

Kamer 3.g6

b71

Vloeistofmechanica

Handleiding college

Juli 1991

Prof. dr. ir. J.A. Battjes

VLOEISTOFMECHANICA

Handleiding college b71

prof. dr. ir. J.A. Battjes

TECHNISCHE HOGESCHOOL DELFT
Faculteit der Civiele Techniek
Vakgroep Waterbouwkunde
Sectie VLOEISTOFMECHANICA

Heruitgave augustus 1992			b71	200072					fl. 7.50
-----------------------------	--	--	-----	--------	--	--	--	--	----------

1.	INLEIDING	1
2.	STROMING VAN EEN IDEALE VLOEISTOF	3
2.1	Inleiding	3
2.2	Kinematica van vloeistofstroming	3
2.3	Dynamica van ideale-vloeistofstromingen	9
2.4	Basisvergelijkingen voor potentiaalstroom	10
2.5	Stroomfunctie en potentiaalfunctie voor twee-dimensionale stromen	12
2.6	Vierkantennet	16
2.7	Conforme afbeeldingen	19
3.	VERHANGLIJNEN	35
3.1	Inleiding	35
3.2	Verhanglijn-vergelijking	35
3.3	Typen verhanglijnen	39
3.4	Randvoorwaarden en aansluitvoorwaarden	41
3.5	Voorbeelden (kwalitatief)	44
3.6	Berekeningsmethoden	46
4.	TRANSPORTPROCESSEN	49
4.1	Inleiding	49
4.2	Balansvergelijking (algemene vorm)	50
4.3	Moleculaire diffusie	52
4.4	Advectie en diffusie	55
4.5	Turbulente diffusie	56
4.6	Vertikaal transport in open waterlopen	60
4.7	Horizontaal stoftransport in open waterlopen	63
4.7.1	Inleiding	63
4.7.2	Twee-dimensionaal horizontaal transport (gebied II)	65
4.7.3	Eén-dimensionaal horizontaal transport (gebied III)	72
4.7.4	Résumé van balansvergelijkingen en coëfficiënt-waarden	75
4.8	Impulstransport	76
4.8.1	Inleiding	76
4.8.2	Moleculaire diffusie	76

4.8.3	Advectie en diffusie	78
4.8.4	Turbulente diffusie	80
5.	SEDIMENTTRANSPORT IN OPEN WATERLOPEN	85
5.1	Inleiding	85
5.2	Klassificatie sedimenttransport	85
5.3	Beddingvormen en stromingsweerstand	86
5.4	Sedimentparameters	88
5.5	Stroom- en transportparameters	90
5.6	Begin van beweging	93
5.7	Sedimenttransport	95
5.8	Morfologische ontwikkelingen	98
	Appendix: Weerstandsrelatie volgens Engelund en Hansen	104
	Literatuur	107
	Appendix: Enkele begrippen uit de vectoranalyse	109

1. INLEIDING

In dit derdejaarsvak "Vloeistofmechanica" wordt voortgebouwd op het gelijknamige tweedejaarsvak (b70), waarvan de stof bekend wordt verondersteld.

In hoofdstuk 2 wordt verder ingegaan op de kinematica en de dynamica van stromingen, vooral die van een ideale vloeistof. De behandeling is gericht op de berekening van het gehele snelheidsveld en drukveld, in plaats van alleen maar integraal-eigenschappen voor een hele doorgang van een stroombuis, zoals in b70. Weerstand wordt hierbij geheel verwaarloosd. De z.g. potentiaaltheorie speelt in deze benadering een belangrijke rol.

Hoofdstuk 3 gaat in op stationaire, zwak niet-uniforme stromen in open waterlopen. Bodemweerstand speelt hierin een dominante rol, maar het effect van geleidelijke vertraging of versnelling wordt niet verwaarloosd. De behandeling is gericht op de berekening van het in langsrichting geleidelijk variërende waterniveau bij verschillende randvoorwaarden (de z.g. verhanglijnen).

Hoofdstuk 4 behandelt transportprocessen in open waterlopen. Dit is van belang voor de waterbeweging zelf en ook voor de beweging van opgeloste of zwevende stoffen. Meevoering met de gemiddelde snelheid en turbulente diffusie zijn hier de belangrijkste fysische processen.

Hoofdstuk 5 tenslotte geeft een inleiding op sedimenttransport en bodemmorfolgie in open waterlopen. Het begin van beweging van bodemsediment komt aan de orde, gevolgd door de ontwikkeling van bodemvormen en bodemweerstand, en door het transport van bodemmateriaal.

De behandeling van bovengenoemde onderwerpen wordt in dit inleidende vak nogal elementair gehouden, d.w.z. met nadruk op de uitgangspunten; toepassingen blijven beperkt tot eenvoudige situaties. Voor meer complexe problemen zijn aanvullende formuleringen nodig. Voor verdere studie wordt verwezen naar vervolgvakken (zie hieronder) en boeken en naar andere literatuurbronnen waarvan enkele zijn genoemd aan het einde van deze handleiding.

De stof van dit vak vindt een vervolg in diverse vakken in het 3e en 4e jaar. In het bijzonder worden genoemd de vakken over de z.g. lange en korte golven (b73, b76), dichtheidsstromen (b81), turbulentie (b82), waterloopkundige berekeningen I (b84) en II (b85), transport van stoffen in bodem, water en lucht (mi20), waterkwaliteitsmodellering oppervlaktewater (nl1), rivierwaterbouwkunde (f8) en voortgezette rivierwaterbouwkunde (f10).

2. STROMING VAN EEN IDEALE VLOEISTOF

2.1 Inleiding

In dit hoofdstuk wordt enige theorie behandeld voor de berekening van het snelheidsveld en het drukveld van een stroming van een ideale vloeistof. Het gaat hierbij om de variatie van de snelheid (richting en grootte) en de druk van punt tot punt, en niet uitsluitend om integraal-eigenschappen voor een gehele doorgang van een stroombuis, zoals die in b70 zijn behandeld.

Allereerst wordt de kinematica van een vloeistofstroming behandeld voor een infinitesimaal klein vloeistofdeeltje. Daarbij mag de vloeistof nog viskeus zijn. In de daaropvolgende behandeling van de dynamica wordt echter afgezien van enige invloed van viscositeit. De vergelijkingen voor dit geval worden verder vereenvoudigd onder de veronderstelling van een z.g. rotatievrije beweging, waarbij de snelheid een potentiaal heeft. Voor twee-dimensionale potentiaalstromen worden concrete oplossingstechnieken en resultaten gegeven.

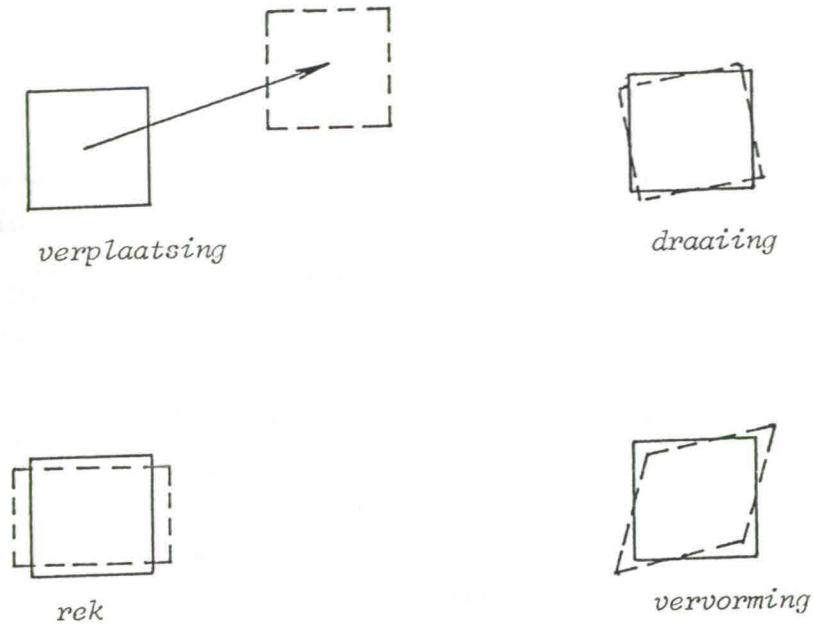
De theorie van ideale-vloeistofstromen, de z.g. hydrodynamica, is mathematisch zeer ver ontwikkeld en is ook in zeer veel boeken beschreven. Dit hoofdstuk tipt slechts enkele aspecten aan. Meer informatie kan b.v. worden gevonden in boeken als dat van Rouse (1938) en van Vennard en Street (1982); die zijn beide voor ingenieurs geschreven. Daarnaast zijn er meer theoretisch-mathematisch georiënteerde boeken zoals de standaardwerken van Lamb (1932) en van Batchelor (1967).

2.2 Kinematica van vloeistofstroming

Bij de beweging van een infinitesimaal pakketje vloeistof (een "deeltje") kunnen we onderscheid maken tussen

- verplaatsing (translatie)
- draaiing (rotatie)
- rek (dilatatatie)
- vervorming (deformatie)

Deze bewegingsvormen zijn geïllustreerd in Fig. 2.1.



Figuur 2.1

De verplaatsing van het massacentrum van een vloeistofdeeltje per eenheid van (p.e.v.) tijd noemen we de lokale stroomsnelheid \vec{u} . In een rechthoekig assenstelsel Oxyz schrijven we voor de snelheid:

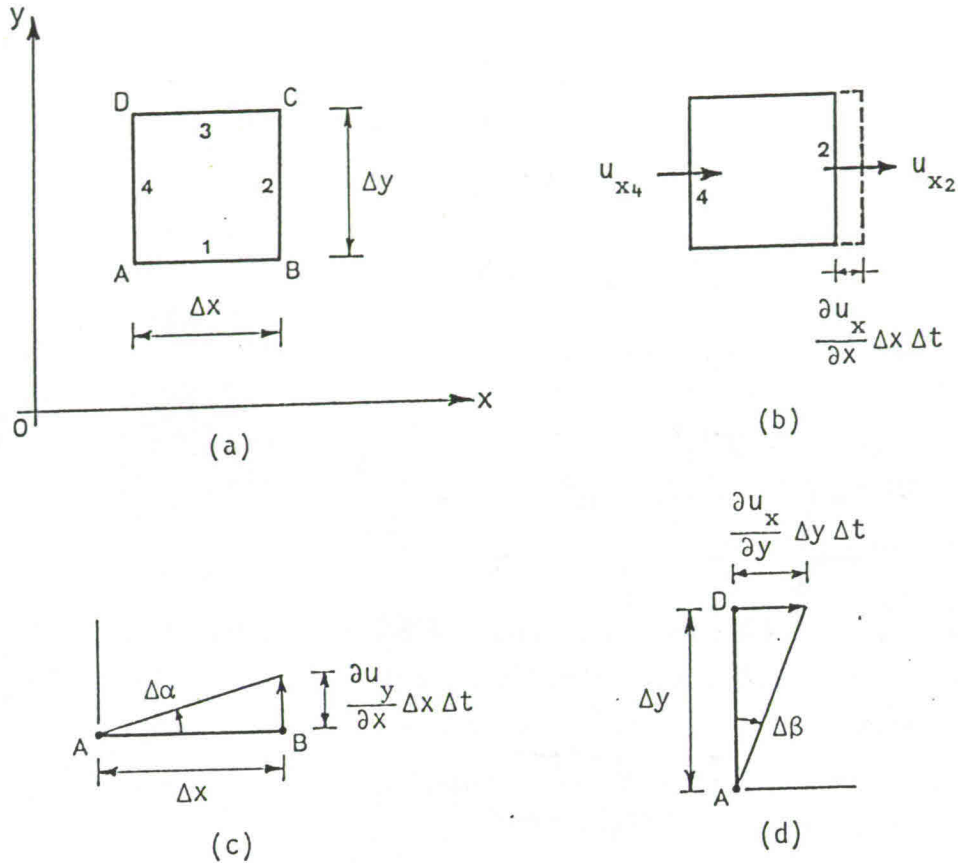
$$\vec{u} = u_x \vec{e}_x + u_y \vec{e}_y + u_z \vec{e}_z \quad (2.1)$$

De overige drie van bovengenoemde bewegingscomponenten worden bepaald door de variatie van \vec{u} in de ruimte, ofwel, wanneer we ons beperken tot een infinitesimaal vloeistofdeeltje, door de afgeleiden van \vec{u} naar de plaats (\vec{r}) in één punt. Deze afgeleiden gezamenlijk vormen een matrix:

$$\begin{matrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{matrix} \quad (2.2)$$

We gaan de draaiing, rek en vervorming uitdrukken in termen van deze afgeleiden van de snelheid. Daarbij gaan we de beweging na van

verschillende punten van een deeltje dat op een tijdstip $t=t_1$ de vorm heeft van een rechthoekig parallellepipedum met zijden ter lengte Δx , Δy en Δz en met volume ΔV . We bekijken daarvoor één zijvlak, evenwijdig aan het x,y -vlak (Fig. 2.2a).



Figuur 2.2

Rek. We bepalen eerst de reksnelheid in de x -richting (Fig. 2.2b); die is het gevolg van een verschil in snelheid in x -richting van de twee tegenover elkaar gelegen zijvlakken 2 en 4:

$$u_{x_2} - u_{x_4} \approx \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x \quad (2.3)$$

De relatieve reksnelheid in de x -richting is dus gelijk aan $\partial u_x / \partial x$. Voor de y - en z -richting gelden analoge uitdrukkingen. De relatieve reksnelheden worden dus gegeven door de termen van de hoofddiagonaal van de matrix (2.2).

De reksnelheid gegeven door (2.3) veroorzaakt een volumevergroting p.e.v. tijd gelijk aan $((\partial u_x / \partial x) \Delta x) \Delta y \Delta z = (\partial u_x / \partial x) \Delta V$. Voor de y- en z-richting gelden analoge uitdrukkingen. De totale relatieve volumevergroting p.e.v. tijd is dus gegeven door

$$\frac{1}{\Delta V} \frac{\partial(\Delta V)}{\partial t} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.4)$$

De uitdrukking in het rechterlid hiervan heet de **divergentie** (div) van de snelheid in het beschouwde punt. Deze kan ook worden geschreven in termen van de ∇ -operator ("nabla-operator"), gedefinieerd door (zie b70 en de Appendix op p. 109):

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} ,$$

en wel als het inwendig product van ∇ en \vec{u} :

$$\boxed{\text{div } \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}} \quad (2.5)$$

Wanneer de vloeistof als **onsamendrukbaar** wordt beschouwd is er sprake van behoud van volume. In die benadering is de vloeistofsnelheid dus **divergentievrij**:

$$\boxed{\text{div } \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = 0} \quad (2.6)$$

Dit is de z.g. **continuïteitsvergelijking** (in infinitesimale vorm). Het is een partiële differentiaalvergelijking waaraan moet worden voldaan in het gehele gebied waar de vloeistof zich bevindt.

Draaiing. De draaiing van een vloeistofdeeltje om zijn massacentrum wordt naar richting en grootte beschreven door een hoeksnelheidsvector ($\vec{\omega}$). De draaiing evenwijdig aan het x,y-vlak wordt beschreven door de z-component van $\vec{\omega}$; de waarde daarvan stellen we gelijk aan de hoeksnelheid van de diagonalen van het rechthoekige zijvlak geschetst in Fig. 2.2 (AC of BD).

Bekijk eerst de draaiing van de zijde AB (Fig. 2.2c):

$$u_{y_B} - u_{y_A} = \frac{\partial u_y}{\partial x} \Delta x$$

Het bewijs van deze stelling wordt hier niet gegeven. Voor het bewijs van het omgekeerde, nl. dat een snelheidsveld, gelijk aan de gradiënt van een scalaire potentiaal, altijd rotatievrij is, substitueren we (2.10) in de uitdrukkingen (2.7) voor de componenten van $\vec{\omega}$. Voor ω_x b.v. geeft dit

$$2\omega_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = 0 \quad (\text{q.e.d.})$$

Omdat rotatievrije stromen altijd een snelheidspotentiaal hebben noemen wij ze potentiaalstromen. Het feit dat in een potentiaalstroom de snelheid \vec{u} de gradiënt is van de potentiaal houdt in (zie b70) dat \vec{u} haaks staat op vlakken waarin ϕ constant is, z.g. equipotentiaalvlakken (in een twee-dimensionale stroom: equipotentiaallijnen). Van deze eigenschap wordt gebruik gemaakt in de grafische constructie van stroomlijnen in een potentiaalstroom.

De (scalaire) snelheidspotentiaal is een sterk hulpmiddel in de bepaling van het (vectoriële) snelheidsveld van een stroming. Zoals gezegd is het gebruik ervan beperkt tot stromen waarin de rotatie nul is. De voorwaarden daarvoor komen in paragraaf 2.3 aan de orde.

Vervorming. Als maat voor de snelheid van vervorming van het beschouwde vloeistofdeeltje nemen we de afneming van de hoek BAD (of de toeneming van hoek ABC) p.e.v. tijd (zie Fig. 2.2a). Deze is gegeven door

$$\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\beta}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Als gevolg van de moleculaire viscositeit (met coëfficiënt η) verzet de vloeistof zich tegen deze voortgaande vervorming; dit resulteert in viskeuze schuifspanningen zoals

$$\tau_{xy} = \eta \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (2.11)$$

Voor een eenparige parallelle stroming in de x-richting is $\partial u_y / \partial x = 0$ en reduceert (2.11) tot de uitdrukking voor de viskeuze schuifspanning $\tau = \eta \partial u / \partial n$ zoals gegeven in b70.

In een tijdsduur Δt draait AB dus over een hoek $\Delta\alpha = (\partial u_y / \partial x) \Delta t$; de hoeksnelheid ervan is $d\alpha/dt = \partial u_y / \partial x$. Idem voor AD (Fig. 2.2d): $\Delta\beta = (\partial u_x / \partial y) \Delta t$ en $d\beta/dt = \partial u_x / \partial y$.

De diagonaal AC, d.w.z. de bissectrice van hoek BAD, draait in de duur Δt over een hoek gelijk aan $\frac{1}{2}(\Delta\alpha - \Delta\beta)$, d.w.z. met een hoeksnelheid (ω_z) gegeven door

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{d\alpha}{dt} - \frac{d\beta}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (2.7z)$$

Evenzo geldt:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad \text{en} \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (2.7x,y)$$

De vergelijkingen (2.7) drukken de drie componenten van de hoeksnelheidsvector $\vec{\omega}$ uit in termen van de snelheidsgradiënten in de matrix (2.2) buiten de hoofddiagonaal. Evenals in het geval van de divergentie is ook hier een compacte schrijfwijze mogelijk in termen van de nabla-operator, maar nu in de vorm van het uitwendig product tussen ∇ en \vec{u} :

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{u} \quad (2.8)$$

Een stroming waarvoor overal $\vec{\omega} = 0$ heet rotatievrij. Daarvoor geldt dus $\nabla \times \vec{u} = 0$, ofwel

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (2.9)$$

Wanneer aan deze voorwaarden wordt voldaan is er een in de ruimte variërende scalaire functie te definiëren, de z.g. snelheidspotentiaal $\phi = \phi(x, y, z, t)$, zodanig dat de snelheid \vec{u} de gradiënt is van ϕ :

$$\vec{u} = \nabla\phi \quad (2.10)$$

ofwel

$$u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial\phi}{\partial y}, \quad u_z = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad (2.10)$$

2.3 Dynamica van ideale-vloeistof stromingen

In veel situaties is de grootte van de viskeuze weerstand zeer klein t.o.v. de traagheid en de drukgradiënt in de vloeistof. Dit doet zich b.v. voor waar geen wandinvloed aanwezig is (zoals in windgolven) of in sterk versnelde stromen, buiten de directe (viskeuze) wandinvloed. In zulke z.g. wrijvingsarme stromen gaan we in eerste benadering de weerstand geheel verwaarlozen: we gaan uit van het model van een ideale vloeistof, waarvoor de vergelijking van Euler geldt (zie b70):

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -g \nabla h \quad (2.12)$$

Hierin is $D\vec{u}/Dt$ de totale versnelling, en h de hoogte van het piëzometrisch niveau boven het vergelijkingsvlak $z = 0$:

$$h = \frac{p}{\rho g} + z \quad (2.13)$$

Uitgeschreven in componenten t.o.v. het natuurlijk assenstelsel (s -as langs stroomlijn) wordt (2.12):

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_s}{\partial s} = -g \frac{\partial h}{\partial s} \quad (2.14s)$$

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + u_s \frac{\partial u_n}{\partial s} = \frac{\partial u_n}{\partial t} + \frac{u_s^2}{R} = -g \frac{\partial h}{\partial n} \quad (2.14n)$$

$$\frac{\partial u_b}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial b} \quad (2.14b)$$

Voor stationaire stromen reduceert (2.14s) tot de vergelijking van Bernoulli:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{u_s^2}{2g} \right) = \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \quad (2.15)$$

Voor stationaire stromen onder invloed van zwaartekracht en druk (geen weerstand) die beginnen in een gebied van rust is H niet alleen constant langs een stroomlijn (vgl. 2.15) maar heeft H voor alle stroomlijnen dezelfde waarde. Een belangrijke eigenschap van deze stromen met uniforme energiehogte is dat zij altijd rotatievrij zijn. Dit is als volgt te verklaren: in het gebied waar rust heerst is de rotatie nul. Om een deeltje in rotatie te brengen moet er een koppel op worden

uitgeoefend. Zwaartekracht en druk kunnen dat niet (denk aan bolvormig deeltje). Alleen de viskeuze schuifspanningen kunnen dat. Waar de invloed daarvan verwaarloosbaar is zal de beweging rotatievrij blijven. Merk op dat deze argumentatie niet beperkt is tot stationaire stromen.

Voor uitsluitend stationaire stromen is het voorgaande als volgt te bewijzen. Uniforme energiehogte houdt in dat niet alleen $\partial H/\partial s = 0$ maar ook $\partial H/\partial n = 0$:

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n} \left(h + \frac{u_s^2}{2g} \right) = \frac{\partial h}{\partial n} + \frac{1}{g} u_s \frac{\partial u_s}{\partial n} = 0$$

Uit een vergelijking hiervan met (2.14n) voor $\frac{\partial u_n}{\partial t} = 0$ (stationaire stromen) volgt dan

$$\frac{\partial u_s}{\partial n} = \frac{\partial u_n}{\partial s}$$

Dit is juist de voorwaarde voor rotatievrijheid in het s, n -vlak. Voor de overige rotatie-componenten geldt hetzelfde. Stromen met uniforme energiehogte zijn dus rotatievrij: het zijn potentiaalstromen. (Voor stationaire stromen geldt het omgekeerde hiervan ook, zoals in de volgende paragraaf wordt bewezen.)

2.4 Basisvergelijkingen voor potentiaalstromen

Wegens onsamendrukbaarheid geldt

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \tag{2.6}$$

en wegens rotatievrijheid geldt

$$\nabla \times \vec{u} = 0$$

Aan de laatste voorwaarde wordt identiek voldaan indien

$$\vec{u} = \nabla \phi \tag{2.10}$$

Substitutie van (2.10) in (2.6) geeft $\nabla \cdot \nabla \phi = 0$, ofwel

$$\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$$

(2.16)

ofwel

$$\boxed{\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0}$$

(2.16)

Dit is de z.g. vergelijking van Laplace. Voor de integratie hiervan in een gebied G moeten de waarden van ϕ en/of zijn normale afgeleide bekend zijn in de hele begrenzing van G. Is ϕ eenmaal bekend in het gebied dan zijn de snelheidscomponenten te vinden door differentiatie (zie 2.10). Om vervolgens de druk te kunnen bepalen gaan we opnieuw uit van de vergelijking van Euler (2.12).

De vergelijking van Euler voor de x-richting is

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.17)$$

Voor een potentiaalstroom kan de eerste term (de lokale versnelling) worden herschreven als

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)$$

en geldt voor de convectieve versnelling, wegens rotatievrijheid ($\partial u_x / \partial y = \partial u_y / \partial x$, enz. - zie vgl. 2.9):

$$\begin{aligned} u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} &= u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u_x^2 + \frac{1}{2} u_y^2 + \frac{1}{2} u_z^2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) \end{aligned}$$

Hiermee gaat (2.17) over in

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} u^2 + gh \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gh \right) = 0$$

Voor de y- en z-richtingen geldt hetzelfde. De som $(\partial \phi / \partial t + gh)$ heeft op elk moment dus dezelfde waarde in het hele gebied van de potentiaalstroom. We zien hieruit dat stationaire potentiaalstromen (waarvoor

$\partial\phi/\partial t = 0$) altijd een uniforme energiehogte hebben. (Zie de laatste zin van par. 2.3.)

Zien we af van eventuele variaties van $(\partial\phi/\partial t + gH)$ in de tijd dan geldt

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + gH = \text{constant}$$

ofwel

$$\boxed{\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}u^2 = \text{constant}} \quad (2.18)$$

Dit is een uitbreiding voor niet-stationaire potentiaalstromen van de vergelijking van Bernoulli. Deze vergelijking kan worden gebruikt voor de berekening van het drukveld nadat het potentiaalveld (en dus ook $\frac{1}{2}u^2$) berekend is uit de vergelijking van Laplace met de nodige randvoorwaarden.

Voor het oplossen van potentiaalproblemen, i.h.b. het integreren van de vergelijking van Laplace bij gegeven randvoorwaarden, zijn diverse methoden ontwikkeld.

Numerieke methoden zijn het meest algemeen toepasbaar maar zij worden hier niet behandeld (zie de vervolgvakken b84 en b85). Analytische methoden zijn alleen toepasbaar bij relatief eenvoudige, althans analytisch weer te geven geometrie.

Voor berekening van potentiaalstromen in twee dimensies bestaat een krachtig analytisch hulpmiddel, nl. de methode van conforme afbeeldingen. Bovendien is hier een grafische methode beschikbaar (constructie van een vierkantennet) en een methode die gebruik maakt van een elektrisch analogon. We beperken ons in wat volgt tot deze methoden voor twee-dimensionale potentiaalstromen.

2.5 Stroomfunctie en potentiaalfunctie voor twee-dimensionale stromen

Een twee-dimensionale stroom is te beschrijven in een plat vlak waarin de stroming plaats vindt. In zo'n vlak leggen we een rechthoekig assenstelsel Oxy (dat hier dus niet horizontaal hoeft te liggen). Lokaal

gebruiken we ook het natuurlijk assenstelsel met de s-as langs een stroomlijn en de n-as haaks daarop.

Voor de beschrijving van twee-dimensionale stromen van een onsamendrukbare vloeistof is het handig een z.g. stroomfunctie in te voeren.

Wegens onsamendrukbaarheid geldt

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (2.19)$$

Voor elke stroming (al of niet rotatievrij) die aan (2.19) voldoet bestaat er een z.g. stroomfunctie, $\psi(x,y)$, zodanig dat

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{en} \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.20)$$

Hiermee wordt identiek aan (2.19) voldaan, zoals door terugsubstitutie in (2.19) onmiddellijk is te zien. (Een dergelijke stroomfunctie bestaat niet in een drie-dimensionale stroom.)

Als (2.20) geldt kunnen de snelheidscomponenten t.o.v. het natuurlijk assenstelsel (s,n) als volgt van ψ worden afgeleid:

$$u_s = \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad \text{en} \quad u_n = -\frac{\partial \psi}{\partial s}$$

In het natuurlijk assenstelsel geldt echter $u_n = 0$, dus ook $\partial \psi / \partial s = 0$. M.a.w.: ψ is constant langs een stroomlijn.

Voor het debiet p.e.v. breedte (Δq) tussen twee naburige stroomlijnen, op afstand Δn van elkaar, geldt

$$\Delta q = u_s \Delta n = \frac{\partial \psi}{\partial n} \Delta n = \Delta \psi$$

M.a.w.: de toeneming van ψ tussen twee stroomlijnen is juist gelijk aan het debiet dat ertussen wordt afgevoerd. Daarom heet ψ "stroomfunctie".

De rotatie-component in het (x,y)-vlak heeft de waarde

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{2} \nabla^2 \psi$$

(waarin ∇^2 de twee-dimensionale Laplace-operator is in het x,y -vlak). Als de stroming rotatievrij is voldoet de stroomfunctie dus aan de vergelijking van Laplace:

$$\nabla^2\psi = 0$$

In dat geval (rotatievrijheid) bestaat er echter ook een snelheidspotentiaal $\phi(x,y)$ zodanig dat $\vec{u} = \nabla\phi$, ofwel

$$u_x = \frac{\partial\phi}{\partial x} \quad \text{en} \quad u_y = \frac{\partial\phi}{\partial y} \quad (2.21)$$

Vanwege de onsamendrukbaarheid voldoet ϕ ook aan de vergelijking van Laplace (2.16).

Het voorgaande houdt in dat de stroomfunctie $\psi(x,y)$ en de potentiaal-functie $\phi(x,y)$ beide voldoen aan de vergelijking van Laplace:

$$\nabla^2\psi = 0 \quad \text{en} \quad \nabla^2\phi = 0$$

terwijl uit (2.20) en (2.21) volgt dat zij aan elkaar zijn gekoppeld via

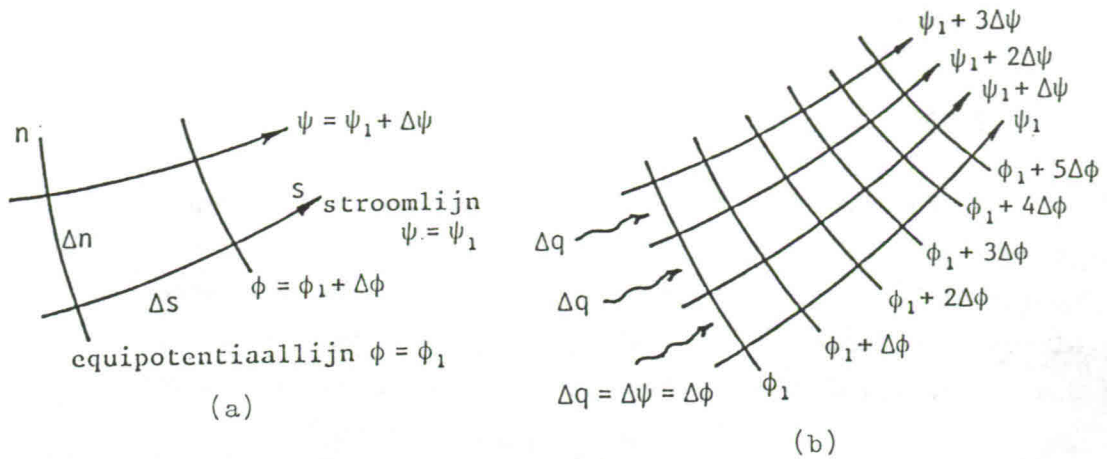
$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (2.22)$$

Omdat de snelheid de gradiënt is van ϕ staat hij loodrecht op lijnen in het x,y -vlak waarlangs ϕ constant is, de z.g. equipotentiaallijnen. Lijnen van constante ψ (stroomlijnen) en lijnen van constante ϕ (equipotentiaallijnen) snijden elkaar dus onder een rechte hoek. Zij vormen een orthogonaal stelsel. Twee stroomlijnen, op afstand Δn van elkaar, en twee equipotentiaallijnen, op afstand Δs van elkaar, sluiten een vierhoekig gebiedje in dat in de limiet voor $\Delta s \rightarrow 0$ en $\Delta n \rightarrow 0$ de vorm heeft van een rechthoek (Fig. 2.3a). Laat $\Delta\psi$ het verschil in stroomfunctie zijn tussen de twee stroomlijnen, en $\Delta\phi$ het verschil in potentiaal tussen de twee equipotentiaallijnen. Dan geldt

$$u_s = \frac{\partial\phi}{\partial s} \approx \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \quad \text{en} \quad u_n = \frac{\partial\psi}{\partial n} \approx \frac{\Delta\psi}{\Delta n}$$

zodat

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi} = \frac{\Delta s}{\Delta n} \quad (2.23)$$



Figuur 2.3

Kies nu een reeks stroomlijnen met voor alle paren dezelfde $\Delta\psi$ ($= \Delta q$), en een reeks equipotentiaallijnen met voor alle paren dezelfde $\Delta\phi$. Alle rechthoekige deelgebiedjes hebben dan $\Delta\psi$ en $\Delta\phi$ gemeenschappelijk, en dus ook de verhouding $\Delta s/\Delta n$. Zij zijn dan gelijkvormig (in de limiet $\Delta s \rightarrow 0$ en $\Delta n \rightarrow 0$). Kiezen we bovendien $\Delta\phi = \Delta\psi$ ($= \Delta q$) dan sluit het stelsel lijnen vierkantjes in: het vormt een z.g. vierkantennet (Fig. 2.3b).

Het bestaan van het vierkantennet kan ook als volgt worden afgeleid. Uit de vergelijkingen (2.22) volgt ten eerste dat

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \quad \text{ofwel} \quad \nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$$

De gradiënt van ϕ staat dus loodrecht op die van ψ ; hetzelfde geldt dan voor lijnen van constante ϕ respectievelijk ψ (orthogonaal stelsel).

Ten tweede volgt uit (2.22) dat

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 \quad \text{ofwel} \quad |\nabla\phi| = |\nabla\psi|$$

M.a.w., de gradiënt van ϕ en die van ψ hebben dezelfde absolute grootte. Als $\Delta\phi = \Delta\psi$ is de afstand tussen opeenvolgende equipotentiaallijnen dus gelijk aan die tussen opeenvolgende stroomlijnen (vierkanten).

Bovengenoemde eigenschappen van stroomfunctie en potentiaalfunctie worden gebruikt in de hieronder te behandelen grafische en analytische methoden voor de bepaling van het snelheidsveld.

2.6 Vierkantennet

Een vierkantennet kan proberenderwijs (metpotloodengom) grafisch worden geconstrueerd in elk gegeven gebied waarvan de rand op een bekende manier deels uit stroomlijnen bestaat en deels uit equipotentiaallijnen. Als extra controle kan gebruik worden gemaakt van de eigenschap dat de diagonalen van de vierkantjes eveneens een vierkantennet moeten vormen.

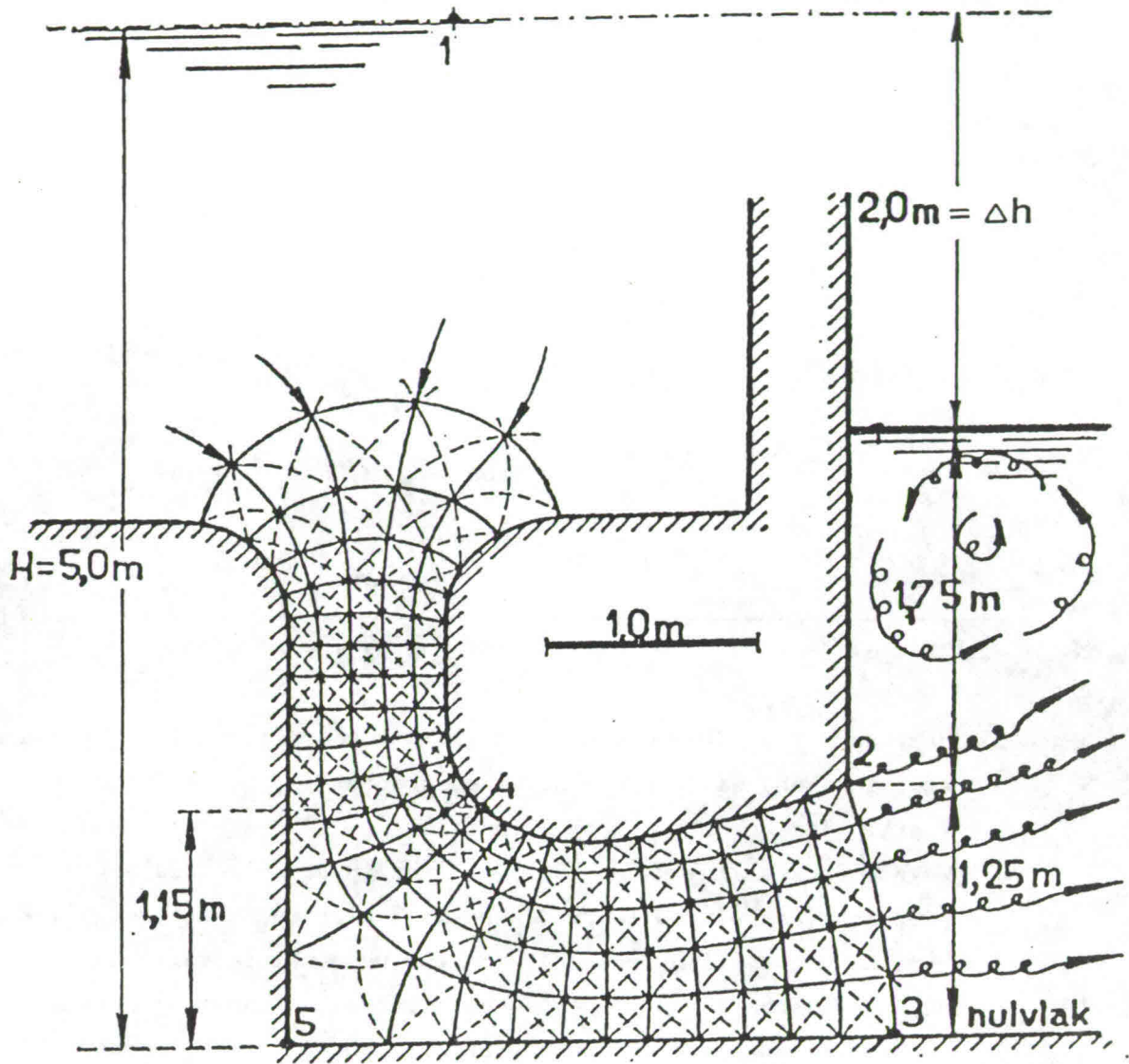
Na voldoende nauwkeurige constructie van een voldoende fijn vierkantennet is de variatie van de snelheid van punt tot punt bekend ($u_s = \Delta\phi/\Delta s = \Delta q/\Delta n$, waarbij de lengten Δs en Δn in de figuur zijn te meten). Met Bernoulli kan de lokale druk worden berekend.

Als voorbeeld nemen we de toepassing van een vierkantennet op een stroming door een spleet tussen twee reservoirs met een verval $\Delta h = 2.0$ m, waarvan de afvoer p.e.v. breedte moet worden berekend, evenals de druk in een aantal punten (Thijsse, 1951). Gezien de gestroomlijnde vormgeving mogen verliezen worden verwaarloosd tot aan de uitstroming in het lage reservoir.

Het proberenderwijs getekende vierkantennet (met diagonalen) is (verkleind) gegeven in Fig. 2.4. De grootte van de snelheid in het bovenste uittreepunt (2) volgt uit toepassing van Bernoulli:

$$H_2 = 5 \text{ m} = 1.25 \text{ m} + 1.75 \text{ m} + \frac{u_2^2}{2g}$$

ofwel $u_2 = \sqrt{2g \Delta h} = 6.26 \text{ m/s}$. De waarde van Δn_2 wordt via lengtemeting bepaald op 0.22 m. Dus is $\Delta q = u_2 \Delta n_2 = 1.41 \text{ (m}^3/\text{s)}/\text{m}$. De overige stroomstroken hebben dezelfde Δq , zodat $q = 5 \Delta q = 7.05 \text{ (m}^3/\text{s)}/\text{m}$.



Figuur 2.4

In elk gewenst punt kunnen Δn en Δs worden gemeten zodat $u (=u_s)$ daar kan worden berekend. De resultaten voor de punten 1 t/m 5 zijn verzameld in bijgaande tabel, inclusief de berekening van de drukhoogten.

punt	z (m)	Δn (m)	u (m/s)	$u^2/2g$ (m)	h * (m)	$p/\rho g$ ** (m)
1	5.00	∞	0	0	5.00	0
2	1.25	0.22	6.26	2.00	3.00	1.75
3	0	0.32	4.29	0.92	4.08	4.08
4	1.15	0.11	12.52	8.00	-3.00	-4.15
5	0	-	0	0	5.00	5.00

* $h = H - u^2/2g$

** $p/\rho g = h - z$

N.B. - 1. Merk op dat de druk minimaal is (in het voorbeeld zelfs lager dan atmosferisch) waar de snelheid het grootst is, d.w.z. waar de vierkantjes het kleinst zijn (punt 4).

- 2. Wegens de kromming van de stroomlijnen in de spleet is het piëzometrisch niveau langs een normaal niet constant (vergelijk b.v. h_2 met h_3 of h_4 met h_5). Wanneer we desalniettemin het piëzometrisch niveau in de doorgang 2-3 bij benadering constant zouden veronderstellen dan zou in alle punten ervan de snelheid gelijk zijn aan $\sqrt{2g\Delta h}$ ofwel 6,26 m/s, en zouden we het debiet schatten op $q = 1,25 \text{ m} \times 6,26 \text{ m/s} = 7,82 \text{ m}^2/\text{s}$, ofwel ruim 10% te hoog.

Zonder hier op de details in te gaan wordt opgemerkt dat de potentiaal en de bijbehorende snelheden in een willekeurig, gegeven gebied ook kunnen worden bepaald door gebruik te maken van de analogie tussen elektrische stromen en vloeistofstromen, waarbij de elektrische spanning analoog is aan de snelheidspotentiaal. Een vlakke elektrische geleider (z.g. teledeltos-papier) wordt geknipt in de vorm van het gebied waarin de vergelijking van Laplace moet worden opgelost. Tussen de verschil-

lende equipotentiaalranden wordt een elektrisch spanningsverschil aangebracht. In elk gewenst punt in het gebied kan de resulterende potentiaal worden gemeten, waaruit vervolgens de stroomsnelheden en de druk kunnen worden berekend op dezelfde manier als bij het grafisch geconstrueerde vierkantennet.

Bovenstaand voorbeeld illustreert duidelijk dat het vierkantennet in een bepaald gebied, en dus de vorm van de oplossing van de vergelijking van Laplace, uitsluitend wordt bepaald door de vorm en ligging van de stroomlijnen en de equipotentiaallijnen die het gebied insluiten (langs de rand van het gebied). De absolute druk noch het verval noch het debiet zijn daarop van invloed. Die komen pas aan de orde bij de toepassing van de vergelijking van Bernoulli. (Ga dit na in het voorbeeld.)

2.7 Conforme afbeeldingen

In de analytische bepaling van het snelheidsveld in een tweedimensionale potentiaalstroom van een onsamendrukbare vloeistof wordt eveneens gebruik gemaakt van de volgende relaties voor de potentiaal-functie $\phi(x,y)$ en de stroomfunctie $\psi(x,y)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.24)$$

De vergelijkingen (2.25) houden in dat lijnen van constante ϕ en lijnen van constante ψ in het x,y -vlak een orthogonaal stelsel vormen, met vierkantjes indien $\Delta \phi = \Delta \psi = \text{constant}$, en tevens dat

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{en} \quad \nabla^2 \psi = 0 \quad (2.25)$$

Aan betrekkingen zoals (2.24) en (en dus (2.25)) wordt voldaan door het reële deel en het imaginaire deel van elke differentieerbare complexe functie in het complexe vlak. Dergelijke functies worden daarom gebruikt in de analytische aanpak van twee-dimensionale potentiaalstromen.

We combineren ϕ en ψ tot een complexe grootheid

$$W = \phi + i \psi \quad (i^2 = -1)$$

Elke combinatie (ϕ, ψ) wordt afgebeeld als een punt in het z.g. complexe W -vlak, waarin $\phi = \text{Re } W$ (reële deel) en $\psi = \text{Im } W$. (imaginaire deel).

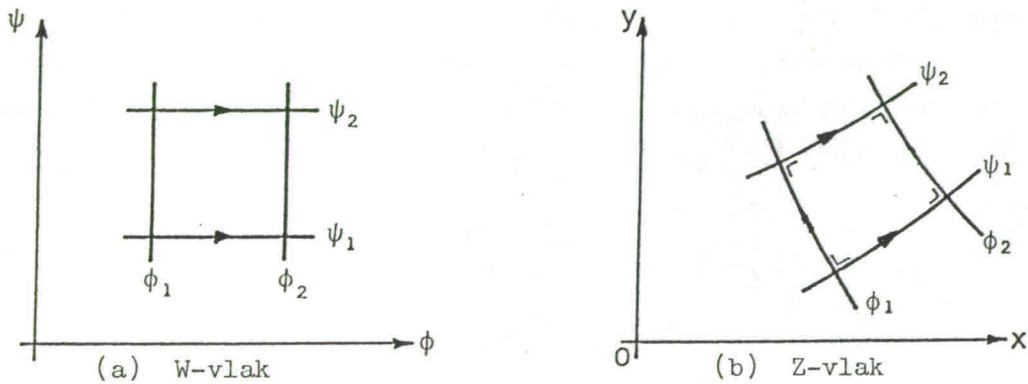
Evenzo combineren we x en y tot een complexe grootheid

$$Z = x + i y$$

We voegen nu aan elk punt in het Z -vlak een W -waarde toe volgens een functievoorschrift

$$W = f(Z)$$

Met elk punt van het Z -vlak (met coördinaten x, y) komt dus een door het functievoorschrift $f(Z)$ bepaalde waarde van W overeen (d.w.z. een waarde van ϕ en een waarde van ψ), waardoor ook de functies $\phi = \phi(x, y)$ en $\psi = \psi(x, y)$ bepaald zijn. Nog anders gezegd: elk punt in het W -vlak (d.w.z. elke combinatie van ϕ en ψ) wordt afgebeeld in het Z -vlak. Evenzo worden lijnen van constante ϕ respectievelijk ψ , die recht zijn in het W -vlak,



Figuur 2.5

afgebeeld tot lijnen van constante ϕ respectievelijk ψ in het Z -vlak, maar die zijn dan in het algemeen gekromd (Fig. 2.5). Nu is te bewijzen dat de functies $\phi(x, y)$ en $\psi(x, y)$, die resulteren uit de afbeelding, voldoen aan (2.24) en (2.25) mits de afbeeldingsfunctie $f(Z)$ differentieerbaar is. De afgebeelde lijnen van constante ϕ en van constante ψ vormen dan ook weer een orthogonaal stelsel, met vierkantjes als $\Delta\phi = \Delta\psi = \text{constant}$; daarom heet de afbeelding conform. We illustreren dit met een voorbeeld alvorens een algemeen bewijs te geven.

Voorbeeld:

Stel

$$W = aZ^2, \quad a \text{ reëel.} \quad (2.26)$$

Dan is

$$\phi + i \psi = a(x + i y)^2 = a(x^2 - y^2 + 2 i x y)$$

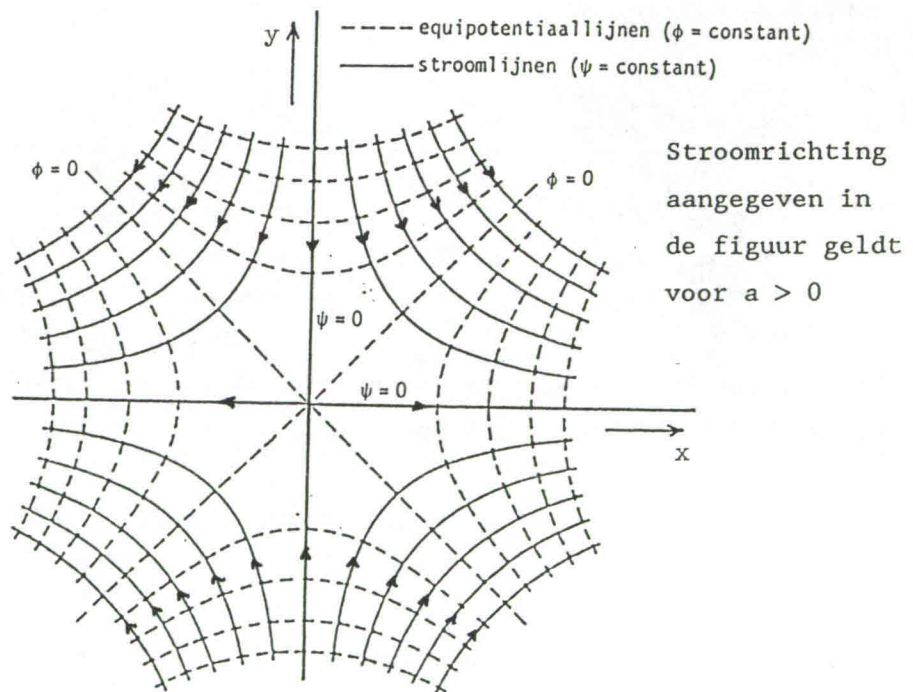
dus

$$\phi = a(x^2 - y^2) \quad \text{en} \quad \psi = 2 a x y$$

Hieruit volgt $\partial\phi/\partial x = 2 a x$; $\partial^2\phi/\partial x^2 = 2 a$; $\partial\phi/\partial y = -2 a y$; $\partial^2\phi/\partial y^2 = -2 a$ dus $\nabla^2\phi = 0$. De rest van het bewijs verloopt evenzo.

Voor de equipotentiaallijnen geldt: $\phi = a(x^2 - y^2) = \text{constant}$; dit zijn hyperbolen met asymptoten $x = \pm y$ (Fig. 2.6).

Voor de stroomlijnen geldt: $\psi = 2 a x y = \text{constant}$; dit zijn eveneens hyperbolen, nu met asymptoten $x = 0$, $y = 0$ (Fig. 2.6). Elk van de stroomlijnen kan een begrenzing door een ondoorlatende wand voorstellen, bv. de lijn $y = 0$, waarlangs $\psi = 0$ (stroming naar een vlakke wand (voor $a > 0$) met stuwpunt in de oorsprong), of de lijnstukken die een kwadrant begrenzen (stroming in een rechte hoek).



Figuur 2.6

Het algemene bewijs van het hierboven gestelde verloopt als volgt.

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{df}{dZ} \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{df}{dZ} \quad \text{of} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{df}{dZ}$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = \frac{df}{dZ} \frac{\partial Z}{\partial y} = i \frac{df}{dZ} \quad \text{of} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} = i \frac{df}{dZ}$$

Hieruit volgt

$$\frac{df}{dZ} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

Gelijkstelling van de reële delen in linkerlid en rechterlid, en idem voor de imaginaire delen, leidt tot de betrekkingen (2.25).

Voor de tweede afgeleide geldt evenzo

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dZ^2} \quad \text{en} \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = i^2 \frac{d^2 f}{dZ^2} = - \frac{d^2 f}{dZ^2}$$

zodat $\nabla^2 W = 0$, ofwel $\nabla^2(\phi + i\psi) = 0$, waaruit (2.24) volgt. Hiermee is het gestelde bewezen (geldt alleen in punten waar df/dZ niet gelijk is aan nul of oneindig).

Schrijven we $\partial W/\partial x$ uit dan ontstaat

$$\frac{\partial W}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = u_x - i u_y$$

zodat ook geldt

$$\frac{df}{dZ} = \frac{dW}{dZ} = u_x - i u_y \quad \text{en} \quad \left| \frac{dW}{dZ} \right| = u \quad (2.27)$$

De snelheid kan dus direct door differentiatie van de afbeeldingsfunctie worden berekend, zonder expliciete tussenkomst van ϕ of ψ .

D.m.v. conforme afbeelding kunnen stromen met diverse patronen van stroomlijnen en equipotentiaallijnen worden weergegeven, door verschillende keuzes van de afbeeldingsfunctie. Daarbij geldt ook nog dat stroomlijnen en equipotentiaallijnen kunnen worden verwisseld. Formeel wordt dit bereikt door W met een zuiver imaginair getal ($a i = a e^{i\pi/2}$, a reëel) te vermenigvuldigen (zie voorbeelden hieronder). Bovendien kunnen de waarden van W uit verschillende oplossingen lineair worden gesuperponeerd om een nieuwe

oplossing te verkrijgen; dat is een geldige procedure vanwege het lineaire karakter van de vergelijking van Laplace.

In het volgende worden oplossingen voor enkele standaard-stromingsproblemen gegeven en geanalyseerd. Het omgekeerde probleem van het vinden van de afbeeldingsfunctie waarmee aan gegeven randvoorwaarden wordt voldaan, d.w.z. het afleiden van concrete oplossingen, blijft hier buiten beschouwing, behalve voor een enkel geval waarin met een eenvoudige superpositie kan worden volstaan.

Voorbeeld 1: uniforme stroom

$$W = AZ \quad , \quad A = a + ib \quad , \quad a \text{ en } b \text{ reëel.} \quad (2.28)$$

$$\phi + i\psi = (a + ib)(x + iy) = ax - by + i(bx + ay)$$

$$\phi = ax - by \quad \text{en} \quad \psi = bx + ay$$

$$u_x = \partial\phi/\partial x = \partial\psi/\partial y = a \quad \text{en} \quad u_y = \partial\phi/\partial y = -\partial\psi/\partial x = -b$$

Dit stelt een parallelle stroming voor onder hoek $\arctan(-b/a)$ met de x-as (Fig. 2.7).

- Als $b = 0$: stroming in positieve x-richting (voor $a > 0$)

- Als $a = 0$: stroming in negatieve y-richting (voor $b > 0$)

(Het geval $a = 0$ is een voorbeeld van verwisseling van stroomlijnen en equipotentiaallijnen.)

Voorbeeld 2: stroming langs geknikte rand

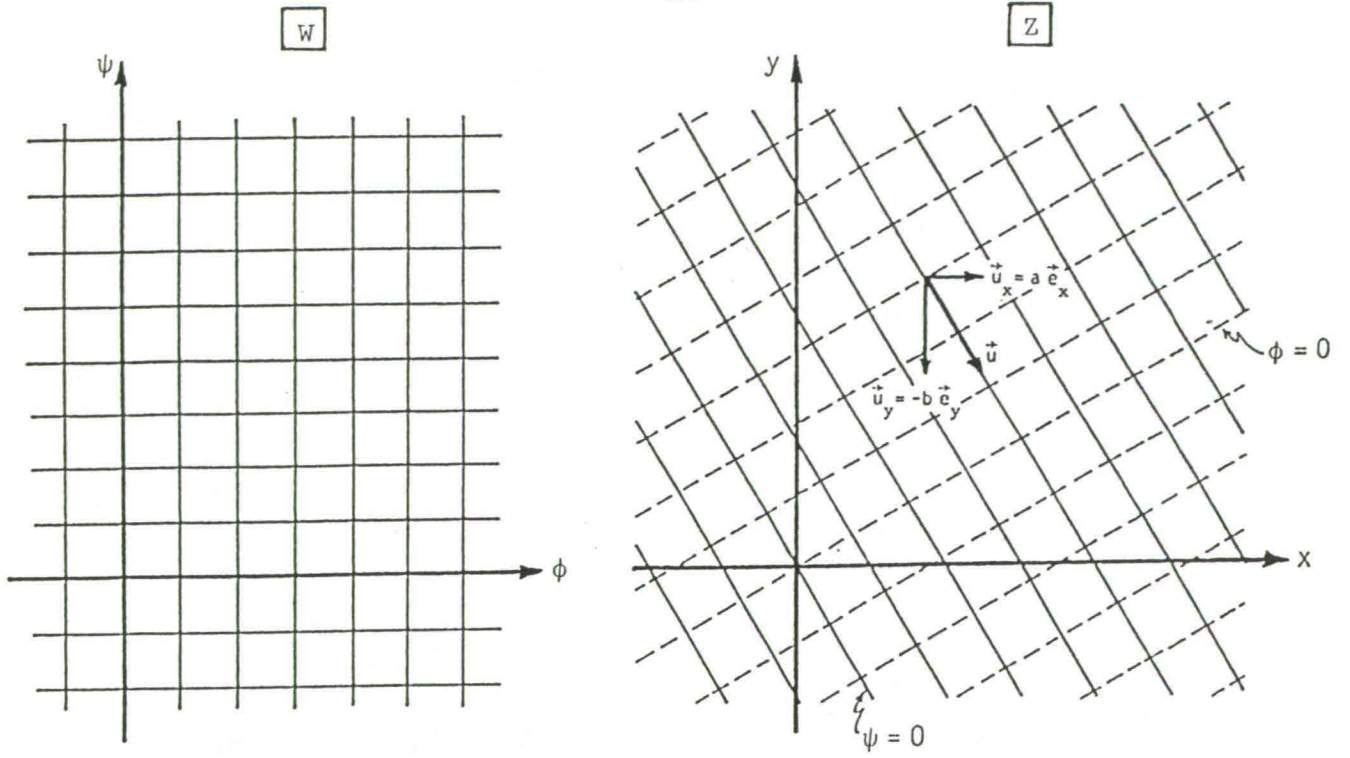
$$W = aZ^n \quad , \quad a \text{ en } n \text{ reëel en positief.} \quad (2.29)$$

Voer poolcoördinaten (r, θ) in volgens $Z = re^{i\theta}$:

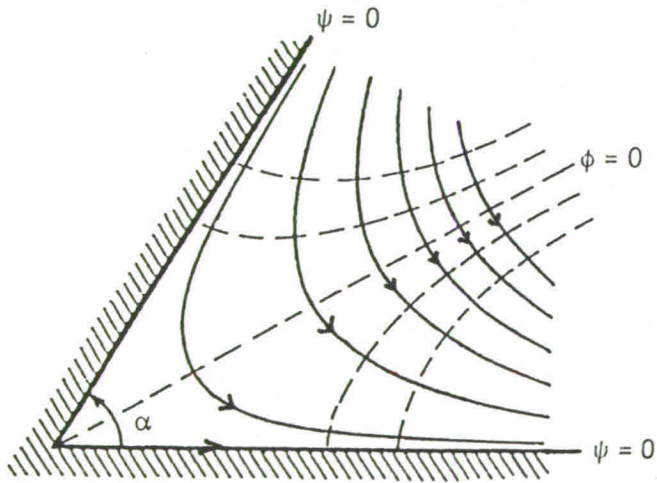
$$W = \phi + i\psi = ar^n e^{in\theta} = ar^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

dus

$$\phi = ar^n \cos n\theta \quad \text{en} \quad \psi = ar^n \sin n\theta$$

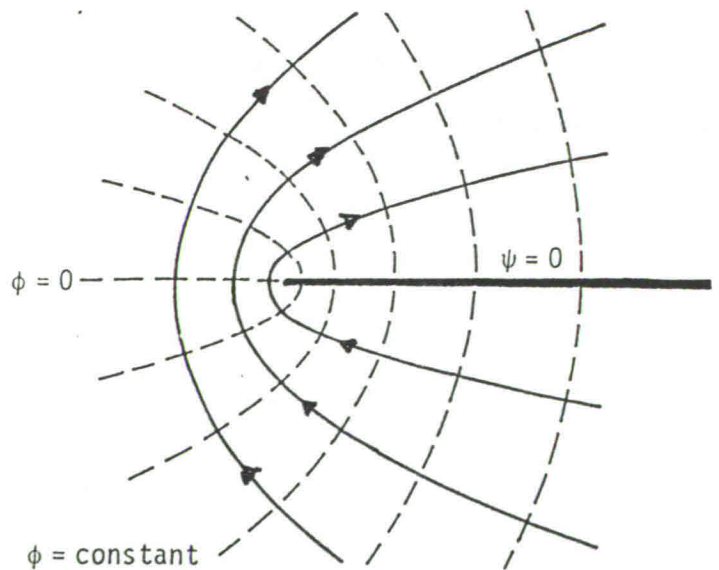


Figuur 2.7



Figuur 2.8

Figuur 2.9



en

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = n a r^{n-1} \cos n\theta$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = - \frac{\partial \psi}{\partial r} = - n a r^{n-1} \sin n\theta$$

$$u = \left| \frac{dW}{dZ} \right| = n a r^{n-1}$$

Voor de stroomlijnen geldt $\psi = \text{constant}$. Een bijzonder geval hiervan is $\psi = 0$; dit doet zich voor langs de rechte lijnen $n\theta = k\pi$, $k = 0, 1, 2, \dots$. We beperken ons nu tot de stroming in een sector van het Z-vlak met een hoek $\alpha = \pi/n$, zodanig dat $0 \leq \theta \leq \alpha$ (zie Fig. 2.8). Er zijn dan twee rechte lijnstukken waarlangs $\psi = 0$, nl. $\theta = 0$ en $\theta = \alpha = \pi/n$. We kunnen daarbij een aantal gevallen onderscheiden:

- $n > 2$ ($\alpha < \pi/2$): stroming in sector met scherpe hoek (Fig. 2.8)
- $n = 2$ ($\alpha = \pi/2$): stroming in kwadrant (geval $W = a Z^2$; zie voorbeeld pag. 21)
- $1 < n < 2$ ($\pi/2 < \alpha < \pi$): stroming in sector met stompe hoek
- $n = 1$ ($\alpha = \pi$): parallelle stroming langs rechte lijn
- $\frac{1}{2} < n < 1$ ($\pi < \alpha < 2\pi$): stroming om uitspringende hoek
- $n = \frac{1}{2}$ ($\alpha = 2\pi$): stroming om half-oneindig lange rechte; hierbij zijn de stroomlijnen parabolen ($W = a Z^{\frac{1}{2}}$, Fig. 2.9).

Als $n > 1$ (inspringende hoek) is er een stuwpunt ter plaatse van de knik ($r = 0$), waar $u = 0$. Als $n < 1$ (uitspringende hoek) geldt daarentegen $u \rightarrow \infty$ als $r \rightarrow 0$. Het knikpunt is een z.g. singulier punt; de afbeelding is daar niet conform (zie bv. de vijfhoek bij punt 5, Fig. 2.4).

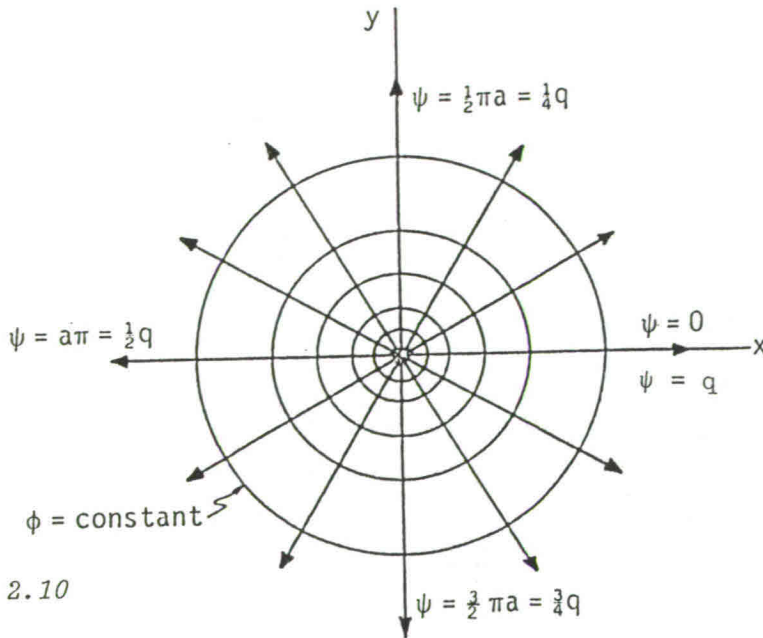
Voorbeeld 3: bronstroming

$$W = a \ln Z, \quad a \text{ reëel en positief.} \tag{2.30}$$

$$\phi + i \psi = a \ln (r e^{i\theta}) = a \ln r + i a \theta$$

$$\phi = a \ln r \quad \text{en} \quad \psi = a \theta$$

Voor de stroomlijnen geldt $\psi = a \theta = \text{constant}$; dit zijn rechte lijnen door de oorsprong (Fig. 2.10).



Figuur 2.10

De radiale snelheid is $u_r = \partial\phi/\partial r = r^{-1} \partial\psi/\partial\theta = a/r$. De tangentiële snelheid is $u_\theta = 0$. Dit stelt de stroming voor als gevolg van een bron in de oorsprong. De stroming is overal divergentievrij behalve in de bron. De netto uitstroom door elke gesloten kromme die niet de bron omsluit is dus gelijk aan nul.

Het uit de bron komend debiet (p.e.v. breedte loodrecht op het x,y-vlak) is

$$q = \oint u_r r d\theta = 2\pi a$$

zodat

$$W = a \ln Z = \frac{q}{2\pi} \ln Z \quad (2.31)$$

Dit stelt een bron voor, met sterkte q , in de oorsprong $Z = 0$. Een bron met sterkte q in een punt $Z = Z_0 = x_0 + i y_0$ wordt weergegeven door

$$W = \frac{q}{2\pi} \ln(Z - Z_0) \quad (2.32)$$

Wanneer a reëel en negatief is ($q < 0$) stellen bovenstaande vergelijkingen een putstroming voor.

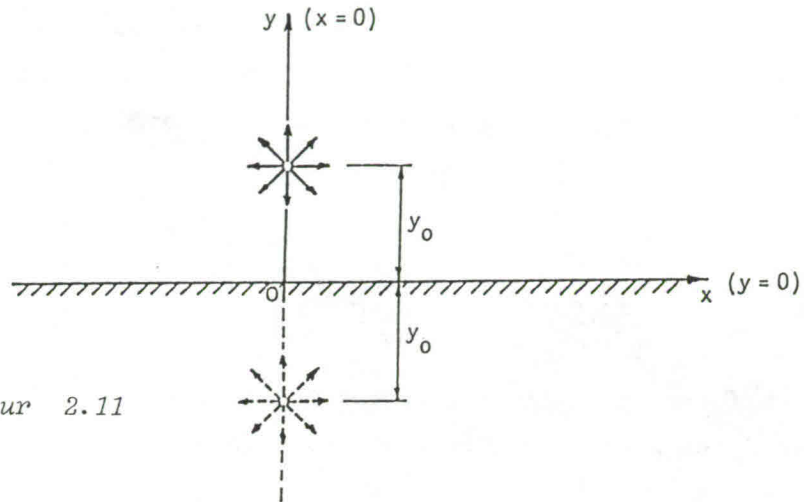
Wanneer $W = ia \ln Z$, met a reëel, geldt $\phi = -a\theta$ en $\psi = a \ln r$. Dit betekent een verwisseling van de stroomlijnen en equipotentiaallijnen van de bronstroming. De stroomlijnen zijn nu cirkels met de oorsprong als middelpunt (wervel). De bijbehorende snelheid is rotatievrij behalve in het middelpunt.

Voorbeeld 4: bron bij ondoorlatende wand

Het vloeistofdomein is nu beperkt tot het halfvlak $y \geq 0$. Ter plaatse van de lijn $y = 0$ is een ondoorlatende wand (dus $u_y = \partial\phi/\partial y = 0$ op $y = 0$). Op een afstand y_0 uit de wand ligt een bron, met bronsterkte q (Fig. 2.11).

Gevraagd: de grootte van de snelheid t.p.v. de wand.

We kiezen de oorsprong in de projectie van de bron op de wand. Als het vloeistofdomein oneindig uitgestrekt was, zonder wand, zou gelden



Figuur 2.11

$$W = W_1 = \frac{q}{2\pi} \ln(Z - Z_0) \quad \text{met} \quad Z_0 = i y_0$$

ofwel

$$W = W_1 = \frac{q}{2\pi} \ln(Z - i y_0)$$

Dit voldoet niet aan de randvoorwaarde ter plaatse van de wand. Denk nu de bron gespiegeld t.o.v. de wand, in het punt waar $x = 0$, $y = -y_0$. Daarvoor zou gelden

$$W = W_2 = \frac{q}{2\pi} \ln(Z + i y_0)$$

Omdat de vergelijking van Laplace lineair is, is lineaire superpositie van oplossingen ervan toegestaan (in dit geval W_1 en W_2). De som $W = W_1 + W_2$ voldoet aan de randvoorwaarde; dit volgt direct uit overwegingen van symmetrie. Dus

$$W = W_1 + W_2 = \frac{q}{2\pi} [\ln(Z - i y_0) + \ln(Z + i y_0)]$$

of

$$W = \frac{q}{2\pi} \ln[Z^2 + y_0^2] \quad (2.33)$$

Hieruit volgt

$$\frac{dW}{dZ} = \frac{q}{\pi} \frac{Z}{Z^2 + y_0^2} = \frac{q}{\pi} \frac{x + iy}{x^2 - y^2 + y_0^2 + 2ixy}$$

en

$$u|_{y=0} = \left| \frac{dW}{dZ} \right|_{y=0} = \frac{q}{\pi} \frac{|x|}{x^2 + y_0^2} \quad (\text{antw.})$$

De noodzaak tot spiegeling blijft bestaan ook als $y_0 = 0$, d.w.z. bij een bron in de wand. Immers, het hele debiet (q) moet dan door een halve cirkelomtrek in plaats van een hele, zoals bij een bron in een onbegrensd gebied. De afbeelding is in dit geval gegeven door

$$W = \frac{q}{\pi} \ln Z$$

Voorbeeld 5: bron in uniforme stroom

Gegeven: uniforme stroom in x-richting met snelheid $u_x = U = \text{constant}$; bron in oorsprong met sterkte q . Gevraagd: de stroomlijnen.

Uniforme stroom:

$$W = W_1 = UZ \quad \text{en} \quad \psi_1 = Uy$$

Bron:

$$W = W_2 = \frac{q}{2\pi} \ln Z \quad \text{en} \quad \psi_2 = \frac{q}{2\pi} \theta$$

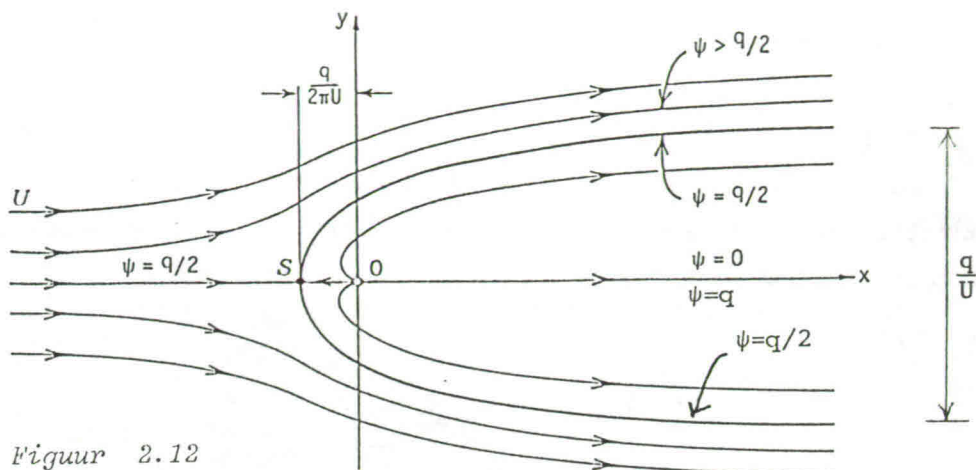
Superpositie:

$$W = W_1 + W_2 = UZ + \frac{q}{2\pi} \ln Z \quad (2.34)$$

Stroomlijnen:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Uy + \frac{q}{2\pi} \theta = U r \sin \theta + \frac{q}{2\pi} \theta = \text{constant}$$

Het resultaat van deze superpositie is gegeven in Fig. 2.12.



Figuur 2.12

Bovenstrooms van de bron ligt een stuwpunt, nl. daar waar $u_{x_1} = -u_{x_2}$, ofwel waar $U = \frac{q}{2\pi r}$, dus in het punt $(r = \frac{q}{2\pi U}, \theta = \pi)$. Omdat $\psi = q/2$ in het stuwpunt geldt ook $\psi = q/2$ op de stroomlijnen door het stuwpunt. De stroom is langs de as $y = 0$ van beide zijden naar het stuwpunt toe gericht (vanuit de uniforme stroom en vanuit de bron). Van het stuwpunt vandaan gaat de stroom langs twee stroomlijnen ($\psi = q/2$) die in benedenstroomse richting afbuigen tot ze voor $x \rightarrow \infty$ weer in de ongestoorde stroomrichting lopen, op een afstand $y = \pm q/2U$ van de x-as (limiet $r \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow 0$ c.q. $\theta \rightarrow 2\pi$, maar $y = r \sin \theta$ blijft eindig). De vloeistof uit de bron blijft binnen de begrenzing van deze twee stroomlijnen. Het stroomgebied binnen deze begrenzing kan eventueel worden vervangen door een star lichaam; op de buitenstroming heeft dat geen invloed.

Voorbeeld 6: stroom rond stilstaande cirkelcilinder

Zonder cilinder: uniforme stroom met snelheid U in x-richting. De stroom gaat om de cirkel(cilinder) heen met straal R en middelpunt in de oorsprong (Fig. 2.13). De bijbehorende afbeeldingsfunctie is

$$W = U\left(Z + \frac{R^2}{Z}\right) \quad (2.35)$$

Dan geldt

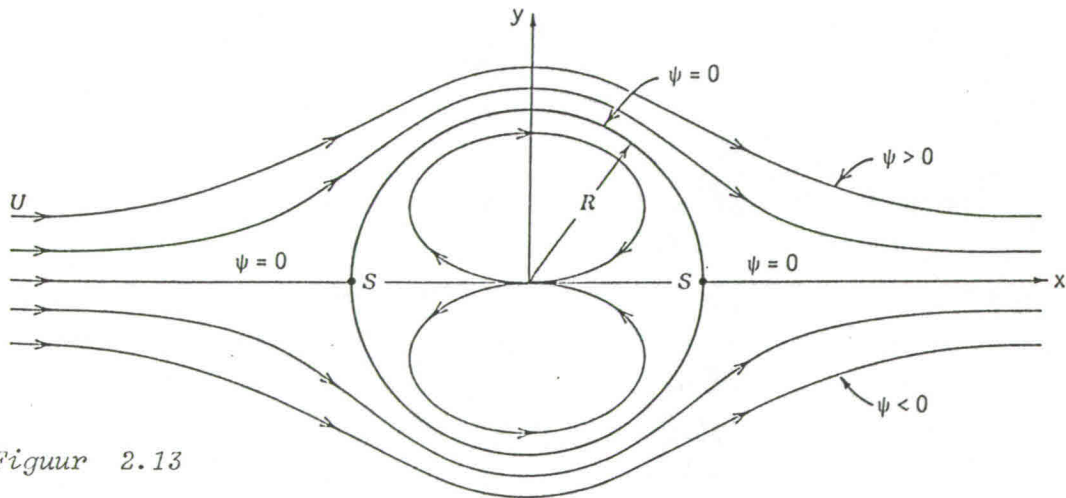
$$\phi + i \psi = U \left(r e^{i\theta} + \frac{R^2}{r} e^{-i\theta} \right)$$

dus

$$\phi = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta \quad \text{en} \quad \psi = U \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin \theta$$

Stroomlijnen: zie Fig. 2.13. Stroomlijnen $\psi = 0$ voor $\theta = 0$ en $\theta = \pi$ (symmetrie-as $y = 0$), en voor $r = R$ (dus wordt aan randvoorwaarde voldaan dat de cirkelomtrek een stroomlijn is).

N.B. In Fig. 2.13 zijn ook stroomlijnen getekend binnen de cirkelomtrek, conform de bovenstaande uitdrukking voor ψ voor $r < R$. Deze hebben vanzelfsprekend geen betekenis als de vloeistof om een ondoorlatende cilinder stroomt.



Figuur 2.13

Radiale snelheid: $u_r = U \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta$ (dus $u_r = 0$ voor $r = R \rightarrow$ O.K.).

Tangentiële snelheid: $u_\theta = -U \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta$. Deze varieert op de cirkelomtrek ($r = R$) volgens

$$u_\theta \Big|_{r=R} = -2U \sin \theta$$

Voor de absolute grootte van de snelheid op de cirkelomtrek geldt dus $u = 0$ in de stuwpunten, waarvoor $\theta = 0$ en $\theta = \pi$, en $u = 2U$ ter plaatse van de grootste contractie ($\theta = \pm \pi/2$).

De druk volgt uit Bernoulli:

$$\Delta p = p - p_\infty = \frac{1}{2} \rho (U^2 - u^2)$$

Langs de cirkelomtrek ($r = R$) is $u = u_\theta$ zodat

$$\Delta p \Big|_{r=R} = \frac{1}{2} \rho U^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

Deze varieert van $\frac{1}{2} \rho U^2$ in de stuwpunten tot $-\frac{3}{2} \rho U^2$ in de punten van sterkste contractie. Deze drukverdeling is symmetrisch, niet alleen t.o.v. de lijn $y = 0$ ($\theta = 0$ en $\theta = \pi$), evenwijdig aan de stroomrichting, maar ook t.o.v. de lijn $x = 0$ ($\theta = \pm \pi/2$), d.w.z. dwars op de stroomrichting. De resultante van de drukkrachten op de omtrek heeft dus de waarde nul (paradox van d'Alembert - zie b70).

Voorbeeld 7: stroming als gevolg van bewegende cilinder

In vergelijking (2.35) stelt $W = UZ$ de ongestoorde, parallelle stroom voor met snelheid U . De term UR^2/Z stelt de storing voor die het gevolg is van de aanwezigheid van de stilstaande cilinder (stilstaand t.o.v. het Oxy-stelsel).

We gaan nu uit van een ongestoorde vloeistof in rust (t.o.v. Oxy), en een ten opzichte daarvan met snelheid U in de richting $-\vec{e}_x$ bewegende cilinder. In dat geval zijn de snelheden uitsluitend het gevolg van de bewegende cilinder, en geldt

$$W = U \frac{R^2}{Z} \tag{2.36}$$

De hiermee overeenkomende snelheden gelden op het moment waarop de as van de cilinder door de oorsprong ($Z = 0$) gaat.

De kinetische energie van de vloeistof buiten de cilinder (p.e.v. aslengte) is

$$E_k = \int_R^\infty \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right) r \, dr \, d\theta$$

Substitutie van

$$u = \left| \frac{dW}{dZ} \right| = \left| -\frac{UR^2}{Z^2} \right| = U \frac{R^2}{r^2}$$

en uitwerken geeft

$$E_k = (\pi R^2) \left(\frac{1}{2} \rho U^2\right) \quad (2.37)$$

Dit is (toevallig) juist gelijk aan de kinetische energie van de verplaatste vloeistof (met snelheid U).

Merk op dat (2.36) en (2.37) geldig zijn ongeacht of U constant is of in de tijd varieert; dit volgt uit het gegeven dat op ieder ogenblik de potentiaal in het hele gebied uitsluitend door de op dat moment geldende randvoorwaarden wordt bepaald. (Deze onmiddellijke werking op afstand is fysisch niet realistisch vanwege de eindige voortplantingssnelheid van drukvariaties in de vloeistof; in het hier gehanteerde model van een onsamendrukbare vloeistof is die snelheid theoretisch echter oneindig groot.)

Wanneer de cylinder met constante snelheid beweegt oefenen de vloeistof en de cylinder volgens de potentiaaltheorie geen kracht op elkaar uit (paradox van d'Alembert). Wanneer de cylinder echter versnelt of vertraagt is dit niet het geval. Immers, als U in de tijd varieert doet E_k dat ook; de toeneming van E_k p.e.v. tijd wordt geleverd door het vermogen van de kracht (K) die de cylinder op de vloeistof uitoefent:

$$K U = \frac{dE_k}{dt}$$

Substitutie van (2.37) geeft

$$K = \rho \pi R^2 \frac{dU}{dt} \quad (2.38)$$

We zien dat in versnelde (of vertraagde) beweging van de cylinder de kracht tussen cylinder en vloeistof ongelijk is aan nul, en wel gelijk aan de massa van de verplaatste vloeistof maal de versnelling van de cylinder. Om de cylinder een versnelling te geven (door een uitwendige kracht) moet dus niet alleen de traagheid van de cylinder zelf worden overwonnen maar ook die van het omringende water; de met het laatste overeenkomende effectieve vloeistofmassa (de grootheid $\rho \pi R^2$ in 2.38) wordt in dit verband "toegevoegde massa" genoemd. (Bij een lichaam van willekeurige vorm is deze overigens niet gelijk aan de massa van de verplaatste vloeistof; voor de cirkelcylinder is dit slechts bij uitzondering het geval.)

Het begrip toegevoegde massa speelt een belangrijke rol in allerlei problemen van dynamische wisselwerkingen tussen constructies en vloeistoffen (b.v. trillingen van offshore constructies, scheepsbewegingen). De behandeling daarvan komt hier echter niet aan de orde.

$$i_w = \lambda \frac{U^2}{gR} = \lambda \frac{Q^2}{gRA^2}$$

(Formuleringen in termen van de Chézy-coëfficiënt $C = \sqrt{g/\lambda}$ zijn ook mogelijk maar die worden hier niet gegeven.)

We nemen nu aan dat bovenstaande weerstandsrelaties lokaal in een langzaam variërende stroom eveneens gelden. Daaruit is de verhanglijn te berekenen. Daartoe gaan we als tussenstap over op de energiehoogte boven de bodem (E) via $E = H - z_b$ (Fig. 3.1):

$$\frac{dE}{ds} = \frac{dH}{ds} - \frac{dz_b}{ds} = i_b - i_w$$

Via $E = d_m + \alpha U^2/2g$ werken we dit vervolgens om naar een vergelijking voor de diepte (d_m). Daartoe berekenen we eerst de variatie van de snelheidshoogte met d_m bij constante Q:

$$\frac{d}{dd_m} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) = \frac{\alpha}{2g} \frac{d}{dd_m} \left(\frac{Q^2}{A^2} \right) = - \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{dA}{dd_m} = - \alpha \frac{Q^2 B}{gA^3} = - \alpha \frac{U^2}{g \langle d \rangle}$$

$$\text{ofwel } \frac{d}{dd_m} \left(\alpha \frac{U^2}{2g} \right) = - \alpha \frac{U^2}{g \langle d \rangle} = - Fr^2$$

Dit geeft

$$\frac{dE}{dd_m} = \frac{d}{dd_m} \left(d_m + \alpha \frac{U^2}{2g} \right) = 1 - Fr^2$$

Hierin is Fr het kental van Froude. Dit is zó gedefinieerd dat $Fr = 1$ bij kritische stroming (waarvoor E minimaal is, $dE/dd_m = 0$). De diepte waarbij dit zich voordoet, voor de gegeven afvoer, is de **grensdiepte** (d_g).

Combinatie van bovenstaande resultaten geeft

$$\frac{dE}{ds} = (1 - Fr^2) \frac{dd_m}{ds} = i_b - i_w$$

ofwel, mits $Fr^2 \neq 1$:

$$\boxed{\frac{dd_m}{ds} = \frac{i_b - i_w}{1 - Fr^2}} \quad (3.1)$$

Voluit geschreven wordt dit

$$\boxed{\frac{dd_m}{ds} = \frac{i_b - \lambda Q^2/g RA^2}{1 - \alpha Q^2 B/gA^3}} \quad (3.2)$$

Dit is de vergelijking van Bélanger (1828). Voor een gegeven bodemhelling, dwarsprofiel (zoals in Fig. 3.1), bodemruwheid en afvoer zijn alle grootheden in het rechterlid van (3.2) bekend als functie van de lokale diepte.

Een bijzonder geval doet zich voor wanneer de teller in het rechterlid gelijk is aan nul, dus als $i_w = i_b$. De bijbehorende diepte heet de **evenwichtsdiepte** (d_e). Wanneer de feitelijke diepte deze waarde heeft is de versnelling nul en is de stroom eenparig.

Wanneer de stroming niet eenparig is kan de variatie van de diepte in de stroomrichting worden berekend door integratie van (3.2), uitgaande van een gegeven waarde van de diepte (d_m) in één dwarsdoorsnede (één waarde van s). Dit zal in het algemeen numeriek moeten gebeuren.

De formuleringen vereenvoudigen in geval van **twee-dimensionale stromen**, waarbij de snelheid U en de diepte (d) niet in dwarsrichting variëren. We werken dan p.e.v. breedte. Met $q = Ud = Q/B$ en $R = d_m = \langle d \rangle = d$ geldt dan

$$i_w = \lambda \frac{U^2}{gd} = \lambda \frac{q^2}{gd^3} \quad \text{en} \quad Fr^2 = \alpha \frac{U^2}{gd} = \alpha \frac{q^2}{gd^3}$$

zodat

$$d_e^3 = \frac{\lambda}{i_b} \frac{q^2}{g} \quad (\text{als } i_b > 0) \quad \text{en} \quad d_g^3 = \alpha \frac{q^2}{g}$$

Hiermee gaat (3.1) over in

$$\boxed{\frac{dd}{ds} = \frac{i_b d^3 - \lambda q^2/g}{d^3 - \alpha q^2/g}} \quad (3.3)$$

Als $i_b > 0$ kunnen we die als factor naar voren halen en d_e invoeren, en wordt (3.3):

$$\boxed{\frac{dd}{ds} = i_b \frac{d^3 - d_e^3}{d^3 - d_g^3}} \quad (3.4)$$

3.3 Typen verhanglijnen

Verhanglijnen worden in typen ingedeeld, aangeduid met combinaties van een letter (voor de bodemhelling) en een cijfer (voor d t.o.v. d_e en d_g):

Letteraanduiding:

- $i_b < 0$ (Adverse slope): letter A
- $i_b = 0$ (Horizontal): letter H

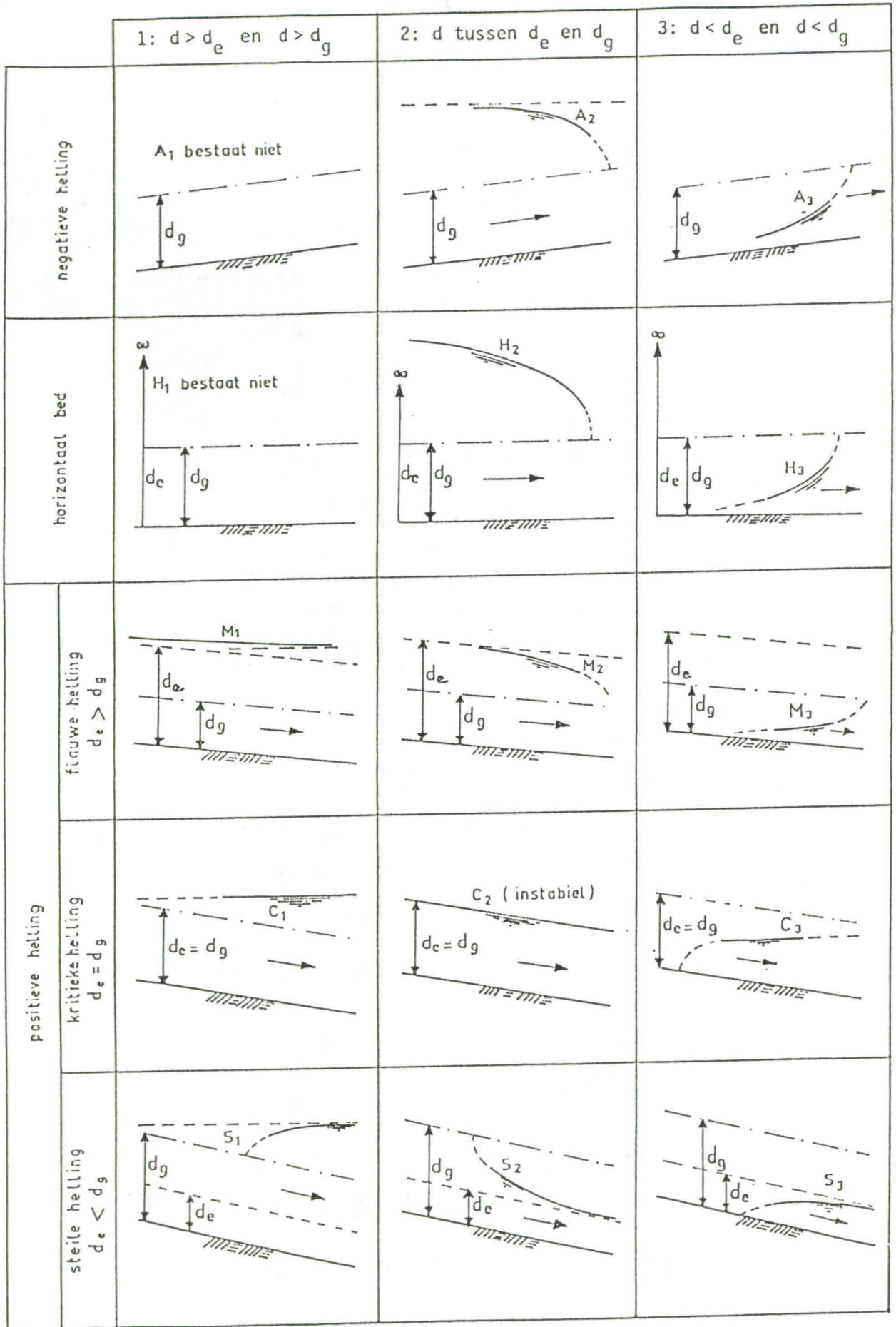
Voor $i_b > 0$ onderscheiden we drie gevallen; wanneer we korthedshalve bij benadering $\alpha = 1$ stellen zijn deze gegevens door

- $i_b < \lambda$, dus $d_e > d_g$ (Mild slope): letter M
- $i_b = \lambda$, dus $d_e = d_g$ (Critical slope): letter C
- $i_b > \lambda$, dus $d_e < d_g$ (Steep slope): letter S

Cijferaanduiding:

- $d > d_e$ en $d > d_g$: cijfer 1 (subkritische stroom)
- d tussen d_e en d_g : cijfer 2
- $d < d_e$ en $d < d_g$: cijfer 3 (superkritische stroom)

(Voor deze klassificatie doen we alsof d_e oneindig is als $i_b = 0$ of $i_b < 0$.)



Figuur 3.2

Opmerkingen:

- typen Λ_1 en H_1 bestaan niet;
- $dd/ds \rightarrow 0$ als $d \rightarrow d_e$: diepte nadert asymptotisch tot d_e (behalve als $d_e = d_g$);
- $dd/ds \rightarrow \pm \infty$ als $d \rightarrow d_g$: verhanglijn loopt steiler naarmate d de waarde d_g nadert (behalve als $d_e = d_g$); te steil: stroom niet langzaam variërend, afleiding niet geldig.
- $dd/ds \rightarrow i_b$ als $d \rightarrow \infty$ (d.w.z. $d \gg d_e$ en $d \gg d_g$): waterspiegel vrijwel horizontaal (zoals in diep stuwmeer).

Met inachtneming van bovenstaande punten is het verloop van elk type verhanglijn in kwalitatieve zin te schetsen. De resultaten staan in Fig. 3.2.

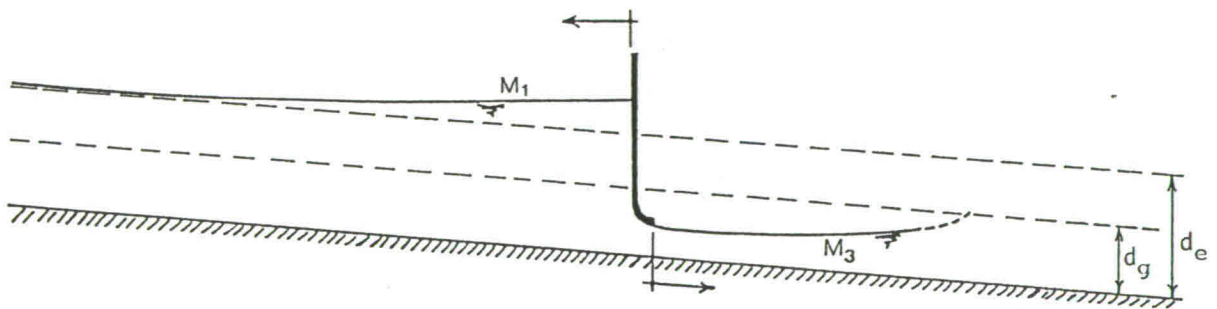
3.4 Randvoorwaarden en aansluitvoorwaarden

De verhanglijn-vergelijking (3.1 of 3.2 of 3.3 of 3.4) is van de eerste orde, dus in slechts één punt (s) is een randvoorwaarde (r.v.w.) nodig. Hierbij is het van belang dat kleine storingen (b.v. als gevolg van het iets heffen van een stuw) alleen in subkritische stromen zich stroomopwaarts kunnen voortplanten. Daarom geldt:

- superkritische stroom is bepaald door bovenstroomse r.v.w.
- subkritische stroom is bepaald door benedenstroomse r.v.w.

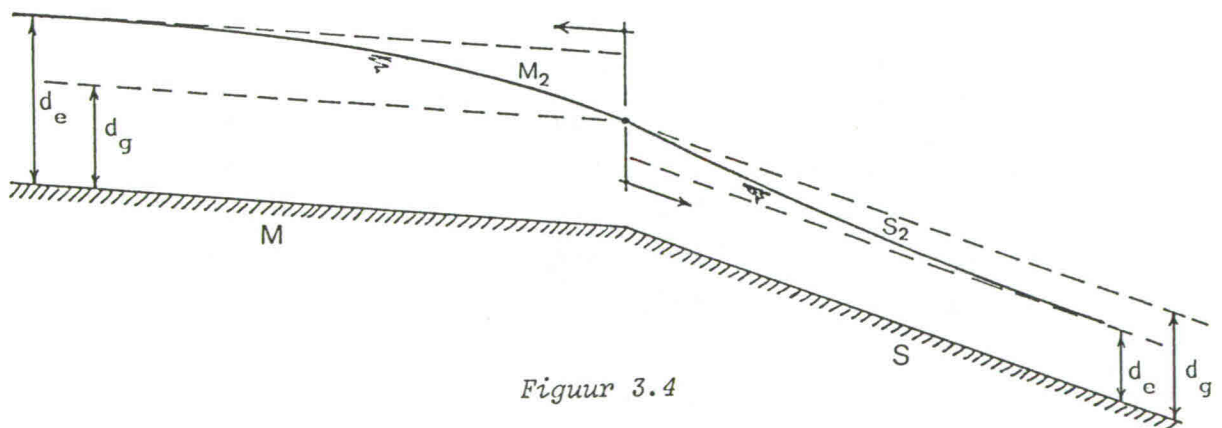
De overgang van subkritische naar superkritische stromen kan alléén plaatsvinden bij discontinuïteiten in de waterloop (b.v. een abrupte vergroting van de bodemhelling, of een constructie zoals een stuw). Bij stuwen bv. is de stroming bovenstrooms subkritisch (verhanglijn bepaald door hoge waterniveau boven de stuw) en benedenstrooms superkritisch (verhanglijn bepaald door lage waterniveau juist benedenstrooms van de stuw). Bij gegeven Q zijn de waterstanden aan weerszijden van de stuw met Bernoulli te berekenen (zie b70) zodat de randvoorwaarden aan beide zijden daarmee bekend zijn. Zie Fig. 3.3 voor een voorbeeld op een flauwe helling (type M), waarbij de verhanglijn bovenstrooms van het

type M_1 is en benedenstrooms van het type M_3 . (De plaats van de bepalende randvoorwaarden is in de figuren met een pijl aangegeven.)



Figuur 3.3

De overgang van subkritisch naar superkritisch kan ook plaatsvinden waar de bodemhelling abrupt toeneemt tot het S-type. Wanneer daarbij de stroming bovenstrooms van de knik subkritisch is, zoals in Fig. 3.4, treedt kritische diepte op ter plaatse van de knik (vergelijk met vrij overstortende straal); deze dient als r.v.w. naar beide zijden. (Merk op dat de verandering van i_b wel invloed heeft op d_e maar niet op d_g .)



Figuur 3.4

De overgang van superkritische naar subkritische stroom treedt alleen op in een watersprong; de plaats daarvan is niet gebonden aan een discontinuïteit in de waterloop. Bovenstrooms van de sprong (diepte d_1) is de stroming superkritisch, bepaald door een verder bovenstrooms gelegen r.v.w. (punt A, Fig. 3.5). Benedenstrooms van de sprong (diepte

d_2) is de stroming subkritisch, bepaald door een verder benedenstrooms gelegen r.v.w. (punt B, Fig. 3.5). Voor gegeven Q of q is er één combinatie van d_1 en d_2 waarbij de watersprong stationair is, nl. de combinatie waarbij behalve Q (of q) ook de impulsverdracht (F) constant is, zodat de sprong juist in evenwicht is (wanneer we de bodemweerstand en de gewichtscomponent langs de helling verwaarlozen):

$$F = \frac{1}{2} \rho g d_1^2 + \rho q^2/d_1 = \frac{1}{2} \rho g d_2^2 + \rho q^2/d_2$$

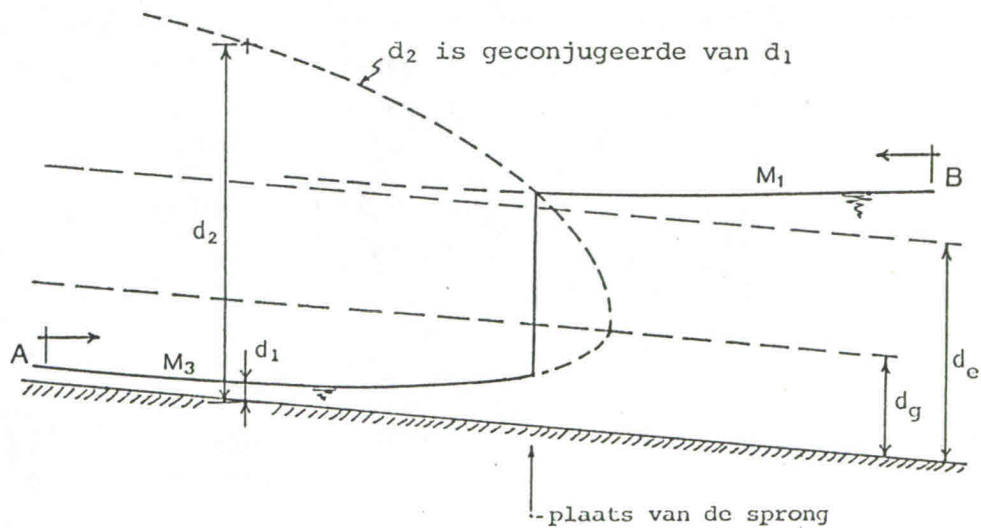
of

$$\frac{1}{2}(d_1 + d_2) d_1 d_2 = \frac{q^2}{g} = d_g^3$$

De combinaties van d_1 en d_2 die hieraan voldoen heten geconjugeerd (zie b70). Bij gegeven q en d_1 bv. is d_2 te berekenen als

$$d_2 = \frac{1}{2}d_1 \left[\left(1 + 8 \frac{q^2}{g d_1^3} \right)^{1/2} - 1 \right]$$

Hieruit kan per waarde van d_1 van de verhanglijn bovenstrooms van de sprong de daaraan geconjugeerde waarde d_2 worden berekend; waar deze gelijk is aan de diepte van de benedenstroomse verhanglijn (M_1 in Fig. 3.5) is de berekende plaats van de sprong. E.e.a. is geïllustreerd in Fig. 3.5 (waarin de lengte-afmeting van de sprong is verwaarloosd t.o.v. die van de verhanglijnen).

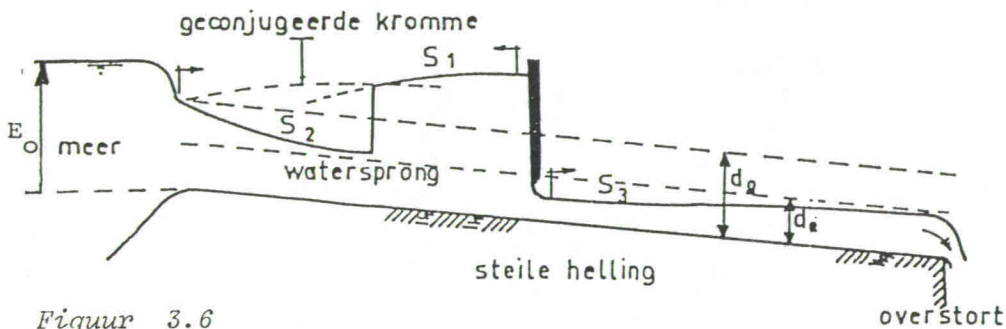


Figuur 3.5

3.5 Voorbeelden (kwalitatief)

Twee voorbeelden van gecombineerde verhanglijnen zijn gegeven in Fig. 3.6 en 3.7. In beide gevallen zijn het waterpeil in het stuwmeer en de stuw-opening gegeven. Gevraagd: q en de diepten.

Voorbeeld 1: afvoer uit stuwmeer via S-type helling



Figuur 3.6

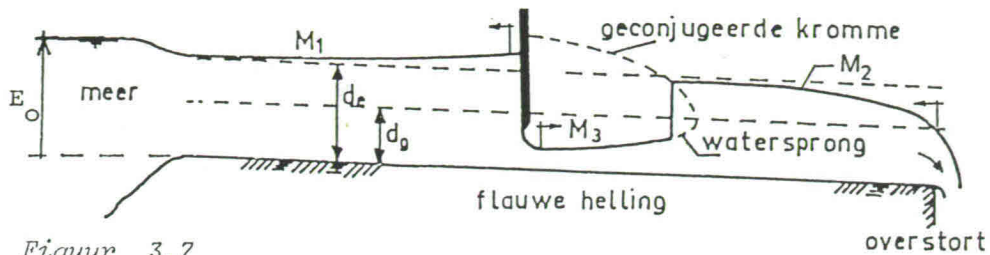
In afwezigheid van de stuw zou zich op deze helling vanaf het stuwmeer een S_2 -type verhanglijn instellen, met kritische stroming in de inlaat. We veronderstellen dat de stuw zó ver benedenstrooms ligt dat ondanks de stuw de stroming bij de inlaat kritisch is. (Of dit juist is blijkt in het vervolg van de berekening.) Bij gegeven stuwpeil (E_0 boven de kanaalbodem bij de inlaat) kan de afvoer q dan worden berekend zoals voor een volkomen overlaat, en wel volgens $q = \frac{2}{3}E_0 \sqrt{\frac{2}{3}gE_0}$. Bovendien ligt de verhanglijn S_2 dan vast vanaf de inlaat.

Uit de waarden van q en de stuwopening volgen de diepten bij de stuw m.b.v. Bernoulli. S_1 is dan bekend waarna de plaats van de watersprong te bepalen is via de geconjugeerde diepte. S_3 is bepaald door de r.v.w. bij de stuw.

N.B. Hier is q onafhankelijk van de stuw-opening. Een kleinere opening resulteert in een hogere ligging van S_1 , waardoor de watersprong verder stroomopwaarts komt. Bij een voldoende kleine opening is er geen sprong meer en heerst er subkritische stroming bij de inlaat (onvolkomen

overlaat); in dat geval is q wél afhankelijk van de stuw-opening, en is iteratie nodig (zie het volgende voorbeeld).

Voorbeeld 2: afvoer uit stuwmeer via M-type helling



Figuur 3.7

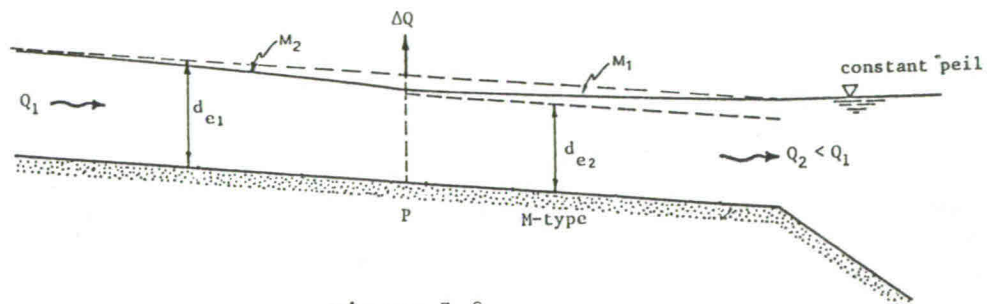
De stroming bij de inlaat is subkritisch, en is beïnvloed door de r.v.w. bij de stuw die zelf ook onbekend is. Er is iteratie nodig: schat q → bereken de diepten bij de stuw via Bernoulli → M_1 kromme bepaald; controleer of H daarvan bij de inlaat samenvalt met het stuwpeil. Herhaal dit zo nodig met andere schatting van q tot een voldoende nauwkeurigheid is bereikt. Dan is q bekend en ook de waterstand benedenstrooms van de stuw; M_3 ligt dan vast, evenals M_2 (vanuit $d = d_g$ t.p.v. de overstort). De plaats van de watersprong wordt bepaald via de geconjugeerde diepten. (Bij korte afstand tussen stuw en overstort is er geen watersprong maar strekt M_3 zich uit tot aan de overstort.)

Voorbeeld 3: wateronttrekking

Een rivier met bovenafvoer Q_1 en M-type helling mondt uit in een stuwmeer met gegeven peil. Op enige afstand bovenstrooms van het stuwmeer (in punt P) wordt water aan de rivier onttrokken (b.v. via een inlaatwerk voor irrigatie of voor drinkwatervoorziening) met een constant debiet ΔQ (zie Fig. 3.8).

Bovenstrooms van P is $Q = Q_1$ met bijbehorende evenwichtsdiepte d_{e_1} ; benedenstrooms van P is $Q = Q_2 = Q_1 - \Delta Q$; de bijbehorende evenwichtsdiepte d_{e_2} is kleiner dan d_{e_1} . Beide zijn groter dan de

bijbehorende grensdiepte (M-type). De stroming is subkritisch dus benedenstroomse r.v.w. is bepalend. Voor tak 2 is dat het stuwpeil.



Figuur 3.8

Daarmee ligt de M_1 -verhanglijn tussen stuwmeer en P vast, en dus ook de diepte in P. Deze is vervolgens de benedenstroomse r.v.w. voor de verhanglijn bovenstrooms van P welke van het M_2 -type is. Op grote afstand bovenstrooms van P wordt de stroming eenparig (asymptotisch).

N.B. In hoofdstuk 5 wordt ingegaan op de consequenties van een onttrekking of andere ingrepen (zandonttrekking, versmalling etc.) voor de bodemligging.

3.6 Berekeningsmethoden

In de praktijk worden altijd numerieke methoden gehanteerd, alleen al vanwege de niet analytisch weer te geven geometrie. (Bovendien is in toepassingen meestal sprake van niet-stationaire stromen; zie daarvoor het vak "Lange Golven", b73.) De geometrie is echter wel bekend (in arrays) zodat het rechterlid in verg. 3.1 of 3.2 of 3.3 of 3.4 bij gegeven Q bekend is als functie van de diepte (d) voor elk dwarsprofiel (elke s). Symbolisch weergegeven:

$$\frac{dd}{ds} = f(d;s) \quad (3.5)$$

Hier is f een voor de betreffende waterloop bekende functie van d en s. Voor prismatische (gedeelten van) waterlopen varieert f niet met s:

$$\frac{dd}{ds} = f(d) \quad (3.6)$$

Integratie hiervan kan met standaard-procedures gebeuren, bv. met een predictor-corrector methode. Stel $d = d_j$ is bekend voor $s = s_j$. Een eerste schatting (predictor) $d_{j+1}^{(1)}$ van d_{j+1} voor $s = s_{j+1} = s_j + \Delta s$ kan worden gemaakt op basis van

$$\Delta d^{(1)} = f(d_j) \Delta s$$

waarmee $d_{j+1}^{(1)} = d_j + \Delta d^{(1)}$ bekend is. De corrector: $d_{j+1}^{(2)} = d_j + \Delta d^{(2)}$ volgt uit

$$\Delta d^{(2)} = \frac{1}{2} [f(d_{j+1}^{(1)}) + f(d_j)] \Delta s$$

Voor niet-prismatische waterlopen kan de s -variatie direct in rekening worden gebracht (verg. 3.5), zowel in de predictor als in de corrector.

Analytische methoden van integratie zijn ontwikkeld voor meer eenvoudige of sterker geschematiseerde situaties, in het bijzonder op basis van de vergelijking van Bélanger voor twee-dimensionale stroming met constante parameters (i_b , d_e , d_g). Op de algemene exacte oplossing daarvan gaan we hier niet in. In plaats daarvan behandelen we hier:

- (a) een benaderende oplossing voor de complete vergelijking
- (b) een exacte oplossing voor horizontale bodem

Ad (a)

Als d relatief weinig van d_e afwijkt ($d = d_e + \Delta d$ met $|\Delta d| \ll d_e$) geldt $d^3 - d_e^3 = (d - d_e) (d^2 + dd_e + d_e^2) \approx 3d_e^2 \Delta d$.

Als ook geldt $d^3 - d_g^3 \approx d_e^3 - d_g^3$ wordt de vergelijking van Bélanger:

$$\frac{dd}{ds} = \frac{d(\Delta d)}{ds} \approx i_b \frac{3d_e^2}{d_e - d_g} \Delta d = L^{-1} \Delta d \quad (3.7)$$

Hierin is de lengte L gedefinieerd als

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d_e^3 - d_g^3}{3i_b d_e^2} = \frac{1 - Fr_e^2}{3i_b} d_e \quad (3.8)$$

waarin F_e het kental van Froude is bij de evenwichtsstroming:

$$Fr_e^2 = \frac{U^2}{gd_e} = \frac{q^2}{gd_e^3} = \frac{d_g^3}{d_e^3} = \frac{i_b}{\lambda}$$

Als we L als een constante lengte beschouwen kan (3.7) worden geïntegreerd tot

$$\Delta d = \Delta d_o \exp \left(\frac{s - s_o}{L} \right) \quad (3.9)$$

waarbij als r.v.w. is gebruikt: $\Delta d = \Delta d_o$ waar $s = s_o$. De grootheid L is blijkbaar een kenmerkende lengte van dit type verhanglijn, nl. de lengte waarover een relatief kleine afwijking van de evenwichtsdiepte varieert met een factor e .

Voorbeeld: Stel $i_b = 10^{-4}$, $\lambda = 0,004$ ($C = 50 \text{ m}^{1/2}/\text{s}$), $q = 4 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$. Er geldt $i_b < \lambda$ dus de helling is van het M-type; $d_e = (\lambda q^2 / g i_b)^{1/3} = 4 \text{ m}$; $Fr_e^2 = i_b / \lambda = 0.025 \rightarrow L = 13 \text{ km}$. Stel dat een stuw een lokale verhoging van de waterspiegel geeft van $\Delta d_o = 0.5 \text{ m}$. Op een afstand 10 km bovenstrooms ($s - s_o = -10 \text{ km}$) is dan $\Delta d = 0.23 \text{ m}$. De verhoging is gereduceerd tot 0.05 m (0.1 Δd_o) waar $s - s_o = L \ln(\Delta d / \Delta d_o) = L \ln(0.1) = -2.3 L = -29.9 \text{ km}$, ofwel ca 30 km bovenstrooms van de stuw.

Ad (b)

Op een horizontale bodem ($i_b = 0$) reduceert de verhanglijn-vergelijking voor twee-dimensionale stroming (3.3) tot

$$\frac{dd}{ds} = \frac{-\lambda q^2 / g}{d^3 - d_g^3} = -\lambda \frac{d_g^3}{d^3 - d_g^3}$$

Integratie hiervan geeft

$$\frac{1}{4}d^4 - \frac{d_g^3 d}{g} + \lambda d_g^3 s = \text{constant}$$

De waarde van de constante volgt uit de randvoorwaarde $d = d_o$ waar $s = s_o$. Bij elke aangenomen d volgt dan direct de bijbehorende s . Voor toepassingen wordt verwezen naar de vraagstukkenbundel.

4. TRANSPORTPROCESSEN

4.1 Inleiding

Het onderwerp van dit hoofdstuk is het transport van een opgeloste of zwevende stof (of andere grootheden zoals warmte) in open waterlopen. Het behoeft geen betoog dat dit een onderwerp is van grote praktische betekenis in verband met de zorg voor een goede waterkwaliteit.

Een gedetailleerde maar toch overzichtelijke behandeling van transportprocessen in open water wordt gegeven in een boek van Fischer e.a. (1979).

De behandeling van transportprocessen in dit hoofdstuk is gebaseerd op de veronderstelling dat de beschouwde stof een verwaarloosbare invloed heeft op de vloeistofstroming. Dit gaat natuurlijk niet altijd op omdat de massadichtheid van het water beïnvloed kan worden; een bekend voorbeeld hiervan is de invloed van het zoutgehalte. In estuaria b.v. (mondingsgebieden van rivieren in zee) kan dit de stroming zeer sterk beïnvloeden. In dit inleidende hoofdstuk wordt echter uitgegaan van een constante dichtheid, onafhankelijk van de concentratie van de meegevoerde stof.

Afhankelijk van de schaal waarop de transporten worden beschouwd zijn diverse transportmechanismen te onderscheiden:

- *moleculaire diffusie*: tijd-gemiddelde waarde van fluctuerende micro-transporten door de z.g. warmtebeweging van de moleculen.
- *advectie* of meevoering, ook convection genoemd: transport met (massacentrum van) infinitesimaal vloeistofpakketje mee (met stroomsnelheid \vec{u}).
- *turbulente diffusie*: tijd-gemiddelde waarde van fluctuerende advectieve transporten door turbulente bewegingen van kleine vloeistof"pakketjes".

- *dispersie*: menging als gevolg van laterale gradiënten in gemiddelde snelheid en gemiddelde concentratie (dit komt naar voren bij integratie over de diepte of over het hele dwarsprofiel).

In open waterlopen, met turbulente stroming, is de moleculaire diffusie van ondergeschikte betekenis. De formulering ervan staat echter model voor die van turbulente diffusie en dispersie en wordt in het volgende daarom wel behandeld, zij het kort. We beginnen met een algemene formulering van de balansvergelijking.

4.2 Balansvergelijking (algemene vorm)

Stel dat een grootheid "X" (zout, sediment,) wordt getransporteerd in een drie-dimensionale stroming.

Zonder in dit stadium er op in te gaan welke van de in par. 4.1 genoemde fysische transportprocessen van belang zijn geven we het totale transport van X in een punt naar richting en intensiteit weer met een transportvector \vec{T} . De absolute waarde hiervan (T) stelt de hoeveelheid van X voor die per eenheid van (p.e.v.) tijd en p.e.v. oppervlak wordt getransporteerd in de richting van \vec{T} (door een vlak haaks op \vec{T}).

Neem nu een vlak waarvan we de twee zijden het label "-" resp. "+" geven. Laat \vec{e}_N een eenheidsvector zijn haaks op dit vlak, wijzend van - naar +. De overdracht van X p.e.v. tijd door een klein deel van dit vlak met oppervlak ΔA , in de richting van - naar +, is dan gelijk aan

$$\vec{T} \cdot \vec{e}_N \Delta A = T_N \Delta A \quad (4.1)$$

Dit passen we toe in het opstellen van een balans voor de voorraad van X in een klein ruimtelijk vast (Eulers) balansgebied G met ribben Δx , Δy , Δz en volume ΔV .

P.e.v. tijd gaat door het zijvlak $x = x_1$ van G naar binnen: $T_{x_1} \Delta y \Delta z$ (zie 4.1), en door $x = x_2$ naar buiten: $T_{x_2} \Delta y \Delta z$. Door deze twee zijvlakken gaat dus netto naar binnen:

$$(T_{x_1} - T_{x_2}) \Delta y \Delta z \approx \left(-\frac{\partial T_x}{\partial x} \Delta x\right) \Delta y \Delta z = -\frac{\partial T_x}{\partial x} \Delta V$$

Voor de overige vier zijvlakken gelden analoge uitdrukkingen. Het totaal transport naar binnen is dus

$$-\left(\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z}\right) \Delta V = -(\operatorname{div} \vec{T}) \Delta V = -(\nabla \cdot \vec{T}) \Delta V$$

We zien hieruit dat de divergentie van een transportvector het netto uitgaande transport door een gesloten oppervlak rondom een infinitesimaal volume voorstelt, gedeeld door dat volume.

Aan de eventuele productie van X kunnen verschillende processen bijdragen, voorgesteld door de z.g. *brontermen*. De som ervan is de netto productie p.e.v. volume en p.e.v. tijd ("Prod").

De volume-concentratie van X geven we aan met "c". Dan is $c\Delta V$ de voorraad van X in G, en $(\partial c/\partial t) \Delta V$ de toeneming ervan p.e.v. tijd.

De balans voor de voorraad van X in G luidt na substitutie van bovenstaande resultaten:

$$\frac{\partial c}{\partial t} \Delta V = -(\nabla \cdot \vec{T}) \Delta V + (\text{Prod}) \Delta V$$

ofwel

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{T} = \text{Prod} \quad (4.2)$$

Als X een *behouden* grootheid is zijn de brontermen gelijk aan nul en reduceert de balansvergelijking tot

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{T} = 0} \quad (4.3)$$

ofwel

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{T} = 0 \quad (4.3)$$

Dit is de *standaardvorm van alle behoudsvergelijkingen* .

Voorbeeld: massabalans van een compressibele vloeistof. Daarvoor is $c = \rho$, $\vec{T} = \rho\vec{u}$ en $\text{Prod} = 0$ (behoud van massa). De behoudsvergelijking voor de massa van de vloeistof is dus

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\vec{u}) = 0$$

N.B. Door de divergentie van de massastroom $\rho\vec{u}$ uit te schrijven ontstaat

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

De som van de eerste twee termen is juist gelijk aan de meebewegende afgeleide van ρ , zodat

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0$$

In een onsamendrukbare vloeistof is $D\rho/Dt = 0$ (wat niet inhoudt dat $\partial\rho/\partial t = 0$ of $\nabla\rho = 0$) en moet dus ook gelden $\nabla \cdot \vec{u} = 0$; het snelheidsveld moet dan divergentievrij zijn (zie par. 2.2).

4.3 Moleculaire diffusie

Moleculaire diffusie is het gemiddeld transport als gevolg van warmtebewegingen van de moleculen. In een isotroop medium (zoals water) vindt het transport van een stof met concentratie c door moleculaire diffusie plaats in de richting van de sterkste afneming van de concentratie, d.w.z. het is tegengesteld gericht aan de gradiënt van c . In goede benadering kunnen we de waarde van het transport evenredig stellen aan die van de gradiënt van c . Als evenredigheidsfactor voeren we de z.g. (coëfficiënt van) moleculaire diffusiviteit in (ϵ):

$$\vec{T} = - \epsilon \nabla c \tag{4.4}$$

De dimensie van ϵ is (lengte)²/(tijd) (m²/s in het SI), ongeacht de dimensie van de gediffundeerde stof.

De behoudsvergelijking (4.3) in geval van transport door moleculaire diffusie alleen is

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (\epsilon \nabla c) = 0$$

In geval van een homogene vloeistof (ϵ constant) reduceert dit tot

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} = \epsilon \nabla^2 c} \quad (4.5)$$

Dit is de standaard *diffusievergelijking*. Om inzicht te krijgen in de aard van oplossingen hiervan beperken we ons voorlopig tot een één-dimensionale situatie, waarbij het transport uitsluitend in één richting plaatsvindt, die we de x-richting noemen. Voor dat geval reduceert (4.5) tot

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (4.6)$$

Stel nu m.b.t. (4.6) dat een hoeveelheid m wordt geïnjecteerd op $t = 0$ in een vlak $x = 0$ terwijl verder op $t = 0$ voor alle $x \neq 0$ geldt $c = 0$ (beginvoorwaarde). Stel verder $c \rightarrow 0$ als $x \rightarrow \pm \infty$ (randvoorwaarde). De bijbehorende oplossing van (4.6) voor $c(x, t)$ wordt hier zonder afleiding gegeven. Deze luidt

$$c(x, t) = \frac{m}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\epsilon t}\right) \quad (4.7)$$

(te bewijzen door terugsubstitutie) ofwel

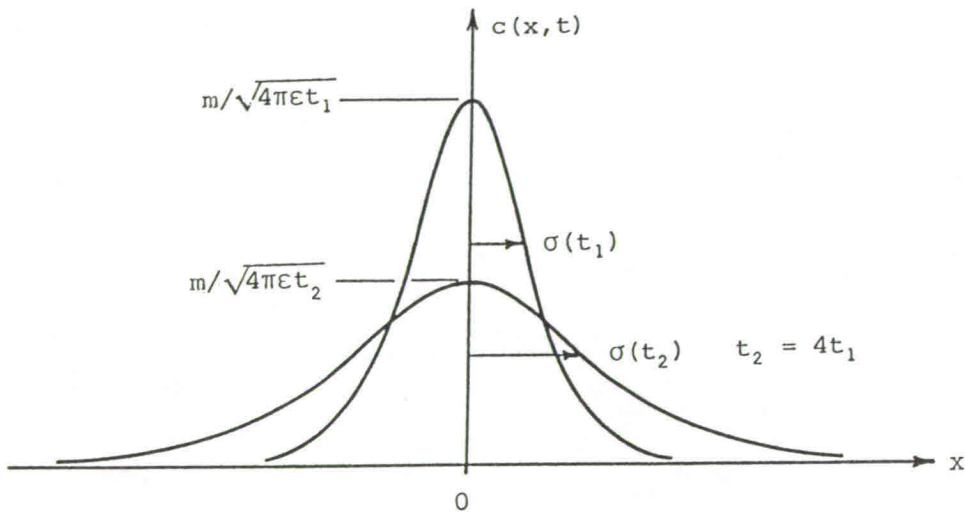
$$c(x, t) = \frac{m}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right)$$

waarin

$$\sigma_x = \sqrt{2\epsilon t}$$

De variatie van c met x verloopt voor elke t als een Gauss-kromme met maximum $m/\sqrt{4\pi\epsilon t}$ en "standaardafwijking" $\sigma = \sqrt{2\epsilon t}$ (Fig. 4.1). De totale voorraad van X is daarbij constant in de tijd:

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(x, t) dx = \frac{m}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) dx = m$$



Figuur 4.1 (vergl. 4.7)

We zien uit deze oplossing dat de concentratiepiek zich zijdelings uitbreidt evenredig met $\sqrt{\epsilon t}$; dit geldt algemeen voor diffusieprocessen, zoals volgt uit inspectie van (4.5) of (4.6), en ook uit een dimensie-beschouwing.

Voor isotroop transport in twee dimensies (x,y) geldt

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \epsilon \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) \quad (4.8)$$

De oplossing hiervan bij injectie van een hoeveelheid m op $t = 0$ in het punt $x = 0, y = 0$, bij overige begin- en randvoorwaarden conform het een-dimensionale geval, is de twee-dimensionale Gauss-functie:

$$c(x, y, t) = \frac{m}{4\pi\epsilon t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\epsilon t}\right) \quad (4.9)$$

Door substitutie van de radiale coördinaat $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ en van $\sigma = \sqrt{2\epsilon t}$ is dit verkort te schrijven als

$$c(x, y, t) = \frac{m}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)$$

Voor dit isotrope geval is de concentratie constant langs cirkels met het injectiepunt als middelpunt. De concentratie-piek breidt zich in radiale richting uit evenredig met $\sqrt{\epsilon t}$ (zoals in het één-dimensionale geval).

In het voorgaande zijn voor twee gevallen oplossingen gegeven van de diffusie-vergelijking voor de concentratie die het gevolg is van een instantane lozing in een punt. In gevallen waarbij de lozing gespreid plaats vindt in tijd en/of ruimte kan zo'n lozing worden opgedeeld in een aantal aansluitende pulslozingen van korte duur en kleine afmetingen; elk van die pulsen geeft een elementaire oplossing zoals (4.7) of (4.9). Superpositie daarvan geeft de totale oplossing. Deze procedure is mogelijk doordat de diffusievergelijking lineair is in de concentratie. (Dit geldt eveneens voor de hieronder behandelde vergelijkingen voor de concentratie waarbij naast diffusie ook advection optreedt.)

4.4 Advection en diffusie

We gaan nu een situatie beschouwen waarin het transport niet alleen door diffusie plaatsvindt maar tegelijk door meevoering of advection. De vector voor het volume-transport van de stromende vloeistof is juist de stroomsnelheid \vec{u} ; bij een concentratie c van meegevoerde stof is het advectief stoftransport p.e.v. oppervlak dus gegeven door $c\vec{u}$. Het transport door advection ($c\vec{u}$) en diffusie ($-\epsilon\nabla c$) gezamenlijk is

$$\vec{T} = c\vec{u} - \epsilon\nabla c \quad (4.10)$$

Substitutie hiervan in de behoudsvergelijking $\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{T} = 0$ levert

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c\vec{u}) - \nabla \cdot (\epsilon\nabla c) = 0 \quad (4.11)$$

Dit is de z.g. *advection-diffusie vergelijking*.

Voor een onsamendrukbare ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) en homogene ($\nabla \epsilon = 0$) vloeistof reduceert (4.11) tot

$$\boxed{\frac{\partial c}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla c - \epsilon \nabla^2 c = 0} \quad (4.12)$$

of, in termen van de meebewegende afgeleide ($D/Dt = \partial/\partial t + \vec{u} \cdot \nabla$, zie b70):

$$\frac{Dc}{Dt} = \epsilon \nabla^2 c \quad (4.13)$$

De gedaante hiervan is analoog aan die van de diffusievergelijking (4.5).

Instantane lozing in een punt geeft volgens deze vergelijkingen een (Gaussische) "wolk" die zich in alle richtingen uitbreidt als gevolg van diffusie terwijl hij met de vloeistof mee stroomafwaarts wordt gevoerd. Continue lozing in een punt daarentegen geeft benedenstrooms van het lozingspunt een langgerekte pluim die breder wordt met toenemende afstand benedenstrooms, zoals een rookpluim uit een schoorsteen. Daarbij kan een stationaire situatie ontstaan waarbij advection en diffusie overall in balans zijn. Kwantitatieve oplossingen voor deze situaties worden behandeld na introductie van turbulente diffusie en dispersie (waarbij de vergelijking dezelfde gedaante heeft als hierboven, maar met veel grotere en ook variabele diffusiviteit).

4.5 Turbulente diffusie

Turbulentie wordt gekenmerkt door onregelmatig fluctuerende, wervelende bewegingen van "pakketjes" vloeistof. De snelheid varieert daarbij in elk punt in de tijd naar richting en grootte. Hetzelfde geldt dan voor het transport van meegevoerde stof.

Het is niet uitvoerbaar de onregelmatige turbulente fluctuaties in detail te berekenen. Voor praktische toepassingen is dat ook niet nodig en kunnen we vaak volstaan met kennis van de gemiddelde waarden van fluctuerende grootheden, i.h.b. van de turbulente transporten.

Alvorens een rekenmodel daarvoor op te zetten gaan we in kwalitatieve zin na hoe een netto transport kan ontstaan als gevolg van turbulente fluctuaties. (In feite is dit analoog aan de moleculaire diffusie als gevolg van de warmtebewegingen van de moleculen.) Als voorbeeld nemen

we het vertikale transport van fijn sediment in suspensie in een open waterloop waarin de gemiddelde snelheid horizontaal is maar waarin vertikale turbulente snelheidsfluctuaties voorkomen. Verder gaan we er van uit dat de gemiddelde concentratie (\bar{c}) afneemt met toenemende afstand (z) boven de bodem. Daardoor voert een opwaartse snelheidsfluctuatie gemiddeld genomen meer sediment mee naar boven door een bepaald horizontaal vlakje dan dat een neerwaartse snelheidsfluctuatie sediment meeneemt naar beneden door datzelfde vlakje. Gemiddeld genomen is er dan een netto transport, en wel in de richting van afnemende waarde van de gemiddelde concentratie (naar boven, in het voorbeeld). We gaan dit nu meer formeel uitwerken.

We scheiden de momentane waarde van alle fluctuerende grootheden ($u_x, u_y, u_z, p, \rho, c$ etc.) in een gemiddelde en een fluctuatie rondom dat gemiddelde. Voor c bv.:

$$c(t) = \bar{c} + c'(t) \quad (4.14)$$

Hierin is \bar{c} het gemiddelde van $c(t)$ over een interval (t_1, t_2) dat veel fluctuaties bevat maar dat kort duurt t.o.v. veranderingen in de randvoorwaarden (b.v. het getij):

$$\bar{c} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c(t) dt$$

(Op die langere tijdschaal kan \bar{c} dus nog wel met t variëren.)

Het gemiddelde van (4.14) geeft successievelijk

$$\bar{c} = \overline{\bar{c} + c'} = \bar{c} + \overline{c'}$$

waaruit volgt $\overline{c'} = 0$. Hetzelfde geldt vanzelfsprekend voor alle andere fluctuerende grootheden.

Het bepalen van het gemiddelde is een lineaire bewerking, dus als a een constante is geldt $\overline{a c(t)} = a \bar{c}$; ook lineaire superpositie is van toepassing: $\overline{c_1(t) + c_2(t)} = \bar{c}_1 + \bar{c}_2$.

Neem nu het product van twee fluctuerende grootheden, b.v. van de concentratie (c) en de verticale snelheid (u_z), zodat cu_z het momentaan vertikaal advectief transport van sediment voorstelt. De gemiddelde waarde daarvan is

$$\overline{cu_z} = \overline{(\bar{c} + c') (\bar{u}_z + u'_z)} = \bar{c} \bar{u}_z + \bar{c} \overline{u'_z} + \overline{c' \bar{u}_z} + \overline{c' u'_z}$$

of

$$\overline{cu_z} = \bar{c} \bar{u}_z + \overline{c' u'_z} \quad (4.15)$$

De bijdrage van de turbulentie aan het gemiddeld transport is $\overline{c' u'_z}$. Als dit ongelijk is aan nul heten c en u_z *gecorrleerd*. De correlatie ontstaat (in dit voorbeeld) dank zij een z -variatie van \bar{c} . Als $\partial \bar{c} / \partial z < 0$ (afnemende concentratie van gesuspendeerd sediment met toenemende hoogte boven de bodem), dan zal een opwaartse snelheidsfluctuatie ($u'_z > 0$) in het algemeen gepaard gaan met een grotere c dan gemiddeld ($c' > 0$), en omgekeerd, zodat het product $c' u'_z$ gemiddeld genomen positief zal zijn: $\overline{c' u'_z} > 0$.

We zien uit het voorgaande dat het gemiddelde turbulente transport afhankelijk is van de gradiënt in \bar{c} , analoog aan moleculaire diffusie; dit gemiddelde turbulente transport is daarom ook als een diffusieproces te zien. Wanneer we ook hier een recht evenredig verband veronderstellen tussen transport en concentratie-gradiënt kunnen we schrijven

$$\overline{c' u'_z} = - \epsilon_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial z} \quad (4.16)$$

Hierin is ϵ_t de z.g. *turbulentie diffusiviteit*.

N.B. De z.g. turbulentie diffusiviteit (ϵ_t) is een stromingseigenschap (niet een vloeistofeigenschap, zoals ϵ) en daarom niet à priori bekend en ook niet een constante. Waarden van ϵ_t zijn slechts globaal te schatten (met forse onzekerheden!) op basis van eigenschappen van turbulente wervels, m.n. een kenmerkende afmeting (ℓ_t), ook wel mengweglengte genoemd (Prandtl, 1925), en een kenmerkende snelheid (u_t). Daarmee geldt (in grootte-orde):

$$c' \sim l_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}, \quad u'_z \sim u_t \quad \text{en} \quad \overline{c'u'_z} \sim l_t u_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial z}$$

ofwel $\epsilon_t \sim l_t u_t$. Per stromingssituatie moeten l_t en u_t geschat worden (zie hierna).

We passen het bovenstaande toe op de advection-diffusie vergelijking (4.11) die we daarvoor eerst uitschrijven, waarbij de moleculaire diffusiviteit (ϵ) constant wordt verondersteld:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(cu_x) + \frac{\partial}{\partial y}(cu_y) + \frac{\partial}{\partial z}(cu_z) - \epsilon \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (4.17)$$

We nemen hiervan het gemiddelde. Alle termen op die van de advection na zijn lineair. Middeling van lineaire termen is eenvoudig: vervang de fluctuerende grootte door zijn gemiddelde (bv. $\overline{\partial c / \partial t} = \partial \bar{c} / \partial t$). Voor de advectione termen geldt (4.15), zoals in

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x}(cu_x)} = \frac{\partial}{\partial x}(\overline{cu_x}) = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{c} \bar{u}_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{c'u'_x})$$

Substitutie hierin van een uitdrukking analoog aan (4.16) geeft

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x}(cu_x)} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{c} \bar{u}_x) - \frac{\partial}{\partial x}(\epsilon_t \frac{\partial \bar{c}}{\partial x})$$

Hiermee wordt het gemiddelde van (4.17), met verwaarlozing van moleculaire diffusie (omdat $\epsilon \ll \epsilon_t$), en geschreven in vectorvorm:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{c} \vec{\bar{u}}) - \nabla \cdot (\epsilon_t \nabla \bar{c}) = 0 \quad (4.18)$$

Omdat $\nabla \cdot \vec{\bar{u}} = 0$ is dit te herleiden tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \vec{\bar{u}} \cdot \nabla \bar{c} - \nabla \cdot (\epsilon_t \nabla \bar{c}) = 0 \quad (4.19)$$

Deze heeft dezelfde gedaante als de conventionele advection-diffusie vergelijking (zie 4.11), maar geldt voor de gemiddelde toestand inclusief turbulente diffusie. We zullen eerst een oplossing hiervan behandelen voor het al genoemde voorbeeld van het verticale transport

van sediment in suspensie in een open waterloop. Vervolgens gaan we in op diverse gevallen van horizontale transporten.

4.6 Vertikaal transport in open waterlopen

We gaan uit van een (vrijwel) horizontale, turbulente stroming in een open waterloop, gemiddeld genomen stationair, eenparig en tweedimensionaal. We gaan daarvoor het verticale transport na van gesuspendeerd sediment om daaruit de verticale verdeling te berekenen van de concentratie van gesuspendeerd sediment. Daartoe geven we eerst een uitdrukking voor ϵ_t . Notatie: $z = 0$ in lokale bodem, $z = d$ in oppervlak, $\bar{u}_x = \bar{u}(z)$, $\bar{u}_y = 0$ en $\bar{u}_z \approx 0$.

Turbulentie diffusiviteit

Voor een globale schatting van ϵ_t gaan we uit van de grootte-orde betrekking $\epsilon_t \sim l_t u_t$.

De stroming in een open waterloop is een grenslaagstroming langs een wand (bodem); de wisselwerking met de bodem is daarom belangrijk voor de turbulentie in het stromende water.

De kenmerkende afmetingen van turbulente wervels (l_t) in de buurt van de bodem wordt door de aanwezigheid van die bodem beperkt, en zal daarom toenemen met toenemende afstand (z) tot de bodem. In eerste benadering kunnen we stellen dat $l_t \sim z$ in de buurt van de bodem. Het vrije oppervlak heeft echter ook een bijna totale dempende invloed op de turbulente wervels, althans op de verticale beweging daarin. We kiezen ook hier als globale benadering een evenredig met de afstand beneden het oppervlak toenemende waarde van l_t . Het product van de twee lineaire toenemingen van l_t vanuit bodem en oppervlak levert het volgende parabolisch verloop van l_t :

$$l_t \sim z \left(1 - \frac{z}{d}\right)$$

Als maat voor de turbulente snelheidsfluctuaties gebruiken we u_x ($= \sqrt{\tau_b / \rho}$, waarin τ_b de schuifspanning is bij de bodem). Met toevoeging van een evenredigheidsfactor κ , de z.g. constante van Von Karman, ontstaat

$$\epsilon_t = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (4.20)$$

De waarde van κ is empirisch bepaald op ca. 0,4.

De variatie van ϵ_t met z volgens (4.20) is parabolisch, met een maximum halverwege bodem en oppervlak gelijk aan $\frac{1}{4}\kappa u_* d$; de over de diepte gemiddelde waarde van ϵ_t is $\frac{1}{6}\kappa u_* d$ ofwel ca. 0,16 $\kappa u_* d$.

De uitdrukking (4.20) is weinig exact, maar wordt toch met redelijk succes gebruikt voor berekening van de verticale turbulente uitwisseling van stof in oplossing of in suspensie (en van impuls, zoals we later zullen zien bij de berekening van het verticale profiel van de gemiddelde stroomsnelheid).

Vertikale verdeling sediment-concentratie

We passen het voorgaande toe op fijn sediment in suspensie in open water. Voor het sediment geldt de behoudsvergelijking (4.3); vanwege het gegeven van stationaire, eenparige en twee-dimensionale stroom zijn de termen $\partial c/\partial t$, $\partial T_x/\partial x$ en $\partial T_y/\partial y$ na middeling gelijk aan nul, en resteert van (4.3) slechts

$$\frac{\partial \bar{T}_z}{\partial z} = 0 \quad \text{of} \quad \bar{T}_z = \text{constant} = 0 \quad (4.21)$$

waarbij de laatste gelijkheid volgt uit de r.v.w. dat er geen netto sedimenttransport is door het vrije oppervlak.

We veronderstellen dat het sediment zo fijn is dat het instantaan de lokale vloeistof volgt op de valsnelheid $\vec{w} = -w \vec{e}_z$ na. Het instantane opwaartse transport van sediment is dan

$$T_z = c(u_z - w)$$

Middeling hiervan gevolgd door substitutie van (4.21) en van $\bar{u}_z = 0$ en $w = \text{constant}$ (voor uniform sediment), geeft

$$\bar{T}_z = \overline{cu_z} - \bar{cw} = \overline{c'u'_z} - \bar{c}w = 0$$

of

$$\epsilon_t \frac{d\bar{c}}{dz} + w\bar{c} = 0 \quad (4.22)$$

We substitueren hierin (4.20) voor ϵ_t en maken z dimensieloos volgens $\zeta = z/d$ (zodat $0 \leq \zeta \leq 1$):

$$\kappa u_* \zeta (1-\zeta) \frac{d\bar{c}}{d\zeta} + w\bar{c} = 0$$

of

$$\frac{d\bar{c}}{\bar{c}} = - \frac{w}{\kappa u_*} \frac{d\zeta}{\zeta(1-\zeta)} = - \frac{w}{\kappa u_*} \left(\frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{d\zeta}{1-\zeta} \right)$$

Dit integreren geeft

$$\ln \bar{c}(\zeta) = \frac{w}{\kappa u_*} \ln \frac{1-\zeta}{\zeta} + \text{const} = \ln \left(\frac{1-\zeta}{\zeta} \right)^{w/\kappa u_*} + \text{const}$$

of

$$\bar{c} = \text{const.} \left[\frac{1-\zeta}{\zeta} \right]^{w/\kappa u_*} = \text{const.} \left[\frac{d-z}{z} \right]^{w/\kappa u_*} \quad (4.23)$$

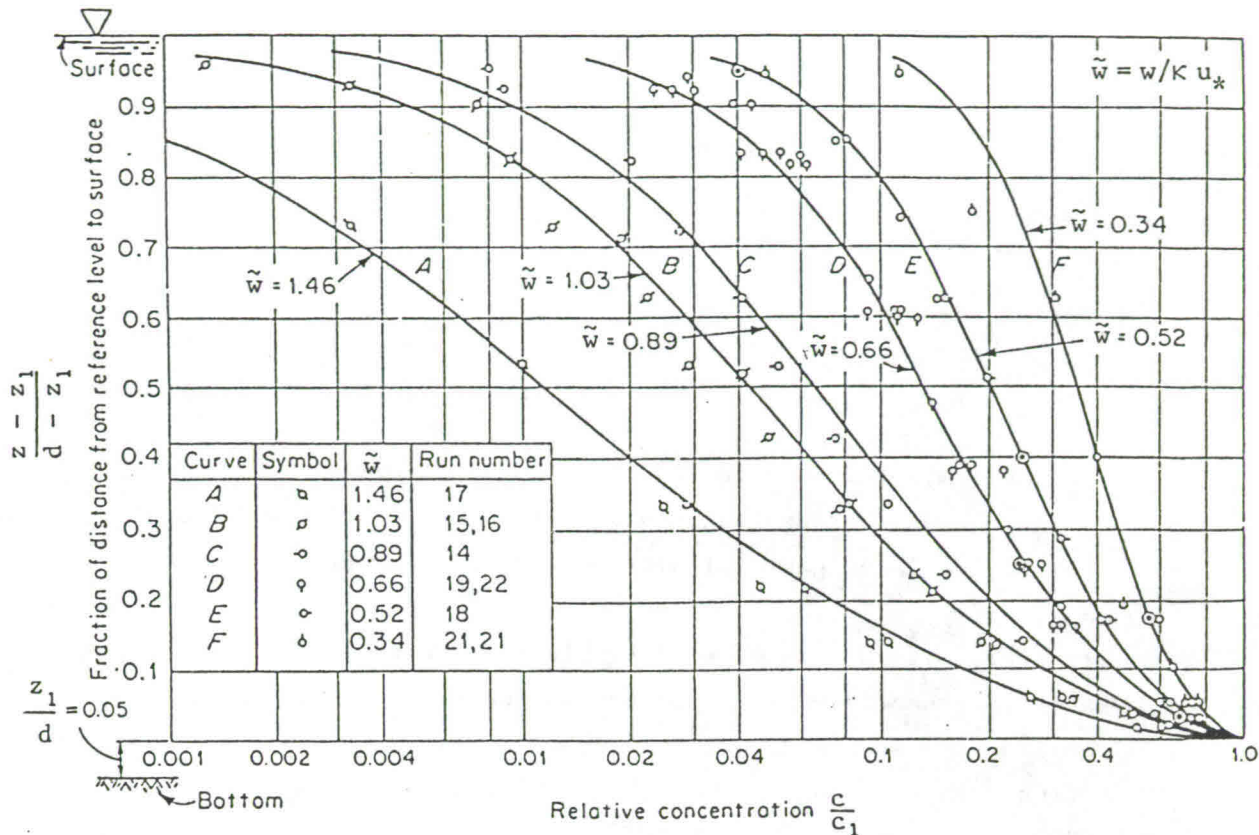
De constante wordt bepaald door de condities bij de bodem waarop wij hier niet ingaan. Met toenemende ζ (relatieve hoogte boven de bodem) neemt de factor tussen haken af evenredig met $(1-\zeta)/\zeta$. Als $w/\kappa u_* = 1$ neemt \bar{c} even sterk af. Als $w/\kappa u_* \gg 1$ (relatief grof sediment of zwakke stroming) neemt \bar{c} echter veel sterker af met toenemende hoogte boven de bodem, en als $w/\kappa u_* \ll 1$ (relatief fijn sediment of sterke stroming) is \bar{c} bijna uniform in de vertikaal (zie Fig. 4.2). Als voorbeeld nemen we de verhouding \bar{c}_2/\bar{c}_1 , waarbij $z_1 = 0.01d$ ($\zeta_1 = 0.01$) en $z_2 = 0.1d$ ($\zeta_2 = 0.1$), berekend uit (4.23) voor een aantal waarden van $w/\kappa u_*$:

$w/\kappa u_*$	10^{-2}	10^{-1}	1	2	3
\bar{c}_2/\bar{c}_1	0.98	.79	9.1×10^{-2}	8.3×10^{-3}	7.5×10^{-4}

Tabel 4.1

We zien inderdaad dat bij grote waarde van $w/\kappa u_*$ de concentratie zeer snel afneemt met toenemende afstand uit de bodem (zie ook Fig. 4.2).

In deze situaties ($w/\kappa u_* \gg 1$) is het (rollend) transport van sediment over de bodem belangrijker dan het transport van sediment in suspensie. In hoofdstuk 5 zal op andere manieren blijken dat de verhouding tussen u_* en w van groot belang is voor het sedimenttransport.



Figuur 4.2: Vertikale verdeling relatieve sedimentconcentratie: meetpunten en theoretische waarden (getrokken lijnen) volgens (4.23)

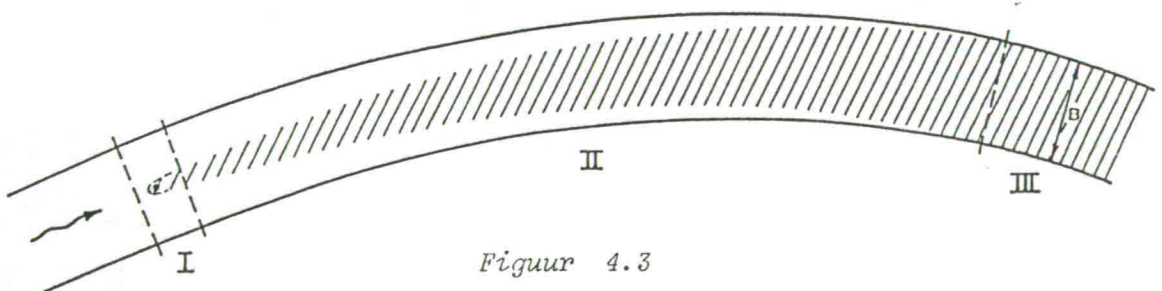
4.7 Horizontaal stoftransport in open waterlopen

4.7.1 Inleiding

Een stof die vanuit een leiding wordt geloosd in stromend water in een open waterloop wordt stroomafwaarts gevoerd en tegelijk door turbulente diffusie verspreid. In het algemeen kunnen we daarbij drie gebieden onderscheiden (Fig. 4.3):

- (I) Een aanvangsgebied waarin de verspreiding drie-dimensionaal (3D) is; hier komt vooral de menging over de diepte tot stand.
- (II) Een tussengebied waarin de geloosde stof, die al over de diepte is gemengd, zich stroomafwaarts geleidelijk over de breedte verspreidt.

(III) Een eindgebied waarin de stof al over het gehele dwarsprofiel is gemengd en (gemiddeld) alleen nog in longitudinale richting wordt getransporteerd.



Figuur 4.3

(in realiteit verbreedt de pluim zich niet zo snel als in de figuur)

In veel natuurlijke waterlopen is de diepte aanzienlijk kleiner dan de breedte, waardoor de lengte van gebied I verwaarloosbaar is t.o.v. die van II. We laten gebied I hier buiten beschouwing.

In gebied II, waarin de stof al min of meer uniform over de diepte is gemengd, rekenen we met het over de lokale diepte geïntegreerde, horizontale stoftransport; dit heeft zowel een longitudinale als een transversale component. We rekenen hier twee-dimensionaal horizontaal (2DH).

In gebied III, waarin de stof al min of meer uniform over het hele dwarsprofiel is gemengd, rekenen we met het totale longitudinale stoftransport, geïntegreerd over de gehele dwarsdoorsnede. Hier rekenen we één-dimensionaal horizontaal (1DH).

Kortheidshalve laten we in deze paragraaf de overstreping weg die een tijd-gemiddelde van turbulent fluctuerende grootheden aangeeft. In plaats daarvan zal nu middeling over de diepte respectievelijk het dwarsprofiel worden aangegeven met een enkele respectievelijk dubbele overstreping, zoals in

$$\bar{c} = \frac{1}{d} \int c \, dz \quad \text{respectievelijk} \quad \bar{c} = \frac{1}{A} \iint c \, dA$$

Een lokale afwijking daarvan wordt met een enkel respectievelijk dubbel accent aangeduid.

4.7.2 Twee-dimensionaal horizontaal transport (gebied II)

We gaan eenvoudigheidshalve uit van een willekeurige **prismatische waterloop met eenparige stroming** waarin de diepte en de stroomsnelheid zijdelings (in y-richting) kunnen variëren: $d = d(y)$, $\bar{u}_x = \bar{u}(y)$, $\bar{u}_y = 0$ (overdwars) en $\bar{u}_z = 0$ (vertikaal).

De hoeveelheid en het transport van de geloosde stof in het water worden lokaal over de diepte geïntegreerd:

Hoeveelheid p.e.v. oppervlakte:

$$\int c \, dz = \bar{c} \, d$$

Longitudinaal transport p.e.v. breedte:

$$\int T_x \, dz = \bar{T}_x \, d$$

Transversaal transport p.e.v. lengte:

$$\int T_y \, dz = \bar{T}_y \, d$$

Als balansgebied kiezen we een verticale kolom van bodem tot oppervlak met een infinitesimaal grondvlak. Onder de veronderstelling dat de getransporteerde stof behouden blijft wordt de balans (p.e.v. oppervlak):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{c}d) + \text{div} (\vec{T}d) = 0 \quad (4.24)$$

Voor de uitwerking hiervan gaan we verschillende bijdragen beschrijven aan het transport, te beginnen met het transport in dwarsrichting.

In het bijzonder geval van een zuiver twee-dimensionale stroom variëren u en d zijdelings niet. Het transversale transport bestaat dan alleen uit turbulente diffusie:

$$\bar{T}_y = -K_2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} \quad (4.25)$$

Volgens Fischer e.a. (1979) heeft de coëfficiënt K_2 hierin een waarde van ca. $0,15 u_* d$. (Dit is vrijwel het dubbele van het dieptegemiddelde van ϵ_t volgens 4.20, dat $\frac{1}{6} \kappa u_* d$ ofwel ca. $0,07 u_* d$ bedraagt.)

In waterlopen met bochten en/of zijdelingse variaties van diepte en snelheid heeft de lokale, tijd-gemiddelde snelheid ook componenten in het vlak van het dwarsprofiel, de z.g. secundaire stromen; die kunnen bijdragen aan \bar{T}_y . Dit noemen we transversale dispersie. Een voorbeeld hiervan doet zich voor in bochtstromen. Daarbij is de dwarsgerichte snelheid (u_y) bovenin naar de buitenbocht gericht en onderin naar de binnenkant. Omdat onderin de sedimentconcentratie het grootst is resulteert dit in een netto binnenwaarts sedimenttransport, ook al is het vertikaal geïntegreerde zijdelings transport van water gelijk aan nul. (Dit naar binnen gericht sedimenttransport doet een rivier meanderen.)

De transversale dispersie wordt eveneens met vergelijking (4.25) beschreven; K_2 heet dan de (transversale) dispersiecoëfficiënt. De waarde ervan hangt o.m. af van de vorm van het dwarsprofiel en van de bochtigheid van de waterloop; een zeer globale, gemiddelde waarde ervan (inclusief de turbulente diffusie) is ca. $0,6 u_* d$, met een spreiding van ca. 50%:

$$K_2 = 0,6 u_* d \pm 50\% \quad (4.26)$$

Het effect van de zijdelingse turbulente diffusie is hierbij inbegrepen.

In longitudinale richting overheerst de advectie. Omdat de lokale advectiesnelheid (u) varieert met z wordt de geloosde stof die op een zeker moment in één vertikaal aanwezig is in longitudinale richting gespreid (Fig. 4.4). Dit heet *longitudinale dispersie*. Kwantitatief geformuleerd:

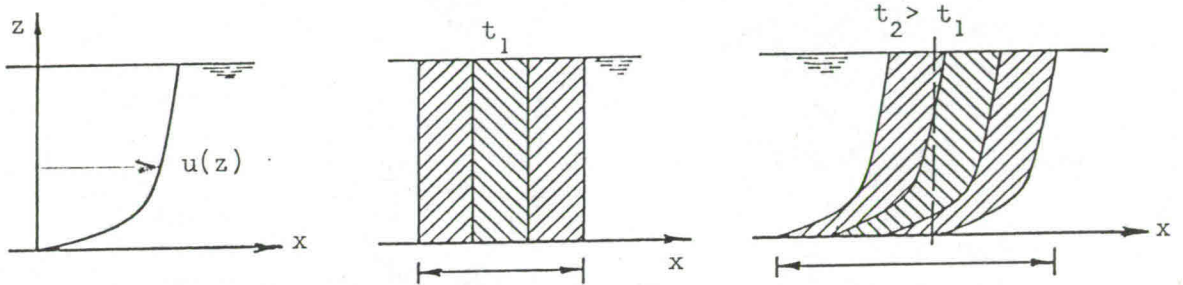
$$\int cu \, dz = \overline{cu} \, d = \bar{c} \bar{u} \, d + \overline{c'u'} \, d = \bar{c}q + \overline{c'u'} \, d$$

(Let op: overstreping betekent hier diepte-middeling, en een accent een afwijking van de lokale waarde t.o.v. de diepte-gemiddelde waarde.) Hierin is de laatste term de dispersieve bijdrage; deze wordt als een longitudinale diffusie beschreven:

$$\overline{c'u'} = -K_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (4.27)$$

De waarde van K_1 , de coëfficiënt van longitudinale dispersie voor het lokale transport p.e.v. breedte, is door Elder berekend uit de parabolische ϵ_t -verdeling volgens (4.20), met het resultaat

$$K_1 \approx 6 u_* d \quad (4.28)$$



Figuur 4.4

Het effect van de longitudinale turbulente diffusie is hierbij inbegrepen; dit is overigens verwaarloosbaar t.o.v. dat van de longitudinale dispersie. Het totale longitudinale transport p.e.v. breedte is hiermee gelijk aan

$$\bar{T}_x d = \bar{c} q - K_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} d$$

Met het voorgaande wordt de balans (4.24) voor de getransporteerde stof:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{c} d) + \frac{\partial}{\partial x} [\bar{c} q - K_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} d] - \frac{\partial}{\partial y} (K_2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} d) = 0$$

De behoudsvergelijking voor het volume water (de z.g. continuïteitsvergelijking) kan voor deze twee-dimensionale stroming geschreven worden in de vorm

$$\frac{\partial d}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

Daarmee reduceert de behoudsvergelijking voor de meegevoerde stof tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial x} (K_1 \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} d) - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial y} (K_2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} d) = 0 \quad (4.29)$$

In het algemeen kunnen de grootheden \bar{u} , d , K_1 en K_2 variëren met (x, y, t) en moet (4.29) numeriek worden geïntegreerd, bij gegeven begin- en randvoorwaarden, om \bar{c} te bepalen als functie van (x, y, t) . Daarvoor wordt verwezen naar vervolgvakken (m.n. b84) en naar de literatuur.

Voor de eenvoud beperken we ons hier verder tot stationaire tweedimensionale, eenparige stromen waarbij d , \bar{u} , K_1 en K_2 constant zijn, en (4.29) reduceert tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K_1 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} = 0 \quad (4.30)$$

De diffusie hierin is anisotroop ($K_1 \neq K_2$), maar door de transformatie

$$Y = \left(\frac{K_1}{K_2}\right)^{1/2} y \quad (4.31)$$

gaat (4.30) over in een vorm waarin de diffusie isotroop is:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K_1 \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial Y^2} \right) = 0 \quad (4.32)$$

Door de invoering van een met de stroomsnelheid \bar{u} meebewegend assenstelsel volgens $X = x - \bar{u}t$ reduceert (4.32) tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = K_1 \left(\frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial Y^2} \right) \quad (4.33)$$

Hierin is $\partial/\partial t$ de lokale afgeleide in het meebewegende assenstelsel.

Vergelijking (4.32) heeft de gedaante van de advection-diffusie vergelijking (4.12), en (4.33) die van de diffusie vergelijking (4.8).

Voorbeeld 1: instantane lozing in een punt

Stel dat een hoeveelheid M op $t = 0$ wordt geloosd in een punt $x = 0, y = 0$ in een oneindig uitgestrekt water van constante stroomsnelheid \bar{u} en diepte d . Bij een uniforme verdeling over de diepte komt dit neer op een hoeveelheid M/d p.e.v. hoogte. De aanvankelijke concentratie is overal nul. De bijbehorende oplossing van (4.33), dus in het X, Y -stelsel, is conform de oplossing (4.9) van (4.8), met $m = M/d$:

$$\bar{c}(X, Y, t) = \frac{M/d}{4\pi K_1 t} \exp\left(-\frac{X^2 + Y^2}{4K_1 t}\right) \quad (4.34)$$

Terugtransformerend naar het (x, y) stelsel moet de hoeveelheid stof in overeenkomstige intervallen gelijk blijven:

$$\bar{c}(x, y, t) dx dy = \bar{c}(X, Y, t) dX dY$$

Met de gegeven transformaties volgt hieruit dat

$$\bar{c}(x, y, t) = (K_1/K_2)^{1/2} \bar{c}(X, Y, t)$$

De oplossing in het oorspronkelijke (x, y) stelsel is daarmee

$$\bar{c}(x, y, t) = \frac{M/d}{4\pi t (K_1 K_2)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4K_1 t} - \frac{y^2}{4K_2 t}\right] \quad (4.35)$$

De oplossing (4.35) stelt een wolk voor waarin de concentratieverdeling op elke t zowel in longitudinale (x) als in transversale (y) richting verloopt volgens een Gauss-kromme. De piek daarvan ligt in $(x = \bar{u}t, y = 0)$; de spreiding in longitudinale resp. transversale richting is evenredig met $\sqrt{K_1 t}$ resp. $\sqrt{K_2 t}$. Lijnen waarlangs \bar{c} constant is hebben de vorm van een ellips, met lange as evenredig aan $\sqrt{K_1 t}$ en met korte as evenredig aan $\sqrt{K_2 t}$.

In een vaste doorsnede ($x = \text{constant}$) verloopt \bar{c} niet symmetrisch in de tijd t.o.v. $t = x/\bar{u}$, als gevolg van het feit dat de concentratiewolk afvlakt terwijl hij de beschouwde doorsnede passeert. In een vast punt verloopt de stijgende tak daarom steiler dan de dalende tak. De maximale concentratie treedt daarom eerder op dan $t = x/\bar{u}$. De

asymmetrie neemt echter af met toenemende afstand van het lozingspunt. Voor voldoende grote afstand ($x \gg K_1/\bar{u}$) treedt de maximale concentratie bij benadering op als $t = x/\bar{u}$. (Een exacte uitdrukking kan worden berekend door $\partial\bar{c}/\partial t = 0$ te stellen; zie de vraagstukkenbundel voor een uitwerking hiervan.)

Bij lozing op een tijdstip $t = t_0$ in een punt $x = x_0$, $y = y_0$ moeten we t in (4.35) vervangen $(t - t_0)$, x door $(x - x_0)$ en y door $(y - y_0)$.

Wanneer de vloeistof begrensd is door een ondoorlatende oever, bv. waar $y = 0$, moet daar gelden $\bar{T}_y = 0$ ofwel $\partial\bar{c}/\partial y = 0$. Bij lozing in een punt waarvoor $x = 0$, $y = y_0$, dus op een afstand y_0 uit de oever, voldoet een oplossing conform (4.35) (met $y - y_0$ in de exponent) daar niet aan. Een oplossing is dan te bereiken door spiegeling:

$$\bar{c}(X, y, t) = C_1 \exp\left[-\frac{X^2}{4K_1 t} - \frac{(y - y_0)^2}{4K_2 t}\right] + C_1 \exp\left[-\frac{X^2}{4K_1 t} - \frac{(y + y_0)^2}{4K_2 t}\right]$$

Hierin is korthedshalve gebruik gemaakt van $X = x - \bar{u}t$ en (zie 4.35) van

$$C_1 = \frac{M/d}{4\pi t(K_1 K_2)^{1/2}}$$

Bij twee parallelle oevers moeten meervoudige spiegelingen worden uitgevoerd; theoretisch zelfs oneindig veel, maar meestal geven enkele termen een voldoende benadering. (Voor een uitwerking hiervan wordt verwezen naar de vraagstukkenbundel.) Gezamenlijk doen die de transversale concentratie-verdeling met toenemende afstand benedenstrooms van het lozingspunt naderen tot een over het dwarsprofiel uniforme verdeling. Verder benedenstrooms kan dan met een één-dimensionale berekening worden volstaan (par. 4.7.3).

Voorbeeld 2: continue lozing in een punt

Stel nu dat er continu lozing plaats vindt in een punt $x = 0$, $y = 0$, met een constante hoeveelheid p.e.v. tijd gelijk aan \dot{M} . Er ontstaat dan een langgerekte pluim benedenstrooms van het lozingspunt. Vanwege die langgerektheid is de longitudinale dispersie verwaarloosbaar t.o.v. de transversale. Als bovendien de situatie stationair is reduceert (4.30) tot

$$\bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} = K_2 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} \quad (4.36)$$

Dit is juist de één-dimensionale diffusie-vergelijking (4.6) als we de tijd t daarin vervangen door x/\bar{u} ; bovendien vindt de diffusie in (4.36) plaats in y -richting i.p.v. de x -richting, zoals in (4.6). Met bovenstaande beginvoorwaarde, en met de randvoorwaarde $\bar{c} \rightarrow 0$ als $y \rightarrow \pm \infty$, is de oplossing van (4.36) analoog aan (4.7); we moeten daarin t vervangen door x/\bar{u} , x door y en ϵ door K_2 :

$$\bar{c}(x,y) = \frac{m}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)$$

waarin

$$\sigma = (2K_2 x/\bar{u})^{1/2}$$

Voor elke waarde van x verloopt \bar{c} in de y -richting (overdwars) dus als een Gauss-kromme; de breedte daarvan, gemeten naar de "standaard-afwijking" (σ), neemt stroomafwaarts toe evenredig met \sqrt{x} .

De waarde van de evenredigheidsconstante m volgt in dit geval uit de voorwaarde dat door elk dwarsprofiel een stoftransport plaatsvindt gelijk aan \dot{M} (de toestand is immers stationair):

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{c} \bar{u} \bar{d}) dy = (\bar{u}\bar{d}) \int_{-\infty}^{\infty} \bar{c} dy = (\bar{u}\bar{d}) m = \dot{M}$$

zodat $m = \dot{M}/\bar{u}\bar{d} = \dot{M}/q$ (q is het debiet p.e.v. breedte). De oplossing is dus

$$\bar{c}(x,y) = \frac{\dot{M}/q}{(4\pi K_2 x/\bar{u})^{1/2}} \exp\left(-\frac{y^2}{4K_2 x/\bar{u}}\right) \quad (4.37)$$

Deze oplossing, die geldig is in een oneindig brede stroom, kan met de methode van spiegelen worden gebruikt om oplossingen te vinden in geval van een ondoorlatende oever, of twee parallelle ondoorlatende oevers (zie de vraagstukkenbundel). In het laatste geval is \bar{c} op grote afstand benedenstrooms van het lozingspunt vrijwel uniform in het hele dwarsprofiel; de (uniforme) limietwaarde is

$$\bar{c}_\infty = \frac{\dot{M}}{qB} = \frac{\dot{M}}{Q} \quad (4.38)$$

Deze betrekking wordt wel gebruikt bij debietmeting (voeg bekende stofstroom \dot{M} toe; meet \bar{c}_∞ , d.w.z. \bar{c} waar deze al vrijwel uniform is, en bepaal $Q = \dot{M}/\bar{c}_\infty$).

4.7.3 Eén-dimensionaal horizontaal transport (gebied III)

In het gebied waar de meegevoerde stof min of meer gelijkmatig over het dwarsprofiel is gespreid (gebied III van Fig. 4.3) kunnen we volstaan met één-dimensionale modellen, waarin wordt gewerkt met het over het hele dwarsprofiel geïntegreerde, longitudinale transport; met verwaarlozing van moleculaire en turbulente diffusie is dit

$$\iint c u \, dA = \bar{T}_x A = \bar{c} \bar{u} A + \overline{c''u''} A = \bar{c} Q + \overline{c''u''} A$$

De laatste term representeert het longitudinale dispersieve transport (Fig. 4.4). Dit wordt weer gemodelleerd als een diffusie-proces:

$$\overline{c''u''} = -K \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} \quad (4.39)$$

In het hier behandelde geval vindt er niet alleen dispersie plaats als gevolg van variaties van de stroomsnelheid u in de vertikaal, zoals beschouwd in par. 4.7.2, maar ook als gevolg van variaties van u in dwarsrichting. In dwarsprofielen met aanzienlijke diepteverschillen, en ook als gevolg van bochten, kunnen zulke transversale verschillen aanzienlijk zijn. De coëfficiënt van longitudinale dispersie voor dit geval (K) heeft daarom een aanzienlijk grotere waarde dan K_1 , die slechts was bepaald door verticale snelheidsvariaties ($K_1 \approx 6u_* d$; zie vgl. 4.28). Een waarde van K is echter moeilijk in het algemeen te formuleren omdat die sterk afhangt van de geometrie van de waterloop (dwarsprofiel en tracé). Op grond van globale beschouwingen geven Fischer e.a. (1979) een uitdrukking voor K in de vorm

$$K = \gamma \frac{\bar{u}^2 B^2}{u_* \langle d \rangle} = \gamma \frac{C}{\sqrt{g}} \frac{QB^3}{A^2} = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} \frac{QB^3}{A^2} \quad (4.40)$$

De dimensieloze coëfficiënt γ heeft een waarde van ca. 10^{-2} . Een vergelijking met uit metingen geschatte waarden geeft echter een variatie hierop te zien met wel een factor 4 of meer (γ van 0.5×10^{-2} tot 2.0×10^{-2}). Bij toepassingen geeft bovenstaande uitdrukking dus slechts een ruwe indicatie. Voor een hogere nauwkeurigheid zal de te gebruiken waarde ter plaatse proefondervindelijk moeten worden bepaald.

De balans wordt nu opgesteld voor een mootje van de waterloop tussen twee dwarsprofielen. Voor de eenheid van lengte is het resultaat

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{c} A) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{T}_x A) = 0$$

ofwel

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{c} A) + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{c} Q) - \frac{\partial}{\partial x}(K \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} A) = 0$$

Door gebruik te maken van de behoudsvergelijking voor het volume water in de vorm

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

reduceert dit tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x}(K \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} A) = 0$$

In geval van eenparige stroom reduceert dit verder tot

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} = 0 \quad (4.41)$$

ofwel juist de standaard advection-diffusie vergelijking (zie 4.12) in één dimensie.

T.o.v. een met de snelheid \bar{u} meebewegende X-as ($X = x - \bar{u}t$) geldt

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial X^2} \quad (4.42)$$

ofwel juist de een-dimensionale standaard diffusie-vergelijking (zie 4.6).

Voorbeeld 3: instantane lozing in een dwarsprofiel

Stel dat op $t = 0$ in een dwarsprofiel waar $x = 0$ een hoeveelheid M wordt geloosd, waarbij we voor de eenvoud doen alsof de stof instantaan uniform in het hele dwarsprofiel wordt verspreid. T.o.v. een meebewegende X -as ($X = x - \bar{u} t$) geldt (4.42) en is er een volledige analogie met (4.6) en met de oplossing (4.7) die daarvoor geldt bij instantane lozing in een punt. De evenredigheidsfactor m in (4.7) volgt nu uit de voorwaarde dat de op elk moment in de rivier aanwezige totale hoeveelheid stof gelijk is aan M :

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{c}(x, t) A dx = A \int_{-\infty}^{\infty} \bar{c} dx = A m$$

Daarmee wordt de oplossing

$$\bar{c}(x, t) = \frac{M/A}{(4\pi Kt)^{1/2}} \exp\left[-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{4Kt}\right] \quad (4.43)$$

ofwel

$$\bar{c}(x, t) = \frac{M/A}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x - \bar{u}t)^2}{2\sigma^2}\right)$$

waarin $\sigma = \sqrt{2Kt}$

Dit houdt in dat \bar{c} op elk tijdstip met x varieert volgens een Gauss-kromme, met het maximum waar $x = \bar{u}t$; dit maximum neemt in de tijd af omgekeerd evenredig met \sqrt{t} .

De totale hoeveelheid stof die een doorsnede $x = \text{constant}$ passeert is

$$\int_0^{\infty} \bar{c} \bar{u} A dt = Q \int_0^{\infty} \bar{c} dt = M$$

Ook deze relatie kan worden gebruikt in een methode van debietmeting via injectie van een bekende hoeveelheid stof (M) waarbij benedenstrooms (in gebied III) de concentratie wordt gemeten in een doorsnede als functie van de tijd.

4.7.4 Résumé van balansvergelijkingen en coëfficiënt-waarden

Alle gevallen: prismatische waterloop, stationaire en eenparige stroom.

Twee-dimensionale advectie en dispersie (gebied II)

- Willekeurig dwarsprofiel:

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K_1 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - \frac{1}{d} \frac{\partial}{\partial y} (K_2 \frac{\partial \bar{c}}{\partial y} d) = 0 \quad (4.29)$$

$$K_1 \approx 6 u_* d$$

$$K_2 \approx 0.6 u_* d \pm 50\%$$

- Twee-dimensionale stroom (geen zijdelingse variatie van \bar{u} en d):

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K_1 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} - K_2 \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial y^2} = 0 \quad (4.30)$$

$$K_1 \approx 6 u_* d$$

$$K_2 \approx 0.15 u_* d$$

Eén-dimensionale advectie en dispersie (gebied III)

$$\frac{\partial \bar{c}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{c}}{\partial x} - K \frac{\partial^2 \bar{c}}{\partial x^2} = 0 \quad (4.41)$$

$$K = \gamma \frac{C}{\sqrt{g}} \frac{QB^3}{A^2} = \frac{\gamma}{\sqrt{\lambda}} \frac{QB^3}{A^2}$$

$$\gamma = (0,5 \text{ à } 2,0) 10^{-2}$$

4.8 Impulstransport

4.8.1 Inleiding

In het voorgaande is het transport behandeld van een passieve stof, d.w.z. een stof die een verwaarloosbare invloed heeft op de waterbeweging. Niet altijd is deze verwaarlozing terecht; te denken valt aan de invloed van het zoutgehalte of van de temperatuur (koelwater) op de massadichtheid.

In deze paragraaf gaan we in op het transport van impuls in een stroming. Vanzelfsprekend is dit van direct belang voor de resulterende bewegingen.

De overdracht van impuls in de bewegende vloeistof vindt deels via dezelfde typen processen plaats als waarmee een passieve stof wordt getransporteerd, nl. door

- moleculaire diffusie
- advectie
- turbulente diffusie

Daarnaast wordt impuls overgedragen via de druk en via de zwaartekracht; in een impulsbalans moeten deze dus eveneens in rekening worden gebracht.

In deze paragraaf worden diverse uitdrukkingen gegeven waarmee de impulstransporten worden voorgesteld. Bovendien zullen de impulsbalansen worden opgesteld voor diverse stromingstypen.

Het belangrijkste doel van deze paragraaf is de impulsvergelijkingen te presenteren vanuit de algemene optiek van transportprocessen, met een oog voor analogieën met het transport van andere grootheden. Het gebruik van deze impulsvergelijkingen voor het afleiden van eigenschappen van allerlei typen stroming is hier niet het doel.

4.8.2 Moleculaire diffusie

Viscositeit is het vermogen van een vloeistof of gas om in zijdelingse richting impuls uit te wisselen, tussen lagen die over

elkaar schuiven. Deze uitwisseling is het gevolg van warmtebewegingen van moleculen (vooral in gassen) en van moleculaire wisselwerkingen (vooral in vloeistoffen). Het gemiddelde effect ervan is een overdwars gericht diffusief transport van voorwaartse impuls. De waarde hiervan p.e.v. oppervlak en p.e.v. tijd noemen we de tangentiële spanning of schuifspanning (τ). Deze is evenredig met de snelheidsgradiënt (zoals het warmtetransport door moleculaire diffusie evenredig is met de temperatuurgradiënt). In een parallelle stroming met snelheid u die in dwarsrichting (n) varieert geldt

$$\tau = \eta \frac{du}{dn} \quad \text{of} \quad \tau/\rho = \nu \frac{du}{dn} \quad (4.44)$$

De coëfficiënt van diffusiviteit heet hier de coëfficiënt van viscositeit; de kinematische viscositeitscoëfficiënt ν heeft dezelfde dimensie als andere diffusiviteits-coëfficiënten (zoals ϵ in vgl. 4.4), nl. L^2T^{-1} ($m^2 s^{-1}$ in het SI).

De diffusievergelijking voor stoftransport luidt (vgl. 4.5):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \epsilon \nabla^2 c$$

Een impulsbalans voor het geval van uitsluitend diffusief impuls-transport is hieraan analoog. De hoeveelheid impuls p.e.v. volume, $\rho \vec{u}$, komt nu in de plaats van de concentratie c (hoeveelheid stof p.e.v. volume). Daarnaast vervangen we ϵ door de dynamische viscositeit η ; het resultaat is

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} = \eta \nabla^2 \vec{u} \quad (4.45)$$

Hierin stelt het rechterlid de netto binnenwaartse viskeuze overdracht voor van impuls door een gesloten oppervlak p.e.v. tijd en p.e.v. ingesloten volume. Anders gezegd: het is de netto viskeuze kracht uitgeoefend op een gesloten oppervlak p.e.v. ingesloten volume. (N.B.: een volledige afleiding heeft heel wat (meer) voeten in de aarde; zie b.v. Rouse, 1938 of Batchelor, 1967.)

Wanneer ρ constant is reduceert (4.45) tot de diffusievergelijking

$$\boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \nu \nabla^2 \vec{u}} \quad (4.46)$$

Voor (b.v.) de x-component van \vec{u} geldt

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \nabla^2 u_x = \nu \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (4.46x)$$

Een voorbeeld van een beweging waarin uitsluitend diffusief (viskeus) impulstransport een rol speelt is de beweging van de vloeistof grenzend aan een in zijn vlak bewegende vlakke, starre, oneindig uitgestrekte plaat. De plaat sleept de eraan grenzende laag vloeistof mee (kleefconditie), dié sleept de daaraan grenzende laag mee, enz. Zo zet de voorwaartse beweging van de plaat (zeg in x-richting) zich via diffusie voort in de vloeistof. (In tegenstelling tot een overdwarse beweging van de plaat (zeg in z-richting), die zich via drukgradiënten voortzet in de vloeistof.) De vloeistofsnelheid, die evenwijdig is aan de plaat ($u = u_x$), varieert met de afstand uit de plaat (z) en eventueel met de tijd; deze variatie volgt uit de diffusievergelijking (4.46x), welke voor dit één-dimensionale geval reduceert tot de standaardvorm

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (4.47)$$

Deze vergelijking wordt ook gebruikt voor het berekenen van de grenslaag in het omgekeerde geval van een vloeistofmassa die oscilleert langs een stilstaande wand, zoals boven de bodem in aanwezigheid van windgolven (zie het vervolgvak Korte Golven, b76).

4.8.3 Advectie en diffusie

De advectie of meevoering p.e.v. tijd en p.e.v. oppervlak van een stof, met concentratie c, is $c\vec{u}$. Evenzo is de advectie of meevoering van impuls p.e.v. tijd en p.e.v. oppervlak gelijk aan $(\rho\vec{u})\vec{u}$.

Door een vlakje ($\Delta A, \vec{e}_N$) is het advectieve impulstransport $(\rho\vec{u})_N \Delta A$. Door een horizontaal vlakje (z = constant) bijvoorbeeld is het

opwaarts impulstransport $(\rho \vec{u})_z \Delta A$; voor het opwaarts transport van x-impuls is dat $(\rho u_x)_z \Delta A$, van y-impuls $(\rho u_y)_z \Delta A$, en van z-impuls $(\rho u_z)_z \Delta A = \rho u_z^2 \Delta A$.

De advection-diffusie vergelijking voor een passieve stof luidt (zie 4.11 met $\epsilon = \text{constant}$):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (c \vec{u}) - \epsilon \nabla^2 c = 0$$

De advection-diffusie vergelijking voor impuls luidt analoog, met dit verschil dat de overdracht veroorzaakt door de vloeistofdruk en die door de zwaarte moeten worden toegevoegd. De waarde daarvan p.e.v. tijd en p.e.v. volume is $-\nabla p$ respectievelijk $-\rho \nabla(gz)$ (zie b70). Hiermee wordt de impulsbalans:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{u}) + \nabla \cdot \{(\rho \vec{u}) \vec{u}\} - \eta \nabla^2 \vec{u} + \nabla p + \rho \nabla(gz) = 0} \quad (4.48)$$

Uitgeschreven voor de x-component:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_x u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_x u_z) \\ - \eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x}(gz) = 0 \end{aligned} \quad (4.48x)$$

In de behandeling van turbulente stromen komen we hierop terug.

N.B. Door gebruik te maken van de massabalans (zie par. 4.2) kan bovenstaande impulsbalans voor een vast gebiedje (4.48) worden herleid tot de volgende versnellingsvergelijking:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla(gz) + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (4.49)$$

Dit is de z.g. vergelijking van Navier-Stokes (op de viscositeitsterm na gelijk aan de vergelijking van Euler).

4.8.4 Turbulente diffusie

Het momentane advectieve transport van een stof met concentratie c is $\vec{c}u$. Door een vlakje $x = \text{constant}$ b.v. is dit cu_x .

In geval van een turbulente stroom zijn we geïnteresseerd in de gemiddelde waarde van de fluctuerende momentane transporten, b.v. $\overline{cu_x}$. Door c en u_x te splitsen in een gemiddelde (\bar{c} en \bar{u}_x) en een fluctuatie (c' en u') ontstaat

$$\overline{cu_x} = \bar{c} \bar{u}_x + \overline{c' u'_x}$$

De laatste term stelt de bijdrage voor van de turbulentie aan het gemiddelde transport. De divergentie van de gemiddelde turbulente transporten verschijnt als extra term in de advectie-diffusievergelijking wanneer we die gaan middelen (zie par. 4.5).

Op een soortgelijke wijze vindt er impulstransport plaats als gevolg van de turbulente bewegingen. Het gemiddelde transport door een vlakje $x = \text{constant}$ bijvoorbeeld is $\overline{(\rho \vec{u})u_x}$, met de impulscomponenten

$$\overline{(\rho u_x)u_x} = \rho \overline{u_x^2} = \rho \bar{u}_x^2 + \rho \overline{u_x'^2}$$

$$\overline{(\rho u_y)u_x} = \rho \overline{u_y u_x} = \rho \bar{u}_y \bar{u}_x + \rho \overline{u_y' u_x'}$$

$$\overline{(\rho u_z)u_x} = \rho \overline{u_z u_x} = \rho \bar{u}_z \bar{u}_x + \rho \overline{u_z' u_x'}$$

Wanneer we de impulsbalans (4.48) gaan middelen over de turbulente fluctuaties dan verschijnen er naast de termen die gemiddelde snelheden bevatten (zoals $\rho \bar{u}_x \bar{u}_y$) ook termen voor de bijdragen van de turbulente fluctuaties (zoals $\rho \overline{u_x' u_y'}$). Deze termen hebben dezelfde werking als de moleculaire spanningen ($\rho \overline{u_x'^2}$ als een druk, en $\rho \overline{u_x' u_y'}$ en $\rho \overline{u_x' u_z'}$ als een schuifspanning). Zij worden Reynoldse spanningen genoemd; de vergelijkingen waarin zij voorkomen heten de vergelijkingen van Reynolds. (We zullen die hier niet in hun meest algemene vorm uitschrijven; zie hierna voor een eenvoudig geval.)

N.B. De volgende namen zijn gebruikelijk voor verschillende typen impulsbalans:

- Euler: impulsbalans voor momentane beweging van ideale (niet-viskeuze) vloeistof;
- Navier-Stokes: idem voor viskeuze vloeistof;
- Reynolds: impulsbalans voor gemiddelde beweging van viskeuze vloeistof, inclusief de Reynoldse spanningen.

We gaan het voorgaande uitwerken voor een twee-dimensionale stationaire eenparige stroming met een vrij oppervlak, zoals in par. 4.6. We gaan daarbij in op het verticale transport van impuls, eerst voor de verticale impuls en daarna voor de (vrijwel) horizontale impuls.

Vertikale verdeling gemiddelde druk

Eenvoudigheidshalve beginnen we met een toepassing waarin alleen de Reynoldse drukspanning een rol speelt, hoewel meestal de Reynoldse schuifspanningen belangrijker zijn omdat die zeer veel groter zijn dan de viskeuze (laminaire) schuifspanning.

Voor de twee-dimensionale, stationaire en eenparige stroming in open water zoals behandeld in paragraaf 4.6 reduceert het gemiddelde van de momentane balans van verticale impuls (4.48z), met verwaarlozing van de moleculaire viscositeitsterm, tot

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho \overline{u_z^2}) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \rho g = 0$$

of

$$\frac{\partial}{\partial z}(\rho \overline{u_z^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho \overline{u_z'^2}) + \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \rho g = 0$$

Met $\bar{u}_z = 0$ en na integratie (met $\rho = \text{constant}$) geeft dit

$$\bar{p} + \rho \overline{u_z^2} + \rho g z = \text{const. in de vertikaal} (= \rho g h) \quad (4.50)$$

We zien hieruit dat in elk punt de gemiddelde druk \bar{p} en de Reynoldse drukspanning $\overline{\rho u_z'^2}$ samen juist evenwicht maken met het gemiddelde gewicht van de vloeistofkolom er boven. Strikt gesproken is de gemiddelde vloeistofdruk \bar{p} zelf dan niet hydrostatisch. (N.B. Op de bodem is $u_z = 0$ en dus ook $\overline{u_z'^2} = 0$ zodat $\bar{p}_b = \rho g d$.)

Vertikale verdeling gemiddelde snelheid

Op soortgelijke manier als hierboven reduceert het gemiddelde van de balans van horizontale impuls (4.48x), nu zonder verwaarlozing van de moleculaire viscositeit, en met constante ρ , tot

$$\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho u_x' u_z'}) - \eta \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \rho g z) = 0$$

De term $\overline{\rho u_x' u_z'}$ hierin is het gemiddelde verticale turbulente transport van horizontale impuls, een Reynoldse schuifspanning (τ_t), die we schrijven als een diffusie-term met een turbulentie viscositeit (ν_t):

$$\overline{\rho u_x' u_z'} = -\rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\tau_t$$

De tweede term bevat de laminaire schuifspanning $\tau_\ell = \eta \partial \bar{u} / \partial z$.

Samengenomen, met $\bar{\tau} = \tau_t + \tau_\ell$:

$$\frac{\partial \bar{\tau}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(\bar{p} + \rho g z) = \frac{\partial}{\partial x}(\rho g h) = -\rho g i_b$$

of

$$\bar{\tau} = -\rho g i_b z + \text{const}$$

De totale schuifspanning varieert dus lineair met z . De integratie-constante volgt uit de r.v.w. $\bar{\tau} = 0$ waar $z = d$ (aan het oppervlak). Daaruit volgt

$$\bar{\tau} = \tau_t + \tau_\ell = \rho g i_b (d - z) = \rho g d i_b \left(1 - \frac{z}{d}\right) = \tau_b \left(1 - \frac{z}{d}\right)$$

In de turbulente hoofdstroom is τ_ℓ verwaarloosbaar t.o.v. τ_t . (Onder hydraulisch gladde condities bij de bodem is er weliswaar een laminaire sublaag waarin dit niet opgaat, maar de dikte daarvan is verwaarloosbaar t.o.v. de diepte.) Voor de hoofdstroom geldt dus de benadering

$$\bar{\tau} \approx \tau_t = \rho \nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \tau_b \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (4.51)$$

Voor ν_t nemen we ϵ_t zoals gebruikt in de berekening van de verticale concentratie-verdeling van gesuspendeerd sediment (4.20):

$$\nu_t = \kappa u_* z \left(1 - \frac{z}{d}\right) \quad (4.52)$$

Substitutie hiervan en van $\tau_b = \rho u_*^2$ in (4.51) geeft

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa} \frac{1}{z}$$

Integratie hiervan resulteert in

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln z + \text{constante} \quad (4.53)$$

Het bovenstaande leidt dus tot een *logaritmisch snelheidsprofiel in turbulente stromen in open water*. Voor de stroming in een pijpleiding geldt hetzelfde resultaat. Nikuradse heeft daarvoor de benodigde empirische constanten bepaald (w.o. $\kappa \approx 0,4$). Voor details daarover wordt verwezen naar Rouse (1938) of Vennard en Street (1982).

5. SEDIMENTTRANSPORT IN OPEN WATERLOPEN

5.1 Inleiding

Het onderwerp van dit hoofdstuk is het transport van loskorrelig cohesieloos bodemmateriaal door stromend water in open waterlopen, en de daaruit voortvloeiende ontwikkeling van de bodemligging. Zowel theoretisch als experimenteel is dit een moeilijk probleem vanwege het twee-fasen karakter van de stroming (vloeibare en vaste fase) en de sterke wisselwerking tussen beide (stroming → transport bodemmateriaal → ontwikkeling beddingvormen (ribbels etc.) → invloed op waterbeweging (via ruwheid) en op sedimenttransport (loslating, wervelvorming). Na jaren onderzoek is er nog niet een formulering bereikt die onder een breed scala van condities van toepassing is. Wel is er een zeer groot aantal overwegend empirische betrekkingen die in het algemeen buiten het bereik van de oorspronkelijke metingen al gauw niet meer betrouwbaar zijn. Daarom zijn er grote onzekerheden in "voorspellingen"; een controle en/of ijking van formules voor sedimenttransport in concrete situaties moet daarom zo mogelijk worden uitgevoerd.

Het doel van dit hoofdstuk is het geven van een eerste globale kennisgeving. Uitvoerige verhandelingen zijn beschikbaar zoals in de boeken van Graf (1971), Jansen e.a. (1979), Raudkivi (1967) en Yalin (1972).

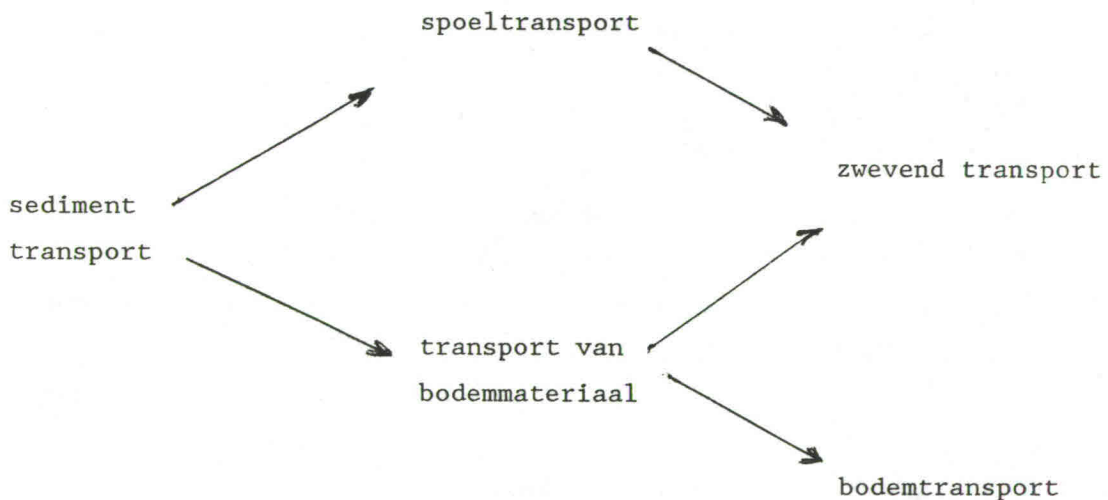
5.2 Klassificatie sedimenttransport

Het is gebruikelijk een aantal typen sedimenttransport in open waterlopen te onderscheiden, ook al zijn de overgangen er tussen geleidelijk. Dit onderscheid heeft enerzijds betrekking op de oorsprong van het sediment, anderzijds op het mechanisme van het transport ervan.

Het getransporteerde sediment kan voor een deel afkomstig zijn van het lokaal aanwezige bodemmateriaal; in een situatie van evenwicht wordt het transport hiervan bepaald door de lokale stromingscondities. Daarnaast is transport mogelijk van zeer fijn materiaal, fijner dan het bodemmateriaal, dat van bovenstrooms in suspensie met het water wordt meegevoerd. Dit z.g. spoeltransport ("washload") is niet afhankelijk van de lokale wisselwerking tussen water en bodem; het blijft hier verder buiten beschouwing.

Naar het mechanisme van het transportproces onderscheiden we het z.g. bodemtransport ("bedload transport"), dat plaatsvindt door rollen of springen van de korrels op of vlakbij de bodem, en het z.g. zwevend transport ("suspended load transport"), waarbij de korrels langdurig los zijn van de bodem, in suspensie gehouden door de turbulentie, en zo worden meegevoerd met de plaatselijke stroomsnelheid.

Het voorgaande is toegelicht in onderstaand schema:



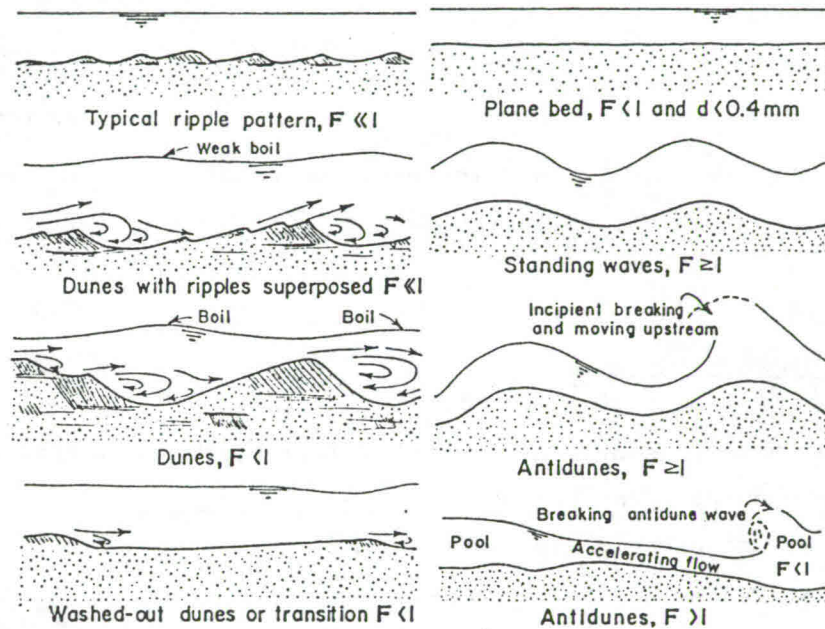
In de volgende paragrafen (5.4 en 5.5) gaan we in op de parameters die in hoofdzaak bepalend zijn voor het totale sedimenttransport, en voor de relatieve grootte van bodemtransport en zwevend transport.

5.3 Beddingvormen en stromingsweerstand

Voorafgaande aan de kwantitatieve behandeling van sedimenttransport geven we eerst kort een aanduiding van de beddingvormen die kunnen ontstaan bij stroming van open water in loskorrelig materiaal. Uitgaande van een vlak bed zijn globaal de volgende beddingvormen te onderscheiden met toenemende stroomsnelheid (zie Fig. 5.1):

- | | | |
|--------------|---|------------------------|
| (a) vlak bed | } | kalme ("lower") regime |
| (b) ribbels | | |
| (c) duinen | | |
| (d) vlak bed |) | overgangsregime |
| (e) antiduin |) | wilde ("upper") regime |

- kalme regime: stroming subkritisch
- wilde regime: stroming superkritisch
- ribbels (vormen in zand alleen als $D < \text{ca. } 0,5 \text{ mm}$): lengten $< \text{ca. } 0,5 \text{ m}$, hoogten $< \text{ca. } 0,05 \text{ m}$; geen invloed van vrij oppervlak.
- duinen: lengte en hoogte veel groter dan van ribbels, enige wisselwerking met vrij oppervlak (in Fig. 5.1 overdreven weergegeven).
- antidunnen: zeer sterke wisselwerking met vrij oppervlak; bodemniveau in fase met niveau waterspiegel; bewegingsrichting antidunnen meestal tegen stroomrichting en sedimenttransportrichting in.

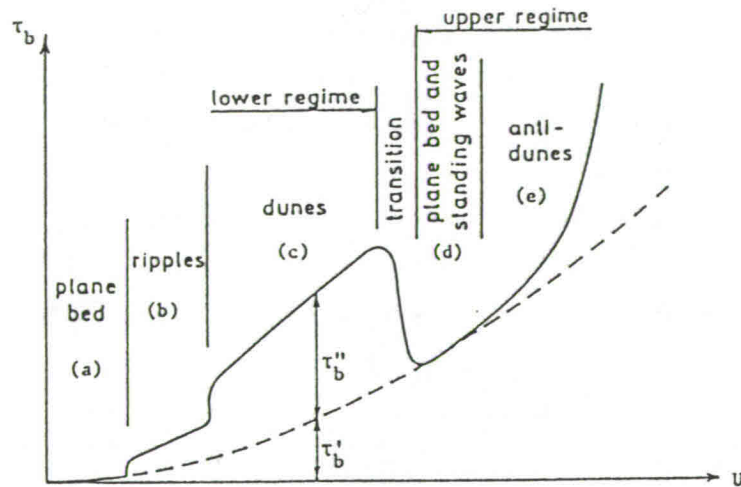


Figuur 5.1 Beddingvormen in zandige bodem (bron: Simons en Richardson, 1961)

Beddingvormen hebben een grote invloed op de weerstand die de stroming van de bodem ondervindt. De "schuifspanning" bij de bodem (τ_b) bestaat deels uit weerstand geleverd door de korrels (τ'_b) en deels uit vormweerstand van de beddingvormen (τ''_b). In de overgang van duinen (c) naar een vlak bed (d) gaat de vormweerstand (τ''_b) naar nul en neemt de totale weerstand af met toenemende snelheid (Fig. 5.2).

Er bestaat een verscheidenheid aan recepten voor weerstandsvorspelling. In een Appendix aan dit hoofdstuk wordt (als voorbeeld) de methode van Engelund en Hansen (1967) samengevat voorzover die is

ontwikkeld voor het kalme regime. Een voorbeeld van een toepassing ervan is gegeven in par. 5.7.



Figuur 5.2 Invloed van beddingvormen op totale bodemweerstand (bron: Engelund en Hansen, 1967)

5.4 Sedimentparameters

Voor het transport in water zijn de volgende onafhankelijke sedimenteigenschappen van belang:

- massadichtheid sediment (ρ_s)
- kenmerkende korrelgrootte (D) ("diameter")
- vorm van korrelgrootte-verdeling
- korrelvorm(en)

De korrelgrootte is niet uniform; de verdeling ervan wordt in eerste benadering gekenmerkt door één maat voor de grootte, bv. de mediaan (D_{50}), of de waarde die door 10% wordt overschreden (D_{90}) (deze percentages hebben betrekking op de korrelmassa, niet op het aantal korrels). Voor een meer gedetailleerde beschrijving wordt ook een maat voor de spreiding gehanteerd.

De korrelvorm wordt vaak gekwantificeerd in de verhouding

$$\gamma = \frac{c}{\sqrt{ab}} \quad (5.1)$$

waarin a, b en c respectievelijk de langste, de middelste en de kortste van de drie onderling loodrecht op elkaar staande hoofdassen zijn van de korrel. Voor een bol is $\gamma = 1$; voor natuurlijk kwarts is $\gamma \approx 0,7$ een kenmerkende waarde.

Sediment in water valt onder invloed van de zwaartekracht. De z.g. valsnelheid (w) van een korrel is die snelheid waarmee deze valbeweging eenparig is, d.w.z. dat de stromingsweerstand (F_w) in evenwicht is met het gewicht minus de opwaartse kracht (W_Δ):

$$F_w = W_\Delta$$

Voor een bolvormige korrel houdt dit in:

$$c_w \left(\frac{1}{2} \rho w^2 \right) \left(\frac{\pi}{4} D^2 \right) = (\rho_s - \rho) g \frac{\pi}{6} D^3 \quad (5.2)$$

ofwel

$$w^2 = \frac{4}{3c_w} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g D = \frac{4}{3c_w} \Delta g D \quad (5.3)$$

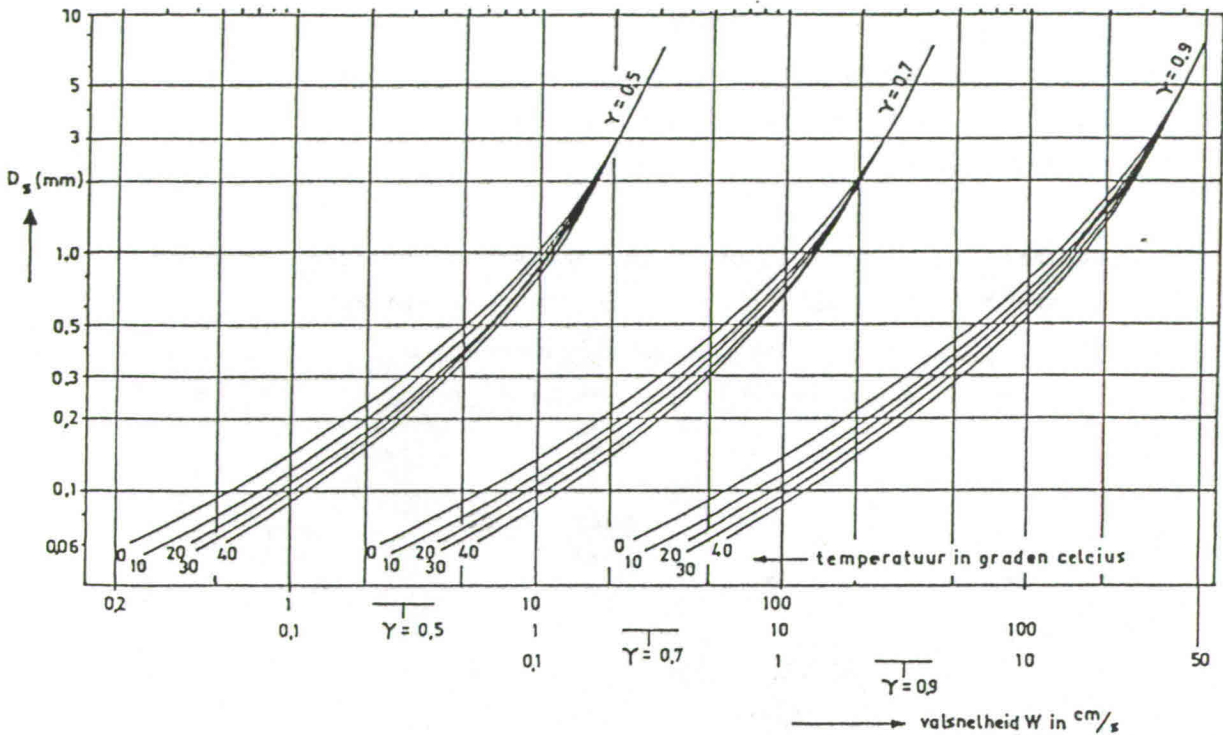
waarin korthedshalve het symbool Δ is gebruikt voor het relatieve dichtheidsverschil:

$$\Delta = \frac{\rho_s - \rho}{\rho} \quad (5.4)$$

De weerstandscoëfficiënt c_w is een (empirisch) bekende functie van het getal van Reynolds:

$$c_w = c_w(\text{Re}_w) \quad \text{waarin} \quad \text{Re}_w = \frac{\rho w D}{\eta} = \frac{w D}{\nu}$$

Hierdoor is w impliciet bekend bij gegeven waarden van ρ , η , ρ_s , g en D . Voor niet-bolvormige korrels gelden soortgelijke betrekkingen, waarbij de invloed van de vorm via de parameter γ in rekening wordt gebracht. Fig. 5.3 geeft waarden van w voor kwarts-korrels ($\rho_s \approx 2650 \text{ kg/m}^3$) in zoet water ($\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$) van verschillende temperatuur (verschillende viscositeit).



Figuur 5.3 Valsnelheid van natuurlijke kwartskorrels in water als functie van (zeef)diameter, vormfactor en watertemperatuur

We kunnen (5.2) als volgt in dimensieloze vorm schrijven:

$$\frac{\pi}{8} c_w \left(\frac{wD}{\nu}\right)^2 = \frac{\pi}{8} c_w Re_w^2 = \frac{\pi}{6} \frac{\Delta g D^3}{\nu^2}$$

Omdat c_w bepaald wordt door Re_w houdt dit in

$$Re_w = f\left(\frac{\Delta g D^3}{\nu^2}\right) \quad (5.5)$$

De onafhankelijke grootheden Δ , g , D en ν vormen tezamen de onafhankelijke dimensieloze parameter $\Delta g D^3 / \nu^2$; die bepaalt dus (bij gegeven korrelvorm) de waarde van het kental van Reynolds bij eenparige valbeweging als afhankelijke grootheid.

5.5 Stroom- en transportparameters

We gaan uit van een twee-dimensionale stroom en bekijken daarbij het totale transport (som van bodemtransport en zwevend transport) van bodemsediment p.e.v. breedte en p.e.v. tijd, hier weergegeven door het

symbool s . Dit transport kan o.m. worden gemeten naar massa (s_m), volume vaste stof (korrels) (s_k) of bulkvolume (s_b). Deze kunnen in elkaar worden uitgedrukt via de massadichtheid van het sediment (ρ_s) en de porositeit (ϵ_p) volgens $s_m = \rho_s s_k$ en $s_k = (1 - \epsilon_p) s_b$.

De onafhankelijke parameters die bepalend zijn voor het sedimenttransport zijn de in par. 5.4 genoemde parameters voor het sediment (ρ_s, D), de vloeistof (ρ, η) en het zwaarteveld (g), plus één of meer parameters voor de invloed van de stroming. We beperken ons hier tot stationaire, eenparige en twee-dimensionale stromen over een horizontale of zeer flauw hellende bodem. De meest kenmerkende grootte voor de wisselwerking tussen de stroom en de bodem is de schuifspanning aan de bodem (τ_b). Andere variabelen zoals de diepte (d), het debiet p.e.v. breedte (q) en de vertikaal gemiddelde snelheid (U) laten wij buiten beschouwing. Dit is geoorloofd zolang er geen sterke wisselwerking is met het vrije oppervlak; dit is het geval zolang de stroming duidelijk subkritisch is ($Fr^2 = U^2/gd \ll 1$). In deze benadering is het sedimenttransport p.e.v. breedte (s) uitsluitend bepaald door de volgende onafhankelijke variabelen:

$$s = f(g, \rho, \eta, \rho_s, D, \tau_b) \quad (5.6)$$

Uit de zes onafhankelijke variabelen in het rechterlid zijn drie onafhankelijke dimensieloze parameters te formeren.

Via de bodemschuifspanning ("tractive force") wordt het bodemsediment meegesleept. Op een vlak bed zijn de sleepkracht en de liftkracht op een korrel in het grensvlak beide van de orde $\tau_b D^2$; de korrel ontleent stabiliteit (weerstand tegen verschuiven, rollen en optillen) aan zijn gewicht onder water, $W_\Delta \sim (\rho_s - \rho) g D^3$. De verhouding tussen beide is een maat voor de mobiliteit van het sediment, de z.g. Shields-parameter (θ):

$$\theta = \frac{\tau_b}{(\rho_s - \rho) g D} \quad (5.7a)$$

Met $\tau_b = \rho u_*^2$ en gebruik van Δ is dit ook te schrijven als

$$\theta = \frac{u_*^2}{\Delta g D} = \frac{i}{\Delta} \frac{d}{D} \quad (5.7b)$$

N.B. De Shields-parameter houdt nauw verband met de verhouding u_*/w , de verhouding van u_* tot de valsnelheid w van een korrel. Dit is te zien door substitutie van (5.3) in (5.7b), wat (met weglating van getalsfactoren) resulteert in

$$\theta \sim c_w^{-1} (u_*/w)^2$$

Voor grof materiaal is $c_w \approx$ constant en geldt dus dat θ evenredig is met $(u_*/w)^2$. Ook dit toont de betekenis van de Shields-parameter als mobiliteitsparameter: grotere θ betekent een grotere schuifspanningsnelheid t.o.v. de valsnelheid, dus grotere mobiliteit van het sediment.

De Shields-parameter speelt een zeer belangrijke rol in het sedimenttransport. Voor waarden van θ beneden een grenswaarde θ_{kr} treedt er geen sedimenttransport op. Met toenemende θ boven deze grens ontwikkelen zich de in par. 5.3 genoemde verschillende beddingvormen, wordt het transport intensiever, neemt de concentratie van sediment in suspensie vlak boven de bodem toe, en nadert de verticale verdeling van de concentratie van gesuspendeerd sediment meer en meer tot een uniforme verdeling (zie par. 4.6, Fig. 4.2), zodat ook het zwevend transport relatief in belang toeneemt.

Een tweede onafhankelijke dimensieloze parameter die uit de groep (5.6) is te vormen is ρ/ρ_s . Gezien de fysische betekenis van de Shieldsparameter gaan we er echter van uit dat de invloed van ρ en ρ_s daarin voldoende is weergegeven. We zullen in het volgende de verhouding ρ/ρ_s als onafhankelijke parameter dan ook buiten beschouwing laten.

De laatste onafhankelijke parameter die van belang kan zijn voor het transport is het getal van Reynolds voor de stroming rond een korrel in de grenslaag:

$$\boxed{Re_* = \frac{u_* D}{\nu}} \quad (5.8)$$

Als de stroming bij de bodem in het hydraulisch gladde regime is is er langs de bodem een laminaire sublaag met dikte $\delta = 11,6 \nu/u_*$ (zie b70). Op een constante factor na is Re_* dus een maat voor de verhouding van D tot δ . Als $Re_* \approx 10$ zijn D en δ van dezelfde grootte-orde. Waarden van Re_* veel kleiner respectievelijk veel groter dan ca. 10 duiden op hydraulisch gladde respectievelijk ruwe condities.

Evenals de onafhankelijke variabele parameters worden ook de afhankelijkken dimensieloos gemaakt. Het volumetransport s_k (dimensie: L^2/T) bv. wordt vaak dimensieloos gemaakt in termen van de effectieve g (d.w.z. Δ maal g i.v.m. het gewicht van het sediment onder water) en de korreldiameter. Dit leidt tot de volgende dimensieloze transportparameter:

$$\sigma_k = \frac{s_k}{(\Delta g D^3)^{1/2}} \quad (5.9)$$

Volgens bovenstaande benadering geldt dan de volgende betrekking voor het dimensieloze transport

$$\sigma_k = f_1(\theta, Re_*) \quad (5.10)$$

In het hydraulisch ruwe regime (Re_* boven een zeker minimum) is de viscositeit niet meer van invloed en wordt σ onafhankelijk van Re_* :

$$\sigma_k = f_2(\theta) \quad (5.11)$$

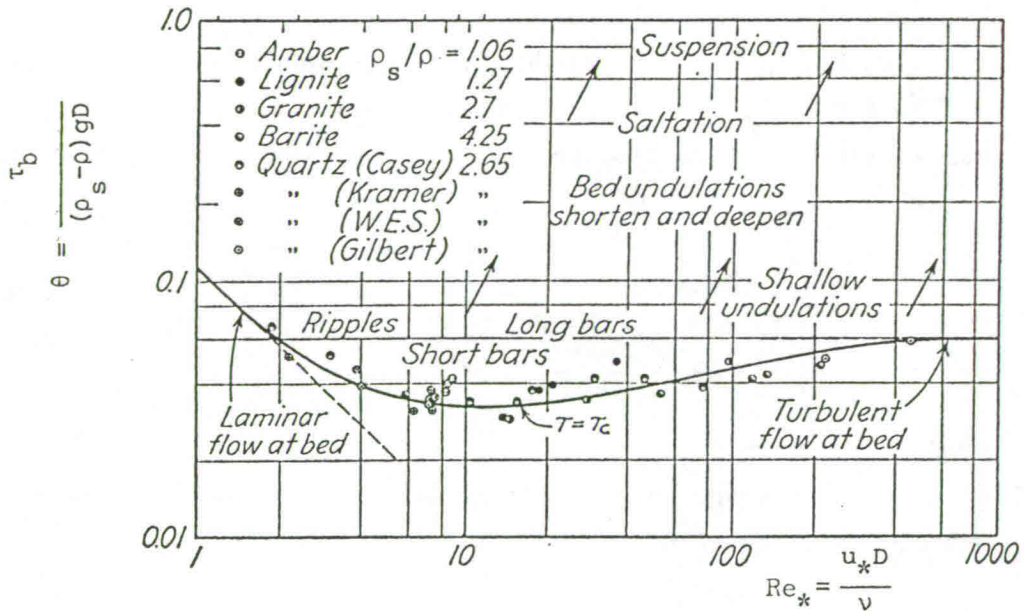
Veel sedimenttransportformules zijn van de vorm ((5.11), gebaseerd op empirische benaderingen van de functie f_2 . Twee daarvan worden in par. 5.7 genoemd. Voorafgaand daaraan wordt in par. 5.6 ingegaan op de voorwaarde voor het al dan niet optreden van sedimenttransport.

5.6 Begin van beweging

De kritieke waarde (θ_{kr}) van θ , waarbij het z.g. begin van beweging van sediment plaatsvindt ("z.g." omdat het hier niet om een abrupte overgang gaat), is de grootste waarde van θ , bij gegeven Re_* , waarvoor $\sigma = 0$. Volgens (5.10) geldt dus

$$\theta_{kr} = f_3(Re_*) \quad (5.12)$$

Deze functie is eerst door Shields (1936) en later door anderen empirisch vastgesteld. Zie Fig. 5.4 voor een samenvatting van resultaten. Merk het verschillend verloop op in het hydraulisch gladde gebied ($Re_* < ca. 2$), het overgangsgebied (zeg $2 < Re_* < 500$) en het hydraulisch ruwe gebied ($Re_* > 500$). In laatstgenoemd gebied is θ_{kr} onafhankelijk van Re_* (dit volgt ook uit 5.11).



Figuur 5.4 Shields diagram voor begin van beweging (meetpunten en getrokken lijn) en globale aanduiding van beddingvormen (bron: Brown, 1950)

Zoals opgemerkt is "het begin" van beweging niet ondubbelzinnig bepaald. Shields schatte de waarden van θ_{kr} d.m.v. extrapolatie uit een toestand met klein transport. Als in het geheel geen beweging mag worden toegelaten moeten lagere waarden voor θ_{kr} worden gehanteerd (ca. 0,03 voor grof materiaal zoals in een bodemverdediging).

De parameters θ en Re_* bevatten beide u_* en zijn dus afhankelijk van de stroming, maar voor de verhouding Re_*^2/θ geldt dat niet. Deze verhouding is gelijk aan $\Delta g D^3/\nu^2$, d.i. de stromings-onafhankelijke parameter voor het gedrag van een korrel in de vloeistof onder invloed van de zwaartekracht (zie par. 5.4, vgl. 5.5). Een constante waarde van Re_*^2/θ , dus van $\Delta g D^3/\nu^2$, komt in het Shields-diagram overeen met rechte

lijnen onder een helling 2:1, parallel aan de pijlen in Fig. 5.4. Deze pijlen geven weer hoe het Shields-diagram wordt doorlopen bij verhoging van de stromingsintensiteit (u_*) bij gegeven sediment en vloeistof. In de figuur is tevens globaal aangeduid welke beddingvormen daarbij voorkomen.

In het voorgaande is een flauwe bodemhelling verondersteld, die plaatselijk geen noemenswaardige invloed heeft op het transport. Bij sterkere hellingen moet de déstabiliserende invloed van de gewichtscomponent langs de helling in rekening worden gebracht in de bepaling van het begin van beweging (bv. voor stabiliteit van een bestorting op een oever).

5.7 Sedimenttransport

Voor stromen met θ juist boven de grenswaarde θ_{kr} zijn er korrels in beweging maar blijven zij min of meer voortdurend in contact met de bodem (bodemtransport). Bij verder toenemende θ blijven meer en meer korrels voor langere tijd en tot grotere hoogte in suspensie boven de bodem (suspensie-transport of zwevend transport).

Van de vele gepubliceerde sedimenttransport-formules noemen wij hier slechts die van Meyer-Peter en Müller (1948) (MP & M) voor het bodemtransport, en die van Engelund en Hansen (1967) (E & H) voor het totale transport (som van bodemtransport en suspensie-transport). De formule van MP & M is geheel empirisch van oorsprong, die van E & H voor een deel. Formeel overlappen de toepassingsgebieden van beide elkaar voor een deel; in de praktijk wordt voor de keus tussen beide wel de waarde van u_*/w gebruikt: MP & M als $u_* < w$, E & H als $u_* > w$. Dit is echter niet meer dan een vuistregel.

Meyer-Peter en Müller (MP & M)

De formule van Meyer-Peter en Müller (1948) voor het bodemtransport p.e.v. breedte (volume vaste stof) luidt in dimensieloze vorm:

$$\sigma_k = 8(\mu\theta - 0,047)^{3/2} \quad (5.13)$$

Voor het transport gemeten in bulkvolume geldt dan, wanneer we een porositeit $\epsilon_p = 0,4$ gebruiken:

$$\sigma_b = 13,3 (\mu\theta - 0,047)^{3/2} \quad (5.14)$$

In termen van dimensiedragende grootheden is dit

$$s_b = 13,3 D \sqrt{\Delta g D} \left(\mu \frac{u_*^2}{\Delta g D} - 0,047 \right)^{3/2} \quad (5.15)$$

In deze formules is D de gemiddelde korreldiameter en is μ een z.g. ribbelfactor; daarmee wordt in rekening gebracht dat slechts het deel van de bodemschuifspanning dat direct op de korrels werkt (τ'_b) bepalend is (?) voor het sedimenttransport. MP & M gebruiken voor μ een uitdrukking die geschreven kan worden als

$$\mu = \left(\frac{C}{C_{90}} \right)^{3/2} = \left(\frac{\lambda_{90}}{\lambda} \right)^{3/4} \quad (5.16)$$

Hierin is C de Chézy-coëfficiënt en λ de weerstandscoefficiënt voor de bodem inclusief beddingvormen. C_{90} en λ_{90} stellen de (fictieve) waarden voor die C en λ zouden hebben in geval van een vlakke bodem (d.w.z. zonder beddingvormen). Voor de berekening daarvan hanteren MP & M de formule van Strickler in de vorm

$$C_{90} = (26 \text{ m}^2/\text{s}) \left(\frac{R}{D_{90}} \right)^{1/6} \quad (5.17)$$

Merk op dat C en λ in (5.16) mee bepaald worden door de beddingvormen, en dus afhankelijke grootheden zijn. Voor de bepaling (schatting) ervan in toepassingen wijzen MP & M op de mogelijkheid van natuurmetingen. Zij geven geen methode voor de berekening ervan uit de onafhankelijke variabelen. (Engelund en Hansen doen dat wel; zie de Appendix).

De formule van MP & M is zuiver experimenteel, en heeft uitsluitend betrekking op het bodemtransport (korreldiameter $D > 0,4$ mm; globaal $w > u_*$; zie ook Tabel 4.1). De maximale waarde van $\mu\theta$ in hun proeven was ca. 0,2. De waarde 0,047 in de formule van MP & M mag niet zonder meer worden gebruikt om het begin van beweging af te schatten, omdat de formule daar niet naar mag worden geëxtrapoleerd. MP & M stellen $\theta_{kr} = 0,03$ voor.

Engelund & Hansen (E & H)

De formule van Engelund & Hansen (1967) voor het totale sedimenttransport p.e.v. breedte luidt in dimensieloze vorm voor het volume vaste stof

$$\sigma_k = 0,05 \lambda^{-1} \theta^{5/2} = 0,05 \frac{C^2}{g} \theta^{5/2} \quad (5.18)$$

en voor het bulkvolume (aannemende $\epsilon_p = 0.4$):

$$\sigma_b = 0,083 \lambda^{-1} \theta^{5/2} = 0,083 \frac{C^2}{g} \theta^{5/2} \quad (5.19)$$

Als maatgevende korreldiameter gebruiken E & H de mediaan (D_{50}).

E & H geven een methode voor de bepaling van λ of C . Daarvoor wordt verwezen naar de Appendix.

Een z.g. ribbelfactor is impliciet in (5.18) verwerkt; dit is mogelijk omdat E & H die uitdrukken in termen van θ (zie vgl V in de Appendix)..

In termen van de oorspronkelijke, dimensiedragende parameters wordt (5.19):

$$s_b = 0,083 \lambda^{-1} \frac{u_*^5}{\Delta^2 g^2 D_{50}} = 0,083 \lambda^{3/2} \frac{U^5}{\Delta^2 g^2 D_{50}} \quad (5.20)$$

Voeren we $\Delta = 1,65$ in (voor kwarts onder water) dan reduceert dit tot

$$s_b = 0,03 \lambda^{3/2} \frac{U^5}{g^2 D_{50}} = 0,03 \left(\frac{g}{C^2}\right)^{3/2} \frac{U^5}{g^2 D_{50}} \quad (5.21)$$

We zien dat s hierin bij constante λ of C evenredig is met U^5 en omgekeerd evenredig met D_{50} .

De formule van E & H heeft betrekking op het totale sedimenttransport (bodem plus zwevend) en is semi-empirisch van aard; het meetbereik van θ dat door E & H is gebruikt in de afleiding/verificatie van hun formule loopt van $\theta \approx 0,07$ tot $\theta \approx 6$.

Voorbeeld

Gegeven: $q = 5 \text{ m}^3/\text{s}/\text{m}$, $i = 10^{-4}$, $\Delta = 1,65$, $D_{50} = 0,4 \text{ mm}$

Gevraagd: U , λ of C , s_b volgens E & H

Oplossing: eerste weerstandsvraagstuk, dan sedimenttransport.

U is iteratief te bepalen uit de vergelijkingen I t/m VII van de Appendix. Eerste schatting bv. $U = 1 \text{ m/s} \rightarrow \text{VII} \rightarrow d = 5\text{m} \rightarrow \text{I} \rightarrow \theta = id/\Delta D_{50} = 0,76 \rightarrow \text{V} \rightarrow \theta' = 0,29 \rightarrow \text{III} \rightarrow d' = 1,90\text{m}$ en $\text{IV} \rightarrow u_*' = 0,043 \text{ m/s} \rightarrow \text{VI} \rightarrow U = 1,03 \text{ m/s}$, d.i. bijna gelijk aan eerste schatting. Accepteer $U = 1,03 \text{ m/s}$. Dan $d = 4,85\text{m}$ en tenslotte $\text{VIII} \rightarrow \lambda = 0,0045$ en $\text{IX} \rightarrow C = 47 \text{ m}^2/\text{s}$.

Substitutie van de nu bekende grootheden in (5.21) geeft

$$s_b = 2,7 * 10^{-4} (\text{m}^3/\text{s})/\text{m} = 0,27 (\ell/\text{s})/\text{m}$$

5.8 Morfologische ontwikkelingen

Voorspellingen van beddingvormen en bodemniveau op grotere ruimte- en tijdschaal zijn van belang voor toepassingen zoals de bepaling van de aanlegdiepten van brugpijlers en andere constructies. Bovendien beïnvloeden de beddingvormen en het bodemniveau de waterstanden (van belang i.v.m. hoogwaterbescherming) en de waterdiepten (van belang voor de scheepvaart).

In deze paragraaf wordt een begin gemaakt met de behandeling van de morfologische ontwikkelingen op grote ruimte- en tijdschaal. We beperken ons tot een één-dimensionale beschouwing waarbij het totale debiet (Q) en het totale sedimenttransport door een dwarsdoorsnede (S) een rol spelen.

Waterbeweging en sedimenttransport vormen een gekoppeld stelsel waarvoor we vier basisvergelijkingen hebben:

- (a) massabalans water
- (b) impulsbalans water
- (c) massabalans sediment
- (d) transportvergelijking sediment

Deze zijn gekoppeld omdat de stroming wordt beïnvloed door de bodemligging en de beddingvormen, en het sedimenttransport afhangt van de stroming.

In geval van niet-evenwichtssituaties is de toestand niet-stationair, en moeten in principe afgeleiden naar de tijd worden meegenomen in deze vergelijkingen.

Stel nu dat in een evenwichtssituatie een storing wordt aangebracht (bv. onttrekking van water of sediment) waarop het systeem reageert. De waterbeweging past zich veel sneller aan dan de sedimentbeweging, en kan in elke fase van de veel langzamere morfologische evolutie (die jaren duurt) beschouwd worden als in evenwicht met de in die fase aanwezige morfologie (bodemligging enz.). We zullen hier eenvoudigheidshalve veronderstellen dat de randvoorwaarden voor de waterbeweging stationair zijn (geen variaties in afvoer of in benedenstroomse waterstand). We kunnen dan op elk moment de waterbeweging als stationair behandelen. In deze benadering reduceert de massabalans voor het water (a) tot $Q = UA = \text{constant}$ en geldt voor de impulsbalans (b) de verhanglijn-vergelijking (zie hoofdstuk 3). Voorafgaand aan een storing, of na voldoende lange tijd daarna, kan er sprake zijn van evenwicht, waarbij afstroming plaatsvindt bij de evenwichtsdiepte; de "verhanglijn"-vergelijking reduceert dan tot $U = C \sqrt{Ri}$ (twee-dimensionaal: $u = C \sqrt{di}$).

Voor het opstellen van een vergelijking voor het behoud van sediment gebruiken we een balansgebiedje tussen twee dwarsdoorsneden op infinitesimale afstand van elkaar. De bodembreedte is B ; de over deze breedte gemiddelde bodemhoogte boven het referentievlak geven we weer met z_b . De sedimentbalans (c) luidt dan

$$B \frac{\partial z_b}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \quad (5.22)$$

Hierin is S het totale sedimenttransport (p.e.v. tijd) door de doorsnede, gemeten in bulkvolume (de "b" van bulk laten we hier korthedshalve weg).

In een situatie van evenwicht reduceert de sedimentbalans tot $S = \text{constant}$.

Voor de sedimenttransport-vergelijking (d) stellen we $S = B s$ en drukken we s uit in de plaatselijke stroomsnelheid (U), sedimentdiameter (D) enz., volgens een geschikte transportformule zoals die van MP & M of E & H:

$$s = s_b = f(U, D, \Delta, \dots) \quad (5.23)$$

Via deze transportvergelijking en de balans (5.22) wordt de bodemligging gekoppeld aan de waterbeweging.

In toepassingen moet een uitdrukking worden gekozen voor het sedimenttransport (5.23). Vooral de variatie met U is belangrijk. Voor de eenvoud geven we die hier symbolisch weer met een machtsformule

$$s = s_b = m U^n \quad (5.24)$$

zodat

$$S = B m U^n \quad (5.25)$$

Voor de formule van Engelund en Hansen bv. ontleen we de waarden van de "constanten" m en n aan (5.21). Daarvoor geldt $n = 5$ (als λ of C onafhankelijk van U wordt verondersteld).

Voorbeeld 1 - plaatselijke verandering in debiet

Een rivier van constante breedte (B), diepte (d_e) en bovenafvoer (Q_1) mondt uit in een stuwmeer met constant peil; de rivier is in evenwicht tot aan een moment ($t = t_0$) waarop in een zeker punt (P) een constant debiet (ΔQ) aan de rivier wordt onttrokken. Gevraagd wordt kwalitatief te beschrijven hoe de rivier reageert op deze onttrekking, en kwantitatief aan te geven hoe de snelheden, diepten en verhangen in de uiteindelijke nieuwe evenwichtssituatie zich verhouden tot de oorspronkelijke waarden.

De riviervakken bovenstrooms en benedenstrooms van het punt van de onttrekking noemen we vak 1 respectievelijk vak 2.

De waterbeweging past zich veel sneller aan de plotseling begonnen onttrekking aan dan de bodem. Stel dat kort na $t = t_0$, zeg $t = t_0^+$, de waterbeweging al is aangepast aan de wateronttrekking terwijl de bodem nog zo goed als onveranderd is gebleven. Omdat $Q_2 < Q_1$ (bij onttrekking) is de evenwichtsdiepte in vak 2 kleiner dan voorheen (en dan die in vak 1, welke constant blijft). Het waterniveau stelt zich dan in volgens twee verhanglijnen M_1 en M_2 zoals getekend in Fig. 5.5a (aannemend dat de helling van het M-type is; zie ook Fig. 3.8). In vak 1 is de stroming dan versnellend ($\partial U/\partial x > 0$), dus is $\partial S/\partial x > 0$. Vanwege behoud van sediment (5.22) geldt daar dan $\partial z_b/\partial t < 0$; aanvankelijk treedt hier dus erosie op.

Benedenstrooms van P geldt het tegengestelde: daar treedt sedimentatie op. Door deze sedimentatie neemt de bodemhelling in vak 2 op den duur toe (waardoor d_{e_2} verder reduceert) evenals het verhang van de waterspiegel; bij constant peil benedenstrooms houdt dit in dat de waterspiegel geleidelijk aan stijgt na de plotselinge, aanvankelijke daling. Deze stijging treedt ook op bovenstrooms van P (subkritische stroom bepaald door benedenstroomse r.v.w.) totdat op den duur (theoretisch $t \rightarrow \infty$) het nieuwe evenwicht zich heeft ingesteld (Fig. 5.5b). Daarbij is de eenparige stroming in vak 1 gelijk aan de oorspronkelijke; de rivierbodem en de waterspiegel liggen er echter hoger dan voorheen. Benedenstrooms van P (vak 2) is de nieuwe evenwichtsstroming ook eenparig, maar met andere waarden van diepte, snelheid en helling dan voorheen. Voor de berekening ervan stellen we dat $C_2 = C_1 = C_0$.

Voor de evenwichtssituatie geldt

$$S = \text{constant} = S_1 = S_2$$

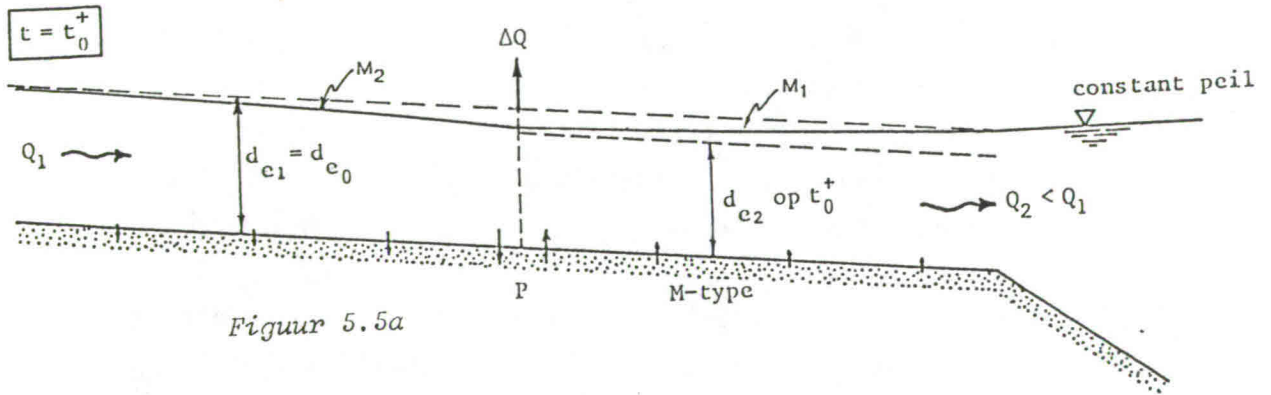
Toepassing van (5.25) met $B = \text{constant}$ geeft dan

$$U_1 = U_2$$

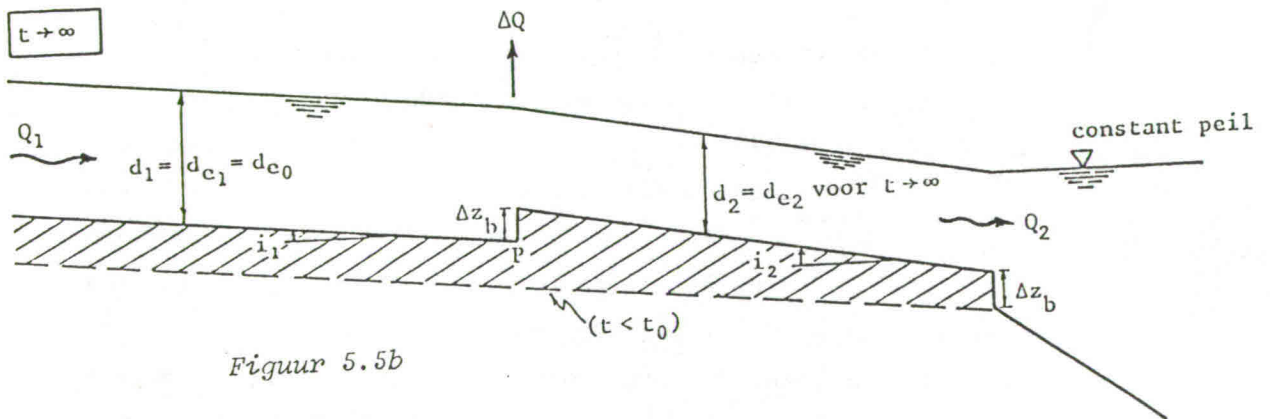
Nu is $Q = U A = U B d$ en $B_1 = B_2$, dus

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

De diepten verhouden zich hier als de debieten. De discontinuïteit in Q veroorzaakt theoretisch een discontinuïteit in de diepte, ofwel, bij continuïteit in waterpeil, een discontinuïteit in bodemniveau (Fig. 5.5b), d.i. een verandering van het bodemniveau over een relatief korte afstand.



Figuur 5.5a



Figuur 5.5b

Figuur 5.5 Lengteprofiel kort na begin van wateronttrekking (Fig. 5.5a) en in nieuwe evenwichtssituatie (Fig. 5.5b)

Omdat $U = C \sqrt{di}$ geldt $i = U^2/C^2d$; bij constante C geeft dit

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{U_2^2}{U_1^2} \frac{d_1}{d_2} = \frac{Q_1}{Q_2}$$

De verhangen verhouden zich in dit geval omgekeerd evenredig met de debieten. Onttrekking van water leidt dus tot een groter verhang benedenstrooms (in de evenwichtssituatie).

Voorbeeld 2 - plaatselijke verandering in sedimenttransport

We behandelen nu eenzelfde type vraagstuk als in vb. 1, alleen geldt nu $S_2 \neq S_1$ (bv. wegens onttrekking van zand) en $Q_1 = Q_2$. We beperken ons tot de nieuwe evenwichtssituatie. Toepassing van (5.25) geeft nu

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{B \ m \ U_2^n}{B \ m \ U_1^n}$$

zodat

$$\frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{1/n}$$

Omdat $Q_1 = Q_2$ volgt nu voor de diepten

$$\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{-1/n} = \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^{1/n}$$

en vervolgens voor de verhangen (weer aannemende dat $C_1 = C_2$):

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{U_2^2}{U_1^2} \frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{3/n}$$

Bij onttrekking van sediment ($S_2 < S_1$) is het verhang benedenstrooms kleiner dan bovenstrooms.

Voorbeeld 3 - plaatselijke verandering in breedte

Weer hetzelfde type vraagstuk, maar nu geldt $B_2 \neq B_1$, $Q_1 = Q_2$ en (in de evenwichtssituatie) $S_1 = S_2$. Toepassing van (5.25) geeft

$$B_1 \ m \ U_1^n = B_2 \ m \ U_2^n$$

zodat

$$\frac{U_2}{U_1} = \left(\frac{B_1}{B_2}\right)^{1/n}$$

Uit $Q = U B d = \text{constant}$ volgt

$$\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{\frac{1}{n} - 1}$$

Versmalling leidt dus tot verdieping.

De verhouding van de verhangen is

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{U_2^2 d_1}{U_1^2 d_2} = \left(\frac{B_2}{B_1}\right)^{1-3/n}$$

Voor een meer uitvoerige behandeling van dit type problemen wordt verwezen naar de literatuur (Jansen e.a., 1979) en naar vervolgvakken (bv. f10).

APPENDIX: Weerstandsrelaties volgens Engelund en Hansen

De schuifspanning (τ_b) wordt opgebouwd uit korrelweerstand (τ'_b) en vormweerstand van ribbels of duinen (τ''_b). De diepte wordt in tweeën gedeeld in verhouding met deze twee bijdragen aan τ_b :

$$\tau_b = \rho g d i = \tau'_b + \tau''_b = \rho g i (d' + d'') \quad \text{waarbij} \quad d'/\tau'_b = d/\tau_b$$

Hiermee komen overeen

$$\theta = \frac{i}{\Delta} \frac{d}{D} = \frac{u_*^2}{\Delta g D} \quad \text{(I) en (II)}$$

en

$$\theta' = \frac{i}{\Delta} \frac{d'}{D} = \frac{u_*'^2}{\Delta g D} \quad \text{(III) en (IV)}$$

E & H geven de volgende empirische betrekking tussen θ' en θ voor het *kalme regime* ($\theta < \text{ca. } 1$):

$$\theta' = 0,06 + 0,4 \theta^2 \quad \text{(V)}$$

Voor u_*'/U gebruiken E & H een weerstandsformule waarin de verhouding D/d' voorkomt (dus een relatieve ruwheid betrokken op het deel d' van de hele diepte); deze kan worden geschreven als

$$u_*' = 0,12 \left(\frac{D}{d'}\right)^{1/8} U \quad \text{(VI)}$$

waarin

$$U = \frac{q}{d} \quad \text{(VII)}$$

In de onafhankelijke vergelijkingen (I) t/m (VII) komen naast g elf grootheden voor. Als vier hiervan gegeven zijn kunnen de overigen worden bepaald. Als i , Δ , d en D gegeven zijn (en g) kunnen de overigen direct, zonder iteratie, worden berekend. Meestal is iteratie nodig (zie voorbeeld in par. 5.7, waar q , i , D en Δ gegeven zijn). Zodra U , d en i bekend zijn volgen λ en C uit

$$\lambda = (u_*/U)^2 = gdi/U^2 \quad (\text{VIII})$$

respectievelijk

$$C = U/\sqrt{di} \quad (\text{IX})$$

LITERATUUR

- Batchelor, G.K., 1967. An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press. Cambridge.
- Brown, C.B., 1950. Sediment Transportation. Hoofdst. XII in "Engineering Hydraulics", H. Rouse (Ed.), Wiley, New York.
- Chow, V.T., 1959. Open-Channel Hydraulics. McGraw-Hill, New York.
- Engelund, F. en Hansen, E., 1967. A monograph on sediment transport in alluvial streams. Teknisk Forlag, Copenhagen.
- Fischer, H.B. e.a., 1979. Mixing in inland and coastal waters. Academic Press, New York.
- French, R.H., 1985. Open-Channel Hydraulics. McGraw-Hill, New York.
- Graf, W.H., 1971. Hydraulics of Sediment Transport. McGraw-Hill, New York.
- Henderson, F.M., 1966. Open-Channel Flow. Mcmillan, New York.
- Jansen, P. Ph. e.a., 1979. Principles of River Engineering. Pitman, London.
- Lamb, H., 1932. Hydrodynamics. Cambridge University Press, Cambridge, 6th edition.
- Meijer-Peter, E. en Müller, R., 1948. Formulas for Bed Load Transport. Proc. 2nd Congr. IAHR, Stockholm, pp 39-64.
- Raudkivi, A.J., 1967. Loose Boundary Hydraulics. Pergamon Press, Oxford, 2nd edition, 1976.
- Rouse, H., 1938. Fluid mechanics for hydraulic engineers. Dover Publ., New York, 1961.
- Rouse, H. en Ince, S., 1963. History of hydraulics. Dover Publ., New York.
- Shields, A., 1936. Anwendung der Aenlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung. Mitt. Preuss. Versuchsanstalt für Wasserbau und Schiffbau, Berlin, Heft 26.
- Simons, D.B. en Richardson, E.V., 1961. Forms of bed roughness in alluvial channels. J. Hydr. Div., Proc. ASCE, HY3, pp. 87-105.
- Thijsse, J. Th., 1951. Hydraulica. In: Technische Vraagbaak, deel W, Kluwer, Deventer, pp. 95-134.
- Vennard, J.K. en Street, R.L., 1982. Elementary Fluid Mechanics. Wiley, New York (6th edition).
- Yalin, M.S., 1972. Mechanics of Sediment Transport. Pergamon Press., Oxford.

APPENDIX: Enkele begrippen uit de vectoranalyse

- Gebied in R^3 met plaatsvector $\vec{x} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$
- Differentiaaloperator $\nabla \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z$

- Toegepast op scalairveld $f(\vec{x})$:

$$\nabla f \stackrel{\text{def}}{=} \text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Betekenis: $\text{grad } f$ is een vectorveld; in elk punt geeft de richting van $\text{grad } f$ de richting aan waarin f het sterkst toeneemt als functie van \vec{x} ; $|\nabla f|$ is de waarde van die toeneming per eenheid van afstand.

- Toegepast op vectorveld $\vec{a}(\vec{x})$, waarbij $\vec{a} = a\vec{e}_x + b\vec{e}_y + c\vec{e}_z$:
- inwendig product:

$$\nabla \cdot \vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \text{div } \vec{a} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z}$$

Betekenis: $\text{div } \vec{a}$ is een scalar; als \vec{a} een transport voorstelt is $\text{div } \vec{a}$ het netto uitgaande transport uit een infinitesimaal gebiedje p.e.v. volume.

- uitwendig product:

$$\nabla \times \vec{a} \stackrel{\text{def}}{=} \text{rot } \vec{a} = \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z}\right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x}\right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right) \vec{e}_z$$

Betekenis: $\text{rot } \vec{a}$ is een vector; wanneer $\vec{a}(\vec{x})$ het snelheidsveld voorstelt van een bewegend medium, is $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{a}$ gelijk aan de hoeksnelheid waarmee de "deeltjes" van dat medium roteren.

- Voor elk scalairveld $f(\vec{x})$ geldt

$$\text{rot grad } f = \nabla \times \nabla f = 0$$

Voorts schrijven we

$$\text{div grad } f = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

∇^2 heet "Laplace operator"

- Toegepast op stroming van een vloeistof, met snelheidsveld $\vec{u}(\vec{x})$:

- indien onsamendrukbaar: $\text{div } \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = 0$

- Indien rotatievrij: $\text{rot } \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = 0$ en $\vec{u} = \text{grad } \phi = \nabla \phi$ waarin ϕ de snelheidspotentiaal is

- Indien beide: $\text{div } \vec{u} = \text{div grad } \phi = \nabla^2 \phi = 0$ ofwel $\boxed{\nabla^2 \phi = 0}$,

de vergelijking van Laplace.

