Technische Hogeschool
Handbibliotheek
Afd. Weg en Waterb. kunde

11 Mag. 150
E 17

# OVER DE STABILITEIT VAN HET ELASTISCH EVENWICHT

PROEFSCHRIFT TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD VAN DOCTOR IN DE TECHNISCHE WETENSCHAP AAN DE TECHNISCHE HOOGESCHOOL TE DELFT, OP GEZAG VAN DEN RECTOR-MAGNIFICUS Dr Ir H. J. VAN DER MAAS, HOOGLEERAAR IN DE AFDEELING DER WERKTUIGBOUWKUNDE, SCHEEPSBOUWKUNDE EN VLIEGTUIGBOUWKUNDE, VOOR EEN COMMISSIE UIT DEN SENAAT TE VERDEDIGEN OP WOENSDAG 14 NOVEMBER 1945 DES NAMIDDAGS TE 3.30 UUR

DOOR

WARNER TJARDUS KOITER
WERKTUIGKUNDIG INGENIEUR
GEBOREN TE AMSTERDAM

UITGEVERIJ H. J. PARIS
AMSTERDAM MCMXLV

k 967

Dit proefschrift is goedgekeurd
door den promotor
PROF. DR IR C. B. BIEZENO

# INHOUD


Blz.

*INLEIDING* . . . . . 1

HOOFDSTUK 1 – DE ELASTICITEITSTHEORIE VOOR EINDIGE VERPLAATSINGEN . . . . . 9

11 – *Vormveranderingen bij eindige verplaatsingen* . . . . 9
12 – *De elastische potentiaal.* . . . . . 10
13 – *Het principe van Hamilton en de bewegingsvergelijkingen* . . . . . 12

HOOFDSTUK 2 – DE STABILITEIT VAN HET EVENWICHT. . . . . 17

21 – *Het stabiliteitscriterium.* . . . . . 17
22 – *Toepassing van het stabiliteitscriterium* . . . . . 18
23 – *Nadere beschouwing van de theorie van Trefftz.* 21
24 – *De stabiliteitsgrens.* . . . . . 25
25 – *De stabiliteit op de stabiliteitsgrens* . . . . . 29
26 – *Toepassing van het criterium* (25. 22) . . . . . 37
27 – *Bijzondere gevallen.* . . . . . 39
271 – Het geval $A_4 = 0$
272 – Het geval $\omega_2 = 0$
28 – *Verband met de onderzoekingen van Mayer.* . . . 47
29 – *Toepassing op de elasticiteitstheorie* . . . . . 49

HOOFDSTUK 3 – EVENWICHTSTOESTANDEN BIJ BELASTINGEN IN DE OMGEVING VAN DE KNIKBELASTING . . . . . 52

31 – *De knikbelasting.* . . . . . 52
32 – *De potentieele energie* . . . . . 54
33 – *Berekening der functies* $\bar{u}$. . . . . 57
34 – *Verbetering der benadering* . . . . . 60
35 – *De evenwichtstoestanden.* . . . . . 64
36 – *Bijzondere gevallen.* . . . . . 70
37 – *Aard der behandelde problemen* . . . . . 75
38 – *Uitbreiding der theorie* . . . . . 76

Blz.

HOOFDSTUK 4 – DE INVLOED VAN KLEINE AFWIJKINGEN . . . . . 85

41 – *De vervormingen.* . . . . . 85
42 – *De potentieele energie* . . . . . 87
43 – *Vereenvoudiging der energie.* . . . . . 90
44 – *Berekening der functies* $\bar{u}$. . . . . 93
45 – *De evenwichtstoestanden.* . . . . . 95
46 – *Bijzondere gevallen.* . . . . . 104
47 – *Uitbreiding der theorie* . . . . . 105

HOOFDSTUK 5 – SCHAALCONSTRUCTIES BIJ EINDIGE VERPLAATSINGEN . . . . . 108

51 – *Vereenvoudigende onderstellingen.* . . . . . 108
52 – *Differentiaalmeetkunde van oppervlakken* . . . . . 109
53 – *De vervormingen.* . . . . . 112
54 – *De elastische potentiaal.* . . . . . 115
55 – *Consequenties der ingevoerde onderstellingen* . . . . . 116
56 – *Uitdrukking van de vervormingen in de verplaatsingen* 123
57 – *De invloed van kleine afwijkingen* . . . . . 129

HOOFDSTUK 6 – TOEPASSINGEN OP STAAF- EN PLAATPROBLEMEN . . . . . 133

61 – *De onsamendrukbare staaf (probleem der elastica)* . . 133
611 – De potentieele energie
612 – De knikbelasting
613 – Evenwichtstoestanden bij belastingen in de omgeving van den kniklast
614 – De invloed van een kleine excentriciteit der belasting
615 – Vergelijking met de exacte oplossing
62 – *Het probleem van Cox* . . . . . 142
621 – De potentieele energie
622 – De knikbelasting
623 – Evenwichtstoestanden bij belastingen in de omgeving van den kniklast
624 – De invloed van kleine afwijkingen
625 – Vergelijking met de oplossing van Cox
63 – *Het probleem der meedragende breedte* . . . . . 158
631 – De elastische energie
632 – De theorie van MARGUERRE–TREFFTZ
633 – Toepassing van de algemeene theorie van hoofdstuk 3



Blz.

HOOFDSTUK 7 – DE AXIAAL OP DRUK BELASTE DUNWANDIGE CYLINDER. . . . . 173

71 – *De vervormingen en de potentieele energie.* . . . . . 173
72 – *De grondtoestand* . . . . . 176
73 – *De knikbelasting* . . . . . 179
74 – *Vereenvoudigingen* . . . . . 182
75 – *De stabiliteit van den kniktoestand* . . . . . 186
76 – *Evenwichtstoestanden bij belastingen in de omgeving van den kniklast.* . . . . . 190
77 – *De invloed van kleine afwijkingen* . . . . . 196
78 – *Nadere beschouwing van eenige vereenvoudigingen* . . 205
781 – Formule (73. 9)
782 – Formule (71. 5)
783 – De verwaarloozing van randinvloeden
784 – De verwaarloozing der vierdegraadstermen

*AANHANGSEL* . . . . . 209

*LITERATUURLIJST* . . . . . 215

*SUMMARY.* . . . . . 218

# INLEIDING

Het probleem van de stabiliteit van het elastisch evenwicht heeft reeds vroeg de belangstelling van vele onderzoekers gehad. De meeste bekendheid hebben wel de baanbrekende onderzoekingen van EULER over de elastica verworven (lit. 1).

Indien van eenige korte opmerkingen van THOMSON (lit. 2) wordt afgezien, schijnt de eerste poging tot een algemeene stabiliteitstheorie te geraken door BRYAN (lit. 3) te zijn ondernomen. Zijn beschouwingen zijn gebaseerd op het energiecriterium volgens welk criterium een evenwichtstoestand stabiel dan wel instabiel is naar gelang de potentieele energie in dien toestand al dan niet een werkelijk minimum bezit. Bij de berekening van de elastische energie brengt hij echter alleen de in de verplaatsingen quadratische termen in rekening. De tweede variatie van deze energie is dan van denzelfden vorm als de energie zelf en evenals deze steeds positief. Zijn de verplaatsingen voorgeschreven in alle punten waar krachten op het lichaam aangrijpen, zoodat de constante energie van het belastend krachtenveld nul kan worden gesteld, dan is de elastische energie tevens de totale potentieele energie; de tweede variatie van laatstgenoemde energie is dan ook steeds positief, zoodat instabiliteit in zulke gevallen zou zijn uitgesloten [1]). Deze conclusie is in strijd met de ervaring zooals blijkt uit het voorbeeld van de in haar uiteinden gedrukte rechte staaf welke een voorgeschreven samendrukking ondergaat; wordt de samendrukking voldoende groot gekozen dan is deze evenwichtstoestand instabiel.

SOUTHWELL (lit. 4) heeft de vergelijkingen afgeleid die het z.g. neutrale evenwicht van den homogenen spannings- en vervormingstoestand beheerschen. Hij beschouwt een uit den homogenen toestand door infinitesimale extra-verplaatsingen ($u$, $v$, $w$) afgeleiden naburigen vervormingstoestand. Opdat in dezen toestand weer evenwicht heersche moeten op het lichaam, behalve de voor de handhaving van den homogenen begintoestand vereischte en door het oorspronkelijk krachtenveld geleverde belastingen, extra-belastingen werken die wegens de kleinheid der extra-verplaatsingen ($u$, $v$, $w$) homogeen lineair afhankelijk zijn van $u$, $v$, $w$ en haar afgeleiden. Het evenwicht in den homogenen begintoestand wordt nu neutraal genoemd indien er een naburige evenwichtstoestand bestaat waarvoor de benoodigde extra-belastingen door het oorspronkelijk krachtenveld worden geleverd. De evenwichts-

[1]) Op deze omstandigheid heeft THOMSON (lit. 2) reeds gewezen.

vergelijkingen en randvoorwaarden die voor den naburigen toestand gelden zijn lineair en homogeen in de verplaatsingen $u$, $v$, $w$ en haar afgeleiden. In het algemeen bezitten zij geen van nul verschillende oplossing $u$, $v$, $w$; slechts wanneer zij zulk een niet-triviale oplossing toelaten — welke dan wegens de homogeniteit van vergelijkingen en randvoorwaarden op een constanten factor na is bepaald [1]) — is het evenwicht in den oorspronkelijken toestand neutraal. Voor de beschrijving van spannings- en vervormingstoestand kiest SOUTHWELL als onafhankelijk veranderlijken de coördinaten van een punt van het lichaam in den onvervormden toestand; ook de spanningen worden op de oppervlakte-elementen in dezen toestand betrokken.

BIEZENO en HENCKY (lit. 5) hebben de beschouwingen van SOUTHWELL uitgebreid tot den algemeenen spanningstoestand met het bijbehoorend belastend krachtenveld. Beschouwd wordt het lichaam in een bekend onderstelden eersten belastingstoestand I en in een door infinitesimale verplaatsingen hieruit afgeleiden toestand II. Het evenwicht in den toestand I is weer neutraal indien een evenwichtstoestand II bestaat met extra-belastingen die homogeen lineair van de extra-verplaatsingen en haar afgeleiden afhangen en die door het belastend krachtenveld worden geleverd; de vergelijkingen voor het neutrale evenwicht zijn ook zelve weer homogeen lineair. De coördinaten van een punt in den toestand I worden als onafhankelijk veranderlijken gekozen terwijl de spanningen steeds op de oppervlakte-elementen in den bijbehoorenden toestand worden betrokken. Dientengevolge is het niet noodig de wijze te kennen waarop de toestand I uit den onvervormden toestand is verkregen en behoeft slechts de elasticiteitswet voor den overgang van toestand I naar toestand II te worden geformuleerd.

REISSNER (lit. 6) heeft getracht de door BRYAN met behulp van het energiecriterium opgestelde beschouwingen te verbeteren.

TREFFTZ (lit. 7, 8) heeft de stabiliteitstheorie ontwikkeld uitgaande van een elasticiteitstheorie voor eindige vervormingen; hierbij wordt opnieuw het energiecriterium gebruikt voor de beoordeeling van de stabiliteit. Voldoende voorwaarde voor stabiliteit is dat de tweede variatie van de potentieele energie voor elke kinematisch mogelijke variatie der verplaatsingen positief is. De stabiliteitsgrens is bereikt indien de tweede variatie semi-

[1]) In sommige gevallen bezitten de vergelijkingen verscheidene lineair onafhankelijke oplossingen ($u_j$, $v_j$, $w_j$). De algemeene oplossing ($\Sigma c_j u_j$, enz.) bevat dan een overeenkomstig aantal onbepaalde coëfficiënten. Zulk een geval kan zich voordoen bij de gedrukte, elastisch gesteunde staaf (zie lit. 52). Voor sommige verhoudingen van de stijfheid van de veerende ondersteuning tot de buigstijfheid bezit de staaf bij een zelfde belasting twee knikvormen met een verschillend aantal golven.



definiet positief is, d. w. z. voor één of meer geschikt gekozen verplaatsingvariaties nul is, echter voor geen enkele mogelijke variatie der verplaatsingen negatief is. In zijn eerste verhandeling kiest TREFFTZ als onafhankelijk veranderlijken de coördinaten van een punt in den onvervormden toestand, in zijn tweede publicatie de coördinaten van een punt in den op zijn stabiliteit te onderzoeken vervormden toestand I. De spanningen in een van toestand I afwijkenden toestand II worden in overeenstemming hiermede betrokken op de oppervlakte-elementen in den onvervormden toestand, resp. den op zijn stabiliteit te onderzoeken toestand I; de spankrachten in toestand II worden ontbonden in de richtingen van die lijnelementen welke in den onvervormden toestand, resp. den toestand I, evenwijdig zijn aan de coördinaatassen. De stabiliteitsvergelijkingen (die worden afgeleid uit een toestand II die infinitesimaal van toestand I afwijkt) nemen dan een vrij eenvoudigen vorm aan.

MARGUERRE (lit. 9) heeft in aansluiting op de verhandelingen van TREFFTZ het verband tusschen de verschillende voor de behandeling van technische stabiliteitsproblemen toegepaste minimumprincipes en het algemeene principe van het minimum der potentieele energie nader onderzocht en hierbij aan de hand van het voorbeeld van de op druk belaste staaf een uitvoerige toelichting gegeven.

KAPPUS (lit. 10) heeft de door TREFFTZ slechts summier aangegeven elasticiteitstheorie voor eindige vervormingen verder ontwikkeld [1]). Uit de algemeene evenwichtsvergelijkingen leidt hij de vergelijkingen voor het neutrale evenwicht af. Hierbij blijkt dat het evenwicht bij de door TREFFTZ gedefinieerde stabiliteitsgrens neutraal is in den zin van SOUTHWELL en BIEZENO–HENCKY.

Ook BIOT (lit. 11—14) heeft de vergelijkingen voor het neutrale evenwicht uit een elasticiteitstheorie voor eindige vervormingen [1]) afgeleid. Ter vereenvoudiging voert hij een nieuwe methode van beschrijving voor den vervormingstoestand in. Hiermede is het hem gelukt den stabiliteitsvergelijkingen een zoodanigen vorm te verleenen dat de mechanische beteekenis der verschillende termen duidelijk te voorschijn treedt. Deze verhoogde aanschouwelijkheid kan veel waarde hebben bij het opsporen van die termen

[1]) KAPPUS noch BIOT schijnt bekend te zijn geweest met de oudere literatuur over eindige vervormingen van een elastisch lichaam. GREEN (lit. 15) heeft de onderstelling van het bestaan eener elastische potentiaal ook bij eindige deformaties reeds in 1839 uitgesproken; met behulp van deze onderstelling hebben KIRCHHOFF (lit. 16) en THOMSON (lit. 2) de evenwichtsvoorwaarden opgesteld. Van de overige schrijvers op het gebied van eindige deformaties, wier publicaties van minder belang zijn voor het onderhavige stabiliteitsonderzoek, mogen nog worden genoemd HAMEL (lit. 17) en MURNAGHAN (lit. 18).

der vergelijkingen welke bij de toepassing op een speciaal probleem kunnen worden verwaarloosd.

De tot dusverre gehouden en in het voorgaande besproken algemeene stabiliteitsbeschouwingen zijn beperkt tot het onderzoek van het neutrale evenwicht en doelen in het bijzonder op de bepaling van de stabiliteitsgrens. De verschijnselen die zich voordoen bij het bereiken of eventueel overschrijden van deze grens bleven hierbij buiten beschouwing. Deze beperking in den omvang der uitgevoerde onderzoekingen vindt haar oorzaak in twee omstandigheden. Allereerst moeten de groote mathematische moeilijkheden worden genoemd die de theoretische behandeling van het elastisch gedrag na overschrijding van de stabiliteitsgrens belemmeren. Terwijl het onderzoek van de neutrale evenwichtstoestanden nog met behulp van lineaire differentiaalvergelijkingen mogelijk is, zijn de vergelijkingen die het elastisch gedrag boven de stabiliteitsgrens beschrijven niet meer lineair. Maar bovendien stelde de techniek zich langen tijd tevreden met de kennis van de stabiliteitsgrens (knikbelasting). Hierbij werd het standpunt ingenomen dat de belasting van een constructie uit veiligheidsoverwegingen steeds beneden deze grens moest worden gehouden, zoodat het onderzoek naar hetgeen boven deze grens geschiedt overbodig leek.

Het is echter reeds lang bekend dat sommige constructies, bij voorbeeld langs de randen ondersteunde, op druk belaste vlakke platen, in staat zijn belangrijke overschrijdingen van de knikbelasting op te nemen zonder dat ergens in het materiaal de elasticiteitsgrens wordt overschreden; in de moderne techniek, met name in den vliegtuigbouw, waar gewichtsbesparing van essentieele beteekenis is, wordt deze overschrijding van den kniklast ook inderdaad toegelaten! De theoretische behandeling van dit plaatprobleem is o.a. door MARGUERRE en TREFFTZ (lit. 19, 20) gegeven; de overeenstemming van hun resultaten met de ervaring is voor niet al te groote overschrijding van de knikbelasting zeer goed.

Anderzijds is geconstateerd dat de experimenteel bepaalde knikbelastingen van verschillende schaalconstructies, bijvoorbeeld op axialen druk belaste, dunwandige cylinders, belangrijk beneden de theoretische stabiliteitsgrens liggen; daarenboven vertoonen de experimenteele resultaten een zeer groote spreiding. De door FLÜGGE (lit. 21) en DONNELL (lit. 22) hiervoor gegeven verklaring, gebaseerd op aanvankelijke afwijkingen van het proefstuk van den zuiveren cylindervorm waardoor de vloeigrens van het materiaal snel zou worden bereikt, wordt door COX (lit. 23) en VON KÁRMÁN en TSIEN (lit. 24) in twijfel getrokken. Laatstgenoemden merken op dat de aanvankelijke afwijkingen een veelvoud van de wanddikte zouden moeten bedragen om de lage experimenteele



waarden te verklaren; zulke afwijkingen zouden echter niet aan de aandacht van de onderzoekers hebben kunnen ontsnappen. Voorts wijzen COX, VON KÁRMÁN en TSIEN gezamenlijk op de omstandigheid dat de verklaring van FLÜGGE en DONNELL een geleidelijk optreden van builen bij toenemende belasting eischt, terwijl bij de proeven een plotseling, bijna explosief knikken plaats vindt; ook de groote spreiding in de beproevingsresultaten wordt door deze verklaring niet bevredigend opgehelderd. De mogelijkheid daarentegen dat het gedrag van den cylinder zuiver elastisch kan worden verklaard, heeft COX (lit. 23) door een suggestief staafmodel geïllustreerd; in eenigszins anderen vorm hebben ook VON KÁRMÁN, DUNN en TSIEN (lit. 25) dit model voorgesteld.

Uit de hierboven vermelde voorbeelden blijkt duidelijk dat met de tot dusver opgestelde stabiliteitstheorieën niet kan worden volstaan. Zij moeten zoodanig worden aangevuld dat ook het zoo uiteenloopend gedrag van verschillende constructies bij belastingen in de omgeving van den theoretischen kniklast kan worden beschreven. De onderhavige verhandeling beoogt zulk een uitbreiding te geven.

Ondersteld wordt dat de op een constructie werkende belastingen kunnen worden voorgesteld door het product van een eenheidsbelastingsysteem en een voorloopig onbepaalden belastingparameter $\lambda$. Gevraagd wordt dan naar de evenwichtstoestanden die voorkomen bij een gegeven waarde van $\lambda$ alsmede naar de stabiliteit van deze toestanden. Voor de techniek is in het bijzonder van belang de evenwichtstoestand die bij monotone vergrooting van $\lambda$ vanaf nul continu uit den onvervormden toestand wordt verkregen. Voor voldoend kleine waarden van $\lambda$ is deze z.g. grondtoestand steeds stabiel, in overeenstemming met de bepaaldheidsstelling van KIRCHHOFF (zie lit. 39 en par. 31). Daarentegen wordt in vele gevallen de grondtoestand instabiel bij overschrijding van een kritieke waarde $\lambda_1$. De bij deze grenswaarde $\lambda_1$ behoorende belasting, waarvoor het evenwicht op de stabiliteitsgrens en derhalve (zie lit. 10) ook neutraal is, wordt de kniklast genoemd. Bij den kniklast bestaan er mitsdien behalve de grondtoestand naburige, infinitesimaal afwijkende evenwichtstoestanden. Het is dan te verwachten dat bij weinig van den kniklast verschillende belastingen eveneens naburige evenwichtstoestanden bestaan, die door kleine doch nu eindige verplaatsingen uit den grondtoestand worden verkregen [1]). Vervolgens rijst het vermoeden dat het verschil in elastisch gedrag van verschillende constructies bij belastingen in de omgeving van den theoretischen kniklast samen-

[1]) Voor een illustratie van dit vermoeden wordt verwezen naar de figuren 1*a*—*d* (blz. 67). Hierin is *a* een maat voor de verplaatsingen van den grondtoestand naar een naburigen evenwichtstoestand.

hangt met een verschillenden aard van de bij deze belastingen behoorende mogelijke naburige evenwichtstoestanden. Bij een aanvankelijk oriënteerend onderzoek bleek de aard dezer evenwichtstoestanden essentieel afhankelijk te zijn van de stabiliteit van het evenwicht bij den kniklast, d. w. z. van de omstandigheid of het grensgeval van het evenwicht bij den kniklast nog tot de stabiele dan wel reeds tot de instabiele evenwichtstoestanden moet worden gerekend [1]).

In de eerste plaats moet dus het evenwicht op de stabiliteitsgrens aan een nader onderzoek worden onderworpen. Alvorens hiertoe over te gaan leek het echter gewenscht een kort overzicht te geven van de elasticiteitstheorie voor eindige verplaatsingen (hoofdstuk 1); het stabiliteitsonderzoek behoort immers essentieel tot het terrein der niet-lineaire elasticiteitstheorie.

In hoofdstuk 2 wordt de algemeene stabiliteitstheorie behandeld. Na weergave van de theorie van TREFFTZ in de eerste twee paragrafen worden in par. 23 enkele hierbij ingevoerde onderstellingen nader bezien. In de volgende paragrafen wordt het evenwicht op de stabiliteitsgrens beschouwd (par. 24—27); het blijkt dat dit evenwicht „in het algemeen" instabiel is (par. 25). De ontwikkelde methode van onderzoek wordt in par. 28 in verband gebracht met onderzoekingen van MAYER (lit. 31) over minima van functies van een eindig aantal veranderlijken.

In hoofdstuk 3 worden de evenwichtstoestanden bij belastingen in de omgeving van den kniklast onderzocht; de hiervoor gebruikte benaderingsmethode levert betere resultaten naarmate de belasting minder van den kniklast verschilt. De aard dezer evenwichtstoestanden blijkt inderdaad te worden beheerscht door de stabiliteit van het evenwicht bij den kniklast (par. 35, 36). Hierbij moet echter een restrictie worden gemaakt ten aanzien van de soort der behandelde problemen die inhaerent is aan de toegepaste methode van onderzoek (par. 37). Deze methode stelt uitsluitend in staat tot behandeling van knikproblemen behoorend bij een z.g. vertakkingspunt van het evenwicht; de z.g. doorslagproblemen blijven derhalve buiten beschouwing. In par. 38 wordt tenslotte een in vele gevallen mogelijke uitbreiding der theorie behandeld voor verder van den kniklast verwijderde belastingen. Het belangrijkste resultaat van hoofdstuk 3 is dat er bij stabiliteit van het evenwicht bij den kniklast (den

[1]) Eenige mogelijkheden voor naburige evenwichtstoestanden zijn in de figuren 1*a*—*d* (blz. 67) weergegeven. De figuren 1*a*, *b*, *d* hebben betrekking op gevallen waarin het evenwicht bij den kniklast instabiel is, fig. 1*c* heeft betrekking op een geval waarin het evenwicht bij den kniklast stabiel is. Het kenmerkende verschil is dat er in eerstgenoemde gevallen wèl, in het laatste geval niet naburige evenwichtstoestanden bestaan bij belastingen kleiner dan de kniklast.



kniktoestand) naburige evenwichtstoestanden alleen bestaan bij grootere belastingen; deze toestanden zijn stabiel. Bij afzien van de mogelijkheid eener overschrijding van de elasticiteitsgrens van het materiaal kunnen dus grootere belastingen dan de kniklast worden opgenomen. Bij instabielen kniktoestand komen daarentegen wel naburige evenwichtstoestanden voor bij belastingen kleiner dan de kniklast; deze toestanden zijn instabiel. Weliswaar bestaan er ook bij instabielen kniktoestand in sommige gevallen stabiele evenwichtstoestanden bij grootere belastingen doch deze toestanden kunnen slechts worden bereikt door passeeren van den instabielen kniktoestand zoodat hun practische beteekenis op zijn minst twijfelachtig is.

De theorie van hoofdstuk 3 levert nog geen verklaring voor het feit dat de experimenteel bepaalde knikbelastingen voor sommige constructies belangrijk kleiner zijn dan de theoretische kniklasten. Ter verkrijging van zulk een verklaring wordt in hoofdstuk 4 de invloed van kleine afwijkingen van een werkelijke constructie ten opzichte van een voor zulk een constructie ontworpen geschematiseerd model in beschouwing genomen. De noodzakelijkheid van deze beschouwing wordt betoogd aan de hand van het voorbeeld der op knikbuiging belaste staaf. Het belangrijkste resultaat van dit onderzoek is dat bij instabielen kniktoestand van het model de kniklast der constructie bij kleine verschillen tusschen constructie en model aanzienlijk kleiner kan zijn (par. 455); dientengevolge kan het verschil tusschen de theoretische en experimenteele kniklasten in principe zuiver elastisch worden verklaard door kleine afwijkingen van een constructie ten opzichte van het bijbehoorende model aan te nemen. Het spreekt vanzelf dat het bezwijken der constructie wordt verhaast indien de elasticiteitsgrens van het materiaal wordt overschreden; deze complicatie wordt echter niet verder beschouwd.

Het interessantste toepassingsvoorbeeld voor de ontwikkelde theorie vormt de axiaal op druk belaste dunwandige cylinder; immers is voor dit voor de techniek zoo belangrijke geval het groote verschil tusschen de theoretische en experimenteele knikbelastingen tot dusver niet bevredigend opgehelderd. Voor de toepassing der algemeene theorie moet dan worden beschikt over de kennis van de elastische energie der dunwandige cylinderschaal bij eindige verplaatsingen. Met het oog op de toepassingsmogelijkheid ook op andere schaalconstructies wordt in hoofdstuk 5 een algemeene schaaltheorie voor eindige verplaatsingen gegeven. Hierbij wordt van dezelfde onderstellingen uitgegaan als in de bekende technische schaaltheorie voor infinitesimale verplaatsingen (par. 51). Na de berekening van de vervormingen en de elastische potentiaal (par. 53 en 54) worden de consequenties van deze onderstellingen in par. 55 nader beschouwd. De belangrijkste

conclusie waartoe zij leiden is dat de elastische energie de som is van rekenergie en buigingsenergie. Tenslotte wordt in par. 57 de invloed van kleine afwijkingen weer onderzocht.

Alvorens over te gaan tot het reeds tamelijk gecompliceerde onderzoek van den dunwandigen cylinder leek het nog gewenscht eenige eenvoudiger toepassingen te behandelen ter toelichting van de algemeene theorie (hoofdstuk 6). Als eerste voorbeeld werd gekozen het bekende probleem der elastica (par. 61). In par. 62 wordt vervolgens het probleem van Cox (lit. 23) behandeld. Tenslotte wordt in par. 63 het probleem der meedragende breedte van vlakke rechthoekige op druk belaste platen beschouwd. In dit geval levert de algemeene theorie een rechtvaardiging van de op willekeuriger onderstellingen gebaseerde theorie van MARGUERRE–TREFFTZ (lit. 19).

Als laatste toepassing wordt in hoofdstuk 7 de axiaal op druk belaste cylinderschaal behandeld. Bij verwaarloozing van randinvloeden wordt voor den kniklast het uit de literatuur bekende resultaat gevonden (par. 74). Dezelfde verwaarloozing leidt tot de conclusie dat het evenwicht in den kniktoestand instabiel is (par. 75). In par. 76 worden de evenwichtstoestanden bij belastingen in de omgeving van den kniklast onderzocht. Het resultaat is dat alle voorkomende naburige evenwichtstoestanden instabiel zijn. De verkregen uitkomsten worden voor zoover dit mogelijk is vergeleken met een tijdens de bewerking van deze verhandeling beschikbaar gekomen publicatie van VON KÁRMÁN en TSIEN (lit. 52). Doordat de door genoemde schrijvers aangenomen verplaatsingstoestand minder algemeen is zijn hun resultaten althans voor belastingen in de omgeving van den kniklast minder goed. In par. 77 wordt de invloed van kleine afwijkingen van den zuiveren cylindervorm onderzocht. Aangezien dit onderzoek vrij gecompliceerd is blijft de uitwerking beperkt tot één vorm der afwijkingen. Hierbij wordt een zeer sterke daling van den kniklast reeds bij kleine afwijkingen gevonden. Hoewel het natuurlijk gewenscht is het onderzoek uit te breiden tot andere vormen van afwijkingen kan thans reeds worden geconcludeerd dat de hier gegeven theorie een verklaring levert voor het groote verschil tusschen de theoretische en experimenteele knikbelastingen; ook de groote spreiding in de beproevingsresultaten wordt door de groote gevoeligheid van den kniklast voor kleine veranderingen in de grootte der afwijkingen bevredigend verklaard.

Hoofdstuk 1

# DE ELASTICITEITSTHEORIE VOOR EINDIGE VERPLAATSINGEN

## 11 – VORMVERANDERINGEN BIJ EINDIGE VERPLAATSINGEN

In deze paragraaf wordt een kort overzicht gegeven van de resultaten van de algemeene theorie der vormveranderingen (lit. 26, 27).

Als onafhankelijk veranderlijken worden de coördinaten $x_1$, $x_2$, $x_3$ van een punt van het lichaam in den onvervormden toestand ten opzichte van een vast rechthoekig assenstelsel aangenomen. Elk punt $P(x_i)$ ondergaat een verplaatsing met componenten $u_i$ in de asrichtingen, zoodat de coördinaten van dit punt in den vervormden toestand $x_i + u_i$ zijn. De vormverandering in de onmiddellijke omgeving van het punt $P$ wordt geheel beschreven door de zes vormveranderingscomponenten

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial u_h}{\partial x_i} \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, 3. \\ j = 1, 2, 3. \end{matrix} \tag{11.1}$$

De nieuwe lengte $dl'$ van een lijnelement door $P$, dat aanvankelijk de lengte $dl$ bezat en welks richting hoeken $\alpha_i$ met de coördinaatrichtingen insloot, kan in de grootheden (11.1) worden uitgedrukt

$$(dl')^2 = (dl)^2 \{ (1+\gamma_{11}) \cos^2 \alpha_1 + (1+\gamma_{22}) \cos^2 \alpha_2 + (1+\gamma_{33}) \cos^2 \alpha_3 + 2\gamma_{12} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + 2\gamma_{23} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + 2\gamma_{31} \cos \alpha_3 \cos \alpha_1 \}. \tag{11.2}$$

Het getal $e = \dfrac{dl' - dl}{dl}$ wordt de bij de richting $dl$ behoorende specifieke rek genoemd. Wordt deze richting evenwijdig aan één der coördinaatassen gekozen dan is

$$e_i = \sqrt{1 + \gamma_{ii}} - 1. \tag{11.3}$$

In den vervormden toestand vormen de lijnelementen, die aanvankelijk evenwijdig aan de coördinaatassen $x_i$ en $x_j$ $(i \neq j)$ liepen, hoeken $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$ bepaald door

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{\sqrt{(1 + \gamma_{ii})\,(1 + \gamma_{jj})}} \quad (i \neq j). \tag{11.4}$$

De betrekkingen (11. 3) en (11. 4) geven de meetkundige beteekenis van de vormveranderingscomponenten.

In de vermelde literatuur wordt bewezen dat er tenminste één stel onderling loodrechte richtingen in het punt $P$ bestaat, waarvoor van de 6 bijbehoorende vormveranderingscomponenten de grootheden $\gamma_{hk}$ $(h \neq k)$ nul zijn. Deze richtingen worden de hoofdrichtingen genoemd, de bijbehoorende vormveranderingsgrootheden $\Gamma_{hk} = 0$ voor $h \neq k$ en $\Gamma_{hh} = \Gamma_h$, de specifieke rekken in deze richtingen (hoofdrekken) $E_h$. Deze laatste grootheden zijn bepaald door

$$E_h = \sqrt{1 + \Gamma_h} - 1, \tag{11.5}$$

terwijl $\Gamma_h$ de drie reëele wortels zijn van de derdegraadsvergelijking

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \Gamma & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} - \Gamma & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} - \Gamma \end{vmatrix} = 0. \tag{11.6}$$

Omdat de grootte van de hoofdrekken onafhankelijk moet zijn van de keuze der coördinaatrichtingen kan tot het bestaan van de volgende invarianten worden geconcludeerd

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3, \\ I_2 &= \gamma_{11}\gamma_{22} + \gamma_{22}\gamma_{33} + \gamma_{33}\gamma_{11} - (\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2) = \\ &\qquad = \Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_1, \\ I_3 &= \gamma_{11}\gamma_{22}\gamma_{33} + 2\gamma_{12}\gamma_{23}\gamma_{31} - (\gamma_{11}\gamma_{23}^2 + \gamma_{22}\gamma_{31}^2 + \gamma_{33}\gamma_{12}^2) = \\ &\qquad = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3. \end{aligned}\right\} \tag{11.7}$$

## 12 - DE ELASTISCHE POTENTIAAL

De elasticiteitswet levert in het algemeen het verband tusschen de vormveranderingen en de inwendige spanningen. Zij kan echter ook op indirecte wijze worden geformuleerd door de invoering van de elastische potentiaal. Hierbij wordt ondersteld dat elk volumeëlement van het lichaam een potentieele energie bezit, welke afhankelijk is van den vormveranderingstoestand ter plaatse. Daar de vormveranderingstoestand geheel wordt beschreven door de vormveranderingscomponenten (11. 1) kan voor de elastische potentieele energie per eenheid van volume in den onvervormden toestand, de elastische potentiaal, worden geschreven:

$$A = A\,(\gamma_{ij}). \tag{12.1}$$

Hierbij is afgezien van thermo-elastische verschijnselen.

Experimenteel is gebleken dat het elastisch gedrag van de meeste constructiematerialen met een elasticiteitswet van den



vorm (12. 1) voldoende nauwkeurig wordt beschreven. Bij infinitesimale vormveranderingen is $A$ een definiet positieve homogene quadratische functie van haar argumenten. Afgezien van enkele uitzonderingen, b.v. gietijzer, is tot dusverre niet gebleken dat bij kleine doch eindige vervormingen termen van hoogeren graad dan den tweeden een rol van beteekenis spelen; dit is ook niet verwonderlijk aangezien de vormveranderingscomponenten in het elastisch gebied bij de meeste materialen zeer klein zijn (orde van grootte 0,001). In overeenstemming hiermede wordt voor het volgende ondersteld dat de elastische potentiaal een definiet positieve homogene quadratische functie is van de vormveranderingscomponenten. Blijkens (11. 1) is zij dan een functie van den vierden graad van de afgeleiden der verplaatsingen.

Behalve door de vormveranderingscomponenten $\gamma_{ij}$ kan de vervormingstoestand ook geheel worden beschreven door de grootte en richting van de hoofdrekken. Bij een isotroop materiaal moet de elastische potentiaal onafhankelijk zijn van de richtingen der hoofdrekken; de grootte der hoofdrekken wordt voorts geheel bepaald door de invarianten (11. 7), zoodat kan worden gesteld

$$A = A\,(I_1, I_2, I_3). \tag{12.2}$$

De eenige homogene quadratische functie van de vormveranderingscomponenten die den vorm (12. 2) bezit, is

$$A = \alpha_1 I_1^2 + \alpha_2 I_2, \tag{12.3}$$

waarin $\alpha_1$ en $\alpha_2$ voor een homogeen materiaal constante coëfficiënten zijn; is het materiaal heterogeen dan zijn $\alpha_1$ en $\alpha_2$ in het algemeen functies van de coördinaten $x_i$. Met (11. 7) kan voor (12. 3) worden geschreven

$$A = \alpha_1 \left\{ \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 + \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1}(\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_1) \right\}.$$

Deze uitdrukking is dan en alleen dan definiet positief (verg. lit. 33), indien geldt

$$\alpha_1 > 0 \ , \quad -1 < \frac{2\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_1} < 2,$$

waaruit volgt

$$\alpha_1 > 0 \ , \quad 0 > \alpha_2 > -3\alpha_1. \tag{12.4}$$

Voor infinitesimale vervormingen moet (12. 3) overgaan in de elastische potentiaal van de lineaire elasticiteitstheorie. Vergelijking van (12. 3) met (lit. 34) levert met de gebruikelijke elasticiteitsconstanten $G$ en $m$

$$a_1 = \tfrac{1}{4}G\frac{m-1}{m-2}\,, \quad a_2 = -\tfrac{1}{2}G\,;$$

met $G > 0$ en $m > 2$ is dan voldaan aan de ongelijkheden (12. 4).

De elastische potentiaal neemt dus den volgenden vorm aan

$$A = \tfrac{1}{4}G\frac{1}{m-2}\left\{(m-1)\,I_1^2 - 2\,(m-2)\,I_2\right\}. \qquad (12.\,5)$$

## 13 – HET PRINCIPE VAN HAMILTON EN DE BEWEGINGSVERGELIJKINGEN

De bewegingsvergelijkingen voor een elastisch lichaam kunnen worden afgeleid uit het principe van HAMILTON (zie lit. 2). Volgens dit principe is de tusschen de tijdstippen $t_0$ en $t_1$ optredende beweging van een holonoom mechanisch systeem zoodanig, dat

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(T - V)\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\delta W\,dt = 0, \qquad (13.\,1)$$

indien deze variatie wordt berekend voor den overgang van de werkelijke beweging naar een naburige infinitesimaal hiervan afwijkende beweging, welke eveneens op de tijdstippen $t_0$ en $t_1$ de werkelijk optredende configuratie oplevert; de naburige beweging moet evenals de werkelijke beweging voldoen aan de het mechanisch systeem opgelegde kinematische voorwaarden.

Hierbij zijn $T$ en $V$ onderscheidenlijk de kinetische en de potentieele energie van het mechanisch systeem; $\delta W$ is de arbeid die op het tijdstip $t$ zou worden verricht door de uitwendige krachten, indien het mechanisch systeem uit den werkelijk aanwezigen stand werd overgebracht in den correspondeerenden naburigen, infinitesimaal afwijkenden stand.

De kinetische energie van het elastisch lichaam is gegeven door

$$T = \iiint \tfrac{1}{2}\varrho \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)^2 dx_1\,dx_2\,dx_3. \qquad (13.\,2)$$

Hierin is $\varrho$ de massadichtheid van het onvervormde lichaam; de integratie moet over het volume van het onvervormde lichaam worden uitgestrekt.

De elastische potentieele energie wordt volgens (12. 1) bepaald door

$$V = \iiint A\,(\gamma_{ij})\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \qquad (13.\,3)$$



De integratie moet over het volume van het onvervormde lichaam worden uitgestrekt.

Indien $\varrho X_i$ de componenten van de massakracht in den vervormden toestand zijn, betrokken op de volume-eenheid van het onvervormde lichaam, dan wordt de door deze krachten bij den overgang naar de naburige configuratie verrichte arbeid gegeven door

$$\delta W_1 = \iiint \varrho \sum_{i=1}^{3} X_i\,\delta u_i\,dx_1\,dx_2\,dx_3. \qquad (13.\,4)$$

Hierin zijn $\delta u_i$ de bij den overgang naar de naburige configuratie optredende variaties der verplaatsingscomponenten. De integratie moet weer over het volume van het onvervormde lichaam worden uitgestrekt.

Ondersteld wordt dat op een deel $O$ van het oppervlak van het lichaam een vlaktebelasting met componenten $p_i$ werkt, betrokken op de oppervlakte-eenheid in den onvervormden toestand. Op het resteerende deel $O'$ van het oppervlak worden de verplaatsingen gegeven ondersteld. Bij den overgang naar de naburige configuratie verrichten de oppervlaktebelastingen een arbeid

$$\delta W_2 = \iint_O \sum_{i=1}^{3} p_i\,\delta u_i\,df. \qquad (13.\,5)$$

De op het oppervlaktedeel $O'$ werkende belastingen verrichten geen arbeid omdat de verplaatsingvariaties $\delta u_i$ op dat deel nul zijn.

Het principe van HAMILTON luidt nu

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \varrho \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial t}\,\delta\frac{\partial u_i}{\partial t}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 - \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \sum_{i,j}\frac{\partial A}{\partial \gamma_{ij}}\,\delta\gamma_{ij}\,dx_1\,dx_2\,dx_3 +$$
$$+\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \varrho \sum_{i=1}^{3} X_i\,\delta u_i\,dx_1\,dx_2\,dx_3 + \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_O \sum_{i=1}^{3} p_i\,\delta u_i\,df = 0. \qquad (13.\,6)$$

In de tweede integraal moet worden gesommeerd over de 6 combinaties van $i$ en $j$.

De eerste integraal kan door partieele integratie met gebruik van

$$\delta u_i = 0 \text{ voor } t = t_0 \text{ en } t = t_1$$

worden herleid tot

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \varrho \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial t}\, \delta \frac{\partial u_i}{\partial t}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \varrho \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\, \delta u_i\, dx_1\, dx_2\, dx_3, \qquad (13.7)$$

waarbij gebruik is gemaakt van de verwisselbaarheid van de volgorde der operaties $\delta$ en $\frac{\partial}{\partial t}$.

Voor de herleiding van de tweede integraal wordt met gebruik van (11.1) geschreven

$$\delta\gamma_{ij} = \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{3} \left( \frac{\partial u_h}{\partial x_j}\, \delta \frac{\partial u_h}{\partial x_i} + \frac{\partial u_h}{\partial x_i}\, \delta \frac{\partial u_h}{\partial x_j} \right).$$

Vervolgens worden alle termen met variaties van afgeleiden van $u_m$ samengenomen; deze luiden voor $m = 1$

$$\left\{ 2 \frac{\partial A}{\partial \gamma_{11}} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{12}} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{13}} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right\} \delta \frac{\partial u_1}{\partial x_1} +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial A}{\partial \gamma_{21}} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + 2 \frac{\partial A}{\partial \gamma_{22}} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{23}} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right\} \delta \frac{\partial u_1}{\partial x_2} +$$

$$+ \left\{ \frac{\partial A}{\partial \gamma_{31}} \left( 1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial A}{\partial \gamma_{32}} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + 2 \frac{\partial A}{\partial \gamma_{33}} \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right\} \delta \frac{\partial u_1}{\partial x_3}. \qquad (13.8)$$

Voor $m = 2$ en $m = 3$ worden soortgelijke vormen gevonden.

Ter afkorting wordt gesteld

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_{ii}} = \tfrac{1}{2} k_{ii}, \quad \frac{\partial A}{\partial \gamma_{ij}} = \frac{\partial A}{\partial \gamma_{ji}} = k_{ij} = k_{ji} \quad (i \neq j). \qquad (13.9)$$

Voor den vorm (13.8) kan nu worden geschreven

$$\sum_{j=1}^{3} \left( k_{j1} + \sum_{h=1}^{3} k_{jh} \frac{\partial u_1}{\partial x_h} \right) \delta \frac{\partial u_1}{\partial x_j},$$

zoodat de tweede integraal van (13.6) kan worden geschreven

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \gamma_{ij}}\, \delta\gamma_{ij}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j=1}^{3} \left( k_{ji} + \sum_{h=1}^{3} k_{jh} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right) \delta \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\} dx_1\, dx_2\, dx_3. \qquad (13.10)$$



Wordt de naar buiten positief gerekende normaal op het oppervlak met $n$ aangegeven dan gaat (13.10) na verwisseling der volgorde van variatie en differentiatie door toepassing van de stelling van GAUSZ over in

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \sum_{i,j} \frac{\partial A}{\partial \gamma_{ij}}\, \delta\gamma_{ij}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} dt \iint \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j=1}^{3} \left( k_{ji} + \sum_{h=1}^{3} k_{jh} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right) \cos(x_j, n) \right\} \delta u_i\, df +$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_{ji} + \sum_{h=1}^{3} k_{jh} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right) \right\} \delta u_i\, dx_1\, dx_2\, dx_3. \qquad (13.11)$$

Met (13.7) en (13.11) gaat vergelijking (13.6) over in

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \iiint \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_{ji} + \sum_{h=1}^{3} k_{jh} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right) + \varrho X_i - \varrho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \right\} \delta u_i\, dx_1\, dx_2\, dx_3 +$$

$$- \int_{t_0}^{t_1} dt \iint_{O} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{j=1}^{3} \left( k_{ji} + \sum_{h=1}^{3} k_{jh} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right) \cos(x_j, n) - p_i \right\} \delta u_i\, df = 0. \qquad (13.12)$$

Daar aan (13.12) moet worden voldaan voor willekeurige variaties $\delta u_i$ moeten de coëfficiënten van $\delta u_i$ in de integralen nul zijn. Hieruit volgen voor het inwendige van het lichaam de vergelijkingen

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( k_{ji} + \sum_{h=1}^{3} k_{jh} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right) + \varrho X_i - \varrho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0, \; i = 1, 2, 3 \qquad (13.13)$$

en voor het oppervlaktedeel $O$ de randvoorwaarden

$$\sum_{j=1}^{3} \left( k_{ji} + \sum_{h=1}^{3} k_{jh} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \right) \cos(x_j, n) - p_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (13.14)$$

Op het oppervlaktedeel $O'$ geldt

$$u_i = \text{gegeven}. \qquad (13.15)$$

De vergelijkingen (13.13) en (13.14) moeten natuurlijk overeenkomen met de vergelijkingen van KAPPUS (lit. 10), welke uit het evenwicht van spankrachten en massakrachten op een infinite-

simaal deeltje van het lichaam zijn afgeleid. Inderdaad zijn de hoofdvergelijkingen en randvoorwaarden van KAPPUS voor zijn spanningscomponenten $k_{ij}$ formeel identiek met (13. 13) en (13. 14), terwijl de voorwaarden waaraan KAPPUS' spanningscomponenten moeten voldoen voor het bestaan van een elastische potentiaal, welke dan tevens de specifieke vormveranderingsenergie is, worden uitgedrukt door vergelijkingen van den vorm (13. 9).

De vergelijkingen die het elastisch evenwicht beheerschen kunnen uit (13. 13) worden verkregen door de afgeleiden naar den tijd nul te stellen; zij luiden

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(k_{ji} + \sum_{h=1}^{3} k_{jh} \frac{\partial u_i}{\partial x_h}\right) + \varrho X_i = 0\,; \quad i = 1, 2, 3. \qquad (13.16)$$

de randvoorwaarden (13. 14) blijven ongewijzigd gelden.

Hoofdstuk 2

# DE STABILITEIT VAN HET EVENWICHT

## 21 – HET STABILITEITSCRITERIUM

Voor het onderzoek naar de stabiliteit van een mechanisch systeem wordt meestal gebruik gemaakt van de methode der kleine trillingen of van het energiecriterium.

Bij de eerstgenoemde methode worden de bewegingsvergelijkingen opgesteld voor kleine verplaatsingen uit den evenwichtstoestand; de kleinheid dezer verplaatsingen wordt tot uitdrukking gebracht door alleen de termen die lineair zijn in deze grootheden en hun afgeleiden in rekening te brengen. Van de aldus verkregen homogene lineaire vergelijkingen worden de oplossingen gezocht welker afhankelijkheid van den tijd door een gemeenschappelijken factor $e^{pt}$ wordt gekenmerkt. De beschouwde evenwichtstoestand is dan en alleen dan stabiel indien voor alle oplossingen van deze gedaante $p$ òf zuiver imaginair òf reëel en negatief òf complex is met een negatief reëel deel (hierbij is afgezien van de mogelijke complicatie dat de karakteristieke vergelijking voor $p$ meervoudige wortels bezit). Ook het stabiliteitsonderzoek van SOUTHWELL (lit. 4) en BIEZENO–HENCKY (lit. 5) kan met deze methode in verband worden gebracht; zij onderzoeken onder welke omstandigheden $p$ de waarde nul kan aannemen.

Volgens het energiecriterium is een evenwichtstoestand van een mechanisch systeem dan en alleen dan stabiel indien bij elken overgang naar een naburige, kinematisch mogelijke configuratie de door de uitwendige krachten op het systeem verrichte arbeid niet grooter is dan de toeneming der inwendige potentieele energie. De toepassing van dit kenmerk wordt belangrijk vereenvoudigd indien nog wordt ondersteld dat ook de uitwendige belastingen een potentieele energie bezitten. De door deze belastingen verrichte arbeid wordt dan gegeven door het verschil van de potentieele energie der belastingen in den evenwichtstoestand en in de naburige configuratie. Het energiecriterium eischt dan voor stabiliteit dat de totale potentieele energie, bestaande uit de som van inwendige en uitwendige energie, in den evenwichtstoestand een minimum bezit.

Voor een elastisch lichaam, waarvoor de potentieele energie bestaat uit de som van één of meer integralen welker integranden functies zijn van de verplaatsingen en haar afgeleiden, behoeft deze minimum-voorwaarde nog een nadere preciseering. Worden

de verplaatsingen in den evenwichtstoestand $U_i$ genoemd, die in een naburigen, kinematisch mogelijken toestand $U_i + u_i$ dan bezit de potentieele energie $P(v_i)$ dan en alleen dan een minimum voor $v_i = U_i$ indien het mogelijk is twee vaste positieve grootheden $g$ en $h$ aan te geven zoodanig dat uit de in het geheele lichaam geldende ongelijkheden

$$|u_i| < g \; ; \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| < h$$

volgt

$$P(U_i + u_i) \geqq P(U_i). \tag{21.1}$$

Voor de bepaling van de stabiliteits*grens* zijn de uit de theorie der kleine trillingen en het energiecriterium ontwikkelde methoden (lit. 4, 5, 7, 8) in wezen identiek (lit. 10). Wanneer nochtans in het volgende aan het energiecriterium de voorkeur wordt verleend dan geschiedt dit wegens de mogelijkheid die dit criterium biedt voor het nader onderzoek van de stabiliteit op de stabiliteitsgrens.

## 22 – TOEPASSING VAN HET STABILITEITSCRITERIUM

Voor de toepassing van het energiecriterium moet worden ondersteld dat de integranden van $P(U_i + u_i)$ volgens de formule van TAYLOR naar opklimmende machten van de verplaatsingen $u_i$ en haar afgeleiden kunnen worden ontwikkeld. Wordt de som der integralen welker integranden geheele homogene functies van den graad $m$ in $u_i$ en haar afgeleiden zijn $P_m[u]$ genoemd [1]) dan luidt de stabiliteitseisch (21.1)

$$P(U_i+u_i) - P(U_i) \equiv P[u] = P_1[u] + P_2[u] + P_3[u] + \ldots \geqq 0. \tag{22.1}$$

Bovendien wordt nog ondersteld dat de kinematische voorwaarden waaraan de extra-verplaatsingen $u$ zijn onderworpen, worden uitgedrukt door betrekkingen die homogeen en lineair zijn in $u$ en haar afgeleiden; aan deze onderstelling wordt voldaan indien de kinematische voorwaarden lineair zijn in de totale verplaatsingen $U + u$. Elke lineaire combinatie van kinematisch mogelijke verplaatsingen is dan weer een kinematisch mogelijk verplaatsingstelsel. Dientengevolge kan elke mogelijke configuratie $U + v$ worden opgevat als exemplaar van een bundel mogelijke configuraties $U + \alpha u$, waarin $\alpha$ een van de coördinaten onafhankelijke parameter is [1]). De voorwaarde (22.1) eischt dan dat bij elk kinematisch mogelijk verplaatsingstelsel $u$ een eindig positief getal $k$ moet kunnen worden aangegeven zoodanig, dat uit de ongelijkheid $|\alpha| < k$ volgt

$$P_1[\alpha u] + P_2[\alpha u] + P_3[\alpha u] + \ldots \equiv \alpha P_1[u] + \alpha^2 P_2[u] + \alpha^3 P_3[u] + \ldots \geqq 0. \tag{22.2}$$

Deze eisch leidt tot de volgende noodzakelijke voorwaarden

$$P_1[u] = 0, \tag{22.3}$$

$$P_2[u] \geqq 0. \tag{22.4}$$

De betrekking (22.3) is identiek met het principe der virtueele verplaatsingen toegepast op den evenwichtstoestand. Volgens dit principe is immers de eerste variatie van de potentieele energie, d. w. z. de eerste term van de TAYLOR-ontwikkeling

$$P(U_i + \delta U_i) - P(U_i) \equiv P[\delta U] = P_1[\delta U] + P_2[\delta U] + \ldots,$$

nul voor elke kinematisch mogelijke infinitesimale variatie der verplaatsingen; wegens de homogeniteit der voorwaarde

$$\delta P \equiv P_1[\delta U] = 0$$

in de verplaatsingvariaties $\delta U$ is zij gelijkwaardig met den eisch (22.3).

De voorwaarde (22.4) eischt dat de tweede variatie van de potentieele energie voor geen enkel kinematisch mogelijk functiestelsel negatief wordt. Blijkens hare afleiding kan zij voorloopig slechts als een *noodzakelijke* voorwaarde voor stabiliteit worden opgevat. De vraag in hoeverre zij tevens als *voldoende* voorwaarde kan worden aangemerkt wordt in paragraaf 23 onderzocht.

Voor het onderzoek van de tweede variatie splitst TREFFTZ (lit. 7) den integrand van $P_2[u]$, opgevat als homogene quadratische vorm met als argumenten alle in den integrand van $P[u]$ voorkomende verplaatsingen $u$ en haar afgeleiden, in het verschil van twee in deze argumenten definiet positieve homogene quadratische vormen; deze splitsing zal in het algemeen in de verschillende punten van het lichaam verschillend uitvallen. Worden de bijbehoorende integralen $T_2'[u]$ en $T_2''[u]$ genoemd dan is

$$P_2[u] = T_2'[u] - T_2''[u] = T_2''[u]\left(\frac{T_2'[u]}{T_2''[u]} - 1\right).$$

[1]) In het volgende is de index $i$ bij de coördinaten $x_i$, de verplaatsingen $U_i$, $u_i$ enz. weggelaten voor zoover misverstand is uitgesloten.

[1]) Gevallen, waarin aan deze onderstelling niet is voldaan, eischen een nader onderzoek. Dit zou bijv. kunnen geschieden door een willekeurige kinematisch mogelijke configuratie $U + v$ op te vatten als exemplaar van een systeem van mogelijke configuraties $U + u(\alpha)$, waarin $\alpha$ een van de coördinaten onafhankelijke parameter is.

Het teeken van de tweede variatie wordt beheerscht door den tweeden factor zoodat het onderzoek van dit teeken leidt tot het onderzoek van het minimumprobleem

$$\lambda = Min \frac{T_2'[u]}{T_2''[u]}.$$

In plaats van dit probleem kan natuurlijk ook het gewijzigde vraagstuk

$$\omega = Min \left\{ \frac{T_2'[u]}{T_2''[u]} - 1 \right\},$$

of anders geschreven

$$\omega = Min \frac{P_2[u]}{T_2[u]} \qquad (22.5)$$

worden beschouwd; hierbij is ter vereenvoudiging van de notatie $T_2[u]$ geschreven in plaats van $T_2''[u]$. Is $\omega_1$ de oplossing van dit probleem, die wordt bereikt voor het functiestelsel $u = u^{(1)}$, dan is $P_2[u]$ definiet positief indien $\omega_1$ positief is; is $\omega_1$ daarentegen negatief dan bezit $P_2[u]$ negatieve waarden. In het eerste geval is volgens TREFFTZ het evenwicht stabiel, in het tweede geval instabiel. In het grensgeval $\omega_1 = 0$ is het evenwicht volgens TREFFTZ op de stabiliteitsgrens. In dat geval is over de stabiliteit nog geen uitspraak te doen omdat met $P_2[u^{(1)}] = 0$ over het teeken van het linkerlid van (22.2) nog niets kan worden gezegd.

De minimumvoorwaarde voor de functies $u^{(1)}$ wordt met behulp van een willekeurig kinematisch mogelijk functiestelsel $\zeta$ en een willekeurige constante $\varepsilon$ uitgedrukt door

$$\frac{P_2[u^{(1)} + \varepsilon\zeta]}{T_2[u^{(1)} + \varepsilon\zeta]} \geqq \frac{P_2[u^{(1)}]}{T_2[u^{(1)}]} = \omega_1 \quad \text{of}$$

$$P_2[u^{(1)} + \varepsilon\zeta] - \omega_1 T_2[u^{(1)} + \varepsilon\zeta] \geqq 0. \qquad (22.6)$$

Algemeen geldt voor een integraal $S_m[u]$ welker integrand een geheele homogene functie van den graad $m$ is van de argumentfuncties $u$ en haar afgeleiden, de ontwikkeling voor $u = v + w$

$$S_m[v+w] = S_m[v] + S_{m-1,1}[v,w] + S_{m-2,2}[v,w] + \ldots + S_{1,m-1}[v,w] + S_m[w]; \qquad (22.7)$$

hierin is $S_{m-n,n}[v,w]$ de integraal van alle termen die bij de ontwikkeling van den integrand van $S_m[v+w]$ ontstaan en homogeen zijn van den graad $(m-n)$ in de functies $v$ en haar afgeleiden, homogeen van den graad $n$ in de functies $w$ en haar afgeleiden. De integralen $S_{pq}$ en $S_{qp}$ gaan door verwisseling van $v$ en $w$ in elkaar over. Bovendien geldt



$$S_{m-n,n}[v,v] = S_{n,m-n}[v,v] = \binom{m}{m-n} S_m[v] = \binom{m}{n} S_m[v], \qquad (22.8)$$

waarin $\binom{m}{m-n} = \binom{m}{n}$ het gebruikelijke symbool is voor de binomiaalcoëfficiënten.

Met deze notatie gaat (22.6) met inachtneming van

$$P_2[u^{(1)}] = \omega_1 T_2[u^{(1)}]$$

over in

$$\varepsilon \left\{ P_{11}[u^{(1)}, \zeta] - \omega_1 T_{11}[u^{(1)}, \zeta] \right\} + \varepsilon^2 \left\{ P_2[\zeta] - \omega_1 T_2[\zeta] \right\} \geqq 0,$$

waaraan voor willekeurige waarden van $\varepsilon$ slechts kan worden voldaan, indien $u = u^{(1)}$ en $\omega = \omega_1$ voldoen aan de vergelijking

$$P_{11}[u,\zeta] - \omega T_{11}[u,\zeta] = 0. \qquad (22.9)$$

Wordt de continuïteit van de tweede afgeleiden der functies $u$ nog ondersteld dan is (22.9) equivalent met een stel differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden voor de functies $u$ dat op dezelfde wijze als in paragraaf 13 kan worden afgeleid. Omdat deze vergelijkingen en randvoorwaarden homogeen lineair zijn in $u$ en haar afgeleiden bezitten zij in het algemeen slechts voor bijzondere waarden van $\omega$, de z.g. eigenwaarden, van nul verschillende oplossingen voor $u$, de z.g. eigenfunctiestelsels, die op een constanten factor na bepaald zijn. De kleinste eigenwaarde $\omega_1$ is de eigenwaarde die over de stabiliteit beslist; de bijbehoorende oplossing $u = u^{(1)}$ is het eigenfunctiestelsel waarvoor het minimum $\omega_1$ wordt bereikt.

## 23 – NADERE BESCHOUWING VAN DE THEORIE VAN TREFFTZ

Een tweetal punten van de in de vorige paragraaf behandelde theorie van TREFFTZ behoeft nadere beschouwing.

In de eerste plaats is stilzwijgend ondersteld dat het minimumprobleem (22.5) inderdaad een oplossing bezit, wat geenszins vanzelf spreekt (lit. 28). Wel kan worden vastgesteld dat de breuk $\frac{P_2[u]}{T_2[u]}$ een onderste grens bezit daar zij als het verschil van $\frac{T_2'[u]}{T_2''[u]}$ en de eenheid nooit kleiner dan $-1$ kan worden. Wordt deze onderste grens $d$ genoemd dan moet elk kinematisch mogelijk functiestelsel voldoen aan de ongelijkheid

$$\frac{P_2[u]}{T_2[u]} \geqq d,$$

terwijl bij elk willekeurig klein positief getal $e$ nog een kinematisch mogelijk functiestelsel $v$ moet kunnen worden gevonden, waarvoor geldt

$$\frac{P_2[v]}{T_2[v]} < d + e.$$

Uit het bestaan der grens $d$ kan echter nog niet de existentie van een minimum $\omega_1$ worden afgeleid daar het niet zeker is dat de grens $d$ voor een kinematisch mogelijk functiestelsel wordt bereikt. Deze existentie-moeilijkheid wordt omzeild door in het stabiliteitscriterium het minimum $\omega_1$ te vervangen door de onderste grens $d$. Het evenwicht is stabiel dan wel instabiel naar gelang $d$ positief of negatief is; in het grensgeval $d = 0$ is de tweede variatie $P_2[u]$ tenminste nog semi-definiet positief, maar een verdere conclusie omtrent de stabiliteit is voorloopig niet te trekken. De beteekenis van deze scherpere formuleering moet echter niet worden overschat daar de practische toepassing op groote bezwaren stuit indien de grens $d$ niet tevens het minimum $\omega_1$ is. In de practijk is het stabiliteitsonderzoek dan ook nog aangewezen op de methode van TREFFTZ waarbij de existentie van het minimum $\omega_1$ wordt aangenomen; in gevallen waarin zulk een minimum niet bestaat zou deze methode falen.

Het tweede punt dat een uitvoeriger beschouwing vraagt betreft het gebruik van het criterium $\omega_1 > 0$ als voldoende voorwaarde voor stabiliteit (dat $\omega_1 = 0$ zeker niet een voldoende voorwaarde vormt werd reeds in par. 22 vermeld). Immers is in paragraaf 22 bij de bespreking van de voorwaarde (22. 4) opgemerkt dat zij op grond van haar afleiding slechts recht heeft op erkenning als *noodzakelijke* voorwaarde voor stabiliteit. De toepassing van het op (22. 4) gebaseerde criterium $\omega_1 > 0$ als *voldoende* voorwaarde behoeft dan een nadere motiveering. Deze kan zonder veel moeite worden geleverd daar de splitsing van den integrand van $P_2[u]$ in het verschil van twee definiet positieve homogene quadratische vormen zoodanig is uitgevoerd dat de definiet positieve integrand van $T_2''[u] \equiv T_2[u]$ alle argumenten bevat die in den integrand van $P[u]$ (22. 1) voorkomen (hierbij moeten de afgeleiden der functies $u$ als afzonderlijke argumenten worden opgevat).

Voor de TAYLOR-ontwikkeling van den integrand $F$ van $P[u]$ naar zijn twaalf argumenten $u_i$ en $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ die thans ter vereenvoudiging $y_\lambda$ ($\lambda = 1, 2 \ldots 12$) worden genoemd, kan worden geschreven

$$F = \sum_{\mu=1}^{12} \left(\frac{\partial F}{\partial y_\mu}\right)_0 y_\mu + \tfrac{1}{2} \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu}\right)_0 y_\mu\, y_\nu + R, \qquad (23.\ 1)$$



waarbij

$$F_1[u] = \sum_{\mu=1}^{12} \left(\frac{\partial F}{\partial y_\mu}\right)_0 y_\mu\ , \quad F_2[u] = \tfrac{1}{2} \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu}\right)_0 y_\mu\, y_\nu \qquad (23.\ 2)$$

de integranden zijn van respectievelijk $P_1[u]$ en $P_2[u]$ en

$$R = \sum_{(\mu,\nu,\rho)=1}^{12} \tfrac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu\, \partial y_\rho}\right)_{\theta_\lambda y_\lambda} y_\mu\, y_\nu\, y_\rho =$$

$$= \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} \left\{ \tfrac{1}{6} \sum_{\rho=1}^{12} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu\, \partial y_\rho}\right)_{\theta_\lambda y_\lambda} y_\rho \right\} y_\mu\, y_\nu = \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} A_{\mu\nu}\, y_\mu\, y_\nu\ ; \qquad (23.\ 3)$$

de indices $0, \theta_\lambda y_\lambda$ bij de afgeleiden van $F$ naar zijn argumenten geven aan dat de afgeleiden voor de waarden 0 en $\theta_\lambda y_\lambda$ ($0 \leqq \theta_\lambda \leqq 1$; $\lambda = 1, 2 \ldots 12$) van deze argumenten zijn bedoeld.

Om een schatting van de grootte van den restterm (23. 3) te maken wordt de grootste absolute waarde $A$ beschouwd die de vorm

$$\sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} A_{\mu\nu}\, y_\mu\, y_\nu \qquad (23.\ 4)$$

kan aannemen onder de nevenvoorwaarde

$$\sum_{\mu=1}^{12} \gamma_\mu\, y_\mu{}^2 = 1, \qquad (23.\ 5)$$

waarin $\gamma_\lambda$ ($\lambda = 1, 2 \ldots 12$) positieve constanten zijn. Aangezien de grootheden $y_\lambda$ onder de restrictie (23. 5) absoluut genomen niet grooter kunnen worden dan $1/\sqrt{\gamma_\lambda}$ geldt voor $A$ de ongelijkheid

$$A \leqq \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} |A_{\mu\nu}| \frac{1}{\sqrt{\gamma_\mu\, \gamma_\nu}}.$$

Omdat $A$ tevens de grootste absolute waarde is die de breuk

$$\frac{\sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} A_{\mu\nu}\, y_\mu\, y_\nu}{\sum_{\mu=1}^{12} \gamma_\mu\, y_\mu{}^2}$$

kan aannemen zonder de restrictie (23. 5), volgt hieruit

$$|R| = \left| \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} A_{\mu\nu}\, y_\mu\, y_\nu \right| \leqq \left\{ \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} \frac{|A_{\mu\nu}|}{\sqrt{\gamma_\mu\, \gamma_\nu}} \right\} \sum_{\mu=1}^{12} \gamma_\mu\, y_\mu{}^2 . \qquad (23.\ 6)$$

De definiet positieve integrand $G[u]$ van $T_2[u]$ is gegeven in den vorm

$$G[u] = \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} C_{\mu\nu} y_\mu y_\nu. \qquad (23.7)$$

Het positieve minimum $C$ van (23.7) onder de nevenvoorwaarde (23.5) is tevens het minimum van de breuk [1])

$$\frac{\sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} C_{\mu\nu} y_\mu y_\nu}{\sum_{\mu=1}^{12} \gamma_\mu y_\mu{}^2}$$

zonder deze restrictie, zoodat geldt

$$G[u] = \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} C_{\mu\nu} y_\mu y_\nu \geqq C \sum_{\mu=1}^{12} \gamma_\mu y_\mu{}^2 . \qquad (23.8)$$

Combinatie van (23.6) en (23.8) voert tot de ongelijkheid

$$|R| \leqq \frac{1}{C} \left\{ \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} \frac{|A_{\mu\nu}|}{\sqrt{\gamma_\mu \gamma_\nu}} \right\} G[u]. \qquad (23.9)$$

De absolute waarde der coëfficiënten $A_{\mu\nu}$ kan willekeurig klein worden gemaakt door de grootheden $y_\lambda$ voldoende klein te kiezen (zie 23.3). Dientengevolge is het steeds mogelijk de in paragraaf 21 ingevoerde grootheden $g$ en $h$ zoo klein te kiezen dat uit de ongelijkheden voor de argumenten $y_\lambda$

$$|u_i| < g \ , \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| < h$$

volgt

$$\frac{1}{C} \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} \frac{|A_{\mu\nu}|}{\sqrt{\gamma_\mu \gamma_\nu}} \leqq c \ ,$$

waarin $c$ een willekeurig kleine positieve constante is. Uit (23.9) volgt dan

$$|R| \leqq cG[u]. \qquad (23.10)$$

Uit deze ongelijkheid voor den restterm van den integrand van $P[u]$ volgt voor de integraal zelf

[1]) Dat $C$ positief is berust essentieel op de omstandigheid dat de definiet positieve integrand van $T_2[u]$ alle argumenten bevat die in den integrand van $P[u]$ voorkomen (zie par. 22).



$$P[u] \geqq P_1[u] + P_2[u] - cT_2[u].$$

Wordt nog gebruik gemaakt van (22.3) en van de ongelijkheid

$$P_2[u] \geqq \omega_1 T_2[u],$$

dan wordt gevonden

$$P[u] \geqq (\omega_1 - c)\, T_2[u]. \qquad (23.11)$$

Uit (23.11) volgt tenslotte dat de voorwaarde $\omega_1 > 0$ inderdaad voldoende is voor stabiliteit daar $c$ willekeurig klein kan worden gemaakt door de constanten $g$ en $h$ voldoende klein te houden.

Het hier gegeven bewijs berust op de onderstelling dat de integrand van $T_2[u]$ definiet is. Deze onderstelling eischt meer dan noodig is. Een positieve oplossing $\omega_1^*$ van het minimumprobleem (22.5) bij een niet noodzakelijk definieten integrand van $T_2^*[u]$ — welke integraal zelf natuurlijk wel definiet moet zijn — is reeds voldoende voor stabiliteit mits wordt ondersteld dat (22.5) ook een oplossing bezit voor een integraal $T_2[u]$ welker integrand wel definiet is. Dat laatstgenoemde oplossing dan eveneens positief is blijkt gemakkelijk door het tegendeel aan te nemen. Was zij nul of negatief dan zou voor het bijbehoorende functiestelsel $P_2[u]$ en mitsdien ook de oplossing $\omega_1^*$ van (22.5) behoorende bij $T_2^*[u]$ nul resp. negatief moeten zijn, in strijd met de onderstelling $\omega_1{}^* > 0$. Deze grootere vrijheid in de keuze van $T_2[u]$ is voor de toepassingen van nut.

## 24 – DE STABILITEITSGRENS

Op de stabiliteitsgrens is de oplossing $\omega_1$ van het minimumprobleem (22.5) nul. In dit geval wordt ten minste voor het functiestelsel $u^{(1)}$ de integraal $P_2[u]$ gelijk nul zoodat (22.2) niet onmiddellijk door alle functiestelsels $u$ wordt bevredigd. Alvorens over te gaan tot de afleiding van de criteria die in dit geval de stabiliteit beheerschen is het van belang te weten of de integraal $P_2[u]$ nog voor andere functies dan $u^{(1)}$ nul wordt.

Om deze vraag te onderzoeken wordt eerst opgemerkt dat voor elk kinematisch mogelijk functiestelsel $u$ kan worden gesteld (lit. 29)

$$u = au^{(1)} + \bar{u} \text{ met } T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = 0, \qquad (24.1)$$

waarin $a$ een constante is. Immers volgt uit de identiteit

$$T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = T_{11}[u^{(1)}, u - au^{(1)}] = T_{11}[u^{(1)}, u] - aT_{11}[u^{(1)}, u^{(1)}],$$

dat aan de voorwaarde

$$T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = 0 \qquad (24.2)$$

is voldaan mits de constante $a$ is bepaald door

$$T_{11}[u^{(1)}, u] - aT_{11}[u^{(1)}, u^{(1)}] = 0 \text{ of } a = \frac{T_{11}[u^{(1)}, u]}{2T_2[u^{(1)}]}.$$

Vervolgens wordt voor de integraal $P_2[u]$ geschreven

$$P_2[u] = P_2[au^{(1)} + \bar{u}] = a^2 P_2[u^{(1)}] + aP_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] + P_2[\bar{u}].$$

De eerste term van deze ontwikkeling is nul; voor den tweeden term kan met gebruik van (22. 9) voor $u = u^{(1)}$, $\omega = \omega_1$, $\zeta = \bar{u}$ en van (24. 2) worden geschreven

$$aP_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = a\omega_1, \; T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = 0,$$

zoodat overblijft

$$P_2[u] = P_2[au^{(1)} + \bar{u}] = P_2[\bar{u}]. \qquad (24.\ 3)$$

De integraal $P_2[u]$ kan derhalve alleen dan nul worden indien zij nul is voor een functiestelsel $\bar{u}$ dat aan (24. 2) voldoet.

Om te onderzoeken of de integraal $P_2[\bar{u}]$ onder de voorwaarde (24. 2) inderdaad nul kan worden, wordt het minimumprobleem

$$\omega = Min \frac{P_2[u]}{T_2[u]} \text{ met de nevenvoorwaarde } T_{11}[u^{(1)}, u] = 0 \quad (24.\ 4)$$

beschouwd. Zij $u = u^{(2)}$ het functiestelsel waarvoor dit minimum $\omega_2$ wordt bereikt [1]) dan moet voor elk functiestelsel $\eta$ dat voldoet aan

$$T_{11}[u^{(1)}, \eta] = 0, \qquad (24.\ 5)$$

en een willekeurige constante $\varepsilon$ gelden

$$\frac{P_2[u^{(2)} + \varepsilon\eta]}{T_2[u^{(2)} + \varepsilon\eta]} \gtreqless \frac{P_2[u^{(2)}]}{T_2[u^{(2)}]} = \omega_2 \quad \text{of}$$

$$P_2[u^{(2)} + \varepsilon\eta] - \omega_2 T_2[u^{(2)} + \varepsilon\eta] \gtreqless 0,$$

waaruit op analoge wijze als uit (22. 6) volgt

$$P_{11}[u^{(2)}, \eta] - \omega_2 T_{11}[u^{(2)}, \eta] = 0. \qquad (24.\ 6)$$

Deze vergelijking is afgeleid met de beperking (24. 5) voor de functies $\eta$. Toch geldt zij ook voor functies $\zeta$ die niet aan (24. 5) voldoen. Om dit aan te toonen wordt voor een willekeurig functiestelsel $\zeta$ gesteld

$$\zeta = tu^{(1)} + \eta \text{ met } T_{11}[u^{(1)}, \eta] = 0;$$

[1]) Evenals bij het onderzoek van $P_2[u]$ in paragraaf 22 wordt hier en bij alle volgende minimumproblemen de existentie van een oplossing aangenomen.



de mogelijkheid van deze splitsing is hierboven reeds toegelicht. Het linkerlid van (24. 6) gaat na vervanging van het functiestelsel $\eta$ door een functiestelsel $\zeta = tu^{(1)} + \eta$ over in

$$P_{11}[u^{(2)}, \zeta] - \omega_2 T_{11}[u^{(2)}, \zeta] = t\left\{P_{11}[u^{(2)}, u^{(1)}] - \omega_2 T_{11}[u^{(2)}, u^{(1)}]\right\} + \\ + P_{11}[u^{(2)}, \eta] - \omega_2 T_{11}[u^{(2)}, \eta].$$

Hierin is wegens de nevenvoorwaarde (24. 4)

$$T_{11}[u^{(1)}, u^{(2)}] = T_{11}[u^{(2)}, u^{(1)}] = 0,$$

waaruit door toepassing van (22. 9) voor $u = u^{(1)}$, $\omega = \omega_1$ en $\zeta = u^{(2)}$ volgt

$$P_{11}[u^{(2)}, u^{(1)}] = 0.$$

Met behulp van deze betrekkingen en van (24. 6) volgt, dat $u = u^{(2)}$ voor $\omega = \omega_2$ voldoet aan (22. 9)

$$P_{11}[u, \zeta] - \omega T_{11}[u, \zeta] = 0,$$

zoodat de oplossing van het probleem (24. 4) evenals $u^{(1)}$ een eigenfunctiestelsel van (22. 9) blijkt te zijn.

Omdat de verzameling der toegelaten functies $u$ voor het probleem (24. 4) beperkter is dan voor (22. 5), moet steeds gelden $\omega_2 \geqq \omega_1$. Wordt op de stabiliteitsgrens, waarvoor $\omega_1 = 0$ is, $\omega_2$ positief dan kan het onderzoek van $\frac{P_2[u]}{T_2[u]}$ worden afgebroken omdat $P_2[u]$ dan niet nul kan worden voor andere functies dan $u^{(1)}$; ook de kennis der functies $u^{(2)}$ is dan niet noodig. Is echter ook $\omega_2 = 0$ dan doet zich de vraag voor of $P_2[u]$ nog voor andere functies dan $u^{(1)}$ en $u^{(2)}$ nul wordt. Op dezelfde wijze als hierboven kan worden aangetoond dat dit slechts het geval kan zijn indien $P_2[u]$ onder de voorwaarden

$$T_{11}[u^{(1)}, u] = 0, \; T_{11}[u^{(2)}, u] = 0$$

nul kan worden. De gestelde vraag wordt dan beantwoord door de oplossing van het probleem

$$\omega = Min \frac{P_2[u]}{T_2[u]} \text{ met de nevenvoorwaarden}$$

$$T_{11}[u^{(1)}, u] = 0; \; T_{11}[u^{(2)}, u] = 0. \quad (24.\ 7)$$

Op dezelfde wijze als hierboven wordt bewezen dat het functiestelsel $u^{(3)}$ waarvoor het minimum $\omega_3$ van (24. 7) wordt bereikt een bij de eigenwaarde $\omega_3$ behoorend eigenfunctiestelsel van vergelijking (22. 9) is. Het onderzoek van de minima

$$\omega = Min\ \frac{P_2[u]}{T_2[u]} \text{ met de nevenvoorwaarden}$$

$$T_{11}[u^{(j)}, u] = 0 \quad (j = 1, 2 \ldots . h - 1) \quad (24.8)$$

moet worden voortgezet tot een positief minimum $\omega_h$ wordt gevonden.

De eigenfunctiestelsels $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ . . . . bevatten alle nog een willekeurigen constanten factor aangezien zij oplossingen zijn van de homogene vergelijking (22. 9) en ook de voorwaarden (24. 8) dezen factor onbepaald laten. Ondersteld wordt dat over dezen factor wordt beschikt, bijv. door een normeeringsvoorwaarde van den vorm

$$T_2[u^{(h)}] = C, \quad (24.9)$$

waarin $C$ een positieve constante is. Uit (24. 8) volgt dan

$$P_2[u^{(h)}] = \omega_h C. \quad (24.10)$$

Verder volgt uit de relatie

$$T_{11}[u^{(h)}, u^{(k)}] = 0 \text{ voor } h \neq k \quad (24.11)$$

door toepassing van (22. 9) voor $u = u^{(h)}$, $\omega = \omega_h$ en $\zeta = u^{(k)}$

$$P_{11}[u^{(h)}, u^{(k)}] = 0 \text{ voor } h \neq k. \quad (24.12)$$

In sommige gevallen is het geheele systeem van eigenfunctiestelsels behoorend bij verg. (22. 9), resp. de minimumproblemen (24. 8) gemakkelijk te bepalen. Is dit systeem dan volledig en zoodanig dat een willekeurig kinematisch mogelijk functiestel $f$ naar de eigenfuncties kan worden ontwikkeld

$$f = \sum_{h=1}^{\infty} c_h u^{(h)}, \quad (24.13)$$

waarbij de op $f$ toe te passen bewerkingen term voor term op de reeks mogen worden toegepast, dan kan de kennis van alle eigenfunctiestelsels, hoewel zij niet noodzakelijk is, voordeel bieden bij de uitvoering der berekeningen.

De eigenwaarden $\omega_h$ en de eigenfunctiestelsels $u^{(h)}$ hangen in het algemeen af van den vorm die voor den integrand van $T_2[u]$ is gekozen. Wordt echter voor een eigenwaarde nul gevonden dan zal ook bij een anderen vorm van den integrand van $T_2[u]$ steeds een eigenwaarde nul met dezelfde eigenfuncties behooren (zie ook par. 23). De juistheid van de bewering blijkt onmiddellijk uit de variatievergelijking (22. 9), die voor een eigenwaarde $\omega_h = 0$ overgaat in den van de integraal $T_2[u]$ onafhankelijken vorm

$$P_{11}[u, \zeta] = 0. \quad (24.14)$$



Deze vergelijking is identiek met de door KAPPUS (lit. 10) afgeleide vergelijking voor het neutrale evenwicht

$$\delta P_2[u] = 0;$$

dientengevolge is het evenwicht neutraal in den zin van SOUTHWELL en BIEZENO–HENCKY zoodra tenminste één eigenwaarde $\omega_h$ nul is. Omgekeerd heeft het bestaan van een oplossing van (24. 14) ten gevolge, dat tenminste één der eigenwaarden $\omega_h$ nul is. Algemeen geldt dat indien $n$ eigenwaarden $\omega_h$ nul zijn, (24. 14) $n$ lineair onafhankelijke oplossingen bezit. Omgekeerd volgt uit het bestaan van $n$ lineair onafhankelijke oplossingen van (24. 14) dat $n$ eigenwaarden nul zijn. Om dit te bewijzen wordt opgemerkt dat de $n$ oplossingen van (24. 14) tevens $n$ oplossingen van (22. 9) zijn bij $\omega = 0$. Door lineaire combinatie kunnen hieruit $n$ nieuwe lineair onafhankelijke oplossingen van (22. 9) worden samengesteld die eveneens behooren bij $\omega = 0$. Deze laatste oplossingen kunnen dan steeds zoodanig worden gekozen dat zij voldoen aan

$$T_{11}[u^{(i)}, u^{(h)}] = 0, \quad i \neq h$$

zoodat zij kunnen worden geïdentificeerd met de $n$ eigenfuncties $u^{(i)}$, $i = 1, 2 \ldots . n$, behoorend bij de $n$ eigenwaarden

$$\omega_1 = \cdots = \omega_n = 0.$$

Voor de details van dit z.g. orthogonaliseeringsproces wordt naar de literatuur verwezen (lit. 48).

## 25 – DE STABILITEIT OP DE STABILITEITSGRENS

In deze paragraaf wordt overgegaan tot het onderzoek van de stabiliteit op de stabiliteitsgrens. Voorloopig wordt hierbij ondersteld dat reeds $\omega_2$ positief is; in hoeverre de volgende beschouwingen wijziging behoeven indien $\omega_2$ nul is, wordt in paragraaf 27 onderzocht.

Een stel noodzakelijke voorwaarden voor stabiliteit kan onmiddellijk uit (22. 2) worden afgeleid. Wegens $P_2[u^{(1)}] = 0$ moet bij voldoend kleine absolute waarden van $\alpha$ gelden

$$\alpha^3 P_3[u^{(1)}] + \alpha^4 P_4[u^{(1)}] + \ldots . \geqq 0,$$

waaraan slechts kan worden voldaan met

$$P_3[u^{(1)}] = 0 \ ; \ P_4[u^{(1)}] \geqq 0, \quad (25.1)$$

en indien in de laatste betrekking het gelijkteeken geldt

$$P_5[u^{(1)}] = 0 \ ; \ P_6[u^{(1)}] \geqq 0, \text{ enz.}$$

Uit (25. 1) blijkt reeds dat het evenwicht op de stabiliteitsgrens „in het algemeen" instabiel zal zijn.

Voor de afleiding van noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor stabiliteit wordt voor een willekeurig kinematisch mogelijk functiestelsel overeenkomstig (24. 1) gesteld

$$u = au^{(1)} + \bar{u} \text{ met } T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = 0.$$

Voor stabiliteit is vereischt dat een tweetal positieve constanten $g$ en $h$ moet kunnen worden aangegeven zoodanig dat (22. 1)

$$P[u] = P[au^{(1)} + \bar{u}] = P_1[au^{(1)} + \bar{u}] + \\ + P_2[au^{(1)} + \bar{u}] + P_3[au^{(1)} + \bar{u}] + \ldots . \geqq 0 \quad (25.2)$$

volgt uit de ongelijkheden

$$|u_i| < g\ , \quad \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right| < h. \quad (22.1')$$

In plaats hiervan kan de eisch worden gesteld dat een drietal positieve constanten $A$, $\bar{g}$ en $\bar{h}$ moet kunnen worden aangegeven zoodanig dat (25. 2) volgt uit de ongelijkheden

$$|a| < A\ , \quad |\bar{u}_i| < \bar{g}\ , \quad \left|\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right| < \bar{h}. \quad (25.2')$$

Dat deze gewijzigde voorwaarde noodzakelijk is volgt onmiddellijk uit het feit dat (22. 1') uit (25. 2') voortvloeit. Om te bewijzen dat zij voldoende is behoeft alleen te worden aangetoond dat omgekeerd (25. 2') uit (22. 1') volgt. Hiertoe wordt opgemerkt dat uit

$$a = \frac{T_{11}[u^{(1)}, u]}{2T_2[u^{(1)}]}$$

volgt dat $a$ tegelijk met $u$ en haar afgeleiden begrensd is; hetzelfde geldt dan wegens

$$\bar{u} = u - au^{(1)}$$

voor $\bar{u}$ en haar afgeleiden.

Ontwikkeling van de integralen in (25. 2) levert met behulp van de in (22. 7) ingevoerde symbolen

$$P[u] = aP_1[u^{(1)}] + P_1[\bar{u}] + a^2P_2[u^{(1)}] + aP_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] + \\ + P_2[\bar{u}] + a^3P_3[u^{(1)}] + a^2P_{21}[u^{(1)}, \bar{u}] + aP_{12}[u^{(1)}, \bar{u}] + \\ + P_3[\bar{u}] + a^4P_4[u^{(1)}] + a^3P_{31}[u^{(1)}, \bar{u}] + a^2P_{22}[u^{(1)}, \bar{u}] + \\ + aP_{13}[u^{(1)}, \bar{u}] + P_4[\bar{u}] + \ldots .,$$

of eenigszins anders gerangschikt



$$P[u] = aP_1[u^{(1)}] + a^2P_2[u^{(1)}] + a^3P_3[u^{(1)}] + a^4P_4[u^{(1)}] + \ldots . + \\ + P_1[\bar{u}] + aP_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] + a^2P_{21}[u^{(1)}, \bar{u}] + a^3P_{31}[u^{(1)}, \bar{u}] + \ldots . + \\ + P_2[\bar{u}] + aP_{12}[u^{(1)}, \bar{u}] + a^2P_{22}[u^{(1)}, \bar{u}] + \ldots . + P_3[\bar{u}] + \\ + aP_{13}[u^{(1)}, \bar{u}] + \ldots . + P_4[\bar{u}] + \ldots . \quad (25.3)$$

In deze uitdrukking zijn de integranden van de na $P_2[\bar{u}]$ volgende termen òf eveneens van den tweeden graad in $\bar{u}$ en bevatten dan één of meer factoren $a$, òf zij zijn van hoogeren graad in $\bar{u}$ en haar afgeleiden. Het is dus te verwachten dat deze termen ten opzichte van $P_2[\bar{u}]$ een ondergeschikte beteekenis hebben.

Om dit vermoeden te bewijzen wordt wederom de TAYLOR-ontwikkeling van den integrand $F$ van $P[u]$ naar zijn argumenten beschouwd. Worden deze argumenten ter afkorting gesteld

$$y_\lambda = ay_\lambda^{(1)} + \bar{y}_\lambda \ (\lambda = 1, 2, \ldots . 12),$$

dan kan voor deze ontwikkeling worden geschreven

$$F[u] = F[au^{(1)} + \bar{u}] = (F)_{ay_\lambda^{(1)}} + \sum_{\mu=1}^{12} \left(\frac{\partial F}{\partial y_\mu}\right)_{ay_\lambda^{(1)}} \bar{y}_\mu + \\ + \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu}\right)_{ay_\lambda^{(1)}} \bar{y}_\mu\, \bar{y}_\nu + \\ + \sum_{(\mu,\nu,\rho)=1}^{12} \tfrac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu\, \partial y_\rho}\right)_{ay_\lambda^{(1)} + \bar{\theta}_\lambda \bar{y}_\lambda} \bar{y}_\mu\, \bar{y}_\nu\, \bar{y}_\rho\ , \quad (0 \leqq \bar{\theta}_\lambda \leqq 1).$$

Evenals in paragraaf 23 geven de indices bij de afgeleiden van $F$ aan dat deze afgeleiden voor de overeenkomstige waarden der argumenten zijn bedoeld. De coëfficiënten van de tweedegraadstermen in $\bar{y}_\lambda$ kunnen weer volgens TAYLOR naar $a$ worden ontwikkeld

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu}\right)_{ay_\lambda^{(1)}} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu}\right)_0 + a \left\{\frac{d}{da}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu\, \partial y}\right)_{ay_\lambda^{(1)}}\right\}_{\theta a} = \\ = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu}\right)_0 + a \sum_{\rho=1}^{12} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu\, \partial y_\rho}\right)_{\theta a y_\lambda^{(1)}} y_\rho^{(1)}\ , \quad (0 \leqq \theta \leqq 1).$$

zoodat de ontwikkeling van $F$ ook kan worden geschreven in den vorm

$$F[au^{(1)} + \bar{u}] = (F)_{ay_\lambda^{(1)}} + \sum_{\mu=1}^{12} \left(\frac{\partial F}{\partial y_\mu}\right)_{ay_\lambda^{(1)}} \bar{y}_\mu + \\ + \sum_{(\mu,\nu)=1}^{12} \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu\, \partial y_\nu}\right)_0 \bar{y}_\mu\, \bar{y}_\nu + \bar{R}\ , \quad (25.4)$$

waarin

$$\bar{R}=\sum_{(\mu,\nu)=1}^{12}\left\{\tfrac{1}{2}a\sum_{\rho=1}^{12}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y_\mu\,\partial y_\nu\,\partial y_\rho}\right)_{\theta a y_\lambda^{(1)}} y_\rho^{(1)}+\right.$$

$$\left.+\tfrac{1}{6}\sum_{\rho=1}^{12}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial y_\mu\,\partial y_\nu\,\partial y_\rho}\right)_{a y_\lambda^{(1)}+\bar{\theta}_\lambda \bar{y}_\lambda}\cdot \bar{y}_\rho\right\}\bar{y}_\mu\,\bar{y}_\nu=\sum_{(\mu,\nu)=1}^{12}\bar{A}_{\mu\nu}\,\bar{y}_\mu\,\bar{y}_\nu\,. \quad (25.5)$$

Door onderlinge vergelijking van den graad in de functies $\bar{u}$ en haar afgeleiden kunnen de bijdragen in (25. 4)

$$(F)_{a y_\lambda^{(1)}} \text{ en } \sum_{\mu=1}^{12}\left(\frac{\partial F}{\partial y_\mu}\right)_{a y_\lambda^{(1)}}\bar{y}_\mu$$

worden geïdentificeerd als de integranden van respectievelijk

$$aP_1[u^{(1)}]+a^2P_2[u^{(1)}]+a^3P_3[u^{(1)}]+a^4P_4[u^{(1)}]+\ldots. \text{ en}$$
$$P_1[\bar{u}]+aP_{11}[u^{(1)},\bar{u}]+a^2P_{21}[u^{(1)},\bar{u}]+a^3P_{31}[u^{(1)},\bar{u}]+\ldots.$$

in (25. 3). Door vergelijking met (23. 2) blijkt

$$\sum_{(\mu,\nu)=1}^{12}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_\mu\,\partial y_\nu}\right)_0\bar{y}_\mu\,\bar{y}_\nu=F_2[\bar{u}]$$

de integrand te zijn van $P_2[\bar{u}]$ in (25. 3). Derhalve moet de restterm $\bar{R}$ de integrand zijn van het resteerende deel van (25. 3)

$$aP_{12}[u^{(1)},\bar{u}]+a^2P_{22}[u^{(1)},\bar{u}]+\ldots.+P_3[\bar{u}]+aP_{13}[u^{(1)},\bar{u}]+$$
$$+\ldots.+P_4[\bar{u}]+\ldots.$$

Omdat de coëfficiënten $\bar{A}_{\mu\nu}$ willekeurig klein kunnen worden gemaakt door de grenzen $A$, $\bar{g}$ en $\bar{h}$ voor de absolute waarden van $a$, $\bar{u}_i$ en $\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$ voldoende klein te kiezen, kan op volkomen dezelfde wijze als in paragraaf 23 worden aangetoond dat met een willekeurig kleine positieve constante $\beta$ voor den restterm geldt

$$|\bar{R}|\leqq\beta G[\bar{u}],$$

waarin $G[\bar{u}]$ de integrand is van $T_2[\bar{u}]$. Voor de integralen volgt dan

$$|aP_{12}[u^{(1)},\bar{u}]+a^2P_{22}[u^{(1)},\bar{u}]+\ldots.+P_3[\bar{u}]+aP_{13}[u^{(1)},\bar{u}]+$$
$$+\ldots.+P_4[\bar{u}]+\ldots.|\leqq\beta T_2[\bar{u}].$$

Wegens

$$P_2[\bar{u}]\geqq\omega_2 T_2[\bar{u}] \text{ met } \omega_2>0$$



geldt met een andere willekeurig kleine positieve constante $\gamma=\beta/\omega_2$

$$|aP_{12}[u^{(1)},\bar{u}]+a^2P_{22}[u^{(1)},\bar{u}]+\ldots.+P_3[\bar{u}]+aP_{13}[u^{(1)},\bar{u}]+$$
$$+\ldots.+P_4[\bar{u}]+\ldots.|\leqq\gamma P_2[\bar{u}]. \quad (25.6)$$

De ongelijkheid (25. 6) levert de bevestiging en preciseering van het boven uitgesproken vermoeden dat de na $P_2[\bar{u}]$ volgende termen in (25. 3) slechts ondergeschikte beteekenis hebben.

In (25. 3) kunnen nog verscheidene vereenvoudigingen worden aangebracht. Wegens (22. 3) is

$$P_1[u^{(1)}]=P_1[\bar{u}]=0$$

en wegens $\omega_1=0$ (zie (22. 5))

$$P_2[u^{(1)}]=0.$$

Uit (22. 9) volgt met gebruik van de nevenvoorwaarde voor de functies $\bar{u}$

$$P_{11}[u^{(1)},\bar{u}]=\omega_1 T_{11}[u^{(1)},\bar{u}]=0,$$

terwijl in (25. 1) reeds de eisch is gesteld

$$P_3[u^{(1)}]=0.$$

Met deze vereenvoudigingen en met gebruik van (25. 6) gelden dan voor $P[u]$ de ongelijkheden

$$P[u]\geqq a^4P_4[u^{(1)}]+\ldots.+a^2P_{21}[u^{(1)},\bar{u}]+a^3P_{31}[u^{(1)},\bar{u}]+$$
$$+\ldots.+(1-\gamma)P_2[\bar{u}], \quad (25.7)$$

$$P[u]\leqq a^4P_4[u^{(1)}]+\ldots.+a^2P_{21}[u^{(1)},\bar{u}]+a^3P_{31}[u^{(1)},\bar{u}]+$$
$$+\ldots.+(1+\gamma)P_2[\bar{u}]. \quad (25.8)$$

Om uit (25. 7) en (25. 8) de noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor stabiliteit af te leiden wordt bij constant gehouden $a$ het minimum van de uitdrukking

$$a^2P_{21}[u^{(1)},\bar{u}]+a^3P_{31}[u^{(1)},\bar{u}]+\ldots.+aP_2[\bar{u}] \quad (25.9)$$

bepaald met inachtneming van de nevenvoorwaarde

$$T_{11}[u^{(1)},\bar{u}]=0. \quad (25.10)$$

Hierbij is $a$ een positieve constante die in de plaats treedt van $1-\gamma$, resp. $1+\gamma$ in (25. 7) en (25. 8).

Zij $\bar{u}=\bar{\varphi}$ het functiestelsel waarvoor het gezochte minimum wordt bereikt, dan moet met een willekeurig kinematisch mogelijk functiestelsel $\eta$, waarvoor geldt

$$T_{11}[u^{(1)},\eta]=0, \quad (25.11)$$

en een willekeurige constante $\varepsilon$ worden voldaan aan

$$a^2P_{21}[u^{(1)}, \bar{\varphi}+\varepsilon\eta]+a^3P_{31}[u^{(1)}, \bar{\varphi}+\varepsilon\eta]+\ldots.+$$
$$+\alpha P_2[\bar{\varphi}+\varepsilon\eta]\geqq a^2P_{21}[u^{(1)}, \bar{\varphi}]+a^3P_{31}[u^{(1)}, \bar{\varphi}]+\ldots.+\alpha P_2[\bar{\varphi}],$$

of na ontwikkeling van het linkerlid

$$\varepsilon\Big\{a^2P_{21}[u^{(1)}, \eta]+a^3P_{31}[u^{(1)}, \eta]+\ldots.+\alpha P_{11}[\bar{\varphi}, \eta]\Big\}+\varepsilon^2\alpha P_2[\eta]\geqq 0.$$

Aan deze ongelijkheid kan voor willekeurige waarden van $\varepsilon$ slechts worden voldaan indien $\bar{u}=\bar{\varphi}$ voor elk functiestelsel $\eta$ voldoet aan

$$a^2P_{21}[u^{(1)}, \eta]+a^3P_{31}[u^{(1)}, \eta]+\ldots.+\alpha P_{11}[\bar{u}, \eta]=0; \quad (25.\ 12)$$

deze voorwaarde is echter wegens $P_2[\eta]\geqq 0$ ook voldoende.

Door de beperking (25. 11) voor de functies $\eta$ is (25. 12) nog niet equivalent met een stel differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden voor de functies $\bar{u}$. Om deze gelijkwaardigheid te verkrijgen wordt het linkerlid van (25. 12) berekend bij vervanging van de functies $\eta$ door kinematisch mogelijke functies $\zeta$ die niet aan de beperking (25. 11) zijn onderworpen; voor deze laatste functies kan weer worden gesteld

$$\zeta=tu^{(1)}+\eta \text{ met } T_{11}[u^{(1)}, \eta]=0 \text{ en } t=\frac{T_{11}[u^{(1)}, \zeta]}{2T_2[u^{(1)}]}.$$

Substitutie in het linkerlid van (25. 12) levert na ontwikkeling

$$a^2P_{21}[u^{(1)}, \zeta]+a^3P_{31}[u^{(1)}, \zeta]+\ldots.+\alpha P_{11}[\bar{u}, \zeta]=$$
$$=t\Big\{a^2P_{21}[u^{(1)}, u^{(1)}]+a^3P_{31}[u^{(1)}, u^{(1)}]+\ldots.+\alpha P_{11}[\bar{u}, u^{(1)}]\Big\}+$$
$$+a^2P_{21}[u^{(1)}, \eta]+a^3P_{31}[u^{(1)}, \eta]+\ldots.+\alpha P_{11}[\bar{u}, \eta]. \quad (25.\ 13)$$

In overeenstemming met (22. 8) is

$$P_{21}[u^{(1)}, u^{(1)}]=3P_3[u^{(1)}],\ P_{31}[u^{(1)}, u^{(1)}]=4P_4[u^{(1)}] \text{ enz.}$$

Toepassing van (22. 9) voor $u=u^{(1)}$, $\omega=\omega_1$ en $\zeta=\bar{u}$ levert met gebruik van (25. 10)

$$P_{11}[u^{(1)}, \bar{u}]=\omega_1T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}]=0.$$

Wordt ook nog gebruik gemaakt van (25. 12) dan volgt uit (25. 13)

$$a^2P_{21}[u^{(1)}, \zeta]+a^3P_{31}[u^{(1)}, \zeta]+\ldots.+\alpha P_{11}[\bar{u}, \zeta]+$$
$$-t\Big\{3a^2P_3[u^{(1)}]+4a^3P_4[u^{(1)}]+\ldots.\Big\}=0,$$

of na substitutie van de waarde van $t$ en gebruik van (25. 1)



$$a^2P_{21}[u^{(1)}, \zeta]+a^3P_{31}[u^{(1)}, \zeta]+\ldots.+$$
$$-\frac{4a^3P_4[u^{(1)}]+\ldots.}{2T_2[u^{(1)}]}T_{11}[u^{(1)}, \zeta]+\alpha P_{11}[\bar{u}, \zeta]=0. \quad (25.\ 14)$$

Uit de vergelijking (25. 14) kan een stel differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden worden afgeleid op dezelfde wijze als de bewegingsvergelijkingen in paragraaf 13 uit het principe van HAMILTON. Deze vergelijkingen tezamen met de voorwaarde (25. 10) bezitten ten hoogste één oplossing. Waren immers $\varphi'$ en $\varphi''$ twee verschillende oplossingen dan zouden (25. 10) en (25. 14) beide zoowel door $\varphi'$ als door $\varphi''$ worden bevredigd. Aftrekking levert dan de betrekkingen

$$P_{11}[\varphi', \zeta]-P_{11}[\varphi'', \zeta]=P_{11}[\varphi'-\varphi'', \zeta]=0,$$
$$T_{11}[u^{(1)}, \varphi']-T_{11}[u^{(1)}, \varphi'']=T_{11}[u^{(1)}, \varphi'-\varphi'']=0,$$

waaruit met (22. 8) en $\zeta=\varphi'-\varphi''$ zou volgen

$$P_2[\varphi'-\varphi'']=0 \text{ en } T_{11}[u^{(1)}, \varphi'-\varphi'']=0,$$

in strijd met de onderstelling $\omega_2>0$ (zie 24. 4). Dat de oplossing der vergelijkingen (25. 14) en (25. 10) inderdaad een minimum bepaalt, werd hierboven reeds opgemerkt.

De vergelijkingen (25. 14) en (25. 10) zijn lineair in de onbekende functies $\bar{u}$, zoodat haar oplossing kan worden geschreven in den vorm

$$\bar{\varphi}=\frac{1}{\alpha}(a^2\varphi^{(2)}+a^3\varphi^{(3)}+\ldots.), \quad (25.\ 15)$$

waarin $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ enz. de oplossingen zijn van de vergelijkingen

$$P_{21}[u^{(1)}, \zeta]+\ldots+P_{11}[\bar{u}, \zeta]=0;$$
$$T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}]=0. \quad (25.\ 16)$$

$$P_{31}[u^{(1)}, \zeta]-\frac{4P_4[u^{(1)}]}{2T_2[u^{(1)}]}T_{11}[u^{(1)}, \zeta]+P_{11}[\bar{u}, \zeta]=0;$$
$$T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}]=0. \quad (25.\ 17)$$

enz.

De functies $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$ enz. zijn onafhankelijk van $a$, zoodat het steeds mogelijk is de constante $A$ zóó klein te kiezen, dat de ongelijkheid $|a|<A$ de ongelijkheden $|\bar{\varphi}_i|<\bar{g}$ en $\left|\frac{\partial\bar{\varphi}_i}{\partial x_j}\right|<\bar{h}$ ten gevolge heeft; hiermede is bewezen dat ook de functies $\bar{\varphi}$ tot de voor het onderzoek van $P[u]$ toegelaten functies $\bar{u}$ behooren.

De berekening van het minimum van (25. 9) kan worden vereenvoudigd indien nog gebruik wordt gemaakt van (25. 14) voor $\zeta=\bar{\varphi}$

$a^2P_{21}[u^{(1)}, \bar{\varphi}]+a^3P_{31}[u^{(1)}, \bar{\varphi}]+\ldots. = -aP_{11}[\bar{\varphi}, \bar{\varphi}] = -2aP_2[\bar{\varphi}]$,

zoodat het gezochte minimum bedraagt

$$-aP_2[\bar{\varphi}] = \tfrac{1}{2}\left\{a^2P_{21}[u^{(1)}, \bar{\varphi}] + a^3P_{31}[u^{(1)}, \bar{\varphi}] + \ldots.\right\}.$$

Met behulp van (25. 15) kan hiervoor nog worden geschreven

$$-aP_2[\bar{\varphi}] = -aP_2\left[\frac{1}{a}(a^2\varphi^{(2)} + a^3\varphi^{(3)} + \ldots)\right] =$$

$$= -\frac{1}{a}\left\{a^4P_2[\varphi^{(2)}] + a^5P_{11}[\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}] + a^6(P_{11}[\varphi^{(2)}, \varphi^{(4)}] + \right.$$

$$\left. + P_2[\varphi^{(3)}]) + \ldots.\right\}. \quad (25.\ 18)$$

Substitutie van het minimum (25. 18) in de ongelijkheden (25. 7) en (25. 8) levert in aanmerking nemend dat $a$ is geschreven in de plaats van $1-\gamma$ resp. $1+\gamma$

$$P[u] \gtrless a^4\left\{P_4[u^{(1)}] - \frac{1}{1-\gamma}P_2[\varphi^{(2)}]\right\} +$$

$$+ a^5\left\{P_5[u^{(1)}] - \frac{1}{1-\gamma}P_{11}[\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}]\right\} + \ldots. \quad (25.\ 19)$$

$$Min\ P[u]\ (\text{bij } a = \text{const.}) \leqq a^4\left\{P_4[u^{(1)}] - \frac{1}{1+\gamma}P_2[\varphi^{(2)}]\right\} +$$

$$+ a^5\left\{P_5[u^{(1)}] - \frac{1}{1+\gamma}P_{11}[\varphi^{(2)}, \varphi^{(3)}]\right\} + \ldots. \quad (25.\ 20)$$

Wordt nog ter afkorting gesteld

$$P_4[u^{(1)}] - P_2[\varphi^{(2)}] = A_4, \quad (25.\ 21)$$

dan is het evenwicht op de stabiliteitsgrens

$$\left.\begin{array}{r}\text{stabiel, indien } A_4 > 0\\ \text{instabiel, indien } A_4 < 0\end{array}\right\} \quad (25.\ 22)$$

Is immers aan de eerste voorwaarde voldaan dan is het steeds mogelijk $\gamma$ zóó klein te kiezen dat tegelijk met $A_4$ ook

$$P_4[u^{(1)}] - \frac{1}{1-\gamma}P_2[\varphi^{(2)}]$$

positief is. Is daarentegen $A_4$ negatief dan kan $\gamma$ zoo klein worden gekozen dat ook

$$P_4[u^{(1)}] - \frac{1}{1+\gamma}P_2[\varphi^{(2)}]$$



negatief is. Alleen in het grensgeval dat $A_4$ nul is, levert deze uitdrukking nog geen beslissing omtrent de stabiliteit.

De oplossing $\bar{u} = \varphi^{(2)}$ van (25. 16) hangt in het algemeen nog af van den vorm die voor den integrand van $T_2[u]$ wordt gekozen. Dat de over de stabiliteit beslissende grootheid $A_4$ hierdoor echter niet wordt beïnvloed, blijkt door vergelijking van de oplossingen $\bar{u}$ en $\bar{u}'$ behoorend bij integralen van verschillenden vorm $T_2[u]$ en $T_2'[u]$. Aftrekking van de voor beide oplossingen geldende vergelijkingen (25. 16) levert

$$P_{11}[\bar{u} - \bar{u}', \zeta] = 0, \quad (25.\ 23)$$

waaruit kan worden besloten tot

$$\bar{u} - \bar{u}' = cu^{(1)}; \quad (25.\ 24)$$

hierin is $c$ een willekeurige constante. Bezat (25. 23) immers nog een van (25. 24) verschillende oplossing $\bar{u} - \bar{u}'$ dan zou hiervoor weer kunnen worden gesteld

$$\bar{\bar{u}} - \bar{u}' = tu^{(1)} + \bar{\bar{u}} \text{ met } T_{11}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] = 0,$$

waaruit volgt (zie 24. 14)

$$P_{11}[\bar{\bar{u}}, \zeta] = 0,\ T_{11}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] = 0;$$

voor $\zeta = \bar{\bar{u}}$ zou dan gelden

$$P_{11}[\bar{\bar{u}}, \bar{\bar{u}}] = 2P_2[\bar{\bar{u}}] = 0,\ T_{11}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] = 0,$$

in strijd met de onderstelling $\omega_2 > 0$. Met (25. 24) volgt tenslotte

$$A_4 - A_4' = -P_2[\bar{u}] + P_2[\bar{u} - cu^{(1)}] =$$
$$= -P_2[\bar{u}] + P_2[\bar{u}] - cP_{11}[\bar{u}, u^{(1)}] + c^2P_2[u^{(1)}] = 0.$$

Opgemerkt wordt nog dat voor de berekening van $\varphi^{(2)}$ en $A_4$ geen gebruik wordt gemaakt van de onderstelling dat de *integrand* van $T_2[u]$ definiet positief is. Dientengevolge wordt hetzelfde resultaat voor $A_4$ verkregen ook indien aan deze onderstelling niet is voldaan mits de *integraal* $T_2[u]$ nog wel definiet positief is. Deze grootere vrijheid in de keuze van $T_2[u]$ zal van nut zijn bij de toepassing der theorie (zie ook par. 23).

## 26 - TOEPASSING VAN HET CRITERIUM (25. 22)

Voor de toepassing van het criterium (25. 22) is alleen de kennis der functies $\varphi^{(2)}$ vereischt, zoodat alleen het uit (25. 16) voortvloeiende systeem van differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden dat weer op analoge wijze als in paragraaf 13 kan worden afgeleid, moet worden opgelost.

Indien het geheele systeem van eigenfunctiestelsels $u^{(h)}$ bekend is, kan deze oplossing het eenvoudigst geschieden door zoowel $\varphi^{(2)}$ als $\zeta$ naar deze eigenfuncties ontwikkeld te denken; hierbij is bovendien de afleiding der differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden niet noodig

$$\varphi^{(2)} = \sum_{h=1}^{\infty} c_h u^{(h)} \quad , \quad \zeta = \sum_{h=1}^{\infty} d_h u^{(h)}. \tag{26. 1}$$

De tweede relatie (25. 16) levert met gebruik van (24. 11)

$$T_{11}\,[u^{(1)}, \sum_{h=1}^{\infty} c_h u^{(h)}] = 2c_1 T_2\,[u^{(1)}] = 0 \quad \text{of} \quad c_1 = 0,$$

terwijl de eerste vergelijking (25. 16) overgaat in

$$\sum_{h=1}^{\infty} d_h P_{21}\,[u^{(1)},\ u^{(h)}] + \sum_{h=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} d_h c_k P_{11}\,[u^{(k)},\ u^{(h)}] = 0,$$

of met gebruik van (24. 10) en (24. 12)

$$\sum_{h=1}^{\infty} d_h P_{21}\,[u^{(1)},\ u^{(h)}] + \sum_{h=1}^{\infty} 2 d_h c_h \omega_h C = 0.$$

Aan deze laatste vergelijking kan voor willekeurige waarden van $d_h$ slechts worden voldaan indien voor $h \geqq 2$ geldt

$$c_h = -\frac{1}{2\omega_h C} P_{21}\,[u^{(1)},\ u^{(h)}]; \tag{26. 2}$$

de voorwaarde voor $h = 1$ wordt wegens

$$P_{21}\,[u^{(1)},\ u^{(1)}] = 3P_3\,[u^{(1)}] = 0 \text{ en } \omega_1 = 0$$

reeds bevredigd. Voor $A_4$ wordt gevonden (zie (25. 21))

$$A_4 = P_4\,[u^{(1)}] - P_2\,[\sum_{h=1}^{\infty} c_h u^{(h)}] =$$

$$= P_4\,[u^{(1)}] - \sum_{h=1}^{\infty} c_h^2 P_2\,[u^{(h)}] - \sum_{h \neq k} c_h c_k P_{11}\,[u^{(h)}, u^{(k)}]; \tag{26. 3}$$

de laatste som moet worden berekend voor alle combinaties van $h$ en $k$ met $h \neq k$. Met gebruik van (24. 10), (24. 12) en (26. 2) is het resultaat

$$A_4 = P_4\,[u^{(1)}] - \frac{1}{4C} \sum_{h=2}^{\infty} \frac{1}{\omega_h} \left\{ P_{21}\,[u^{(1)},\ u^{(h)}] \right\}^2. \tag{26. 4}$$

Deze beschouwing heeft echter alleen dàn meer dan formeele beteekenis indien de mogelijkheid der reeksontwikkelingen (26. 1) en de toelaatbaarheid van de op deze reeksen toegepaste bewerkingen vaststaat.



In vele gevallen is het systeem van eigenfunctiestelsels niet volledig bekend en zal ook een exacte oplossing op andere wijze onmogelijk blijken. Om in zulke gevallen althans een benaderingsoplossing te kunnen verkrijgen wordt opgemerkt dat (25. 15) de oplossing vormt van het minimumprobleem (25. 9). Wordt (25. 9) na substitutie van (25. 15) nu ontwikkeld en gerangschikt volgens opklimmende machten van $a$ (deze ontwikkeling begint met den vierdegraadsterm in $a$), dan blijken de door (25. 16) bepaalde functies $\varphi^{(2)}$ tevens de oplossing te vormen van het minimumprobleem

$$P_{21}\,[u^{(1)},\ \bar{u}] + P_2\,[\bar{u}] = \text{Minimum met de nevenvoorwaarde}$$
$$T_{11}\,[u^{(1)},\ \bar{u}] = 0. \tag{26. 5}$$

Het ligt dan voor de hand een benaderde oplossing van het probleem (26. 5) te zoeken, bijv. met de methode van Ritz (lit. 30). Inhaerent aan deze methode is dat de aldus gevonden benadering van het minimum van (26. 5) grooter is dan het exacte minimum. Omdat voor de exacte oplossing uit (25. 16) voor $\zeta = \varphi^{(2)}$ volgt

$$P_{21}\,[u^{(1)},\ \varphi^{(2)}] + P_2\,[\varphi^{(2)}] = -P_2\,[\varphi^{(2)}], \tag{26. 6}$$

is het benaderde minimum van (26. 5) tevens een (te groote) benadering voor $-P_2\,[\varphi^{(2)}]$. De uitdrukking

$$P_4\,[u^{(1)}] + P_{21}\,[u^{(1)},\ \bar{u}] + P_2\,[\bar{u}], \tag{26. 7}$$

waarin $\bar{u}$ de benaderingsoplossing is van (26. 5), levert dan ook een te groote benaderde waarde voor $A_4$. De stabiliteit wordt door het gebruik van (26. 7) in plaats van (25. 21) dus steeds overschat. Zou in een bepaald geval (26. 7) negatief blijken te zijn, d. w. z. zou volgens de benadering het evenwicht op de stabiliteitsgrens instabiel zijn, dan is het in werkelijkheid zeker instabiel. Omgekeerd beteekent een positieve waarde van (26. 7) niet altijd dat het evenwicht ook werkelijk stabiel is.

## 27 - BIJZONDERE GEVALLEN

In het voorgaande is de stabiliteit van het evenwicht op de stabiliteitsgrens onderzocht in de onderstelling dat de oplossing $\omega_2$ van het vraagstuk (24. 4) positief is. Hierbij werden als noodzakelijke stabiliteitsvoorwaarden gevonden (zie (25. 1), (25. 22) en (26. 6))

$$A_3 \equiv P_3\,[u^{(1)}] = 0;\ A_4 = P_4\,[u^{(1)}] - P_2\,[\varphi^{(2)}] =$$
$$= P_4\,[u^{(1)}] + P_{21}\,[u^{(1)},\ \varphi^{(2)}] + P_2\,[\varphi^{(2)}] \geqq 0, \tag{27. 1}$$

welke tevens voldoende zijn indien in de tweede voorwaarde het bovenste teeken geldt. Onderzocht moet nog worden welke aanvulling deze eischen behoeven indien $A_4 = 0$ of $\omega_2 = 0$ is.

271 - HET GEVAL $A_4 = 0$

Voor het onderzoek van dit bijzondere geval wordt de onderstelling $\omega_2 > 0$ gehandhaafd. Overeenkomstig de beschouwingen in paragraaf 25 wordt gesteld

$$u = au^{(1)} + \bar{u} \text{ met } T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = 0,$$

waarbij voor de functies $\bar{u}$ thans wordt geschreven met gebruik van (25. 16)

$$\bar{u} = a^2\varphi^{(2)} + \bar{\bar{u}} \text{ met } T_{11}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] = 0. \qquad (27.2)$$

Invoering van (27. 2) in (25. 3) levert na eenige herleiding

$$\begin{aligned} P[u] = {} & a^5\left\{P_5[u^{(1)}] + P_{31}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_{12}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}]\right\} + \\ & + a^6\left\{P_6[u^{(1)}] + P_{41}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_{22}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_3[\varphi^{(2)}]\right\} + \\ & + \ldots + a^3\left\{P_{31}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + P_{111}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}]\right\} + \\ & + a^4\left\{P_{41}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + P_{211}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}] + P_{21}[\varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}]\right\} + \\ & + \ldots + P_2[\bar{\bar{u}}] + aP_{12}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + a^2\left\{P_{22}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + P_{12}[\varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}]\right\} + \\ & + \ldots + P_3[\bar{\bar{u}}] + aP_{13}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + \ldots + P_4[\bar{\bar{u}}] + \ldots, \qquad (27.3) \end{aligned}$$

waarin reeds gebruik is gemaakt van de identiteiten

$$P_1[u^{(1)}] = P_1[\varphi^{(2)}] = P_1[\bar{\bar{u}}] = 0, \quad P_2[u^{(1)}] = 0, \quad P_3[u^{(1)}] = 0,$$
$$A_4 = P_4[u^{(1)}] + P_{21}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_2[\varphi^{(2)}] = 0,$$

alsmede van de ook voor $\zeta = \bar{\bar{u}}$ geldende vergelijking (25. 16). Hierin is op analoge wijze als in (22. 8) voor de integralen die bij de ontwikkeling van den integrand van $P_{mn}[u^{(1)}, \bar{u}]$ voor $\bar{u} = \bar{v} + \bar{w}$ ontstaan, en welker integranden homogene functies zijn van den graad $n - q$ in $\bar{v}$ en haar afgeleiden en van den graad $q$ in $w$ en haar afgeleiden, geschreven $P_{m,\,n-q,\,q}[u^{(1)}, \bar{v}, \bar{w}]$.

De uitdrukking (27. 3) bezit dan en alleen dan weer een minimum voor $u \equiv 0$ indien het mogelijk is een stel positieve grootheden $A$, $\bar{\bar{g}}$ en $\bar{\bar{h}}$ aan te geven zoodanig dat uit de ongelijkheden

$$|a| < A, \quad |\bar{\bar{u}}_i| < \bar{\bar{g}}, \quad \left|\frac{\partial \bar{\bar{u}}_i}{\partial x_j}\right| < \bar{\bar{h}} \qquad (27.4)$$

voortvloeit

$$P[u] \geqq 0.$$



Een stel noodzakelijke voorwaarden kan onmiddellijk door de specialisatie $\bar{\bar{u}} = 0$ worden afgeleid; omdat alle integralen die van de functies $\bar{\bar{u}}$ afhangen dan nul worden moet gelden

$$A_5 = P_5[u^{(1)}] + P_{31}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_{12}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] = 0, \qquad (27.5)$$
$$P_6[u^{(1)}] + P_{41}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_{22}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_3[\varphi^{(2)}] \geqq 0. \qquad (27.6)$$

Aangezien de definiet positieve integrand van $T_2[u]$ weer in den vorm (23. 7) kan worden gedacht, kan op geheel dezelfde wijze als in paragraaf 25 worden aangetoond dat het mogelijk is de grootheden $A$, $\bar{\bar{g}}$ en $\bar{\bar{h}}$ zoo klein te kiezen dat voor de na $P_2[\bar{\bar{u}}]$ volgende termen in (27. 3) uit de ongelijkheden (27. 4) volgt

$$\begin{aligned} \Big| & aP_{12}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + a^2\left\{P_{22}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + P_{12}[\varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}]\right\} + \ldots + P_3[\bar{\bar{u}}] + \\ & + aP_{13}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + \ldots + P_4[\bar{\bar{u}}] + \ldots \Big| \leqq \gamma P_2[\bar{\bar{u}}], \qquad (27.7) \end{aligned}$$

waarin $\gamma$ een willekeurig kleine positieve constante is. Met behulp van (27. 5) en (27. 7) volgen voor $P[u]$ de ongelijkheden

$$\begin{aligned} P[u] \geqq {} & a^6\left\{P_6[u^{(1)}] + P_{41}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_{22}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_3[\varphi^{(2)}]\right\} + \\ & + \ldots + a^3\left\{P_{31}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + P_{111}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}]\right\} + \\ & + a^4\left\{P_{41}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + P_{211}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}] + P_{21}[\varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}]\right\} + \\ & + \ldots + (1 - \gamma)\, P_2[\bar{\bar{u}}], \qquad (27.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P[u] \leqq {} & a^6\left\{P_6[u^{(1)}] + P_{41}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_{22}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_3[\varphi^{(2)}]\right\} + \\ & + \ldots + a^3\left\{P_{31}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + P_{111}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}]\right\} + \\ & + a^4\left\{P_{41}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + P_{211}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}] + P_{21}[\varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}]\right\} + \\ & + \ldots + (1 + \gamma)\, P_2[\bar{\bar{u}}]. \qquad (27.9) \end{aligned}$$

Om uit (27. 8) en (27. 9) scherpere stabiliteitseischen af te leiden dan de reeds verkregen voorwaarden (27. 5) en (27. 6) wordt in analogie met paragraaf 25 het minimum bepaald van de uitdrukking

$$\begin{aligned} & a^3\left\{P_{31}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + P_{111}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}]\right\} + \\ & + a^4\left\{P_{41}[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] + P_{211}[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}] + P_{21}[\varphi^{(2)}, \bar{\bar{u}}]\right\} + \\ & + \ldots + aP_2[\bar{\bar{u}}] \quad (a > 0), \qquad (27.10) \end{aligned}$$

met inachtneming van de nevenvoorwaarde

$$T_{11}\,[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] = 0 \qquad (27.\,11)$$

en bij constant gehouden waarde van $a$. Analoog met de beschouwingen in paragraaf 25 wordt aangetoond dat het functiestelsel $\bar{\bar{u}} = \bar{\bar{\varphi}}$, waarvoor het minimum van (27. 10) wordt bereikt, kan worden geschreven in den vorm

$$\bar{\bar{\varphi}} = \frac{1}{\alpha}\,(a^3\,\psi^{(3)} + a^4\,\psi^{(4)} + \ldots.), \qquad (27.\,12)$$

waarin $\psi^{(3)}$, $\psi^{(4)}$ enz. de oplossingen zijn van de vergelijkingen

$$P_{31}\,[u^{(1)}, \zeta] + P_{111}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \zeta] + \\ - \frac{4P_4\,[u^{(1)}] + 2P_{21}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}]}{2T_2\,[u^{(1)}]}\,T_{11}\,[u^{(1)}, \zeta] + P_{11}\,[\bar{\bar{u}}, \zeta] = 0 \quad ; \\ T_{11}\,[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] = 0 \; ; \qquad (27.\,13)$$

$$P_{41}\,[u^{(1)}, \zeta] + P_{211}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \zeta] + P_{21}\,[\varphi^{(2)}, \zeta] + \\ - \frac{5P_5\,[u^{(1)}] + 3P_{31}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_{12}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}]}{2T_2\,[u^{(1)}]}\,T_{11}\,[u^{(1)}, \zeta] + \\ + P_{11}\,[\bar{\bar{u}}, \zeta] = 0 \; ; \quad T_{11}\,[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] = 0, \qquad (27.\,14)$$

enz.

Het stel vergelijkingen (27. 13) kan nog met gebruik van de identiteit (26. 6)

$$4P_4\,[u^{(1)}] + 2P_{21}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] = 4\left\{P_4\,[u^{(1)}] - P_2\,[\varphi^{(2)}]\right\} = 4A_4 = 0$$

worden vereenvoudigd tot

$$P_{31}[u^{(1)}, \zeta] + P_{111}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}, \zeta] + P_{11}\,[\bar{\bar{u}}, \zeta] = 0;\; T_{11}\,[u^{(1)}, \bar{\bar{u}}] = 0. \qquad (27.\,15)$$

Ook het gezochte minimum van (27. 10) wordt op dezelfde wijze als in paragraaf 25 bepaald. Hiervoor wordt gevonden

$$-\alpha P_2\,[\bar{\bar{\varphi}}] = -\frac{1}{\alpha}\left\{a^6 P_2\,[\psi^{(3)}] + a^7 P_{11}\,[\psi^{(3)}, \psi^{(4)}] + \ldots.\right\},$$

zoodat tenslotte uit (27. 8) en (27. 9) volgt

$$P\,[u] \geqq a^6\left\{P_6\,[u^{(1)}] + P_{41}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_{22}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_3\,[\varphi^{(2)}] + \right. \\ \left. - \frac{1}{1-\gamma}\,P_2\,[\psi^{(3)}]\right\} + a^7\left\{\ldots.\right., \qquad (27.\,16)$$

$$Min\; P\,[u]\;(\text{bij } a = \text{const.}) \leqq a^6\left\{P_6\,[u^{(1)}] + P_{41}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + \right. \\ \left. + P_{22}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_3\,[\varphi^{(2)}] - \frac{1}{1+\gamma}\,P_2\,[\psi^{(3)}]\right\} + a^7\left\{\ldots. \right. \qquad (27.\,17)$$



Wordt nog ter afkorting gesteld

$$P_6\,[u^{(1)}] + P_{41}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_{22}\,[u^{(1)}, \varphi^{(2)}] + P_3\,[\varphi^{(2)}] - P_2\,[\psi^{(3)}] = A_6, \qquad (27.\,18)$$

dan volgt eveneens analoog met paragraaf 25 dat het evenwicht stabiel dan wel instabiel is naar gelang $A_6$ positief dan wel negatief is. Alleen indien $A_6 = 0$ is, is de vorm (27. 18) niet in staat uitsluitsel te verschaffen omtrent de stabiliteit. In dit geval moet het onderzoek worden voortgezet, waartoe voor de functies $\bar{\bar{u}}$ kan worden gesteld

$$\bar{\bar{u}} = a^3\,\psi^{(3)} + \bar{\bar{\bar{u}}} \text{ met } T_{11}\,[u^{(1)}, \bar{\bar{\bar{u}}}] = 0.$$

Het onderzoek verloopt dan verder analoog met het voorgaande.

272 - HET GEVAL $\omega_2 = 0$

Voor het onderzoek van dit bijzondere geval wordt voorloopig ondersteld dat $\omega_3$ positief is. Wordt nog ten behoeve van een meer symmetrische notatie geschreven $u^{(2)} = v^{(1)}$ dan kan voor een willekeurig kinematisch mogelijk functiestelsel $u$ analoog met (24. 1) worden gesteld

$$u = au^{(1)} + bv^{(1)} + \bar{u} \text{ met } T_{11}\,[u^{(1)}, \bar{u}] = T_{11}\,[v^{(1)}, \bar{u}] = 0; \qquad (27.\,19)$$

de mogelijkheid van deze splitsing wordt weer aangetoond door berekening van de constanten $a$ en $b$. Substitutie van (27. 19) in (22. 1) met $P_1\,[u] = 0$ levert

$$P\,[u] = P_2\,[au^{(1)} + bv^{(1)} + \bar{u}] + P_3\,[au^{(1)} + bv^{(1)} + \bar{u}] + \\ + P_4\,[au^{(1)} + bv^{(1)} + \bar{u}] + \ldots. \qquad (27.\,20)$$

Algemeen geldt voor een integraal $S_m\,[z]$, welker integrand een geheele homogene functie van den graad $m$ is van de argumentfuncties $z$ en haar afgeleiden, de ontwikkeling voor $z = u + v + w$

$$S_m\,[u + v + w] = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=m} S_{\alpha,\beta,\gamma}\,[u, v, w]. \qquad (27.\,21)$$

Hierin is $S_{\alpha,\beta,\gamma}\,[u, v, w]$ de integraal van alle termen die bij de ontwikkeling van den integrand van $S_m\,[u + v + w]$ ontstaan en homogeen zijn van den graad $\alpha$, resp. $\beta$, resp. $\gamma$ in de functies $u$, resp. $v$, resp. $w$ en haar afgeleiden; ter bekorting wordt nog geschreven

$$S_{o,\beta,\gamma}\,[u, v, w] = S_{\beta,\gamma}\,[v, w]\;;\; S_{o,o,m}\,[u, v, w] = S_m\,[w].$$

Voorts gelden de symmetrie-betrekkingen

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}\,[u, v, w] = S_{\beta,\alpha,\gamma}\,[v, u, w] \text{ enz.},$$

en de met (22. 8) correspondeerende relaties

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}[u,u,w] = \binom{\alpha+\beta}{\beta} S_{\alpha+\beta,\gamma}[u,w],$$

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}[u,u,u] = \binom{\alpha+\beta}{\beta}\binom{\alpha+\beta+\gamma}{\gamma} S_{\alpha+\beta+\gamma}[u] = \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}\, S_m[u].$$

Met behulp van (27.21) kan voor (27.20) worden geschreven

$$\begin{aligned} P[u] = {} & a^3P_3[u^{(1)}] + a^2bP_{21}[u^{(1)},v^{(1)}] + ab^2P_{12}[u^{(1)},v^{(1)}] + \\ & + b^3P_3[v^{(1)}] + a^4P_4[u^{(1)}] + a^3bP_{31}[u^{(1)},v^{(1)}] + a^2b^2P_{22}[u^{(1)},v^{(1)}] + \\ & + ab^3P_{13}[u^{(1)},v^{(1)}] + b^4P_4[v^{(1)}] + \ldots. + a^2P_{21}[u^{(1)},\bar{u}] + \\ & + abP_{111}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + b^2P_{21}[v^{(1)},\bar{u}] + a^3P_{31}[u^{(1)},\bar{u}] + \\ & + a^2bP_{211}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + ab^2P_{121}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + b^3P_{31}[v^{(1)},\bar{u}] + \\ & + \ldots. + P_2[\bar{u}] + aP_{12}[u^{(1)},\bar{u}] + bP_{12}[v^{(1)},\bar{u}] + a^2P_{22}[u^{(1)},\bar{u}] + \\ & + abP_{112}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + b^2P_{22}[v^{(1)},\bar{u}] + \ldots. + P_3[\bar{u}] + \\ & + aP_{13}[u^{(1)},\bar{u}] + bP_{13}[v^{(1)},\bar{u}] + \ldots. + P_4[\bar{u}] + \ldots. \end{aligned} \quad (27.22)$$

Hierin is reeds gebruik gemaakt van (24.10) en (24.12) voor de eigenfuncties $u^{(1)}$ en $v^{(1)}$, alsmede van de uit (22.9) en (27.19) volgende betrekkingen

$$P_{11}[u^{(1)},\bar{u}] = \omega_1 T_{11}[u^{(1)},\bar{u}] = 0\,, \quad P_{11}[v^{(1)},\bar{u}] = \omega_2 T_{11}[v^{(1)},u] = 0.$$

De uitdrukking (27.22) bezit dan en alleen dan weer een minimum voor $u \equiv 0$ indien het mogelijk is een stel positieve grootheden $A$, $B$, $\bar{g}$ en $\bar{h}$ aan te geven zoodanig dat uit de ongelijkheden

$$|a| < A\,, \quad |b| < B\,, |\bar{u}_i| < \bar{g}\,, \quad \left|\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}\right| < \bar{h} \quad (27.23)$$

voortvloeit

$$P[u] \geqq 0.$$

Een stel noodzakelijke voorwaarden kan onmiddellijk door de specialisatie $\bar{u} \equiv 0$ worden afgeleid. Omdat alle integralen die van de functies $\bar{u}$ afhangen nul worden, moet gelden voor alle waarden van $a$ en $b$

$$a^3P_3[u^{(1)}] + a^2bP_{21}[u^{(1)},v^{(1)}] + ab^2P_{12}[u^{(1)},v^{(1)}] + b^3P_3[v^{(1)}] = 0,$$

waaruit volgt

$$P_3[u^{(1)}] = P_{21}[u^{(1)},v^{(1)}] = P_{12}[u^{(1)},v^{(1)}] = P_3[v^{(1)}] = 0. \quad (27.24)$$

Bovendien moet voor alle waarden van $a$ en $b$ zijn voldaan aan de ongelijkheid

$$\begin{aligned} a^4P_4[u^{(1)}] + a^3bP_{31}[u^{(1)},v^{(1)}] + a^2b^2P_{22}[u^{(1)},v^{(1)}] + \\ + ab^3P_{13}[u^{(1)},v^{(1)}] + b^4P_4[v^{(1)}] \geqq 0. \end{aligned} \quad (27.25)$$



Daar de integrand van $T_2[u]$ weer in den vorm (23.7) kan worden gedacht kan op dezelfde wijze als in paragraaf 25 worden bewezen dat het mogelijk is de grootheden $A$, $B$, $\bar{g}$ en $\bar{h}$ zoo klein te kiezen dat voor de na $P_2[\bar{u}]$ volgende termen in (27.22) uit de ongelijkheden (27.23) volgt

$$\begin{aligned} \Big| & aP_{12}[u^{(1)},\bar{u}] + bP_{12}[v^{(1)},\bar{u}] + a^2P_{22}[u^{(1)},\bar{u}] + \ldots. + P_3[\bar{u}] + \\ & + aP_{13}[u^{(1)},\bar{u}] + \ldots. + P_4[\bar{u}] + \ldots. \Big| \leqq \gamma P_2[\bar{u}], \end{aligned} \quad (27.26)$$

waarin $\gamma$ een willekeurig kleine positieve constante is. Met behulp van (27.24) en (27.26) volgen voor $P[u]$ de ongelijkheden

$$\begin{aligned} P[u] \geqq {} & a^4P_4[u^{(1)}] + a^3bP_{31}[u^{(1)},v^{(1)}] + a^2b^2P_{22}[u^{(1)},v^{(1)}] + \\ & + ab^3P_{13}[u^{(1)},v^{(1)}] + b^4P_4[v^{(1)}] + \ldots. + a^2P_{21}[u^{(1)},\bar{u}] + \\ & + abP_{111}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + b^2P_{21}[v^{(1)},\bar{u}] + a^3P_{31}[u^{(1)},\bar{u}] + \\ & + a^2bP_{211}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + ab^2P_{121}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + b^3P_{31}[v^{(1)},\bar{u}] + \\ & + \ldots. + (1-\gamma)P_2[\bar{u}], \end{aligned} \quad (27.27)$$

$$\begin{aligned} P[u] \leqq {} & a^4P_4[u^{(1)}] + a^3bP_{31}[u^{(1)},v^{(1)}] + a^2b^2P_{22}[u^{(1)},v^{(1)}] + \\ & + ab^3P_{13}[u^{(1)},v^{(1)}] + b^4P_4[v^{(1)}] + \ldots. + a^2P_{21}[u^{(1)},\bar{u}] + \\ & + abP_{111}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + b^2P_{21}[v^{(1)},\bar{u}] + a^3P_{31}[u^{(1)},\bar{u}] + \\ & + a^2bP_{211}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + ab^2P_{121}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + b^3P_{31}[v^{(1)},\bar{u}] + \\ & + \ldots. + (1+\gamma)P_2[\bar{u}]. \end{aligned} \quad (27.28)$$

Ter afleiding van scherpere stabiliteitseischen dan de reeds gevonden voorwaarden (27.24) en (27.25) wordt analoog met paragraaf 25 het minimum bepaald van de uitdrukking

$$\begin{aligned} & a^2P_{21}[u^{(1)},\bar{u}] + abP_{111}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + b^2P_{21}[v^{(1)},\bar{u}] + a^3P_{31}[u^{(1)},\bar{u}] + \\ & + a^2bP_{211}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + ab^2P_{121}[u^{(1)},v^{(1)},\bar{u}] + b^3P_{31}[v^{(1)},\bar{u}] + \\ & + \ldots. + aP_2[\bar{u}] \quad (a > 0), \end{aligned} \quad (27.29)$$

bij constante $a$ en $b$ en met inachtneming van de nevenvoorwaarden

$$T_{11}[u^{(1)},\bar{u}] = 0,\ T_{11}[v^{(1)},\bar{u}] = 0. \quad (27.30)$$

Eveneens analoog met paragraaf 25 wordt bewezen dat de oplossing van dit probleem kan worden geschreven in den vorm

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} = \frac{1}{\alpha}\Big\{ & a^2\varphi^{(20)} + ab\varphi^{(11)} + b^2\varphi^{(02)} + a^3\varphi^{(30)} + a^2b\varphi^{(21)} + \\ & + ab^2\varphi^{(12)} + b^3\varphi^{(03)} + \ldots.\Big\}, \end{aligned} \quad (27.31)$$

waarin $\bar{u} = \varphi^{(pq)}$ bij willekeurige kinematisch mogelijke functies $\zeta$ voldoet aan de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} &P_{pq_1}[u^{(1)}, v^{(1)}, \zeta] - \frac{(p+1)\,P_{p+1,q}[u^{(1)}, v^{(1)}]}{2T_2[u^{(1)}]}\,T_{11}[u^{(1)}, \zeta] + \\ &- \frac{(q+1)\,P_{p,q+1}[u^{(1)}, v^{(1)}]}{2T_2[v^{(1)}]}\,T_{11}[v^{(1)}, \zeta] + P_{11}[\bar{u}, \zeta] = 0, \\ &T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = 0 \ , \quad T_{11}[v^{(1)}, \bar{u}] = 0. \end{aligned}\right\} \quad (27.32)$$

Voor $p + q = 2$ worden deze vergelijkingen door gebruik van (27.24) vereenvoudigd tot

$$\left.\begin{aligned} &P_{21}[u^{(1)}, \zeta] + P_{11}[\bar{u}, \zeta] = 0 \quad , \ T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = 0 \ , \ T_{11}[v^{(1)}, \bar{u}] = 0 \ . \\ &P_{111}[u^{(1)}, v^{(1)}, \zeta] + P_{11}[\bar{u}, \zeta] = 0 \ , \ T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = 0 \ , \ T_{11}[v^{(1)}, \bar{u}] = 0 \ . \\ &P_{21}[v^{(1)}, \zeta] + P_{11}[\bar{u}, \zeta] = 0 \quad , \ T_{11}[u^{(1)}, \bar{u}] = 0 \ , \ T_{11}[v^{(1)}, \bar{u}] = 0 \ . \end{aligned}\right\} \quad (27.33)$$

De berekening van het minimum van (27.29) geschiedt op overeenkomstige wijze als in paragraaf 25; invoering van het resultaat in (27.27) en (27.28) levert

$$\begin{aligned} P[u] \geqq a^4 &\left\{P_4[u^{(1)}] - \frac{1}{1-\gamma}\,P_2[\varphi^{(20)}]\right\} + \\ &+ a^3 b \left\{P_{31}[u^{(1)}, v^{(1)}] - \frac{1}{1-\gamma}\,P_{11}[\varphi^{(20)}, \varphi^{(11)}]\right\} + \\ &+ a^2 b^2 \left\{P_{22}[u^{(1)}, v^{(1)}] - \frac{1}{1-\gamma}\,P_{11}[\varphi^{(20)}, \varphi^{(02)}] - \frac{1}{1-\gamma}\,P_2[\varphi^{(11)}]\right\} + \\ &+ a b^3 \left\{P_{13}[u^{(1)}, v^{(1)}] - \frac{1}{1-\gamma}\,P_{11}[\varphi^{(11)}, \varphi^{(02)}]\right\} + \\ &+ b^4 \left\{P_4[v^{(1)}] - \frac{1}{1-\gamma}\,P_2[\varphi^{(02)}]\right\} + \ldots, \end{aligned} \quad (27.34)$$

$$\begin{aligned} &Min\ P[u] \text{ (bij } a = \text{const. en } b = \text{const.)} \\ &\leqq a^4 \left\{P_4[u^{(1)}] - \frac{1}{1+\gamma}\,P_2[\varphi^{(20)}]\right\} + \\ &+ a^3 b \left\{P_{31}[u^{(1)}, v^{(1)}] - \frac{1}{1+\gamma}\,P_{11}[\varphi^{(20)}, \varphi^{(11)}]\right\} + \\ &+ a^2 b^2 \left\{P_{22}[u^{(1)}, v^{(1)}] - \frac{1}{1+\gamma}\,P_{11}[\varphi^{(20)}, \varphi^{(02)}] - \frac{1}{1+\gamma}\,P_2[\varphi^{(11)}]\right\} + \\ &+ a b^3 \left\{P_{13}[u^{(1)}, v^{(1)}] - \frac{1}{1+\gamma}\,P_{11}[\varphi^{(11)}, \varphi^{(02)}]\right\} + \\ &+ b^4 \left\{P_4[v^{(1)}] - \frac{1}{1+\gamma}\,P_2[\varphi^{(02)}]\right\} + \ldots. \end{aligned} \quad (27.35)$$



Wordt nog ter afkorting gesteld

$$\left.\begin{aligned} C_{40} &= P_4[u^{(1)}] - P_2[\varphi^{(20)}], \\ C_{31} &= P_{31}[u^{(1)}, v^{(1)}] - P_{11}[\varphi^{(20)}, \varphi^{(11)}], \\ C_{22} &= P_{22}[u^{(1)}, v^{(1)}] - P_{11}[\varphi^{(20)}, \varphi^{(02)}] - P_2[\varphi^{(11)}], \\ C_{13} &= P_{13}[u^{(1)}, v^{(1)}] - P_{11}[\varphi^{(11)}, \varphi^{(02)}], \\ C_{04} &= P_4[v^{(1)}] - P_2[\varphi^{(02)}], \end{aligned}\right\} \quad (27.36)$$

dan is het evenwicht stabiel indien de vierdegraadsvorm

$$C_{40}a^4 + C_{31}a^3 b + C_{22}a^2 b^2 + C_{13}ab^3 + C_{04}b^4 \quad (27.37)$$

definiet positief is; het is dan immers steeds mogelijk de constante $\gamma$ zoo klein te kiezen dat ook de vierdegraadsvorm in het rechterlid van (27.34) definiet positief is. Bezit omgekeerd (27.37) negatieve waarden dan is het evenwicht instabiel daar dan ook de vierdegraadsvorm in het rechterlid van (27.35) bij voldoend kleine waarden van $\gamma$ negatieve waarden bezit. Slechts indien (27.37) semi-definiet positief is, geeft deze vorm nog geen uitsluitsel omtrent de stabiliteit. Op dit zeer bijzondere geval, dat geringe practische beteekenis heeft, wordt hier niet verder ingegaan.

De behandeling van de gevallen $\omega_3 = 0$ enz. biedt geen nieuwe moeilijkheden. Is eerst $\omega_h > 0$ dan wordt voor de verplaatsingen $u$ gesteld

$$u = \sum_{j=1}^{h-1} a_j u^{(j)} + \bar{u} \text{ met } T_{11}[u^{(j)}, \bar{u}] = 0 \ (j = 1, 2 \ldots . h - 1), \quad (27.38)$$

waarna het onderzoek volkomen analoog met het voorgaande verloopt, zij het met belangrijk meer schrijfwerk.

Noodzakelijke voorwaarden voor stabiliteit zijn weer dat de derdegraadsvorm die wordt verkregen door substitutie van

$$u = \sum_{j=1}^{h-1} a_j u^{(j)} \quad (27.39)$$

in $P_3[u]$ identiek nul is en dat de vierdegraadsvorm die wordt verkregen door substitutie van (27.39) in $P_4[u]$ geen negatieve waarden kan aannemen.

## 28 – VERBAND MET DE ONDERZOEKINGEN VAN MAYER

De in het voorgaande ontwikkelde theorie over de stabiliteit op de stabiliteitsgrens kan in verband worden gebracht met de onderzoekingen van MAYER (lit. 31) over de minima van een functie $F$ van $n$ onafhankelijk veranderlijken $x_\lambda$ ($\lambda = 1, 2 \ldots . n$)

voor het geval dat de tweede „variatie" dezer functie semi-definiet is.

Zonder aan de algemeenheid te kort te doen, kan het nulpunt der onafhankelijk variabelen $x_\lambda$ worden gekozen in het punt waarvan wordt onderzocht of het een minimum voor de functie oplevert. Uit de TAYLOR-ontwikkeling

$$F(x_\lambda) = F(o) + \sum_{\mu=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_\mu}\right)_0 x_\mu + \sum_{(\mu,\nu)=1}^{n} \tfrac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu}\right)_0 x_\mu x_\nu +$$

$$+ \sum_{(\mu,\nu,\rho)=1}^{n} \tfrac{1}{6} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu\, \partial x_\rho}\right)_0 x_\mu x_\nu x_\rho + \ldots . =$$

$$= F(o) + \sum_{\mu=1}^{n} A_\mu x_\mu + \sum_{(\mu,\nu)=1}^{n} A_{\mu\nu} x_\mu x_\nu + \sum_{(\mu,\nu,\rho)=1}^{n} A_{\mu\nu\rho} x_\mu x_\nu x_\rho + \ldots . =$$

$$= F(o) + F_1(x) + F_2(x) + F_3(x) + \ldots . \qquad (28.1)$$

wordt op de bekende wijze geconcludeerd dat een minimum slechts aanwezig kan zijn indien de eerste variatie

$$F_1(x) = 0, \qquad (28.2)$$

en de tweede variatie

$$F_2(x) \geqq 0 \qquad (28.3)$$

is voor alle waarden der veranderlijken $x_\lambda$. Geldt in (28.3) bovendien het onderste teeken alleen indien alle $x_\lambda$ nul zijn, d. w. z. is de tweede variatie definiet positief, dan zijn de voorwaarden (28.2) en (28.3) ook voldoende voor een minimum.

Om een inzicht te verkrijgen in de voorwaarden die het bestaan van een minimum beheerschen in geval de tweede variatie semi-definiet is, stelt MAYER

$$x_\lambda = t\xi_\lambda^{(1)} + t^2\xi_\lambda^{(2)} + t^3\xi_\lambda^{(3)} + \ldots ., \qquad (28.4)$$

waarin de coëfficiënten $\xi_\lambda^{(j)}$ $(j = 1, 2, 3 \ldots .)$ willekeurig zijn. Wordt de functie $F$ na invoering van (28.4) naar opklimmende machten van $t$ ontwikkeld dan is het voor een minimum dezer functie noodig en voldoende dat de eerste term der ontwikkeling bij niet gelijktijdig nul zijnde waarden der coëfficiënten $\xi_\lambda^{(j)}$ steeds van even graad en positief is. De noodzakelijkheid van deze voorwaarde heeft MAYER buiten twijfel gesteld. Dat zij bovendien voldoende is, heeft hij alleszins aannemelijk gemaakt, al is het hem niet gelukt deze bewering streng te bewijzen. De toepassing van deze methode levert voor het gewone minimumprobleem analoog met (25.1), (25.21), (27.24) en (27.37) gevormde criteria.

De methode van MAYER kan formeel zonder moeilijkheid op



het variatieprobleem (21.1) voor de stabiliteit worden overgedragen. Hiertoe wordt voor een willekeurig kinematisch mogelijk functiestelsel geschreven

$$u = tv^{(1)} + t^2v^{(2)} + t^3v^{(3)} + \ldots . \qquad (28.5)$$

en vervolgens het linkerlid van (22.1) naar opklimmende machten van $t$ ontwikkeld. Noodig en voldoende voor stabiliteit is dat voor alle kinematisch mogelijke functiestelsels $v^{(j)}$ deze ontwikkeling begint met een positieven term van even graad in $t$.

Dat deze voorwaarde inderdaad ook voldoende is, is echter minder evident dan bij het gewone minimumvraagstuk van een functie van een eindig aantal onafhankelijk veranderlijken. Immers is in tegenstelling tot laatstgenoemd probleem bij een variatieprobleem reeds het definiet positief zijn van de tweede variatie niet steeds voldoende voor een minimum (lit. 32). Dit is dan ook de reden waarom in het voorgaande geen gebruik is gemaakt van de voor de hand liggende uitbreiding van de theorie van MAYER tot variatieproblemen. Daarentegen kunnen MAYER's resultaten streng worden gemotiveerd door beschouwingen analoog met de hier ontwikkelde theorie.

## 29 - TOEPASSING OP DE ELASTICITEITSTHEORIE

Voor de toepassing van de stabiliteitstheorie op het elastisch evenwicht is de kennis van de TAYLOR-ontwikkeling (22.1) voor de potentieele energie vereischt. Voor wat betreft de elastische potentieele energie kan deze ontwikkeling gemakkelijk worden aangegeven indien de elastische potentiaal overeenkomstig paragraaf 12 een definiet positieve homogene quadratische functie der vormveranderingscomponenten is. Uitgedrukt in de verplaatsingen $v$ wordt voor deze potentiaal gevonden

$$A(v) = A^2(v) + A^3(v) + A^4(v), \qquad (29.1)$$

waarin $A^q(v)$ een homogene veelterm van den graad $q$ in de afgeleiden van $v$ is. De uitdrukking $A^2(v)$ komt hierbij overeen met de elastische potentiaal volgens de lineaire elasticiteitstheorie; zij is een semi-definiet positieve functie van de afgeleiden der verplaatsingen die slechts nul wordt indien de in de afgeleiden der verplaatsingen lineaire bijdragen der vormveranderingscomponenten $\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ alle tegelijk nul zijn. De elastische potentiaal in den evenwichtstoestand met verplaatsingen $v = U$ volgt onmiddellijk uit (29.1). In een configuratie $v = U + u$ bedraagt zij

$$A(U+u) = A^2(U+u) + A^3(U+u) + A^4(U+u),$$

waaruit door ontwikkeling naar de afgeleiden van $U$ en $u$ volgt

$$A\,(U+u) = A_0^2 + A_0^3 + A_0^4 + A_1^1 + A_1^2 + A_1^3 + \\ + A_2^0 + A_2^1 + A_2^2 + A_3^0 + A_3^1 + A_4^0. \quad (29.2)$$

Hierin is $A_q^p$ de som van alle termen die homogeen van den graad $p$ in de afgeleiden van $U$ zijn en homogeen van den graad $q$ in de afgeleiden van $u$; deze vorm is dus ontstaan bij de ontwikkeling van $A^{p+q}\,(U+u)$. Het symbool $A_0^p$ in (29.2) is blijkbaar equivalent met het symbool $A^p$ in (29.1). Door verwisseling van $U$ en $u$ gaan de termen $A_q^p$ en $A_p^q$ in elkander over, zoodat $A_2^0$ een semi-definiet positieve functie van de afgeleiden van $u$ is, welke slechts nul wordt indien tegelijk aan alle betrekkingen $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0$ wordt voldaan. Indien nog gesteld wordt

$$V_q^p = \iiint A_q^p \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3, \quad (29.3)$$

dan luidt de gezochte TAYLOR-ontwikkeling voor de elastische potentieele energie

$$V\,(U+u) - V\,(U) = V_1\,[u] + V_2\,[u] + V_3\,[u] + V_4\,[u] \quad (29.4)$$

met

$$\left.\begin{aligned} V_1\,[u] &= V_1^1 + V_1^2 + V_1^3\,, \\ V_2\,[u] &= V_2^0 + V_2^1 + V_2^2\,, \\ V_3\,[u] &= \quad V_3^0 + V_3^1\,, \\ V_4\,[u] &= \quad\quad V_4^0\,. \end{aligned}\right\} \quad (29.5)$$

Het stabiliteitsonderzoek kan alleen dan met behulp van het energiecriterium eenvoudig worden uitgevoerd indien ook de uitwendige belastingen een potentieele energie bezitten, welke dan het tegenstelde van een arbeidsfunctie $W$ is. Wordt de aangroeiing van deze functie bij den overgang van de evenwichtsconfiguratie $U$ naar een configuratie $U+u$ ontwikkelbaar ondersteld dan geldt

$$W\,(U+u) - W\,(U) = W_1\,[u] + W_2\,[u] + W_3\,[u] + \ldots, \quad (29.6)$$

waarin $W_q\,[u]$ de som is der integralen welker integranden homogene functies van den graad $q$ zijn van de verplaatsingen $u$ en haar afgeleiden. In het veel voorkomende geval dat de belastingen, betrokken op de massa-eenheid en oppervlakte-eenheid in den onvervormden toestand, in grootte en richting ten opzichte van het vaste assenstelsel zijn gegeven, geldt



$$W_q[u] = \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} \left\{ \iiint \varrho X_i u_i \, dx_1 \, dx_2 \, dx_3 + \iint p_i u_i \, df \right\} & \text{voor } q = 1, \\ 0 & \text{voor } q > 1. \end{cases} \quad (29.7)$$

Met behulp van (29.6) volgt ten slotte

$$P_q\,[u] = \begin{matrix} V_q\,[u] - W_q\,[u] \text{ voor } 1 \leqq q \leqq 4, \\ -\,W_q\,[u] \text{ voor } q > 4. \end{matrix} \quad (29.8)$$

Hoofdstuk 3

# EVENWICHTSTOESTANDEN BIJ BELASTINGEN IN DE OMGEVING VAN DE KNIKBELASTING

## 31 – DE KNIKBELASTING

In het voorgaande hoofdstuk is de stabiliteit onderzocht van een bekend onderstelden evenwichtstoestand. De techniek stelt het stabiliteitsprobleem echter meestal in eenigszins anderen vorm. Hierbij wordt gevraagd naar de stabiliteit van den evenwichtstoestand die optreedt onder den invloed van een gegeven systeem van belastingen. Alvorens de stabiliteitstheorie kan worden toegepast moet dan de bij het belastingsysteem behoorende evenwichtstoestand worden bepaald. Hiertoe kan gebruik worden gemaakt van de differentiaalvergelijkingen (13. 13) met randvoorwaarden (13. 14), dan wel van de variatievergelijking (22. 3).

Bij het probleem in den boven omschreven vorm doet zich, afgezien van de aan de oplossing der niet-lineaire evenwichtsvergelijkingen verbonden bezwaren, in principe een eigenaardige moeilijkheid voor welke samenhangt met het voorschrijven der belastingen. Een noodzakelijke voorwaarde voor de mogelijkheid van evenwicht is immers dat de belastingen in den vervormden toestand een evenwichtssysteem vormen. In het kader der lineaire elasticiteitstheorie wordt deze eisch bevredigd indien de belastingen op het onvervormde, vast gedachte lichaam een evenwichtssysteem vormen; de hieruit voor het belastingsysteem voortvloeiende voorwaarden kunnen expliciet worden opgeschreven. Zoodra echter eindige vervormingen in beschouwing worden genomen moeten de belastingen aan den evenwichtseisch in den vervormden toestand van het lichaam voldoen; zoolang deze toestand niet bekend is kunnen dan de aan het belastingsysteem te stellen eischen niet expliciet worden geformuleerd.

Gelukkig heeft deze principieele moeilijkheid voor de belangrijke technische problemen weinig beteekenis. Een constructie is immers meestal wel zoodanig ondersteund dat in elken weinig (doch eindig) vervormden toestand een infinitesimale verplaatsing van het in den vervormden toestand vast gedachte lichaam is uitgesloten. Aan de evenwichtsvoorwaarden voor het lichaam als geheel kan dan steeds worden voldaan. Bovendien wordt in het volgende aangenomen dat de steunpuntsreacties nimmer arbeid verrichten; de totale potentieele energie van het systeem is dan de som van de elastische energie en de energie der gegeven belastingen.



De volgende beschouwingen worden voorts beperkt tot gevallen waarin de gegeven belasting nog een voorloopig onbepaalden evenredigheidsfactor $\lambda$ bevat; zij kan dan worden voorgesteld als het product van $\lambda$ en een eenheidsbelastingsysteem. Gevraagd wordt naar de evenwichtstoestanden die bij verschillende waarden van den positief gedachten belastingparameter $\lambda$ kunnen voorkomen alsmede naar de stabiliteit van deze toestanden [1]). De algemeene oplossing van dit probleem, d. w. z. de bepaling van *alle* mogelijke evenwichtstoestanden bij een gegeven waarde van $\lambda$, is bijna steeds onmogelijk. Wel gelukt het in vele voor de techniek belangrijke gevallen *één* oplossing te vinden welke voor tot nul naderende waarde van $\lambda$ continu overgaat in den onvervormden toestand. Deze evenwichtstoestand met verplaatsingen $U(\lambda)$, de z.g. grondtoestand, wordt in het volgende bekend ondersteld; bovendien wordt aangenomen dat in het beschouwde gebied van $\lambda$-waarden deze grondtoestand ondubbelzinnig bepaald is.

Omtrent de stabiliteit van den grondtoestand kan algemeen het volgende worden opgemerkt. Een infinitesimale verplaatsing van het in den vervormden toestand vast gedachte lichaam is uitgesloten, zoodat bij extra verplaatsingen $u_i$ uit den grondtoestand niet in het geheele lichaam kan worden voldaan aan de 6 betrekkingen (lit. 38) $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}=0$.

Blijkens par. 29 is $V_2^0[u]$ dan definiet positief. De overige bijdragen in $P_2[u]$ naderen tegelijk met $\lambda$ en $U(\lambda)$ tot nul (zie par. 29); in overeenstemming hiermede wordt aangenomen dat het mogelijk is een positieve waarde $\lambda_1$ van den belastingparameter aan te geven zoodanig dat $P_2[u]$ definiet positief is voor $\lambda < \lambda_1$. De oplossing $\omega_1$ van het minimumprobleem (22. 5)

$$\omega = Min \frac{P_2[u]}{T_2[u]}, \tag{31. 1}$$

welker existentie weer wordt aangenomen, is dan eveneens positief zoodat het evenwicht voor $\lambda < \lambda_1$ stabiel is. Deze beschouwing sluit nauw aan bij de bepaaldheidsstelling van KIRCHHOFF (lit. 39)).

In sommige gevallen, bv. bij de zuiver getrokken staaf, is de oplossing van (31. 1) voor alle positieve belastingen positief. In andere gevallen wordt $\omega_1$ daarentegen na overschrijding van een kritieke waarde $\lambda_1$ negatief. Het evenwicht in den grondtoestand is dan instabiel bij overschrijding van de bij $\lambda_1$ behoorende belasting zoodat de grondtoestand $U(\lambda)$ voor $\lambda > \lambda_1$ geen prac-

[1]) Is het noodig ook negatieve belastingen in beschouwing te nemen dan geschiedt dit het eenvoudigst door het eenheidsbelastingsysteem door zijn tegengestelde te vervangen; $\lambda$ is ook dan positief.

tische beteekenis heeft. Van bijzonder belang is de bepaling van de grenswaarde $\lambda_1$ na welker overschrijding de grondtoestand instabiel wordt. Zij wordt bepaald door de kleinste waarde van $\lambda$ voor welke de oplossing $\omega_1$ van (31. 1) nul is [1]). Het evenwicht in den bij $\lambda_1$ behoorenden grondtoestand is derhalve op de stabiliteitsgrens zoodat de homogene variatievergelijking (24. 14) voor het neutrale evenwicht een van nul verschillende oplossing bezit. De bij $\lambda_1$ behoorende belasting wordt de knikbelasting genoemd; de bijbehoorende grondtoestand $U(\lambda_1)$ heet de kniktoestand.

Het bestaan van bij den kniklast infinitesimaal van den kniktoestand afwijkende evenwichtstoestanden doet het vermoeden rijzen dat bij weinig van den kniklast verschillende belastingen eveneens naburige evenwichtstoestanden bestaan die door kleine, doch nu eindige verplaatsingen uit den grondtoestand kunnen worden afgeleid. Deze evenwichtstoestanden, voor welker aard de stabiliteit van den zich op de stabiliteitsgrens bevindenden kniktoestand van beslissende beteekenis blijkt te zijn, vormen het onderwerp der volgende beschouwingen.

## 32 - DE POTENTIEELE ENERGIE

Ondersteld wordt dat de verplaatsingen $U(\lambda)$ en haar afgeleiden in de omgeving van den kniklast $\lambda = \lambda_1$ volgens de formule van TAYLOR kunnen worden ontwikkeld naar opklimmende machten van $\lambda - \lambda_1$. Dit sluit in dat ook voor parameterwaarden $\lambda > \lambda_1$ in de omgeving van de knikbelasting het bestaan van een grondtoestand wordt aangenomen. Op de consequentie van deze onderstelling ten aanzien van den aard der behandelde problemen wordt in par. 37 teruggekomen.

Ook de in (22. 1) ingevoerde integralen $P_m[u]$, die in het volgende voor den algemeenen grondtoestand $U(\lambda)$ met $P_m^{\lambda}[u]$ worden aangegeven, kunnen nu naar $\lambda - \lambda_1$ worden ontwikkeld

$$P_m^{\lambda}[u] = P_m[u] + (\lambda - \lambda_1) P_m'[u] + (\lambda - \lambda_1)^2 P_m''[u] + \ldots . \quad (32.\ 1)$$

Het symbool $P_m[u]$ heeft in het vervolg uitsluitend betrekking op den kniktoestand $U(\lambda_1)$. In overeenstemming met (22. 3) is $P_1^{\lambda}[u]$ nul voor alle waarden van $\lambda$.

Wordt de oplossing $\omega_2$ van het minimumprobleem (24. 4) voor den kniktoestand voorloopig positief gesteld dan luidt de algemeene oplossing van (24. 14) (zie ook par. 25, i.h.b. (25. 23) en (25. 24))

[1]) Het is in principe niet uitgesloten dat de grondtoestand bij grootere overschrijdingen van $\lambda_1$ weer stabiel wordt; in dit geval moet de oplossing van (31. 1) ook bij een grootere waarde van $\lambda$ nul worden. Dit geval kan zich voordoen bij de op druk belaste schroefveer (zie lit. 53).



$$u = a u^{(1)}. \quad (32\ 2)$$

De extra verplaatsingen voor de van den kniktoestand infinitesimaal afwijkende evenwichtstoestanden worden bepaald door infinitesimale waarden van $a$. De verplaatsingen van den grondtoestand naar naburige evenwichtstoestanden bij weinig van den kniklast verschillende belastingen zullen vermoedelijk weinig afwijken van den vorm (32. 2) zoodat het doelmatig is ze in den vorm (24. 1) te schrijven [1])

$$u = a u_1 + \bar{u} \text{ met } T_{11}[u_1, \bar{u}] = 0; \quad (32.\ 3)$$

verwacht wordt dus dat de functies $\bar{u}$ klein zijn ten opzichte van $a u_1$.

Met (32. 3) wordt voor de energietoeneming bij den overgang van den grondtoestand $U(\lambda)$ naar een anderen toestand $U(\lambda) + u$ geschreven

$$\begin{aligned}
P^{\lambda}[u] &= P_2^{\lambda}[u] + P_3^{\lambda}[u] + P_4^{\lambda}[u] + \ldots . = \\
&= P_2[u] + (\lambda - \lambda_1) P_2'[u] + (\lambda - \lambda_1)^2 P_2''[u] + \ldots . + \\
&+ P_3[u] + (\lambda - \lambda_1) P_3'[u] + \ldots . + P_4[u] + \ldots . = \\
&= a^2 P_2[u_1] + a P_{11}[u_1, \bar{u}] + P_2[\bar{u}] + \\
&+ (\lambda - \lambda_1) \left\{ a^2 P_2'[u_1] + a P_{11}'[u_1, \bar{u}] + P_2'[\bar{u}] \right\} + \\
&+ (\lambda - \lambda_1)^2 \left\{ a^2 P_2''[u_1] + a P_{11}''[u_1, \bar{u}] + P_2''[\bar{u}] \right\} + \\
&+ a^3 P_3[u_1] + a^2 P_{21}[u_1, \bar{u}] + a P_{12}[u_1, \bar{u}] + P_3[\bar{u}] + \\
&+ (\lambda - \lambda_1) \left\{ a^3 P_3'[u_1] + \ldots . + P_3'[\bar{u}] \right\} + \ldots . + \\
&+ a^4 P_4[u_1] + a^3 P_{31}[u_1, \bar{u}] + \ldots . + P_4[\bar{u}] + \ldots .
\end{aligned}$$

Met gebruik van de uit $\omega_1 = 0$ volgende relaties

$$P_2[u_1] = 0 \text{ en } P_{11}[u_1, \bar{u}] = 0$$

volgt met eenigszins andere rangschikking

$$\begin{aligned}
P^{\lambda}[u] &= a^2 (\lambda - \lambda_1) P_2'[u_1] + a^2 (\lambda - \lambda_1)^2 P_2''[u_1] + \ldots . + \\
&+ a^3 P_3[u_1] + a^3 (\lambda - \lambda_1) P_3'[u_1] + \ldots . + a^4 P_4[u_1] + \ldots . + \\
&+ a (\lambda - \lambda_1) P_{11}'[u_1, \bar{u}] + a (\lambda - \lambda_1)^2 P_{11}''[u_1, \bar{u}] + \ldots . +
\end{aligned}$$

[1]) Daar verwarring met de indices $i$ ter onderscheiding der verplaatsingscomponenten wel is uitgesloten, worden in het volgende ook de indices der eigenfuncties rechts onder de letter geplaatst.

$$+ a^2 P_{21}[u_1, \bar{u}] + a^2(\lambda - \lambda_1) P_{21}'[u_1, \bar{u}] + \ldots. +$$
$$+ a^3 P_{31}[u_1, \bar{u}] + \ldots. + P_2[\bar{u}] + (\lambda - \lambda_1) P_2'[\bar{u}] +$$
$$+ (\lambda - \lambda_1)^2 P_2''[\bar{u}] + a P_{12}[u_1, \bar{u}] +$$
$$+ a(\lambda - \lambda_1) P_{12}'[u_1, \bar{u}] + \ldots. + a^2 P_{22}[u_1, \bar{u}] + \ldots. +$$
$$+ P_3[\bar{u}] + (\lambda - \lambda_1) P_3'[u] + \ldots. + a P_{13}[u_1, \bar{u}] + \ldots. +$$
$$+ P_4[\bar{u}] + \ldots. \quad (32.4)$$

Uit deze uitdrukking voor de energie worden de evenwichtsvergelijkingen op de bekende wijze afgeleid door toepassing van het principe der virtueele verplaatsingen. Deze toepassing geschiedt het eenvoudigst in twee stappen. Eerst worden de stationnaire waarden van (32. 4) bepaald bij willekeurige constante waarde van $a$. Door deze voorwaarde worden de functies $\bar{u}$ bepaald in afhankelijkheid van den parameter $a$; door substitutie in (32. 4) is de energie dan bekend als een functie $\overline{P}^{\lambda}(a)$ van $a$. De bij de stationnaire waarden van deze functie behoorende waarden van $a$ en de bij $a$ behoorende functies $\bar{u}$ leveren dan de verplaatsingen voor de evenwichtstoestanden.

De exacte uitvoering van deze methode stuit op groote moeilijkheden doordat de vergelijkingen voor $\bar{u}$ niet lineair zijn. Om althans een benaderingsoplossing te verkrijgen worden in (32. 4) de na $P_2[\bar{u}]$ volgende termen verwaarloosd; hiermede worden de vergelijkingen voor $\bar{u}$ kunstmatig gelineariseerd. Ter motiveering van deze verwaarloozing diene het volgende.

De integranden van de na $P_2[\bar{u}]$ volgende termen in (32. 4) zijn eveneens van den tweeden graad en bevatten dan één of meer factoren $\lambda - \lambda_1$ of $a$ of zij zijn van hoogeren graad in $\bar{u}$ en haar afgeleiden. Bij beperking der beschouwingen tot kleine verplaatsingen uit een weinig van den kniktoestand afwijkenden grondtoestand, in welk geval $\lambda - \lambda_1$, $a$ en $\bar{u}$ klein zijn, is het dan te verwachten dat deze termen ten opzichte van $P_2[\bar{u}]$ van ondergeschikte beteekenis zijn. Voor het bewijs van dit vermoeden worden de integranden van de na $P_2[\bar{u}]$ volgende termen samengenomen tot één homogeen quadratischen vorm in $\bar{u}$ en haar afgeleiden, welks coëfficiënten functies zijn van $\lambda - \lambda_1$, $a$, $\bar{u}$ en haar afgeleiden; deze coëfficiënten naderen alle tot nul indien $\lambda - \lambda_1$, $a$, $\bar{u}$ en haar afgeleiden alle tot nul naderen. Analoog met par. 25 volgt hieruit dat voor voldoend kleine absolute waarden van $\lambda - \lambda_1$, $a$, $\bar{u}$ en haar afgeleiden de absolute waarde van de na $P_2[\bar{u}]$ volgende termen kleiner is dan een willekeurig klein gekozen fractie van $P_2[\bar{u}]$. Dientengevolge is de door verwaarloozing van de na $P_2[\bar{u}]$ volgende termen verkregen benadering voor de potentieele energie beter naarmate $|\lambda - \lambda_1|$, $|a|$ en $|\bar{u}|$ kleiner zijn.



De benadering voor de energie luidt

$$P^{\lambda}[u] = P^{\lambda}[a u^{(1)} + \bar{u}] = a^2(\lambda - \lambda_1) P_2'[u_1] + a^2(\lambda - \lambda_1)^2 P_2''[u_1] +$$
$$+ \ldots. + a^3 P_3[u_1] + a^3(\lambda - \lambda_1) P_3'[u_1] + \ldots. + a^4 P_4[u_1] +$$
$$+ \ldots. + a(\lambda - \lambda_1) P_{11}'[u_1, \bar{u}] + a(\lambda - \lambda_1)^2 P_{11}''[u_1, \bar{u}] +$$
$$+ \ldots. + a^2 P_{21}[u_1, \bar{u}] + a^2(\lambda - \lambda_1) P_{21}'[u_1, \bar{u}] + \ldots. +$$
$$+ a^3 P_{31}[u_1, \bar{u}] + \ldots. + P_2[\bar{u}]. \quad (32.5)$$

Het is voor het volgende van belang in het oog te houden dat de voornaamste hierbij verwaarloosde termen zijn

$$(\lambda - \lambda_1) P_2'[\bar{u}],\ a P_{12}[u_1, \bar{u}],\ P_3[\bar{u}]. \quad (32.6)$$

## 33 - BEREKENING DER FUNCTIES $\bar{u}$

Ook voor de benadering (32. 5) der energie geschiedt de toepassing der evenwichtsvoorwaarde in twee stappen. Voor de bepaling van de stationnaire waarden bij constante waarde van $a$ wordt de toeneming van de energie berekend bij overgang van het functiestelsel $\bar{u}$ naar een kinematisch mogelijk functiestelsel $\bar{u} + \eta$ dat eveneens aan (32. 3) voldoet

$$T_{11}[u_1, \eta] = 0. \quad (33.1)$$

Na ontwikkeling der integralen welke van $\bar{u} + \eta$ afhangen, wordt gevonden

$$P^{\lambda}[a u_1 + \bar{u} + \eta] - P^{\lambda}[a u_1 + \bar{u}] = a(\lambda - \lambda_1) P_{11}'[u_1, \eta] +$$
$$+ a(\lambda - \lambda_1)^2 P_{11}''[u_1, \eta] + \ldots. + a^2 P_{21}[u_1, \eta] +$$
$$+ a^2(\lambda - \lambda_1) P_{21}'[u_1, \eta] + \ldots. + a^3 P_{31}[u_1, \eta] + \ldots. +$$
$$+ P_{11}[\bar{u}, \eta] + P_2[\eta]. \quad (33.2)$$

De eerste variatie, die wordt geleverd door de in $\eta$ lineaire termen van (33. 2), moet voor een stationnaire waarde van (32. 5) steeds nul zijn; daar $P_2[\eta]$ onder de voorwaarde (33. 1) positief is, is de gezochte stationnaire waarde een minimum.

Analoog met par. 25 wordt de door het nul stellen der eerste variatie verkregen voorwaarde aequivalent gemaakt met een stel differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden. Hiertoe wordt voor een willekeurig, niet aan de beperking (33. 1) onderworpen, kinematisch mogelijk functiestelsel $\zeta$ geschreven

$$\zeta = t u_1 + \eta \text{ met } T_{11}[u_1, \eta] = 0 \text{ en } t = \frac{T_{11}[u_1, \zeta]}{2 T_2[u_1]}.$$

Met inachtneming van de identiteiten

$$P_{11}'[u_1, u_1] = 2P_2'[u_1],\ P_{21}[u_1, u_1] = 3P_3[u_1] \text{ enz.}$$

kan dan worden geschreven

$$\begin{aligned}
&a(\lambda-\lambda_1)P_{11}'[u_1,\zeta] + a(\lambda-\lambda_1)^2 P_{11}''[u_1,\zeta] + \ldots\ldots + \\
&+ a^2P_{21}[u_1,\zeta] + a^2(\lambda-\lambda_1)P_{21}'[u_1,\zeta] + \ldots\ldots + a^3P_{31}[u_1,\zeta] + \\
&+ \ldots\ldots + P_{11}[\bar{u},\zeta] = t\Big\{a(\lambda-\lambda_1)2P_2'[u_1] + \\
&+ a(\lambda-\lambda_1)^2 2P_2''[u_1] + \ldots\ldots + a^2 3P_3[u_1] + \\
&+ a^2(\lambda-\lambda_1)3P_3'[u_1] + \ldots\ldots + a^3 4P_4[u_1] + \ldots\ldots + P_{11}[\bar{u},u_1]\Big\} + \\
&+ a(\lambda-\lambda_1)P_{11}'[u_1,\eta] + a(\lambda-\lambda_1)^2 P_{11}''[u_1,\eta] + \ldots\ldots + \\
&+ a^2P_{21}[u_1,\eta] + a^2(\lambda-\lambda_1)P_{21}'[u_1,\eta] + \ldots\ldots + \\
&+ a^3P_{31}[u_1,\eta] + \ldots\ldots + P_{11}[\bar{u},\eta].
\end{aligned}$$

Hierin zijn de van $\eta$ afhankelijke termen identiek met de in $\eta$ lineaire termen van (33. 2) zoodat zij tezamen nul zijn. Met gebruik van

$$P_{11}[u_1, \bar{u}] = 0$$

volgt na substitutie van de waarde van $t$

$$\begin{aligned}
&a(\lambda-\lambda_1)\Big\{P_{11}'[u_1,\zeta] - \frac{2P_2'[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta]\Big\} + \\
&+ a(\lambda-\lambda_1)^2\Big\{P_{11}''[u_1,\zeta] - \frac{2P_2''[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta]\Big\} + \ldots\ldots + \\
&+ a^2\Big\{P_{21}[u_1,\zeta] - \frac{3P_3[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta]\Big\} + \\
&+ a^2(\lambda-\lambda_1)\Big\{P_{21}'[u_1,\zeta] - \frac{3P_3'[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta]\Big\} + \ldots\ldots + \\
&+ a^3\Big\{P_{31}[u_1,\zeta] - \frac{4P_4[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta]\Big\} + \ldots\ldots + \\
&+ P_{11}[\bar{u},\zeta] = 0. \qquad (33.3)
\end{aligned}$$

Eveneens analoog met par. 25 kan worden aangetoond dat deze vergelijking, tezamen met de voorwaarde

$$T_{11}[u_1, \bar{u}] = 0 \qquad (33.4)$$

ten hoogste één oplossing bezit. Wegens de lineariteit van (33. 3) en (33. 4) kan deze oplossing worden geschreven in den vorm

$$\begin{aligned}
\bar{u} = {}& a(\lambda-\lambda_1)\varphi_1' + a(\lambda-\lambda_1)^2\varphi_1'' + \ldots\ldots + a^2\varphi_2 + \\
&+ a^2(\lambda-\lambda_1)\varphi_2' + \ldots\ldots + a^3\varphi_3 + \ldots\ldots, \qquad (33.5)
\end{aligned}$$



waarin $\varphi_1'$, $\varphi_1''$, $\varphi_2$ enz. de oplossingen zijn van de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}
&P_{11}[\bar{u},\zeta] + P_{11}'[u_1,\zeta] - \frac{2P_2'[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta] = 0\ ; \\
&\qquad\qquad T_{11}[u_1,\bar{u}] = 0, \\
&P_{11}[\bar{u},\zeta] + P_{11}''[u_1,\zeta] - \frac{2P_2''[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta] = 0\ ; \\
&\qquad\qquad T_{11}[u_1,\bar{u}] = 0, \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
\end{aligned}\right\} \quad (33.6)$$

$$\left.\begin{aligned}
&P_{11}[\bar{u},\zeta] + P_{21}[u_1,\zeta] - \frac{3P_3[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta] = 0\ ; \\
&\qquad\qquad T_{11}[u_1,\bar{u}] = 0, \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
\end{aligned}\right\} \quad (33.7)$$

$$\left.\begin{aligned}
&P_{11}[\bar{u},\zeta] + P_{31}[u_1,\zeta] - \frac{4P_4[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta] = 0\ ; \\
&\qquad\qquad T_{11}[u_1,\bar{u}] = 0, \\
&- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
\end{aligned}\right\} \quad (33.8)$$

Uit (33. 5) volgt de bevestiging van het in par. 32 uitgesproken vermoeden dat de functies $\bar{u}$ voor kleine waarden van $\lambda - \lambda_1$ en $a$ klein zijn ten opzichte van $au_1$. Tevens blijkt door vergelijking van de eerste vergelijking (33. 7) met (25. 16) dat, indien $P_3[u_1]$ nul is, de functies $\varphi_2$ identiek zijn met de in par. 25 ingevoerde functies $\varphi^{(2)}$.

Door toepassing van (33. 3) voor $\zeta = \bar{u}$ wordt het minimum van (32. 5) berekend (zie ook par. 25, i. h. b. (25. 18)). Het resultaat is met gebruik van (33. 5)

$$\begin{aligned}
&a^2(\lambda-\lambda_1)P_2'[u_1] + a^2(\lambda-\lambda_1)^2 P_2''[u_1] + \ldots\ldots + a^3P_3[u_1] + \\
&+ a^3(\lambda-\lambda_1)P_3'[u_1] + \ldots\ldots + a^4P_4[u_1] + \ldots\ldots - P_2[\bar{u}] = \\
&= a^2(\lambda-\lambda_1)P_2'[u_1] + a^2(\lambda-\lambda_1)^2\Big\{P_2''[u_1] - P_2[\varphi_1']\Big\} + \\
&+ \ldots\ldots + a^3P_3[u_1] + a^3(\lambda-\lambda_1)\Big\{P_3'[u_1] - P_{11}[\varphi_1',\varphi_2]\Big\} + \\
&+ \ldots\ldots + a^4\Big\{P_4[u_1] - P_2[\varphi_2]\Big\} + \ldots\ldots \qquad (33.9)
\end{aligned}$$

Overeenkomstig (32. 6) en (33. 5) zijn hierin o.m. reeds de volgende termen verwaarloosd

$$a^2(\lambda-\lambda_1)^3 P_2'[\varphi_1'],\ a^3(\lambda-\lambda_1)^2 P_{11}'[\varphi_1',\varphi_2],$$
$$a^4(\lambda-\lambda_1)P_2'[\varphi_2],\ a^5P_{12}[u_1,\varphi_2],$$

zoodat het geen beteekenis heeft in (33. 9) termen van den vijfden en hoogeren graad in $\lambda - \lambda_1$ en $a$ mede in beschouwing te nemen. Wordt nog ter afkorting gesteld

$$\left.\begin{array}{l} P_2'[u_1] = A_2',\ P_2''[u_1] - P_2[\varphi_1'] = A_2'',\ P_3[u_1] = A_3, \\ P_3'[u_1] - P_{11}[\varphi_1', \varphi_2] = A_3', \quad P_4[u_1] - P_2[\varphi_2] = A_4 \end{array}\right\} \quad (33.\ 10)$$

dan volgt tenslotte voor het minimum der energie bij constante waarde van $a$ in eerste benadering

$$\overline{P}^{\lambda}(a) = (\lambda - \lambda_1) A_2' a^2 + (\lambda - \lambda_1)^2 A_2'' a^2 + A_3 a^3 + (\lambda - \lambda_1) A_3' a^3 + A_4 a^4. \quad (33.\ 11)$$

Blijkens (33. 10) zijn bij deze benadering alleen de in $\lambda - \lambda_1$ en $a$ quadratische termen van (33. 5) ($a(\lambda - \lambda_1)\varphi_1'$, en $a^2\varphi_2$) van beteekenis zoodat de correspondeerende benadering der functies $\bar{u}$ is

$$\bar{u} = a(\lambda - \lambda_1)\varphi_1' + a^2\varphi_2. \quad (33.\ 12)$$

Uit (33. 10) blijkt dat de constante $A_3$ identiek is met de in eerste instantie over de stabiliteit van den kniktoestand beslissende grootheid (zie (25. 1)). Is zij nul dan volgt uit de identiteit der functies $\varphi_2$ en $\varphi^{(2)}$ dat $A_4$ (33. 10) identiek is met de in (25. 21) ingevoerde grootheid die dan over de stabiliteit van den kniktoestand beslist.

## 34 - VERBETERING DER BENADERING

Zooals reeds in par. 32 werd opgemerkt vormt (32. 5) een betere benadering voor de energie naarmate $\lambda - \lambda_1$, $a$ en $\bar{u}$ kleiner zijn. Mitsdien levert (33. 11) een benadering voor de stationnaire waarde $\overline{P}^{\lambda}(a)$ van de energie voor kleine waarden van $\lambda - \lambda_1$, $a$ en $\bar{u}$, welke beter is naarmate $\lambda - \lambda_1$ en $a$ kleiner zijn; de vereischte kleinheid der functies $\bar{u}$ wordt dan automatisch verzekerd door (33. 5) of (33. 12). In sommige gevallen is het echter gewenscht te weten hoe deze benadering zoo noodig nog kan worden verbeterd. Hiertoe wordt opgemerkt dat (33. 12) een benadering levert voor de functies $\bar{u}$ die de stationnaire waarden van (32. 4) bepalen, welke beter is naarmate $\lambda - \lambda_1$ en $a$ kleiner zijn. Wordt nu gesteld

$$\bar{u} = a(\lambda - \lambda_1)\varphi_1' + a^2\varphi_2 + \bar{\bar{u}} \text{ met } T_{11}[u_1, \bar{\bar{u}}] = 0, \quad (34.\ 1)$$

dan is derhalve te verwachten dat $\bar{\bar{u}}$ klein is ten opzichtte van de eerste twee termen.

Invoering van (34. 1) in (32. 4) levert na ontwikkeling en rangschikking der termen volgens opklimmenden graad in $\bar{\bar{u}}$ en haar afgeleiden



$$\begin{aligned}
P^{\lambda}[u] = {} & (\lambda - \lambda_1) A_2' a^2 + (\lambda - \lambda_1)^2 A_2'' a^2 + A_3 a^3 + (\lambda - \lambda_1) A_3' a^3 + \\
& + A_4 a^4 + a^2 (\lambda - \lambda_1)^3 \left\{ P_2'''[u_1] + P_{11}''[u_1, \varphi_1'] + P_2'[\varphi_1'] \right\} + \\
& + a^2 (\lambda - \lambda_1)^4 \left\{ P_2''''[u_1] + P_{11}'''[u_1, \varphi_1'] + P_2''[\varphi_1'] \right\} + \ldots + \\
& + a^3 (\lambda - \lambda_1)^2 \left\{ P_3''[u_1] + P_{21}'[u_1, \varphi_1'] + P_{12}[u_1, \varphi_1'] + \right. \\
& \left. + P_{11}''[u_1, \varphi_2] + P_{11}'[\varphi_1', \varphi_2] \right\} + a^3 (\lambda - \lambda_1)^3 \left\{ P_3'''[u_1] + \right. \\
& \left. + P_{21}''[u_1, \varphi_1'] + P_{12}'[u_1, \varphi_1'] + P_3[\varphi_1'] + P_{11}'''[u_1, \varphi_2] + \right. \\
& \left. + P_{11}''[\varphi_1', \varphi_2] \right\} + \ldots + a^4 (\lambda - \lambda_1) \left\{ P_4'[u_1] + P_{31}[u_1, \varphi_1'] + \right. \\
& \left. + P_{21}'[u_1, \varphi_2] + P_{111}[u_1, \varphi_1', \varphi_2] + P_2'[\varphi_2] \right\} + \\
& + a^4 (\lambda - \lambda_1)^2 \left\{ P_4''[u_1] + P_{31}'[u_1, \varphi_1') + P_{22}[u_1, \varphi_1'] + \right. \\
& \left. + P_{21}''[u_1, \varphi_2] + P_{111}'[u_1, \varphi_1', \varphi_2] + P_{21}[\varphi_1', \varphi_2] + P_2''[\varphi_2] \right\} + \\
& + \ldots + a^5 \left\{ P_5[u_1] + P_{31}[u_1, \varphi_2] + P_{12}[u_1, \varphi_2] \right\} + \\
& + a^5 (\lambda - \lambda_1) \left\{ P_5'[u_1] + P_{41}[u_1, \varphi_1'] + P_{31}'[u_1, \varphi_2] + \right. \\
& \left. + P_{211}[u_1, \varphi_1', \varphi_2] + P_{12}'[u_1, \varphi_2] + P_{12}[\varphi_1', \varphi_2] \right\} + \ldots + \\
& + a^6 \left\{ P_6[u_1] + P_{41}[u_1, \varphi_2] + P_{22}[u_1, \varphi_2] + P_3[\varphi_2] \right\} + \ldots + \\
& + a (\lambda - \lambda_1)^2 \left\{ P_{11}''[u_1, \bar{\bar{u}}] + P_{11}'[\varphi_1', \bar{\bar{u}}] \right\} + \\
& + a (\lambda - \lambda_1)^3 \left\{ P_{11}'''[u_1, \bar{\bar{u}}] + P_{11}''[\varphi_1', \bar{\bar{u}}] \right\} + \ldots + \\
& + a^2 (\lambda - \lambda_1) \left\{ P_{21}'[u_1, \bar{\bar{u}}] + P_{111}[u_1, \varphi_1', \bar{\bar{u}}] + P_{11}'[\varphi_2, \bar{\bar{u}}] \right\} + \\
& + a^2 (\lambda - \lambda_1)^2 \left\{ P_{21}''[u_1, \bar{\bar{u}}] + P_{111}'[u_1, \varphi_1', \bar{\bar{u}}] + P_{21}[\varphi_1', \bar{\bar{u}}] + \right. \\
& \left. + P_{11}''[\varphi_2, \bar{\bar{u}}] \right\} + \ldots + a^3 \left\{ P_{31}[u_1, \bar{\bar{u}}] + P_{111}[u_1, \varphi_2, \bar{\bar{u}}] \right\} + \\
& + a^3 (\lambda - \lambda_1) \left\{ P_{31}'[u_1, \bar{\bar{u}}] + P_{211}[u_1, \varphi_1', \bar{\bar{u}}] + \right. \\
& \left. + P_{111}'[u_1, \varphi_2, \bar{\bar{u}}] + P_{111}[\varphi_1', \varphi_2, \bar{\bar{u}}] \right\} + \ldots + \\
& + a^4 \left\{ P_{41}[u_1, \bar{\bar{u}}] + P_{211}[u_1, \varphi_2, \bar{\bar{u}}] + P_{21}[\varphi_2, \bar{\bar{u}}] \right\} + \ldots + \\
& + P_2[\bar{\bar{u}}] + (\lambda - \lambda_1) P_2'[\bar{\bar{u}}] + \ldots + \\
& + a P_{12}[u_1, \bar{\bar{u}}] + a (\lambda - \lambda_1) \left\{ P_{12}'[u_1, \bar{\bar{u}}] + P_{12}[\varphi_1', \bar{\bar{u}}] \right\} + \ldots + \\
& + a^2 \left\{ P_{22}[u_1, \bar{\bar{u}}] + P_{12}[\varphi_2, \bar{\bar{u}}] \right\} + \ldots + P_3[\bar{\bar{u}}] + \ldots \quad (34.\ 2)
\end{aligned}$$

Hierbij is reeds gebruik gemaakt van de eigenschappen der functies $\varphi_1'$ en $\varphi_2$ door samenneming van de van $\bar{\bar{u}}$ onafhankelijke termen van den derden en vierden graad in $\lambda - \lambda_1$ en $a$ tot de uitdrukking (33. 11). Wegens de voor $\varphi_1'$ en $\varphi_2$ geldende eerste vergelijkingen van (33. 6), resp. (33. 7) ontbreken verder de in $\bar{\bar{u}}$ en haar afgeleiden lineaire termen met factoren $a(\lambda - \lambda_1)$ en $a^2$.

Op dezelfde wijze als in par. 33 wordt betoogd dat de na $P_2[\bar{\bar{u}}]$ volgende termen voor kleine waarden van $\lambda - \lambda_1$, $a$ en $\bar{\bar{u}}$ en haar afgeleiden klein zijn ten opzichte van $P_2[\bar{\bar{u}}]$ en mitsdien kunnen worden verwaarloosd. Van de resteerende benadering voor de energie worden vervolgens de stationnaire waarden bepaald bij constant gehouden waarde van $a$. Aangezien dit onderzoek volkomen parallel loopt met par. 33 wordt volstaan met de vermelding der resultaten. De gezochte stationnaire waarde blijkt weer een minimum te zijn terwijl de ondubbelzinnig bepaalde functies $\bar{\bar{u}}$ voor welke dit minimum wordt bereikt, kunnen worden geschreven in den vorm

$$\bar{\bar{u}} = a(\lambda - \lambda_1)^2 \psi_1'' + a^2(\lambda - \lambda_1)\psi_2' + a^3\psi_3 + \ldots . \quad (34.3)$$

Termen van den vierden en hoogeren graad in $\lambda - \lambda_1$ en $a$ hebben hier geen beteekenis daar zij in het minimum een bijdrage leveren welker term van den laagsten graad die van den zevenden graad is, terwijl (34. 3) ook in de verwaarloosde termen van (34. 2) termen van den zevenden graad in $\lambda - \lambda_1$ en $a$ oplevert. De functies $\psi_1''$, $\psi_2'$ en $\psi_3$ zijn onderscheidenlijk de oplossingen van de vergelijkingen

$$P_{11}[\bar{\bar{u}}, \zeta] + P_{11}''[u_1, \zeta] + P_{11}'[\varphi_1', \zeta] + \\ - \frac{2P_2''[u_1] + P_{11}'[\varphi_1', u_1]}{2T_2[u_1]} T_{11}[u_1, \zeta] = 0\,;\; T_{11}[u_1, \bar{\bar{u}}] = 0. \quad (34.4)$$

$$P_{11}[\bar{\bar{u}}, \zeta] + P_{21}'[u_1, \zeta] + P_{111}[u_1, \varphi_1', \zeta] + P_{11}'[\varphi_2, \zeta] + \\ - \frac{3P_3'[u_1] + 2P_{21}[u_1, \varphi_1'] + P_{11}'[\varphi_2, u_1]}{2T_2[u_1]} T_{11}[u_1, \zeta] = 0\,; \\ T_{11}[u_1, \bar{\bar{u}}] = 0. \quad (34.5)$$

$$P_{11}[\bar{\bar{u}}, \zeta] + P_{31}[u_1, \zeta] + P_{111}[u_1, \varphi_2, \zeta] + \\ - \frac{4P_4[u_1] + 2P_{21}[u_1, \varphi_2]}{2T_2[u_1]} T_{11}[u_1, \zeta] = 0\,;\; T_{11}[u_1, \bar{\bar{u}}] = 0. \quad (34.6)$$

Door vergelijking van (34. 6) met (27. 13) blijkt dat de identiteit der functies $\varphi_2$ en $\varphi^{(2)}$ voor $A_3 = 0$ ook de identiteit van de functies $\psi_3$ met de in par. 271 ingevoerde functies $\psi^{(3)}$ ten gevolge heeft.

Met invoering van de afkortingen



$$\left.\begin{aligned}
&P_2'''[u_1] + P_{11}''[u_1, \varphi_1'] + P_2'[\varphi_1'] = A_2''',\\
&P_2''''[u_1] + P_{11}'''[u_1, \varphi_1'] + P_2''[\varphi_1'] - P_2[\psi_1''] = A_2'''',\\
&P_3''[u_1] + P_{21}'[u_1, \varphi_1'] + P_{12}[u_1, \varphi_1'] + P_{11}''[u_1, \varphi_2] + \\
&\quad + P_{11}'[\varphi_1', \varphi_2] = A_3'',\\
&P_3'''[u_1] + P_{21}''[u_1, \varphi_1'] + P_{12}'[u_1, \varphi_1'] + P_3[\varphi_1'] + \\
&\quad + P_{11}'''[u_1, \varphi_2] + P_{11}''[\varphi_1', \varphi_2] - P_{11}[\psi_1'', \psi_2'] = A_3''',\\
&P_4'[u_1] + P_{31}[u_1, \varphi_1'] + P_{21}'[u_1, \varphi_2] + P_{111}[u_1, \varphi_1', \varphi_2] + \\
&\quad + P_2'[\varphi_2] = A_4',\\
&P_4''[u_1] + P_{31}'[u_1, \varphi_1'] + P_{22}[u_1, \varphi_1'] + P_{21}''[u_1, \varphi_2] + \\
&\quad + P_{111}'[u_1, \varphi_1', \varphi_2] + P_{21}[\varphi_1', \varphi_2] + P_2''[\varphi_2] + \\
&\quad - P_{11}[\psi_1'', \psi_3] - P_2[\psi_2'] = A_4'',\\
&P_5[u_1] + P_{31}[u_1, \varphi_2] + P_{12}[u_1, \varphi_2] = A_5,\\
&P_5'[u_1] + P_{41}[u_1, \varphi_1'] + P_{31}'[u_1, \varphi_2] + P_{211}[u_1, \varphi_1', \varphi_2] + \\
&\quad + P_{12}'[u_1, \varphi_2] + P_{12}[\varphi_1', \varphi_2] - P_{11}[\psi_2', \psi_3] = A_5',\\
&P_6[u_1] + P_{41}[u_1, \varphi_2] + P_{22}[u_1, \varphi_2] + P_3[\varphi_2] - P_2[\psi_3] = A_6
\end{aligned}\right\} \quad (34.7)$$

bedraagt het minimum van de benadering van (34. 2)

$$\bar{P}^{\lambda}(a) = (\lambda - \lambda_1)A_2'a^2 + (\lambda - \lambda_1)^2 A_2''a^2 + (\lambda - \lambda_1)^3 A_2'''a^2 + \\ + (\lambda - \lambda_1)^4 A_2''''a^2 + A_3a^3 + (\lambda - \lambda_1)A_3'a^3 + \\ + (\lambda - \lambda_1)^2 A_3''a^3 + (\lambda - \lambda_1)^3 A_3'''a^3 + A_4a^4 + (\lambda - \lambda_1)A_4'a^4 + \\ + (\lambda - \lambda_1)^2 A_4''a^4 + A_5a^5 + (\lambda - \lambda_1)A_5'a^5 + A_6a^6\,. \quad (34.8)$$

Hierin zijn termen van hoogeren graad dan den zesden consequent buiten beschouwing gelaten.

Uit (34. 7) en (34. 8) blijkt nog dat een verbetering van (33. 11) door inachtneming van de vijfdegraadstermen reeds mogelijk is zonder kennis der functies $\psi_1''$, $\psi_2'$ en $\psi_3$. Verder zijn indien $A_3$ nul is de coëfficiënten $A_5$ en $A_6$ identiek met de in par. 271 ingevoerde grootheden (27. 5) en (27. 18), die achtereenvolgens beslissen over de stabiliteit in den kniktoestand indien zoowel $A_3$ als $A_4$ nul is.

Het behoeft geen betoog dat het beschreven verbeteringsproces kan worden voortgezet door voor de functies $\bar{\bar{u}}$ te schrijven

$$\bar{\bar{u}} = a(\lambda - \lambda_1)^2 \psi_1'' + a^2(\lambda - \lambda_1)\psi_2' + a^3\psi_3 + \bar{\bar{\bar{u}}} \text{ met } T_{11}[u_1, \bar{\bar{\bar{u}}}] = 0.$$

Aldus voortgaande wordt voor de stationnaire waarde van (32. 4)

een machtreeksontwikkeling verkregen voor kleine waarden van $\lambda - \lambda_1$ en $a$. Omtrent het convergentiegebied van deze reeks kan in het algemeen natuurlijk niets worden gezegd.

## 35 – DE EVENWICHTSTOESTANDEN

In deze paragraaf worden de stationnaire waarden bepaald van $\overline{P}^{\lambda}(a)$ als functie van $a$, zooals deze door de uitdrukkingen (33. 11) en (34. 8) onderscheidenlijk in eerste en tweede benadering wordt gegeven. De bijbehoorende waarden van $a$ en de bij $a$ behoorende functies $\bar{u}$ (33. 12), resp. $\bar{\bar{u}}$ (34. 3) leveren dan een benadering voor de verplaatsingen in de evenwichtstoestanden. Ook het onderzoek naar de stabiliteit levert geen moeilijkheden op. De uitdrukkingen (33. 11) en (34. 8) zijn namelijk beide een minimum. Is nu de stationnaire waarde van $\overline{P}^{\lambda}(a)$ als functie van $a$ ook weer een minimum dan bezit de benadering der energie (32. 4) of (34. 2) ook een minimum vergeleken met gevarieerde functies $\bar{u}$ of $\bar{\bar{u}}$ en gelijktijdig gevarieerde waarden van $a$; het evenwicht in den bijbehoorenden verplaatsingstoestand is dan stabiel. Omgekeerd bezit de benadering der energie geen minimum indien de stationnaire waarde van $\overline{P}^{\lambda}(a)$ geen minimum is, zoodat het evenwicht dan instabiel is.

Voor het verkrijgen van een eerste benadering kunnen de uitdrukkingen (33. 11) en (34. 8), die onderscheidenlijk een eerste en tweede benadering vormen van de in par. 34 bedoelde reeksontwikkeling, nog belangrijk worden vereenvoudigd. Hiertoe wordt opgemerkt dat het evenwicht in den grondtoestand stabiel is voor $\lambda < \lambda_1$ zoodat moet gelden

$$P_2^{\lambda}[u] = P_2[u] + (\lambda - \lambda_1)\, P_2'[u] + \ldots . \geqq 0,$$

waaruit wegens $P_2[u_1] = 0$ volgt

$$(\lambda - \lambda_1)\, P_2'[u_1] + \ldots . \geqq 0;$$

hieraan kan voor $\lambda < \lambda_1$ slechts worden voldaan indien de constante $A_2'$ (33. 10) nimmer positief is. Bij de tot dusver beschouwde toepassingen komt het grensgeval dat $A_2'$ nul is niet voor zoodat voor het volgende een negatieve waarde van $A_2'$ wordt aangenomen. Voor kleine absolute waarden van $\lambda - \lambda_1$ en $a$ zijn dan alle termen die ten minste één factor $\lambda - \lambda_1$ bevatten absoluut genomen klein ten opzichte van de absolute waarde van den eersten term $(\lambda - \lambda_1) A_2' a^2$ zoodat zij in eerste benadering mogen worden verwaarloosd. Van de termen die geen factor $\lambda - \lambda_1$ bevatten is voorts de term van den laagsten graad in $a$ overheerschend. Zij dit de term $A_n a^n$, in welk geval de stabiliteit van den kniktoestand wordt beslist door de grootheid $A_n$, dan leiden (33. 11) en (34. 8) tot de vereenvoudigde uitdrukking



$$\overline{P}^{\lambda}(a) = (\lambda - \lambda_1)\, A_2' a^2 + A_n a^n. \qquad n \geqq 3. \tag{35. 1}$$

Voor de opstelling van (35. 1) kan nu een eenvoudig voorschrift worden gegeven. Met behulp van hoofdstuk 2 wordt de stabiliteit van den kniktoestand onderzocht. De grootheid $A_n$ die over deze stabiliteit beslist, treedt in (35. 1) op als coëfficiënt van $a^n$. De berekening van $A_2'$, welke coëfficiënt door (33. 10) is bepaald, levert geen moeilijkheid op.

De evenwichtstoestanden zijn gekenmerkt door stationnaire waarden van (35. 1), d. w. z. door

$$\frac{d\overline{P}^{\lambda}(a)}{da} = 2(\lambda - \lambda_1)\, A_2' a + n A_n a^{n-1} = 0. \tag{35. 2}$$

De stabiliteit wordt beheerscht door de tweede afgeleide van (35. 1)

$$\frac{d^2\overline{P}^{\lambda}(a)}{da^2} = 2(\lambda - \lambda_1)\, A_2' + n(n-1)\, A_n a^{n-2}. \tag{35. 3}$$

Aan (35. 2) wordt voldaan door $a = 0$ waarmede ook de functies $\bar{u}$ en $\bar{\bar{u}}$ nul worden. Deze oplossing levert den reeds bekenden grondtoestand. Hiervoor is de tweede afgeleide (35. 3) positief voor $\lambda < \lambda_1$ en negatief voor $\lambda > \lambda_1$ zoodat het evenwicht in den grondtoestand stabiel of instabiel is naar gelang $\lambda$ kleiner of grooter is dan $\lambda_1$, in overeenstemming met hetgeen reeds bekend was. De overige oplossingen van (35. 2), die de naburige evenwichtstoestanden bepalen, moeten voldoen aan

$$a^{n-2} = -\frac{2}{n}(\lambda - \lambda_1)\frac{A_2'}{A_n}. \tag{35. 4}$$

Door substitutie in (35. 3) volgt voor de tweede afgeleide van $\overline{P}^{\lambda}(a)$ in deze toestanden

$$\frac{d^2\overline{P}^{\lambda}}{da^2} = -2(n-2)(\lambda - \lambda_1)\, A_2'. \tag{35. 5}$$

Mitsdien is een naburige evenwichtstoestand voor $\lambda > \lambda_1$ steeds stabiel, voor $\lambda < \lambda_1$ steeds instabiel.

Voor een discussie der mogelijke naburige evenwichtstoestanden moet onderscheid worden gemaakt tusschen oneven en even waarden van $n$ en in het laatste geval bovendien tusschen negatieve en positieve waarden van $A_n$. Bij *oneven* waarden van $n$ kan $A_n$ steeds positief worden gesteld aangezien blijkens (35. 4)en (35. 5) met een bij $A_n$ behoorende evenwichtswaarde $a$ een bij $-A_n$ behoorende evenwichtswaarde $-a$ correspondeert met dezelfde

stabiliteit. De vergelijking (35. 4) bezit dan voor positieve en negatieve waarden van $\lambda - \lambda_1$ een door

$$a = \left(-\frac{2}{n}\frac{A_2'}{A_n}\right)^{\frac{1}{n-2}} (\lambda - \lambda_1)^{\frac{1}{n-2}} \qquad (35.\ 6)$$

bepaalde reëele oplossing, die blijkens (35. 5) stabiel is voor $\lambda > \lambda_1$ en instabiel voor $\lambda < \lambda_1$.

Bij *even* waarden van $n$ bezit (35. 4) reëele oplossingen alleen voor negatieve waarden van $\lambda - \lambda_1$ of alleen voor positieve waarden van $\lambda - \lambda_1$ naar gelang $A_n$ negatief of positief is. Deze oplossingen worden onderscheidenlijk bepaald door

$$a = \pm\left(\frac{2}{n}\frac{A_2'}{A_n}\right)^{\frac{1}{n-2}} (\lambda_1 - \lambda)^{\frac{1}{n-2}} \text{ en } a = \pm\left(-\frac{2}{n}\frac{A_2'}{A_n}\right)^{\frac{1}{n-2}} (\lambda - \lambda_1)^{\frac{1}{n-2}}. \qquad (35.\ 7)$$

Blijkens (35. 5) zijn eerstgenoemde oplossingen instabiel, laatstgenoemde stabiel.

Volgens de beschouwingen in hoofdstuk 2 is het evenwicht in den kniktoestand instabiel indien de beslissing wordt geleverd door een grootheid $A_n$ van oneven orde of door een negatieve grootheid $A_n$ van even orde, stabiel indien deze beslissing wordt geleverd door een positieve grootheid van even orde. De verkregen resultaten kunnen dus als volgt worden samengevat. Is het evenwicht in den kniktoestand instabiel waarbij de beslissing wordt geleverd door een grootheid van oneven orde ($A_3$, $A_5$ enz.) dan bestaan er in de omgeving van den kniklast naburige evenwichtstoestanden zoowel voor grootere als voor kleinere belastingen dan de knikbelasting; hiervan zijn die bij grootere belastingen stabiel, die bij kleinere belastingen instabiel. Is het evenwicht in den kniktoestand instabiel waarbij de beslissing wordt geleverd door een grootheid van even orde ($A_4$, $A_6$ enz.) dan bestaan er in de omgeving van de knikbelasting naburige evenwichtstoestanden alleen voor kleinere belastingen; deze evenwichtstoestanden zijn instabiel. Is het evenwicht in den kniktoestand stabiel, in welk geval de beslissing steeds wordt geleverd door een grootheid van even orde, dan bestaan er in de omgeving van de knikbelasting naburige evenwichtstoestanden alleen voor grootere belastingen; deze evenwichtstoestanden zijn stabiel.

Het door de vergelijkingen (35. 6) en (35. 7) gegeven verband tusschen den parameter $a$, die een maatstaf vormt voor de verplaatsingen uit den grondtoestand, en den belastingparameter $\lambda$ kan door een diagram worden geïllustreerd. Fig. 1*a* geeft het diagram voor een positieve waarde van $A_3$ (het diagram voor de negatieve waarde wordt hieruit verkregen door spiegeling ten



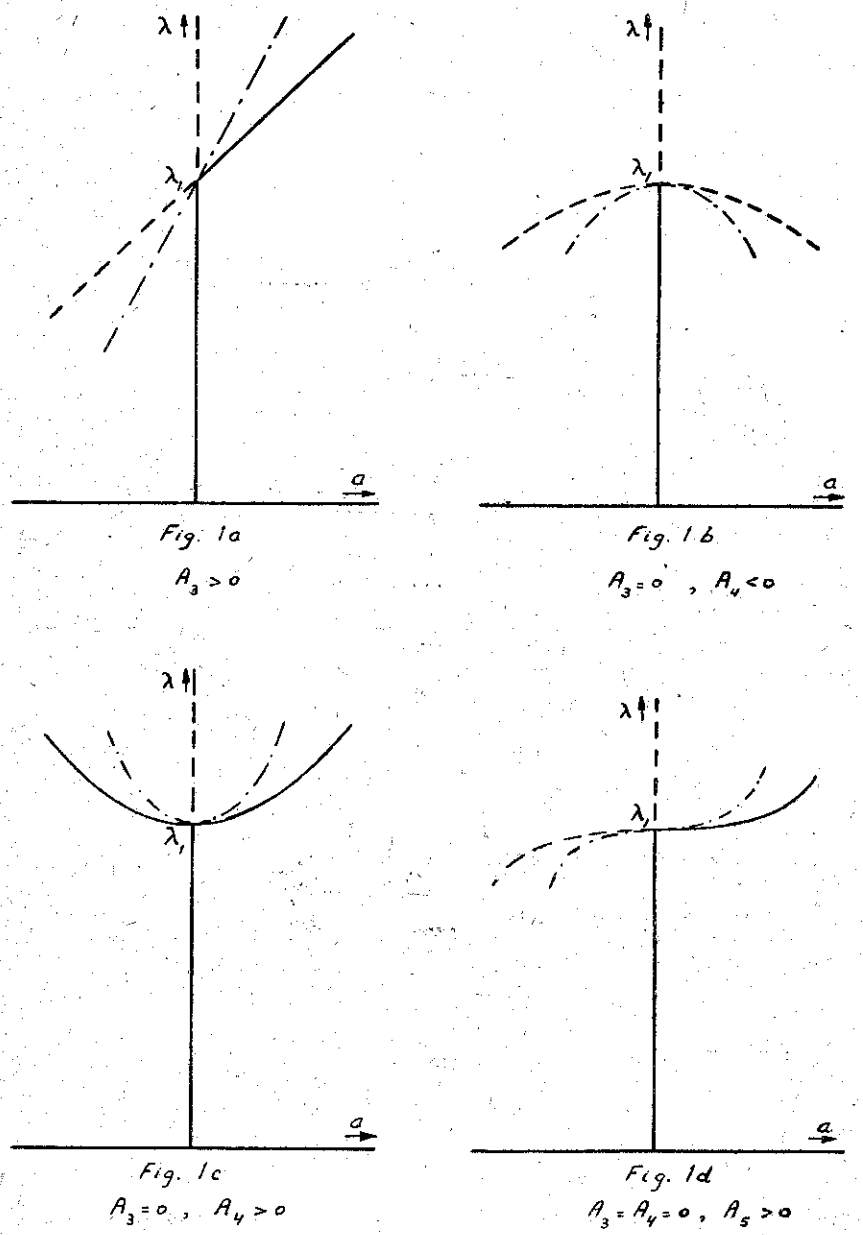



Fig. 1.

opzichte van de $\lambda$-as), fig. 1*b* en fig. 1*c* geven voor $A_3 = 0$ onderscheidenlijk het bij negatieve en het bij positieve waarde van $A_4$ behoorende diagram; tenslotte geeft fig. 1*d* het voor het geval $A_3 = A_4 = 0$ bij een positieve waarde van $A_5$ behoorende diagram. In deze diagrammen zijn de stabiele evenwichtstoestanden door getrokken lijnen, de instabiele evenwichtstoestanden door gestippelde lijnen weergegeven terwijl de scheidingslijn tusschen de mogelijke stabiele en instabiele toestanden, die wordt verkregen door (35. 3) nul te stellen, door een streep-stip lijn is aangegeven.

Voor den kniklast bestaan er infinitesimaal van den grondtoestand afwijkende evenwichtstoestanden die worden bepaald door (32. 2) voor infinitesimale waarden van $a$. Wordt deze oplossing als een benadering voor kleine doch eindige waarden van $a$ aangezien dan wordt zij in het diagram afgebeeld door de rechte $\lambda = \lambda_1$. Uit (35. 4) volgt dat deze benadering de raaklijn bepaalt aan de $\lambda - a$ kromme der naburige evenwichtstoestanden in het punt $\lambda = \lambda_1$, $a = 0$ indien $n > 3$ is, zoodat in deze gevallen de bedoelde benadering inderdaad reeds eenig inzicht verschaft in den aard der naburige evenwichtstoestanden. Voor $A_3 \neq 0$ is zij echter niet in staat het werkelijk gedrag ook maar bij benadering te beschrijven (zie ook fig. 1*a*). Opgemerkt wordt dat ook het gebruik van de benadering (33. 11) voor $A_3 = A_4 = 0$ tot de rechte $\lambda = \lambda_1$ in het $\lambda - a$ diagram leidt; immers bevat dan de afgeleide van (33. 11) naar $a$ den factor $\lambda - \lambda_1$. Dientengevolge is het voor het verkrijgen van een beter inzicht in het werkelijk gedrag dan noodzakelijk de verbeterde benadering (34. 8) in beschouwing te nemen of, wat op hetzelfde neerkomt, het stabiliteitsonderzoek van den kniktoestand voort te zetten tot een van nul verschillende grootheid $A_n$ wordt gevonden.

De voorgaande beschouwingen steunen op de vereenvoudigde uitdrukking (35. 1) voor $\overline{P}^{\lambda}(a)$. In principe kan een verbetering der benadering gemakkelijk worden verkregen door gebruik van de onverkorte uitdrukkingen (33. 11), resp. (34. 8). Dit wordt toegelicht door toepassing van de evenwichtsvoorwaarde op (33. 11) voor het geval $A_3 \neq 0$

$$\frac{d\overline{P}^{\lambda}(a)}{da} = 2(\lambda - \lambda_1) A_2' a + 2(\lambda - \lambda_1)^2 A_2'' a + 3A_3 a^2 + 3(\lambda - \lambda_1) A_3' a^2 + 4A_4 a^3 = 0;$$

afgezien van den trivialen grondtoestand volgt hieruit

$$a = -\frac{3A_3 + 3(\lambda - \lambda_1) A_3'}{8A_4} \pm \sqrt{\frac{9[A_3 + (\lambda - \lambda_1) A_3']^2}{64 A_4^2} - \frac{(\lambda - \lambda_1) A_2' + (\lambda - \lambda_1)^2 A_2''}{2A_4}} =$$



$$= -\frac{3A_3}{8A_4}\left\{1 + (\lambda - \lambda_1)\frac{A_3'}{A_3} \mp \sqrt{\left[1 + (\lambda - \lambda_1)\frac{A_3'}{A_3}\right]^2 - \frac{32}{9}(\lambda - \lambda_1)\frac{A_2' A_4}{A_3^2} - \frac{32}{9}(\lambda - \lambda_1)^2 \frac{A_2'' A_4}{A_3^2}}\right\}.$$

De tweede wortel nadert tot $-\frac{3}{4}\frac{A_3}{A_4}$ indien $\lambda$ tot $\lambda_1$ nadert; hij is in de omgeving van den kniklast niet klein en kan derhalve buiten beschouwing blijven. Ontwikkeling van den eersten wortel naar $\lambda - \lambda_1$ geeft

$$a = -\frac{2}{3}\frac{A_2'}{A_3}(\lambda - \lambda_1) + \left(\frac{2}{3}\frac{A_2' A_3'}{A_3^2} - \frac{2}{3}\frac{A_2''}{A_3} - \frac{16}{27}\frac{A_2'^2 A_4}{A_3^3}\right)(\lambda - \lambda_1)^2 + \ldots . \quad (35.\ 8)$$

De termen van den derden en hoogeren graad in deze ontwikkeling kunnen buiten beschouwing blijven, daar zij in (33. 11) slechts bijdragen opleveren van ten minste den vijfden graad; zulke bijdragen zijn blijkens de verbeterde benadering (34. 8) reeds verwaarloosd.

De stabiliteit van de door (35. 8) bepaalde evenwichtstoestanden wordt beheerscht door de tweede afgeleide van (33. 11). Na substitutie van de door (35. 8) gegeven waarde van $a$ bedraagt deze

$$\frac{d^2\overline{P}^{\lambda}}{da^2} = -2A_2'(\lambda - \lambda_1) - \left(2A_2'' - \frac{16}{9}\frac{A_2'^2 A_4}{A_3^2}\right)(\lambda - \lambda_1)^2.$$

Uit (35. 8) blijkt dat de eerste benadering (35. 6) de raaklijn bepaalt aan de kromme die het verband tusschen $\lambda$ en $a$ voorstelt voor den naburigen evenwichtstoestand. Uit (35. 9) blijkt vervolgens dat voor niet te groote waarden van $|\lambda - \lambda_1|$ de uit (35. 5) getrokken stabiliteitsconclusies geldig blijven. De verbetering laat het karakter der eerste benadering in de omgeving van den kniklast derhalve onaangetast. Voor de gevallen waarin $A_3$ nul is, gelden overeenkomstige conclusies. Dientengevolge kan althans voor een qualitatief onderzoek van het elastisch gedrag in de omgeving van den kniktoestand worden volstaan met de uit (35. 1) volgende eerste benadering. Voor deze beperking spreekt nog een andere grond. Zooals reeds in par. 34 werd opgemerkt is het convergentiegebied van de in opeenvolgende benaderingen voor $\overline{P}^{\lambda}(a)$ verkregen reeksontwikkeling onbekend. Door het in rekening brengen van een grooter aantal termen dezer ontwikkeling kan het geldigheidsgebied der benaderingsoplossing derhalve in het algemeen niet naar believen worden uitgebreid. Deze ver-

betering heeft eveneens slechts beteekenis voor een van geval tot geval verschillend gebied van $\lambda$-waarden in de omgeving van den kniklast en, zooals reeds gezegd, in deze omgeving van den kniklast wordt het gedrag in hoofdzaak reeds beschreven door de eerste benadering.

## 36 – BIJZONDERE GEVALLEN

De voorgaande beschouwingen steunen op de onderstelling dat voor den kniktoestand de oplossing $\omega_2$ van het minimumprobleem (24. 4) positief is. Thans zal worden onderzocht welke wijzigingen zij moeten ondergaan indien aan deze voorwaarde niet wordt voldaan; hierbij wordt voorloopig $\omega_3$ positief gesteld.

De algemeene oplossing van de variatievergelijking (24. 14) voor het neutrale evenwicht luidt dan

$$u = au_1 + bv_1, \tag{36. 1}$$

waarin ten behoeve van een symmetrischer notatie $u^{(2)} = v_1$ is geschreven. Bezat (24. 14) immers nog van (36. 1) verschillende oplossingen dan zou hiervoor steeds kunnen worden geschreven

$$u = au_1 + bv_1 + \bar{u} \text{ met } T_{11}[u_1, \bar{u}] = T_{11}[v_1, \bar{u}] = 0. \tag{36. 2}$$

Substitutie in (24. 14) leidt tot de volgende voorwaarden voor $\bar{u}$

$$P_{11}[\bar{u}, \zeta] = 0,\ T_{11}[u_1, \bar{u}] = T_{11}[v_1, \bar{u}] = 0$$

welke voor $\zeta = \bar{u}$ tot een tegenstrijdigheid met de onderstelling $\omega_3 > 0$ voeren. Op grond van overeenkomstige overwegingen als in par. 32 worden de verplaatsingen voor de te onderzoeken evenwichtstoestanden in de omgeving van den kniktoestand in den vorm (36. 2) geschreven. Substitutie in (32. 1) geeft met gebruik van de uit $\omega_1 = \omega_2 = 0$ voortvloeiende betrekkingen na ontwikkeling en rangschikking volgens opklimmenden graad in $\bar{u}$

$$\begin{aligned}
P^\lambda[u] = {} & a^2\left\{(\lambda-\lambda_1)\,P_2'[u_1] + (\lambda-\lambda_1)^2\,P_2''[u_1] + \ldots.\right\} + \\
& + ab\left\{(\lambda-\lambda_1)\,P_{11}'[u_1, v_1] + (\lambda-\lambda_1)^2\,P_{11}''[u_1, v_1] + \ldots.\right\} + \\
& + b^2\left\{(\lambda-\lambda_1)\,P_2'[v_1] + (\lambda-\lambda_1)^2\,P_2''[v_1] + \ldots.\right\} + \\
& + a^3\left\{P_3[u_1] + (\lambda-\lambda_1)\,P_3'[u_1] + \ldots\right\} + a^2b\left\{P_{21}[u_1, v_1] + \ldots.\right\} + \\
& + ab^2\left\{P_{12}[u_1, v_1] + \ldots.\right\} + b^3\left\{P_3[v_1] + \ldots.\right\} + \\
& + a^4\left\{P_4[u_1] + \ldots.\right\} + a^3b\left\{P_{31}[u_1, v_1] + \ldots.\right\} +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + a^2b^2\left\{P_{22}[u_1, v_1] + \ldots.\right\} + ab^3\left\{P_{13}[u_1, v_1] + \ldots.\right\} + \\
& + b^4\left\{P_4[v_1] + \ldots.\right\} + \ldots. + \\
& + a\left\{(\lambda-\lambda_1)\,P_{11}'[u_1, \bar{u}] + (\lambda-\lambda_1)^2\,P_{11}''[u_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + \\
& + b\left\{(\lambda-\lambda_1)\,P_{11}'[v_1, \bar{u}] + (\lambda-\lambda_1)^2\,P_{11}''[v_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + \\
& + a^2\left\{P_{21}[u_1, \bar{u}] + (\lambda-\lambda_1)\,P_{21}'[u_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + \\
& + ab\left\{P_{111}[u_1, v_1, \bar{u}] + (\lambda-\lambda_1)\,P_{111}'[u_1, v_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + \\
& + b^2\left\{P_{21}[v_1, \bar{u}] + (\lambda-\lambda_1)\,P_{21}'[v_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + \\
& + a^3\left\{P_{31}[u_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + a^2b\left\{P_{211}[u_1, v_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + \\
& + ab^2\left\{P_{121}[u_1, v_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + b^3\left\{P_{31}[v_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + \\
& + \ldots. + P_2[\bar{u}] + (\lambda-\lambda_1)\,P_2'[\bar{u}] + \ldots. + \\
& + a\left\{P_{12}[u_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + b\left\{P_{12}[v_1, \bar{u}] + \ldots.\right\} + \\
& + \ldots. + P_3[\bar{u}] + \ldots.
\end{aligned} \tag{36. 3}$$

Voor de toepassing van de evenwichtsvoorwaarde worden analoog met par. 32 eerst de stationnaire waarden van (36. 3) bepaald bij constante waarden van $a$ en $b$; vervolgens worden van de aldus verkregen waarden $\overline{P}^\lambda(a, b)$ als functie van $a$ en $b$ wederom de stationnaire waarden bepaald. Hierbij wordt de verwaarloozing van de na $P_2[\bar{u}]$ volgende termen in (36. 3) op dezelfde wijze gemotiveerd als in par. 32. De aldus benaderde energie blijkt bij constante waarden van $a$ en $b$ weer één stationnaire waarde te bezitten en wel een minimum. De functies $\bar{u}$ waarvoor dit minimum wordt bereikt kunnen thans worden geschreven in den vorm

$$\bar{u} = a(\lambda-\lambda_1)\,\varphi_{10}' + b(\lambda-\lambda_1)\,\varphi_{01}' + a^2\varphi_{20} + ab\varphi_{11} + b^2\varphi_{02} + \ldots. \tag{36. 4}$$

waarin $\varphi_{10}'$, $\varphi_{01}'$, $\varphi_{20}$, $\varphi_{11}$ en $\varphi_{02}$ onderscheidenlijk de oplossingen zijn van de vergelijkingen

$$
\left.\begin{aligned}
&P_{11}[\bar{u},\zeta]+P_{11}'[u_1,\zeta]-\frac{2P_2'[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta]+\\
&\quad-\frac{P_{11}'[u_1,v_1]}{2T_2[v_1]}T_{11}[v_1,\zeta]=0\,;\ T_{11}[u_1,\bar{u}]=T_{11}[v_1,\bar{u}]=0,\\
&P_{11}[\bar{u},\zeta]+P_{11}'[v_1,\zeta]-\frac{P_{11}'[u_1,v_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta]+\\
&\quad-\frac{2P_2'[v_1]}{2T_2[v_1]}T_{11}[v_1,\zeta]=0\,;\ T_{11}[u_1,\bar{u}]=T_{11}[v_1,\bar{u}]=0,\\
&P_{11}[\bar{u},\zeta]+P_{21}[u_1,\zeta]-\frac{3P_3[u_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta]+\\
&\quad-\frac{P_{21}[u_1,v_1]}{2T_2[v_1]}T_{11}[v_1,\zeta]=0\,;\ T_{11}[u_1,\bar{u}]=T_{11}[v_1,\bar{u}]=0,\\
&P_{11}[\bar{u},\zeta]+P_{111}[u_1,v_1,\zeta]-\frac{2P_{21}[u_1,v_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta]+\\
&\quad-\frac{2P_{12}[u_1,v_1]}{2T_2[v_1]}T_{11}[v_1,\zeta]=0\,;\ T_{11}[u_1,\bar{u}]=T_{11}[v_1,\bar{u}]=0,\\
&P_{11}[\bar{u},\zeta]+P_{21}[v_1,\zeta]-\frac{P_{12}[u_1,v_1]}{2T_2[u_1]}T_{11}[u_1,\zeta]+\\
&\quad-\frac{3P_3[v_1]}{2T_2[v_1]}T_{11}[v_1,\zeta]=0\,;\ T_{11}[u_1,\bar{u}]=T_{11}[v_1,\bar{u}]=0.
\end{aligned}\right\}\quad(36.\,5)
$$

Hierbij zijn bijdragen in (36. 4) met factoren van den derden en hoogeren graad in $\lambda-\lambda_1$, $a$ en $b$ reeds weggelaten, daar zij evenmin als de overeenkomstige bijdragen in (33. 5) voor de onderhavige benadering beteekenis hebben. De afleiding van de vergelijkingen (36. 5) verloopt geheel analoog met par. 272 en par. 33 weshalve zij hier achterwege kan blijven. Door vergelijking van de laatste drie vergelijkingen (36. 5) met (27. 33) blijken de in par. 272 gedefinieerde functies $\varphi^{(20)}$, $\varphi^{(11)}$ en $\varphi^{(02)}$ indien aan de voorwaarden (27. 24) is voldaan overeen te stemmen met de hier ingevoerde functies $\varphi_{20}$, $\varphi_{11}$ en $\varphi_{02}$. Ook de berekening van de benadering der stationnaire waarde $\overline{P}^{\lambda}(a,b)$ geschiedt analoog met het voorgaande. Wordt ter afkorting gesteld

$$
\left.\begin{aligned}
&P_2'[u_1]=C_{20}',\quad P_{11}'[u_1,v_1]=C_{11}',\quad P_2'[v_1]=C_{02}',\\
&P_2''[u_1]-P_2[\varphi_{10}']=C_{20}'',\ P_{11}''[u_1,v_1]-P_{11}[\varphi_{10}',\varphi_{01}']=C_{11}'',\\
&P_2''[v_1]-P_2[\varphi_{01}']=C_{02}'',\\
&P_3[u_1]=C_{30},\ P_{21}[u_1,v_1]=C_{21},\ P_{12}[u_1,v_1]=C_{12},\ P_3[v_1]=C_{03},\\
&P_3'[u_1]-P_{11}[\varphi_{10}',\varphi_{20}]=C_{30}',\\
&P_{21}'[u_1,v_1]-P_{11}[\varphi_{10}',\varphi_{11}]-P_{11}[\varphi_{01}',\varphi_{20}]=C_{21}',
\end{aligned}\right\}\quad(36.\,6)
$$



$$
\left.\begin{aligned}
&P_{12}'[u_1,v_1]-P_{11}[\varphi_{10}',\varphi_{02}]-P_{11}[\varphi_{01}',\varphi_{11}]=C_{12}',\\
&P_3'[v_1]-P_{11}[\varphi_{01}',\varphi_{02}]=C_{03}',\\
&P_4[u_1]-P_2[\varphi_{20}]=C_{40},\ P_{31}[u_1,v_1]-P_{11}[\varphi_{20},\varphi_{11}]=C_{31},\\
&P_{22}[u_1,v_1]-P_2[\varphi_{11}]-P_{11}[\varphi_{20},\varphi_{02}]=C_{22},\\
&P_{13}[u_1,v_1]-P_{11}[\varphi_{11},\varphi_{02}]=C_{13},\ P_4[v_1]-P_2[\varphi_{02}]=C_{04}
\end{aligned}\right\}\quad(36.\,6)
$$

dan luidt deze benadering

$$
\begin{aligned}
\overline{P}^{\lambda}(a,b)&=(\lambda-\lambda_1)(C_{20}'a^2+C_{11}'ab+C_{02}'b^2)+\\
&\quad+(\lambda-\lambda_1)^2(C_{20}''a^2+C_{11}''ab+C_{02}''b^2)+\\
&\quad+C_{30}a^3+C_{21}a^2b+C_{12}ab^2+C_{03}b^3+\\
&\quad+(\lambda-\lambda_1)(C_{30}'a^3+C_{21}'a^2b+C_{12}'ab^2+C_{03}'b^3)+\\
&\quad+C_{40}a^4+C_{31}a^3b+C_{22}a^2b^2+C_{13}ab^3+C_{04}b^4.
\end{aligned}\qquad(36.\,7)
$$

Evenmin als in par. 33 heeft het hier beteekenis de termen van den vijfden en hoogeren graad in $\lambda-\lambda_1$, $a$ en $b$ mede in beschouwing te nemen.

Uit (36. 6) blijkt dat de tweedegraadstermen in $a$ en $b$ van (36. 7) die één factor $\lambda-\lambda_1$ bevatten, en de derdegraadstermen die geen factor $\lambda-\lambda_1$ bevatten uitsluitend afhangen van de eigenfuncties $u_1$ en $v_1$. Is verder aan de voorwaarden (27. 24)

$$C_{30}=C_{21}=C_{12}=C_{03}=0$$

voldaan dan zijn de vierdegraadstermen in $a$ en $b$ van (36. 7) identiek met den over de stabiliteit in den kniktoestand beslissenden vorm (27. 37).

Het algemeene geval

$$\omega_2=\omega_3=\ldots=\omega_{h-1}=0,\ \omega_h>0$$

kan op overeenkomstige wijze worden onderzocht door te stellen

$$u=\sum_{j=1}^{h-1}a_ju_j+\bar{u}\ \text{met}\ T_{11}[u_j,\bar{u}]=0.\quad j=1,2,\ldots.h-1.\qquad(36.\,8)$$

Voor de in dit geval met (36. 7) correspondeerende benadering kan worden geschreven

$$
\begin{aligned}
\overline{P}^{\lambda}(a_j)&=(\lambda-\lambda_1)\,\overline{P}_2'(a_j)+(\lambda-\lambda_1)^2\overline{P}_2''(a_j)+\overline{P}_3(a_j)+\\
&\quad+(\lambda-\lambda_1)\,\overline{P}_3'(a_j)+\overline{P}_4(a_j).
\end{aligned}\qquad(36.\,9)
$$

Hierin zijn $\overline{P}_2'$ en $\overline{P}_3$ geheel bepaald door de $h-1$ eigenfuncties $u_j$

$$\overline{P}_2'(a_j)=P_2'\left[\sum_{\alpha=1}^{h-1}a_\alpha u_\alpha\right]=\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{h-1}\sum_{\beta=1}^{h-1}a_\alpha a_\beta P_{11}'[u_\alpha,u_\beta],\qquad(36.\,10)$$

$$\overline{P}_3(a_j) = P_3\left[\sum_{\alpha=1}^{h-1} a_\alpha u_\alpha\right] = \tfrac{1}{6}\sum_{\alpha=1}^{h-1}\sum_{\beta=1}^{h-1}\sum_{\gamma=1}^{h-1} a_\alpha a_\beta a_\gamma P_{111}[u_\alpha, u_\beta, u_\gamma]; \quad (36.11)$$

voor de berekening der overige termen van (36. 9) is de oplossing vereischt van een analoog met (36. 5) gebouwd systeem vergelijkingen. Is (36. 11) identiek nul, welke voorwaarde voor het onderhavige geval correspondeert met de voorwaarden (27. 24) in het geval $\omega_3 > 0$, dan is $\overline{P}_4(a_j)$ weer identiek met den vorm die beslist over de stabiliteit op de stabiliteitsgrens. De vorm (36. 10) kan nimmer positieve waarden aannemen daar anders analoog met par. 35 zou kunnen worden geconcludeerd dat de grondtoestand ook voor $\lambda < \lambda_1$ instabiel kan zijn.

Voor een eerste benadering worden in (36. 9) de tweede en vierde term verwaarloosd ten opzichte van den eersten. Is (36. 11) niet identiek nul, dan wordt bovendien de laatste term verwaarloosd ten opzichte van den derden. In beide gevallen is het resultaat

$$\overline{P}^\lambda(a_j) = (\lambda - \lambda_1)\,\overline{P}_2'(a_j) + \overline{P}_n(a_j).\ n = 3 \text{ of } n = 4. \quad (36.12)$$

De stationnaire waarden van (36. 12) worden bepaald door de vergelijkingen

$$\frac{\partial \overline{P}^\lambda}{\partial a_i} = (\lambda - \lambda_1)\frac{\partial \overline{P}_2'}{\partial a_i} + \frac{\partial \overline{P}_n}{\partial a_i} = 0,\ i = 1, 2, \ldots . h - 1, \quad (36.13)$$

terwijl de stabiliteit van den bijbehoorenden evenwichtstoestand wordt beslist door den vorm

$$\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-1}\frac{\partial^2 \overline{P}^\lambda}{\partial a_i \partial a_j}\Delta a_i \Delta a_j = (\lambda - \lambda_1)\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-1}\frac{\partial^2 \overline{P}_2'}{\partial a_i \partial a_j}\Delta a_i \Delta a_j + \sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-1}\frac{\partial^2 \overline{P}_n}{\partial a_i \partial a_j}\Delta a_i \Delta a_j. \quad (36.14)$$

Hoewel de oplossingen van (36. 13) niet zoo eenvoudig kunnen worden aangegeven als de oplossingen van (35. 2) laten zij toch eenige algemeene conclusies toe. In de eerste plaats bezit (36. 13) de oplossing $a_i = 0$ die den reeds bekenden grondtoestand oplevert. Uit (36. 14) volgt dat de stabiliteit van dezen toestand wordt beslist door den vorm

$$(\lambda - \lambda_1)\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-1}\frac{\partial^2 \overline{P}_2'}{\partial a_i \partial a_j}\Delta a_i \Delta a_j = 2(\lambda - \lambda_1)\overline{P}_2'(\Delta a_j). \quad (36.15)$$

De grondtoestand is derhalve stabiel voor $\lambda < \lambda_1$, instabiel voor



$\lambda > \lambda_1$, in overeenstemming met hetgeen reeds bekend was [1]).

Uit (36. 13) blijkt vervolgens dat voor $n = 3$ het bestaan van een oplossing $a_i$ voor den belastingparameter $\lambda$ het bestaan van een oplossing $-a_i$ voor den belastingparameter $2\lambda_1 - \lambda$ tengevolge heeft. Voor $n = 3$ bestaan er dus naburige evenwichtstoestanden òf in het geheel niet òf zoowel voor grootere als voor kleinere belastingen dan de kniklast.

Vermenigvuldiging van de $i^e$ vergelijking (36. 13) met $a_i$ en optelling levert

$$(\lambda - \lambda_1)\sum_{i=1}^{h-1} a_i\frac{\partial \overline{P}_2'}{\partial a_i} + \sum_{i=1}^{h-1} a_i\frac{\partial \overline{P}_n}{\partial a_i} = 2(\lambda - \lambda_1)\overline{P}_2'(a_j) + n\overline{P}_n(a_j) = 0. \quad (36.16)$$

Is $n = 4$ en $\overline{P}_4(a_j)$ definiet positief, d. w. z. is het evenwicht in den kniktoestand stabiel, dan kan aan (36. 16) alleen worden voldaan voor $\lambda > \lambda_1$; in dit geval bestaan er dus alleen naburige evenwichtstoestanden voor belastingen grooter dan de kniklast.

Wordt voor $\Delta a_i$ de oplossing van (36. 13) gesubstitueerd dan gaat (36. 14) met behulp van (36. 16) over in

$$(\lambda - \lambda_1)\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-1}\frac{\partial^2 \overline{P}_2'}{\partial a_i \partial a_j}a_i a_j + \sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-1}\frac{\partial^2 \overline{P}_n}{\partial a_i \partial a_j}a_i a_j =$$
$$= 2(\lambda - \lambda_1)\overline{P}_2'(a_j) + n(n-1)\overline{P}_n(a_j) = -2(n-2)(\lambda - \lambda_1)\overline{P}_2'(a_j).$$

Deze uitdrukking is negatief voor $\lambda < \lambda_1$. Dientengevolge zijn alle bij kleinere belastingen dan de kniklast eventueel voorkomende naburige evenwichtstoestanden instabiel.

## 37 – AARD DER BEHANDELDE PROBLEMEN

Reeds in par. 32 werd er op gewezen dat de onderstelling van de mogelijkheid eener TAYLOR-ontwikkeling van de verplaatsingen $U(\lambda)$ en haar afgeleiden naar $\lambda - \lambda_1$ impliceert dat ook voor belastingen grooter dan de kniklast het bestaan van een grondtoestand wordt aangenomen die voor tot $\lambda_1$ naderende waarden van $\lambda$ continu overgaat in den kniktoestand. Behalve de grondtoestand blijken er in de omgeving van $\lambda_1$ dan nog andere evenwichtstoestanden te bestaan die voor tot $\lambda_1$ naderende waarden van $\lambda$ continu overgaan in den kniktoestand (zie par. 35). De kniktoestand vormt een z.g. vertakkingspunt van het evenwicht;

[1]) Hierbij is afgezien van het principieel niet uitgesloten geval dat (36. 10) semi-definiet negatief is; de stabiliteitsconclusie voor $\lambda < \lambda_1$ is dan door (36. 15) onvoldoende gefundeerd.

de beteekenis van dezen term wordt o.a. door de figuren 1 geïllustreerd.

De vraag rijst nu of met de bovenbedoelde onderstelling alle practisch voorkomende mogelijkheden zijn uitgeput. Deze vraag moet ontkennend worden beantwoord. Er bestaan constructies met belastingsystemen, waarvoor bij geleidelijke vergrooting van den belastingparameter na het overschrijden van een kritieke waarde $\lambda^*$ geen evenwichtstoestanden bestaan die bij monotone daling van $\lambda$ tot $\lambda^*$ continu overgaan in den oorspronkelijken bij $\lambda^*$ behoorenden grondtoestand (zie lit. 40). Bij beschouwing van continu met $\lambda$ veranderende evenwichtstoestanden in de omgeving der kritieke waarde vormt $\lambda^*$ een maximum der mogelijke $\lambda$-waarden. In een diagram van een verplaatsingscomponente $v$ van een punt van het lichaam als functie van $\lambda$ komt dit in het algemeen tot uitdrukking door een met de $v$-as evenwijdige raaklijn aan de $\lambda - v$ kromme. De bij de kritieke waarde $\lambda^*$ behoorende evenwichtstoestand vormt een z.g. doorslagpunt. Vooral BIEZENO heeft verschillende doorslagproblemen onderzocht (lit. 41).

Gemeen met een vertakkingspunt heeft een doorslagpunt de eigenschap dat het evenwicht neutraal is (lit. 40) zoodat de doorslagpunten met de bekende theorie van het neutrale evenwicht kunnen worden bepaald. Is bij geleidelijke vergrooting van $\lambda$ van nul tot $\lambda^*$ de oplossing van het minimumprobleem (22. 5) voor $\lambda < \lambda^*$ positief, d. w. z. is het evenwicht voor $\lambda < \lambda^*$ stabiel, dan is het evenwicht in den door $\lambda^*$ bepaalden toestand op de stabiliteitsgrens; $\lambda^*$ valt dan samen met de parameterwaarde $\lambda_1$ voor den kniklast. Voor het onderzoek van de stabiliteit van den kniktoestand behouden de in hoofdstuk 2 gegeven beschouwingen eveneens haar beteekenis. Samenvattend kan derhalve worden gezegd: de in hoofdstuk 2 gegeven stabiliteitstheorie bezit algemeene geldigheid; de in hoofdstuk 3 behandelde theorie van de evenwichtstoestanden bij belastingen in de omgeving van den kniklast is essentieel beperkt tot met vertakkingspunten correspondeerende knikbelastingen.

## 38 - UITBREIDING DER THEORIE

Reeds meermalen werd opgemerkt dat de in het voorgaande ontwikkelde theorie slechts geldt voor belastingen in de omgeving van den kniklast. Met deze beperking kan de techniek zich echter niet altijd tevreden stellen. Voor eenige belangrijke plaatproblemen hebben verschillende schrijvers dan ook reeds methodes ontwikkeld die bij aanzienlijke overschrijdingen van den kniklast bruikbare resultaten opleveren. (Zie lit. 46). Door de invoering van enkele vereenvoudigende onderstellingen, welke voor de reeds behandelde plaatproblemen alle vervuld zijn, kunnen



de bovenbedoelde methodes tot een uitbreiding der in het voorgaande ontwikkelde theorie worden samengevat.

De eerste onderstelling betreft de uitwendige belastingen; deze worden in grootte en richting ten opzichte van het vaste assenstelsel gegeven gedacht. De energie der belastingen hangt dan lineair af van de verplaatsingen (zie par. 29).

Vervolgens wordt ondersteld dat de verplaatsingen in den grondtoestand zóó klein zijn dat grootheden van den tweeden en hoogeren graad in deze verplaatsingen $U(\lambda)$ en haar afgeleiden mogen worden verwaarloosd ten opzichte van grootheden welke lineair van $U(\lambda)$ en haar afgeleiden afhangen. Een eerste consequentie van deze onderstelling is de linearisatie van de evenwichtsvergelijkingen voor den grondtoestand zoodat de verplaatsingen in dezen toestand evenredig zijn met de belastingen

$$U(\lambda) = \lambda U'. \tag{38. 1}$$

In de toeneming (29. 4) der elastische energie bij overgang van den grondtoestand (38. 1) naar een naburigen toestand $U(\lambda) + u$ kunnen eveneens de termen welker integranden van hoogeren graad dan den eersten zijn in de afgeleiden van $U(\lambda)$ worden verwaarloosd. Voor de totale energietoeneming bij overgang van $U(\lambda)$ naar $U(\lambda) + u$ geldt dan

$$P^\lambda[u] = V_1[u] - W_1[u] + V_2^0[u] + V_2^1[u] + \\ + V_3^0[u] + V_3^1[u] + V_4^0[u]. \tag{38. 2}$$

De in $u$ lineaire termen moeten tezamen nul zijn daar de grondtoestand een evenwichtstoestand is. Wordt nog geschreven

$$V_m^0[u] = P_m^0[u], \quad m = 2, 3, 4$$

en met gebruik van (38. 1)

$$V_m^1[u] = \lambda P_m'[u], \quad m = 2, 3$$

dan gaat (38. 2) over in

$$P^\lambda[u] = P_2^0[u] + \lambda P_2'[u] + P_3^0[u] + \lambda P_3'[u] + P_4^0[u]. \tag{38. 3}$$

Hierin is evenals in par. 31

$$P_2^0[u] = V_2^0[u]$$

definiet positief.

De grondtoestand (38. 1) is ondubbelzinnig bepaald zoodat de knikbelasting wordt bepaald door de kleinste waarde $\lambda_1$ van den belastingparameter $\lambda$ waarvoor de homogene variatievergelijking (24. 14) voor het neutrale evenwicht

$$P_{11}^{\lambda}[u, \zeta) = P_{11}^{0}[u, \zeta] + \lambda P_{11}'[u, \zeta] = 0. \qquad (38.4)$$

een van nul verschillende oplossing bezit.

Deze vergelijking heeft in het algemeen voor een stijgende rij van $\lambda$-waarden $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ van nul verschillende oplossingen (lit. 39), de z.g. eigenoplossingen. De identiteit van de bij $\lambda_1$ behoorende oplossing met de eigenfuncties $u_1$ van het bij de knikbelasting behoorende minimumprobleem (31. 1) is evident. Maar ook de overige eigenoplossingen van (38. 4) kunnen in verband worden gebracht met de eigenfuncties $u_2, u_3, \ldots$ van de minimumproblemen (24. 8), behoorende bij de knikbelasting $\lambda_1$, indien wordt gesteld

$$T_2[u] = P_2^{0}[u]; \qquad (38.5)$$

dit is steeds mogelijk daar $P_2^{0}[u]$ definiet is. De problemen (24. 8) luiden dan

$$\left.\begin{aligned} \omega_h &= Min\ \frac{P_2^{0}[u] + \lambda P_2'[u]}{P_2^{0}[u]} \\ &\text{met de nevenvoorwaarden} \\ P_{11}^{0}[u_j, u] &= 0.\ j = 1, 2 \ldots h-1 \end{aligned}\right\} \qquad (38.6)$$

De homogene variatievergelijking (22. 9) voor de eigenfuncties $u_j$ gaat hier over in

$$(1-\omega)\, P_{11}^{0}[u, \zeta] + \lambda_1 P_{11}'[u, \zeta] = 0,$$

welke door de substitutie

$$\omega = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda} \qquad (38.7)$$

identiek wordt met (38. 4). Mitsdien bezitten zij dezelfde oplossingen. De rijen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ en $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots$ zijn beide monotoon stijgend; dit is alleen mogelijk indien (38. 7) geldt voor dezelfde indices bij $\omega$ en $\lambda$

$$\omega_h = 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_h} \qquad (38.8)$$

zoodat de bij $\lambda_h$ behoorende eigenoplossing van (38. 4) identiek moet zijn met de bij $\omega_h$ behoorende eigenfuncties $u_h$ [1]).

[1]) Dit sluit niet in dat de verzamelingen van de bij positieve waarden van $\lambda$ behoorende eigenoplossingen van (38. 4) en van de eigenfunctiestelsels van (22. 9) identiek zijn. Integendeel zijn ook eventueele bij negatieve waarden van $\lambda$ behoorende eigenoplossingen van (38. 4) vertegenwoordigd in de eigenfuncties van (22. 9). In de onderhavige beschouwing is als vroeger afgezien van negatieve $\lambda$-waarden daar deze gevallen gemakkelijk tot de behandelde zijn terug te brengen door het eenheidsbelastingsysteem door zijn tegengestelde te vervangen.



Het gebruik van (38. 5) brengt nog het voordeel mede dat een functiestelsel $u$, dat voldoet aan de voorwaarde

$$P_{11}^{0}[u_j, u] = 0 \qquad (38.9)$$

wegens (38. 4) ook de relatie

$$P_{11}'[u_j, u] = 0 \qquad (38.10)$$

bevredigt en omgekeerd.

De integraal $P_2'[u]$ neemt ook negatieve waarden aan. Is zij negatief definiet en van eenvoudiger vorm dan $P_2^{0}[u]$, dan biedt het nog meer voordeelen te stellen

$$T_2[u] = -P_2'[u]. \qquad (38.11)$$

Analoog met het voorgaande wordt dan weer de identiteit van de bij $\lambda_h$ behoorende eigenoplossing met de eigenfuncties $u_h$ van (22. 9) aangetoond. Ook de gelijkwaardigheid der relaties (38. 9) en (38. 10) blijft onveranderd bestaan.

Voor het onderzoek van de evenwichtstoestanden bij belastingen in de omgeving van den kniklast is met succes gebruik gemaakt van de splitsing (32. 3). Wordt de oplossing $\omega_2$ van het eerste probleem (38. 6) weer voorloopig positief gesteld dan ligt het voor de hand ook voor het onderzoek der evenwichtstoestanden bij verder van den kniklast verwijderde belastingen gebruik te maken van (32. 3). Invoering van

$$u = au_1 + \bar{u} \text{ met } P_{11}^{0}[u_1, \bar{u}] = 0 \qquad (38.12)$$

in (38. 3) levert na ontwikkeling en rangschikking

$$\begin{aligned} P^{\lambda}[u] = {} & a^2\left\{P_2^{0}[u_1] + \lambda P_2'[u_1]\right\} + a^3\left\{P_3^{0}[u_1] + \lambda P_3'[u_1]\right\} + \\ & + a^4 P_4^{0}[u_1] + a^2\left\{P_{21}^{0}[u_1, \bar{u}] + \lambda P_{21}'[u_1, \bar{u}]\right\} + a^3 P_{31}[u_1, \bar{u}] + \\ & + P_2^{0}[\bar{u}] + \lambda P_2'[\bar{u}] + a\left\{P_{12}^{0}[u_1, \bar{u}] + \lambda P_{12}'[u_1, \bar{u}]\right\} + \\ & + a^2 P_{22}^{0}[u_1, \bar{u}] + P_3^{0}[\bar{u}] + \lambda P_3'[\bar{u}] + a P_{13}^{0}[u_1, \bar{u}] + P_4^{0}[\bar{u}]. \end{aligned} \qquad (38.13)$$

Hierin is reeds gebruik gemaakt van de uit (38. 12) voortvloeiende betrekking (38. 10).

Uit (38. 6) volgt met gebruik van (38. 12)

$$P_2^{0}[\bar{u}] + \lambda_1 P_2'[\bar{u}] \geqq \omega_2 P_2^{0}[\bar{u}],$$

of met gebruik van (38. 8)

$$P_2^{0}[\bar{u}] + \lambda P_2'[\bar{u}] \geqq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_2}\right) P_2^{0}[\bar{u}]. \qquad (38.14)$$

Dientengevolge is voor $\lambda < \lambda_2$ het linkerlid van (38. 14) steeds positief.

Wordt nu tenslotte nog aangenomen dat de verplaatsingen $u$ uit den grondtoestand klein zijn, zoodat ook $a$ en $\bar{u}$ klein zijn, dan wordt op dezelfde wijze als in par. 32 de verwaarloozing van de na $\lambda P_2'[\bar{u}]$ volgende termen gemotiveerd. Immers de integranden van deze termen zijn òf van den tweeden graad, en bevatten dan één of meer factoren $a$, òf van hoogeren graad in $\bar{u}$ en haar afgeleiden, zoodat zij in absolute waarde klein zijn ten opzichte van de voor $\lambda < \lambda_2$ tezamen steeds positieve termen in het linkerlid van (38. 14). De benadering van de energie (38. 13) luidt dan

$$P^\lambda[u] = a^2\left\{P_2^0[u_1] + \lambda P_2'[u_1]\right\} + a^3\left\{P_3^0[u_1] + \lambda P_3'[u_1]\right\} + \\ + a^4 P_4^0[u_1] + a^2\left\{P_{21}^0[u_1, \bar{u}] + \lambda P_{21}'[u_1, \bar{u}]\right\} + a^3 P_{31}^0[u_1, \bar{u}] + \\ + P_2^0[\bar{u}] + \lambda P_2'[\bar{u}]. \quad (38.\ 15)$$

De evenwichtstoestanden zijn weer gekenmerkt door stationnaire waarden der energie. Evenals voorheen worden van (38. 15) eerst de stationnaire waarden bepaald bij een willekeurige constante waarde van $a$. Hiertoe wordt de toeneming berekend van (38. 15) bij overgang naar een functiestel $\bar{u} + \eta$ met

$$P_{11}^0[u_1, \eta] = 0. \quad (38.\ 16)$$

$$P^\lambda[u+\eta] - P^\lambda[u] = a^2\left\{P_{21}^0[u_1, \eta] + \lambda P_2'[u_1, \eta]\right\} + a^3 P_{31}^0[u_1, \eta] + \\ + P_{11}^0[\bar{u}, \eta] + \lambda P_{11}'[\bar{u}, \eta] + P_2^0[\eta] + \lambda P_2'[\eta]. \quad (38.\ 17)$$

Voor een stationnaire waarde van (38. 15) is vereischt dat de in $\eta$ lineaire termen van (38. 17) tezamen nul zijn; wegens

$$P_2^0[\eta] + \lambda P_2'[\eta] \geqq 0$$

voor $\lambda < \lambda_2$ is deze stationnaire waarde steeds een minimum voor $\lambda < \lambda_2$.

De afleiding van een variatievergelijking met kinematisch mogelijke functies $\zeta$ die niet aan de restrictie (38. 16) zijn onderworpen geschiedt geheel als vroeger. Het resultaat is

$$P_{11}^0[\bar{u}, \zeta] + \lambda P_{11}'[\bar{u}, \zeta] + a^2\left\{P_{21}^0[u_1, \zeta] + \lambda P_{21}'[u_1, \zeta] + \right. \\ \left. - \frac{3P_3^0[u_1] + 3\lambda P_3'[u_1]}{2P_2^0[u_1]} P_{11}^0[u_1, \zeta]\right\} + \\ + a^3\left\{P_{31}^0[u_1, \zeta] - \frac{4P_4^0[u_1]}{2P_2^0[u_1]} P_{11}^0[u_1, \zeta]\right\} = 0. \quad (38.\ 18)$$



Deze vergelijking moet tezamen met de voorwaarde

$$P_{11}^0[u_1, \bar{u}] = 0 \quad (38.\ 19)$$

de functies $\bar{u}$ bepalen. Inderdaad is voor $\lambda \neq \lambda_h$, $h = 1, 2, 3, \ldots$. de oplossing ondubbelzinnig bepaald. Immers, het verschil van twee oplossingen zou blijkens (38. 18) moeten voldoen aan de homogene vergelijking (38. 4) welke voor $\lambda \neq \lambda_h$ slechts de nuloplossing bezit. Ook voor $\lambda = \lambda_1$ is de oplossing ondubbelzinnig bepaald. Weliswaar laat de door aftrekking uit (38. 18) verkregen voorwaarde (38. 4) voor het verschil van twee oplossingen $\bar{u}'$ en $\bar{u}''$ dan toe $\bar{u}' - \bar{u}'' = cu_1$, deze uitkomst is onvereenigbaar met de voor $\bar{u}'$ en $\bar{u}''$ geldende voorwaarde (38. 19).

De omstandigheid dat voor $\lambda \neq \lambda_h$ verg. (38. 18) de functies $\bar{u}$ reeds ondubbelzinnig bepaalt, wekt den schijn dat aan deze functies door toevoeging der voorwaarde (38. 19) te veel eischen worden gesteld. Inderdaad is dit slechts schijnbaar want door toepassing van (38. 18) voor $\zeta = u_1$ en (38. 4) volgt

$$P_{11}^0[\bar{u}, u_1] + \lambda P_{11}'[\bar{u}, u_1] = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) P_{11}^0[\bar{u}, u_1] = 0$$

zoodat voor $\lambda \neq \lambda_1$ in (38. 18) de voorwaarde (38. 19) ligt opgesloten.

Voor $\lambda = \lambda_h$, $h = 2, 3, \ldots$. bezit de bij (38. 18) behoorende homogene vergelijking (38. 4) een de voorwaarde (38. 19) vervullende oplossing. De niet-homogene vergelijking (38. 18) bezit dan in het algemeen geen oplossing. Deze singulariteit zou bij beperking van het onderzoek tot $\lambda < \lambda_2$, welke toch reeds is ingevoerd bij de op (38. 13) toegepaste verwaarloozing, geen beteekenis hebben, ware het niet dat zij zich reeds bij nadering van $\lambda$ tot $\lambda_2$ in het algemeen openbaart door sterk aangroeien der oplossing $\bar{u}$ van (38. 18); deze oplossing voldoet dan niet meer aan den gestelden eisch van kleinheid. Hoe deze moeilijkheid tegelijk met de beperking $\lambda < \lambda_2$ die hiervoor reeds werd ingevoerd, kan worden overwonnen zal later worden uiteengezet. Voorloopig worden de beschouwingen beperkt tot $\lambda$-waarden die voldoende ver beneden $\lambda_2$ blijven.

Omdat (38. 18) en (38. 19) lineair zijn, kan hun oplossing worden geschreven in den vorm

$$\bar{u} = a^2\varphi_2^\lambda + a^3\varphi_3^\lambda; \quad (38.\ 20)$$

doordat in (38. 18) $\lambda$ ook als coëfficiënt bij de onbekende functies $\bar{u}$ optreedt is het hier niet mogelijk de afhankelijkheid van (38. 20) van $\lambda$ op eenvoudige wijze uit te drukken. Voor het minimum van (38. 15) volgt door gebruik van (38. 18) voor $\zeta = \bar{u}$

$$\overline{P^\lambda}(a) = a^2\left\{P_2^0[u_1] + \lambda P_2'[u_1]\right\} + a^3\left\{P_3^0[u_1] + \lambda P_3'[u_1]\right\} + \\ + a^4 P_4^0[u_1] - P_2^0[a^2\varphi_2\lambda + a^3\varphi_3\lambda] - \lambda P_2'[a^2\varphi_2\lambda + a^3\varphi_3\lambda].$$

Hierin kunnen de termen van den vijfden en hoogeren graad in $a$ buiten beschouwing blijven, daar ook de verwaarloosde termen van (38. 13) door substitutie van (38. 20) bijdragen leveren van den vijfden graad. Met behulp van de uit (38. 4) volgende identiteit

$$P_2'[u_1] = -\frac{1}{\lambda_1} P_2^0[u_1]$$

en met invoering van de afkortingen

$$\left.\begin{aligned} &P_2^0[u_1] = A_2^0\ ,\quad P_3^0[u_1] = A_3^0\ ,\quad P_3'[u_1] = A_3', \\ &P_4^0[u_1] - P_2^0[\varphi_2\lambda] - \lambda P_2'[\varphi_2\lambda] = A_4\lambda \end{aligned}\right\} \quad (38.\ 21)$$

volgt voor het minimum van (38. 15)

$$\overline{P}^\lambda(a) = \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) A_2^0 a^2 + (A_3^0 + \lambda A_3')\, a^3 + A_4\lambda a^4. \quad (38.\ 22)$$

Blijkens (38. 21) zijn de termen tot en met den derden graad in (38. 22) reeds geheel bepaald door de eigenfuncties $u_1$; in gevallen waarin met deze termen reeds een voldoend nauwkeurige benadering wordt verkregen kan derhalve worden afgezien van de oplossing van (38. 18) en (38. 19).

Door de bij de stationnaire waarden van (38. 22) behoorende waarden van $a$ en de bij $a$ behoorende functies $\bar{u}$ (38. 20) worden de mogelijke evenwichtstoestanden bepaald. Omdat (38. 22) een minimum is van (38. 15) bij constante waarde van $a$ is het evenwicht stabiel dan wel instabiel naar gelang de bijbehoorende stationnaire waarde van (38. 22) al dan niet een minimum is.

Thans wordt overgegaan tot de oplossing van de hiervoor reeds vermelde moeilijkheid dat de functies $\bar{u}$ bij nadering van $\lambda$ tot $\lambda_2$ in het algemeen niet klein blijven. Hiertoe wordt opgemerkt dat de gehomogeniseerde vergelijking (38. 18) voor $\lambda = \lambda_2$ de oplossing $cu_2$ bezit. Het ligt dan voor de hand in plaats van (38. 12) te stellen

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \bar{u} \text{ met } P_{11}^0[u_1, \bar{u}] = P_{11}^0[u_2, \bar{u}] = 0. \quad (38.\ 23)$$

Tevens wordt hiermede het tot dusver buiten beschouwing gelaten geval $\omega_2 = \omega_1 = 0$ behandeld. In dit geval is $\lambda_2 = \lambda_1$ zoodat (38. 23) reeds onmiddellijk voor $\lambda$-waarden in de omgeving van $\lambda_1$ moet worden gebruikt in plaats van (38. 12) (zie ook par. 36). Substitutie in (38. 3) levert na ontwikkeling en rangschikking



$$P^\lambda[u] = a_1^2\left\{P_2^0[u_1] + \lambda P_2'[u_1]\right\} + a_2^2\left\{P_2^0[u_2] + \lambda P_2'[u_2]\right\} + \\ + a_1^3\left\{P_3^0[u_1] + \lambda P_3'[u_1]\right\} + \\ + a_1^2 a_2\left\{P_{21}^0[u_1, u_2] + \lambda P_{21}'[u_1, u_2]\right\} + \\ + a_1 a_2^2\left\{P_{12}^0[u_1, u_2] + \lambda P_{12}'[u_1, u_2]\right\} + a_2^3\left\{P_3^0[u_2] + \lambda P_3'[u_2]\right\} + \\ + a_1^4 P_4^0[u_1] + a_1^3 a_2 P_{31}^0[u_1, u_2] + a_1^2 a_2^2 P_{22}^0[u_1, u_2] + \\ + a_1 a_2^3 P_{13}^0[u_1, u_2] + a_2^4 P_4^0[u_2] + \\ + a_1^2\left\{P_{21}^0[u_1, \bar{u}] + \lambda P_{21}'[u_1, \bar{u}]\right\} + \\ + a_1 a_2\left\{P_{111}^0[u_1, u_2, \bar{u}] + \lambda P_{111}'[u_1, u_2, \bar{u}]\right\} + \\ + a_2^2\left\{P_{21}^0[u_2, \bar{u}] + \lambda P_{21}'[u_2, \bar{u}]\right\} + a_1^3 P_{31}^0[u_1, \bar{u}] + \\ + a_1^2 a_2 P_{211}^0[u_1, u_2, \bar{u}] + a_1 a_2^2 P_{121}^0[u_1, u_2, \bar{u}] + a_2^3 P_{31}^0[u_2, \bar{u}] + \\ + P_2^0[\bar{u}] + \lambda P_2'[\bar{u}] + \ldots . \quad (38.\ 24)$$

Hierin is reeds gebruik gemaakt van de eigenschappen der functies $u_1$, $u_2$ en $\bar{u}$

$$P_{11}^0[u_1, u_2] = P_{11}'[u_1, u_2] = P_{11}^0[u_1, \bar{u}] = P_{11}'[u_1, \bar{u}] = \\ = P_{11}^0[u_2, \bar{u}] = P_{11}'[u_2, \bar{u}] = 0.$$

Analoog met het voorgaande kan verder de in (38. 24) reeds toegepaste verwaarloozing der na $\lambda P_2'[\bar{u}]$ volgende termen worden gemotiveerd voor $\lambda < \lambda_3$. Ook de bepaling van de stationnaire waarde, die voor $\lambda < \lambda_3$ weer een ondubbelzinnig bepaald minimum blijkt te zijn, levert geen nieuwe gezichtspunten; de functies $\bar{u}$ waarvoor dit minimum wordt bereikt zijn alleen dan weer voldoende klein indien $\lambda$ voldoende ver beneden $\lambda_3$ ligt. In het minimum zelf leveren de functies $\bar{u}$ weer geen bijdrage in de termen van lageren graad in $a_1$ en $a_2$ dan den vierden zoodat in gevallen voor welke de termen van den vierden graad reeds kunnen worden verwaarloosd, kan worden volstaan met de kennis der eigenfuncties $u_1$ en $u_2$.

Het behoeft geen betoog dat de moeilijkheid, die ontstaat bij nadering van $\lambda$ tot $\lambda_3$ op dezelfde wijze wordt overwonnen door in de verplaatsingen $u$ uit den grondtoestand ook de componente der derde eigenfunctie af te zonderen, enz. In principe kan deze methode dus worden uitgebreid voor willekeurig groote waarden van $\lambda$ mits hierbij de onderstelling aangaande de kleinheid der verplaatsingen $u$ vervuld blijft. Bij zeer groote overschrijdingen van $\lambda_1$ wordt zij door het groote aantal gepasseerde waarden $\lambda_h$

echter zoo gecompliceerd dat de practische toepassing meestal wel onuitvoerbaar zal zijn, tenzij de benadering der energie door afbreken na de derdegraadstermen reeds voldoende is.

Is de benaderingsontwikkeling $\overline{P}^{\lambda}(a_j)$ der energie eenmaal bekend dan levert de bepaling van haar stationnaire waarden geen principieel nieuwe gezichtspunten ten opzichte van het reeds in par. 35 en 36 behandelde; ook het stabiliteitsonderzoek verloopt geheel overeenkomstig het bekende schema.

Tenslotte wordt nog opgemerkt dat de eerste in deze paragraaf ingevoerde onderstelling ten aanzien van den aard van het belastingsysteem onnoodig scherp is. Het is ook voldoende aan te nemen dat de verplaatsingen $U(\lambda)$ zoo klein zijn dat haar invloed op richting en grootte van de op een lichaamselement werkende belasting mag worden verwaarloosd.

De toeneming der belastingenergie bij den overgang van den grondtoestand $U(\lambda)$ naar een naburigen toestand $U(\lambda) + u$ is dan onafhankelijk van $U(\lambda)$

$$\begin{aligned} -W[u] &= -W_1[u] - W_2[u] - \ldots = \\ &= -\lambda W_1'[u] - \lambda W_2'[u] - \ldots \end{aligned} \qquad (38.25)$$

Aan de uitdrukking (38. 3) moeten dienovereenkomstig de termen $-\lambda W_m'[u]$, $m \geqq 2$ worden toegevoegd. Het onderzoek verloopt dan op dezelfde wijze als reeds beschreven.

Hoofdstuk 4

# DE INVLOED VAN KLEINE AFWIJKINGEN

Van een constructie zijn de meetkundige vorm, de elastische eigenschappen van het materiaal en de op de constructie werkende belastingen nimmer exact bekend. Om zulk een constructie desondanks voor berekening toegankelijk te maken wordt een haar zoo goed mogelijk weergevend model ontworpen en hierop de elasticiteitstheorie toegepast.

Is het verschil tusschen de werkelijke constructie en het geïdealiseerd model gering en zijn de verplaatsingen zoo klein dat op het model de klassieke lineaire elasticiteitstheorie kan worden toegepast dan levert het gedrag van het model zooals bekend een goede benadering van het elastisch gedrag van de werkelijke constructie; deze benadering is beter naarmate de verschillen tusschen constructie en model kleiner zijn.

In het geval dat de verplaatsingen niet klein genoeg zijn om de lineaire elasticiteitstheorie te kunnen toepassen levert het model daarentegen niet altijd een bevredigende benadering van het elastisch gedrag der constructie. Weliswaar is de benadering ook dan beter naarmate de verschillen tusschen constructie en model kleiner zijn, de practisch voorkomende kleine verschillen kunnen een niet te verwaarloozen invloed oefenen. Dit wordt door het voorbeeld van de in haar uiteinden axiaal gedrukte staaf duidelijk geïllustreerd. Het hierbij gebruikte model is de zuiver prismatische homogene staaf welke centrisch op druk wordt belast. Is de belasting niet te ver verwijderd van den kniklast van het model dan veroorzaakt een kleine afwijking van de werkelijke staafas van een rechte of een kleine excentriciteit der belasting een aanzienlijke doorbuiging van de werkelijke staafas, terwijl de staafas van het model ook onder de belasting recht blijft.

De stabiliteitstheorie behoort essentieel tot het terrein der niet-lineaire elasticiteitstheorie zoodat het noodzakelijk is den invloed van kleine verschillen tusschen constructie en model in beschouwing te nemen. De kleinheid der verschillen wordt tot uitdrukking gebracht door alleen grootheden die lineair zijn in deze verschillen in rekening te brengen.

## 41 – DE VERVORMINGEN

Een punt $P^0$ van een constructie wordt in den onvervormden toestand gegeven door zijn coördinaten $x_i^0$ ten opzichte van een

vast rechthoekig assenstelsel [1]). Ondergaat dit punt een verplaatsing met componenten $u_i$ in de asrichtingen dan wordt de vormverandering in de onmiddellijke omgeving van $P^0$ beschreven door de 6 vormveranderingscomponenten (zie (11. 1)).

$$\gamma_{ij}^0 = \gamma_{ji}^0 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i^0} + \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_h^0} \frac{\partial u_j}{\partial x_h^0}. \qquad (41.\ 1)$$

De punten der constructie kunnen ondubbelzinnig en omkeerbaar worden afgebeeld op de punten van het bijbehoorend model door voor de coördinaten van een punt $P^0$ der constructie te schrijven

$$x_i^0 = x_i + u_i^0. \qquad (41.\ 2)$$

Hierin zijn $x_i$ de coördinaten van het correspondeerende punt $P$ van het model. De meetkundige verschillen tusschen constructie en model zijn klein indien de functies $u_i^0$ klein zijn. Aan de voorwaarde van omkeerbaarheid der afbeelding is dan steeds voldaan omdat de functionaaldeterminant

$$\frac{\partial (x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0)}{\partial (x_1,\ x_2,\ x_3)} = \left| \delta_{hj} + \frac{\partial u_h^0}{\partial x_j} \right| > 0 \left( \delta_{hj} = \begin{matrix} 1 \text{ voor } h = j \\ 0 \text{ voor } h \neq j \end{matrix} \right) \qquad (41.\ 3)$$

en dus steeds ongelijk nul is.

De beschrijving van den vervormingstoestand der constructie door de uitdrukkingen (41. 1) geschiedt met de coördinaten $x_i^0$ als onafhankelijk veranderlijken. Met behulp van transformatie (41. 2) is het echter ook mogelijk de voor het onderzoek van het model gebruikte coördinaten $x_i$ als onafhankelijk variabelen in te voeren; het behoeft geen betoog dat hiermede de vergelijking van het elastisch gedrag van constructie en model aanzienlijk wordt vereenvoudigd. Uit de betrekkingen

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_h^0} \frac{\partial x_h^0}{\partial x_j} = \sum_{h=1}^{3} \left( \delta_{hj} + \frac{\partial u_h^0}{\partial x_j} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_h^0} \quad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2,\ 3 \\ j = 1,\ 2,\ 3 \end{pmatrix}$$

kan wegens (41. 3) $\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0}$ worden opgelost. Voor $j = 1$ volgt

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1^0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2^0}{\partial x_3} & 1 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} & 1 + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3^0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1^0}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2^0}{\partial x_3} & 1 + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3} \end{vmatrix},$$

[1]) De in deze en de volgende paragraaf gebruikte index 0 voor de constructie moet niet worden verward met den in par. 38 gebruikten index 0.



of met verwaarloozing van termen die in de afgeleiden van $u_h^0$ van den tweeden en hoogeren graad zijn

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_1^0} = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial u_h^0}{\partial x_1} \frac{\partial u_i}{\partial x_h},$$

voor $j = 2$ en $j = 3$ volgt een analoog resultaat zoodat algemeen geldt

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j^0} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial u_h^0}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_h}. \qquad (41.\ 4)$$

Substitutie van (41. 4) in (41. 1) levert weer met verwaarloozing van termen die in de afgeleiden van $u_h^0$ van den tweeden graad zijn

$$\gamma_{ij}^0 = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \frac{\partial u_j}{\partial x_h} - \sum_{h=1}^{3} \left( \frac{\partial u_h^0}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h^0}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_h} \right) +$$
$$- \sum_{h=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_h^0}{\partial x_k} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_h} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_h} \right) = \gamma_{ij} + \Delta \gamma_{ij}. \qquad (41.\ 5)$$

Hierin zijn $\gamma_{ij}$ de in het met $P^0$ correspondeerende punt $P$ van het model optredende vervormingscomponenten (11. 1) indien de verplaatsingen van correspondeerende punten van constructie en model gelijk zijn; $\Delta \gamma_{ij}$ zijn de door meetkundige verschillen tusschen constructie en model veroorzaakte verschillen in vervormingscomponenten.

## 42 – DE POTENTIEELE ENERGIE

De elastische potentiaal van het model is een homogene quadratische functie van de vormveranderingsgrootheden (11. 1)

$$A\ (\gamma_{ij}) = \Sigma\, c_{ij} \gamma_{ij}^2; \qquad (42.\ 1)$$

hierin moet over de 6 combinaties van $i$ en $j$ worden gesommeerd. Ondersteld wordt dat de elastische potentiaal van de werkelijke constructie eveneens wordt gegeven door een homogene quadratische functie van de vervormingscomponenten, die thans echter door (41. 5) zijn bepaald,

$$A^0\ (\gamma_{ij}^0) = \Sigma\, c_{ij}^0 \gamma_{ij}^{0\,2}, \qquad (42.\ 2)$$

welker coëfficiënten $c_{ij}^0 = c_{ij} + \Delta c_{ij}$ weinig afwijken van de coëfficiënten van (42. 1); ontwikkeling van (42. 2) levert met inachtneming van alleen de lineaire grootheden in de verschillen tusschen constructie en model

$$A^0(\gamma_{ij}^0) = \Sigma c_{ij}\gamma_{ij}^2 + 2\Sigma c_{ij}\gamma_{ij}\Delta\gamma_{ij} + \Sigma \Delta c_{ij}\gamma_{ij}^2 = A(\gamma_{ij}) + \Delta A. \quad (42.3)$$

De totale elastische energie der constructie wordt gegeven door de over het volume der constructie uitgestrekte integraal

$$\iiint A^0(\gamma_{ij}^0)\, dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0.$$

Met behulp van (41. 2) wordt deze integraal in een over het volume van het model uitgestrekte integraal getransformeerd

$$\iiint A^0(\gamma_{ij}^0)\, dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 = \iiint A^0(\gamma_{ij}^0) \frac{\partial(x_1^0, x_2^0, x_3^0)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} dx_1 dx_2 dx_3.$$

Door ontwikkeling en verwaarloozing van grootheden die in de verschillen tusschen constructie en model van den tweeden en hoogeren graad zijn volgt tenslotte voor de elastische energie

$$\begin{aligned} &\iiint A^0(\gamma_{ij}^0)\, dx_1^0 dx_2^0 dx_3^0 = \\ &= \iiint A(\gamma_{ij})\, dx_1 dx_2 dx_3 + \iiint \Delta A\, dx_1 dx_2 dx_3 + \\ &+ \iiint A(\gamma_{ij}) \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3^0}{\partial x_3}\right) dx_1 dx_2 dx_3. \end{aligned} \quad (42.4)$$

Ondersteld wordt dat de op een volume-element in een inwendig punt $x_i$ van het model werkende belastingen $\varrho X_i\, dx_1 dx_2 dx_3$ overeenkomen met in een inwendig punt der constructie $x_i^0 + \Delta x_i^0$ werkende belastingen $\{\varrho X_i + \Delta(\varrho X_i)\} dx_1 dx_2 dx_3$. Het met $x_i^0 + \Delta x_i^0$; correspondeerende punt van het model zij $x_i + \Delta x_i$; de grootheden $\Delta x_i$ kunnen worden opgevat als de op het model betrokken excentriciteiten van de op de constructie werkende belastingen. Eveneens wordt ondersteld dat de op een oppervlakte-element in een punt $x_i$ van het model werkende belastingen $p_i df$ overeenkomen met in een punt $x_i^0 + \Delta x_i^0$ van het oppervlak der constructie werkende belastingen $(p_i + \Delta p_i)\, df$. Zijn de belastingen in grootte en richting ten opzichte van het vaste assenstelsel gegeven, wat in het volgende wordt aangenomen, dan bedraagt de potentieele energie der belastingen voor de constructie (zie 29. 7))



$$\begin{aligned} &- \iiint \sum_{i=1}^{3} \varrho X_i u_i\, dx_1 dx_2 dx_3 - \iint \sum_{i=1}^{3} p_i u_i\, df + \\ &- \iiint \sum_{i=1}^{3} \Delta(\varrho X_i) u_i\, dx_1 dx_2 dx_3 - \iint \sum_{i=1}^{3} \Delta p_i u_i\, df + \\ &- \iiint \sum_{i=1}^{3} \varrho X_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j\, dx_1 dx_2 dx_3 - \iint \sum_{i=1}^{3} p_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j\, df. \end{aligned} \quad (42.5)$$

De totale energie wordt gegeven door de som van de uitdrukkingen (42. 4) en (42. 5). Hierbij is rekening gehouden met alle in de constructie mogelijke kleine afwijkingen ten opzichte van het model. In het volgende wordt echter afgezien van verschillen in elasticiteitsconstanten en in de grootte der belastingen zoodat alleen de invloed van meetkundige afwijkingen en van excentriciteiten der belastingen in beschouwing wordt genomen. De totale energie bedraagt dan

$$\begin{aligned} &\iiint \Sigma c_{ij}\gamma_{ij}^2\, dx_1 dx_2 dx_3 - \iiint \sum_{i=1}^{3} \varrho X_i u_i\, dx_1 dx_2 dx_3 - \iint \sum_{i=1}^{3} p_i u_i\, df + \\ &+ \iiint \left\{ 2\Sigma c_{ij}\gamma_{ij}\Delta\gamma_{ij} + \Sigma c_{ij}\gamma_{ij}^2 \sum_{h=1}^{3} \frac{\partial u_h^0}{\partial x_h} \right\} dx_1 dx_2 dx_3 + \\ &- \iiint \sum_{i=1}^{3} \varrho X_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j\, dx_1 dx_2 dx_3 - \iint \sum_{i=1}^{3} p_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j\, df. \end{aligned} \quad (42.6)$$

De eerste drie termen vertegenwoordigen de energie van het model, de vierde term de energievermeerdering door meetkundige afwijkingen en de laatste termen de energievermeerdering door excentriciteiten der belastingen. Opgemerkt wordt nog dat de integrand van den vierden term evenals die van den eersten term een veelterm is in de afgeleiden der verplaatsingen $u_i$ met termen van den tweeden, derden en vierden graad; de integranden van de laatste termen zijn evenals die van den tweeden en derden term lineair afhankelijk van de verplaatsingen $u_i$.

Voor het volgende biedt het nog voordeelen de meetkundige afwijkingen en de excentriciteiten te schrijven in den vorm

$$u_i^0 = \varepsilon v_i^0, \quad \Delta x_i = \varepsilon \Delta y_i. \quad (42.7)$$

De laatste drie integralen hebben dan den factor $\varepsilon$ gemeen. De grootheden $v_i^0$ en $\Delta y_i$ kenschetsen den aard van de beschouwde verschillen tusschen constructie en model, de factor $\varepsilon$ bepaalt de grootte dezer verschillen en wordt uit dien hoofde de afwijkingsparameter genoemd.

## 43 – VEREENVOUDIGING DER ENERGIE

Evenals in hoofdstuk 3 wordt de belasting gegeven gedacht als het product van een eenheidsbelastingsysteem en een belastingparameter $\lambda$. Bezit het model bij een bepaalde waarde van $\lambda$ een evenwichtstoestand dan is bij kleine verschillen tusschen constructie en model te verwachten dat de constructie bij dezelfde waarde van $\lambda$ een evenwichtstoestand bezit met verplaatsingen die weinig verschillen van de evenwichtsverplaatsingen voor het model. Immers moeten in het grensgeval dat de afwijkingsparameter $\varepsilon$ naar nul convergeert de evenwichtstoestanden der constructie overgaan in die van het model.

Zoo zal de constructie in het algemeen een evenwichtstoestand bezitten welks verplaatsingen weinig afwijken van de verplaatsingen $U(\lambda)$ voor den grondtoestand van het model. Maar ook met de in de omgeving van den kniklast van het model bestaande naburige evenwichtstoestanden van het model zullen in de werkelijke constructie in het algemeen evenwichtstoestanden correspondeeren welker verplaatsingen weinig afwijken van de correspondeerende verplaatsingen van het model en dientengevolge eveneens weinig afwijken van de verplaatsingen $U(\lambda)$ in den grondtoestand van het model. Voor het onderzoek van al deze evenwichtstoestanden is het derhalve doelmatig voor de thans door $v$ aangegeven totale verplaatsingen der constructie te schrijven [1])

$$v = U(\lambda) + u. \tag{43. 1}$$

Na invoering van (43. 1) in (42. 6) worden de integranden ontwikkeld. Voor de som der eerste drie integralen, die tezamen de energie van het model bij de verplaatsingen (43. 1) weergeven, wordt door ontwikkeling in overeenstemming met (22. 1) gevonden

$$P(U(\lambda)+u) = P(U(\lambda)) + P_1^{\lambda}[u] + P_2^{\lambda}[u] + P_3^{\lambda}[u] + P_4^{\lambda}[u], \tag{43. 2}$$

waarbij de afhankelijkheid van den belastingparameter door den index $\lambda$ wordt uitgedrukt. Omdat in (42. 6) geen integralen met integranden van hoogeren graad dan den vierden in de verplaatsingen en haar afgeleiden voorkomen moet gelden (zie ook par. 29)

$$P_m^{\lambda}[u] = 0 \text{ voor } m > 4 \; ; \quad P_4^{\lambda}[u] = P_4[u];$$

bovendien is de grondtoestand voor het model een evenwichtstoestand zoodat aan (22. 3) moet zijn voldaan

$$P_1^{\lambda}[u] = 0.$$

De overige integralen van (42. 6) worden analoog behandeld. Het resultaat wordt geschreven in den vorm

[1]) In het volgende zijn de indices $i$ enz., die de componenten der verplaatsingen onderscheiden, weer weggelaten.



$$\varepsilon Q(U(\lambda)+u) = \varepsilon Q(U(\lambda)) + \varepsilon\left\{Q_1^{\lambda}[u] + Q_2^{\lambda}[u] + Q_3^{\lambda}[u] + Q_4^{\lambda}[u]\right\}, \tag{43. 3}$$

waarin in tegenstelling tot (43. 2) de in $u$ lineaire term $Q_1^{\lambda}[u]$ in het algemeen niet zal ontbreken. Deze term is deels afkomstig van de vierde integraal, deels van de laatste twee integralen van (42. 6). De integrand van het eerste deel is een lineaire veelterm in de afgeleiden der verplaatsingen $u$, welks coëfficiënten alle tenminste één der afgeleiden van $U(\lambda)$ als factor bevatten; de integrand van het tweede deel bevat den factor $\lambda$.

Bij kleine verplaatsingen $u$ zal de term van den laagsten graad in (43. 3) van overheerschende beteekenis zijn zoodat voor een eerste benadering van den invloed van de verschillen tusschen constructie en model met het in rekening brengen van dezen term kan worden volstaan. De energie der constructie bedraagt dan

$$P^{\lambda}[u] + \varepsilon Q^{\lambda}[u] = P_2^{\lambda}[u] + P_3^{\lambda}[u] + P_4[u] + \varepsilon Q_1^{\lambda}[u], \tag{43. 4}$$

waarbij is afgezien van de van geen belang zijnde van $u$ onafhankelijke bijdrage die de energie voor de verplaatsingen $U(\lambda)$ weergeeft.

Het is natuurlijk van bijzonder belang te onderzoeken hoe de constructie zich gedraagt bij belastingen in de omgeving van den kniklast van het model. Hiertoe worden evenals in par. 32 de in (43. 4) voorkomende integralen naar $\lambda - \lambda_1$ ontwikkeld.

$$\begin{aligned} P^{\lambda}[u] + \varepsilon Q^{\lambda}[u] = {} & P_2[u] + (\lambda-\lambda_1)P_2'[u] + (\lambda-\lambda_1)^2 P_2''[u] + \\ & + \ldots + P_3[u] + (\lambda-\lambda_1)P_3'[u] + \ldots + P_4[u] + \\ & + \varepsilon\left\{Q_1[u] + (\lambda-\lambda_1)Q_1'[u] + \ldots\right\}. \end{aligned} \tag{43. 5}$$

De onderstelling van de mogelijkheid van deze ontwikkeling brengt evenals in hoofdstuk 3 mede dat slechts knikproblemen kunnen worden behandeld waarvoor de kniktoestand van het model een vertakkingspunt van het evenwicht vormt.

Voor het onderzoek van de evenwichtstoestanden van het model in de omgeving van den kniklast is voor het geval dat de oplossing $\omega_2$ van het probleem (24. 4) voor den kniktoestand positief is, geschreven [1])

$$u = au_1 + \bar{u} \text{ met } T_{11}[u_1, \bar{u}] = 0.$$

Het is te verwachten dat deze splitsing ook voor het onderzoek

[1]) Omdat verwarring met de indices der coördinaatrichtingen wel is uitgesloten worden de indices voor de eigenfuncties weer rechts onder de letter geplaatst.

der constructie goede diensten zal bewijzen. Invoering in (43. 5) geeft na ontwikkeling en rangschikking (zie ook (32. 4))

$$P^\lambda[u] + \varepsilon Q^\lambda[u] = a\varepsilon\left\{Q_1[u_1] + (\lambda-\lambda_1)\,Q_1'[u_1] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a^2\left\{(\lambda-\lambda_1)\,P_2'[u_1] + (\lambda-\lambda_1)^2\,P_2''[u_1] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a^3\left\{P_3[u_1] + (\lambda-\lambda_1)\,P_3'[u_1] + \ldots.\right\} + a^4P_4[u_1] +$$
$$+ \varepsilon\left\{Q_1[\bar u] + (\lambda-\lambda_1)\,Q_1'[\bar u] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a\left\{(\lambda-\lambda_1)\,P_{11}'[u_1,\bar u] + (\lambda-\lambda_1)^2\,P_{11}''[u_1,\bar u] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a^2\left\{P_{21}[u_1,\bar u] + (\lambda-\lambda_1)\,P_{21}'[u_1,\bar u] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a^3P_{31}[u_1,\bar u] + P_2[\bar u] + (\lambda-\lambda_1)\,P_2'[\bar u] + \ldots. +$$
$$+ aP_{12}[u_1,\bar u] + \ldots. + P_3[\bar u] + \ldots. + P_4[\bar u]. \qquad (43.\,6)$$

Overeenkomstig met par. 32 wordt de verwaarloozing van de na $P_2[\bar u]$ volgende termen gemotiveerd; het resultaat is

$$P^\lambda[u] + \varepsilon Q^\lambda[u] = a\varepsilon\left\{Q_1[u_1] + (\lambda-\lambda_1)\,Q_1'[u_1] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a^2\left\{(\lambda-\lambda_1)\,P_2'[u_1] + (\lambda-\lambda_1)^2\,P_2''[u_1] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a^3\left\{P_3[u_1] + (\lambda-\lambda_1)\,P_3'[u_1] + \ldots.\right\} + a^4P_4[u_1] +$$
$$+ \varepsilon\left\{Q_1[\bar u] + (\lambda-\lambda_1)\,Q_1'[\bar u] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a\left\{(\lambda-\lambda_1)\,P_{11}'[u_1,\bar u] + (\lambda-\lambda_1)^2\,P_{11}''[u_1,\bar u] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a^2\left\{P_{21}[u_1,\bar u] + (\lambda-\lambda_1)\,P_{21}'[u_1,\bar u] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a^3P_{31}[u_1,\bar u] + P_2[\bar u]. \qquad (43.\,7)$$

Hierbij wordt nog opgemerkt dat de in par. 42 ter vereenvoudiging ingevoerde onderstelling ten aanzien van den aard van het belastingsysteem niet essentieel is. Voor algemeenere belastingen kan de toeneming der belastingenergie bij overgang van de verplaatsingen $U(\lambda)$ naar verplaatsingen $U(\lambda) + u$ steeds worden ontwikkeld naar $\lambda - \lambda_1$; de in dat geval aan (43. 2 en 3) toe te voegen termen zijn van denzelfden vorm als de reeds beschouwde zoodat de voorgaande beschouwingen geen principieele wijziging ondergaan.



## 44 – BEREKENING DER FUNCTIES $\bar u$.

De evenwichtstoestanden der constructie worden bepaald door de stationnaire waarden van de energie (43. 7). Deze voorwaarde wordt weer in twee stappen toegepast. Eerst worden de stationnaire waarden van (43. 7) bepaald bij een willekeurige constante waarde van $a$. Vervolgens worden van de aldus verkregen functie $F^\lambda(a)$ wederom de stationnaire waarden bepaald.

De eerste stap wordt uitgevoerd door berekening van de toeneming van (43. 7) bij vervanging der functie $\bar u$ door functies $\bar u + \eta$ met

$$T_{11}[u_1, \eta] = 0; \qquad (44.\,1)$$

het resultaat is

$$P^\lambda[\bar u + \eta] + \varepsilon Q^\lambda[u + \eta] - P^\lambda[u] - \varepsilon Q^\lambda[u] =$$
$$= \varepsilon\left\{Q_1[\eta] + (\lambda-\lambda_1)\,Q_1'[\eta] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a\left\{(\lambda-\lambda_1)\,P_{11}'[u_1,\eta] + (\lambda-\lambda_1)^2\,P_{11}''[u_1,\eta] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a^2\left\{P_{21}[u_1,\eta] + (\lambda-\lambda_1)\,P_{21}'[u_1,\eta] + \ldots.\right\} +$$
$$+ a^3P_{31}[u_1,\eta] + P_{11}[\bar u,\eta] + P_2[\eta]. \qquad (44.\,2)$$

De voorwaarde voor een stationnaire waarde van (43. 7) eischt dat de in $\eta$ lineaire termen van (44. 2) nul zijn; omdat $P_2[\eta]$ onder de conditie (44. 1) steeds positief is, is de gezochte stationnaire waarde een minimum. Analoog met par. 33 wordt de door het nul stellen van de in $\eta$ lineaire termen van (44. 2) verkregen voorwaarde gelijkwaardig gemaakt met een stel differentiaalvergelijkingen en randvoorwaarden door invoering van een niet aan (44. 1) gebonden willekeurig kinematisch mogelijk functiestelsel $\zeta$. De uitvoering van deze herleiding levert geen nieuwe moeilijkheden op zoodat het resultaat onmiddellijk moge worden neergeschreven

$$\varepsilon\left\{Q_1[\zeta] - \frac{Q_1[u_1]}{2T_2[u_1]}\,T_{11}[u_1,\zeta]\right\} +$$
$$+ \varepsilon(\lambda-\lambda_1)\left\{Q_1'[\zeta] - \frac{Q_1'[u_1]}{2T_2[u_1]}\,T_{11}[u_1,\zeta]\right\} + \ldots. +$$
$$+ a(\lambda-\lambda_1)\left\{P_{11}'[u_1,\zeta] - \frac{2P_2'[u_1]}{2T_2[u_1]}\,T_{11}[u_1,\zeta]\right\} +$$
$$+ a(\lambda-\lambda_1)^2\left\{P_{11}''[u_1,\zeta] - \frac{2P_2''[u_1]}{2T_2[u_1]}\,T_{11}[u_1,\zeta]\right\} + \ldots. +$$

$$+ a^2 \left\{ P_{21}[u_1, \zeta] - \frac{3P_3[u_1]}{2T_2[u_1]} T_{11}[u_1, \zeta] \right\} +$$

$$+ a^2 (\lambda - \lambda_1) \left\{ P_{21}'[u_1, \zeta] - \frac{3P_3'[u_1]}{2T_2[u_1]} T_{11}[u_1, \zeta] \right\} + \ldots . +$$

$$+ a^3 \left\{ P_{31}[u_1, \zeta] - \frac{4P_4[u_1]}{2T_2[u_1]} T_{11}[u_1, \zeta] \right\} + P_{11}[\bar{u}, \zeta] = 0; \quad (44.\ 3)$$

door (44. 3) tezamen met de voorwaarde

$$T_{11}[u_1, \bar{u}] = 0 \quad (44.\ 4)$$

worden de functies $\bar{u}$ ondubbelzinnig bepaald.

Deze oplossing kan wegens de lineariteit van (44. 3) en (44. 4) worden geschreven in den vorm

$$\bar{u} = \varepsilon\varphi_0 + \varepsilon(\lambda - \lambda_1)\varphi_0' + \ldots . + a(\lambda - \lambda_1)\varphi_1' + a(\lambda - \lambda_1)^2 \varphi_1'' + \\ + \ldots . + a^2\varphi_2 + a^2(\lambda - \lambda_1)\varphi_2' + \ldots . + a^3\varphi_3, \quad (44.\ 5)$$

waarin $\varphi_1'$, $\varphi_1''$, enz., $\varphi_2$, $\varphi_2'$ enz. en $\varphi_3$ onderscheidenlijk de oplossingen zijn van (33. 6), (33. 7) en (33. 8). De functies $\varphi_0$, $\varphi_0'$ enz. zijn de oplossingen van de vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned} &P_{11}[\bar{u}, \zeta] + Q_1[\zeta] - \frac{Q_1[u_1]}{2T_2[u_1]} T_{11}[u_1, \zeta] = 0\,; \; T_{11}[u_1, \bar{u}] = 0 \\ &P_{11}'[\bar{u}, \zeta] + Q_1'[\zeta] - \frac{Q_1'[u_1]}{2T_2[u_1]} T_{11}[u_1, \zeta] = 0\,; \; T_{11}[u_1, \bar{u}] = 0 \text{ enz.} \end{aligned}\right\} \quad (44.\ 6)$$

Door toepassing van (44. 3) voor $\zeta = \bar{u}$ wordt voor het minimum van (43. 7) gevonden

$$a\varepsilon \left\{ Q_1[u_1] + (\lambda - \lambda_1) Q_1'[u_1] + \ldots . \right\} +$$

$$+ a^2 \left\{ (\lambda - \lambda_1) P_2'[u_1] + (\lambda - \lambda_1)^2 P_2''[u_1] + \ldots . \right\} +$$

$$+ a^3 \left\{ P_3[u_1] + (\lambda - \lambda_1) P_3'[u_1] + \ldots . \right\} + a^4 P_4[u_1] - P_2[\bar{u}].$$

Door invoering van (44. 5) gaat deze uitdrukking met gebruik van de constanten (33. 10) over in

$$F^\lambda(a) = (\lambda - \lambda_1) A_2' a^2 + (\lambda - \lambda_1)^2 A_2'' a^2 + \ldots , + A_3 a^3 +$$

$$+ (\lambda - \lambda_1) A_3' a^3 + \ldots . + A_4 a^4 + \ldots . + \varepsilon a Q_1[u_1] +$$

$$+ \varepsilon a(\lambda - \lambda_1) \left\{ Q_1'[u_1] - P_{11}[\varphi_0, \varphi_1'] \right\} + \ldots . - \varepsilon a^2 P_{11}[\varphi_0, \varphi_2] - \ldots . +$$

$$- \varepsilon^2 P_2[\varphi_0] - \varepsilon^2 (\lambda - \lambda_1) P_{11}[\varphi_0, \varphi_0'] - \ldots . \quad (44.\ 7)$$



Evenals in (33. 11) zijn hierin de termen van hoogeren dan den vierden graad in $\lambda - \lambda_1$ en $a$ weggelaten. De van $a$ onafhankelijke termen oefenen geen invloed op de afgeleiden van $F^\lambda(a)$ en kunnen derhalve verder buiten beschouwing blijven. De belangrijkste invloed van de verschillen tusschen constructie en model komt in (44. 7) tot uitdrukking door den eersten term met een factor $\varepsilon$. Tenzij $Q_1[u_1]$ nul is voor alle mogelijke soorten van meetkundige afwijkingen en excentriciteiten, welk geval in het volgende buiten beschouwing blijft, kan dan voor een eerste benadering van dezen invloed met het in rekening brengen van dezen eersten term worden volstaan.

Analoog met par. 34 kan de benadering (44. 7) worden verbeterd. Deze verbetering is weer noodzakelijk indien zoowel $A_3$ als $A_4$ nul is. Van een verbetering van den benaderden invloed der verschillen tusschen constructie en model wordt hierbij afgezien. De energie der constructie wordt dan gegeven door (34. 8) vermeerderd met den correctieterm

$$\varepsilon a\, Q_1[u_1] = \varepsilon B_1 a. \quad (44.\ 8)$$

In (44. 7), resp. de tweede benadering ((34. 8) vermeerderd met (44. 8)), is ten opzichte van alle termen die een factor $\lambda - \lambda_1$ bevatten de eerste term van overheerschende beteekenis. Van de termen die geen factor $\lambda - \lambda_1$ of $\varepsilon$ bevatten is voorts die van den laagsten graad in $a$ overheerschend; zij dit de term $A_n a^n$ dan kan $F^\lambda(a)$ worden vereenvoudigd tot (zie ook par. 35)

$$F^\lambda(a) = \varepsilon B_1 a + (\lambda - \lambda_1) A_2' a^2 + A_n a^n. \quad (44.\ 9)$$

## 45 - DE EVENWICHTSTOESTANDEN

De evenwichtstoestanden zijn gekenmerkt door stationnaire waarden van de energie, dus bij de benadering (44. 9) door

$$f^\lambda(a) \equiv \frac{dF^\lambda(a)}{da} = \varepsilon B_1 + 2(\lambda - \lambda_1) A_2' a + n A_n a^{n-1} = 0. \quad (45.\ 1)$$

Omdat $F^\lambda(a)$ het minimum is van (43. 7) bij constante waarde van $a$ is aan den stabiliteitseisch door een door (45. 1) bepaalden evenwichtstoestand dan en alleen dan voldaan indien de bijbehoorende stationnaire waarde van $F^\lambda(a)$ ook weer een minimum is. De over de stabiliteit beslissende grootheid is derhalve de tweede afgeleide van (44. 9)

$$\frac{d^2F^\lambda(a)}{da^2} = \frac{df^\lambda(a)}{da} = 2(\lambda - \lambda_1) A_2' + n(n-1) A_n a^{n-2}. \quad (45.\ 2)$$

Uit (45. 2) blijkt dat in een $\lambda - a$ diagram voor de constructie de stabiele combinaties van $\lambda$ en $a$ zijn gescheiden van de instabiele combinaties door dezelfde scheidingslijn als voor het model (zie par. 35); mitsdien is een evenwichtstoestand der constructie die voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in een evenwichtstoestand van het model gelijktijdig met laatstgenoemden toestand stabiel of instabiel. Het evenwicht der constructie is op de stabiliteitsgrens indien het beeldpunt in het $\lambda - a$ diagram op de scheidingslijn valt. Omdat de derde afgeleide van (44. 9) behalve voor $a = 0$ ongelijk nul is, is het evenwicht op de stabiliteitsgrens, eventueel met uitzondering van het geval $a = 0$, $\lambda = \lambda_1$, instabiel zoodat de bovenbedoelde scheidingslijn, eventueel met uitzondering van het punt $a = 0$, $\lambda = \lambda_1$, tot het instabiele gebied moet worden gerekend.

In overeenstemming met par. 35 is $A_2'$ steeds negatief. $B_1$ kan steeds positief worden gesteld daar verschillen tusschen constructie en model van tegengesteld teeken reeds door negatieve waarden van $\varepsilon$ worden voorgesteld. Onderscheid moet echter worden gemaakt tusschen oneven en even waarden van $n$, en in het laatste geval bovendien tusschen positieve en negatieve waarden van $A_n$. Bij oneven waarden van $n$ correspondeert met een bij $\varepsilon$ en $A_n$ behoorende evenwichtswaarde $a$ een bij $-\varepsilon$ en $-A_n$ behoorende evenwichtswaarde $-a$; ook de stabiliteit is bij correspondeerende toestanden blijkens (45. 2) dezelfde zoodat voor dit geval met de beschouwing van positieve waarden van $A_n$ kan worden volstaan. Bij even waarden van $n$ is het voldoende alleen rekening te houden met positieve waarden van $\varepsilon$ daar met een bij $\varepsilon$ behoorende evenwichtswaarde $a$ een bij $-\varepsilon$ behoorende evenwichtswaarde $-a$ correspondeert met dezelfde stabiliteit. De behandeling van (45. 1) en (45. 2) kan derhalve worden beperkt tot de volgende vier gevallen

*a*. $n$ oneven, $A_n > 0$, $\varepsilon > 0$;
*b*. $n$ oneven, $A_n > 0$, $\varepsilon < 0$;
*c*. $n$ even , $A_n < 0$, $\varepsilon > 0$;
*d*. $n$ even , $A_n > 0$, $\varepsilon > 0$.

Voor de gevallen *a* t/m *c* is het evenwicht van het model in den kniktoestand instabiel, in geval *d* is deze toestand stabiel.

451 – GEVAL *a*.

Uit (45. 1) volgt dat $f^\lambda(a)$ positief is voor de bij den grondtoestand en den naburigen evenwichtstoestand van het model behoorende waarden van $a$

$$a = 0 \text{ en } a = -\left\{\frac{2(\lambda - \lambda_1) A_2'}{n A_n}\right\}^{\frac{1}{n-2}}. \qquad (45.3)$$



Uit (45. 2) volgt

$$\frac{df^\lambda(a)}{da} \begin{matrix} > 0 \text{ voor } a > \\ = 0 \text{ voor } a = \\ < 0 \text{ voor } a < \end{matrix} -\left\{\frac{2(\lambda - \lambda_1) A_2'}{n(n-1) A_n}\right\}^{\frac{1}{n-2}}. \qquad (45.4)$$

Dientengevolge kan verg. (45. 1) ten hoogste twee wortels bezitten, die dan tusschen de door (45. 3) bepaalde waarden van $a$ liggen. Deze wortels zijn reëel indien het minimum van $f^\lambda(a)$, dat voor de door (45. 4) bepaalde waarde van $a$ wordt bereikt, negatief of nul is

$$Min\, f^\lambda(a) = \varepsilon B_1 - 2(\lambda - \lambda_1) A_2' \left\{\frac{2(\lambda - \lambda_1) A_2'}{n(n-1) A_n}\right\}^{\frac{1}{n-2}} +$$
$$+ n A_n \left\{\frac{2(\lambda - \lambda_1) A_2'}{n(n-1) A_n}\right\}^{\frac{n-1}{n-2}} =$$
$$= \varepsilon B_1 - \left\{2(\lambda - \lambda_1) A_2'\right\}^{\frac{n-1}{n-2}} . n^{-\frac{1}{n-2}} (n-1)^{-\frac{n-1}{n-2}} (n-2) A_n^{-\frac{1}{n-2}} \leqq 0.$$

Aan deze voorwaarde wordt dan en alleen dan voldaan indien geldt

$$\left\{2(\lambda - \lambda_1) A_2'\right\}^{n-1} \frac{(n-2)^{n-2}}{n(n-1)^{n-1} A_n} \geqq (\varepsilon B_1)^{n-2} \quad \text{of}$$

$$|\lambda - \lambda_1| \geqq \tfrac{1}{2} n^{\frac{1}{n-1}} (n-1)(n-2)^{-\frac{n-2}{n-1}} \frac{A^{\frac{1}{n-1}}}{-A_2'} (\varepsilon B_1)^{\frac{n-2}{n-1}}. \qquad (45.5)$$

Door (45. 5) worden twee waarden $\lambda^*$ en $\lambda^{**}$ bepaald zoodanig dat vergelijking (45. 1) twee reëele oplossingen bezit voor $\lambda < \lambda^* < \lambda_1$ en voor $\lambda > \lambda^{**} > \lambda_1$; voor $\lambda = \lambda^*$ en $\lambda = \lambda^{**}$ bezit zij twee samenvallende reëele wortels, voor $\lambda^* < \lambda < \lambda^{**}$ geen enkelen reëelen wortel. In het $\lambda - a$ diagram vormen de voor $\lambda \leqq \lambda^*$ en $\lambda \geqq \lambda^{**}$ bestaande evenwichtstoestanden twee gescheiden takken die onderscheidenlijk voor $\lambda = \lambda^*$ en $\lambda = \lambda^{**}$ een maximum en een minimum van $\lambda$ bezitten. Deze takken bestaan beide uit een deel dat voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in den grondtoestand van het model en uit een deel dat voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in den naburigen evenwichtstoestand van het model (zie ook fig. 3*a*, blz. 103).

Uit (45. 2) volgt met gebruik van (45. 4) dat het evenwicht in den bij de grootste waarde van $a$ behoorenden toestand stabiel, in den anderen toestand instabiel is. Voor $\lambda = \lambda^*$ en $\lambda = \lambda^{**}$ is het evenwicht op de stabiliteitsgrens.

Van bijzonder belang is de evenwichtstoestand die voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in den grondtoestand van het model bij belastingen be-

neden den kniklast van het model. Immers deze toestand, de z.g. natuurlijke toestand, zal uit den onvervormden toestand worden verkregen bij geleidelijke vergrooting van den belastingparameter $\lambda$. Omdat voor $\lambda < \lambda^*$ beide evenwichtswaarden van $a$ negatief zijn behoort bij dezen toestand de grootste dezer evenwichtswaarden zoodat deze toestand voor $\lambda < \lambda^*$ stabiel is; voor $\lambda = \lambda^*$ wordt de stabiliteitsgrens bereikt zoodat $\lambda^*$ den kniklast der constructie bepaalt. Deze kniklast is lager dan die van het model; uit (45. 5) volgt

$$\frac{d\lambda^*}{d\varepsilon} = -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{n\,(n-2)\,A_n}{B_1}\right\}^{\frac{1}{n-1}} \frac{B_1}{-A_2}\,\varepsilon^{-\frac{1}{n-1}}, \qquad (45.\,6)$$

zoodat in een diagram van den belastingparameter bij den kniklast der constructie als functie van den afwijkingsparameter $\varepsilon$ de

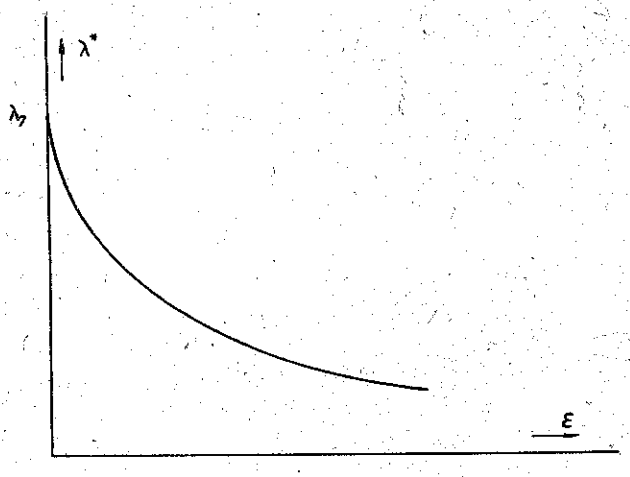



Fig. 2.

raaklijn in het punt $\varepsilon = 0$, $\lambda^* = \lambda_1$ samenvalt met de $\lambda^*$-as (fig. 2). Bij een kleine doch eindige waarde van $\varepsilon$, d. w. z. bij kleine verschillen tusschen constructie en model, kan derhalve de kniklast der constructie belangrijk beneden dien van het model liggen. Deze daling wordt in hoofdzaak beïnvloed door den exponent van $\varepsilon$ in (45. 6); zij is sterker naarmate $n$ kleiner is.

452. GEVAL $b$ ($n$ oneven, $A_n > 0$, $\varepsilon < 0$).

Uit (45. 1) volgt dat $f^\lambda(a)$ negatief is voor de bij den grondtoestand en den naburigen evenwichtstoestand van het model



behoorende waarden van $a$ (45. 3). Omdat (45. 4) ook in dit geval geldt zijn er steeds twee evenwichtswaarden van $a$, welke door de evenwichtswaarden van het model (45. 3) worden gescheiden. De bij de grootste waarde van $a$ behoorende toestand is steeds stabiel, de andere instabiel. Ook in dit geval bestaat het $\lambda - a$ diagram uit twee afzonderlijke takken, waarvan thans één geheel stabiel, de andere geheel instabiel is. Beide takken bestaan weer uit een deel dat voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in den grondtoestand en een deel dat voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in den naburigen evenwichtstoestand van het model (zie ook fig. 3*b*, blz. 103).

De natuurlijke evenwichtstoestand die voor $\lambda < \lambda_1$ bij tot nul convergeerende waarde van $\varepsilon$ overgaat in den grondtoestand van het model behoort bij de grootste waarde van $a$ en ligt mitsdien op den stabielen tak. Bij geleidelijke vergrooting van den belastingparameter $\lambda$ wordt derhalve de kniklast van het model zonder knikverschijnselen gepasseerd.

453. GEVAL $c$ ($n$ even, $A_n < 0$, $\varepsilon < 0$).

Voor $\lambda > \lambda_1$ is (45. 2) steeds negatief. Daar $f^\lambda(a)$ voor $a = 0$ positief is bezit verg. (45. 1) alsdan één reëelen positieven wortel; de bijbehoorende evenwichtstoestand is instabiel.

Voor $\lambda < \lambda_1$ volgt uit (45. 1) dat voor de bij den grondtoestand en de naburige evenwichtstoestanden van het model behoorende waarden van $a$

$$a = 0 \text{ en } a^{n-2} = -\frac{2\,(\lambda - \lambda_1)\,A_2'}{nA_n} \qquad (45.\,7)$$

$f^\lambda(a)$ positief is. Uit (45. 2) volgt

$$\frac{df^\lambda(a)}{da} \gtreqless 0 \text{ voor } a^{n-2} \lesseqgtr -\frac{2\,(\lambda - \lambda_1)\,A_2'}{n\,(n-1)\,A_n}. \qquad (45.\,8)$$

Dientengevolge bezit verg. (45. 1) steeds een positieven wortel voor welken de bijbehoorende evenwichtstoestand instabiel is; deze wortel is grooter dan de door (45. 7) bepaalde positieve waarde van $a$ voor den naburigen evenwichtstoestand van het model.

Daarenboven kan verg. (45. 1) nog twee negatieve wortels bezitten, gelegen tusschen

$$a = -\left\{-\frac{2\,(\lambda - \lambda_1)\,A_2'}{nA_n}\right\}^{\frac{1}{n-2}} \text{ en } a = 0; \qquad (45.\,9)$$

noodzakelijk en voldoende voor het bestaan van deze wortels is dat het tusschen de waarden (45. 9) gelegen minimum van $f^\lambda(a)$, dat voor de door (45. 8) bepaalde negatieve waarde van $a$ wordt bereikt, negatief of nul is

$$Min\, f^{\lambda}(a) = \varepsilon B_1 - 2(\lambda - \lambda_1) A_2' \left\{\frac{2(\lambda-\lambda_1) A_2'}{-n(n-1) A_n}\right\}^{\frac{1}{n-2}} +$$

$$- nA_n \left\{\frac{2(\lambda-\lambda_1) A_2'}{-n(n-1) A_n}\right\}^{\frac{n-1}{n-2}} =$$

$$= \varepsilon B_1 - \left\{2(\lambda-\lambda_1) A_2'\right\}^{\frac{n-1}{n-2}} n^{-\frac{1}{n-2}} (n-1)^{-\frac{n-1}{n-2}} (n-2) (-A_n)^{-\frac{1}{n-2}} \leqq 0.$$

Aan deze voorwaarde wordt dan en alleen dan voldaan indien geldt

$$\left\{2(\lambda-\lambda_1) A_2'\right\}^{n-1} \frac{(n-2)^{n-2}}{n(n-1)^{n-1}(-A_n)} \geqq (\varepsilon B_1)^{n-2} \quad \text{of}$$

$$\lambda - \lambda_1 \leqq -\tfrac{1}{2} n^{\frac{1}{n-1}} (n-1)(n-2)^{-\frac{n-2}{n-1}} \frac{(-A_n)^{\frac{1}{n-1}}}{-A_2'} (\varepsilon B_1)^{\frac{n-2}{n-1}}. \quad (45.10)$$

Door (45. 10) wordt een waarde $\lambda^*$ bepaald zoodanig dat verg. (45. 1) één positieven wortel bezit voor $\lambda > \lambda^*$, een positieven en twee negatieve wortels voor $\lambda < \lambda^*$; voor $\lambda = \lambda^*$ vallen de negatieve wortels samen. In het $\lambda - a$ diagram vormen de positieve en negatieve evenwichtswaarden van $a$ twee gescheiden takken; de negatieve tak bezit voor $\lambda = \lambda^*$ een maximum van $\lambda$. Beide takken bestaan weer uit een deel dat voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in den grondtoestand van het model en een deel dat voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in een naburigen evenwichtstoestand van het model (zie ook fig. 3*c*, blz. 103).

Uit (45. 2) volgt met gebruik van (45. 8) dat de kleinste negatieve wortel een instabielen, de grootste negatieve wortel een stabielen evenwichtstoestand bepaalt. Voor $\lambda = \lambda^*$ is het evenwicht op de stabiliteitsgrens.

De natuurlijke evenwichtstoestand wordt in dit geval bepaald door de grootste negatieve waarde van $a$. Deze toestand is voor $\lambda < \lambda^*$ stabiel; voor $\lambda = \lambda^*$ wordt de stabiliteitsgrens bereikt zoodat $\lambda^*$ den kniklast der constructie bepaalt. Deze kniklast is weer lager dan die van het model; analoog met (45. 6) volgt uit (45. 10)

$$\frac{d\lambda^*}{d\varepsilon} = -\tfrac{1}{2} \left\{\frac{-n(n-2) A_n}{B_1}\right\}^{\frac{1}{n-1}} \frac{B_1}{-A_2'} \varepsilon^{-\frac{1}{n-1}}. \quad (45.11)$$

Aan (45. 11) kunnen dezelfde conclusies worden verbonden als aan (45. 6); in het bijzonder geldt fig. 2 ook voor dit geval.



454. GEVAL *d* ($n$ even, $A_n > 0$, $\varepsilon > 0$).

Voor $\lambda < \lambda_1$ is (45. 2) steeds positief. Daar $f^{\lambda}(a)$ voor $a = 0$ positief is bezit de vergelijking (45. 1) één reëelen negatieven wortel; de bijbehoorende evenwichtstoestand is steeds stabiel.

Voor $\lambda > \lambda_1$ volgt uit (45. 1) dat voor de bij den grondtoestand en de naburige evenwichtstoestanden van het model behooren de waarden van $a$ (45. 7) $f^{\lambda}(a)$ positief is. Uit (45. 2) volgt

$$\frac{df^{\lambda}(a)}{da} \gtreqless 0 \quad \text{voor} \quad a^{n-2} \gtreqless -\frac{2(\lambda-\lambda_1) A_2'}{n(n-1) A_n}. \quad (45.12)$$

Dientengevolge bezit de vergelijking (45. 1) steeds een negatieven wortel waarvoor de bijbehoorende evenwichtstoestand stabiel is.

Bovendien kan verg. (45. 1) nog twee positieve wortels bezitten, gelegen tusschen

$$a = 0 \quad \text{en} \quad a = \left\{-\frac{2(\lambda-\lambda_1) A_2'}{nA_n}\right\}^{\frac{1}{n-2}}; \quad (45.13)$$

noodzakelijk en voldoende voor het bestaan van deze wortels is dat het tusschen de waarden van $a$ (45. 13) gelegen minimum van $f^{\lambda}(a)$, dat voor de door (45. 12) bepaalde positieve waarde van $a$ wordt bereikt, negatief of nul is. Deze eisch leidt analoog met het vorig geval tot de voorwaarde

$$\lambda - \lambda_1 \geqq \tfrac{1}{2} n^{\frac{1}{n-1}} (n-1)(n-2)^{-\frac{n-2}{n-1}} \frac{A_n^{\frac{1}{n-1}}}{-A_2'} (\varepsilon B_1)^{\frac{n-2}{n-1}}. \quad (45.14)$$

Door (45. 14) wordt een waarde $\lambda^{**}$ bepaald zoodanig dat verg. (45. 1) alleen een negatieven wortel heeft voor $\lambda < \lambda^{**}$, een negatieven en twee positieve wortels voor $\lambda > \lambda^{**}$ voor $\lambda = \lambda^{**}$ vallen de positieve wortels samen. In het $\lambda - a$ diagram vormen de positieve en negatieve evenwichtswaarden van $a$ twee gescheiden takken; de positieve tak bezit voor $\lambda = \lambda^{**}$ een minimum. Ook in dit geval bestaan beide takken uit een deel dat voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in den grondtoestand van het model en een deel dat voor $\varepsilon \to 0$ overgaat in een naburigen evenwichtstoestand van het model (zie ook fig. 3*d*, blz. 103).

Uit (45. 2) volgt dat de grootste positieve wortel een stabielen, de kleinste positieve wortel een instabielen evenwichtstoestand bepaalt; voor $\lambda = \lambda^{**}$ is het evenwicht op de stabiliteitsgrens.

De natuurlijke evenwichtstoestand der constructie wordt in dit geval bepaald door den negatieven wortel van (45. 1) en ligt derhalve op den stabielen tak. Mitsdien wordt bij geleidelijke vergrooting van den belastingparameter $\lambda$ de kniklast van het model zonder knikverschijnselen gepasseerd.

**455.** CONCLUSIES.

De in het voorgaande verkregen resultaten kunnen als volgt kort worden samengevat.

Door kleine afwijkingen van de constructie ten opzichte van het model worden de bij het model elkaar voor $\lambda = \lambda_1$ snijdende takken van het $\lambda - a$ diagram, die den grondtoestand en de naburige evenwichtstoestanden voorstellen, opgelost in twee geheel gescheiden takken. Beide takken bestaan uit een deel dat voor tot nul afnemende afwijkingen den grondtoestand van het model oplevert en een deel dat voor tot nul afnemende afwijkingen een naburigen evenwichtstoestand van het model oplevert. Eén dezer takken geeft de z.g. natuurlijke evenwichtstoestanden van de constructie weer die bij geleidelijke vergrooting van de belasting uit den onvervormden toestand ontstaan. De volgende beschouwingen blijven beperkt tot dezen belangrijksten natuurlijken tak.

Is het evenwicht van het model in den kniktoestand instabiel, waarbij de beslissing wordt geleverd door een grootheid van oneven orde ($A_3$, $A_5$ enz.), dan bezit de constructie voor positieve waarden van den afwijkingsparameter $\varepsilon$ een kniklast die belangrijk kleiner is dan de kniklast van het model; deze daling van den kniklast is sterker naarmate $n$ kleiner is. Voor negatieve waarden van $\varepsilon$ daarentegen wordt bij opvoering van de belasting der constructie de kniklast van het model zonder knikverschijnselen gepasseerd.

Is het evenwicht van het model in den kniktoestand instabiel, waarbij de beslissing wordt geleverd door een grootheid van even orde ($A_4$, $A_6$ enz.), dan bezit de constructie zoowel voor positieve als voor negatieve waarden van $\varepsilon$ een kniklast die belangrijk kleiner is dan de kniklast van het model; deze daling van den kniklast is weer sterker naarmate $n$ kleiner is.

Is het evenwicht van het model in den kniktoestand stabiel dan wordt bij opvoering van de belasting van de constructie de kniklast van het model zonder knikverschijnselen gepasseerd.

Niet alleen de grootte van den kniklast wordt door de afwijkingen van de constructie ten opzichte van het model belangrijk beinvloed, ook de aard van het knikverschijnsel is bij constructie en model geheel verschillend. Terwijl de kniklast van het model een vertakkingspunt van het evenwicht bepaalt wordt bij de constructie door den kniklast, welke een maximum van belasting is, een doorslagpunt van het evenwicht bepaald. Daar het model als een bijzonder geval der constructie (het geval $\varepsilon = 0$) kan worden beschouwd schijnt het knikprobleem met een vertakkingspunt als een bijzonder geval van het algemeenere knikprobleem met een doorslagpunt te moeten worden opgevat [1]).

[1]) Deze bewering kan alleen dan algemeen worden gehandhaafd indien in het geval *d* (par. 454) het bij den tweeden, niet natuurlijken, tak van het $\lambda - a$ diagram behoorende minimum $\lambda^{**}$ van $\lambda$ ook een doorslagpunt wordt genoemd (fig. 3*d*, blz. 103).



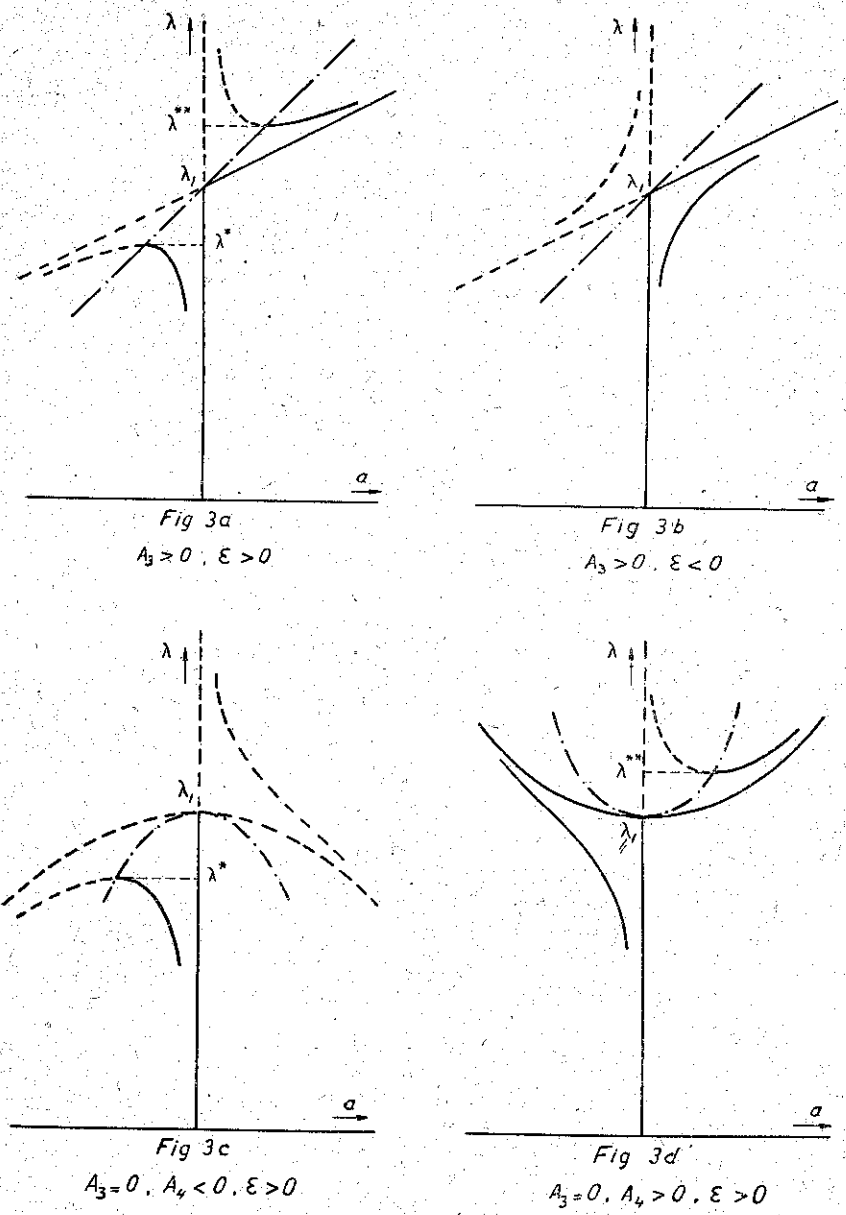



Fig. 3

Voor de techniek is van het meeste belang de bij instabielen kniktoestand van het model mogelijke afneming van den kniklast door kleine afwijkingen. De grootste toelaatbare belasting wordt bepaald door den kniklast der constructie bij de ongunstigste als mogelijk beschouwde afwijkingen van de constructie ten opzichte van het model. De berekening van deze toelaatbare belasting is dus slechts mogelijk op grond van een analyse der voorkomende verschillen tusschen constructie en model. Natuurlijk kan de kniklast der constructie ook experimenteel worden vastgesteld. Door de sterke afhankelijkheid van den kniklast van de grootte der afwijkingen (zie fig. 2) zullen de proefresultaten echter een vrij groote spreiding vertoonen zoodat voor een betrouwbare bepaling van den in het ongunstigste geval mogelijken kniklast meestal wel een tamelijk groot aantal proeven noodig zal zijn [1]).

### 456. VOORBEELDEN.

Eenige typische voorbeelden van $\lambda - a$ diagrammen zijn in de figuren $3a$ t/m $3d$ weergegeven, onderscheidenlijk voor de gevallen

$$A_3 > 0,\ \varepsilon > 0\ ;\quad A_3 > 0,\ \varepsilon < 0\ ;\quad A_3 = 0,\ A_4 < 0,\ \varepsilon > 0\ ;$$
$$A_3 = 0,\ A_4 > 0,\ \varepsilon > 0.$$

In deze figuren zijn ook de voor het model geldende krommen aangegeven; de stabiele takken zijn evenals in de figuren 1 door getrokken lijnen aangegeven, de instabiele door gestippelde lijnen. Door een streep-stip lijn wordt de scheidingslijn tusschen de gebieden van stabiele en van instabiele combinaties van $\lambda$ en $a$ aangegeven.

Van de diagrammen is alleen een gedeelte in de omgeving van $\lambda = \lambda_1$ geteekend. Dit hangt samen met de omstandigheid dat de resultaten van deze paragraaf slechts geldigheid bezitten in een meer of minder beperkte omgeving van den kniklast van het model.

## 46 – BIJZONDERE GEVALLEN

De voorgaande beschouwingen steunen op de onderstelling dat voor den kniktoestand van het model de oplossing $\omega_2$ van het minimumprobleem (24. 4) positief is. De invloed der afwijkingen van de constructie ten opzichte van het model komt dan in het minimum der energie bij constante waarde van $a$ tot uitdrukking door de toevoeging van den term $\varepsilon B_1 a$ aan den vorm (35. 2).

[1]) Hierbij wordt nog eens uitdrukkelijk opgemerkt dat alle beschouwingen vooronderstellen dat in geen enkel punt der constructie de elasticiteitsgrens van het materiaal wordt overschreden.



Het geval

$$\omega_2 = \omega_3 = \ldots = \omega_{h-1} = 0,\ \omega_h > 0$$

kan overeenkomstig worden behandeld door voor de verplaatsingen $u$ te schrijven (zie (36. 8))

$$u = \sum_{j=1}^{h-1} a_j u_j + \bar{u} \text{ met } T_{11}[u_j, \bar{u}] = 0.\ j = 1, 2, \ldots . h - 1. \quad (36.\ 8)$$

Na invoering van deze uitdrukking in (43. 5) wordt weer het minimum der energie bij constante waarden van $a_j$ bepaald. Deze behandeling, welke een synthese vormt van de in par. 36 en par. 44 gegeven beschouwingen, levert geen enkele nieuwe moeilijkheid op zoodat de uitdrukking voor het bedoelde minimum onmiddellijk wordt neergeschreven

$$F^\lambda(a_j) = \varepsilon \overline{Q}_1(a_j) + (\lambda - \lambda_1)\,\overline{P}_2'(a_j) + \overline{P}_n(a_j)\ ;\ n=3 \text{ of } n=4. \quad (46.\ 1)$$

Het verschil tusschen constructie en model wordt hier uitgedrukt door den term

$$\varepsilon \overline{Q}_1(a_j) = \varepsilon \sum_{j=1}^{h-1} a_j Q_1[u_j].$$

De evenwichtstoestanden zijn gekenmerkt door stationnaire waarden van (46. 1), d. w. z. door de $h - 1$ vergelijkingen

$$\frac{\partial F^\lambda}{\partial a_i} = \varepsilon \frac{\partial \overline{Q}_1}{\partial a_i} + (\lambda - \lambda_1) \frac{\partial \overline{P}_2'}{\partial a_i} + \frac{\partial \overline{P}_n}{\partial a_i} = 0. \quad (46.\ 2)$$

De stabiliteit van de door (46. 2) bepaalde evenwichtstoestanden wordt beheerscht door den vorm

$$\sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-1} \frac{\partial^2 F^\lambda}{\partial a_i\,\partial a_j} \Delta a_i \Delta a_j = (\lambda - \lambda_1) \sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-1} \frac{\partial^2 \overline{P}_2'}{\partial a_i\,\partial a_j} \Delta a_i \Delta a_j +$$
$$+ \sum_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{h-1} \frac{\partial^2 \overline{P}_n}{\partial a_i\,\partial a_j} \Delta a_i \Delta a_j. \quad (46.\ 3)$$

Het algemeen onderzoek van de evenwichtstoestanden stuit in dit geval op groote moeilijkheden zoodat hiervan wordt afgezien. In hoofdstuk 7 wordt een bijzonder geval behandeld.

## 47 – UITBREIDING DER THEORIE

De in het voorgaande ontwikkelde theorie is evenals de algemeene theorie van hoofdstuk 3 beperkt tot een van geval tot

geval verschillend kleine omgeving van den kniklast; dit komt o.a. tot uitdrukking in verg. (45. 1) die voor $\lambda = 0$ niet de bij den onvervormden toestand behoorende oplossing $a = 0$ bezit. Het is derhalve ook hier van belang de theorie uit te breiden voor verder van de knikbelasting verwijderde belastingen. De mogelijkheid hiertoe bestaat evenals in par. 38 indien de verplaatsingen $U(\lambda)$ van den grondtoestand van het model zóó klein zijn dat grootheden van den tweeden en hoogeren graad in $U(\lambda)$ en haar afgeleiden mogen worden verwaarloosd ten opzichte van grootheden welke lineair van $U(\lambda)$ en haar afgeleiden afhangen, terwijl ook de verplaatsingen $u$ uit den verplaatsingstoestand $U(\lambda)$ klein zijn; voorts wordt aangenomen dat de belastingen in grootte en richting ten opzichte van het vaste assenstelsel zijn gegeven. Met behulp van (38. 3) kan nu voor (43. 4) worden geschreven

$$P^\lambda[u] + \varepsilon Q^\lambda[u] = P_2^0[u] + \lambda P_2'[u] + P_3^0[u] + \lambda P_3'[u] + \\ + P_4^0[u] + \varepsilon Q_1^\lambda[u]. \qquad (47.1)$$

In par. 43 werd opgemerkt dat $Q_1^\lambda[u]$ bestaat uit een deel dat den factor $\lambda$ bevat en een deel welks integrand een lineaire veelterm is in de afgeleiden van $u$ met coëfficiënten die één of meer der afgeleiden van $U(\lambda)$ als factor bevatten; van dit laatste deel behoeven thans alleen de in de afgeleiden van $U(\lambda)$ lineaire coëfficiënten in rekening te worden gebracht waarna met gebruik van (38. 1) volgt

$$Q_1^\lambda[u] = \lambda Q_1'[u]. \qquad (47.2)$$

In de onderstelling dat de oplossing $\omega_2$ van het eerste probleem (38. 6) positief is wordt ook thans gesteld

$$u = au_1 + \bar{u} \text{ met } P_{11}^0[u_1, \bar{u}] = 0. \qquad (47.3)$$

Invoering in (47. 1) geeft na ontwikkeling en rangschikking

$$P^\lambda[u] + \varepsilon Q^\lambda[u] = \varepsilon\lambda a Q_1'[u_1] + a^2\left\{P_2^0[u_1] + \lambda P_2'[u_1]\right\} + \\ + a^3\left\{P_3^0[u_1] + \lambda P_3'[u_1]\right\} + a^4 P_4^0[u_1] + \varepsilon\lambda Q_1'[\bar{u}] + \\ + a^2\left\{P_{21}^0[u_1, \bar{u}] + \lambda P_{21}'[u_1, \bar{u}]\right\} + a^3 P_{31}^0[u_1, \bar{u}] + \\ P_2^0[\bar{u}] + \lambda P_2'[\bar{u}]. \qquad (47.4)$$

De hierin toegepaste verwaarloozing van de na $\lambda P_2'[\bar{u}]$ volgende termen (zie (38. 12)) wordt evenals in par. 38 gemotiveerd voor $\lambda < \lambda_2$.

De evenwichtstoestanden zijn gekenmerkt door stationnaire waarden van de energie. Bij constante waarde van $a$ blijkt (47. 4)



een minimum te bezitten voor $\lambda < \lambda_2$. Dit minimum wordt bereikt voor de functies

$$\bar{u} = a^2\varphi_2^\lambda + a^3\varphi_3^\lambda + \varepsilon\lambda\varphi_0^\lambda, \qquad (47.5)$$

waarvan de eerste twee termen tezamen de oplossing (38. 20) vormen van (38. 18) en (38. 19). De laatste term wordt bepaald als de oplossing van

$$P_{11}^0[\bar{u}, \zeta] + \lambda P_{11}'[\bar{u}, \zeta] + \varepsilon\lambda\left\{Q_1'[\zeta] - \frac{Q_1'[u_1]}{2P_2^0[u_1]} P_{11}^0[u_1, \zeta]\right\} = 0; \\ P_{11}^0[u_1, \bar{u}] = 0. \qquad (47.6)$$

De afleiding van deze resultaten, die geheel overeenkomt met par. 38, wordt hier achterwege gelaten. Ook de berekening van het minimum verloopt parallel met het voorgaande. Met invoering van de afkorting

$$Q_1'[u_1] = B_1' \qquad (47.7)$$

en met gebruik van (38. 21) volgt

$$F^\lambda(a) = \varepsilon\lambda B_1' a + \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) A_2^0 a^2 + (A_3^0 + \lambda A_3')\, a^3 + A_4^\lambda a^4. \qquad (47.8)$$

Hierin zijn evenals in (38. 22) termen van den vijfden en hoogeren graad in $a$ verwaarloosd. Bovendien is van de termen die den factor $\varepsilon$ bevatten weer alleen de term van den laagsten graad in $a$, de lineaire term, in rekening gebracht.

De moeilijkheden die achtereenvolgens ontstaan bij nadering van $\lambda$ tot $\lambda_2$, $\lambda_3$ enz. worden op dezelfde wijze als in par. 38 overwonnen zoodat het niet noodig is hierop nader in te gaan. Ook de bepaling van de stationnaire waarden van (47. 8) en het stabiliteitsonderzoek der bijbehoorende evenwichtstoestanden ondervindt geen moeilijkheden zoodat kan worden volstaan met verwijzing naar de hoofdstukken 6 en 7 waarin enkele toepassingen worden behandeld.

Hoofdstuk 5

# SCHAALCONSTRUCTIES BIJ EINDIGE VERPLAATSINGEN

## 51 – VEREENVOUDIGENDE ONDERSTELLINGEN

De technische schaaltheorie voor infinitesimale verplaatsingen wordt meestal gebaseerd op het volgende drietal benaderende onderstellingen ten aanzien van vervormings- en spanningstoestand (lit. 35):

1. de punten die aanvankelijk op een zelfde normaal van het onvervormde middenvlak lagen bevinden zich na de vervorming op een zelfde normaal van het vervormde middenvlak;
2. de verandering in den onderlingen afstand van twee zulke punten kan worden verwaarloosd [1]);
3. de normaalspanningen in vlakken evenwijdig aan het middenvlak kunnen worden verwaarloosd.

Hoewel de onderstellingen dezer theorie voor een isotroop materiaal onderling in strijd zijn, stemmen de met haar verkregen resultaten voor dunne schalen op bevredigende wijze overeen met de ervaring. Ook het strenger onderzoek van LOVE (lit. 36), waarbij de met bovenvermelde onderstellingen verkregen resultaten als een eerste benadering worden beschouwd, bevestigt dat de inwendige tegenspraken althans bij dunne schalen niet van practische beteekenis zijn.

Op grond van deze bij het onderzoek der infinitesimale vervormingen opgedane ervaring lijkt het verantwoord de schaaltheorie voor eindige deformaties op dezelfde onderstellingen te baseeren. Deze theorie zou door een geringe uitbreiding van het onderzoek van LOVE kunnen worden verkregen. Wanneer in het volgende nochtans de voorkeur wordt gegeven aan een nieuwe afleiding dan geschiedt dit hoofdzakelijk omdat hierbij een asymmetrie wordt vermeden die door LOVE bij de definitie van de krommingsveranderingen van het middenvlak is ingevoerd en die aan de overzichtelijkheid van zijn resultaten afbreuk doet.

[1]) FLÜGGE (lit. 35) vermeldt deze tweede onderstelling weliswaar niet; bij de berekening der vervormingen maakt hij echter van haar gebruik.



## 52 – DIFFERENTIAALMEETKUNDE VAN OPPERVLAKKEN

Een oppervlak wordt beschreven door de coördinaten $x_i$ ten opzichte van een vast rechthoekig assenstelsel als functie van twee parameters $\alpha$ en $\beta$

$$x_i = x_i(\alpha, \beta). \tag{52. 1}$$

Voor een lijnelement op het oppervlak geldt (lit. 37)

$$dl^2 = E d\alpha^2 + 2F d\alpha d\beta + G d\beta^2, \tag{52. 2}$$

waarin $E$, $F$ en $G$ de z.g. grootheden van de eerste orde zijn [1]) [2])

$$E = A^2 = \Sigma \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right)^2, \quad F = \Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i}{\partial \beta}, \quad G = B^2 = \Sigma \left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\right)^2. \tag{52. 3}$$

De richtingscosinussen van de normaal op het oppervlak ten opzichte van het vaste assenstelsel worden gegeven door

$$n_i = \frac{\dfrac{\partial x_j}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x_h}{\partial \beta} - \dfrac{\partial x_h}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x_j}{\partial \beta}}{\sqrt{EG - F^2}}, \tag{52. 4}$$

waarin $i$, $j$, $h$ de cyclische volgorde der coördinaatassen is; met de in (52. 4) vastgelegde positieve richting van de normaal is het assenstelsel, gevormd door de raaklijnen aan de parameterlijnen $\beta = \text{const.}$ en $\alpha = \text{const.}$ in de richting van aangroeiende waarden van $\alpha$ en $\beta$ tezamen met de positieve normaal, in de genoemde volgorde overeenkomstig het vaste $x_i$-stelsel georiënteerd.

De kromming van het oppervlak wordt geheel beschreven door (52. 3) en de z.g. grootheden van de tweede orde

$$\begin{aligned} L &= \Sigma n_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha^2} = -\Sigma \frac{\partial n_i}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}, \\ M &= \Sigma n_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial \beta} = -\Sigma \frac{\partial n_i}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i}{\partial \beta} = -\Sigma \frac{\partial n_i}{\partial \beta}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}, \\ N &= \Sigma n_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \beta^2} = -\Sigma \frac{\partial n_i}{\partial \beta}\frac{\partial x_i}{\partial \beta}. \end{aligned} \tag{52. 5}$$

De kromtestralen van de normale doorsneden door de raaklijnen aan de parameterlijnen $\beta = \text{const.}$ en $\alpha = \text{const.}$ worden bepaald door

[1]) Daar verwarring met de elasticiteitsconstanten $E$ en $G$ wel is uitgesloten, is voor deze grootheden de gebruikelijke notatie gehandhaafd.
[2]) Tenzij uitdrukkelijk anders aangegeven moet steeds van $i = 1$ t/m 3 worden gesommeerd.

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}\,, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G}\,, \tag{52.6}$$

waarin $R_1$ en $R_2$ positief of negatief worden naar gelang het bijbehoorende kromtemiddelpunt op het positieve of negatieve deel der normaal ligt.

De formules worden belangrijk eenvoudiger indien de parameterlijnen samenvallen met de kromtelijnen zoodat $F = M = 0$ is. Ondersteld wordt dat dit het geval is voor het onvervormde middenvlak.

De latere berekening der vervormingscomponenten geschiedt het meest overzichtelijk indien een stel eenheidsvectoren in de positieve richtingen der raaklijnen aan de kromtelijnen $\beta = \text{const.}$ en $\alpha = \text{const.}$ en in de positieve normaalrichting wordt ingevoerd. Voor de componenten der eerstgenoemde twee vectoren geldt

$$a_i = \frac{1}{A}\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\,, \quad b_i = \frac{1}{B}\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\,, \tag{52.7}$$

terwijl de componenten van den normaalvector door de richtingscosinussen $n_i$ worden gegeven. De orthogonaliteit dezer vectoren wordt weergegeven door de betrekkingen

$$\Sigma a_i b_i = 0\,, \quad \Sigma b_i n_i = 0\,, \quad \Sigma n_i a_i = 0. \tag{52.8}$$

Dat deze vectoren de lengte één bezitten wordt uitgedrukt door de betrekkingen

$$\Sigma a_i^2 = 1\,, \quad \Sigma b_i^2 = 1\,, \quad \Sigma n_i^2 = 1. \tag{52.9}$$

Elke vector (dus ook de afgeleiden der eenheidsvectoren) kan lineair worden uitgedrukt in de drie eenheidsvectoren zoodat voor de componenten

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} \text{ (of } \frac{\partial p_i}{\partial \beta},\ p_i = a_i,\ b_i,\ n_i)$$

van zulk een afgeleide kan worden gesteld

$$\frac{\partial p_i}{\partial \alpha} = \lambda' a_i + \mu' b_i + \nu' n_i\,, \quad \frac{\partial p_i}{\partial \beta} = \lambda'' a_i + \mu'' b_i + \nu'' n_i.$$

Voor de constanten $\lambda'$, $\lambda''$, $\mu'$, $\mu''$ en $\nu'$, $\nu''$ wordt met behulp van (52.8) en (52.9) gevonden

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= \Sigma a_i \frac{\partial p_i}{\partial \alpha}\,, \quad \mu' = \Sigma b_i \frac{\partial p_i}{\partial \alpha}\,, \quad \nu' = \Sigma n_i \frac{\partial p_i}{\partial \alpha}\,, \\ \lambda'' &= \Sigma a_i \frac{\partial p_i}{\partial \beta}\,, \quad \mu'' = \Sigma b_i \frac{\partial p_i}{\partial \beta}\,, \quad \nu'' = \Sigma n_i \frac{\partial p_i}{\partial \beta}\,. \end{aligned}\right\} \tag{52.10}$$



Ter verdere herleiding is dus nog de kennis van de scalaire producten (52.10) voor de gevallen $p_i = a_i,\ b_i,\ n_i$ noodig. Deze kan gemakkelijk worden verkregen. Zoo volgt uit (52.9)

$$\Sigma a_i \frac{\partial a_i}{\partial \alpha} = 0\,, \quad \Sigma a_i \frac{\partial a_i}{\partial \beta} = 0 \text{ enz.}$$

Verder is

$$\Sigma b_i \frac{\partial a_i}{\partial \alpha} = -\Sigma a_i \frac{\partial b_i}{\partial \alpha} = -\frac{1}{A}\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\right) = \frac{1}{AB^2}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i}{\partial \beta} - \frac{1}{AB}\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial \beta}\,,$$

waaruit met gebruik van $F = 0$ volgt

$$\Sigma b_i \frac{\partial a_i}{\partial \alpha} = -\Sigma a_i \frac{\partial b_i}{\partial \alpha} = -\frac{1}{2AB}\frac{\partial}{\partial \beta}\Sigma\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right)^2 = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}.$$

Op dezelfde wijze volgt

$$\Sigma a_i \frac{\partial b_i}{\partial \beta} = -\Sigma b_i \frac{\partial a_i}{\partial \beta} = -\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}.$$

Voorts is

$$\Sigma n_i \frac{\partial a_i}{\partial \alpha} = -\Sigma a_i \frac{\partial n_i}{\partial \alpha} = -\frac{1}{A}\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i}{\partial \alpha} = \frac{L}{A} = \frac{A}{R_1}\,,$$

$$\Sigma n_i \frac{\partial b_i}{\partial \beta} = -\Sigma b_i \frac{\partial n_i}{\partial \beta} = -\frac{1}{B}\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial n_i}{\partial \beta} = \frac{N}{B} = \frac{B}{R_2}.$$

Tenslotte is wegens $M = 0$

$$\Sigma n_i \frac{\partial a_i}{\partial \beta} = -\Sigma a_i \frac{\partial n_i}{\partial \beta} = -\frac{1}{A}\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i}{\partial \beta} = 0,$$

$$\Sigma n_i \frac{\partial b_i}{\partial \alpha} = -\Sigma b_i \frac{\partial n_i}{\partial \alpha} = -\frac{1}{B}\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial n_i}{\partial \alpha} = 0.$$

Voor de afgeleiden der eenheidsvectoren volgt dan

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial a_i}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}b_i + \frac{A}{R_1}n_i\,; & \frac{\partial a_i}{\partial \beta} &= \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}b_i\,, \\ \frac{\partial b_i}{\partial \alpha} &= \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}a_i\,; & \frac{\partial b_i}{\partial \beta} &= \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}a_i + \frac{B}{R_2}n_i\,, \\ \frac{\partial n_i}{\partial \alpha} &= -\frac{A}{R_1}a_i\,; & \frac{\partial n_i}{\partial \beta} &= -\frac{B}{R_2}b_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{52.11}$$

Deze betrekkingen kunnen natuurlijk ook uit de bekende algemeene formules van GAUSZ en WEINGARTEN (lit. 37) door de specialisatie $F = M = 0$ worden afgeleid.

## 53 - DE VERVORMINGEN

In den onvervormden toestand wordt een willekeurig punt $P$ der schaal gegeven door zijn projectie op het middenvlak $Q$ met coördinaten $x_i$ en den afstand $z$ tot het middenvlak; de coördinaten $y_i$ van $P$ ten opzichte van het vaste coördinatenstelsel zijn dan

$$y_i = x_i + z n_i,$$

hierin zijn $x_i$ en $n_i$ functies van de parameters $\alpha$ en $\beta$. Het quadraat van een lijnelement $dl$, bepaald door de eindpunten $P(\alpha, \beta, z)$ en $\overline{P}(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, z + dz)$ is gegeven door

$$\begin{aligned} dl^2 &= \Sigma\left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial y_i}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial y_i}{\partial z} dz\right)^2 = \\ &= \left\{\Sigma\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right)^2 + 2z\,\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i}{\partial \alpha} + z^2\,\Sigma\left(\frac{\partial n_i}{\partial \alpha}\right)^2\right\} d\alpha^2 + \\ &+ \left\{\Sigma\left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\right)^2 + 2z\,\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial n_i}{\partial \beta} + z^2\,\Sigma\left(\frac{\partial n_i}{\partial \beta}\right)^2\right\} d\beta^2 + \\ &+ \Sigma n_i^2 dz^2 + \left\{\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i}{\partial \beta} + z\left(\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i}{\partial \beta} + \Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial n_i}{\partial \alpha}\right) + \right. \\ &\left. + z^2\,\Sigma \frac{\partial n_i}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i}{\partial \beta}\right\} 2d\alpha d\beta + \left\{\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} n_i + z\Sigma \frac{\partial n_i}{\partial \alpha} n_i\right\} 2d\alpha dz + \\ &+ \left\{\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial \beta} n_i + z\Sigma \frac{\partial n_i}{\partial \beta} n_i\right\} 2d\beta dz. \end{aligned} \tag{53. 1}$$

Met behulp van de voorgaande paragraaf wordt (53. 1) vereenvoudigd tot

$$dl^2 = A^2\left(1 - \frac{z}{R_1}\right)^2 d\alpha^2 + B^2\left(1 - \frac{z}{R_2}\right)^2 d\beta^2 + dz^2. \tag{53. 2}$$

Bij de vervorming ondergaat het materieele punt $Q$ van het middenvlak verplaatsingen $u_i$ in de asrichtingen zoodat de coördinaten van dit punt in den vervormden toestand bedragen

$$x_i' = x_i + u_i.$$

Worden de richtingscosinussen van de normaal op het vervormde middenvlak $n_i'$ genoemd dan bedragen de coördinaten van het



materieele punt $P$ in den vervormden toestand met gebruik van de eerste twee onderstellingen

$$y_i' = x_i' + z n_i',$$

In den vervormden toestand bezit dan het lijnelement, bepaald door de materieele punten $P(\alpha, \beta, z)$ en $\overline{P}(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, z + dz)$, en welks lengte in den onvervormden toestand door (53. 1), resp. (53. 2) wordt gegeven, een lengte bepaald door

$$\begin{aligned} dl'^2 &= \left\{\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}\right)^2 + 2z\,\Sigma \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha} + z^2\,\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha}\right)^2\right\} d\alpha^2 + \\ &+ \left\{\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\right)^2 + 2z\,\Sigma \frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\frac{\partial n_i'}{\partial \beta} + z^2\,\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial \beta}\right)^2\right\} d\beta^2 + \\ &+ dz^2 + \left\{\Sigma \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i'}{\partial \beta} + z\left(\Sigma \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial \beta} + \Sigma \frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha}\right) + \right. \\ &\left. + z^2\,\Sigma \frac{\partial n_i'}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial \beta}\right\} 2d\alpha d\beta\ ; \end{aligned} \tag{53. 3}$$

hierin is reeds gebruik gemaakt van de ook voor den vervormden toestand geldige relaties

$$\Sigma n_i'^2 = 1\ ,\quad \Sigma n_i' \frac{\partial n_i'}{\partial \alpha} = \Sigma n_i' \frac{\partial n_i'}{\partial \beta} = \Sigma n_i' \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha} = \Sigma n_i' \frac{\partial x_i'}{\partial \beta} = 0.$$

Worden de richtingscosinussen $l_\alpha$, $l_\beta$, $l_z$ van het lijnelement in den onvervormden toestand ten opzichte van de parameterlijnen $\beta = \text{const.}$ en $\alpha = \text{const.}$ en de normaal ingevoerd

$$l_\alpha^2 = \frac{A^2\left(1 - \frac{z}{R_1}\right)^2 d\alpha^2}{dl^2},\quad l_\beta^2 = \frac{B^2\left(1 - \frac{z}{R_2}\right)^2 d\beta^2}{dl^2},\quad l_z^2 = \frac{dz^2}{dl^2},$$

dan volgt uit (53. 3)

$$\left(\frac{dl'}{dl}\right)^2 = \frac{\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\right)^2 + 2z\,\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha} + z^2\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right)^2}{A^2\left(1-\frac{z}{R_1}\right)^2} l_\alpha^2 +$$

$$+ \frac{\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\right)^2 + 2z\,\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + z^2\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\beta}\right)^2}{B^2\left(1-\frac{z}{R_2}\right)^2} l_\beta^2 +$$

$$+ l_z^2 + \frac{\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial x_i'}{\partial\beta} + z\left(\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right) + z^2\Sigma\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta}}{AB\left(1-\frac{z}{R_1}\right)\left(1-\frac{z}{R_2}\right)} 2l_\alpha l_\beta.$$

Door vergelijking met (11. 2) volgen hieruit de vervormingscomponenten

$$\left.\begin{aligned} 1+\gamma_{\alpha\alpha} &= \frac{\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\right)^2 + 2z\,\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha} + z^2\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right)^2}{A^2\left(1-\frac{z}{R_1}\right)^2}, \\ 1+\gamma_{\beta\beta} &= \frac{\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\right)^2 + 2z\,\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + z^2\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\beta}\right)^2}{B^2\left(1-\frac{z}{R_2}\right)^2}, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \frac{\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial x_i'}{\partial\beta} + z\left(\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right) + z^2\Sigma\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta}}{AB\left(1-\frac{z}{R_1}\right)\left(1-\frac{z}{R_2}\right)}, \\ \gamma_{zz} &= \gamma_{\alpha z} = \gamma_{\beta z} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (53.\ 4)$$

Bij dunne schalen is $z$ steeds klein, zoodat het voor de hand ligt de uitdrukkingen (53. 4) te ontwikkelen naar opklimmende machten van $z$. Worden termen van den derden en hoogeren graad in $z$ niet meer uitgeschreven dan luidt deze ontwikkeling

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\alpha\alpha} &= \gamma_{\alpha\alpha o} - 2z\varrho_{\alpha\alpha} + \frac{2z}{R_1}\gamma_{\alpha\alpha o} + z^2\theta_{\alpha\alpha}, \\ \gamma_{\beta\beta} &= \gamma_{\beta\beta o} - 2z\varrho_{\beta\beta} + \frac{2z}{R_2}\gamma_{\beta\beta o} + z^2\theta_{\beta\beta}, \\ \gamma_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta o} - 2z\varrho_{\alpha\beta} + \left(\frac{z}{R_1}+\frac{z}{R_2}\right)\gamma_{\alpha\beta o} + z^2\theta_{\alpha\beta}, \end{aligned}\right\} \quad (53.\ 5)$$



waarin

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\alpha\alpha o} &= \frac{1}{A^2}\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\right)^2 - 1, \\ \gamma_{\beta\beta o} &= \frac{1}{B^2}\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\right)^2 - 1, \\ \gamma_{\alpha\beta o} &= \frac{1}{AB}\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial x_i'}{\partial\beta} \end{aligned}\right\} \quad (53.\ 6)$$

de vormveranderingscomponenten van het middenvlak zijn en

$$\left.\begin{aligned} \varrho_{\alpha\alpha} &= -\frac{1}{A^2}\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha} - \frac{1}{R_1}, \\ \varrho_{\beta\beta} &= -\frac{1}{B^2}\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} - \frac{1}{R_2}, \\ 2\varrho_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{AB}\left(\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right) \end{aligned}\right\} \quad (53.\ 7)$$

nauw met de krommingsveranderingen van het middenvlak samenhangen; zij worden in het volgende dan ook met den naam krommingsveranderingen aangeduid. Bovendien is ter afkorting gesteld

$$\theta_{\alpha\alpha} = \frac{1}{A^2}\left\{\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right)^2 + \frac{4}{R_1}\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha} + \frac{3}{R_1^2}\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\right)^2\right\},$$

$$\theta_{\beta\beta} = \frac{1}{B^2}\left\{\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\beta}\right)^2 + \frac{4}{R_2}\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \frac{3}{R_2^2}\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\right)^2\right\},$$

$$\theta_{\alpha\beta} = \frac{1}{AB}\left\{\Sigma\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\left(\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right) + \left(\frac{1}{R_1^2}+\frac{1}{R_2^2}+\frac{1}{R_1R_2}\right)\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\right\}.$$

## 54 – DE ELASTISCHE POTENTIAAL

De in het voorgaande berekende vervormingen berusten alleen op de eerste twee in paragraaf 51 ingevoerde onderstellingen. De derde onderstelling wordt thans gebruikt bij de formuleering van het verband tusschen spanningen en vervormingen of, wat op hetzelfde neerkomt, bij het opstellen van de elastische potentiaal. Hierbij wordt een prismatisch volume-element beschouwd, bepaald door de parameterwaarden $\alpha$, $\alpha + d\alpha$, $\beta$, $\beta + d\beta$ en de ordinaten $z$ en $z + dz$, welks eindvlakken in den onvervormden toestand

evenwijdig zijn aan het middenvlak. Voor het evenwicht van dit element moet zijn voldaan aan den eisch dat bij een virtueele verandering in deformatie de vermeerdering van den vervormingsarbeid gelijk is aan den door de spankrachten op het element verrichten arbeid. Aan dezen eisch moet dus ook worden voldaan voor virtueele deformaties welke uitsluitend bestaan in een lengteverandering van de lijnelementen loodrecht op het middenvlak. Omdat bij zulk een deformatie, welke geheel wordt beschreven door een variatie van de vervormingscomponente $\gamma_{zz}$, de spankrachten op het element geen arbeid verrichten, moet gelden [1])

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_{zz}} = 0, \tag{54. 1}$$

waarin $A$ de elastische potentiaal is. Toepassing van deze voorwaarde op (12. 3) levert

$$\gamma_{zz} = -\frac{1}{m-1}(\gamma_{\alpha\alpha} + \gamma_{\beta\beta}). \tag{54. 2}$$

De derde onderstelling is derhalve voor een isotroop materiaal in het algemeen onvereenigbaar met de eerste twee onderstellingen (zie (53. 4)). Op deze tegenstrijdigheid wordt in paragraaf 55 nog teruggekomen.

In par. 53 werd met behulp van de eerste twee onderstellingen gevonden dat $\gamma_{\alpha z}$ en $\gamma_{\beta z}$ nul zijn. Door combinatie van dit resultaat met de door de derde onderstelling geëischte relatie (54. 2) gaat de elastische potentiaal (12. 5) over in

$$A = \frac{Gm}{4(m-1)}\left\{(\gamma_{\alpha\alpha} + \gamma_{\beta\beta})^2 - 2\,\frac{m-1}{m}(\gamma_{\alpha\alpha}\gamma_{\beta\beta} - \gamma_{\alpha\beta}{}^2)\right\}. \tag{54. 3}$$

## 55 – CONSEQUENTIES DER INGEVOERDE ONDERSTELLINGEN

Bij beschouwing van de uitdrukkingen (53. 5) voor de vervormingscomponenten valt onmiddellijk op dat de derde term bij dunne schalen steeds zeer klein is ten opzichte van den eersten; tevens is te verwachten dat de vierde term, die $z^2$ als factor bevat, klein is ten opzichte van den tweeden. Veelal worden deze termen dan ook buiten beschouwing gelaten. FLÜGGE (lit. 35) merkt hierbij echter op dat zij niet kunnen worden gemist zonder den logischen bouw der theorie te schaden. Met deze opvatting kan worden ingestemd voor zoover zij betreft de berekening der ver-

[1]) Het symbool $A$ wordt hier in een andere beteekenis, nl. in die van de elastische potentiaal, gebruikt dan in de vorige en volgende paragrafen.



vormingscomponenten uit de eerste twee onderstellingen. Voor de formuleering van de elasticiteitswet wordt vervolgens echter gebruik gemaakt van de derde onderstelling, welke voor een isotroop materiaal in het algemeen strijdig is met de eerste twee onderstellingen. Deze tegenstrijdigheid ontneemt aan het argument van FLÜGGE reeds een groot deel van zijn waarde.

Om een beter gefundeerd oordeel over deze quaestie te verkrijgen is het echter noodig in te gaan op de beteekenis van de tot de tegenspraak leidende tweede en derde onderstelling. Laatstgenoemde onderstelling drukt uit dat de normaalspanningen in vlakken evenwijdig aan het middenvlak klein zijn ten opzichte van de normaalspanningen in vlakken loodrecht op het middenvlak; zij heeft dus een uitgesproken mechanische beteekenis. De tweede onderstelling berust daarentegen op de overweging dat de relatieve verplaatsingen in de normaalrichting op het middenvlak van de orde van grootte van het product van de specifieke rek in die richting en van de schaaldikte zijn. Mechanisch is er derhalve geen bezwaar tegen verplaatsingen van deze orde van grootte toe te laten; zij zijn alleen ter vereenvoudiging buiten beschouwing gelaten omdat van haar toch geen belangrijke invloed werd verwacht. Om desalniettemin eenig inzicht te verkrijgen in de orde van grootte van dezen invloed worden de correcties berekend die op de vervormingscomponenten (53. 4) moeten worden aangebracht indien de tweede onderstelling buiten beschouwing wordt gelaten; hierbij worden de uitdrukkingen (53. 4) als een eerste benadering aanvaard. Deze orde van grootte kan dan worden vergeleken met de orde van grootte van de derde en vierde termen van (53. 5); zou het blijken dat de genoemde orden van grootte overeenstemmen dan is het consequent de derde en vierde termen in (53. 5) te verwaarloozen.

Wordt de verandering in afstand tot het middenvlak $\zeta$ genoemd dan bedraagt het verschil in waarde der coördinaten van begin- en eindpunt van een lijnelement in den vervormden toestand, wegens $y_i' = x_i' + (z+\zeta)\,n_i'$,

$$dy_i' = \left(\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha} + z\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha} + \zeta\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha} + \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha}n_i'\right)d\alpha + \left(\frac{\partial x_i'}{\partial \beta} + z\frac{\partial n_i'}{\partial \beta} + \zeta\frac{\partial n_i'}{\partial \beta} + \frac{\partial \zeta}{\partial \beta}n_i'\right)d\beta + \left(n_i' + \frac{\partial \zeta}{\partial z}n_i'\right)dz,$$

zoodat het quadraat van de verhouding der lengten van het lijnelement in den vervormden en onvervormden toestand met gebruik van de richtingscosinussen $l_\alpha$, $l_\beta$, $l_z$ en van de identiteiten

$$\Sigma n_i'^2 = 1\,,\quad \Sigma n_i'\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha} = \Sigma n'_i\frac{\partial n_i'}{\partial \beta} = \Sigma n_i'\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha} = \Sigma n_i'\frac{\partial x_i'}{\partial \beta} = 0$$

kan worden geschreven in den vorm

$$\left(\frac{dl'}{dl}\right)^2 = \frac{\left[\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\right)^2 + 2z\,\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha} + z^2\,\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right)^2 + \right.}{\left. + 2\zeta\,\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha} + 2\zeta z\,\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right)^2 + \zeta^2\,\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\right)^2\right]} l_\alpha^2 +$$

$$+\frac{\left[\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\right)^2 + 2z\,\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + z^2\,\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\beta}\right)^2 + \right.}{\left. + 2\zeta\,\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + 2\zeta z\,\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\beta}\right)^2 + \zeta^2\,\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial\beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right)^2\right]} l_\beta^2 +$$

$$+\frac{\left[\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial x_i'}{\partial\beta} + z\left(\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right) + \right.}{\left. + z^2\,\Sigma\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \zeta\left(\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\right) + \right.}$$
$$\left. + 2\zeta z\,\Sigma\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \zeta^2\,\Sigma\frac{\partial n_i'}{\partial\alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial\beta} + \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\right]}{AB\left(1-\frac{z}{R_1}\right)\left(1-\frac{z}{R_2}\right)} 2l_\alpha l_\beta +$$

$$+\left\{1 + 2\frac{\partial\zeta}{\partial z} + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)^2\right\} + \frac{\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha} + \frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial z}}{A\left(1-\frac{z}{R_1}\right)} 2l_\alpha l_z + \frac{\frac{\partial\zeta}{\partial\beta} + \frac{\partial\zeta}{\partial\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial z}}{B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)} 2l_\beta l_z. \quad (55.1)$$

De op de uitdrukkingen (53. 4) toe te passen correcties worden bepaald door de termen in (55. 1) welke $\zeta$ bevatten. De relatieve verplaatsingen $\zeta$ zijn steeds zeer klein zoodat de termen van den tweeden en hoogeren graad in $\zeta$ kunnen worden verwaarloosd. De beschouwing wordt verder voorloopig beperkt tot kleine verplaatsingen van het middenvlak. De coëfficiënten van $\zeta$ kunnen dan worden benaderd door hun overeenkomstige waarden voor het onvervormde middenvlak. Met gebruik van (52. 11) volgt voor de correcties in de vervormingscomponenten



$$\Delta\gamma_{\alpha\alpha} = \frac{1}{\left(1-\frac{z}{R_1}\right)^2}\left(-\frac{2\zeta}{R_1} + \frac{2\zeta}{R_1}\frac{z}{R_1}\right), \Delta\gamma_{\beta\beta} = \frac{1}{\left(1-\frac{z}{R_2}\right)^2}\left(-\frac{2\zeta}{R_2} + \frac{2\zeta}{R_2}\frac{z}{R_2}\right), \quad \Delta\gamma_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\Delta\gamma_{zz} = 2\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \quad \Delta\gamma_{\alpha z} = \frac{1}{1-\frac{z}{R_1}}\frac{1}{A}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}, \quad \Delta\gamma_{\beta z} = \frac{1}{1-\frac{z}{R_2}}\frac{1}{B}\frac{\partial\zeta}{\partial\beta};$$

worden hierin nog $\frac{z}{R_1}$ en $\frac{z}{R_2}$ ten opzichte van de eenheid verwaarloosd dan geldt

$$\left.\begin{aligned} \Delta\gamma_{\alpha\alpha} &= -\frac{2\zeta}{R_1}, \quad \Delta\gamma_{\beta\beta} = -\frac{2\zeta}{R_2}, \quad \Delta\gamma_{\alpha\beta} = 0, \\ \Delta\gamma_{zz} &= 2\frac{\partial\zeta}{\partial z}, \quad \Delta\gamma_{\alpha z} = \frac{1}{A}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}, \quad \Delta\gamma_{\beta z} = \frac{1}{B}\frac{\partial\zeta}{\partial\beta}. \end{aligned}\right\} \quad (55.2)$$

De voorwaarde (54. 2), die in verband met de eerste benadering $\gamma_{zz} = 0$ in den vorm

$$\Delta\gamma_{zz} = -\frac{1}{m-1}(\gamma_{\alpha\alpha} + \gamma_{\beta\beta})$$

als een correctieformule voor $\gamma_{zz}$ kan worden opgevat, levert samen met (55. 2)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = -\frac{1}{2(m-1)}(\gamma_{\alpha\alpha} + \gamma_{\beta\beta}),$$

of met $\zeta = 0$ voor $z = 0$, en met gebruik van (53. 5) als eerste benadering voor $\gamma_{\alpha\alpha}$ en $\gamma_{\beta\beta}$

$$\zeta = -\frac{1}{2(m-1)}(\gamma_{\alpha\alpha o} + \gamma_{\beta\beta o})\,z + \frac{1}{2(m-1)}(\varrho_{\alpha\alpha} + \varrho_{\beta\beta})\,z^2 + \ldots. \quad (55.3)$$

De correcties $\Delta\gamma_{\alpha\alpha}$ en $\Delta\gamma_{\beta\beta}$ bedragen dan

$$\left.\begin{aligned} \Delta\gamma_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{m-1}\frac{z}{R_1}(\gamma_{\alpha\alpha o} + \gamma_{\beta\beta o}) - \frac{1}{m-1}\frac{z}{R_1}z\,(\varrho_{\alpha\alpha} + \varrho_{\beta\beta}) + \ldots, \\ \Delta\gamma_{\beta\beta} &= \frac{1}{m-1}\frac{z}{R_2}(\gamma_{\alpha\alpha o} + \gamma_{\beta\beta o}) - \frac{1}{m-1}\frac{z}{R_2}z\,(\varrho_{\alpha\alpha} + \varrho_{\beta\beta}) + \ldots. \end{aligned}\right\} \quad (55.4)$$

Met behulp van de onderstelling van kleine verplaatsingen wordt vervolgens de orde van grootte der grootheden $\theta_{\alpha\alpha}$ enz. bepaald. Uit de algemeene formules van WEINGARTEN (lit. 37)

$$\frac{\partial n_i}{\partial \alpha} = \frac{(FM - GL)\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + (FL - EM)\frac{\partial x_i}{\partial \beta}}{EG - F^2},$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial \beta} = \frac{(FN - GM)\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} + (FM - EN)\frac{\partial x_i}{\partial \beta}}{EG - F^2}$$

volgt na invoering van de notatie met accenten voor den vervormden toestand

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha}\right)^2 &= \frac{L'^2G' + M'E' - 2L'M'F'}{E'G' - F'^2}, \\ \Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial \beta}\right)^2 &= \frac{N'^2E' + M'^2G' - 2N'M'F'}{E'G' - F'^2}, \\ \Sigma\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial \beta} &= \frac{L'M'G' + N'M'E' - (L'N' + M'^2)F'}{E'G' - F'^2}. \end{aligned}\right\} \quad (55.\,5)$$

De kleinheid der verplaatsingen wordt tot uitdrukking gebracht door quadratische termen in de veranderingen der fundamenteele grootheden $E' - E$ enz., $L' - L$ enz. te verwaarloozen. Met $F = M = 0$ volgt dan

$$\Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha}\right)^2 = \frac{L'^2}{E'}, \qquad \Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial \beta}\right)^2 = \frac{N'^2}{G'},$$

$$\Sigma\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial \beta} = \frac{L}{E}M' + \frac{N}{G}M' - \frac{LN}{EG}F'.$$

Verder is met (53. 6) en (53. 7)

$$\left.\begin{aligned} &E' = A^2(1 + \gamma_{\alpha\alpha o}), \quad G' = B^2(1 + \gamma_{\beta\beta o}), \quad F' = AB\gamma_{\alpha\beta o}, \\ &L' = A^2\left(\frac{1}{R_1} + \varrho_{\alpha\alpha}\right), \quad N' = B^2\left(\frac{1}{R_2} + \varrho_{\beta\beta}\right), \quad M' = AB\varrho_{\alpha\beta}, \end{aligned}\right\} \quad (55.\,6)$$

zoodat (55. 5) leidt tot de benaderingen

$$\left.\begin{aligned} \Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha}\right)^2 &= A^2\left\{\frac{1}{R_1^2} + \frac{2}{R_1}\varrho_{\alpha\alpha} - \frac{1}{R_1^2}\gamma_{\alpha\alpha o}\right\}, \\ \Sigma\left(\frac{\partial n_i'}{\partial \beta}\right)^2 &= B^2\left\{\frac{1}{R_2^2} + \frac{2}{R_2}\varrho_{\beta\beta} - \frac{1}{R_2^2}\gamma_{\beta\beta o}\right\}, \\ \Sigma\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial \beta} &= AB\left\{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\varrho_{\alpha\beta} - \frac{1}{R_1R_2}\gamma_{\alpha\beta o}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (55.\,7)$$



De berekening der overige bijdragen van $\theta_{\alpha\alpha}$ enz. geschiedt als volgt

$$\frac{4}{R_1}\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha} = -4\frac{L'}{R_1} = -\frac{4A^2}{R_1}\left(\frac{1}{R_1} + \varrho_{\alpha\alpha}\right),$$

$$\frac{4}{R_2}\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\frac{\partial n_i'}{\partial \beta} = -4\frac{N'}{R_2} = -\frac{4B^2}{R_2}\left(\frac{1}{R_2} + \varrho_{\beta\beta}\right),$$

$$\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\left(\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i'}{\partial \beta} + \Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\frac{\partial n_i'}{\partial \alpha}\right) = -2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)M' = -2AB\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\varrho_{\alpha\beta},$$

$$\frac{3}{R_1^2}\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}\right)^2 = \frac{3}{R_1^2}E' = \frac{3A^2}{R_1^2}(1 + \gamma_{\alpha\alpha o}),$$

$$\frac{3}{R_2^2}\Sigma\left(\frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\right)^2 = \frac{3}{R_2^2}G' = \frac{3B^2}{R_2^2}(1 + \gamma_{\beta\beta o}),$$

$$\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_1R_2}\right)\Sigma\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i'}{\partial \beta} = \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_1R_2}\right)F' = AB\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{R_1R_2}\right)\gamma_{\alpha\beta o},$$

zoodat het resultaat is

$$\left.\begin{aligned} \theta_{\alpha\alpha} &= -\frac{2}{R_1}(\varrho_{\alpha\alpha} - \frac{1}{R_1}\gamma_{\alpha\alpha o}), \\ \theta_{\beta\beta} &= -\frac{2}{R_2}(\varrho_{\beta\beta} - \frac{1}{R_2}\gamma_{\beta\beta o}), \\ \theta_{\alpha\beta} &= -\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\varrho_{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right)\gamma_{\alpha\beta o}. \end{aligned}\right\} \quad (55.\,8)$$

De technische schaaltheorie berust op de toelaatbaarheid van de verwaarloozing van bijdragen in de vervormingscomponenten van den vorm (55. 4). Door vergelijking van (53. 5), (55. 4) en (55. 8) blijkt dat het dan in het algemeen ook geen zin heeft de derde en vierde termen van (53. 5) in rekening te brengen; een uitzondering moet wellicht worden gemaakt indien $\gamma_{\alpha\alpha o} + \gamma_{\beta\beta o}$ klein is ten opzichte van $\gamma_{\alpha\alpha o}$, $\gamma_{\beta\beta o}$, $\gamma_{\alpha\beta o}$ en $\varrho_{\alpha\alpha} + \varrho_{\beta\beta}$ klein is ten opzichte van $\varrho_{\alpha\alpha}$, $\varrho_{\beta\beta}$, $\varrho_{\alpha\beta}$. In het algemeen moet derhalve de verwaarloozing van de derde en vierde termen in (53. 5) als een consequentie van de ingevoerde schematiseering worden aanvaard, zoodat kan worden geschreven

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{\alpha\alpha} &= \gamma_{\alpha\alpha o} - 2z\varrho_{\alpha\alpha},\\ \gamma_{\beta\beta} &= \gamma_{\beta\beta o} - 2z\varrho_{\beta\beta},\\ \gamma_{\alpha\beta} &= \gamma_{\alpha\beta o} - 2z\varrho_{\alpha\beta}.\end{aligned}\right\} \quad (55.\ 9)$$

De overwegingen die leiden tot de vereenvoudigde uitdrukkingen (55. 9) gelden strikt genomen alleen voor infinitesimale verplaatsingen van het middenvlak. Zoolang er echter geen reden is aan te nemen dat bij eindige verplaatsingen de orde van grootte van de derde en vierde termen van (53. 5) een andere is dan die van den verwaarloosden invloed der verplaatsingen $\zeta$ kunnen deze uitdrukkingen eveneens voor eindige verplaatsingen worden toegepast.

Met behulp van (55. 9) kan de elastische energie per eenheid van oppervlakte van het onvervormde middenvlak door integratie van (54. 3) worden verkregen. Het oppervlak van een vlakte-element $z = \text{const.}$ wordt gegeven door de absolute waarde van het vectorisch product der vectoren met componenten $\frac{\partial y_i}{\partial \alpha} d\alpha$ en $\frac{\partial y_i}{\partial \beta} d\beta$, waarvoor met de identiteit van LAGRANGE wordt geschreven

$$df = \sqrt{\left(\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\frac{\partial y_2}{\partial \beta} - \frac{\partial y_1}{\partial \beta}\frac{\partial y_2}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial \alpha}\frac{\partial y_3}{\partial \beta} - \frac{\partial y_2}{\partial \beta}\frac{\partial y_3}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial \alpha}\frac{\partial y_1}{\partial \beta} - \frac{\partial y_3}{\partial \beta}\frac{\partial y_1}{\partial \alpha}\right)^2}\, d\alpha\, d\beta =$$

$$= \sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right)^2 \Sigma\left(\frac{\partial y_i}{\partial \beta}\right)^2 - \left(\Sigma \frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\frac{\partial y_i}{\partial \beta}\right)^2}\, d\alpha\, d\beta.$$

Hierin is

$$\Sigma\left(\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right)^2 + 2z\Sigma\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i}{\partial \alpha} + z^2\Sigma\left(\frac{\partial n_i}{\partial \alpha}\right)^2 = A^2\left(1 - \frac{z}{R_1}\right)^2,$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial y_i}{\partial \beta}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\right)^2 + 2z\Sigma\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial n_i}{\partial \beta} + z^2\Sigma\left(\frac{\partial n_i}{\partial \beta}\right)^2 = B^2\left(1 - \frac{z}{R_2}\right)^2,$$

$$\Sigma\frac{\partial y_i}{\partial \alpha}\frac{\partial y_i}{\partial \beta} = \Sigma\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial x_i}{\partial \beta} + z\left(\Sigma\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i}{\partial \beta} + \Sigma\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\frac{\partial n_i}{\partial \alpha}\right) + z^2\Sigma\frac{\partial n_i}{\partial \alpha}\frac{\partial n_i}{\partial \beta} = 0,$$

zoodat voor het oppervlakte-element geldt

$$df = AB\left(1 - \frac{z}{R_1}\right)\left(1 - \frac{z}{R_2}\right) d\alpha\, d\beta. \quad (55.\ 10)$$

Omdat in de uitdrukkingen (55. 9) voor de vervormingscomponenten reeds bedragen van den vorm $\frac{z}{R_1}\gamma_{\alpha\alpha o}$, $\frac{z}{R_1}z\varrho_{\alpha\alpha}$ enz. zijn verwaarloosd, kunnen in (55. 10) de factoren $1 - \frac{z}{R_1}$ en $1 - \frac{z}{R_2}$ door de eenheid worden vervangen. De elastische energie in een schaalelement ter dikte $h$, begrensd door de normaalregelvlakken

$$\alpha = \text{const.},\ \beta = \text{const.},\ \alpha + d\alpha = \text{const.},\ \beta + d\beta = \text{const.},$$

bedraagt dan

$$AB\, d\alpha\, d\beta \frac{Gm}{4(m-1)} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz \left\{\left[\gamma_{\alpha\alpha o} + \gamma_{\beta\beta o} - 2z\,(\varrho_{\alpha\alpha} + \varrho_{\beta\beta})\right]^2 + \right.$$

$$\left. - 2\frac{m-1}{m}\left[(\gamma_{\alpha\alpha o} - 2z\varrho_{\alpha\alpha})(\gamma_{\beta\beta o} - 2z\varrho_{\beta\beta}) - (\gamma_{\alpha\beta o} - 2z\varrho_{\alpha\beta})^2\right]\right\},$$

waaruit na uitvoering der integraties en deeling door $AB d\alpha d\beta$ voor de elastische energie per eenheid van oppervlak van het onvervormde middenvlak volgt

$$\overline{A} = \tfrac{1}{4}Gh\frac{m}{m-1}\left\{(\gamma_{\alpha\alpha o} + \gamma_{\beta\beta o})^2 - 2\frac{m-1}{m}(\gamma_{\alpha\alpha o}\gamma_{\beta\beta o} - \gamma_{\alpha\beta o}^2)\right\} +$$

$$+ \tfrac{1}{12}Gh^3\frac{m}{m-1}\left\{(\varrho_{\alpha\alpha} + \varrho_{\beta\beta})^2 - 2\frac{m-1}{m}(\varrho_{\alpha\alpha}\varrho_{\beta\beta} - \varrho_{\alpha\beta}^2)\right\}. \quad (55.\ 11)$$

Uit dit resultaat blijkt dat de elastische energie de som is van twee termen waarvan de eerste uitsluitend afhangt van de vormveranderingen in het middenvlak en de tweede uitsluitend van de krommingsveranderingen van het middenvlak, of korter dat de elastische energie de som is van rekenergie en buigingsenergie.

## 56 - UITDRUKKING VAN DE VERVORMINGEN IN DE VERPLAATSINGEN

De vervormingscomponenten (53. 6) en de krommingsveranderingen (53. 7) kunnen gemakkelijk worden uitgedrukt in de verplaatsingen $u_i = x_i' - x_i$. Met het oog op de overzichtelijkheid der resultaten verdient het aanbeveling den verplaatsingsvector met componenten $u_i$ van een punt van het middenvlak te ontbinden volgens de drie eenheidsvectoren met componenten $a_i$, $b_i$, $n_i$ in dat punt

$$u_i = ua_i + vb_i + wn_i\,; \quad (56.\ 1)$$

hierdoor wordt bereikt dat in de formules voor de vervormingen

de eigenschappen van het onvervormde middenvlak uitsluitend in de grootheden $A$, $B$, $R_1$, $R_2$ tot uitdrukking komen.

Uit (56. 1) volgt met behulp der formules (52. 7) en (52. 11)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial x_i'}{\partial \alpha} &= A\left(1+\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}-\frac{w}{R_1}\right)a_i + \\
&\quad + A\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha}-\frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)b_i + A\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}+\frac{u}{R_1}\right)n_i, \\
\frac{\partial x_i'}{\partial \beta} &= B\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)a_i + \\
&+ B\left(1+\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}-\frac{w}{R_2}\right)b_i + B\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}+\frac{v}{R_2}\right)n_i,
\end{aligned}\right\} \quad (56.\ 2)$$

zoodat voor de vervormingscomponenten van het middenvlak wordt gevonden

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\alpha o} &= 2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}-\frac{w}{R_1}\right)+\frac{1}{A^2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \alpha}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\right)^2\right\}+ \\
&+\frac{u^2}{A^2B^2}\left(\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)^2+\frac{u^2}{R_1^2}+\frac{v^2}{A^2B^2}\left(\frac{\partial A}{\partial \beta}\right)^2+\frac{w^2}{R_1^2}+2\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha}+ \\
&-2\frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha}-2\frac{w}{R_1}\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha}+2\frac{u}{R_1}\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}-2\frac{w}{R_1}\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \\
\gamma_{\beta\beta o} &= 2\left(\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}-\frac{w}{R_2}\right)+\frac{1}{B^2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \beta}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)^2\right\}+ \\
&+\frac{u^2}{A^2B^2}\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)^2+\frac{v^2}{A^2B^2}\left(\frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)^2+\frac{v^2}{R_2^2}+\frac{w^2}{R_2^2}+2\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta}+ \\
&-2\frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta}-2\frac{w}{R_2}\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta}+2\frac{v}{R_2}\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}-2\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{w}{R_2}, \\
\gamma_{\alpha\beta o} &= \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha}-\frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}-\frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}+ \\
&+\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha}\frac{\partial u}{\partial \beta}+\frac{\partial v}{\partial \alpha}\frac{\partial v}{\partial \beta}+\frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial w}{\partial \beta}\right)-\frac{u^2+v^2}{A^2B^2}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{\partial B}{\partial \alpha}+\frac{u}{R_1}\frac{v}{R_2}+ \\
&+\frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{w}{R_2}+\frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{w}{R_1}+\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha}+ \\
&+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha}-\frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta}+ \\
&+\frac{u}{R_1}\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta}+\frac{v}{R_2}\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial \alpha}-\frac{w}{R_1}\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta}-\frac{w}{R_2}\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial \alpha}.
\end{aligned}\right\} \quad (56.\ 3)$$



De in $u$, $v$ en $w$ lineaire termen dezer uitdrukkingen stemmen overeen met LOVE's resultaten voor $2\varepsilon_1$, $2\varepsilon_2$ en $\omega$ (lit. 36, art. 326).

Voor de berekening van de krommingsveranderingen van het middenvlak wordt gebruik gemaakt van de formules (52. 4) en (52. 5) (zie ook lit. 37)

$$L = \Sigma n_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha^2} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\text{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha^2},\ \frac{\partial x_i}{\partial \alpha},\ \frac{\partial x_i}{\partial \beta}\right),$$

$$N = \Sigma n_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \beta^2} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\text{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \beta^2},\ \frac{\partial x_i}{\partial \alpha},\ \frac{\partial x_i}{\partial \beta}\right),$$

$$M = \Sigma n_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\,\text{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial \alpha \partial \beta},\ \frac{\partial x_i}{\partial \alpha},\ \frac{\partial x_i}{\partial \beta}\right),$$

waaruit met (55. 6) volgt

$$\varrho_{\alpha\alpha} = \frac{1}{A^2}\frac{1}{\sqrt{E'G'-F'^2}}\,\text{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i'}{\partial \alpha^2},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\right)-\frac{1}{R_1},$$

$$\varrho_{\beta\beta} = \frac{1}{B^2}\frac{1}{\sqrt{E'G'-F'^2}}\,\text{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i'}{\partial \beta^2},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\right)-\frac{1}{R_2},$$

$$\varrho_{\alpha\beta} = \frac{1}{AB}\frac{1}{\sqrt{E'G'-F'^2}}\,\text{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i'}{\partial \alpha \partial \beta},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\right).$$

Met behulp van de uit (55. 6) volgende betrekking

$$\sqrt{E'G'-F'^2} = AB\sqrt{(1+\gamma_{\alpha\alpha o})(1+\gamma_{\beta\beta o})-\gamma_{\alpha\beta o}^2}$$

gaan deze uitdrukkingen over in

$$\varrho_{\alpha\alpha} = \frac{1}{A^3B}\frac{1}{\sqrt{(1+\gamma_{\alpha\alpha o})(1+\gamma_{\beta\beta o})-\gamma_{\alpha\beta o}^2}}\,\text{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i'}{\partial \alpha^2},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\right)-\frac{1}{R_1},$$

$$\varrho_{\beta\beta} = \frac{1}{AB^3}\frac{1}{\sqrt{(1+\gamma_{\alpha\alpha o})(1+\gamma_{\beta\beta o})-\gamma_{\alpha\beta o}^2}}\,\text{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i'}{\partial \beta^2},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\right)-\frac{1}{R_2},$$

$$\varrho_{\alpha\beta} = \frac{1}{A^2B^2}\frac{1}{\sqrt{(1+\gamma_{\alpha\alpha o})(1+\gamma_{\beta\beta o})-\gamma_{\alpha\beta o}^2}}\,\text{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i'}{\partial \alpha \partial \beta},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \alpha},\ \frac{\partial x_i'}{\partial \beta}\right).$$

Bij verwaarloozing van $\gamma_{\alpha\alpha o}$, $\gamma_{\beta\beta o}$ en $\gamma_{\alpha\beta o}^2$ ten opzichte van de eenheid volgt tenslotte

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A^3B}\,\mathrm{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i'}{\partial\alpha^2}, \frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}, \frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{R_1},\\
\varrho_{\beta\beta} &= \frac{1}{AB^3}\,\mathrm{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i'}{\partial\beta^2}, \frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}, \frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\right) - \frac{1}{R_2},\\
\varrho_{\alpha\beta} &= \frac{1}{A^2B^2}\,\mathrm{Det.}\left(\frac{\partial^2 x_i'}{\partial\alpha\partial\beta}, \frac{\partial x_i'}{\partial\alpha}, \frac{\partial x_i'}{\partial\beta}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (56.\,4)$$

Door middel van (56. 4) worden de krommingsveranderingen rationaal uitgedrukt in de verplaatsingen $u_i = x_i' - x_i$. De uitdrukking in de verplaatsingscomponenten $u$, $v$, $w$ wordt verkregen door (56. 2) nogmaals te differentieeren. De determinanten in (56. 4) nemen dan een zoo eenvoudig mogelijken vorm aan indien na uitvoering der differentiaties het vaste $x_i$-stelsel samenvallend met het $a$, $b$, $n$-stelsel wordt gekozen, zoodat

$$\left.\begin{aligned}
a_1 &= 1 \quad , \quad a_2 = 0 \quad , \quad a_3 = 0 \quad ;\\
b_1 &= 0 \quad , \quad b_2 = 1 \quad , \quad b_3 = 0 \quad ;\\
n_1 &= 0 \quad , \quad n_2 = 0 \quad , \quad n_3 = 1 \quad .
\end{aligned}\right\} \quad (56.\,5)$$

De eerste rij der determinanten (56. 4) wordt dan gegeven door de formules

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_1'}{\partial\alpha^2} &= \frac{\partial A}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{2}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - 2\frac{A}{R_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - u\left\{\frac{A^2}{R_1^2} + \frac{1}{B^2}\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^2\right\} +\\
&\qquad + v\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) - w\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A}{R_1}\right),\\
\frac{\partial^2 x_2'}{\partial\alpha^2} &= -\frac{A}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2} - \frac{2}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - u\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) - \frac{v}{B^2}\left(\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)^2 + \frac{w}{B}\frac{A}{R_1}\frac{dA}{\partial\beta},\\
\frac{\partial^2 x_3'}{\partial\alpha^2} &= \frac{A^2}{R_1} + \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + 2\frac{A}{R_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + u\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{A}{R_1}\right) + \frac{v}{B}\frac{A}{R_1}\frac{\partial A}{\partial\beta} - w\frac{A^2}{R_1^2},
\end{aligned}\right\} \quad (56.\,6)$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_1'}{\partial\beta^2} &= -\frac{B}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} - \frac{2}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{u}{A^2}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2 - v\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) + \frac{w}{A}\frac{B}{R_2}\frac{\partial B}{\partial\alpha},\\
\frac{\partial^2 x_2'}{\partial\beta^2} &= \frac{\partial B}{\partial\beta} + \frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2} + \frac{2}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\beta} - 2\frac{B}{R_2}\frac{\partial w}{\partial\beta} + u\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) +\\
&\qquad - v\left\{\frac{B^2}{R_2^2} + \frac{1}{A^2}\left(\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right)^2\right\} - w\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{B}{R_2}\right),\\
\frac{\partial^2 x_3'}{\partial\beta^2} &= \frac{B^2}{R_2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + 2\frac{B}{R_2}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{u}{A}\frac{B}{R_2}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + v\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{B}{R_2}\right) - w\frac{B^2}{R_2^2},
\end{aligned}\right\} \quad (56.\,7)$$



$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x_1'}{\partial\alpha\partial\beta} &= \frac{\partial A}{\partial\beta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial v}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{A}{R_1}\frac{\partial w}{\partial\beta} +\\
&\qquad + \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha} + v\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) - w\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_1}\right),\\
\frac{\partial^2 x_2'}{\partial\alpha\partial\beta} &= \frac{\partial B}{\partial\alpha} + \frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial u}{\partial\alpha} - \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{B}{R_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha} +\\
&\qquad + u\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) + \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - w\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_2}\right),\\
\frac{\partial^2 x_3'}{\partial\alpha\partial\beta} &= \frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{A}{R_1}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{B}{R_2}\frac{\partial v}{\partial\alpha},
\end{aligned}\right\} \quad (56.\,8)$$

Hierin is reeds gebruik gemaakt van de identiteiten

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right) + \frac{AB}{R_1R_2} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{A}{R_1}\right) = \frac{1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{R_2}\right) = \frac{1}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha},
\end{aligned}\right\} \quad (56.\,9)$$

welke voortvloeien uit (52. 11) en de identiteiten

$$\frac{\partial^2 a_i}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 a_i}{\partial\beta\partial\alpha}, \quad \frac{\partial^2 n_i}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 n_i}{\partial\beta\partial\alpha}.$$

De tweede en derde rijen zijn voor alle drie determinanten (56. 4) dezelfde en worden onderscheidenlijk bepaald door de formules (56. 2) indien hierin (56. 5) wordt gesubstitueerd. Zij luiden dus

$$\left.\begin{aligned}
&A\left(1 + \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{w}{R_1}\right), \quad A\left(\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right),\\
&\qquad A\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}\right) \text{ en}\\
&B\left(\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta} - \frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right), \quad B\left(1 + \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{w}{R_2}\right),\\
&\qquad B\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (56.\,10)$$

Door verwaarloozing van termen van den tweeden en derden graad in de verplaatsingscomponenten $u$, $v$ en $w$ volgen uit (56. 4) en (56. 6) t/m (56. 10) de krommingsveranderingen voor infinitesimale verplaatsingen

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \frac{3}{AR_1}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{BR_1}\frac{\partial v}{\partial\beta} - \frac{1}{A^3}\frac{\partial A}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \\
&+ \frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta} + u\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R_1}\right) + \frac{1}{ABR_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right\} + \\
&+ \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{2}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) - \frac{w}{R_1}\left(\frac{2}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \\
\varrho_{\beta\beta} &= \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2} + \frac{1}{AR_2}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{3}{BR_2}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \\
&+ \frac{1}{A^2B}\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{1}{B^3}\frac{\partial B}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{2}{R_2}\right) + \\
&+ v\left\{\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{R_2}\right) + \frac{1}{ABR_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right\} - \frac{w}{R_2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{2}{R_2}\right), \\
\varrho_{\alpha\beta} &= \frac{1}{AB}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\beta} + \frac{1}{BR_1}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{1}{AR_2}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{1}{A^2B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \\
&- \frac{1}{AB^2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{u}{ABR_1}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{v}{ABR_2}\frac{\partial B}{\partial\alpha}.
\end{aligned}\right\} \quad (56.\,11)$$

Deze uitdrukkingen verschillen van die van LOVE (lit. 36, art. 329) met bedragen

$$\varrho_{\alpha\alpha} - \varkappa_1 = \frac{1}{R_1}\left\{2\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{w}{R_1}\right) + \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{w}{R_2}\right\},$$

$$\varrho_{\beta\beta} - \varkappa_2 = \frac{1}{R_2}\left\{\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{w}{R_1} + 2\left(\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha} - \frac{w}{R_2}\right)\right\},$$

$$\varrho_{\alpha\beta} - \tau = \frac{1}{R_1}\left\{\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta} + \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha} - \frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta} - \frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right\};$$

omdat de verplaatsingen infinitesimaal zijn ondersteld, kan hiervoor worden geschreven

$$\varrho_{\alpha\alpha} - \varkappa_1 = \frac{\gamma_{\alpha\alpha o}}{R_1} + \frac{\gamma_{\beta\beta o}}{2R_1},$$

$$\varrho_{\beta\beta} - \varkappa_2 = \frac{\gamma_{\alpha\alpha o}}{2R_2} + \frac{\gamma_{\beta\beta o}}{R_2},$$

$$\varrho_{\alpha\beta} - \tau = \frac{\gamma_{\alpha\beta o}}{R_1}.$$



Deze verschillen zijn wegens de reeds verwaarloosde vervormingsbijdragen $\frac{z}{R_1}\gamma_{\alpha\alpha o}$ enz. van geen beteekenis.

## 57 - DE INVLOED VAN KLEINE AFWIJKINGEN

Voor de toepassing van de in hoofdstuk 4 ontwikkelde theorie op schaalconstructies is de kennis vereischt van de verandering der elastische energie tengevolge van kleine meetkundige afwijkingen. Aangenomen wordt dat de coördinaten $x_i$ van de punten van het middenvlak van een voor de constructie ontworpen model weer zijn gegeven als functies van twee parameters $\alpha$ en $\beta$ zoodanig dat de lijnen $\beta$ = const. en $\alpha$ = const. de kromtelijnen van dit middenvlak bepalen. Op dit model kan de voorgaande theorie dan onmiddellijk worden toegepast.

Uit een gegeven oppervlak kan een willekeurig ander oppervlak in het algemeen worden verkregen door elk punt van eerstgenoemd oppervlak een verplaatsing in de richting van zijn normaal te doen ondergaan. Aangenomen wordt dat het middenvlak der constructie op deze wijze uit het middenvlak van het model wordt afgeleid door verplaatsingen $w_o$ ($\alpha$, $\beta$) in de normaalrichting van het model

$$x_i^0 = x_i + w_o n_i;$$

het middenvlak der constructie is dan eveneens gegeven door zijn coördinaten $x_i^0$ als functies van $\alpha$ en $\beta$. Indien nog wordt ondersteld dat de schaaldikten van constructie en model gelijk zijn dan kunnen punten op eenzelfden afstand $z$ van het middenvlak van onderscheidenlijk constructie en model welker projecties op de onderscheiden middenvlakken door dezelfde waarden van $\alpha$ en $\beta$ worden gegeven als correspondeerende punten worden opgevat.

Het quadraat van een lijnelement in den onvervormden toestand van het model wordt gegeven door (53. 2). Wordt de constructie opgevat als een „vervormde" toestand van het model dan kan voor het quadraat van een lijnelement dezer constructie worden geschreven

$$dl^{0^2} = (1+\gamma_{\alpha\alpha}{}^0)\,A^2\left(1-\frac{z}{R_1}\right)^2 d\alpha^2 + (1+\gamma_{\beta\beta}{}^0)\,B^2\left(1-\frac{z}{R_2}\right)^2 d\beta^2 + \\ + 2\gamma_{\alpha\beta}{}^0\,AB\left(1-\frac{z}{R_1}\right)\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\alpha\,d\beta + dz^2; \quad (57.\,1)$$

hierin zijn $\gamma_{\alpha\alpha}{}^0$ enz. de „vervormingscomponenten" (53. 3), (53. 4) in het punt ($\alpha$, $\beta$, $z$) van het model bij de „verplaatsingen" 0, 0, $w_o$ in de richtingen van de eenheidsvectoren behoorend bij het middenvlak van het model. Voor de „vervormingscomponenten" wordt met (55. 9) geschreven

$$\gamma_{\alpha\alpha}{}^0 = \gamma_{\alpha\alpha o}{}^0 - 2z\varrho_{\alpha\alpha}{}^0 \text{ enz.}, \tag{57.2}$$

waarbij $\gamma_{\alpha\alpha o}{}^0$, $\varrho_{\alpha\alpha}{}^0$ enz. uit de in par. 56 afgeleide uitdrukkingen voor $\gamma_{\alpha\alpha o}$, $\varrho_{\alpha\alpha}$ enz. worden verkregen door $u$ en $v$ nul en $w = w_o$ te stellen.

Voor het quadraat van een lijnelement in den vervormden toestand der constructie, gekenmerkt door de coördinaten $x_i'$ van het middenvlak, wordt geschreven

$$dl'^2 = (1+\gamma_{\alpha\alpha}')\,A^2\left(1-\frac{z}{R_1}\right)^2 d\alpha^2 + (1+\gamma_{\beta\beta}')\,B^2\left(1-\frac{z}{R_2}\right)^2 d\beta^2 + \\ + 2\gamma_{\alpha\beta}'\,AB\left(1-\frac{z}{R_1}\right)\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\alpha\,d\beta + dz^2, \tag{57.3}$$

waarin $\gamma_{\alpha\alpha}'$ enz. de „vervormingscomponenten" in het punt $(\alpha, \beta, z)$ van het model zijn bij de „verplaatsingen"

$$u_i' = x_i' - x_i = u_i + u_i{}^0;$$

hierin zijn $u_i$ de bij de vervorming der constructie werkelijk optredende verplaatsingen. Voor de „vervormingscomponenten" kan weer worden geschreven

$$\gamma_{\alpha\alpha}' = \gamma_{\alpha\alpha o}' - 2z\varrho_{\alpha\alpha}' \text{ enz.} \tag{57.4}$$

Worden ook de verplaatsingen $u_i$ ontbonden volgens de eenheidsvectoren behoorend bij het middenvlak van het *model*

$$u_i = ua_i + vb_i + wn_i \tag{57.5}$$

dan worden $\gamma_{\alpha\alpha o}'$, $\varrho_{\alpha\alpha}'$ enz. uit de uitdrukkingen voor $\gamma_{\alpha\alpha o}$, $\varrho_{\alpha\alpha}$ enz. van par. 56 verkregen door vervanging van $u, v, w$ door $u, v, w + w_o$.

De werkelijke vervormingstoestand der constructie wordt geheel beschreven door de verhouding van (57.3) en (57.1). Om uit deze verhouding met behulp van (11.2) de werkelijke vervormingscomponenten ten opzichte van drie aanvankelijk loodrechte richtingen in de constructie te berekenen wordt (57.1) herleid tot

$$dl^{0\,2} = (1+\gamma_{\alpha\alpha}{}^0)\left[1 - \frac{\gamma_{\alpha\beta}{}^{0\,2}}{(1+\gamma_{\alpha\alpha}{}^0)\,(1+\gamma_{\beta\beta}{}^0)}\right] A^2\left(1-\frac{z}{R_1}\right)^2 d\alpha^2 + \\ + (1+\gamma_{\beta\beta}{}^0)\left[B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\beta + \frac{\gamma_{\alpha\beta}{}^0}{1+\gamma_{\beta\beta}{}^0}A\left(1-\frac{z}{R_1}\right)d\alpha\right]^2 + dz^2;$$

uit deze formule blijkt dat de drie richtingen



$$\left.\begin{aligned} &B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\beta + \frac{\gamma_{\alpha\beta}{}^0}{1+\gamma_{\beta\beta}{}^0}A\left(1-\frac{z}{R_1}\right)d\alpha = 0,\ dz = 0;\\ &dz = 0,\ d\alpha = 0;\\ &d\alpha = 0,\ B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\beta + \frac{\gamma_{\alpha\beta}{}^0}{1+\gamma_{\beta\beta}{}^0}A\left(1-\frac{z}{R_1}\right)d\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \tag{57.6}$$

onderling loodrecht zijn. De kleinheid der verschillen tusschen constructie en model wordt uitgedrukt door verwaarloozing van grootheden van den tweeden en hoogeren graad in $\gamma_{\alpha\alpha}{}^0$ enz. De richtingscosinussen van het lijnelement $dl^0$ ten opzichte van de door (57.6) bepaalde richtingen bedragen

$$\left.\begin{aligned} l_\alpha{}^{0\,2} &= (1+\gamma_{\alpha\alpha}{}^0)\,\frac{A^2\left(1-\frac{z}{R_1}\right)^2 d\alpha^2}{dl^{0\,2}},\\ l_\beta{}^{0\,2} &= (1+\gamma_{\beta\beta}{}^0)\,\frac{\left[B\left(1-\frac{z}{R_2}\right)d\beta + \gamma_{\alpha\beta}{}^0\,A\left(1-\frac{z}{R_1}\right)d\alpha\right]^2}{dl^{0\,2}},\\ l_z{}^{0\,2} &= \frac{dz^2}{dl^{0\,2}}. \end{aligned}\right\} \tag{57.7}$$

Met behulp van (57.7) worden $d\alpha$, $d\beta$, $dz$ uit (57.3) geëlimineerd. Het resultaat is bij verwaarloozing van grootheden van den tweeden en hoogeren graad in $\gamma_{\alpha\alpha}{}^0$ enz.

$$\frac{dl'^2}{dl^{0\,2}} = \left[\frac{1+\gamma_{\alpha\alpha}'}{1+\gamma_{\alpha\alpha}{}^0} - 2\gamma_{\alpha\beta}{}^0\gamma_{\alpha\beta}'\right] l_\alpha{}^{0\,2} + \frac{1+\gamma_{\beta\beta}'}{1+\gamma_{\beta\beta}{}^0}\,l_\beta{}^{0\,2} + \\ + 2\left[\frac{\gamma_{\alpha\beta}'}{\sqrt{(1+\gamma_{\alpha\alpha}{}^0)\,(1+\gamma_{\beta\beta}{}^0)}} - \gamma_{\alpha\beta}{}^0\right] l_\alpha{}^0 l_\beta{}^0 + l_z{}^2.$$

Bij kleine vervormingen van een weinig van het model afwijkende constructie zijn ook de grootheden $\gamma_{\alpha\alpha}'$ enz. klein. Worden mitsdien ook grootheden verwaarloosd die quadratisch zijn in $\gamma_{\alpha\alpha}'$ enz. en $\gamma_{\alpha\alpha}{}^0$ enz. dan bedragen de vervormingscomponenten der constructie ten opzichte van de door (57.6) bepaalde richtingen

$$\gamma_{\alpha\alpha} = \gamma_{\alpha\alpha}' - \gamma_{\alpha\alpha}{}^0,\quad \gamma_{\beta\beta} = \gamma_{\beta\beta}' - \gamma_{\beta\beta}{}^0,\quad \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}' - \gamma_{\alpha\beta}{}^0,$$
$$\gamma_{\alpha z} = \gamma_{\beta z} = \gamma_{zz} = 0. \tag{57.8}$$

Met behulp van (57.2 en 4) kan hiervoor worden geschreven

$$\gamma_{\alpha\alpha} = \gamma_{\alpha\alpha o}' - \gamma_{\alpha\alpha o}{}^0 - 2z\varrho_{\alpha\alpha}' + 2z\varrho_{\alpha\alpha}{}^0 = \gamma_{\alpha\alpha o}{}^* - 2z\varrho_{\alpha\alpha}{}^* \text{ enz.} \tag{57.9}$$

De grootheden $\gamma_{\alpha\alpha o}'$, $\varrho_{\alpha\alpha}'$ enz. volgen uit de in par. 56 gegeven uitdrukkingen voor $\gamma_{\alpha\alpha o}$, $\varrho_{\alpha\alpha}$ enz. door vervanging van $w$ door $w_o + w$; hierbij kunnen termen van den tweeden en hoogeren graad in $w_o$ en haar afgeleiden weer worden verwaarloosd. De grootheden $\gamma_{\alpha\alpha o}^{0}$, $\varrho_{\alpha\alpha}^{0}$ enz. worden uit $\gamma_{\alpha\alpha o}$, $\varrho_{\alpha\alpha}$ enz. verkregen door vervanging van $u$, $v$, $w$ door onderscheidenlijk 0, 0, $w_o$, waarbij eveneens termen van den tweeden graad in $w_o$ en haar afgeleiden worden verwaarloosd. Voor de bepaling van $\gamma_{\alpha\alpha o}^{*}$, $\varrho_{\alpha\alpha}^{*}$ enz. kan dan het volgende voorschrift worden gegeven: vervang in de uitdrukkingen van par. 56 voor $\gamma_{\alpha\alpha o}$, $\varrho_{\alpha\alpha}$ enz. $w$ door $w_o + w$ en breng van de termen die $w_o$ of haar afgeleiden bevatten alleen die in rekening, welke lineair zijn in $w_o$ en haar afgeleiden en tenminste één van de verplaatsingscomponenten $u$, $v$, $w$ of haar afgeleiden bevatten.

Met verwaarloozing van $\gamma_{\alpha\alpha}^{0}$ enz. ten opzichte van de eenheid wordt het oppervlak van een vlakte-element $z = \text{const.}$ bepaald door (55. 10). Bij de berekening der elastische energie is deze verwaarloozing gerechtvaardigd aangezien toch ook bij de berekening der vervormingscomponenten reeds bijdragen van den vorm $\gamma_{\alpha\alpha}^{0}\gamma_{\alpha\alpha}$ enz. zijn verwaarloosd. De elastische energie per eenheid van oppervlak van constructie of model wordt dan onveranderd door (55. 11) gegeven, echter met de gewijzigde waarden der vervormingscomponenten.

Technische Hoogeschool
Handbibliotheek
Aid Weg en Waterb. Kennis

Hoofdstuk 6

# TOEPASSINGEN OP STAAF- EN PLAATPROBLEMEN

## 61 – DE ONSAMENDRUKBARE STAAF (PROBLEEM DER ELASTICA)

### 611 – DE POTENTIEELE ENERGIE

De uiteinden van een prismatische staaf ter lengte $l$ worden zoodanig scharnierend ondersteund dat verplaatsingen loodrecht op de staafas zijn uitgesloten. Het is evident dat de rechte, onvervormde toestand van de onsamendrukbaar gedachte staaf bij belasting door in de uiteinden centrisch aangrijpende drukkrachten $N$ steeds een mogelijke evenwichtstoestand is; deze evenwichtstoestand wordt de grondtoestand genoemd.

Ondersteld wordt dat de punten van de staafas slechts verplaatsingen kunnen ondergaan gelegen in het vlak door de staafas en één der hoofdtraagheidsassen van een doorsnede. Zij $x$ de afstand van een punt $P$ der onvervormde staafas tot een der steunpunten, $u$ en $w$ de verplaatsingen van dit punt in de richting van de staafas en loodrecht daarop. De oorsprong van het vaste $x_i$-stelsel wordt in het steunpunt $x = 0$ gelegd; de $x_1$-as valt samen met de staafas, de $x_3$-as ligt in het vlak van buiging der staaf. De coördinaten van het punt $P$ bedragen in den vervormden toestand

$$x_1' = x + u\,, \quad x_2' = 0\,, \quad x_3' = w\,,$$

zoodat de lengte van een boogelement der staafas dat oorspronkelijk de lengte $dx$ bezat in den vervormden toestand wordt gegeven door

$$dl'^2 = \left\{\left(\frac{dx_1'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx_2'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dx_3'}{dx}\right)^2\right\} dx^2 = \left\{\left(1+\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2\right\} dx^2.$$

De onsamendrukbaarheid van de staafas wordt derhalve uitgedrukt door de voorwaarde

$$\left(1+\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2 = 1. \qquad (61.\,1)$$

De kromming van de staafas wordt bepaald door de formule

$$\varrho = \pm \frac{\dfrac{dx_1'}{dx}\dfrac{d^2x_3'}{dx^2} - \dfrac{dx_3'}{dx}\dfrac{d^2x_1'}{dx^2}}{\left\{\left(\dfrac{dx_1'}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dx_3'}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}},$$

waaruit met gebruik van (61. 1) volgt

$$\varrho = \pm \left\{\left(1 + \frac{du}{dx}\right)\frac{d^2w}{dx^2} - \frac{dw}{dx}\frac{d^2u}{dx^2}\right\}. \qquad (61.2)$$

In overeenstemming met de klassieke buigingstheorie wordt de elastische energie in een staafelement evenredig gesteld met het quadraat van de kromming. De totale elastische energie bedraagt dan

$$V = \tfrac{1}{2}a\int_0^l \varrho^2\, dx,$$

waarin $a$ de buigingsstijfheid van de staaf is. De potentiëele energie van de als druk positief gerekende belastingen $N$ bedraagt

$$-W = Nu\Big|_{x=0}^{x=l} = N\int_0^l \frac{du}{dx}\, dx.$$

Na substitutie van (61. 2) is de totale potentieele energie $V - W$ uitgedrukt in de verplaatsingen. Deze zijn echter nog gekoppeld door de inhomogene kinematische voorwaarde (61. 1), zoodat de algemeene theorie niet onmiddellijk kan worden toegepast (zie par. 22). Deze moeilijkheid verdwijnt door eliminatie van de verplaatsingscomponente $u$ met behulp van (61. 1)

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} - 1;$$

substitutie in (61. 2) geeft

$$\varrho = \pm \frac{\dfrac{d^2w}{dx^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2}}$$

zoodat de totale energie afgezien van een triviale constante wordt gegeven door



$$V - W = \tfrac{1}{2}a\int_0^l \frac{\left(\dfrac{d^2w}{dx^2}\right)^2}{1 - \left(\dfrac{dw}{dx}\right)^2}\, dx + N\int_0^l \sqrt{1 - \left(\frac{dw}{dx}\right)^2}\, dx. \qquad (61.3)$$

Worden de optredende grootheden dimensieloos gemaakt door te stellen

$$x = \xi l\,, \quad w = \psi l\,, \quad N = \lambda\frac{\pi^2 a}{l^2}\,, \quad V - W = \tfrac{1}{2}\frac{a}{l}P^\lambda\,,$$

terwijl differentiaties naar $\xi$ kortheidshalve door een punt worden aangegeven, dan gaat (61. 3) over in

$$P^\lambda[\psi] = \int_0^1 \frac{\psi^{\cdot\cdot 2}}{1 - \psi^{\cdot 2}}\, d\xi + 2\pi^2\lambda\int_0^1 \sqrt{1 - \psi^{\cdot 2}}\, d\xi. \qquad (61.4)$$

Ontwikkeling der integranden levert bij afbreken na de termen van den vierden graad in de afgeleiden van de functie $\psi$, waarbij weer een triviale constante buiten beschouwing wordt gelaten

$$\left.\begin{aligned} &P^\lambda[\psi] = P_2^\lambda[\psi] + P_4^\lambda[\psi] \\ &\text{met} \\ &P_2^\lambda[\psi] = \int_0^1 (\psi^{\cdot\cdot 2} - \pi^2\lambda\psi^{\cdot 2})\, d\xi, \\ &P_4^\lambda[\psi] = \int_0^1 (\psi^{\cdot 2}\,\psi^{\cdot\cdot 2} - \tfrac{1}{4}\pi^2\lambda\psi^{\cdot 4})\, d\xi. \end{aligned}\right\} \qquad (61.5)$$

Uit (61. 5) blijkt nog dat de eerste variatie der energie voor den rechten toestand van de staaf identiek nul is, in overeenstemming met de boven geuite bewering dat deze toestand altijd een mogelijke evenwichtstoestand is.

### 612 - DE KNIKBELASTING

De kniklast wordt volgens par. 31 bepaald door de kleinste waarde van $\lambda$ waarvoor met een willekeurige kinematisch mogelijke functie $\zeta$, die derhalve nul is voor $\xi = 0$ en $\xi = 1$, is voldaan aan de variatievergelijking (24. 14)

$$P_{11}^\lambda[\psi, \zeta] = 2\int_0^1 (\psi^{\cdot\cdot}\,\zeta^{\cdot\cdot} - \pi^2\lambda\psi^{\cdot}\,\zeta^{\cdot})\, d\xi = 0.$$

Partieele integratie levert

$$2\psi'' \zeta \Big|_0^1 - 2(\psi''' + \pi^2 \lambda \psi') \zeta \Big|_0^1 + 2\int_0^1 (\psi'''' + \pi^2 \lambda \psi'') \zeta d\xi = 0.$$

Wegens de willekeurigheid der functie $\zeta$ moet $\psi$ voor $0 < \xi < 1$ voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\psi'''' + \pi^2 \lambda \psi'' = 0 ; \qquad (61.6)$$

de willekeurigheid van $\zeta'$ voor $\xi = 0$ en $\xi = 1$ eischt voorts

$$\psi'' = 0 \text{ voor } \xi = 0 \text{ en } \xi = 1, \qquad (61.7)$$

terwijl de kinematische voorwaarden in de steunpunten den eisch stellen

$$\psi = 0 \text{ voor } \xi = 0 \text{ en } \xi = 1. \qquad (61.8)$$

De algemeene oplossing van (61.6) luidt

$$\psi = A + B\xi + C \cos \pi \sqrt{\lambda}\, \xi + D \sin \pi \sqrt{\lambda}\, \xi ;$$

de randvoorwaarden (61.7) en (61.8) laten alleen voor $D$ een van nul verschillende waarde toe, die dan onbepaald blijft, en wel alleen indien

$$\pi \sqrt{\lambda} = k\pi \,.\, (k = 1, 2, \ldots).$$

De kleinste waarde van den belastingparameter waarvoor (61.6), (61.7) en (61.8) een van nul verschillende oplossing bezitten, is derhalve $\lambda_1 = 1$ met de eigenfunctie

$$\psi_1 = \sin \pi \xi ; \qquad (61.9)$$

deze functie is genormeerd door de voorwaarde $\psi_1 = 1$ voor $\xi = \frac{1}{2}$. De bijbehoorende kniklast is de bekende kniklast van EULER.

In de ontwikkeling (61.5) komt geen term van den derden graad voor, zoodat zoowel $P_3[\psi_1]$ als $P_{21}[\psi_1, \zeta]$ nul is. Mitsdien bedraagt de over de stabiliteit bij den kniklast beslissende grootheid (zie par. 25)

$$A_4 = P_4[\psi_1] = \int_0^1 (\psi_1'^2 \psi_1''^2 - \tfrac{1}{4}\pi^2 \lambda_1 \psi_1'^4)\, d\xi =$$

$$= \pi^6 \int_0^1 (\sin^2 \pi\xi \cos^2 \pi\xi - \tfrac{1}{4} \cos^4 \pi\xi)\, d\xi = \frac{\pi^6}{32}. \qquad (61.10)$$

Zij is positief zoodat het evenwicht onder den kniklast stabiel is.



## 613 - EVENWICHTSTOESTANDEN BIJ BELASTINGEN IN DE OMGEVING VAN DEN KNIKLAST

Uit (61.5) volgt

$$P_2'[\psi] = -\pi^2 \int_0^1 \psi'^2 d\xi,$$

zoodat voor de constante $A_2'$ wordt gevonden

$$A_2' = P_2'[\psi_1] = -\pi^4 \int_0^1 \cos^2 \pi\xi\, d\xi = -\frac{\pi^4}{2}. \qquad (61.11)$$

Uit (35.7) volgt dan voor de amplitude van de eigenfunctie (61.9) bij belastingen in de omgeving van den kniklast

$$a = \pm \sqrt{-\frac{-\frac{1}{2}\pi^4}{\frac{1}{3}\frac{2}{2}\pi^6}} \sqrt{\lambda - \lambda_1} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1}. \qquad (61.12)$$

Deze uitkomst stemt overeen met de door VON MISES langs anderen weg verkregen benaderingsoplossing (lit. 42).

Uit (61.10) blijkt dat de verplaatsingen uit den grondtoestand in de omgeving van den kniklast zeer sterk aangroeien bij vergrooting van de belasting; voor een belasting die den kniklast slechts 5% overschrijdt bedraagt de grootste doorbuiging in het midden van de staaf reeds ongeveer 20% van de lengte der staaf. Mitsdien heeft het weinig zin de theorie van par. 38 voor verder van den kniklast verwijderde belastingen toe te passen. Inderdaad levert deze theorie hier bij grootere belastingen geen verbeterd resultaat op, integendeel. In het onderhavige geval behoeft zulks geen verwondering te wekken daar bij deze belastingen en de bijbehoorende groote verplaatsingen uit den grondtoestand de veronderstelling van par. 38 aangaande de kleinheid dezer verplaatsingen allerminst is vervuld.

## 614 - DE INVLOED VAN EEN KLEINE EXCENTRICITEIT DER BELASTING

Tot dusver is aangenomen dat de resultante der drukkrachten in de staafeinden aangrijpt in het zwaartepunt der doorsnede. De invloed van een kleine excentriciteit $\varepsilon l$ der belasting kan in rekening worden gebracht door op de staafeinden behalve de drukbelastingen $N$ tegengestelde momenten $N\varepsilon l$ te laten werken. Deze momenten worden positief gerekend indien bij afwezigheid der drukbelastingen de gekromde staafas haar concave zijde naar de positieve $x_3$-richting keert. Zij $\vartheta$ de hoekverdraaiing van een staafdoorsnede,

positief gerekend in de richting van de $x_3$-as naar de $x_1$-as, dan bedraagt de energie der momenten

$$N\varepsilon l \left\{(\vartheta)_{\xi=1} - (\vartheta)_{\xi=0}\right\}.$$

Deze energie moet worden toegevoegd aan de som (61. 3) van elastische energie en energie der drukbelastingen. Wegens de onsamendrukbaarheid der staafas is de hoek $\vartheta$ bepaald door

$$\vartheta = -\operatorname{bg}\sin\frac{dw}{dx} = -\operatorname{bg}\sin\psi,$$

of na ontwikkeling

$$\vartheta = -\psi - \tfrac{1}{6}\psi^3 - \ldots.$$

Na deeling door $\frac{1}{2}\frac{a}{l}$ kan voor de totale energie worden geschreven

$$P^\lambda[\psi] + \varepsilon Q^\lambda[\psi] = \varepsilon\, Q_1{}^\lambda[\psi] + P_2{}^\lambda[\psi] + P_4{}^\lambda[\psi] + \ldots, \quad (61.\,13)$$

waarin $P_2{}^\lambda[\psi]$ en $P_4{}^\lambda[\psi]$ door (61. 5) zijn bepaald en

$$Q_1{}^\lambda[\psi] = -2\pi^2\lambda\psi\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}. \quad (61.\,14)$$

In overeenstemming met hoofdstuk 4 wordt alleen de in de verplaatsingen lineaire invloed der excentriciteit in rekening gebracht.

Bij belastingen in de omgeving van den kniklast van de centrisch gedrukte staaf worden de evenwichtstoestanden bepaald door de stationnaire waarden van (44. 9). De coëfficiënten $A_4$ en $A_2{}'$ worden onderscheidenlijk gegeven door (61. 10) en (61. 11). $B_1$ is bepaald door

$$B_1 = Q_1[\psi_1] = -2\pi^2\lambda_1\psi_1\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = 4\pi^3. \quad (61.\,15)$$

Bij het beschouwde probleem is het ook van belang de evenwichtstoestanden te kennen bij belastingen die belangrijk beneden den kniklast der centrisch gedrukte staaf liggen. Hiertoe wordt gebruik gemaakt van de in par. 47 verkregen uitdrukking (47. 8). Om aansluiting te verkrijgen bij de in par. 613 behandelde evenwichtstoestanden van de centrisch belaste staaf wordt in deze uitdrukking de coëfficiënt $A_4{}^\lambda$ vervangen door $A_4$. In de onmiddellijke omgeving van den kniklast der centrisch gedrukte staaf levert dit geen wijziging van beteekenis. Bij grootere en kleinere belastingen wordt $a$ reeds spoedig òf zoo groot dat de voor de afleiding van (47. 8) gebruikte onderstelling van kleinheid der verplaatsingen



niet meer is vervuld òf zoo klein dat de vierdegraadsterm in (47. 8) in zijn geheel van ondergeschikte beteekenis wordt. Voor zoover (47. 8) voor het onderhavige geval kan worden toegepast levert de vervanging van $A_4{}^\lambda$ door $A_4$ dus geen bezwaar op. De overige constanten zijn bepaald door

$$B_1{}' = Q_1{}'[\psi_1] = -2\pi^2\psi_1\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = 4\pi^3, \quad A_2{}^0 = -\frac{1}{\lambda_1}A_2{}' = \tfrac{1}{2}\pi^4,$$

zoodat (47. 8) luidt

$$F^\lambda(a) = 4\pi^3\varepsilon\lambda a + \tfrac{1}{2}\pi^4(1-\lambda)a^2 + \tfrac{1}{3\,2}\pi^6 a^4. \quad (61.\,16)$$

De evenwichtstoestanden zijn bepaald door

$$\frac{dF^\lambda(a)}{da} = 4\pi^3\varepsilon\lambda + \pi^4(1-\lambda)a + \tfrac{1}{8}\pi^6 a^3 = 0. \quad (61.17)$$

De stabiliteit van het evenwicht wordt beheerscht door het teeken van de tweede afgeleide van (61. 16)

$$\frac{d^2F^\lambda(a)}{da^2} = \pi^4(1-\lambda) + \tfrac{3}{8}\pi^6 a^2. \quad (61.\,18)$$

## 615 - VERGELIJKING MET DE EXACTE OPLOSSING

Voor het hier behandelde probleem kan de exacte oplossing worden aangegeven. De energie der excentriciteitsmomenten bedraagt

$$N\varepsilon l\vartheta\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} = \tfrac{1}{2}\frac{a}{l}2\pi^2\,\varepsilon\lambda\vartheta\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}.$$

Met behulp van (61. 4) kan dan voor de totale energie na deeling door $\frac{1}{2}\frac{a}{l}$ worden geschreven

$$P^\lambda[\psi]+\varepsilon Q^\lambda[\psi] = 2\pi^2\varepsilon\lambda\vartheta\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} + \int_0^1\left\{\frac{\psi''^2}{1-\psi'^2} + 2\pi^2\lambda\sqrt{1-\psi'^2}\right\}d\xi.$$

Door de substitutie $\psi' = -\sin\vartheta$ gaat deze uitdrukking over in

$$P^\lambda[\vartheta]+\varepsilon Q^\lambda[\vartheta] = 2\pi^2\varepsilon\lambda\vartheta\Big|_{\xi=0}^{\xi=1} + \int_0^1(\vartheta'^2 + 2\pi^2\lambda\cos\vartheta)\,d\xi. \quad (61.\,19)$$

De evenwichtstoestanden zijn bepaald door stationnaire waarden der energie, dus ook door stationnaire waarden van (61. 19). De eerste variatie van deze uitdrukking luidt

$$\delta\left\{P^{\lambda}[\vartheta]+\varepsilon Q^{\lambda}[\vartheta]\right\}=2\pi^2\varepsilon\lambda\,\delta\vartheta\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}+\int_0^1(2\vartheta'\,\delta\vartheta'-2\pi^2\lambda\sin\vartheta\,\delta\vartheta)\,d\xi=$$

$$=2\,(\pi^2\varepsilon\lambda+\vartheta')\,\delta\vartheta\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}-2\int_0^1(\vartheta''+\pi^2\lambda\sin\vartheta)\,\delta\vartheta\,d\xi.$$

Wegens de willekeur der variaties $\delta\vartheta$ moet voor $0<\xi<1$ aan de differentiaalvergelijking

$$\vartheta''+\pi^2\lambda\sin\vartheta=0 \qquad (61.20)$$

zijn voldaan, terwijl voor $\xi=0$ en $\xi=1$ de randvoorwaarden

$$\vartheta'+\pi^2\varepsilon\lambda=0 \qquad (61.21)$$

moeten gelden. Bij beperking der beschouwingen tot ten opzichte van het midden der staaf symmetrische doorbuigingen kan de randvoorwaarde voor $\xi=1$ worden vervangen door de voor $\xi=\frac{1}{2}$ geldende voorwaarde

$$\vartheta=0. \qquad (61.22)$$

Zooals bekend gelukt de integratie van (61. 20) met behulp van elliptische integralen (zie het aanhangsel). Het resultaat, de dimensielooze doorbuiging $\beta$ in het midden van de staaf (de waarde van $\psi$ voor $\xi=\frac{1}{2}$) als functie van den belastingparameter $\lambda$, is in fig. 4 weergegeven voor de centrisch belaste staaf (kromme I) alsmede voor een waarde 0,01 van den excentriciteitsparameter $\varepsilon$ (kromme Ia). Verder zijn in deze figuur de resultaten van de benaderingsoplossingen (61. 12) en (61. 17), onderscheidenlijk voor $\varepsilon=0$ en $\varepsilon=0{,}01$, geteekend; de bij deze oplossingen behoorende waarden van $\beta$ worden onmiddellijk door $a$ gegeven. Ook is aangegeven de scheiding tusschen het stabiele en het instabiele gebied der benaderingsoplossingen (kromme IV), die wordt verkregen door (61. 18) nul te stellen [1] [2].

Bovendien is in fig. 4 de uitkomst van de bekende knikbuigingstheorie weergegeven (kromme IIIa, b voor $\varepsilon=0{,}01$). Deze wordt verkregen door in (61. 13) alle termen van hoogeren graad dan den tweeden te verwaarloozen. Opdat de aldus benaderde energie

$$-2\pi^2\varepsilon\lambda\psi'\Big|_{\xi=0}^{\xi=1}+\int_0^1(\psi'^2-\pi^2\lambda\psi'^2)\,d\xi$$

[1]) Om de figuur niet te onduidelijk te maken is een relatief groote excentriciteit der belastingen aangenomen.

[2]) Het onderzoek naar de stabiliteit van de exacte oplossing van (61. 20) is zeer gecompliceerd zoodat hierop niet verder wordt ingegaan (zie lit. 44).

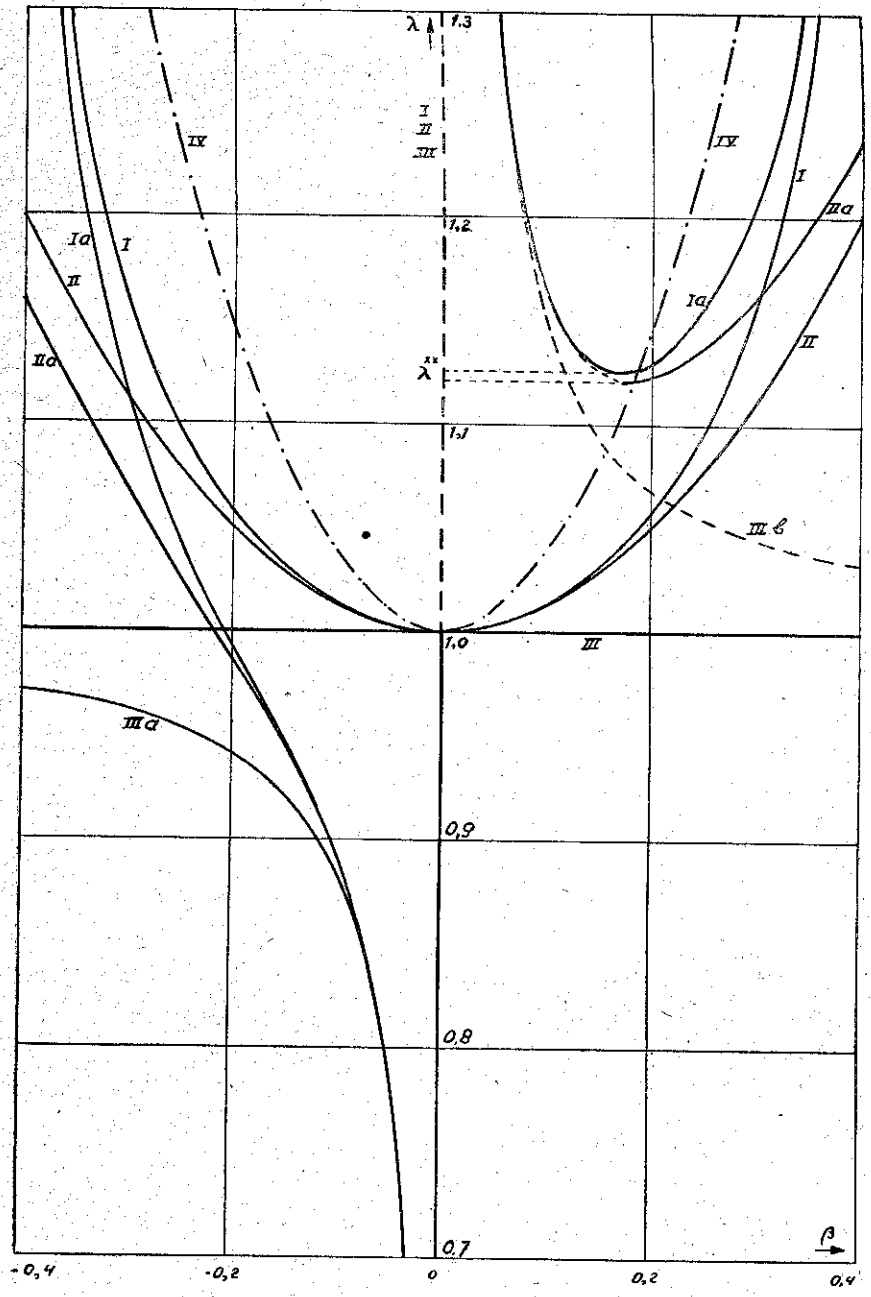



Fig. 4

I. Exacte oplossing zonder excentriciteit.
I*a*. Exacte oplossing met excentriciteit.
II. Benaderingsoplossing zonder excentriciteit.
II*a*. Benaderingsoplossing met excentriciteit.
III. Benaderingsoplossing, verkregen door het neutrale evenwicht ook voor eindige verplaatsingen als geldend te beschouwen.
III*a, b* Knikbuigingstheorie (met excentriciteit).
IV. Scheiding van stabiel en instabiel gebied voor benaderingsoplossing II en II*a*.

een stationnaire waarde bezit moet $\psi$ voldoen aan de differentiaalvergelijking (61. 6) met de randvoorwaarden

$$\xi = 0 \text{ en } \xi = 1 \; : \; \psi = 0 \text{ en } \psi'' = \pi^2 \varepsilon \lambda. \qquad (61.23)$$

Met behulp van (61. 23) worden de vier integratie-constanten van de algemeene oplossing van (61. 6) bepaald; voor de dimensielooze doorbuiging in het midden van de staaf wordt gevonden

$$\beta = \varepsilon \, (1 - \sec \tfrac{1}{2}\pi \sqrt{\lambda}), \qquad (61.24)$$

het bekende resultaat (zie bv. lit. 43, verg. 27). Voor $\varepsilon \to 0$ gaat deze oplossing over in $\beta = 0$ voor $\lambda \neq \lambda_1$, terwijl voor $\lambda = \lambda_1$ de doorbuiging onbepaald wordt (kromme III). Deze laatste oplossing wordt ook verkregen indien de oplossing $a\psi_1$ van de vergelijking (61. 6) met randvoorwaarden (61. 7) en (61. 8) voor het neutrale evenwicht, die voor $\lambda = \lambda_1$ en infinitesimale waarden van $a$ geldt, als een benaderingsoplossing wordt opgevat voor eindige doorbuigingen (zie ook par. 35).

Uit fig. 4 blijkt dat de benaderingsoplossingen II en IIa de exacte oplossing goed weergeven indien de doorbuiging in het midden van de staaf niet grooter is dan 20% van de staaflengte. De benadering door de knikbuigingstheorie is bevredigend indien deze grootste doorbuiging kleiner is dan 10% van de staaflengte. Voor het geval van excentrisch aangrijpende belasting kan voor den natuurlijken evenwichtstoestand de hier ontwikkelde benaderingstheorie voor belastingen beneden den kniklast van de centrisch belaste staaf worden toegepast, de knikbuigingstheorie voor belastingen tot 90% van dezen kniklast. De vergrooting van het geldigheidsgebied der hier ontwikkelde theorie boven het gebied der knikbuigingstheorie is in dit voorbeeld klein; dit wordt veroorzaakt door de kleine waarde van $A_4$ die ten gevolge heeft dat de doorbuigingen bij overschrijding van den kniklast der centrisch belaste staaf zeer snel aangroeien.

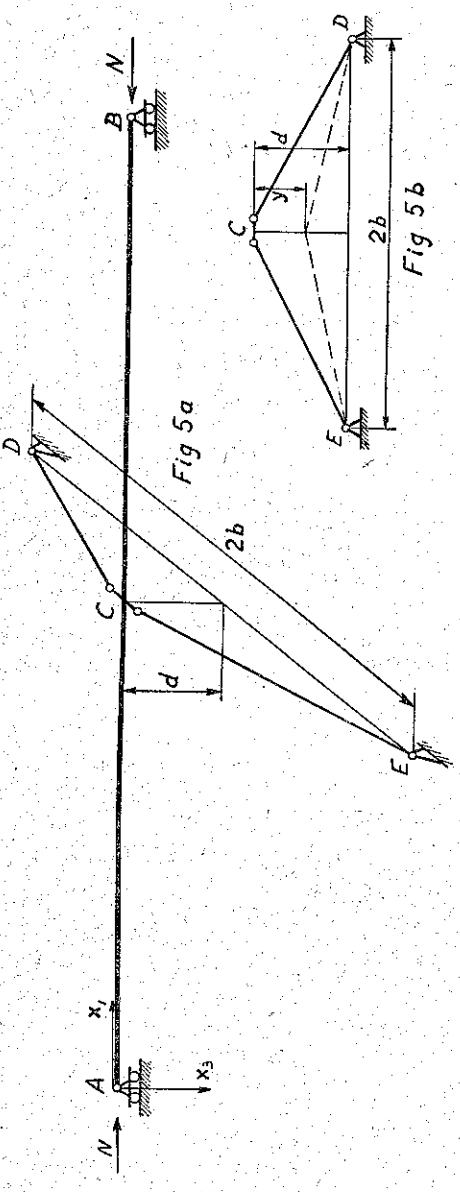
## 62 – HET PROBLEEM VAN COX (lit. 23)

De uiteinden van een prismatische, onsamendrukbaar gedachte staaf ter lengte $l$ worden zoodanig scharnierend ondersteund dat verplaatsingen loodrecht op de staafas zijn uitgesloten. Beschouwd wordt weer buiging van deze staaf in een vlak door de staafas en een hoofdtraagheidsas eener dwarsdoorsnede; hierbij wordt dezelfde notatie als in par. 611 gebruikt.

In het midden $C$ van de buigstaaf $AB$ (fig. 5a) zijn twee gelijke samendrukbare steunstaven $CD$ en $CE$ scharnierend bevestigd. De uiteinden van deze in een vlak loodrecht op $AB$ gelegen steunstaven zijn scharnierend verbonden aan de vaste punten $D$ en $E$. Het symmetrievlak dezer ondersteuning valt samen met het vlak



van buiging van $AB$. Voorts wordt aangenomen dat het punt $C$ geen verplaatsingen in de richting van de staafas $AB$ kan ondergaan. De afstand der punten $D$ en $E$ wordt $2b$ genoemd, de afstand van $C$ tot het midden van $DE$ wordt $d$ genoemd (fig. 5$b$).




Het is duidelijk dat de rechte onvervormde toestand van de buigstaaf, waarbij ook de ondersteuning niet vervormd is, bij belasting door tegengestelde drukkrachten $N$ in de uiteinden van $AB$ steeds een mogelijke evenwichtstoestand, de grondtoestand, is.

### 621 – DE POTENTIEELE ENERGIE

Zij $y$ de verplaatsing van het punt $C$ in de richting van $x_3$ dan bedraagt de lengte der steunstaven, die in den onvervormden toestand de lengte $\sqrt{b^2 + d^2}$ bezitten, in den vervormden toestand (zie fig. 5b)

$$\sqrt{b^2 + (d - y)^2}.$$

Wordt voor een oogenblik een vast $x_1$, $x_2$, $x_3$-assenstelsel met de $x_1$-as langs een der steunstaven gedacht, dan bedraagt de vervormingscomponente $\gamma_{11}$ van deze staaf (zie par. 11)

$$\gamma_{11} = \frac{b^2 + (d - y)^2}{b^2 + d^2} - 1 = -\frac{2dy}{b^2 + d^2} + \frac{y^2}{b^2 + d^2}.$$

De elastische potentiaal voor de steunstaaf wordt dan gegeven door de uitdrukking

$$\tfrac{1}{8} E \gamma_{11}^2 \text{ met } E = 2G\frac{m+1}{m}. \qquad (62.1)$$

Dit resultaat kan gemakkelijk worden afgeleid uit (12.5) door op te merken dat de vervormingscomponenten $\gamma_{ij}\,(i \neq j)$ nul zijn terwijl de afwezigheid van normaalspanningen in vlakken evenwijdig aan de as der steunstaaf analoog met par. 54 voert tot de voorwaarden

$$\frac{\partial A}{\partial \gamma_{22}} = \frac{\partial A}{\partial \gamma_{33}} = 0 \text{ of } \gamma_{22} = \gamma_{33} = -\frac{1}{m}\gamma_{11}.$$

Substitutie in (12.5) geeft dan (62.1).

De totale elastische energie in de ondersteuning bedraagt

$$2.\tfrac{1}{8} E\gamma_{11}^2 F\sqrt{b^2+d^2} = \frac{EF}{\sqrt{b^2+d^2}^3}(d^2y^2 - dy^3 + \tfrac{1}{4}y^4),$$

waarin $F$ het oppervlak der steunstaven is. Met

$$\frac{EF\,l^3}{\alpha\sqrt{b^2+d^2}^3}\frac{d^2}{8\pi^2} = M \text{ en } y = l\beta \qquad (62.2)$$

waarin $\alpha$ de buigingsstijfheid is van de buigstaaf $AB$ en $M$ de door Cox (lit. 23) ingevoerde constante is, wordt voor de energie in de ondersteuning geschreven

$$8\pi^2 M\frac{\alpha}{l}(\beta^2 - \frac{l}{d}\beta^3 + \tfrac{1}{4}\frac{l^2}{d^2}\beta^4). \qquad (62.3)$$

Voor de som van elastische energie der buigstaaf en energie der belastingen kan met (61.4) worden geschreven

$$V - W = \tfrac{1}{2}\frac{\alpha}{l}\int_0^1\left\{\frac{\psi''^2}{1-\psi'^2} + 2\pi^2\lambda\sqrt{1-\psi'^2}\right\}d\xi =$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{\alpha}{l}\left\{\int_0^1(\psi''^2 - \pi^2\lambda\psi'^2)\,d\xi + \int_0^1(\psi'^2\psi''^2 - \tfrac{1}{4}\pi^2\lambda\psi'^4)\,d\xi\right.;$$

hierbij is afgezien van een triviale constante terwijl de ontwikkeling na de termen van den vierden graad wordt afgebroken. Bij beperking der beschouwingen tot ten opzichte van het midden $C$ van $AB$ symmetrische doorbuigingen der buigstaaf bedraagt de totale energie



$$\left.\begin{aligned}
&\text{Energie} = \frac{\alpha}{l}\left\{P_2^\lambda[\psi] + P_3^\lambda[\psi] + P_4^\lambda[\psi]\right\}\\
&\text{met}\\
&P_2^\lambda[\psi] = \int_0^{\frac{1}{2}}(\psi''^2 - \pi^2\lambda\psi'^2)\,d\xi + 8\pi^2 M\beta^2,\\
&P_3^\lambda[\psi] = -8\pi^2 M\frac{l}{d}\beta^3,\\
&P_4^\lambda[\psi] = \int_0^{\frac{1}{2}}(\psi'^2\psi''^2 - \tfrac{1}{4}\pi^2\lambda\psi'^4)\,d\xi + 2\pi^2 M\frac{l^2}{d^2}\beta^4.
\end{aligned}\right\} \qquad (62.4)$$

Hierbij moet in het oog worden gehouden dat blijkens (62.2) $\beta$ de waarde van $\psi$ is voor $\xi = \frac{1}{2}$. Uit (62.4) blijkt dat de eerste variatie der energie voor den rechten toestand der buigstaaf identiek nul is, in overeenstemming met het feit dat deze toestand altijd een mogelijke evenwichtstoestand is.

### 622 - DE KNIKBELASTING

De kniklast wordt volgens par. 31 bepaald door de kleinste waarde van $\lambda$ waarvoor met een willekeurige kinematisch mogelijke functie $\zeta$ is voldaan aan de variatievergelijking (24.14)

$$P_{11}^\lambda[\psi,\zeta] = 2\int_0^{\frac{1}{2}}(\psi''\zeta'' - \pi^2\lambda\psi'\zeta')\,d\xi + 16\pi^2 M(\psi\zeta)_{\xi=\frac{1}{2}} = 0. \qquad (62.5)$$

Bij beperking tot ten opzichte van $C$ symmetrische doorbuigingen zijn de aan de functie $\zeta$ gestelde kinematische voorwaarden

$$\zeta = 0 \text{ voor } \xi = 0 \text{ en } \zeta' = 0 \text{ voor } \xi = \tfrac{1}{2}.$$

Uit (62.5) volgt door partieele integratie

$$2\psi''\zeta'\Big|_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} - 2(\psi''' + \pi^2\lambda\psi')\zeta\Big|_{\xi=0}^{\xi=\frac{1}{2}} + 16\pi^2 M(\psi\zeta)_{\xi=\frac{1}{2}} +$$

$$+ 2\int_0^{\frac{1}{2}}(\psi'''' + \pi^2\lambda\psi'')\,\zeta d\xi = 0.$$

Wegens de willekeur der functie $\zeta$ moet $\psi$ voor $0 < \xi < \frac{1}{2}$ voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\psi'''' + \pi^2\lambda\psi'' = 0\,; \qquad (62.6)$$

de willekeur van $\zeta'$ voor $\xi = 0$ en van $\zeta$ voor $\xi = \frac{1}{2}$ eischt voorts

$\psi''=0$ voor $\xi=0$ en $-\psi''' - \pi^2\lambda\psi'+8\pi^2 M\psi=0$ voor $\xi=\frac{1}{2}$. (62. 7)

Bovendien moet $\psi$ aan de kinematische voorwaarden voldoen

$$\psi = 0 \text{ voor } \xi = 0 \text{ en } \psi' = 0 \text{ voor } \xi = \tfrac{1}{2}. \qquad (62.\,8)$$

De algemeene oplossing van (62. 6) is

$$\psi = A + B\,\xi + C\cos\pi\sqrt{\lambda}\,\xi + D\sin\pi\sqrt{\lambda}\,\xi. \qquad (62.\,9)$$

De randvoorwaarden voor $\xi = 0$ leveren

$$A = C = 0\,;$$

de overige constanten worden met $\pi\sqrt{\lambda} = \mu$ bepaald door de randvoorwaarden voor $\xi = \frac{1}{2}$

$$\left.\begin{aligned} &B + \mu D \cos\tfrac{1}{2}\mu = 0,\\ &\mu^3 D \cos\tfrac{1}{2}\mu + 8\pi^2 M\,(\tfrac{1}{2}B + D\sin\tfrac{1}{2}\mu) = 0. \end{aligned}\right\} (62.10)$$

Deze vergelijkingen bezitten alleen dan een van nul verschillende oplossing indien de determinant der coëfficiënten nul is. Deze voorwaarde luidt na een korte herleiding

$$M = -\frac{\mu^3\cos\frac{1}{2}\mu}{8\pi^2(\sin\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\mu\cos\frac{1}{2}\mu)} = -\frac{\lambda\mu}{8\,(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\mu)} \qquad (62.\,11)$$

De kniklast is bepaald door de kleinste waarde $\mu_1 = \pi\sqrt{\lambda_1}$ die aan (62. 11) voldoet. Neemt $M$ vanaf de waarde nul onbegrensd toe dan groeit $\mu_1$ aan van $\pi$ tot de door de vergelijking

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\mu - \tfrac{1}{2}\mu = 0 \qquad (62.\,12)$$

bepaalde waarde 8,986 ... De waarde $\lambda_1$ voor den kniklast ligt derhalve in het gebied

$$1 \leqq \lambda_1 < \frac{8{,}986^2}{\pi^2} = 8{,}18.$$

De bij $\lambda_1$ behoorende eigenfunctie is

$$\psi_1 = \sin\mu_1\xi - \mu_1\xi\cos\tfrac{1}{2}\mu_1\,; \qquad (62.\,13)$$

zij is zoodanig genormeerd dat haar waarde voor $\xi = \frac{1}{2}$ bedraagt

$$\beta_1 = (\psi_1)_{\xi=\frac{1}{2}} = \sin\tfrac{1}{2}\mu_1 - \tfrac{1}{2}\mu_1\cos\tfrac{1}{2}\mu_1. \qquad (62.\,14)$$

Over de stabiliteit bij den kniklast beslist in eerste instantie de grootheid

$$A_3 = P_3[\psi_1] = -8\pi^2 M\,\frac{l}{d}\beta_1{}^3 = -8\pi^2 M\,\frac{l}{d}(\sin\tfrac{1}{2}\mu_1 - \tfrac{1}{2}\mu_1\cos\tfrac{1}{2}\mu_1)^3 =$$
$$= \frac{l}{d}\mu_1{}^3\cos\tfrac{1}{2}\mu_1(\sin\tfrac{1}{2}\mu_1 - \tfrac{1}{2}\mu_1\cos\tfrac{1}{2}\mu_1)^2. \qquad (62.\,15)$$



Deze grootheid is alleen nul indien een der factoren van (62. 15) nul is, d.w.z. voor $\mu_1 = \pi$ of voor de door (62. 12) bepaalde waarde $\mu_1$; de bijbehoorende waarden van $M$ zijn nul en oneindig. Voor tusschen deze grenzen gelegen waarden van $M$ is het evenwicht bij de knikbelasting dus steeds instabiel.

### 623 – EVENWICHTSTOESTANDEN BIJ BELASTINGEN IN DE OMGEVING VAN DEN KNIKLAST

Uit (62. 4) volgt

$$P_2'[\psi] = -\pi^2\int_0^{\frac{1}{2}}\psi'^2\,d\xi,$$

zoodat voor de constante $A_2'$ wordt gevonden

$$A_2' = P_2'[\psi_1] = -\pi^2\mu_1{}^2\int_0^{\frac{1}{2}}(\cos\mu_1\xi - \cos\tfrac{1}{2}\mu_1)^2\,d\xi =$$
$$= -\pi^2\mu_1{}^2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\cos\mu_1 - \tfrac{3}{4}\frac{\sin\mu_1}{\mu_1}\right). \qquad (62.\,16)$$

Uit (35. 6) volgt dan voor de amplitude der eigenfunctie (62. 13) bij belastingen in de omgeving van den kniklast

$$a = \frac{2}{3}\,\frac{\pi^2\mu_1{}^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos\mu_1 - \frac{3}{4}\frac{\sin\mu_1}{\mu_1}\right)}{\frac{l}{d}\mu_1{}^3\cos\frac{1}{2}\mu_1(\sin\frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_1\cos\frac{1}{2}\mu_1)^2}(\lambda - \lambda_1). \qquad (62.\,17)$$

De doorbuiging in het midden van de staaf bedraagt

$$w_{\xi=\frac{1}{2}} = al\beta_1 = al\,(\sin\tfrac{1}{2}\mu_1 - \tfrac{1}{2}\mu_1\cos\tfrac{1}{2}\mu_1).$$

Wordt deze doorbuiging dimensieloos gemaakt door te stellen

$$w_{\xi=\frac{1}{2}} = rd$$

dan volgt voor $r$ uit (62. 17)

$$r = \frac{2}{3}\,\frac{\pi^2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos\mu_1 - \frac{3}{4}\frac{\sin\mu_1}{\mu_1}\right)}{\mu_1\cos\frac{1}{2}\mu_1(\sin\frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_1\cos\frac{1}{2}\mu_1)}(\lambda - \lambda_1). \qquad (62.\,18)$$

Voor belastingen die verder van den kniklast zijn verwijderd kan de theorie van par. 38 worden toegepast. Zijn de verplaatsingen uit den grondtoestand nog zoo klein dat de term van den

vierden graad in (38. 22) mag worden verwaarloosd dan volgt door de afgeleide van (38. 22) nul te stellen

$$a = -\frac{2}{3}\frac{\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)A_2{}^0}{A_3{}^0+\lambda A_3{}'}. \qquad (62.\ 19)$$

Hierin is (zie ook (62. 4) )

$$A_2{}^0 = P_2{}^0[\psi_1] = -\lambda_1 P_2{}'[\psi_1] = -\lambda_1 A_2{}'; \quad A_3{}' = P_3{}'[\psi_1] = 0$$

zoodat (62. 19) geheel met (35. 6) overeenstemt. De theorie van par. 38 veroorzaakt bij kleine verplaatsingen uit den grondtoestand dus geen belangrijke wijziging van (62. 18) ook al wijkt de belasting belangrijk af van den kniklast.

### 624 - DE INVLOED VAN KLEINE AFWIJKINGEN

Ondersteld wordt thans dat de staafas $AB$ in den onvervormden toestand iets van een rechte afwijkt terwijl de onvervormde toestand van de ondersteuning ongewijzigd blijft. Beschouwd wordt een afwijking zoodanig dat in den onvervormden toestand de coördinaten van een punt der staafas worden gegeven door

$$x_1{}^0 = x\ , \quad x_3{}^0 = w_0. \qquad (62.\ 20)$$

De afwijkingen van den onvervormden toestand van het tot dusver beschouwde model met coördinaten

$$x_1 = x\ , \quad x_3 = 0$$

zijn klein indien de grootheid $w_0$ klein is; deze kleinheid wordt overeenkomstig hoofdstuk 4 tot uitdrukking gebracht door grootheden van den tweeden en hoogeren graad in $w_0$ en haar afgeleiden te verwaarloozen. De lengte van een lijnelement van de onvervormde staafas bedraagt dan

$$dl^0 = \sqrt{1+\left(\frac{dw_0}{dx}\right)^2}\,dx = dx. \qquad (62.\ 21)$$

Aangenomen wordt dat voor $x = 0$ en $x = l$ de functie $w_0$ nul wordt.

Ondergaat het punt (62.20) verplaatsingen $u$ en $w$ in de asrichtingen dan bedraagt de lengte van een lijnelement der vervormde staafas

$$dl' = \sqrt{\left(1+\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw_0}{dx}+\frac{dw}{dx}\right)^2}\,dx.$$

De onsamendrukbaarheid der staafas wordt derhalve uitgedrukt door de voorwaarde



$$\left(1+\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw_0}{dx}+\frac{dw}{dx}\right)^2 = 1. \qquad (62.\ 22)$$

De kromming van de staafas bedraagt in den onvervormden toestand

$$\varrho^0 = \pm\frac{\frac{dx_1{}^0}{dx}\frac{d^2x_3{}^0}{dx^2}-\frac{dx_3{}^0}{dx}\frac{d^2x_1{}^0}{dx^2}}{\left\{\left(\frac{dx_1{}^0}{dx}\right)^2+\left(\frac{dx_3{}^0}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \pm\frac{d^2w_0}{dx^2},$$

in den vervormden toestand

$$\varrho' = \pm\frac{\left(1+\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d^2w_0}{dx^2}+\frac{d^2w}{dx^2}\right)-\left(\frac{dw_0}{dx}+\frac{dw}{dx}\right)\frac{d^2u}{dx^2}}{\left\{\left(1+\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw_0}{dx}+\frac{dw}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Met behulp van (62. 22) kan de functie $u$ worden geëlimineerd. Het resultaat is (zie ook par. 611)

$$\varrho' = \pm\frac{\frac{d^2w_0}{dx^2}+\frac{d^2w}{dx^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{dw_0}{dx}+\frac{dw}{dx}\right)^2}}.$$

Ontwikkeling levert met verwaarloozing van termen van den vijfden en hoogeren graad in de afgeleiden van $w_0$ en $w$ alsmede van termen van den tweeden en hoogeren graad in $w_0$

$$\varrho' = \pm\left\{\frac{d^2w_0}{dx^2}+\frac{d^2w}{dx^2}+\tfrac{1}{2}\frac{d^2w_0}{dx^2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\frac{dw_0}{dx}\frac{dw}{dx}\frac{d^2w}{dx^2}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\frac{d^2w}{dx^2}\right\}.$$

De energie in een element van de buigstaaf wordt evenredig gesteld met het quadraat van de krommingsverandering $\varrho' - \varrho^0$. Bij verwaarloozing van termen van den zesden en hoogeren graad in de afgeleiden van $w_0$ en $w$ alsmede van termen van den tweeden en hoogeren graad in $w_0$ bedraagt de totale energie in de buigstaaf

$$\tfrac{1}{2}a\int_0^{l^0}(\varrho'-\varrho^0)^2\,dl^0 = \tfrac{1}{2}a\int_0^{l}\left\{\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+\frac{d^2w_0}{dx^2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\frac{d^2w}{dx^2}+\right.$$

$$\left.+2\frac{dw_0}{dx}\frac{dw}{dx}\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2\right\}dx. \qquad (62.\ 23)$$

De energie der belastingen bedraagt

$$Nu\Big|_{x=0}^{x=l} = N\int_0^l \frac{du}{dx}\,dx,$$

waarvoor met behulp van (62. 22) na ontwikkeling bij verwaarloozing van termen van den zesden en hoogeren graad in de afgeleiden van $w_0$ en $w$ en van termen van den tweeden en hoogeren graad in de afgeleide van $w_0$ wordt geschreven

$$N\int_0^l \left\{\sqrt{1-\left(\frac{dw_0}{dx}+\frac{dw}{dx}\right)^2}-1\right\} dx =$$

$$= -\tfrac{1}{2}N\int_0^l \left\{2\frac{dw_0}{dx}\frac{dw}{dx}+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\frac{dw_0}{dx}\left(\frac{dw}{dx}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{dw}{dx}\right)^4\right\} dx. \qquad (62.24)$$

Voor de energie in de ondersteuning blijft (62. 3) ongewijzigd gelden.

De optredende grootheden worden weer dimensieloos gemaakt door te schrijven

$$x = \xi l\ ,\quad w_0 = \varepsilon\psi_0 l\ ,\quad w = \psi l\ ,\quad N = \lambda\frac{\pi^2 a}{l^2}\ .$$

Hierin is $\psi_0$ een functie die den vorm der afwijkingen van de as der buigstaaf van een rechte beschrijft, $\varepsilon$ de afwijkingsparameter die de grootte dezer afwijkingen bepaalt; voor $\xi = 0$ en $\xi = 1$ is $\psi_0$ nul. Differentiaties naar $\xi$ worden weer door een punt aangegeven. Worden de beschouwingen beperkt tot ten opzichte van het midden der buigstaaf symmetrische doorbuigingen dan wordt voor de totale energie, de som van (62. 23), (62. 24) en (62. 3), geschreven

$$\text{Energie} = \frac{a}{l}\left\{P_2{}^\lambda[\psi]+P_3{}^\lambda[\psi]+P_4{}^\lambda[\psi]+\varepsilon Q_1{}^\lambda[\psi]+\varepsilon Q_3{}^\lambda[\psi]\right\}; \qquad (62.25)$$

hierin worden de eerste drie termen door (62. 4) gegeven, de overige termen door

$$\left.\begin{aligned} Q_1{}^\lambda[\psi] &= -2\pi^2\lambda\int_0^{\frac{1}{2}}\psi_0{}'\,\psi'\,d\xi\,,\\ Q_3{}^\lambda[\psi] &= \int_0^{\frac{1}{2}}(\psi_0{}''\,\psi'^2\,\psi''+2\psi_0{}'\,\psi'\,\psi''^2-\pi^2\lambda\psi_0{}'\,\psi'^3)\,d\xi. \end{aligned}\right\} (62.26)$$



Bij kleine waarden van $\psi$ is aan de in par. 47 gestelde voorwaarden voor de uitgebreide theorie voldaan. Worden de termen van den vierden graad in de verplaatsingen verwaarloosd dan kunnen de coëfficiënten van (47. 8) onmiddellijk worden opgeschreven (zie (38. 21), (62. 4) en (62. 26))

$$\left.\begin{aligned} A_2{}^0 &= P_2{}^0[\psi_1] = -\lambda_1 P_2{}'[\psi_1] =\\ &\quad = \lambda_1\pi^2\mu_1{}^2\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}\cos\mu_1-\tfrac{3}{4}\frac{\sin\mu_1}{\mu_1}\right),\\ A_3{}^0 &= P_3{}^0[\psi_1] = P_3[\psi_1] =\\ &\quad = \frac{l}{d}\,\mu_1{}^3\cos\tfrac{1}{2}\mu_1\,(\sin\tfrac{1}{2}\mu_1-\tfrac{1}{2}\mu_1\cos\tfrac{1}{2}\mu_1)^2,\\ A_3{}' &= 0,\\ B_1{}' &= Q_1{}'[\psi_1] = -2\pi^2\mu_1\int_0^{\frac{1}{2}}\psi_0{}'\,(\cos\mu_1\xi-\cos\tfrac{1}{2}\mu_1)\,d\xi. \end{aligned}\right\} (62.27)$$

In overeenstemming met Cox wordt nu aangenomen dat de onvervormde buigstaaf uit twee rechte stukken bestaat die in het midden $C$ met een knik aan elkaar aansluiten. De afwijkingsfunctie $\psi_0$ wordt zoo gekozen dat het midden $C$ van de buigstaaf een afstand $d$ onder de lijn $AB$ ligt

$$\psi_0 = 2\,\frac{d}{l}\,\xi \text{ voor } 0 \leqq \xi \leqq \tfrac{1}{2}. \qquad (62.28)$$

De constante $B_1{}'$ bedraagt dan

$$B_1{}' = -4\pi^2\,\frac{d}{l}\,(\sin\tfrac{1}{2}\mu_1-\tfrac{1}{2}\mu_1\cos\tfrac{1}{2}\mu_1). \qquad (62.29)$$

De doorbuiging in het midden bedraagt

$$a\beta l = al\,(\sin\tfrac{1}{2}\mu_1-\tfrac{1}{2}\mu_1\cos\tfrac{1}{2}\mu_1).$$

Door de substitutie

$$a\beta l = rd$$

wordt in plaats van $a$ een nieuwe variabele $r$ ingevoerd die de doorbuiging in het midden van de staaf bepaalt als veelvoud van den afstand $d$. Voor (47. 8) kan dan worden geschreven

$$F^{\lambda}(a) = \frac{d^2}{l^2}\left\{\frac{{\mu_1}^3 \cos\frac{1}{2}\mu_1}{\sin\frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_1\cos\frac{1}{2}\mu_1} r^3 + \right.$$

$$+(\lambda_1 - \lambda)\,\pi^2\,{\mu_1}^2 \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cos\mu_1 - \frac{3}{4}\frac{\sin\mu_1}{\mu_1}}{(\sin\frac{1}{2}\mu_1 - \frac{1}{2}\mu_1\cos\frac{1}{2}\mu_1)^2} r^2 - 4\pi^2\varepsilon\lambda r\Big\} =$$

$$= \frac{d^2}{l^2}\Big\{R_3 r^3 + (\lambda - \lambda_1)\,R_2'\,r^2 + \varepsilon\lambda\,R_1'\,r\Big\}. \quad (62.30)$$

De invoering van de nieuwe veranderlijke $r$ brengt blijkens (62. 30) het voordeel mede dat de invloed van de verhouding $\frac{d}{l}$ is geëlimineerd. De evenwichtstoestanden zijn gekenmerkt door stationnaire waarden van (62. 30), d.w.z. door

$$3\,R_3 r^2 + 2\,(\lambda - \lambda_1)\,R_2'\,r + \varepsilon\lambda\,R_1' = 0. \quad (62.31)$$

De oplossingen van (62. 31) luiden

$$r = -\frac{1}{3}(\lambda - \lambda_1)\frac{R_2'}{R_3} \pm \sqrt{\frac{1}{9}(\lambda - \lambda_1)^2 \frac{{R_2'}^2}{{R_3}^2} - \varepsilon\lambda\frac{R_1'}{3R_3}}. \quad (62.32)$$

Deze oplossingen zijn reëel indien

$$\frac{1}{9}(\lambda - \lambda_1)^2 \frac{{R_2'}^2}{{R_3}^2} \geqq \varepsilon\lambda\frac{R_1'}{3R_3}. \quad (62.33)$$

Omdat $\mu_1$ tusschen $\pi$ en 8,986 . . ligt zijn alle coëfficiënten $R$ van (62. 31) negatief. Voor *negatieve* waarden van $\varepsilon$ is dan steeds aan (62. 33) voldaan. In een $\lambda - r$ diagram vormen de door (62. 32) bepaalde wortels dan twee gescheiden takken (zie ook fig. 6, blz. 156). Practisch is alleen de tak van belang die continu uit den onbelasten, onvervormden toestand wordt verkregen, de natuurlijke tak; deze wordt bepaald door het onderste teeken van (62. 32). Voor *positieve* waarden van $\varepsilon$ worden door (62. 33) twee grenswaarden $\lambda^* < \lambda_1$ en $\lambda^{**} > \lambda_1$ bepaald zoodanig dat de oplossingen (62. 32) reëel zijn voor $\lambda < \lambda^*$ en voor $\lambda > \lambda^{**}$. Practisch van belang is hier alleen de tak voor $\lambda < \lambda^*$.

De stabiliteit van het evenwicht wordt beheerscht door het teeken van de tweede afgeleide van (62. 30)

$$6R_3 r + 2\,(\lambda - \lambda_1)\,R_2'. \quad (62.34)$$

Blijkens (62. 32) is deze afgeleide steeds positief voor de door het onderste teeken van (62. 32) bepaalde oplossing met uitzondering van de door (62. 33) bepaalde grenswaarden $\lambda^*$ en $\lambda^{**}$ bij positieve waarden van $\varepsilon$. Bij *negatieve* waarden van $\varepsilon$ is de natuurlijke



tak dus steeds stabiel. Bij *positieve* waarden van $\varepsilon$ wordt bij het doorloopen van den natuurlijken tak voor de door $\lambda^*$ bepaalde belasting de stabiliteitsgrens bereikt. Deze knikbelasting wordt blijkens (62. 33) bepaald door

$$\lambda^* = \lambda_1 + \frac{3}{2}\varepsilon\frac{R_1' R_3}{{R_2'}^2} - \sqrt{3\varepsilon\frac{R_1' R_3}{{R_2'}^2} + \frac{9}{4}\varepsilon^2\frac{{R_2'}^2 {R_3}^2}{{R_2'}^4}}. \quad (62.35)$$

625 – VERGELIJKING MET DE OPLOSSING VAN COX

Deze oplossing wordt verkregen door in de energie (62. 25) alle van de buigstaaf afkomstige termen van hoogeren dan den tweeden graad in de afgeleiden van $\psi$ te verwaarloozen; de toelaatbaarheid van deze verwaarloozing wordt door par. 615 aannemelijk gemaakt indien de grootste doorbuiging niet meer bedraagt dan ongeveer 10% van de staaflengte. De energie is dan gegeven door [1])

$$\text{Energie} = \frac{a}{l}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}(\psi''^2 - \pi^2\lambda\psi'^2 - 2\pi^2\varepsilon\lambda\psi_0'\psi')\,d\xi + \right.$$

$$\left. + 8\pi^2 M\left(\beta^2 - \frac{l}{d}\beta^3 + \frac{1}{4}\frac{l^2}{d^2}\beta^4\right)\right\}. \quad (62.36)$$

De evenwichtstoestanden worden bepaald door de stationnaire waarden van (62. 36), dus door

$$2\int_0^{\frac{1}{2}}(\psi''\zeta'' - \pi^2\lambda\psi'\zeta' - \pi^2\varepsilon\lambda\psi_0'\zeta')\,d\xi +$$

$$+ 8\pi^2 M\,(2\psi\zeta - 3\frac{l}{d}\psi^2\zeta + \frac{l^2}{d^2}\psi^3\zeta)_{\xi=\frac{1}{2}} = 0 \quad (62.37)$$

voor alle functies $\zeta$ die aan de kinematische voorwaarden

$$\zeta = 0 \text{ voor } \xi = 0 \text{ en } \zeta' = 0 \text{ voor } \xi = \tfrac{1}{2}$$

voldoen. Door partieele integratie volgt uit (62. 37) dat $\psi$ moet voldoen aan de differentiaalvergelijking

$$\psi'''' + \pi^2\lambda\psi'' + \pi^2\varepsilon\lambda\psi_0'' = 0 \quad (62.38)$$

---

[1]) De hier gebruikte energie wijkt eenigszins af van die van Cox in welke de samendrukbaarheid van de buigstaaf in rekening wordt gebracht. De elastische potentiaal van de steunstaven wordt voorts door Cox evenredig gesteld met het quadraat van de specifieke rek en niet zooals hier evenredig met het quadraat der vormveranderingscomponente. Deze verschillen zijn echter van ondergeschikte beteekenis.

met de randvoorwaarden

$$\left.\begin{aligned} &\psi'' = 0 \text{ voor } \xi = 0, \\ &-\psi''' - \pi^2\lambda\psi' - \pi^2\varepsilon\lambda\psi_0' + \\ &\quad + 8\pi^2 M\left(\psi - \tfrac{3}{2}\frac{l}{d}\psi^2 + \tfrac{1}{2}\frac{l^2}{d^2}\psi^3\right) = 0 \text{ voor } \xi = \tfrac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \quad (62.\,39)$$

De kinematische voorwaarden voor $\psi$ luiden

$$\psi = 0 \text{ voor } \xi = 0 \text{ en } \psi' = 0 \text{ voor } \xi = \tfrac{1}{2}. \quad (62.\,40)$$

Voor de afwijkingsfunctie (62. 28) gaat (62. 38) over in (62. 6). Deze vergelijking met de randvoorwaarden (62. 39) en (62. 40) kan exact worden opgelost. Uit de voorwaarden in $\xi = 0$ volgen onmiddellijk twee der integratieconstanten van de algemeene oplossing (62. 9)

$$A = C = 0\,.$$

De doorbuiging in het midden van de buigstaaf wordt bepaald door

$$\beta = \tfrac{1}{2}B + D \sin \tfrac{1}{2}\mu \text{ met } \mu = \pi\sqrt{\lambda}\,.$$

Met de voorwaarde $\psi' = 0$ in $\xi = \frac{1}{2}$

$$B + D\mu \cos \tfrac{1}{2}\mu = 0$$

kunnen de constanten $B$ en $D$ in $\beta$ worden uitgedrukt

$$B = -\frac{\mu\beta\cos\frac{1}{2}\mu}{\sin\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\mu\cos\frac{1}{2}\mu}, \quad D = \frac{\beta}{\sin\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\mu\cos\frac{1}{2}\mu}.$$

Door de tweede voorwaarde (62. 39) wordt tenslotte $\beta$ bepaald

$$\frac{\mu^3}{\sin\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\mu\cos\frac{1}{2}\mu}\beta\cos\tfrac{1}{2}\mu - 2\mu^2\varepsilon\frac{d}{l} + \\ + 8\pi^2 M\left(\beta - \tfrac{3}{2}\frac{l}{d}\beta^2 + \tfrac{1}{2}\frac{l^2}{d^2}\beta^3\right) = 0. \quad (62.\,41)$$

Door de substitutie $\beta\frac{l}{d} = r$ volgt uit (62. 41) een vergelijking voor de doorbuiging in het midden van de buigstaaf als veelvoud van den afstand $d$

$$r^3 - 3r^2 + \left(2 + \frac{\lambda}{2M}\frac{\mu}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mu - \mu}\right)r - \frac{\lambda}{2M}\varepsilon = 0. \quad (62.\,42)$$

Deze uitkomst stemt geheel overeen met het resultaat van Cox,



dat wordt verkregen door in zijn verg. (1b) $\frac{r}{R^2+1}$ te verwaarloozen ten opzichte van de eenheid (lit. 23, i.h.b. p. 264) [1]).

De stabiliteit van de door (62. 42) bepaalde evenwichtstoestanden wordt beheerscht door de tweede variatie der energie (62. 36)

$$\frac{a}{l}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}(\zeta''^2 - \pi^2\lambda\zeta'^2)\,d\xi + 8\pi^2 M\left(\zeta^2 - 3\frac{l}{d}\beta\zeta^2 + \frac{3}{2}\frac{l^2}{d^2}\beta^2\zeta^2\right)_{\xi=\frac{1}{2}}\right\} = \\ = \frac{a}{l}\left\{\int_0^{\frac{1}{2}}(\zeta''^2 - \pi^2\lambda\zeta'^2)\,d\xi + [8\pi^2 M(1 - 3r + \tfrac{3}{2}r^2)\zeta^2]_{\xi=\frac{1}{2}}\right\}. \quad (62.\,43)$$

Deze is van denzelfden vorm als de tweede variatie (62. 4) voor de oorspronkelijk rechte buigstaaf. De voorwaarde voor neutraal evenwicht kan derhalve onmiddellijk uit (62. 11) worden afgeleid.

$$8\pi^2 M(1 - 3r + \tfrac{3}{2}r^2) + \frac{\mu^3}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\mu} = 0 \text{ of}$$

$$3r^2 - 6r + 2 + \frac{\lambda}{2M}\frac{\mu}{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}\mu - \mu} = 0. \quad (62.\,44)$$

In een $\lambda - r$ diagram worden de neutrale evenwichtstoestanden voor verschillende waarden van $\varepsilon$ alle afgebeeld op de door (62. 44) bepaalde kromme. Deze kromme gaat blijkens (62. 11) door het punt $\lambda = \lambda_1$, $r = 0$. Voor $\lambda < \lambda_1$, $r = 0$ en $\lambda > \lambda_1$, $r = 0$, beeldpunten van mogelijke evenwichtstoestanden voor $\varepsilon = 0$, is het evenwicht onderscheidenlijk stabiel en instabiel. Daar de overgang van een stabielen naar een instabielen evenwichtstoestand altijd plaats vindt via een neutralen evenwichtstoestand zijn evenwichtstoestanden met beeldpunten aan dezelfde zijde der kromme (62. 44) als $\lambda < \lambda_1$, $r = 0$ en $\lambda > \lambda_1$, $r = 0$ onderscheidenlijk stabiel en instabiel. Bij het doorloopen van den natuurlijken tak vanaf het den onvervormden onbelasten toestand weergevende punt $\lambda = r = 0$ wordt de knikbelasting bereikt in het eerste snijpunt met de kromme (62. 44). De bijbehoorende waarde $\lambda^*$ van den belastingparameter wordt verkregen door eliminatie van $r$ uit (62. 42) en (62. 44). Omdat (62. 44) tevens de voorwaarde is voor het samenvallen van twee wortels van (62. 42) is de raaklijn aan de $\lambda - r$ kromme in het punt $\lambda^*$, $r^*$ evenwijdig aan de $r$-as.

In fig. 6 zijn eenige $\lambda - r$ krommen geteekend voor het geval

[1]) Voor de afleiding van (62. 42) ontwikkelt Cox de functies $\psi_0$ en $\psi$ in FOURIER-reeksen. Deze omweg is blijkens de hierboven gegeven oplossingsmethode niet noodig.

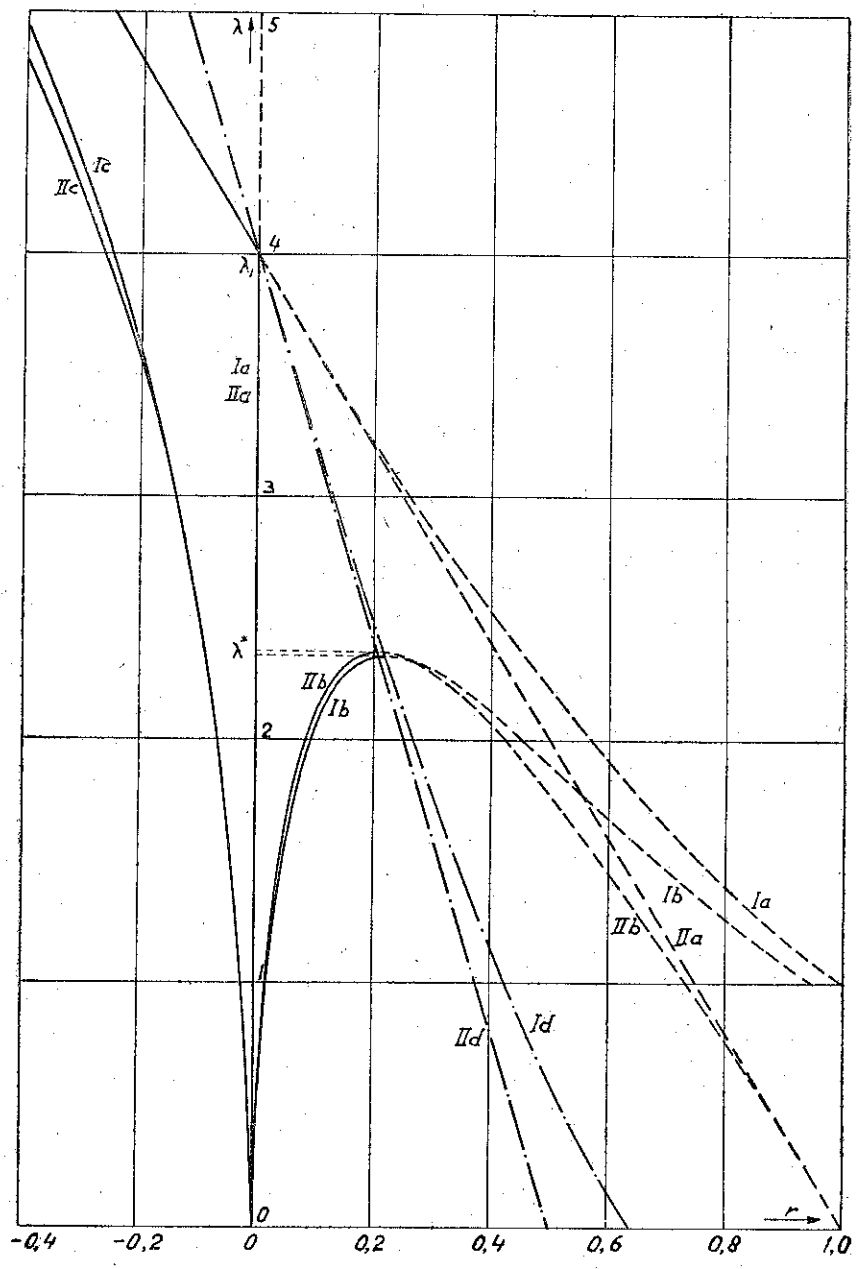



Fig. 6

Ia. Oplossing Cox $\varepsilon = 0$.
Ib. Oplossing Cox $\varepsilon = 0{,}1$.
Ic. Oplossing Cox $\varepsilon = -0{,}1$.
Id. Scheiding van stabiel en instabiel gebied volgens Cox.
IIa. Benadering $\varepsilon = 0$.
IIb. Benadering $\varepsilon = 0{,}1$.
IIc. Benadering $\varepsilon = -0{,}1$.
IId. Scheiding van stabiel en instabiel gebied volgens benadering.



$M = 1$; de bijbehoorende waarde van den belastingparameter voor den kniklast van de oorspronkelijk rechte buigstaaf is blijkens (62. 11) $\lambda_1 = 4$.

Kromme Ia geldt voor de oorspronkelijk rechte buigstaaf, krommen Ib en Ic onderscheidenlijk voor waarden 0,1 en — 0,1 van den afwijkingsparameter $\varepsilon$; van laatstgenoemde krommen zijn alleen de takken geteekend welke continu uit den onvervormden toestand worden verkregen. De scheidingslijn (62. 44) tusschen het stabiele en het instabiele gebied is de kromme Id. De stabiele gedeelten der $\lambda - r$ krommen zijn door getrokken lijnen, de instabiele gedeelten door stippellijnen aangegeven.

Verder zijn in fig. 6 eenige $\lambda - r$ krommen geteekend voor de benaderingsoplossing, eveneens voor $M = 1$. Kromme IIa geldt voor de oorspronkelijk rechte buigstaaf (zie (62. 18)), krommen IIb en IIc onderscheidenlijk voor waarden 0,1 en — 0,1 van den afwijkingsparameter $\varepsilon$ (zie (62.32)). De scheidingslijn tusschen het stabiele en het instabiele gebied is kromme IId; deze wordt verkregen door (62. 34) nul te stellen. Uit de figuur blijkt dat de benadering zeer goed is indien $r$ de waarde 0,4 niet overschrijdt, d.w.z. indien de doorbuiging in het midden van de buigstaaf niet grooter is dan 40 % van den afstand $d$.

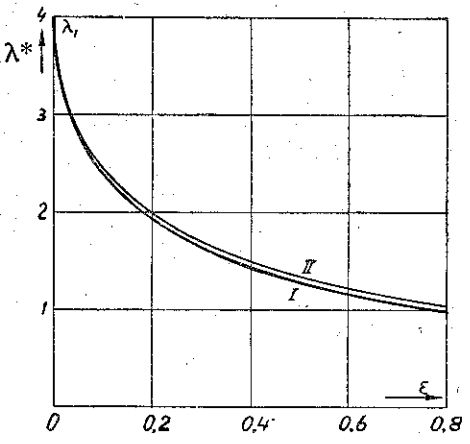



Fig. 7

In fig. 7 is de waarde $\lambda^*$ voor den kniklast der staaf bij positieve waarden van $\varepsilon$ gegeven als functie van $\varepsilon$. Kromme I geldt voor de oplossing van Cox die wordt verkregen door eliminatie van $r$ uit (62. 42) en (62. 44), kromme II voor de benaderingsoplossing (62. 35). Ook hier is de overeenstemming zeer bevredigend.

Tot slot moge worden opgemerkt dat ook het onderzoek van het probleem van Cox is gebaseerd op de onderstelling van volledige elasticiteit van het materiaal. Dit heeft tengevolge dat de beschouwingen slechts beteekenis hebben zoo lang de optredende vervormingen zeer klein zijn. Bij doorbuigingen in het midden der buigstaaf van de orde van grootte van den afstand $d$ is de vervormingscomponente in de steunstaven blijkens par. 621 van de orde van grootte $\frac{d^2}{b^2 + d^2}$. Mitsdien is in het voorgaande stilzwijgend

aangenomen dat de hoek $ECD$ der steunstaven (zie fig. 5b) weinig van 180° verschilt.

## 63 - HET PROBLEEM DER MEEDRAGENDE BREEDTE

Het eenvoudigste geval van het probleem der meedragende breedte wordt als volgt geformuleerd. De randen van een vlakke rechthoekige plaat worden zoodanig scharnierend ondersteund dat zij slechts translaties in het vlak der plaat kunnen uitvoeren. Wordt de plaat in twee overstaande zijden op druk belast dan zal na overschrijding van een kritieke waarde der belasting (de kniklast) de plaat uitknikken. Beneden den kniklast bestaat er een lineair verband tusschen de drukbelasting en de gemiddelde samendrukking; na overschrijding van den kniklast neemt de gemiddelde samendrukking relatief sterker toe dan de drukbelasting. Dit wordt tot uitdrukking gebracht door het begrip meedragende breedte waarvoor de volgende definitie kan worden gegeven: de verhouding van de meedragende breedte tot de totale breedte der plaat is gelijk aan de verhouding van de door de plaat opgenomen drukbelasting tot de drukbelasting in een zelfde ongeknikte plaat bij gelijke gemiddelde samendrukking. De omvangrijke theoretische literatuur over dit onderwerp (zie lit. 46) levert voor niet te groote overschrijdingen van den kniklast goede resultaten; daarentegen is de theorie voor groote overschrijdingen van den kniklast nog weinig bevredigend.

Voor niet te groote overschrijdingen van den kniklast is de beste theorie die van MARGUERRE-TREFFTZ (lit. 19). Na een kort overzicht van hun beschouwingen (par. 632) wordt in par. 633 de algemeene theorie van hoofdstuk 3 toegepast. De hiermede verkregen uitkomsten stemmen geheel overeen met de resultaten van MARGUERRE-TREFFTZ.

### 631 - DE ELASTISCHE ENERGIE

De elastische energie in een oorspronkelijk vlakke plaat kan worden berekend door toepassing van de algemeene theorie van hoofdstuk 5. Het is echter eenvoudiger gebruik te maken van de voor dit bijzondere geval reeds door MARGUERRE en TREFFTZ (lit. 19) verkregen resultaten.

Een punt van het middenvlak der onvervormde plaat wordt beschreven door zijn coördinaten $x$ en $y$ ten opzichte van een vast rechthoekig assenstelsel welks oorsprong in het midden der plaat wordt gedacht. De langsranden van de plaat ter lengte $l$ en breedte $b$ worden dan gegeven door $y = \pm \frac{1}{2}b$, de dwarsranden door $x = \pm \frac{1}{2}l$. Bij de vervorming ondergaat een punt van het middenvlak verplaatsingen met componenten $u$ en $v$ onderscheidenlijk in de richting van de $x$-as en de $y$-as en een componente $w$ loodrecht op het



vlak der plaat. Worden differentiaties naar $x$ en $y$ door rechts beneden aangebrachte indices $x$ en $y$ aangegeven dan bedraagt de totale elastische energie (lit. 19, verg. 36)

$$V = \tfrac{1}{4}Gh\,\frac{m}{m-1}\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}\int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b}\Big\{(2u_x + 2v_y + w_x^2 + w_y^2)^2 + \\ - 2\,\frac{m-1}{m}\Big[(2u_x + w_x^2)\,(2v_y + w_y^2) - (u_y + v_x + w_x w_y)^2\Big] + \\ + \tfrac{1}{3}h^2\Big[(w_{xx} + w_{yy})^2 - 2\,\frac{m-1}{m}\,(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)\Big]\Big\}\,dxdy. \quad (63.1)$$

### 632 - DE THEORIE VAN MARGUERRE-TREFFTZ

Beschouwd wordt een oneindig lange plaat die een gemiddelde samendrukking $\varepsilon_1$ ondergaat. Voor de verplaatsingscomponente $u$ wordt geschreven

$$u = -\varepsilon_1 x + \hat{u}\ , \quad (63.2)$$

waarvan de tweede term een periodieke functie is van $x$. Voor de verplaatsingscomponente $v$ wordt geschreven

$$v = \varepsilon_2 y + \hat{v}\ , \quad (63.3)$$

waarbij de zijdelingsche verplaatsingen van de recht blijvende langsranden $\pm \frac{1}{2}\varepsilon_2 b$ zijn gesteld. Ook $\hat{v}$ is een periodieke functie van $x$. Aan de langsranden moet dan gelden

$$\hat{v}\,(x, \pm \tfrac{1}{2}b) = 0. \quad (63.4)$$

Voor de randwaarden der verplaatsingscomponente $\hat{u}$ wordt eveneens geeischt

$$\hat{u}\,(x, \pm \tfrac{1}{2}b) = 0. \quad (63.5)$$

Dit beteekent dat wordt aangenomen dat de langsranden zijn verbonden aan zoo zware verstijvers dat deze door de door de plaat uitgeoefende schuifkrachten niet merkbaar vervormen. Deze onderstelling blijkt van weinig beteekenis te zijn; vrijwel hetzelfde resultaat wordt verkregen door aan te nemen dat op de langsranden der plaat geen belastingen in de $x$-richting, d.w.z. geen schuifspanningen, werken.

MARGUERRE en TREFFTZ beschouwen $\varepsilon_1$ als onafhankelijken parameter of anders gezegd zij beschouwen een plaat met voorgeschreven specifieke verkorting. De (in het oneindige) op de plaat werkende drukbelasting levert dan geen bijdrage in de potentieele energie. Verder beschouwen zij de twee grensgevallen dat de langsranden der plaat zich in de $y$-richting vrij kunnen verplaatsen, resp. in het geheel geen verplaatsing in de $y$-richting kunnen ondergaan. In beide gevallen leveren ook de langsranden geen bijdrage

in de potentieele energie, in het eerste geval omdat de totale belasting op de rand nul is, in het tweede geval omdat de langsranden geen bewegingsmogelijkheid bezitten. De totale potentieele energie is dan bepaald door (63. 1); met behulp van (63. 2) en (63. 3) gaat deze uitdrukking over in

$$V = \tfrac{1}{4}Gh\frac{m}{m-1}\iint\Big[-2\varepsilon_1+2\varepsilon_2+2(\hat{u}_x+\hat{v}_y)+w_x{}^2+w_y{}^2\Big]^2\,dx\,dy+$$
$$-\tfrac{1}{2}Gh\iint\Big[(-2\varepsilon_1+2\hat{u}_x+w_x{}^2)(2\varepsilon_2+2\hat{v}_y+w_y{}^2)+$$
$$-(\hat{u}_y+\hat{v}_x+w_xw_y)^2\Big]\,dx\,dy+$$
$$+\tfrac{1}{12}Gh^3\frac{m}{m-1}\iint\Big[(w_{xx}+w_{yy})^2-2\frac{m-1}{m}(w_{xx}w_{yy}-w_{xy}{}^2)\Big]\,dx\,dy. \quad (63.\ 6)$$

De evenwichtstoestanden zijn gekenmerkt door stationnaire waarden der energie (63. 6).

Van de verplaatsingen is bekend dat bij het bereiken van de knikgrens de componenten $\hat{u}$ en $\hat{v}$ nul zijn terwijl de componente $w$ is gegeven door (zie lit. 47)

$$w = a\cos\frac{\pi x}{b}\cos\frac{\pi y}{b} \quad (63.\ 7)$$

indien de langsranden vrij zijn, en door

$$w = a\cos\mu\frac{\pi x}{b}\cos\frac{\pi y}{b}\ \text{met}\ \mu=\sqrt{\frac{m-2}{m}} \quad (63.\ 8)$$

indien de langsranden geen verplaatsingen in $y$-richting kunnen ondergaan (lit. 19, verg. 92 [1]) ). Als benaderingsonderstelling wordt nu ingevoerd dat de verplaatsingscomponente loodrecht op het vlak der plaat ook na overschrijding der knikgrens door (63. 7) resp. (63. 8) wordt gegeven; de nog onbekende componenten $\hat{u}$ en $\hat{v}$ worden vervolgens bepaald door de eerste variatie van (63. 6) nul te stellen voor iedere mogelijke variatie van $\hat{u}$ en $\hat{v}$. Dit leidt tot de differentiaalvergelijkingen (zie lit. 19, par. V)

$$\left.\begin{aligned}\hat{u}_{xx}+\hat{u}_{yy}+\frac{m+1}{m-1}\frac{\partial}{\partial x}(\hat{u}_x+\hat{v}_y)+\frac{m}{m-1}\frac{\partial}{\partial x}(w_x{}^2+w_y{}^2)+\\ +w_xw_{yy}-w_yw_{xy}=0,\\ \hat{v}_{xx}+\hat{v}_{yy}+\frac{m+1}{m-1}\frac{\partial}{\partial y}(\hat{u}_x+\hat{v}_y)+\frac{m}{m-1}\frac{\partial}{\partial y}(w_x{}^2+w_y{}^2)+\\ +w_yw_{xx}-w_xw_{xy}=0\end{aligned}\right\} \quad (63.\ 9)$$

met de randvoorwaarden (63. 4) en (63. 5).

[1]) In verg. 92 komt een drukfout voor; zij moet luiden $\frac{b^2}{l^2}=\frac{m-2}{m}$.



Bij beperking der beschouwing tot vrije langsranden met den knikvorm (63. 7) kan een particuliere oplossing van (63. 9) onmiddellijk worden aangegeven (lit. 19, verg. 50)

$$\left.\begin{aligned}\hat{u}_p&=\frac{\pi a^2}{16b}\sin\frac{2\pi x}{b}\left(\cos\frac{2\pi y}{b}+\frac{m-1}{m}\right),\\ \hat{v}_p&=\frac{\pi a^2}{16b}\sin\frac{2\pi y}{b}\left(\cos\frac{2\pi x}{b}+\frac{m-1}{m}\right).\end{aligned}\right\} \quad (63.\ 10)$$

Aan de periodiciteitsvoorwaarde is door deze oplossing voldaan. De randvoorwaarden (63. 5) worden echter nog niet bevredigd. Hiertoe moet nog een oplossing der gehomogeniseerde vergelijkingen (63. 9) worden toegevoegd. Het blijkt echter dat deze toevoeging numeriek geen beteekenis heeft (lit. 19, par. V en VI) zoodat zij niet nader wordt beschouwd; dit is te meer gerechtvaardigd indien in aanmerking wordt genomen dat de randvoorwaarde (63. 5) in werkelijkheid slechts bij benadering kan gelden en dat (63. 10) de exacte oplossing vormt indien in plaats van (63. 5) aan de langsranden afwezigheid van schuifspanningen wordt geëischt.

Door invoering van (63. 7) en (63. 10) in (63. 6) wordt de energie bepaald als functie van de drie parameters $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $a$. Uitvoering van de integratie over de lengte $b$ van een halve periode levert (lit. 19, verg. 69 [1]) )

$$V=Ghb^2\left\{\frac{m}{m-1}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2+2\varepsilon_1\varepsilon_2-\frac{m+1}{m-1}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{\pi^2a^2}{4b^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{m}{m-1}\frac{\pi^4h^2a^2}{12b^4}+\frac{(3m-1)(m+1)}{m(m-1)}\frac{\pi^4a^4}{64b^4}\right\}. \quad (63.\ 11)$$

Bij vrije langsranden moet voor een stationnaire waarde van (63. 11) zijn voldaan aan de voorwaarden

$$\frac{\partial V}{\partial\varepsilon_2}=0,\qquad \frac{\partial V}{\partial a}=0,$$

die expliciet luiden

$$\left.\begin{aligned}-\frac{2m}{m-1}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)+2\varepsilon_1+\frac{m+1}{m-1}\frac{\pi^2a^2}{4b^2}=0,\\ -2\frac{m+1}{m-1}(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\frac{\pi^2a}{4b^2}+2\frac{m}{m-1}\frac{\pi^4h^2a}{12b^4}+\\ +4\frac{(3m-1)(m+1)}{m(m-1)}\frac{\pi^4a^3}{64b^4}=0.\end{aligned}\right\} \quad (63.\ 12)$$

[1]) In den laatsten term van verg. 69 komt een drukfout voor; hij moet luiden $\frac{m}{m-1}\frac{\pi^4h^2f^2}{12b^4}$.

Aan de tweede vergelijking wordt voldaan door $a = 0$ waarmede uit de eerste vergelijking volgt $\varepsilon_2 = \frac{1}{m}\varepsilon_1$. Voor deze oplossing gaat (63. 11) over in

$$V = Ghb^2 \frac{m+1}{m} \varepsilon_1^2. \qquad (63.\ 13)$$

Deze oplossing levert den ongeknikten toestand van de plaat. Voor de overige oplossingen van (63. 12) wordt met de bekende waarde $\varepsilon_1 = \varepsilon^*$ voor den kniklast (zie lit. 47)

$$\varepsilon^* = \frac{\pi^2}{3} \frac{m^2}{m^2-1} \frac{h^2}{b^2}$$

geschreven

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{1}{m}\varepsilon_1 - \frac{m+1}{m}\frac{\pi^2 a^2}{8b^2}, \\ \frac{\pi^2 a^2}{4b^2} &= \varepsilon_1 - \varepsilon^*. \end{aligned}\right\} \qquad (63.\ 14)$$

Deze oplossing is blijkbaar alleen reëel voor $\varepsilon_1 > \varepsilon^*$. Voor de energie (63. 11) wordt dan gevonden

$$V = Ghb^2 \frac{m+1}{m} (\tfrac{1}{2}\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1\varepsilon^* - \tfrac{1}{2}\varepsilon^{*2}). \qquad (63.\ 15)$$

De meedragende breedte kan worden berekend zonder kennis van de spanningsverdeeling in de plaat. Bij een variatie $\delta\varepsilon_1$ van de gemiddelde samendrukking verricht de op een plaatstrook ter lengte van een halve periode en ter breedte $b$ werkende belasting $N$ een arbeid $Nb\delta\varepsilon_1$; deze arbeid moet gelijk zijn aan de toeneming der elastische energie zoodat moet gelden

$$N = \frac{1}{b}\frac{dV}{d\varepsilon_1}.$$

Voor de ongeknikte plaat volgt uit (63. 13)

$$N = Ghb\, 2\frac{m+1}{m}\varepsilon_1,$$

voor de geknikte plaat uit (63. 15)

$$N = Ghb \frac{m+1}{m}(\varepsilon_1 + \varepsilon^*).$$



De verhouding van de meedragende breedte tot de totale breedte wordt geleverd door het quotient dezer uitdrukkingen

$$\frac{b_m}{b} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\varepsilon^*}{\varepsilon_1}\right), \qquad (63.\ 16)$$

in overeenstemming met het resultaat van MARGUERRE-TREFFTZ (lit. 19, verg. 86).

### 633 - TOEPASSING VAN DE ALGEMEENE THEORIE VAN HOOFDSTUK 3

Aangenomen wordt dat op de recht blijvende randen der plaat in het vlak der plaat slechts belastingen loodrecht op den rand kunnen werken. Bovendien wordt ondersteld dat de belastingen op de langsranden der plaat $y = \pm \frac{1}{2}b$ een resultante nul hebben. Zij $N$ de resultante der op een dwarsrand werkende drukbelasting dan bedraagt de energie der belastingen

$$Nu\Big|_{x=-\frac{1}{2}l}^{x=\frac{1}{2}l}. \qquad (63.\ 17)$$

Dit geval komt overeen met het in par. 632 behandelde geval.

De verplaatsingen in den grondtoestand worden aangenomen in den vorm

$$U = -ex\ , \quad V = fy\ , \quad W = 0\ , \qquad (63.\ 18)$$

terwijl voor de verplaatsingen in een naburigen toestand wordt geschreven

$$U + u = -ex + u, \quad V + v = fy + v, \quad W + w = w. \qquad (63.\ 19)$$

Na invoering van (63. 19) in de totale energie, de som van (63. 1) en (63. 17), en ontwikkeling wordt voor de in $u, v, w$ lineaire termen, de eerste variatie voor den grondtoestand, gevonden

$$\tfrac{1}{4}Gh\frac{m}{m-1}\iint\Big\{-8(e-f)(u_x+v_y) - 8\frac{m-1}{m}fu_x + 8\frac{m-1}{m}ev_y\Big\}\,dx\,dy +$$
$$+ Nu\Big|_{x=-\frac{1}{2}l}^{x=\frac{1}{2}l} = 2Gh\,\frac{m}{m-1}\,l\,(f - \frac{1}{m}e)\,v\Big|_{y=-\frac{1}{2}b}^{y=\frac{1}{2}b} +$$
$$- \Big\{2Gh\frac{m}{m-1}(e - \frac{1}{m}f) - N\Big\}\,u\Big|_{x=-\frac{1}{2}l}^{x=\frac{1}{2}l}.$$

Hieruit blijkt dat de toestand (63. 18) inderdaad een evenwichtstoestand is indien

$$f = \frac{1}{m}\, e \text{ en } 2G\frac{m+1}{m}\, bhe = N.$$

Bij den belastingparameter

$$\lambda = \frac{N}{Ebh} = \frac{m}{2\,(m+1)}\,\frac{N}{Gbh} = e \qquad (63.\,20)$$

behoort derhalve de grondtoestand

$$U = -\lambda x, \quad V = \frac{1}{m}\,\lambda y, \quad W = 0. \qquad (63.\,21)$$

De door substitutie van (63. 19) in (63. 1) verkregen ontwikkeling van de toeneming der energie bij overgang van den grondtoestand naar een naburigen toestand wordt nu geschreven in den vorm

$$P^{\lambda}[u] = P_2^{0}[u] + \lambda P_2'[u] + P_3^{0}[u] + P_4^{0}[u]$$

met

$$\left.\begin{aligned}
P_2^{0}[u] &= Gh\,\frac{m}{m-1}\iint\Big\{(u_x+v_y)^2 - 2\frac{m-1}{m}\Big[u_x v_y - \tfrac{1}{4}(u_y+v_x)^2\Big] + \\
&\quad + \tfrac{1}{12}h^2\Big[(w_{xx}+w_{yy})^2 - 2\,\frac{m-1}{m}\,(w_{xx}w_{yy} - w_{xy}^2)\Big]\Big\}\,dxdy, \\
P_2'[u] &= Gh\,\frac{m}{m-1}\iint -\frac{m^2-1}{m^2}\,w_x^2\,dxdy, \\
P_3^{0}[u] &= Gh\,\frac{m}{m-1}\iint\Big\{(u_x+v_y)\,(w_x^2+w_y^2) + \\
&\quad - \frac{m-1}{m}\Big[u_x w_y^2 + v_y w_x^2 - (u_y+v_x)\,w_x w_y\Big]\Big\}\,dxdy, \\
P_4^{0}[u] &= Gh\,\frac{m}{m-1}\iint \tfrac{1}{4}\,(w_x^2+w_y^2)^2\,dxdy.
\end{aligned}\right\} \qquad (62.\,22)$$

De kniklast wordt bereikt indien de tweede variatie

$$P_2^{\lambda}[u] = P_2^{0}[u] + \lambda P_2'[u]$$

semi-definiet is. Omdat de verplaatsingen in het vlak der plaat en de verplaatsingen loodrecht op het vlak der plaat onderling gescheiden bijdragen leveren moeten deze bijdragen ieder afzonderlijk nul worden. De integrand van eerstgenoemde bijdrage is zelf ook semi-definiet zoodat voor het eerste eigenfunctiestelsel bij den kniklast moet gelden

$$u_{1x} = v_{1y} = u_{1y} + v_{1x} = 0,$$



waaruit met gebruik van de randvoorwaarden

$$u = \text{const. voor } x = \pm\tfrac{1}{2}l,\ v = \text{const. voor } y = \pm\tfrac{1}{2}b \qquad (63.\,23)$$

volgt

$$u_1 = v_1 = 0. \qquad (63.\,24)$$

De variatievergelijking (38. 4) voor het neutrale evenwicht luidt dan

$$Gh\,\frac{m}{m-1}\iint\Big\{\tfrac{1}{12}h^2\Big[2\,(w_{xx}+w_{yy})\,(\zeta_{xx}+\zeta_{yy}) + \\ -2\,\frac{m-1}{m}\,(w_{xx}\zeta_{yy}+w_{yy}\zeta_{xx}-2w_{xy}\zeta_{xy})\Big] - 2\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\lambda w_x\zeta_x\Big\}dxdy = 0.$$

Na deeling door den factor voor het integraalteeken en partieele integratie volgt hieruit

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b}\Big\{\tfrac{1}{6}h^2\Big[(w_{xx}+\frac{1}{m}\,w_{yy})\,\zeta_x + \frac{m-1}{m}\,w_{xy}\,\zeta_y + \\
&\quad - (w_{xxx}+w_{xyy})\,\zeta\Big] - 2\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\lambda w_x\zeta\Big\}\,dy\Big|_{x=-\frac{1}{2}l}^{x=+\frac{1}{2}l} + \\
&+\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}\tfrac{1}{6}h^2\Big[(w_{yy}+\frac{1}{m}\,w_{xx})\,\zeta_y + \frac{m-1}{m}\,w_{xy}\,\zeta_x + \\
&\quad - (w_{xxy}+w_{yyy})\,\zeta\Big]\,dx\Big|_{y=-\frac{1}{2}b}^{y=\frac{1}{2}b} + \iint\Big\{\tfrac{1}{6}h^2\,(w_{xxxx}+2w_{xxyy}+w_{yyyy}) + \\
&+ 2\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\lambda w_{xx}\Big\}\zeta\,dxdy = 0. \qquad (63.\,25)
\end{aligned}$$

De kinematische voorwaarden voor de verplaatsingen $w$ luiden

$$w = 0 \text{ voor } x = \pm\tfrac{1}{2}l \text{ en } y = \pm\tfrac{1}{2}b \qquad (63.\,26)$$

zoodat ook geldt

$$\zeta = 0 \text{ voor } x = \pm\tfrac{1}{2}l \text{ en } y = \pm\tfrac{1}{2}b\ ;$$

hieruit volgt nog

$$\zeta_x = 0 \text{ voor } y = \pm\tfrac{1}{2}b \text{ en } \zeta_y = 0 \text{ voor } x = \pm\tfrac{1}{2}l.$$

Overigens is de functie $\zeta$ willekeurig zoodat voor $|x| < \frac{1}{2}l$ en $|y| < \frac{1}{2}b$ moet zijn voldaan aan de differentiaalvergelijking

$$\tfrac{1}{6}h^2\,(w_{xxxx}+2w_{xxyy}+w_{yyyy})+2\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\lambda w_{xx}=0 \quad (63.\,27)$$

met de randvoorwaarden

$$w_{xx}+\frac{1}{m}\,w_{yy}=0 \text{ voor } x=\pm\tfrac{1}{2}l,\quad w_{yy}+\frac{1}{m}\,w_{xx}=0 \text{ voor } y=\pm\tfrac{1}{2}b;$$

met gebruik van (63. 26) volgt

$$w_{yy}=0 \text{ voor } x=\pm\tfrac{1}{2}l,\quad w_{xx}=0 \text{ voor } y=\pm\tfrac{1}{2}b$$

zoodat de randvoorwaarden overgaan in

$$w_{xx}=0 \text{ voor } x=\pm\tfrac{1}{2}l,\quad w_{yy}=0 \text{ voor } y=\pm\tfrac{1}{2}b. \quad (63.\,28)$$

De oplossing van (63. 27) met de randvoorwaarden (63. 26) en (63. 28) kan worden geschreven in den vorm (lit. 47)

$$w=A\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} i\,\frac{\pi x}{l}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} j\,\frac{\pi y}{b},$$

waarin de cosinus-resp. sinus-functies optreden naar gelang $i$ en $j$ onderscheidenlijk oneven of even zijn. Deze oplossing bestaat echter alleen indien $\lambda$ een van de door

$$\lambda=\tfrac{1}{12}\,\frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{\pi^2h^2}{b^2}\left(i^2\,\frac{b^2}{l^2}+2j^2+\frac{j^4}{i^2}\,\frac{l^2}{b^2}\right) \quad (63.\,29)$$

bepaalde waarden aanneemt. De kleinste waarde van $\lambda$ wordt bereikt voor

$$j=1 \text{ en } i=\frac{l}{b}.$$

Bij lange platen kan aan de laatste voorwaarde steeds met groote benadering worden voldaan. Ondersteld wordt dat zij is vervuld voor een oneven waarde van $i$ zoodat voor den kniklast en de bijbehoorende eigenfunctie geldt

$$\lambda_1=\frac{m^2}{m^2-1}\,\frac{\pi^2h^2}{3b^2},\qquad w_1=\cos\frac{\pi x}{b}\cos\frac{\pi y}{b}, \quad (63.\,30)$$

in overeenstemming met par. 632.

Voor het onderzoek van de bij den grondtoestand behoorende naburige evenwichtstoestanden wordt in overeenstemming met de algemeene theorie gesteld

$$u=au_1+\bar{u}=\bar{u},\quad v=av_1+\bar{v}=\bar{v},\quad w=aw_1+\bar{w}. \quad (63.\,31)$$

Daar (63. 22) van den vorm (38. 3) is kan de uitgebreide theorie van par. 38 worden toegepast mits de verplaatsingen $u$, $v$, $w$ klein



zijn. Van de uitdrukking (38. 22) kunnen eenige coëfficiënten gemakkelijk worden bepaald (zie ook (38. 21) )

$$\left.\begin{aligned} &A_2^0=-\lambda_1 A_2'=-\lambda_1 P_2'\,[u_1]=\\ &\quad=\lambda_1 Gh\,\frac{m}{m-1}\,\frac{m^2-1}{m^2}\iint w_{1x}^2\,dxdy=Gh\,\frac{m}{m-1}\,\frac{\pi^4h^2l}{12b^3},\\ &A_3^0+\lambda A_3'=P_3^0\,[u_1]+\lambda P_3'\,[u_1]=0. \end{aligned}\right\} \quad (63.\,32)$$

Voor de berekening van $A_4{}^\lambda a^4$ is de kennis der functies $a^2\varphi_2{}^\lambda$ noodig. Deze worden bepaald door de uit (38. 18) volgende, voor willekeurige kinematisch mogelijke functies $\xi$, $\eta$, $\zeta$ geldige variatievergelijking

$$\begin{aligned} &Gh\,\frac{m}{m-1}\iint\Big\{2\,(\bar{u}_x+\bar{v}_y)\,(\xi_x+\eta_y)+\\ &\quad-2\,\frac{m-1}{m}\Big[\bar{u}_x\eta_y+\bar{v}_y\xi_x-\tfrac{1}{2}\,(\bar{u}_y+\bar{v}_x)\,(\xi_y+\eta_x)\Big]+\\ &\quad+\tfrac{1}{12}h^2\Big[2\,(\bar{w}_{xx}+\bar{w}_{yy})\,(\zeta_{xx}+\zeta_{yy})+\\ &\quad-2\,\frac{m-1}{m}\,(\bar{w}_{xx}\zeta_{yy}+\bar{w}_{yy}\zeta_{xx}-2\bar{w}_{xy}\zeta_{xy})\Big]\Big\}dxdy+\\ &\quad+Gh\,\frac{m}{m-1}\iint-2\lambda\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\bar{w}_x\zeta_x\,dxdy+\\ &\quad+Gh\,\frac{m}{m-1}\,a^2\iint\Big\{(w_{1x}^2+w_{1y}^2)\,(\xi_x+\eta_y)+\\ &\quad-\frac{m-1}{m}\Big[w_{1y}^2\xi_x+w_{1x}^2\eta_y-w_{1x}w_{1y}\,(\xi_y+\eta_x)\Big]dxdy=0, \end{aligned} \quad (63.\,33)$$

tezamen met de voorwaarde (38. 19) die hier den vorm

$$\begin{aligned} &Gh\,\frac{m}{m-1}\iint\tfrac{1}{12}h^2\Big[2\,(w_{1xx}+w_{1yy})\,(\bar{w}_{xx}+\bar{w}_{yy})+\\ &\quad-2\,\frac{m-1}{m}\,(w_{1xx}\bar{w}_{yy}+w_{1yy}\bar{w}_{xx}-2w_{1xy}\bar{w}_{xy})\Big]dxdy=0 \end{aligned} \quad (63.\,34)$$

aanneemt. Bij de formuleering van deze voorwaarde is reeds gebruik gemaakt van (63. 24). Analoog met het voorgaande wordt (63. 33) door partieele integratie herleid tot

$$\int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b}\Big\{\Big[2\,(\bar{u}_x+\frac{1}{m}\bar{v}_y)+a^2\,(w_{1x}{}^2+\frac{1}{m}\,w_{1y}{}^2)\Big]\xi+$$

$$+\frac{m-1}{m}\,(\bar{u}_y+\bar{v}_x+a^2\,w_{1x}\,w_{1y})\,\eta\Big\}\,dy\Big|_{x=-\frac{1}{2}l}^{x=\frac{1}{2}l}+$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b}\Big\{\tfrac{1}{6}h^2\,(\bar{w}_{xx}+\frac{1}{m}\bar{w}_{yy})\,\zeta_x+\tfrac{1}{6}h^2\frac{m-1}{m}\,\bar{w}_{xy}\,\zeta_y+$$

$$-\Big[\tfrac{1}{6}h^2\,(\bar{w}_{xxx}+\bar{w}_{xyy})+2\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\lambda\bar{w}_x\Big]\,\zeta\Big\}\,dy\Big|_{x=-\frac{1}{2}l}^{x=\frac{1}{2}l}+$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}\Big\{\Big[2\,(\bar{v}_y+\frac{1}{m}\bar{u}_x)+a^2\,(w_{1y}{}^2+\frac{1}{m}\,w_{1x}{}^2)\Big]\,\eta+$$

$$+\frac{m-1}{m}\,(\bar{u}_y+\bar{v}_x+a^2\,w_{1x}\,w_{1y})\,\xi\Big\}\,dx\Big|_{y=-\frac{1}{2}b}^{y=\frac{1}{2}b}+$$

$$+\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}\Big\{\tfrac{1}{6}h^2\,(\bar{w}_{yy}+\frac{1}{m}\,\bar{w}_{xx})\,\zeta_y+\tfrac{1}{6}h^2\frac{m-1}{m}\,\bar{w}_{xy}\,\zeta_x+$$

$$-\tfrac{1}{6}h^2\,(\bar{w}_{xxy}+\bar{w}_{yyy})\,\zeta\Big\}\,dx\Big|_{y=-\frac{1}{2}b}^{y=\frac{1}{2}b}+$$

$$-\int\!\!\int\frac{m-1}{m}\Big\{\bar{u}_{xx}+\bar{u}_{yy}+\frac{m+1}{m-1}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\bar{u}_x+\bar{v}_y)+$$

$$+\frac{m}{m-1}\,a^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,(w_{1x}{}^2+w_{1y}{}^2)+a^2\,w_{1x}\,w_{1yy}-a^2\,w_{1y}\,w_{1xy}\Big\}\xi\,dxdy+$$

$$-\int\!\!\int\frac{m-1}{m}\Big\{\bar{v}_{xx}+\bar{v}_{yy}+\frac{m+1}{m-1}\,\frac{\partial}{\partial y}\,(\bar{u}_x+\bar{v}_y)+$$

$$+\frac{m}{m-1}\,a^2\,\frac{\partial}{\partial y}\,(w_{1x}{}^2+w_{1y}{}^2)+a^2\,w_{1y}\,w_{1xx}-a^2\,w_{1x}\,w_{1xy}\Big\}\eta\,dxdy+$$

$$+\int\!\!\int\Big\{\tfrac{1}{6}h^2\,(\bar{w}_{xxxx}+2\bar{w}_{xxyy}+\bar{w}_{yyyy})+2\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\lambda\bar{w}_{xx}\Big\}\,\zeta\,dxdy=0. \quad (63.\,35)$$

De kinematische voorwaarden voor de functies $\bar{u}$ en $\xi$, $\bar{v}$ en $\eta$ volgen uit (63. 23)



$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}=\text{const. en }\xi=\text{const. voor } x=\pm\tfrac{1}{2}l\ ,\\&\bar{v}=\text{const. en }\eta=\text{const. voor } y=\pm\tfrac{1}{2}b\ .\end{aligned}\right\} \quad (63.\,36)$$

Daar de functies $\xi$ en $\eta$ overigens willekeurig zijn moeten $\bar{u}$ en $\bar{v}$ voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}&\bar{u}_{xx}+\bar{u}_{yy}+\frac{m+1}{m-1}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(\bar{u}_x+\bar{v}_y)+\\&+\frac{m}{m-1}\,a^2\,\frac{\partial}{\partial x}\,(w_{1x}{}^2+w_{1y}{}^2)+a^2\,w_{1x}\,w_{1yy}-a^2\,w_{1y}\,w_{1xy}=0,\\&\bar{v}_{xx}+\bar{v}_{yy}+\frac{m+1}{m-1}\,\frac{\partial}{\partial y}\,(\bar{u}_x+\bar{v}_y)+\\&+\frac{m}{m-1}\,a^2\,\frac{\partial}{\partial y}\,(w_{1x}{}^2+w_{1y}{}^2)+a^2\,w_{1y}\,w_{1xx}-a^2\,w_{1x}\,w_{1xy}=0\end{aligned}\right\} \quad (63.\,37)$$

met de randvoorwaarden

$$\left.\begin{aligned}&x=\pm\tfrac{1}{2}l\colon\ \bar{u}=\text{const.},\int_{-\frac{1}{2}b}^{\frac{1}{2}b}\Big[2\,(\bar{u}_x+\frac{1}{m}\,\bar{v}_y)+\\&\quad+a^2\,(w_{1x}{}^2+\frac{1}{m}\,w_{1y}{}^2)\Big]\,dy=0,\ \bar{u}_y+\bar{v}_x+a^2\,w_{1x}\,w_{1y}=0;\\&y=\pm\tfrac{1}{2}b\colon\ \bar{v}=\text{const.},\int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l}\Big[2\,(\bar{v}_y+\frac{1}{m}\,\bar{u}_x)+\\&\quad+a^2\,(w_{1y}{}^2+\frac{1}{m}\,w_{1x}{}^2)\Big]\,dx=0,\ \bar{u}_y+\bar{v}_x+a^2\,w_{1x}\,w_{1y}=0;\end{aligned}\right\} \quad (63.\,38)$$

de telkens het laatst genoemde voorwaarden gaan met gebruik van (63. 30) en (63. 36) over in

$$x=\pm\tfrac{1}{2}l\ :\ \bar{v}_x=0\quad\text{en}\quad y=\pm\tfrac{1}{2}b\ :\ \bar{u}_y=0. \quad (63.\,38)$$

Voor de functie $\bar{w}$ volgt dezelfde differentiaalvergelijking als uit (63. 25)

$$\tfrac{1}{6}h^2\,(\bar{w}_{xxxx}+2\,\bar{w}_{xxyy}+\bar{w}_{yyyy})+2\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\lambda\bar{w}_{xx}=0 \quad (63.\,39)$$

met de randvoorwaarden

$$x=\pm\tfrac{1}{2}l\ :\ \bar{w}=\bar{w}_{xx}=0\ \text{en}\ y=\pm\tfrac{1}{2}b\ :\ \bar{w}=\bar{w}_{yy}=0. \quad (63.\,40)$$

Verg. (63. 37) zijn identiek met (63. 9) zoodat zij ook dezelfde particuliere oplossing (63. 10) bezitten. Om aan de randvoorwaarden (63. 38) te voldoen wordt deze oplossing gecombineerd met een oplossing

$$\bar{u} = cx\ , \quad \bar{v} = dy$$

van de gehomogeniseerde vergelijkingen (63. 37). Uit de integraalvoorwaarde (63. 38) volgt dan dat met

$$c = d = -\frac{\pi^2 a^2}{8b^2}$$

aan alle randvoorwaarden (63. 38) is voldaan. De resulteerende oplossing van (63. 37) is derhalve

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\pi a^2}{16b}\ \sin\frac{2\pi x}{b}\left(\cos\frac{2\pi y}{b} + \frac{m-1}{m}\right) - \frac{\pi^2 a^2}{8b^2}\,x, \\ \bar{v} &= \frac{\pi a^2}{16b}\ \sin\frac{2\pi y}{b}\left(\cos\frac{2\pi x}{b} + \frac{m-1}{m}\right) - \frac{\pi^2 a^2}{8b^2}\,y. \end{aligned}\right\} \qquad (63.\ 41)$$

Verg. (63. 39) met randvoorwaarden (63. 40) is identiek met (63. 27) met de randvoorwaarden (63. 26) en (63. 28). Zij bezit derhalve eveneens steeds de oplossing

$$\bar{w} \equiv 0 \qquad (63.\ 42)$$

en bovendien voor de door (63. 29) bepaalde bijzondere waarden van $\lambda$ een van nul verschillende oplossing. De bij de kleinste waarde $\lambda_1$ behoorende oplossing is onvereenigbaar met de voorwaarde (63. 34). Zoolang $\lambda$ derhalve beneden de op één na kleinste bijzondere waarde $\lambda_2$ blijft komt voor (63. 39) geen van nul verschillende oplossing in aanmerking.

Substitutie van (63. 24), (63. 30), (63. 41) en (63. 42) levert na uitvoering der integraties voor den term $A_4{}^\lambda a^4$ van (38. 22)

$$A_4{}^\lambda a^4 = a^4\left\{P_4{}^0\,[u_1] - P_2{}^0\,[\varphi_2{}^\lambda] - \lambda P_2{}'\,[\varphi_2{}^\lambda]\right\} = a^4\,P_4{}^0\,[u_1] +$$
$$- P_2{}^0\,[\bar{u}] - \lambda P_2{}'\,[\bar{u}] = Gh\,\frac{m}{m-1}\,\frac{m^2-1}{m^2}\,\frac{\pi^4 l a^4}{64b^3}; \qquad (63.\ 43)$$

de coëfficiënt van dezen term is steeds positief, dus ook voor $\lambda = \lambda_1$, zoodat het evenwicht onder den kniklast stabiel is.

De evenwichtsvoorwaarde luidt

$$4A_4{}^\lambda a^3 + 2A_4{}^0\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)a = 0$$

met de oplossingen



$$a = 0 \quad \text{en} \quad a^2 = \frac{\left(\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1\right)A_2{}^0}{2A_4{}^\lambda} \quad \text{voor} \quad \lambda \geqq \lambda_1.$$

Met behulp van (63. 32) en (63. 43) gaat de tweede oplossing over in

$$a^2 = \frac{8b^2}{\pi^2}(\lambda - \lambda_1) \quad \text{voor} \quad \lambda \geqq \lambda_1\ . \qquad (63.\ 44)$$

De gemiddelde samendrukking van de plaat bedraagt

$$\varepsilon = \frac{1}{l}\left\{el - (au_1 + \bar{u})\Big|_{x=-\frac{1}{2}l}^{x=\frac{1}{2}l}\right\},$$

waarvoor met (63. 24) en (63. 41) wordt geschreven

$$\varepsilon = e + \frac{\pi^2 a^2}{8b^2}.$$

Substitutie van de waarden van $e$ (63. 20) en van $a^2$ (63. 44) levert deze samendrukking als functie van den belastingparameter

$$\varepsilon = 2\lambda - \lambda_1. \quad (\lambda \geqq \lambda_1) \qquad (63.\ 45)$$

Voor de ongeplooide plaat volgt analoog indien de op dit geval betrekking hebbende grootheden worden overstreept

$$\bar{\varepsilon} = \bar{e} = \bar{\lambda},$$

zoodat de verhouding van de meedragende breedte tot de totale plaatbreedte, die gelijk is aan de verhouding van de door de geplooide plaat opgenomen belasting tot de belasting op een zelfde ongeplooide plaat bij gelijke gemiddelde samendrukking, wordt gegeven door

$$\frac{b_m}{b} = \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{\lambda_1}{\varepsilon}\right), \qquad (63.\ 46)$$

welk resultaat wegens de identiteit van $\lambda_1$ met $\varepsilon^*$ hetzelfde is als dat van MARGUERRE-TREFFTZ.

Dat hetzelfde resultaat wordt verkregen wordt veroorzaakt door de omstandigheid dat de functie $\bar{w}$ die de verandering van den plooivorm ten opzichte van den knikvorm $w_1$ bepaalt, nul blijkt te zijn, d.w.z. dat de door MARGUERRE en TREFFTZ ingevoerde onderstelling ten aanzien van den plooivorm door de algemeene theorie wordt bevestigd. Deze omstandigheid is het gevolg van het ontbreken van een bekenden term in de differentiaalvergelijking met randvoorwaarden voor $\bar{w}$ en dit vindt tenslotte zijn oorzaak in het ontbreken van een term die de functie $\bar{w}$ bevat in $P_{21}{}^0\,[u_1, \bar{u}]$ en $P_{21}{}'\,[u_1, \bar{u}]$.

Strikt genomen geldt de hier gegeven toepassing van de theorie van par. 38 slechts voor $\lambda$-waarden kleiner dan $\lambda_2$. Omdat $\lambda_2$ bij lange platen weinig grooter is dan $\lambda_1$ — bij een oneindig lange plaat vormen de bijzondere $\lambda$-waarden zelfs het continuum $\lambda \geqq \lambda_1$ — zou de practische beteekenis van het resultaat gering zijn. Desondanks blijkt het resultaat (63. 46) voor de meedragende breedte een goede benadering te vormen ook na overschrijding van $\lambda_2$. Ongetwijfeld wordt dit veroorzaakt door de omstandigheid dat de plooivormen behoorende bij $\lambda_2$, $\lambda_3$ enz. weinig verschillen van den plooivorm (63. 30).

Hoofdstuk 7

# DE AXIAAL OP DRUK BELASTE DUNWANDIGE CYLINDER

## 71 – DE VERVORMINGEN EN DE POTENTIEELE ENERGIE

De twee stelsels kromtelijnen worden bij den cylinder gevormd door de beschrijvenden en de parallelcirkels die onderscheidenlijk als de parameter-lijnen $\beta$ = const. en $\alpha$ = const. worden ingevoerd. De positieve richtingen der parameterlijnen worden zoodanig gekozen dat de positieve normaalrichting op den cylinder naar buiten wijst. Een punt van het middenvlak van den onvervormden cylinder kan worden beschreven door zijn coördinaten ten opzichte van een vast stelsel waarvan de $x_1$-as met de cylinderas samenvalt

$$x_1 = Ra\,, \quad x_2 = R\sin\beta\,, \quad x_3 = R\cos\beta\,.$$

De door (52. 3) gedefinieerde grootheden $A$ en $B$ bedragen

$$A = \sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}\right)^2} = R\,, \quad B = \sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial x_i}{\partial \beta}\right)^2} = R, \tag{71. 1}$$

terwijl de hoofdkromtestralen zijn gegeven door

$$R_1 = \infty\,, \quad R_2 = -R\,; \tag{71. 2}$$

het minusteeken in de laatste betrekking drukt uit dat het bijbehoorende kromtemiddelpunt op het negatieve deel der normaal ligt.

Worden ter vereenvoudiging differentiaties naar $\alpha$ door een accent, naar $\beta$ door een punt aangegeven, dan nemen de vervormingscomponenten voor het middenvlak den vorm aan (zie (56. 3))

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\alpha o} &= \frac{1}{R}\,2u' + \frac{1}{R^2}\,(u'^2 + v'^2 + w'^2),\\
\gamma_{\beta\beta o} &= \frac{1}{R}\,2\,(v^{\cdot} + w) + \frac{1}{R^2}\left[u^{\cdot 2} + (v^{\cdot} + w)^2 + (w^{\cdot} - v)^2\right],\\
\gamma_{\alpha\beta o} &= \frac{1}{R}\,(u^{\cdot} + v') + \frac{1}{R^2}\left[u'u^{\cdot} + v'\,(v^{\cdot} + w) + w'\,(w^{\cdot} - v)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{71. 3}$$

De krommingsveranderingen volgen uit de formules (56. 4) t/m (56. 10). Worden bij ontwikkeling der determinanten de termen

van den derden graad in de verplaatsingscomponenten en haar afgeleiden verwaarloosd dan is het resultaat

$$\varrho_{\alpha\alpha} = \frac{1}{R^2} w'' + \frac{1}{R^3}\left[ - w' u'' - (w^{\cdot} - v)\, v'' + (u' + v^{\cdot} + w)\, w''\right],$$

$$\varrho_{\beta\beta} = \frac{1}{R^2}(-u' - 3v^{\cdot} - 2w + w^{\cdot\cdot}) +$$

$$+ \frac{1}{R^3}\Big[ - w' u^{\cdot\cdot} - (w^{\cdot} - v)\,(v^{\cdot\cdot} + 2w^{\cdot} - v) +$$

$$+ (u' + v^{\cdot} + w)\,(w^{\cdot\cdot} - 2v^{\cdot} - w) - u'\,(v^{\cdot} + w) + u^{\cdot} v'\Big],$$

$$\varrho_{\alpha\beta} = \frac{1}{R^2}(w^{\cdot} - v') + \frac{1}{R^3}\Big[ - w' u'^{\cdot} - (w^{\cdot} - v)\,(v'^{\cdot} + w') +$$

$$+ (u' + v^{\cdot} + w)\,(w'^{\cdot} - v')\Big].$$

Bij de berekening van deze uitdrukkingen zijn termen van den vorm $\frac{1}{R_2}\gamma_{\beta\beta o}$ enz. verwaarloosd. Mitsdien is er geen bezwaar tegen deze uitdrukkingen zoo dit mogelijk is te vereenvoudigen door vermeerdering met een veelvoud der verwaarloosde termen. Wordt dienovereenkomstig bij $\varrho_{\beta\beta}$ opgeteld $\frac{1}{2R}\gamma_{\alpha\alpha o}$ en $\frac{1}{R}\gamma_{\beta\beta o}$ dan luiden de veranderingen in kromming van het middenvlak

$$\left.\begin{aligned}
\varrho_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{R^2} w'' + \frac{1}{R^3}\Big[ - w' u'' - (w^{\cdot} - v)\, v'' + \\
&\qquad + (u' + v^{\cdot} + w)\, w''\Big], \\
\varrho_{\beta\beta} &= \frac{1}{R^2}(w^{\cdot} - v)^{\cdot} + \frac{1}{R^3}\Big[\tfrac{1}{2}u'^2 + \tfrac{1}{2}v'^2 + \tfrac{1}{2}w'^2 + \\
&\quad + u^{\cdot 2} - 2u'\,(v^{\cdot} + w) + u^{\cdot} v' - w' u^{\cdot\cdot} + \\
&\qquad + (w^{\cdot} - v)\,(v^{\cdot} + w)^{\cdot} + (u' + v^{\cdot} + w)\,(w^{\cdot} - v)^{\cdot}\Big], \\
\varrho_{\alpha\beta} &= \frac{1}{R^2}(w^{\cdot} - v)' + \frac{1}{R^3}\Big[ - w' u'^{\cdot} - (w^{\cdot} - v)\,(v^{\cdot} + w)' + \\
&\qquad + (u' + v^{\cdot} + w)\,(w^{\cdot} - v)'\Big].
\end{aligned}\right\} \qquad (71.\,4)$$

Voor de bepaling van de knikbelasting kan worden volstaan met de bijdragen der krommingsveranderingen die lineair zijn in de verplaatsingen en haar afgeleiden. (Zie lit. 49, 50). Ook voor het



onderzoek van de stabiliteit van het evenwicht onder den kniklast alsmede van de naburige evenwichtstoestanden en van den invloed van aanvankelijke afwijkingen wordt van deze vereenvoudiging gebruik gemaakt, zoodat wordt gesteld

$$\varrho_{\alpha\alpha} = \frac{1}{R^2} w'', \quad \varrho_{\beta\beta} = \frac{1}{R^2}(w^{\cdot} - v)^{\cdot}, \quad \varrho_{\alpha\beta} = \frac{1}{R^2}(w^{\cdot} - v)' \qquad (71.\,5)$$

De rechtvaardiging van deze vereenvoudiging wordt achteraf geleverd met behulp van de uitdrukkingen (71. 4) (zie par. 782).

De elastische energie in den cylinder wordt berekend door integratie van (55. 11) na substitutie van (71. 3) en (71. 5). Zij bedraagt indien $l$ de lengte van den cylinder is

$$\begin{aligned}
V &= \tfrac{1}{4}Gh\frac{1}{1-\nu}\int_0^{\frac{l}{R}} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \Big\{ 4u'^2 + 4\,(v^{\cdot} + w)^2 + 8\nu u'\,(v^{\cdot} + w) + \\
&\quad + 2\,(1-\nu)\,(u^{\cdot} + v')^2 + k\Big[ w''^2 + (w^{\cdot} - v)^{\cdot 2} + \\
&\quad + 2\nu w''\,(w^{\cdot} - v)^{\cdot} + 2\,(1-\nu)\,(w^{\cdot} - v)'^2\Big]\Big\} + \\
&\quad + \tfrac{1}{4}Gh\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{R}\int_0^{\frac{l}{R}} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \Big\{ 4u'\,(u'^2 + v'^2 + w'^2) + \\
&\quad + 4\,(v^{\cdot} + w)\Big[ u^{\cdot 2} + (v^{\cdot} + w)^2 + (w^{\cdot} - v)^2\Big] + \\
&\quad + 4\nu u'\Big[ u^{\cdot 2} + (v^{\cdot} + w)^2 + (w^{\cdot} - v)^2\Big] + 4\nu\,(v^{\cdot} + w)\,(u'^2 + v'^2 + w'^2) + \\
&\quad + 4\,(1-\nu)\,(u^{\cdot} + v')\Big[ u'\,u^{\cdot} + v'\,(v^{\cdot} + w) + w'\,(w^{\cdot} - v)\Big]\Big\} + \\
&\quad + \tfrac{1}{4}Gh\frac{1}{1-\nu}\frac{1}{R^2}\int_0^{\frac{l}{R}} d\alpha \int_0^{2\pi} d\beta \Big\{ (u'^2 + v'^2 + w'^2)^2 + \\
&\quad + \Big[ u^{\cdot 2} + (v^{\cdot} + w)^2 + (w^{\cdot} - v)^2\Big]^2 + \\
&\quad + 2\nu\,(u'^2 + v'^2 + w'^2)\Big[ u^{\cdot 2} + (v^{\cdot} + w)^2 + (w^{\cdot} - v)^2\Big] + \\
&\quad + 2\,(1-\nu)\Big[ u'\,u^{\cdot} + v'\,(v^{\cdot} + w) + w'\,(w^{\cdot} - v)\Big]^2\Big\}. \qquad (71.\,6)
\end{aligned}$$

Hierin is ter afkorting gesteld

$$\frac{1}{m} = \nu \ , \quad \frac{h^2}{3R^2} = k. \tag{71. 7}$$

Zij $N$ de op de cylinderranden werkende axiale belasting per eenheid van omtrek dan bedraagt de energie der belastingen met den belastingparameter

$$\lambda = \frac{N}{Eh} = \frac{N}{2G\,(1+\nu)\,h} \ , \tag{71. 8}$$

$$-W = \lambda\, 2Gh\,(1+\nu)\,R\int_0^{2\pi} u\,d\beta \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{l}{R}} = \lambda\, 2Gh\,(1+\nu)\,R\iint u'\,d\alpha\,d\beta. \tag{71. 9}$$

## 72 - DE GRONDTOESTAND

De grondtoestand wordt aangenomen in den vorm

$$U = -eR\alpha \ , \quad V = 0 \ , \quad W = fR. \tag{72. 1}$$

De toeneming van de energie bij overgang van den grondtoestand naar een toestand

$$U + u = -eR\alpha + u \ , \quad V + v = v \ , \quad W + w = fR + w \tag{72. 2}$$

wordt verkregen door substitutie van (72. 1,2) in (71. 6) en (71. 9). Na deeling door $\frac{1}{4}Gh\,\frac{1}{1-\nu}$ en ontwikkeling bedraagt deze toeneming

$$P^\lambda[u] = P_1{}^\lambda[u] + P_2{}^\lambda[u] + P_3{}^\lambda[u] + P_4{}^\lambda[u] \ . \tag{72. 3}$$

Voorloopig wordt alleen de eerste term, die de eerste variatie van de energie in den grondtoestand weergeeft, opgeschreven

$$P_1{}^\lambda[u] = R\iint\Big[(-8e+8\nu f+12e^2+4\nu f^2-8\nu ef-4e^3-4\nu ef^2)\,u' + (8f-8\nu e+12f^2+4\nu e^2-8\nu ef+4f^3+4\nu e^2 f)\,(v'+w)\Big]\,d\alpha\,d\beta + 8\,(1-\nu^2)\,\lambda R\iint u'\,d\alpha\,d\beta.$$

De evenwichtsvoorwaarden voor den grondtoestand worden verkregen door deze eerste variatie nul te stellen, zoodat $e$ en $f$ moeten voldoen aan



$$\left.\begin{aligned} &-8e+8\nu f+12e^2+4\nu f^2-8\nu ef-4e^3-4\nu ef^2 + 8\,(1-\nu^2)\,\lambda = 0, \\ &8f-8\nu e+12f^2+4\nu e^2-8\nu ef+4f^3+4\nu e^2 f = 0. \end{aligned}\right\} \tag{72. 4}$$

In het elastisch gebied zijn $e$ en $f$ zeer klein zoodat deze vergelijkingen kunnen worden gelineariseerd; haar oplossing luidt

$$e = \lambda \ , \quad f = \nu\lambda. \tag{72. 5}$$

Ook in de integralen $P_m{}^\lambda[u]$ worden de termen van den tweeden graad in $e$ en $f$ verwaarloosd. Met (72. 5) nemen zij dan den vorm aan

$$P_m{}^\lambda[u] = P_m{}^0[u] + \lambda P_m{}'[u].$$

Hierin is

$$P_2{}^0[u] = \iint\Big\{4u'^2 + 4\,(v'+w)^2 + 8\nu u'\,(v'+w) + 2\,(1-\nu)\,(u'+v')^2 + k\Big[w''^2 + (w'-v)'^2 + 2\,\nu w''\,(w'-v)' + 2\,(1-\nu)\,(w'-v)'^2\Big]\Big\}\,d\alpha\,d\beta, \tag{72. 6}$$

$$P_2{}'[u] = \iint\Big[(-12+4\nu^2)\,u'^2 + 8\nu\,(v'+w)^2 + -8\nu\,(1-\nu)\,u'\,(v'+w) - 4\,(1-\nu)\,u'^2 - 4\,(1-\nu)\,v'^2 + -4\,(1-\nu)^2\,u'\,v' - 4\,(1-\nu^2)\,w'^2\Big]\,d\alpha\,d\beta, \tag{72. 7}$$

$$P_3{}^0[u] = \frac{1}{R}\iint\Big\{4u'\,(u'^2+v'^2+w'^2) + 4\,(v'+w)\Big[u'^2+(v'+w)^2+(w'-v)^2\Big] + 4\nu u'\Big[u'^2+(v'+w)^2+(w'-v)^2\Big] + 4\nu\,(v'+w)\,(u'^2+v'^2+w'^2) + 4(1-\nu)\,(u'+v')\Big[u'u'+v'\,(v'+w)+w'\,(w'-v)\Big]\Big\}\,d\alpha\,d\beta, \tag{72. 8}$$

$$P_3'[u] = \frac{1}{R}\int\int\Big\{-4u'(u'^2+v'^2+w'^2)+$$
$$+4\nu(v\cdot+w)\Big[u\cdot^2+(v\cdot+w)^2(w\cdot-v)^2\Big]+$$
$$-4\nu u'\Big[u\cdot^2+(v\cdot+w)^2+(w\cdot-v)^2\Big]+$$
$$+4\nu^2(v\cdot+w)(u'^2+v'^2+w'^2)+$$
$$-4(1-\nu)(u\cdot-\nu v')\Big[u'u\cdot+v'(v\cdot+w)+w'(w\cdot-v)\Big]\Big\}d\alpha d\beta, \quad (72.9)$$

$$P_4^0[u] = \frac{1}{R^2}\int\int\Big\{(u'^2+v'^2+w'^2)^2+\Big[u\cdot^2+(v\cdot+w)^2+(w\cdot-v)^2\Big]^2+$$
$$+2\nu(u'^2+v'^2+w'^2)\Big[u\cdot^2+(v\cdot+w)^2+(w\cdot-v)^2\Big]+$$
$$+2(1-\nu)\Big[u'u\cdot+v'(v\cdot+w)+w'(w\cdot-v)\Big]^2\Big\}d\alpha d\beta, \quad (72.10)$$

$$P_4'[u] = 0. \quad (72.11)$$

In de tweede variatie

$$P_2\lambda[u] = P_2^0[u] + \lambda P_2'[u]$$

bevat de tweede term den kleinen factor $\lambda$. Het ligt dan voor de hand in den integrand van $P_2'[u]$ die bijdragen te verwaarloozen die van dezelfde argumenten $u'$, $v\cdot$, $w$, $u\cdot$, $v'$ afhangen als de integrand van $P_2^0[u]$. Deze verwaarloozing kan echter tot een geheel onjuist resultaat voeren. Dit wordt veroorzaakt door de omstandigheid dat de integrand van $P_2^0[u]$ niet definiet is in $u'$, $v\cdot$, $w$, $u\cdot$, $v'$ zoodat de van deze argumenten afhankelijke bijdrage in $P_2'[u]$ groot kan worden in vergelijking met de van dezelfde argumenten afhankelijke bijdrage in $P_2^0[u]$; de verwaarloozing van eerstgenoemde bijdrage in het product $\lambda P_2'[u]$ is dan niet meer gemotiveerd. Dit bezwaar treedt niet op indien in den integrand van $P_2'[u]$ termen worden verwaarloosd die uitsluitend afhangen van $u'$, $v\cdot+w$ en $u\cdot+v'$. Immers is de integrand van $P_2^0[u]$ wel definiet in deze argumenten. De integraal $P_2'[u]$ wordt nu zoo eenvoudig mogelijk indien bij haar integrand de van $u'$, $v\cdot+w$ en $u\cdot+v'$ afhankelijke bijdrage

$$(12-4\nu^2)u'^2-8\nu(v\cdot+w)^2+8\nu(1-\nu)u'(v\cdot+w)+$$
$$+2(1-\nu)^2(u\cdot+v')^2 \quad (72.12)$$



wordt opgeteld. Het resultaat is dan

$$P_2'[u] = \int\int-(1-\nu^2)(2u\cdot^2+2v'^2+4w'^2)\,d\alpha\,d\beta. \quad (72.13)$$

## 73 – DE KNIKBELASTING

De kniklast wordt bepaald door de kleinste waarde van $\lambda$ waarvoor de homogene variatievergelijking voor het neutrale evenwicht (38. 4) een van nul verschillende oplossing bezit. Met willekeurige kinematisch mogelijke functies $\xi$, $\eta$, $\zeta$ neemt deze vergelijking den volgenden vorm aan

$$\int\int\Big\{8u'\xi'+8(v\cdot+w)(\eta\cdot+\zeta)+8\nu u'(\eta\cdot+\zeta)+$$
$$+8\nu(v\cdot+w)\xi'+4(1-\nu)(u\cdot+v')(\xi\cdot+\eta')+$$
$$+k\Big[2w''\zeta''+2(w\cdot-v)\cdot(\zeta\cdot-\eta)\cdot+2\nu w''(\zeta\cdot-\eta)\cdot+$$
$$+2\nu(w\cdot-v)\cdot\zeta''+4(1-\nu)(w\cdot-v)'(\zeta\cdot-\eta)'\Big]+$$
$$-(1-\nu^2)\lambda(4u\cdot\xi\cdot+4v'\eta'+8w'\zeta')\Big\}d\alpha\,d\beta=0. \quad (73.1)$$

Daar $\xi$, $\eta$, $\zeta$ evenals $u$, $v$, $w$ periodieke functies zijn van $\beta$ met periode $2\pi$ gaat (73. 1) door partieele integratie over in

$$\int_0^{2\pi}\Big\{\Big[8u'+8\nu(v\cdot+w)\Big]\xi+\Big[4(1-\nu)(u\cdot+v')+$$
$$-4k(1-\nu)(w\cdot-v)'-4(1-\nu^2)\lambda v'\Big]\eta+$$
$$+k\Big[2w''+2\nu(w\cdot-v)\cdot\Big]\zeta'-\Big[2kw'''+2k\nu(w\cdot-v)'\cdot+$$
$$+4k(1-\nu)(w\cdot-v)'\cdot+8(1-\nu^2)\lambda w'\Big]\zeta\Big\}d\beta\Big|_{\alpha=0}^{\alpha=\frac{l}{R}}+$$
$$+\int\int\Big\{\Big[-8u''-4(1-\nu)u\cdot\cdot-4(1+\nu)v'\cdot-8\nu w'+4(1-\nu^2)\lambda u\cdot\cdot\Big]\xi+$$
$$+\Big[-4(1+\nu)u'\cdot-4(1-\nu)v''-8v\cdot\cdot-8w\cdot+k\{-4(1-\nu)v''+$$
$$-2v\cdot\cdot+(4-2\nu)w''\cdot+2w\cdot\cdot\cdot\cdot\}+4(1-\nu^2)\lambda v''\Big]\eta+$$
$$+\Big[8\nu u'+8v\cdot+8w+k\{-(4-2\nu)v''\cdot-2v\cdot\cdot\cdot+2w''''+$$
$$+4w''\cdot\cdot+2w\cdot\cdot\cdot\cdot\}+8(1-\nu^2)\lambda w''\Big]\zeta\Big\}d\alpha\,d\beta=0. \quad (73.2)$$

Aangenomen wordt dat de cylinderranden zoodanig zijn ondersteund dat de verplaatsingscomponenten $v$ en $w$ in het vlak dezer randen nul zijn; zooals door FLÜGGE wordt opgemerkt (lit. 50) mogen deze randvoorwaarden, althans die aangaande de verplaatsingscomponente $w$, eerst in werking treden nadat de belasting voor den grondtoestand is aangebracht daar zij anders in strijd zouden komen met den aangenomen grondtoestand (72. 1). In overeenstemming met deze kinematische voorwaarden moeten ook $\eta$ en $\zeta$ nul zijn op de randen van den cylinder. Overigens zijn de functies $\xi$, $\eta$, $\zeta$ geheel willekeurig zoodat $u$, $v$, $w$ moeten voldoen aan de differentiaalvergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}
&8u'' + 4(1-\nu)u^{\cdot\cdot} + 4(1+\nu)v'^{\cdot} + \\
&\qquad + 8\nu w' - 4(1-\nu^2)\lambda u^{\cdot\cdot} = 0,\\
&4(1+\nu)u'^{\cdot} + 4(1-\nu)v'' + 8v^{\cdot\cdot} + 8w^{\cdot} + k\Big[4(1-\nu)v'' + \\
&\quad + 2v^{\cdot\cdot} - (4-2\nu)w''^{\cdot} - 2w^{\cdot\cdot\cdot}\Big] - 4(1-\nu^2)\lambda v'' = 0,\\
&8\nu u' + 8v^{\cdot} + 8w + k\Big[-(4-2\nu)v''^{\cdot} - 2v^{\cdot\cdot\cdot} + \\
&\quad + 2w'''' + 4w''^{\cdot\cdot} + 2w^{\cdot\cdot\cdot\cdot}\Big] + 8(1-\nu^2)\lambda w'' = 0
\end{aligned}\right\} \qquad (73.\ 3)$$

met de randvoorwaarden voor $\alpha = 0$ en $\alpha = \dfrac{l}{R}$

$$v = w = u' + \nu(v^{\cdot} + w) = w'' + \nu(w^{\cdot} - v)^{\cdot} = 0\,;$$

deze randvoorwaarden worden herleid tot

$$u' = v = w = w'' = 0. \qquad (73.\ 4)$$

Een willekeurige functie van $\alpha$ en $\beta$ met continue gemengde tweede afgeleide kan in een dubbelreeks van FOURIER worden ontwikkeld. Met de randvoorwaarden (73. 4) kunnen deze reeksen worden geschreven in den vorm

$$\left.\begin{aligned}
u &= \Sigma(A_{pn}\cos p\alpha\cos n\beta + \overline{A}_{pn}\cos p\alpha\sin n\beta),\\
v &= \Sigma(B_{pn}\sin p\alpha\sin n\beta + \overline{B}_{pn}\sin p\alpha\cos n\beta),\\
w &= \Sigma(C_{pn}\sin p\alpha\cos n\beta + \overline{C}_{pn}\sin p\alpha\sin n\beta);
\end{aligned}\right\} \qquad (73.\ 5)$$

hierin is

$$p = i\pi\frac{R}{l}$$



terwijl de sommaties moeten worden uitgevoerd over alle geheele waarden van $i$ en $n$ met inbegrip van $i = 0$ en $n = 0$. Met de onderstelling dat differentiaties van $u$, $v$ en $w$ termsgewijs op de reeksen mogen worden toegepast gaat de eerste vergelijking (73. 3) over in

$$\begin{aligned}
&\Sigma\Big\{\Big[-8p^2 - 4(1-\nu)n^2 + 4(1-\nu^2)\lambda n^2\Big]A_{pn} + \\
&\quad + 4(1+\nu)pnB_{pn} + 8\nu pC_{pn}\Big\}\cos p\alpha\cos n\beta + \\
&\quad + \Sigma\Big\{\Big[-8p^2 - 4(1-\nu)n^2 + 4(1-\nu^2)\lambda n^2\Big]\overline{A}_{pn} + \\
&\quad - 4(1+\nu)pn\overline{B}_{pn} + 8\nu p\overline{C}_{pn}\Big\}\cos p\alpha\sin n\beta = 0.
\end{aligned}$$

De geldigheid van deze vergelijking voor alle waarden van $\alpha$ en $\beta$ heeft tengevolge dat de coëfficiënten van $\cos p\alpha\cos n\beta$ en $\cos p\alpha\sin n\beta$ alle nul moeten zijn. De overige vergelijkingen (73. 3) worden overeenkomstig behandeld. De coëfficiënten $A$, $B$, $C$, welker indices voortaan worden weggelaten, moeten dan voldoen aan de drie homogene lineaire vergelijkingen

$$\left.\begin{aligned}
&\Big[2p^2 + (1-\nu)n^2 - (1-\nu^2)\lambda n^2\Big]A - (1+\nu)pnB - \\
&\qquad - 2\nu pC = 0,\\
&-2(1+\nu)pnA + \Big[2(1-\nu)p^2 + 4n^2 + \\
&\quad + k\{2(1-\nu)p^2 + n^2\} - 2(1-\nu^2)\lambda p^2\Big]B + \\
&\qquad + \Big[4n + k\{(2-\nu)p^2n + n^3\}\Big]C = 0,\\
&-4\nu pA + \Big[4n + k\{(2-\nu)p^2n + n^3\}\Big]B + \\
&\qquad + \Big[4 + k(p^2+n^2)^2 - 4(1-\nu^2)\lambda p^2\Big]C = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (73.\ 6)$$

De vergelijkingen voor $\overline{A}$, $\overline{B}$ en $\overline{C}$ worden hieruit verkregen door vervanging van $n$ door $-n$.

Deze vergelijkingen bezitten alleen dan een van nul verschillende oplossing indien de determinant gevormd door haar coëfficiënten nul is. De neutrale evenwichtstoestanden zijn dus gekenmerkt door de waarden van $\lambda$ die voldoen aan de vergelijking

$$\begin{vmatrix} 2p^2+(1-\nu)n^2-(1-\nu^2)\lambda n^2 & -(1+\nu)pn & -2\nu p \\ -2(1+\nu)pn & 2(1-\nu)p^2+4n^2+k[2(1-\nu)p^2+n^2]-2(1-\nu^2)\lambda p^2 & 4n+kn[(2-\nu)p^2+n^2] \\ -4\nu p & 4n+kn[(2-\nu)p^2+n^2] & 4+k(p^2+n^2)^2-4(1-\nu^2)\lambda p^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (73.7)$$

Ontwikkeling van den determinant levert bij verwaarloozing van termen van den tweeden en hoogeren graad in de kleine grootheden $\lambda$ en $k$

$$\lambda = \frac{(1-\nu^2)p^4+\frac{1}{4}k\left\{[2(1-\nu)p^2+n^2][2(1+\nu)p^2+n^2]+\right.}{\left.-2n^2[(2-\nu)p^2+n^2][(2+\nu)p^2+n^2]+(p^2+n^2)^4\right\}} \quad (73.8)$$
$$(1-\nu^2)[(1+\nu)p^4+p^2n^2+p^2(p^2+n^2)^2]$$

Met verwaarloozing van $\lambda$, $k$, $kp^2$ en $kn^2$ ten opzichte van de eenheid (zie ook par. 781) wordt uit de eerste twee vergelijkingen (73.6) de verhouding der coëfficiënten $A$, $B$ en $C$ berekend

$$\frac{A}{C}=\frac{p(\nu p^2-n^2)}{(p^2+n^2)^2}, \quad \frac{B}{C}=-\frac{n[(2+\nu)p^2+n^2]}{(p^2+n^2)^2}. \quad (73.9)$$

De kniklast is bepaald door de kleinste waarde $\lambda_1$ van (73.8) voor geheele waarden van $i$ en $n$ met $p=i\pi\frac{R}{l}$; de bijbehoorende eigenfuncties worden bepaald door (73.5) met de door (73.9) gegeven verhouding der constanten $A$, $B$ en $C$, terwijl de overstreepte constanten nul worden gesteld.

## 74 – VEREENVOUDIGINGEN

Experimenteel is gebleken dat bij cylinders met zeer dunne wanden $p$ groot is (lit. 49); verg. (73.8) kan dan worden vereenvoudigd tot

$$\lambda=\frac{p^2}{(p^2+n^2)^2}+\frac{k}{4(1-\nu^2)}\frac{(p^2+n^2)^2}{p^2}. \quad (74.1)$$



Deze uitdrukking is alleen afhankelijk van de verhouding

$$\frac{(p^2+n^2)^2}{p^2}$$

zoodat haar kleinste waarde is bepaald door

$$-\frac{p^4}{(p^2+n^2)^4}+\frac{k}{4(1-\nu^2)}=0,$$

of

$$p^2+n^2=p\sqrt[4]{\frac{4(1-\nu^2)}{k}}. \quad (74.2)$$

Het bijbehoorende minimum van $\lambda$ bedraagt (lit. 49)

$$\lambda=\sqrt{\frac{k}{1-\nu^2}}. \quad (74.3)$$

Hierbij is nog geen aandacht geschonken aan de voorwaarden dat $n$ geheel en $p$ een veelvoud van $\pi\frac{R}{l}$ moet zijn. Deze laatste voorwaarde is bij niet te korte cylinders echter van weinig belang aangezien de bij $i$ en $i+1$ behoorende waarden van $p$ voor groote waarden van $i$ relatief weinig verschillen. Deze conclusie wordt ondersteund door de proeven (lit. 25), uit welke blijkt dat de kniklast bij niet te korte cylinders. $\left(\frac{l}{R}>0{,}75\right)$ onafhankelijk is van de lengte van den cylinder en van de randvoorwaarden. Dienovereenkomstig wordt in het volgende van randinvloeden afgezien en $p$ als een continu veranderlijke opgevat. Bij elke geheele waarde van $n$ levert (74.2) dan twee waarden van $p$

$$p_{n1,2}=\tfrac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{4(1-\nu^2)}{k}}\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{k}}-n^2}; \quad (74.4)$$

deze zijn reëel en verschillend voor

$$n^2<\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{k}}. \quad (74.5)$$

Indien in

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\nu^2}{k}}=m^2 \quad (74.6)$$

$m$ een geheel getal is dan behooren bij $n=m$ twee samenvallende waarden van $p$

$$p_m = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{4\,(1-\nu^2)}{k}} = m. \qquad (74.\,7)$$

De combinatie $n = p = 0$ bepaalt blijkens (73. 5) een translatie van den cylinder in zijn asrichting en kan derhalve buitenbeschouwing blijven; bij $n = 0$ komt dus alleen

$$p_0 = \sqrt[4]{\frac{4\,(1-\nu^2)}{k}} \qquad (74.\,8)$$

in aanmerking; indien aan (74. 6) is voldaan moet blijkens (74. 7) gelden

$$m = \tfrac{1}{2}p_0. \qquad (74.\,9)$$

De verplaatsingen (73. 5) zijn opgesteld met inachtneming van de randvoorwaarden (73. 4). Deze randvoorwaarden zijn echter reeds genegeerd door $p$ als een continu veranderlijke op te vatten. Deze opvatting beteekent strikt genomen een beperking der beschouwing tot oneindig lange cylinders. In plaats van randvoorwaarden treedt dan de voorwaarde van periodiciteit der particuliere oplossingen. Deze laatste voorwaarde kan zonder aan de door de differentiaalvergelijkingen gestelde eischen te tornen eveneens worden bevredigd door verwisseling van sin $p\alpha$ en cos $p\alpha$ in (73. 5), zoodat voor de verplaatsingscomponente $w$ de algemeene oplossing van de vergelijkingen voor het neutrale evenwicht bij den kniklast luidt

$$\begin{aligned} w = {} & a_0 \sin p_0\alpha + b_0 \cos p_0\alpha + \ddot{\Sigma}_{n=1}\Big(a_{n1}\sin p_{n1}\alpha\cos n\beta + \\ & + b_{n1}\sin p_{n1}\alpha\sin n\beta + c_{n1}\cos p_{n1}\alpha\cos n\beta + d_{n1}\cos p_{n1}\alpha\sin n\beta + \\ & + a_{n2}\sin p_{n2}\alpha\cos n\beta + b_{n2}\sin p_{n2}\alpha\sin n\beta + \\ & + c_{n2}\cos p_{n2}\alpha\cos n\beta + d_{n2}\cos p_{n2}\alpha\sin n\beta\Big) + \\ & + a_m\sin m\alpha\cos m\beta + b_m\sin m\alpha\sin m\beta + \\ & + c_m\cos m\alpha\cos m\beta + d_m\cos m\alpha\sin m\beta, \end{aligned} \qquad (74.\,10)$$

met dien verstande dat het laatste viertal termen alleen aanwezig is indien aan (74. 6) is voldaan en dat de sommatie moet worden uitgevoerd over alle aan (74. 5) voldoende geheele waarden van $n$.

Door (74. 10) en de vergelijkingen (73. 3) zijn de verplaatsingscomponenten $u$ en $v$ geheel bepaald. Met termen van den vorm sin $p\alpha$ cos $n\beta$ in (74. 10) correspondeeren blijkens (73. 5) termen van den vorm cos $p\alpha$ cos $n\beta$ en sin $p\alpha$ sin $n\beta$ onderscheidenlijk voor $u$ en $v$. De coëfficiënten dezer termen zijn door (73. 9) vastgelegd. Met de andere termen van (74. 10), die ontstaan door vervanging van sin $p\alpha$ en/of cos $n\beta$ door onderscheidenlijk cos $p\alpha$ en sin $n\beta$, correspondeeren in $u$ en $v$ soortgelijke door verwisseling van sin $p\alpha$ en cos $p\alpha$ en/of sin $n\beta$ en cos $n\beta$ verkregen termen. De verhouding der coëfficiënten volgt weer uit (73. 9) waarin nu $p$ door $-p$ en/of $n$ door $-n$ is vervangen. De algemeene oplossing voor $u$ en $v$ luidt dan



$$\begin{aligned} u = {} & \frac{\nu}{p_0}\Big(a_0\cos p_0\alpha - b_0\sin p_0\alpha\Big) + \\ & + \ddot{\Sigma}_{n=1}\Big\{\frac{p_{n1}\,(\nu p_{n1}^2 - n^2)}{(p_{n1}^2+n^2)^2}\Big(a_{n1}\cos p_{n1}\alpha\cos n\beta + \\ & + b_{n1}\cos p_{n1}\alpha\sin n\beta - c_{n1}\sin p_{n1}\alpha\cos n\beta - d_{n1}\sin p_{n1}\alpha\sin n\beta\Big) + \\ & + \frac{p_{n2}\,(\nu p_{n2}^2 - n^2)}{(p_{n2}^2+n^2)^2}\,(a_{n2}\cos p_{n2}\alpha\cos n\beta + b_{n2}\cos p_{n2}\alpha\sin n\beta + \\ & - c_{n2}\sin p_{n2}\alpha\cos n\beta - d_{n2}\sin p_{n2}\alpha\sin n\beta\Big)\Big\} + \\ & - \frac{1-\nu}{4m}\Big(a_m\cos m\alpha\cos m\beta + b_m\cos m\alpha\sin m\beta + \\ & - c_m\sin m\alpha\cos m\beta - d_m\sin m\alpha\sin m\beta\Big), \end{aligned} \qquad (74.\,11)$$

$$\begin{aligned} v = {} & \ddot{\Sigma}_{n=1}\Big\{\frac{n\,[(2+\nu)\,p_{n1}^2 + n^2]}{(p_{n1}^2+n^2)^2}\Big(-a_{n1}\sin p_{n1}\alpha\sin n\beta + \\ & + b_{n1}\sin p_{n1}\alpha\cos n\beta - c_{n1}\cos p_{n1}\alpha\sin n\beta + d_{n1}\cos p_{n1}\alpha\cos n\beta\Big) + \\ & + \frac{n\,[(2+\nu)\,p_{n2}^2 + n^2]}{(p_{n2}^2+n^2)^2}\Big(-a_{n2}\sin p_{n2}\alpha\sin n\beta + b_{n2}\sin p_{n2}\alpha\cos n\beta + \\ & - c_{n2}\cos p_{n2}\alpha\sin n\beta + d_{n2}\cos p_{n2}\alpha\cos n\beta\Big)\Big\} + \\ & + \frac{3+\nu}{4m}\Big(-a_m\sin m\alpha\sin m\beta + b_m\sin m\alpha\cos m\beta + \\ & - c_m\cos m\alpha\sin m\beta + d_m\cos m\alpha\cos m\beta\Big). \end{aligned} \qquad (74.\,12)$$

Ten aanzien van de laatste vier termen in (74. 11) en (74. 12) geldt dezelfde opmerking als bij (74. 10).

De algemeene oplossing van de vergelijkingen voor het neutrale evenwicht bij den kniklast is blijkens het voorgaande een lineaire combinatie (met coëfficiënten $a_0$, $b_0$, $a_{n1}$ enz.) van een aantal (stel $q$) lineair onafhankelijke particuliere oplossingen $u_h$, $v_h$, $w_h$. Indien voldaan is aan

$$T_{11}[u_h, v_h, w_h \;;\; u_i, v_i, w_i] = 0 \quad \text{voor } h \neq i \qquad (74.\,13)$$

zijn deze oplossingen tevens de oplossingen van de eerste $q$ mini-

mumproblemen (24. 8); deze eerste $q$ minima moeten volgens par. 24 alle nul zijn. Wordt nu gekozen [1])

$$T_2[u] = \frac{R}{l} P_2^0[u] \text{ of } T_2[u] = -\frac{R}{l} P_2'[u]$$

dan blijkt de voorwaarde (74. 13) voor den oneindig langen cylinder te worden vervuld. Dit volgt gemakkelijk uit de betrekkingen

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} h\beta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} i\beta\, d\beta = 0 \text{ voor } h \neq i, \int_0^{2\pi} \cos h\beta \sin h\beta\, d\beta = 0, \\ &\lim_{l\to\infty} \frac{R}{l} \int_0^{\frac{l}{R}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p_h \alpha \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p_i \alpha\, d\alpha = 0 \text{ voor } h \neq i, \\ &\lim_{l\to\infty} \frac{R}{l} \int_0^{\frac{l}{R}} \cos p\alpha \sin p\alpha\, d\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \quad (74.\ 14)$$

De algemeene oplossing (74. 10, 11, 12) is dan onmiddellijk gegeven in den uit de algemeene theorie bekenden vorm.

## 75 – DE STABILITEIT VAN DEN KNIKTOESTAND

Over de stabiliteit van het evenwicht bij den kniklast wordt volgens de algemeene theorie van par. 272 in eerste instantie beslist door het al of niet identiek nul zijn van den derdengraadsvorm die ontstaat door substitutie van (74. 10, 11 en 12) in

$$P_3[u] = p_3^0[u] + \lambda_1 P_3''[u]. \quad (75.\ 1)$$

De integrand van (75. 1) bestaat dan uit een som van producten van den vorm

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p_h\alpha \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p_i\alpha \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p_j\alpha \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} h\beta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} i\beta \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} j\beta\,; \quad (75.\ 2)$$

hierin hebben $p_h$, $p_i$, $p_j$ elk één der door (74. 4) bepaalde onderscheidenlijk bij $n = h, i, j$ behoorende waarden. Elk dezer pro-

[1]) De factor $\frac{R}{l}$ is toegevoegd omdat anders voor den oneindig langen cylinder $T_2[u]$ oneindig zou worden.



ducten kan worden herleid tot een som van producten van den vorm

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (p_h \pm p_i \pm p_j)\, \alpha \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (h \pm i \pm j)\, \beta. \quad (75.\ 3)$$

De producten (75. 3) moeten over den cylinderwand worden geïntegreerd. Aangezien

$$\int_0^{2\pi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\beta\, d\beta = 0 \quad \text{voor } n \neq 0$$

kan zulk een product alleen dan een van nul verschillende bijdrage leveren indien

$$h \pm i \pm j = 0. \quad (75.\ 4)$$

De integratie naar $\alpha$ levert in het algemeen niet zoo'n eenvoudig resultaat. Wordt in alle bijdragen van (75. 1) echter de gemeenschappelijke factor $\frac{2\pi l}{R}$ afgezonderd en vervolgens de grensovergang $l \to \infty$ uitgevoerd dan kan een product (75. 2) wegens

$$\lim_{l\to\infty} \frac{R}{l} \int_0^{\frac{l}{R}} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} p\alpha\, d\alpha = 0 \text{ voor } p \neq 0$$

slechts dan een van nul verschillende bijdrage leveren indien

$$p_h \pm p_i \pm p_j = 0. \quad (75.\ 5)$$

De toepassing van het resultaat voor oneindig lange cylinders op cylinders van niet te kleine, doch eindige lengte $\left(\frac{l}{R} > 0{,}75\right)$ is gerechtvaardigd door de omstandigheid dat voor de hier beschouwde knikvormen ($p \gg 1$) bij zulke cylinders experimenteel geen invloed van de lengte van den cylinder is gebleken. Bovendien is ook de reeds ingevoerde vereenvoudiging, waarbij $p$ als continu veranderlijke werd opgevat, exact alleen geldig voor oneindig lange cylinders.

Door de voorwaarden (75. 4) en (75. 5) wordt het aantal in aanmerking komende combinaties van aan (74. 2) of (74. 4) voldoende waarden van $h$, $i$, $j$ en $p_h$, $p_i$, $p_j$ ingrijpend beperkt. Allereerst wordt opgemerkt dat

$$h + i + j = 0 \quad \text{of} \quad p_h + p_i + p_j = 0$$

bij beperking tot positieve waarden van $h$, $i$, $j$ en $p_h$, $p_i$, $p_j$ niet mogelijk is (negatieve waarden geven geen uitbreiding van de oplossing (74. 10, 11, 12) en behoeven dus niet te worden beschouwd). Vervolgens kan de beschouwing worden beperkt tot de twee gevallen

$$h + i - j = 0\ ,\quad p_h + p_i - p_j = 0 \text{ en} \tag{75. 6}$$

$$h + i - j = 0\ ,\quad p_h - p_i + p_j = 0 \tag{75. 7}$$

daar alle andere combinaties hieruit door permutatie van $h$, $i$ en $j$ kunnen worden verkregen.

Ook de mogelijkheid (75. 6) blijkt te worden uitgeschakeld. Substitutie van $j$ en $p_j$ (75. 6) in de voor $n = j$ geldende betrekking (74. 2) levert namelijk

$$(p_h + p_i)^2 + (h + i)^2 = (p_h + p_i)\sqrt[4]{\frac{4\,(1 - \nu^2)}{k}},$$

waaruit met gebruik van (74. 2) voor $n = h$ en $n = i$ volgt

$$p_h p_i + hi = 0.$$

Alleen de mogelijkheid (75. 7) blijft dus over. Eliminatie van $i$ en $p_i$ uit de voor $n = i$ geldende betrekking (74. 2) levert

$$p_h p_j - hj = 0.$$

De betrekking (74. 2) voor $n = j$ kan dan worden geschreven in den vorm

$$j^2\left(1 + \frac{h^2}{p_h^2}\right) = \frac{jh}{p_h}\sqrt[4]{\frac{4\,(1 - \nu^2)}{k}},$$

waaruit met gebruik van (74. 2) voor $n = h$ volgt $j = h$. De combinaties van $n$ en $p$ die tezamen een product (75. 2) bepalen dat een van nul verschillende bijdrage in (75. 1) kan leveren, worden dus gegeven door

$$\left.\begin{matrix} n = 0 \\ p = p_0 \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} n = h \\ p = p_{h1} \end{matrix}\right\},\quad \left.\begin{matrix} n = h \\ p = p_{h2} \end{matrix}\right\}. \tag{75. 8}$$

Dit resultaat kan op eenvoudige wijze door een $p - n$ diagram worden geïllustreerd. De combinaties van $p$ en $n$ (74, 4) voor de knikvormen worden hierin afgebeeld als de snijpunten van den cirkel (74. 2) met de rechten $n = 1, 2 \ldots$. (fig. 8). De twee bij eenzelfde waarde van $n$ behoorende snijpunten en het punt $n = 0$, $p = p_0$ bepalen tezamen een term van den integrand van $P_3[u]$, die na integratie een van nul verschillend bedrag kan opleveren. Wegens de onderstelling $p \gg 1$ komen afgezien van $n = 0$, $p = p_0$



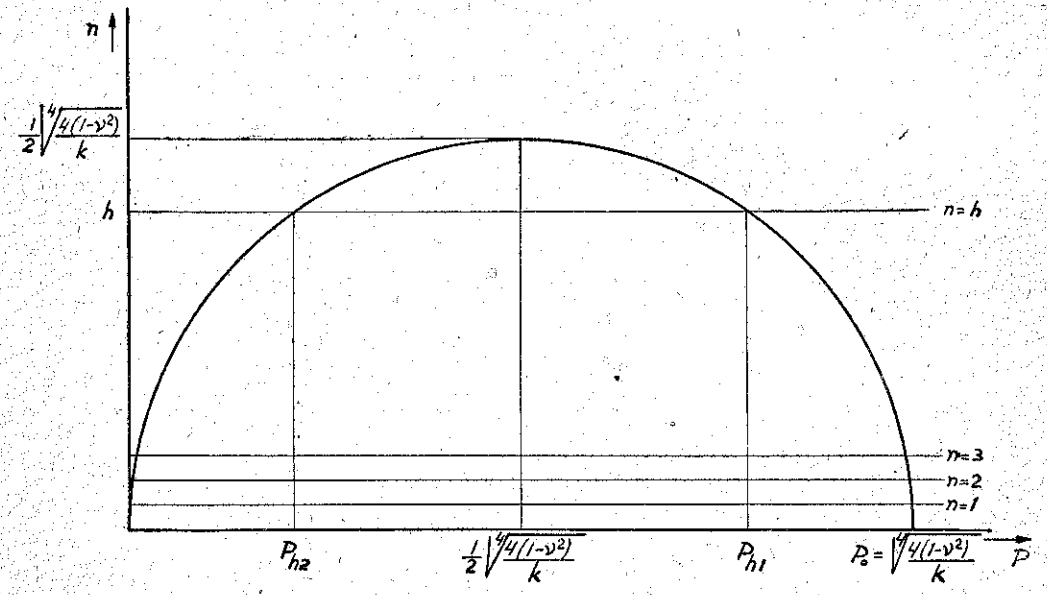



Fig. 8.

alleen de grootere waarden van $n$ in aanmerking daar alleen dan deze onderstelling is vervuld.

Bij de berekening van (75. 1) kunnen nog meer vereenvoudigingen worden aangebracht. Uit (74. 10, 11, 12) volgt dat $u$ en $v$ klein zijn ten opzichte van $w$ terwijl hun eerste afgeleiden van dezelfde orde van grootte kunnen zijn. Verder is $w'$ groot ten opzichte van $w$ terwijl $w^{\cdot}$ van dezelfde orde van grootte als $w'$ kan zijn. De belangrijkste termen van den integrand van $P_3^0[u]$ (72. 8) ten opzichte van welke de overige termen kunnen worden verwaarloosd, zijn dan

$$\begin{aligned} &4u' w'^2 + 4\,(v^{\cdot} + w)\, w^{\cdot 2} + 4\nu u' w^{\cdot 2} + 4\nu\,(v^{\cdot} + w)\, w'^2 + \\ &+ 4\,(1 - \nu)\,(u^{\cdot} + v')\, w' w^{\cdot} = 4\,[u' + \nu\,(v^{\cdot} + w)]\, w'^2 + \\ &+ 4\,(\nu u' + v^{\cdot} + w)\, w^{\cdot 2} + 4\,(1 - \nu)\,(u^{\cdot} + v')\, w' w^{\cdot}. \end{aligned} \tag{75. 9}$$

De belangrijkste termen van (72. 9) hebben denzelfden vorm zoodat wegens $\lambda_1 \ll 1$ de bijdrage $\lambda_1 P_3'[u]$ ten opzichte van $P_3^0[u]$ mag worden verwaarloosd.

De uitvoering van de berekening der derdegraadstermen levert nu geen moeilijkheid meer op al is het hieraan verbonden schrijfwerk tamelijk omvangrijk; volstaan moge worden met het resultaat

$$P_3\,[\Sigma a_j u_j] = \frac{2\pi l}{R^2}(1-\nu^2)\left\{3\,\Sigma n^2\left[b_0(-a_{n1}a_{n2}-b_{n1}b_{n2}+c_{n1}c_{n2}+\right.\right.$$

$$\left.+d_{n1}d_{n2})+a_0(a_{n1}c_{n2}+a_{n2}c_{n1}+b_{n1}d_{n2}+b_{n2}d_{n1})\right]+$$

$$\left.+\frac{3}{2}m^2\left[b_0(-a_m^2-b_m^2+c_m^2+d_m^2)+2a_0(a_mc_m+b_md_m)\right]\right\}\;; \quad (75.\,10)$$

hierin moet de sommatie worden uitgestrekt over alle voldoend groote geheele waarden van $n$ die aan (74. 5) voldoen. Uit (75. 10) blijkt dat de termen van den derden graad niet ontbreken zoodat het evenwicht in den kniktoestand instabiel is.

## 76 – EVENWICHTSTOESTANDEN BIJ BELASTINGEN IN DE OMGEVING VAN DEN KNIKLAST

Aangezien de toeneming der energie (72. 3) bij overgang van den grondtoestand naar een naburigen toestand blijkens (72.6 t/m 11) van den vorm (38. 3) is, kan de theorie van par. 38 worden toegepast. Wordt de beschouwing beperkt tot zoo kleine verplaatsingen uit den grondtoestand dat termen van den vierden graad reeds mogen worden verwaarloosd dan neemt de stationnaire waarde der energie $\overline{P}^{\lambda}(a_j)$ bij constant gehouden waarden van $a_j$ den met (38. 22) corrrespondeerenden vorm aan

$$\overline{P}^{\lambda}(a_j) = (\lambda-\lambda_1)\,\overline{P}_2'(a_j) + \overline{P}_3^{\,0}(a_j) + \lambda\,\overline{P}_3'(a_j)\;; \quad (76.\,1)$$

hierin is

$$\left.\begin{aligned}\overline{P}_2'(a_j) &= P_2'[\Sigma a_j u_j]\;,\\ \overline{P}_3^{\,0}(a_j) &= P_3^{\,0}[\Sigma a_j u_j]\;,\\ \overline{P}_3'(a_j) &= P_3'[\Sigma a_j u_j]\;.\end{aligned}\right\} \quad (76.\,2)$$

Zooals reeds in de voorgaande paragraaf werd opgemerkt is $P_3'[u]$ van denzelfden vorm als $P_3^{\,0}[u]$ zoodat in (76. 1) de laatste term wegens $\lambda \ll 1$ mag worden verwaarloosd. De tweede term stemt voorts overeen met (75. 10) zoodat alleen de eerste term nog moet worden berekend. In den integrand van (72. 13) zijn $u'^2$ en $v'^2$ weer verwaarloosbaar ten opzichte van $w'^2$ zoodat wordt gevonden

$$\overline{P}_2'(a_j) = -4(1-\nu^2)\iint(\Sigma a_j w_j')^2\,d\alpha\,d\beta\;;$$

met (74. 14) gaat deze uitkomst over in



$$\overline{P}_2'(a_j) = -4(1-\nu^2)\,\Sigma a_j^2\iint w_j'^2\,d\alpha\,d\beta =$$

$$= -\frac{2\pi l}{R}(1-\nu^2)\left\{2p_0^2(a_0^2+b_0^2)+\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\cdots}p_{n1}^2(a_{n1}^2+b_{n1}^2+c_{n1}^2+d_{n1}^2)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\cdots}p_{n2}^2(a_{n2}^2+b_{n2}^2+c_{n2}^2+d_{n2}^2)+$$

$$\left.+m^2(a_m^2+b_m^2+c_m^2+d_m^2)\right\}, \quad (76.\,3)$$

zoodat (76. 1) expliciet luidt

$$\overline{P}^{\lambda}(a_j) = \frac{2\pi l}{R^2}(1-\nu^2)\left\{-R(\lambda-\lambda_1)\left[2p_0^2(a_0^2+b_0^2)+\right.\right.$$

$$+\sum_{n=1}^{\cdots}p_{n1}^2(a_{n1}^2+b_{n1}^2+c_{n1}^2+d_{n1}^2)+$$

$$\left.+\sum_{n=1}^{\cdots}p_{n2}^2(a_{2n}^2+b_{n2}^2+c_{n2}^2+d_{n2}^2)+m^2(a_m^2+b_m^2+c_m^2+d_m^2)\right]+$$

$$+3\sum_{n=1}^{\cdots}n^2\left[b_0(-a_{n1}a_{n2}-b_{n1}b_{n2}+c_{n1}c_{n2}+d_{n1}d_{n2})+\right.$$

$$\left.+a_0(a_{n1}c_{n2}+a_{n2}c_{n1}+b_{n1}d_{n2}+b_{n2}d_{n1})\right]+$$

$$\left.+\tfrac{3}{2}m^2\left[b_0(-a_m^2-b_m^2+c_m^2+d_m^2)+2a_0(a_mc_m+b_md_m)\right]\right\}. \quad (76.\,4)$$

De evenwichtstoestanden zijn gekenmerkt door stationnaire waarden van (76. 4) als functie van de parameters $a_0$, $b_0$, $a_{n1}$ enz. Differentiatie naar $a_0$ en $b_0$ leidt tot de voorwaarden

$$\left.\begin{aligned}-4R(\lambda-\lambda_1)\,p_0^2a_0+3\sum_{n=1}^{\cdots}n^2(a_{n1}c_{n2}+a_{n2}c_{n1}+b_{n1}d_{n2}+b_{n2}d_{n1})+\\ +3m^2(a_mc_m+b_md_m)=0,\\ -4R(\lambda-\lambda_1)\,p_0^2b_0+3\sum_{n=1}^{\cdots}n^2(-a_{n1}a_{n2}-b_{n1}b_{n2}+c_{n1}c_{n2}+d_{n1}d_{n2})+\\ +\tfrac{3}{2}m^2(-a_m^2-b_m^2+c_m^2+d_m^2)=0.\end{aligned}\right\} \quad (76.\,5)$$

Uit deze voorwaarden blijkt reeds dat $a_0$ en $b_0$ geen van nul verschillende waarden kunnen hebben tenzij tenminste één paar der overige coëfficiënten van nul verschilt.

Differentiatie naar $a_{n1}$, $a_{n2}$, $c_{n1}$, $c_{n2}$ leidt tot de voorwaarden

$$\left.\begin{aligned} -2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n1}^2\,a_{n1} + 3n^2(-b_0 a_{n2} + a_0 c_{n2}) &= 0,\\ -2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n2}^2\,a_{n2} + 3n^2(-b_0 a_{n1} + a_0 c_{n1}) &= 0,\\ -2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n1}^2\,c_{n1} + 3n^2(\;\; b_0 c_{n2} + a_0 a_{n2}) &= 0,\\ -2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n2}^2\,c_{n2} + 3n^2(\;\; b_0 c_{n1} + a_0 a_{n1}) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (76.\,6)$$

De door differentiatie naar $b_{n1}$, $b_{n2}$, $d_{n1}$, $d_{n2}$ verkregen voorwaarden zijn analoog gebouwd en volgen uit (76. 6) door vervanging van $a_{n1,2}$ en $c_{n1,2}$ door onderscheidenlijk $b_{n1,2}$ en $d_{n1,2}$. Differentiatie van (76. 4) naar $a_m$ en $c_m$ leidt tot de voorwaarden

$$\left.\begin{aligned} -2R(\lambda-\lambda_1)\,m^2\,a_m + 3m^2(-b_0 a_m + a_0 c_m) &= 0,\\ -2R(\lambda-\lambda_1)\,m^2\,c_m + 3m^2(\;\; b_0 c_m + a_0 a_m) &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (76.\,7)$$

De door differentiatie naar $b_m$ en $d_m$ verkregen voorwaarden volgen uit (76. 7) door vervanging van $a_m$ en $c_m$ door onderscheidenlijk $b_m$ en $d_m$.

De voorwaarden (76. 6) kunnen worden opgevat als een systeem homogene lineaire vergelijkingen voor $a_{n1}$, $a_{n2}$, $c_{n1}$, $c_{n2}$. Deze bezitten slechts dan een van nul verschillende oplossing indien de determinant gevormd door haar coefficiënten

$$\begin{vmatrix} -2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n1}^2 & -3n^2b_0 & 0 & 3n^2a_0\\ -3n^2b_0 & -2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n2}^2 & 3n^2a_0 & 0\\ 0 & 3n^2a_0 & -2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n1}^2 & 3n^2b_0\\ 3n^2a_0 & 0 & 3n^2b_0 & -2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n2}^2 \end{vmatrix} \quad (76.\,8)$$

nul is. Ontwikkeling van den determinant leidt met gebruik van

$$p_{n1}\,p_{n2} = n^2 \quad (76.\,9)$$

tot de voorwaarde

$$n^8\left[4R^2(\lambda-\lambda_1)^2 - 9(a_0^2+b_0^2)\right]^2 = 0,$$

waaruit volgt

$$a_0^2 + b_0^2 = \tfrac{4}{9}R^2(\lambda-\lambda_1)^2. \quad (76.\,10)$$

Ook de als stel homogene lineaire vergelijkingen voor $a_m$ en $c_m$ opgevatte voorwaarden (76. 7) laten alleen dan een van nul verschillende oplossing toe indien haar determinant

$$\begin{vmatrix} -2R(\lambda-\lambda_1)\,m^2 - 3m^2b_0 & 3m^2a_0\\ 3m^2a_0 & -2R(\lambda-\lambda_1)\,m^2 + 3m^2b_0 \end{vmatrix}$$

nul is. Ontwikkeling van dezen determinant leidt eveneens tot de voorwaarde (76. 10).



Het verrassende in de voorwaarde (76. 10) is dat zij onafhankelijk van $n$ is, zoodat haar vervulling tengevolge heeft dat alle vergelijkingen (76. 6 en 7), alsmede de hieruit door vervanging van

$$a_{n1},\ a_{n2},\ c_{n1},\ c_{n2},\ a_m,\ c_m, \text{ door } b_{n1},\ b_{n2},\ d_{n1},\ d_{n2},\ b_m,\ d_m$$

verkregen vergelijkingen, tegelijk een van nul verschillende oplossing bezitten. Wordt daarentegen aan (76. 10) niet voldaan dan bezitten (76. 6 en 7) alleen de triviale nuloplossing. Blijkens (76. 5) is dan ook zoowel $a_0$ als $b_0$ nul. Deze den grondtoestand weergevende oplossing kan verder buiten beschouwing blijven.

Voor de door (76. 10) bepaalde waarden van $a_0$ en $b_0$ bezit de determinant (76. 8) den rang 2, d.w.z. ook alle uit haar rijen en kolommen gevormde determinanten van de derde orde zijn nul terwijl minstens één der determinanten van de tweede orde ongelijk nul is. De algemeene oplossing van (76. 6) luidt derhalve

$$\left.\begin{aligned} a_{n2} &= \frac{3n^2}{2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n2}^2}(-b_0 a_{n1} + a_0 c_{n1}),\\ c_{n2} &= \frac{3n^2}{2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n2}^2}(\;\; a_0 a_{n1} + b_0 c_{n1}), \end{aligned}\right\} \quad (76.\,11)$$

waarin $a_{n1}$ en $c_{n1}$ willekeurig zijn. De correspondeerende oplossingen voor $b_{n2}$ en $d_{n2}$ worden hieruit verkregen door vervanging van $a_{n1}$ en $c_{n1}$ door onderscheidenlijk $b_{n1}$ en $d_{n1}$. De oplossing van (76. 7) luidt

$$c_m = \frac{3}{2R(\lambda-\lambda_1) - 3b_0}\,a_0\,a_m \quad (76.\,12)$$

tenzij $a_0$ nul is; in het laatste geval is de oplossing al naar gelang $b_0$ de door (76. 10) bepaalde waarde

$$b_0 = \tfrac{2}{3}R(\lambda-\lambda_1) \text{ of } b_0 = -\tfrac{2}{3}R(\lambda-\lambda_1) \quad (76.\,13)$$

bezit, gegeven door

$$a_m = 0,\ c_m \text{ willekeurig, resp. } a_m \text{ willekeurig, } c_m = 0. \quad (76.\,14)$$

De correspondeerende oplossingen voor $b_m$ en $d_m$ worden hieruit verkregen door vervanging van $a_m$ en $c_m$ door onderscheidenlijk $b_m$ en $d_m$.

Door substitutie van (76. 11 en 12) gaat (76. 5) over in

$$-4R(\lambda-\lambda_1)\,p_0^2 a_0 + 9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4 a_0}{2R(\lambda-\lambda_1)\,p_{n2}^2}(a_{n1}^2+b_{n1}^2+c_{n1}^2+d_{n1}^2) + 9\frac{m^2 a_0}{2R(\lambda-\lambda_1)-3b_0}(a_m^2+b_m^2) = 0,$$

$$-4R(\lambda-\lambda_1)p_0^2b_0+9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4b_0}{2R(\lambda-\lambda_1)p_{n2}^2}(a_{n1}^2+b_{n1}^2+c_{n1}^2+d_{n1}^2)+$$
$$+\tfrac{3}{2}m^2\left\{\frac{9a_0^2}{[2R(\lambda-\lambda_1)-3b_0]^2}-1\right\}(a_m^2+b_m^2)=0.$$

Met gebruik van (76. 9) gaat de eerste voorwaarde over in

$$a_0\left\{-4R(\lambda-\lambda_1)p_0^2+\frac{9}{2R(\lambda-\lambda_1)}\sum_{n=1}^{\infty}p_{n1}^2(a_{n1}^2+b_{n1}^2+c_{n1}^2+d_{n1}^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{9}{2R(\lambda-\lambda_1)-3b_0}m^2(a_m^2+b_m^2)\right\}=0. \quad (76.\ 15)$$

De tweede voorwaarde kan met gebruik van (76. 10) worden herleid tot

$$b_0\left\{-4R(\lambda-\lambda_1)p_0^2+\frac{9}{2R(\lambda-\lambda_1)}\sum_{n=1}^{\infty}p_{n1}^2(a_{n1}^2+b_{n1}^2+c_{n1}^2+d_{n1}^2)+\right.$$
$$\left.+\frac{9}{2R(\lambda-\lambda_1)-3b_0}m^2(a_m^2+b_m^2)\right\}=0. \quad (76.\ 16)$$

Deze voorwaarden worden behalve door $a_0=b_0=0$, welk geval buiten beschouwing kan blijven, alleen bevredigd door

$$-4R(\lambda-\lambda_1)p_0^2+\frac{9}{2R(\lambda-\lambda_1)}\sum_{n=1}^{\infty}p_{n1}^2(a_{n1}^2+b_{n1}^2+c_{n1}^2+d_{n1}^2)+$$
$$+\frac{9}{2R(\lambda-\lambda_1)-3b_0}m^2(a_m^2+b_m^2)=0. \quad (76.\ 17)$$

Het geval $a_0=0$ moet nog afzonderlijk worden bezien. De eerste voorwaarde (76. 5) wordt dan door substitutie van (76. 11 en 14) onmiddellijk bevredigd. Al naar gelang aan de eerste of tweede relatie (76. 13) wordt voldaan gaat de tweede voorwaarde (76. 5) door substitutie van (76. 11 en 14) over in

$$-8R^2(\lambda-\lambda_1)^2p_0^2+9\sum_{n=1}^{\infty}p_{n1}^2(a_{n1}^2+b_{n1}^2+c_{n1}^2+d_{n1}^2)+$$
$$+\tfrac{9}{2}m^2(c_m^2+d_m^2)=0, \text{ resp.} \quad (76.\ 18)$$

$$-8R^2(\lambda-\lambda_1)^2p_0^2+9\sum_{n=1}^{\infty}p_{n1}^2(a_{n1}^2+b_{n1}^2+c_{n1}^2+d_{n1}^2)+$$
$$+\tfrac{9}{2}m^2(a_m^2+b_m^2)\quad 0. \quad (76.\ 19)$$

De verkregen resultaten kunnen als volgt worden samengevat. De verplaatsingen (74. 10 t/m 12) voor de van den grondtoestand afwijkende naburige evenwichtstoestanden moeten voldoen aan (76. 10 en 17) en (76. 11 en 12). In het geval $a_0=0$ treedt in de plaats van (76. 17) één der voorwaarden (76. 18 of 19) terwijl (76. 12) wordt vervangen door de correspondeerende betrekking (76. 14). Uit deze resultaten blijkt dat de verplaatsingen in de naburige evenwichtstoestanden verre van ondubbelzinnig bepaald zijn. Voor een deel wordt dit veroorzaakt door de omstandigheid, dat de bijdragen in de verplaatsingen met coëfficiënten $a$, $b$, $c$, $d$ met dezelfde indices eenzelfden knikvorm bepalen, zij het met een onderling „phaseverschil". Daarentegen kan het onbepaalde verband tusschen de coëfficiënten met verschillende indices niet hieraan worden toegeschreven. Het is te verwachten dat deze laatste onbepaaldheid althans ten deele zou verdwijnen indien in de energie ook termen van den vierden graad in de verplaatsingen in rekening werden gebracht. Op deze mogelijkheid ter verbetering der theorie, die een aanzienlijke complicatie van het onderzoek zou meebrengen, wordt niet nader ingegaan.



De stabiliteit van de naburige evenwichtstoestanden wordt beheerscht door de tweede variatie van (76. 4)

$$\triangle^2\overline{P}_\lambda(a_j)=\frac{2\pi l}{R^2}(1-\nu^2)\left\{-R(\lambda-\lambda_1)\left[2p_0^2(\triangle a_0^2+\triangle b_0^2)+\right.\right.$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}p_{n1}^2(\triangle a_{n1}^2+\triangle b_{n1}^2+\triangle c_{n1}^2+\triangle d_{n1}^2)+$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}p_{n2}^2(\triangle a_{n2}^2+\triangle b_{n2}^2+\triangle c_{n2}^2+\triangle d_{n2}^2)+$$
$$\left.+m^2(\triangle a_m^2+\triangle b_m^2+\triangle c_m^2+\triangle d_m^2)\right]+$$
$$+3\sum_{n=1}^{\infty}n^2\left[b_0(-\triangle a_{n1}\triangle a_{n2}-\triangle b_{n1}\triangle b_{n2}+\triangle c_{n1}\triangle c_{n2}+\triangle d_{n1}\triangle d_{n2})+\right.$$
$$+a_0(\triangle a_{n1}\triangle c_{n2}+\triangle a_{n2}\triangle c_{n1}+\triangle b_{n1}\triangle d_{n2}+\triangle b_{n2}\triangle d_{n1})+$$
$$-a_{n1}\triangle b_0\triangle a_{n2}-a_{n2}\triangle b_0\triangle a_{n1}-b_{n1}\triangle b_0\triangle b_{n2}-b_{n2}\triangle b_0\triangle b_{n1}+$$
$$+c_{n1}\triangle b_0\triangle c_{n2}+c_{n2}\triangle b_0\triangle c_{n1}+d_{n1}\triangle b_0\triangle d_{n2}+d_{n2}\triangle b_0\triangle d_{n1}+$$
$$+a_{n1}\triangle a_0\triangle c_{n2}+c_{n2}\triangle a_0\triangle a_{n1}+a_{n2}\triangle a_0\triangle c_{n1}+c_{n1}\triangle a_0\triangle a_{n2}+$$
$$\left.+b_{n1}\triangle a_0\triangle d_{n2}+d_{n2}\triangle a_0\triangle b_{n1}+b_{n2}\triangle a_0\triangle d_{n1}+d_{n1}\triangle a_0\triangle b_{n2}\right]+$$
$$+\tfrac{3}{2}m^2\left[b_0(-\triangle a_m^2-\triangle b_m^2+\triangle c_m^2+\triangle d_m^2)+\right.$$
$$+2a_0(\triangle a_m\triangle c_m+\triangle b_m\triangle d_m)+$$
$$-2a_m\triangle b_0\triangle a_m-2b_m\triangle b_0\triangle b_m+2c_m\triangle b_0\triangle c_m+$$
$$+2d_m\triangle b_0\triangle d_m+2a_m\triangle a_0\triangle c_m+2c_m\triangle a_0\triangle a_m+$$
$$\left.\left.+2b_m\triangle a_0\triangle d_m+2d_m\triangle a_0\triangle b_m\right]\right\}. \quad (76.\ 20)$$

Voor de naburige evenwichtstoestanden bij belastingen kleiner dan de kniklast kan onmiddellijk gebruik worden gemaakt van de algemeene conclusie van par. 36 dat deze toestanden instabiel zijn. Bij belastingen grooter dan de kniklast is verder de coëfficiënt van bijv. $\triangle a_0^2$ negatief. Mitsdien is (76. 20) negatief indien alleen $\triangle a_0$ van nul verschilt. Ook de naburige evenwichtstoestanden bij belastingen grooter dan de kniklast zijn derhalve instabiel evenals de grondtoestand. Aangezien een instabiele evenwichtstoestand experimenteel niet kan worden verwezenlijkt levert het voorgaande onderzoek reeds een verklaring waarom althans bij kleine vervormingen de dunwandige cylinder geen grootere belastingen dan de kniklast kan opnemen.

De naburige evenwichtstoestanden zijn voor de cylinderschaal reeds onderzocht door VON KARMAN en TSIEN (lit. 51). Voor de totale verplaatsingscomponente loodrecht op het middenvlak wordt door genoemde schrijvers aangenomen

$$w = a_0 + a_1 \cos p\alpha \cos n\beta + a_2 (\cos 2p\alpha + \cos 2n\beta) ; \quad (76.\ 21)$$

de verplaatsingscomponenten in axiale en tangentieele richting worden vervolgens bepaald door toepassing van de evenwichtsvoorwaarden in het vlak der schaal. De drie parameters in (76. 21) worden tenslotte gevonden uit de voorwaarde dat de potentieele energie een minimum is.

Omdat de door VON KARMAN en TSIEN aangenomen verplaatsingen niet de algemeene oplossing bij den kniklast kunnen weergeven zullen hun resultaten voor niet te sterk van den kniklast afwijkende belastingen vermoedelijk minder goed zijn. Dit vermoeden wordt bevestigd door hun krommen voor de amplitude $a_1$ der golven als functie van de belasting. In het den kniktoestand weergevende punt $\lambda = \lambda_1$, $a_1 = 0$ is de raaklijn aan de kromme evenwijdig aan de $a_1$ -as. Volgens de algemeene theorie (76. 10) neemt de amplitude der golven in de omgeving van den kniklast echter lineair toe met belastingveranderingen. Bij verder van den kniklast afwijkende belastingen levert de in het voorgaande ontwikkelde theorie daarentegen onwaarschijnlijke resultaten; zoo leidt zij voor $\lambda = 0$, d.w.z. voor den onbelasten toestand, tot evenwichtstoestanden met van nul verschillende waarden der coëfficiënten $a$, $b$, $c$, $d$. Ongetwijfeld wordt dit veroorzaakt door het niet meer vervuld zijn van de onderstelling dat termen van den vierden graad in de verplaatsingen bij de berekening der energie mogen worden verwaarloosd (zie ook par. 783).

## 77 - DE INVLOED VAN KLEINE AFWIJKINGEN

Aangenomen wordt dat de onvervormde toestand van het middenvlak der constructie uit den cylinder wordt afgeleid door verplaatsingen $w_0$ in de normaalrichting van den cylinder. De



coördinaten van een punt van dit middenvlak worden dan gegeven door

$$x_1^0 = R\alpha , \quad x_2^0 = (R + w_0) \sin \beta , \quad x_3^0 = (R + w_0) \cos \beta .$$

De vervormingscomponenten van het middenvlak worden volgens par. 57 bepaald door (zie ook (56. 3) )

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_{\alpha\alpha o}{}^* &= \frac{1}{R} 2u' + \frac{1}{R^2} (u'^2 + v'^2 + w'^2) + \frac{1}{R^2} 2w_0{}' w', \\
\gamma_{\beta\beta o}{}^* &= \frac{1}{R} 2(v^\cdot + w) + \frac{1}{R^2} \left[u^{\cdot 2} + (v^\cdot + w)^2 + (w^\cdot - v)^2\right] + \\
&\quad + \frac{1}{R^2} \left[2w_0 (v^\cdot + w) + 2w_0{}^\cdot (w^\cdot - v)\right], \\
\gamma_{\alpha\beta o}{}^* &= \frac{1}{R} (u^\cdot + v') + \frac{1}{R^2} \left[u' u^\cdot + v' (v^\cdot + w) + w' (w^\cdot - v)\right] + \\
&\quad + \frac{1}{R^2} \left[w_0 v' + w_0{}' (w^\cdot - v) + w_0{}^\cdot w'\right].
\end{aligned}\right\} \quad (77.\ 1)$$

De uitdrukkingen (71. 5) voor de krommingsveranderingen blijven ongewijzigd.

Evenals voor de zuiver cylindrische schaal de uitgebreide theorie van par. 38 kon worden toegepast kan thans gebruik worden gemaakt van par. 47. In de toeneming der energie (47. 1) bij overgang van den verplaatsingstoestand $U(\lambda)$, die den grondtoestand van het model bepaalt, naar een verplaatsingstoestand $U(\lambda) + u$ komt de invloed van kleine verschillen tusschen constructie en model tot uitdrukking alleen in den term (47. 2). Voor zoover deze term afkomstig is van de elastische energie ontstaat hij uit termen die quadratisch zijn in de totale verplaatsingen $U(\lambda) + u$. Worden deze totale verplaatsingen voorloopig nog $u$, $v$, $w$ genoemd dan worden deze quadratische termen volgens par. 57 verkregen door substitutie van (77. 1) in (55. 11). Zij bedragen derhalve

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{4}Gh \frac{1}{1-\nu} \frac{1}{R} \int\int \Big[8w_0{}' u' w' + 8w_0 (v^\cdot + w)^2 + \\
&+ 8w_0{}^\cdot (v^\cdot + w) (w^\cdot - v) + 8\nu w_0{}' w' (v^\cdot + w) + \\
&+ 8\nu w_0 u' (v^\cdot + w) + 8\nu w_0{}^\cdot u' (w^\cdot - v) + \\
&+ 4(1-\nu) w_0 (u^\cdot + v') v' + 4(1-\nu) w_0{}' (u^\cdot + v') (w^\cdot - v) + \\
&+ 4(1-\nu) w_0{}^\cdot (u^\cdot + v') w'\Big] d\alpha\, d\beta. \qquad (77.\ 2)
\end{aligned}$$

In het volgende wordt voor de totale verplaatsingen weer geschreven $U(\lambda) + u$, of in componenten

$$-\lambda R\alpha + u\ ,\quad v\ ,\quad \lambda vR + w.$$

De gezochte term (47. 2) wordt dan verkregen door ontwikkeling van (77. 2) en inachtneming van alleen de in $u$, $v$ en $w$ lineaire termen. Het resultaat is na deeling door $\frac{1}{4}Gh\frac{1}{1-\nu}$

$$\begin{aligned}\varepsilon\lambda Q_1'[u] = \int\!\!\int\Big[&-8\lambda w_0' w' + 16\nu\lambda w_0 (v^{\cdot} + w) + \\ &+ 8\nu\lambda w_0^{\cdot}(w^{\cdot} - v) + 8\nu^2\lambda w_0' w' - 8\nu\lambda w_0 (v^{\cdot} + w) + \\ &+ 8\nu^2\lambda w_0 u' - 8\nu\lambda w_0^{\cdot}(w^{\cdot} - v)\Big]\, d\alpha\, d\beta = \\ &= \lambda\int\!\!\int\Big[-8(1-\nu^2) w_0' w' + 8\nu w_0 (\nu u' + v^{\cdot} + w)\Big]\, d\alpha\, d\beta.\end{aligned}$$

Wordt nog ondersteld dat $w_0$ nul is langs de randen van den cylinder dan kan deze uitdrukking door partieele integratie worden herleid tot

$$\varepsilon\lambda Q_1'[u] = 8\lambda\int\!\!\int w_0\Big[(1-\nu^2) w'' + \nu(\nu u' + v^{\cdot} + w)\Big]\, d\alpha\, d\beta. \quad (77.3)$$

De beschouwing wordt beperkt tot zoo kleine verplaatsingen uit den verplaatsingstoestand $U(\lambda)$ dat termen van den vierden graad in $u$, $v$, $w$ en haar afgeleiden reeds mogen worden verwaarloosd. De stationnaire waarde der energie $F^\lambda(a_j)$ bij constant gehouden waarden van $a_j$ neemt dan den uit (76. 1) en (77. 3) afgeleiden en met (47. 8) correspondeerenden vorm aan

$$F^\lambda(a_j) = \varepsilon\lambda\,\overline{Q}_1'(a_j) + \overline{P}^\lambda(a_j). \quad (77.4)$$

Hierin is $\overline{P}^\lambda(a_j)$ bepaald door (76. 4) en

$$\varepsilon\lambda\,\overline{Q}_1'(a_j) = \varepsilon\lambda\, Q_1'[\Sigma a_j u_j], \quad (77.5)$$

waarin de componenten van $\Sigma a_j u_j$ door (74. 10 t/m 12) zijn bepaald. In (77. 3) kunnen ten opzichte van den eersten term tusschen accolades de overige termen worden verwaarloosd aangezien $p^2$ steeds groot ten opzichte van de eenheid is ondersteld. Voor (77. 5) wordt dan gevonden



$$\begin{aligned}\varepsilon\lambda\overline{Q}_1'(a_j) = -\frac{2\pi l}{R^2}(1-\nu^2)\,8R\varepsilon\lambda\Big\{&p_0^2(A_0 a_0 + B_0 b_0) + \\ &+ \ddot{\Sigma}_{n=1} p_{n1}^2 (A_{n1} a_{n1} + B_{n1} b_{n1} + C_{n1} c_{n1} + D_{n1} d_{n1}) + \\ &+ \ddot{\Sigma}_{n=1} p_{n2}^2 (A_{n2} a_{n2} + B_{n2} b_{n2} + C_{n2} c_{n2} + D_{n2} d_{n2}) + \\ &+ m^2 (A_m a_m + B_m b_m + C_m c_m + D_m d_m)\Big\}; \end{aligned} \quad (77.6)$$

hierin is ter afkorting gesteld

$$\left.\begin{aligned}&\frac{R}{2\pi l}\int\!\!\int w_0 \sin p_0\alpha\, d\alpha d\beta = \varepsilon A_0\ , \\ &\frac{R}{2\pi l}\int\!\!\int w_0 \sin p_{n1}\alpha\cos n\beta\, d\alpha d\beta = \varepsilon A_{n1}\ \text{enz.}\end{aligned}\right\} \quad (77.7)$$

De evenwichtstoestanden zijn gekenmerkt door stationnaire waarden van (77. 4). Differentiatie naar $a_0$ en $b_0$ leidt tot de voorwaarden

$$\left.\begin{aligned}&-8R\lambda\varepsilon p_0^2 A_0 - 4R(\lambda-\lambda_1) p_0^2 a_0 + \\ &\quad + 3\ddot{\Sigma}_{n=1} n^2 (a_{n1} c_{n2} + a_{n2} c_{n1} + b_{n1} d_{n2} + b_{n2} d_{n1}) + \\ &\quad + 3m^2 (a_m c_m + b_m d_m) = 0, \\ &-8R\lambda\varepsilon p_0^2 B_0 - 4R(\lambda-\lambda_1) p_0^2 b_0 + \\ &\quad + 3\ddot{\Sigma}_{n=1} n^2 (-a_{n1} a_{n2} - b_{n1} b_{n2} + c_{n1} c_{n2} + d_{n1} d_{n2}) + \\ &\quad + \tfrac{3}{2} m^2 (-a_m^2 - b_m^2 + c_m^2 + d_m^2) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (77.8)$$

Differentiatie naar $a_{n1}$, $a_{n2}$, $c_{n1}$, $c_{n2}$ leidt tot de voorwaarden

$$\left.\begin{aligned}&-8R\lambda\varepsilon p_{n1}^2 A_{n1} - 2R(\lambda-\lambda_1) p_{n1}^2 a_{n1} + 3n^2(-b_0 a_{n2} + a_0 c_{n2}) = 0, \\ &-8R\lambda\varepsilon p_{n2}^2 A_{n2} - 2R(\lambda-\lambda_1) p_{n2}^2 a_{n2} + 3n^2(-b_0 a_{n1} + a_0 c_{n1}) = 0, \\ &-8R\lambda\varepsilon p_{n1}^2 C_{n1} - 2R(\lambda-\lambda_1) p_{n1}^2 c_{n1} + 3n^2(\ \ b_0 c_{n2} + a_0 a_{n2}) = 0, \\ &-8R\lambda\varepsilon p_{n2}^2 C_{n2} - 2R(\lambda-\lambda_1) p_{n2}^2 c_{n2} + 3n^2(\ \ b_0 c_{n1} + a_0 a_{n1}) = 0;\end{aligned}\right\} \quad (77.9)$$

de door differentiatie naar $b_{n1}$, $b_{n2}$, $d_{n1}$, $d_{n2}$ verkregen voorwaarden volgen uit (77. 9) door vervanging van $A_{n1,2}$, $C_{n1,2}$, $a_{n1,2}$, $c_{n1,2}$

door onderscheidenlijk $B_{n1,2}$, $D_{n1,2}$, $b_{n1,2}$, $d_{n1,2}$. Differentiatie naar $a_m$ en $c_m$ leidt tot de voorwaarden

$$\left.\begin{aligned} -8R\lambda\varepsilon m^2 A_m - 2R(\lambda-\lambda_1)m^2 a_m + 3m^2(-b_0 a_m + a_0 c_m) = 0,\\ -8R\lambda\varepsilon m^2 C_m - 2R(\lambda-\lambda_1)m^2 c_m + 3m^2(\quad b_0 c_m + a_0 a_m) = 0 \end{aligned}\right\} \quad (77.10)$$

de door differentiatie naar $b_m$ en $d_m$ verkregen voorwaarden volgen uit (77. 10) door vervanging van $A_m$, $C_m$, $a_m$, $c_m$ door onderscheidenlijk $B_m$, $D_m$, $b_m$, $d_m$.

De oplossing der evenwichtsvergelijkingen kan in principe als volgt geschieden. (77. 9 en 10) kunnen weer worden opgevat als systemen lineaire vergelijkingen voor $a_{n1,2}$, $c_{n1,2}$, $a_m$, $c_m$ die thans echter inhomogeen zijn. Zoolang de determinant (76. 8) van nul verschilt, en dit is zooals later zal blijken beneden den kniklast steeds het geval, is de oplossing van deze vergelijkingen ondubbelzinnig bepaald. Substitutie dezer oplossing, welke nog afhangt van de parameters $a_0$ en $b_0$, in (77. 8) geeft dan twee niet-lineaire vergelijkingen voor $a_0$ en $b_0$.

De boven geschetste oplossingsmethode is echter bezwaarlijk toe te passen zoodat de beschouwing wordt beperkt tot een eenvoudiger bijzonder geval. Hiervoor wordt gekozen

$$A_{n1,2} = B_{n1,2} = C_{n1,2} = D_{n1,2} = A_m = B_m = C_m = D_m = 0.$$

Bij den oneindig langen cylinder treedt dit geval o.a. op indien

$$w_0 = \varepsilon h \sin(p_0 \alpha - \alpha_0). \quad (77.11)$$

De overblijvende constanten (77. 7) bedragen dan

$$A_0 = \tfrac{1}{2} h \cos\alpha_0\ , \qquad B_0 = -\tfrac{1}{2} h \sin\alpha_0. \quad (77.12)$$

De vergelijkingen (77. 9 en 10) bezitten nu alleen de nuloplossing, tenzij de determinant (76. 8) nul is. Voor deze nuloplossing volgt dan uit (77. 8)

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{2\lambda\varepsilon A_0}{\lambda_1-\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1-\lambda}\varepsilon h\cos\alpha_0,\\ b_0 &= \frac{2\lambda\varepsilon B_0}{\lambda_1-\lambda} = -\frac{\lambda}{\lambda_1-\lambda}\varepsilon h\sin\alpha_0. \end{aligned}\right\} \quad (77.13)$$

Uit (77. 13) blijkt dat voor $\lambda \to 0$ ook $a_0$ en $b_0$ tot nul naderen. De verkregen oplossing gaat derhalve voor $\lambda \to 0$ over in den onvervormden toestand der constructie, d.w.z. zij bepaalt den natuurlijken evenwichtstoestand.



De stabiliteit van het evenwicht wordt voor $\lambda < \lambda_2$ beheersecht door de tweede variatie van (77. 4) die identiek is met de tweede variatie (76. 20) van (76. 4). Substitutie van de nuloplossing van (77. 9 en 10) geeft

$$\begin{aligned} \frac{\triangle^2 F^\lambda(a_j)}{\frac{2\pi l}{R^2}(1-\nu^2)} &= \Big\{2R(\lambda_1-\lambda)p_0^2(\triangle a_0^2 + \triangle b_0^2)\Big\} +\\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{R(\lambda_1-\lambda)\Big[p_{n1}^2(\triangle a_{n1}^2+\triangle c_{n1}^2)+p_{n2}^2(\triangle a_{n2}^2+\triangle c_{n2}^2)\Big] +\\ &+ 3n^2 b_0(-\triangle a_{n1}\triangle a_{n2}+\triangle c_{n1}\triangle c_{n2}) +\\ &+ 3n^2 a_0(\triangle a_{n1}\triangle c_{n2}+\triangle a_{n2}\triangle c_{n1})\Big\} +\\ &+ \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{R(\lambda_1-\lambda)\Big[p_{n1}^2(\triangle b_{n1}^2+\triangle d_{n1}^2)+p_{n2}^2(\triangle b_{n2}^2+\triangle d_{n2}^2)\Big] +\\ &+ 3n^2 b_0(-\triangle b_{n1}\triangle b_{n2}+\triangle d_{n1}\triangle d_{n2}) +\\ &+ 3n^2 a_0(\triangle b_{n1}\triangle d_{n2}+\triangle b_{n2}\triangle d_{n1})\Big\} +\\ &+ \Big\{R(\lambda_1-\lambda)m^2(\triangle a_m^2+\triangle c_m^2) +\\ &+ \tfrac{3}{2}m^2 b_0(-\triangle a_m^2+\triangle c_m^2)+3m^2 a_0\triangle a_m\triangle c_m\Big\} +\\ &+ \Big\{R(\lambda_1-\lambda)m^2(\triangle b_m^2+\triangle d_m^2) +\\ &+ \tfrac{3}{2}m^2 b_0(-\triangle b_m^2+\triangle d_m^2)+3m^2 a_0\triangle b_m\triangle d_m\Big\}. \end{aligned} \quad (77.14)$$

De tusschen accolades geplaatste vormen van den tweeden graad in $\triangle a_0$, $\triangle b_0$ enz. zijn onderling niet gekoppeld zoodat zij afzonderlijk kunnen worden beschouwd.

De eerste vorm is definiet positief voor $\lambda < \lambda_1$, semi-definiet voor $\lambda = \lambda_1$ en definiet negatief voor $\lambda > \lambda_1$.

Omdat $a_0$ en $b_0$ tegelijk met $\lambda$ tot nul naderen is de tweede vorm voor niet te groote waarden van $\lambda$ definiet positief. Daarentegen kan hij voor $\lambda > \lambda_1$ zeker negatieve waarden aannemen. Deze vorm is semi-definiet positief indien zijn minimum (ter waarde nul) ook wordt bereikt voor een van nul verschillend stel waarden $\triangle a_{n1,2}$, $\triangle c_{n1,2}$. Hiertoe moeten de vergelijkingen

$$2R(\lambda_1-\lambda)p_{n1}^2\triangle a_{n1}+3n^2(-b_0\triangle a_{n2}+a_0\triangle c_{n2})=0 \text{ enz.}, \quad (77.15)$$

die de minimumvoorwaarden uitdrukken, een niet-triviale op-

lossing bezitten. Deze vergelijkingen zijn echter identiek met (76. 6) zoodat ook zij dan en alleen dan een van nul verschillende oplossing bezitten indien aan (76. 10) wordt voldaan

$$a_0^2 + b_0^2 = \tfrac{4}{9} R^2 (\lambda_1 - \lambda)^2. \qquad (77.\ 16)$$

De tweede vorm wordt bij vergrooting der belasting dus semi-definiet positief voor een waarde van $\lambda$ kleiner dan $\lambda_1$ waarvoor aan (77. 16) wordt voldaan. Eliminatie van $a_0$ en $b_0$ met behulp van (77. 13) geeft voor deze grenswaarde de vergelijking

$$\frac{\lambda^2}{(\lambda_1 - \lambda)^2} \varepsilon^2 h^2 = \tfrac{4}{9} R^2 (\lambda_1 - \lambda)^2$$

met de tusschen 0 en $\lambda_1$ gelegen oplossing

$$\lambda = \lambda_1 + \tfrac{3}{4} \frac{\varepsilon h}{R} - \sqrt{\tfrac{3}{2} \lambda_1 \frac{\varepsilon h}{R} + \tfrac{9}{16} \frac{\varepsilon^2 h^2}{R^2}} \qquad (77.\ 17)$$

voor positieve waarden van $\varepsilon$ en

$$\lambda = \lambda_1 - \tfrac{3}{4} \frac{\varepsilon h}{R} - \sqrt{-\tfrac{3}{2} \lambda_1 \frac{\varepsilon h}{R} + \tfrac{9}{16} \frac{\varepsilon^2 h^2}{R^2}}$$

voor negatieve waarden van $\varepsilon$; deze laatste oplossing is dezelfde als voor de positieve waarde $|\varepsilon|$ zoodat de beschouwing verder beperkt kan blijven tot positieve waarden van $\varepsilon$.

Voorts is de determinant (76. 8) voor waarden van $\lambda$ kleiner dan de grenswaarde (77. 17) ongelijk nul zoodat de bij de oplossing van (77. 9 en 10) gebruikte onderstelling is vervuld.

De derde vorm van (77. 14) is volkomen gelijkwaardig met den tweeden zoodat hij eveneens definiet positief is voor waarden van $\lambda$ die kleiner zijn dan de grenswaarde (77. 17).

Ook de vierde en vijfde vormen van (77. 14) zijn definiet positief voor kleine waarden van $\lambda$ terwijl zij voor $\lambda > \lambda_1$ ook negatieve waarden aannemen. Zij zijn semi-definiet positief indien het minimum (ter waarde nul), bepaald door de vergelijkingen

$$2R (\lambda_1 - \lambda) \triangle a_m + 3 (-b_0 \triangle a_m + a_0 \triangle c_m) = 0,$$

$$2R (\lambda_1 - \lambda) \triangle c_m + 3 (b_0 \triangle c_m + a_0 \triangle a_m) = 0,$$

ook wordt bereikt voor een van nul verschillend stel waarden $\triangle a_m$, $\triangle c_m$. Deze eisch leidt weer tot de voorwaarde (77. 16) waaruit weer de door (77. 17) bepaalde waarde van $\lambda$ volgt.

Uit het voorgaande volgt dat de tweede variatie (77. 14) definiet positief is voor waarden van $\lambda$ gelegen tusschen nul en de door (77. 17) bepaalde waarde terwijl zij voor laatstgenoemde waarde semi-definiet is. Deze waarde bepaalt derhalve den kniklast der constructie. Met



$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{k}{1 - \nu^2}} = \frac{h}{R} \frac{1}{\sqrt{3 (1 - \nu^2)}}$$

kan zij worden geschreven in den vorm

$$\lambda^* = \lambda_1 \Big[ 1 + \tfrac{3}{4} \sqrt{3 (1 - \nu^2)}\, \varepsilon + \\ - \sqrt{\tfrac{3}{4} \sqrt{3 (1 - \nu^2)}\, \varepsilon \left[ 2 + \tfrac{3}{4} \sqrt{3 (1 - \nu^2)}\, \varepsilon \right]} \Big]; \qquad (77.\ 18)$$

met $\nu = 0{,}3$ is dus

$$\lambda^* = \lambda_1 \Big[ 1 + 1{,}24\, \varepsilon - \sqrt{1{,}24 \varepsilon (2 + 1{,}24 \varepsilon)} \Big]. \qquad (77.\ 19)$$

Uit de laatste formule blijkt de groote gevoeligheid van den kniklast voor kleine afwijkingen van den zuiver cylindrischen vorm der schaal (zie fig. 9). Zoo bedraagt de kniklast voor $\varepsilon = 0{,}1$, in welk geval de amplitude der afwijkingen (77. 11) 10 % van de wanddikte is, 61% van den kniklast der zuiver cylindrische schaal, voor $\varepsilon = 0{,}5$ daalt de kniklast reeds tot 34% van zijn oorspronkelijke waarde. De experimenteel voor $R/h = 1000$ gevonden waarde van ongeveer 25% van den kniklast van den zuiveren cylinder wordt bereikt voor $\varepsilon = 0{,}9$. Dit resultaat vormt een treffend contrast met de theorie van DONNELL (lit. 22) die een ongeveer 10 maal zoo groote amplitude der afwijkingen vereischt om de experimenteele waarden te kunnen verklaren. Hoewel het natuurlijk gewenscht is het onderzoek uit te breiden tot andere vormen van afwijkingen dan (77. 11) kan thans reeds worden geconcludeerd dat de hier gegeven theorie een verklaring levert voor

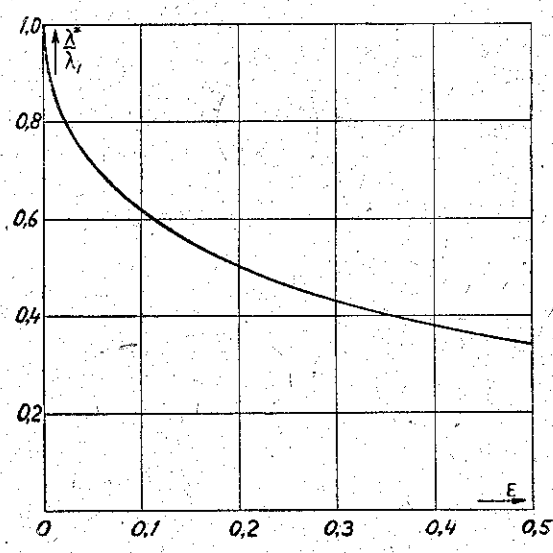



Fig. 9.

het groote verschil tusschen de theoretische en experimenteele kniklasten; ook de groote spreiding in de experimenteele resultaten wordt door de groote gevoeligheid van den kniklast voor kleine veranderingen in de grootte der afwijkingen bevredigend opgehelderd.

Bij het voorgaand onderzoek is steeds ondersteld dat in geen enkel punt der constructie de elasticiteitsgrens van het materiaal wordt overschreden. Deze onderstelling kan globaal worden gecontroleerd door berekening van de grootste absolute waarde der vervormingscomponente $\gamma_{aa}$. Door verwaarloozing van $u'^2$ en $v'^2$ en met substitutie van

$$-\lambda R\alpha + \frac{\nu}{p_0}(a_0 \cos p_0\alpha - b_0 \sin p_0\alpha) \text{ en } \nu\lambda R + a_0 \sin p_0\alpha + b_0 \cos p_0\alpha \quad (77.\,20)$$

voor de totale verplaatsingscomponenten in axiale en radiale richting gaat de vervormingscomponente van het middenvlak (77. 1) met gebruik van (77. 11) en (77. 13) over in

$$\gamma_{aao}{}^* = -2\lambda - 2\nu\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda}\varepsilon\frac{h}{R}\sin(p_0\alpha - \alpha_0) + \\ + p_0{}^2\left(\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda}\right)^2\varepsilon^2\frac{h^2}{R^2}\cos^2(p_0\alpha - \alpha_0) + \\ + 2p_0{}^2\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda}\varepsilon^2\frac{h^2}{R^2}\cos^2(p_0\alpha - \alpha_0), \qquad (77.\,21)$$

terwijl de krommingsverandering $\varrho_{aa}$ bedraagt

$$\varrho_{aa}{}^* = -p_0{}^2\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda}\varepsilon\frac{h}{R^2}\sin(p_0\alpha - \alpha_0). \qquad (77.\,22)$$

De grootste (negatieve) totale vervormingscomponente wordt bereikt voor $\sin(p_0\alpha - \alpha_0) = 1$ en voor $z = -\frac{1}{2}h$; zij bedraagt (zie (57. 9))

$$\gamma_{aa} = -2\lambda - 2\nu\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda}\varepsilon\frac{h}{R} - p_0{}^2\frac{\lambda}{\lambda_1 - \lambda}\varepsilon\frac{h^2}{R^2}. \quad (77.\,23)$$

De grootste absolute waarde wordt bereikt bij den kniklast $\lambda = \lambda^*$; door substitutie van (74. 8) wordt gevonden.

$$\gamma_{aa} = -2\lambda^* - 2\frac{\lambda^*}{\lambda_1 - \lambda^*}\left(\nu\varepsilon\frac{h}{R} + \sqrt{3(1-\nu^2)}\,\varepsilon\frac{h}{R}\right).$$

Voor $\frac{R}{h} = 1000$, $\nu = 0{,}3$ en de bij de proeven aangepaste waarden



$$\lambda^* = \tfrac{1}{4}\lambda_1 = 0{,}15\frac{h}{R}, \qquad \varepsilon = 0{,}9$$

volgt dan

$$\gamma_{aa} = -0{,}0015.$$

De specifieke rek is derhalve kleiner dan 0,001 zoodat overschrijding van de elasticiteitsgrens van het materiaal niet te verwachten is indien de cylinder uit staal of dural is vervaardigd.

## 78 – NADERE BESCHOUWING VAN EENIGE VEREENVOUDIGINGEN

In deze paragraaf zullen enkele der ingevoerde vereenvoudigingen nader worden bezien. Hierbij wordt het standpunt ingenomen dat een rechtvaardiging van reeds in de literatuur voorkomende verwaarloozingen achterwege kan blijven.

### 781 – FORMULES (73. 9)

Bij de afleiding van deze formules zijn $kp^2$ en $kn^2$ verwaarloosd ten opzichte van de eenheid. Voor de in par. 74 e.v. beschouwde knikvormen is deze verwaarloozing inderdaad gemotiveerd aangezien $kp^2$ en $kn^2$ blijkens (74. 8) niet grooter kunnen zijn dan $2\sqrt{k(1-\nu^2)}$; de toegepaste verwaarloozing is dus gelijkwaardig met de verwaarloozing van $\lambda$ ten opzichte van de eenheid (zie (74. 3)).

### 782 – FORMULES (71. 5)

Volstaan kan worden met de rechtvaardiging van deze vereenvoudigde formules voor de berekening van (75. 10). Hiertoe wordt opgemerkt dat bij gebruik van de nauwkeuriger formules (71. 4) aan den integrand van den derdegraadsterm in (71. 6) een term met den factor $k$ zou moeten worden toegevoegd. Met gebruik van de verplaatsingen (74. 10 t/m 12) blijkt de orde van grootte van het belangrijkste deel van dezen term te zijn *kww''*. Met gebruik weer van (74. 10) wordt dan in (75. 10) een bijdrage gevonden van den vorm

$$\frac{2\pi l}{R^2}kp_0{}^4 a_0 a_{n1} a_{n2} \text{ enz.}$$

of door toepassing van (74. 8)

$$\frac{2\pi l}{R^2}4(1-\nu^2)a_0 a_{n1} a_{n2} \text{ enz.} \qquad (78.\,1)$$

Omdat $p_{n1}{}^2$ en $p_{n2}{}^2$ slechts groot kunnen zijn ten opzichte van de eenheid indien $n$ groot is, zijn termen van den vorm (78. 1) verwaarloosbaar ten opzichte van (75. 10).

783 – DE VERWAARLOOZING VAN RANDINVLOEDEN

Deze verwaarloozing wordt het beste gemotiveerd door de proeven, die geen afhankelijkheid van het knikverschijnsel van de lengte van den cylinder of van de randvoorwaarden vertoonen. Doch ook theoretisch kan zij aannemelijk worden gemaakt.

De invloed van randvoorwaarden is het eerst in par. 74 buiten beschouwing gelaten, waar $p$ als continu variabele werd opgevat; bovendien werd hier $p^2$ zoo groot gesteld dat de eenheid ten opzichte van $p^2$ kon worden verwaarloosd. Met deze onderstellingen werden bij den kniklast infinitesimaal naburige evenwichtstoestanden gevonden voor elke aan (74. 5) voldoende waarde van $n$ met de twee bijbehoorende waarden $p_{n1,2}$ (74. 4).

In werkelijkheid zal de determinantvergelijking (73. 7) de kleinste waarde der oplossing $\lambda_1$ in het algemeen bezitten voor een geheel bepaald stel waarden $n^*$ en $p^* = i\pi\frac{R}{l}$. Deze waarde $p^*$ zal natuurlijk niet belangrijk afwijken van de door (74. 4) bepaalde waarde $p_{n1}^*$ of $p_{n2}^*$, die bij $n = n^*$ behooren. Verder zal verg. (73. 7) voor andere waarden van $n$ en weinig van de bijbehoorende waarden (74. 4) verschillende waarden van $p$ een oplossing bezitten die zeer weinig van $\lambda_1$ afwijkt. In werkelijkheid wordt de door de vereenvoudigingen verkregen algemeene oplossing (74. 10) bij $\lambda = \lambda_1$ opgelost in een stel enkelvoudige oplossingen bij onderling zeer weinig verschillende waarden van $\lambda$ ($\lambda_i$). Het gevolg hiervan is dat de in par. 75 bepaalde, elk uit een drietal knikvormen samengestelde derdegraadstermen ontbreken. Het evenwicht in den kniktoestand behoeft dan niet instabiel te zijn. Op de naburige evenwichtstoestanden zal dit echter slechts van invloed zijn indien $|\lambda_1 - \lambda|$ veel kleiner is dan $|\lambda_i - \lambda|$ met $i = 2, 3$ enz. en dit is alleen het geval voor een zeer kleine omgeving van den kniklast. Hetzelfde geldt voor het onderzoek van den invloed van kleine afwijkingen; alleen wanneer bij zeer kleine afwijkingen de belasting den kniklast van het model zeer dicht kan naderen is een ander elastisch gedrag te verwachten. Het behoeft dus niet te verwonderen dat hiervan bij de werkelijk voorkomende afwijkingen niets wordt opgemerkt.

784 – DE VERWAARLOOZING DER VIERDEGRAADSTERMEN

De toelaatbaarheid van de verwaarloozing der vierdegraadstermen kan globaal worden gecontroleerd door berekening van (72. 10) en vergelijking met de overige bijdragen in de energie. Deze berekening wordt eerst uitgevoerd voor een bijzonder geval der naburige evenwichtstoestanden en wel

$$\left.\begin{aligned} &a_0 = a_{n1,2} = b_{n1,2} = c_{n1,2} = d_{n1,2} = a_m = b_m = d_m = 0, \\ &b_0 = \tfrac{2}{3}R(\lambda - \lambda_1)\ , \qquad c_m = \tfrac{8}{3}R(\lambda - \lambda_1)\ ; \end{aligned}\right\} \tag{78. 2}$$



deze coëfficiënten voldoen inderdaad aan (76. 10, 14 en 18). De belangrijkste termen van den integrand van (72. 10) zijn

$$w'^4 + 2w'^2 w^{\cdot 2} + w^{\cdot 4} = (w'^2 + w^{\cdot 2})^2.$$

Substitutie van (74. 10) met (78. 2) geeft voor dezen integrand

$$m^4\left[(2b_0 \sin 2m\alpha + c_m \sin m\alpha \cos m\beta)^2 + c_m^2 \cos^2 m\alpha \sin^2 m\beta\right]^2 =$$
$$= m^4\Big[2b_0^2 + \tfrac{1}{2}c_m^2 - 2b_0^2 \cos 4m\alpha +$$
$$+ 2b_0 c_m (\cos m\alpha - \cos 3m\alpha)\cos m\beta - \tfrac{1}{2}c_m^2 \cos 2m\alpha \cos 2m\beta\Big]^2.$$

Uitvoering der integratie geeft

$$\overline{P}_4^0(a_j) = P_4^0[\Sigma a_j u_j] = \frac{2\pi l}{R^2}\frac{1}{R}m^4(6b_0^4 + 4b_0^2 c_m^2 + \tfrac{5}{16}c_m^4).$$

Door substitutie van (78. 2) volgt hieruit tenslotte

$$\overline{P}_4^0(a_j) = \frac{2\pi l}{R^2}\tfrac{800}{27}m^4 R^3(\lambda_1 - \lambda)^4. \tag{78. 3}$$

Voor de derdegraadstermen wordt met (78. 2) gevonden

$$\overline{P}_3(a_j) = \frac{2\pi l}{R^2}(1 - \nu^2)\tfrac{64}{9}m^2 R^3(\lambda - \lambda_1)^3, \tag{78. 4}$$

zoodat de vierdegraadstermen inderdaad kunnen worden verwaarloosd indien

$$|\tfrac{25}{6}m^2(\lambda_1 - \lambda)| \ll 1 - \nu^2.$$

Met (74. 3, 8 en 9) luidt deze eisch

$$\left|1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right| \ll \tfrac{12}{25}(1 - \nu^2). \tag{78. 5}$$

Uit deze voorwaarde blijkt dat de verwaarloozing der vierdegraadstermen de geldigheid van het onderzoek van par. 76 beperkt tot belastingen in de naaste omgeving van den kniklast.

Bij het onderzoek van par. 77 zijn de omstandigheden, althans voor den beschouwden vorm der afwijkingen (77. 11), veel gunstiger. De radiale verplaatsingscomponente

$$w = a_0 \sin p_0 \alpha + b_0 \cos p_0 \alpha$$

kan met gebruik van (77. 13) worden geschreven in den vorm

$$w = \sqrt{a_0^2 + b_0^2}\sin(p_0\alpha - \alpha_0)$$

zoodat de voornaamste bijdrage van (72. 10) bedraagt

$$\overline{P}_4^{\,0}(a_j) = \frac{1}{R^2}\int\int p_0^4 (a_0^2 + b_0^2)^2 \cos^4(p_0\alpha - \alpha_0)\, d\alpha\, d\beta = \frac{2\pi l}{R^2}\frac{3}{8}\frac{p_0^4}{R}(a_0^2 + b_0^2)^2. \qquad (78.6)$$

In dit geval ontbreken de derdegraadstermen; de tweedegraadstermen bedragen

$$\overline{P}_2'(a_j) = \frac{2\pi l}{R^2}(1-\nu^2)\,2Rp_0^2(\lambda_1 - \lambda)(a_0^2 + b_0^2). \qquad (78.7)$$

De vierdegraadstermen kunnen derhalve worden verwaarloosd indien

$$\left|\tfrac{3}{16}p_0^2\frac{a_0^2 + b_0^2}{R^2(\lambda_1 - \lambda)}\right| \ll 1 - \nu^2.$$

Na substitutie van (77. 13) en gebruik van

$$p_0^2 = 2\sqrt{\frac{1-\nu^2}{k}} = \frac{2}{\lambda_1}, \quad \frac{h}{R} = \lambda_1\sqrt{3(1-\nu^2)}$$

luidt deze eisch

$$\left|\tfrac{9}{8}\varepsilon^2\frac{\lambda_1\lambda^2}{(\lambda_1 - \lambda)^3}\right| \ll 1. \qquad (78.8)$$

De grootste waarde van het linkerlid van (78. 8) wordt voor den kniklast bereikt ($\lambda = \lambda^*$). Met gebruik van (77. 16) in plaats van (77. 13) moet dan gelden

$$1 - \frac{\lambda^*}{\lambda_1} \ll 6(1-\nu^2). \qquad (78.9)$$

Aan deze voorwaarde wordt redelijk voldaan zoodat er althans voor den in par. 77 beschouwden vorm der afwijkingen geen aanleiding is de theorie te verbeteren.

# AANHANGSEL

Voor zoover den schrijver bekend is wordt in de literatuur (bv. lit. 45) de oplossing der vergelijking (61. 20)

$$\vartheta'' + \pi^2\lambda\sin\vartheta = 0 \qquad (1)$$

met de randvoorwaarden (61. 21) en (61. 22)

$$\xi = 0: \ \vartheta' = -\pi^2\varepsilon\lambda; \qquad \xi = \tfrac{1}{2}: \ \vartheta = 0 \qquad (2)$$

alleen bepaald voor het geval dat $\vartheta_0$ (de waarde van $\vartheta$ voor $\xi = 0$) hetzelfde teeken heeft als $\varepsilon$. Voor par. 615 is het echter ook noodig de eventueel voorkomende oplossingen bij tegengesteld teeken van $\vartheta_0$ en $\varepsilon$ te kennen; hierbij wordt evenals voorheen $\varepsilon$ positief gesteld.

Vergelijking (1) kan worden geschreven

$$\frac{d}{d\vartheta}(\tfrac{1}{2}\vartheta'^2) + \pi^2\lambda\sin\vartheta = 0,$$

waaruit door integratie met gebruik van (2) volgt

$$\vartheta'^2 = \pi^4\varepsilon^2\lambda^2 + 2\pi^2\lambda(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0). \qquad (3)$$

Blijkens (2) is $\vartheta'$ voor $\xi = 0$ negatief. Omdat $\vartheta'$ een continue functie van $\xi$ moet zijn volgt dan uit (3)

$$\vartheta' = -\pi\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)} \qquad (4)$$

zoolang de onder het wortelteeken voorkomende uitdrukking positief blijft.

Eerst wordt het geval beschouwd dat $\vartheta_0$ *positief* is; (4) geldt dan zeker voor tusschen 0 en $\vartheta_0$ gelegen waarden van $\vartheta$. Wordt de beschouwing nog beperkt tot gebogen staafvormen voor welke $\vartheta$ nul is alleen voor $\xi = \frac{1}{2}$ dan levert integratie van (4)

$$\int_{\vartheta_0}^{0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}} = -\tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\lambda};$$

hiervoor kan worden geschreven

$$\int_{0}^{\vartheta_0}\frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2\lambda\varepsilon^2 + \sin^2\frac{1}{2}\vartheta_0 - \sin^2\frac{1}{2}\vartheta}} = \pi\sqrt{\lambda}. \qquad (5)$$

Ondersteld wordt dat $\vartheta_0 < \pi$ nog zoo klein is dat

$$\tfrac{1}{4}\pi^2 \lambda \varepsilon^2 + \sin^2 \tfrac{1}{2}\vartheta_0 = k^2 < 1. \qquad (6)$$

Wegens $|\tfrac{1}{2}\vartheta| < \tfrac{1}{2}\vartheta_0 < \tfrac{1}{2}\pi$ is het dan steeds mogelijk te stellen

$$\sin\theta = \frac{1}{k}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta \quad (0 \leqq \theta \leqq \tfrac{1}{2}\pi). \qquad (7)$$

Hiermede gaat (5) over in

$$\int_0^{\varphi} \frac{2k\,\frac{\cos\theta}{\cos\frac{1}{2}\vartheta}\,d\theta}{\sqrt{k^2 - k^2\sin^2\theta}} = 2\int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\theta}} = \pi\sqrt{\lambda} \qquad (8)$$

met

$$\sin\varphi = \frac{1}{k}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_0 \quad (0 \leqq \varphi \leqq \tfrac{1}{2}\pi). \qquad (9)$$

De in (8) voorkomende integraal is de elliptische integraal van de eerste soort $F(k, \varphi)$.

De dimensielooze doorbuiging $\beta$ in het midden van de staaf is bepaald door

$$\beta = \int_0^{\frac{1}{2}} -\sin\vartheta\, d\xi = \int_{\vartheta_0}^{0} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\pi\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\sqrt{\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}\Big|_{\vartheta=\vartheta_0}^{\vartheta=0} = \varepsilon - \frac{2k}{\pi\sqrt{\lambda}}. \qquad (10)$$

Uit (6), (9) en (10) volgt

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_0} = \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2k}\varepsilon = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \beta},$$

terwijl uit (8) en (10) volgt

$$k = (\varepsilon - \beta)\, F(k, \varphi).$$

Het verband tusschen $\beta$ en $\lambda$ wordt dan gegeven door de parametervoorstelling

$$\cos\varphi = \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \beta}, \quad k = (\varepsilon - \beta)\, F(k, \varphi), \quad \sqrt{\lambda} = \frac{2}{\pi} F(k, \varphi). \qquad (11)$$



Blijft nog te bezien in hoeverre aan de onderstelling (6) is voldaan. Blijkens (11) vormt de onvervormde onbelaste toestand $\beta = 0$, $\lambda = 0$ een evenwichtstoestand met $k = 0$ en $\varphi = 0$. De onderstelling (6) zal derhalve worden vervuld voor alle belastingen die beneden de grenswaarde liggen waarvoor $k$ voor de eerste maal 1 wordt. Voor $k = 1$ kan $F(k, \varphi)$ in elementaire functies worden uitgedrukt

$$F(1, \varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}} = \ln\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi).$$

De bij dit grensgeval behoorende waarde van $\varphi$ wordt blijkens de eerste twee betrekkingen (11) bepaald door

$$\cos\varphi = \varepsilon \ln\operatorname{tg}(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{2}\varphi). \qquad (12)$$

Voor kleine waarden van $\varepsilon$ heeft (12) een oplossing die weinig van $\frac{1}{2}\pi$ verschilt; wegens de laatste betrekking (11) is $\lambda$ dan groot. Zoo is voor het in par. 615 behandelde voorbeeld $\varepsilon = 0{,}01$, $\varphi = 0{,}975\,\frac{\pi}{2}$ en $\lambda = 6{,}25$. Het grensgeval valt derhalve buiten het in fig. 4 beschouwde gebied van $\lambda$-waarden.

Vervolgens wordt het geval onderzocht dat $\vartheta_0$ *negatief* is. Voor kleine waarden van $\xi$ volgt uit (2) dat $\vartheta'$ negatief is. Om aan de voorwaarde $\vartheta = 0$ in het midden van de staaf te kunnen voldoen moet voor een waarde $\xi_1$ (tusschen 0 en $\frac{1}{2}$) $\vartheta'$ van teeken veranderen. Dit zal het geval zijn indien de uitdrukking onder het wortelteeken in (4) nul wordt daar blijkens (1) $\vartheta''$ in dat punt positief is. De integratie van (3) moet voor $\xi < \xi_1$ en $\xi > \xi_1$ derhalve afzonderlijk worden uitgevoerd.

Zij $\vartheta_1$ de waarde van $\vartheta$ voor $\xi = \xi_1$ dan volgt analoog met (5)

$$\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_0} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\frac{1}{4}\pi^2\lambda\varepsilon^2 + \sin^2\frac{1}{2}\vartheta_0 - \sin^2\frac{1}{2}\vartheta}} = 2\pi\sqrt{\lambda}\,\xi_1, \qquad (13)$$

waarin $\vartheta_1$ bepaald is door

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_1 = \tfrac{1}{4}\pi^2\lambda\varepsilon^2 + \sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_0 = k^2. \qquad (14)$$

Het bestaan van een oplossing met negatieve beginwaarde $\vartheta_0$ impliceert blijkens (14) dat $k \leqq 1$ is.

Door de substitutie

$$\sin\theta = \frac{1}{k}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta \quad (0 \geqq \theta \geqq -\tfrac{1}{2}\pi)$$

$$\text{met } \sin\theta_1 = \frac{1}{k}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_1 = -1, \text{ dus } \theta_1 = -\tfrac{1}{2}\pi$$

gaat (13) over in

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \pi\sqrt{\lambda}\,\xi_1, \qquad (15)$$

waarin $\varphi$ is bepaald door

$$\sin\varphi = -\frac{1}{k}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta_0 \quad (0 \leqq \varphi < \tfrac{1}{2}\pi). \qquad (16)$$

In het interval $\xi_1 < \xi < \frac{1}{2}$ geldt

$$\vartheta = \pi\sqrt{\lambda}\,\sqrt{\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)},$$

waaruit door integratie volgt

$$\int_{\vartheta_1}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{\tfrac{1}{4}\pi^2\lambda\varepsilon^2 + \sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_0 - \sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta}} = 2\pi\sqrt{\lambda}\,(\tfrac{1}{2} - \xi_1).$$

Met behulp van dezelfde substitutie kan hiervoor worden geschreven

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = \pi\sqrt{\lambda}\,(\tfrac{1}{2} - \xi_1). \qquad (17)$$

Door optelling van (15) en (17) wordt $\xi_1$ geëlimineerd; het resultaat is

$$2F(k, \tfrac{1}{2}\pi) - F(k, \varphi) = \tfrac{1}{2}\pi\sqrt{\lambda}\ , \qquad (18)$$

waarin $F(k, \frac{1}{2}\pi)$ de volledige elliptische integraal van de eerste soort is.

De dimensielooze doorbuiging in het midden der staaf is bepaald door



$$\beta = \int_0^{\frac{1}{2}} -\sin\vartheta\, d\xi = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_1} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\pi\sqrt{\lambda}\,\sqrt{\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}} +$$

$$- \int_{\vartheta_1}^{0} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\pi\sqrt{\lambda}\,\sqrt{\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}} =$$

$$= -\frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\sqrt{\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}\Big|_{\vartheta=\vartheta_0}^{\vartheta=\vartheta_1} +$$

$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\sqrt{\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 2(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)}\Big|_{\vartheta=\vartheta_1}^{\vartheta=0}. \qquad (19)$$

Nu is wegens (14)

$$\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 2(\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_0) = 4k^2 - 4\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_1 = 0\ ,$$

zoodat uit (19) volgt

$$\beta = \varepsilon + \frac{1}{\pi\sqrt{\lambda}}\sqrt{\pi^2\lambda\varepsilon^2 + 4\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_0} = \varepsilon + \frac{2k}{\pi\sqrt{\lambda}}\ . \qquad (20)$$

Uit (14), (16) en (20) volgt

$$\cos\varphi = \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_0} = \frac{\pi\sqrt{\lambda}}{2k}\ .\ \varepsilon = \frac{\varepsilon}{\beta - \varepsilon}\ ,$$

terwijl uit (18) en (20) volgt

$$k = (\beta - \varepsilon)\left\{2F(k, \tfrac{1}{2}\pi) - F(k, \varphi)\right\}\ .$$

Het verband tusschen $\beta$ en $\lambda$ wordt dan gegeven door de parametervoorstelling

$$\cos\varphi = \frac{\varepsilon}{\beta - \varepsilon}\ ,\quad k = (\beta - \varepsilon)\left\{2F(k, \tfrac{1}{2}\pi) - F(k, \varphi)\right\}\ ,$$

$$\sqrt{\lambda} = \frac{2}{\pi}\left\{2F(k, \tfrac{1}{2}\pi) - F(k, \varphi)\right\}. \qquad (21)$$

Uit de laatste betrekking volgt

$$\sqrt{\lambda} \geqq \frac{2}{\pi}F(k, \tfrac{1}{2}\pi) \geqq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 1$$

zoodat (21) zeker geen oplossing bezit voor $\lambda < 1$.

Voor het geval van de centrisch belaste staaf ($\varepsilon = 0$) leveren, zooals te verwachten was, de betrekkingen (11) en (21) hetzelfde resultaat op

$$\varphi = \frac{\pi}{2}\ , \quad k = \mp \beta F\,(k, \tfrac{1}{2}\pi)\ , \quad \sqrt{\lambda} = \frac{2}{\pi} F\,(k, \tfrac{1}{2}\pi)\,. \qquad (22)$$

De numerieke behandeling van (11) en (21) veroorzaakt geen moeilijkheden. Na aanneming van een waarde van $\varphi$ kan uit de eerste dezer betrekkingen $\beta$ worden berekend; vervolgens wordt de tweede betrekking, die een transcendente vergelijking voor $k$ vormt, opgelost; de derde betrekking levert de bijbehoorende waarde van $\lambda$.

Voor $\varepsilon = 0{,}01$ is het resultaat in fig. 4 weergegeven (kromme Ia). De tak van negatieve $\beta$-waarden is afkomstig van (11), de tak van positieve $\beta$-waarden behoort bij (21).

De numerieke behandeling van (22) is nog eenvoudiger; na aanneming van een waarde van $k$ wordt een bijbehoorend stel waarden van $\beta$ en $\lambda$ onmiddellijk gevonden. Het resultaat is de kromme I van fig. 4.

# LITERATUURLIJST


1. L. Euler. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, Additamentum I, De curvis elasticis, Lausanne et Génève (1744); vertaald door H. Linsenbarth opgenomen in „Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften", deel 175, Leipzig (1910).
2. W. Thomson. Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells and spheroids of incompressible liquid. Appendix, Equations of equilibrium of an elastic solid deduced from the principle of energy, Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., vol. 153 (1863), p. 610. Opgenomen in W. Thomson, Mathematical and physical papers, vol. III, London (1910), p. 386 en in W. Thomson and P. G. Tait, Treatise on natural philosophy, vol. I, part 2, appendix C, Cambridge (1883).
3. G. H. Bryan. On the stability of elastic systems. Proc. Cambr. Phil. Soc., vol. VI (1888), p. 199.
4. R. V. Southwell. On the general theory of elastic stability. Phil. Trans. Roy. Soc. Lond., ser. A, vol. 213 (1913), p. 187.
5. C. B. Biezeno and H. Hencky. On the general theory of elastic stability. Proc. Acad. Sci. Amst., vol. 31 (1928), p. 569; vol. 32 (1929), p. 444. Zie ook C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin (1939), Kap. I, § 5.
6. H. Reissner. Energiekriterium der Knicksicherheit, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 5 (1925), p. 475.
7. E. Trefftz. Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichts aus der Elastizitätstheorie endlicher Deformationen. Proc. 3. Int. Congr. Appl. Mech., vol. III, Stockholm (1930), p. 44.
8. E. Trefftz. Zur Theorie der Stabilität des elastischen Gleichgewichts. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 13 (1933), p. 160.
9. K. Marguerre. Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der energetischen Methode. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 18 (1938), p. 57. Über die Anwendung der energetischen Methode auf Stabilitätsprobleme. Jahrbuch 1938 der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt, p. 252.
10. R. Kappus. Zur Elastizitätstheorie endlicher Verschiebungen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 19 (1939), p. 271 en 344.
11. M. Biot. Theory of elasticity with large displacements and rotations. Proc. 5. Int. Congr. Appl. Mech., Cambridge U.S.A. (1938), p. 117.
12. M. Biot. Théorie de l'élasticité du second ordre avec applications à la théorie du flambage. Ann. Soc. Scient. Bruxelles, t. LIX, série I (1939), p. 104.
13. M. Biot. Non-lineair theory of elasticity and the linearized case for a body under initial stress. Phil. Mag., ser. 7. vol. XXVII (1939), p. 468.
14. M. Biot. Elastizitätstheorie zweiter Ordnung mit Anwendungen. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech. Bd. 20 (1940), p. 89.
15. G. Green. On the propagation of light in crystallized media. Trans. Cambr. Phil. Soc. vol. VII (1842), p. 121; zie ook G. Green, Mathematical and physical papers, London (1871), p. 248, 295.
16. G. Kirchhoff. Über die Gleichungen des Gleichgewichts eines elastischen Körpers bei nicht unendlich kleinen Verschiebungen seiner Theile. Sitz. ber. der K. Akad. der Wiss. Wien, math.-phys. Kl., Bd. 9 (1852), p. 762.
17. G. Hamel. Elementare Mechanik, Leipzig–Berlin (1911), § 60.
18. F. D. Murnaghan. Finite deformations of an elastic solid. Am. Journ. Math., vol. 59 (1937), p. 235.

19. E. TREFFTZ und K. MARGUERRE. Über die Tragfähigkeit eines längsbelasteten Plattenstreifens nach Überschreiten der Beullast. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 17 (1937), p. 85.
20. K. MARGUERRE. Die mittragende Breite der gedrückten Platte. Luftfahrtforschung, Bd. 14 (1937), p. 121.
21. W. FLÜGGE. Die Stabilität der Kreiszylinderschale. Ing. Arch., Bd. 3 (1932), p. 463.
22. L. H. DONNELL. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending. Trans. Am. Soc. Mech. Eng., vol. 56 (1934), p. 795.
23. H. L. COX. Stress analysis of thin metal construction. J. Roy. Aer. Soc., vol. XLIV (1940), p. 231.
24. T. VON KÁRMÁN and HSUE-SHEN TSIEN. The buckling of spherical shells by external pressure. J. Aeron. Sci., vol. 7 (1939), p. 43.
25. T. VON KÁRMÁN, L. G. DUNN, HSUE-SHEN TSIEN. The influence of curvature on the buckling characteristics of structures. J. Aeron. Sci., vol. 7 (1940), p. 276.
26. A. E. H. LOVE. Treatise on the mathematical theory of elasticity, 4th ed., Cambridge (1927), arts. 23—27.
27. C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL. Technische Dynamik, Berlin (1939), Kap. I, § 2.
28. R. COURANT und D. HILBERT. Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 2 Aufl., Berlin (1931), Kap. IV, § 1, Nr. 4.
29. Idem, Kap. VI, § 1, Nr. 1.
30. Idem, Kap. IV, § 2, Nr. 2.
31. A. MAYER. Zur Theorie der Maxima und Minima der Functionen von $n$ Variabeln. Verh. Kön. Ges. Wiss. Leipzig, math.-phys. Cl., Bd. 44 (1892), p. 54.
32. J. HADAMARD. Leçons sur le calcul des variations, t. I, Paris (1911), nos. 39—41.
33. F. SCHUH. Beknopte hoogere algebra, Groningen (1926), p. 71, vraagstuk 57.
34. C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL. Technische Dynamik, Berlin (1939), Kap. I, § 3, Nr. 14.
35. W. FLÜGGE. Statik und Dynamik der Schalen, Berlin (1934), Kap. VI.
36. A. E. H. LOVE. Mathematical theory of elasticity, 4th ed., Cambridge (1927), ch. XXIV.
37. O. T. BÜRKLEN und F. RINGLEB. Mathematische Formelsammlung, 3 Aufl., Berlin (1936), § 106.
38. A. E. H. LOVE. Mathematical theory of elasticity, 4th ed., Cambridge (1927), art. 18.
39. C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL. Technische Dynamik, Berlin (1939), Kap. I, § 5, Nr. 19.
40. C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL. Technische Dynamik, Berlin (1939), Kap. VII, Nr. 1.
41. C. B. BIEZENO. Über eine Stabilitätsfrage beim gelenkig gelagerten, schwachgekrümmten Stabe. Proc. Acad. Sci. Amsterdam, vol. 32 (1929), p. 990.
Das Durchschlagen eines schwachgekrümmten Stabes. Zeitschr. für angew. Math. u. Mech., Bd. 18 (1938), p. 21.
Über die Bestimmung der Durchschlagkraft einer schwachgekrümmten kreisförmigen Platte. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 15 (1935), p. 10.
Zie ook C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin (1939), Kap. VII, § 1, Nr. 11 u. 12, § 3, Nr. 28.
42 R. VON MISES. Ausbiegung eines auf Knicken beanspruchten Stabes, Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 4 (1924), p. 435. Zie ook P. Frank und R. von Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. I, 2. Aufl., Braunschweig (1930), p. 467 en C. B. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin (1939), Kap. VII, § 1, Nr. 4.



43. S. TIMOSHENKO. Theory of elastic stability, New York (1936), art. 4.
44. M. BORN. Untersuchungen über die Stabilität der elastischen Linie in Ebene und Raum, Göttingen (1906).
45. A. SCHLEUSNER. Strenge Theorie der Knickung und Biegung, 1. Teil, Leipzig (1937).
46. F. J. PLANTEMA en W. K. G. FLOOR. De meedragende breedte van vlakke en weinig gekromde platen, Rapport S 248 van het Nationaal Luchtvaartlaboratorium, Amsterdam (1941).
47. S. TIMOSHENKO. Theory of elastic stability, New York (1936), art. 63.
48. R. COURANT und D. HILBERT. Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, 2. Aufl., Berlin (1931), Kap. II, § 1, Nr. 2.
49. S. TIMOSHENKO. Theory of elastic stability, New York (1936), arts. 79 und 84.
50. W. FLÜGGE. Statik und Dynamik der Schalen, Berlin (1934), Kap. IX.
51. T. VON KÁRMÁN and HSUE-SHEN TSIEN. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression. J. Aeron. Sci., vol. 8 (1941), p. 303.
52. C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL. Technische Dynamik, Berlin (1939), Kap. VII, § 1, Nr. 10.
53. J. A. HARINGX. On the buckling and the lateral rigidity of helical compression springs. Proc. Ned. Ak. Wet., vol. 45 (1942), p. 533.

# ON THE STABILITY OF ELASTIC EQUILIBRIUM

## Summary

The theory of elastic stability has already been the subject of numerous investigations. Of the researches dealing with the general theory those made by BRYAN (ref. 3), SOUTHWELL (ref. 4), BIEZENO and HENCKY (ref. 5), TREFFTZ (ref. 7, 8), MARGUERRE (ref. 9), KAPPUS (ref. 10) and BIOT (ref. 11—14) may be mentioned. For a survey of the many special problems that have been discussed reference may be made to TIMOSHENKO's well-known book (ref. 43).

Hitherto the general theories of stability have been restricted, however, to the investigation of neutral equilibrium; they aim particularly at the determination of the stability limit. The phenomena occurring on reaching and possibly on surpassing this limit were left out of account. This restriction as to the extent of the investigations is caused by two circumstances. First of all there must be mentioned the great mathematical difficulties that obstruct the theoretical treatment of elastic behaviour after surpassing the stability limit. Whereas the investigation of states of neutral equilibrium is still possible by means of linear differential equations, the equations describing elastic behaviour after surpassing the stability limit are no longer linear. Moreover engineering has long been satisfied with the knowledge of the stability limit (critical or buckling load). The recognized principle, based on considerations of safety, was that the load on a structure should always be kept below this limit so that an investigation of the phenomena occurring above this limit seemed superfluous.

However, it has been known for a long time that some structures, e.g. a flat plate supported along its edges and subjected to thrust in its plane, are capable of sustaining considerably larger loads than the buckling one without exceeding the elastic limit at any point of the structure; in modern engineering, especially in aircraft engineering where saving on structural weight is of paramount importance, these higher loads are actually allowed. The theoretical treatment of this plate problem has among others been given by MARGUERRE and TREFFTZ (ref. 19, 20). Their results agree very well with experience if the excess of the buckling load is not too great.

On the other hand, it has been noted that the experimentally



determined buckling loads of some shell structures, e.g. axially compressed thin-walled cylinders, lie considerably below the theoretical stability limit. Moreover the experimental results are widely divergent. FLÜGGE's (ref. 21) and DONNELL's (ref. 22) explanation, based on initial deviations of the test specimen from the true cylindrical form in consequence of which the yield point of the material would soon be reached, is called in question by COX (ref. 23) and VON KÁRMÁN and TSIEN (ref. 24). The latter authors remark that the initial deviations should have to amount to a multiple of the wall thickness; such deviations could scarcely have escaped the notice of the investigators. Besides COX as well as VON KÁRMÁN and TSIEN point out that FLÜGGE's and DONNELL's explanation requires a gradual appearance of buckles with increasing load whereas in the experiments a sudden, almost explosive buckling occurs; neither does this explanation satisfactorily account for the great divergency of the experimental results. COX, on the other hand, has suggested a strut model to illustrate the possibility that the behaviour of the cylinder may be explained purely elastically; in a somewhat modified form this model has also been suggested by VON KÁRMÁN, DUNN and TSIEN (ref. 25).

From the above-mentioned examples it clearly appears that the general theories of stability, framed so far, do not suffice. They have to be completed in such a way that the so divergent behaviour of various structures in the case of loads in the neighbourhood of the theoretical buckling load can be described as well. The present treatise aims at such an extension.

The loads acting upon a structure can usually be represented by the product of a unit load system and a load parameter $\lambda$, as yet indeterminate. It is then required to find the states of equilibrium that occur at a given value of $\lambda$ and also to investigate the stability of these states. Of particular importance in engineering is the state of equilibrium that is obtained continuously from the unstrained state by monotonously increasing $\lambda$ from zero. For sufficiently small values of $\lambda$ this so-called fundamental state is always stable, in agreement with KIRCHHOFF's theorem on the uniqueness of solution (cf. ref. 39 and art. 31 of the present paper). On the other hand, in many cases the fundamental state becomes unstable on exceeding a critical value $\lambda_1$. The load belonging to this value $\lambda_1$, for which the equilibrium is at the stability limit and hence neutral as well (cf. ref. 10), is called the buckling or critical load. Consequently at this buckling load there exist, in addition to the fundamental state, neighbouring infinitesimally deviating states of equilibrium. It is then to be expected that likewise at loads, differing slightly from the buckling load, neighbouring states of equilibrium exist that are obtained from the

fundamental state by means of small but now finite displacements [1]). Next the presumption arises that the discrepancy in elastic behaviour of various structures in the case of loads in the neighbourhood of the critical load is connected with a discrepancy in character of the possible states of equilibrium going with these loads. From a preliminary tentative investigation it appeared that the character of these states of equilibrium is essentially dependent on the stability of equilibrium at the buckling load, i.e. on the question whether the limiting case of equilibrium at the critical load should still be reckoned among the stable or already among the unstable states of equilibrium [2]).

First of all therefore the equilibrium at the stability limit had to be subjected to a closer examination. Before entering upon this, however, it seemed advisable to give a brief survey of the theory of elasticity for finite deformations (ch. 1); for the investigation of stability belongs essentially to the domain of the non-linear theory of elasticity.

Following THOMSON (ref. 2) the general equations of motion are derived by means of HAMILTON's principle, using the elastic potential or strain energy function to describe the elasticity of the body. The equations of equilibrium are obtained by putting zero all inertia forces. They are in complete agreement with KAPPUS's equations (ref. 10), obtained by equating to zero the resultant of all forces acting upon an element of the elastic body.

In chapter 2 the general theory of stability is dealt with. Art. 21 gives a precise definition of stability by means of the energy criterion, while art. 22 treats of its practical application. In accordance with TREFFTZ it leads to two conditions of stability. The first condition is that the first variation of the potential energy is zero for any kinematically possible variation of displacement; it is identical with the well-known principle of virtual displacements. The second condition requires that the second variation of the energy cannot be negative for any kinematically possible variation of displacement. After a reproduction of TREFFTZ's treatment of the latter condition in art. 22, some assumptions introduced along with it are looked into more closely in art. 23; it appears that these assumptions are justified for all practical purposes. In the following articles the equilibrium at the stability limit is considered

[1]) For an illustration of this possibility see fig. 1*a-d* (p. 67). Here *a* is a measure of the displacements from the fundamental state to a neighbouring state of equilibrium.

[2]) Some possibilities for neighbouring states of equilibrium are given in figs. 1*a-d* (p. 67). Figs. 1*a, b, d* relate to cases in which the equilibrium at the buckling load is unstable, fig. 1 *c* relates to a case in which this equilibrium is stable. The characteristic difference is that neighbouring states of equilibrium in the former cases do exist at loads below the buckling load whereas in the latter case they do not.



in more details (arts. 24—27). It appears that the equilibrium at the stability limit is "generally" unstable (art. 25). In art. 28 the method of investigation developed here is connected with MAYER's researches (ref. 31) on minima of functions of a finite number of variables. Finally in art. 29 some formulae are given that are necessary for the application of the general theory of stability to problems of elasticity.

In chapter 3 the states of equilibrium at loads in the neighbourhood of the buckling load are investigated. The approximative method used to this purpose gives better results accordingly as the load differs less from the critical one. The character of these states actually appears to be governed by the stability at the buckling load (arts. 35, 36). However, a restriction regarding the type of problems treated must be made that is inherent to the method of investigation. This method exclusively enables to deal with buckling problems corresponding with a so-called point of bifurcation; so-called oilcanning problems [1]) are left out of account (art. 37). Finally in art. 38 an extension of the theory to loads further removed from the buckling load is discussed. The most important result of chapter 3 is that with stability of the equilibrium at the critical load (the buckling or critical state) neighbouring states of equilibrium exist only for larger loads; these states are stable. Therefore, apart from the possibility of exceeding the elastic limit of the material, larger loads than the buckling load can be sustained. With an unstable buckling state, on the contrary, neighbouring states of equilibrium do occur at loads smaller than the buckling load; these states are unstable. Though in some cases with unstable buckling state there also exist stable states of equilibrium at larger loads, these loads can only be reached by passing the unstable buckling state so that their practical importance is, to say the least of it, doubtful.

The theory of chapter 3 does not yet give an explanation of the fact that for some structures the experimental buckling loads are considerably smaller than the theoretical buckling load. To come to such an explanation the influence of small deviations of a real structure from the simplified model, designed to represent the structure, is considered in chapter 4. The necessity of this consideration is demonstrated on the basis of the example of the prismatic bar subjected to combined bending and compression. The method of investigation is similar to that of chapter 3, the only modification being the allowance for small deviations; the smallness of these deviations is expressed by neglecting all second order terms in these deviations. The most important result of this investigation is that with an unstable buckling state of the model

[1]) This term was introduced by VON KÁRMÁN and TSIEN (ref. 24).

the buckling load of the structure may be considerably lower in consequence of very small differences between structure and model (art. 455) [1]). Hence the discrepancy between theoretical and experimental critical loads can be explained purely elastically by assuming small deviations of such a structure from the corresponding model; moreover, the great sensibility of the buckling load of the structure for small variations in the magnitude of the deviations explains too the wide divergency of experimental results. It is self-evident that the collapse is precipitated by elastic failure of the material; this complication, however, is not further considered.

The most interesting example for application of the theory developed here is the axially compressed thin-walled cylinder; for in this technically important case the great discrepancy between the theoretical and experimental buckling loads has up to now not been accounted for satisfactorily. To apply the general theory it is necessary to dispose of the knowledge of the elastic energy of the thin-walled cylindrical shell for finite displacements. With a view to the possibility of application to other shell structures as well a general theory of thin shells for finite displacements is given in chapter 5. It is based on the same assumptions as the well-known technical theory of shells for infinitesimal displacements (art. 51). After calculating the strains and the elastic potential (arts. 53, 54) the consequences of these assumptions are looked into more closely in art. 55. The most important conclusion to which they lead is that the elastic energy is the sum of stretching energy and bending energy. Finally, in art. 57 the influence of small deviations is again considered.

Before passing on to the already rather complicated theory of the thin-walled cylinder it seemed advisable to deal first with some simpler applications to elucidate the general theory (ch. 6). The well-known problem of the elastica was chosen as a first example (art. 61). Next, in art. 62 Cox's problem (ref. 23) is dealt with. Finally, in art. 63 the problem of equivalent width of compressed flat rectangular plates is considered. In this case the general theory supplies a justification of the theory of MARGUERRE—TREFFTZ (ref. 19), based on more arbitrary assumptions.

The last application in chapter 7 concerns the axially compressed cylindrical shell. Neglection of boundary conditions leads to the same result for the buckling load as known from existing literature (art. 74). The same neglection leads to the conclusion that equilibrium in the buckling state is unstable (art. 75). In art. 76 the neighbouring states of equilibrium at loads in the neighbourhood of the critical load are investigated. It is found that all existing neighbouring states of equilibrium are unstable. As far as possible the results obtained are compared with a paper by VON KÁRMÁN and TSIEN (ref. 51), which became available during the compilation of the present treatise. Because the displacements assumed by the above-mentioned authors are less general their results are less good at least for loads in the neighbourhood of the critical load. In art. 77 the influence of small deviations from the true cylindrical form is discussed. As the investigation is rather complicated, the detailed calculations are restricted to one form of deviations. In this case a very marked decrease of the buckling load is found already with very small deviations. This result is in striking contrast to that of DONNELL (ref. 22) as the amplitude of the initial deviations, required to explain the discrepancy between the mean value of the experimental buckling loads and the theoretical buckling load, according to the present theory amounts to about 10% of the amplitude required by DONNELL. Although of course it is desirable to extend the investigation to other forms of deviations, at this stage already the conclusion may be drawn that the theory given here supplies an explanation of the large discrepancy between theoretical and experimental critical loads. The wide divergency of experimental results is likewise satisfactorily accounted for by the extreme sensibility of the critical load for small variations in the magnitude of the deviations.

[1]) This drop of the critical load is illustrated bij fig. 2 (p. 98). Here $\epsilon$ is a measure of the magnitude of the initial deviations, $\lambda_1$ is the buckling load of the model, $\lambda^*$ the buckling load of the structure. Note the vertical tangent to the $\epsilon - \lambda^*$ curve in the point of transition of structure to model $\epsilon = 0$, $\lambda^* = \lambda_1$.

Technische Hogeschool
Handbibliotheek
Afd. Weg- en Waterbouwkunde

# STELLINGEN

I

In de theoretische natuurkunde en in de mechanica vormt een mathematisch existentiebewijs ook physisch een essentieel deel der theorie.

II

Het door VON MISES en POLLACZEK-GEIRINGER gegeven bewijs voor de convergentie van de iteratiemethode in afzonderlijke stappen („Iteration in Einzelschritten") voor de oplossing van simultane lineaire vergelijkingen die de extremumvoorwaarde uitdrukken voor een tweedegraadsfunctie met definiet quadratisch gedeelte, is onvolledig.

R. VON MISES und H. POLLACZEK GEIRINGER. Praxis der Gleichungsauflösung. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 9 (1929), p. 58 (i.h.b. par. 3).

III

De door BIEZENO en GRAMMEL aangegeven ongelijkheden voor determinanten gevormd uit invloedsgetallen van MAXWELL vormen een bijzonder geval van de overeenkomstige ongelijkheden voor determinanten gevormd uit de coëfficiënten van een definiet positieven homogenen quadratischen vorm.

C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL. Die Eigenschaften der Determinanten aus MAXWELL-schen Einflusszahlen und ihre Anwendung bei Eigenwertproblemen. Ingenieur Archiv, Bd. 8 (1937), p. 364.
C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL. Technische Dynamik, Berlin (1939), Kap. II, Par. 2, Nr. 10.

IV

Voor een mechanisch systeem met niet-holonome kinematische voorwaarden is een uit een kinematisch mogelijke beweging door virtueele verplaatsingen afgeleide naburige beweging in het algemeen niet kinematisch mogelijk.

Het door PRANGE gegeven bewijs voor deze onmogelijkheid is echter niet steekhoudend.

G. PRANGE. Die allgemeinen Integrationsmethoden der analytischen Mechanik, Enc. math. Wiss., Bd. IV$^2$, Art. 12 u. 13 (1935), par. 3.

**Ir. W. T. KOITER**

V

De methode van GRAMMEL voor de benadering van de kleinste eigenwaarde van een trillend systeem kan direct worden afgeleid met behulp van de transformatietheorie der variatierekening zonder gebruik te maken van de integraalvergelijking van het trillend systeem.

R. GRAMMEL. Ein neues Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme. Ingenieur Archiv, Bd. 10 (1939), p. 35.
C. B. BIEZENO und R. GRAMMEL: Technische Dynamik, Berlin (1939), Kap. III, par. 3, Nr. 18.

VI

De definitie van het torsiecentrum van de doorsnede van een prismatischen balk voor belasting door dwarskracht als het punt waardoor de werklijn der dwarskracht moet gaan opdat de gemiddelde specifieke wringingshoek nul zij, behoudt haar beteekenis voor een gelijkmatig langs de balkas verdeelde belasting.

VII

Het door REISSNER voor de afleiding van de stabiliteitsvergelijkingen van in haar vlak belaste vlakke platen ingevoerde „gefingeerde hulpsysteem" is overbodig en werkt verwarrend.

H. REISSNER. Energiekriterium der Knicksicherheit. Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech., Bd. 5 (1925), p. 475.

VII

Van de verschillende bekende methodes ter bestrijding van torsietrillingen verdient de centrifugaalslinger van TAYLOR principieel den voorkeur.

E. S. TAYLOR. Crankshaft torsional vibrations in radial aircraft engines. SAE Journal, Vol. 38 (1936), p. 81.

IX

Bij motoren welker krukken niet in één vlak zijn gelegen treden torsie- en buigingstrillingen steeds gekoppeld op; het is echter te verwachten dat deze koppeling numeriek slechts van beteekenis zal zijn bij de hoogere eigentrillingen.

X

De opvatting dat de bezwaren, verbonden aan het landen van vliegtuigen bij zijwind, verminderen met toenemende landingssnelheid, is onjuist.

XI

De op den duur meest effectieve steunverleening aan de Nederlandsche industrie wordt verkregen door op voldoend ruime schaal uit te voeren wetenschappelijk en technisch-wetenschappelijk onderzoek.