De beschikbare gegevens zijn in de onderstaande tabel samengevat.

Gegevens van vliegtuigmodellen										
Model no.	Gewicht	Vleugelopp. <sup>3)</sup> m <sup>2</sup>	G/F kg/m <sup>2</sup>	Vleugelwijdte m	Gemidd. koorde <sup>4)</sup> m	Slankheid <sup>5)</sup> m	eind-wortel-koorde / koorde	Zwaartepunt <sup>1)</sup> %	$\frac{\partial c_a}{\partial \alpha} = k$ <sup>6)</sup>	C <sup>2)</sup>
I	0,896	0,112	8,0	0,915	0,136	6,73	1	25	4,63	0,0239
II	0,586	0,112	5,23	0,915	0,136	6,73	1	25	4,63	0,0364
III	0,617	0,112	5,50	0,915	0,136	6,73	1	25	4,63	0,0345
IV	0,617	0,097	6,36	0,915	0,1235	7,45	0,418	25	4,73	0,0289
V	0,935	0,097	9,63	0,915	0,1235	7,45	0,418	25	4,73	0,0192

<sup>1)</sup> In % van de gemiddelde aerodynamische koorde.  
<sup>2)</sup>  $C = \frac{\frac{1}{2} \rho q l k}{G/F}$  volgens formule (05.08). Het gewicht C is in deze formule vermeerderd met  $\pi \rho l^2 \cdot 2 b \cdot g$ , waardoor de hydrodynamische toeslag op de vleugelmasse in rekening wordt gebracht.  
<sup>3)</sup> Het door den romp gedekte gedeelte niet medegerekend.  
<sup>4)</sup> Aerodynamische koorde.  
<sup>5)</sup>  $\frac{\text{vleugelwijdte}}{\text{gem. aerod. koorde}}$   
<sup>6)</sup> Volgens windtunnelproeven.

scherpe grens van het stoorveld verkregen, d.w.z. een zeer geringe breedte van het „overgangsgebied van het remousveld”. Er is door geschikte afscherming voor gezorgd, dat de stoorsnelheid langs het heele in aanmerking komende baantraject constant is. Met behulp van dergelijke afschermingen kan ook een remousveld met overgangsgebied worden geïmiteerd. De grootste stoorsnelheid ( $w_0$ ) kan binnen wijde grenzen worden gevarieerd. Door wijziging van de instelling van de startinstallatie kan ook de vliegsnelheid worden gevarieerd, echter kennelijk slechts binnen tamelijk nauwe grenzen. Bijna alle proeven zijn althans verricht bij een vliegsnelheid van 60 ft/sec, de weinige overige bij 40 ft/sec. Het werken met kleinere vliegsnelheid stuit o.m. ook op het bezwaar, dat de versnellingen dan kleiner worden (vergelijk formule (05.12)!), waardoor de bezwaren, veroorzaakt door de beperkte meetnauwkeurigheid, scherper te voorschijn komen.

De versnellingsmeting geschiedt met een in het model ingebouwden registreerenden versnellingsmeter. Daarnaast wordt de vliegbaan fotografisch vastgelegd. Er is voor gezorgd, dat de versnellingsregistratie en de baanfotografie synchronisatie-teekens bevatten.

In de bovenstaande tabel komt tot uitdrukking, dat de zwaartepuntsligging van het vliegtuig niet is gevarieerd. De proeven geven dus geen inlichtingen over den invloed van den parameter  $\varepsilon$  op de versnelling, men zal kunnen rekenen met  $\varepsilon = 0$  (samenvallen van zwaartepunt en drukpunt).

Voor de versnelling dient theoretisch (volgens (05.12)) te gelden

$$\frac{\dot{w}}{g} = \frac{w_0 U}{lg} \cdot C \Lambda. \quad (10.1)$$

De maximale waarde van den coëfficiënt  $\Lambda$  kan het best aan fig. 34,  $\varepsilon = 0$  stellend, worden ontleend.

Bij de proeven is de parameter  $C$  op de in de tabel tot uitdrukking komende wijze gevarieerd. De zeer beperkte variatie van de vliegsnelheid  $U$  werd reeds vermeld. De snelheid  $w_0$  tenslotte is — hoewel dit wellicht het minst interessant is — tussehen wijde grenzen gewijzigd.

Blijft als laatste gewichtige variabele over de breedte  $s_0$  van het overgangsgebied van het remousveld (betrokken op de halve vleugelkoorde). Hieraan zijn twee waarden toegekend, n.l. de waarde 0 (scherp begrensd remousveld) en de waarde 25.

Daarbij moet worden opgemerkt, dat getracht is de variatie van de stoorsnelheid binnen het overgangsgedrag linear — aan weerszijden continu, doch met een knik aansluitend — te doen verlopen, en dus niet volgens de aan weerszijden gladde aansluiting gevende cosinuswet, verondersteld bij de ontwikkeling van de theorie. Echter is de verwachting, dat dit niet veel uit zal maken, reeds in no. 03 uitgesproken en toegelicht.

Volgens fig. 34 behoren voor  $s_g = 0$  en  $\varepsilon = 0$  de volgende waarden van  $C$  en  $\Delta_{\max}$  bij elkaar

$C$	$= 0,0239$	$0,0364$	$0,0345$	$0,0289$	$0,0192$
$\Delta_{\max}$	$= 0,743$	$0,705$	$0,709$	$0,726$	$0,764$

en voor  $s_g = 25$  en  $\varepsilon = 0$  de twee volgende — alleen door de proeven gedekte — waarden

$$C = 0,034 \quad \Delta_{\max} = 0,62.$$

Voor  $U = 60 \text{ ft/sec} = 18,3 \text{ m/sec}$  vindt men uit

en voor  $s_g = 25$

$$C = 0,0345; l = 0,068 \text{ m}; \left(\frac{\dot{w}}{g}\right)_{\max} = 0,179 w_0.$$

De weinige versnellingsmetingen bij  $U = 40 \text{ ft/sec} = 12,2 \text{ m/sec}$  tenslotte zijn in overeenstemming met de formule (10.1) linear naar  $U = 60 \text{ ft/sec}$  en dienen dan te voldoen aan de betrekking

$$\left(\frac{\dot{w}}{g}\right)_{\max} = 0,205 w_0 \text{ voor } C = 0,0345; l = 0,068 \text{ m}.$$

Al deze aan de theorie ontleende lineaire betrekkingen tusschen  $\left(\frac{\dot{w}}{g}\right)_{\max}$  en  $w_0$  zijn tezamen met de resultaten van de metingen in de figuren 52, 53 en 54 uitgezet. Uit deze figuren blijkt, de bovenstaande toelichtingen in aanmerking genomen, voldoende welke proeven met verschillende vliegtuigmodellen zijn uitgevoerd.

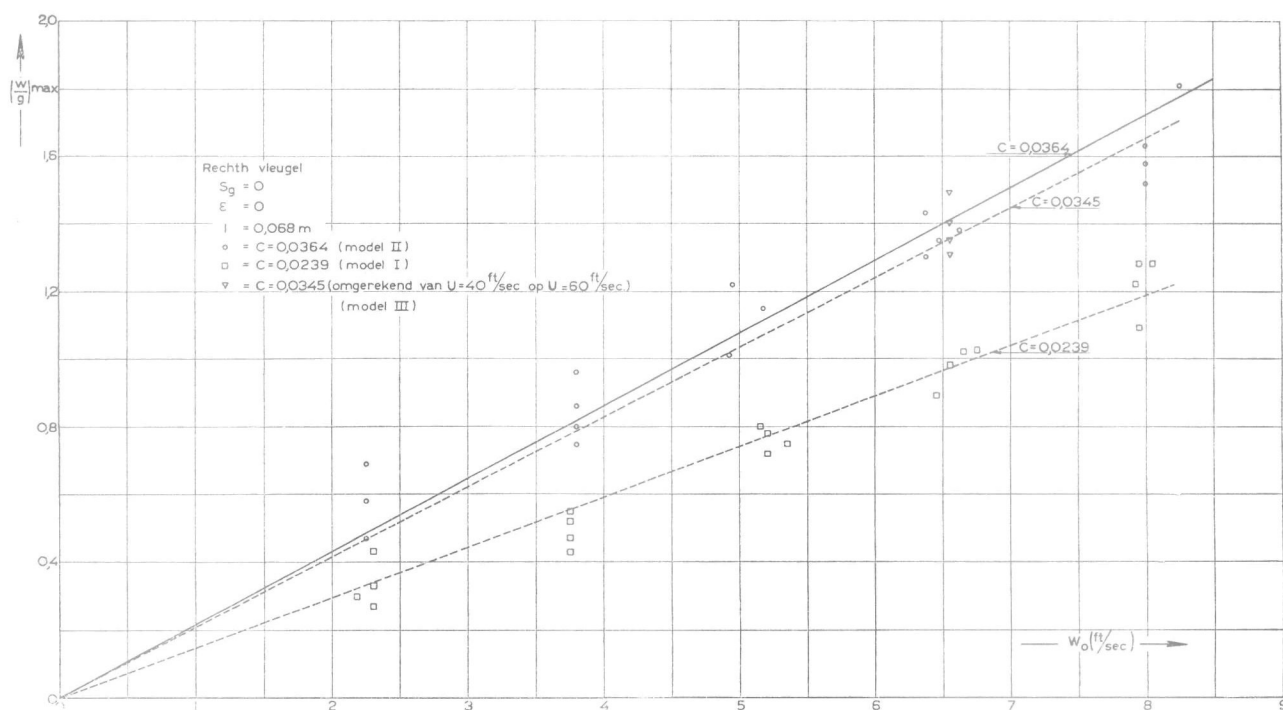


Fig. 52.

formule (10.1) voor  $s_g = 0$ , als  $w_0$  in ft/sec wordt ingevuld

$C =$	$0,0239$	$0,0364$	$0,0345$	$0,0289$	$0,0192$
$l(\text{m})^1 =$	$0,068$	$0,068$	$0,068$	$0,0618$	$0,0618$
$\left(\frac{\dot{w}}{g}\right)_{\max} =$	$0,1485 w_0$	$0,2145 w_0$	$0,205 w_0$	$0,193 w_0$	$0,135 w_0$

<sup>1)</sup> Zie de tabel op pag. 64.

<sup>2)</sup> Er wordt de aandacht op gevestigd, dat deze overeenstemming niet door schaafeffecten werd bedreigd, omdat de aerodynamische parameter  $k = \frac{\partial c_a}{\partial \alpha}$  aan metingen (met het kleine vliegtuigmodel) was ontleend.

Men concludeert uit de figuren, dat theorie en proef binnen de grenzen der meetnauwkeurigheid en der oncontroleerbare storingen overeenstemmen<sup>2)</sup>, óók voor de modellen met tapschen vleugel. Daar, waar een groep meetpunten een weinig buiten het theoretisch verband lijkt te vallen, wordt n.l. door onderlinge vergelijking van alle metingen eerder tot een kleine systematische meetfout dan tot een afwijking van de theorie besloten. Uit de figuren blijkt echter tevens, dat de meetnauwkeurigheid en de reproduceerbaarheid van de metingen niet zoo groot zijn, dat van een zeer scherpe contrôle zou kunnen worden gesproken. Ook is de contrôle niet zeer volledig. Men zou graag de vliegsnelheid  $U$  binnen wijder grenzen gevarieerd willen zien en vooral ook den invloed van de zwaartepuntsligging — waaromtrent uit de proeven nauwelijks iets valt af te leiden —

willen verifiëren. Desondanks blijft het resultaat bevredigend.

Het is wellicht van eenig belang vast te stellen, dat het in de publicatie van het NACA gegeven advies, in de formules en bewerkingen der theorie met een vleugeloppervlak  $F'$  te rekenen, dat t.o.v. het zuivere oppervlak van de beide halve vleugels

moeten worden onderworpen. Deze metingen bestaan hetzij uit versnellingsmetingen, hetzij uit rekmetingen. De rekmetingen worden verricht aan een hoofdconstructiedeel van den vleugel. Voor een voldoende stijven vleugel (vergelijk punt 08) zijn de gegevens, die deze twee methoden opleveren in beginsel gelijkwaardig, als de belasting een sym-

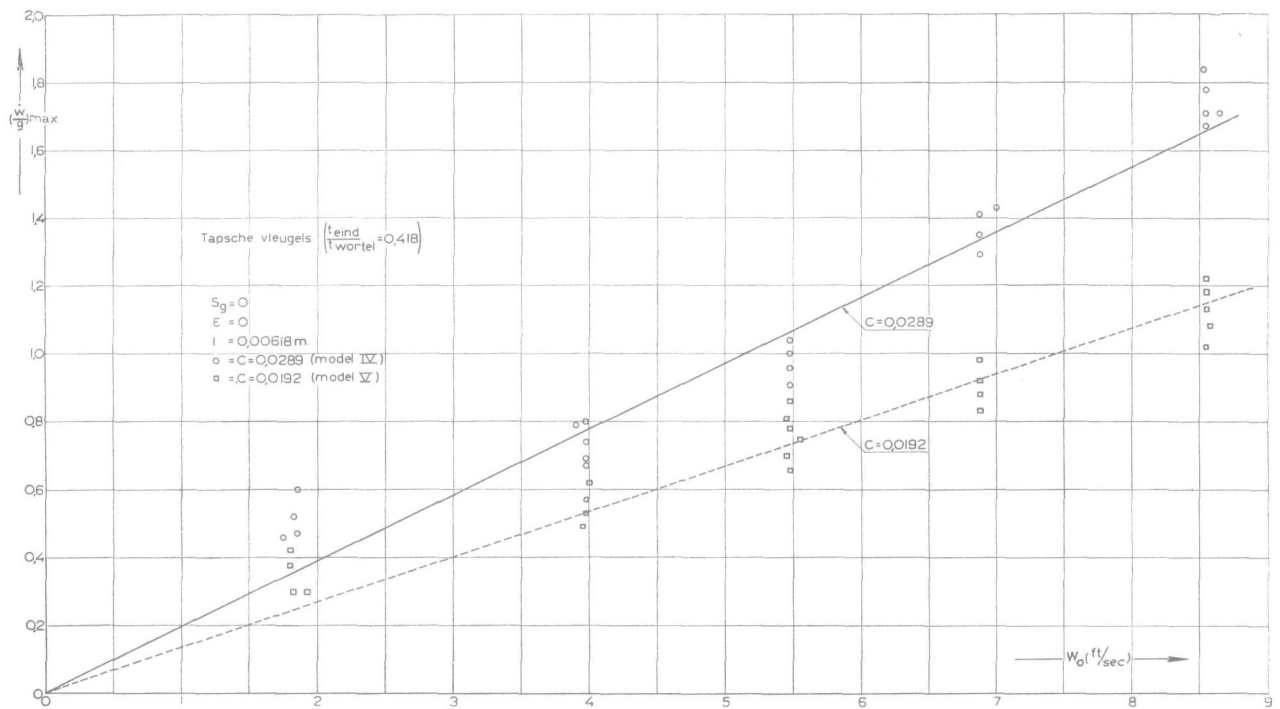


Fig. 53.

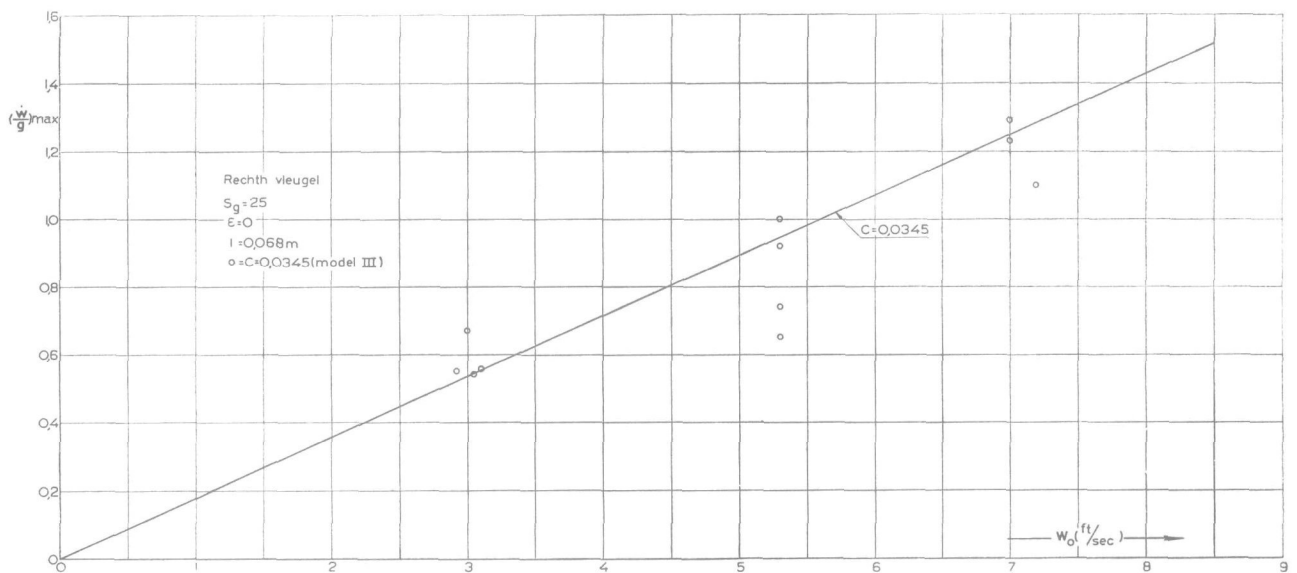


Fig. 54.

is vergroot met een bedrag, dat als oppervlak van het door den romp ingenomen deel van den vleugel op te vatten ware, in de gegeven gevallen *niet* tot een verbetering blijkt te leiden.

10.3. Het zijn vervolgens de belastingsmetingen in het werkelijke vliegtuig, die aan een onderzoek

metrische verdeling vertoont. Is dat niet het geval, dan zou de rekmeting strikt genomen zowel aan den stuurboord- als aan den bakboordvleugel moeten worden verricht, en wel simultaan, en zou van de uitkomsten het gemiddelde moeten worden gevormd, om een getal te krijgen, dat voor den symmetrischen component van de belasting geldig

is en dat direct vergelijkbaar is met de versnellingsmeting (uit te voeren in het zwaartepunt van het vliegtuig).

Het is wenschelijk, op de gevolgen van het ontbreken van symmetrie (t.o.v. het symmetrievlak van het vliegtuig) der atmosferische verstoringen nog even nader in te gaan. Daar de luchtkrachten op een draagvlak lineaire functies zijn van de stoorsnelheden en de symmetrische en antimetrische componenten der storingen van den aanvankelijk stationnair en symmetrisch aan te nemen vliegtoestand zooals bekend is in hooge mate onafhankelijk van elkaar zijn (hetgeen overigens grootendeels op hetzelfde neerkomt), is het geoorloofd, een asymmetrische atmosferische storing in een symmetrischen en een antimetrischen component te ontbinden en beide bij het onderzoek der belasting afzonderlijk te behandelen.

Men dient er dan echter rekening mede te houden, dat bij de in deze verhandeling ontwikkelde theorie is aangenomen, dat de verdeling der stoorsnelheid, waaraan het vliegtuig wordt onderworpen, niet alleen symmetrisch, maar bovendien geheel van de coördinaat  $y$  langs de dwarsas onafhankelijk is. Deze laatste eigenschap vertoont de symmetrische component eener storingsverdeling in het algemeen niet, als er tevens een aanzienlijke antimetrische component is (zie onder). Desalniettemin zijn de gemaakte berekeningen ook in een dergelijk geval toch wel van toepassing, mits de oogenblikkelijke symmetrische storingscomponent wordt vervangen door dát, van  $y$  onafhankelijk gemaakte „gemiddelde voor den geheelen vleugel”, dat ongeveer dezelfde draagkrachtresultante te voorschijn roept. Deze resultante bepaalt immers de versnelling. Natuurlijk mag dit procédé géén basis vormen voor een berekening van de spanningen in het constructiemateriaal van het vliegtuig, daar de lastverdeling hierbij een essentiële rol speelt. Wat dit betreft vormt de veronderstelling, dat de verdeling van de stoorsnelheid niet van de  $y$ -coördinaat afhangt, dus een beperking, echter één, die aanvaardbaar was omdat het de stoorvelden met deze bijzondere eigenschap zijn, die de hoogste symmetrische belastingen leveren. Een en ander kan op de volgende wijze nader worden toegelicht: Ongetwijfeld zal het bijna altijd mogelijk zijn, de niet door het vliegtuig verstoorde stroomlijnen in het remousveld binnen een deel van de ruimte, dat ongeveer de afmetingen van een vliegtuig heeft, op te vatten als een bundel nagenoeg evenwijdige lijnen. Deze stroomlijnen zullen vervolgens kunnen worden verenigd tot een bundel van (binnen hetzelfde ruimtedeel) nagenoeg platte vlakken, zóó, dat ieder vlak de stroomlijnen bevat, waarbij één zelfde grootte van de stroomsnelheid behoort (bij evenwijdige stroomlijnen behoort bij ieder exemplaar een bepaalde constante snelheid). In aansluiting op dit beeld kan worden vastgesteld, dat een nagenoeg symmetrische remousbelasting zal optreden, als het vliegtuig het veld zóó binnenvliegt, dat het symmetrievlak (van het vliegtuig) vanaf het oogenblik, waarop het de grens van het remousveld passeert tot aan het oogenblik, waarop de belasting haar hoogste waarde bereikt (wat daarna gebeurt, is

van ondergeschikt belang) nagenoeg loodrecht staat op de vlakken van den genoemden bundel. De storing, die het vliegtuig treft, is dan tevens in hooge mate van de  $y$ -coördinaat onafhankelijk, zoodat de ontwikkelde theorie op zulke gebeurtenissen in zijn volle consequentie kan worden toegepast.

Verder maakt de beschreven voorstellingswijze van het remousveld het duidelijk, dat de belastingen met relatief grooten antimetrischen component juist dan op zullen treden, als het symmetrievlak van het vliegtuig een kleinen hoek maakt met de vlakken van den bundel, m.a.w. als het vliegtuig het remousveld zeer scheef invliegt. De verdeling van den symmetrischen storingscomponent is dan inderdaad niet langer onafhankelijk van de  $y$ -coördinaat, hoogstens is dit een grenstoestand, die de thans tevens veranderlijke verdeling van dezen component op den duur benadert (n.l. als het vliegtuig in zijn geheel in het gebied van de grootste stoorsnelheid terecht is gekomen). Nu is de onderlinge afstand van de snijpunten van de baankromme, welke het vliegtuig beschrijft, met opéenvolgende vlakken uit den bundel kennelijk de maat, die bepaalt met welk tempo zich de storing van het evenwicht van het vliegtuig ontwikkelt. Bij een symmetrische storing was deze maat gekoppeld aan den parameter  $s_p$ . Het scheef invliegen gaat dus in zekeren zin gepaard met een vergrooting van de effectieve waarde van dezen parameter, of in de practijk: met een vervlakking van het stootkarakter, dat de krachtinzet vertoont. Die stoot roept echter juist de hooge belasting te voorschijn. Hierop berust de gevolgtrekking, dat bij remousbelastingen, die (getoetst aan de grootte van de krachten) een aanzienlijken antimetrischen component vertoonen, in het algemeen betrekkelijk kleine krachten in het spel zullen zijn, en dat omgekeerd een hevige remousstoot met hooge waarschijnlijkheid gepaard is gegaan met tamelijk wel „recht” invliegen op het remousveld.

In lit. 21 en lit. 22 worden proeven vermeld, waarbij zoowel de versnelling als de rek in den ligger van één vleugel(helft) zijn gemeten. Het daarbij verkregen materiaal is nog van geringen omvang. Vergelijkt men door beide methoden geleverde simultane extremen der belasting, dan komt een resultaat voor den dag, dat zoo ongeveer met fig. 55 overeenkomt (in welke figuur een aantal der genoemde resultaten zijn verwerkt). De figuur doet inzien, dat er inderdaad een spreiding is om de lijn, die de langs beide wegen bepaalde belastingsextremen aan elkaar gelijk stelt, deze spreiding is echter — mede in aanmerking genomen dat de meetnauwkeurigheid bij dit soort metingen niet hoog is — niet zeer groot, zoodat men kan rekenen dat rek- en versnellingsmetingen practisch gelijkwaardig zijn voor het belastingsonderzoek<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Om uit rekmetingen een belastingsfactor, vergelijkbaar met den factor  $n$ , te halen, moet men niet — zooals wel schijnt te gebeuren — deelen door den stationnair rek, die in het materiaal optreedt onder de door het gewicht van het vliegtuig gevormde belasting, doch een herleiding toepassen, die de in aanmerking komende krachtverdelingen in rekening brengt. Dit is noodzakelijk omdat bij de remousbelasting een wrong van den vleugel geen rol speelt en bij de luchtkrachtbelasting in stationnaire vlucht wél.



Het is aannemelijk, dat de spreiding voor het grootste deel door antimetrische belastingscomponenten wordt veroorzaakt. Men kan tevens de gevolgtrekking maken, dat aan deze belastingsvormen, voor wat betreft de sterkte van den ligger van den vleugel, geen hooge beteekenis toekomt (hetgeen niet zeggen wil, dat antimetrische belastingen geen nader onderzoek verdienen. Zij zouden n.l. zeer wel voor de sterkte van andere constructiedelen maatgevend kunnen zijn). Daar er verder in fig. 55

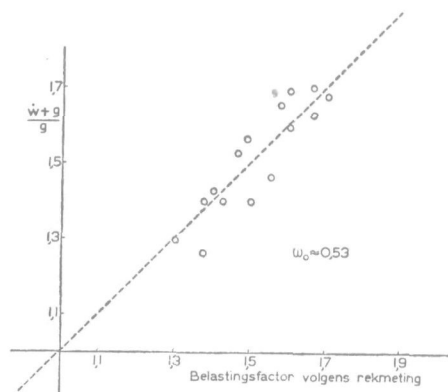


Fig. 55.

geen spoor is te zien van een systematisch overheerschen der rekbelastingen, zijn er blijkbaar ook geen vleugeltrillingen van beteekenis opgetreden. Deze conclusie wordt bevestigd bij een nader onderzoek van rekregistraties, waarin zoo'n trilling gemakkelijk te herkennen moet zijn, doch nimmer werd gevonden. Men dient echter steeds in het oog te houden, dat het aantal metingen, waar het hier over gaat, zeer beperkt is en dat daarbij geen groote vliegtuigen met — wat de buiging betreft — slappen vleugel zijn gebruikt, in welk geval de ontwikkeling van buigingstrillingen zeer zou worden begunstigd.

Wanneer men van de belasting (in den vorm van versnellingen of rekken) een registratie maakt heeft deze bijna zonder uitzondering den vorm van een grillig om de factorwaarde 1 slingerende kromme. Hierin komt de onregelmatige verdeling langs de vliegbaan van de atmosferische verstoringen tot uitdrukking. Deze heeft tot gevolg, dat een analyse van de details der registratie weinig zin heeft. Het eenige verschijnsel, dat hierin te voorschijn zou moeten komen en dat van belang is, de vleugelbuigingstrilling, blijkt immers te ontbreken. Het primaire gegeven, dat uit de registratie wordt ontwikkeld, is dan ook van statistischen aard en bestaat uit een z.g. frequentiekromme. Deze wordt verkregen door in de registratie het totale aantal belastingstoppen<sup>1)</sup> te tellen en de aantallen toppen, welke binnen de intervallen van een fijne verdeling van de belastingschaal („klassenverdeling”) vallen. Vervolgens wordt de relatieve veelvuldigheid der toppen op de gemiddelde belastingswaarde voor ieder interval (iedere

klasse) uitgezet. (Daar aan de intervallen een eindige breedte moet worden toegekend, verkrijgen in de grafiek een eindig aantal eventueel door een geknikte lijn te verbinden punten).

Zij  $H$  het totaal aantal aanwezige toppen en  $H_i$  ( $i=1 \dots k$ ) het aantal, dat valt binnen het interval  $n = n_i$  tot  $n = n_i + \Delta n$  van de  $k$  intervallen ter breedte  $\Delta n$ , waarin de schaal van den belastingsfactor is verdeeld, dan vormen de  $k$  punten  $(n_i + \frac{1}{2} \Delta n; \frac{H_i}{H})$  punten van de frequentiekromme. Een aan lit. 23 ontleend voorbeeld van zoo'n grafiek geeft fig. 56. Het spreekt vanzelf, dat men in plaats van den belastingsfactor ook de versnelling  $\frac{w}{g}$  kan uitzetten.

Deze uitwerkingsmethode der registraties heeft één bezwaar en wel dit, dat het aflezen der registraties veel tijd in beslag neemt, omdat men noodzaakt is het natuurlijk enorm groote aantal zeer kleine extremen eveneens geheel uit te tellen, terwijl aan deze toch slechts een zeer beperkte praktische beteekenis toekomt. Men kan hieraan ontkomen door alleen de toppen binnen de „belangrijk” geachte belastingsklassen (intervallen van de schaal van den belastingsfactor) vast te stellen en de relatieve veelvuldigheden  $\frac{H_i}{H} = \frac{H_i}{\sum H_i}$  te vervangen door b.v. op één uur vliegtijd, of beter nog 1000 km trajectlengte betrokken aantallen. Vooral bij de uitwerking van een uitvoerig meetmateriaal zal men deze vereenvoudiging moeten aanbrengen, en dit geldt ook, wanneer — zooals soms het geval is — het „registratiepapier” in het instrument, waarmee de meting is uitgevoerd, slechts langzaam opschuift, waardoor de afbeelding van de zeer frequente geringe belastingswisselingen in elkaar gaat vloeien<sup>1)</sup>.

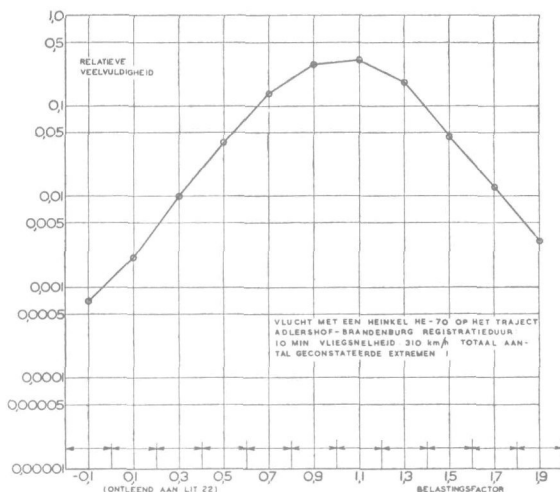


Fig. 56.

<sup>1)</sup> Als „top” is op te vatten zoowel ieder maximum der positieve belastingen als ieder maximum der negatieve.

<sup>1)</sup> In plaats van een registreerenden versnellingsmeter kan een z.g. grensversnellingsmeter worden toegepast, die de telling automatisch verricht (deze instrumenten tellen het aantal overschrijdingen van bepaalde gewoonlijk instelbare grensversnellingen). Meestal reageeren grensversnellingsmeters alleen op vrij groote versnellingen en zijn de intervallen relatief groot, zoodat men een beeld krijgt van de belastingen, dat weinig gedetailleerd is.

Een experimenteel verkregen frequentiekromme kan voor zeer uiteenlopende omstandigheden geldig zijn. Zij kan een afbeelding geven van de belastingstoppen, aangetroffen tijdens een relatief korte vlucht in onrustige lucht (zooals fig. 56), zij kan deze gegevens echter ook voor een trajectlengte van tienduizenden km lengte samenvatten. Om de systematische verschillen, die in zulke gevallen te voorschijn kunnen komen, te kunnen beoordelen moet worden nagegaan van welke gesteldheden de vorm van een frequentiekromme afhankelijk zal zijn.

Het is de theorie, die voor de beantwoording van de bovenstaande vraag de grondslagen verschaft. Zij heeft doen inzien, dat de belasting in eerste instantie afhankelijk is van de parameters  $U$ ,  $C$ ,  $l$  en  $\varepsilon$  van vliegtoestand en vliegtuig, en van de parameters  $w_0$  en  $s_g$  van het remousveld. Daarenboven kan nog een heele reeks andere vliegtuigparameters (b.v. de tapschheid van den vleugel, het traagheidsmoment om de dwarsas, de staartlengte, enz.) worden genoemd, die in beginsel eenigen invloed moeten hebben, deze zal echter in het algemeen relatief klein zijn, net als de invloed van bepaalde detaileigenschappen van het remousveld. Van dezelfde geringe orde zullen de afwijkingen zijn, veroorzaakt door de aanhoudende verstoring van den vliegtoestand, waardoor niet strikt is voldaan aan de veronderstelling der theorie, dat de begintoestanden geheel ongestoord zijn. Daarbij kan tevens worden gedacht aan de verschillen tusschen toestanden van lichte en hevige remous, geïntroduceerd door de in het laatste geval altijd noodzakelijke voortdurende correctie van den vliegtoestand via de stuurorganen.

Uit het bovenstaande volgt, dat in het algemeen ieder complex meetresultaten, verkregen voor elk vliegtuig, een verschillende typische frequentiekromme zal leveren. Zijn de vliegtuigen of vliegtoestanden verschillend, dan ligt de primaire oorzaak voor een deel in de variatie van de parameters  $l$ ,  $C$ ,  $U$ ,  $\varepsilon$  en voor de rest in de eigenschappen van het remousveld, die ook van statistisch standpunt in het algemeen met de geografische ligging van het traject, het jaargetijde en/of het karakter der weersomstandigheden variëren. Voor gelijke vliegtuigen en vliegtoestanden moeten alle verschillen natuurlijk aan de laatstgenoemde variaties worden toegeschreven. *Alleen voor vliegtuigen van éénzelfde type, die op dezelfde wijze beladen zijn, moeten bij gelijktijdig uitgevoerde meetvluchten langs éénzelfde traject behoudens toevallige spreidingen identieke resultaten worden verkregen.*

Wanneer men de theorie der remousbelasting dus aan metingen wil toetsen, komen als grondslag daarvoor in de eerste plaats frequentiekrommen in aanmerking, verkregen met behulp van gelijktijdig op eenzelfde traject uitgevoerde meetvluchten met twee (of meer) vliegtuigen in zoodanige vliegtoestanden, dat bij voorkeur slechts één der karakteristieke parameters  $l$ ,  $C$ ,  $U$ ,  $\varepsilon$  een verschillende waarde heeft. De verschillen der frequentiekrommen kunnen dan met de variatie van dien parameter worden vergeleken.

Men heeft in principe op deze wijze (aan een

enkel voorbeeld) kunnen verifiëren, dat de maximale belastingen inderdaad nauwkeurig evenredig zijn met de vliegsnelheid, zooals de formule (10.1) dat eischt. Voor nadere gegevens hierover wordt naar lit. 5 verwezen. Een tweede punt, dat zóó is onderzocht, is de invloed van de zwaartepuntligging. De benodigde metingen zijn uitgevoerd door de D.V.L. aan een Heinkel He 45 D-vliegtuig en aan een Henschel 122. In beide gevallen leidde een zwaartepuntsverplaatsing naar achteren in overeenstemming met de theorie tot een vergroting van de belasting. Deze bedroeg — wanneer de zwaartepuntsverandering op de grootste toegelaten waarde werd gebracht — bij het eerste vliegtuig ongeveer 20 % en bij het tweede 17—28 %, gemiddeld dus vermoedelijk ca. 22 %. Jammer genoeg ontbreekt in de desbetreffende publicatie (lit. 22) een ondubbelzinnige opgave van de grootte der zwaartepuntsverplaatsing. Waarschijnlijk bedraagt deze voor het Heinkel-vliegtuig ca. 10 % van de gemiddelde aerodynamische koorde ( $\Delta\varepsilon=0,2$ ) en voor het Henschel-vliegtuig rond 15 %, dus  $\Delta\varepsilon=0,3$ . Om de meting behoorlijk met het in de figuren 32 t/m 34 samengevatte resultaat van de theorie te kunnen vergelijken, moet ook de parameter  $C$  bekend zijn. Ook deze wordt niet opgegeven, doch laat zich langs een omweg voor beide vliegtuigen op ca. 0,033 schatten.

Uit fig. 34 vindt men voor  $\Delta\varepsilon=0,2$ ;  $C=0,033$  en  $s_g=25$  een belastingverhoging van rond 8 % en voor  $\Delta\varepsilon=0,3$ ;  $C=0,033$  en  $s_g=25$  rond 11 %. Beide percentages blijven een flink stuk onder de gemeten verhogingen. Deze laatste zouden eerst bij aanmerkelijk grooter breedten van het overgangsgebied worden bereikt (wellicht ongeveer bij  $s_g=40^1$ ). De gegevens zijn echter te onzeker en onvolledig om tot een redelijk scherpe contróle te komen. Als positief resultaat kan dus alleen de kwalitatieve overeenstemming worden aangemerkt.

Andere naar het beschreven programma uitgevoerde proeven zijn voor zoover bekend niet uitgevoerd. Het is zeer jammer, dat nimmer is gepoogd, op deze wijze ook den invloed van de waarde van den parameter  $C$  te onderzoeken, b.v. door vergelijking van frequentiekrommen, onder dezelfde omstandigheden opgenomen met een onbeladen en een volbeladen vliegtuig van gelijk type. Ook uit zulk soort metingen zou vermoedelijk een schatting voor de effectieve waarde van den parameter  $s_g$  kunnen worden afgeleid.

De waarden van de parameters  $C$ ,  $U$  en  $\varepsilon$  kunnen voor iedere meetvlucht in principe — wanneer men zich daartoe de moeite geeft — in ieder geval globaal worden vastgesteld. Men kan de gemeten belastingsveelvouden dan met de formule (10.1) zonder verdere gegevens herleiden tot getallen voor de grootheid  $w_0 \Lambda$  (de waarde van  $\varepsilon$  is voor deze herleiding niet eens nodig). Wanneer nu bovendien de effectieve waarde van den parameter  $s_g$  bekend was, welke eventueel een functie van  $w_0$  zou kunnen zijn, dan zou men de grootte van den

<sup>1)</sup> Het optreden van een groote waarde voor  $s_g$  wordt begunstigd door de kleinheid van de vliegtuigen, waaraan de metingen werden verricht. Beide hebben een gemiddelde koorde van slechts 2 à 2½ m.

coëfficiënt  $\Lambda$  aan de uitkomsten van de theorie kunnen ontleenen, hetgeen het mogelijk zou maken tot een frequentiekromme voor de grootste stoorsnelheid  $w_0$  te komen. De uitkomsten hiervoor zouden voor gelijktijdig op eenzelfde traject uitgevoerde vluchten met willekeurige vliegtuigen, afgezien van toevallige afwijkingen, identiek moeten zijn. Zij zouden echter — wellicht met iets grooter spreiding — ook moeten overeenkomen voor een samenvatting van systematisch uitgevoerde meetvluchten langs een bepaald traject, die niet gelijktijdig zijn uitgevoerd, doch die binnen een zoo ruim tijdvak vallen, dat — statistisch gesproken — mag worden aangenomen, dat ieder vliegtuig op het gegeven traject alle mogelijke weersomstandigheden heeft meegemaakt. De enkelvoudige uiteindelijk verkregen frequentiekromme voor  $w_0$  bepaalt dan de gemiddelde veelvuldigheid van gegeven stoorsnelheidsextremen, aangetroffen op het gegeven traject. De geldigheid ervan zal beperkt kunnen zijn tot een bepaald deel van den dag, b.v. den namiddag, als alle meetvluchten 's middags werden uitgevoerd.

De experimenteele verificatie van de identiteit van daarvoor in aanmerking komende frequentiekrommen voor de maximale stoorsnelheid  $w_0$  levert niet zoo'n doorzichtige contrôle op de theorie als de eerder genoemde proeven, daar het moeilijk zal zijn, vast te stellen, waar de oorzaak van eventueel te voorschijn komende verschillen zou moeten worden gezocht. Juist voor de toepassing van de theorie is zij echter van doorslaggevende beteekenis. Blijkt het immers mogelijk uit belastingsmetingen een uniforme frequentiekromme voor  $w_0$  af te leiden, dan kan men blijkbaar ook bij gegeven stoorsnelheden voor willekeurige vliegtuigen met goed succes de grootste belastingen voorspellen.

Een bezwaar ligt natuurlijk in de noodzaak effectieve waarden voor den parameter  $s_g$  te bepalen. Wellicht zou deze parameter bij de uitwerking van de metingen binnen aannemelijke grenzen kunnen worden gevarieerd en zou de effectieve waarde naderhand zoo kunnen worden vastgelegd, dat de uitkomsten voor de frequentiekromme zooveel mogelijk overeenstemmen.

Een werkelijk zorgvuldige contrôle van den bovengenoemden aard is voor zoover bekend nooit uitgevoerd. Zij is dan ook allerminst eenvoudig, daar men een omvangrijk meetmateriaal noodig heeft, dat over langen tijd en gebruik makend van allerlei vliegtuigen moet worden verzameld en dat aan een zeer tijdroovende uitwerking moet worden onderworpen. Toch is in deze richting wel iets ondernomen. H. W. Kaul heeft n.l. bij de Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt de belastingsextremen, welke direct uit de belastingsregistraties werden afgeleid, eerst gedeeld door de grootheid

$$\frac{w_0 U}{lg} C \Lambda \quad \text{met } w_0 = 10 \text{ m/sec}$$

daarbij  $\Lambda$  bepalend volgens in de Deutsche Sterktevoorschriften opgenomen aanwijzingen, welke kunnen worden opgevat als een globale — o.m. den invloed van de zwaartepuntsligging buiten be-

schouwing latende — vereenvoudiging van de uitkomsten van de hier ontwikkelde theorie.

De zoo gereduceerde belastingsextremen zijn in frequentiekrommen verwerkt en wel voor vliegtuigen van uiteenlopend type. Hoewel het meetmateriaal lang niet van den omvang was, noodig voor een egaliseering van verschillen, geïntroduceerd door verschillen der weersomstandigheden tijdens de meetvluchten, blijkt toch dat zich op dezen grondslag reeds met eenig recht een soort „eenheidskromme” voor de veelvuldigheid der gereduceerde belastingsstoppen laat vaststellen, ook al is er nog flinke spreiding in de voor verschillende vliegtuigen verkregen uitkomsten.

Men zal inzien, dat de bovenbeschreven behandeling van het meetmateriaal in ruwe trekken aequivalent is met een herleiding van gemeten belastingen naar stoorsnelheidsextremen. Het resultaat kan als een zeer ruwe bevestiging van de theorie worden opgevat.

Ook door het Nationaal Luchtvaartlaboratorium zijn eenige systematische belastingsmetingen (rekmetingen) uitgevoerd, die in principe voor statistische uitwerking in aanmerking komen. Vooral daarvoor geschikt zijn de metingen, uitgevoerd op de Indië-lijn van de K.L.M. in vliegtuigen van het type Douglas DC 2 en DC 3. Deze metingen hebben betrekking op vele tienduizenden kilometers trajectlengte. Jammer genoeg is echter de uitwerking van het materiaal dermate onvolledig<sup>1)</sup>, dat de resultaten voor het hier aan de orde zijnde doel nauwelijks van belang zijn. Men heeft n.l. bij de uitwerking alleen gelet op de zeer hooge in de registraties aangetroffen belastingspieken, die zoo zelden worden aangetroffen, dat de toevalfactor op de daarvoor bepaalde frequenties ondanks den omvang van het materiaal nog geenszins is geëlimineerd. Het schijnt, dat de belastingen voor de DC 2 iets hooger uitvallen dan voor de DC 3. Het verschil kan naar de orde van grootte wellicht worden gekarakteriseerd door de belastingsfactoren  $n \approx 1,7$ ; resp.  $\approx 1,6$ , welke beide een frequentie 0,2 per 1000 km trajectlengte vertoonen (zie lit. 26).

Voor beide vliegtuigen zijn de ter zake dienende gegevens hieronder vermeld.

vliegtuig	$l(m)$	$G/F$ ( $kg/m^2$ )	$C^2$	$U$ ( $m/sec$ )
DC 2	1,81	96	0,037	75
DC 3	1,76	120	0,029	80

Wanneer  $\Lambda$  wordt ontleend aan de lijn voor  $s_g = 25$  van fig. 18, vindt men

<sup>1)</sup> Bovendien zijn alle rekken betrokken op den rek, die in stationaire vlucht optreedt, hetgeen — zooals reeds werd opgemerkt — niet strikt juist is.

<sup>2)</sup> Bepaald voor de gemiddeld op de Indië-lijn aangehouden vlieghoogte van 3000 m.

vliegtuig	$\Lambda_{\max}$	$\frac{UC \Lambda_{\max}}{lg} \left( \frac{\text{sec}}{\text{m}} \right)$	$n - 1$ ( $w_0$ in m/sec)
DC 2	0,635	0,100	0,100 $w_0$
DC 3	0,675	0,091	0,091 $w_0$

in welke tabel de betrekking

$$n - 1 = \frac{\dot{w}}{g} = \frac{w_0 U}{lg} C \Lambda$$

is verwerkt. In overeenstemming met de experimenteel verkregen uitkomst dient de belasting voor de DC 2 dus een matig bedrag grooter te zijn dan voor de DC 3. Het „experimentele verschil”

$$\frac{(1,7-1) - (1,6-1)}{1,6-1} \times 100 \% = 17 \%$$

is grooter dan het theoretische (10 %), aan dit verschil mag echter geen enkele betekenis worden gehecht, omdat de proefuitkomst om reeds vermelde redenen zeer onnauwkeurig is. Daarenboven is de gebruikte waarde van  $s_p$  onzeker, terwijl ook het effect van de zwaartepuntsligging buiten beschouwing is gelaten. Men mag vaststellen, dat er kwalitatieve overeenstemming is. Daaraan ware toe te voegen, dat de maximale stoorsnelheid, die met de genoemde — een frequentie 0,2 per 1000 km vertoonende — belastingstoppen overeenkomt, rond 7 m/sec bedraagt.

10.4. De discussie van het experiment moet tot het voorgaande beperkt blijven. Het is duidelijk, dat het resultaat nog onbevredigend is. Het onderwerp lijkt belangrijk genoeg, om een meer volledig experimenteel onderzoek te motiveeren. Bij een dergelijk nader onderzoek zouden de volgende richtlijnen bij voorkeur in het oog moeten worden gehouden.

*a. Methode.* In aanmerking komen de beide hierboven gesignaleerde methoden, te weten

- 1°. Het gebruik van voldoende gelijktijdig uitgevoerde meetvluchten boven een bepaald traject met vliegtuigen van verschillend type, of van gelijk type met verschillende belading, of verschillende vliegsnelheid. Alle metingen dienen op gelijke vlieghoogte te worden uitgevoerd. Het verkregen meetmateriaal mag van beperkten omvang zijn, het kan b.v. voor ieder vliegtuig met een totale trajectlengte van enkele honderden km overeenkomen (registratieduur b.v. ca. 1 uur).
- 2°. De systematische opneming van belastingsregistraties tijdens vluchten langs een bepaald geografisch traject met vliegtuigen van verschillend type. Hieruit kunnen eerst inlichtingen worden verkregen, nadat de invloed van de wisselende weersomstandigheden voldoende is uitgewischt. Hiervoor is een totale registratieduur van vele honderden uren benodigd.

*b. Omstandigheden.* Bij een onderzoek volgens de hierboven onder 1°. genoemde methode zal de inrichting van de proeven altijd van te voren zorgvuldig worden overwogen. Nadere aanwijzingen daarvoor kunnen hier achterwege blijven. Bij de lijnvluchten, waarvan bij de tweede methode gebruik zal moeten worden gemaakt, heeft men de proefomstandigheden waar het op aan komt, niet in de hand. Het gevolg is, dat bij de uitwerking dikwijls onontbeerlijke gegevens ontbreken. Behalve het vliegtuigtype en de ligging van het traject moeten — op zijn minst globaal — bij iedere belastingsregistratie bekend zijn:

- 1°. het gewicht van het vliegtuig,
- 2°. de gemiddelde vliegsnelheid,
- 3°. de gemiddelde vlieghoogte,

en zoo eenigszins mogelijk ook:

- 4°. de zwaartepuntsligging,
- 5°. enkele inlichtingen over de gemiddelde weersgesteldheid.

*c. De te registreeren grootheid.* De belastingsfactor kan uit rekmetingen of uit versnellingsmetingen worden afgeleid. Over het algemeen zijn beide geschikt. Daar de rekmetingen in principe worden beïnvloed door de beperkte stijfheid van den vleugel en door antimetrische componenten van de belasting, ware een kleine voorkeur aan versnellingsmetingen toe te kennen. Hierbij moet de versnellingscomponent, in de richting van de topas, optredend in de directe omgeving van het zwaartepunt van het vliegtuig, worden geregistreerd. Wanneer men wil controleeren — hetgeen vooral bij groote vliegtuigen met slappen vleugel aanbeveling kan verdienen — of de vleugelbuiging tot een vergroting van de belasting op het constructiemateriaal van den vleugel aanleiding geeft, moeten zoowel versnellingen als rekken, liefst gesynchroniseerd, worden vastgelegd.

*d. Instrumenten.* De te gebruiken instrumenten moeten een hooge meetnauwkeurigheid toelaten. Deze moet voor de versnellingen minstens  $\pm 0,05 g$  bedragen en voor den rek 5 % van den rek, tot stand komend in ongestoorde horizontale vlucht onder den invloed van de belasting door het gewicht van het vliegtuig. De versnellingsmeter moet snel reageren (d.i. een voldoende hooge eigenfrequentie hebben, b.v. 10 Hertz).

*e. Uitwerking.* De uitwerking van het meetmateriaal geschiedt naar statistische gezichtspunten en levert in eerste instantie een frequentiekromme, b.v. voor den belastingsfactor. Steeds moet hierbij de totale omvang van het materiaal op eenigerlei wijze worden vermeld. Men vergete ook niet de intervalverdeling van het variatiegebied der belasting op te geven, dat aan de statistische uitwerking ten grondslag werd gelegd. Het verdient aanbeveling de intervallen niet grooter dan ca. 10 % van het totale variatiegebied te nemen en niet kleiner dan het dubbele van de meetnauwkeurigheid.

## 11. Samenvatting.

Wanneer men zich op het standpunt stelt, dat het onderzoek der remousbelasting gegevens moet opleveren, die de mogelijkheid bieden, te helpen beoordeelen of de vliegtuigconstructie de juiste sterkte heeft, kan men dit onderzoek volgens punt 02 (vooropgesteld dat de belasting symmetrisch is) toespitsen op:

- 1°. het gedrag van de totale versnelling in de richting van de topas in het zwaartepunt van het vliegtuig. Van bijzonder belang zijn de *grootste* waarden, die deze versnelling kan bereiken bij een vlucht in een onrustige atmosfeer;
- 2°. het gedrag van de hoekversnelling van draaiingen om de dwarsas bij een vlucht in onrustige lucht;
- 3°. de verdeelingen van de draagkracht over vleugel en horizontaal staartvlak bij aanwezigheid van storende stroomingen in de atmosfeer.

De eerste taak bestaat daarin, na te gaan in hoeverre het karakteristieke kenmerk der remousstoringen: hun onregelmatige fluctuatie, het vaststellen van de vereischte gegevens bemoeilijkt. Dit blijkt mee te vallen. Zoals in punt 03 wordt aangetoond, worden althans de extreme waarden van de totale versnelling in hoofdzaak bepaald door de extreme waarden van den component der stroomsnelheid in het atmosferisch storingsgebied, die (ongeveer) loodrecht staat op het vlak van den vleugel, en door de (kleinste) aanlooplenge langs de vliegbaan, waarbinnen deze stoorsnelheden tot ontwikkeling komen. Alle andere details van de snelheidsverdeling in het storingsgebied zullen een invloed hebben, die van ondergeschikte betekenis is. Op grond hiervan kunnen berekeningen van de belasting worden betrokken op zeer eenvoudige schema's voor de stoorsnelheidsverdeling. Als zoodanig is gebruik gemaakt van twee nauwkeurige omschrijvingen, waaraan de namen „remousveld met overgangsgebied” en „remousgolf” zijn gegeven. Beide snelheidsverdelingen worden volledig bepaald door twee parameters, n.l.

- 1°. de parameter  $w_0$ , die de grootste waarde van de stoorsnelheid geeft;
- 2°. de parameter  $\bar{s}_g$ , die de breedte van het overgangsgebied, resp. de lengte van de golf bepaalt.

Voor het allereenvoudigste schema, dat uit het remousveld met overgangsgebied ontstaat als de breedte van het overgangsgebied tot nul wordt teruggebracht ( $\bar{s}_g = 0$ ), wordt de naam „scherp begrensd remousveld” gebruikt.

Deze stoorsnelheidsverdelingen worden weergegeven door de figuren 1, 2 en 3. Het is niet noodig, andere mogelijkheden in de beschouwing te betrekken. Bij de berekening van de belasting kan zonder ernstig bezwaar worden aangenomen, dat het vliegtuig zich aanvankelijk in een station-

naire horizontale vlucht bevond en dat de storende strooming verticaal gericht is.

Gaat men er van uit, dat het vliegtuig een systeem vormt, dat volkomen stijf is en dat dus niet van vorm verandert onder den invloed der belasting, dan kunnen de versnellingen — tevens gebruik makend van enkele bijkomstige in punt 04 toelaatbaar bevonden vereenvoudigingen — op in de punten 05, 06 en 07 beschreven wijze worden berekend. De laatste berekeningen (punt 07) zijn het nauwkeurigst, zij houden rekening met het optreden van draaiingen van het vliegtuig om zijn dwarsas en met de vertraging, die de instelling van de luchtkrachten vertoont. In punt 06 zijn de draaiingen om de dwarsas (die altijd relatief klein blijken te blijven) buiten beschouwing gelaten en in punt 05 is daarenboven de vertraging in de variatie van de luchtkrachten verwaarloosd, hetgeen op een veel bedenkelijker benadering blijkt neer te komen. In alle gevallen kan de uitkomst voor den belastingsfactor (d.i. het quotiënt van de totale versnelling en de versnelling van de zwaartekracht) in den vorm

$$n = 1 + \frac{w_0 UC}{lg} \Lambda \quad (11.1)$$

worden gebracht. Voor de hoekversnelling levert de berekening van punt 07

$$\dot{\omega} = \frac{w_0 UC}{l^2} \Lambda_{\omega} \quad (11.2)$$

De hierin optredende grootheden  $\Lambda$  en  $\Lambda_{\omega}$  zijn dimensielooze belastingscoëfficiënten, die maximale waarden bereiken, welke voor een normaal vliegtuig worden beheerscht door

- 1°. de dimensielooze coëfficiënt  $C = \frac{1}{2} \frac{\rho g l k}{G/F}$  van vliegtuig en vliegtuigtoestand;
- 2°. de zwaartepuntsligging  $\varepsilon$  (t.o.v. het kwartkooordepunt van den vleugel) van het vliegtuig, een parameter, die tevens de statische langsstabiliteit beheerscht;
- 3°. de parameter  $s_g = \frac{\bar{s}_g}{l}$ , d.i. voor een remousveld met overgangsgebied de breedte van het overgangsgebied, uitgedrukt in de halve vleugelkooorde, en voor een remousgolf, de halve golfenlengte, uitgedrukt in de halve vleugelkooorde.

Er zijn, vooral voor wat betreft den coëfficiënt  $\Lambda_{\omega}$ , in theorie nog vele andere details van den vliegtuigtoestand van eenigen invloed, zoolang het vliegtuig echter niet al te zeer afwijkt van het gebruikelijke type spelen de afwijkingen van de in de berekening verwerkte standaard geen rol van veel betekenis.

Het verband tusschen de grootste waarde, die de coëfficiënt  $\Lambda$  bereikt, en de parameters  $C$  en  $s_g$  wordt voor een remousveld met overgangsgebied, voor het geval dat met draaiingen om de dwarsas geen rekening gehouden wordt (hetgeen meebrengt dat de invloed van  $\varepsilon$  wegvalt) weergegeven door

de figuren 18 en 19. Hieruit blijkt, dat de waarde van  $\Lambda_{\max}$  altijd afneemt, naarmate de waarde van  $C$  grooter is, doch deze afname is niet zoo snel, dat het in (11.1) optredende product  $C\Lambda$  eveneens zou afnemen. De belastingsfactor neemt dus minder snel dan met een evenredigheid overeenkomt toe, naarmate de waarde van  $C$  grooter is, dat is

- naarmate de vlieghoogte kleiner is ( $\rho$  groter);
- naarmate de afgeleide  $\frac{\partial c_a}{\partial a} = k$  van den draagkrachtcoëfficiënt grooter is;
- naarmate de vleugelbelasting  $G/F$  kleiner is.

Volgens (11.1) is er verder rechte evenredigheid met de vliegsnelheid  $U$  en met de intensiteit  $w_0$  van de storing. De invloed van den parameter  $s_g$  is volgens de geciteerde figuren zeer gering, als het overgangsgebied (uitgedrukt in de halve vleugelkoorde) smal is, b.v. zoolang  $s_g$  kleiner dan ca. 15 is. Is  $s_g$  echter grooter dan deze grenswaarde, dan wordt een geleidelijk sneller afname van de grootste versnelling merkbaar. Daar het in (11.1) aange troffen quotiënt  $\frac{C}{l}$  onafhankelijk is van de vleugelkoorde, en de structuur van het atmosferisch storingsveld natuurlijk niet door het vliegtuig wordt beïnvloed, volgt hieruit dat groote vliegtuigen in het algemeen aan wat grooter belastingen zullen zijn blootgesteld dan kleine.

In figuur 19 is een bundel stippellijnen aangebracht, die aangeeft welke uitkomsten men krijgt als de vertraging in de instelling van de draagkracht op den invalshoek wordt verwaarloosd. Men ziet dat dit aanleiding geeft tot zeer groote fouten, tenzij het overgangsgebied zeer breed is, in welk geval de typisch niet-stationaire kenmerken van het beeld van de strooming om den vleugel inderdaad natuurlijk geleidelijk aan verloren moet gaan.

Analoge uitkomsten, die betrekking hebben op de door een remousgolf veroorzaakte totale versnelling, bevat fig. 20. Uit deze figuur volgt, dat de grootste waarde, die de belastingsfactor bij een remousgolf bereikt, alleen voor golven van zéér kleine lengte (kleiner dan 10 halve vleugelkoorden) achterblijft bij de maxima, die worden bereikt als de stoorsnelheid in het remousveld na het bereiken van de grootste waarde niet terugloopt, men i. p. v. met een golf dus met een remousveld met overgangsgebied te doen heeft. Daar het niet aannemelijk is, dat de afmeting van storingsgebieden in de atmosfeer zoo kleine afmetingen zullen vertoonen, verliest de remousgolf hierdoor zijn zelfstandige beteekenis, in dien zin, dat het onderzoek hiervan geen inlichtingen oplevert, die — althans voor wat het belangrijkste gegeven betreft: het maximum der totale versnelling — de kennis welke de berekeningen voor het remousveld met overgangsgebied opleveren, vergrooten.

De remousgolf is daarom buiten beschouwing gelaten bij de in punt 07 opgenomen berekeningen, waarin de draaiing van het vliegtuig om de dwarsas mede is verwerkt. Deze berekeningen

leveren voor het maximum van de totale versnelling de in fig. 32, 33 en 34 samengevatte uitkomsten. Men leest hieruit af, dat de zwaartepuntsligging — dat is ook: de statische langstabiliiteit — een beperkten invloed bezit. Valt het zwaartepunt samen met het kwart-koordepunt van den vleugel, dan verdwijnt de invloed van den graad van vrijheid, gevormd door de draaibaarheid om de dwarsas, bijna volledig (alleen voor zeer groote waarden van  $s_g$  ontstaat een geringe verlaging van de belasting). Wordt het zwaartepunt van hieruit naar achteren verplaatst, dan bewerkt de draaiing een verhooging van de belasting, wordt het naar voren verplaatst, dan ontstaat een verlaging. Voor verplaatsingen van de in de practijk ontmoete orde van grootte bedragen deze wijzigingen enkele procenten. Zij loopen een weinig op, als de breedte van het overgangsgebied groot is. Voor het maximum van den thans ook bepaalden coëfficiënt  $\Lambda_\omega$  geldt fig. 35. De hierin vervatte opgaven gelden uitsluitend voor het positieve maximum, dat ontstaat als het zwaartepunt in of achter het kwartkoordepunt ligt en zijn daardoor niet volledig. Het blijkt, dat thans de zwaartepuntsligging het beslissende gegeven is, daarnaast heeft ook de breedte van het overgangsgebied een aanzienlijken invloed. Hoe meer naar achteren het zwaartepunt ligt en hoe smaller het overgangsgebied is, hoe hooger de versnelling wordt. De coëfficiënt  $C$  beïnvloedt de grootste waarde van  $\Lambda_\omega$  nagenoeg niet, zoodat de versnelling krachtens (11.2) vrijwel evenredig is met de waarde van  $C$ .

Door combinatie van de totale en de hoekversnelling kan voor willekeurige deelen van het vliegtuig de belasting worden bepaald, die door de traagheidskrachten wordt gevormd. De uitkomst is (punt 07), dat de hoekversnelling niet meer dan een correctie levert op de belasting, die de totale versnelling alléén oplevert. Voor de horizontale staartvlakken wordt de belasting door traagheidskrachten echter in den regel aanzienlijk door de luchtkrachtbelasting overtroffen. Drukt men de laatste eveneens uit in de versnellingen (de verdeling gegeven veronderstellend), dan blijkt zij evenredig gesteld te kunnen worden met een coëfficiënt

$$\Lambda_s = \frac{\varepsilon}{\beta} \Lambda - \frac{j^2}{\beta} \Lambda_\omega.$$

Daarom is in punt 07 het verloop van dezen coëfficiënt eveneens bepaald. Voor de maximale waarde, die zij bereikt, gelden de in de figuren 40, 41 en 42 opgenomen uitkomsten. De zwaartepuntsligging blijkt opnieuw een overheerschenden, zeer aanzienlijken invloed te hebben. De waarde van  $C$  is ditmaal ook van beteekenis, terwijl de breedte  $s_g$  van het overgangsgebied juist aan invloed blijkt te hebben ingeboet. Desalniettemin is zij zeker niet te verwaarloozen, als het zwaartepunt voorlijk is gelegen, b.v. in de directe nabijheid van het kwartkoordepunt. De grootste belastingen ontstaan als het zwaartepunt ver naar achteren ligt, het overgangsgebied smal is en de waarde van  $C$  groot is (dit laatste, omdat de belastende krachten wederom — zie (07.70), (07.71) en (07.72) — met het product  $C \Lambda_s$

evenredig zijn en  $\Lambda_s$  in zijn afhankelijkheid van  $C$  niet zoo snel afneemt naarmate  $C$  grooter is, dat dit product daarbij eveneens kleiner zou worden).

Bij nauwkeurige beoordeeling van de niet geheel volledige uitkomsten, die zijn verkregen voor de belasting op de staartvlakken blijkt overigens, dat men hiervoor practisch door verschillende oorzaken (vooral den kritieken invloed van den parameter  $\varepsilon$ ) slechts zelden even nauwkeurige en ondubbelzinnige gegevens uit het beschikbare materiaal zal kunnen afleiden als voor den vleugel, en zelfs is niet te verwachten, dat hierin door completeering der berekeningen veel verbetering zou kunnen worden gebracht. Men zal in den regel met schattingen tevreden moeten zijn, hiervoor bieden de figuren 40, 41 en 42 ongetwijfeld een bruikbare en voldoende betrouwbare basis.

In punt 08 wordt de vraag aan de orde gesteld, in hoeverre de vervorming, die het vleugelsysteem ondergaat onder den invloed der belasting, de grootte der belasting wijzigt. Aangenomen wordt, dat — onder uitsluiting van andere vervormingen — de vleugel kan doorbuigen, daar dit kennelijk de vervorming is, die primair in aanmerking komt. De uitkomsten zijn ondergebracht in de figuren 45 t/m 49, waarbij de eerste drie ditmaal niet alleen op de maxima, maar op het geheele verloop van de functie  $\Lambda = \Lambda(s)$  ( $s =$  afgelegde weg sinds het binnendringen in het remousveld, uitgedrukt in halve vleugelkoorden) betrekking hebben. De buiging introduceert een nieuwen parameter in de berekening, n.l. de grootheid  $\omega_0 = \frac{v_0 l}{U}$ .

Hierin is  $v_0$  de eigenfrequentie van de eerste harmonische (d.i. de grondtoon) der vleugelbuigings-trillingen. Uit de figuren 45 t/m 48 blijkt, dat de mogelijkheid bestaat dat buigingstrillingen optreden, die de belasting op het constructiemateriaal met tientallen procenten verhoogen. Bij nadere bestudeering komt men echter tot de conclusie, dat de breedte van het overgangsgebied thans een alles-overheerschenden invloed krijgt. De grootste trillingen treden op als  $s_g = 0$  is, reeds bij  $s_g = 25$  is daarvan echter nog maar een vrij kleine rest over, vooral als de waarde van  $\omega_0$  niet al te klein is (de vleugel dus niet al te slap is). De belasting loopt dan tot het „normale” bedrag terug. Men kan dus zeggen, dat een aanzienlijke verhooging van de belasting alleen ontstaat, als het overgangsgebied zoo smal is — de stoot dus zoo scherp is — dat zich zeer geprononceerde trillingen vormen. Zulke trillingen zouden in registraties van de belasting, of beter: in de registraties van rekken in het constructiemateriaal van den vleugel, direct

moeten opvallen. Voor zoover de ervaring reikt — het experimenteele materiaal is nog schaars — zijn zij echter in dergelijke registraties zelden of nooit teruggevonden. Hieruit volgt, dat men de effectieve waarde van den parameter  $s_g$  voor een vleugel van middelbare afmetingen gerust op minstens ongeveer 25 mag stellen. Dit is een zeer belangrijke conclusie, waarvan men bij de toepassing van al het in deze verhandeling opgenomen materiaal gebruik zal mogen maken. Wat den invloed van de vleugelbuiging op de belasting betreft, is — men zie fig. 54, waarin de variatie van het maximum is samengevat — een verhooging van beteekenis dientengevolge alleen te verwachten als het vliegtuig heel groot is (grote halve koorde, dus relatief kleine  $s_g$ ) en/of de vleugel heel slap ( $\omega_0$  klein). Een nauwkeurige opgave is niet mogelijk, zoolang geen nadere gegevens beschikbaar zijn over de breedte der overgangsgebieden in atmosferische storingsvelden. Voor de bepaling der correctie, die de vleugelbuiging noodig maakt op de uitkomsten, die zijn afgeleid zonder met vervormingen rekening te houden, wordt het gebruik van fig. 50 aanbevolen.

Het in punt 09 nader bestudeerende vraagstuk der draagkrachtverdelingen over vleugel en horizontaal staartvlak blijkt bij den huidige stand van de aerodynamische theorie niet met eenvoudige middelen te kunnen worden opgelost. Men zal voorloopig moeten rekenen met de verdeling, die voor een stationnaire belasting uit de vergelijking van Prandtl voor de circulatie kan worden afgeleid, waarbij een wrong van den vleugel of van het staartvlak — indien aanwezig — niet in aanmerking dient te worden genomen.

Ter toetsing van de theorie staat nog slechts een experimenteel materiaal van zeer beperkten omvang ter beschikking (punt 10). Enkele metingen, uitgevoerd in de „remoustunnel” van het NACA, stemmen uitstekend met de theoretische voorspelling overeen, de spreiding der metingen is echter te groot, om van een scherpe contrôle te kunnen spreken (zie fig. 52, 53 en 54).

Ook de vergelijking van de theorie met volgens statistische methoden uitgewerkte belastingsmetingen aan vliegtuigen leidt nog niet tot definitieve, quantitatief voldoende nauwkeurige conclusies. Daar, waar een vergelijking tot de mogelijkheden behoort vindt men kwalitatief een behoorlijke overeenstemming. Het is zeer gewenscht, dat in de toekomst meer meetmateriaal wordt verzameld. Het verdient aanbeveling daarbij de aan het slot van punt 10 vermelde richtlijnen in het oog te houden.

## 12. Literatuurlijst.

1. Lange, K. O.: Ueber Vertikalbewegungen der Luft in der Atmosphäre. Veröff. des Forschungsinst. der Röhn-Rossitten-Gesellschaft Nr. 5, Jahrb. 1930, S. 25.
2. Schüttler, W. u. Viereck, W.: Untersuchung der Vertikalbewegung in der freien Atmosphäre mit Hilfe aus dem Flugzeug gestarteter, im aerostatischen Gleichgewicht befindlicher Pitotballone. Veröff. des Forschungsinst. d. Röhn-Rossitten-Gesellschaft Nr. 5, Jahrb. 1930, S. 44.
3. Vogel, F. u. Lorentz, L.: Untersuchung der Vertikalbewegung in der freien Atmosphäre mit Hilfe aus dem Flugzeug gestarteter Schwebeballone. Veröff. des Forschungsinst. d. Röhn-Rossitten-Gesellschaft Nr. 5, Jahrb. 1930, S. 70.
4. Küssner, H. G.: Untersuchung der Bewegung einer Platte beim Eintritt in eine Strahlgrenze. Luftfahrtforschung Bd. 13 — 1936 — S. 83.
5. Küssner, H. G.: Beanspruchung von Flugzeugflügeln durch Böen. Jahrbuch der deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt 1931, S. 83.
6. Fisher, H. R.: Accelerations of airplanes in vertical air currents I. R and M 1463 — 1932.
7. Fisher, H. R.: Accelerations of airplanes in vertical air currents II. R and M 1629 — 1934.
8. Fisher, H. R.: Stresses in the fuselage induced by gusts. R and M 1581, 1933.
9. Bryant, L. W. and Jones, I. M. W.: Acceleration of an airplane upon entering a vertical gust. R and M 1496, 1933.
10. Bryant, L. W. and Jones, I. M. W.: Stressing of aeroplane wings due to symmetrical gusts. R and M 1690, 1936.
11. Williams, D. and Hanson, J.: Gust loads on tails and wings. R and M 1823 — 1937.
12. Rhode, R. V., and Lundquist, E. E.: Preliminary study of applied load-factors in bumpy air. NACA Technical Note No. 374 — 1931.
13. Jones: Calculation of the motion of an airplane under the influence of irregular disturbances. Journal of the Aeron. Sciences 1936, p. 419. 11/13/38
14. Jones, R. T.: The influence of lateral stability on disturbed motions of an airplane with special reference to the motions produced by gusts. NACA Report No. 638 — 1938.
15. Rhode, R. V.: Gust loads on airplanes. SAE-Journal Vol. 40 — 1938, p. 81.
16. Küssner, H. G.: Das zwei-dimensionale Problem der beliebig bewegten Tragfläche unter Berücksichtigung der Eigenbewegungen der Flüssigkeit. Luftfahrtforschung Bd. 17 — 1940, S. 355.
17. Küssner, H. G.: Allgemeine Tragflächentheorie. Luftfahrtforschung Bd. 17 — 1940, S. 370.
18. Jones, R. T.: The unsteady lift of a wing of finite aspect ratio. NACA Report No. 681 — 1940.
19. Jones, R. T.: Operational treatment of the non-uniform lift theory in airplane dynamics. NACA Techn. Note No. 667 — 1938.
20. Donely, Ph.: An experimental investigation of the normal acceleration of an airplane model in a gust. NACA Techn. Note No. 706 — 1939.
21. Küssner, H. G.: Häufigkeitsbetrachtungen zur Ermittlung der erforderlichen Festigkeit von Flugzeugen. Luftfahrtforschung Bd. 12 — 1935, S. 57.
22. Freise, H.: Spitzenwerte und Häufigkeit von Böenbelastungen an Verkehrsflugzeugen. Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung — 1938, S. I—289.
23. Kaul, H. W.: Statistische Erhebungen über Betriebsbeanspruchungen von Flugzeugflügeln. Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung 1938 — Ergänzungsband, S. 307.
24. Kaul, H. W.: Die erforderliche Zeit- und Dauerfestigkeit von Flugzeugtragwerken. Jahrbuch der deutschen Luftfahrtforschung — 1938, S. I—274.
25. Krumbholtz, H.: Bemerkungen zur Häufigkeit der Böenbelastung am Tragwerk. Luftfahrtforschung Bd. 18 — 1941, S. 82.
26. van Oosterom, T. en Marx, A. J.: Overzicht van de resultaten van rek- en versnellingsmetingen, uitgevoerd bij vliegtuigen op de K.L.M.-lijn Amsterdam—Bandoeng in het tijdvak September 1935 tot Mei 1940. Rapport V. 1249 van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium.
27. Jennings, W. G., Alston, R. P., and Howarth, C.: Investigation of atmospheric turbulence by aircraft carrying accelerometers. R. and M. 1441 — 1932.
28. Duncan, W. J.: Galerkin's method in mechanics and differential equations. R. and M. 1798 — 1937.
29. Doetsch, G.: Theorie und Anwendung der Laplace-transformation. Berlin, Julius Springer — 1937.
30. Richter, W.: Das Abwindfel hinter Tragflügeln mit Klappenausschlag. Luftfahrtforschung Bd. 20—1943, S. 69.



### 13. Appendix.

#### De transformatie van Laplace.

De transformatie van Laplace is een functionaal-transformatie, gedefinieerd door de formule

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-ux} f(x) dx.$$

Zij zet een functie  $f$  om in een functie  $F$  en kan worden toegepast op een omvangrijke klasse van functies. De functie  $F$  wordt door de formule bepaald voor al die eventueel complexe waarden van  $u$ , die de integraal doen convergeeren. Daartoe moet het reële deel van  $u$  grooter zijn dan een reëel getal  $\beta$ , de „convergentieabscis” van de integraal.

Is

$$F(u) = \int_0^{\infty} e^{-ux} f(x) dx = L \{ f(x) \}$$

dan is

$$\begin{aligned} L \left\{ \frac{df(x)}{dx} \right\} &= \int_0^{\infty} e^{-ux} \frac{df(x)}{dx} dx = \\ &= \left| e^{-ux} f(x) \right|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} u e^{-ux} f(x) dx \end{aligned}$$

en dus

$$L \left\{ \frac{df(x)}{dx} \right\} = u L \{ f(x) \}$$

mits

$$f(0) = 0.$$

In aansluiting hierop geldt

$$L \left\{ \frac{d^n f(x)}{dx^n} \right\} = u^n L \{ f(x) \}$$

mits

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Verder wordt

$$\begin{aligned} L \left\{ \int_0^x f(x) dx \right\} &= \int_0^{\infty} e^{-ux} \int_0^x f(\xi) d\xi dx = \\ &= -\frac{1}{u} \int_0^{\infty} d e^{-ux} \int_0^x f(\xi) d\xi = \\ &= -\frac{1}{u} \left| e^{-ux} \int_0^x f(x) dx \right|_0^{\infty} + \frac{1}{u} \int_0^{\infty} e^{-ux} f(x) dx \end{aligned}$$

of

$$L \left\{ \int_0^x f(x) dx \right\} = \frac{1}{u} L \{ f(x) \}.$$

Dit kan worden gengeneraliseerd tot

$$L \left\{ \int_0^x \int_0^x \dots \int_0^x f(x) (dx)^n \right\} = \frac{1}{u^n} L \{ f(x) \}.$$

Op deze eigenschappen van de transformatie berust haar veelvuldige toepassing. Lineaire differentiaal- en integraaloperaties, aangewend op de te transformeerende functie, worden omgezet in eenvoudige algebraïsche operaties op de getransformeerde functie.

Behalve van de voornoemde wordt in deze verhandeling gebruik gemaakt van de eigenschap van de transformatie van Laplace, een z.g. vouwintegraal van twee functies om te zetten in het product van de getransformeerden dezer functies

$$L \left\{ \int_0^x \varphi(x-\xi) \psi(\xi) d\xi \right\} = L \{ \varphi \} L \{ \psi \}.$$

„vouwintegraal” van  $\varphi$  en  $\psi$

Deze stelling wordt het gemakkelijkst bewezen door het rechterlid tot het linker te herleiden. Men heeft

$$\begin{aligned} L \{ \varphi \} L \{ \psi \} &= \int_0^{\infty} e^{-ux} \varphi(x) dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-u\xi} \psi(\xi) d\xi = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-u(x+\xi)} \varphi(x) \psi(\xi) dx d\xi. \end{aligned}$$

Voert men hierin nieuwe veranderlijken  $y$  en  $\eta$  in, gedefinieerd door

$$x + \xi = y; \quad \xi = \eta$$

(zoodat

$$\begin{aligned} dx = dy & \quad x=0 \rightarrow y=\xi & \quad x=\infty \rightarrow y=\infty \\ d\xi = d\eta & \quad \xi=0 \rightarrow \eta=0 & \quad \xi=\infty \rightarrow \eta=\infty \end{aligned}$$

is) dan ontstaat de formule

$$L(\varphi) L(\psi) = \int_0^{\infty} \int_{\eta}^{\infty} e^{-uy} \varphi(y-\eta) \psi(\eta) dy d\eta.$$

Nu stelt  $\int_0^{\infty} \int_{\eta}^{\infty} dy d\eta$  een integratie voor over het in fig. 52 verticaal gearceerde driehoekige gebied

van het  $y, \eta$  vlak. Deze integratie komt tot stand door eerst over een horizontaal strookje van  $\eta$  tot  $\infty$  naar  $y$  te integreren (het in fig. 57 donker gearceerde strookje) en vervolgens de bijdragen van alle strookjes samen te tellen (integratie naar  $\eta$  van 0 tot  $\infty$ ). Over precies hetzelfde gebied kan men echter integreren, door eerst naar  $\eta$  van 0 tot  $y$  te integreren (d.i. over een verticaal strookje) en vervolgens naar  $y$  van 0 tot  $\infty$  (samentelling van alle verticale strookjes).

Derhalve kan de laatste formule ook in den vorm

$$\begin{aligned} L(\varphi)L(\psi) &= \int_0^\infty \int_0^y x^{-uy} \varphi(y-\eta) \psi(y) d\eta dy = \\ &= \int_0^\infty e^{-uy} \int_0^y \varphi(y-\eta) \psi(\eta) d\eta dy = \\ &= L \left\{ \int_0^y \varphi(y-\eta) \psi(\eta) d\eta \right\} \end{aligned}$$

worden geschreven.

Het formeele bewijs is daarmee voltooid.

Past men de transformatie van Laplace toe op de bijzondere functies

$$c \text{ (constante) en } e^{-ax}$$

dan vindt men achtereenvolgens

$$\begin{aligned} L\{c\} &= \int_0^\infty e^{-ux} \cdot c \cdot dx = -\frac{c}{u} \int_0^\infty de^{-ux} = \\ &= \frac{c}{u}; \text{ Re } u > 0 \end{aligned}$$

en

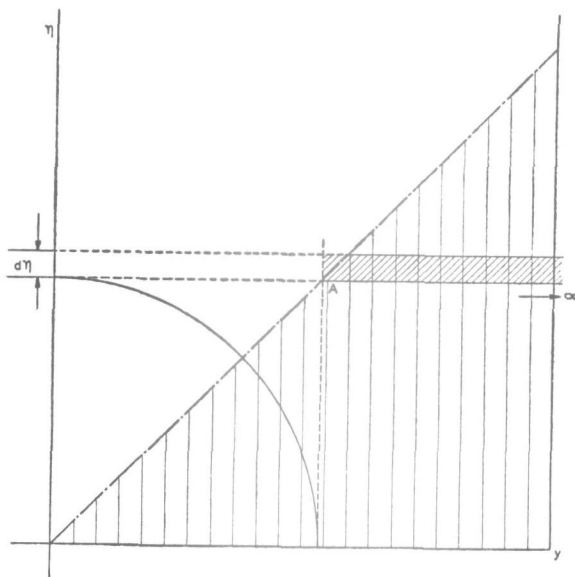


Fig. 57.

$$\begin{aligned} L\{e^{-ax}\} &= \int_0^\infty e^{-ux} e^{-ax} \cdot dx = \\ &= -\frac{1}{u+a} \int_0^\infty de^{-(u+a)x} = \frac{1}{u+a}; \text{ Re } u > \text{Re } a. \end{aligned}$$

Deze uitkomsten zijn te bestemder plaatse gebruikt.

De hierboven besproken gegevens zijn toereikend om de toepassingen, die van de transformatie van Laplace zijn gemaakt, te kunnen volgen. Voor nadere inlichtingen wordt men verwezen naar het boek van Doetsch (lit. 29).

# The Loading of Aeroplane Structures by Symmetrical Gusts.

## Abstract.

Gust load theory has the object to assist in the establishment of rational strength requirements for aeroplanes. With this in mind, it is, according to chapter 02, allowed to concentrate the investigations upon the following properties of the aeroplane's response to a gust:

- (i) the variation of the *total acceleration* (= kinematical acceleration + component of gravitational acceleration) of the aeroplane's centre of gravity, in the direction of the normal axis. Particular care should be taken to determine the extremes of this acceleration.
- (ii) the variation of the angular acceleration about the lateral axis.
- (iii) the distributions of the fluctuating parts of the lift on wing and tailplane.

The first point to discuss applies to the possibility to substitute simple gust shapes for the commonly very irregular constitution of actual gust disturbances in the atmosphere. It is explained in chapter 03 that, at least, the *extremes* of the total acceleration will depend mainly (besides upon dynamic parameters of the aeroplane) upon the extreme values of the component, approximately normal to the plane of the wing, of the disturbing velocity in the gusty domain of the atmosphere, and, secondly, upon the length of the "transition region" along the flight path, containing the gradual development, from zero up to the maximum value, of the disturbing velocity. All other details of the distribution of the velocity in the domain of the gust will, certainly, have an influence of much less importance. This makes it admissible to base all calculations upon very simple outlines for the velocity distribution. In fact only two exactly defined schemes have been used, denoted by the terms "gust field with transition zone" and "gustwave". They are both completely determined by two parameters

- (a)  $w_0$  = the maximal value of the disturbing velocity
- (b)  $\bar{s}_g$  = the length of the transition zone, respectively of half the wave.

The first scheme reduces to the well-known sharp-edge gust, if the transition zone is reduced to zero.

These gust distributions are reproduced in the graphs of figs. 1, 2 and 3.

There is, further, no serious objection against the assumptions, that the gust points vertically

upwards and that the aeroplane's original state of flight is horizontal and steady. Finally, it appears admissible (par. 03.5) to neglect the alteration, by the gust, of the speed of flight, at least up to the critical moment at which the loading reaches its maximum. The rotation about the lateral axis, caused by the gust, may also be anticipated to remain small, yet, its influence on the loading might be appreciable because of the allied variations of the angle of attack, which is already small in itself. Moreover, the load on the tailplane certainly depends upon such rotations.

Chapter 04 contains a small note to explain the very modest use, made of existing literature. The chief reason is to be seen in the wish to attain mutually fully comparable results and to retain full freedom in the choice of the scheme of cases to be calculated, an important thing if easily surveyable results, just covering the needed ranges, are to be produced.

Chapter 05 starts with a well-known provisory calculation of the total acceleration. The aeroplane is assumed to be a rigid body, rotations about the lateral axis are neglected and the varying lift on the wing is represented by a simple expression, strictly constituting an illegitimate generalization of laws, applying to steady conditions of flow only. Eq. (05.06) gives — for the case of the sharp edge gust of intensity  $w_0$  — the equation of motion ( $m$  = mass;  $w$  = normal velocity of the aeroplane's C.G.;  $u$  = speed of flight;  $F$  = wing area;  $k$  = slope of lift curve;  $\rho$  = air density), eq. (05.07) an equivalent form with the travelled way (in terms of half chord) instead of the time as independent variable. The factor  $C$ , defined by (05.08), appears to control the resulting motion. The reduced total acceleration  $(g + \dot{w})/g$ , called "load factor", is given by (05.11). It is, on behalf of comparison with results of more complicated calculations, coupled to the "load coefficient"  $\Delta$ , defined by (05.12). This coefficient is easily seen to jump to the value 1 simultaneously with the entrance of the aeroplane into the gust, with exponential decrease, controlled by the value of the parameter  $C$ , back to zero thereafter. Hence,  $\Delta = 1$  gives — independent of  $C$  — the maximum of the total acceleration. This very rough result leads to simple and wellknown conclusions about the loading, easily obtainable from (05.12), (05.13), (05.14) (with  $G = mg$ ). The last two formulae contain the lift coefficient instead of  $C$  and are useful to compare cases, characterized by equal lift coefficients. They lead to the alternative (05.15) for the definition of the load coefficient.

Analogous calculations, applying to gust fields with a transition zone, must be based on eqs. (05.16). These equations appear to have a solution,

depending on one parameter only, viz. the *product*  $C s_g$  ( $s_g$  = length of transition zone in terms of half chord  $l$ ), on condition that the way be measured by the coordinate  $S = \frac{s}{s_g}$ . The results are plotted in fig. 8 on a logarithmic  $S$ -scale. As expected, the maximum value of the now gradually developing load, is — for a given gust intensity  $w_0$  — reduced, the reduction being great if  $C_g$  is great. The relation between  $\Delta_{\max}$  and  $C_g$  is reproduced separately in fig. 9. It is further found that the maximum load, according to this calculation, is reached within the transition zone. In the field of the fully developed gust itself the load again damps out exponentially. Fig. 9 clearly shows that the beneficial influence of a transition zone of given length grows if the value of  $C = C_g/s_g$  increases.

In order to give a picture of the variation of the load, free from the distortion of fig. 8 due to the logarithmic scale, some results have been replotted in fig. 10 on a linear scale. Simultaneously the joining of the parameters  $C$  and  $s_g$  (to  $C_g$ ), which will later on appear to be inadequate, is here omitted.

It is of interest to remark, that the accuracy of the foregoing results may be expected to be better if  $s_g$  is great, for the dominating error is, for small values of  $s_g$ , due to the quasi-steady treatment of the lift, which must clearly lose its importance if  $s_g$  is increased beyond a certain limit. Beyond this limit the sole appreciable error is caused by the neglect of rotations about the lateral axis.

The provisory treatment of the lift of the wing is replaced by a more accurate representation in the calculation of Chapter 06. The base of this new representation is discussed in par. 06.2. It comes down to the application of the wellknown Wagner/Küssner theory of reference 16, which is transferred to the wing of finite span by simply replacing the  $2\pi$  proportionality factor for the lift by the "correct" three dimensional lift slope constant. No improved treatment of the finite-span effect has been considered necessary. It must be said that the method has indeed already frequently been used in gust load calculations.

The origin of the  $s$ -coordinate being chosen in such a way that, for  $s=0$ , the nose of the wing touches the boundary of the transition zone of the gust field, the equation of motion reduces to (06.16), with  $k_1$  and  $k_2^*$  representing the lag functions of the lift ( $k_1$  for sudden changes of the angle of attack,  $k_2^*$  for the penetration into a unit gust). The equation simplifies to (06.17) for a sharp edge gust. It has been solved by the rapidly converging iteration method (06.18). The results for different values of the parameter  $C$  — again the only one present — are plotted in fig. 13 (no attention has here been paid to the descending parts of the curves far behind the interval of maximum loading). For gusts with a transition zone (06.22) has to be substituted in the basic equation (repeated in (06.21)). It may be remarked that it is now impossible to transform the equation in a monoparametric one by the introduction of a new coordinate like  $S$ . Hence  $s_g$  and

$C$  are now the doubtlessly most convenient, and independent, parameters.

The solutions have this time been calculated by means of the Laplace transformation, simultaneously substituting Jones' approximation (06.26) for the lag function  $k_1$ . The method is wellknown to be equivalent to the application of operator calculus. It will entail no difficulty to follow the development of the method with the help of the consecutive formulae.

The formal result is given by (06.30). It contains integrals, which have been evaluated numerically. Final results are collected in figs. 14, 15 and 16, and again, together with the curves, belonging to the sharp edge gust, in fig. 17. The maximum loads have been determined from the curves. The resulting relation with  $s_g$  and  $C$  is given by figs. 18 and 19. It is seen immediately, that the provisory calculations largely overestimate the loads if  $s_g$  is small. Actually, the greatest loads appear to be almost independent of  $s_g$ , as long as the values of this parameter are sufficiently small. This important result implies, that it is allowed to elude the difficult task of determining accurate values for the length of the transition zone if it would only be possible to confine it to the "un-sensitive" region.

A more complete picture of the errors, implied in the simple calculations of chapter 05, is given by the supplementary (dashed) curves of fig. 19. These lines reproduce the result of fig. 9 with separation of the influence of  $C$  and  $s_g$ . The expected improvement of the accuracy of the provisory calculations for large values of  $s_g$  is readily verified and appears to depend upon the value of the parameter  $C$ . Taking  $C=0,04$  a fairly good agreement is already reached for  $s_g=25$ . This agreement can be reviewed even better in fig. 16, where the corresponding full curve of fig. 8 (with  $S$  changed into  $s$ ) has been redrawn. The major difference with the improved  $C=0,04$  curve is seen to consist of a shifting of the complete curve to somewhat greater  $s$ -values.

Par. 06.8 of chapter 06 contains some results, based on eq. (06.16), applying to gust waves. The calculations have again been performed with the help of the Laplace transformation. The parameter  $s_g$  gives the length of half the wave in terms of half chord. Results are collected in fig. 20. Fig. 21 shows the variation of the load maximum with  $C$  and  $s_g$ . It is very remarkable that these gusts appear to produce practically the same maximum loadings as equally strong constant gusts with a transition zone, provided that the wavelength exceeds the small value of about 20 half chords. This issue amplifies the expectation, that the principles, discussed in chapter 03, will really admit the establishment of a reliable theory of the loading of aeroplanes by the, commonly always more or less fluctuating, disturbances by gusts. As a separate case, the gust wave clearly appears to have further not much importance.

To end the series of basic gust load calculations, chapter 07 is devoted to the inclusion in the theory of rotations of the aeroplane about the lateral axis. This is a serious complication, for it doubles the

number of equations of motion, which now assume the form (referred to axes, fixed to the aeroplane) (07.01), (07.02) ( $B =$  moment of inertia of the aeroplane about the lateral axis). The resulting lift, appearing in the first equation, is again introduced in conformity with formula (07.03), which leads to (07.04) and further to (07.06). The moment  $M_r$ , occurring in the second equation of motion, is split up in 4 parts (par. 07.2).

$M_1 =$  the change of the moment due to the alteration of the aerodynamic forces on the wing. It is by (07.07) put equal to  $\varepsilon l Z_r$ ,  $\varepsilon l$  being the X-coordinate of the aerodynamic centre of the wing.

$M_2 =$  the change of the moment due to the part  $\Delta Z_s$  of the aerodynamic forces on the horizontal tailplane, caused by the motion of the aeroplane. It is thought admissible to derive it from formula (07.08), thereby neglecting any lag in the lift development, because there are no very abrupt changes in the determining motion and because the smaller chord of the tailplane leads to quicker response of the lift to changes of the angle of attack.

$M_3 =$  the change of the moment, due to the direct action of the gust upon the horizontal tailplane. With  $\beta l$  equal to the distance of the tailplane centre of pressure behind the aeroplane C.G., and  $\gamma$  equal to the ratio of the chords of tailplane and wing, formula (07.09) gives the adequate expression, including lag, for this moment.

$M_4 =$  the change of the moment due to the part of the aerodynamic forces on the horizontal tailplane, caused by the alteration of the downwash behind the wing. This moment requires a preceding downwash calculation, which has been performed with Biot and Savart's formula from a vortex distribution, composed of rectangular vortices, each with one side in the lifting line representing the wing, and both trailing sides 0,9 semi span outboard. The preliminary result, referring to one rectangle, is given by (07.19), (07.20), with  $\Gamma$  equal to the circulation about the wing,  $\lambda'$  equal to 9/10th of the aspect ratio and  $h l$  equal to the height of the plane in question above the plane of the wake of the wing (hence  $h \ll \beta$ ). Deriving the circulation about the wing from (07.21), substitution and integration finally yields formula (07.23) for the required moment (the formula contains slight simplifying approximations).

With (07.24) and the abbreviations (07.26), (07.27) the equations of motion reduce to (07.28) and (07.29). In order to facilitate the establishment of solutions, the terms with the parameter  $E$ , representing the moment  $M_4$ , are modified by substituting  $1/l \cdot d^2 w_1 / d\sigma^2$  instead of the sum  $\frac{1}{l} \frac{d^2 w}{d\sigma^2} + \frac{d\omega}{d\sigma}$ ,  $w_1$  being the response to the gust, calculated in chapter 06. The correspondence of

both quantities will appear to be sufficient to justify this approximation.

The resulting eqs. ((07.30) and (07.31) with (07.32) and (07.33)) are now submitted to the Laplace transformation, again with  $k_1$  in the form (06.26). With unknowns defined by (07.34), the obtained solutions are given by (07.45) and (07.46), which, submitted to the inverse transformation, yield (07.47) and (07.48).

The load is now expressed with the aid of separate coefficients (07.49) and (07.50) for the linear and angular accelerations. They are linked to the total load coefficient by the formula (07.51).

Numerical developments are based on standard values, given in paragraph 07.05, for all parameters involved, except  $w_0$ ,  $s_g$ ,  $C$  and  $\varepsilon$  (the C.G. location). The  $N(s)$  function is given, for the standard case, by (07.57) and fig. 26. Paragraph 07.07 is devoted to computational preparations.

Final results are collected in figs. 28, 29 and 30\*). They have been confined to the values of  $C$ ,  $s_g$  and  $\varepsilon$  quoted in the table on page 45. It will be seen that no negative values of  $\varepsilon$  have been investigated (C.G. locations in front of the aerodynamic centre). Originally due to a misunderstanding, this omission appeared to be unimportant and was, hence, not corrected.

Calculating by (07.68) the angle of pitch, values of about 6% of the angle  $\frac{w_0}{u}$  are found at the

moment of maximum total acceleration, in a very extreme case (C.G. location much aft of the aerodynamic centre of the wing). A typical value for the maximum angular acceleration is 0,4 rad.sec<sup>-2</sup>. The relation between  $\Lambda_{\max}$ ,  $C$  and  $s_g$  is given by fig. 32 which also contains some comparable results obtained in chapter 06 without account of rotations about the lateral axis. If  $\varepsilon = 0$ , the difference with the latter curves appears to be very small, and sensible only for great values of  $s_g$ . If the C.G. is shifted backwards, the expected increase of the load is, by fig. 33, seen to amount to about 2% for  $s_g = 0$  and to about 3% ( $\varepsilon = 0$ ) or 6% ( $\varepsilon = 0,35$ ) for  $s_g = 25$ , all numbers referring to a change of  $\varepsilon$  equal to 0,1 (C.G. displacement equal to 5% of the chord). By fig. 34, another plot of the results for  $\Lambda_{\max}$ , the influence of the C.G. location appears to be almost independent of the value of the  $C$  parameter.

It may be said, that, applied to actual aeroplanes, the influence of the rotations about the lateral axis indeed turns out to be relatively small, yet by no means unconditionnally negligible.

If the C.G. is located aft of the wing aerodynamic centre, the coefficient  $\Lambda_\omega$  soon reaches a positive maximum (see figs. 28, 29 and 30) which is very sensitive both to the values of  $s_g$  and  $\varepsilon$ . The relation is given by fig. 35. If, by (07.69), a coefficient is calculated for the local acceleration at any point  $\xi$  (= distance aft of the C.G. in terms of half chord) of the longitudinal axis of the aeroplane, the result of fig. 36 emerges for  $\xi = \beta$ , i.e.

\*) The scales on the  $\Lambda$ ,  $\Lambda_z$  and  $\Lambda_\omega$  ordinates of fig. 28, and of the  $\Lambda_\omega$  ordinate of fig. 29, must be divided by 10, in agreement with the correct divisions of fig. 30.

for the vicinity of the tailplane. The curves do not diverge much from the  $\Lambda$ -curves themselves, which shows that the loading of the aeroplane structure, due to inertia forces, is not much affected by rotations about the lateral axis, and is governed to a high degree of approximation by the coefficient  $\Lambda$  only. The aerodynamic loading of the tailplane, however, is, to a certain approximation, proportional to the combination (07.72) of  $\Lambda$  and  $\Lambda_w$ , i.e. to a new coefficient  $\Lambda_s$ . This coefficient appears to vary in agreement with figs. 37, 38 and 39. It is very sensitive to changes of the C.G. location. The relation of its maximum to  $s_g$ ,  $C$  and  $\varepsilon$  is given by figs. 40, 41 and 42, which, by the way, contain drastic inter- and extrapolations, which, of course, lower the accuracy somewhat. Shifting the C.G. backwards clearly entails severe increases of this part of the loading.

It is of importance to note that rough calculations of the part of the tailload, governed by  $\Lambda_s$ , with the help of a too much simplified method analogous to the method of chapter 05 (with the additional questionable assumption that all parts of the aeroplane are simultaneously affected by the gust when crossing its sharp edge) yield highly overestimated loadings. (See the number quoted at the bottom of page 49, 1st column). Evidently tail load calculations do require particular care. Indeed the proved sensitivity upon the important parameters  $C$ ,  $s_g$  and  $\varepsilon$ , added to the influence of the collection of "silent parameters" fixed on standard values shows that tailload calculations will always be relatively inaccurate, especially if general validity is pursued.

In the next chapter, chapter 08, the influence upon the loading of the flexibility of the wing of the aeroplane is investigated, in order to decide if it is really admitted to treat the aeroplane as a rigid body. The calculation rests upon the assumption, that the only deformation to receive consideration consists of wing bending in agreement with the fundamental bending mode. This applies to the static bending under the influence of the load as well as to any oscillational phenomenon, generated by the impact of the gust. The deformation thus being given by an expression (08.01) with the generalized coordinate  $q$  and the bending mode  $z_1(y)$ , normalized to half chord for  $y = b$  (= semispan), the equations of motion can be derived with the help of the method of Lagrange. The starting point is given by (08.02) or (08.03), and (08.04) (compare also fig. 43). Rotations about the lateral axis are, of course, not considered here. Accurate energy coefficients for the airforces are given by (08.07) and (08.08), which simplify to (08.09) and (08.10) if the aerodynamic lag is neglected. With (08.11) and the latter expressions for the energy coefficients the equations of motion assume the form (08.12), (08.13). The

terms  $w$  and  $\dot{q}$  represent damping terms, and, indeed, overestimate the damping in consequence of the neglected lag. Yet, inclusion of this lag need not imply much real improvement, for the bending of the wing is actually coupled to torsion

and this fact will certainly affect the effective damping on any oscillational motion. For this reason the  $\dot{q}$ -term has been multiplied in the final calculation by a reduction factor  $\kappa$ , fixed in the end in such a way that the emerging oscillational component of the motion of the wing becomes precisely undamped. It is possible to obtain, in this way, certainty that any affection of the loading will not be underestimated. It is, hence, not an attempt to approximate the actual damping, which is thought to admit no simple reproduction.

The  $w$ -term is kept unchanged in the final calculation, which will, hence, contain errors because of the neglected aerodynamic lag. These errors are clearly of minor importance in connection with the purpose pursued. The influence of this term upon oscillations is small because of the unimportant participation of the heavy fuselage in these motions.

If, finally, the aerodynamic force, directly generated by the gust, is replaced by the expression which does take account of the aerodynamic lag, eqs. (08.07) and (08.18) are obtained with coefficients defined by (08.16). Making use of the bending frequency of the wing in vacuo (08.19) and of the related frequency parameter  $\omega_0$ , (08.20), they can be rewritten in the form (08.23), (08.24). Before solving these equations, consideration is given to the question of how to define the loading in a way which admits comparison with the results for a rigid aeroplane. Elastic forces being proportional to deformations, it becomes clear that the effective loading is, in the case under consideration, simply proportional to the value of the generalized coordinate  $q$ . It can be translated into an "aequivalent total acceleration" with the help of an imaginary case of steady accelerations. The resulting conversion formula is given by (08.22).

The equations of motion, which are in the present case easily solvable ordinary differential equations, are again solved with the help of the formally most simple method of Laplace transformation. With unknowns defined by (08.25), the solution for  $Y$  is given on page 45, 1st column, which, however, contains slight approximations, introduced for the first time when solving the intermediary cubic eq. (08.29). They are examined with the help of the estimates of fig. 44 for the coefficients (08.16) and appear to be certainly admissible if  $\frac{C}{\omega_0} \ll 1$ , which is nearly always the case. With  $\varepsilon$  in agreement with (08.43), the final result of the applied inverse transformation, in terms of  $w_{\text{aequ}}$  or of the related coefficient  $\Lambda_{\text{aequ}}$ , is given by (08.44) and (08.45). Since it is desirable to check some of the involved approximations by comparing with results of chapter 06, the limit result for  $\omega_0 \rightarrow \infty$  has also been determined and is given by (08.47).

Numerical results have been computed for  $C = 0,04$  only, since it seems pretty certain that changes of this parameter will have no substantial influence upon the changes of the load due to the flexibility of the wing. They are collected in figs. 45, 46 and 47 and apply to values of  $\omega_0$  and  $s_g$ , quoted in the small table on page 59. The agreement for

$\omega_0 = \infty$  with results of chapter 06 is satisfactory.

It appears that the effective loading is often much increased by the flexibility of the wing. This is clearly an effect of bending oscillations. Closer inspection, however, unveils a rapid improvement if  $s_g$  and/or  $w_0$  become great. Indeed, the maximum load, derived from an appropriately chosen "effective" transient extreme, is found to vary in agreement with fig. 49, which shows that the increase is only of importance if  $s_g < 10$  for  $\omega_0 = 1,2$  and if  $s_g < \text{about } 30$  for  $\omega_0 = 0,3$ . It must, moreover, be kept in mind that the effect is certainly overestimated in view of the neglected damping on the oscillation.

Now, on inspection of load registrations severe and easily recognizable oscillations have never been definitely detected. This certainly means that intensive gusts are always preceded by transition distances of sufficient length to escape from the development of really large oscillations. For an aeroplane of mean size the occurrence of gradient distances of less than about 25 half chords might be considered improbable. For such aeroplanes the oscillational overstresses will, hence, almost certainly be not important. For modern very large aero-

planes with very flexible wings it remains, however, to be seen if the phenomenon is equally unimportant. In such cases the possibility of load increase due to oscillations should be carefully checked. Figs. 49 and 50 can eventually be used to determine conservative corrections.

The calculations of the magnitude of gust loads are herewith finished. Some completing remarks about the distribution of the loadings are contained in chapter 09. A final solution cannot be given, for a complete aerodynamic theory of finite span wings is not yet available.

In Chapter 10 the theory is compared with some measurements, published in ref. 20. The result is satisfactory (see figs. 52, 53 and 54; lines calculated, points: measured), but the scatter of the measurements is too great to get precise checks.

Other experimental checks, discussed in Chapter 10, are of much less value and do not permit more than an inference to qualitative agreement. Much more experimental work on the subject is certainly necessary. Some hints about the organisation of suitable experiments conclude the report in paragraph 10.4.

# STELLINGEN

---

## I.

Een elegante methode voor de bepaling door iteratie van hogere eigen-trillingen van lineair elastische systemen kan worden gebaseerd op de ontwikkelingsstelling voor de kern van de integraalvergelijking van het systeem.

## II.

De methode van Grammel voor het berekenen van de eigenfrequenties van lineair elastische systemen kan worden opgevat:

- a. als het analogon van de methode van Galerkin, doch met toepassing op de integraalvergelijking (i. p. v. op de differentiaalvergelijking) van het systeem;
- b. als een directe toepassing van de methode van Galerkin, doch met toepassing van éénmaal door transformatie verbeterde gewichtsfuncties.

De methode van Galerkin laat een, soms nuttige, generalisering toe.

## III.

Het verdient aanbeveling, de in dit proefschrift uitgewerkte berekening der remousbelasting op een buigende vleugel te completeren met een schatting van de invloed der aerodynamische demping op de door de remousstoot ingeleide vleugeltrilling.

## IV.

Er bestaat een eenvoudig verband tussen de door Frazer<sup>1)</sup> onderzochte, zonder energietoevoer in stand te houden gedwongen trillingen van een in een luchtstroming opgesteld draagvlakstelsel, en de kritieke trillingen van dat systeem, nadat er in het punt waarin het werd aangedreven een aan een veer bevestigde massa is toegevoegd. Op grond van dit verband kan direct worden aangetoond, dat dergelijke gedwongen trillingen veelal ver onder de kritieke snelheid van het oorspronkelijke systeem mogelijk zijn. Verder kunnen hieruit direct series van onderling verschillende massa-veer-combinaties worden afgeleid die tot één zelfde kritieke snelheid leiden. In een dergelijke serie is het effect van een kleine overschrijding van de kritieke snelheid niet voor alle exemplaren gelijk.

<sup>1)</sup> R. A. Frazer: On the Power Input Required to Maintain Forced Oscillations of an Aeroplane Wing in Flight. R. and M. No. 1872, 1939.

## V.

De behandelingswijze van von Karman-Burgers van het driedimensionale draagvlakprobleem (Durand, *Aerodynamic Theory, Part II Chapter III*) verschilt, van de aanvang af consequent tot een storingstheorie van de eerste orde teruggebracht, in wezen niet van de (later ontwikkelde) behandelingswijze volgens Prandtl met behulp van de versnellingspotentialiaal.



## VI.

De in de instationnaire draagvlaktheorie gebruikelijke, als punt van uitgang voor de mathematische behandeling gebezigde, vereenvoudigde veldconfiguratie, waarbij alle veldsingulariteiten in één plat vlak geconcentreerd zijn, is onbevredigend, daar de beoordeling van de aan de theorie ten grondslag liggende benaderingen op deze wijze wordt bemoeilijkt. Deze bezwaren vallen weg, als wordt uitgegaan van de werkelijke veldconfiguratie, hetgeen zonder ernstige moeilijkheden mogelijk is.

## VII.

Bij slanke vleugels zonder pijlvorm blijven de op tweedimensionale stroming betrokken profieleigenschappen grotendeels behouden. Bij pijlvormige vleugels is dit waarschijnlijk in veel mindere mate het geval, waardoor de profielkeuze voor zulke vleugels een essentiële moeilijker probleem wordt.

## VIII.

Het fundamentele existentiebewijs uit de potentiaaltheorie, gecombineerd met de voorwaarde, dat aan de scherpe achterrand van een draagvlak (in een ideaal medium) geen oneindig grote stroomsnelheid mag optreden, maken de aanwezigheid van discontinuïteiten in het stromingsveld onvermijdelijk, althans voor zover de rusttoestand als aanvangstoestand wordt aanvaard. Het optreden van discontinuïteiten, zoals bekend is in de vorm van een discontinuïteitsvlak voor de tangentiële component van de stroomsnelheid, is derhalve een fundamentele eigenschap van het stromingsveld om een draagvlak, en dient als zodanig in de grondslagen van een synthetische theorie te zijn opgenomen. Het tweedimensionale stationnaire geval, waarbij de singulariteit aan de scherpe achterrand is verwijderd door toevoeging van een circulatie om het draagvlak, zonder in het veld discontinuïteiten te aanvaarden, vormt een grensgeval, dat in principe van secundaire betekenis is, en dat hoogstens te gebruiken ware om het type der te verwachten discontinuïteiten op te sporen.

## IX.

De gebleken moeilijkheden met de convergentie der reeksontwikkelingen van de in het fysische vlak gedefinieerde potentiaalfunctie, gebruikt ter approximatie van bepaalde transsonische stromingsgebieden (zie b.v. H. Görtler: Zum Uebergang von Unter- zu Ueberschallgeschwindigkeiten in Düsen, ZAMM 1939, S. 325) zullen verdwijnen als men de berekening baseert op reeksontwikkelingen voor een beperkte omgeving van het punt  $w = c^*$ ,  $\theta = 0$  van het hodografenvlak ( $w$  en  $\theta$ : poolcoördinaten in dat vlak,  $c^*$ : kritieke snelheid).

## X.

Uit de ervaring dat kunstmatig veroorzaakte mutaties in het kiemplasma van levende organismen in zeer overwegende mate „ongunstig” zijn, mag niet de conclusie worden getrokken, dat dit ook voor op natuurlijke wijze tot stand komende mutaties zal gelden.

## XI.

De wetenschappelijke onderzoeker draagt geen *bijzondere* verantwoordelijkheid voor het gebruik, dat van de producten van zijn arbeid wordt gemaakt. Het is ondemocratisch, wanneer hij hierop een onevenredige invloed verlangt. De plicht, een onzedelijk gebruik van deze producten naar vermogen te voorkomen, deelt hij met al zijn medemensen.

Hij heeft in dit verband ongetwijfeld wel de plicht met de vereiste nadruk, en tijdig, te waarschuwen voor de gevolgen, die bij een destructieve toepassing te verwachten zijn.

## XII.

Het vestigen van een nauw contact tussen mathematici, die aan de universiteiten studeren, en de toegepaste natuurwetenschappen, is alleen dan met goed — en blijvend — gevolg mogelijk wanneer mathematische hoofdstukken uit de toegepaste wetenschappen in de universitaire examenprogramma's worden toegelaten (ter vervanging van hoofdstukken uit de zuivere wiskunde).

## XIII.

De Inleiding van het „Leerboek der natuurkunde onder redactie van prof. dr. R. Kronig” bevat enige passages, die uit didactisch oogpunt aanleiding kunnen geven tot bedenking.

---