Elektrische omzettingen

Elektrische omzettingen

M.J. Hoeijmakers

Technische Universiteit Delft
Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Electrical Power Processing

Tekeningen:
H. Paling

VSSD

Eerste druk 1997
Tweede druk 1999
Derde druk 2003
Vierde druk 2007

Uitgegeven door de VSSD
Leeghwaterstraat 42, 2628 CA Delft, The Netherlands
tel. +31 15 27 82124, telefax +31 15 27 87585, e-mail: hlf@vssd.nl
internet: http://www.vssd.nl/hlf
URL met informatie over dit boek en de antwoorden op de opgaven:
http://www.vssd.nl/hlf/e004.htm

Printed in The Netherlands

NUR 959
Trefw.: elektrische omzettingen

ISBN-10 90-6562-157-1
ISBN-13 978-90-6562-157-3

Voorwoord

Voorwoord bij de derde druk

Dit is de derde druk van het boek Elektrische Omzettingen. Bij de tweede druk is hoofdstuk 8 (de inductiemachine) toegevoegd en is in verband hiermee hoofdstuk 7 ingrijpend gewijzigd. Bij de derde druk is weer een aantal (kleine) verbeteringen aangebracht. Daarnaast is het aantal opgaven (met uitwerkingen) aanzienlijk vergroot en zijn zij opgenomen in een apart deel. In dit aparte deel staan bovendien de leerdoelen zoals die door mij bij de studierichting Elektrotechniek aan de Technische Universiteit Delft en aan de Universiteit Twente gebruikt worden.

In dit boek wordt een basisbehandeling gegeven van de omzetting van een vorm van elektrische energie in een andere vorm van elektrische energie en van de omzetting van mechanische energie in elektrische energie en omgekeerd. De behandeling van de omzetters vindt daarbij plaats vanuit het gezichtspunt van de elektrische energietechniek; de meeste omzetters zijn echter ook van belang voor de informatietechniek.
Het boek heeft enerzijds als doel om een overzicht te geven van de elektrische omzettingen voor degenen die zich niet verder in de elektrische energietechniek willen specialiseren en anderzijds als doel om een fundamentele basis te leggen voor degenen die zich wel verder in de elektrische energietechniek willen verdiepen.

Dit studieboek is ontstaan uit het dictaat behorende bij het vak Elektrische Omzettingen uit het basiscurriculum van de studierichting Elektrotechniek aan de Technische Universiteit Delft. Het dictaat/boek is in de loop van enkele jaren steeds aangepast, waarbij de inbreng van studenten een belangrijke rol heeft gespeeld. Ik wil deze studenten hierbij bedanken voor hun bijdrage.
Verder heeft bij het tot stand komen van het dictaat een groot aantal medewerkers van de Faculteit der Elektrotechniek een bijdrage geleverd, aan wie ik eveneens dank verschuldigd ben. Hierbij zou ik in het bijzonder H. Paling willen bedanken voor het tekenwerk en ir. E. van Dijk, dr.ir. H. Polinder, ir. M. Rondel, prof.ir. J.A. Schot en ir. M.P.N. van Wesenbeeck voor de discussies over de tekst en voor hun bijdragen aan de opgaven met uitwerkingen.
Voor dit boek zijn bestaande studieboeken gebruikt als inspiratiebron. Deze boeken zijn opgenomen in de literatuurlijst.

Dit boek bestaat uit een aantal onderdelen die niet bestudeerd behoeven te worden in de volgorde waarin ze hier staan. Elk van de hoofdstukken 1, 2, 3 en 6 kan bestudeerd worden zonder de kennis van een ander hoofdstuk. Voor hoofdstuk 4 is echter de kennis van hoofdstuk 3 nodig en hoofdstuk 5 heeft de paragrafen 3.1 tot en met 3.7 als voorkennis. Hoofdstuk 7 sluit aan op hoofdstuk 5 en hoofdstuk 8 op hoofdstuk 7.

Hoewel bij het schrijven van dit boek de nodige zorgvuldigheid betracht is, zal het zeker niet vrij zijn van fouten. Ik zou graag attent gemaakt worden op deze fouten en sta open voor suggesties om het boek te verbeteren.

Martin Hoeijmakers
Delft, oktober 2003

Voorwoord bij de vierde druk

Bij de vierde druk is in hoofdstuk 2 een paragraaf over wisselstroomtheorie (paragraaf 2.5) toegevoegd en is hoofdstuk 8 (de inductiemachine) ingrijpend gewijzigd. Verder is weer een aantal (kleine) verbeteringen aangebracht.
De oefenopgaven staan niet meer in een apart deel: zij zijn opgenomen in het boek aan het einde van het hoofdstuk. De uitwerkingen van de opgaven staan op de internetsite:
http://www.vssd.nl/hlf/e004.htm.

Martin Hoeijmakers
Delft, augustus 2007

Inhoud

1 Inleiding

In dit boek zullen we ons beperken tot een basisbehandeling van de omzetting van een vorm van elektrische energie in een andere vorm van elektrische energie en van de omzetting van mechanische in elektrische energie en omgekeerd. Bij het eerste kunnen we bijvoorbeeld denken aan de omzetting van elektrische energie bij een wisselspanning van 10 kV naar elektrische energie bij een wisselspanning van 230 V met behulp van een transformator; bij het tweede kunnen we bijvoorbeeld denken aan de omzetting van kracht in elektriciteit met behulp van een generator. Het gaat dus steeds om energie-omzettingen.

Voordat we overgaan naar de behandeling van elektrische omzetters, besteden we in deze inleiding eerst enige aandacht aan de historische ontwikkeling van het gebruik van energie in onze maatschappij, waarbij we natuurlijk in het bijzonder kijken naar het toepassen van elektrische energie. Verder kijken we hier nog naar het gebruik van elektrische omzettingen in de informatietechniek.

Energie in onze maatschappij

Zolang de mens op aarde bestaat heeft hij gebruik gemaakt van energie. In het begin was deze energie direct afkomstig uit de natuur: de zon leverde warmte en licht (zonne-energie). Al in een zeer vroeg stadium heeft de mens echter geleerd om vuur te maken, zodat hij zelf warmte en licht kon beheersen. Hij zette daarbij de chemische energie die in het hout was opgeslagen om in de energievormen warmte en licht. Deze chemische energie was op zijn beurt weer afkomstig van de zon.

In een later stadium heeft hij ontdekt hoe hij gebruik kon maken van de wind om zich op een gemakkelijke wijze over het water te verplaatsen. Daartoe gebruikte hij een zeil voor de omzetting van de in de beweging van de lucht aanwezige energie (windenergie) in de energie benodigd om een schip te verplaatsen.

Een volgende fase was het gebruik van de potentiële energie van het water in een hoger gelegen gebied. Via een waterrad werd deze potentiële energie omgezet in mechanische energie, die vervolgens werd gebruikt om graan te vermalen tot meel. Op plaatsen waar geen waterkracht beschikbaar was, werd voor het malen windenergie gebruikt met daarbij een windmolen als energie-omzetter.

Zowel de water- als de windmolen werden echter ook ingezet voor andere (industriële) processen, waarbij we het zagen van hout als een voorbeeld kunnen noemen.

Met de ontwikkeling van de stoommachine in de tweede helft van de 18e eeuw, en het daaraan verbonden begin van de industriële revolutie, is de mens steeds meer gebruik gaan maken van fossiele brandstoffen (kolen, later ook olie en aardgas). De in de brandstof opgeslagen chemische energie wordt hierbij via warmte omgezet in mechanische energie voor de aandrijving van machines in fabrieken.

Het gebruik van elektrische energie is pas in de tweede helft van de 19e eeuw ontstaan door de ontwikkeling van de gloeilamp: elektrische verlichting is veel gemakkelijker in het gebruik dan olie- of gaslampen. In verband met de beperkte levensduur van batterijen werden voor de opwekking van de elektriciteit generatoren ontwikkeld, die weer werden aangedreven door een stoommachine, verbrandingsmotor of waterturbine.

De omzetting van mechanische in elektrische energie bij een generator kan echter ook omgekeerd worden: de generator wordt een motor, waarmee elektrische energie omgezet wordt in mechanische energie. Het voordeel van het gebruik van elektromotoren in fabrieken werd snel ingezien: de distributie van elektrische energie in een fabriek met behulp van elektrische leidingen is veel eenvoudiger dan de distributie van mechanische energie (vaak door één stoommachine of verbrandingsmotor opgewekt), via leren banden, snaren en tandwielen. Op deze wijze ontstond een klein elektriciteitsnetje, gevoed door één generator, waaruit zowel lampen als motoren hun energie konden betrekken.

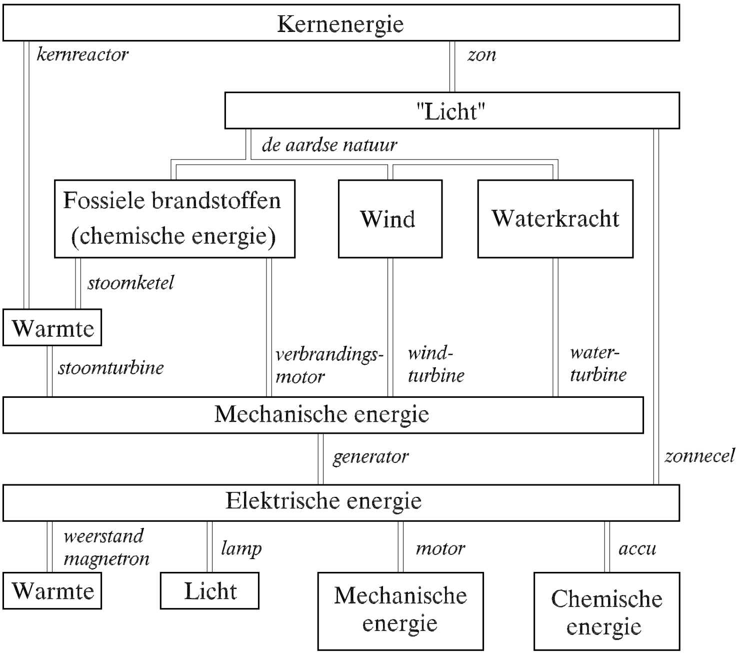
Een ander voordeel van elektrische energie is dat we elektrische energie eenvoudig kunnen beheersen, met bijvoorbeeld schakelaars: een olielamp moet je aansteken. Een belangrijk nadeel van elektrische energie is echter dat de opslag ervan zeer moeilijk is. De energiedichtheid van een accu is bijvoorbeeld veel kleiner dan de energiedichtheid van een tank benzine. Het gevolg is dan ook dat, bijvoorbeeld, vrijwel alle auto's op fossiele brandstoffen rijden en niet op elektriciteit.

Omdat we elektrische energie over het algemeen met een zeer goed rendement om kunnen zetten in andere energievormen, is elektriciteit een universeel toepasbare energievorm. Van de andere kant, kunnen we elektrische energie ook opwekken (omzetten) vanuit verschillende andere energievormen. Het een en ander is uitgebeeld in figuur 1.1. Bij deze figuur moeten we opmerken dat hij verre van volledig is; hij geeft echter wel een beeld van een aantal praktisch bruikbare omzettingen.

Noem drie voordelen en een nadeel van energie in de vorm van elektriciteit.

In het algemeen lopen de energiestromen in figuur 1.1 van boven naar beneden, alleen bij de accu is duidelijk sprake van een bedoeld omkeerbaar proces. Een aantal andere processen zijn in principe echter ook omkeerbaar: een motor kan bijvoorbeeld vaak ook als generator gebruikt worden, en een windturbine zouden we ook kunnen gebruiken als een ventilator.

Tot op heden werd elektriciteit voornamelijk opgewekt vanuit fossiele brandstoffen. De voorraad hiervan is echter eindig en er kleven veel milieubezwaren aan (vergroting van de hoeveelheid CO_2 in de atmosfeer en



Figuur 1.1 De centrale plaats van elektriciteit tussen andere energievormen

luchtverontreiniging). Er wordt de laatste decennia dan ook steeds meer kernenergie (kernsplijting) gebruikt, waarbij we echter problemen kunnen verwachten met de opslag van het afval en de veiligheid (veilige systemen zijn vaak ook duur). Bovendien is ook de voorraad uranium niet onbeperkt. Kernfusie lijkt een oplossing te gaan bieden op de lange termijn; het is nu echter pas in een (vroeg) onderzoeksstadium.

Waterkracht, windenergie en zonne-energie, in principe schone energiebronnen, worden wel duurzame energiebronnen genoemd. De eerste van deze drie wordt al een eeuw gebruikt voor de opwekking van elektrische energie, maar kan slechts een beperkte bijdrage leveren aan de elektriciteitsvoorziening. Dit laatste geldt ook voor windenergie. Windenergie heeft bovendien als nadeel dat hij niet altijd beschikbaar is: in geval van een grote bijdrage van energie uit de wind moeten we gaan denken over energie-opslag. Ook bij het gebruik van zonne-energie zullen we hieraan moeten denken. Zonne-energie heeft echter als zeer groot voordeel dat we hiermee in principe ruimschoots in onze totale energiebehoefte kunnen voorzien.

Als we de duurzame energiebronnen (financieel-)economisch bekijken, kunnen we opmerken dat waterkracht op veel lokaties zeer aantrekkelijk is, dat windenergie in de windrijke gebieden nog net niet economisch haalbaar is (wel als de olieprijzen weer even hoog zouden zijn als ten tijde van de tweede energiecrisis in 1980) en dat zonne-energie voorlopig nog veel te duur is (behalve op moeilijk bereikbare plaatsen, zoals op boeien op zee en in de bergen en andere dunbevolkte gebieden). We kunnen hieruit concluderen dat er op het gebied van de energietechniek nog een aantal grote problemen opgelost moeten worden.

Zoals we gezien hebben, werd bij de invoering van elektriciteit, de elektrische energie lokaal met één generator opgewekt. Later is men deze afzonderlijke systemen steeds meer met elkaar gaan verbinden: op dit moment zijn zeer grote delen van de wereld elektrisch gezien met elkaar verbonden. Daarvoor zijn een aantal redenen aan te geven. De belangrijkste is de verhoging van de betrouwbaarheid: als die ene generator zou uitvallen, zou het lokale net spanningsloos worden. Door een elektriciteitsnet via meer generatoren te voeden, waarbij niet alle generatoren volledig belast worden, kan men ervoor zorgen dat het uitvallen van één generator geen ernstige gevolgen heeft. Dit voordeel kunnen we economischer bereiken als het aantal voedende generatoren groter is.

Verklaar dit.

Een ander voordeel van een groot elektriciteitsvoorzieningssysteem is dat men in plaats van een groot aantal kleine opwekeenheden, een relatief klein aantal grote opwekeenheden kan gebruiken. Grotere opwekkingseenheden kunnen namelijk met een hoger (energetisch en economisch) rendement werken dan kleinere. Daar staat echter tegenover dat het transport van elektriciteit ook verliezen veroorzaakt. We zien in Nederland dan ook niet één grote elektriciteitscentrale, maar over het gehele land verspreid staande centrales, waarbij binnen elke centrale één of meer opwekeenheden staan. De grootste opwekeenheden hebben in Nederland een vermogen van 600 MW.

Daarnaast zien we echter ook een toenemend aantal zogenaamde warmte/kracht-eenheden. Hierbij wordt de bij de opwekking van elektriciteit vrijkomende warmte nuttig gebruikt. Omdat het transport van warmte relatief duur is (in vergelijking met het transport van elektrische energie), worden deze eenheden juist veelal decentraal geplaatst: bij de plaats waar de warmte nodig is. Ze zijn natuurlijk wel verbonden met het landelijke/-Europese elektriciteitsnet.

Elektrische omzettingen in de informatietechniek

In de tweede helft van de 19e eeuw begon naast de ontwikkeling van de elektrische energietechniek ook de ontwikkeling van de (elektrische) informatietechniek. Hoewel beide disciplines op dezelfde fundamenten rusten, hadden ze zeker in het begin weinig met elkaar te maken: de telegrafische, telefonische en radiografische informatie-overdracht werden in de 19e eeuw nog gevoed uit batterijen. Pas in een later stadium is men de energie voor deze systemen, via elektrische omzetters, gaan betrekken uit het elektriciteitsnet.

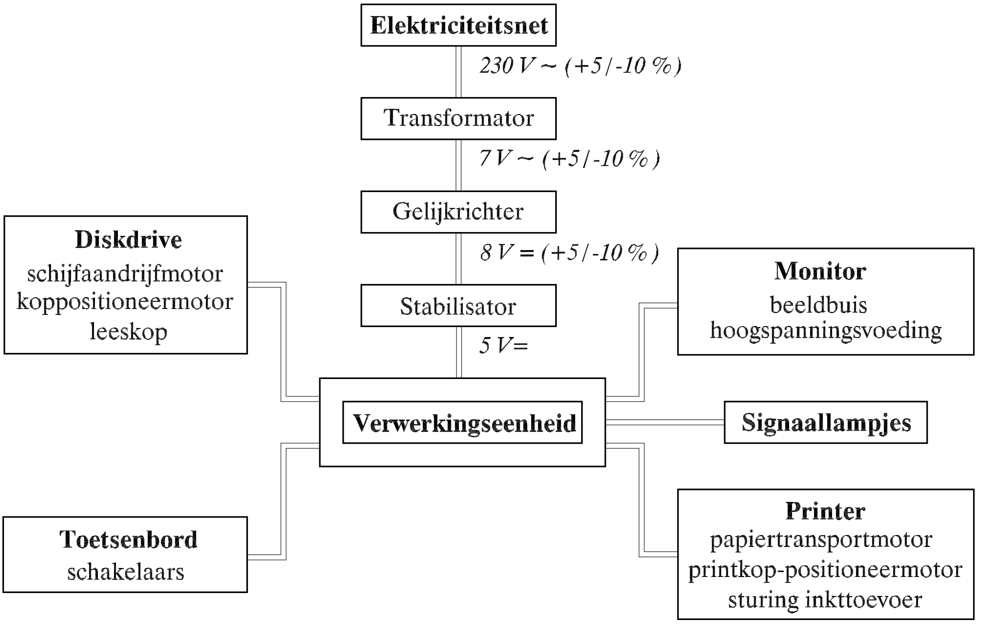
Behalve voor hun energievoorziening hebben informatie-verwerkende systemen ook nog elektrische omzetters nodig bij hun randapparatuur: de in- en de uitvoer van informatie. Hierbij moeten we bovendien bedenken dat we informatie ook overdragen als kleine hoeveelheden energie. We zullen het een en ander toelichten aan de hand van een personal computer, een betrekkelijk eenvoudig informatie-verwerkend systeem.

Voorbeeld

In figuur 1.2 zien we een schematische weergave van een personal-computer-systeem, bestaande uit een verwerkingseenheid, een toetsenbord, een disk-drive, een beeldscherm en een printer. Hoewel alle onderdelen energie nodig hebben om te kunnen werken, is alleen de energievoorziening van de verwerkingseenheid als voorbeeld iets verder uitgewerkt. Voor de voeding van de elektronica daarin is energie in de vorm van een constante gelijkspanning van 5 V nodig. Deze energie wordt aan het elektriciteitsnet onttrokken, waarvan de wisselspanning een nominale waarde heeft van 230 V, die maximaal +5 of -10 % in waarde mag variëren. Via een transformator wordt de energie omgezet in een vorm met een wisselspanning van ongeveer 7 V (amplitude 10 V; maximale variatie: +5/-10 %), waarna een gelijkrichter die energie omzet in een gelijkspanning van ongeveer 8 V (+5/-10 %). Een spanningsstabilisator (met een regelcircuit) zet deze ”ruwe” gelijkspanning om in een constante gelijkspanning.

Voor de invoer van informatie aan de verwerkingseenheid kunnen we gebruik maken van een toetsenbord, waarin een eenvoudige omzetter (een schakelaar) de mechanische energie in onze vingers omzet in een verandering in elektrische vermogen.

We zouden echter ook gebruik kunnen maken van de informatie op een disk. Deze wordt in de ”drive” rondgedraaid door een elektromotor, een omzetter van elektrische energie in mechanische energie. De lees-



Figuur 1.2 Elektrische omzettingen in een personal computer

kop, die eveneens door een elektromotor wordt gepositioneerd, zet de magnetisch opgeslagen informatie om in elektrische informatie.

De eenvoudigste vorm van uitvoer van een pc zijn de signaallampjes (bijvoorbeeld de indicatie dat ”Num Lock” aan staat), waarin elektrische energie omgezet wordt in licht.

De omzetting van elektrische energie in licht vinden we ook in de beeldbuis van de monitor, waarop we de resultaten van de verwerkingseenheid direct kunnen waarnemen. Voor de opwekking van de elektronenstraal in de beeldbuis is een hoge spanning nodig (10 à 25 kV), die via een aantal omzetstappen verkregen wordt vanuit de netspanning.

We kunnen de resultaten echter ook via een printer aan het papier toevertrouwen. Bij dit randapparaat wordt het papier door een motortje voortbewogen. Daarnaast moet de printerkop steeds in de juiste positie gebracht worden, waarna de inkt op het papier aangebracht moet worden.

Overzicht van dit boek

Zoals al eerder vermeld, zullen we ons hier beperken tot een basisbehandeling van de omzetting van een vorm van elektrische energie in een andere vorm van elektrische energie en van de omzetting van mechanische in elektrische energie en omgekeerd. We zullen de omzetters daarbij behandelen vanuit het gezichtspunt van de energietechniek; de meeste zijn echter ook van belang voor de informatietechniek.

Zoals we al gezien hebben komt elektriciteit in een aantal vormen voor. We bespreken een aantal van deze vormen en hun geschiktheid voor elektrische energie-overdracht. Daarbij zullen we ook enige aandacht besteden aan het elektriciteitsvoorzieningssysteem.

Omdat bij veel omzetters een magnetisch circuit een belangrijke rol speelt, besteden we vervolgens als voorbereiding op die omzetters een hoofdstuk aan een aantal aspecten van magnetische circuits.

De eerste omzetter die aan bod komt, is de transformator: een wisselspanning/wisselspanningsomzetter, waarbij het magnetische circuit de hoofdrol speelt.

Het daarop volgende hoofdstuk geeft een inleiding op elektromechanische omzetters: de omzetters van elektrische in mechanische energie en omgekeerd. We zullen daarbij ingaan op het principe van elektromechanische omzettingen, waarbij vrijwel altijd een magnetisch circuit een belangrijke rol speelt.

Vervolgens gaan we in op een hele klasse van omzetters, namelijk de vermogenselektronische. Met deze omzetters, die gebaseerd zijn op het snel periodiek schakelen van energiestromen met halfgeleiders, kunnen we allerlei soorten omzetters maken. We zullen er daarvan enkele bekijken.

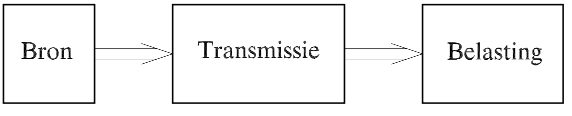
Het laatste deel van dit boek gaat over twee elektromechanische omzetters. In hoofdstuk 7 is dat de synchrone generator, de belangrijkste generator voor de elektriciteitsvoorziening, en in hoofdstuk 8 is dat de inductiemachine. Dit is de in de industrie meest gebruikte elektromotor.

2 Elektrische energie-overdracht

2.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk, de inleiding, hebben we al kennis gemaakt met de energievorm elektriciteit. Zoals we al weten, kan elektriciteit in verschillende vormen voorkomen, die zich op meer dan één kenmerk van elkaar kunnen onderscheiden. We kunnen bij deze kenmerken bijvoorbeeld denken aan gelijk- en wisselstroom, aan verschillende frequenties bij wisselstroom, aan één- of meerfasige systemen, aan verschillende spanningsniveaus, en aan verschillende stroomvormen (bijvoorbeeld blok- en sinusvorm) bij wisselstromen. Met elektrische omzetters kan de elektrische energie van de ene vorm omgezet worden in een andere vorm.

In dit hoofdstuk zullen we kijken naar een aantal onderscheidingskenmerken en naar de wijze waarop zij invloed hebben op de geschiktheid van een aantal vormen van elektriciteit voor de overdracht van energie. Bovendien besteden we terloops nog enige aandacht aan een aantal aspecten van een elektriciteitsvoorzieningssysteem. We gaan daarbij uit van het systeem zoals dat schematisch weergegeven is in figuur 2.1. Daarin kunnen we een bron van elektrische energie, een overdrachtssysteem en de te voeden belasting onderscheiden.



Figuur 2.1 Een transmissiesysteem

We beginnen in dit hoofdstuk met enkele algemene afspraken over elektrische grootheden. Vervolgens onderwerpen we de eerst gebruikte vorm van elektriciteit, de gelijkstroom, aan een nadere beschouwing. Daarbij kijken we naar spanningsniveaus en de wijze waarop meer belastingen op één bron kunnen worden aangesloten (in serie of parallel geschakeld).

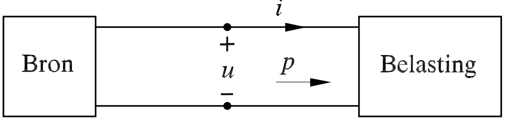
Daarna gaan we verder met wisselstroom, waarbij we ook naar de vorm van de wisselstroom en de keuze van de frequentie kijken. In de volgende paragraaf vatten we een aantal belangrijke zaken uit de wisselstroomtheorie samen, waarbij we bijzondere aandacht besteden aan de notatie van de verschillende grootheden. Deze theorie gebruiken we bij de behandeling van de vermogensoverdracht met wisselstroom.

In het laatste deel van dit hoofdstuk breiden we de wisselstroomoverdracht uit naar de driefasige wisselstroomoverdracht (driefasen- of draaistroomsysteem), zoals die in het huidige landelijke elektriciteitsvoorzieningssysteem wordt gebruikt, en bespreken we enige aspecten van driefasensystemen en van dit elektriciteitsvoorzieningssysteem.

2.2 Enkele elektrische grootheden

Voordat we verder gaan met de discussie over verschillende vormen van elektriciteit zullen we hier een aantal afspraken vastleggen betreffende elektrische grootheden in netwerken. Deze afspraken zijn gebaseerd op, onder andere, het normblad NEN 3570.

Voor het vastleggen van de afspraken beginnen we met het uitwerken van het schema in figuur 2.1 tot dat in figuur 2.2, waarbij de algemene transmissie is vervangen door twee draden, die we hier nog ideaal veronderstellen.



Figuur 2.2 Een transmissiesysteem met twee ideale draden

Omdat de energie-overdracht meestal zal plaatsvinden van bron naar belasting, wordt de referentierichting van de energie-overdracht, en ook van het vermogen p, in figuur 2.2 van links naar rechts gekozen. Als de energie-overdracht op een bepaald moment van rechts naar links is, krijgt p een negatieve waarde. In principe is de keuze van de referentierichting een willekeurig gekozen richting. Dit geldt ook voor de referentiepolariteit van de spanning u en de referentierichting van de stroom i. Meestal zullen we richtingen en polariteit zodanig kiezen dat:

$$p = ui$$

Voor de meeste grootheden is het passende symbool een kleine letter (bijvoorbeeld u voor de spanning) dan wel een hoofdletter (bijvoorbeeld B voor de magnetische fluxdichtheid). Als de grootheid een functie van de tijd is, is dit symbool het symbool voor de momentele waarde. Als het wenselijk is nadrukkelijk aan te geven dat zo'n lettersymbool de momentele waarde van de grootheid voorstelt, mag de letter t tussen haakjes worden toegevoegd, bijvoorbeeld $B(t)$.

Voor enkele elektrische basisgrootheden kunnen zowel kleine letters als hoofdletters worden gebruikt. Als een dergelijke grootheid een functie van de tijd is, is de kleine letter het symbool voor een momentele waarde en de hoofdletter het symbool voor een gemiddelde waarde. Voorbeelden zijn de symbolen zonder indices i en I voor stroom, die respectievelijk de tijdsafhankelijke momentele waarde en de effectieve waarde aanduiden (een effectieve waarde is een bijzondere gemiddelde waarde). Daarentegen is het de gewoonte bij een vermogen de hoofdletter P te gebruiken voor de ("gewone") gemiddelde waarde. Op de begrippen gemiddelde waarde en effectieve waarde komen we in deze paragraaf nog terug.

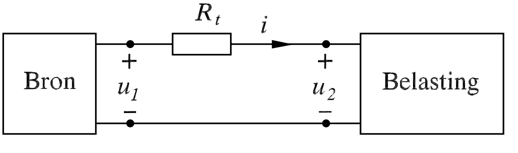
In Amerikaanse boeken wordt vaak het symbool v voor spanning gebruikt, wat ook overeenkomt met het voorkeurssymbool in de normen van de Verenigde Staten. In de internationale normen (International Organization for Standardization en International Electrotechnical Commission) wordt echter de voorkeur gegeven aan het symbool u. Het symbool V wordt daarbij gereserveerd voor de (elektrische) potentiaal. Het symbool V kan overigens ook verwarrend werken ten opzichte van de eenheid V (volt).

Als de grootheden u en i in figuur 2.2 periodiek zijn met periodetijd T, zal ook de grootheid p periodiek zijn. Meestal zijn we echter geïnteresseerd in het gemiddelde overgedragen vermogen, en wel het vermogen gemiddeld over de periodetijd T:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t$$

Om het belang van het begrip effectieve waarde duidelijk te maken vervangen we de ideale draden van de transmissie in figuur 2.2 door draden met een totale weerstand R_t. Dit is in figuur 2.3 weergegeven. Voor het in de transmissie gedissipeerde momentele vermogen geldt nu:

$$p_t = (u_1 - u_2)i = R_t i^2 \tag{2.1}$$



Figuur 2.3 Een transmissiesysteem met weerstand

Als de stroom i periodiek is met periodetijd T, geldt voor het gemiddelde gedissipeerde vermogen:

$$P_t = R_t \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Deze uitdrukking krijgt dezelfde vorm als (2.1), als we de grootheid I invoeren volgens

$$I^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t$$

Dit leidt tot de definitie van de effectieve waarde voor de stroom:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int\limits_0^T i^2(t)\,\mathrm{d}t} \tag{2.2}$$

Als de effectieve waarde I van een tijdsafhankelijke (periodieke) stroom bekend is, volgt daarmee dus het in een weerstand gedissipeerde vermogen eenvoudig uit RI^2. De effectieve waarde van een stroom is dan ook vaak een maat voor het verlies. In plaats van de term effectieve waarde wordt vaak de term RMS-waarde gebruikt. Deze term komt van de Engelse uitdrukking: Root Mean Square.

Verklaar deze term.

De definitie van de effectieve waarde van de spanning u heeft dezelfde vorm als die van de stroom:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\mathrm{d}t} \tag{2.3}$$

Naast de in figuur 2.2 vermelde grootheden u, i en p (en het gemiddelde daarvan P) wordt vaak de grootheid schijnbaar vermogen S gebruikt. Dit is het product van de effectieve waarden U en I:

$$S = UI \tag{2.4}$$

Hiermee hebben we op dit moment al te maken met drie grootheden met in de naam de term vermogen.

Welke drie zijn dat?

Omdat we later we nog meer van deze grootheden tegenkomen, gebruiken we vanaf hier de voor het gemiddelde vermogen genormaliseerde naam: werkzaam vermogen.
Alhoewel de verschillende grootheden met de term vermogen dezelfde dimensie hebben, hebben ze niet allemaal dezelfde eenheid.

Waarom hebben ze alle dezelfde dimensie?

De tot nu toe ingevoerde grootheden hebben als eenheid:
- momenteel vermogen p: watt (W);
- gemiddeld of werkzaam vermogen P: watt (W);
- schijnbaar vermogen S: voltampère (VA).

Aan het einde van deze paragraaf voeren we nog de arbeidsfactor λ in, die gedefinieerd is als

$$\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI} \tag{2.5}$$

Het nut van de hier geïntroduceerde grootheden zal verderop verduidelijkt worden.

2.3 Gelijkstroomoverdracht

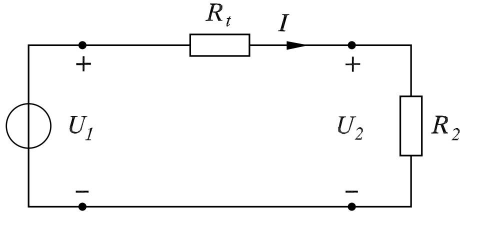
Bij het eerste te beschouwen elektrische systeem vindt de energie-overdracht plaats met gelijkstroom. We kunnen daarbij denken aan het systeem in figuur 2.3 waarbij de bron bijvoorbeeld een batterij is. Uitgaande van dit systeem zullen we onder andere kijken naar spanningsniveaus en de wijze waarop meer belastingen op één bron kunnen worden aangesloten.

Spanningsniveau

Als het over te dragen vermogen bekend is, is de keuze van het spanningsniveau in principe nog vrij. Om bij gegeven transmissieweerstand de verliezen te beperken, moet de transmissiestroom i zo laag en dus het spanningsniveau zo hoog mogelijk gekozen worden (zie uitdrukking (2.1)).

Voorbeeld

Om een indruk te krijgen van de grootte van de transmissieverliezen gebruiken we een systeem met enkele waarden die uit een huisinstallatie bekend zijn. Als voorbeeld nemen we de voeding van een lamp met een vermogen van 100 W bij een voedingsspanning van 220 V uit een gelijkspanningsbron van 220 V via twee draden met een lengte van 10 km en een doorsnede van 2.5 mm^2. Het elektrische netwerk voor dit systeem is weergegeven in figuur 2.4, waarin R_2 de lamp voorstelt.



Figuur 2.4 De voeding van een lamp als voorbeeld

Voor de weerstanden in dit netwerk geldt (de soortelijke weerstand van koper is: $\rho = 0.0175\ \Omega\text{mm}^2/\text{m}$):

$$R_t = \frac{\rho l}{A} = 0.0175\frac{2 \cdot 10000}{2.5}\ \Omega = 140\ \Omega$$
$$R_2 = \frac{U^2}{P} = \frac{220^2}{100}\ \Omega = 484\ \Omega$$

In het overdrachtssysteem treedt dus een spanningsverlies op van

$$\frac{R_t}{R_t + R_2} = 22\ \%$$

Dit is meestal ontoelaatbaar.

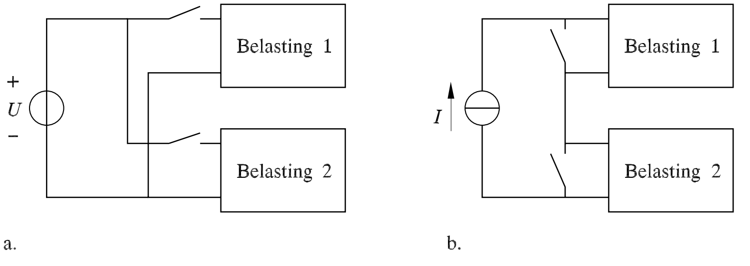
Om de transmissieverliezen te beperken bij gegeven over te dragen vermogen, kunnen we dus de transmissieweerstand verkleinen of de spanning verhogen. Het verkleinen van de weerstand zou in de praktijk echter leiden tot onhanteerbaar dikke (en ook zeer dure) geleiders, zodat voor de overdracht van elektrische energie over grote afstanden dan ook hogere spanningen gebruikt worden (in Nederland tot 380 kV).

Een hogere spanning betekent echter ook dat de elektrische veldsterkte hoger is, wat van belang is voor het isolatiemedium tussen de geleiders (en tussen de geleiders en aarde). Bij een te hoge veldsterkte kan er bijvoorbeeld doorslag van de isolatie optreden. Het een en ander betekent dat een hogere spanning resulteert in duurdere isolatie en in meer vrije ruimte rond de geleiders bij bijvoorbeeld hoogspanningslijnen.

De keuze van het spanningsniveau is dus een optimalisatieproces waarbij de transmissieverliezen en de isolatiekosten belangrijke factoren zijn. Deze optimalisatie resulteert in zeer uiteenlopende spanningsniveaus in het gehele elektriciteitssysteem, namelijk van enkele V in micro-elektronische systemen tot 380 kV in het Nederlandse landelijke koppelnet.

Stroom- of spanningsnet

Als één bron meer belastingen moet voeden, kan dat in principe op twee manieren: de belastingen kunnen parallel of in serie geschakeld worden, zoals dat in figuur 2.5 schematisch is weergegeven voor twee belastingen.



Figuur 2.5 Het parallel of in serie schakelen van belastingen

Het parallel schakelen van belastingen betekent dat ze gevoed worden vanuit een bron met een constante spanning: er is een spanningsnet. Het in serie schakelen is in feite het duale geval: de belastingen worden gevoed vanuit een bron met een constante stroom, ofwel vanuit een stroomnet.

Leg uit waarom de belastingen bij de twee verschillende soorten voedingen op verschillende wijze in- en uitgeschakeld worden (zie figuur 2.5).

Er zijn echter twee belangrijke redenen waarom stroomnetten in de praktijk nauwelijks toegepast worden. De eerste is dat de meeste bronnen van nature min of meer het karakter van een spanningsbron hebben, zodat stroombronnen meestal met kunstgrepen gemaakt moeten worden. Een voorbeeld hiervan is een stuurbare spanningsbron die op zodanige wijze geregeld wordt dat hij zich gedraagt als een stroombron.

Om de tweede reden te begrijpen kijken we eerst even naar het spanningsnet. Hierbij wordt meestal één van de klemmen van de bron aan aarde gelegd, zodat het spanningsniveau (ten opzichte van aarde) in het systeem in principe nergens hoger kan worden dan de bronspanning. Dit betekent dat het isolatieniveau van de belastingen niet hoger behoeft te zijn dan voor de belasting zelf nodig is (één klem van de belasting ligt steeds aan aarde).

Bij het stroomnet daarentegen is het spanningsniveau (ten opzichte van aarde) afhankelijk van welke belastingen zijn ingeschakeld. Als nu weer één van de klemmen van de bron aan aarde ligt, moet de isolatie van de belasting die met de andere klem verbonden is uitgelegd worden voor een spanningsniveau dat gelijk is aan de som van de spanningen over alle belastingen.

Controleer dit.

Bij een stroomnet worden dus veel hogere eisen aan het isolatieniveau van de belastingen gesteld dan bij een spanningsnet.

Slot

In deze paragraaf hebben we gezien dat elektriciteitsvoorzieningssystemen bij voorkeur als een spanningsnet worden uitgevoerd en dat het nuttig is om verschillende spanningsniveaus te hanteren. Dit laatste is met gelijkspanning echter niet eenvoudig, maar kan met behulp van transformatoren (zie hoofdstuk 4) bij wisselspanningsnetten wel eenvoudig gerealiseerd worden. Dit is in het verleden dan ook de reden geweest om wisselspannings- in plaats van gelijkspanningsnetten op te zetten.

Overigens kan het voor het transport van elektrische energie over zeer grote afstanden voordelig zijn om gebruik te maken van gelijkstroom, wat te maken heeft met mogelijke stabiliteitsproblemen bij zeer lange wisselstroomverbindingen en met het feit dat de verliezen bij wisselstroomtransmissie (iets) hoger zijn dan bij gelijkstroomtransmissie (We gaan in dit vak niet verder op deze aspecten in). We zien de laatste decennia dan ook steeds vaker zogenaamde HVDC-systemen (High Voltage Direct Current). Hierbij wordt wisselspanning eerst getransformeerd naar een zeer hoge spanning, die vervolgens met een gelijkrichter wordt omgezet in een gelijkspanning. Aan het einde van de transmissielijn wordt de gelijkspanning met een wisselrichter weer omgezet in een wisselspanning, die vervolgens weer met een transformator omgezet kan worden in een spanning van het gewenste niveau. Gelijkrichters en wisselrichters zijn zogenaamde vermogenselektronische omzetters, die in hoofdstuk 6 aan bod komen.

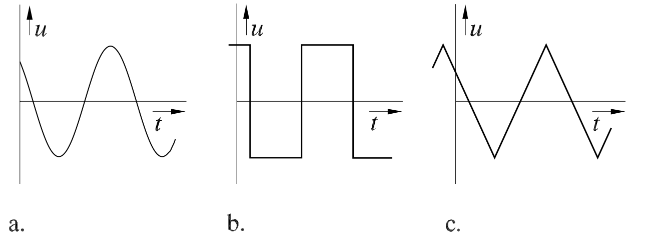
2.4 Wisselstroomgrootheden

Keuze van de spanningsvorm

Zoals we in de vorige paragraaf gezien hebben, heeft wisselspanning ten opzichte van gelijkspanning het belangrijke voordeel dat wisselspanning eenvoudig getransformeerd kan worden. Hiermee hebben we echter nog niets gezegd over de vorm van de wisselspanning (de manier waarop de spanning als functie van de tijd verloopt). Hoewel de meesten daarbij waarschijnlijk aan een sinusvorm denken, is dit zeker niet de enige in de praktijk toegepaste vorm: bijvoorbeeld blokvormige en driehoekvormige spanningen en stromen worden ook regelmatig toegepast (zie figuur 2.6). Voor elektriciteitsnetten heeft de sinusvorm echter de voorkeur. Een belangrijke reden hiervoor kunnen we vinden in het feit dat de sinusvormige excitatie van een lineair systeem resulteert in een sinusvormige responsie. Dit betekent dat alle spanningen en stromen in een zich min of meer lineair gedragend elektriciteitssysteem (min of meer) sinusvormig variëren en dat dus alle soorten belastingen (en bronnen) ontworpen kunnen worden voor deze sinusvorm. Voor andere spanningsvormen is dit niet het geval.

Hoe ziet de stroom door een spoel eruit als die aangesloten is op een bron met een blokvormige spanning?

Als we in het vervolg spreken over wisselstroomgrootheden, hebben we het steeds over sinusvormige grootheden, tenzij uitdrukkelijk anders aangegeven is.



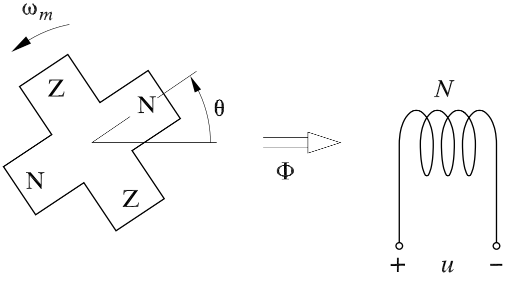
Figuur 2.6 Sinusvormige (a), blokvormige (b) en driehoekvormige (c) wisselspanningen

Keuze van de frequentie

Naast de vorm van de spanning, moet ook de frequentie van de wisselspanning van een elektriciteitsnet vastliggen.

Voor de keuze van de frequentie kijken we naar de in figuur 2.7 geschetste primitieve generator. Deze bestaat uit een vierpolige rotor met permanente magneten, die met een hoeksnelheid ω_m ronddraait, en een statorspoel met N windingen. De positie van de rotor wordt aangegeven met de hoek θ, waarvoor we aannemen:

$$\theta = \omega_m t$$



Figuur 2.7 Een primitieve generator

Verder veronderstellen we dat de magneten in de spoel een magnetische flux Φ veroorzaken die voldoet aan:

$$\Phi = \hat{\Phi}\cos(p\theta) = \hat{\Phi}\cos(p\omega_m t)$$

Hierin is p het aantal poolparen, dat in het geval van figuur 2.7 gelijk is aan twee. Voor de in de spoel opgewekte spanning geldt nu:

$$u = \frac{\mathrm{d}(N\Phi)}{\mathrm{d}t} = -p\omega_m N\hat{\Phi}\sin(p\,\omega_m t)$$

De frequentie f van de opgewekte spanning is dus

$$f = \frac{p\omega_m}{2\pi}$$

In praktische elektrische apparaten is de grootte van de flux Φ en het aantal windingen N beperkt omdat de ruimte beperkt is. Dit betekent dat bij dezelfde ruimte een hogere frequentie overeenkomt met een hogere spanning; bij gelijk blijvende stroom betekent dit een hoger vermogen. Het lijkt dan ook verstandig om de frequentie zo hoog mogelijk te kiezen.

Van de andere kant hebben de meeste aandrijfmachines (bijvoorbeeld een stoomturbine of een verbrandingsmotor) een toerental (hoeksnelheid ω_m) waarbij zij optimaal werken en is de constructie van generatoren met een hoog toerental en een groot aantal polen moeilijk (dure machine).

Deze overwegingen hebben op ons continent geleid tot de keuze voor een frequentie van 50 Hz en in Amerika voor een frequentie van 60 Hz. In vliegtuigen komen we overigens een boordnet tegen met een frequentie van 400 Hz. Dit is mogelijk omdat machines in vliegtuigen over het algemeen kleiner zijn, en daardoor gemakkelijker met een hoger toerental kunnen draaien.

Een andere reden om de frequentie niet te hoog te kiezen (maar eventueel wel veel hoger dan 400 Hz) is dat de magnetisch flux, die in veel elektrische apparaten een belangrijke rol speelt, meestal door een magnetisch circuit geleid wordt: de wisselingen in de flux veroorzaken verliezen in dit circuit die meer dan lineair toenemen met de frequentie van die wisselingen. We komen hier in de paragrafen 3.8 en 3.9 nog op terug.

Noem drie aandachtspunten bij de keuze van de frequentie.

2.5 Wisselstroomtheorie

In deze paragraaf vatten we een aantal belangrijke zaken uit de wisselstroomtheorie samen, waarbij we bijzondere aandacht besteden aan de notatie van de verschillende grootheden. We zullen voor de notatie gebruik maken van nationale (het normblad NEN 3570) en internationale normen (International Electrotechnical Commission, IEC-publicatie 27).

We staan eerst stil bij de beschrijving van de sinusvormige grootheden spanning en stroom en het daarbij behorende vermogen. Daarna berekenen we als voorbeeld de stroom in een *RL*-circuitje geëxciteerd door een spanningsbron met een spanning die een sinusvormige functie van de tijd is door de differentiaalvergelijking voor dat circuitje op te lossen.

Vervolgens gaan we over op de complexe weergave van sinusvormige grootheden (fasoren) en laten we zien dat we de stroom met de complexe schrijfwijze veel eenvoudiger kunnen vinden. Daarbij kijken we ook naar de grafische weergave van fasoren (fasordiagrammen) en de berekening van via sinusvormige stromen en spanningen overgedragen vermogen met behulp van de complexe schrijfwijze.

De beschrijving van een sinusvormige grootheid

Als voorbeeld van een sinusvormige grootheid, zullen we kijken naar de spanning u, die we kunnen weergeven met

$$u = \hat{u}\cos(\omega t + \alpha) \tag{2.6}$$

Hierin is $\hat{u}$ de (positieve) amplitude, ω de (positieve) cirkelfrequentie ($\omega = 2\pi f$ waarbij f de frequentie is), en α een fasehoek (de plaats in de cosinusgolf op $t = 0$). We gebruiken u als kleine letter om aan te geven dat het een grootheid is die verandert met de tijd. Het accent circonflexe in $\hat{u}$ geeft aan dat het de amplitude van u is.

In de praktijk is het niet gebruikelijk om de grootte van een sinusvormige spanning of stroom aan te geven met zijn amplitude: meestal gebruikt men daarvoor de effectieve waarde, in dit geval U (in het Engels: Root-Mean-Square value):

$$U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$$

Laat met uitdrukking (2.3) *zien dat U de effectieve waarde van u is.*

Als men zegt dat de netspanning 230 V is, wil men daarmee zeggen dat de effectieve waarde (U) 230 V bedraagt.

We gebruiken U als hoofdletter om aan te geven dat het een eigenschap of afgeleide waarde is van de grootheid u (in dit geval dus de effectieve waarde).

We kunnen de spanning u volgens (2.6) nu dus schrijven als

$$u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha) \tag{2.7}$$

Vermogens

Voor het vastleggen van afspraken over het vermogen p gaan we weer uit van het schema in figuur 2.2. We veronderstellen daarbij dat de bron een spanningsbron is met een spanning volgens (2.7). Verder nemen we aan dat de belasting een lineair systeem is waarbij we de spanning u als de excitatie kunnen zien en de stroom i als de responsie. We kijken hier alleen naar de stationaire toestand, zodat in dit geval de responsie ook sinusvormig is. We kunnen nu voor de spanning u en de stroom i schrijven:

$$u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha) \quad ; \quad i = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \beta) \tag{2.8}$$

waarbij we de effectieve waarde I gebruiken om de grootte van de stroom aan te geven.

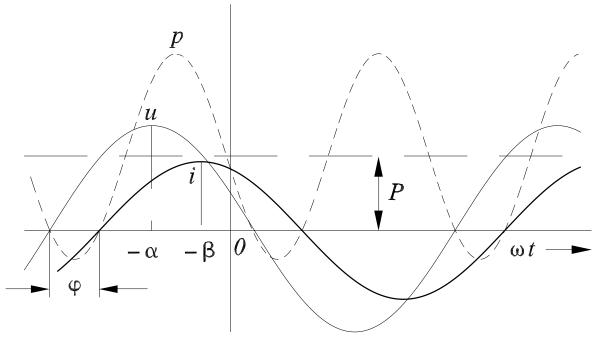
Hiermee volgt voor de momentele waarde van het vermogen:

$$p = u\,i = UI\,[\cos\varphi + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)] \quad \text{met} \quad \varphi = \alpha - \beta \tag{2.9}$$

met als gemiddelde waarde (werkzaam vermogen):

$$P = U\,I\,\cos\varphi \tag{2.10}$$

De grootheden u, i en p zijn in figuur 2.8 als functie van de tijd uitgezet.



Figuur 2.8 De grootheden u, i en p als functie van de tijd

De hoek φ in bovenstaande uitdrukkingen is dus het faseverschil tussen de spanning en de stroom en de cosinus van die hoek is een begrip in de energietechniek: het is de arbeidsfactor voor het geval dat u en i sinusvormig verlopen.

Controleer dit aan de hand van de definitie van de arbeidsfactor volgens (2.5).

We kunnen de momentele waarde van het vermogen p volgens (2.9) ook anders schrijven:

$$\begin{aligned} p &= UI\,[\cos(\varphi) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)] \\ &= UI\,[\cos(\varphi) + \cos((2\omega t + 2\alpha) - (\varphi))] \\ &= UI\cos\,\varphi\;[1 + \cos(2\omega t + 2\alpha)] + U\,I\,\sin\,\varphi\;\sin(2\omega t + 2\alpha) \end{aligned} \tag{2.11}$$

In deze uitdrukking zien we twee termen: de eerste heeft als gemiddelde waarde het werkzame vermogen en is steeds positief, terwijl de tweede term gemiddeld nul is. We kunnen de eerste term in verband brengen met het overgedragen vermogen. De tweede term daarentegen is het deel van het overgedragen vermogen dat in de transmissielijn op en neer gaat (en daarbij ook verliezen veroorzaakt). De amplitude van deze tweede term wordt het blindvermogen genoemd:

$$Q = UI\sin\varphi \tag{2.12}$$

Het blindvermogen wordt uitgedrukt in de eenheid var (afkomstig van het Engelse volt amperes reactive). Deze definitie is zodanig dat als de belasting in figuur 2.2 een zuivere inductiviteit ($\varphi = \pi/2$; Engels: reactor) is, het blindvermogen gelijk is aan UI: men zegt dan ook wel dat een spoel blindvermogen opneemt.

Een condensator wordt een blindvermogensleverancier genoemd. Verklaar dit.

Met de definitie van het werkzaam vermogen (2.10) en de definitie van het blindvermogen (2.12) kunnen we de uitdrukking voor de momentele waarde voor het vermogen (2.11) ook schrijven als:

$$\begin{aligned} p &= P[1+\cos(2\omega t+2\alpha)]+Q\sin(2\omega t+2\alpha) \\ &= P+P\cos(2\omega t+2\alpha)+Q\sin(2\omega t+2\alpha) \end{aligned}$$

Een inductiviteit en een capaciteit nemen twee keer per periode van de voedende spanning energie op en staan twee keer per periode energie af.

Hoe groot is in beide gevallen het werkzame vermogen P?

Met de uitdrukking voor het werkzaam vermogen (2.10) en die voor het blindvermogen (2.12) volgt

$$P^2+Q^2=(U\,I)^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)=(U\,I)^2$$

Met de uitdrukking voor het schijnbare vermogen (2.4) vinden we vervolgens

$$P^2+Q^2=(U\,I)^2=S^2$$

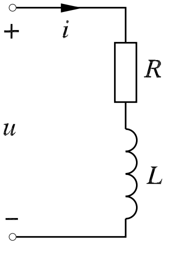
en dus ook:

$$S=\sqrt{P^2+Q^2} \tag{2.13}$$

Het voorbeeld

Voor de verdere uitleg maken we gebruik van het eenvoudige circuit in figuur 2.9 dat we kunnen zien als de belasting in het transmissiesysteem in figuur 2.2. Hierbij hoort de differentiaalvergelijking

$$R\,i+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=u \tag{2.14}$$



Figuur 2.9 Het RL-circuit als voorbeeld

Omdat het een lineair circuit is en we uitgaan van sinusvormig met de tijd verlopende grootheden kunnen we weer gebruik maken van de uitdrukkingen voor u en i in (2.8).

Een directe oplossing

In dit eenvoudige voorbeeld kunnen we de oplossing van de differentiaalvergelijking (2.14) gemakkelijk direct vinden.

Als we de uitdrukkingen voor u en i in (2.8) in (2.14) substitueren, vinden we

$$RI\sqrt{2}\cos(\omega t+\beta)-\omega LI\sqrt{2}\sin(\omega t+\beta)=U\sqrt{2}\cos(\omega t+\alpha)$$

Als we vervolgens de reactantie X invoeren volgens

$$X=\omega L \tag{2.15}$$

en de vergelijking delen door $\sqrt{2}$, krijgen we

$$RI\cos(\omega t+\beta)-XI\sin(\omega t+\beta)=U\cos(\omega t+\alpha)$$

Vervolgens delen we de vergelijking door $\sqrt{R^2+X^2}$ en herschrijven we hem:

$$I\left(\frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}\cos(\omega t+\beta)-\frac{X}{\sqrt{R^2+X^2}}\sin(\omega t+\beta)\right)=\frac{U}{\sqrt{R^2+X^2}}\cos(\omega t+\alpha)$$

Na invoering van de hoek φ volgens

$$\cos\varphi=\frac{R}{\sqrt{R^2+X^2}}\quad;\quad\sin\varphi=\frac{X}{\sqrt{R^2+X^2}} \tag{2.16}$$

kunnen we deze vergelijking schrijven als

$$I(\cos\varphi\cos(\omega t+\beta)-\sin\varphi\sin(\omega t+\beta))=\frac{U}{\sqrt{R^2+X^2}}\cos(\omega t+\alpha)$$

Met een beetje kennis van goniometrie kunnen we dit omschrijven tot

$$I\cos(\omega t+\beta+\varphi)=\frac{U}{\sqrt{R^2+X^2}}\cos(\omega t+\alpha)$$

Omdat zowel de amplitude als de fase aan beide zijden aan elkaar gelijk moeten zijn, vinden we

$$I=\frac{U}{\sqrt{R^2+X^2}}\quad;\quad\beta=\alpha-\varphi \tag{2.17}$$

De oplossing van (2.14) voor de stationaire toestand bij een sinusvormige excitatie volgens (2.7) kunnen we dus schrijven als

$$i=\frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2+X^2}}\cos(\omega t+\alpha-\varphi) \tag{2.18}$$

Zoals we kunnen zien, is de volgens (2.16) ingevoerde hoek φ de fasehoek tussen de spanning en de stroom, die we ook al gezien hebben in (2.9).

Vervolgen, voeren we de impedantie Z in volgens

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} \tag{2.19}$$

wat in feite het quotiënt is van de effectieve waarde van de spanning en de effectieve waarde van de stroom. De oplossing (2.18) kunnen we nu uitdrukken als:

$$i = \frac{U\sqrt{2}}{Z} \cos\left(\omega t + \alpha - \varphi\right)$$

Complexe weergave van sinusvormige grootheden

De analyse van elektrische circuits met sinusvormige grootheden kan eenvoudiger worden als we de complexe weergave van sinusvormige grootheden (fasoren) gebruiken. Om deze weergave te krijgen, schrijven we de uitdrukking voor de sinusvormige spanning (2.7) als:

$$u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\left(U \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$$

We kunnen nu de complexe effectieve waarde invoeren volgens

$$\underline{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} \tag{2.20}$$

Deze complexe grootheid wordt meestal fasor genoemd.

Er zijn nog twee andere complexe grootheden die soms gebruikt worden. De ene is de zogenaamde complexe amplitude volgens

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = U\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} = \underline{U}\sqrt{2}$$

Deze wordt ook weleens fasor genoemd. De andere complexe grootheid is de complexe ogenblikswaarde

$$\underline{u} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \alpha)}$$

Dit is een zodanige functie van de tijd dat het reële deel daarvan weer de spanning u oplevert. We zullen in dit boek deze twee complexe grootheden niet gebruiken en alleen gebruik maken van de complexe grootheid volgens (2.20) (de gewone fasor).

We kunnen hier nog opmerken dat we de complexe grootheden in dit boek kunnen herkennen aan de onderstreping. Deze onderstreping is van direct belang om onderscheid te maken tussen een effectieve waarde en een fasor (bijvoorbeeld tussen de reële effectieve waarde U en de complexe fasor $\underline{U}$, zoals we zien in (2.20)).

Een fasor is dus een grootheid die zowel de grootte als de fase van een sinusvormige grootheid representeert. Daarbij geldt voor de grootte van de fasor dat die gelijk is aan de effectieve waarde van de desbetreffende grootheid:

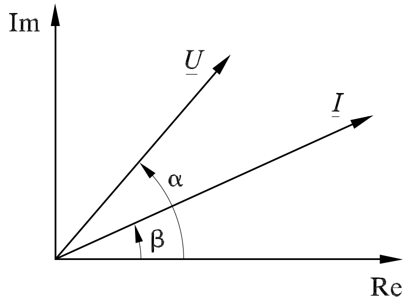
$$|\underline{U}| = U$$

We kunnen nu voor de excitatie en de responsie van ons voorbeeldsysteem schrijven:

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) \quad ; \quad \underline{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} \\ i &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) \quad ; \quad \underline{I} = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta} \end{aligned} \tag{2.21}$$

Vergelijk dit met de uitdrukkingen voor u en i in (2.8).

Fasoren worden overigens vaak grafisch weergegeven in het complexe vlak zoals in figuur 2.10.



Figuur 2.10 Meetkundige voorstelling van $\underline{U}$ en $\underline{I}$

We gaan nu verder met het vinden van de stroom in ons voorbeeldcircuit. Daartoe substitueren we de spanning en de stroom volgens (2.21) in de differentiaalvergelijking (2.14):

$$R\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)\right) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$$

Na deling door $\sqrt{2}$ en herschrijven, wordt deze vergelijking

$$\mathrm{Re}\left(R\underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) + \mathrm{Re}\left(L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)\right) = \mathrm{Re}\left(\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$$

of

$$\mathrm{Re}\left((R + \mathrm{j}\,\omega L)\,\underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$$

Omdat deze vergelijking geldig moet zijn voor elke waarde van t, kunnen we ook schrijven

$$(R + \mathrm{j}\,\omega L)\,\underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

of

$$(R + \mathrm{j}\,\omega L)\,\underline{I} = \underline{U} \tag{2.22}$$

Nadat we de complexe impedantie hebben ingevoerd volgens (met de definitie van de reactantie (2.15))

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}\,\omega L = R + \mathrm{j}X \tag{2.23}$$

kunnen we de stroom vinden met

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

Voor de grootten kunnen we schrijven (met (2.19), (2.21), en (2.23))

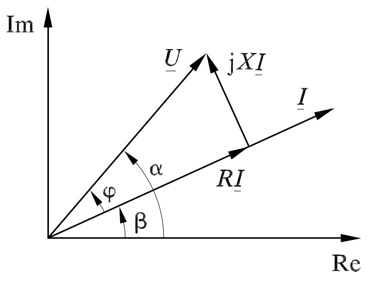
$$|\underline{I}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{Z}|} \quad \text{of} \quad I = \frac{U}{Z} \quad \text{waarin} \quad |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} = Z$$

Fasordiagrammen

Als we de spanningsvergelijking voor de stationaire toestand met sinusvormige grootheden voor figuur 2.9 ((2.22)) schrijven in de vorm

$$R\underline{I} + \mathrm{j}X\underline{I} = \underline{U} \tag{2.24}$$

kunnen we gemakkelijk de grafische weergave van deze vergelijking maken waarbij we voor de fasehoeken gebruik maken van de uitdrukkingen voor de spannings- en de stroomfasor in (2.21) en de vergelijking voor het faseverschil φ in (2.17). Het resultaat is het fasordiagram in figuur 2.11, waarin we elk van de termen van vergelijking (2.24) kunnen herkennen.

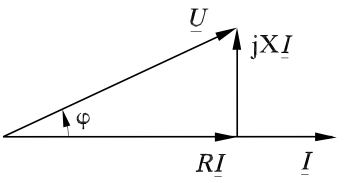


Figuur 2.11 Een fasordiagram bij figuur 2.9

Omdat de keuze van het tijdstip $t = 0$ willekeurig is, is de fasehoek α in (2.8) ook willekeurig. In feite is alleen de hoek tussen de spannings- en de stroomfasor φ van belang voor de beschrijving van het systeem. Dit betekent dat we het fasordiagram over elke mogelijke hoek mogen verdraaien. Voor het tekenen van het fasordiagram, zou het handig kunnen zijn om de stroomfasor langs de horizontale as te leggen, zoals in figuur 2.12. We kunnen dit fasordiagram formeel krijgen door de spanningsvergelijking (2.24) te vermenigvuldigen met $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta}$.

Vermogens en de complexe weergave

Met $\varphi = \alpha - \beta$ volgens (2.9) en de uitdrukkingen voor de fasoren in (2.21) kunnen we de uitdrukking voor het werkzaam vermogen (2.10) en de uit-



Figuur 2.12 Het gedraaide fasordiagram bij figuur 2.11

drukking voor het blindvermogen (2.12) ook schrijven als:

$$\begin{aligned} P &= UI\cos\varphi = UI\cos(\alpha-\beta) = UI\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\beta)}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta}\right) = \mathrm{Re}(\underline{U}\,\underline{I}^*) \\ Q &= UI\sin\varphi = UI\sin(\alpha-\beta) = UI\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha-\beta)}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta}\right) = \mathrm{Im}(\underline{U}\,\underline{I}^*) \end{aligned} \tag{2.25}$$

De index rechtsboven * geeft hierbij aan dat het de complex geconjugeerde is.

Controleer deze uitdrukkingen.

Zoals we in (2.25) kunnen zien kan het handig zijn om een soort complex vermogen in te voeren dat overeenkomt met $\underline{U}\,\underline{I}^*$. Dit vermogen is het zogenaamde complexe vermogen of complexe schijnbare vermogen:

$$\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}\,I\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta} = U\,I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} = |\underline{U}|\,|\underline{I}|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \tag{2.26}$$

Hierin zien we meteen dat de grootte van het complexe vermogen $\underline{S}$ overeenkomt met het in (2.4) ingevoerde (reële) schijnbare vermogen: $|\underline{S}| = S$.

Met (2.26) kunnen we voor P, Q en $\underline{S}$ volgens (2.25) schrijven:

$$P = \mathrm{Re}\,\underline{S} \quad ; \quad Q = \mathrm{Im}\,\underline{S} \quad ; \quad \underline{S} = P + \mathrm{j}Q \tag{2.27}$$

Controleer met (2.13) *dat de grootte van $\underline{S}$ overeenkomt met S.*

Samenvatting van symbolen

In deze paragraaf hebben we de volgende conventies voor symbolen gezien:

Complexe grootheden

$\underline{u}$	complexe grootheid ($\underline{u} = \mathrm{Re}\,\underline{u} + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,\underline{u}$)
$\mathrm{Re}\,\underline{u}$	het reële deel van $\underline{u}$
$\mathrm{Im}\,\underline{u}$	het imaginaire deel van $\underline{u}$
$\lvert\underline{u}\rvert$	modulus van $\underline{u}$

Sinusvormige grootheden

u	momentele waarde: $u = \hat{u}\cos(\omega t+\alpha) = U\sqrt{2}\cos(\omega t+\alpha) = U\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)}\right)$
$\hat{u}$	de amplitude

U de effectieve waarde (RMS-waarde): $U = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}}$
$\underline{\hat{u}}$ de complexe amplitude (deze zullen we hier niet gebruiken):
$\underline{\hat{u}} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} \quad (|\underline{\hat{u}}| = \hat{u})$
$\underline{u}$ de complexe ogenblikswaarde (deze zullen we hier niet gebruiken):
$\underline{u} = \hat{u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)} \quad (u = \mathrm{Re}\,\underline{u})$
$\underline{U}$ de complex effectieve (RMS) waarde (fasor): $\underline{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} \quad (|\underline{U}| = U)$
De momentele waarde volgt uit de fasor met $u = \sqrt{2}\mathrm{Re}(\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t})$
Impedanties
$\underline{Z}$ de complexe impedantie: $\underline{Z} = R + \mathrm{j}\,\omega L = R + \mathrm{j}X$
Z het quotiënt van de effectieve waarde van de spanning en de effectieve waarde van de stroom; dit is een reële grootheid:
$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = |\underline{Z}|$

2.6 Wisselstroomoverdracht

We bekijken de elektrische energie-overdracht met wisselstroom voor het geval dat de belasting behalve werkzaam vermogen ook blindvermogen opneemt, wat meestal het geval is. Zo'n belasting wordt wel ohms-inductief genoemd en we stellen hem hier voor met een impedantie

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$$

waarbij R en X positief zijn. In de voorbeelden kiezen we het faseverschil φ tussen de spanning u en de stroom i zodanig dat geldt: $\cos\varphi = 0.85$.

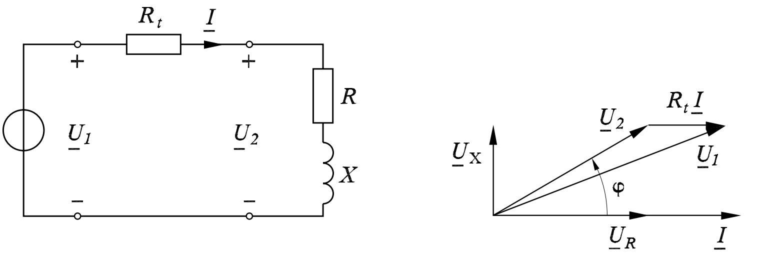
Een transmissielijn met een resistief karakter

We beginnen met een transmissielijn die we mogen representeren door een weerstand, zoals we in figuur 2.3 al hebben gedaan. We vinden dan het netwerk en het fasordiagram volgens figuur 2.13. Dit fasordiagram kunnen we eenvoudig samenstellen met de vergelijking:

$$\underline{U}_1 = R_t\underline{I} + \underline{U}_2 = R_t\underline{I} + \underline{U}_R + \underline{U}_X = R_t\underline{I} + R\underline{I} + \mathrm{j}X\underline{I}$$

In figuur 2.13 ligt de stroomfasor langs de horizontale as, wat een willekeurige keuze is.

Controleer het fasordiagram in figuur 2.13.



Figuur 2.13 Een transmissiesysteem met een resistief karakter

Voor het verlies in de transmissie volgt:

$$P_t = R_t|\underline{I}|^2 = R_t\frac{|\underline{S}_2|^2}{|\underline{U}_2|^2} = R_t\frac{P_2^2+Q_2^2}{|\underline{U}_2|^2} \tag{2.28}$$

Hierin is $\underline{S}_2$ het door de belasting opgenomen complexe schijnbare vermogen, P_2 het door de belasting opgenomen werkzame vermogen en Q_2 het door de belasting opgenomen blindvermogen.

Ga na welke vergelijkingen we nodig hebben om (2.28) af te leiden.

We kunnen bij (2.28) opmerken dat P_2 het vermogen is dat we nuttig gebruiken, dat we het transmissieverlies kunnen verkleinen door de spanning te verhogen (wat we al wisten) en dat bij gekozen netspanning het transmissieverlies door het werkzame vermogen en door het blindvermogen in gelijke mate bepaald wordt.

Blindvermogenscompensatie

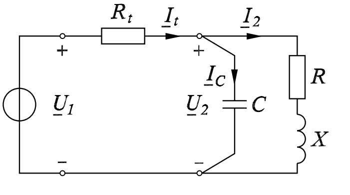
We kunnen het transmissieverlies beperken door te zorgen dat de transmissielijn geen blindvermogen behoeft af te geven. Dit kan met zogenaamde blindvermogenscompensatie, waarbij een condensator als blindvermogensleverancier parallel geschakeld wordt aan de belasting. Dit is in figuur 2.14 weergegeven. Het fasordiagram in deze figuur kunnen we samenstellen met de vergelijkingen:

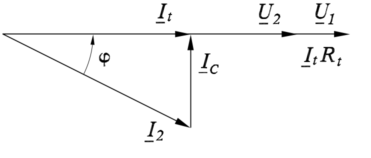
$$\underline{U}_1 = R_t\underline{I}_t + \underline{U}_2 \quad ; \quad \underline{I}_t = \underline{I}_2 + \underline{I}_C$$
$$\underline{I}_C = \mathrm{j}\,\omega C\underline{U}_2 \quad ; \quad \underline{U}_2 = (R+\mathrm{j}X)\,\underline{I}_2$$

Voor het tekengemak ligt de fasor $\underline{U}_2$ langs de horizontale as.

Controleer het fasordiagram in figuur 2.14.

In de figuur kunnen we zien dat we hiermee bereikt hebben dat de transmissie geen blindvermogen behoeft over te dragen.

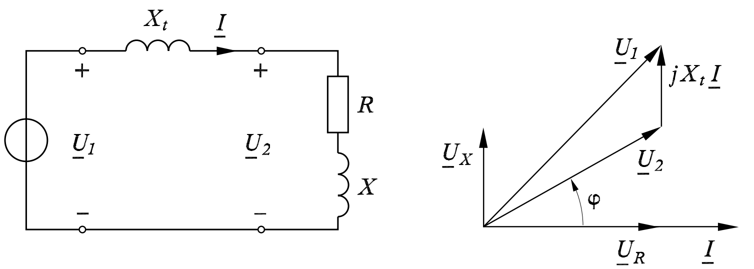




Figuur 2.14 Een transmissiesysteem met een resistief karakter met blindvermogenscompensatie

Een transmissielijn met een inductief karakter

Een redelijk realistisch model van een transmissielijn is dat waarbij de transmissie voorgesteld wordt als de combinatie van een weerstand en een spoel. Omdat in praktische systemen de reactantie van de spoel veel groter is dan de weerstand, verwaarlozen we hier eenvoudigheidshalve de weerstand. Zo ontstaat figuur 2.15.



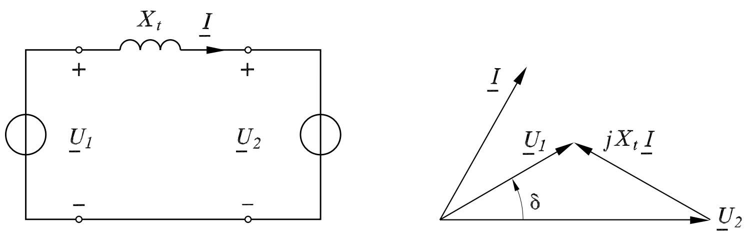
Figuur 2.15 Een transmissiesysteem met een inductief karakter

Bij een dergelijk transmissiesysteem is het spanningsverlies ten gevolge van de transmissie gering als de belasting relatief weinig blindvermogen opneemt (φ is klein): de grootte van de fasor $\underline{U}_2$ is nauwelijks kleiner dan de grootte van de fasor $\underline{U}_1$. Als de belasting echter relatief veel blindvermogen opneemt (φ nadert richting $\pi/2$) zal het spanningsverlies wel relatief groot zijn.

Controleer dit met behulp van het fasordiagram in figuur 2.15.

Een interessante situatie doet zich voor als we het transmissiesysteem volgens figuur 2.15 gebruiken voor de koppeling tussen twee spanningsnetten, die we hier voorstellen als twee spanningsbronnen (zie figuur 2.16), met als fasoren:

$$\underline{U}_1 = |\underline{U}_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta} \quad ; \quad \underline{U}_2 = |\underline{U}_2|$$



Figuur 2.16 Een transmissiesysteem met een inductief karakter tussen twee spanningsnetten

Voor het rekengemak hebben we de fasor $\underline{U}_2$ reëel gemaakt: voor de beschouwing is alleen het faseverschil tussen $\underline{U}_1$ en $\underline{U}_2$ (de hoek δ) van belang.

Voor het door de linker spanningsbron afgegeven complexe vermogen geldt:

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1\underline{I}^* = \underline{U}_1\left(\frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_2}{\mathrm{j}X_t}\right)^* = |\underline{U}_1|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta}\left(\frac{|\underline{U}_1|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\delta} - |\underline{U}_2|}{-\mathrm{j}X_t}\right)$$

Hiermee volgt voor het werkzame vermogen en voor het blindvermogen:

$$P_1 = \mathrm{Re}(\underline{S}_1) = \frac{|\underline{U}_1||\underline{U}_2|}{X_t}\sin\delta \quad ; \quad Q_1 = \mathrm{Im}(\underline{S}_1) = \frac{|\underline{U}_1|^2}{X_t} - \frac{|\underline{U}_1||\underline{U}_2|}{X_t}\cos\delta$$

Hieruit blijkt dat het mogelijk is om met een inductieve transmissie energie te transporteren van een net naar een ander net, waarbij het ontvangende net een hogere spanning kan hebben dan het zendende net (verrassing?). Voorts blijkt het overgedragen werkzame vermogen evenredig te zijn met de sinus van het faseverschil tussen de twee netten δ. De hoek δ wordt daarom wel de lasthoek genoemd.

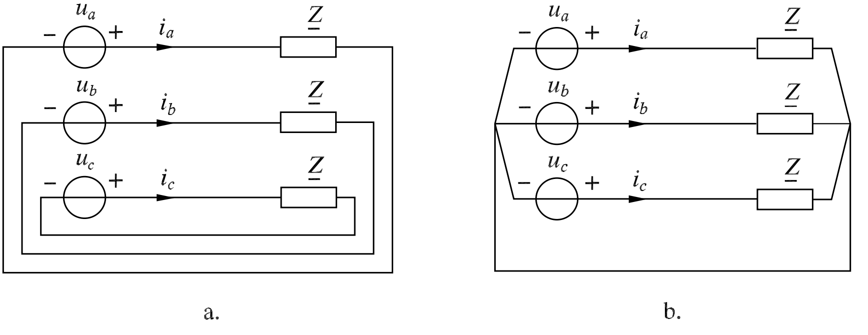
Ga een aantal verschillende situaties na met behulp van een fasordiagram zoals in figuur 2.16.

2.7 Driefasige systemen

Een constant overgedragen vermogen

Eén van de nadelen van energie-overdracht met behulp van wisselstroom is dat de momentele waarde van het overgedragen vermogen niet constant is. Zoals we in paragraaf 2.5 gezien hebben, bevat het momentele vermogen namelijk een wisselcomponent met een frequentie die twee keer zo groot is als de frequentie van de spanning. Deze wisselcomponent is met name hinderlijk bij de omzetting van elektrische energie in mechanische energie en omgekeerd (motoren en generatoren), omdat deze component resulteert in een wisselend koppel in de as van de machine. Dit probleem kunnen we ondervangen door de energie-overdracht niet via één fase, maar via drie fasen te laten plaatsvinden, waarbij de fasespanningen gelijkmatig in de tijd verschoven zijn. Overigens kan in principe ook een ander aantal fasen gebruikt worden, maar dat is praktisch gezien niet erg zinvol.

Een primitieve vorm van een driefasensysteem is in figuur 2.17a weergegeven. We zien hierin drie afzonderlijke wisselstroomtransmissiesystemen, bestaande uit drie spanningsbronnen, die door drie gelijke impedanties $\underline{Z}$ belast worden. Vervolgens kunnen we de onderste drie verbindingen combineren tot één zogenaamde retourgeleider, die de sterpunten van bron en belasting met elkaar verbindt (zie figuur 2.17b).



Figuur 2.17 De ontwikkeling van een driefasig transmissiesysteem: a drie afzonderlijke eenfasesystemen; b met gezamenlijke retourgeleider

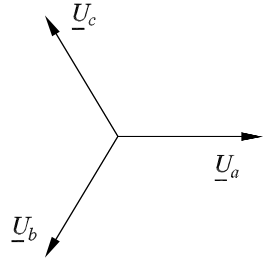
Voor de spanningen over de spanningsbronnen, de fasespanningen, schrijven we:

$$\begin{aligned} u_a &= U\sqrt{2}\cos(\omega t) \\ u_b &= U\sqrt{2}\cos(\omega t - \tfrac{2}{3}\pi) \\ u_c &= U\sqrt{2}\cos(\omega t - \tfrac{4}{3}\pi) \end{aligned} \tag{2.29}$$

De bij deze spanningen behorende fasoren

$$\underline{U}_a = U \quad ; \quad \underline{U}_b = U\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2}{3}\pi} \quad ; \quad \underline{U}_c = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{2}{3}\pi} \tag{2.30}$$

worden vaak grafisch weergegeven zoals in figuur 2.18.



Figuur 2.18 De spanningsfasoren van een driefasig systeem

De stromen door de transmissielijnen, de lijnstromen, geven we weer met:

$$\begin{aligned} i_a &= I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi) \\ i_b &= I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi - \tfrac{2}{3}\pi) \\ i_c &= I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi - \tfrac{4}{3}\pi) \end{aligned} \tag{2.31}$$

Met (2.29) en (2.31) volgt voor de momentele waarde van het overgedragen vermogen:

$$\begin{aligned} p &= u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c \\ &= UI\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi)\right] \\ &\quad + UI\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi - \tfrac{4}{3}\pi)\right] \\ &\quad + UI\left[\cos\varphi + \cos(2\omega t - \varphi - \tfrac{2}{3}\pi)\right] \\ &= 3UI\cos\varphi \end{aligned} \tag{2.32}$$

Hieruit blijkt dat de momentele waarde van het overgedragen vermogen bij een symmetrisch driefasig systeem constant is.

De geleiderverliezen

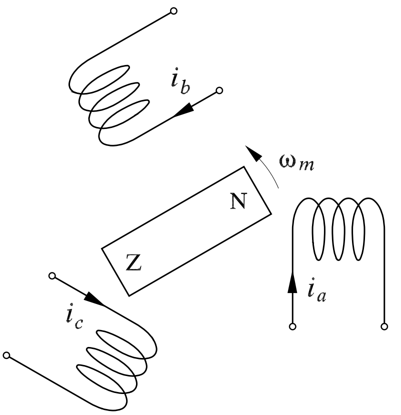
Met enige kennis van de goniometrie kunnen we zo zien dat de som van de drie lijnstromen in de uitdrukkingen (2.31) gelijk is aan nul. Dit is met fasoren overigens eenvoudiger in te zien als we kijken naar figuur 2.18. We zien dan zo dat de som van drie fasoren die onderling $\frac{2}{3}\pi$ uit elkaar liggen gelijk is aan nul.

Dat de som van de drie fasestromen gelijk is aan nul betekent dat we bij een symmetrische systeem de retourgeleider weg kunnen laten. Verder heeft dit een belangrijk gevolg voor de geleiderverliezen, de verliezen ten gevolge van de weerstand van de geleiders. Als de figuren 2.17a en 2.17b met elkaar vergelijken, kunnen we zien dat de geleiderverliezen halveren.

Verklaar dit.

Draaistroommachines

Het grootste voordeel van driefasensystemen is echter gelegen in de mogelijkheid om gebruik te maken van draaistroommachines. Om dit te verduidelijken breiden we de primitieve generator in figuur 2.7 uit naar een driefasige machine zoals getekend in figuur 2.19 (met twee in plaats van vier polen).



Figuur 2.19 Een primitieve draaistroommotor

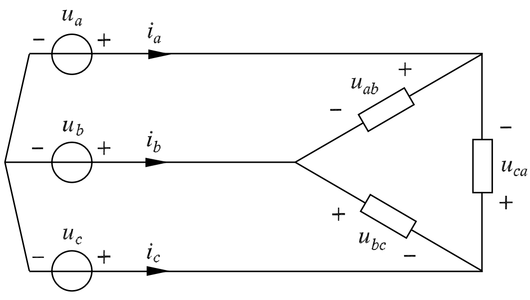
Als we de spoelen in deze machine voeden met een driefasig stelsel van stromen, ontstaat er door de achtereenvolgende bekrachtiging van elk van de spoelen een draaiend magneetveld dat de rotor met permanente magneten voorttrekt. Hiermee kan een zeer robuuste motor verkregen worden.

Vanwege de eigenschap om draaivelden op te kunnen wekken wordt een driefasig stelsel van wisselstromen vaak draaistroomstelsel genoemd.

Driefasenschakelingen

In de in figuur 2.17b gegeven schakeling zijn zowel de bron als de belasting in ster geschakeld. Het is echter ook mogelijk om de bron of de belasting, of beide, in driehoek te schakelen (zie het voorbeeld in figuur 2.20).

We krijgen dan te maken met de lijnspanningen of gekoppelde span-



Figuur 2.20 Een in ster geschakelde bron en een in driehoek geschakelde belasting

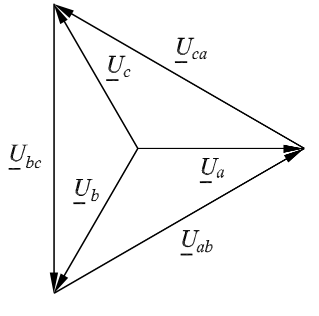
ningen, die volgen uit de verschillen van de fasespanningen:

$$\begin{aligned} u_{ab} &= u_a - u_b = U\sqrt{2}\left[\cos(\omega t) - \cos(\omega t - \tfrac{2}{3}\pi)\right] \\ &= U\sqrt{2}\left[-2\,\sin(\tfrac{1}{3}\pi)\,\sin(\omega t - \tfrac{1}{3}\pi)\right] = \sqrt{3}U\sqrt{2}\cos(\omega t + \tfrac{1}{6}\pi) \\ u_{bc} &= \sqrt{3}U\sqrt{2}\cos(\omega t - \tfrac{1}{2}\pi) \\ u_{ca} &= \sqrt{3}U\sqrt{2}\cos(\omega t + \tfrac{5}{6}\pi) \end{aligned}$$

De bij deze spanningen behorende fasoren zijn:

$$\underline{U}_{ab} = \sqrt{3}U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{6}} \quad ; \quad \underline{U}_{bc} = \sqrt{3}U\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}} \quad ; \quad \underline{U}_{ca} = \sqrt{3}U\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{5\pi}{6}}$$

Deze fasoren en de fasoren van de fasespanningen zijn weergegeven in figuur 2.21. Als over de grootte van de spanning in een driefasensysteem gesproken wordt, wordt vrijwel altijd de gekoppelde spanning bedoeld, en niet de fasespanning.



Figuur 2.21 De spanningsfasoren van een driefasig systeem

2.8 Het elektriciteitsvoorzieningssysteem

In het voorgaande hebben we al een aantal aspecten van de elektriciteitsvoorziening besproken, zonder daarbij in te gaan op het systeem. In deze paragraaf bekijken we de opbouw van het systeem en besteden we enige aandacht aan belastingskarakteristieken en beveiliging.

Opbouw van het elektriciteitsvoorzieningssysteem

Voor de beschrijving van de opbouw van het elektriciteitsvoorzieningssysteem maken we gebruik van figuur 2.22.

Vrijwel alle elektrische energie wordt opgewekt in elektriciteitscentrales, waarin meestal enkele productie-eenheden (generator met zijn aandrijving) zijn opgesteld. Deze centrales zijn over het gehele land verspreid. Bij grote eenheden wordt de generator meestal aangedreven door een stoomturbine, die de stoom krijgt van een ketel die verwarmd wordt door verbranding van fossiele brandstoffen of van een kernsplijtingseenheid. Soms-worden grote generatoren echter ook wel aangedreven door een waterturbine. Daarnaast zijn er nog kleinere eenheden waarbij een gasturbine de aandrijving verzorgt.

In verband met de isolatie in de generator ligt de opgewekte spanning rond 20 kV; met de generatortransformator wordt deze spanning omhoog getransformeerd naar bijvoorbeeld 150 kV of 380 kV.

Vervolgens wordt de energie getransporteerd via transmissielijnen naar de diverse onderstations. Voor de transmissie binnen provincies wordt veelal een spanning gebruikt van 150 kV of 110 kV, terwijl voor de transmissie binnen Nederland en binnen Europa spanningen van 380 kV of 220 kV worden gehanteerd. Het samenstel van deze laatste transmissieverbindingen heet het landelijke (of het Europese) koppelnet. Door in de netten mazen aan te brengen of door verbindingen dubbel uit te voeren, is de elektriciteitsvoorziening ook verzekerd wanneer er een verbinding door storingen of voor onderhoud buiten bedrijf is.

Vanuit de onderstations wordt de energie via distributielijnen met spanningen van bijvoorbeeld 10 kV of 50 kV gedistribueerd. Middelgrote verbruikers nemen veelal energie af bij een spanning van 10 kV, terwijl voor de kleinverbruikers een spanningsniveau van 400 V gebruikelijk is. Voor huishoudelijk gebruik wordt niet de gekoppelde spanning van 400 V gebruikt, maar de fasespanning van 230 V.

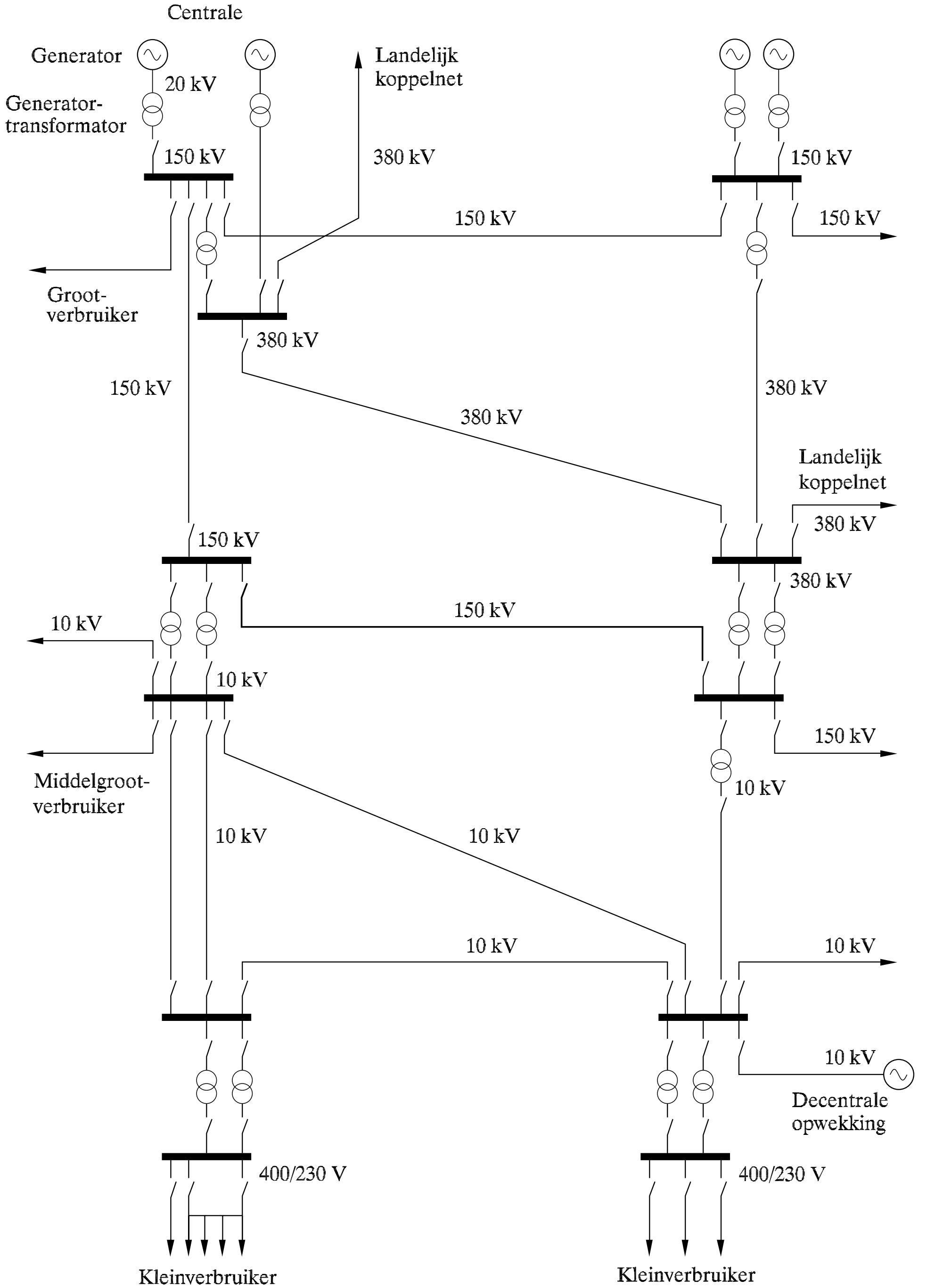
Leg dit uit aan de hand van de figuren 2.20 en 2.21.

Grootverbruikers kunnen overigens ook energie rechtstreeks onttrekken op transmissiespanningsniveau.

Naast de centrale opwekking zien we steeds meer decentrale opwekking van elektriciteit (warmte/kracht-eenheden, waterkracht, windenergie, zonne-energie), waarbij over het algemeen wordt ingevoed op het distributienet.

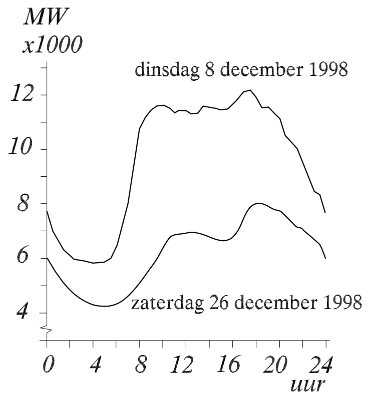
Belastingskarakteristieken

Het elektriciteitsvoorzieningssysteem wordt ontworpen om elektrische energie efficiënt en veilig aan de klant te leveren. De karakteristieken van de vraag naar elektrische energie maken deze taak vaak moeilijk. Met name de voorspelling van de groei van de vraag en het voldoen aan de dagelijkse en jaarlijkse belastingscycli zijn twee moeilijke uitdagingen.



Figuur 2.22 Een deel van het elektriciteitsvoorzieningssysteem

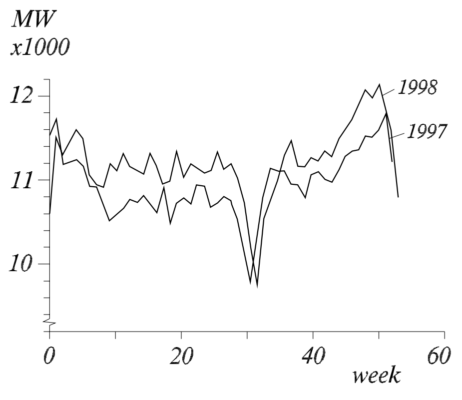
Aangezien de huidige stand van de techniek niet voorziet in de mogelijkheid om elektrische energie op te slaan op een efficiënte en economisch aantrekkelijke manier, moet elektrische energie opgewekt worden op het moment dat er om gevraagd wordt. De vraag naar elektrische energie varieert echter gedurende de dag, zoals we in de voorbeelden in figuur 2.23 kunnen zien. Omdat opwekeenheden alleen economisch werken in de buurt van vollast, moeten in de loop van de dag dus eenheden af- en bijge-



Figuur 2.23 Het verloop van de belasting voor heel Nederland over een dag

schakeld worden. Het starten van een grote eenheid vergt echter veel tijd en is een kostbare procedure. Dit heeft tot resultaat dat in geval van behoefte aan meer productievermogen gedurende enkele uren, kleinere pieklasteenheden ingezet worden. Deze eenheden, die vaak een gasturbine als aandrijfeenheid hebben, hebben weliswaar een kleiner rendement, maar hebben ook lagere opstartkosten en zijn vlug in bedrijf te stellen.

Net zoals de belasting over de loop van de dag varieert, varieert hij ook gedurende een jaar. Als illustratie hiervoor zien we in figuur 2.24 de weke-



Figuur 2.24 Wekelijkse piekbelasting voor heel Nederland over een jaar

lijks opgetreden piekbelasting voor heel Nederland voor de jaren 1997 en 1998. De jaarlijkse belastingsvariaties zijn zeer belangrijk voor de planning van het onderhoud aan de componenten van het systeem: tijdens de piekbelasting is het wenselijk om alle middelen ter beschikking te hebben.

Beveiliging

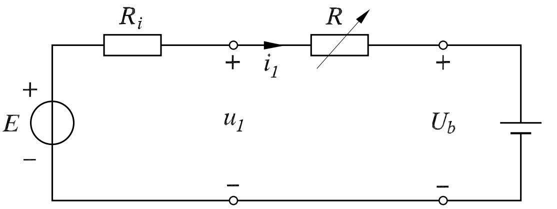
Een fout is elke omstandigheid die de energiestroom in het net verstoort. Fouten kunnen bijvoorbeeld optreden door zware weersomstandigheden (zeer sterke wind, blikseminslag), door kortsluiting van één of meer geleiders ten gevolge van uitwendige oorzaken (vallende bomen, graafmachines) en falen van de isolatie. Het beveiligingssysteem van de elektriciteitsvoorziening moet zodanig ontworpen zijn dat fouten snel gedetecteerd en gelokaliseerd worden, zodat de gestoorde systeemonderdelen snel geïsoleerd kunnen worden en de voorziening van elektriciteit voor zoveel mogelijk gebruikers niet verbroken wordt.

2.9 Vraagstukken

De uitwerkingen van onderstaande vraagstukken staan op de internetsite http://www.vssd.nl/hlf/e004.htm.

Opgave 2.1

Een accu wordt opgeladen met behulp van de schakeling volgens onderstaande figuur.



De accu met een spanning U_b van 12 V wordt opgeladen uit een gelijkspanningsvoeding met een inwendige spanning E van 20 V en een inwendige weerstand R_i van 0.1 Ω. De gemiddelde laadstroom van de accu moet 10 A zijn. De verliezen in de voedingsbron beperken zich tot de dissipatie in de inwendige weerstand R_i. De accu is verliesvrij.

2.1a Op welke waarde moet de regelbare weerstand R ingesteld worden?

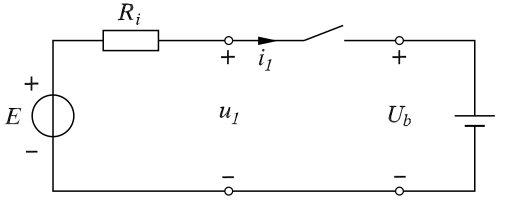
2.1b Het rendement van de gehele schakeling wordt gedefinieerd als het quotiënt van het gemiddelde vermogen dat de accu opneemt en het gemiddelde vermogen dat de inwendige spanningsbron van de voeding afgeeft. Bereken het rendement η van de gehele schakeling.

2.1c Het rendement van de voeding wordt gedefinieerd als het quotiënt van het

gemiddelde vermogen dat de voeding afgeeft en het gemiddelde vermogen dat de inwendige spanningsbron van de voeding afgeeft.
Bereken het rendement η_1 van de voeding.

2.1d Bereken de arbeidsfactor λ_1 voor de klemmen van de voeding.

2.1e Vervolgens wordt de regelbare weerstand in de schakeling vervangen door een schakelaar zoals in onderstaande figuur is aangegeven. Deze schakelaar wordt periodiek in- en uitgeschakeld met periodetijd T. Hierbij is de schakelaar gedurende de tijd dT gesloten en gedurende de tijd (1-d)T geopend.



Schets het verloop van de stroom als functie van de tijd.

2.1f De factor d wordt zodanig gekozen dat de gemiddelde laadstroom weer 10 A is. Geef de waarde van d.

2.1g Bereken het rendement η van de gehele schakeling.

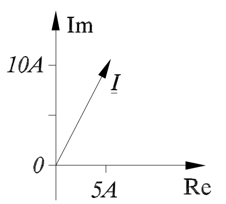
2.1h Bereken het rendement η_1 van de voeding.

2.1i Wat kun je opmerken ten aanzien van de rendementen in de twee beschouwde situaties?

2.1j Bereken de arbeidsfactor λ_1 voor de klemmen van de voeding.

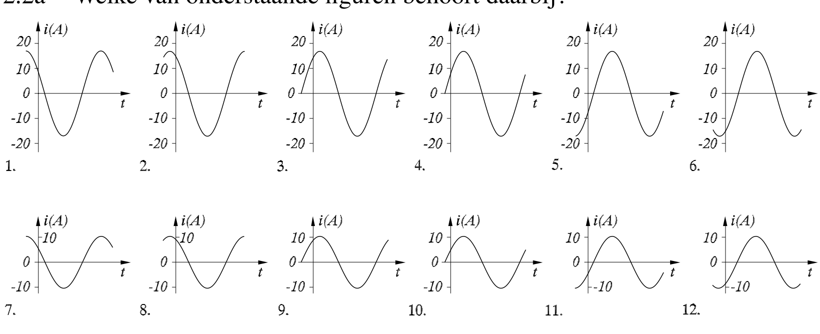
Opgave 2.2

Deze opgave is een oefening met een aantal basisbegrippen uit de wisselstroomtheorie.

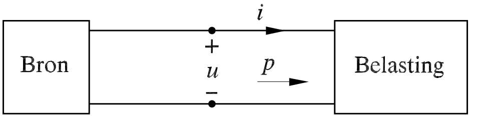


Voor de stroom i geldt nevenstaande fasor.

2.2a Welke van onderstaande figuren behoort daarbij?



We beschouwen vervolgens het overdrachtsysteem in onderstaande figuur.
De voedende bron levert een wisselspanning volgens
$u = 230\sqrt{2}\,\cos\left(2\pi 50 t - \frac{\pi}{6}\right)$ V.
Voor de stroom geldt: $i = 15\sqrt{2}\,\cos\left(2\pi 50 t + \frac{\pi}{6}\right)$ A.

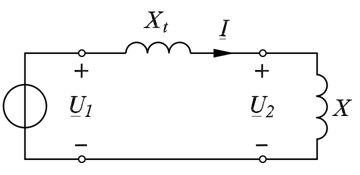


2.2b Geef voor de stroom i de volgende grootheden: de effectieve waarde, de amplitude, de gemiddelde waarde, de complexe effectieve waarde (fasor), de complexe amplitude, de frequentie en de cirkelfrequentie.

2.2c Geef de volgende grootheden die betrekking hebben op het vermogen p dat de bron levert (let op de referentierichting): (de tijdsfunctie voor) de momentele waarde van het vermogen, het schijnbare vermogen, het complexe schijnbare vermogen, het werkzame vermogen, het blindvermogen en de arbeidsfactor.

Opgave 2.3

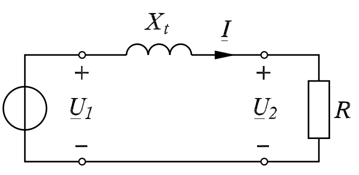
We beschouwen het overdrachtsysteem in nevenstaande figuur.
De voedende bron levert een wisselspanning van 230 V met een frequentie van 50 Hz ($\underline{U}_1$).



De transmissie wordt voorgesteld met een reactantie X_t met een waarde van 0.3 Ω.
De belasting is een reactantie X (inductiviteit) van 1.5 Ω.

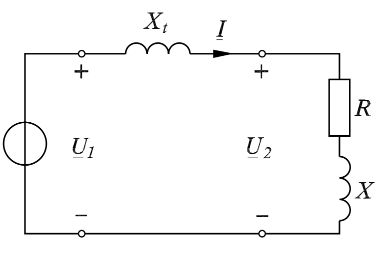
2.3a Schets het fasordiagram in ongeveer de juiste verhoudingen. Geef de spanning over de belasting en het door de belasting opgenomen blindvermogen (denk aan de eenheden).

2.3b Vervolgens beschouwen we het geval dat de belasting bestaat uit een weerstand R van 1.5 Ω.
Schets het fasordiagram in ongeveer de juiste verhoudingen.



Geef de spanning over de belasting en het door de belasting opgenomen blindvermogen.

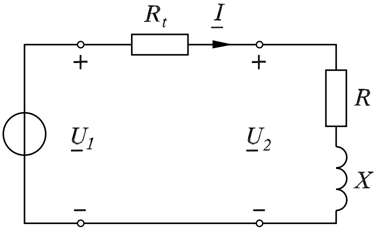
2.3c Ten slotte nemen we een gemengde belasting: $R = 1.5\ \Omega$; $X = 1.5\ \Omega$
Schets het fasordiagram in ongeveer de juiste verhoudingen.
Geef de spanning over de belasting en het door de belasting opgenomen blindvermogen.



2.3d Vervolgens passen we blindvermogenscompensatie toe door een condensator parallel aan de belasting te schakelen. Deze condensator wordt zodanig gekozen dat de belasting inclusief deze condensator geen blindvermogen opneemt.
Schets het fasordiagram in ongeveer de juiste verhoudingen. Noem de stroom door de belasting I_2, de stroom door de condensator I_C en de stroom door de transmissie I_t.
Hoe groot moet de condensator zijn?

Opgave 2.4

We beschouwen het overdrachtsysteem in nevenstaande figuur.
De voedende bron levert een wisselspanning van 220 V met een frequentie van 50 Hz ($\underline{U}_1$).
De transmissie wordt voorgesteld met een weerstand R_t met een waarde van 1 Ω.



De belasting is samengesteld uit een weerstand R (10 Ω) en een inductiviteit van 3.2 mH.

2.4a Schets het fasordiagram in ongeveer de juiste verhoudingen.

2.4b Bereken voor het door de bron afgegeven vermogen respectievelijk: P_1, Q_1, $|\underline{S}_1|$, $\underline{S}_1$ en λ_1 (denk aan de eenheden).

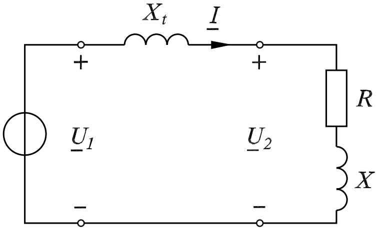
2.4c Bereken voor het door de belasting opgenomen vermogen respectievelijk: P_2, Q_2, $|\underline{S}_2|$, $\underline{S}_2$ en λ_2.

2.4d Wat valt je bij een beschouwing van de berekende waarden op?

2.4e Hoe groot moet een condensator parallel aan de belasting zijn om ervoor te zorgen dat de belasting inclusief de condensator geen blindvermogen opneemt?

2.4f Hoe groot is in dat geval de stroom in R_t?

2.4g Vervolgens wordt de transmissie voorgesteld met een reactantie X_t met een waarde van 1 Ω zoals in nevenstaande figuur is aangegeven.
Schets het fasordiagram in ongeveer de juiste verhoudingen.

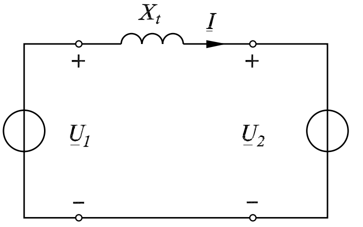


2.4h Bereken voor het door de bron afgegeven vermogen respectievelijk: P_1, Q_1, $|\underline{S}_1|$, $\underline{S}_1$ en λ_1.

2.4i Bereken voor het door de belasting opgenomen vermogen respectievelijk: P_2, Q_2, $|\underline{S}_2|$, $\underline{S}_2$ en λ_2.

2.4j Wat valt je bij een beschouwing van de berekende waarden op?

Opgave 2.5



Twee (eenfasige) wisselspanningsnetten zijn gekoppeld via een transmissielijn met een inductief karakter. Deze spanningsnetten stellen we hier voor als twee spanningsbronnen (zie nevenstaande figuur), met als fasoren:
$\underline{U}_1 = |\underline{U}_1|\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\delta} \quad ; \quad \underline{U}_2 = |\underline{U}_2|$
De reactantie X_t heeft een waarde van 4 Ω, $|\underline{U}_1|$ is 200 V en $|\underline{U}_2|$ is 250 V. Schets voor $\delta = \pi/6$ rad en voor $\delta = -\pi/6$ rad, het fasordiagram in ongeveer de juiste verhoudingen, bereken het door bron 1 afgegeven werkzame vermogen en het door bron 1 afgegeven blindvermogen en bereken het door bron 2 opgenomen werkzame vermogen en het door bron 2 opgenomen blindvermogen.

Opgave 2.6

Een symmetrische driefasige bron met fasespanningen van 230 V voedt drie weerstanden die in driehoek geschakeld zijn. Voor de weerstand tussen de fasen a en b geldt $R_{ab} = 15$ Ω. Voor de andere twee weerstanden geldt $R_{bc} = R_{ca} = 10$ Ω.

2.6a Bereken de stromen door elk van de weerstanden.

2.6b Bereken de stromen die elk van de fasen van de bron moet leveren.

3 Magnetische circuits

3.1 Inleiding

Zowel transformatoren als elektromechanische omzetters (denk hierbij bijvoorbeeld aan generatoren en motoren) zijn elektromagnetische systemen die beschreven kunnen worden met de wetten van Maxwell. De werking van beide soorten systemen berust in de praktijk echter op magnetische velden: de gevolgen van ruimteladingen zijn voor de werking in principe niet van belang (enkele kleinere elektrostatische omzetters vormen hierop een uitzondering). Om efficiënt om te kunnen gaan met magnetische velden worden deze velden (flux) geleid via banen: het magnetische circuit, dat de flux brengt waar we hem nodig hebben. Dit magnetische circuit is analoog aan het elektrische circuit waarbij de elektrische stroom loopt door geleiders.

Een magnetisch circuit is meestal voor het grootste gedeelte opgebouwd uit materiaal met een hoge permeabiliteit. Hierbij gaat de voorkeur uit naar ferromagnetische materialen zoals ijzer (en legeringen daarmee). Dankzij de hoge permeabiliteit wordt de magnetische flux min of meer begrensd tot paden die opgelegd worden door het magnetische circuit en wordt bovendien bereikt dat met een relatief lage bekrachtigingsstroom een relatief hoge fluxdichtheid verkregen wordt. Omdat de verhouding tussen de permeabiliteit van ijzer en van lucht niet zo groot is als de verhouding van de elektrische geleidbaarheid van koper en van lucht, blijft de magnetische flux in het algemeen veel minder goed in het magnetische circuit dan de elektrische stroom in het elektrische circuit.

Bij een transformator heeft het magnetische circuit tot taak om twee elektrische circuits met elkaar te koppelen; bij een elektromechanische omzetter komt naast het elektrische en het magnetische circuit nog een mechanisch deel. Hierbij zorgt het magnetische circuit voor de koppeling tussen het elektrische deel en het mechanische deel. In dit hoofdstuk zullen we ingaan op berekeningen aan magnetische circuits om ons voor te bereiden op de behandeling van transformatoren en elektromechanische omzetters.

Deze berekeningen aan magnetische circuits zullen we baseren op de wetten van Maxwell. Daarbij zullen we eerst kijken hoe de flux in het magnetische circuit ontstaat ten gevolge van stroom in het elektrische circuit. Hiertoe zullen we eerst een eenvoudig circuit bekijken en vervolgens een beschrijvingswijze bespreken die gebaseerd is op de elektrische netwerktheorie, waarbij we gebruik maken van de analogie tussen elektrische en magnetische circuits. Nadat we het niet-lineaire gedrag van magnetische materialen (nog zonder hysterese-verschijnselen) hebben besproken, gaan we in op het ontstaan van een spanning in het elektrische circuit ten gevolge van fluxveranderingen in het magnetische circuit en op de in het magnetische circuit opgeslagen energie. Ten slotte gaan we kort in op het hysteresekarakter van ferromagnetische materialen en op de verliezen die optreden in magnetische circuits met ferromagnetische materialen als deze circuits bekrachtigd worden met een wisselstroom.

3.2 De wetten van Maxwell

Om elektromagnetische verschijnselen te kunnen beschrijven wordt veel gebruik gemaakt van de volgende grootheden:

- de elektrische ladingsdichtheid ρ , waarmee we hier de ladingsdichtheid van de vrije (niet aan materie gebonden) lading bedoelen;
- de stroomdichtheid $\vec{J}$ (we bedoelen hier de stroomdichtheid van de vrije ladingen);
- de elektrische veldsterkte $\vec{E}$;
- de elektrische verplaatsing $\vec{D}$;
- de magnetische veldsterkte $\vec{H}$;
- de magnetische fluxdichtheid (of inductie) $\vec{B}$.

Onderlinge verbanden tussen deze grootheden worden gegeven door de wetten van Maxwell en de beschrijving van de materiaaleigenschappen.

De wetten van Maxwell, die we hier bekend veronderstellen, kunnen we in integraalvorm als volgt weergeven:

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = \iint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A \quad \text{(Eerste wet van Maxwell)} \tag{3.1}$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A \quad \text{(Tweede wet van Maxwell of Inductiewet van Faraday)} \tag{3.2}$$

Hierin is S een oppervlak dat C als randkromme heeft (zie figuur 3.1a). De wetten van Maxwell worden volledig gemaakt met de vergelijkingen:

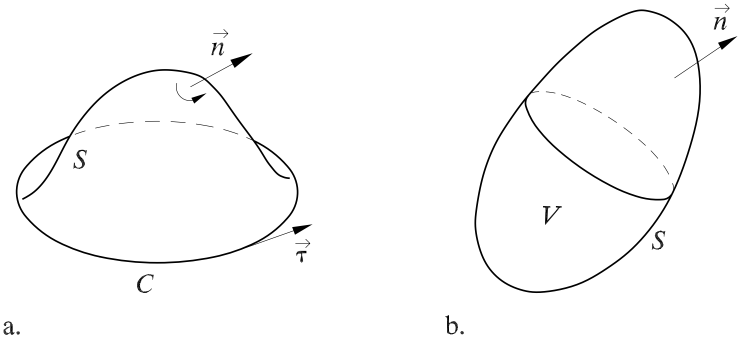
$$\oiint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \iiint_V \rho\,\mathrm{d}V \tag{3.3}$$

$$\oiint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = 0 \tag{3.4}$$

waarin S een gesloten oppervlak is en V het gebied binnen S is (zie figuur 3.1b).

Hierbij is verondersteld dat de contouren en oppervlakken stilstaan ten opzichte van de waarnemer. Alhoewel we bij de beschouwing van systemen met beweging dus zeer voorzichtig moeten zijn, levert deze beperking in de praktijk meestal geen grote problemen op.

Als de eigenschappen van de gebruikte materialen bekend zijn, kunnen we hiermee nog een verband vinden tussen de elektrische verplaatsing (D) en de elektrische veldsterkte (E), tussen de magnetische veldsterkte (H) en



Figuur 3.1 Een oppervlak S met C als randkromme (a) en een gesloten oppervlak S met binnengebied V (b)

de magnetische fluxdichtheid (B) en eventueel tussen de elektrische veldsterkte (E) en de stroomdichtheid (J).

De wetten van Maxwell kunnen voor een grote klasse van problemen vereenvoudigd worden door het toepassen van quasi-statisch-veld-benaderingen. Bij deze benaderingen wordt verondersteld dat de voortplantingssnelheid van elektromagnetische velden (de lichtsnelheid) zo groot is ten opzichte van de korte mechanische afstanden en lage snelheden in de beschouwde systemen dat de invloed van de verandering van de elektrische veldsterkte mag worden verwaarloosd: de afgeleide van de elektrische veldsterkte naar de tijd (dus ook de afgeleide van de elektrische verplaatsing naar de tijd) mag worden verwaarloosd als bron voor het magnetische veld. Deze veronderstelling heeft tot gevolg dat de tweede term in het rechter lid van (3.1) mag worden verwaarloosd en dat de eerste wet van Maxwell over gaat in de wet van Ampère. Voorts spelen ruimteladingen in elektromechanische omzetters van het magnetische type normaal gesproken geen rol, zodat we (3.3) kunnen weglaten.

Samenvattend, kunnen we stellen dat de in de praktijk toegepaste omzetters met een magnetisch circuit kunnen worden beschreven met de volgende vergelijkingen:

$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{\tau}\,\mathrm{d}s = \iint_S \vec{J} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A \qquad \text{(Wet van Ampère)} \tag{3.5}$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{\tau}\,\mathrm{d}s = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A \qquad \text{(Tweede wet vanMaxwell of Inductiewet van Faraday)} \tag{3.6}$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A = 0 \tag{3.7}$$

De integraal $\iint_S \vec{J} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A$ heet de met de contour C gekoppelde geleidingsstroom of de door de contour omvatte stroom, in de praktijksituatie met stroomvoerende spoelwindingen vaak aangeduid als het aantal ampèrewindingen; de integraal $\iint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}A$ heet de met de contour C gekoppelde flux.

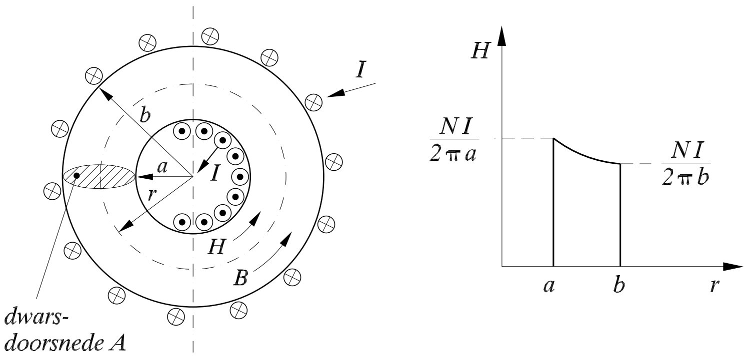
Voorlopig gaan we uit van zogenaamde lineaire materialen, zodat voor magnetische materialen de permeabiliteit constant is:

$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} \tag{3.8}$$

Hierin is μ de (absolute) permeabiliteit, μ_r de relatieve permeabiliteit en μ_0 de permeabiliteit van vacuüm (de permeabiliteit van lucht verschilt nauwelijks van die van vacuüm). Verderop in dit hoofdstuk zullen we nog nader ingaan op niet-lineair magnetisch materiaal.

3.3 Een eenvoudig magnetisch circuit

Een eenvoudig voorbeeld van een magnetisch circuit is weergegeven in figuur 3.2: we beschouwen hier een toroïdale ferromagnetische kern met een spoel met N windingen, waarvan de draaddoorsnede veel kleiner is dan in de figuur is getekend. De kern heeft een doorsnede A, een inwendige straal a en een uitwendige straal b.



Figuur 3.2 Een toroïdale kern met spoel

Voor de eerste wet van Maxwell (wet van Ampère; (3.5)) beschouwen we een cirkelvormige contour met straal r. Voor $r < a$ is de door de contour omvatte stroom (het rechterlid in (3.5)) 0, zodat

$$H = 0 \;\; ; \;\; r < a$$

Voor $a < r < b$ is de omvatte stroom N keer de stroom I door de spoel:

$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{\tau}\,\mathrm{d}C = NI \quad ; \;\; a < r < b$$

Dankzij de symmetrie is de magnetische veldsterkte binnen de torus constant langs een cirkelvormig pad en tangentieel gericht:

$$\vec{H} \cdot \vec{\tau} = H$$

Of:

$$\iint_C \vec{H} \cdot \vec{\tau}\,\mathrm{d}C = \int_0^{2\pi r} H\,\mathrm{d}(r\theta) = NI \quad ; \quad a < r < b$$

Hiermee volgt voor de magnetische veldsterkte in de torus:

$$H = \frac{NI}{2\pi r} \quad ; \quad a < r < b$$

Waarom is het in de voorafgaande afleiding nodig dat de wikkeling gelijkmatig over de kern verdeeld is?

Voor $r > b$ is de omvatte stroom weer nul:

$$H = 0 \ ; \ r > b$$

De magnetische fluxdichtheid B in de kern kunnen we vinden met (3.8):

$$B = \mu \frac{NI}{2\pi r} \ ; \ a < r < b$$

De flux door een dwarsdoorsnede A (zie figuur 3.2) zullen we aangeven met de letter Φ:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A$$

Als een benadering zullen we de flux nemen als het product van B op de gemiddelde straal r_{av} en de grootte van de dwarsdoorsnede A:

$$\Phi = \frac{\mu N I A}{2 \pi r_{av}} \quad \text{met} \quad r_{av} = a + \frac{b-a}{2}$$

We zien in deze uitdrukking dat de flux door de dwarsdoorsnede A recht evenredig is met de permeabiliteit $\mu = \mu_0 \mu_r$. Door een materiaal te gebruiken met een hoge relatieve permeabiliteit (bij ijzer is μ_r in de orde van grootte van 5000) kan de flux bij dezelfde bekrachtigingsstroom aanzienlijk vergroot worden ten opzichte van het geval met $\mu_r = 1$.

3.4 De netwerkbeschrijving van magnetische circuits

De beschrijving van magnetische circuits kan vereenvoudigd worden door gebruik te maken van de beschrijvingsmethoden voor elektrische netwerken. Daartoe moeten we van het magnetische netwerk een analoog elektrisch netwerk maken. We zullen beginnen met het in de vorige paragraaf beschreven eenvoudige circuit.

Een eenvoudig circuit

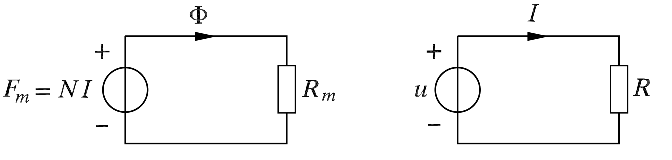
De vorige paragraaf is afgesloten met een uitdrukking voor de magnetische flux. Het product NI hierin (het aantal ampèrewindingen) wordt vaak aangeduid met de term magnetomotorische kracht F_m:

$$F_m = NI \tag{3.9}$$

Met de lengte van het cirkelvormige pad bij de gemiddelde straal $l_{av} = 2\pi r_{av}$ kunnen we vervolgens voor de flux schrijven:

$$\Phi = F_m \left(\frac{\mu A}{l_{av}} \right) \tag{3.10}$$

Vervolgens beschouwen we deze vergelijking als de beschrijving van een systeem met een in- en een uitgang. Als we de magnetomotorische kracht F_m (oorzaak) als ingangsgrootheid beschouwen, kunnen we de flux Φ zien als de uitgangsgrootheid (gevolg): de grootheid Φ wordt verkregen door de vermenigvuldiging van de grootheid F_m met de grootheid tussen haken in bovenstaande vergelijking. Deze vergelijking is analoog aan de wet van Ohm. Met andere woorden, er is een analogie tussen de hier gebruikte magnetische variabelen en de elektrische-netwerkvariabelen mogelijk (zie figuur 3.3). Hierbij komt de magnetische flux overeen met de elektrische stroom en de magnetomotorische kracht met de elektrische spanning.



Figuur 3.3 De analogie tussen het magnetische en het elektrische netwerk

Het voorgaande leidt ertoe om de grootheid tussen haken in bovenstaande vergelijking te zien als analogie van de inverse van een weerstand. We voeren nu de reluctantie (ook wel magnetische weerstand genoemd) van een magnetisch circuit in als:

$$R_m = \frac{l_{av}}{\mu A} \tag{3.11}$$

Hiermee kunnen we (3.10) schrijven als

$$\Phi = \frac{F_m}{R_m} \tag{3.12}$$

De eenheid van reluctantie is blijkbaar A/Wb. Uitdrukking (3.12) (een soort wet van Ohm voor het magnetische circuit) wordt de wet van Hopkinson genoemd.

We kunnen nu opmerken dat de magnetische reluctantie, zoals die gedefinieerd is in (3.11), afneemt bij toenemende permeabiliteit en dat, bij een zelfde waarde van de magnetomotorische kracht, een hogere waarde van de flux kan worden verkregen door een materiaal met een lagere specifieke reluctantie te gebruiken. De voordelen van de hiervoor vastgestelde analogie omvatten ook de mogelijkheid om de netwerktheorie te gebruiken voor problemen op het gebied van het magnetische veld.

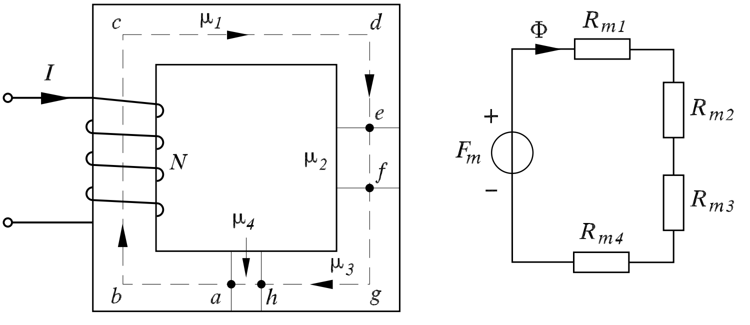
De ontwikkeling van het concept van het magnetische netwerk is tot nu toe opgehangen aan de analyse van een toroïde, waarin een uniform gewikkelde spoel met N windingen de bron voor de magnetomotorische kracht vormde. In de praktijk zijn spoelen echter vaak niet uniform gewikkeld. Toch blijft de beschouwing in de praktijk zijn waarde behouden zolang de dikte van de torus ($b-a$) veel kleiner is dan de gemiddelde lengte l_{av}.

Waarom moet de dikte van de torus (in het algemeen de doorsnede van het magnetische circuit) veel kleiner zijn dan de lengte van het circuit?

Bovendien kunnen de resultaten in praktische toepassingen ook gebruikt worden voor niet-cirkelvormige structuren.

De serieschakeling

Als de velden uniform verdeeld zijn, kan het magnetische-netwerkconcept ook gebruikt worden voor magnetische circuits die samengesteld zijn uit verschillende materialen, zoals bijvoorbeeld in figuur 3.4.



Figuur 3.4 Magnetisch circuit met reluctanties in serie

In deze figuur is de integratiecontour van de wet van Ampère aangegeven als de gesloten contour *abcdefgha*. De lengte van het stuk *abcde* wordt aangeduid met l_1, de lengte van het stuk *ef* met l_2, de lengte van het stuk *fgh* met l_3 en de lengte van het stuk *ha* metl_4. De toepassing van de wet van Ampère ((3.5)) resulteert in:

$$F_m = NI = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4$$

Zolang de permeabiliteit voldoende hoog is zal het veld zich hoofdzakelijk binnen het magnetische circuit bevinden, zodat de flux in het circuit overal hetzelfde verondersteld mag worden, ook als de doorsneden van de vier stukken waaruit het circuit in figuur 3.4 bestaat verschillend zijn. Voor de magnetische fluxdichtheden kan dus geschreven worden:

$$B_1 = \frac{\Phi}{A_1} \quad ; \quad B_2 = \frac{\Phi}{A_2} \quad ; \quad B_3 = \frac{\Phi}{A_3} \quad ; \quad B_4 = \frac{\Phi}{A_4}$$

Met

$$B_i = \mu_i H_i$$

volgt voor de magnetische veldsterkte per onderdeel van het circuit:

$$H_i = \frac{\Phi}{\mu_i A_i}$$

Dit resulteert in:

$$F_m = NI = \Phi\left(\frac{l_1}{\mu_1 A_1} + \frac{l_2}{\mu_2 A_2} + \frac{l_3}{\mu_3 A_3} + \frac{l_4}{\mu_4 A_4}\right)$$

Met de definitie voor de reluctantie (3.11) wordt dit

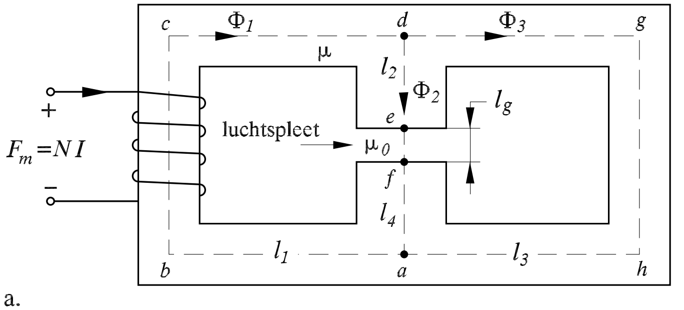
$$F_m = NI = \Phi\left(R_{m1} + R_{m2} + R_{m3} + R_{m4}\right)$$

Het is duidelijk dat de reluctanties in serie staan, zoals ook in figuur 3.4 in het elektrische analogon wordt getoond.

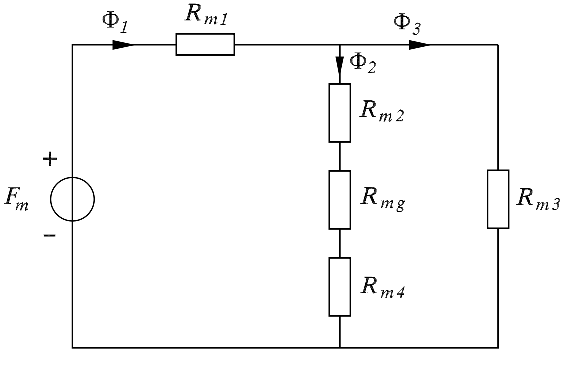
De parallelschakeling

Tot nu toe hebben we alleen gekeken naar magnetische circuits met één lus. In figuur 3.5 is een circuit geschetst met meer dan één lus. Hierin wordt de lengte van het stuk *abcd* aangeduid met l_1, de lengte van het stuk *de* met l_2, de lengte van het stuk *dgha* met l_3 en de lengte van het stuk *fa* met l_4. De grootte van de luchtspleet (Engels: gap) duiden we aan met l_g. We beschouwen dit circuit weer uitgaande van de wet van Ampère ((3.5)). De contour *abcdefa* levert

$$F_m = H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_g l_g + H_4 l_4$$



a.



b.

Figuur 3.5 Een magnetisch circuit met twee lussen met

$$H_1 = \frac{\Phi_1}{\mu A_1} \quad ; \quad H_2 = \frac{\Phi_2}{\mu A_2} \quad ; \quad H_g = \frac{\Phi_2}{\mu_0 A_g} \quad ; \quad H_4 = \frac{\Phi_2}{\mu A_4}$$

Met de definitie van reluctantie krijgen we de volgende uitdrukking, die ook geldig is voor de linker lus van het equivalente netwerk in figuur 3.5:

$$F_m = \Phi_1 R_{m1} + \Phi_2 \left(R_{m2} + R_{mg} + R_{m4}\right)$$

waarbij

$$R_{m1} = \frac{l_1}{\mu A_1} \quad ; \quad R_{m2} = \frac{l_2}{\mu A_2} \quad ; \quad R_{mg} = \frac{l_g}{\mu_0 A_g} \quad ; \quad R_{m4} = \frac{l_4}{\mu A_4}$$

Met (3.7) volgt voor het bovenste knooppunt in het netwerk in figuur 3.5:

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3$$

Voor de contour *defahgd* geldt:

$$0 = H_2 l_2 + H_g l_g + H_4 l_4 - H_3 l_3$$

Dit resulteert in:

$$0 = \Phi_2 \left(\frac{l_2}{\mu A_2} + \frac{l_g}{\mu_0 A_g} + \frac{l_4}{\mu A_4} \right) - \Phi_3 \left(\frac{l_3}{\mu A_3} \right)$$

Of

$$0 = \Phi_2 \left(R_{m2} + R_{mg} + R_{m4}\right) - \Phi_3 R_{m3}$$

met

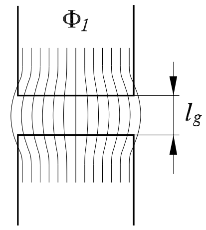
$$R_{m3} = \frac{l_3}{\mu A_3}$$

Deze vergelijkingen komen overeen met de rechter lus in het equivalente netwerk in figuur 3.5. Het is duidelijk dat als we eenmaal het equivalente netwerk hebben, de bekende regels van de netwerkanalyse toegepast mogen worden en dat R_{m3} parallel staat aan de serieschakeling van R_{m2}, R_{mg} en R_{m4}.

Enige opmerkingen

Bij het toepassen van elektrische netwerktheorie voor magnetische circuits hebben we (stilzwijgend) enkele veronderstellingen gedaan. De belangrijkste is daarbij dat de flux binnen het circuit blijft. Deze veronderstelling is redelijk zolang als de relatieve permeabiliteit van het circuitonderdeel μ_r veel groter is dan die van het omringende medium (lucht: $\mu_r = 1$).

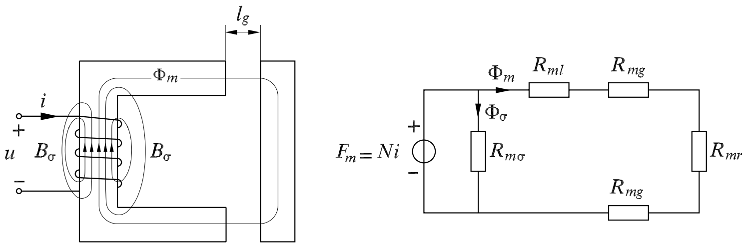
Bij bijvoorbeeld luchtspleten zoals in figuur 3.5 zien we dan ook dat het veld ”uitbloest”, zoals in figuur 3.6 is geschetst. Dit uitbloezen kunnen we



Figuur 3.6 Het uitbloezen van het veld in een luchtspleet

in rekening brengen door voor de circuitdoorsnede A ter plaatse een hogere waarde te nemen. Deze waarde moet groter zijn naarmate de luchtspleet groter is.

Een ander verschijnsel waarmee we te maken hebben is dat de magnetomotorische kracht niet alleen een flux veroorzaakt binnen het circuit, maar ook in de lucht daar om heen. Deze flux, die aangeduid wordt met de term lekflux (ook wel spreidingsflux of strooiflux genoemd), is in figuur 3.7 schematisch weergegeven (B_σ). De circuitflux, die ook wel aangeduid wordt met hoofdflux, is aangegeven met Φ_m (de index m komt van "main'). We kunnen deze lekflux (Φ_σ) in het equivalente elektrische netwerk in rekening brengen door een weerstand parallel te schakelen aan de spanningsbron die de magnetomotorische kracht voorstelt, zoals in figuur 3.7 is aangegeven.

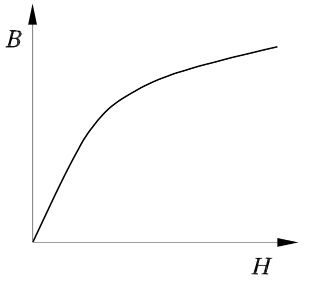


Figuur 3.7 Het in rekening brengen van de lekflux

In het equivalente netwerk stelt R_{ml} de reluctantie van het linkerdeel van het circuit voor, R_{mr} die van het rechter deel en R_{mg} die van een luchtspleet; $R_{m\sigma}$ is een reluctantie die het circuit voor de lekflux representeert. We veronderstellen hierbij dat het totale (in de ruimte verdeelde) lekveld vervangen mag worden door één circuitonderdeel dat "bekrachtigd" wordt door dezelfde magnetomotorische kracht als het hoofdcircuit.

3.5 Niet-lineaire magnetische circuits

De ontwikkeling van de berekeningsmethode voor magnetische circuits met behulp van analoge elektrische netwerken is gebaseerd op de veronderstelling dat de gebruikte materialen een constante permeabiliteit hebben. In de praktijk is μ echter niet constant en is het verband tussen de magnetische veldsterkte (H) en de magnetisch fluxdichtheid (B) niet eenvoudig aan te geven door als in (3.8) μ constant te veronderstellen.



Figuur 3.8 Een B-H-curve van een ferromagnetisch materiaal

Het verband tussen B en H (de B-H-curve) zal er bij ferromagnetische materialen bij benadering uitzien als in figuur 3.8 is geschetst. In deze figuur zien we dat voor hogere waarden van H, B niet meer evenredig met H toeneemt: er treedt verzadiging op. Bij ijzer heeft dit tot gevolg dat de magnetische fluxdichtheid in de praktijk niet veel groter wordt dan 1.3 T.

Het idee om elektrische netwerken te gebruiken voor berekeningen aan magnetische circuits blijft echter nog wel bruikbaar, mits we de constante reluctanties vervangen door reluctanties die afhangen van de magnetische veldsterkte H (of de magnetische fluxdichtheid B, die onderling afhankelijk zijn).

3.6 De opgewekte spanning

In paragraaf 3.3 hebben we gezien hoe we de flux in een magnetisch circuit ten gevolge van de stroom in het elektrische circuit kunnen berekenen. In deze paragraaf zullen we onderzoeken hoe grootheden in het elektrische circuit beïnvloed worden door de flux in het magnetische circuit. We zullen dat doen aan de hand van het in figuur 3.7 gegeven systeem.

De basis van de beschouwing is de tweede wet van Maxwell ((3.6)), die we tot nu toe nog niet hebben gebruikt:

$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{\tau}\, \mathrm{d}s = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\, \mathrm{d}A \qquad ((3.6))$$

We nemen hierbij voor de contour C de contour bestaande uit de hartlijn van de draad van de spoel beginnend bij de plus-klem, via de spoel naar de min-klem en de kortste weg van de min-klem naar de plus-klem.

Volg deze contour in figuur 3.7.

Als we veronderstellen dat de draad een (constante) soortelijke weerstand ρ heeft, kunnen we voor het linkerlid van de tweede wet van Maxwell schrijven:

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = \int_{\text{plus}-\text{klem}}^{\text{min}-\text{klem}} \vec{E}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s + \int_{\text{min}-\text{klem}}^{\text{plus}-\text{klem}} \vec{E}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = \int_{\text{plus}-\text{klem}}^{\text{min}-\text{klem}} \rho\vec{J}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s - u$$

Hierbij is u de spanning tussen de plus-klem en de min-klem. Als we verder veronderstellen dat de spoeldraad een constante doorsnede A_{Cu} en een totale lengte l_{Cu} heeft en dat de stroomdichtheid in de draad homogeen is, kunnen we dit verder uitwerken tot

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = \int_{\text{plus}-\text{klem}}^{\text{min}-\text{klem}} \rho\frac{i}{A_{Cu}}\mathrm{d}s - u = \frac{\rho l_{Cu}}{A_{Cu}}i - u = Ri - u \tag{3.13}$$

waarbij R de totale weerstand is van de spoel en i de stroom door de spoel.

In het rechterlid van de tweede wet van Maxwell staat de afgeleide van de met de contour C gekoppelde flux naar de tijd. Deze flux, die vaak de gekoppelde flux wordt genoemd, zullen we aanduiden met de letter ψ. Hiermee vinden we na substitutie van (3.13) in (3.6):

$$-\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = Ri - u$$

of in de bekende vorm

$$u = Ri + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \tag{3.14}$$

De hiervoor gegeven beschouwing geldt in feite voor een willekeurige spoel. We gaan nu meer specifiek in op het gegeven voorbeeld in figuur 3.7.

De met de spoel gekoppelde flux kunnen we vinden als we er mee rekenen dat de spoel, met N windingen, de hoofdflux Φ_m en de spreidingsflux Φ_σ N maal omvat. Voor de met de spoel gekoppelde flux, geldt dus:

$$\psi = N\left(\Phi_m + \Phi_\sigma\right)$$

Met het equivalente netwerk volgens figuur 3.7 kunnen we hiervoor ook schrijven:

$$\psi = N\left(\frac{Ni}{R_{ml}+R_{mr}+2R_{mg}} + \frac{Ni}{R_{m\sigma}}\right) = Li$$

waarbij de coëfficiënt van zelfinductie L gegeven wordt door:

$$L = N^2\left(\frac{1}{R_{ml}+R_{mr}+2R_{mg}} + \frac{1}{R_{m\sigma}}\right)$$

Hiermee gaat de spanningsbetrekking voor de spoel over in:

$$u = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{3.15}$$

Als niet-lineaire magnetische materialen in het magnetische circuit worden gebruikt heeft de coëfficiënt voor zelfinductie geen eenduidige betekenis meer. We gaan hier op deze problematiek niet verder in. We kunnen echter altijd op vergelijking (3.14), die geldig blijft, terugvallen.

In praktische situaties is het vaak handig om de coëfficiënt van zelfinductie nog te splitsen in een deel dat overeenkomt met de hoofdflux:

$$L_m = \frac{N^2}{R_{ml} + R_{mr} + 2R_{mg}}$$

en een deel dat overeenkomt met de lek-, strooi- of spreidingsflux:

$$L_\sigma = \frac{N^2}{R_{m\sigma}}$$

Als voorbeeld zullen we de uitdrukking voor L nog verder uitwerken. Hierbij veronderstellen we dat de doorsnede van het magnetische circuit constant is (A) en dat het uitbloeseffect verwaarloosd mag worden. De totale lengte van het linker circuitdeel is l_l en die van het rechterdeel is l_r. De permeabiliteit van het magnetische materiaal in het circuit is μ. Met de definitie van de reluctantie (3.11) volgt nu:

$$L = N^2 \left(\frac{A}{\frac{l_l + l_r}{\mu} + \frac{2l_g}{\mu_0}} + \frac{1}{R_{m\sigma}} \right)$$

Omdat de magnetische permeabiliteit van het magnetische materiaal vaak veel groter is dan die van lucht (μ_r is in de orde van grootte van 5000 bij ijzer), en de luchtspleet vaak relatief groot is, mag in die gevallen voor een eerste benadering de reluctantie van het ijzer worden verwaarloosd ($\mu_r = \infty$; $R_{ml} = R_{mr} = 0$). In dergelijke gevallen wordt meestal de (moeilijk te berekenen) lekflux ook verwaarloosd ($R_{m\sigma} = \infty$), zodat voor de zelfinductie L als eerste benadering geldt:

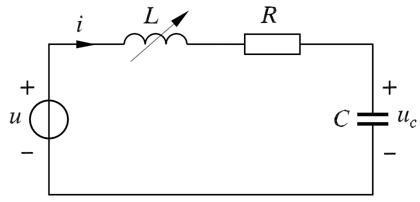
$$L = \frac{N^2 \mu_0 A}{2l_g}$$

De coëfficiënt van zelfinductie is dus in eerste benadering evenredig met de doorsnede van het circuit A en het kwadraat van het aantal windingen N en omgekeerd evenredig met de grootte van de luchtspleet l_g. Als het rechter deel van het magnetische circuit instelbaar (beweegbaar) is opgesteld, kan door variatie van l_g de zelfinductie aangepast worden.

Resonantie-transformator

Een mogelijke toepassing van het hier behandelde kunnen we vinden in de hoogspanningstechniek.

De meeste objecten die ter beproeving in een hoogspanningslaboratorium aangeboden worden zijn capacitief. De wisselspanning over een dergelijk object kan worden opgevoerd door in serie met het object een spoel aan te brengen, zoals is weergegeven in figuur 3.9. In de in deze figuur weergegeven testopstelling wordt het proefobject C gevoed vanuit de wisselspanningsbron u via de spoel met een regelbare inductiviteit L, zoals bij voorbeeld in figuur 3.7 is geschetst. Bij de berekening van de spanningsverhoging ten gevolge van de resonantie mogen we de totale circuitweerstand R niet verwaarlozen.



Figuur 3.9 De resonantie-transformator

Als we gebruik maken van de complexe rekenwijze kunnen we direct voor de spanning over C schrijven:

$$\frac{|\underline{U}_c|}{|\underline{U}|} = \left| \frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C} + \mathrm{j}\,\omega L + R} \right|$$

Als de kring goed is afgestemd (door variatie van de luchtspleet l_g in figuur 3.7), dat wil zeggen als

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L$$

is de spanning over het object maximaal. Voor de overzetverhouding geldt dan:

$$\frac{|\underline{U}_c|}{|\underline{U}|} = \frac{\omega L}{R}$$

Hoewel L een gewone spoel is, wordt hij in verband met het spanningsverhogende effect een transformator genoemd: resonantie-transformator. In de praktijk worden overzetverhoudingen van 40 tot 90 behaald.

3.7 De magnetische veldenergie

Soms zijn we geïnteresseerd in de hoeveelheid energie die in een magnetisch circuit is opgeslagen. Dat kan bijvoorbeeld het geval zijn als het magnetische circuit specifiek gebruikt wordt om energie in op te slaan. De kennis van de hoeveelheid opgeslagen energie kan echter ook gebruikt worden voor berekeningen van krachten bij elektromechanische omzetters, zoals we in hoofdstuk 5 zullen zien.

Om te kunnen berekenen hoeveel energie er in het magnetische circuit is opgeslagen gaan we uit van het via het elektrische circuit toegevoerde vermogen. Daarbij nemen we figuur 3.7 weer als voorbeeld.

Voor het via de klemmen toegevoerde vermogen geldt in het algemeen:

$$p = ui \tag{3.16}$$

Met de spanningsvergelijking voor de spoel (3.14) kunnen we hiervoor schrijven:

$$p = Ri^2 + i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \tag{3.17}$$

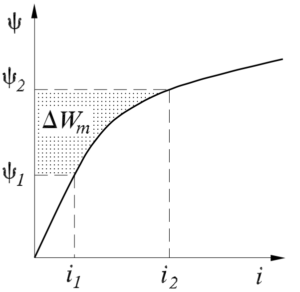
Hierin stelt de eerste term van het rechterlid het in de spoeldraad gedissipeerde vermogen voor. De tweede term geeft de toename van de hoeveelheid veldenergie per tijdseenheid:

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} = i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \tag{3.18}$$

Dit betekent dat we voor de verandering van de veldenergie voor het tijdsinterval van tijdstip t_1 tot het tijdstip t_2 kunnen schrijven:

$$\Delta W_m = \int_{t_1}^{t_2} i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\psi_1}^{\psi_2} i\,\mathrm{d}\,\psi \tag{3.19}$$

Om ons deze integraal grafisch voor te stellen gaan we uit van een niet-lineair magnetisch circuit, waarbij in het circuit materialen voorkomen met een karakteristiek van ongeveer dezelfde vorm als in figuur 3.8 is geschetst. Het resultaat hiervan is dat de relatie tussen de met de spoel gekoppelde flux ψ en de spoelstroom i een soortgelijke vorm heeft. Een voorbeeld hiervan is in figuur 3.10 gegeven. In deze figuur is bovendien het oppervlak dat overeenkomt met de laatste integraal in (3.19) gearceerd weergegeven.



Figuur 3.10 De energie-verandering in een magnetisch circuit

Als het verband tussen ψ en i lineair is (factor L), kunnen we (3.19) eenvoudig uitwerken:

$$\Delta W_m = \int_{\psi_1}^{\psi_2} \frac{\psi}{L}\,\mathrm{d}\,\psi = \frac{\psi_2^2 - \psi_1^2}{2\,L} \tag{3.20}$$

Of in de wellicht bekendere vorm:

$$\Delta W_m = \frac{1}{2}L\left(i_2^2 - i_1^2\right) \tag{3.21}$$

Als we als beginstroom $i_1 = 0$ kiezen en als eindstroom $i_2 = i$, vinden we voor de hoeveelheid opgeslagen energie:

$$W_m = \frac{1}{2}Li^2 \tag{3.22}$$

3.8 De hystereselus

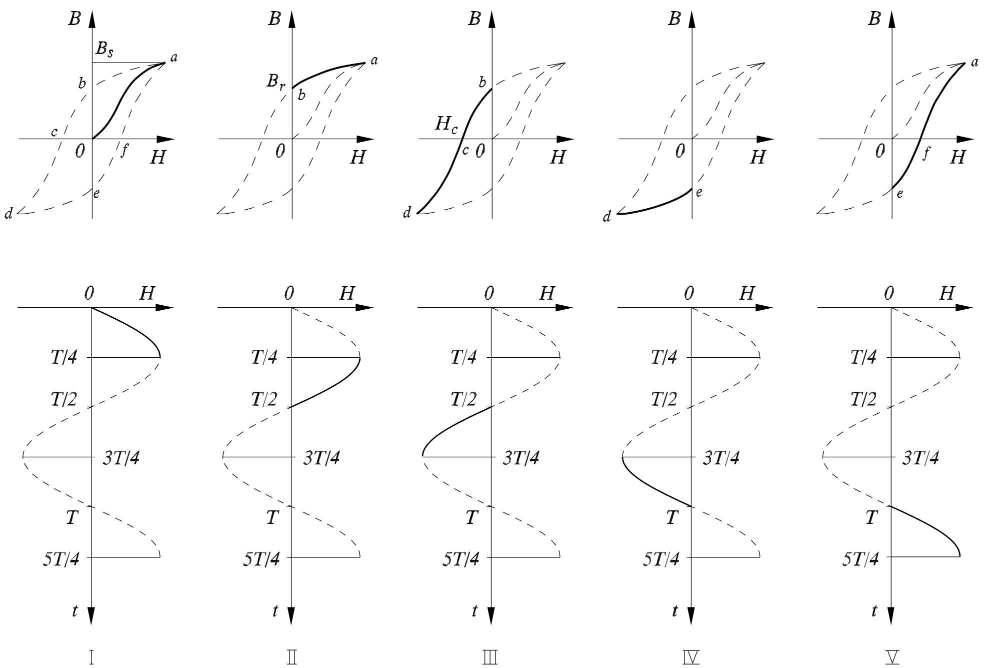
Ferromagnetische materialen worden gekarakteriseerd door een B-H-functie die zowel niet-lineair als niet-eenduidig is. Dit wordt in het algemeen een hysteresefunctie genoemd. Om dit verschijnsel uit te leggen beschouwen we een spoel met een ferromagnetische kern die nog maagdelijk is. We zullen dit doen aan de hand figuur 3.11. We veronderstellen dat de magnetomotorische kracht, en dus de magnetische veldsterkte H, sinusvormig varieert als functie van de tijd, zoals in de onderste helft van figuur 3.11 is aangegeven. We zullen de ontwikkeling van de hysteselus bespreken voor de volgende intervallen:

Interval I

Tussen $t=0$ en $t=T/4$: de magnetische veldsterkte H is positief en neemt toe. De fluxdichtheid B neemt toe langs de maagdelijke curve (Oa) tot de verzadigingswaarde B_s (zie figuur 3.11; verzadiging is in het Engels: saturation). Een verdere toename van H leidt niet tot een noemenswaardige toename van B.

Interval II

Tussen $t=T/4$ en $t=T/2$: de magnetische veldsterkte is positief, maar neemt af. De fluxdichtheid B neemt af langs het traject ab. Hierbij nemen we waar dat ab boven Oa ligt, zodat we voor dezelfde waarde van H een andere waarde van B vinden. In het punt b, waar $B=B_r$, is B ongelijk aan nul alhoewel H gelijk is aan nul op het tijdstip $t=T/2$. De waarde van B_r wordt de remanente fluxdichtheid genoemd. Als de spoel



Figuur 3.11 De ontwikkeling van de hystereselus

niet bekrachtigd is, blijft er dus wel een flux aanwezig.

Interval III

Tussen $t = T/2$ en $t = 3T/4$: de magnetische veldsterkte is negatief, en neemt in grootte toe. B neemt af tot nul in het punt c. De waarde van H waarbij de magnetische fluxdichtheid nul wordt, wordt de coërcitieve veldsterkte genoemd: H_c. Een verdere toename van de grootte van H leidt tot het omkeren van de richting van B tot het punt d, dat overeenkomt met het tijdstip $t = 3T/4$.

Interval IV

Tussen $t = 3T/4$ en $t = T$: de waarde van H is negatief, maar neemt toe. B is ook negatief en neemt ook toe van d naar e. We vinden nu weer de remanente fluxdichtheid voor $H = 0$ bij e.

Interval V

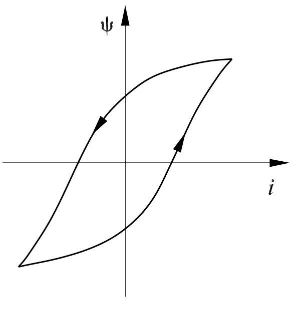
Tussen $t = T$ en $t = 5T/4$: H neemt toe vanaf nul en B is negatief, maar neemt toe tot het punt f, waar het materiaal ontmagnetiseerd wordt. Boven f neemt B weer toe tot het punt a.

Ten aanzien van figuur 3.11 moeten we opmerken dat de getekende lus voor de duidelijkheid erg breed is weergegeven: bij in de praktijk toegepaste ferromagnetische materialen is de breedte van de lus meestal relatief gering.

Als in een magnetisch circuit ferromagnetische materialen voorkomen zal het verband tussen de stroom door de bekrachtigingsspoel i en de met de spoel gekoppelde flux ψ ook een hysteresekarakter vertonen, zoals in figuur 3.12 is geschetst. Aan de hand van deze karakteristiek zullen we bekijken wat de invloed is van de hystereselus op het energetische gedrag van het magnetische circuit, met name voor het geval dat de bekrachtigingsstroom een wisselstroom is (overeenkomstig figuur 3.11).

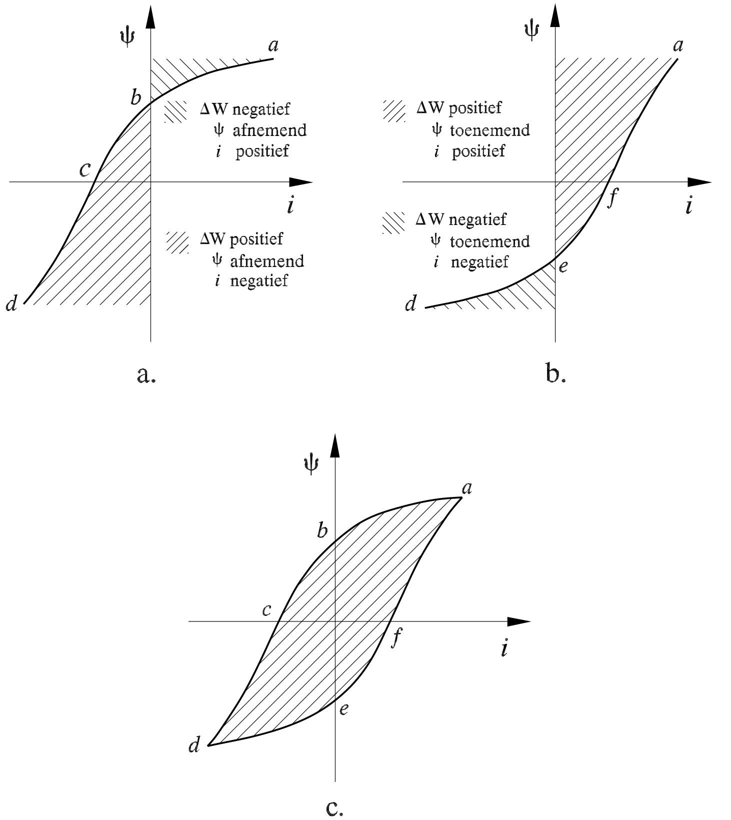
Met (3.19) kunnen we berekenen hoeveel energie we aan het magnetische circuit toevoeren:

$$\Delta W = \int_{\psi_1}^{\psi_2} i \, \mathrm{d}\psi \tag{3.23}$$



Figuur 3.12 Het verband tussen de stroom i door de bekrachtigingsspoel en de daarmee gekoppelde flux ψ

De uitwerking van deze integraal voor figuur 3.12 staat in figuur 3.13. Als we in deze figuur van het punt a naar het punt b gaan, is de toegevoerde energie negatief, omdat i positief is en ψ afneemt (zie figuur 3.13a). Als we doorgaan van b naar d via c, is de toegevoerde energie positief omdat i negatief is en ψ afneemt.



Figuur 3.13 Energiedissipatie ten gevolge van het doorlopen van de hystereselus

Het verloop langs de tweede helft van de lus wordt beschreven in figuur 3.13b. Als we de twee lushelften superponeren vinden we figuur 3.13.

Hieruit blijkt dat er tijdens het doorlopen van de lus netto energie wordt toegevoerd aan het magnetische circuit ter grootte van het oppervlak van de lus, terwijl de begin- en de eindtoestand gelijk zijn (punt a). Deze energie wordt gedissipeerd in het ferromagnetisch materiaal ten gevolge van het ommagnetiseren daarvan (het omklappen van de Weiss-gebiedjes).

Omdat de lus gedurende elke periode van de voedende wisselstroom wordt doorlopen is het gedissipeerde vermogen (netto toegevoerde energie per seconde) evenredig met de frequentie f van de wisselstroom:

$$P_h :: f$$

Voorts hangt de grootte van de lus af van de grootte van de gekoppelde (sinusvormig variërende) flux. Empirisch is vastgesteld dat het hystereseverliesvermogen voldoet aan:

$$P_h \; :: \; f\,\Psi^n \tag{3.24}$$

waarin de exponent n een waarde heeft tussen 1.5 en 2.5.

3.9 Wervelstroomverliezen

In paragraaf 3.8 hebben we gezien dat als de flux in het magnetische circuit periodiek (sinusvormig) varieert met de tijd, er in het materiaal van het circuit hystereseverliezen optreden. Er is echter nog een verliesmechanisme dat van belang is als de flux in het circuit tijdsafhankelijk is: de verliezen ten gevolge van wervelstromen.

Wervelstromen ontstaan bij een in de tijd variërende flux in het magnetische circuit als het materiaal van het magnetische circuit elektrisch geleidend is. Dit is een eigenschap waaraan we tot nu toe nog geen aandacht hebben besteed. Ten gevolge van de verandering van de magnetische fluxdichtheid ontstaat er in het materiaal een elektrisch veld (tweede wet van Maxwell), dat op zijn beurt weer stromen in het materiaal veroorzaakt. Deze stromen zullen zodanig zijn dat ze de oorzaak van hun ontstaan (de verandering van de fluxdichtheid) tegenwerken. Deze stromen veroorzaken verliezen in het magnetische materiaal (dissipatie).

Om de grootte van de wervelstromen te beperken wordt het magnetische circuit opgebouwd uit dunne blikken waarvan de lengterichting in de richting van de magnetische inductie ligt. Deze blikken zijn onderling gescheiden door zeer dunne lagen isolatiemateriaal. Als de wervelstromen relatief groot zijn zullen zij een duidelijke terugwerking hebben op de oorspronkelijke fluxdichtheid. Aan de hand van een eenvoudig rekenvoorbeeld zullen we zien dat de invloed van de wervelstromen beperkt kan worden door de blikdikte voldoende klein te kiezen.

We beschouwen daartoe het in figuur 3.14 getekende blik met dikte Δ. Dit blik is in de y- en in de z-richting oneindig uitgestrekt. De magnetische fluxdichtheid B staat in de y-richting en we veronderstellen dat B overal in vlakken loodrecht op de y-richting hetzelfde is (de terugwerking van de wervelstromen op B veronderstellen we verwaarloosbaar klein) en voldoet aan:

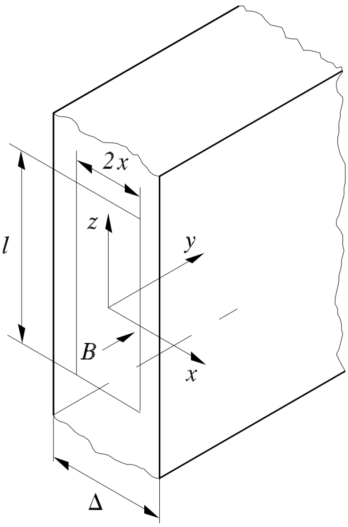
$$B = \hat{B}\;\cos\omega t \tag{3.25}$$

Door het getekende rechthoekje met als breedte $2x$ en als hoogte l gaat dan de flux

$$\Phi = 2xl\hat{B}\cos\omega t$$

Als we als contour voor de tweede wet van Maxwell ((3.6)) dit rechthoekje nemen, kunnen we hiervoor schrijven:

$$\oint_C \vec{E}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = 2\omega xl\hat{B}\sin\omega t$$



Figuur 3.14 De berekening van wervelstromen in een dun uitgestrekt blik

Met de soortelijke weerstand ρ vinden we dan een uitdrukking met de stroomdichtheid:

$$\oint_C \rho \vec{J} \cdot \vec{\tau}\, \mathrm{d}s = 2\omega x l \hat{B} \sin \omega t$$

Vervolgens veronderstellen we dat de hoogte veel groter is dan de breedte ($x \ll l$), zodat we de bijdrage van de boven- en van de onderkant van de rechthoek (de onderzochte contour) mogen verwaarlozen. Dit betekent dat we alleen te maken hebben met de stroomdichtheid in de z-richting:

$$\oint_C \rho \vec{J} \cdot \vec{\tau}\, \mathrm{d}s = -\rho l J_z(x) + \rho l J_z(-x) = 2\omega x l \hat{B} \sin \omega t$$

Omdat we het rechthoekje symmetrisch midden in het blik gekozen hebben, geldt op grond van de symmetrie $J_z(-x) = -J_z(x)$, zodat we vinden:

$$J_z(x) = -\frac{\omega x \hat{B}}{\rho} \sin \omega t \tag{3.26}$$

We zien hieruit dat de stroomdichtheid lineair met x toeneemt. Omdat x echter niet groter wordt dan de helft van de blikdikte Δ, kan de invloed van de wervelstromen dus kleiner gemaakt worden door de blikdikte te beperken.

Voor het lokaal instantaan gedissipeerde vermogen per volume-eenheid geldt nu:

$$\frac{p_w(x,t)}{V} = \rho J_z^2(x) = \rho \left(\frac{\omega x \hat{B}}{\rho} \sin \omega t \right)^2$$

Door dit instantane vermogen per volume-eenheid te middelen over de periodetijd van de wisselflux vinden we het lokaal gedissipeerde vermogen per volume-eenheid:

$$\frac{P_w(x)}{V} = \frac{1}{2\rho}\,(\omega x\hat{B})^2$$

Het gemiddelde vermogen per volume-eenheid in een blik vinden we door bovenstaande uitdrukking te middelen over de plaatdikte:

$$\frac{P_w}{V} = \frac{1}{\Delta}\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \frac{1}{2\rho}(\omega x\hat{B})^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{24\rho}(\omega\Delta\hat{B})^2 \tag{3.27}$$

We zien dus dat de wervelstroomverliezen bij de gemaakte veronderstellingen evenredig zijn met het kwadraat van de (hoek)frequentie, met het kwadraat van de amplitude van de magnetische inductie en met het kwadraat van de blikdikte en dat ze omgekeerd evenredig zijn met de soortelijke weerstand.

Het voorgaande geeft slechts een globale indruk van de invloed van wervelstromen; met de in paragraaf 3.2 beschreven vergelijkingen (de wetten van Maxwell, maar dan meestal in differentiaalvorm) kunnen we de wervelstromen veel preciezer berekenen. Dit zou voor dit college echter te ver voeren. Bovendien blijkt dat in de praktijk de blikdikte meestal voldoende klein is om aan de gemaakte veronderstellingen tegemoet te komen, zodat (3.27) toch een zeer bruikbare uitdrukking is.

Als we nu bedenken dat de magnetische inductie B evenredig is met de met de spoel gekoppelde flux ψ en dat de hoekfrequentie ω evenredig is met de frequentie f, kunnen we voor het geval dat (3.27) gebruikt mag worden de volgende evenredigheid noteren:

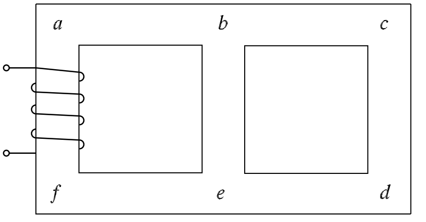
$$P_w \;::\; f^2\,\Psi^2 \tag{3.28}$$

Ten slotte is het nog nuttig om er bij stil te staan dat het ook mogelijk is om de wervelstroomverliezen te beperken door magnetische materialen toe te passen met een hoge soortelijke weerstand, zoals ferrieten. Deze materialen worden vaak gebruikt bij hoge frequenties.

3.10 Vraagstukken

De uitwerkingen van onderstaande vraagstukken staan op de internetsite http://www.vssd.nl/hlf/e004.htm.

Opgave 3.1



In het getekende magnetische circuit geldt:
$be = af = cd = ab = bc = de = ef = l_1$.
Alle delen van het circuit hebben de doorsnede A. De relatieve permeabiliteit is μ_r.
Om de tak fa zit een spoel met N windingen waardoor een gelijkstroom I loopt.

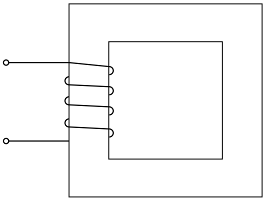
3.1a Teken het equivalente netwerk van dit circuit en geef aan hoe groot de reluctanties in het netwerk zijn.

3.1b Hoe groot is de coëfficiënt van zelfinductie van de spoel?

3.1c Als de fluxdichtheid B in tak fa 0.5 T is, hoe groot is dan B in de andere takken?

3.1d Stel: N = 400, A = 2.5 cm^2. De spoel heeft geen weerstand en wordt aangesloten op een wisselspanningsbron met een effectieve waarde van 100 V en een frequentie van 400 Hz.
Hoe groot is de topwaarde van de fluxdichtheid in tak a?

Opgave 3.2



Voor de figuur geldt:
aantal windingen: N = 50
lengte ijzercircuit: l_{ij} = 10 cm
doorsnede ijzer: A = 1 cm^2
relatieve permeabiliteit: μ_r =5000.

3.2a Bereken de coëfficiënt van zelfinductie van de spoel.

3.2b Hoeveel energie is er in de spoel opgeslagen als de inductie 1 T bedraagt?

3.2c Vervolgens wordt er een stukje ijzer ter lengte van een millimeter uit het circuit gezaagd. Hoe groot is nu de zelfinductie?

3.2d Met welke factor is de zelfinductie gereduceerd door deze ingreep?

3.2e Hoeveel energie is er nu in de spoel opgeslagen als de inductie 1 T bedraagt?

Opgave 3.3

Een spoel met toroïdale magnetische kern heeft de volgende kenmerken:
aantal windingen = 400 ; lengte ijzercircuit = 50 cm ;
doorsnede ijzer = 2 cm^2 ; relatieve permeabiliteit = 5000.
De spoel heeft een weerstand van 100 Ω. Er wordt aangenomen dat de fluxdichtheid in de spoel over de gehele doorsnede gelijk is.

De spoel wordt op een gelijkstroombron aangesloten. De stroom bedraagt 100 mA.

3.3a Hoe groot is de fluxdichtheid B in het ijzercircuit?

3.3b Hoe groot is de spanning over de spoel?

3.3c Hoe groot is de coëfficiënt van zelfinductie van de spoel?

3.3d Hoeveel energie is er in het magnetische veld opgeslagen?

Vervolgens wordt de spoel aangesloten op een wisselspanningsbron van 25 V en 50 Hz.

3.3e Hoe groot is de effectieve waarde van de stroom?

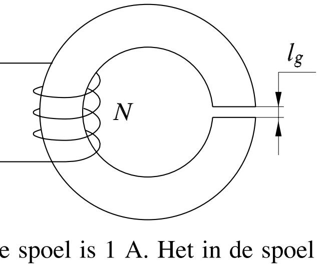
3.3f Hoe groot is de topwaarde van de fluxdichtheid in het circuit?

Opgave 3.4

Een spoel met toroïdale magnetische kern heeft de volgende kenmerken:
aantal windingen: $N = 100$
lengte ijzercircuit: $l_{ij} = 20$ cm
doorsnede ijzer: $A = 3$ cm^2
relatieve permeabiliteit: $\mu_r = 2000$.

3.4a Bereken de reluctantie R_m van de kern en de coëfficiënt van zelfinductie L van de spoel.

In de kern wordt een luchtspleet aangebracht met onbekende grootte l_g, die veel kleiner is dan l_{ij}. Om de grootte l_g te bepalen wordt de spoel aangesloten op een wisselspanningsbron. Deze wisselspanning heeft een (effectieve) waarde van 6 V en een frequentie van 50 Hz.



De gemeten waarde van de stroom door de spoel is 1 A. Het in de spoel gedissipeerde vermogen is 5 W.

3.4b Bereken hieruit de weerstand R en de coëfficiënt van zelfinductie L van de spoel.
Hint: ga ervan uit dat een spoel bestaat uit een serieschakeling van een weerstand en een inductiviteit.

3.4c Bereken hieruit de reluctantie R_m van het magnetische circuit.

3.4d Bereken de grootte van de luchtspleet l_g.

Opgave 3.5

Een spoel met toroïdale magnetische kern heeft de volgende kenmerken:
aantal windingen: $N = 200$
lengte ijzercircuit: $l_{ij} = 30$ cm
doorsnede ijzer: $A = 2$ cm^2
relatieve permeabiliteit: $\mu_r = 5000$.
De windingen worden verondersteld geen weerstand te hebben. Er wordt aangenomen dat de inductie in de spoel over de gehele doorsnede gelijk is. Er treedt geen verzadiging op.

De spoel wordt op een gelijkstroombron aangesloten.

3.5a Hoe groot moet de stroom door de spoel zijn om een inductie van 1 T in de kern te hebben?

Vervolgens wordt de spoel aangesloten op een stroombron die een sinusvormige wisselstroom afgeeft. De frequentie is 400 Hz.

3.5b Hoe groot is de effectieve waarde van de spanning over de spoel als de inductie in de kern een effectieve waarde van 1 T heeft?

3.5c Hoe groot is in dat geval de effectieve waarde van de stroom?

Vervolgens nemen we aan dat de wikkeling een weerstand heeft van 10 Ω.

3.5d Hoe groot is nu de spanning over de spoel in het geval van gelijkstroomvoeding met de bij a berekende stroom?

3.5e Hoe groot is nu de spanning over de spoel in het geval van wisselstroomvoeding met de bij c berekende stroom?

Opgave 3.6

Een spoel met 25 windingen is gewikkeld om een vierkante gelamelleerde ijzeren kern waarvoor geldt:
lengte ijzercircuit: $l_{ij} = 1{,}5$ m
doorsnede ijzercircuit: $A = 400$ cm^2
relatieve permeabiliteit: $\mu_r = 5000$.
De soortelijke weerstand van de kern is $0.13\ 10^{-6}$ Ωm
De plaatdikte van het kernmateriaal is 0.3 mm.
De spanning over de spoel is sinusvormig met een effectieve waarde van 220 V en heeft een frequentie van 50 Hz.

3.6a Hoe groot is de topwaarde van de fluxdichtheid B in de kern?

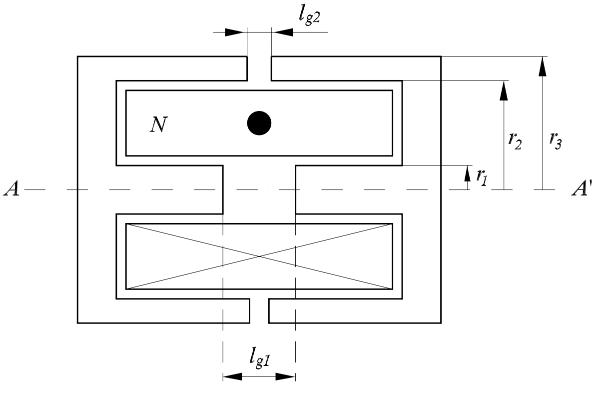
3.6b Hoe groot zijn de wervelstroomverliezen in de kern?

3.6c Hoe groot is de coëfficiënt van zelfinductie van deze spoel?

3.6d Wat is de maximale energie die in deze spoel wordt opgeslagen?

Opgave 3.7

Onderstaande figuur stelt de doorsnede van een zogenaamde potkern voor. Dit is een veel gebruikte kern voor kleine spoelen en transformatoren.



De potkern is rotatiesymmetrisch rond de lijn AA'.
Het ijzeren kerndeel heeft een oneindig grote permeabiliteit ($\mu_r = \infty$). Het aantal windingen van de spoel N is 1000.

De coëfficiënt van zelfinductie van de spoel kan gevarieerd worden door de afstand tussen de twee kernhelften te variëren. Hiermee worden de luchtspleten in het magnetische circuit ingesteld. Bij een bepaalde instelling geldt voor de luchtspleten: l_{g1} = 1 mm ; l_{g2} = 0.5 mm.
Voorts is voor de afmetingen gegeven:
$r_1 = 5$ mm ; $r_2 =$10 mm ; $r_3 = 12$ mm
Het veld in de luchtspleten beschouwen we als homogeen.
Gegeven: $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m

3.7a Teken het equivalente netwerk van dit circuit en geef aan hoe groot de reluctanties in het netwerk zijn.

3.7b Hoe groot is de coëfficiënt van zelfinductie van de spoel?

Opgave 3.8

Een spoel met een vierkante kern heeft de volgende kenmerken:
aantal windingen = 400 ; totale lengte ijzercircuit = 50 cm ;
doorsnede ijzer = 2 cm^2 ; relatieve permeabiliteit = 5000.
De spoel heeft een weerstand van 100 Ω. Er wordt aangenomen dat de fluxdichtheid in de kern over de gehele doorsnede gelijk is.

De spoel wordt aangesloten op een gelijkstroombron die 100 mA levert.

3.8a Hoe groot is de fluxdichtheid B in het ijzercircuit?

3.8b Hoe groot is de spanning over de spoel?

3.8c Hoe groot is de coëfficiënt van zelfinductie van de spoel?

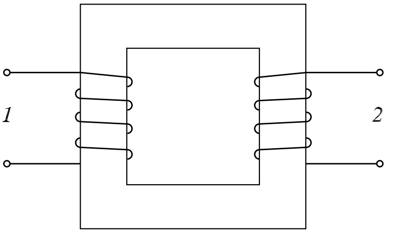
3.8d Hoeveel energie is er in het magnetische veld opgeslagen?

Vervolgens wordt de spoel aangesloten op een wisselspanningsbron van 25 V en 50 Hz.

3.8e Hoe groot is de effectieve waarde van de stroom?

3.8f Hoe groot is de topwaarde van de fluxdichtheid in het circuit?

Er wordt om hetzelfde ijzercircuit nog een spoel met 200 windingen gewikkeld. Beide spoelen worden zodanig in serie geschakeld dat ze het circuit in dezelfde richting magnetiseren. Ze worden aangesloten op een gelijkstroombron die 100 mA levert.

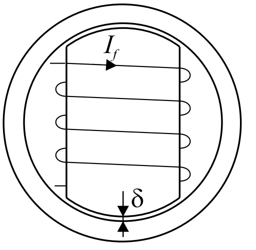


3.8g Teken het equivalente netwerk van dit circuit en geef aan hoe groot de reluctanties in het netwerk zijn.

3.8h Bereken de coëfficiënt van zelfinductie die tussen de aansluitingen wordt gemeten.

3.8i Nu worden de spoelen in serie geschakeld zodanig dat ze het circuit in tegengestelde richting magnetiseren. Bereken de coëfficiënt van zelfinductie die tussen de aansluitingen wordt gemeten.

Opgave 3.9



In hoofdstuk 7 zal de synchrone machine behandeld worden. Het is echter nu al mogelijk om eenvoudige berekeningen te doen aan het magnetische circuit van deze machine. De doorsnede van het magnetische circuit van een synchrone machine is schematisch weergegeven in nevenstaande figuur. Het buitenste deel stelt de ijzeren stator voor. Het binnenste deel stelt de ijzeren rotor voor.

Om de rotor ligt een zogenaamde bekrachtigingsspoel waarmee een magnetisch veld in de machine wordt opgewekt. Door deze bekrachtiging wordt de rotor als het ware een magneet met twee polen.

Deze polen zijn de twee plaatsen waar de luchtspleet gelijk is aan δ. De grootte van de luchtspleet δ boven de polen is 0.5 mm. Het oppervlak van een pool van de rotor A is 0.01 m^2. De bekrachtigingswikkeling heeft $N_f = 100$ windingen.

We gaan ervan uit dat

- de luchtspleet δ veel kleiner is dan de binnendiameter van de stator zodat het magnetisch veld op het rotoroppervlak gelijk verondersteld kan worden aan dat op het statoroppervlak,
- het ijzer van de rotor en de stator een oneindige permeabiliteit heeft ($\mu_r = \infty$),
- er in de lucht geen magnetisch veld is behalve in de luchtspleet boven de rotorpolen.

3.9a Teken het equivalente netwerk van dit circuit en geef aan hoe groot de reluctanties in het netwerk zijn.

3.9b Hoe groot moet de bekrachtigingsstroom I_f gemaakt worden om in de luchtspleet boven de polen een fluxdichtheid van 1 T te realiseren?

3.9c Hoe groot is de coëfficiënt van zelfinductie van de bekrachtingingswikkeling?

4 De transformator

4.1 Inleiding

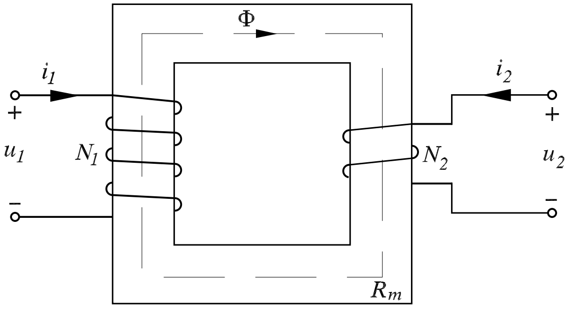
Zoals we in hoofdstuk 2 al hebben gezien spelen transformatoren een zeer belangrijke rol in elektriciteitsvoorzieningssystemen als toestellen om energie-overdracht tussen systemen met verschillende spanningsniveaus mogelijk te maken. Naast deze grote transformatoren (variërend in grootte van 10 kVA tot 1000 MVA) bestaan er nog vele kleinere typen. Hierbij kunnen we denken aan transformatoren in voedingen voor elektronische systemen (computers, audio- en videosystemen, enz.; variërend in grootte van 1 VA tot 1 kVA), in de voeding van de bel aan de voordeur (beltransformator; ongeveer 5 VA), in de voeding van elektrisch speelgoed, in accuoplaadapparaten, enz. Al deze transformatoren werken met de frequentie van het elektriciteitsnet (50 Hz in Europa). Er zijn echter ook transformatoren die werken bij andere frequenties, zoals bijvoorbeeld in audiosystemen en in vermogenselektronische omzetters, waaraan we in hoofdstuk 6 aandacht zullen besteden. De tot nu toe genoemde transformatoren hebben alle tot doel energie over te dragen. Er zijn echter ook zogenaamde meettransformatoren, die gebruikt worden om bijvoorbeeld spanningen en stromen in een elektrisch energiesysteem te meten.

Bij transformatoren speelt het magnetische circuit, waaraan we in hoofdstuk 3 aandacht hebben besteed, een belangrijke rol. Dit blijkt ook al uit de definitie van de transformator volgens NEN-norm 3184: toestel zonder bewegende delen, dat door elektromagnetische inductie een of meer veranderlijke stromen en spanningen bij gelijkblijvende frequentie omzet in een of meer andere veranderlijke stromen en spanningen.

We beginnen in dit hoofdstuk met de beschrijving van een ideale vorm van de transformator: de verliesvrije, spreidingsloze transformator. Hierna brengen we achtereenvolgens de spreidingsflux en de wikkelingsweerstand in rekening. We hebben dan een transformatorbeschrijving verkregen die overeenkomt met de uit de netwerktheorie bekende beschrijving van twee magnetisch gekoppelde spoelen. Voor deze beschrijving zullen we vervolgens enige voor de praktijk van belang zijnde vervangingsschema's afleiden. Daarna besteden we enige aandacht aan het magnetische circuit, waarbij de ijzerverliezen, de vorm van de magnetiseringsstroom en de uitvoeringsvorm van de transformator aan bod komen. In de daarop volgende paragraaf kijken we naar twee belangrijke aspecten van de transformator in normaal bedrijf: de spanningsdaling aan secundaire zijde ten gevolge van de belasting en het rendement. De bepaling van de parameters voor de berekening van beide komt in de paragraaf over de beproeving aan de orde. Het hoofdstuk wordt afgesloten met een korte vermelding van een bijzondere uitvoeringsvorm, de spaartransformator, en een summiere behandeling van de transformator in driefasige systemen.

4.2 De verliesvrije, spreidingsloze transformator

We gaan uit van de transformator zoals die geschetst is in figuur 4.1. Hierin zien we twee spoelen die magnetisch met elkaar gekoppeld zijn: de primaire spoel, waarvoor de index 1 gebruikt wordt, en de secundaire spoel, waarvoor de index 2 gebruikt wordt.



Figuur 4.1 Een schematische weergave van een transformator

Voor de flux in het magnetische circuit kunnen we met de in paragraaf 3.3 geleerde technieken schrijven:

$$\Phi = \frac{F_m}{R_m} \tag{4.1}$$

Hierin is R_m de reluctantie van het magnetische circuit en wordt de magnetomotorische kracht gegeven door:

$$F_m = N_1 i_1 + N_2 i_2 \tag{4.2}$$

Controleer de richtingen van stromen en flux in figuur 4.1.

Voor de met de spoelen gekoppelde fluxen geldt dan:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= N_1 \Phi = \frac{N_1^2}{R_m} i_1 + \frac{N_1 N_2}{R_m} i_2 \\ \psi_2 &= N_2 \Phi = \frac{N_2 N_1}{R_m} i_1 + \frac{N_2^2}{R_m} i_2 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Na invoering van de coëfficiënten van zelfinductie L_{1m} en L_{2m} en de coëfficiënt van wederzijdse inductie M volgens

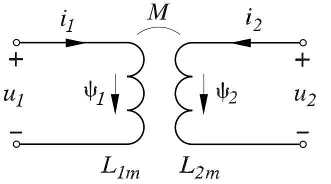
$$L_{1m} = \frac{N_1^2}{R_m} \quad ; \quad L_{2m} = \frac{N_2^2}{R_m} \quad ; \quad M = \frac{N_2 N_1}{R_m} \tag{4.4}$$

kunnen we deze uitdrukkingen schrijven als:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= L_{1m} i_1 + M i_2 \\ \psi_2 &= M i_1 + L_{2m} i_2 \end{aligned} \qquad (4.5)$$

Bij deze vergelijkingen behoort het stel gekoppelde spoelen (transformator) volgens figuur 4.2. Hierbij hebben we overigens (nog) geen rekening gehouden met de spreidingsflux (zie ook figuur 3.7).

Noem twee andere termen voor lekflux.



Figuur 4.2 Een vervangingsschema van de verliesvrije, spreidingsloze transformator

Als we de weerstanden van de spoelen (nog) verwaarlozen kunnen we voor de spanningen schrijven:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t} = N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t} = N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Voor de verhouding van de twee spoelspanningen geldt dus

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (4.7)$$

We zien hieraan dat de spanningsverhouding van een verliesvrije, spreidingsloze transformator overeenkomt met de in de netwerktheorie ingevoerde ideale transformator. Voor de stroomverhouding geldt bij een ideale transformator:

$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1}$$

Hieraan wordt voldaan als de magnetomotorische kracht F_m bij de verliesvrije, spreidingsloze transformator gelijk aan nul is (zie (4.2). Dit betekent dat de reluctantie van het magnetische circuit dan nul moet zijn.

Verklaar dit.

De ideale transformator uit de netwerktheorie komt dus overeen met een verliesvrije, spreidingsloze transformator waarbij de reluctantie van het magnetische circuit nul is.

Bij berekeningen aan circuits waarin een transformator voorkomt, is het vaak lastig dat de magnetomotorische kracht F_m van deze transformator veroorzaakt wordt door twee stromen in twee spoelen. Dit is zeker het geval als het magnetische circuit niet-lineair is en als de ijzerverliezen in rekening gebracht worden. Het is dan ook vaak handig om de transformatorvergelijkingen zodanig op te schrijven dat de magnetomotorische kracht slechts ontstaat door één stroom in één spoel. Om dit te bereiken voeren we de stroom

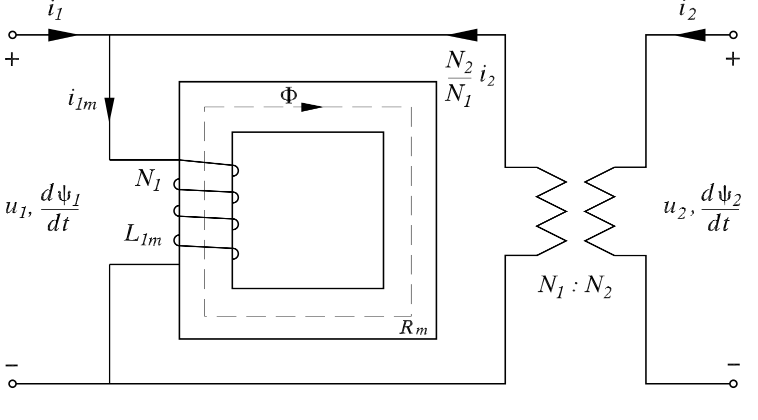
$$i_{1m} = i_1 + \frac{N_2}{N_1}\, i_2 \tag{4.8}$$

in, waarmee (4.2) overgaat in

$$F_m = N_1 i_{1m}$$

De stroom i_{1m} vervangt als het ware de stromen i_1 en i_2 als veroorzakers van de magnetomotorische kracht en wordt dan ook de magnetiseringsstroom genoemd. Deze stroom moet door een spoel gestuurd worden met hetzelfde aantal windingen als dat van de primaire spoel N_1).

Na deze voorbereiding kunnen we de verliesvrije, spreidingsloze transformator weergeven als de combinatie van een ideale transformator met wikkelverhouding N_1:N_2 en een spoel met N_1 windingen rondom een magnetisch circuit dat identiek is aan het magnetische circuit van de oorspronkelijke transformator. Dit is weergegeven in figuur 4.3.

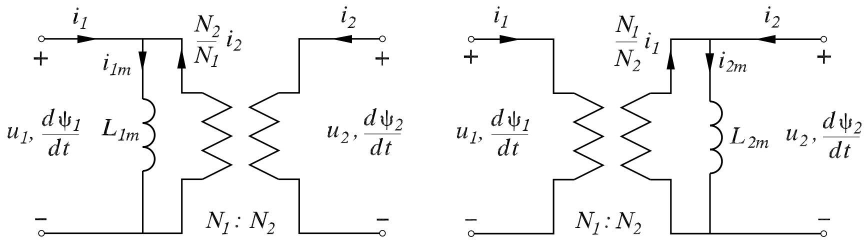


Figuur 4.3 De verliesvrije, spreidingsloze transformator als de combinatie van een spoel en een ideale transformator

Laat aan de hand van eerder gegeven uitdrukkingen zien dat figuur 4.3 correct is.

In figuur 4.4a is hiervoor een vervangingsschema gegeven. De spoel waardoor de magnetiseringsstroom loopt (L_{1m}), wordt de hoofd(veld)inductiviteit genoemd (hoofd is in het Engels main). We kunnen echter ook een magnetiseringsstroom definiëren die door een spoel aan de secundaire zijde gestuurd wordt. Dit leidt tot het schema volgens figuur 4.4b, waarin de hoofdinductiviteit L_{2m} rechts naast de ideale transformator is geplaatst.

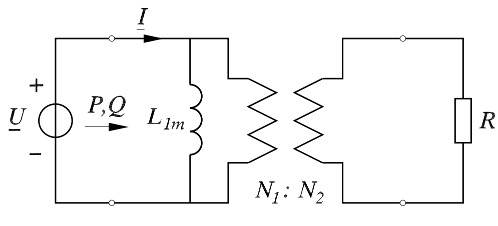
Leid het schema volgens figuur 4.4b zelf af, uitgaande van eerder gegeven uitdrukkingen.



Figuur 4.4 Vervangingsschema's van de verliesvrije, spreidingsloze transformator als de combinatie van een spoel en een ideale transformator

Sinusvormig verlopende grootheden

Zoals we in de inleiding al hebben opgemerkt, worden transformatoren vaak gebruikt voor het aanpassen van spanningen in of afkomstig van het elektriciteitsnet. Dit zijn spanningen met een vaste frequentie en een sinusvormig verloop als functie van de tijd, zoals we in hoofdstuk 2 al hebben gezien. Om het belang van een goed magnetisch circuit (lage reluctantie) te onderzoeken, zullen we dan ook een systeem beschouwen dat aan deze eigenschappen voldoet. Dit systeem is in figuur 4.5 geschetst. Hierin voedt de bron met een sinusvormige spanning met een complexe effectieve waarde $\underline{U}$, via een transformator, een belasting in de vorm van de weerstand R.



Figuur 4.5 Een sinusvormige bron belast met een weerstand via een transformator

Hierbij levert de bron de stroom

$$\underline{I} = \underline{U}\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega L_{1m}} + \frac{1}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R}\right)$$

het (werkzame) vermogen

$$P = \mathrm{Re}(\underline{U}\,\underline{I}^*) = \frac{|\underline{U}|^2}{\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 R}$$

en het blindvermogen

$$Q = \mathrm{Im}(\underline{U}\,\underline{I}^*) = \frac{|\underline{U}|^2}{\omega L_{1m}}$$

Leid de bovenstaande drie uitdrukkingen zelf af.

We zien in deze uitdrukkingen dat het door de bron te leveren blindvermogen omgekeerd evenredig is met de grootte van de hoofdinductiviteit, die op zijn beurt weer omgekeerd evenredig is met de reluctantie van het magnetische circuit.

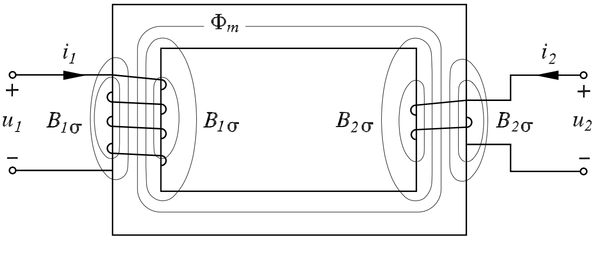
Ga dit na.

Om ervoor te zorgen dat de door de bron te leveren stroom zo klein mogelijk is (en daarmee de verliezen in de verbinding tussen de bron en de transformator, waarvan hier de weerstand verwaarloosd is), moeten we er dus voor zorgen dat de reluctantie van het magnetische circuit zo klein mogelijk is. Dit betekent weer dat we voor het magnetische circuit een materiaal moeten kiezen met een hoge permeabiliteit (μ_r): een ferromagnetisch materiaal.

In bovenstaande vergelijkingen herkennen we bovendien de uit de netwerktheorie bekende impedantietransformatie van de weerstand R van de secundaire zijde van de transformator naar de primaire zijde daarvan.

4.3 De spreidingsfluxen

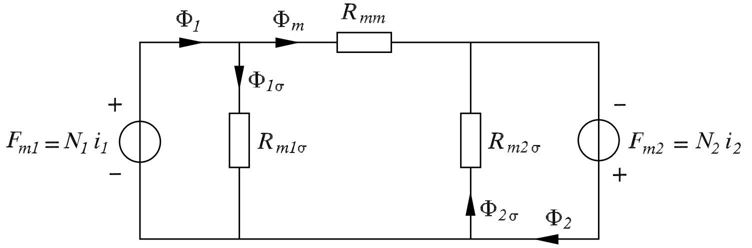
In paragraaf 3.3 hadden we al gezien dat de magnetomotorische kracht niet alleen een flux veroorzaakt in het magnetische circuit, maar ook in de lucht daar om heen. We zullen deze flux op dezelfde wijze in rekening brengen als we in figuur 3.7 hebben gedaan. We gaan daarbij weer uit van de schematische weergave van de transformator volgens figuur 4.1 en schetsen hierin enkele veldlijnen behorend bij de spreidingsflux. Dit is weergegeven in figuur 4.6.



Figuur 4.6 Een schematische weergave van de transformator met spreiding

Het equivalente elektrische netwerk voor het magnetische circuit is weergegeven in figuur 4.7. De index m bij Φ_m en de tweede m in de index van R_{mm} duiden hierbij op het hoofdcircuit (Engels: main). De letter σ in de indices heeft betrekking op de spreidingscircuits.

Bekijk nogmaals het laatste stukje van paragraaf 3.3 (de beschrijving bij figuur 3.7) en de eerste helft van paragraaf 3.6.



Figuur 4.7 Het equivalente elektrische netwerk voor het magnetische circuit

Voor de met de spoelen gekoppelde fluxen kunnen we nu schrijven:

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= N_1(\Phi_m + \Phi_{1\sigma}) = \frac{N_1^2}{R_{m1\sigma}} i_1 + \frac{N_1^2}{R_{mm}} i_1 + \frac{N_1 N_2}{R_{mm}} i_2 \\
\psi_2 &= N_2(\Phi_m + \Phi_{2\sigma}) = \frac{N_2 N_1}{R_{mm}} i_1 + \frac{N_2^2}{R_{mm}} i_2 + \frac{N_2^2}{R_{m2\sigma}} i_2
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

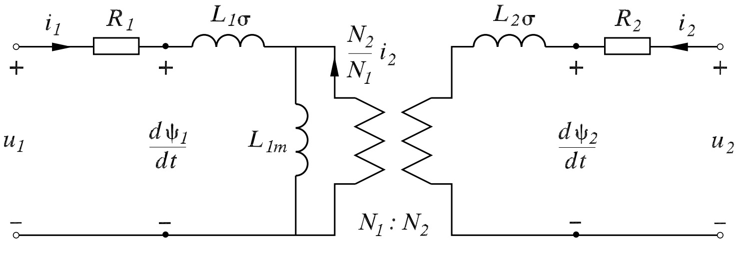
Na invoering van de coëfficiënten van zelfinductie behorend bij de spreidingsfluxen (de spreidingsinductiviteiten)

$$
L_{1\sigma} = \frac{N_1^2}{R_{m1\sigma}} \quad ; \quad L_{2\sigma} = \frac{N_2^2}{R_{m2\sigma}} \tag{4.10}
$$

kunnen we met de al eerder ingevoerde inductiecoëfficiënten ((4.4), waarbij R_m vervangen wordt door R_{mm}) voor de uitdrukkingen voor de gekoppelde fluxen schrijven:

$$
\begin{aligned}
\psi_1 &= L_{1\sigma} i_1 \; + \; L_{1m} i_1 \; + \; M i_2 \\
\psi_2 &= L_{2\sigma} i_2 \; + \; M i_1 \; + \; L_{2m} i_2
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

Vergelijk deze uitdrukking met uitdrukking (4.5).



Figuur 4.8 Een vervangingsschema van de transformator

Hieruit blijkt dat we de spreidingsfluxen als extra spoeltjes buiten de transformator in rekening kunnen brengen. Dit is in figuur 4.8 gedaan voor het vervangingsschema volgens figuur 4.4a. Hierbij zijn bovendien de weerstanden van de wikkelingen in rekening gebracht.

4.4 Vervangingsschema's

Het vervangingsschema dat we in de vorige paragraaf hebben afgeleid is slechts één van de vele mogelijke schema's. In deze paragraaf zullen we enkele van deze schema's bespreken.

Twee gekoppelde spoelen

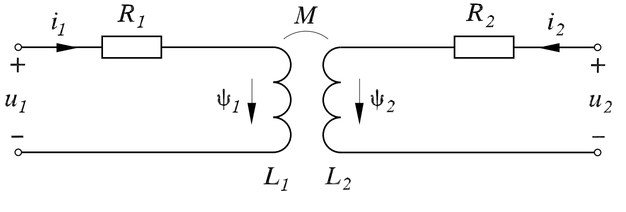
Het eenvoudigste schema ontstaat na invoering van de inductiecoëfficiënten

$$L_1 = L_{1\sigma} + L_{1m} \quad \text{en} \quad L_2 = L_{2\sigma} + L_{2m} \tag{4.12}$$

Hiermee kunnen we, gebruik makend van (4.11) de spanningsvergelijkingen van de transformator schrijven als:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1\, i_1 + \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t} = R_1\, i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= R_2\, i_2 + \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t} = R_2\, i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Het bij deze vergelijkingen behorende schema is weergegeven in figuur 4.9. We zien hier weer een algemeen schema voor twee gekoppelde spoelen.



Figuur 4.9 Twee gekoppelde spoelen

In de netwerktheorie is hiervoor de koppelfactor k gedefinieerd volgens

$$k = \sqrt{\frac{M^2}{L_1 L_2}}$$

Laat zien dat k gelijk is aan 1 voor de spreidingsloze transformator.

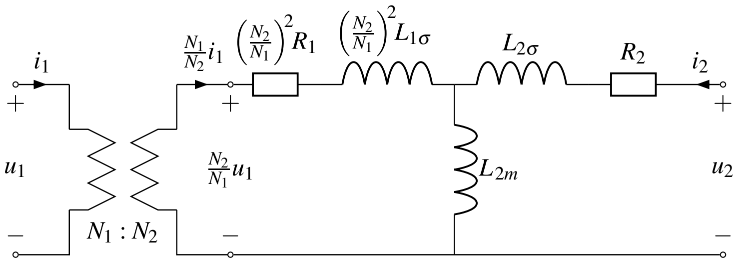
Verder hebben we in de netwerktheorie kennis gemaakt met de spreidingsfactor σ, waarvoor geldt:

$$\sigma = 1 - k^2 = 1 - \frac{M^2}{L_1 L_2} = 1 - \frac{M^2}{(L_{1m} + L_{1\sigma})\,(L_{2m} + L_{2\sigma})} \tag{4.14}$$

Op de betekenis van de spreidingsfactor zullen we in een volgend onderdeel van deze paragraaf terugkomen.

Verplaatsing van de ideale transformator naar de primaire zijde

Het is bij berekeningen aan transformatoren vaak lastig dat de primaire grootheden en de secundaire grootheden van verschillende grootteorde zijn. Dit is in het bijzonder vervelend, als we gebruik willen maken van fasordiagrammen. Dit eventuele probleem kunnen we bijvoorbeeld oplossen door de ideale transformator in het vervangingsschema van figuur 4.8 naar links te verschuiven. We moeten dan de primaire weerstand en de primaire inductiviteiten transformeren met de wikkelverhouding N_2/N_1 in het kwadraat. We krijgen dan het vervangingsschema volgens figuur 4.10, dat ook wel een T-vervangingsschema wordt genoemd.



Figuur 4.10 Het T-vervangingsschema van de transformator

Reductie van de primaire grootheden op de secundaire zijde

Om dit schema formeel af te leiden maken we gebruik van een algemene techniek: reductie van de primaire grootheden op de secundaire zijde. Daarbij voeren we eerst een nieuwe grootheid in voor de primaire spanning:

$$u_1' = a u_1 \tag{4.15}$$

waarbij a de (constante) reductiefactor is. Vervolgens voeren we een nieuwe grootheid in voor de primaire stroom, waarbij we als eis stellen dat de reductie vermogensinvariant is:

$$u_1' i_1' = u_1 i_1$$

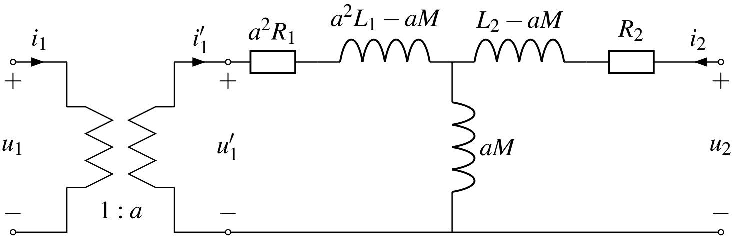
Hieruit volgt voor de nieuwe grootheid voor de primaire stroom:

$$i_1' = \frac{1}{a} i_1 \tag{4.16}$$

De vergelijkingen (4.13) gaan nu over in (de eerste vergelijking vermenigvuldigen we met a):

$$\begin{aligned} u_1' &= a^2 R_1 i_1' + a^2 L_1 \frac{\mathrm{d}i_1'}{\mathrm{d}t} + aM \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + aM \frac{\mathrm{d}i_1'}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{4.17}$$

Met deze vergelijkingen kunnen we het vervangingsschema in figuur 4.11 samenstellen.



Figuur 4.11 Vervangingsschema voor willekeurige reductiefactor a

Om vanuit figuur 4.11 het T-vervangingsschema volgens figuur 4.10 te krijgen, stellen we L_{2m} in figuur 4.10 gelijk aan aM in figuur 4.11. Hieruit volgt met (4.4) voor a:

$$a = \frac{L_{2m}}{M} = \frac{N_2}{N_1} \tag{4.18}$$

Om figuur 4.10 te krijgen, moeten we a blijkbaar gelijkstellen aan de wikkelverhouding van de transformator.

Met (4.15), (4.16) en (4.18) kunnen we (4.17) schrijven als

$$\begin{aligned} u_1 \frac{N_2}{N_1} &= \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 R_1 \frac{N_1}{N_2} i_1 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 L_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{N_1}{N_2} i_1\right) + L_{2m} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ u_2 &= R_2 i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_{2m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{N_1}{N_2} i_1\right) \end{aligned}$$

Met de uitdrukkingen voor L_1 en L_2 volgens (4.12) (waarbij we L_{1m} schrijven als $\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 L_{2m}$ volgens (4.4)) krijgen we dan

$$\begin{aligned} u_1 \frac{N_2}{N_1} &= \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 R_1 \frac{N_1}{N_2} i_1 + \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 L_{1\sigma} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{N_1}{N_2} i_1\right) + L_{2m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{N_1}{N_2} i_1 + i_2\right) \\ u_2 &= R_2 i_2 + L_{2\sigma} \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + L_{2m} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{N_1}{N_2} i_1 + i_2\right) \end{aligned}$$

wat overeenkomt met het T-vervangingsschema in figuur 4.10.

Op soortgelijke wijze hadden we de ideale transformator in figuur 4.8 natuurlijk ook naar rechts kunnen verplaatsen.

Het verplaatsen van de spreiding naar de secundaire zijde

Als we een transformator gaan belasten en we zijn geïnteresseerd in de secundaire stroom en de secundaire spanning, bekijken we de transformator als het ware vanaf de secundaire zijde. We willen dan een vervangingsschema hebben waarmee dat zo eenvoudig mogelijk kan. Om dit schema te vinden, passen we het schema in figuur 4.11 zodanig aan dat het aantal inductiviteiten in het vervangingsschema afneemt van drie naar twee. We kiezen hier $a^2L_1 - aM = 0$. Dit betekent voor a:

$$a = \frac{M}{L_1}$$

We zullen later overigens zien dat de reductiefactoren M/L_1 en N_2/N_1 in de praktijk vrijwel gelijk zijn.

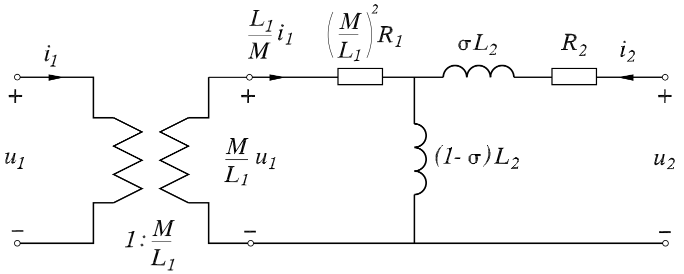
De vergelijkingen (4.17) worden nu (met gebruikmaking van (4.15) en (4.16))

$$\begin{aligned} u_1\frac{M}{L_1} &= \left(\frac{M}{L_1}\right)^2 R_1\frac{L_1}{M}i_1 + \frac{M^2}{L_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L_1}{M}i_1 + i_2\right) \\ u_2 &= R_2 i_2 + L_2\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{M^2}{L_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L_1}{M}i_1\right) \end{aligned}$$

Met de definitie voor de spreidingsfactor (4.14), kunnen we deze vergelijkingen omschrijven tot:

$$\begin{aligned} \frac{M}{L_1}u_1 &= \left(\frac{M}{L_1}\right)^2 R_1\frac{L_1}{M}i_1 + (1-\sigma)L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L_1}{M}i_1 + i_2\right) \\ u_2 &= R_2 i_2 + [\sigma L_2 + (1-\sigma)L_2]\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + (1-\sigma)L_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L_1}{M}i_1\right) \end{aligned}$$

Aan de hand van deze vergelijkingen kunnen we het schema volgens figuur 4.12 tekenen, waarin we zien dat alle spreiding in de transformator als het ware naar de secundaire zijde is verschoven en dat de spreiding verwerkt wordt in de inductiviteit σL_2. Dit verklaart de naam spreidingsfactor.



Figuur 4.12 Vervangingsschema waarbij de spreiding naar de secundaire zijde gebracht is

Op een soortgelijke wijze kunnen we de spreiding natuurlijk ook naar de primaire zijde verschuiven.

Laat dit zien.

Om te laten zien dat de factor M/L_1 vrijwel gelijk is aan N_2/N_1, werken we eerstgenoemde factor verder uit met (4.4) en (4.12):

$$\frac{M}{L_1} = \frac{M}{L_{1m} + L_{1\sigma}} = \frac{\frac{M}{L_{1m}}}{1 + \frac{L_{1\sigma}}{L_{1m}}} = \frac{\frac{N_2}{N_1}}{1 + \frac{L_{1\sigma}}{L_{1m}}}$$

Als hierbij gegeven wordt dat bij transformatoren de hoofdveldinductiviteit van de grootteorde van duizend maal de spreidingsinductiviteit is, zal het duidelijk zijn dat de relatieve afwijking zodanig klein is dat die buiten de normale meetbaarheid ligt, en dus gerust verwaarloosd mag worden. De ideale transformatoren in de figuren 4.10 en 4.12 mogen dus aan elkaar gelijk gesteld worden. Dit geldt ook voor de omgerekende weerstand voor de primaire zijde (R_1).

Vervolgens vergelijken we de inductiviteiten in de beide figuren. We beginnen met het uitwerken van de inductiviteit σL_2 in figuur 4.12 met behulp van (4.4), (4.12) en (4.14):

$$\begin{aligned}
\sigma L_2 &= \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1} = \frac{(L_{1m}+L_{1\sigma})(L_{2m}+L_{2\sigma})-M^2}{L_{1m}+L_{1\sigma}} \\
&= \frac{L_{2m}L_{1\sigma}+L_{1m}L_{2\sigma}+L_{1\sigma}L_{2\sigma}}{L_{1m}+L_{1\sigma}} \\
&= \frac{L_{1m}}{L_{1m}+L_{1\sigma}}\left(\frac{L_{2m}}{L_{1m}}L_{1\sigma}+L_{2\sigma}+\frac{L_{1\sigma}L_{2\sigma}}{L_{1m}}\right) \\
&= \frac{1}{1+\frac{L_{1\sigma}}{L_{1m}}}\left\{\frac{N_2^2}{N_1^2}L_{1\sigma}+\left(1+\frac{L_{1\sigma}}{L_{1m}}\right)L_{2\sigma}\right\} \approx \frac{N_2^2}{N_1^2}L_{1\sigma}+L_{2\sigma}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Deze inductiviteit blijkt dus goed overeen te komen met de som van de spreidingsinductiviteiten in figuur 4.10. Ten slotte werken we de inductiviteit $(1-\sigma)L_2$ in figuur 4.12 met behulp van (4.4), (4.12) en (4.14) verder uit:

$$(1-\sigma)L_2 = \frac{M^2}{L_1} = \frac{L_{1m}L_{2m}}{L_{1m}+L_{1\sigma}} = \frac{1}{1+\frac{L_{1\sigma}}{L_{1m}}}\,L_{2m} \approx L_{2m} \tag{4.20}$$

Deze inductiviteit komt dus in goede benadering overeen met de hoofdveldinductiviteit.

We kunnen nu constateren dat alle netwerkelementen in de figuren 4.10 en 4.12 voor een praktische transformator zeer sterk met elkaar overeenkomen.

Sinusvormig verlopende grootheden

Bij de volgende stap om te komen tot een vervangingsschema om de transformator op eenvoudige wijze vanaf de secundaire zijde te bekijken, beperken wij ons tot het (praktische) geval dat de transformator wordt gebruikt met sinusvormig verlopende grootheden met de frequentie van het elektriciteitsnet.

Vanaf hier zullen we verder in dit hoofdstuk de transformator alleen beschouwen voor dit geval (stationaire toestand). Hierdoor kunnen we werken met reactanties in plaats van inductiviteiten en fasoren in plaats van tijdsafhankelijke grootheden. Alleen bij de nadere beschouwing van de vorm magnetiseringsstroom (in paragraaf 4.5) zullen we hier even van afwijken.

Vervolgens maken we gebruik van het feit dat de weerstanden (zeer) veel kleiner zijn dan de reactanties overeenkomend met de hoofdinductiviteiten ($X_{1m} = \omega L_{1m}; X_{2m} = \omega L_{2m}$). De weerstanden zijn overigens bij grote transformatoren bovendien nog veel kleiner dan de spreidingsreactanties.

Waarom beschouwen we hier de situatie met sinusvormig verlopende grootheden met de frequentie van het elektriciteitsnet, en niet het eerder beschouwde algemene geval?

Door nu de "hoofdinductiviteit" in figuur 4.12 links naast de primaire weerstand aan te brengen en gebruik te maken van de benaderingen volgens (4.19) en (4.20), ontstaat het vervangingsschema volgens figuur 4.13.

We moeten bij het bovenstaande echter goed bedenken dat de bovenstaande afleiding alleen geldt voor het gedrag aan de klemmen van de normaal belaste transformator (black-box-gedrag). Als we bijvoorbeeld specifiek geïnteresseerd zijn in de magnetiseringsstroom bij kortsluiting aan de primaire klemmen, zal het schema in figuur 4.13 tot totaal verkeerde resultaten leiden.

Ga dit na.

De transformator gezien vanaf de secundaire zijde

Voor de laatste stap zullen we het vervangingsschema volgens figuur 4.13 als uitgangspunt nemen. Als we hierbij de hoofdveldreactantie X_{2m} naar de primaire zijde van de ideale transformator transformeren, vinden we de vergelijkingen:

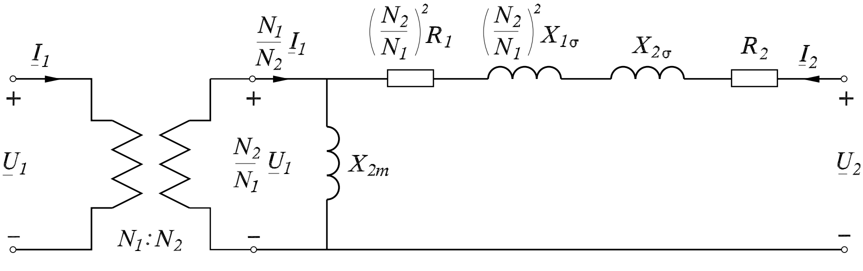
$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \mathrm{j}X_{1m}\left(\underline{I}_1 + \frac{N_2}{N_1}\underline{I}_2\right) \\ \underline{U}_2 &= \left(\frac{N_2^2}{N_1^2}R_1 + R_2\right)\underline{I}_2 + \mathrm{j}\left(\frac{N_2^2}{N_1^2}X_{1\sigma} + X_{2\sigma}\right)\underline{I}_2 + \frac{N_2}{N_1}\underline{U}_1 \end{aligned} \tag{4.21}$$

Controleer dit.

Nadat we de kortsluitweerstand en de kortsluitreactantie voor de secundaire zijde volgens

$$R_{2k} = \frac{N_2^2}{N_1^2}R_1 + R_2 \quad ; \quad X_{2k} = \frac{N_2^2}{N_1^2}X_{1\sigma} + X_{2\sigma} \tag{4.22}$$

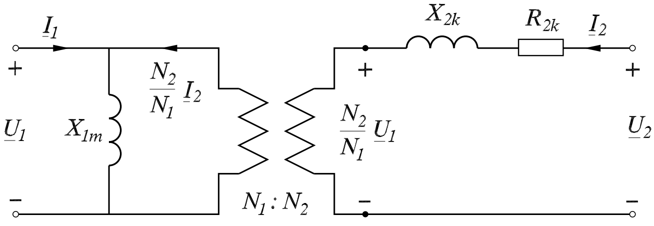
hebben ingevoerd, kunnen we hiermee het vervangingsschema volgens fi-



Figuur 4.13 Een benaderend vervangingsschema van de transformator

guur 4.14 afleiden.

Waar zouden de namen kortsluitweerstand en kortsluitreactantie vandaan komen?



Figuur 4.14 De transformator gezien vanaf de secundaire zijde

4.5 Het magnetische circuit

Tot nu toe hebben we nog geen aandacht besteed aan het magnetische circuit zelf. In deze paragraaf zullen we aandacht besteden aan de verliezen die daarin optreden, aan de vorm van de stroom die de magnetomotorische kracht veroorzaakt en aan de praktische uitvoering van het magnetische circuit.

De ijzerverliezen

In paragraaf 4.2 hebben we gezien dat het belangrijk is om het magnetische circuit uit te voeren met een ferromagnetisch materiaal (ijzer). In deze paragraaf hebben we verder gezien hoe we het magnetische circuit in het vervangingsschema kunnen afzonderen in de vorm van de hoofdinductiviteit L_{1m} (de reactantie X_{1m}) en in paragraaf 4.3 hebben we nog gezien hoe we de spreidingsinductiviteiten buiten het magnetische circuit in rekening kunnen brengen. Het een en ander heeft tot gevolg dat de hystereseverschijnselen (zie paragraaf 3.8) en de wervelstroomverschijnselen (zie paragraaf 3.9) dus bij de hoofdinductiviteit behoren.

Zoals we al gezien hebben, hebben zowel de hysterese- als de wervelstroomverschijnselen verliezen tot gevolg. Deze verliezen gezamenlijk worden de ijzerverliezen genoemd. In paragraaf 3.8 hebben we al een uitdrukking voor het hysterese-verliesvermogen gevonden ((3.24)), die we hier zullen herhalen:

$$P_h :: f\Psi^n$$

De exponent n heeft hierbij een waarde tussen 1.5 en 2.5. Voor het wervelstroomverliesvermogen hebben we in paragraaf 3.9 uitdrukking (3.28) gevonden:

$$P_w :: f^2\Psi^2$$

Als we voorts bedenken dat de spanning over de spoel die overeenkomt met de hoofdinductiviteit evenredig is met het product van flux en frequentie, kunnen we met deze uitdrukkingen voor de ijzerverliezen schrijven:

$$P_{Fe} = C_h f \frac{U^n}{f^n} + C_w U^2$$

Voor veel praktische situaties blijkt de benadering met n=2 redelijk te voldoen. We vinden hiermee voor de ijzerverliezen:

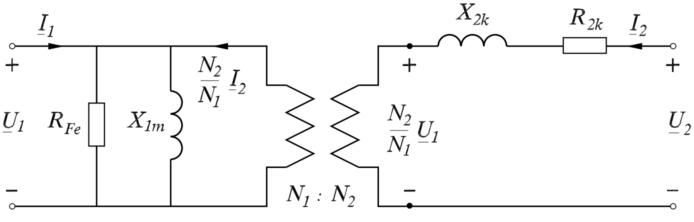
$$P_{Fe} = \left(\frac{C_h}{f} + C_w\right) U^2$$

Hoe zouden we de coëfficiënten C_h en C_w kunnen bepalen?

We beschouwen hier alleen de situatie dat de frequentie f constant is, zodat de ijzerverliezen evenredig zijn met de spanning over de hoofdinductiviteit in het kwadraat. Dit betekent dat we de ijzerverliezen in het vervangingsschema in rekening kunnen brengen met een weerstand parallel aan de hoofdinductiviteit:

$$P_{Fe} = \frac{U^2}{R_{Fe}} \tag{4.23}$$

Dit is als voorbeeld gedaan voor figuur 4.14 en weergegeven in figuur 4.15.



Figuur 4.15 De transformator met ijzerverliezen

De vorm van de magnetiseringsstroom

Tot nu toe zijn we voorbijgegaan aan het niet-lineaire karakter van het magnetische circuit, alhoewel we wel rekening hebben gehouden met de hystereseverliezen. Door het niet-lineaire karakter van het magnetische circuit is het niet mogelijk dat de magnetiseringsstroom en de hoofdflux (en dus de spanning over de hoofdinductiviteit) beide sinusvormig verlopen. We zullen dit in deze paragraaf nader bekijken.

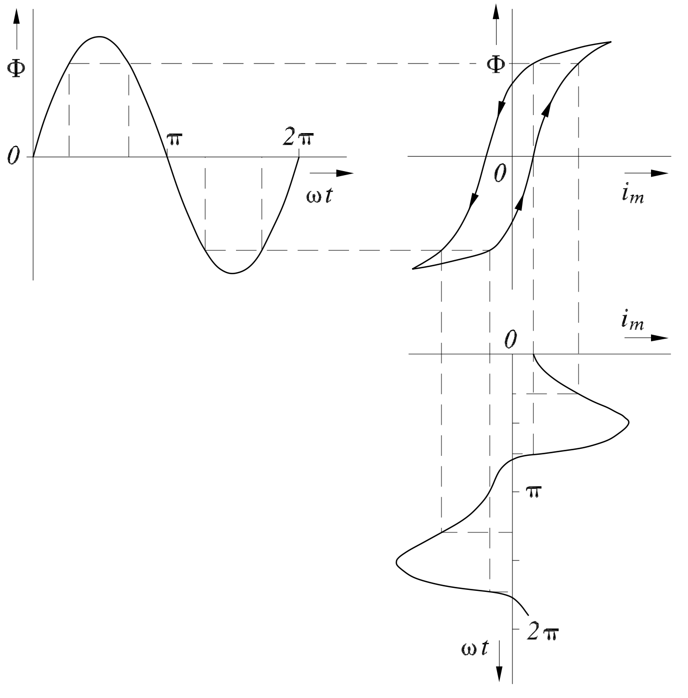
We gaan er daarbij vanuit dat de transformator aangesloten is op een wisselspanningsbron met een sinusvormig verloop van deze spanning en dat de transformator in nullast is, zodat de primaire stroom gelijk is aan de magnetiseringsstroom. Voorts gaan we er vanuit dat de spanning over de hoofdinductiviteit ook sinusvormig verloopt:

$$u = \hat{u}\cos(\omega t)$$

Waarom is dit een redelijke veronderstelling?

Dit heeft tot gevolg dat de flux in het magnetische circuit ook sinusvormig verloopt, zoals in figuur 4.16 is aangegeven:

$\Phi = \hat{\Phi} \sin(\omega t)$



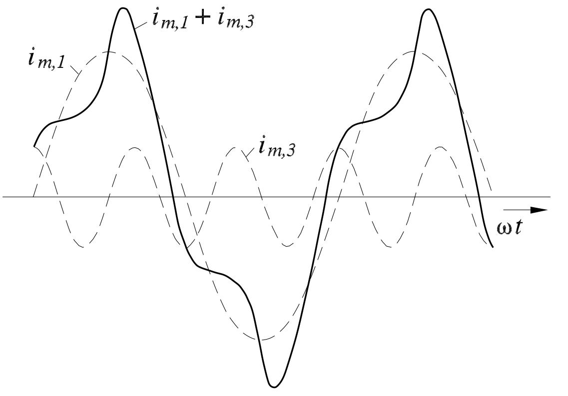
Figuur 4.16 De constructie van het verloop van de magnetiseringsstroom

In deze figuur is bovendien de hystereselus weergegeven die het magnetische circuit karakteriseert. Met behulp van deze hystereselus kunnen we het verloop van de magnetiseringsstroom construeren, zoals ook in figuur 4.16 is weergegeven. We zien dat het verloop van de stroom niet sinusvormig is, maar wel periodiek. We kunnen de magnetiseringsstroom dan ook als een fourierreeks schrijven:

$$i_m = \hat{i}_{m,1} \cos(\omega t + \alpha_1) + \hat{i}_{m,3} \cos(3\omega t + \alpha_3) + \, ... \tag{4.24}$$

Waarom bestaat de reeks alleen uit oneven harmonischen?

In de praktijk blijken alleen de eerste en de derde harmonische van belang te zijn. Deze zijn in figuur 4.17 geschetst. Bij de meeste beschouwingen van de transformator wordt ook de derde harmonische verwaarloosd. Het is echter wel belangrijk om van het bestaan ervan op de hoogte te zijn, omdat de derde harmonische in de stroom wel moet kunnen lopen. Als dat namelijk niet het geval is, is de spanning over de hoofdinductiviteit niet meer sinusvormig.



Figuur 4.17 De fourierontwikkeling van de magnetiseringsstroom

Leg dit uit.

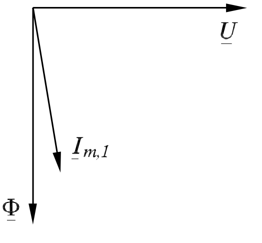
De situatie waarin de derde harmonische in de stroom niet kan bestaan, kan voorkomen in draaistroomsystemen. We komen hierop in paragraaf 4.9 nog terug.

Als we de magnetiseringsstroom en de flux in de figuren 4.16 en 4.17 nader bekijken, kunnen we opmerken dat de grondharmonische van de magnetiseringsstroom iets voorloopt op de flux. Dit is weergegeven in het fasordiagram in figuur 4.18. Het voorlopen van de stroom op de flux betekent dat de magnetiseringsspoel vermogen opneemt.

Controleer dit.

Dit vermogen kunnen we in verband brengen met het hystereseverlies.

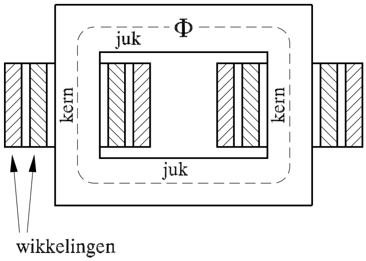
Leg dit uit.



Figuur 4.18 Fasordiagram van de magnetiseringsstroom

De uitvoeringsvorm

Twee belangrijke uitvoeringsvormen van transformatoren zijn de kerntransformator (figuur 4.19) en de manteltransformator (figuur 4.20). Het verschil tussen beide is dat de kerntransformator relatief meer ruimte heeft voor het koper dan voor het ijzer, terwijl dit bij de manteltransformator

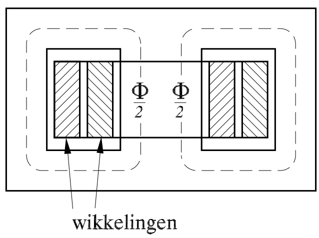


Figuur 4.19 De kerntransformator

juist omgekeerd is. In beide gevallen zullen de primaire en de secundaire wikkeling meestal over elkaar aangebracht worden om de koppeling tussen de wikkelingen zo goed mogelijk te maken.

Het magnetische circuit is natuurlijk steeds gelamelleerd uitgevoerd.

Waarom?



Figuur 4.20 De manteltransformator

4.6 De belaste transformator

Met het in figuur 4.15 gegeven schema kunnen we het gedrag van de transformator als energie-omzetter onderzoeken. We zullen hierbij kijken naar de verandering van de secundaire spanning ten gevolge van de belasting aan de secundaire zijde en naar het rendement van de transformator.

De secundaire spanning

We beschouwen nu een transformator waarvan de primaire zijde is aangesloten op een (ideale) spanningsbron en waarvan de secundaire zijde belast is met een impedantie $\underline{Z}_2$. Als impedantie zullen we de combinatie van een spoel en een weerstand nemen, omdat in energiesystemen de belasting meestal blindvermogen opneemt.

Als we naar figuur 4.15 kijken, kunnen we voor de secundaire spanning direct schrijven:

$$\underline{U}_2 = \frac{N_2}{N_1}\underline{U}_1 + (R_{2k} + \mathrm{j}X_{2k})\underline{I}_2 \tag{4.25}$$

Hiermee kunnen we de beschouwde situatie eenvoudig weergeven als in figuur 4.21. In deze figuur is te zien dat een dergelijke belasting een spanningsdaling tot gevolg heeft en dat de grootte van deze spanningsdaling bepaald wordt door de grootte van de kortsluitreactantie en de grootte van de kortsluitweerstand.

Hoe zouden we de spanningsdaling (gedeeltelijk) ongedaan kunnen maken?

Rendement

Het rendement van een transformator kunnen we definiëren als

$$\eta = \frac{\text{uitgaand vermogen}}{\text{ingaand vermogen}} = \frac{\text{ingaand vermogen} - \text{verliesvermogen}}{\text{ingaand vermogen}}$$

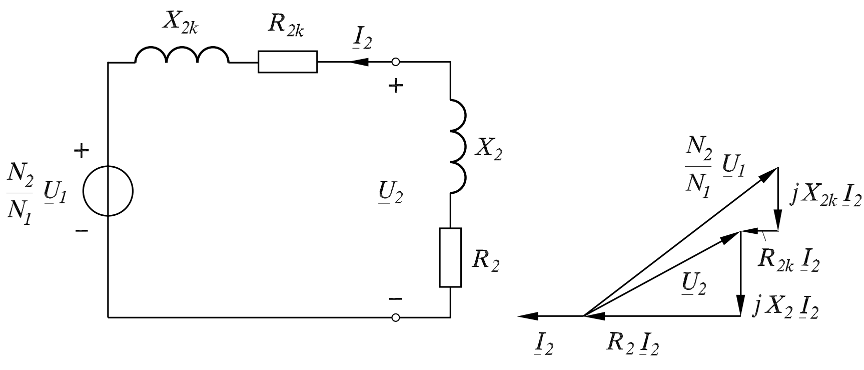
De verliezen in de transformator treden op in de wikkelingen, die meestal uit koperen geleiders bestaan, en in het magnetische circuit, dat meestal grotendeels uit ijzer bestaat. Men spreekt dan ook meestal van koperverliezen en ijzerverliezen. Deze twee kunnen we in het vervangingsschema volgens figuur 4.15 direct herkennen:

$$P_{Fe} = \frac{|\underline{U}_1|^2}{R_{Fe}} \quad ; \quad P_{Cu} = R_{2k}|\underline{I}_2|^2$$

We zien hieraan dat bij een in bedrijf zijnde (onder spanning staande) transformator in een energievoorzieningssysteem de ijzerverliezen continu optreden, zodat het belangrijk is om deze klein te houden. De koperverliezen treden echter alleen op als de transformator wordt belast (de koperverliezen ten gevolge van de magnetiseringsstroom mogen bij normaal bedrijf verwaarloosd worden).

4.7 De beproeving van de transformator

Voordat een transformator in gebruik genomen wordt, wil de gebruiker weten of de transformator aan de gestelde eisen voldoet. Om dit te controleren wordt de transformator aan een aantal proeven onderworpen.



Figuur 4.21 De secundaire zijde van de belaste transformator

Eén van de eisen zal zijn dat de transformator niet te warm wordt, omdat een (te) hoge temperatuur een negatieve invloed op de levensduur van de transformator heeft. Om de warmtehuishouding in een transformator te kunnen berekenen moeten we weten hoe groot de verliezen in de transformator zijn. Deze verliezen zouden we graag tijdens normale bedrijfsomstandigheden willen meten. Dit is echter niet praktisch omdat daarvoor soms zeer grote vermogens nodig zijn (bij de grootste transformatoren tot 1000 MVA).

We kunnen de verliezen echter met een veel kleiner beschikbaar vermogen bepalen door de koper- en de ijzerverliezen afzonderlijk te bepalen. Dit kunnen we doen met een tweetal standaardproeven: de nullast- en de kortsluitproef. Met deze proeven kunnen we bovendien de parameters zoals ze voorkomen in figuur 4.15 bepalen. Naast deze proeven, die we in deze paragraaf zullen bekijken, bestaan er nog een aantal standaardproeven.

Eén daarvan, die we als voorbeeld zullen noemen, is van belang voor transformatoren die in directe verbinding staan met hoogspanningsverbindingen. Hierin treden ten gevolge van blikseminslag of schakelhandelingen vaak zeer hoge spanningspieken op, waarbij de spanning extreem snel van waarde verandert. Bij dergelijke snelle veranderingen van de spanning speelt niet alleen de inductieve koppeling tussen windingen een rol, maar ook de capacitieve koppeling. Hierdoor zal de verdeling van de spanning over de windingen niet meer gelijkmatig zijn, waardoor de isolatie van bepaalde geleiders overbelast kan raken, of zelfs doorslaan. Het zal duidelijk zijn dat transformatoren zodanig ontworpen moeten zijn dat dit niet gebeurt. De afnemer van een transformator zal aan de fabrikant vragen dit te controleren met een proef waarbij een stootspanning op de transformator wordt aangebracht.

De nullastproef

Bij de nullastproef wordt één wikkeling (de primaire) aangesloten op een wisselspanningsbron, terwijl de andere open blijft (nullast). Daarbij wordt de spanning van de bron U_1, de door de bron geleverde stroom I_1, het door de bron geleverde vermogen P_1 en de spanning aan de secundaire zijde van de transformator U_2 gemeten. Als we naar figuur 4.15 kijken zien we meteen dat de kortsluitweerstand R_{2k} en de kortsluitreactantie X_{2k} bij deze proef geen rol spelen.

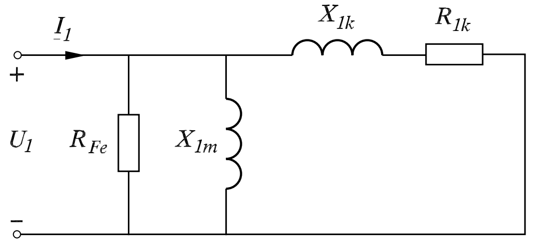
Laat zien hoe uit de gemeten grootheden de overzetverhouding, de hoofdreactantie en de ijzerverliesweerstand bepaald kunnen worden.

In principe behoort de nullastproef verricht te worden bij nominale spanning, dat wil zeggen bij de spanning die op de kenplaat van de transformator staat. Dit is meestal een zodanige waarde dat de transformator hierbij continu bedreven mag worden. Bij de nullastproef wordt met de vermogensmeting dan ook het ijzerverliesvermogen bij nominaal bedrijf bepaald.

De kortsluitproef

Bij de kortsluitproef wordt één wikkeling (de primaire) aangesloten op een wisselspanningsbron, terwijl de andere kortgesloten is. Daarbij wordt de spanning van de bron U_1, de door de bron geleverde stroom I_1 en het door de bron geleverde vermogen P_1 gemeten. Ook nu gaan we weer uit van figuur 4.15. Nu transformeren we echter de kortsluitweerstand R_{2k} en de kortsluitreactantie X_{2k} naar de primaire zijde. Hierbij ontstaat het schema volgens figuur 4.22, waarin de kortsluitweerstand R_{1k} en de kortsluitreactantie X_{1k} gegeven worden door:

$$R_{1k} = \frac{N_1^2}{N_2^2} R_{2k} = R_1 + \frac{N_1^2}{N_2^2} R_2 \quad ; \quad X_{1k} = \frac{N_1^2}{N_2^2} X_{2k} = X_{1\sigma} + \frac{N_1^2}{N_2^2} X_{2\sigma} \tag{4.26}$$



Figuur 4.22 De transformator in de kortsluitproef

Bij deze proef moeten we ons herinneren dat de hoofdinductiviteit veel groter is dan de spreidingsinductiviteiten. Voorts zijn de ijzerverliezen bij transformatoren in de praktijk zodanig klein dat de ijzerverliesweerstand veel groter is dan de overige impedanties in het netwerk en dus zeker te verwaarlozen is ten opzichte van de kortsluitweerstand R_{1k} en de kortsluitreactantie X_{1k}. In figuur 4.22 mogen we de impedanties R_{Fe} en X_{1m} dus verwaarlozen.

Laat zien hoe uit de gemeten grootheden de kortsluitweerstand R_{1k} en de kortsluitreactantie X_{1k} bepaald kunnen worden.

Met de kortsluitproef worden dus de zogenaamde koperverliezen van een transformator bepaald.

In principe behoort de kortsluitproef verricht te worden bij nominale stroom, dat wil zeggen bij de stroom die staat op de kenplaat van de transformator (het plaatje met de gegevens dat op de transformator bevestigd is). Dit is meestal een zodanige waarde dat de transformator hierbij continu bedreven mag worden. De spanning die we hierbij meten wordt de kortsluitspanning genoemd en staat in relatie tot de spanningsdaling in normaal bedrijf, waarbij de belasting aan de secundaire zijde van de transformator blindvermogen opneemt.

Waarom staat de kortsluitspanning in relatie tot de spanningsdaling in normaal bedrijf?

De kortsluitspanning van een transformator wordt door de fabrikant meestal gerelateerd aan de nominale spanning: hij vermeldt de relatieve kortsluitspanning die gelijk is aan de kortsluitspanning gedeeld door de nominale spanning. De relatieve kortsluitspanning wordt meestal gegeven in de vorm van een percentage en ligt bij transformatoren, afhankelijk van de toepassing, tussen ongeveer 4% en 20%.

Omdat we de ijzerverliezen bij de kortsluitproef mogen verwaarlozen, wordt met de vermogensmeting hierbij dan ook het koperverliesvermogen bij nominaal bedrijf bepaald.

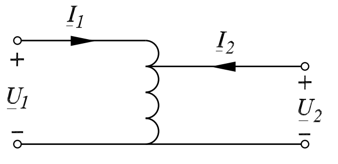
Waarom zijn de ijzerverliezen bij de kortsluitproef veel kleiner dan bij de nullastproef?

4.8 De spaartransformator

De spaar- of autotransformator is een bijzondere uitvoeringsvorm van een transformator waarbij de primaire en de secundaire wikkeling zijn gecombineerd tot één wikkeling zoals in figuur 4.23 schematisch is weergegeven. In deze figuur is de secundaire spanning lager dan de primaire. De besparing wordt gevonden in het feit dat de stroom in het gezamenlijke stuk wikkeling kleiner is dan de secundaire stroom (die in normale bedrijfssituaties groter is dan de primaire stroom), zodat voor dit stuk minder koper nodig is.

Leg dit uit; bedenk een nadeel van de spaartransformator.

Het gebruik van spaartransformatoren is over het algemeen alleen interessant als de overzetverhouding in de buurt van 1 ligt.



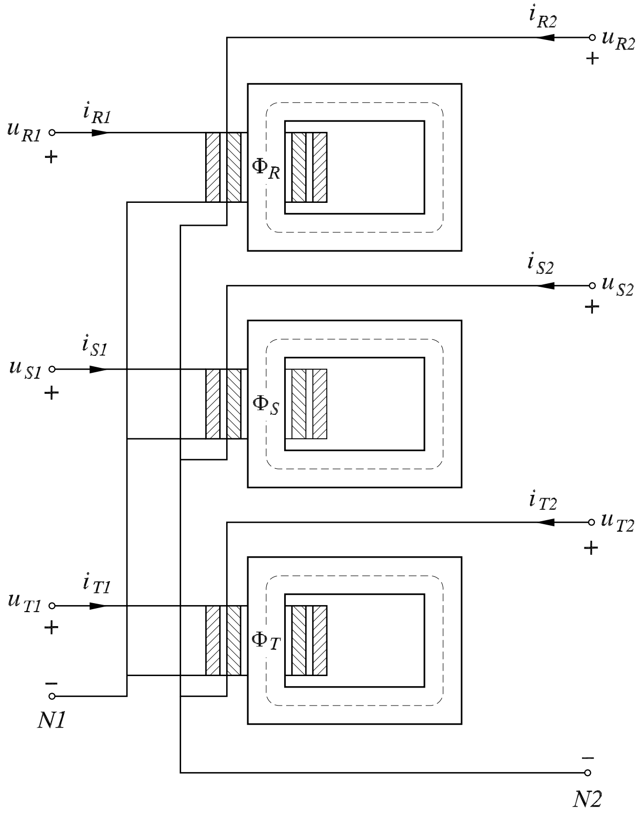
Figuur 4.23 De spaar- of autotransformator

4.9 Driefasentransformatoren

4.9.1 De uitvoering

Transformatoren bestemd voor een driefasig systeem kunnen op verschillende manieren worden opgebouwd of samengesteld. De eenvoudigste ”driefasentransformator” is een samenstel van drie ”gewone” (eenfasige) transformatoren. Dit is in figuur 4.24 schematisch aangegeven met drie kerntransformatoren. Hierbij is in verband met het vervolg van dit betoog bij elke transformator slechts één kern gebruikt.

We kunnen deze drie transformatoren samenbouwen tot één transformator met drie bewikkelde kernen en één gezamenlijke (wikkelingsloze) kern in het midden, zoals in de figuren 4.25a en 4.25b in bovenaanzicht is weergegeven. Als we nu bedenken dat de som van de fluxen in de rechter kernen van de transformatoren in figuur 4.24 gelijk is aan nul, kunnen we



Figuur 4.24 Drie eenfasetransformatoren gecombineerd tot een "driefasentransformator"

de kern in het midden van figuur 4.25b weglaten.

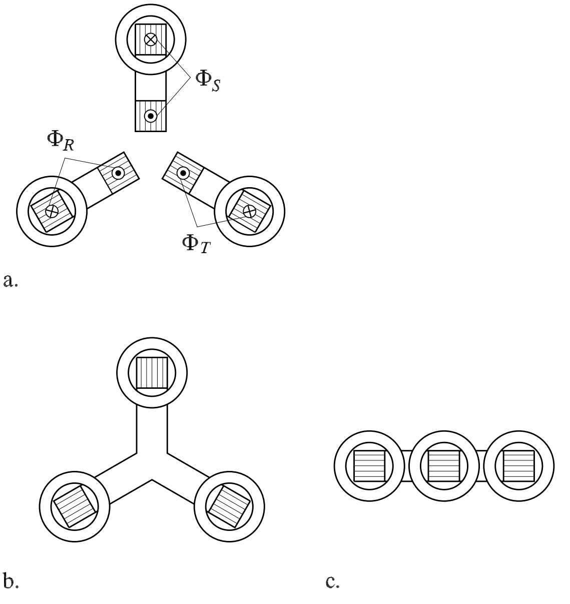
Waarom is de som van de fluxen gelijk aan nul?

De transformator volgens figuur 4.25b is echter moeilijk te maken en te transporteren. Daarom worden de drie kernen in één vlak geplaatst, zoals in figuur 4.25c is weergegeven. De zo ontstane driefasige kerntransformator is in figuur 4.26 in het gebruikelijke zijaanzicht afgebeeld.

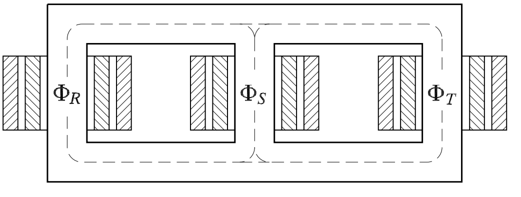
Een nadeel van deze transformator is dat hij magnetisch gezien niet symmetrisch is.

Waarom niet?

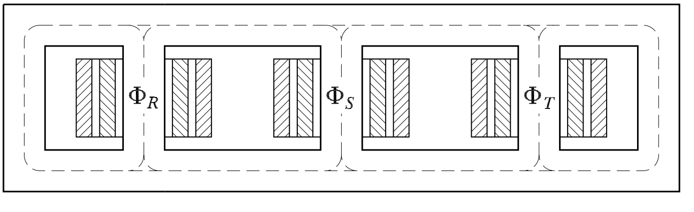
Dit probleem kunnen we voor een groot deel ondervangen door aan de buitenkant van de transformator nog twee jukdelen toe te voegen. We krijgen dan de zogenaamde vijfpootstransformator zoals die in figuur 4.27 is geschetst.



Figuur 4.25 Het ontstaan van de driefasige kerntransformator in bovenaanzicht



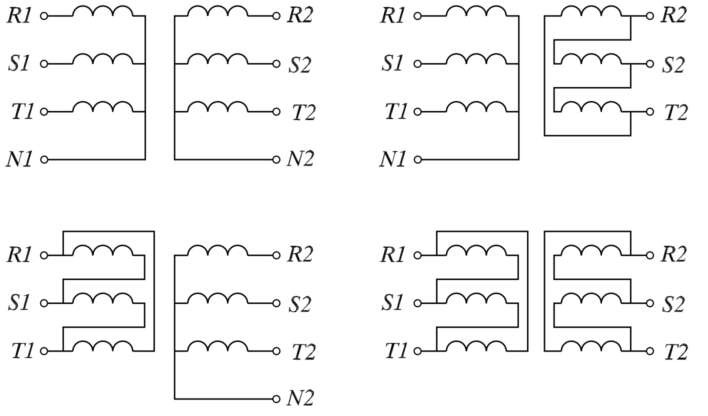
Figuur 4.26 De driefasige kerntransformator



Figuur 4.27 De vijfpootstransformator

4.9.2 Transformatorschakelingen

De primaire en de secundaire wikkelingen van een transformator kunnen op verschillende wijzen met elkaar verbonden worden. Tot nu toe hebben we gekeken naar het geval dat zowel de primaire als de secundaire zijde in ster geschakeld staan. We kunnen echter ook één van beide of beide in driehoek schakelen. Deze gevallen zijn in figuur 4.28 geschematiseerd.



Figuur 4.28 Mogelijke verbindingen bij een driefasentransformator

Bij de keuze van de verbindingen moet men onder andere rekening houden met de vraag of men een sterpunt (nulleider) beschikbaar wil hebben voor bijvoorbeeld eenfasige belastingen (zie ook paragraaf 2.8). Dit is met name van belang in laagspanningsinstallaties.

Verder heeft de sterschakeling het voordeel dat het sterpunt aan aarde gelegd kan worden, zodat de spanningen op de fasen niet te hoog (ten opzichte van aarde) kunnen worden in geval van storingen. Dit is van belang voor het isolatieniveau van transformatoren in transmissienetten met zeer hoge spanningen.

Bedenk wat er met de spanningen op de fasen ten opzichte van aarde gebeurt als het sterpunt niet geaard is en er treedt een eenfaseaardsluiting op (verbinding van die fase met aarde).

Een voordeel van het toepassen van een driehoeksschakeling aan de primaire zijde van een distributietransformator is dat een eenfasige belasting aan de in ster geschakelde secundaire zijde over twee fasen aan de primaire zijde wordt ”uitgesmeerd”.

Leg dit uit.

4.9.3 Hogere harmonischen

Een ander criterium bij de keuze van de transformatorschakeling is het eventueel aanwezig zijn van hogere harmonischen in de fasestromen, die kunnen ontstaan door niet-lineaire belastingen. Daarbij kunnen we bijvoorbeeld denken aan gelijkrichters, die we in hoofdstuk 6 zullen behandelen, maar ook aan de magnetiseringsstroom van de transformator zelf (zie paragraaf 4.5).

We zullen, als voorbeeld, de invloed van de derde harmonische in de stroom onderzoeken aan de hand van een driefasentransformator in nullast (zie ter verduidelijking bijvoorbeeld figuur 4.24). In dat geval is de fasestroom gelijk aan de magnetiseringsstroom. We kijken daarbij alleen naar de grondharmonische en de derde harmonische van deze stroom. Met (4.24) volgt voor de fasestromen:

$$
\begin{aligned}
i_R &= \hat{\imath}_1 \cos\{(\omega t + \alpha_1)\} + \hat{\imath}_3 \cos\{3(\omega t + \alpha_3)\} \\
i_S &= \hat{\imath}_1 \cos\left\{\left(\omega t + \alpha_1 - \tfrac{2}{3}\pi\right)\right\} + \hat{\imath}_3 \cos\left\{3\left(\omega t + \alpha_3 - \tfrac{2}{3}\pi\right)\right\} \\
&= \hat{\imath}_1 \cos\left\{\left(\omega t + \alpha_1 - \tfrac{2}{3}\pi\right)\right\} + \hat{\imath}_3 \cos\{3(\omega t + \alpha_3)\} \\
i_T &= \hat{\imath}_1 \cos\left\{\left(\omega t + \alpha_1 - \tfrac{4}{3}\pi\right)\right\} + \hat{\imath}_3 \cos\left\{3\left(\omega t + \alpha_3 - \tfrac{4}{3}\pi\right)\right\} \\
&= \hat{\imath}_1 \cos\left\{\left(\omega t + \alpha_1 - \tfrac{4}{3}\pi\right)\right\} + \hat{\imath}_3 \cos\{3(\omega t + \alpha_3)\}
\end{aligned}
$$

We zien hieraan dat de derde harmonischen in de drie fasen aan elkaar gelijk zijn en dat de som ervan dus niet gelijk aan nul is.

Welke andere harmonischen hebben deze eigenschap?

Als het sterpunt van de transformator niet is aangesloten, moet deze som echter gelijk aan nul zijn, zodat de derde harmonische in de magnetiseringsstroom niet kan bestaan. Dit heeft tot gevolg dat de spanning over de wikkeling (de fasespanning) vervormd is (zie ook paragraaf 4.5): er komt met name een derde harmonische in de spanning.

Leg uit waarom de fasespanning vervormd is.

Dit hoeft echter geen bezwaar te zijn omdat we in dat geval alleen geïnteresseerd zijn in de gekoppelde spanning en daarin komt deze derde harmonische niet voor.

Waarom kan er in een symmetrisch driefasig systeem geen derde harmonische in de gekoppelde spanningen voorkomen? (Hint: de som van de drie gekoppelde spanningen is steeds nul; dit is eigenlijk een te moeilijke vraag)

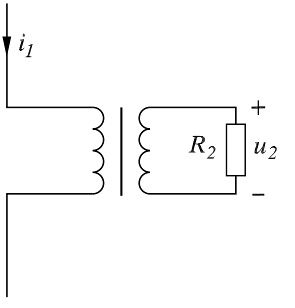
Als we een transformator gebruiken met ten minste één driehoekswikkeling, ondervinden we geen problemen met de magnetiseringsstroom omdat de derde harmonische in de driehoekswikkeling kan rondlopen.

Controleer dit (dit is eigenlijk een te moeilijke opdracht).

4.10 Vraagstukken

De uitwerkingen van onderstaande vraagstukken staan op de internetsite http://www.vssd.nl/hlf/e004.htm.

Opgave 4.1



Bij het practicum Elektrische Omzettingen wordt bij de nullastproef van de transformator gebruik gemaakt van een data-acquisitiesysteem. Om een galvanische scheiding tussen het meetcircuit en het data-acquisitiesysteem (AD-omzetter) tot stand te brengen wordt een zogenaamde stroomtransformator toegepast, zoals in nevenstaande figuur is aangegeven. Hierin is i_1 de te meten stroom en u_2 de spanning die toegevoerd wordt aan de AD-omzetter.
De transformator heeft een overzetverhouding van 1:1 en de spreidingsflux is verwaarloosbaar.
De maximale spanning die de AD-omzetter kan verwerken is 100 mV. De effectieve waarde van de grootste stroom die we willen meten bedraagt 0.5 A (bij 50 Hz).

4.1a Welke voorwaarde volgt hieruit voor R_2?

We werken verder met $R_2 = 0.1\ \Omega$. Het magnetische circuit van de transformator is een ringkern met een gemiddelde lengte van 7.48 cm en een oppervlakte van 0.227 cm^2. Voor de relatieve permeabiliteit van het magnetische materiaal geldt: $\mu_r = 10^5$. Voor de aantallen windingen schrijven we $N_1 = N_2$.

4.1b Geef een uitdrukking voor de coëfficiënt van zelfinductie van een spoel van de transformator als functie van het aantal windingen (vul zo veel mogelijk getallen in).

4.1c Het verschil tussen de primaire stroom en de secundaire stroom is de magnetiseringsstroom. De magnetiseringsstroom is dus een fout die optreedt in het meetcircuit. We willen dat de magnetiseringsstroom kleiner is dan 1 % van de stroom door R_2.
Welke voorwaarde volgt hieruit voor het aantal windingen?

4.1d Geef een uitdrukking voor de maximaal optredende fluxdichtheid B_{max} als functie van het aantal windingen (hint: de maximale uitgangsspanning is bekend omdat R_2 en de maximaal te meten stroom bekend zijn; vul zo veel mogelijk getallen in).

4.1e We willen dat het magnetische circuit niet in verzadiging gaat. Daartoe moet B steeds kleiner zijn dan 0.82 T.
Welke voorwaarde volgt hieruit voor het aantal windingen?

We werken verder met $N_1 = N_2 = 40$.
We hebben tot nu toe geen rekening gehouden met de weerstand van de wikkelingen.

4.1f Geef een vervangingsschema waarbij hiermee wel rekening gehouden wordt.

4.1g De lengte van de draad voor één spoel bedraagt in totaal 1.32 m. Deze draad heeft een diameter van 0.4 mm. De soortelijke weerstand van koper is: $\rho = 0.0175\ \Omega\text{mm}^2/\text{m}$.
Hoe groot is de weerstand van een spoel?

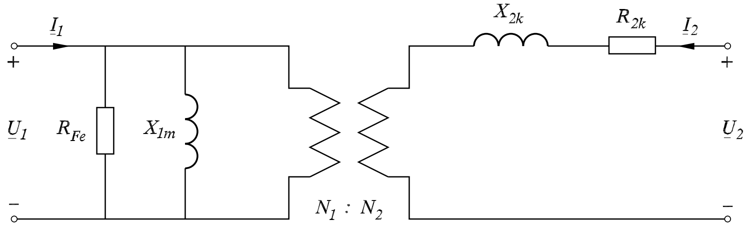
4.1h Hoe groot is de maximaal optredende fluxdichtheid B_{max}?

Opgave 4.2

Een eenfasetransformator met als primaire spanning 660 V en als secundaire spanning 220 V gaf de volgende resultaten bij de nullast- en de kortsluitproef:

	spanning	stroom	vermogen
nullastproef	660 V	7 A	600 W
kortsluitproef	52.8 V	90 A	720 W

De nullastproef is verricht bij nominale spanning; de kortsluitproef is verricht met de nominale stroom. De frequentie was hierbij 50 Hz.
Voor verdere berekeningen aan de transformator wordt gebruik gemaakt van onderstaand vervangingsschema.



4.2a Bereken de waarden van de weerstanden en de reactanties zoals die voorkomen in dit vervangingsschema. Hierbij mogen de gebruikelijke verwaarlozingen worden toegepast.

4.2b Hoe groot is het nominale schijnbare vermogen van de transformator?

4.2c Hoe groot is de relatieve kortsluitspanning?

4.2d De transformator wordt aan primaire zijde gevoed met de nominale spanning; hij wordt belast met een weerstand van 1 Ω.
Bereken de ijzer- en de koperverliezen. Hoe groot is het rendement van de transformator?

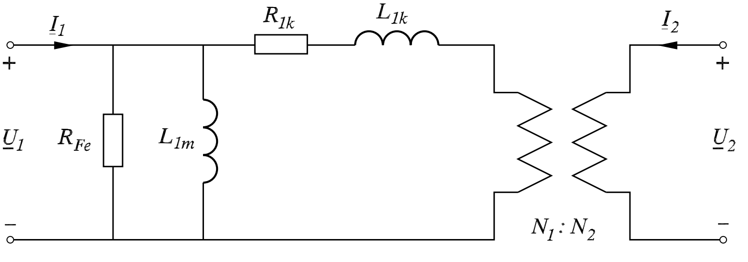
4.2e De transformator wordt nu belast met een spoel met een reactantie van 1 Ω.
Bereken de ijzer- en de koperverliezen. Hoe groot is het rendement van de transformator nu?

Opgave 4.3

Een eenfasetransformator gaf de volgende resultaten bij de nullast- en de kortsluitproef:

	spanning primair	stroom	vermogen	spanning secundair
nullastproef	10 kV	0.5 A	600 W	400 V
kortsluitproef	400 V	10 A	1600 W	-

De nullastproef is verricht bij nominale spanning; de kortsluitproef is verricht met de nominale stroom. De frequentie was hierbij 50 Hz.
Voor verdere berekeningen aan de transformator wordt gebruik gemaakt van onderstaand vervangingsschema.



4.3a Bereken de waarden van de weerstanden en de inductiviteiten zoals die voorkomen in dit vervangingsschema. Hierbij mogen de gebruikelijke verwaarlozingen worden toegepast.

4.3b Hoe groot is de stroom in de secundaire wikkeling bij de kortsluitproef?

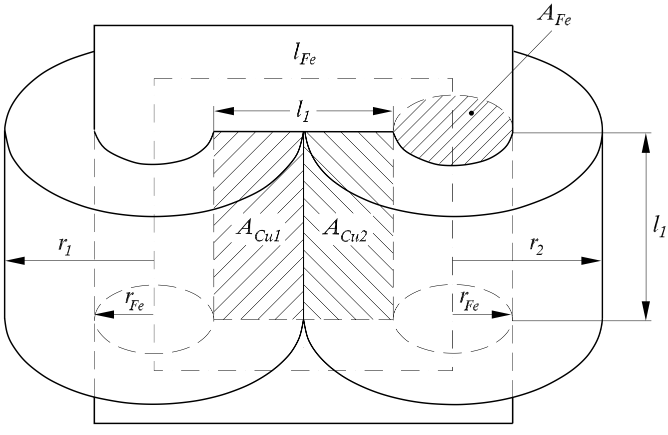
4.3c Hoe groot is de relatieve kortsluitspanning?

4.3d De transformator wordt aan primaire zijde gevoed met de nominale spanning (10 kV); hij wordt belast met een weerstand van 1.6 Ω.
Bereken de ijzer- en de koperverliezen. Hoe groot is het rendement van de transformator?

4.3e Vervolgens wordt de transformator belast met een weerstand en een spoel in serie. De weerstand bedraagt 0.136 Ω en de reactantie van de spoel is 1.56 Ω.
Bereken de ijzer- en de koperverliezen. Hoe groot is het rendement van de transformator nu?

Opgave 4.4

Het doel van deze opgave is om kennis te maken met enkele ontwerpaspecten van transformatoren.
Als voorbeeld nemen we een 100 kVA-transformator (50 Hz) met een primaire nominale spanning van 10 kV en een secundaire nominale spanning van 400 V. Deze transformator is in onderstaande figuur geschetst.



Het magnetische circuit is vierkant. De kernen en jukken van de transformator hebben een ronde doorsnede met oppervlak A_{Fe}.
Bij het ontwerp gaan we er van uit dat de transformator de ideale transformator zo goed benadert dat de strooifluxen, de weerstanden van de wikkelingen en de magnetiseringsstroom verwaarloosbaar zijn. In opgave g zullen we nagaan of dit voor de magnetiseringsstroom correct is.

4.4a Bereken de waarde van de overzetverhouding.

4.4b Bereken de nominale waarden van de primaire stroom $I_{1,nom}$ en de secundaire stroom $I_{2,nom}$.

We zullen in de opgaven c tot en met g de transformator doorrekenen voor twee waarden van N_1, namelijk voor $N_1 = 300$ en voor $N_1 = 3000$.

4.4c Bereken de effectieve waarde van de flux in het ijzercircuit bij nominale spanning $\Phi_{eff,nom}$. Hint: maak gebruik van de algemene spanningsvergelijking van een spoel waarbij de weerstand verwaarloosd wordt.

4.4d De maximale waarde van de fluxdichtheid in de kern wordt beperkt om de negatieve effecten van verzadiging en de ijzerverliezen te beperken.
Bereken de grootte van de doorsnede van het magnetisch circuit A_{Fe} voor het geval dat de effectieve waarde van de magnetische fluxdichtheid in het magnetisch circuit bij nominale spanning 1.3 T is.

4.4e Om de geleidingsverliezen in de transformator te beperken, wordt de effectieve waarde van de stroomdichtheid in de geleiders beperkt tot ongeveer 5 A/mm^2 bij nominale stroom. De spoelen als geheel bestaan slechts voor ongeveer 20 % uit geleidend materiaal, de rest van de ruimte is nodig voor isolatie en koeling. We zullen hier doen alsof de spoelen volledig uit koper bestaan en de ruimte voor isolatie en koeling in rekening brengen door verder te werken met een lagere stroomdichtheid. We nemen aan dat de effectieve waarde van de stroomdichtheid in de spoelen bij nominale stroom 1 A/mm^2 is. Bereken hieruit de oppervlakken van de spoelen $A_{Cu,1}$ en $A_{Cu,2}$.

4.4f Op grond van bovenstaande figuur nemen we het volgende aan.
- Voor de lengte van het ijzercircuit geldt $l_{Fe} = 4l_1 + 8r_{Fe}$.
- Voor het ijzervolume geldt $V_{Fe} = l_{Fe}A_{Fe}$.
- Voor het kopervolume van de spoelen geldt
  $V_{Cu} = l_1\pi(r_1^2 - r_{Fe}^2) + l_1\pi(r_2^2 - r_{Fe}^2)$.

Bereken het ijzervolume V_{Fe} en het volume van de spoelen V_{Cu}.

4.4g Bereken de grootte van de hoofdinductiviteit L_{1m} en de effectieve waarde van de magnetiseringsstroom bij nominale spanning $I_{1m,nom}$. Hierbij mag aangenomen worden dat voor de relatieve magnetische permeabiliteit van het magnetisch circuit geldt μ_{rFe}=5000.

Opgave 4.5

Een driefasige transformator in ster/ster-schakeling met als nominale primaire (lijn)spanning 10 kV en als nominale secundaire (lijn)spanning 380 V gaf de volgende resultaten bij de nullast- en de kortsluitproef:

	lijnspanning	stroom	driefasig vermogen
nullastproef	10 kV	1.5 A	5 kW
kortsluitproef	600 V	25 A	8 kW

4.5a Bereken de parameters zoals die voorkomen in het vervangingsschema volgens figuur 4.15. Hierbij mogen de gebruikelijke verwaarlozingen worden toegepast.

4.5b De transformator wordt belast met een in ster geschakelde ohms-inductieve belasting die bij een spanning van 380 V een vermogen van 100 kW opneemt. De arbeidsfactor (cos φ) is daarbij 0.8.
Geef de (complexe) waarde van de impedantie van de belasting.

4.5c Schets het fasordiagram voor één fase van de secundaire zijde van de transformator.

4.5d Bereken de secundaire spanning voor het geval dat de transformator gevoed wordt met 10 kV.

Opgave 4.6

Tijdens de kortsluitproef van een transformator loopt er een stroom van 100 A. Voor het meten van deze stroom is alleen een ampèremeter met een bereik van 5 A beschikbaar. Daarom wordt een zogenaamde stroomtransformator gebruikt. Dit is een transformator waarbij de te meten stroom door de primaire wikkeling loopt en waarbij de secundaire wikkeling wordt afgesloten (kortgesloten) door een ampèremeter.
We gebruiken hier een stroomtransformator met primair 4 windingen en secundair 80 windingen. De hoofdveldreactantie X_{1m} bedraagt 400 mΩ bij 50 Hz. De stroomtransformator heeft geen spreiding en geen weerstand. Hij heeft echter wel ijzerverliezen. Bij een meting is gebleken dat bij een primaire spanning van 1 V de ijzerverliezen 0.45 W bedragen. Als we aannemen dat de ijzerverliezen evenredig zijn met het kwadraat van de primaire spanning, kunnen we deze verliezen representeren met een parallelweerstand R_{Fe} aan primaire zijde. De ampèremeter heeft een weerstand van 0.5 Ω.
Geef de antwoorden op deze vraag in 4 significante cijfers en neem er in de berekening meer mee!! De gegeven getallen zijn exact.
Hint: gebruik een rekenmachine (of een programma zoals MATLAB) waarmee je complex kunt rekenen.

4.6a Welke waarde heeft de ijzerverlieswerstand van de stroomtransformator?

We werken verder met $R_{Fe} = 2\Omega$.

4.6b Hoe groot is de totale complexe impedantie die we tussen de primaire klemmen van de stroomtransformator waarnemen bij 50 Hz?

4.6c Wat is de effectieve waarde van de spanning over de primaire zijde van de stroomtransformator?

4.6d Hoe groot zijn de ijzerverliezen in de stroomtransformator?

4.6e Hoe groot is de stroom door de meter?

4.6f Welke waarde moet de doorsnede van de kern minimaal hebben om de maximale waarde van de fluxdichtheid in de kern van de stroomtransformator in dit geval te beperken tot 1 T?

Ten gevolge van een slechte verbinding schiet de ampèremeter los van de secundaire zijde van de stroomtransformator. We veronderstellen dat de waarde van de te meten stroom 100 A blijft vanwege de relatief grote impedantie van de transformator waarop de kortsluitproef gedaan wordt.

4.6g Hoe groot is nu de totale complexe impedantie die we tussen de primaire klemmen van de stroomtransformator waarnemen?

4.6h Wat is de effectieve waarde van de spanning over de primaire zijde?

4.6i Hoe groot zijn de ijzerverliezen?

4.6j Hoe groot is de spanning aan secundaire zijde?

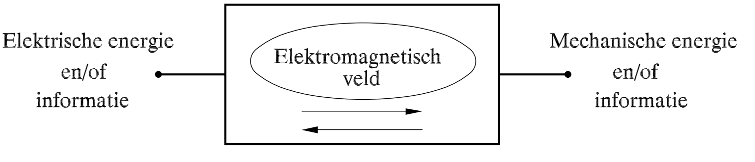
4.6k Hoe groot zou de fluxdichtheid in de kern van de stroomtransformator worden als deze kern niet zou verzadigen en de in opgave f berekende doorsnede zou hebben?

5 Inleiding elektromechanica

5.1 Inleiding

Elektromechanische omzetters worden gebruikt om elektrische energie om te zetten in mechanische energie en omgekeerd. Bij een elektrisch energiesysteem wordt de elektriciteit meestal opgewekt door met behulp van een generator mechanische energie om te zetten in elektrische energie; als men de beschikking heeft over elektriciteit kan men met een motor de elektrische energie omzetten in mechanische energie. Bij energiesystemen is de mechanische zijde meestal aanwijsbaar in de vorm van een draaiende as.

Elektromechanische omzetters worden echter niet alleen gebruikt voor energie-omzettingen, maar ook voor informatieverwerking (zie ook figuur 5.1). Hierbij wordt voor de omzetter van mechanische informatie in elektrische informatie vaak de term sensor en voor de omzetter van elektrische informatie in mechanische vaak de term actuator gebruikt. We moeten hierbij overigens opmerken dat de scheiding tussen informatie en energie niet hard is: voor de verwerking van informatie is ook energie nodig. Als voorbeelden kunnen we de microfoon en de luidspreker in gedachten houden.



Figuur 5.1 Een elektromechanische omzetter

De door elektromechanische omzetters met een draaiende as om te zetten vermogens hebben een zeer groot bereik. Als voorbeeld van een omzetter aan het begin van dit bereik zouden we een horlogemotor kunnen noemen: het hierbij behorende vermogen is ongeveer 1 μW. Aan de andere kant van het bereik vinden we de generatoren in elektriciteitscentrales. Het vermogen hiervan ligt in de orde van grootte van 1 GW. De verhouding van het grootste vermogen tot het kleinste vermogen bij omzetters met een draaiende as, die in de praktijk gebruikt worden, is dus 10^{15}. Bij sensoren is het om te zetten vermogen vaak nog veel kleiner dan 1 μW, zodat deze verhouding nog veel groter wordt als we ook deze daarbij zouden betrekken.

Bedenk meer voorbeelden van elektromechanische omzetters.

De hier te behandelen elektromechanische omzetters maken gebruik van het elektromagnetische veld voor de koppeling tussen het elektrische systeem en het mechanische systeem. Daarbij wordt meestal gebruik gemaakt van magnetische of diëlektrische materialen. De werking van omzetters met magnetische materialen berust op magnetische velden, terwijl die van omzetters met diëlektrische materialen juist berust op elektrische velden. Als we naar de energiedichtheid van magnetische en elektrische velden kijken kunnen we een indruk krijgen van de reden waarom de omzetters van het magnetische type zo populair zijn. Daarbij veronderstellen we dat tussen het stilstaande en het bewegende deel van de omzetter lucht aanwezig is en dat de energie-inhoud van dit luchtdeel van belang is (later zal dit voor omzetters van het magnetische type verduidelijkt worden).

Waarom is het een redelijke veronderstelling dat er tussen het stilstaande en het bewegende deel van de omzetter lucht aanwezig is?

Als we bedenken dat de elektrische veldsterkte waarbij in lucht doorslag optreedt ongeveer 3.10^6 V/m bedraagt, kunnen we inzien dat voor de maximale energiedichtheid van een elektrisch veld geldt:

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = 40\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

De magnetische fluxdichtheid wordt meestal begrensd door verzadigingsverschijnselen in het ijzer rond het luchtdeel. Als we hiervoor een waarde van 1.3 T hanteren, vinden we voor de maximale energiedichtheid van een magnetisch veld:

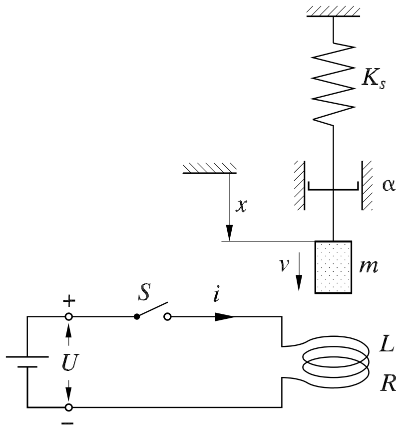
$$w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} = 6.7 \cdot 10^5 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

Als we elektrische of magnetische velden alleen gebruiken voor energieopslag (niet voor elektromechanische omzetting), liggen deze cijfers heel anders omdat in dat geval het luchtdeel niet nodig is. Bij een condensator is de veldsterkte dan namelijk niet beperkt tot de doorslagveldsterkte in lucht, zodat de energiedichtheid in een condensator aanzienlijk groter kan zijn.

We zullen verder alleen aandacht besteden aan omzetters van het magnetische type. Hierbij zullen we na een korte beschouwing van de elektromechanische interactie en van het ”fysische” begrip van de krachtopwekking, aan de hand van een voorbeeld verder ingaan op mechanische systemen. Vervolgens gaan we na hoe we op relatief eenvoudige wijze berekeningen kunnen uitvoeren aan elektromechanische omzetters. We zullen daarbij uitgaan van de in hoofdstuk 3 opgebouwde kennis over magnetische circuits en hun koppeling met elektrische circuits: de combinatie van magnetische en elektrische circuits wordt hier uitgebreid met een mechanisch deel.

5.2 Elektromechanische interactie

Om kennis te maken met elektromechanische verschijnselen doen we een paar proefjes. Hierbij gebruiken we de opstelling volgens figuur 5.2. Hierin hangt een weekijzeren cilinder met massa m aan een veer met veerconstante K_s (Engels: spring). Een demper met een visceuze-dempingsconstante α zal dempend werken bij een eventuele beweging in verticale richting.



Figuur 5.2 Proefje voor de demonstratie van de elektromechanische interactie

Proef 1

We trekken de massa op het tijdstip $t = 0$ naar beneden over een afstand X_0 en laten hem daarna los. We constateren een op en neer gaande beweging, die allengs geringer wordt.

We kunnen deze beweging als volgt berekenen. Op de massa m werken de zwaartekracht mg, de kracht van de veer $-K_s(x - X_r)$ en de kracht van de demper $-\alpha v$, waarbij X_r de rustpositie van de veer is (als er geen kracht op de veer wordt uitgeoefend). Dit leidt tot het volgende stelsel vergelijkingen:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -K_s(x - X_r) - \alpha v - mg \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v$$

We nemen aan dat de massa m als rustpositie $x = 0$ heeft, zodat $mg - K_s X_r = 0$ moet gelden. Hiermee kunnen we de vergelijkingen herschrijven tot

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + K_s x = 0$$

Met als oplossing onder de gegeven beginvoorwaarden $x = X_0$ en $v = 0$ bij $t = 0$:

$$x = X_0 \mathrm{e}^{-\frac{\alpha}{2m}t}\left(\cos\omega t + \frac{\alpha}{2m\omega}\sin\omega t\right) \quad \text{met} \quad \omega = \sqrt{\frac{K_s}{m} - \frac{\alpha^2}{4m^2}}$$

Het stuk weekijzer bevindt zich boven een spoel, die stroomvoerend gemaakt kan worden met behulp van een accu.

Proef 2

We houden het stuk ijzer met de hand vast in de positie $x = X_0$ en sluiten op het tijdstip $t = 0$ de schakelaar S. De stroom blijkt van 0 af op te lopen en bereikt een grenswaarde.

Als we aannemen dat het ijzer magnetisch lineair is en geen elektrische geleidbaarheid vertoont, geldt de spanningsvergelijking voor het elektrische circuit

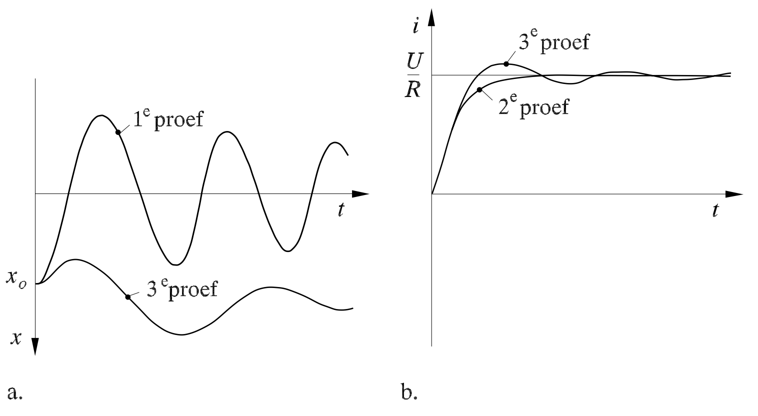
$$U = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

met als oplossing onder de gegeven beginvoorwaarde $i = 0$ bij $t = 0$:

$$i = \frac{U}{R}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\right) \quad \text{met} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad \text{als tijdconstante}$$

Proef 3

We brengen het stuk weekijzer weer in de positie $x = X_0$, doch laten het los op hetzelfde moment dat we de stroom inschakelen. We zien nu dat de beweging anders verloopt dan bij proef 1 (figuur 5.3a) en dat de stroom anders verloopt dan bij proef 2 (figuur 5.3b).

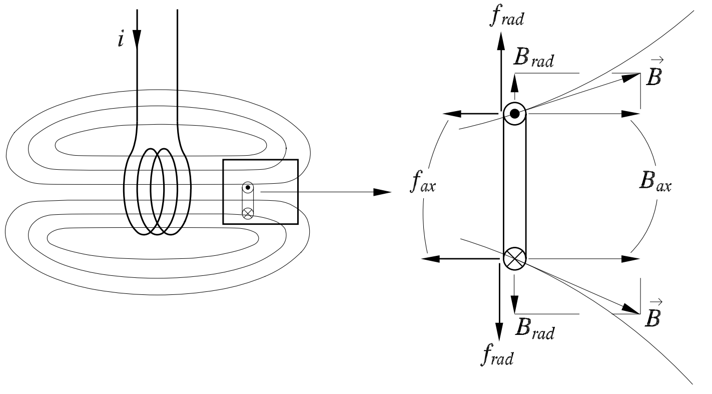


Figuur 5.3 Resultaten van de proefjes voor de demonstratie van de elektromechanische interactie

Blijkbaar heeft enerzijds het feit dat de stroom is ingeschakeld invloed op het krachtenspel aan de mechanische zijde en daarmee op de mechanische beweging en wordt anderzijds door de mechanische beweging het spanningsevenwicht aan de elektrische zijde en daarmee de stroom beïnvloed. Dit en soortgelijke verschijnselen kunnen we met de term ”elektromechanische interactie” aanduiden.

5.3 "Fysisch" begrip van de krachtopwekking

Om een indruk te krijgen van de wijze waarop de krachtopwekking in elektromechanische omzetters van het magnetische type (zoals in figuur 5.2) tot stand komt, beschouwen we figuur 5.4. We moeten ons bij de beschouwing realiseren dat we slechts met een model van de werkelijkheid te maken hebben.



Figuur 5.4 Een model van de krachtopwekking

In figuur 5.4 zien we een spoel bekrachtigd met een stroom i en een stuk ferromagnetisch materiaal. Het ferromagnetisme kunnen we zien als het gevolg van het richten van moleculaire kringstroompjes in het materiaal ten gevolge van het uitwendige magnetische veld.

Eén van deze kringstroompjes in het materiaal is in de figuur vergroot weergegeven. De magnetische fluxdichtheid die dit stroompje ondervindt, is ontbonden in een axiale en een radiale component. De krachten f_{rad} ten gevolge van de axiale veldcomponent B_{ax} trachten in hoofdzaak de kringstroom op te blazen. De krachten f_{ax} ten gevolge van de radiale veldcomponent B_{rad} trachten de kringstroom in de "trechter" van het divergerende of convergerende veld te trekken; dit is de kracht die we zoeken. Essentieel voor het bestaan van deze kracht is dus dat de verdeling van de magnetische fluxdichtheid B inhomogeen is. De richting (aantrekkend) komt overeen met de experimentele ervaring.

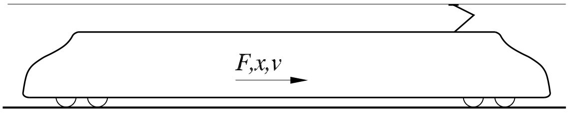
Voor de berekening van de totale kracht op het stuk ferromagnetisch materiaal zijn verschillende mogelijkheden, waarvan we er hier één zullen behandelen. De gekozen methode berust op een beschouwing van energiestromen in het systeem. Voor we hierop overgaan zullen we echter eerst kijken naar mechanische systemen en naar de spanningsvergelijking van een spoel met een magnetisch circuit dat een beweegbaar deel heeft.

5.4 Het mechanische systeem

Zoals we al gezien hebben houdt de elektromechanica zich bezig met de interactie tussen mechanische en elektrische systemen. Voordat we gaan kijken hoe we berekeningen uit kunnen voeren aan elektromechanische omzetters, besteden we enige aandacht aan mechanische systemen. Dat zullen we doen aan de hand van een voorbeeld.

Een trein

Als voorbeeld zullen we kijken naar een trein (zie figuur 5.5). Omdat een trein langs een rechte lijn beweegt, maken we voor de beschrijving van de beweging geen gebruik van de vectornotatie. We noemen de massa van de trein m. Verder veronderstellen we dat de trein een wrijvingskracht $F_{wrijving}$ ondervindt die evenredig is met het kwadraat van de snelheid van de trein v. Dit betekent dat de wrijving voornamelijk door de luchtweerstand wordt bepaald. De kracht ten gevolge van het aandrijfsysteem (de motor) noemen we $F_{aandrijving}$.



Figuur 5.5 Een trein als voorbeeld

De bewegingsvergelijkingen luiden:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F = F_{aandrijving} + F_{wrijving} = F_{aandrijving} - \alpha v|v| \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \qquad (5.1)$$

Waarom wordt de wrijvingskracht in deze bijzondere vorm geschreven?

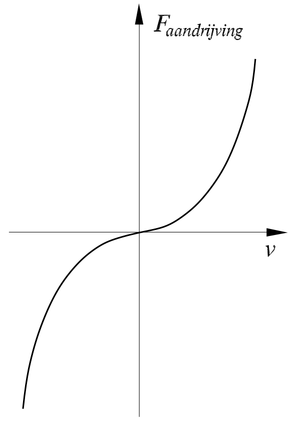
Als de snelheid van de trein v constant is, zijn de grootten van $F_{wrijving}$ en $F_{aandrijving}$ aan elkaar gelijk. In de aandrijftechniek spreken we dan van een stationaire toestand. In de stationaire toestand behoeft de trein dus niet stil te staan, maar is zijn versnelling nul. Met (5.1) kunnen we nu de kracht-snelheidskarakteristiek van de trein volgens figuur 5.6 tekenen.

Translatie/Rotatie

We nemen hier aan dat de trein via één wiel door één motor wordt aangedreven. Dit aandrijfsysteem is in figuur 5.7 schematisch weergegeven.

De motor bestaat uit een stilstaand deel, de stator, en een draaibaar deel, de rotor. De rotor en het aandrijvende wiel roteren om dezelfde (vaste)as en we veronderstellen dat ze gezamenlijk met de as een star lichaam vormen. Voor de beschrijving van de rotatie om deze as hebben we dan geen vectornotatie nodig.

Op dit roterende deel oefent de motor een elektromagnetisch koppel T_e uit. Verder ondervindt het wiel van de rail een kracht $F_{aandrijving}$. Dit is de



Figuur 5.6 De kracht-snelheidskarakteristiek van de trein

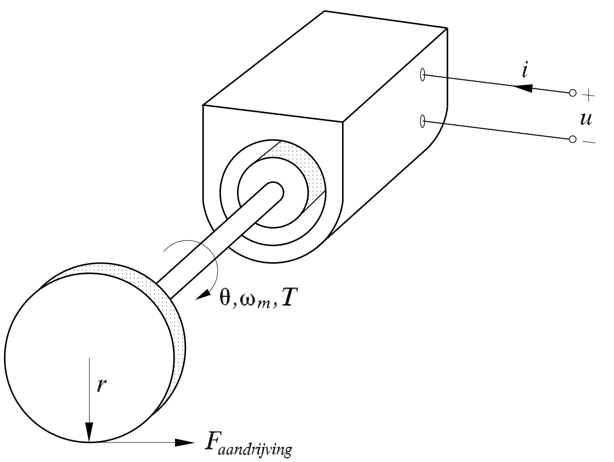
reactiekracht van de kracht die het wiel op de rail uitoefent. Met de straal van het wiel r vinden we dan voor de bewegingsvergelijkingen (zie figuur 5.7):

$$J\frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t} = T_e - r\,F_{aandrijving} \quad ; \quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega_m \tag{5.2}$$

We gebruiken hier het symbool J voor het traagheidsmoment (in de mechanica wordt ook vaak het symbool I gebruikt).

Het verband tussen de hoeksnelheid van het roterende deel ω_m en de snelheid van de trein is:

$$v = \omega_m r \tag{5.3}$$



Figuur 5.7 Het aandrijfsysteem van de trein

De gelijkstroommachine

Als aandrijvende motor gebruiken we in dit voorbeeld een gelijkstroommachine, waarvan we veronderstellen dat hij verliesvrij is. Bovendien veronderstellen we dat zijn klemspanning u evenredig is met de hoeksnelheid ω_m en dat het op de rotor uitgeoefende elektromagnetische koppel T_e evenredig is met de stroom i:

$$u = K\Phi\, \omega_m \quad ; \quad T_e = K\Phi\, i \tag{5.4}$$

Hierin is K een constante die door de machine vastgelegd wordt en Φ de circuitflux in de machine, die we hier constant veronderstellen. Deze vergelijkingen zijn weliswaar geïdealiseerd, maar ze komen wel goed overeen met de realiteit.

De vermogensbalans

We gaan vervolgens kijken wat er met het elektrisch toegevoerde vermogen $p_e = ui$ gebeurt. Om uit de bewegingsvergelijkingen vermogensvergelijkingen te destilleren, vermenigvuldigen we de eerste vergelijking van (5.1) met v en de eerste vergelijking van (5.2) met ω_m:

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = vF_{aandrijving} - \alpha v^2|v|$$
$$J\omega_m\frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t} = \omega_m T_e - \omega_m r\, F_{aandrijving}$$

Als we deze vergelijkingen omschrijven tot

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = v\,F_{aandrijving} - \alpha\, v^2|v|$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}J\omega_m^2\right) = \omega_m T_e - \omega_m r F_{aandrijving}$$

zien we meteen dat de eerste vergelijking een uitdrukking is voor de verandering van de kinetische energie per tijdseenheid die behoort bij de translatie en dat de tweede een uitdrukking is voor de verandering van de kinetische energie per tijdseenheid die behoort bij de rotatie.

Controleer het omschrijven van de vergelijkingen.

Met (5.3) kunnen we deze vergelijkingen samenvoegen tot

$$\omega_m T_e = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}J\omega_m^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) + \alpha\, v^2|v| \tag{5.5}$$

Het linkerlid van deze vergelijking stelt het door de gelijkstroommachine afgegeven elektromechanische vermogen voor. De eerste twee termen van het rechterlid geven samen de totale verandering van de kinetische energie per tijdseenheid. De derde term geeft het ten gevolge van de luchtweerstand gedissipeerde vermogen weer. Met de vergelijkingen (5.4) kunnen we direct zien dat het door de gelijkstroommachine afgegeven elektromechanische vermogen gelijk is aan het opgenomen elektrische vermogen, zodat we de vermogensbalans (5.5) kunnen uitbreiden tot

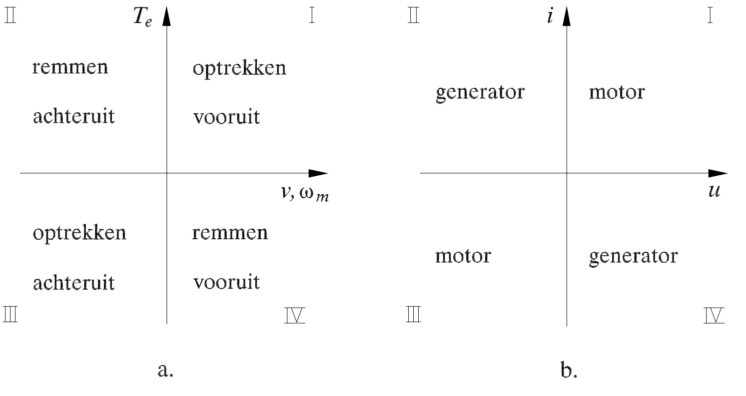
$$u\,i \;=\; \omega_m T_e = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}J\omega_m^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) + \alpha\, v^2|v| \tag{5.6}$$

Een vierkwadrantenaandrijving

Het hier beschouwde aandrijfsysteem van een trein wordt vaak aangeduid met de term vierkwadrantenaandrijving. Om te zien wat daarmee bedoeld wordt, verwaarlozen we eenvoudigheidshalve de luchtweerstand. Dit is overigens bij het optrekken en het remmen van een trein een redelijke verwaarlozing. De vermogensvergelijking (5.6) gaat nu over in:

$$u\,i \;=\; \omega_m T_e = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}J\omega_m^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right)$$

We zien in deze vergelijking dat de kinetische energie toeneemt, als het toegevoerde vermogen positief is: de trein trekt op. Als de trein vooruit rijdt ($v > 0$; $\omega_m > 0$), is het elektromagnetische koppel T_e positief. Dit is het geval in het eerste kwadrant van figuur 5.8a. In het derde kwadrant neemt de kinetische energie toe terwijl de trein achteruit rijdt.



Figuur 5.8 Bedrijfskwadranten bij verwaarlozing van verliezen

In het vierde kwadrant rijdt de trein vooruit, maar is het koppel negatief: de trein remt en de kinetische energie wordt minder. In het hier beschouwde systeem gaat de gelijkstroommachine in dit geval in generatorbedrijf. Dat wil zeggen dat de kinetische energie teruggevoerd wordt naar de voedende elektrische bron. We noemen dit recuperatief remmen. Bij de Nederlandse Spoorwegen gebeurt dit op dit moment nog niet omdat de voedende bron (de bovenleiding) geen energie kan opnemen vanuit de trein. De motor wordt echter wel vaak in generatorbedrijf gebruikt om te remmen, maar daarbij wordt de ”generator” belast met weerstanden, zodat de kinetische energie in deze weerstanden wordt gedissipeerd. Daarnaast wordt er nog vaak mechanisch geremd, waarbij de kinetische energie in schijfremmen gedissipeerd wordt. Recuperatief remmen kan dus een bijdrage leveren aan de energiebesparing.

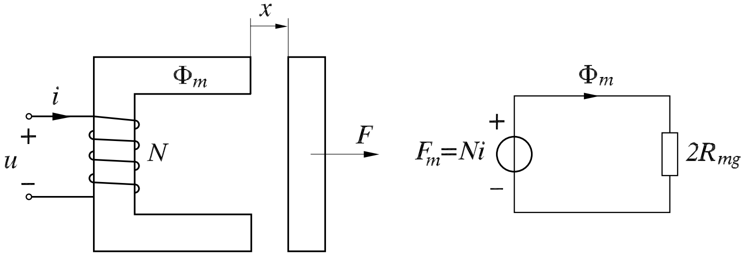
In figuur 5.8b zijn de bedrijfskwadranten voor de gelijkstroommachine weergegeven (een i/u-diagram).

Leg uit waarom de kwadranten in figuur 5.8a overeenkomen met die in figuur 5.8b.

5.5 Magnetische circuits met een beweegbaar deel

In hoofdstuk 3 hebben we magnetische circuits onderzocht waarvan de vorm vast is. Bij elektromechanische omzetters is de vorm van het magnetische circuit echter niet vast: de omzetter heeft een beweegbaar deel. De beweging van dit deel zal in het algemeen geen invloed hebben op de berekening van de flux in het magnetische circuit ten gevolge van de stroom in het elektrische circuit: bij een bepaalde gekozen positie van het beweegbare deel en bij een bepaalde gekozen waarde van de stroom behoort één fluxverdeling in het magnetische circuit. We gaan er hierbij vanuit dat er in het magnetische circuit geen wervelstromen optreden. Bij de berekening van de invloed van het magnetische circuit op het elektrische circuit (de spanning geïnduceerd door fluxverandering) moeten we echter bedacht zijn op de mogelijke beweging. We zullen dit onderzoeken aan de hand van een voorbeeld.

We beschouwen daartoe het in figuur 5.9 getekende magnetische circuit dat veel lijkt op het in paragraaf 3.6 (De opgewekte spanning) gebruikte circuit volgens figuur 3.7. We zullen hier echter de spreidingsflux en de magnetische weerstand van het ijzerdeel verwaarlozen, zodat het equivalente netwerk in figuur 5.9 eenvoudiger is dan dat in figuur 3.7. De grootte van de (constante) luchtspleet in figuur 3.7 g is hier vervangen door x, die variabel is.



Figuur 5.9 Een eenvoudig magnetisch circuit met een beweegbaar deel

De afleiding van de spanningsbetrekking (3.14) in paragraaf 3.6 is algemeen geldig en we zullen deze vergelijking hier als uitgangspunt nemen:

$$u = R\,i + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \tag{5.7}$$

De met de spoel gekoppelde flux ψ kunnen we vinden als we bedenken dat de spoel, met N windingen, de hoofdflux Φ_m N maal omvat. Voor de met de spoel gekoppelde flux geldt dus:

$$\psi = N\Phi_m$$

Met het equivalente netwerk volgens figuur 5.9 kunnen we hiervoor ook schrijven:

$$\psi = N\frac{N\,i}{2R_{mg}} = L\,i$$

waarbij de coëfficiënt van zelfinductie L gegeven wordt door:

$$L = N^2\frac{1}{2R_{mg}}$$

Als we veronderstellen dat we met een oppervlakte van de luchtspleet A mogen rekenen, volgt met de definitie van de reluctantie (3.11):

$$L = N^2\frac{\mu_0 A}{2x} \tag{5.8}$$

In dit geval is de coëfficiënt van zelfinductie dus afhankelijk van de grootte van de luchtspleet x. Aangezien x een variabele is, is x ook een functie van de tijd, zodat we met het differentiëren van de flux naar de tijd in de spanningsbetrekking voor de spoel (5.7) moeten opletten:

$$\begin{aligned} u &= R\,i + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = R\,i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Li) \\ &= R\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}i = R\,i + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}i \end{aligned} \tag{5.9}$$

De laatste term is nieuw ten opzichte van de spanningsbetrekking (3.15).

Algemeen kunnen we stellen dat de met een spoel gekoppelde flux een functie is van de positie x en van de stroom i:

$$\psi = \psi(x,i) \tag{5.10}$$

waarmee de spanningsbetrekking (5.7) overgaat in

$$u = R\,i + \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = R\,i + \frac{\partial\psi}{\partial i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \tag{5.11}$$

De tweede term in het rechterlid wordt de transformatorische spanning genoemd en de derde de bewegingsspanning.

Waar komen deze namen vandaan?

5.6 Berekening van de kracht uit de vermogensbalans

In elektromechanische omzetters vindt uitwisseling van energie plaats tussen een mechanische poort en een elektrische poort. Bij omzetters van het magnetische type gebeurt deze uitwisseling via het magnetische veld, waarin energie is opgeslagen. We zullen hier een berekeningsmethode voor de ontwikkelde kracht geven die gebaseerd is op de in de omzetter opgeslagen magnetische veldenergie. We moeten ons hier realiseren dat de in dit dictaat beschreven methode slechts één van de vele mogelijke methoden is om de kracht te berekenen. Het is echter wel een eenvoudig toe te passen methode.

In deze paragraaf zullen we een omzetter bekijken met één elektrische poort waarbij de beweging een translatie is. We kunnen daarbij het in figuur 5.9 getekende systeem in gedachte houden. Dergelijke systemen komen voor in elektromagnetische hefinrichtingen en in elektromagnetische schakelaars (”relais”). In de volgende paragraaf bekijken we een systeem met een roterende beweging en twee elektrische poorten.

Bij de afleiding van een uitdrukking voor de kracht zullen we gebruik maken van een vermogensbalans. We gaan er daarbij vanuit dat in het systeem energie kan zijn opgeslagen in de vorm van magnetische veldenergie en in de vorm van kinetische energie. We zullen eerst een methode bekijken om een uitdrukking voor de magnetische veldenergie te vinden.

De magnetische veldenergie

In de vorige paragraaf hebben we al gesteld dat ψ een functie is van i en x ((5.10); er is geen hysterese en er zijn geen wervelstromen). We veronderstellen hier bovendien dat we de magnetische veldenergie ook als een functie van i en x kunnen schrijven:

$$W_m = W_m\,(i, x)$$

Voorts nemen we aan dat dit een toestandsfunctie is, zodat W_m alleen een functie is van de momentele waarden van i en x en niet afhankelijk is van bijvoorbeeld tijdsafgeleiden of integralen naar de tijd van i en x. Dit betekent dat we de uitdrukking voor W_m kunnen afleiden voor het geval dat x constant is. Dit komt overeen met een systeem met een magnetisch circuit zonder beweging, waarvoor we in paragraaf 3.7 al uitdrukkingen voor de magnetische veldenergie hebben afgeleid.

Als het verband tussen ψ en i lineair is (factor $L(x)$), kunnen we uitdrukking (3.22) hier blijven gebruiken:

$$W_m = \tfrac{1}{2}\,L(x)\,i^2 \tag{5.12}$$

De mechanische poort

Aan de mechanische poort van de elektromechanische omzetter kunnen we als grootheden de (uitwendige) kracht F_{uitw}, de verplaatsing x en de snelheid v onderscheiden. We veronderstellen dat er op het beweegbare deel van de omzetter twee krachten werken: de kracht F_{uitw} en de kracht van elektromagnetische oorsprong F_e, die we willen bepalen. We veronderstellen het mechanische deel van de omzetter dus verliesvrij (er is geen wrijvingskracht).

Voor de bewegingsvergelijking geldt (zie figuur 5.9):

$$m\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F = F_{uitw} + F_e$$

Hierin is m de massa van het beweegbare deel. We kunnen nu een uitdrukking voor het toegevoerde mechanische vermogen vinden door deze uitdrukking met v te vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} p_{mech} &= F_{uitw}v = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - F_e v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) - F_e v \\ &= \frac{\mathrm{d}W_{kin}}{\mathrm{d}t} - F_e v \end{aligned} \tag{5.13}$$

De elektrische poort

Voor de elektrische poort van de elektromechanische omzetter kunnen we uitgaan van de algemene spanningsvergelijking voor een spoel (5.7). We kunnen nu een uitdrukking voor het toegevoerde elektrische vermogen vinden door deze uitdrukking met i te vermenigvuldigen:

$$p_{elek} = ui = Ri^2 + i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \tag{5.14}$$

De vermogensbalans

Als we de uitdrukkingen (5.13) en (5.14) bij elkaar optellen, vinden voor het totale toegevoerde vermogen:

$$p = p_{elek} + p_{mech} = Ri^2 + \frac{\mathrm{d}W_{kin}}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} - F_e v$$

Hierin is de eerste term het in de weerstand R gedissipeerde vermogen en de tweede term de verandering van de kinetische energie per tijdseenheid. Omdat in het systeem alleen energie is opgeslagen in de vorm van magnetische veldenergie of in de vorm van kinetische energie en er alleen verliezen optreden in de weerstand R, geven de overige termen gezamenlijk de verandering van de magnetische veldenergie per tijdseenheid:

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} = i\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} - F_e v \tag{5.15}$$

We zouden dit kunnen beschouwen als een inwendige vermogensbalans van de elektromechanische omzetter, waarbij de eerste term van het rechter lid het toegevoegde elektrische vermogen na aftrek van de dissipatie voorstelt en de tweede term het elektromechanisch omgezette vermogen. We kunnen deze vergelijking op soortgelijke wijze als bij vergelijking (5.9) verder uitwerken met $\psi = L(x)i$:

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} = L(x)i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}i - F_e v = L(x)i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}x}vi - F_e v \tag{5.16}$$

De verandering van de magnetische veldenergie per tijdseenheid volgt echter ook uit (5.12):

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} = L(x)i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}i^2 = L(x)i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}x}vi^2 \tag{5.17}$$

De vergelijkingen (5.16) en (5.17) moeten natuurlijk hetzelfde resultaat opleveren. Door deze vergelijkingen aan elkaar gelijk te stellen, vinden we de gewenste uitdrukking voor de kracht van elektromagnetische oorsprong:

$$F_e = \tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}x}i^2 \tag{5.18}$$

Voorbeeld 1

Voor het eerste voorbeeld kijken we weer naar figuur 5.9. Voor de kracht van elektromagnetische oorsprong vinden we met (5.18) en (5.8):

$$F_e = -\frac{1}{2}\frac{N^2\mu_0 A}{2x^2}i^2$$

Aan het min-teken zien we dat de kracht aantrekkend is, voorts is de kracht evenredig met het kwadraat van de stroom en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de grootte van de luchtspleet. Dit laatste zou betekenen dat de kracht naar oneindig nadert als de luchtspleetgrootte x naar nul nadert. We moeten hierbij echter bedenken dat we in dit voorbeeld (figuur 5.9) de magnetische weerstand van het ijzercircuit hebben verwaarloosd ten opzichte van de magnetische weerstand van de luchtspleet: bij een zeer kleine luchtspleet is dit niet toegestaan.

Voorbeeld 2

Voor het tweede voorbeeld kijken we weer naar figuur 5.9. We veronderstellen nu dat de magneet gevoed wordt uit een wisselspanningsbron. We nemen hierbij als voedingsspanning van de spoel:

$$u = \hat{u}\cos(\omega t)$$

en verwaarlozen in de spanningsbetrekking (5.7) de weerstandsterm, wat in de praktijk meestal toegestaan is, zodat

$$u = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$

Hiermee volgt voor de flux:

$$\psi(t) = \psi(0) + \int_0^t \hat{u}\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Als de flux op t=0 nul is, volgt hiermee:

$$\psi(t) = \frac{\hat{u}}{\omega}\sin(\omega t)$$

We zien hieraan dat de flux direct vastgelegd wordt door de voedende wisselspanning, en niet de stroom door de spoel: de stroom past zich zodanig aan dat deze flux inderdaad ontstaat. Voor de kracht van elektromagnetische oorsprong vinden we met (5.18) en (5.8):

$$\begin{aligned} F_e &= -\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}L(x)}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi}{L(x)}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{N^2\mu_0 A}{2x^2}\,\psi^2\,\left(\frac{2x}{N^2\mu_0 A}\right)^2 \\ &= -\frac{1}{\mu_0 A N^2}\left(\frac{\hat{u}}{\omega}\sin(\omega t)\right)^2 = -\frac{1}{\mu_0 A N^2}\frac{\hat{u}^2}{\omega^2}\frac{1-\cos(2\omega t)}{2} \end{aligned}$$

Hierin zien we dat de kracht een sinusvormige component heeft met een frequentie van tweemaal de frequentie van de voeding. Het feit dat de gemiddelde component negatief is, betekent dat de kracht aantrekkend is (zie ook figuur 5.9).

Opvallend in dit voorbeeld is dat de kracht onafhankelijk is van de grootte van de luchtspleet x. In werkelijkheid zal dit niet het geval zijn omdat het uitgangspunt dat het magnetische veld zich alleen in het magnetische circuit bevindt voor grotere waarden van x niet meer geldig is.

5.7 Koppelberekening bij een elektromechanische omzetter met twee elektrische poorten

In de vorige paragraaf hebben we een omzetter met één elektrische poort bekeken, waarbij de beweging een translatie is. In deze paragraaf zullen we een soortgelijke beschouwing houden voor een elektromechanische omzetter (van het magnetische type) met twee elektrische poorten, waarbij de beweging een rotatie is. Deze beschouwing kan als basis gebruikt worden voor de berekening van het elektromagnetische koppel bij motoren, generatoren en allerlei andere elektromechanische omzetters met een roterende beweging.

We zullen de vermogensbalans opstellen voor het in figuur 5.10 weergegeven systeem. We gaan er daarbij weer vanuit dat in het systeem alleen energie kan zijn opgeslagen in de vorm van magnetische veldenergie en in de vorm van kinetische energie. Verder veronderstellen we dat de magnetische circuits lineair zijn, zodat we gebruik kunnen maken van inductiecoëfficiënten, die natuurlijk wel afhankelijk kunnen zijn van de positie van het beweegbare deel ten opzichte van het stilstaande deel.

Figuur 5.10 Blokdiagram van een elektromechanische omzetter met twee elektrische poorten

De twee elektrische poorten onderscheiden we met de indices 1 en 2. Aan de mechanische poort zien we het koppel T_s, de hoekverplaatsing θ en de hoeksnelheid ω_m. Hierbij heeft de index s betrekking op de as (Engels: shaft) en staat de index m voor mechanisch.

Omdat we bij het afleiden van een uitdrukking voor de magnetische veldenergie de spanningsvergelijkingen voor de elektrische poorten nodig hebben, beginnen we met een beschrijving van de elektrische poorten.

Waarom konden we in de vorige paragraaf direct met de uitdrukking voor de magnetische veld-energie beginnen?

De elektrische poorten

Zoals we in paragraaf 3.6 hebben gezien, kunnen we voor elektrische circuits waarmee een flux gekoppeld is de volgende spanningsvergelijkingen gebruiken:

$$u_1 = R_1\, i_1 + \frac{\mathrm{d}\psi_1}{\mathrm{d}t} \quad ; \quad u_2 = R_2\, i_2 + \frac{\mathrm{d}\psi_2}{\mathrm{d}t} \tag{5.19}$$

Om deze uitdrukking verder uit te kunnen werken, schrijven we voor de verbanden tussen fluxen en stromen:

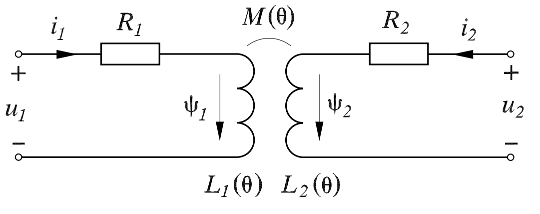
$$\psi_1 = L_1(\theta)\, i_1 + M(\theta)\, i_2 \quad ; \quad \psi_2 = M(\theta)\, i_1 + L_2(\theta)\, i_2$$

De spanningsvergelijkingen (5.19) gaan hiermee over in:

$$u_1 = R_1\, i_1 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_1(\theta)\, i_1 + M(\theta)\, i_2\right) \tag{5.20}$$

$$u_2 = R_2\, i_2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M(\theta)\, i_1 + L_2(\theta)\, i_2\right) \tag{5.21}$$

Met bovenstaande vergelijkingen kunnen we het schema volgens figuur 5.11 samenstellen.



Figuur 5.11 De elektrische poorten

We kunnen nu een uitdrukking voor het totale toegevoerde elektrische-vermogen vinden door vergelijking (5.20) met i_1 te vermenigvuldigen en vergelijking (5.21) met i_2 en vervolgens de zo ontstane vergelijkingen bij elkaar op te tellen:

$$\begin{aligned} p_{elek} = u_1 i_1 + u_2 i_2 &= R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \\ &\quad + i_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_1(\theta) i_1 + M(\theta) i_2\right) + i_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M(\theta) i_1 + L_2(\theta) i_2\right) \\ &= R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 \\ &\quad + \left(i_1 L_1(\theta) + i_2 M(\theta)\right) \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \left(i_1 M(\theta) + i_2 L_2(\theta)\right) \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ &\quad + \left(i_1^2 \frac{\mathrm{d}L_1(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + 2 i_1 i_2 \frac{\mathrm{d}M(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + i_2^2 \frac{\mathrm{d}L_2(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \tag{5.22}$$

Controleer bovenstaande uitdrukking zorgvuldig.

De magnetische veldenergie

We veronderstellen hier dat de magnetische veldenergie W_m een toestandsfunctie is van de stromen in de elektrische circuits en de positie van het beweegbare deel ten opzichte van het stilstaande deel, de hoekverplaatsing θ. Dit betekent dat dat W_m alleen een functie is van de momentele waarden van i_1, i_2 en θ en niet afhankelijk is van bijvoorbeeld tijdsafgeleiden of integralen naar de tijd van i_1, i_2 en θ:

$$W_m = W_m\,(i_1,\, i_2,\, \theta)$$

Dit heeft tot gevolg dat we de uitdrukking voor W_m mogen afleiden voor het geval dat θ constant is en dat het beweegbare deel dus gefixeerd is.

We kunnen nu dan ook gebruik maken van de uitdrukking voor het toegevoerde elektrische vermogen (5.22) waarbij we $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ gelijk aan nul stellen. Vergelijking (5.22) gaat nu over in:

$$p_{elek} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + (i_1 L_1(\theta) + i_2 M(\theta))\,\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + (i_1 M(\theta) + i_2 L_2(\theta))\,\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \quad \text{bij } \theta \text{ constant}$$

De eerste twee termen stellen de dissipatie in de weerstanden van de elektrische circuits voor, zodat de laatste twee een maat zijn voor de verandering van de magnetische veldenergie per tijdseenheid:

$$\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} = (i_1 L_1(\theta) + i_2 M(\theta))\,\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + (i_1 M(\theta) + i_2 L_2(\theta))\,\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \quad \text{bij } \theta \text{ constant}$$

We kunnen vanuit deze uitdrukking op verschillende wijzen een uitdrukking voor de magnetische veldenergie afleiden. De hier volgende afleiding is dus een vrije keuze.

We gaan uit van de toestand waarin i_1 en i_2 nul zijn ($t = 0$). Vervolgens houden we i_2 (en dus ook $\mathrm{d}i_2/\mathrm{d}t$) gelijk aan nul en laten we i_1 toenemen tot zijn eindwaarde ($t = t_1$). Daarna houden we $\mathrm{d}i_1/\mathrm{d}t$ gelijk aan nul (we houden i_1 op zijn eindwaarde) en laten we i_2 toenemen tot zijn eindwaarde ($t = t_2$; voor de duidelijkheid zijn eindwaarden in deze afleiding aangegeven met hoofdletters). Dit resulteert in:

$$\begin{aligned} W_m\,(I_1, I_2, \theta) &= \int_0^{t_1} i_1 L_1(\theta)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} (I_1 M(\theta) + i_2 L_2(\theta))\,\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{I_1} i_1 L_1(\theta)\,\mathrm{d}i_1 + \int_0^{I_2} (I_1 M(\theta) + i_2 L_2(\theta))\,\mathrm{d}i_2 \quad \text{bij } \theta \text{ constant} \end{aligned}$$

Verder uitwerken geeft de gewenste uitdrukking voor de magnetische veldenergie:

$$W_m(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2} L_1(\theta) i_1^2 + M(\theta) i_1 i_2 + \frac{1}{2} L_2(\theta) i_2^2 \tag{5.23}$$

Omdat W_m een toestandsfunctie is van i_1, i_2 en θ, geldt deze uitdrukking ook voor het geval θ niet constant is. We hebben de voorwaarde dat θ constant moet zijn namelijk alleen gebruikt om deze uitdrukking op eenvoudige wijze te vinden.

De mechanische poort

We veronderstellen dat er op het beweegbare deel van de omzetter twee koppels werken: het koppel T_s en het koppel van elektromagnetische oorsprong T_e, dat we willen bepalen. We veronderstellen het mechanische deel van de omzetter dus verliesvrij (er is geen wrijvingskoppel).

Voor de bewegingsvergelijking geldt:

$$J\frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t} = T_s + T_e \tag{5.24}$$

Hierin is J het traagheidsmoment van het beweegbare deel. We kunnen nu een uitdrukking voor het toegevoerde mechanische vermogen vinden door deze uitdrukking met ω_m te vermenigvuldigen:

$$\begin{aligned} p_{mech} &= T_s\omega_m = J\omega_m\frac{\mathrm{d}\omega_m}{\mathrm{d}t} - T_e\omega_m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tfrac{1}{2}J\omega_m^2\right) - T_e\omega_m \\ &= \frac{\mathrm{d}W_{kin}}{\mathrm{d}t} - T_e\omega_m \end{aligned} \tag{5.25}$$

De vermogensbalans

Als we de uitdrukkingen (5.22) en (5.25) bij elkaar optellen, vinden we voor het totale toegevoerde vermogen ($\omega_m = \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$):

$$\begin{aligned} p = p_{elek} + p_{mech} = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{\mathrm{d}W_{kin}}{\mathrm{d}t} \\ + \left(i_1 L_1(\theta) + i_2 M(\theta)\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \left(i_1 M(\theta) + i_2 L_2(\theta)\right)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ + \left(i_1^2\frac{\mathrm{d}L_1(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + 2i_1 i_2\frac{\mathrm{d}M(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + i_2^2\frac{\mathrm{d}L_2(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)\omega_m - T_e\omega_m \end{aligned}$$

Hierin zijn de eerste twee termen het in de weerstanden gedissipeerde vermogen en is de derde term de verandering van de kinetische energie per tijdseenheid. Omdat in het systeem alleen energie is opgeslagen in de vorm van magnetische veldenergie of in de vorm van kinetische energie en er alleen verliezen optreden in de weerstanden, geven de overige termen gezamenlijk de verandering van de magnetische veldenergie per tijdseenheid:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} &= \left(i_1 L_1(\theta) + i_2 M(\theta)\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \left(i_1 M(\theta) + i_2 L_2(\theta)\right)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ &+ \left(i_1^2\frac{\mathrm{d}L_1(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + 2\,i_1\,i_2\frac{\mathrm{d}M(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + i_2^2\frac{\mathrm{d}L_2(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)\omega_m - T_e\omega_m \end{aligned} \tag{5.26}$$

De verandering van de magnetische veldenergie per tijdseenheid volgt echter ook uit (5.23):

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W_m}{\mathrm{d}t} &= \left(i_1 L_1(\theta) + i_2 M(\theta)\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \left(i_1 M(\theta) + i_2 L_2(\theta)\right)\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ &\quad + \left(\frac{1}{2}i_1^2\frac{\mathrm{d}L_1(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + i_1 i_2\frac{\mathrm{d}M(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \frac{1}{2}i_2^2\frac{\mathrm{d}L_2(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\end{aligned} \tag{5.27}$$

De vergelijkingen (5.26) en (5.27) moeten natuurlijk hetzelfde resultaat opleveren. Door deze vergelijkingen aan elkaar gelijk te stellen, vinden we de gewenste uitdrukking voor het koppel van elektromagnetische oorsprong (ω_m=dθ/dt):

$$T_e(i_1, i_2, \theta) = \frac{1}{2}i_1^2\frac{\mathrm{d}L_1(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + i_1 i_2\frac{\mathrm{d}M(\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \frac{1}{2}i_2^2\frac{\mathrm{d}L_2(\theta)}{\mathrm{d}\theta} \tag{5.28}$$

Voor een elektromechanische omzetter met twee elektrische poorten waarbij de beweging een translatie is, kunnen we op soortgelijke wijze voor de kracht van elektromagnetische oorsprong afleiden:

$$F_e(i_1, i_2, x) = \frac{1}{2}i_1^2\frac{\mathrm{d}L_1(x)}{\mathrm{d}x} + i_1 i_2\frac{\mathrm{d}M(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{2}i_2^2\frac{\mathrm{d}L_2(x)}{\mathrm{d}x} \tag{5.29}$$

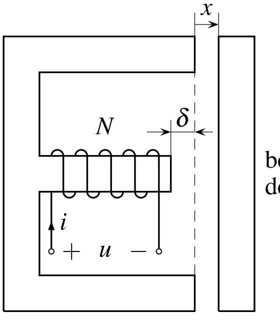
Controleer dat deze uitdrukking niet in strijd is met (5.18).

5.8 Vraagstukken

De uitwerkingen van onderstaande vraagstukken staan op de internetsite http://www.vssd.nl/hlf/e004.htm.

Opgave 5.1

Een omzetter van het magnetische type bestaat uit een stilstaand en een beweegbaar deel volgens nevenstaande figuur.
Voor het ijzer van het magnetische circuit geldt: $\mu_r = \infty$. Er wordt uitgegaan van een homogene verdeling van het veld in de luchtspleten.
De oppervlakte/doorsnede van het ijzercircuit is overal A.



5.1a Geef een vervangingsschema voor het magnetische circuit.

5.1b Geef een uitdrukking voor de coëfficiënt van zelfinductie.

5.1c Geef een uitdrukking voor de in het magnetische veld van dit systeem opgeslagen energie.

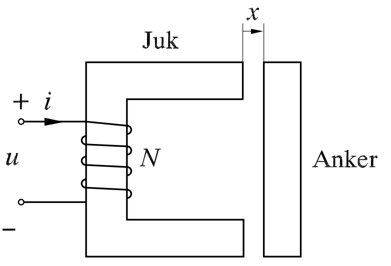
5.1d Geef een uitdrukking voor de kracht van elektromagnetische oorsprong voor dit systeem.

5.1e De spoel wordt gevoed uit een stroombron met een stroom van 5 A. De massa van het beweegbare deel en de weerstand van de spoel zijn verwaarloosbaar klein. Verder geldt: A = 1 cm^2 ; δ = 1 mm ; N = 100.
Vervolgens wordt met een uitwendige kracht F_u de afstand x vergroot van x = 0 naar x = 1 mm.
Hoeveel neemt de in het veld opgeslagen energie toe gedurende de verplaatsing? (numeriek antwoord)

5.1f Hoeveel mechanische energie wordt er via de kracht F_u toegevoerd aan het systeem gedurende de verplaatsing? (numeriek antwoord)

5.1g Hoeveel energie levert de stroombron gedurende de verplaatsing? (numeriek antwoord)

Opgave 5.2



De nevenstaande figuur is een schematische weergave van het magnetische circuit van een magneetschakelaar.
De totale lengte van het ijzercircuit is l_{ij} en de oppervlakte/doorsnede is overal A. De spoel heeft N windingen en een weerstand R.
Er wordt uitgegaan van een homogene verdeling van het veld in de luchtspleten.

5.2a Geef een vervangingsschema voor het magnetische circuit.

5.2b Geef een uitdrukking voor de coëfficiënt van zelfinductie.

5.2c Geef een uitdrukking voor de kracht van elektromagnetische oorsprong voor dit systeem.

5.2d Gegeven: $R = 5\Omega$; $N = 1000$; $\mu_r = 5000$; $A = 2\ \text{cm}^2$; $l_{ij} = 20\ \text{cm}$
Als de magneetschakelaar normaal werkt geldt voor de bekrachtigde toestand $x = 0$ en voor de onbekrachtigde toestand $x = 1$ mm. Om het anker tegen het juk aangetrokken te houden is een kracht nodig van 10 N (dus bij $x = 0$). Deze kracht zou bijvoorbeeld veroorzaakt kunnen worden door een veer die tracht het anker van het juk weg te trekken.
We gaan uit van een normale toestand waarin de spoel bekrachtigd is, zodat $x = 0$. De spoel wordt daarbij gevoed uit een gelijkspanningsbron.
Wat is de kleinste waarde van de gelijkstroom die nodig is om het anker tegen het juk te houden?

5.2e Vervolgens wordt de spoel gevoed uit een wisselspanningsbron met een frequentie van 50 Hz. Door de voeding uit een wisselspanningsbron zal de kracht op het anker pulseren. We veronderstellen nu dat de massa van het anker zo groot is dat het anker tegen het juk getrokken blijft als de gemiddelde kracht op het anker groter is dan 10 N (er geldt nog steeds $x = 0$).
Wat is de kleinste (effectieve) waarde van de wisselstroom die nodig is om het anker tegen het juk te houden?

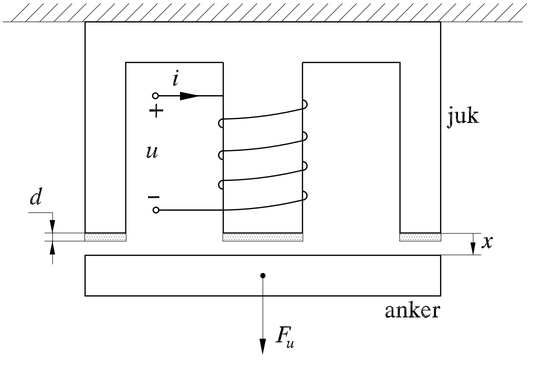
5.2f Wat is de (effectieve) waarde van de wisselspanning die daarbij behoort?

5.2g De wisselspanningsbron wordt op deze waarde ingesteld. Vervolgens wordt het anker (met de hand) losgetrokken van het juk ($x = 1$ mm).
Wat is de gemiddelde waarde van de kracht op het anker?

5.2h Na enige tijd wordt een rookpluim waargenomen. Toelichting: de spoel is zodanig gemaakt dat hij de stroom in aangetrokken toestand net aan kan.
Waarom kan de spoel van de magneetschakelaar te heet worden als het anker van het juk verwijderd blijft?

Opgave 5.3

De onderstaande figuur is een schematische weergave van het magnetische circuit van een heftoestel.
De spoel heeft N windingen.



De weerstand van de spoel is verwaarloosbaar klein.
De oppervlakte/doorsnede van het ijzercircuit is overal A, behalve in de middenpoot; daar is de oppervlakte/doorsnede $2A$. Voor het ijzer van het magnetische circuit geldt: $\mu_r = \infty$. In de luchtspleet zijn plaatjes niet-magnetisch materiaal opgenomen met een dikte van 0.2 mm: $\mu_r = 1$; $d = 0.2$ mm. Er wordt uitgegaan van een homogene verdeling van het veld in de luchtspleten (en dus in de plaatjes).
Op het beweegbare deel, het anker, werkt een uitwendige kracht F_u. In deze opgave verwaarlozen we de zwaartekracht.
Gegeven: $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m

5.3a Geef een uitdrukking voor de coëfficiënt van zelfinductie van de spoel.

5.3b Geef een uitdrukking voor de kracht van elektromagnetische oorsprong op het anker.

Gegeven: $N = 1000$; $A = 1$ cm^2. De spoel wordt gevoed uit een stroombron, zodat $I = 2$ A.

Met behulp van de kracht F_u wordt het anker verplaatst van $x = 0.2$ mm naar $x = 2$ mm.

5.3c Hoeveel neemt de in het veld opgeslagen energie toe gedurende de verplaatsing?

5.3d Hoeveel energie levert de stroombron gedurende de verplaatsing?

5.3e Hoeveel mechanische energie wordt er via de kracht F_u toegevoerd aan het systeem gedurende de verplaatsing?

Voor de massa van het anker geldt $m = 1$ kg. Het anker wordt in de positie $x = 2$ mm losgelaten ($F_u = 0$).

5.3f Hoeveel kinetische energie heeft het anker juist voor het moment dat het de plaatjes raakt?

5.3g Wat is de waarde van de snelheid op dat moment?

Het anker bevindt zich nu tegen de plaatjes.

5.3h Wat is de kleinste waarde van de gelijkstroom die nodig is om het anker tegen de plaatjes te houden als F_u = 10 N?

Vervolgens wordt de spoel gevoed uit een wisselspanningsbron met een frequentie van 50 Hz. Door deze voeding zal de kracht op het anker pulseren. We veronderstellen nu dat de massa van het anker zo groot is dat het anker tegen de plaatjes getrokken blijft als de gemiddelde kracht van elektromagnetische oorsprong op het anker groter is dan 10 N.

5.3i Wat is de kleinste (effectieve) waarde van de wisselstroom die nodig is om het anker tegen het juk te houden?

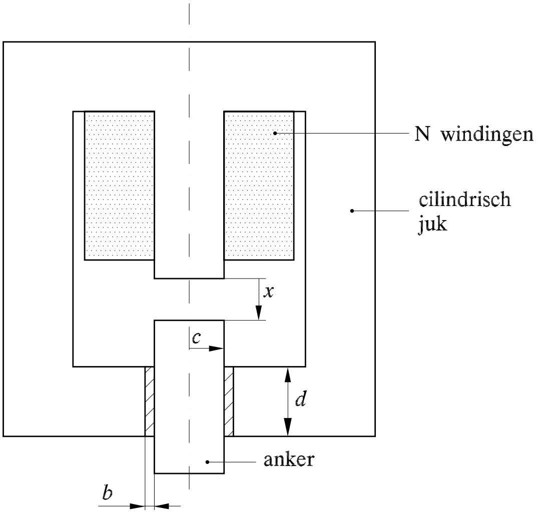
5.3j Wat is de (effectieve) waarde van de wisselspanning die daarbij hoort?

De wisselspanningsbron wordt op deze waarde ingesteld. Vervolgens wordt het anker verplaatst naar x=2 mm.

5.3k Wat is de gemiddelde waarde van de kracht van elektromagnetische oorsprong op het anker?

Opgave 5.4

Onderstaande figuur is een doorsnede van een cilindrische elektromagneet. Het ijzeren anker kan schuiven in een cilindrische niet-magnetische bus (μ_r=1; in de tekening gearceerd). Voor het ijzer van het magnetische circuit geldt: $\mu_r = \infty$.



Het veld in de luchtspleet en in de niet-magnetische bus wordt homogeen verondersteld. Voor de bus geldt namelijk: $b \ll c$.
Gegeven: $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m

5.4a Geef een vervangingsschema voor het magnetische circuit.

5.4b Geef een uitdrukking voor de coëfficiënt van zelfinductie.

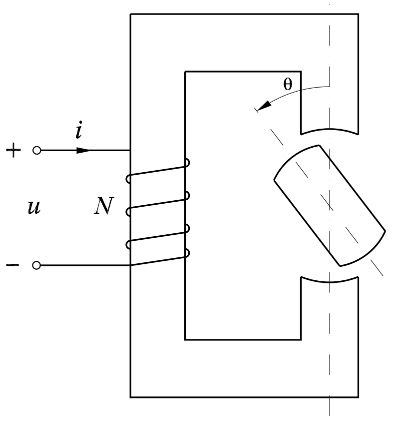
Voor de volgende vragen is gegeven: $N = 500$; $b = 2$ mm ; $c = 20$ mm ; $d = 40$ mm

5.4c Bereken de kracht van elektromagnetische oorsprong voor het geval dat de stroom door de spoel een gelijkstroom is ter waarde van 10 A en dat voor de positie van het anker $x = 5$ mm geldt.

5.4d Bereken de gemiddelde waarde van de kracht voor het geval dat de stroom door de spoel een wisselstroom is ter waarde van 20 A en dat voor de positie van het anker $x = 5$ mm geldt.

Opgave 5.5

Nevenstaande figuur is een schematische weergave van een roterende elektromechanische omzetter (een primitieve reluctantiemotor). De coëfficiënt van zelfinductie van de spoel van deze omzetter wordt gegeven door:
$L(\theta) = 1 + \frac{1}{2}\cos(2\theta)$ H
De spoel wordt gevoed uit een gelijkstroombron van 5 A. De weerstand van de spoel is verwaarloosbaar klein.



5.5a Hoe groot is het elektromagnetische koppel in de positie $\theta = 0$, in de positie $\theta = \pi/4$ en in de positie $\theta = \pi/2$ rad.

In de eerste proef wordt het massatraagheidsmoment van de rotor verwaarloosd. In deze proef wordt de rotor verdraaid van de positie $\theta = 0$ naar de positie $\theta = \pi/4$ rad met een uitwendig koppel T_u.

5.5b Hoeveel neemt de in het veld opgeslagen energie toe gedurende de verplaatsing? (numeriek antwoord)

5.5c Hoeveel mechanische energie wordt er via het koppel T_u toegevoerd aan het systeem gedurende de verplaatsing? (numeriek antwoord)

5.5d Hoeveel energie levert de stroombron gedurende de verplaatsing? (numeriek antwoord)

In de tweede proef wordt de rotor eerst in de positie $\theta = \pi/4$ rad vastgehouden. Vervolgens wordt de rotor losgelaten. Het massatraagheidsmoment van de rotor is 0.001 kgm^2.

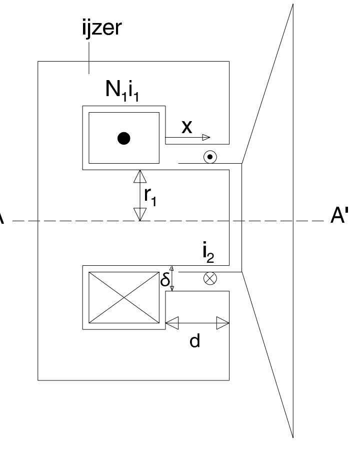
5.5e Hoeveel kinetische energie heeft de rotor op het moment dat hij de positie $\theta = 0$ passeert?

5.5f Wat is de waarde van de hoeksnelheid op dat moment?

5.5g In de praktijk wordt vaak gewerkt met het toerental in omwentelingen (of toeren) per minuut in plaats van met hoeksnelheden. Met welk toerental komt de in het vorige onderdeel berekende hoeksnelheid overeen?

Opgave 5.6

De volgende figuur stelt de doorsnede van een inmiddels verouderd type luidspreker voor, de zogenaamde elektrodynamische luidspreker.
De luidspreker is rotatiesymmetrisch rond de lijn AA'. Het ijzeren kerndeel heeft een oneindig grote permeabiliteit ($\mu_r = \infty$).
Spoel 1 heeft N_1 windingen en wordt gevoed uit een gelijkstroombron met stroom $i_1 = I_1$.
Spoel 2 is bevestigd aan de beweegbare conus van de luidspreker en bestaat uit één (cirkelvormige) winding.



De stroom door deze winding wordt i_2 genoemd. De dikte van de draad van de spoel is verwaarloosbaar klein; de positie van de spoel in de luchtspleet wordt aangeduid met x.
De luchtspleet waarin spoel 2 zich bevindt, heeft een grootte δ. Deze grootte δ is verwaarloosbaar ten opzichte van de straal van het kerndeel waarom de spoel kan schuiven (r_1; $\delta \ll r_1$). Dit betekent dat de verdeling van het veld in de luchtspleet als homogeen beschouwd mag worden.
Het beweegbare deel heeft een massa m en kan wrijvingsloos bewegen.

5.6a Teken het equivalente netwerk van het magnetische circuit en geef aan hoe groot de reluctanties in het netwerk zijn.

5.6b Geef uitdrukkingen voor de coëfficiënt van zelfinductie van spoel 1, voor de coëfficiënt van zelfinductie van spoel 2, en voor de coëfficiënt van wederzijdse inductie van de beide spoelen.

Werk verder met

$$\psi_1 = L_1 i_1 + M_0 \frac{d-x}{d} i_2 \;\; ; \;\; \psi_2 = M_0 \frac{d-x}{d} i_1 + L_{20} \frac{d-x}{d} i_2 \;\; ; \;\; 0 \leq x \leq d$$

Hierin zijn L_1, L_{20} en M_0 constanten.

5.6c Geef uitdrukkingen voor de in het magnetische veld opgeslagen energie en voor de kracht van elektromagnetische oorsprong.

5.6d Spoel 2 is aangesloten op een stroombron met als stroom $i_2 = \hat{\imath} \cos \omega t$. De uitdrukking voor de kracht is nu een periodieke functie. Uit hoeveel termen bestaat de fourierreeks en welke (hoek)frequenties komen daar in voor?

Vanaf hier wordt $L_{20} i_2$ in deze opgave verder verwaarloosd ten opzichte van $M_0 I_1$ ($L_{20} i_2 \ll M_0 I_1$). Voorts wordt de weerstand van spoel 2 nul verondersteld (R_2=0).

5.6e Spoel 2 is nog steeds aangesloten op een stroombron met als stroom $i_2 = \hat{i}\cos\omega t$.
Geef een uitdrukking voor de kracht van elektromagnetische oorsprong.

5.6f Hoe groot is de amplitude van de trillende beweging die de conus maakt?

Spoel 2 wordt op $t = 0$ ingeschakeld op een spanningsbron met als spanning $u_2 = \hat{u}\cos\omega t$. Op $t = 0$ bevindt de spoel zich op $x = d/2$. Er geldt nog steeds $L_{20}i_2 \ll M_0 I_1$ en $R_2 = 0$.

5.6g Geef een uitdrukking voor de met spoel 2 gekoppelde flux.

5.6h Hoe groot is de amplitude van de trillende beweging die de conus maakt? Let op. Deze vraag kan beantwoord worden met de bij antwoord g gevonden uitdrukking voor ψ_2 en de eerder in deze opgave gegeven uitdrukking voor ψ_2 met $L_{20}i_2 \ll M_0 I_1$. De uitdrukking voor de kracht van elektromagnetische oorsprong is hierbij niet nodig.

6 Vermogenselektronica

6.1 Inleiding

In hoofdstuk 4 hebben we al een elementaire elektrische omzetter behandeld: de transformator. Bij deze omzetter is de uitgangsfrequentie gelijk aan de ingangsfrequentie. In veel gevallen willen we echter dat de frequentie aan de ingang van de omzetter kan afwijken van de frequentie aan de uitgang, waarbij deze frequenties gelijk aan nul mogen zijn (gelijkspanning). Dit soort omzetters kunnen met elektronische middelen worden gerealiseerd.

Zeker in de beginperiode van de vermogenselektronica werd deze voornamelijk ingezet voor de elektrische aandrijftechniek, in het bijzonder voor de regeling van draaistroommotoren. Dit zijn motoren die gevoed worden door een (meestal) driefasige (draaistroom)voeding. Mechanische grootheden als toerental en koppel kunnen bij deze motoren worden beïnvloed door variatie van de frequentie en de amplitude van de voedende bron (zie ook paragraaf 2.7 en hoofdstuk 7), wat met een vermogenselektronische omzetter relatief gemakkelijk is. Daarnaast worden in de elektrische aandrijftechniek vaak gelijkstroommotoren gebruikt, die, zoals de naam al zegt, gevoed moeten worden uit een gelijkspanningsbron (zie ook paragraaf 5.4). Om het toerental van dit soort motoren op een efficiënte wijze te kunnen regelen hebben we een gelijkspanningsbron met een in te stellen waarde van de gelijkspanning nodig. Ook hierbij kan de vermogenselektronica ons van dienst zijn.

Tegenwoordig wordt de vermogenselektronica steeds vaker buiten de aandrijftechniek toegepast. In de loop van dit hoofdstuk zullen we hiervan een aantal voorbeelden tegenkomen.

We kunnen de vermogenselektronische omzetters in de volgende categorieën onderverdelen:

- *Gelijkspanning/gelijkspanningsomzetter (DC/DC convertor)*
  Hierbij wordt een gelijkspanning omgezet in een gelijkspanning van een andere waarde.

Waarom kunnen we hierbij niet rechtstreeks gebruik maken van een transformator?

  We kunnen hierbij bijvoorbeeld denken aan voedingen voor elektronische apparatuur, zoals computers en geluidsinstallaties. Hierbij houdt de omzetter de uitgangsspanning op een gewenst niveau, terwijl de ingangsspanning en de belasting kunnen variëren. In de aandrijftechniek kan deze omzetter bijvoorbeeld gebruikt worden om het toerental van een gelijkstroommotor te regelen, die zijn energie ontleend aan een gelijkspanningsbron met een constante gelijkspanning, zoals dat bij de Nederlandse treinen en trams vaak gebeurt.

- *Wisselspanning/gelijkspanningsomzetter (AC/DC convertor)*
  Deze zet een wisselspanning om in een gelijkspanning, wat we ook wel gelijkrichten noemen. Gelijkrichters worden op zeer veel plaatsen gebruikt. Enkele voorbeelden zijn de voeding van elektronische apparaten, de voeding van elektrolyseprocessen en de voeding van de bovenleiding van treinen en trams (vanuit het elektriciteitsnet).
- *Gelijkspanning/wisselspanningsomzetter (DC/AC convertor)*
  Deze omzetter zet gelijkspanning om in wisselspanning. Eén van de vele mogelijke toepassingen kunnen we vinden bij het gebruik van zonne-energie: hierbij moet de door de zonnecel opgewekte gelijkspanning omgezet worden in wisselspanning, bijvoorbeeld die van het elektriciteitsnet. Daarnaast is het met behulp van deze omzetters mogelijk om draaistroommotoren te voeden uit een gelijkspanningsbron: bij treinen worden steeds vaker (robuuste) draaistroommotoren toegepast in plaats van de wat kwetsbaardere (en duurdere) gelijkstroommotoren, terwijl op de bovenleiding gelijkspanning beschikbaar is.
- *Wisselspanning/wisselspanningsomzetter (AC/AC convertor)*
  Deze omzetter is voornamelijk van belang voor de elektrische aandrijftechniek: doordat de frequentie van de uitgangsspanning regelbaar is, kan het toerental van draaistroommotoren hiermee betrekkelijk gemakkelijk gevarieerd worden. Deze omzetter wordt vaak een frequentie-omzetter genoemd en is meestal opgebouwd uit de combinatie van een wisselspanning/gelijkspanningsomzetter en een gelijkspanning/wisselspanningsomzetter.
  Een geheel andere toepassing is de voeding van gasontladingslampen die tegenwoordig vaak met een hoogfrequente spanning gevoed worden.

In de meeste gevallen kan de energie-richting bij omzetters omgekeerd worden, zodat een gelijkspanning/wisselspanningsomzetter gelijk kan zijn aan een wisselspanning/gelijkspanningsomzetter. We zullen hier later nog op terugkomen.

In dit hoofdstuk beginnen we met de eenvoudigste vermogenselektronische omzetter, de diodegelijkrichter. Daarbij zullen we een aantal uitvoeringen en een aantal aspecten van deze omzetter aan de orde stellen. Vervolgens kijken we naar de thyristorgelijkrichter. Dit is een wisselspanning/gelijkspanningsomzetter die, in tegenstelling tot de diodegelijkrichter, stuurbaar is. Daarbij komt tevens een model van de thyristor aan de orde.

In paragraaf 6.5 behandelen we de chopper, een gelijkspanning/gelijkspanningsomzetter. We zullen dit hoofdstuk afsluiten met een paragraaf over de spanningsinvertor, een gelijkspanning/wisselspanningsomzetter.

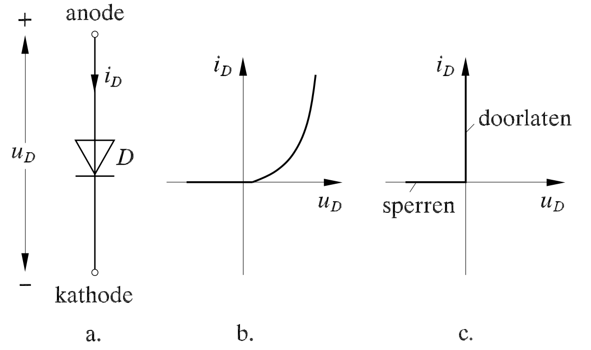
6.2 De gelijkrichter met één diode

Een gelijkrichter is een omvormer die een wisselspanning omzet in een gelijkspanning. Deze omzetters worden onder andere gebruikt als ”voor”-omzetters die vanuit de netaansluiting een gelijkspanning opwekken, waaruit andere gelijkspanning/gelijkspanningsomzetters (zoals bij de voeding van veel elektronische apparaten) of gelijkspanning/wisselspanningsomzetters gevoed worden. Om die reden zijn gelijkrichters te vinden in zeer veel vermogenselektronische schakelingen.

De eenvoudigste gelijkrichter, de diodegelijkrichter, is tevens de eenvoudigste vermogenselektronische omzetter. In deze paragraaf zullen we de gelijkrichter met één diode en een aantal aspecten van deze omzetter aan de orde stellen. We beginnen daarbij met een model van de diode.

De diode

In figuur 6.1a is het symbool van een diode weergegeven, waarbij bovendien de spanning over de diode u_D en de stroom door de diode i_D gedefinieerd zijn. In figuur 6.1b is het verband tussen deze stroom en deze spanning geschetst.



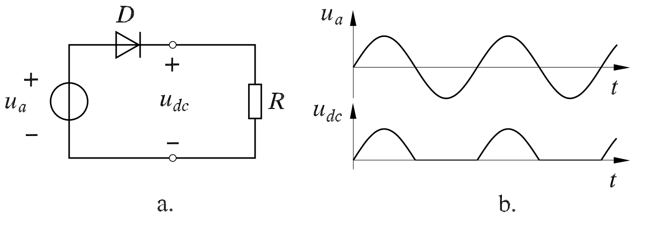
Figuur 6.1 De diode

In dit hoofdstuk zullen we steeds naar ideale componenten kijken. Dit is voldoende als we de werking van een vermogenselektronische omzetter willen begrijpen, maar beslist onvoldoende als we een omzetter willen ontwerpen. We zullen hier dan ook gebruik maken van zogenaamde ideale dioden, waarvan de karakteristiek in figuur 6.1c geschetst is.

De diode is hier een ideale schakelaar. Daarmee bedoelen we dat de spanning erover nul is als hij in geleiding is (schakelaar gesloten; de diode laat door) en dat de stroom erdoor nul is als hij niet in geleiding is (schakelaar open; de diode spert). De diode is echter een zeer bijzondere schakelaar: hij schakelt in als de spanning erover positief wordt en schakelt uit als de stroom erdoor nul wordt. Het gedrag van een diode wordt dus uitsluitend bepaald door het gedrag van het circuit waarin hij opgenomen is en niet door bijvoorbeeld een extern stuursignaal. We kunnen bij een extern stuursignaal bijvoorbeeld denken aan de basisstroom bij een transistor. We zeggen ook wel dat de diode een niet stuurbare schakelaar is.

De gelijkrichter met één diode met weerstandsbelasting

In figuur 6.2a is een zeer eenvoudige gelijkrichtschakeling weergegeven.



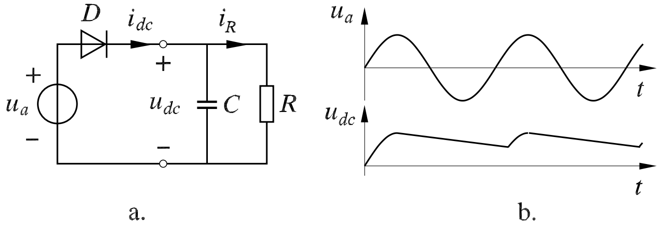
Figuur 6.2 De gelijkrichter met één diode met weerstandsbelasting

De ingangsspanning van de gelijkrichter is hier de wisselspanningsbron u_a, waarvoor geldt:

$$u_a = \hat{u} \sin \omega t \tag{6.1}$$

Als belasting van de gelijkrichter treedt de weerstand R op. De ingangs- en de uitgangsspanning zijn geschetst in figuur 6.2b. De spanning direct achter de diode duiden we aan met u_{dc} (direct current).

Controleer zelf de geschetste spanningsvormen in figuur 6.2b.



Figuur 6.3 De gelijkrichter met één diode met afvlakcondensator

De gelijkrichter met één diode met afvlakcondensator

Een zuivere weerstandsbelasting van een gelijkrichter zoals in figuur 6.2 komt zeer weinig voor. Een belasting die veel vaker voorkomt, is een elektronisch apparaat: het apparaat wordt via een gelijkrichter uit een wisselspanningsbron, zoals het elektriciteitsnet, gevoed.

Voor de voeding van een elektronische schakeling is een gelijkspanning met een vorm zoals in figuur 6.2b is geschetst echter niet bruikbaar. Daarom wordt de gelijkspanning "afgevlakt" met een condensator. De zo ontstane schakeling is in figuur 6.3a getekend, waarbij de belasting voorgesteld is als een weerstand (R).

Als de diode niet geleidt, vormt het belastingsnetwerk een RC-netwerk, waarin de stroom exponentieel afneemt met tijdconstante RC. De ingangs- en de uitgangsspanning van de gelijkrichter zijn geschetst in figuur 6.3b.

Controleer zelf de geschetste spanningsvormen in figuur 6.3b.

Voor de verdere beschouwing zullen we uitgaan van een zeer (oneindig) grote condensator, waardoor de uitgangsspanning van de condensator als constante gezien kan worden: $u_{dc} = U_{dc}$. Dit is in de praktijk meestal toegestaan als de inschakelverschijnselen zijn afgelopen, met andere woorden, als de stationaire toestand is bereikt.

Wat betekent een zeer grote condensator voor de tijdconstante van het RC-netwerk?

De constante uitgangsspanning heeft tot gevolg dat ook de stroom door de weerstand constant is:

$$i_R = \frac{U_{dc}}{R} \tag{6.2}$$

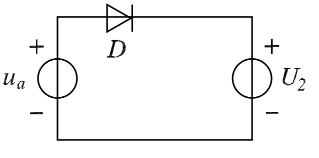
Omdat de gemiddelde waarde van de stroom door de condensator gelijk aan nul is voor de stationaire toestand, is de stroom door de weerstand gelijk aan de gemiddelde waarde van de diodestroom. Hiermee gaat (6.2) over in:

$$I_{dc} = \frac{1}{T}\int_0^T i_{dc}\,\mathrm{d}t = \frac{U_{dc}}{R} \tag{6.3}$$

Hierin is T de periodetijd van de voedende wisselspanning.

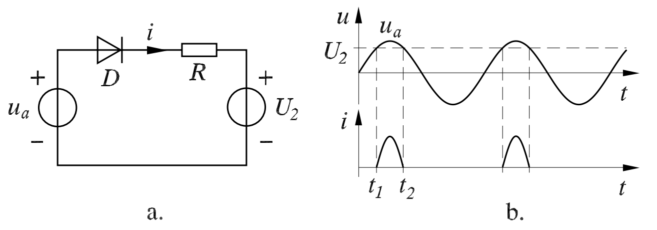
De gelijkrichter met één diode met spanningsbron belasting

We kunnen nu de RC-combinatie uit figuur 6.3a vervangen door een spanningsbron die voldoet aan (6.3) zoals in figuur 6.4 is weergegeven ($U_2 = U_{dc}$). De spanningsbron in deze figuur kan echter ook een gelijkstroommachine of een op te laden accu representeren.



Figuur 6.4 De gelijkrichter met één diode met spanningsbronbelasting

Als we deze schakeling nader beschouwen, stuiten we direct op een probleem. Als de spanning u_a namelijk groter wordt dan U_2, worden twee spanningsbronnen parallel geschakeld, wat tot een oneindig grote stroom leidt. In werkelijkheid wordt de stroom beperkt door de altijd in het circuit aanwezige (parasitaire) weerstand, zoals in figuur 6.5a schematisch is weergegeven.



Figuur 6.5 De gelijkrichter met één diode met weerstand

Als de diode geleidt, geldt voor de stroom erdoor:

$$i = \frac{u_a - U_2}{R} \tag{6.4}$$

Onder welke voorwaarde geleidt de diode?

Bij voedingen voor kleine elektronische schakelingen is de circuitweerstand meestal relatief zodanig groot dat de stroompieken niet uitzonderlijk hoog worden. Bij gelijkrichters voor grotere vermogens zal men er altijd naar streven om de circuitweerstand klein te maken.

Waarom is het bij gelijkrichters voor grotere vermogens belangrijk om de circuitweerstand klein te houden?

Dit resulteert in de praktijk in ontoelaatbaar grote stroompieken. We zullen dan ook naar andere methoden moeten zoeken om de stroom te begrenzen.

Om inzicht op te bouwen ten behoeve van schakelingen die we later zullen beschouwen, zullen we echter eerst het gedrag van de schakeling in figuur 6.5a nader bekijken. Daartoe onderscheiden we vijf werkgebieden (zie ook uitdrukking (6.1):

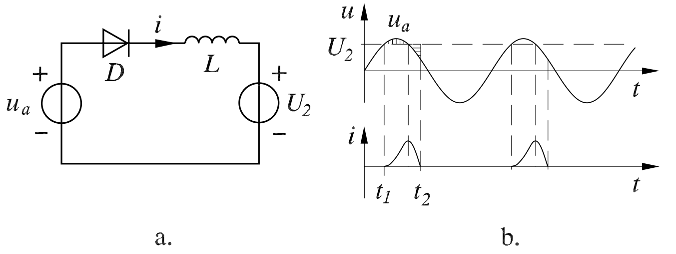
- $\boldsymbol{\hat{u} < U_2}$
  In dit geval zal de diode niet in geleiding gaan.
- $\boldsymbol{0 < U_2 < \hat{u}}$
  De spannings- en stroomvormen voor dit geval zijn geschetst in figuur 6.5b. Als er een stroom loopt, levert de bron u_a energie, wordt er energie in de weerstand gedissipeerd en neemt de bron U_2 energie op. Gemiddeld over een periode van de wisselspanning u_a vindt er energietransport plaats van bron u_a naar bron U_2.
- $\boldsymbol{U_2 = 0}$
  De stroom loopt nu gedurende een halve periode van de wisselspanning u_a. Gedurende deze tijd levert de bron u_a energie en wordt er energie in de weerstand gedissipeerd. De bron U_2 is niet actief.
- $\boldsymbol{-\hat{u} < U_2 < 0}$
  De stroom loopt nu gedurende meer dan een halve periode van de wisselspanning u_a. Als $u_a > 0$ leveren zowel u_a als U_2 energie: alle energie uit de bronnen wordt gedissipeerd in de weerstand R. Als $u_a < 0$ neemt de bron u_a energie op, terwijl de bron U_2 energie levert. Gemiddeld over een periode van de wisselspanning u_a vindt er geen energietransport plaats tussen de bronnen u_a en U_2: alles wordt gedissipeerd.

- $\boldsymbol{U_2 < -\hat{u}}$
  De stroom loopt nu continu. Verder is de situatie hetzelfde als in het vorige geval.

Controleer bovenstaande vijf gevallen zorgvuldig.

De gelijkrichter met één diode met spoel

Een beter element om de stroom te begrenzen is een spoel, waarmee het bovendien mogelijk is om tijdelijk energie op te slaan. De schakeling in figuur 6.5a gaat dan over in de schakeling volgens figuur 6.6a. De bijbehorende spanningsvormen staan in figuur 6.6b.



Figuur 6.6 De gelijkrichter met één diode met spoel

De diode gaat in geleiding op het moment dat u_a groter wordt dan U_2. Vanaf dat moment ($t = t_1$), geldt er voor de stroom door de spoel:

$$u_a - U_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{6.5}$$

Omdat de stroom nul is op het tijdstip $t = t_1$, heeft deze differentiaalvergelijking als oplossing:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t} (u_a - U_2)\,\mathrm{d}t \tag{6.6}$$

De diode gaat uit geleiding als de stroom erdoor nul wordt. Het tijdstip waarop dit gebeurt, noemen we $t = t_2$. Hiervoor geldt:

$$i(t_2) = \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t_2} (u_a - U_2)\,\mathrm{d}t = 0 \tag{6.7}$$

Het moment van uitschakelen volgt dus uit de voorwaarde dat de integraal van de spanning over de spoel nul moet zijn. Deze integraal wordt de ”spanningstijdintegraal” of ”volt-seconde-integraal” genoemd en is in figuur 6.6b als een gearceerd gebied weergegeven. In deze figuur is bovendien de stroomvorm geschetst.

Controleer zelf de geschetste spannings- en stroomvormen in figuur 6.6b.

Voorts kunnen we hier nog opmerken dat de grootte van L blijkbaar geen invloed heeft op het uitschakeltijdstip t_2. De grootte van L heeft overigens wel invloed op de grootte van de stroom.

De spanningstijdintegraal of volt-seconde-integraal

Later zal blijken dat de voorwaarde dat de spanningstijdintegraal of volt-seconde-integraal gelijk is aan nul veel vaker een rol speelt bij vermogenselektronische schakelingen. Daarom gaan we nog iets verder op deze integraal in. In het algemeen geldt voor een spoel:

$$u = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} \quad ; \quad \psi = Li \tag{6.8}$$

Deze differentiaalvergelijking heeft als oplossing:

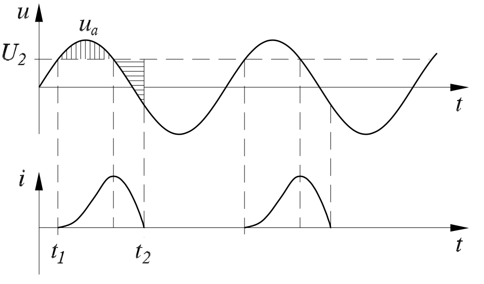
$$\psi(t_2) = \psi(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} u\,\mathrm{d}t \quad \text{of} \quad i(t_2) = i(t_1) + \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t_2} u\,\mathrm{d}t \tag{6.9}$$

We zien hieraan dat de volt-seconde-integraal eigenlijk een maat is voor de toename van de flux in een spoel. Dit geldt dan ook voor het gearceerde oppervlak in figuur 6.6b. Bij een periodiek schakelende vermogenselektronische omzetter moet de toename van de flux over een periode gelijk zijn aan nul om de omzetter in stationair bedrijf te laten werken.

Werkgebieden bij een gelijkrichter met één diode met spoel

Voor de verdere beschouwing onderscheiden we vijf werkgebieden:

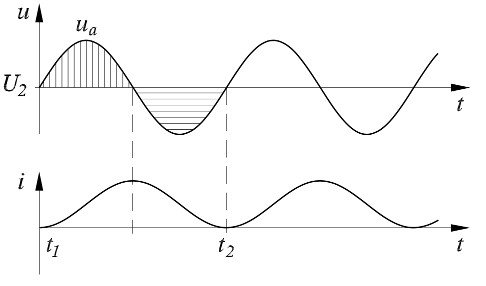
- $\boldsymbol{\hat{u} < U_2}$
  In dit geval zal de diode niet in geleiding gaan.
- $\boldsymbol{0 < U_2 < \hat{u}}$ **en** $\boldsymbol{t_2 < \pi/\omega}$
  De spannings- en stroomvormen voor dit geval zijn geschetst in figuur 6.6b. Als er een stroom loopt, levert de bron u_a energie en neemt de bron U_2 energie op: er vindt energietransport plaats van bron u_a naar bron U_2.
- $\boldsymbol{0 < U_2 < \hat{u}}$ **en** $\boldsymbol{t_2 > \pi/\omega}$
  Voor dit geval zijn de spannings- en de stroomvormen geschetst in figuur 6.7.



Figuur 6.7 Enkele spannings- en stroomvormen behorende bij figuur 6.6a voor $0 < U_2 < \hat{u}$ *en* $t_2 > \pi/\omega$

Voor $t_1 < t < \pi/\omega$ levert de bron u_a energie en neemt de bron U_2 energie op. Voor $\pi/\omega < t < t_2$ nemen beide bronnen energie op. Deze energie wordt aan de spoel onttrokken. Gemiddeld over een periode van de wisselspanning u_a vindt er energietransport plaats van bron u_a naar bron U_2.

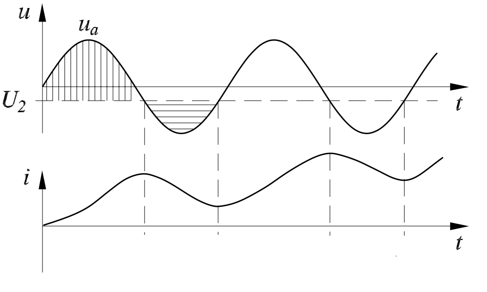
- $\boldsymbol{U_2 = 0}$
  Voor het inschakelmoment van de diode geldt nu $t_1 = 0$. De volt-seconde-integraal zal nu gelijk zijn aan nul voor $t_2 = 2\pi/\omega$. Dit betekent dat de stroom net continu loopt (zie figuur 6.8).



Figuur 6.8 Enkele spannings- en stroomvormen behorende bij figuur 6.6a voor $U_2 = 0$

Gedurende de eerste halve periode levert de bron u_a energie aan de spoel; tijdens de tweede halve periode zijn de rollen omgekeerd. De bron U_2 is (natuurlijk) niet actief. Gemiddeld over een periode van de wisselspanning u_a vindt er dus geen energietransport plaats.

- $\boldsymbol{U_2 < 0}$
  Voor het inschakelmoment van de diode geldt weer $t_1 = 0$. De volt-seconde-integraal is nu echter niet gelijk aan nul voor $t = 2\pi/\omega$ (zie figuur 6.9).



Figuur 6.9 Enkele spannings- en stroomvormen behorende bij figuur 6.6a voor $U_2 < 0$

Gedurende de eerste halve periode leveren zowel de bron u_a als de bron U_2 energie aan de spoel; tijdens de tweede halve periode onttrekt de bron u_a energie aan de spoel, maar levert de bron U_2 nog steeds energie aan de spoel. Over een periode neemt de in de spoel opgeslagen energie dus toe: de volt-seconde-integraal over een periode is groter dan nul. Op $t = 2\pi/\omega$ is de stroom dan ook groter dan nul. Deze toestand loopt volledig uit de hand. In het algemeen geldt dat de volt-seconde-integraal over een periode nul moet zijn om een stationaire toestand te bereiken.

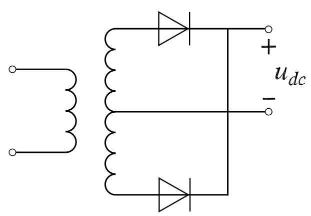
Controleer bovenstaande vijf gevallen zorgvuldig.

6.3 Gelijkrichters met twee of vier dioden

Een nadeel van een gelijkrichter met slechts één diode is dat de "gelijk"-spanning direct achter de diode u_{dc} een zeer sterke "rimpel" heeft (zie figuur 6.2). In deze paragraaf zullen we zien dat de "rimpel" aanzienlijk kleiner is bij een gelijkrichter met twee dioden en bij een zogenaamde bruggelijkrichter die vier dioden heeft.

De gelijkrichter met twee dioden

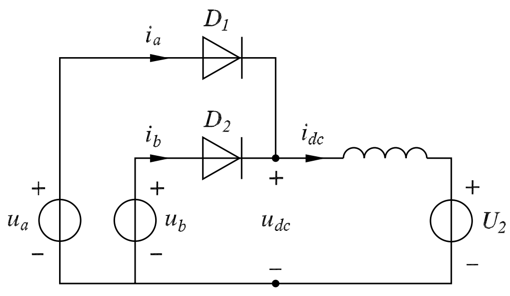
Met behulp van een transformator (die vaak toch al aanwezig is) kunnen eenvoudig twee wisselspanningen gemaakt worden die in tegenfase zijn, zoals in figuur 6.10 is aangegeven. Elk van deze spanningen wordt gebruikt als ingangsspanning van een gelijkrichter met één diode. Deze gelijkrichters worden vervolgens aan gelijkspanningszijde parallel geschakeld.



Figuur 6.10 Een gelijkrichter met een transformator en twee dioden

Voor de verder beschouwing gaan we uit van het in figuur 6.11 getekende schema. Voor de daarin voorkomende wisselspanningen schrijven we:

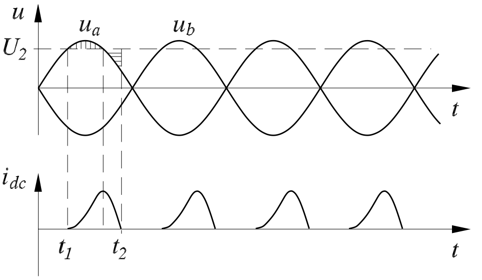
$$u_a = \hat{u} \sin \omega t \quad ; \quad u_b = -\hat{u} \sin \omega t \tag{6.10}$$



Figuur 6.11 De gelijkrichter met twee dioden

In figuur 6.12 zijn enkele spannings- en stroomvormen getekend voor een bepaalde keuze van U_2. We zien dat de gelijkstroom i_{dc} twee pulsen per periode van de wisselspanning vertoond en zeggen dan dat het pulstal van de gelijkrichter 2 is.

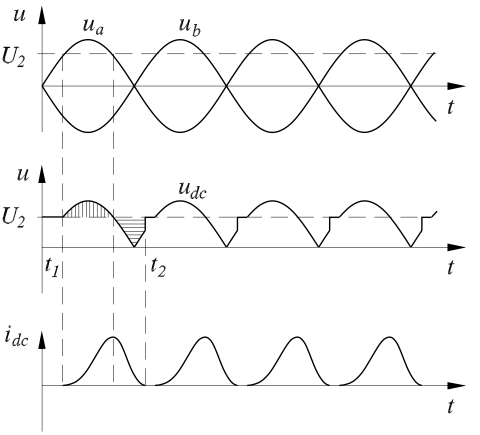
Vergelijk figuur 6.12 met figuur 6.6b. Hoe groot is het pulstal voor de gelijkrichter in figuur 6.6a?



Figuur 6.12 Enkele spannings- en stroomvormen behorende bij figuur 6.11

Er doet zich een interessant geval voor als $t_2 > \pi/\omega$. Op het tijdstip $t = \pi/\omega$ wordt u_b namelijk groter dan u_a, terwijl er nog steeds een stroom in de spoel loopt (zie figuur 6.13). Dit betekent dat de spanning over diode D_2 positief wordt en deze diode in geleiding gaat. Daardoor wordt de spanning over diode D_1 negatief, waardoor deze diode uit geleiding gaat. De stroom i_{dc}, die oorspronkelijk door diode D_1 liep wordt overgenomen door diode D_2. Dit overnameproces, dat we commutatie noemen, zullen we later nog uitgebreider bespreken.

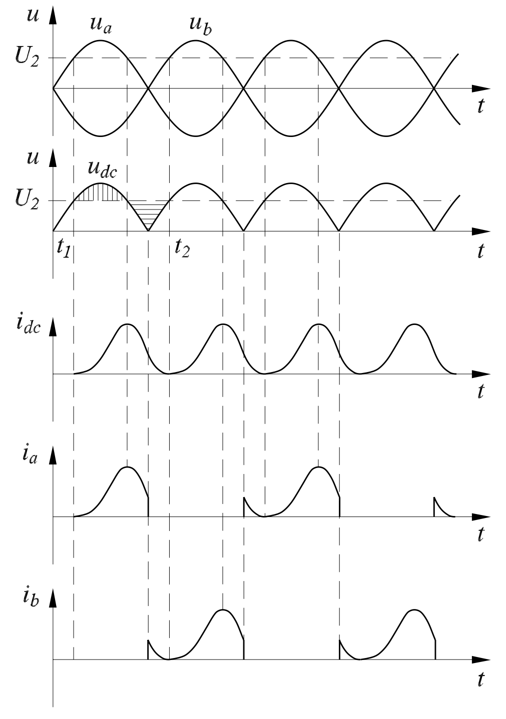
Verklaar het verloop van u_{dc} in figuur 6.13.



Figuur 6.13 Enkele spannings- en stroomvormen behorende bij figuur 6.11 voor $t_2 > \pi/\omega$

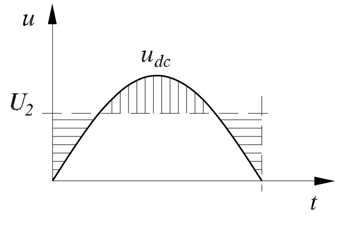
Er doet zich een tweede interessant geval voor als $t_2 = t_1 + \pi/\omega$. Dan is de stroompuls in i_{dc} precies een halve periode van de wisselspanning (zie figuur 6.14).

Om de waarde van de gelijkspanning U_2 voor dit geval te vinden, zouden we een uitdrukking voor de volt-seconde-integraal kunnen opstellen. Daaruit zouden we dan vervolgens weer een uitdrukking voor U_2 kunnen afleiden. We zullen hier een methode gebruiken die eenvoudiger is en bovendien meer inzicht geeft.



Figuur 6.14 Enkele spannings- en stroomvormen behorende bij figuur 6.11 voor $t_2 = t_1 + \pi/\omega$

We gaan weer uit van het gearceerde oppervlak dat met de volt-seconde-integraal overeenkomt. In figuur 6.14 zien we direct dat het oppervlak tussen U_2 en u_{dc} voor $\pi/\omega < t < t_2$ gelijk is aan het oppervlak tussen U_2 en u_{dc} voor $0 < t < t_1$. Als we de arcering tussen $\pi/\omega < t < t_2$ verplaatsen naar $0 < t < t_1$, krijgen we figuur 6.15.



Figuur 6.15 De gemiddelde waarde van u_{dc}

In deze figuur zien we direct dat U_2 in dit geval gelijk is aan de gemiddelde waarde van u_{dc}. Om deze te berekenen beschouwen we de eerste halve periode, waarin $u_{dc} = u_a$ (T is de periodetijd):

$$U_2 = U_{dc} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u_{dc}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \hat{u}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t) = \frac{2}{\pi}\hat{u} \tag{6.11}$$

Een andere uitleg is de volgende: de over een (halve) periode gemiddelde waarde van de spanning over een spoel is gelijk aan nul in stationair bedrijf of er kan geen gelijkspanning over een spoel staan.

We zijn er hier vanuit gegaan dat de stroom door de spoel nul was op $t=0$. Dit hoeft niet altijd het geval te zijn. Als de stroom op $t=0$ groter is dan de waarde op $t=\pi/\omega$ in figuur 6.14, blijft de differentiaalvergelijking voor de spoel natuurlijk gewoon geldig. In de oplossing (zie (6.9)) verandert de beginwaarde echter. Dit betekent dat de vorm van het verloop van de stroom door de spoel hetzelfde blijft, maar dat de hele functie als het ware opgetild wordt. De gemiddelde waarde van de gelijkstroom wordt dan ook hoger. Bij $U_2=2\hat{u}/\pi$ wordt de grootte van de gemiddelde waarde dus niet bepaald door de schakeling, maar alleen door de begincondities.

Hoe zouden we de gemiddelde waarde kunnen beïnvloeden?

Zoals we in figuur 6.14 kunnen zien treden er geen leemten op in de stroom i_{dc}. Dit noemen we leemtevrij bedrijf (Engels: continuous-conduction mode). In de figuren 6.12 en 6.13 treden er wel leemten op in de stroom i_{dc}. We spreken dan van leemtebedrijf (Engels: discontinuous-conduction mode).

We kunnen nu de volgende vijf werkgebieden onderscheiden:

- $\boldsymbol{\hat{u} < U_2}$
  In dit geval zullen de dioden niet in geleiding gaan.
- $\boldsymbol{2\hat{u}/\pi < U_2 < \hat{u}}$ **en** $\boldsymbol{t_2 < \pi/\omega}$
  De spannings- en stroomvormen voor dit geval zijn geschetst in figuur 6.12. Er treedt geen commutatie op en de gelijkrichter is in leemtebedrijf.
- $\boldsymbol{2\hat{u}/\pi < U_2 < \hat{u}}$ **en** $\boldsymbol{t_2 < t_1 + \pi/\omega}$
  De spannings- en stroomvormen voor dit geval zijn geschetst in figuur 6.13. Er treedt commutatie op en de gelijkrichter is in leemtebedrijf.
- $\boldsymbol{U_2 = 2\hat{u}/\pi}$
  De spannings- en stroomvormen voor dit geval zijn geschetst in figuur 6.14 voor de laagst mogelijke stroom. Er is sprake van leemtevrij bedrijf en er treedt commutatie op.
- $\boldsymbol{U_2 < 2\hat{u}/\pi}$
  In dit geval is de spanningstijdintegraal voor de spoel over een (halve) periode positief, zodat de stroom net zoals in figuur 6.9 geleidelijk steeds groter wordt.

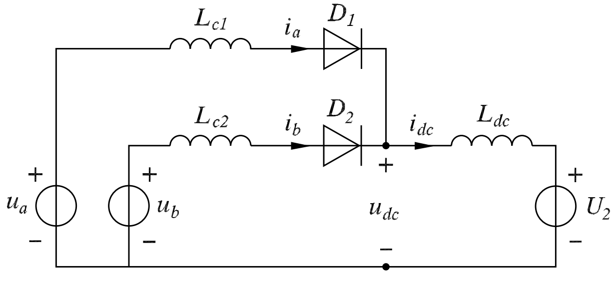
Wat is de invloed van de grootte van L op het gedrag van deze schakeling?

Commutatie

De commutatie van de stroom van diode D_1 naar D_2 en omgekeerd, zoals we die in de figuren 6.13 en 6.14 hebben gezien, verliep oneindig snel.

Dit betekent dat op het tijdstip $t = \pi/\omega$ de stroom in de spanningsbron u_a abrupt afgebroken wordt en in de spanningsbron u_b plotseling begint. In de praktijk hebben wisselspanningsbronnen echter vrijwel altijd een inductieve inwendige impedantie. In figuur 6.10 zijn dat bijvoorbeeld de spreidingsinductiviteiten van de transformator. Zoals we zullen zien verhinderen deze inductiviteiten een oneindig snelle commutatie.

Voor de behandeling van het commutatieproces maken we gebruik van figuur 6.16. We veronderstellen hierbij eenvoudigheidshalve dat de coëfficiënt van zelfinductie in het gelijkstroomcircuit L_{dc} oneindig groot is ($L_{dc} = \infty$), zodat de stroom in het gelijkstroomcircuit constant is ($i_{dc} = I_{dc}$).



Figuur 6.16 De gelijkrichter met twee dioden met commutatie-inductiviteiten

Voor $t < 0$ geleidt diode D_2 en geldt $i_b = I_{dc}$ (zie ook figuur 6.14 voor een periode later bij het tijdstip $t = 2\pi/\omega$). Omdat i_b een (ideale) gelijkstroom is, is de spanning over L_{c2} gelijk aan nul en geldt dus ook $u_{dc} = u_b$. Op het tijdstip $t = 0$ wordt u_a groter dan u_b, zodat de spanning over diode D_1 positief wordt en deze diode in geleiding gaat. Vanaf dit moment zijn er dus twee dioden in geleiding.

Waarom geleidt diode D_2 nog?

Voor het circuit geldt nu het volgende stelsel vergelijkingen:

$$u_a - L_{c1}\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} = u_b - L_{c2}\frac{\mathrm{d}i_b}{\mathrm{d}t} \quad \text{voor} \quad t > 0 \tag{6.12}$$

$$i_a + i_b = I_{dc} \tag{6.13}$$

Verder veronderstellen we dat de inductiviteiten L_{c1} en L_{c2} aan elkaar gelijk zijn en differentiëren we (6.13). Met de uitdrukkingen voor de wisselspanningen (6.10) gaat het stelsel dan over in:

$$2\hat{u}\sin\omega t - L_{c1}\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} = -L_{c1}\frac{\mathrm{d}i_b}{\mathrm{d}t} \quad \text{voor} \quad t > 0$$
$$\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_b}{\mathrm{d}t} = 0$$

Of

$$\hat{u}\sin\omega t = L_{c1}\frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} \quad \text{voor} \quad t > 0 \tag{6.14}$$

Hieruit volgt voor de oplossing:

$$i_a(t) = i_a(0) + \frac{1}{L_{c1}} \int_0^t \hat{u} \sin \omega t \, \mathrm{d}t \quad \text{met} \quad i_a(0) = 0 \quad \text{voor } t > 0$$

Of

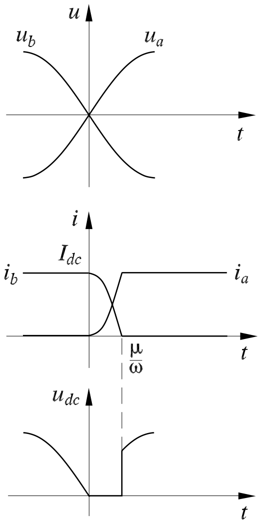
$$i_a(t) = \frac{\hat{u}}{\omega L_{c1}} (1 - \cos \omega t) \qquad \text{voor } t > 0 \tag{6.15}$$

Uit (6.13) volgt vervolgens:

$$i_b(t) = I_{dc} - \frac{\hat{u}}{\omega L_{c1}} (1 - \cos \omega t) \quad \text{voor } t > 0 \tag{6.16}$$

Deze stroomverlopen zijn weergegeven in figuur 6.17.

Leid deze stroomverlopen zelf af.



Figuur 6.17 Het commutatieproces

De stroom i_b blijft lopen tot het moment dat in figuur 6.17 is aangegeven met μ/ω. Hierin is μ de zogenaamde commutatiehoek of overlappingshoek. Met (6.16) volgt hiervoor:

$$i_b(\frac{\mu}{\omega}) = I_{dc} - \frac{\hat{u}}{\omega L_{c1}} (1 - \cos \mu) = 0 \quad \text{of} \quad 1 - \cos \mu = \frac{\omega L_{c1} I_{dc}}{\hat{u}} \tag{6.17}$$

We kunnen het commutatieproces ook zien als een energie-uitwisseling. Voor $t < 0$ was er in de spoel L_{c2} een hoeveelheid energie opgeslagen ter grootte van $\frac{1}{2} L_{c2} I_{dc}^2$. Voor $t > \mu/\omega$ is dezelfde hoeveelheid energie opgeslagen in de spoel L_{c1}. Deze energie-uitwisseling kan niet in oneindig korte tijd plaatsvinden.

Om de gemiddelde waarde van de gelijkgerichte spanning u_{dc} te vinden beschouwen we de halve periode $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$. Voor het interval $0 < t < \frac{\mu}{\omega}$ geldt

$u_{dc} = 0$. Dit blijkt uit een vergelijking van (6.14) met figuur 6.16 (zie ook figuur 6.17).

Controleer dit.

Voor het tweede deel van de halve periode geldt $u_{dc} = u_a$, zodat:

$$U_{dc} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u_{dc}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{\frac{\mu}{\omega}}^{\frac{T}{2}} u_a\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\pi} \hat{u}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}(\omega t) = \frac{\hat{u}}{\pi}(1+\cos\mu) \quad (6.18)$$

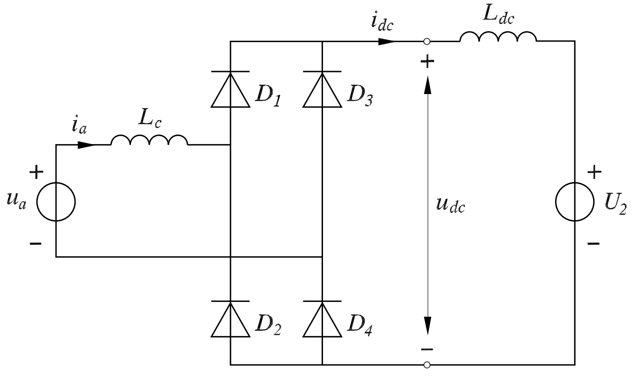
Met (6.17) volgt hiervoor:

$$U_{dc} = \frac{\hat{u}}{\pi}\left(2 - \frac{\omega L_{c1} I_{dc}}{\hat{u}}\right) = \frac{2}{\pi}\hat{u} - \frac{\omega L_{c1}}{\pi} I_{dc} \quad (6.19)$$

Als we deze uitdrukking met (6.11) vergelijken zien we dat ten gevolge van de commutatie U_{dc} lager wordt. Deze spanningsverlaging is evenredig met de gelijkstroom I_{dc}.

De diodebruggelijkrichter

Een nadeel van de schakeling volgens figuur 6.10 is dat er een bijzondere transformator voor nodig is: de transformator heeft een middenaftakking nodig. Een voordeel is echter dat er slechts twee dioden zijn. In de tijd dat halfgeleiders relatief duur waren, werd deze schakeling veelvuldig toegepast. Tegenwoordig is dat niet meer het geval, waardoor de schakeling volgens figuur 6.10 nauwelijks meer toegepast wordt. In plaats daarvan wordt een brugschakeling toegepast zoals in figuur 6.18 is weergegeven. Deze schakeling heeft ook een pulstal van twee, maar heeft vier dioden. Er is echter geen bijzondere transformator voor nodig.



Figuur 6.18 De diodebruggelijkrichter

Voor de wisselspanningsbron in figuur 6.18 schrijven we:

$$u_a = \hat{u}\sin\omega t \quad (6.20)$$

We beginnen met het geval dat L_c gelijk is aan nul. Dit betekent dat de commutatie oneindig snel verloopt. De schakeling gedraagt zich nu hetzelfde als de schakeling in figuur 6.11 (De gelijkrichter met twee dioden). Als diode D_1 in figuur 6.11 geleidt, geleiden in figuur 6.18 de dioden D_1 en D_4; als diode D_2 in figuur 6.11 geleidt, geleiden in figuur 6.18 de dioden D_2 en D_3.

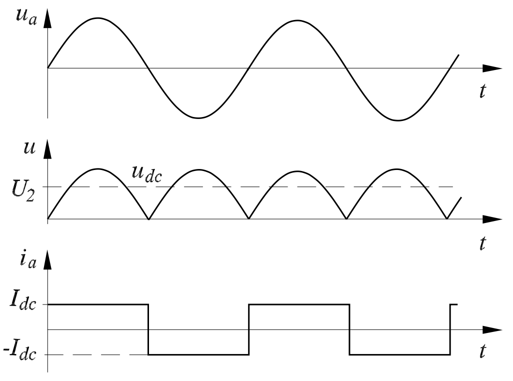
Controleer dit.

Dit betekent dat de spannings- en stroomverlopen in de figuren 6.12, 6.13 en 6.14 hier ook geldig zijn. De spanning u_b in deze figuren bestaat in het hier beschouwde geval natuurlijk niet. Dit geldt bovendien voor de stroom i_b in figuur 6.14. Daarnaast moeten we de stroom i_a in deze figuur aanpassen.

Hoe zie het verloop van i_a er nu uit?

Voor de gemiddelde waarde van de gelijkspanning geldt de uitdrukking voor de gelijkrichter met twee dioden (6.11) nog steeds.

We zullen er nu verder vanuit gaan dat de coëfficiënt van zelfinductie in het gelijkstroomcircuit L_{dc} oneindig groot is ($L_{dc} = \infty$), zodat de stroom in het gelijkstroomcircuit constant is ($i_{dc} = I_{dc}$). De bijbehorende spannings- en stroomvormen staan in figuur 6.19.



Figuur 6.19 Enkele spannings- en stroomvormen behorende bij figuur 6.18 voor $L_{dc} = \infty$ en $L_c = 0$

In het geval dat L_c niet gelijk is aan nul, moeten we wel rekening houden met het commutatieproces. De overeenkomst in het gedrag van de brugschakeling volgens figuur 6.18 en het gedrag van de schakeling met twee dioden volgens figuur 6.16 is dan niet direct aanwezig. We zullen daarom de berekening van het commutatieproces en de gemiddelde waarde van de gelijkgerichte spanning u_{dc} hier opnieuw uitvoeren.

Voor $t < 0$ geleiden de dioden D_2 en D_3 en geldt $i_a = -I_{dc}$.

Ga dit na met behulp van de figuren 6.18 en 6.19.

Omdat i_a een (ideale) gelijkstroom is, is de spanning over L_c gelijk aan nul en geldt dus ook $u_{dc} = -u_a$. Op het tijdstip $t = 0$ wordt u_a groter dan nul, zodat de spanning over de dioden D_1 en D_4 positief wordt en deze dioden in geleiding gaan.

Ga dit na in figuur 6.18.

Vanaf dit moment zijn er dus vier dioden in geleiding.

Waarom geleiden de dioden D_2 en D_3 nog?

Voor het circuit geldt nu de differentiaalvergelijking:

$$u_a - L_c \frac{\mathrm{d}i_a}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{voor} \quad t > 0 \tag{6.21}$$

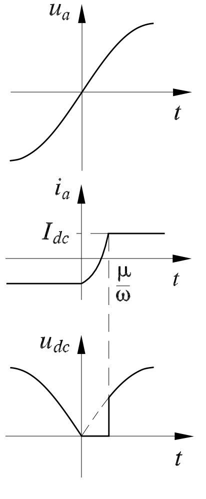
Met de uitdrukking voor de wisselspanning (6.20) volgt dan voor de oplossing:

$$i_a(t) = i_a(0) + \frac{1}{L_c}\int_0^t \hat{u}\sin\omega t\,\mathrm{d}t \quad \text{met} \quad i_a(0) = -I_{dc} \quad \text{voor} \quad t > 0$$

$$\text{Of} \quad i_a(t) = -I_{dc} + \frac{\hat{u}}{\omega L_c}(1-\cos\omega t) \quad \text{voor} \quad t > 0 \tag{6.22}$$

Dit stroomverloop is weergegeven in figuur 6.20.

Leid dit stroomverloop zelf af.



Figuur 6.20 Het commutatieproces

De dioden D_2 en D_3 blijven geleiden tot het tijdstip $t = \mu/\omega$ (zie figuur 6.20). Met (6.22) volgt voor de commutatiehoek μ:

$$i_a(\tfrac{\mu}{\omega}) = -I_{dc} + \frac{\hat{u}}{\omega L_c}(1-\cos\mu) = I_{dc}$$

$$\text{of} \quad 1-\cos\mu = \frac{2\,\omega L_c I_{dc}}{\hat{u}} \tag{6.23}$$

Om de gemiddelde waarde van de gelijkgerichte spanning u_{dc} te vinden beschouwen we de halve periode $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$. Voor het interval $0 < t < \frac{\mu}{\omega}$ geldt $u_{dc} = 0$.

Waarom is u_{dc} gelijk aan nul in dit interval?

Voor het tweede deel van de halve periode geldt $u_{dc} = u_a$, zodat:

$$U_{dc} = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} u_{dc}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{T}\int_{\frac{\mu}{\omega}}^{\frac{T}{2}} u_a\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{\mu}^{\pi} \hat{u}\sin(\omega t)\;\mathrm{d}\,(\omega t) = \frac{\hat{u}}{\pi}\,(1+\cos\mu) \quad (6.24)$$

Met (6.23) volgt hiervoor:

$$U_{dc} = \frac{\hat{u}}{\pi}\left(2 - \frac{2\omega L_c I_{dc}}{\hat{u}}\right) = \frac{2}{\pi}\hat{u} - \frac{2}{\pi}\omega L_c I_{dc} \quad (6.25)$$

Als we deze uitdrukking met (6.11) vergelijken zien we dat ten gevolge van de commutatie ook nu U_{dc} lager wordt. Deze spanningsverlaging is weer evenredig met de gelijkstroom I_{dc}.

6.4 De thyristorgelijkrichter

Een nadeel van een diodegelijkrichter is dat hij is samengesteld uit niet stuurbare componenten, waardoor hij niet door externe signalen beïnvloed kan worden. Deze externe signalen zouden bijvoorbeeld afkomstig kunnen zijn uit een regelschakeling of -computer.

Aan deze bezwaren wordt voor een belangrijk deel tegemoet gekomen door in plaats van dioden thyristoren toe te passen. We verkrijgen dan een stuurbare gelijkrichter. Deze wordt ook wel mutator genoemd (Engels: line-commutated converter of phase−controlled converter).

Toepassingen van stuurbare gelijkrichters zijn het regelen van het vermogen bij processen in de elektrochemische industrie (zoals elektrolyse van water en de productie van chloor), het regelen van de snelheid bij aandrijvingen met gelijkstroommotoren en het omzetten van zeer grote vermogens bij omvormers voor transmissiesystemen voor gelijkstroom bij (zeer) hoge spanning (HVDC).

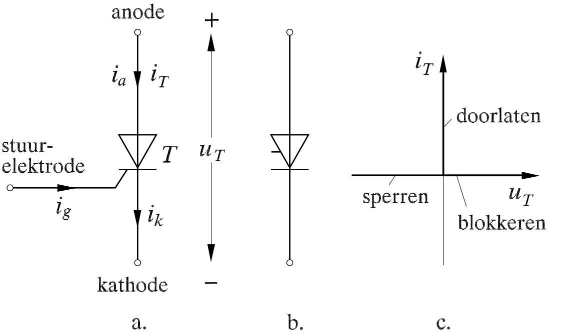
In deze paragraaf zullen we eerst enige aandacht besteden aan de thyristor. Daarna bekijken we een gelijkrichter bestaande uit één thyristor en een bruggelijkrichter met vier thyristoren.

De thyristor

In figuur 6.21a is het symbool van een thyristor weergegeven, waarbij bovendien de spanning over de thyristor u_T en de stroom door de thyristor i_T (= i_a) gedefinieerd zijn.

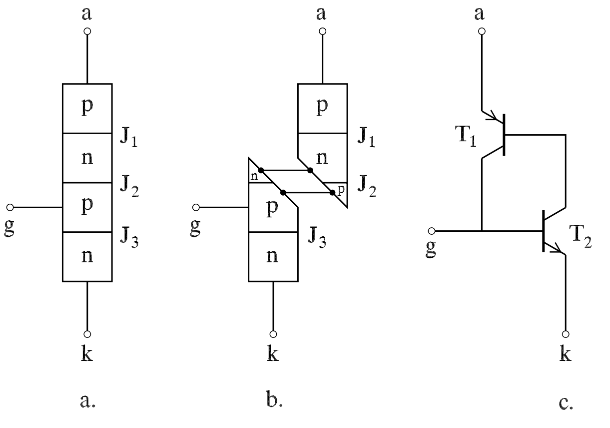
We kunnen de thyristor beschouwen als een diode die niet zonder meer in geleiding gaat als de spanning erover positief wordt: hij gaat pas in geleiding als zowel de stroom in de stuurelektrode (*gate*) i_g als de spanning tussen *anode* en *kathode* u_T positief is. De thyristor schakelt uit, net als een diode, als de stroom erdoor negatief wordt. Het inschakelen van een thyristor kan dus beïnvloed worden door een extern stuursignaal (i_g), maar het uitschakelen niet. Het is dan ook voldoende om slechts een korte stroompuls aan de stuurelektrode toe te voeren. We noemen een thyristor wel een half stuurbare schakelaar.

Als we niet aan willen geven langs welke weg het stuursignaal toegediend wordt, kunnen we volstaan met het in figuur 6.21b gegeven symbool voor de thyristor.



Figuur 6.21 De thyristor

In figuur 6.21c zijn de geïdealiseerde karakteristieken van de thyristor getekend. Net als een diode kan een thyristor sperren en doorlaten. Hij kan echter bovendien blokkeren, dat wil zeggen bij positieve spanning over de thyristor niet in geleiding gaan.



Figuur 6.22 Het twee-transistormodel van een thyristor

Om de werking van een thyristor te kunnen verklaren moeten we weten dat het een vierlaags(*p*-*n*-*p*-*n*)vermogenshalfgeleider is, zoals in figuur 6.22a is afgebeeld. We zullen voor de verklaring gebruik maken van een vrij eenvoudig benaderend model. Hierbij splitsen we de schematische weergave van de thyristor in figuur 6.22a in twee stukken, zoals aangegeven in figuur 6.22b. Daaruit kunnen we vervolgens weer het in figuur

6.22c getekende equivalente circuit met twee transistoren afleiden.

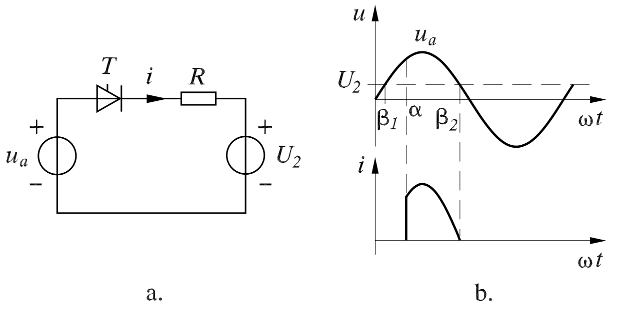
Als de spanning tussen de anode en de kathode negatief is, zijn de overgangen J_1 en J_3 in sperrichting en overgang J_2 in doorlaatrichting gepolariseerd.

Als deze spanning omgekeerd is ($u_{ak} > 0$), zijn de overgangen J_1 en J_3 in doorlaatrichting en is J_2 in sperrichting gepolariseerd. Als we dan een positieve stroompuls aan de stuurelektrode (gate) aanbrengen, impliceert dat de injectie van elektrische lading door de basis van de n-p-n-transistor T_2 in figuur 6.22c. Omdat de overgang J_1 in doorlaatrichting gepolariseerd is, zal er ook stroom door de collector van T_2 vloeien. Maar de stroom die door de collector van T_2 loopt is dezelfde als die door de basis van de p-n-p-transistor T_1 vloeit. Dit betekent dat door de collector van T_1 stroom gaat vloeien met als gevolg: meer injectie van elektrische lading in de basis van T_2. De opwekking van ladingsdragers in de binnenste lagen van de thyristor zorgt er dus voor dat de component in geleiding blijft, zelfs als de stroompuls in de stuurelektrode is beëindigd. Het in geleiding gaan ten gevolge de stroompuls in de stuurelektrode noemen we ontsteken.

Evenals een diode, gaat de thyristor uit geleiding na een stroomnuldoorgang. We noemen dit het doven van een thyristor. Een hersteltijd (2 − 200 μs) na de stroomnuldoorgang is noodzakelijk voor de recombinatie van de in de component opgeslagen ladingsdragers. Na het verstrijken van deze hersteltijd mag weer een positieve anode−kathode-spanning worden aangelegd, en is de thyristor weer in staat om de spanning te blokkeren. Wordt er een positieve anode−kathode-spanning voor het einde van de hersteltijd aangebracht, dan zullen de nog aanwezige ladingsdragers kunnen veroorzaken dat de thyristor opnieuw wordt ingeschakeld.

De gelijkrichter met één thyristor met weerstand

In figuur 6.23a is een zeer eenvoudige gelijkrichtschakeling met één thyristor getekend.



Figuur 6.23 De gelijkrichter met één thyristor met weerstand

De ingangsspanning van de gelijkrichter is hier de wisselspanningsbron u_a, waarvoor geldt:

$$u_a = \hat{u} \sin \omega t \tag{6.26}$$

Als belasting van de gelijkrichter treedt de gelijkspanningsbron U_2 op. In paragraaf 6.2 hebben we al aandacht besteed aan belastingsvormen die met een spanningsbron gerepresenteerd kunnen worden.

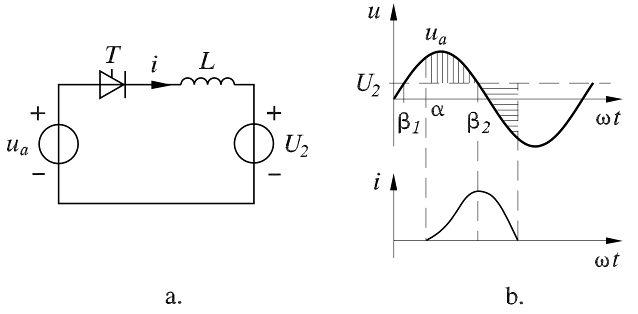
In figuur 6.23b zijn de ingangs- en de uitgangsspanning geschetst voor een bepaalde keuze van de spanningen. Omdat er bij gelijkrichters veel met "hoeken" gewerkt wordt, is er nu ωt bij de horizontale as geplaatst in plaats van t.

Aangezien een thyristor alleen ontstoken kan worden als de spanning erover positief is, heeft het alleen zin om een ontsteekpuls te geven in het interval $\beta_1 < \omega t < \beta_2$. Het ontsteekmoment is hier aangegeven met de hoek α.

Controleer zelf de geschetste spannings- en stroomvormen in figuur 6.23b.

De gelijkrichter met één thyristor met spoel

Zoals we in paragraaf 6.2 ook al gezien hebben, is een spoel een beter element om de stroom te begrenzen dan een weerstand. De schakeling in figuur 6.23a gaat dan over in de schakeling in figuur 6.24a. De bijbehorende spanningsvormen staan in figuur 6.24b.



Figuur 6.24 De gelijkrichter met één thyristor met spoel

Ook hier heeft het alleen zin om een ontsteekpuls te geven in het interval $\beta_1 < \omega t < \beta_2$. De thyristor gaat in geleiding op het moment $\omega t = \alpha$. Vanaf dat moment, geldt er voor de stroom door de spoel:

$$u_a - U_2 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{6.27}$$

Omdat de stroom nul is op het moment $\omega t = \alpha$, heeft deze differentiaalvergelijking als oplossing:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_1}^{t} (u_a - U_2)\,\mathrm{d}t \tag{6.28}$$

De thyristor gaat uit geleiding als de stroom erdoor nul wordt. Dit gebeurt als de volt-seconde-integraal nul wordt.

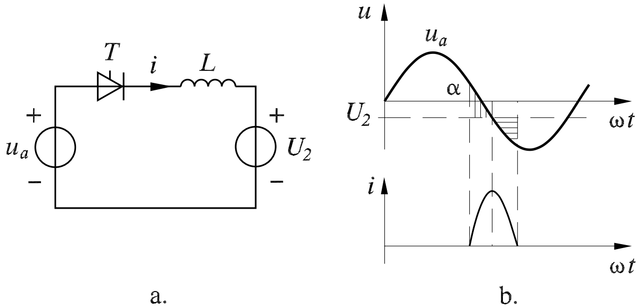
Ga dit zelf na. Verdere uitleg staat in paragraaf 6.2.

In figuur 6.24b staat de resulterende stroomvorm getekend.

Controleer zelf de spannings- en stroomvormen in figuur 6.24b.

Een zeer interessante mogelijkheid doet zich voor als de spanning U_2 negatief is. De bij dit geval behorende spanningen en stromen zijn in figuur 6.25 getekend. Omdat U_2 negatief is en i positief of nul is, wordt er energie overgedragen van de gelijkspanningsbron naar de wisselspanningsbron. We noemen dit wisselrichterbedrijf. De bedrijfstoestand voor de in figuur 6.24b getekende situatie noemen we gelijkrichterbedrijf. Bij stuurbare gelijkrichters kan de energierichting dus bidirectioneel zijn.

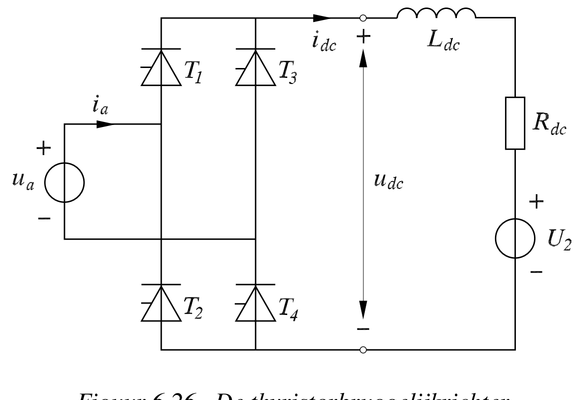
Controleer zelf dat de energierichting in het geval van figuur 6.24b van wisselspanningsbron naar gelijkspanningsbron is.



Figuur 6.25 Enkele spannings- en stroomvormen behorende bij figuur 6.24a voor $U_2 < 0$

De thyristorbruggelijkrichter

In paragraaf 6.3 hebben al gezien dat het pulstal van de gelijkrichter met één halfgeleidercomponent eenvoudig verdubbeld kan worden naar 2 door een brugschakeling toe te passen (zie figuur 6.26). We zullen ons hier bij de behandeling van de schakeling beperken tot de essentie van het gedrag ervan. Daarbij veronderstellen we dat de commutatie oneindig snel ver-



Figuur 6.26 De thyristorbruggelijkrichter

loopt. Voorts gaan we er bij de behandeling vanuit dat de coëfficiënt van zelfinductie in het gelijkstroomcircuit L_{dc} oneindig groot is ($L_{dc} = \infty$), zodat de stroom in het gelijkstroomcircuit constant is ($i_{dc} = I_{dc}$). Voorlopig nemen we bovendien aan dat de weerstand R_{dc} gelijk is aan nul.

We kunnen de thyristoren T_1 en T_4 ontsteken als u_a positief is en de thyristoren T_2 en T_3 als u_a negatief.

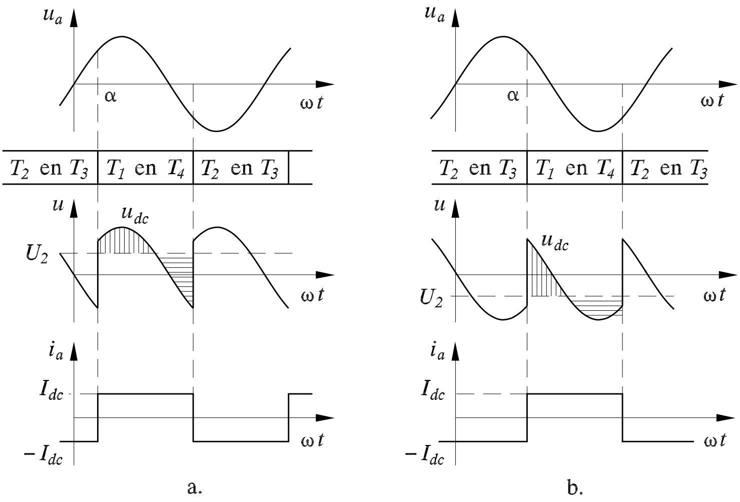
Ga dit na met behulp van figuur 6.26.

We ontsteken de thyristoren T_1 en T_4 op het moment $\omega t = \alpha$. Omdat u_a dan positief moet zijn, moet α liggen tussen 0 en π. Voor $\alpha = \pi/4$ ontstaan dan de spannings- en stroomverlopen zoals die in figuur 6.27a zijn getekend. In figuur 6.27b staan de verlopen voor $\alpha = \pi/4$.

Controleer figuur 6.27.

In het geval van figuur 6.27a is de gelijkrichter in gelijkrichterbedrijf en in het geval van figuur 6.27b is de gelijkrichter in wisselrichterbedrijf.

Verifieer dit. Voor welke waarden van α is de brug in gelijkrichterbedrijf en voor welke waarden van α is de brug in wisselrichterbedrijf?



Figuur 6.27 Enkele spannings- en stroomvormen behorende bij figuur 6.26 voor $L_{dc} = \infty$ (a: gelijkrichterbedrijf; b: wisselrichterbedrijf)

Bij brugschakelingen is de ontsteekhoek α gedefinieerd als de fasehoek tussen het moment waarop de dioden in een overeenkomstige diodebrug de stroom zouden overnemen en het moment waarop de thyristoren worden ontstoken. In plaats van stuurbare gelijkrichting spreekt men ook wel van fasehoek-aansnijding.

Controleer door vergelijking van de figuren 6.19 en 6.27 dat de ontsteekhoek gelijk is aan de hoek α in figuur 6.27.

De gemiddelde waarde van u_{dc} is:

$$U_2 = U_{dc} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} u_{dc}\, \mathrm{d}\,(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\pi} \hat{u} \sin(\omega t)\, \mathrm{d}\,(\omega t) = \frac{2}{\pi} \hat{u} \cos\alpha \qquad (6.29)$$

Als we deze uitdrukking vergelijken met (6.11) zien we dat (6.29) en (6.11) hetzelfde resultaat opleveren als α gelijk is aan nul.

Waarom konden we dit verwachten?

Als de weerstand R_{dc} in figuur 6.26 niet gelijk is aan nul volgt voor de gemiddelde waarde van de gelijkstroom:

$$I_{dc} = \frac{U_{dc} - U_2}{R_{dc}} = \frac{\frac{2}{\pi}\hat{u}\cos\alpha - U_2}{R_{dc}} \tag{6.30}$$

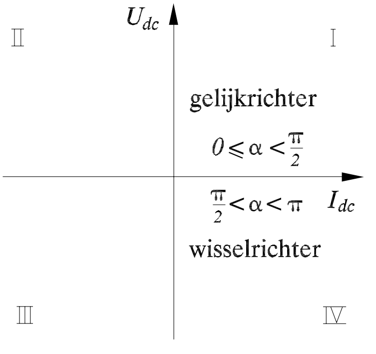
Waarom komt de spanning over de spoel in deze vergelijking niet voor?

Bij het gebruik van deze uitdrukking moeten we bedenken dat de stroom I_{dc} nooit negatief kan zijn.

Waarom kan de stroom I_{dc} nooit negatief zijn?

De mogelijkheden van de thyristorbruggelijkrichter kunnen we samenvatten met een weergave in het I_{dc}-U_{dc}-vlak zoals weergegeven in figuur 6.28. De thyristorbruggelijkrichter wordt dan ook wel een tweekwadrantenomzetter genoemd.

Welk(e) kwadrant(en) bestrijkt de diodebruggelijkrichter?



Figuur 6.28 Het $I_{dc} - U_{dc}$-vlak voor de thyristorbruggelijkrichter

6.5 De chopper

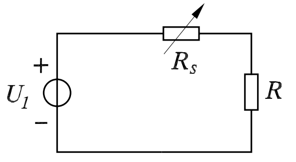
In paragraaf 6.2 (de diodegelijkrichter) hebben we gekeken naar de energie-overdracht van een wisselspanningsbron naar een gelijkspanningsbron. In paragraaf 6.4 hebben we gezien dat het met een thyristorgelijkrichter ook mogelijk is om energie over te brengen van een gelijkspanningsbron naar een wisselspanningsbron. In deze paragraaf kijken we naar het energietransport tussen twee gelijkspanningsbronnen met een zogenaamde chopper. Dit is een belangrijk voorbeeld uit de klasse van de gelijkspanning/gelijkspanningsomzetters (DC/DC-convertors).

De chopper met weerstandsbelasting

Om het principe van een chopper uit te kunnen leggen, beschouwen we een situatie waarbij de dissipatie in een weerstand geregeld moet worden.

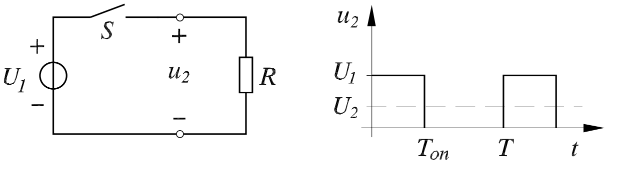
Deze weerstand zou bijvoorbeeld een gloeilamp of een verwarmingselement kunnen voorstellen.

Een eenvoudige oplossing hiervoor is de toepassing van een regelbare (serie)weerstand (R_s in figuur 6.29). Deze regelbare weerstand zou in werkelijkheid een transistor kunnen zijn. In deze serieweerstand wordt echter steeds een deel van het door de gelijkspanningsbron (U_1) afgegeven vermogen gedissipeerd.



Figuur 6.29 De regeling met een serieweerstand

Een andere oplossing is in figuur 6.30 weergegeven. De schakelaar S wordt periodiek geopend en gesloten met periodetijd T.



Figuur 6.30 De regeling met een schakelaar

Voor de gemiddelde waarde van de spanning over de belastingsweerstand R geldt:

$$U_2 = \frac{1}{T}\int_0^T u_2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{T_{on}} U_1\,\mathrm{d}t = \frac{T_{on}}{T}U_1 \tag{6.31}$$

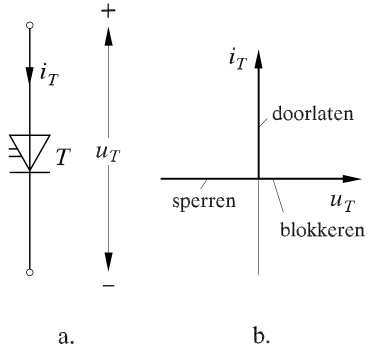
Hieruit blijkt dat de gemiddelde uitgangsspanning evenredig is met de relatieve inschakelduur (Engels: duty ratio), die we verder aanduiden met het symbool d:

$$U_2 = \frac{T_{on}}{T}U_1 = d\,U_1 \tag{6.32}$$

We kunnen de grootte van de uitgangsspanning dus variëren door de breedte van de spanningspulsen in u_2 te variëren. Dit noemen we pulsbreedtemodulatie (Engels: Pulse-Width Modulation of PWM).

De volledig stuurbare schakelaar

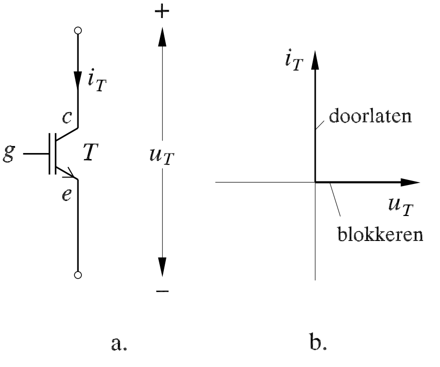
Omdat de schakelaar S in figuur 6.30 door middel van een stuursignaal zowel in- als uitgeschakeld moet kunnen worden, kunnen we hiervoor geen gewone thyristor gebruiken. Er zijn echter ook bijzondere thyristoren die door middel van een stroompuls aan de stuurelektrode uitgeschakeld kunnen worden. Dit zijn zogenaamde "Gate Turn-Off"-thyristoren of GTO's (zie figuur 6.31), die tot de klasse volledig stuurbare schakelaars behoren. Een GTO wordt ontstoken met een positieve en gedoofd met een negatieve stroompuls aan de stuurelektrode.



Figuur 6.31 De GTO als volledig stuurbare schakelaar

Andere halfgeleiders die tot deze klasse behoren zijn, bijvoorbeeld, de BJT (Bipolar Junction Transistor) en de MOSFET (Metal Oxide Semiconductor Field Effect transistor). Een nadeel van een MOSFET voor hogere spanningen (> 100 V) is dat de geleidingsverliezen relatief groot zijn. BJT's verlangen daarentegen een groter stuurvermogen, maar hebben aanzienlijk lagere geleidingsverliezen.

Een combinatie van deze twee typen vermogenshalfgeleiders lijkt dan ook de oplossing: de eenvoudige sturing van een MOSFET en het lage geleidingsverlies van een BJT. Een zeer geslaagde poging in deze richting vormt de zogenaamde IGBT (Insulated Gate Bipolar Transistor, zie figuur 6.32). In vrijwel alle moderne vermogensomvormers tot een vermogensklasse van enkele 100 kW kunnen we deze component op dit moment aantreffen. Omdat deze component zoveel toegepast wordt, zullen we in



Figuur 6.32 De IGBT als volledig stuurbare schakelaar

het vervolg steeds als volledig stuurbare schakelaar een IGBT gebruiken.

Het is verder van belang om op te merken dat vrijwel alle volledig stuurbare schakelaars slechts geschikt zijn om in één richting stroom te geleiden (zie als voorbeelden de GTO en de IGBT, de figuren 6.31 en 6.32). Voorts zijn bij de meeste volledig stuurbare schakelaars de spermogelijkheden beperkt. Dit is ook bij de IGBT het geval (zie figuur 6.32). De GTO vormt hierop met zijn redelijk goede spereigenschappen een uitzondering (zie figuur 6.31).

De chopper met gelijkspanningsbronbelasting

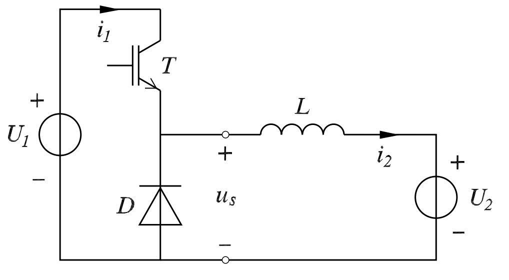
In paragraaf 6.2 hebben we al gezien dat een belasting die een gelijkspanning nodig heeft, vaak met een spanningsbron gerepresenteerd kan worden. We zouden in figuur 6.30 de weerstand R kunnen vervangen door een gelijkspanningsbron. Als we dit rechtstreeks zouden doen, zouden we bij het inschakelen van S een kortsluiting tussen twee spanningsbronnen krijgen. Net als bij de gelijkrichter moeten we dan ook een stroom begrenzend element toevoegen, waarbij we weer voor een spoel kiezen.

Waarom geven we de voorkeur aan een spoel als element om de stroom te begrenzen?

Het inschakelen van S levert nu geen problemen meer op, maar we kunnen S niet meer uitschakelen omdat dan de stroom in een spoel plotseling onderbroken zou worden.

Wat gebeurt er als de stroom in de spoel plotseling onderbroken zou worden?
Waarom was dit geen probleem bij de gelijkrichter met één diode met spoel?

Om de continuïteit van de stroom in de spoel te verzekeren brengen we nog een diode aan, zoals in figuur 6.33 is aangegeven. Deze diode (D) wordt de vrijloopdiode genoemd.



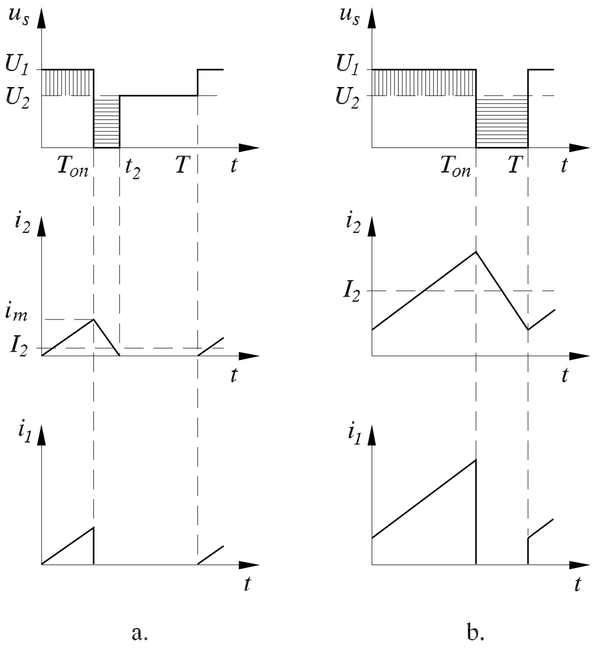
Figuur 6.33 De chopper

De behandeling van het gedrag van de chopper vertoont een zeer sterke overeenkomst met de behandeling van het gedrag van de gelijkrichter met een spoel. We zullen de behandeling hier dan ook kort houden.

Bij de chopper is onder normale omstandigheden de spanning U_2, die we hier als een gegeven spanning beschouwen, kleiner dan de spanning U_1. Daarom wordt de situatie waarin de spanning U_2 groter zou zijn dan de spanning U_1 buiten beschouwing gelaten.

We beginnen met het geval dat de relatieve inschakelduur d relatief klein is. De hierbij behorende spannings- en stroomvormen zijn in figuur 6.34a getekend.

Controleer zelf de spannings- en stroomvormen in figuur 6.34a.



Figuur 6.34 Leemtebedrijf (a) en leemtevrij bedrijf (b), behorende bij de chopper volgens figuur 6.33

In dit geval vertoont de uitgangsstroom van de chopper i_2 leemten: de chopper is in leemtebedrijf.

Vaak is het van belang om te weten wat het door de chopper geleverde vermogen is. Omdat U_2 een gelijkspanning is, geldt voor het door deze bron opgenomen vermogen:

$$P_2 = \frac{1}{T}\int_0^T u_2 i_2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T U_2 i_2 \, \mathrm{d}t = U_2 \frac{1}{T}\int_0^T i_2 \, \mathrm{d}t = U_2 I_2 \tag{6.33}$$

We zien hieraan dat het vermogen eenvoudig bepaald kan worden als de gemiddelde waarde van de uitgangsstroom I_2 bekend is. Een soortgelijke redenering geldt voor het door de bron U_1 afgegeven vermogen. Omdat de chopper verliesvrij is verondersteld, zijn deze vermogens bovendien aan elkaar gelijk. Er geldt dus:

$$P_1 = P_2 = U_1 I_1 = U_2 I_2 \tag{6.34}$$

We zullen de gemiddelde waarde van de uitgangsstroom I_2 voor leemtebedrijf met behulp van figuur 6.34a bepalen. We zien in deze figuur dat het maximum van i_2 optreedt bij $t = T_{on}$ ($i_2 = i_m$). Het tijdstip waarop de stroom i_2 weer gelijk aan nul wordt en de diode uit geleiding gaat, is $t = t_2$. Vanaf dit moment blijft de stroom i_2 gelijk aan nul tot het tijdstip $t = T$. Voor de over één periode gemiddelde waarde van i_2 geldt dus:

$$I_2 = \frac{1}{T}\int_0^T i_2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{t_2} i_2\,\mathrm{d}t$$

Met figuur 6.34a kunnen we deze integraal eenvoudig uitwerken:

$$I_2 = \frac{1}{T}\frac{i_m}{2}t_2 \tag{6.35}$$

Het hierbij benodigde maximum i_m van de stroom i_2 volgt uit:

$$U_1 - U_2 = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = L\frac{i_m}{T_{on}} \quad \text{of} \quad i_m = \frac{T_{on}}{L}(U_1 - U_2) \tag{6.36}$$

Het benodigde tijdstip t_2 volgt uit de volt-seconde-integraal voor de spoel, die in figuur 6.34a gearceerd is aangegeven:

$$T_{on}(U_1 - U_2) = (t_2 - T_{on})U_2 \quad \text{of} \quad t_2 = T_{on}\frac{U_1}{U_2} \tag{6.37}$$

Als we (6.36) en (6.37) in (6.35) substitueren vinden we:

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{T_{on}}{L}(U_1 - U_2)\,\frac{T_{on}}{T}\frac{U_1}{U_2} \tag{6.38}$$

Met de relatieve inschakelduur d kunnen we dit omschrijven tot de volgende uitdrukking voor leemtebedrijf:

$$I_2 = \frac{1}{2}\frac{TU_1}{L}\left(\frac{U_1}{U_2} - 1\right)d^2 \tag{6.39}$$

Als we d vergroten of U_2/U_1 verkleinen, blijft deze uitdrukking geldig totdat t_2 gelijk wordt aan T. Met (6.37) zien we eenvoudig dat op deze grens de relatieve inschakelduur d gelijk is aan U_2/U_1. Voor de grens geldt dus:

$$I_{2,grens} = \frac{1}{2}\frac{TU_1}{L}\left(\frac{U_2}{U_1} - \left(\frac{U_2}{U_1}\right)^2\right) \tag{6.40}$$

Op deze grens is er geen leemtebedrijf meer, maar leemtevrij bedrijf: de uitgangsstroom i_2 vertoont geen leemten meer. De spannings- en stroomvormen hiervoor zijn in figuur 6.34b weergegeven.

De chopper kan alleen in stationair bedrijf zijn als de volt-seconde-integraal voor de spoel over één periode gelijk is aan nul (zie het gearceerde gebied in figuur 6.34b). Voor leemtevrijbedrijf geldt dus:

$$T_{on}(U_1 - U_2) = (T - T_{on})U_2 \quad \text{of} \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{T_{on}}{T} = d \tag{6.41}$$

Dit komt natuurlijk overeen met (6.40).

Wat gebeurt er als d groter is dan U_2/U_1 ?

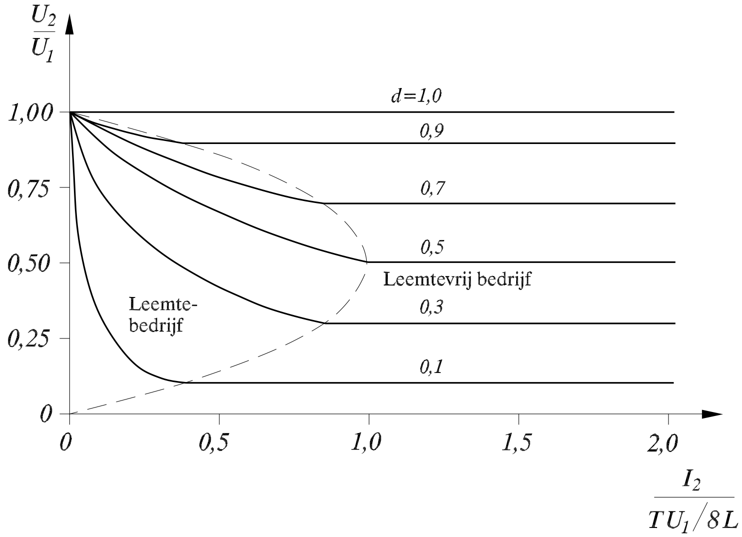
We kunnen hierbij verder nog opmerken dat deze vergelijking geldt voor elke grootte van de gemiddelde waarde van de uitgangsstroom I_2 (in leemtevrij bedrijf). Een andere gemiddelde waarde van de stroom betekent namelijk alleen dat de waarde op $t=0$ verandert (zie figuur 6.34b); de vormen van de spannings- en stroomverlopen blijven hetzelfde.

Wat is de invloed van de grootte van L op het gedrag van de chopper in leemtevrij bedrijf?

Met de vergelijkingen (6.39), (6.40) en (6.41) kunnen we de karakteristieken van een chopper met constante ingangsspanning tekenen, zoals die in figuur 6.35 zijn weergegeven. Hierbij is de uitgangsspanning U_2 genormeerd op de ingangsspanning U_1 en de gemiddelde waarde van de uitgangsstroom I_2 op $TU_1/8/L$ ($I_{2,grens}$ voor $d=0.5$ volgens (6.40)). Merk hierbij op dat vergelijking (6.40) in deze figuur een parabool beschrijft.

Uit de vermogensbeschouwing in (6.34) gecombineerd met (6.41) blijkt bovendien dat in leemtevrij bedrijf geldt:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{d} \tag{6.42}$$



Figuur 6.35 Karakteristieken van een chopper met constante ingangsspanning

6.6 Invertoren

Inleiding

In paragraaf 6.4 hebben we gezien dat de energierichting in een bruggelijkrichter met thyristoren bidirectioneel kan zijn. Een bruggelijkrichter kan echter alleen werken als er een wisselspanning aanwezig is die kan zorgen voor de commutatie in de brug. Dit is meestal wel het geval als de energierichting van wisselspanning naar gelijkspanning is. In het geval dat de energierichting van gelijkspanning naar wisselspanning is, is de wisselspanningsbron, die voor de commutatie in een thyristorbrug noodzakelijk is, vaak echter juist niet aanwezig. In dit hoofdstuk zullen wij de beperking van een noodzakelijke wisselspanningsbron omzeilen door volledig stuurbare schakelaars toe te passen, zoals IGBT's, GTO's en transistoren. De zo verkregen gelijkspanning/wisselspanningsomzetter wordt meestal invertor genoemd. Deze kan overigens ook als wisselspanning/gelijkspanningsomzetter (gelijkrichter) gebruikt worden.

Zoals we in paragraaf 6.1 al hebben gezien, kunnen we belangrijke toepassingen van gelijkspanning/wisselspanningsomzetters (invertoren) vinden in de elektrische aandrijftechniek bij de voeding van draaistroommachines. Daarbij is de gelijkspanning/wisselspanningsomzetter meestal een onderdeel van een wisselspanning/wisselspanningsomzetter.

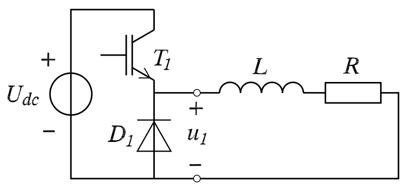
Bij invertoren voor de aandrijftechniek is de instelbaarheid van de uitgangsfrequentie van groot belang voor de toerenregeling; bij andere toepassingen moet de uitgangsfrequentie vaak juist constant zijn. Dit is bijvoorbeeld het geval bij onderbrekingsvrije voedingen (Engels: Uninterruptible Power Supply, UPS), die bij het uitvallen van de spanning op het elektriciteitsnet een wisselspanning opwekken vanuit accu's. Dit gebeurt op zodanige wijze dat de gebruiker (belasting van het net) er meestal niets van merkt.

In deze paragraaf zullen wij, uitgaande van de chopper, de eenfasige en de driefasige spanningsinvertor ontwikkelen. De laatste omzetter is op dit moment het belangrijkste type invertor voor de elektrische aandrijftechniek.

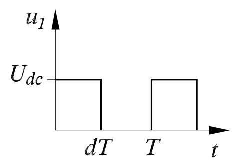
Het ontstaan van een invertor uit een chopper

We kunnen een invertor langzaam opbouwen vanuit de chopper. Daartoe beginnen we met de schakeling zoals die is weergegeven in figuur 6.36a. De hierbij behorende uitgangsspanning is voor $d = 0.5$ weergegeven in figuur 6.36b. Omdat de belasting van een invertor meestal een inductief karakter heeft, stellen we hem hier voor als de combinatie van een spoel en een weerstand. In verband met dit inductieve karakter is het nodig om een vrijloopdiode toe te passen.

Leg uit waarom de vrijloopdiode noodzakelijk is.



a.

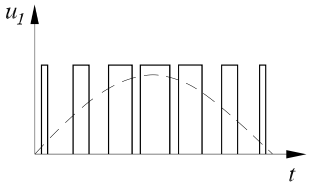


b.

Figuur 6.36 Een chopper bij $d = 0.5$

De uitgangsspanning is blokvormig en kunnen we beschouwen als de superpositie van een gelijkspanning en een blokvormige wisselspanning. Met behulp van pulsbreedtemodulatie (PWM) kunnen we de vorm van de uitgangsspanning beïnvloeden. Hiervan is een voorbeeld gegeven in figuur 6.37.

In deze figuur wordt de relatieve inschakelduur van de chopper d sinusvormig gevarieerd. De "gemiddelde" uitgangsspanning wordt hierdoor ook sinusvormig. Bovendien kunnen we hiermee de amplitude van deze "gemiddelde" uitgangsspanning beïnvloeden. Dit is mogelijk door de breedte van alle pulsen tegelijk te variëren.

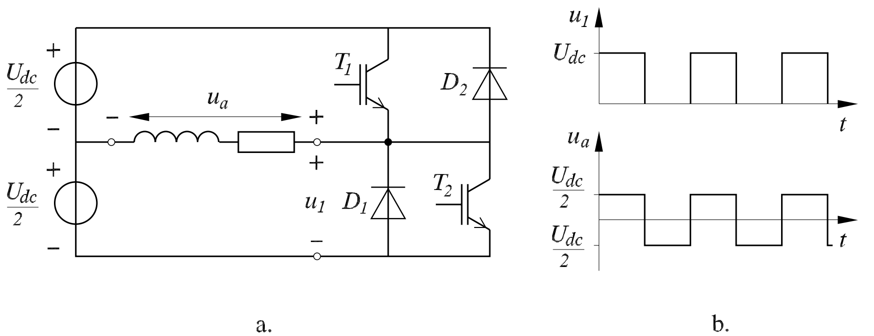


Figuur 6.37 Een variërende pulsbreedte bij een chopper

De schakeling in figuur 6.36a is niet erg zinvol omdat de stroom slechts in één richting kan lopen. Bovendien heeft de uitgangsspanning altijd een gelijkspanningscomponent. We kunnen dit probleem oplossen met de schakeling volgens figuur 6.38a. Hierin zijn een extra IGBT en een extra diode aangebracht, waardoor het mogelijk is om de stroomrichting om te keren. Daarnaast hebben we de gelijkspanningsbron in twee stukken gesplitst.

De bij deze schakelingen behorende spanningsvormen zijn gegeven in figuur 6.38b. We zien hierin dat de spanning u_1 weliswaar een gelijkspanningscomponent heeft, maar de uitgangsspanning u_a niet.

In figuur 6.38a kunnen we verder nog zien dat er steeds een diode (anti)parallel staat aan de IGBT. Hierdoor kan de IGBT nooit in spertoestand komen. Het feit dat de meeste volledig stuurbare schakelaars niet kunnen sperren (zie ook de figuren 6.31 en 6.32) is dan ook niet relevant. Dit geldt overigens ook voor de spanningsinvertoren die we nog zullen bekijken.



Figuur 6.38 Een eenvoudige invertor

De eenfasige spanningsinvertor

Een bezwaar van deze schakeling is dat er een gelijkspanningsbron met middenaftakking nodig is. Dit bezwaar lijkt veel op dat bij de gelijkrichter met twee dioden, waarbij we aan het bezwaar tegemoet konden komen met een brugschakeling. Dit is hier ook het geval. We krijgen dan de eenfasige bruginvertor volgens figuur 6.39.

Omdat de invertor wordt gevoed vanuit een spanningsbron, wordt hij een spanningsinvertor genoemd.

Met behulp van pulsbreedtemodulatie kunnen we de ”gemiddelde” uitgangsspanning beter sinusvormig maken en de amplitude van deze ”gemiddelde” uitgangsspanning beïnvloeden. Hiervan is in figuur 6.40 een voorbeeld gegeven.

We kunnen deze invertor overigens ook als een chopper (een gelijkspanning/gelijkspanningsomzetter) zien. Door het schakelpatroon aan te passen kunnen we met de invertor verschillende waarden van een ”gemiddelde” uitgangsgelijkspanning maken. Deze waarden kunnen zowel positief als negatief zijn.

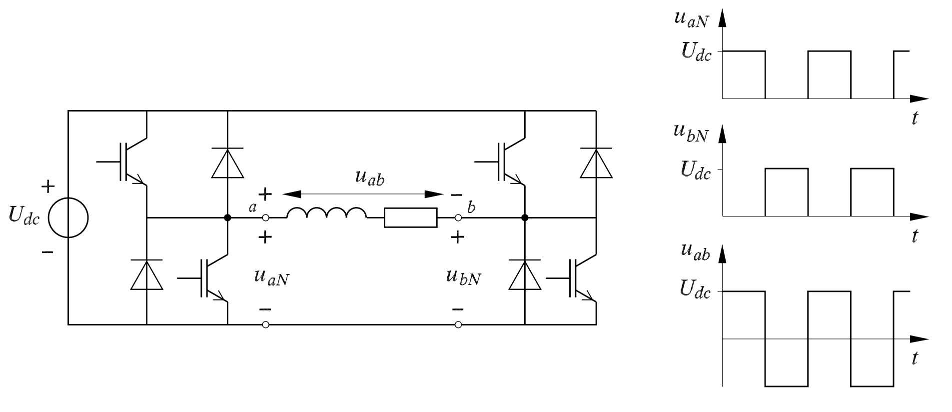
Vergelijk dit met de in de vorige paragraaf behandelde chopper.

Bovendien kan de waarde van uitgangsstroom ook zowel positief als negatief zijn. Als de invertor zo gebruikt wordt, wordt hij wel een vierkwadrantenchopper genoemd.

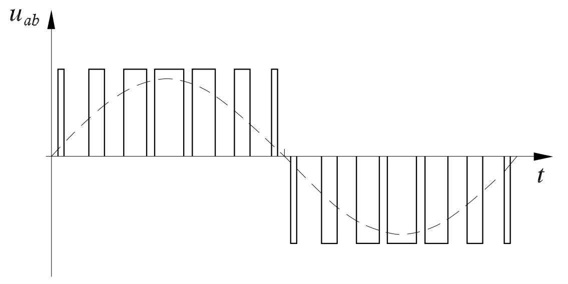
Verklaar de naam vierkwadrantenchopper.

De driefasige spanningsinvertor

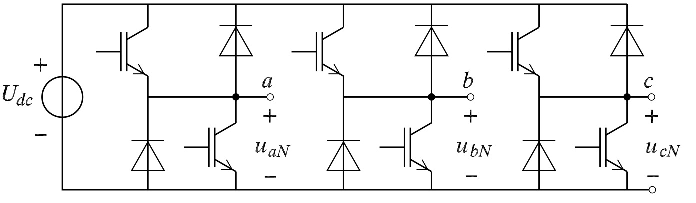
Om invertoren te gebruiken als regelbare voeding voor draaistroommotoren, moeten ze een driefasig spanningsstelsel kunnen opwekken. Dit zouden we kunnen realiseren met drie eenfasige invertoren. We kunnen echter met veel minder componenten een invertor maken die een driefasig spanningsstelsel kan genereren door aan de eenfasige spanningsinvertor volgens figuur 6.39 een derde schakeltak toe te voegen. Op deze wijze ontstaat de driefasige spanningsinvertor volgens figuur 6.41.



Figuur 6.39 De eenfasige bruginvertor



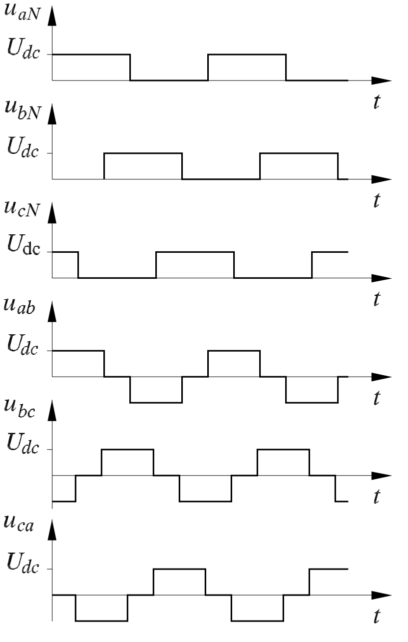
Figuur 6.40 Pulsbreedtemodulatie bij de eenfasige bruginvertor



Figuur 6.41 De driefasige spanningsinvertor

De bij deze invertor behorende spanningsvormen staan in figuur 6.42.

Deze spanningsvormen kunnen met behulp van pulsbreedtemodulatie overigens nog verbeterd worden.

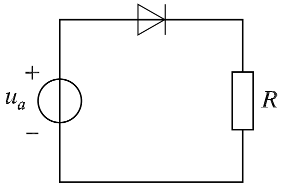


Figuur 6.42 Spanningsvormen bij de driefasige spanningsinvertor

6.7 Vraagstukken

De uitwerkingen van onderstaande vraagstukken staan op de internetsite http://www.vssd.nl/hlf/e004.htm.

Opgave 6.1



In deze opgave beschouwen we nevenstaande gelijkrichtschakeling. De wisselspanning u_a heeft een (effectieve) waarde van 40 V; de weerstand R is 10 Ω.

6.1a Schets het verloop van de stroom door de weerstand i_R als functie van de tijd en bereken de maximale waarde van deze stroom.

6.1b Bereken de gemiddelde en de effectieve waarde van de stroom door de weerstand.
Bereken de gemiddelde waarde van het in de weerstand gedissipeerde vermogen.

Er wordt een afvlakcondensator parallel aan de weerstand geplaatst. Deze condensator heeft een zodanig grote capaciteit dat de spanning over de condensator constant mag worden beschouwd.

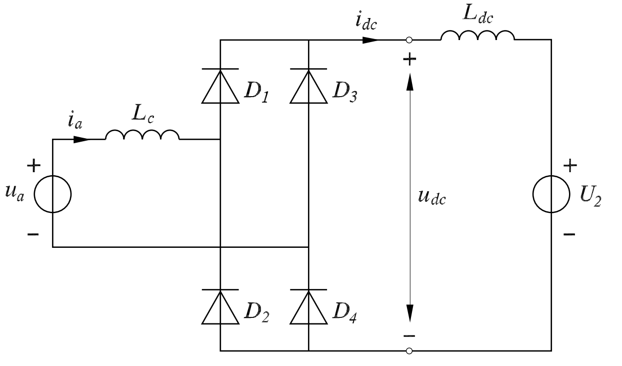
6.1c Bereken de gemiddelde en de effectieve waarde van de stroom door de weerstand.
Bereken de gemiddelde waarde van het in de weerstand gedissipeerde vermogen.

Opgave 6.2

In figuur 6.19 zijn de spannings- en stroomvormen geschetst die horen bij de diodebruggelijkrichter van figuur 6.18 voor het geval dat L_{dc} oneindig groot is. In deze opgave beschouwen we het geval dat L_{dc} eindig is.
Er is een stationaire situatie met leemtevrij bedrijf en er geldt $L_c = 0$.
Geef de differentiaalvergelijking die de stroom i_{dc} door de spoel L_{dc} beschrijft.
Schets u_{dc}, i_{dc} en i_a.

Opgave 6.3

In deze opgave wordt de onderstaande schakeling met diodebruggelijkrichter beschouwd. Voor de wisselspanning u_a in dit schema geldt $u_a = \hat{u}\sin(\omega t) = U\sqrt{2}\,\sin(2\pi f t)$ met $U = 150$ V en $f = 50$ Hz.



In het eerste deel van deze opgave geldt $L_c = 0$.

6.3a Bij welke waarde van de spanning U_2 is de gelijkrichter in stationair leemtevrij bedrijf?

Vervolgens gaan we er van uit dat de gelijkrichter in leemtebedrijf is. De gelijkspanning U_2 is 180 V en voor de spoel in het gelijkstroomcircuit geldt $L_{dc} = 2$ mH.

6.3b Welke dioden gaan na het tijdstip $t = 0$ het eerst in geleiding. Op welk tijdstip gebeurt dat?

6.3c Teken de stroom i_a en de spanning u_{dc} als functie van de tijd voor één periode van de wisselspanning. Hierbij is gegeven dat de stroom i_{dc} al gelijk aan nul is op het tijdstip $t = 10$ ms.

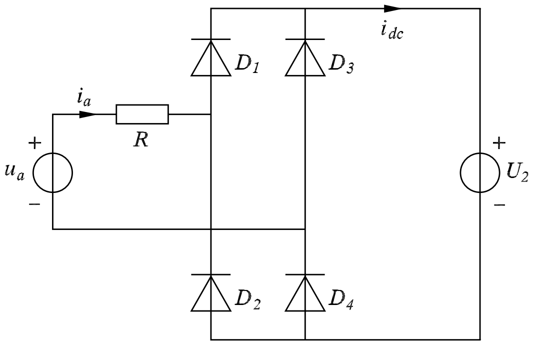
6.3d Bereken de maximale waarde van de stroom i_{dc}.

Vervolgens geldt $L_c = 1$ mH en $L_{dc} = \infty$, zodat de stroom in het gelijkstroomcircuit constant is ($i_{dc} = I_{dc}$). De gelijkspanning U_2 is gelijk aan 130 V. Ten gevolge van het eindig snel verlopen van het commutatieproces, is de gemiddelde waarde van de uitgangsspanning van de gelijkrichter U_{dc} afhankelijk van de gelijkstroom I_{dc}: $U_{dc} = \frac{2}{\pi}\hat{u} - \frac{2}{\pi}\omega L_c I_{dc}$

6.3e Bereken de waarde van de stroom I_{dc}. Hoe lang duurt het commutatieproces?

Opgave 6.4

In deze opgave bekijken we de belasting van het elektriciteitsnet door de diodebruggelijkrichter van onderstaande figuur en vergelijken dit met de belasting van het elektriciteitsnet door een weerstand.



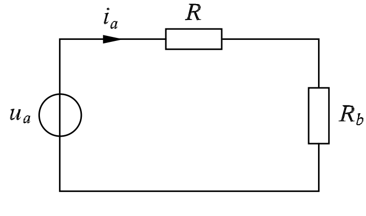
In het gelijkstroomcircuit van de figuur is geen smoorspoel aangebracht omdat deze spoel uit economische overwegingen in de praktijk meestal wordt weggelaten. De stroom i_{dc} wordt begrensd door de impedanties van het net en de aansluitdraden. Deze impedanties worden in rekening gebracht door de weerstand R van 0.01 Ω in serie met de spanningsbron u_a op te nemen. In nevenstaande figuur is u_a de omlaag getransformeerde netspanning, waarvoor geldt $u_a = \hat{u}\sin(2\pi ft)$, met $f = 50$ Hz en $\hat{u} = 6.2118$ V .

Eerst beschouwen we de netbelasting van de gelijkrichter. Voor de gelijkspanning geldt $U_2 = 6$ V. De spanningen zijn zo gekozen om het rekenwerk enigszins te beperken: bij deze uitgangsspanning wordt u_a groter dan U_2 op het tijdstip $t = 5T/24$.

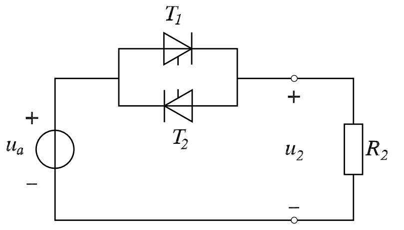
6.4a Schets de stroom i_a voor een periode van de spanning.

6.4b Bereken de piekwaarde $\hat{i}_a$ en de effectieve waarde I_a van de stroom i_a, het gemiddeld door de bron u_a geleverde vermogen P_a, de arbeidsfactor λ van de bron u_a en de gemiddelde waarde van het in de weerstand R gedissipeerde vermogen P_{diss}.

6.4c Vervolgens wordt de bron u_a via de weerstand R belast met een weerstand R_b van 1.32 Ω; zie nevenstaande figuur.
Bereken ter vergelijking de piekwaarde $\hat{i}_a$ en de effectieve waarde I_a van de stroom i_a, het gemiddeld door de bron u_a geleverde vermogen P_a, de arbeidsfactor λ van de bron u_a en de gemiddelde waarde van het in de weerstand R gedissipeerde vermogen P_{diss}.



Opgave 6.5



Nevenstaande schakeling stelt een lichtdimmer voor, die gevoed wordt uit de wisselspanningsbron u_a. Voor de spanning u_a geldt $u_a = U\sqrt{2}\,\sin(\omega t)$ met $U = 220$ V. De lamp wordt voorgesteld als de weerstand R_2.
Bij een voedingsspanning van 220 V neemt de lamp 40 W op.
De thyristoren worden periodiek ontstoken, waarbij in de eerste periode na $t = 0$ thyristor T_1 ontstoken wordt op het moment $\omega t = \alpha$ en thyristor T_2 op het moment $\omega t = \alpha + \pi$. De ontsteekhoek α is $\pi/3$ rad.

6.5a Teken de spanning u_2 voor één periode van de wisselspanning.

6.5b Bereken de effectieve waarde van u_2.

6.5c Bereken de gemiddelde waarde van het door de lamp opgenomen vermogen.

Opgave 6.6

Gegeven is een volledig stuurbare eenfasige bruggelijkrichter volgens figuur 6.26. Met deze gelijkrichter wil men een accu laden vanuit een wisselspanningsbron u_a. Deze heeft een spanning met een effectieve waarde van 15 V en met een frequentie van 50 Hz.
De accu wordt voorgesteld door de ideale spanningsbron U_2 (12 V) met inwendige weerstand R_{dc} (10 mΩ). L_{dc} is zo groot verondersteld dat i_{dc} constant mag worden verondersteld.

6.6a Bereken de gemiddelde waarde van u_{dc} als functie van de ontsteekhoek α.

6.6b Op welke waarde moet α worden ingesteld om de accu te laden met een stroom van 10 A? Noem deze hoek α_1.

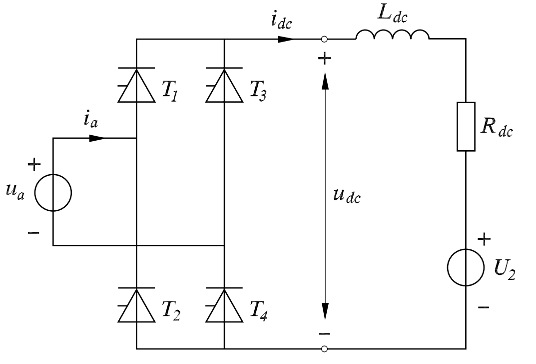
6.6c Wat is de laadstroom bij een ontsteekhoek α_2 waarvoor geldt $\alpha_2 = \alpha_1 - 0.01$?

6.6d We willen de accu ontladen via het net. Dit is mogelijk door de gestuurde gelijkrichter in wisselrichterbedrijf te gebruiken.
Hoe moet de accu worden aangesloten om ontlading op deze wijze mogelijk te maken?

6.6e Hoe groot moet de ontsteekhoek α worden gekozen om de accu te ontladen met een stroom van 10 A?

Opgave 6.7

Alle componenten van de onderstaande thyristorbruggelijkrichter worden ideaal verondersteld. De gelijkstroom i_{dc} wordt constant verondersteld ($i_{dc} = I_{dc}$). De weerstand in het gelijkstroomcircuit R_{dc} is gelijk aan 1 Ω; de wisselspanning van het wisselspanningsnet u_a heeft een (effectieve) waarde van 230 V.



6.7a Geef een uitdrukking voor de gemiddelde brugspanning U_{dc} als functie van de ontsteekhoek α.

6.7b U_2 is een gelijkspanningsbron met een spanning van 160 V. Bereken de ontsteekhoek α waarbij de gelijkstroom I_{dc} gelijk is aan 10 A en er energie aan U_2 wordt afgegeven.

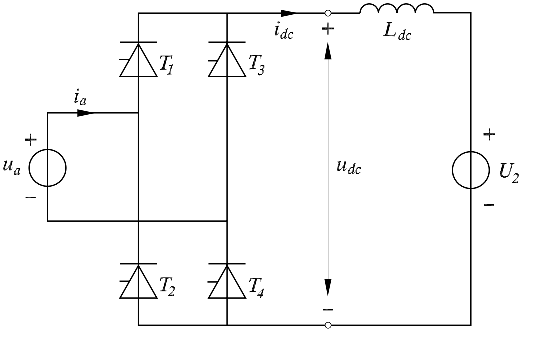
De thyristorbruggelijkrichter wordt gebruikt om door een zonnepaneel opgewekte energie aan het wisselspanningsnet af te geven.

6.7c Tussen welke grenzen moet de ontsteekhoek α liggen om wisselrichterbedrijf mogelijk te maken?

6.7d De grootte van de spanning tussen de aansluitklemmen van het zonnepaneel is gelijk aan 100 V. Het zonnepaneel is voorgesteld door middel van spanningsbron U_2. De afgegeven gelijkstroom is 10 A. Hoe groot moet de ontsteekhoek α worden gekozen?

Opgave 6.8

Onderstaande gelijkrichtschakeling wordt gebruikt voor de voeding van een gelijkstroommachine. We beschouwen in deze opgave steeds de stationaire toestand. We veronderstellen hierbij dat L_{dc} zodanig groot is, dat de stroom in het gelijkstroomcircuit constant is ($i_{dc} = I_{dc}$). De wisselspanning u_a heeft een (effectieve) waarde van 110 V.



De gelijkstroommachine wordt in de schakeling voorgesteld door de spanningsbron U_2. Voor deze sterk geïdealiseerde, verliesvrije machine geldt $U_2 = C\omega_m$, waarbij ω_m de hoeksnelheid van de rotor van de machine is en C het product van de machineconstante en de (constante) circuitflux in de machine ($C = 1.45$ Vs/rad).
Voor het op de rotor uitgeoefende elektromagnetische koppel geldt:
$T_e = CI_{dc}$.

In de eerste twee onderdelen van deze opgave drijft de gelijkstroommachine een ventilator aan. Hierdoor geldt voor het elektromagnetische koppel in de stationaire toestand bovendien $T_e = K_m|\omega_m|\omega_m$ met $K_m = 0.01$ Nms^2/rad^2.

6.8a Bereken de waarde van de ontsteekhoek α waarbij de rotor 500 omw/min draait (de draairichting ligt vast door het gegeven dat de machine in motorbedrijf is).

6.8b Bereken de waarde van de stroom in het gelijkstroomcircuit.

In de volgende onderdelen van deze opgave is de machine in generatorbedrijf.

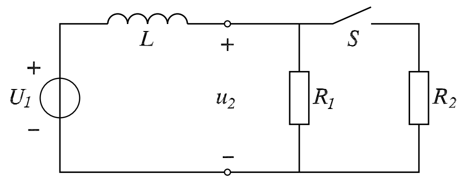
6.8c Welk van de volgende vier antwoorden is correct?
A: $T_e > 0$; $\omega_m > 0$; B: $T_e > 0$; $\omega_m < 0$;
C: $T_e < 0$; $\omega_m > 0$; D: $T_e < 0$; $\omega_m < 0$

6.8d De rotor draait 200 omw/min (de draairichting ligt vast door het gegeven dat de machine in generatorbedrijf is); bereken de bijbehorende waarde van de ontsteekhoek α.

6.8e Bij dit toerental (200 omw/min) bedraagt het aan de wisselspanningsbron geleverde vermogen 1 kW. Bereken het elektromagnetische koppel.

Opgave 6.9

Deze opgave is bedoeld als inleiding op het (vermogenselektronisch) schakelen in inductieve circuits. We maken hierbij gebruik van onderstaande schakeling. Hierin voedt de gelijkspanningsbron U_1 de weerstanden R_1 en R_2 via de spoel L. Voor $t < 0$ is de schakelaar S gesloten en is het circuit in een stationaire toestand. Op $t = 0$ wordt de schakelaar S geopend.



De volgende numerieke gegevens betreffende het circuit zijn bekend:
$U_1 = 10$ V ; $R_1 = 100\ \Omega$; $R_2 = 11.11\ \Omega$.

6.9a Schets het verloop van de spanning u_2 als functie van de tijd.

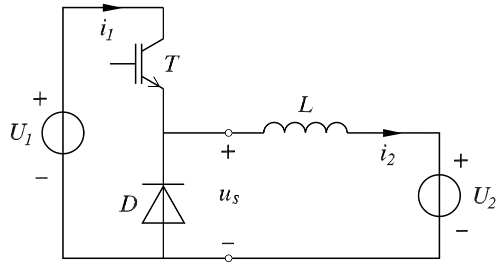
6.9b Wat is de maximale waarde van de spanning u_2.

Opgave 6.10

Bereken de arbeidsfactor als functie van de relatieve inschakelduur d van de voedende bron bij een chopper zoals in figuur 6.33 is gegeven. De spoel L mag zeer groot worden verondersteld (i_2 is constant).

Opgave 6.11

Deze opgave gaat over de aandrijving van een trein via een chopper en een gelijkstroommachine. In onderstaande figuur stelt de spanningsbron U_1 de bovenleiding voor en stelt de spanningsbron U_2 met de seriespoel L de gelijkstroommachine voor. Voor de spanning en het koppel van de gelijkstroommachine gelden de vergelijkingen $U_2 = K\Phi\,\omega_m$ en $T_e = K\Phi\, i_2$ met $K\Phi$ = 20 Vs/rad .
Om te voorkomen dat de machine te heet wordt, moet de gemiddelde waarde van de stroom door de machine i_2 beperkt worden tot $I_{2,max}$ = 1000 A.



We gaan ervan uit dat de wrijvingskracht op de trein geschreven kan worden als

$$F_{wrijving} = -\frac{|v|}{v}(\alpha v^2 + \beta) \text{ met } \alpha = 12\ \mathrm{Ns^2/m^2} \text{ en } \beta = 1500\ \mathrm{N}$$

De eerste term stelt de luchtwrijving voor en de tweede term de rolweerstand.
Ten gevolge van het schakelen van de chopper heeft het koppel van de gelijkstroommachine een rimpel met een frequentie die gelijk is aan de schakelfrequentie. We gaan er echter van uit dat de massa van de trein zo groot is dat de snelheidsvariatie van de trein ten gevolge van deze rimpel verwaarloosbaar is.
Verder is gegeven:
de inductiviteit van de seriespoel: $L = 2.5$ mH
de totale massa van de trein: m = 100000 kg
de straal van de wielen van de trein: $r = 0.4$ m
de schakelfrequentie van de omzetter, die verliesvrij schakelt: $f_s = 1$ kHz
de spanning van de bovenleiding: U_1 = 1500 V

In de opgaven a tot en met f geldt dat de trein met een constante snelheid van 18 km/u (v = 5m/s) rijdt, zodat de spanning U_2 250 V is (Controleer dit.) Verder geldt dat de chopper in leemtebedrijf werkt.
We zullen in een aantal stappen met behulp van de vermogensbalans de maximale en de gemiddelde waarden van de stroom in de chopper bepalen.

6.11a Bereken de maximale waarde van de spoelstroom i_2 (i_m) als functie van de relatieve inschakelduur d. Werk het antwoord zover mogelijk numeriek uit.

6.11b Bereken de gemiddelde waarde van het vermogen dat de bron U_1 levert als functie van de relatieve inschakelduur d. Werk het antwoord zover mogelijk numeriek uit.

6.11c Bereken het vermogen dat nodig is om de snelheid van de trein constant te houden.

6.11d Bereken vervolgens de relatieve inschakelduur d met behulp van de vermogensbalans.

6.11e Bereken de gemiddelde waarde van de stroom I_1.

6.11f Bereken de gemiddelde waarde van de stroom door de gelijkstroommachine I_2.

In de opgaven g tot en met j geldt dat de trein met een constante snelheid van 72 km/u ($v = 20$ m/s) rijdt.

6.11g Bereken het vermogen dat nodig is om de snelheid van de trein constant te houden.

6.11h Bereken de gemiddelde waarde van de stroom door de gelijkstroommachine I_2.

6.11i Is de chopper in leemtebedrijf?

6.11j Bereken de relatieve inschakelduur d.

6.11k Kan de snelheid negatief gemaakt worden zodat de trein de andere kant op rijdt?

6.11l Kan het elektromagnetisch koppel negatief gemaakt worden zodat de trein bij positieve snelheid afremt op de gelijkstroommotor?

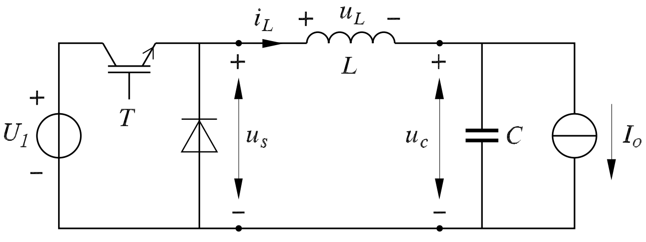
6.11m Bereken de maximale versnelling a van de trein.

6.11n Bereken de maximale snelheid van de trein.

In praktijk wordt de snelheid verder opgevoerd door de flux Φ kleiner te maken, terwijl de spanning constant blijft.

Opgave 6.12

Voor veel elektronische apparatuur is een gelijkspanning nodig, waarbij eisen gesteld worden aan de grootte van de rimpel op deze gelijkspanning. Deze mag bijvoorbeeld niet groter zijn dan 1 %. In deze opgave zullen we zien waarom er hoge schakelfrequenties gebruikt worden als er hoge eisen gesteld worden aan de rimpel op de gelijkspanning. We zullen dit doen door het uitgangsfilter van een chopper te dimensioneren voor twee waarden van de schakelfrequentie.



De chopper in onderstaande figuur voedt een elektronisch apparaat dat voorgesteld wordt door een stroombron I_o. In deze opgave geldt:

- de spanning U_1 is 20 V;
- de duty-ratio d is 1/2;
- de stroom I_o is 10 A;
- de periodeduur is T; voor de schakelfrequentie geldt: $f_s = 1/T$;
- op het tijdstip $t = 0$ wordt de IGBT T ingeschakeld;
- de diode en IGBT worden ideaal verondersteld;
- de chopper is in een stationaire toestand met leemtevrij bedrijf;
- bij het schetsen en berekenen van de spoelstroom mag de rimpel op u_C verwaarloosd worden, omdat de rimpel op u_C verwaarloosbaar is ten opzichte van de "rimpel" op u_s.

6.12a Geef de differentiaalvergelijking die het gedrag van de spoelstroom i_L beschrijft.
Schets de vorm van de spoelspanning u_L en de spoelstroom i_L voor één periode.

6.12b Een rimpel met een top-top-waarde van 2 A op de spoelstroom i_L wordt toelaatbaar geacht.
Bereken de minimale grootte van de spoel L die nodig is om dit te bereiken bij een schakelfrequentie van 1 kHz en bij een schakelfrequentie van 1 MHz.

6.12c Geef de differentiaalvergelijking die het gedrag van de condensatorspanning u_C beschrijft.
Schets de vorm van de spanning u_C voor een periode T.

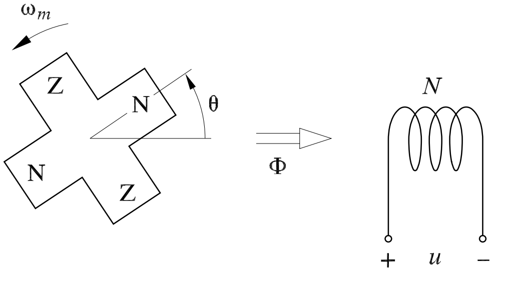
6.12d De spoel L wordt zo gekozen dat de top-top-waarde van de rimpel op de spoelstroom 2 A is. Een rimpel met een top-top-waarde van 0.2 V op de spanning u_C wordt toelaatbaar geacht.

Bereken de minimale grootte van de condensator C die nodig is om dit te bereiken bij een schakelfrequentie van 1 kHz en bij een schakelfrequentie van 1 MHz.
N.B. Hierbij kan nog steeds gebruik gemaakt worden van de spoelstroom die berekend was in de veronderstelling dat de rimpel op u_C verwaarloosbaar was.

7 De synchrone machine

7.1 Inleiding

Voor de opwekking van elektriciteit wordt meestal gebruik gemaakt van elektromechanische omzetters, die mechanische energie omzetten in elektrische energie: generatoren. In het elektriciteitsvoorzieningssysteem zijn dit vrijwel steeds zogenaamde synchrone generatoren. Met een primitieve vorm hiervan hebben we in paragraaf 2.5 al kennis gemaakt, zonder de naam synchrone generator te gebruiken. De tekening van deze generator volgens figuur 2.7 is in figuur 7.1 herhaald. Aan de hand van deze figuur kunnen we enkele basisuitdrukkingen voor de synchrone generator afleiden, waarbij ook de naam verklaard wordt.



Figuur 7.1 Een primitieve synchrone generator

De in deze figuur geschetste primitieve generator bestaat uit een vierpolige rotor met permanente magneten, die met een hoeksnelheid ω_m ronddraait, en een statorspoel met N windingen. De positie van de rotor wordt aangegeven met de hoek θ, waarvoor we aannemen:

$$\theta = \omega_m t$$

Verder veronderstellen we dat de magneten in de spoel een magnetische flux Φ veroorzaken die voldoet aan:

$$\Phi = \hat{\Phi}\cos(p\,\theta) = \hat{\Phi}\cos(p\,\omega_m t)$$

Hierin is p het aantal poolparen, dat in het geval van figuur 7.1 gelijk is aan twee. Voor de in de spoel opgewekte spanning geldt nu:

$$u = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(N\Phi)}{\mathrm{d}t} = -p\omega_m N\hat{\Phi}\sin(p\,\omega_m t) \tag{7.1}$$

Voor de cirkelfrequentie van de opgewekte spanning geldt dus

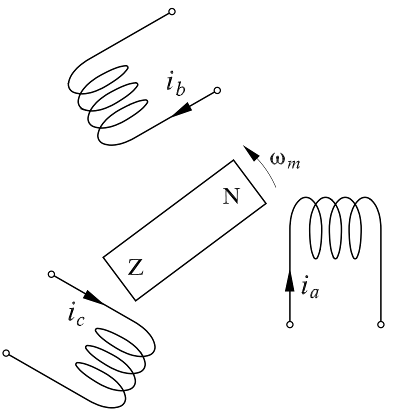
$$\omega_s = p\omega_m$$

De cirkelfrequentie is dus evenredig met de mechanische hoeksnelheid: de rotor en de spanning ”lopen synchroon”. Deze eigenschap onderscheidt synchrone generatoren van andere soorten wisselstroommachines, met name van de zogenaamde asynchrone machines, die ook wel inductiemachines genoemd worden. Op deze laatste categorie wordt in hoofdstuk 8 verder ingegaan.

De grootste synchrone generatoren hebben een schijnbaar vermogen van ongeveer 1200 MVA.

Zoals we in paragraaf 2.7 al hebben gezien, hebben eenfasige systemen als nadeel dat het overgedragen vermogen een wisselcomponent heeft; driefasige systemen hebben onder symmetrische condities dit nadeel niet. Omdat het elektriciteitsvoorzieningssysteem, mede om die reden, driefasig uitgevoerd is, moeten ook de generatoren hiervoor driefasig uitgevoerd worden.

Verder hebben we in paragraaf 2.7 al gezien dat de synchrone generator ook als motor gebruikt kan worden. Omdat dezelfde machine als motor en als generator gebruikt kan worden, wordt vaak de verzamelnaam *synchrone machine* gebruikt. De in figuur 2.19 getekende tweepolige draaistroommotor is in figuur 7.2 nog eens weergegeven.



Figuur 7.2 Een primitieve driefasige synchrone machine

Als we de spoelen in deze machine voeden met een driefasig stelsel van stromen, ontstaat er door de achtereenvolgende bekrachtiging van elk van de spoelen een draaiend magneetveld dat de rotor met permanente magneten voorttrekt. Hiermee kan een zeer robuuste motor verkregen worden, waarbij de rotor synchroon draait met het draaiende magneetveld.

Synchrone motoren variëren in grootte van ongeveer 1 μW (motortje voor een horloge) tot ongeveer 20 MW (voor ventilatoren en pompen).

Dit hoofdstuk gaat over de synchrone machine, en wel in het bijzonder over de synchrone machine als generator voor het elektriciteitsvoorzieningssysteem. Daarbij is het nodig dat de spanning geregeld kan worden, wat bij de primitieve machines in de figuren 7.1 en 7.2 niet kan. De magnetische flux in generatoren voor het elektriciteitsnet wordt dan ook opgewekt met een spoel op de rotor, die bekrachtigd wordt met een in te stellen gelijkstroom. Hiermee kan de flux en dus ook spanning ingesteld worden (zie (7.1). Zoals we in hoofdstuk 3 al gezien hebben, kunnen we dezelfde flux opwekken met een lagere stroom als we de machine voorzien van een magnetisch circuit met een hoge permeabiliteit ($\mu_r \gg 1$). Elektrische machines hebben dan ook bijna altijd een stator en een rotor van ijzer. Op deze wijze ontstaat de eenvoudige generator volgens paragraaf 7.2, die nog maar één fasewikkeling op de stator heeft.

Deze generator wekt echter nog geen sinusvormige spanning op. Dit aspect komt aan de orde in de daarop volgende paragraaf. Daarna berekenen we het door de generator opgewekte koppel.

Vervolgens breiden we de eenfasige generator in paragraaf 7.5 uit naar de gebruikelijke driefasige, waarna de toepassing daarvan in het elektriciteitsvoorzieningssysteem aan bod komt.

In de laatste paragraaf wordt nog enige aandacht besteed aan uitvoeringsvormen (constructieve aspecten) van synchrone machines.

7.2 Een eenvoudige generator

Zoals we al gezien hebben, hebben de primitieve machines volgens de figuren 7.1 en 7.2 als nadelen dat ze niet regelbaar zijn en dat ze geen magnetisch circuit van ijzer hebben. Daarnaast zijn permanente magneten van een goede kwaliteit tot op heden nog relatief duur.

Een meer realistische uitvoering van een synchrone machine bestaat uit een stator met een cilindrische boring en een cilindrische rotor. Deze zijn beide vrijwel altijd van ijzer gemaakt. In figuur 7.3 is zo'n machine geschetst. De doorsnede van deze machine staat in figuur 7.4.

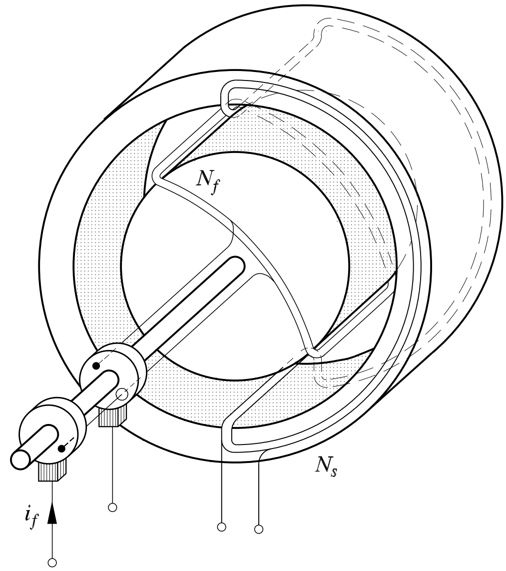
De rotor heeft hierbij een geconcentreerde diameterwikkeling met N_f windingen en de stator heeft een geconcentreerde diameterwikkeling met N_s windingen. Voor rotorgrootheden gebruiken we hier de index f (Engels: field), omdat de rotorspoel meestal gezien wordt als de primaire opwekker van de flux ("het veld" in jargon) in de generator. De rotorspoel wordt vaak aangeduid met de term veldspoel of liever de term bekrachtigingsspoel.

Waarom zou de term bekrachtigingsspoel de voorkeur hebben?

We veronderstellen hier dat de windingen in de luchtspleet liggen, wat een benadering is voor een praktische machine, waarbij de windingen vrijwel altijd in gleuven in het rotorijzer en in het statorijzer liggen. De positie van de rotor ten opzichte van de stator wordt aangegeven met de hoek θ, de hoek tussen de magnetische as van de rotorspoel en de magnetische as van de statorspoel.

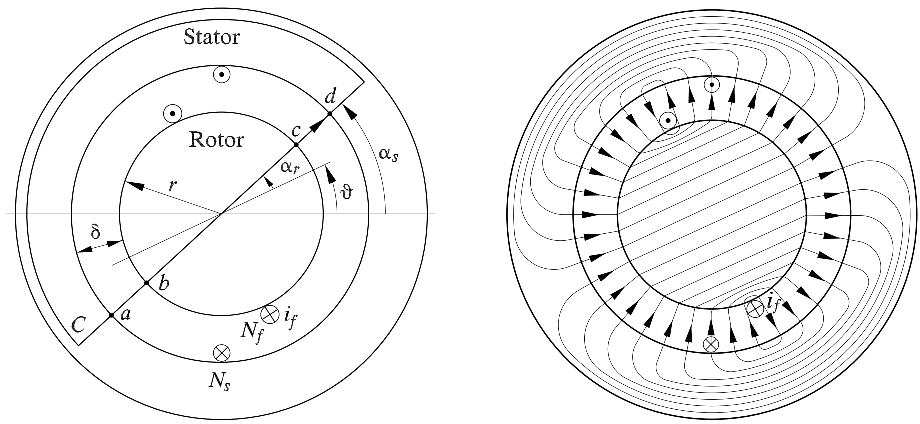
Hoeveel polen heeft de rotor hier?

Voor deze eenvoudige generator kijken we hoe de vorm van de opgewekte statorspanning verloopt als functie van de tijd voor het geval dat de rotorspoel is aangesloten op een stroombron met stroom i_f en dat de statorspoel stroomloos is.



Figuur 7.3 Een eenvoudige synchrone generator

Om het spanningsverloop te kunnen bepalen moeten we de met de statorspoel gekoppelde flux weten, die we weer kunnen bepalen uit de verdeling van de magnetische fluxdichtheid (B) in de luchtspleet. Deze verdeling zullen we eerst bepalen als functie van de positiehoek α_r in de luchtspleet (zie figuur 7.4). Deze hoek geeft een positie in de luchtspleet aan met de as van de rotorspoel als referentie. Hij wordt ook wel met de term omtreks-



Figuur 7.4 De doorsnede van de eenvoudige synchrone generator en de verdeling van de magnetische fluxdichtheid voor het geval dat er alleen een bekrachtigingsstroom loopt

coördinaat aangeduid.

Voor de berekening van de fluxdichtheid beginnen we met de eerste wet van Maxwell (wet van Ampère; (3.5), waarbij we de in figuur 7.4 getekende contour C beschouwen

$$\oint_C \vec{H}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}C = \int_a^b \vec{H}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}C + \int_b^c \vec{H}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}C + \int_c^d \vec{H}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}C + \int_d^a \vec{H}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}C = N_f i_f \quad (7.2)$$

Bij het verder uitwerken van deze vergelijking veronderstellen we dat de permeabiliteit van het ijzer oneindig groot is ($\mu_r = \infty$). Omdat de magnetische fluxdichtheid B in het ijzer eindig is, is de magnetische veldsterkte H in het ijzer gelijk aan nul (de contourdelen van b naar c en van d naar a).

Verder veronderstellen we dat de grootte van de luchtspleet δ veel kleiner is dan de straal van de rotor r ($\delta \ll r$). In figuur 7.4 is de luchtspleet overdreven groot getekend. Dankzij deze veronderstelling kunnen we de verandering van H langs de contour C in de luchtspleet verwaarlozen. Dankzij de symmetrie is voorts de grootte van H op de twee plaatsen waar de contour de luchtspleet oversteekt gelijk (het contourdeel van a naar b en het contourdeel c naar d).

Met de gemaakte veronderstellingen kunnen we vergelijking (7.2) verder uitwerken (de vector $\vec{H}$ raakt in de luchtspleet bovendien aan de contour C):

$$\vec{H}\cdot\vec{\tau}\,\delta + 0 + \vec{H}\cdot\vec{\tau}\,\delta + 0 = N_f i_f \qquad \text{of} \qquad 2H\delta = N_f i_f$$

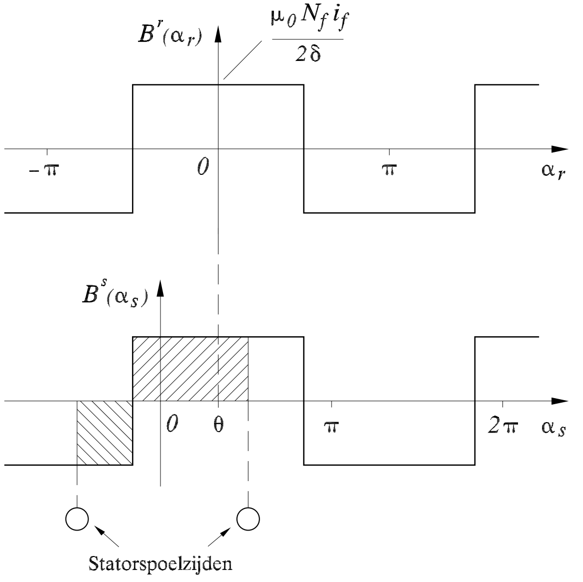
Bij beschrijvingen van machines wordt aan de grootten van H en van B in de luchtspleet vaak een teken gekoppeld. Dit teken wordt meestal positief gekozen als H (of B) naar buiten gericht is. Met deze tekendefinitie krijgen we het volgende verloop van H en B als functie van de hoek (omtrekscoördinaat) α_r:

$$B = \mu_0 H = \mu_0 \frac{N_f i_f}{2\delta} \quad \text{voor} \quad 0 < \alpha_r < \frac{\pi}{2} \ \text{ en } \ \frac{3}{2}\pi < \alpha_r < 2\pi$$
$$B = \mu_0 H = -\mu_0 \frac{N_f i_f}{2\delta} \quad \text{voor} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha_r < \frac{3}{2}\pi$$

Dit verloop van B als functie van de hoek α_r is in het bovenste gedeelte van figuur 7.5 geschetst (zie ook de veldlijnen in figuur 7.4). De horizontale as in deze figuur is als het ware een uitslag van de luchtspleet van de machine: we kunnen deze horizontale as linksom om de rotor leggen (omtrekscoördinaat).

Als we expliciet willen aangeven dat B een functie is van α_r, geven we B een index rechtsboven: $B = B^r(\alpha_r)$. We zeggen dan dat B uitgedrukt wordt in het rotorreferentiesysteem. Om de met de statorspoel gekoppelde flux te berekenen kiezen we een oppervlak S in de vorm van een halve cilinder in de luchtspleet met de geleiders van de spoel als randkromme, zoals in figuur 7.6 schematisch is weergegeven.

Vergelijk figuur 7.6 met figuur 7.3.

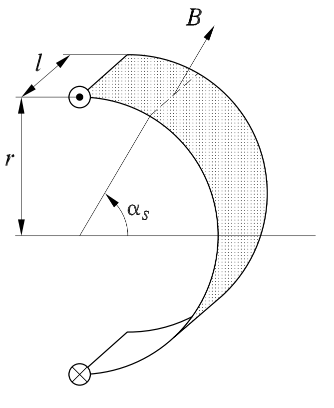


Figuur 7.5 De verdeling van de magnetische fluxdichtheid in de luchtspleet

Voor de flux door één winding van de spoel geldt dan:

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B\, l\, r\, \mathrm{d}\alpha_s \tag{7.3}$$

Hierin is l de lengte van de machine en is α_s de hoek waarmee de plaats in de luchtspleet ten opzichte van de as van de statorspoel wordt vastgelegd (zie figuur 7.4). Om deze integraal verder te kunnen uitwerken



Figuur 7.6 Het oppervlak om de met de statorspoel gekoppelde flux te berekenen

moeten we B kennen als functie van α_s (B moet worden uitgedrukt in het statorreferentiesysteem): $B = B^s(\alpha_s)$. Deze functie is in figuur 7.5 eveneens weergegeven, waarbij gebruik gemaakt is van het verband tussen de hoeken α_s en α_r dat uit figuur 7.4 volgt:

$$\alpha_s = \alpha_r + \theta \tag{7.4}$$

Hieraan zien we dat het assenstelsel met de blokgolf in het bovenste deel van figuur 7.5 naar rechts verschuift als de rotor linksom draait.

Ga na dat bij een positieve rotorhoeksnelheid de blokgolf in het onderste deel van figuur 7.5 naar rechts beweegt.

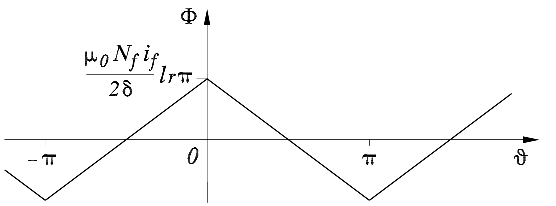
Uit het voorgaande blijkt dat de integraal in de uitdrukking voor de flux (7.3) overeenkomt met het gearceerde oppervlak in figuur 7.5 na vermenigvuldiging met lr.

Deze integraal (de flux door één winding van de statorspoel) is maximaal voor $\theta = 0$ en minimaal voor $\theta = \pi$.

Probeer dit ook in te zien aan de hand van figuur 7.4.

Tussen de extremen verloopt de flux evenredig met de rotorpositiehoek θ, zoals in figuur 7.7 is weergegeven.

Ga dit zelf na.



Figuur 7.7 De met één statorwinding gekoppelde flux

Voor de in één winding opgewekte spanning geldt:

$$u = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

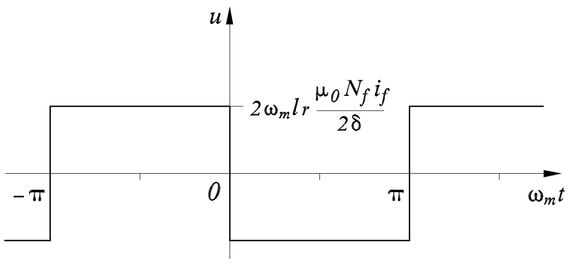
Voor het geval dat $\theta = \omega_m t$ volgt dan het in figuur 7.8 getekende spanningsverloop als functie de tijd.

Ga dit zelf na.

We zien dat het blokvormige verloop van $B^r(\alpha_r)$ bij een constante rotorhoeksnelheid resulteert in een blokvormige spanning $u(t)$.

We zullen de in een statorwinding geïnduceerde spanning nog op een andere manier berekenen, waarbij we kunnen inzien dat het verband tussen $B^r(\alpha_r)$ en $u(t)$ bij constante rotorhoeksnelheid ook voor andere vormen van $B^r(\alpha_r)$ geldig is.

Als de rotor in de referentierichting draait, verschuift de blokvormige verdeling in het onderste deel van figuur 7.5 naar rechts en is $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ positief, zodat in de beschouwde situatie de grootte van het gearceerde oppervlak



Figuur 7.8 De in één statorwinding geïnduceerde spanning

onder de x-as groter wordt en de grootte van het gearceerde oppervlak boven de x-as kleiner wordt.

De verandering van de flux per tijdseenheid is aan de linkerzijde van het beschouwde oppervlak:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{links}} = l\,r\,B^s(-\tfrac{\pi}{2})\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

De verandering van de flux per tijdseenheid is aan de rechterzijde van het beschouwde oppervlak:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|_{\text{rechts}} = -l\,r\,B^s(\tfrac{\pi}{2})\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

Voor de in een winding van de statorspoel geïnduceerde spanning kunnen we nu met de hoeksnelheid

$$\omega_m = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{7.5}$$

schrijven:

$$u = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \omega_m l r \left(B^s(-\tfrac{\pi}{2}) - B^s(\tfrac{\pi}{2})\right) \tag{7.6}$$

We zien hieraan dat de in een winding van de statorspoel opgewekte spanning alleen afhankelijk is van de magnetische fluxdichtheid B op de plaats waar de windingszijden in de luchtspleet liggen. Dit is algemeen geldig als de verdeling van B constant is in de tijd ten opzichte van de rotor.

Ga na dat dit inderdaad niet alleen voor de blokvormige verdeling volgens figuur 7.5 geldig is, maar algemeen.

Met de omtreksnelheid van de rotor

$$v = \omega_m r$$

herkennen we in (7.6) de spanning over een staaf met lengte l, bewegend met een snelheid v in een magnetisch veld met fluxdichtheid B:

$$u = B\,l\,v$$

Het hoofddoel van de voorgaande afleiding was het bepalen van het verloop van de statorspanning. Dat doel hebben we met uitdrukking (7.6) bijna bereikt. De volgende stap is het gebruik van een symmetrie-eigenschap die meestal geldig is in elektrische machines:

$$B^s(\alpha_s) = -B^s(\alpha_s - \pi) \quad \text{of} \quad B^r(\alpha_r) = -B^r(\alpha_r - \pi)$$

Ga na wat deze uitdrukkingen betekenen en controleer ze voor de in figuur 7.4 gegeven doorsnede.

Hiermee gaat (7.6) over in:

$$u = 2\,\omega_m\, l\, r\, B^s(-\tfrac{\pi}{2})$$

De laatste stap is het berekenen van de opgewekte spanning in de gehele statorspoel. Deze vinden we door de windingsspanning met het aantal windingen N_s te vermenigvuldigen:

$$u_s = 2\,\omega_m\, l\, r\, N_s\, B^s(-\tfrac{\pi}{2})$$

Uit het bovenstaande betoog blijkt dat in de gebruikte statorspoel (met de vorm van een zogenaamde diameterwikkeling), bij een constante rotorhoeksnelheid en een constante B ten opzichte van de rotor, een spanning opgewekt wordt die evenredig is met de fluxdichtheid B in de luchtspleet bij de positie $\alpha_s = -\pi/2$. Dit betekent dat in dat geval het verloop van de spanning als functie van de tijd er hetzelfde uitziet als het verloop van B als functie van α_r.

Ga de betekenis van bovenstaande zinnen zorgvuldig na.

7.3 De eenfasige synchrone generator

De in de vorige paragraaf beschreven machine levert een blokvormige statorspanning in plaats van de bijna altijd gewenste sinusvorm. In deze paragraaf bespreken we een methode om die sinusvorm te realiseren, waarbij we direct aansluiten op wat we aan het einde van de vorige paragraaf hebben geleerd.

We hebben gezien dat de in een diameterwikkeling opgewekte spanning in normale omstandigheden dezelfde vorm heeft als de verdeling van B in de luchtspleet in het rotorreferentiesysteem.

Wat betekent in dit geval normale omstandigheden?

We kunnen de opgewekte spanning dus sinusvormig maken door er voor te zorgen dat de fluxdichtheid sinusvormig verloopt. Dit kan bijvoorbeeld door de grootte van de luchtspleet op de juiste wijze te variëren als functie van de hoek α_r of door de rotorwindingen wat hun dichtheid betreft sinusvormig in de luchtspleet te verdelen.

Een andere methode is het toepassen van een sinusvormige verdeling van de statorwikkeling. Deze methode zullen we nader bekijken aan de hand van figuur 7.9. In het linker deel van deze figuur zien we een doorsnede van een machine waarbij de statordiameterwindingen niet geconcentreerd zijn op één plaats in de machine (een geconcentreerde spoel), maar verdeeld. In het rechter deel van figuur 7.9 zien we de in de verschillende deelspoelen geïnduceerde spanningen (deelspoel 2 heeft 2 windingen) voor het geval dat de rotorspoel is aangesloten op een stroombron met stroom i_f en dat de statorspoel stroomloos is.

Controleer de spanningsvormen aan de hand van figuur 7.8.

De in de statorspoel geïnduceerde spanning u vinden we door de in de deelspoelen geïnduceerde spanningen bij elkaar op te tellen. De spanning u in figuur 7.9 begint reeds voorzichtig de vorm van een sinus aan te nemen.

Door de statorwindingen sinusvormig langs de statorboring te verdelen, kunnen we bereiken dat ook de in de statorspoel geïnduceerde spanning sinusvormig als functie van de tijd verloopt.

Bij praktische synchrone generatoren worden meestal meer technieken tegelijkertijd gebruikt om een sinusvormige spanning te verkrijgen. In dit dictaat besteden we alleen aandacht aan het gebruik van een sinusvormige verdeling van de statorwikkeling.

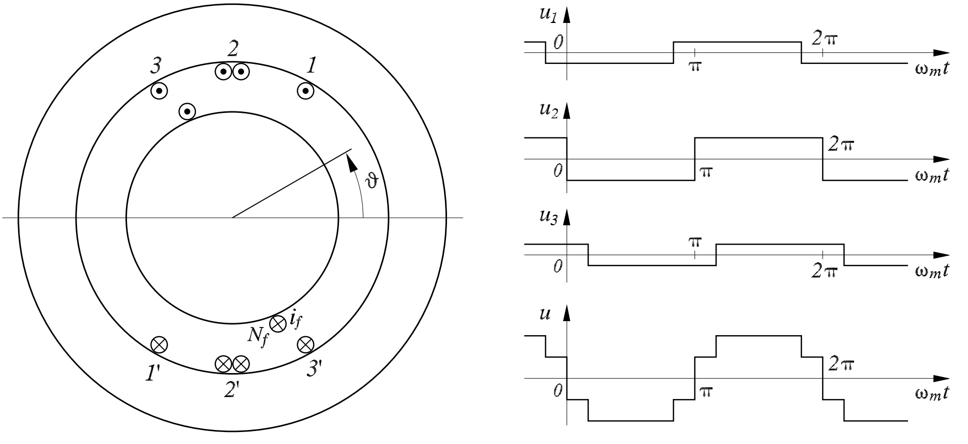
De sinusvormig verdeelde statorwikkeling

Een voorbeeld van een min of meer sinusvormig verdeelde statorwikkeling, bestaande uit diameterwindingen, is weergegeven in figuur 7.10. Hierbij ligt de as van de spoel horizontaal.

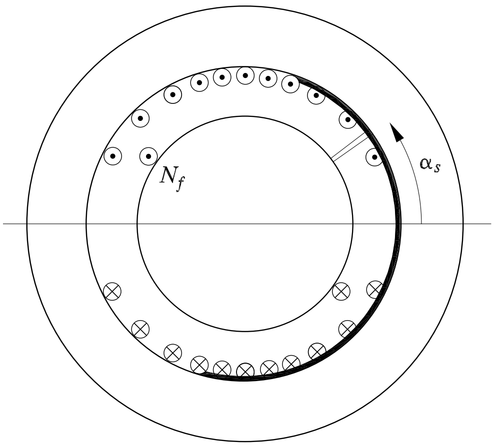
Zoals we in deze figuur direct kunnen zien is de daarin gegeven verdeling slechts een zeer grove benadering van een sinusvorm. Bij een praktische machine is de wikkelverdeling overigens ook slechts bij zeer grove benadering sinusvormig. We gaan voor de beschrijving van de machine echter uit van een ideale verdeling, die we geven als het aantal windingszijden per meter:

$$Z_{sa}(\alpha_s) = \hat{Z}_s \sin(\alpha_s)$$

We gebruiken hier het symbool Z_{sa} en niet, zoals wellicht te verwachten



Figuur 7.9 Een verdeelde statorwikkeling met drie deelspoelen bestaande uit diameterwindingen, de daarin geïnduceerde spanningen en de som daarvan



Figuur 7.10 Een sinusvormig verdeelde statorwikkeling

zou zijn, Z_s, omdat we later bij de driefasige synchrone machine nog de fasen b en c zullen invoeren.

Het verband tussen het totale aantal statorwindingen N_s en de amplitude van de windingverdeling kunnen we vinden met:

$$N_s = \int_0^\pi Z_{sa}(\alpha_s) r \,\mathrm{d}\,\alpha_s = \int_0^\pi \hat{Z}_s \sin(\alpha_s) r \,\mathrm{d}\,\alpha_s = 2r\hat{Z}_s$$

Hiermee gaat de wikkelverdeling over in:

$$Z_{sa}(\alpha_s) = \frac{N_s}{2\,r} \sin(\alpha_s) \tag{7.7}$$

De nullastspanning

Vervolgens berekenen we de statorspanning voor het geval dat de statorstroom nul is ($i_{sa} = 0$). Omdat de generator dan geen stroom levert, wordt dit de nullasttoestand genoemd.

Voor de berekening van de statorspanning moeten we eerst weten wat de met de statorspoel gekoppelde flux is. Hiertoe beschouwen we de nog willekeurige fluxdichtheidsverdeling in de luchtspleet $B^s(\alpha_s)$. Voor de beschrijving hiervan kunnen we handig gebruiken maken van het feit dat deze functie periodiek is met 2π.

Ga dit na.

We kunnen de fluxdichtheidsverdeling dan schrijven als een fourierreeks:

$$B^s(\alpha_s) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \hat{B}_n \cos(n\,\alpha_s \,-\, \varphi_n) \tag{7.8}$$

Hierin kunnen zowel $\hat{B}_n$ als φ_n functies van de tijd zijn.

We beschouwen nu de in figuur 7.10 geschetste sinusvormige wikkeling en gaan er van uit dat deze wikkeling is opgebouwd uit diameterwindingen. Voor de berekening van de flux gekoppeld met een diameterwinding gebruiken we een oppervlak volgens een halve cilinder zoals getekend in figuur 7.6. In figuur 7.10 is dit oppervlak voor één diameterwinding schematisch weergegeven met een vette cirkelboog.

Vervolgens bekijken we de infinitesimaal kleine flux die de luchtspleet oversteekt bij de hoek α_s:

$$B^s(\alpha_s)\, l\, r\, \mathrm{d}\,\alpha_s$$

Deze deelflux "steekt" door het windingsoppervlak van een winding als de "positieve" zijde (de punt) van deze winding ligt tussen α_s en π.

Deze deelflux wordt dus door (met de wikkelverdeling volgens (7.7))

$$\int_{\alpha_s}^{\pi} Z_{sa}(\alpha_s') r\, \mathrm{d}\,\alpha_s' = \frac{N_s}{2r}\int_{\alpha_s}^{\pi} \sin(\alpha_s') r\, \mathrm{d}\,\alpha_s' = \frac{N_s}{2}(1+\cos\alpha_s)$$

diameterwindingen omvat.

We kunnen nu de totale met de statorwikkeling gekoppelde flux vinden door voor elk deel van de luchtspeetfluxbijdrage te kijken door hoeveel statorwindingen die wordt omvat:

$$\begin{aligned}
\psi_{sa} &= \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} N_s\,(1+\cos\,\alpha_s)\, B^s(\alpha_s) l r\, \mathrm{d}\,\alpha_s \\
&= \tfrac{1}{2} N_s l r \int_0^{2\pi} B^s(\alpha_s)\, \mathrm{d}\,\alpha_s + \tfrac{1}{2} N_s l r \int_0^{2\pi} \cos\alpha_s\, B^s(\alpha_s)\, \mathrm{d}\,\alpha_s
\end{aligned}$$

Met (7.8) kunnen we direct zien dat de eerste term gelijk aan nul is.

Ga dit na.

De tweede term werken we met (7.8) verder uit:

$$\begin{aligned}
\psi_{sa} &= \tfrac{1}{2} N_s l r \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \cos\alpha_s \cos(n\,\alpha_s - \varphi_n)\, \mathrm{d}\,\alpha_s \\
&= \tfrac{1}{4} N_s l r \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \{\cos((n+1)\,\alpha_s - \varphi_n) + \cos((n-1)\,\alpha_s - \varphi_n)\}\, \mathrm{d}\,\alpha_s
\end{aligned}$$

Deze uitdrukking levert alleen iets op voor n=1:

$$\psi_{sa} = \tfrac{1}{4} N_s l r \int_0^{2\pi} \hat{B}_1 \cos(-\varphi_1)\, \mathrm{d}\,\alpha_s = \frac{\pi}{2} \hat{B}_1 N_s l r \cos\varphi_1 \tag{7.9}$$

We zien aan deze uitdrukking dat de met een sinusvormig verdeelde wikkeling gekoppelde flux alleen bepaald wordt door de grondharmonische van de verdeling $B^s(\alpha_s)$. De wikkeling werkt dus als het ware als een filter dat de grondharmonische uitfiltert.

Voor de grondharmonische van de blokvormige veldverdeling ten gevolge van de stroom i_f in de geconcentreerde diameterwikkeling op de rotor geldt (zie figuur 7.5 en bijlage A):

$$\hat{B}_1 = \frac{4}{\pi}\frac{\mu_0 N_f i_f}{2\delta} \quad ; \quad i_{sa} = 0 \tag{7.10}$$

Zoals we in figuur 7.5 ook kunnen zien ligt het maximum van de grondharmonische (deze is zelf niet getekend) bij $\alpha_s = \theta$ ($\alpha_r = 0$), zodat $\varphi_1 = \theta$. Met (7.10) kunnen we nu voor (7.9) schrijven:

$$\psi_{sa} = N_s N_f \frac{\mu_0 l r}{\delta} \cos\theta \; i_f \quad ; \quad i_{sa} = 0$$

Hiermee hebben we impliciet de coëfficiënt van wederzijdse inductie gevonden voor de koppeling van de stator- en de rotorspoel. Met het maximum daarvan:

$$\hat{M}_{sf} = N_s N_f \mu_0 \frac{lr}{\delta} \tag{7.11}$$

volgt nu:

$$\psi_{sa} = M_{saf} i_f \quad \text{met} \quad M_{saf} = \hat{M}_{sf} \cos\theta \quad ; \quad i_{sa} = 0 \tag{7.12}$$

Ga met behulp van figuur 7.10 na of dit globaal klopt.

We zien dat de coëfficiënt van wederzijdse inductie sinusvormig van de rotorpositiehoek θ afhankelijk is. Bij een constante rotorhoeksnelheid ω_m neemt θ lineair met de tijd toe (zie ook (7.5)), zodat (bij constante rotorstroom) ook de flux ψ_{sa} sinusvormig met de tijd zal variëren. Dit heeft weer een sinusvormig verloop van de statorspanning tot gevolg, wat we juist willen bereiken. We kunnen dus concluderen dat een sinusvormig verdeelde statorwikkeling resulteert in een sinusvormige statorspanning (in nullast bij constante rotorhoeksnelheid en constante rotorstroom).

De spanningsvergelijkingen

Als de generator belast wordt, zal de spanning niet meer gelijk zijn aan de nullastspanning. Om de generatorspanning in belaste toestand te kunnen bepalen, stellen we eerst de vergelijkingen van de generator op.

Voor de stator- en de bekrachtigings(veld)spoel kunnen we algemeen schrijven:

$$u_{sa} = R_s i_{sa} + \frac{\mathrm{d}\psi_{sa}}{\mathrm{d}t} \quad ; \quad u_f = R_f i_f + \frac{\mathrm{d}\psi_f}{\mathrm{d}t} \tag{7.13}$$

Hierin is R_s de weerstand van de statorspoel en R_f de weerstand van de bekrachtigingswikkeling.

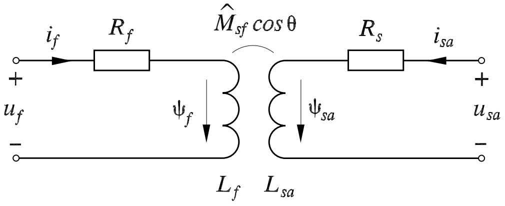
Voor de met deze twee (gekoppelde) spoelen gekoppelde fluxen geldt in het algemeen:

$$\psi_{sa} = L_{sa} i_{sa} + M_{saf} i_f \quad ; \quad \psi_f = M_{saf} i_{sa} + L_f i_f \tag{7.14}$$

Hierin is L_{sa} de coëfficiënt van zelfinductie van de statorspoel en L_f de coëfficiënt van zelfinductie van de bekrachtigingsspoel.

In figuur 7.10 kunnen we zien dat de vorm van het magnetische circuit niet afhankelijk is van de positie van de rotor: L_{sa} en L_f zijn geen functie van de hoek θ. Zoals we al gezien hebben, is dit laatste wel het geval voor de coëfficiënt van wederzijdse inductie (zie (7.12)).

Met de vergelijkingen (7.12), (7.13) en (7.14) kunnen we het schema van twee magnetisch gekoppelde spoelen volgens figuur 7.11 samenstellen.



Figuur 7.11 De eenfasige synchrone machine als twee magnetisch gekoppelde spoelen

Voordat we de uitdrukkingen voor de fluxen substitueren in de spanningsvergelijkingen, veronderstellen we dat de mechanische hoeksnelheid ω_m constant is, en dat we voor de rotorpositiehoek θ kunnen schrijven (zie ook (7.5)):

$$\theta = \omega_m t + \theta_0 \tag{7.15}$$

De fluxbetrekkingen (7.14) gaan nu met (7.12) over in:

$$\begin{aligned} \psi_{sa} &= L_{sa} i_{sa} + \hat{M}_{sf} \cos(\omega_m t + \theta_0) i_f \\ \psi_f &= \hat{M}_{sf} \cos(\omega_m t + \theta_0) i_{sa} + L_f i_f \end{aligned}$$

Als we deze uitdrukkingen in de spanningsvergelijkingen (7.13) substitueren, vinden we:

$$\begin{aligned} u_{sa} &= R_s i_{sa} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_{sa} i_{sa} + \hat{M}_{sf} \cos(\omega_m t + \theta_0) i_f\right) \\ u_f &= R_f i_f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\hat{M}_{sf} \cos(\omega_m t + \theta_0) i_{sa} + L_f i_f\right) \end{aligned} \tag{7.16}$$

De belaste generator

Om de eerste kennismaking met de belaste generator niet te moeilijk te maken, veronderstellen we dat de bekrachtigingswikkeling gevoed wordt uit een stroombron die een constante stroom levert:

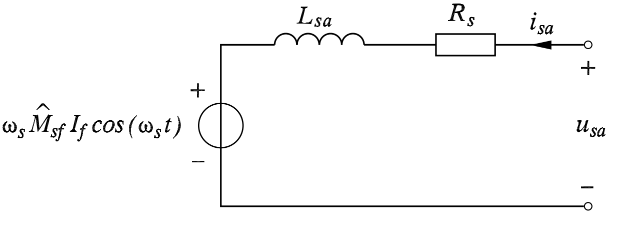
$$i_f(t) = I_f$$

Met deze veronderstelling gaat de spanningsvergelijking voor de statorspoel (7.16) over in:

$$
\begin{aligned}
u_{sa} &= R_s i_{sa} + L_{sa}\frac{\mathrm{d}i_{sa}}{\mathrm{d}t} + \hat{M}_{sf} I_f \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega_m t + \theta_0) \\
&= R_s i_{sa} + L_{sa}\frac{\mathrm{d}i_{sa}}{\mathrm{d}t} + \omega_m \hat{M}_{sf} I_f \cos(\omega_m t + \theta_0 + \frac{\pi}{2})
\end{aligned}
$$

Om op eenvoudige uitdrukkingen uit te komen kiezen we $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$. Deze keuze heeft geen principiële gevolgen. Hiermee leggen we immers alleen een verband tussen het willekeurig te kiezen moment $t=0$ vast ten opzichte van de rotorpositie. Bovendien werken we verder met de statorcirkelfrequentie ω_s in plaats van de mechanische hoeksnelheid ω_m. Dit mag omdat ze immers aan elkaar gelijk zijn.

De statorspanningsvergelijking leidt zo tot het vervangingsschema zoals weergegeven in figuur 7.12.



Figuur 7.12 Een vervangingsschema van de eenfasige synchrone machine voor het geval van stroombronvoeding van de bekrachtigingswikkeling

Als we de generator belasten met een weerstand R_o, gaat de spanningsvergelijking voor de statorspoel over in ($\omega_s = \omega_m$):

$$0 = (R_s + R_o) i_{sa} + L_{sa}\frac{\mathrm{d}i_{sa}}{\mathrm{d}t} + \omega_s \hat{M}_{sf} I_f \cos(\omega_s t)$$

Deze differentiaalvergelijking heeft voor de stationaire toestand als oplossing (de particuliere oplossing):

$$
\begin{aligned}
i_{sa} = \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta) \quad \text{met} \quad \hat{i}_s &= \frac{\omega_s \hat{M}_{sf} I_f}{\sqrt{(R_s + R_o)^2 + (\omega_s L_{sa})^2}} \\
\beta &= \pi - \arctan\frac{\omega_s L_{sa}}{R_s + R_o}
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

Leid de bovenstaande differentiaalvergelijking en zijn oplossing zelf af.

We zien in deze uitdrukking dat de amplitude van de uitgangsstroom voor zeer lage toerentallen evenredig toeneemt met cirkelfrequentie van de statorstroom ω_s en dus met het toerental (rotorhoeksnelheid ω_m):

$$\hat{i}_s = \frac{\omega_s \hat{M}_{sf} I_f}{R_s + R_o} \quad ; \quad \omega_s \ll \frac{R_s + R_o}{L_{sa}}$$

en dat de amplitude van de uitgangsstroom constant wordt voor zeer hoge toerentallen (hoge cirkelfrequentie):

$$\hat{i}_s = \frac{\hat{M}_{sf}}{L_a} I_f \quad ; \quad \omega_s \gg \frac{R_s + R_o}{L_{sa}}$$

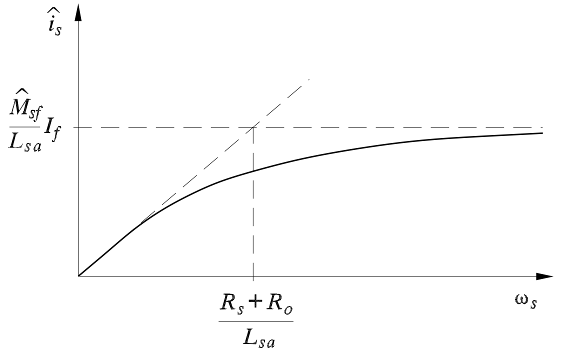
Verklaar dit aan de hand van het vervangingsschema in figuur 7.12

In figuur 7.13 is de amplitude van de uitgangsstroom weergegeven als functie van de rotorhoeksnelheid (statorcirkelfrequentie).

Voorbeeld

Een toepassing van wat we hiervoor gezien hebben zien we bij de fietsverlichting. Hierbij voedt een dynamo (een synchrone generator) twee lampjes, die we ons kunnen voorstellen als een weerstand. Een fietsdynamo heeft geen bekrachtigingswikkeling op de rotor, maar permanente magneten. Deze kunnen echter voorgesteld worden als een bekrachtigingswikkeling waardoor een constante stroom vloeit.

Het verloop van de amplitude van de stroom door de lampjes als functie van het toerental (evenredig met de fietssnelheid) komt dan ook overeen met het verloop volgens figuur 7.13. Dankzij dit verloop is het mogelijk om de verlichtingsinstallatie zodanig te dimensioneren dat de verlichtingssterkte over een groot snelheidsbereik vrijwel constant is en dat de lampjes ook bij zeer hard rijden niet kapot gaan.



Figuur 7.13 De amplitude van de uitgangsstroom van de beschouwde eenfasige synchrone generator als functie van de statorcirkel- frequentie (rotorhoeksnelheid)

De spanning over de bekrachtigingsspoel bij stroombronvoeding van de bekrachtigingsspoel

In het vorige onderdeel van deze paragraaf hebben we eenvoudigheidshalve verondersteld dat de bekrachtigingswikkeling gevoed wordt uit een stroombron, zonder daarbij in te gaan op de reden waarom dat eenvoudiger is. In dit onderdeel zullen we hierop nader ingaan.

Daartoe kijken we naar de spanningsvergelijking voor de bekrachtigingsspoel ((7.16)), waarbij we de bekrachtigingsstroom nog steeds constant veronderstellen. De vergelijking wordt dan ($\omega_s = \omega_m$; $\theta_0 = -\frac{\pi}{2}$):

$$u_f = R_f I_f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\hat{M}_{sf} \sin(\omega_s t)\; i_{sa}\right)$$

Als we hierin de uitdrukking voor de statorstroom (7.17) substitueren, vinden we ($\omega_s = \omega_m$):

$$
\begin{aligned}
u_f &= R_f I_f + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\hat{M}_{sf}\sin(\omega_s t)\;\hat{i}_s\cos(\omega_s t+\beta)\right) \\
&= R_f I_f + \hat{M}_{sf}\hat{i}_s \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\sin(2\omega_s t+\beta)-\sin(\beta)}{2} \\
&= R_f I_f + \omega_s \hat{M}_{sf}\hat{i}_s \cos(2\omega_s t+\beta)
\end{aligned}
$$

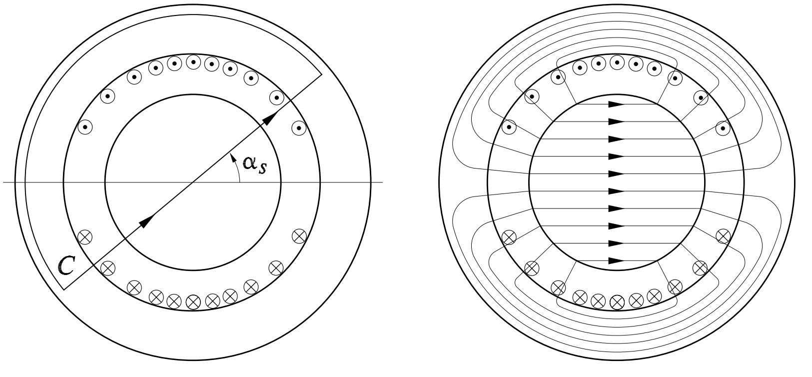
We zien dat in de bekrachtigingsspanning u_f naast een gelijkspanningscomponent ten gevolge van de weerstand van de spoel, ook een component met een cirkelfrequentie gelijk aan tweemaal de statorcirkelfrequentie (mechanische hoeksnelheid) voorkomt. Als we de bekrachtigingswikkeling zouden voeden uit een spanningsbron, zouden we dan ook een lastig op te lossen stelsel differentiaalvergelijkingen vinden. Omdat dit verschijnsel zich bij de meestal gebruikte driefasige generatoren niet voordoet, besteden we hier verder geen aandacht aan. We komen hierop in paragraaf 7.5 nog terug.

Het veld in de luchtspleet ten gevolge van de statorstroom

Om de oorzaak van deze in de bekrachtigingswikkeling geïnduceerde spanning met de dubbele frequentie nader te kunnen verklaren, kijken we naar de bijdrage van de statorstroom aan het magnetische veld in de luchtspleet. Bij de bepaling van de magnetische fluxdichtheid in de luchtspleet maken we gebruik van de in figuur 7.14 getekende doorsnede van de machine.

Voor de bepaling van de magnetische inductie beginnen we met de eerste wet van Maxwell (wet van Ampère; (3.5)), waarbij we de in figuur 7.14 getekende contour C beschouwen

$$
\oint_C \vec{H}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s = \oiint_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A
$$



Figuur 7.14 Een doorsnede van de machine om de fluxdichtheid in de luchtspleet ten gevolge van de statorstroom te berekenen en het resultaat van de berekening

Met de uitdrukking voor de wikkelverdeling 7.7 kunnen we de oppervlakte-integraal verder uitwerken:

$$\oint_C \vec{H} \cdot \vec{\tau} \, \mathrm{d}s = i_{sa} \int_{\alpha_s}^{\alpha_s+\pi} Z_{sa}(\alpha_s) r \, \mathrm{d}\alpha_s = i_{sa} \int_{\alpha_s}^{\alpha_s+\pi} \left(\frac{N_s}{2r} \sin\alpha_s \right) r \, \mathrm{d}\alpha_s = i_{sa} N_s \cos(\alpha_s)$$

Bij het verder uitwerken van de kringintegraal veronderstellen we dat de permeabiliteit van het ijzer oneindig groot is ($\mu_r = \infty$). Omdat de magnetische fluxdichtheid B in het ijzer eindig is, is de magnetische veldsterkte H in het ijzer gelijk aan nul. Verder veronderstellen we dat de grootte van de luchtspleet δ veel kleiner is dan de straal van de rotor r ($\delta \ll r$), zodat we de verandering van H langs de contour C in de luchtspleet kunnen verwaarlozen. Dankzij de symmetrie is voorts de grootte van H op de twee plaatsen waar de contour de luchtspleet oversteekt gelijk, zodat we met de gemaakte veronderstellingen voor de contour C kunnen schrijven:

$$2H\delta = i_{sa} N_s \cos(\alpha_s)$$

Voor de magnetische fluxdichtheid langs de contour C in de luchtspleet geldt dus:

$$B^s(\alpha_s) = \mu_0 H = \frac{\mu_0 N_s}{2\delta} i_{sa} \cos\alpha_s \tag{7.18}$$

Probeer deze uitdrukking direct te herkennen voor het geval $\alpha_s = 0$.

De verdeling van de fluxdichtheid in de luchtspleet is dus ook sinusvormig (zie ook de veldlijnen in figuur 7.14).

Bij een statorstroom i_{sa} volgens

$$i_{sa} = \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta)$$

gaat uitdrukking (7.18) over in:

$$B^s(\alpha_s) = \frac{\mu_0 N_s}{2\,\delta} \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta) \cos\alpha_s \tag{7.19}$$

Ga na dat deze verdeling een staande golf voorstelt.

Dit kunnen we weer verder uitwerken tot:

$$B^s(\alpha_s) = \frac{\mu_0 N_s}{2\,\delta} \hat{i}_s \frac{\cos(\omega_s t + \beta + \alpha_s) + \cos(\omega_s t + \beta - \alpha_s)}{2} \tag{7.20}$$

We zien dat de sinusvormige statorstroom een verdeling van de fluxdichtheid in de luchtspleet teweegbrengt in de vorm van een staande golf die we kunnen zien als twee lopende golven: een linksom draaiende (term met $\cos(\omega_s t + \beta - \alpha_s)$) en een rechtsom draaiende (term met $\cos(\omega_s t + \beta + \alpha_s)$).

Controleer dit door te kijken bij welke waarden van α_s de maxima van de cos-functies liggen.

De linksom draaiende golf draait met dezelfde hoeksnelheid als de rotor ($\omega_s = \omega_m$) en staat dus stil ten opzichte van de rotor. Deze component van de fluxdichtheidsverdeling induceert geen spanning in de rotor. De rechtsom draaiende golf draait met hoeksnelheid -ω_s en heeft dus een hoeksnelheid -2ω_s ten opzichte van de rotor. Deze component induceert dus een spanning met cirkelfrequentie 2ω_s in de rotor, wat we in het vorige onderdeel van deze paragraaf al rekenend ook vonden.

7.4 Het koppel bij een eenfasige synchrone generator

Met de resultaten van paragraaf 5.7 (Koppelberekening bij een elektromechanische omzetter met twee elektrische poorten) kunnen we het koppel bij een eenfasige synchrone generator eenvoudig bepalen. Als we in (5.28) L_1 vervangen door L_{sa}, L_2 door L_f, M door M_{saf}, i_1 door i_s en i_2 door i_f, en daarbij bedenken dat L_{sa} en L_f onafhankelijk zijn van θ, vinden we met de uitdrukking voor de coëfficiënt van wederzijdse inductie (7.12):

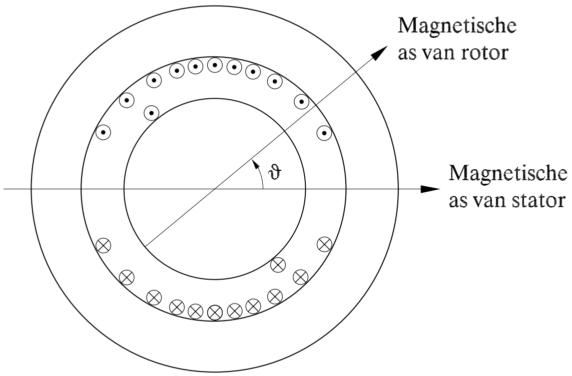
$$T_e(i_{sa}, i_f, \theta) = i_{sa}\, i_f \frac{\mathrm{d}M_{saf}(\theta)}{\mathrm{d}\theta} = -\hat{M}_{sf} i_{sa}\, i_f \sin\theta \tag{7.21}$$

We zien aan deze uitdrukking dat het koppel gelijk aan nul is als de positiehoek θ gelijk aan nul is, wat het geval is als de magnetische assen van de stator- en van de rotorspoel samenvallen.

Aan de hand van figuur 7.15 zullen we de koppeluitdrukking verder bespreken. We veronderstellen daarbij dat de stromen i_{sa} en i_f beide positief zijn. Als de hoek θ positief is, maar kleiner dan π, is het koppel negatief. Dit betekent dat het elektromagnetische koppel de rotor rechtsom probeert draaien. Als de hoek θ negatief is, maar groter dan -π, is het koppel juist positief, wat betekent dat het koppel probeert de rotor linksom te draaien. We kunnen dus concluderen dat het koppel steeds zodanig gericht is dat het probeert om de magnetische as van de rotor in de richting van de magnetische as van de stator te trekken.

Als de generator belast wordt met een weerstand R_o, geldt volgens (7.17) voor de statorstroom (bij constante bekrachtigingsstroom: $i_f = I_f$ en bij $\theta = \omega_m t - \pi/2$; $\omega_s = \omega_m$):

$$i_{sa} = \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta) \text{ met } \hat{i}_s = \frac{\omega_s \hat{M}_{sf} I_f}{\sqrt{(R_s+R_o)^2 + (\omega_s L_{sa})^2}}\,;\ \beta = \pi - \arctan\frac{\omega_s L_{sa}}{R_s+R_o}$$



Figuur 7.15 Een doorsnede van de eenfasige synchrone machine

Hiermee gaat de uitdrukking voor het koppel (7.21) over in:

$$\begin{aligned} T_e &= -\hat{M}_{sf} I_f \hat{i}_s \sin(\omega_s t - \frac{\pi}{2}) \cos(\omega_s t + \beta) \\ &= \frac{\hat{M}_{sf} I_f \hat{i}_s}{2} (\cos\beta \; + \; \cos(2\omega_s t + \beta)) \end{aligned} \tag{7.22}$$

Hierin herkennen we direct de koppelpulsatie met $2\omega_s$, zoals we die bij eenfasige systemen kunnen verwachten (zie ook paragraaf 2.5).

Wat gebeurt er met het koppel als we de weerstand $R_s + R_o$ nul zouden maken? Wat betekent dit voor het door de generator omgezette vermogen?

Voorts zien we dat de gemiddelde waarde van het koppel negatief is ($\beta > \pi/2$), wat betekent dat het elektromagnetische koppel probeert de rotorhoeksnelheid kleiner te maken.

7.5 De driefasige synchrone machine

In paragraaf 2.7 hebben we al gesproken over de voordelen die driefasige systemen hebben ten opzichte van eenfasige systemen. Een belangrijk aspect daarbij was de koppelpulsatie die we in de vorige paragraaf hebben berekend.

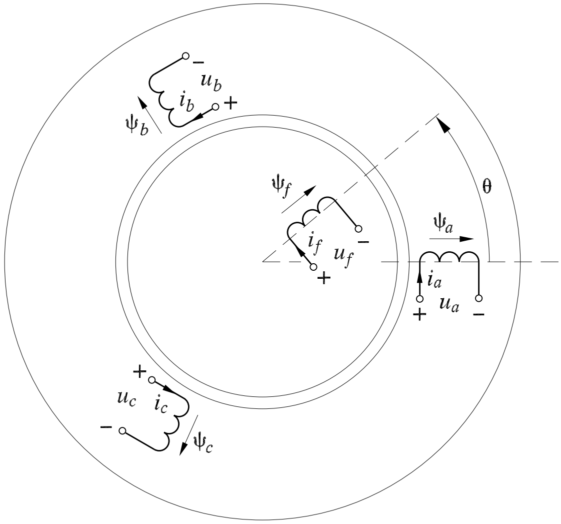
We kunnen een driefasige generator maken door de stator van de eenfasige generator uit te breiden met twee sinusvormig verdeelde wikkelingen die identiek zijn aan de oorspronkelijke wikkeling, maar over $2\pi/3$ en $4\pi/3$ verdraaid liggen ten opzichte van de oorspronkelijke wikkeling. Dit is in figuur 7.16 schematisch weergegeven. Hierbij zijn de geconcentreerde diameterwikkeling op de rotor en de sinusvormig verdeelde wikkelingen op de stator schematisch voorgesteld als netwerkelementen. De fasegrootheden worden onderscheiden met de indices a, b en c.

In dit hoofdstuk gaan we er van uit dat de synchrone machine belast is met een symmetrische belasting (generator) of dat hij gekoppeld is aan een symmetrische, driefasige spanningsbron (met sinusvormige spanningen). Het laatste geval treedt op wanneer de machine als generator of als motor verbonden is met het elektriciteitsnet. Verder gaan we uit, zoals steeds, van stationair bedrijf. Het een en ander betekent dat alles wat zich in fase a afspeelt zich $(2\pi)/(3\omega_s)$ later in fase b en $(4\pi)/(3\omega_s)$ later in fase c afspeelt. Voorts zullen de stromen sinusvormig zijn, zodat we daarvoor kunnen schrijven:

$$\begin{aligned} i_{sa} &= \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta) \\ i_{sb} &= \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta - \tfrac{2}{3}\pi) \\ i_{sc} &= \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta - \tfrac{4}{3}\pi) \end{aligned} \tag{7.23}$$

Hierin zijn de amplitude $\hat{i}_s$ en de fasehoek β afhankelijk van de bedrijfstoestand van de machine.

Om het elektrische gedrag van de machine te beschrijven moeten we de met de spoelen gekoppelde fluxen weten. Daartoe kijken we eerst naar het veld in de luchtspleet ten gevolge van de statorstromen. Vervolgens bepalen we welke met de statorspoelen gekoppelde fluxen daarbij horen. Deze worden vervolgens gebruikt om de spanningsvergelijkingen op te stellen. Het laatste onderdeel van deze paragraaf gaat over het koppel.



Figuur 7.16 Een doorsnede van de driefasige synchrone machine

Het veld in de luchtspleet ten gevolge van de statorstromen

Omdat statorwikkeling a overeenkomt met de statorwikkeling bij de eenfasige generator, kunnen we voor de bijdrage van deze fase aan het luchtspleetveld uitdrukking (7.18) hier ook gebruiken. Rekening houdend met de ruimtelijke verdraaiing van de spoelen b en c kunnen we voor de bijdragen van de afzonderlijke statorspoelen schrijven:

$$\begin{aligned}
B^s_{sa}(\alpha_s) &= \frac{\mu_0 N_s}{2\delta} i_{sa} \cos\alpha_s \\
B^s_{sb}(\alpha_s) &= \frac{\mu_0 N_s}{2\delta} i_{sb} \cos(\alpha_s - \tfrac{2}{3}\pi) \\
B^s_{sc}(\alpha_s) &= \frac{\mu_0 N_s}{2\delta} i_{sc} \cos(\alpha_s - \tfrac{4}{3}\pi)
\end{aligned} \tag{7.24}$$

Als we hierin de statorstromen volgens (7.23) substitueren en het resultaat op dezelfde wijze uitwerken als aan het einde van paragraaf 7.3 (de uitdrukkingen (7.19) en (7.20)), krijgen we

$$\begin{aligned}
B^s_s(\alpha_s) = \frac{\mu_0 N_s}{2\delta}\frac{\hat{i}_s}{2} & [\cos(\omega_s t + \beta + \alpha_s) + \cos(\omega_s t + \beta - \alpha_s) \\
& + \cos\{(\omega_s t + \beta - \tfrac{2}{3}\pi) + (\alpha_s - \tfrac{2}{3}\pi)\} + \cos\{(\omega_s t + \beta - \tfrac{2}{3}\pi) - (\alpha_s - \tfrac{2}{3}\pi)\} \\
& + \cos\{(\omega_s t + \beta - \tfrac{4}{3}\pi) + (\alpha_s - \tfrac{4}{3}\pi)\} + \cos\{(\omega_s t + \beta - \tfrac{4}{3}\pi) - (\alpha_s - \tfrac{4}{3}\pi)\}] \\
= \frac{\mu_0 N_s}{2\delta}\hat{i}_s \frac{3}{2}\cos(\omega_s t + \beta - \alpha_s)
\end{aligned} \tag{7.25}$$

Controleer de berekening.

We zien dat ondanks het feit dat elk van de statorfasen zowel een linksom als een rechtsom draaiende component in de fluxdichtheidsverdeling van de luchtspleet teweegbrengt, de som van alle componenten alleen een linksom draaiend veld veroorzaakt: de som van de rechtsom draaiende componenten is nul. De resulterende verdeling van de fluxdichtheid draait met een hoeksnelheid ω_s en staat dus stil ten opzichte van de rotor.

Controleer dit door te kijken bij welke waarden van α_s de maxima van de cos*-functies liggen.*

Dit betekent dat in de rotorspoel geen spanning geïnduceerd wordt en dat de rotor en het draaiveld synchroon draaien. Hiermee is de naam *synchrone* machine verklaard en is ook duidelijk waarom de synchrone machine tot de groep van draaistroommachines (of draaiveldmachines) gerekend wordt.

Verklaar waarom het bij een synchrone machine noodzakelijk is om het statorijzer te lamelleren, en lamellering van het rotorijzer niet nodig is.

De met de statorspoelen gekoppelde fluxen

Om de met de statorspoelen gekoppelde fluxen te vinden zullen we hier op dezelfde wijze te werk gaan als in paragraaf 7.3. We hadden daarbij geconstateerd dat alleen de grondharmonische van de fluxdichtheidsverdeling van belang is en dat als deze geschreven is in de vorm (vergelijk (7.8))

$$B_1^s(\alpha_s) = \hat{B}_1 \cos(\alpha_s - \varphi_1) \tag{7.26}$$

we voor de met statorspoel a gekoppelde flux (7.9) kunnen gebruiken:

$$\psi_{sma} = \frac{\pi}{2} N_s l r \hat{B}_1 \cos\varphi_1 \tag{7.27}$$

Hierbij duidt de index m op het hoofdveld (Engels: main field), ofwel luchtspleetveld. We hebben die hier gebruikt om duidelijk te maken dat dit niet de volledige met de statorspoel gekoppelde flux is: we laten de statorspreidingsflux nog even buiten beschouwing.

Als we (7.5) met de uitdrukking voor het statordraaiveld (7.25) vergelijken, zien we wat we voor $\hat{B}_1$ en voor φ_1 moeten kiezen. Voor de met statorspoel a gekoppelde hoofdflux ten gevolge van de statorstromen vinden we zo met (7.27):

$$\psi_{sma,s} = \frac{\pi}{2} N_s l r \frac{3}{2} \frac{\mu_0 N_s}{2\delta} \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta) \tag{7.28}$$

Omdat het draaiveld met hoeksnelheid ω_s draait, vormen de met de drie statorspoelen gekoppelde fluxen een symmetrisch, driefasig systeem: ψ_{smb} ligt $\frac{2}{3}\pi$ in fase achter op ψ_{smb} en ψ_{smc} ligt weer $\frac{2}{3}\pi$ achter op ψ_{smb}. Het is dan ook voldoende om slechts één fase te beschouwen: we gaan verder met fase a.

We voeren nu de inductiecoëfficiënt L_{sm} in volgens

$$L_{sm} = \frac{\pi}{2} N_s l r \frac{3}{2} \frac{\mu_0 N_s}{2\delta} \tag{7.29}$$

We moeten ons realiseren dat L_{sm} weliswaar een inductiecoëfficiënt is, maar geen coëfficiënt van zelfinductie. Hij geeft namelijk het verband tussen een driefasig stroomstelsel (het totale statordraaiveld) en de met één statorspoel gekoppelde flux.

Met (7.29) kunnen we (7.28) schrijven als:

$$\psi_{sma,s} \;=\; L_{sm}\hat{i}_s \cos\left(\omega_s t + \beta\right)$$

Hierbij tellen we de bijdrage van de rotorstroom volgens (7.12) op. Daarbij gaan we er van uit dat er door de rotorspoel een gelijkstroom loopt ($i_f = I_f$) en gebruiken we $\theta = \omega_s t + \theta_0$ voor de rotorpositiehoek:

$$\psi_{sma} = \psi_{sma,s} + \psi_{sma,f} = L_{sm}\hat{i}_s \cos\left(\omega_s t + \beta\right) + \hat{M}_{sf} I_f \cos\left(\omega_s t + \theta_0\right) \qquad (7.30)$$

De met de statorspoelen gekoppelde fluxen bestaan niet alleen uit de bijdrage van het luchtspleetveld, maar ook uit een bijdrage van het spreidingsveld ten gevolge van de statorstromen. Deze bijdrage kunnen we in rekening brengen door een inductiviteit toe te voegen ($L_{s\sigma}$):

$$\psi_{sa} = L_{s\sigma} i_{sa} + \psi_{sma} \qquad (7.31)$$

De statorspanningsvergelijking

De spanningsvergelijking voor statorspoel a is:

$$u_{sa} = R_s i_{sa} + \frac{\mathrm{d}\psi_{sa}}{\mathrm{d}t} \qquad (7.32)$$

Hierbij geldt voor de flux uitdrukking (7.31) gecombineerd met (7.30).

Omdat we hier te maken hebben met grootheden die een symmetrisch, driefasig stelsel van sinusvormige grootheden representeren (cirkelfrequentie ω_s), kunnen we volstaan met de beschouwing van slechts één fase (a) en kunnen we handig gebruik maken van de complexe schrijfwijze (fasoren).

Voor de stroom in statorfase a kunnen we schrijven:

$$i_{sa} = \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta) = \hat{i}_s \operatorname{Re} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_s t + \beta)} = \sqrt{2}\operatorname{Re}\left(\underline{I}_s \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t}\right) \;\text{ met } \underline{I}_s = \frac{\hat{i}_s}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta} \qquad (7.33)$$

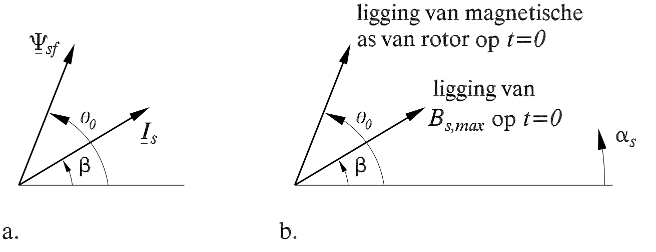
Omdat de fasoren een symmetrisch driefasig stelsel representeren, is de index a niet meer functioneel en wordt dan ook weggelaten.

Voor de statorflux ten gevolge van de bekrachtigingsstroom voeren we nog een fasor in volgens (zie (7.30)):

$$\psi_{sma,f} = \hat{M}_{sf} I_f \cos(\omega_s t + \theta_0) = \sqrt{2}\operatorname{Re}\left(\underline{\Psi}_{sf} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t}\right) \;\text{ met } \underline{\Psi}_{sf} = \frac{\hat{M}_{sf}}{\sqrt{2}} I_f \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta_0} \qquad (7.34)$$

In figuur 7.17a zijn de twee ingevoerde fasoren getekend. Als we deze figuur afbeelden op de doorsnede van de machine (figuur 7.16), zien we dat de fasoren wijzen in de richting van de bijbehorende draaivelden voor het tijdstip t=0 (figuur 7.17b). Dit kunnen we inzien met de uitdrukking voor het statordraaiveld (7.25) en de positiehoek van de rotor ($\theta = \omega_s t + \theta_0$) (het maximum van het statordraaiveld ligt bij $\alpha_s = \omega_s t + \beta$; de magnetische as van de rotor bij $\alpha_s = \omega_s t + \theta_0$).

De ruimtelijke verdeling rechts in figuur 7.17 heeft dus duidelijk overeenkomsten met de fasoren links in deze figuur, terwijl fasoren op zich geen ruimtelijke betekenis hebben.



Figuur 7.17 De fasoren $\underline{I}_s$ en $\underline{\Psi}_{sf}$ (a) en de posities van het maximum van het veld B_s en van de magnetische as van de rotor op het tijdstip t=0 (b)

Vervolgens gebruiken we de in (7.33) en (7.34) ingevoerde fasoren om de statorvergelijkingen (7.32), (7.31) en (7.30) in complexe vorm te schrijven. Daarbij gebruiken we ook voor de andere grootheden fasoren:

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + \mathrm{j}\,\omega_s \underline{\Psi}_s \quad ; \quad \underline{\Psi}_s = L_{s\sigma} \underline{I}_s + \underline{\Psi}_{sm} \quad ; \quad \underline{\Psi}_{sm} = L_{sm} \underline{I}_s + \underline{\Psi}_{sf} \tag{7.35}$$

De spanning geïnduceerd door $\underline{\Psi}_{sf}$ wordt wel de poolradspanning genoemd:

$$\underline{E}_p = \mathrm{j}\,\omega_s \underline{\Psi}_{sf} \tag{7.36}$$

Verklaar de naam poolradspanning.

Met (7.36) kunnen we de vergelijkingen (7.35) nu combineren tot één vergelijking:

$$\underline{U}_s = R_s \underline{I}_s + \mathrm{j}\,\omega_s \left(L_{s\sigma} + L_{sm}\right) \underline{I}_s + \underline{E}_p \tag{7.37}$$

Verder maken we het ons gemakkelijk door de weerstand van de statorspoelen te verwaarlozen. In de praktijk is dit toegestaan bij niet al te kleine, normale synchrone machines (groter dan ongeveer 10 kW) als de frequentie voldoende hoog is (50 Hz is voldoende hoog). In dat geval zijn de reactanties ($\omega_s L_{s\sigma}$ en $\omega_s L_{sm}$) namelijk veel groter dan de statorweerstand. Nadat we de zogenaamde synchrone inductiviteit L_s hebben ingevoerd volgens

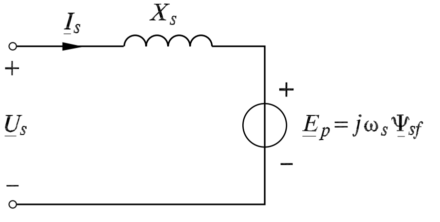
$$L_s = L_{sm} + L_{s\sigma} \tag{7.38}$$

gaat de spanningsvergelijking (7.37) over in:

$$\underline{U}_s = \mathrm{j}\,\omega_s L_s \underline{I}_s + \underline{E}_p \tag{7.39}$$

Vergelijking (7.39) leidt tot het eenfasige vervangingsschema van de (driefasige) synchrone machine, zoals dat in figuur 7.18 is weergegeven. Daarbij is $\omega_s L_s$ vervangen door de synchrone reactantie X_s.

Teken het fasordiagram voor het geval dat de generator (symmetrisch) belast is met drie weerstanden R_o.



Figuur 7.18 Een eenfasig vervangingsschema van de driefasige synchrone machine

De rotorspanningsvergelijking

Voor de rotor(bekrachtigings)wikkeling geldt de volgende algemene spanningsvergelijking:

$$u_f = R_f i_f + \frac{\mathrm{d}\psi_f}{\mathrm{d}t} \tag{7.40}$$

We zijn er hier van uit gegaan dat er een gelijkstroom loopt in de rotorwikkeling en dat de machine in stationair bedrijf is. Zoals we gezien hebben is er in de machine alleen een met de rotor meedraaiend veld. Dit betekent dat er in de rotorwikkeling geen spanning geïnduceerd wordt en dat er dus een gelijkspanning over de spoel staat. Spanningsvergelijking (7.40) gaat dan over in een vergelijking met alleen "gelijk"-grootheden:

$$U_f = R_f I_f \tag{7.41}$$

Het een en ander betekent ook dat de rotorwikkeling net zo goed uit een gelijkspanningsbron (in plaats van een gelijkstroombron) gevoed kan worden, wat in de praktijk ook gebeurt.

Het elektromagnetische koppel

Om een uitdrukking voor het elektromagnetische koppel te vinden zouden we dezelfde procedure kunnen volgen als we in de paragrafen 5.7 en 7.4 hebben gedaan. Bij een omzetter met vier elektrische circuits leidt dit echter tot tamelijk omvangrijk rekenwerk. We beperken ons hier tot een vermogensbeschouwing voor de stationaire toestand, zodat de te vinden koppeluitdrukking ook alleen maar in dat geval geldig is.

Zoals we in paragraaf 2.7 al hebben gezien treden er in een symmetrisch driefasig systeem (met sinusvormige spanningen en stromen) geen vermogenspulsaties op. Verder hebben we in deze paragraaf gezien dat onder deze condities er in de machine een met de rotor meedraaiend veld optreedt, zodat de veldverdeling in de machine ten opzichte van de rotor stilstaat. Dit betekent dat de in de machine opgeslagen hoeveelheid magnetische veldenergie constant is. Als we dezelfde referentierichting voor de energie-overdracht gebruiken als in paragraaf 5.7, wordt de vermogensbalans:

$$P_{elek} + P_{mech} = P_{diss} \tag{7.42}$$

Hierin is:

P_{elek}: het toegevoerde elektrische vermogen (stator en rotor): $P_{elek} = P_s + P_r = 3\,\mathrm{Re}(\underline{U}_s\,\underline{I}_s^*) + U_f I_f$

P_{diss}: het gedissipeerde vermogen (alleen in de rotorweerstand; met (7.41)): $P_{diss} = R_f I_f^2 = U_f I_f$

P_{mech}: het toegevoerde mechanische vermogen: $P_{mech} = T_s\omega_m = -T_e\omega_m$

Bij deze vermogensbalans moeten we opmerken dat bij generatorbedrijf P_s negatief en P_{mech} positief is.

Met deze drie uitdrukkingen volgt voor de vermogensbalans (7.42):

$$P_s = 3\,\mathrm{Re}(\underline{U}_s\underline{I}_s^*) = T_e\omega_m \tag{7.43}$$

We kunnen deze vergelijking zien als een vermogensbalans voor de stator op zich, die we als volgt zouden kunnen interpreteren. Via de statorklemmen wordt het elektrische vermogen P_s toegevoerd. Omdat er geen vermogen in de stator gedissipeerd wordt (de statorweerstand is nul verondersteld), wordt dit vermogen volledig overgedragen aan de luchtspleet. Dit gebeurt doordat de stator via het veld in de luchtspleet een koppel T_e uitoefent. Het veld zelf draait met een hoeksnelheid ω_m ($= \omega_s$), zodat de stator het vermogen $\omega_m T_e$ afgeeft. Dit vermogen wordt ook wel het luchtspleetvermogen genoemd.

Uit (7.43) volgt voor het elektromagnetische koppel:

$$T_e = \frac{3\,\mathrm{Re}(\underline{U}_s\underline{I}_s^*)}{\omega_m}$$

Voor het verdere onderzoek van het koppel werken we het statorvermogen ($\mathrm{Re}\left(\underline{U}_s\underline{I}_s^*\right)$) met behulp van figuur 7.18 verder uit. Daarbij maken we gebruik van het feit dat er in de inductiviteit L_s gemiddeld over de tijd geen energie omgezet wordt ($\omega_s = \omega_m$):

$$T_e = \frac{3\,\mathrm{Re}\left(\underline{U}_s\underline{I}_s^*\right)}{\omega_m} = \frac{3\,\mathrm{Re}\left(\underline{E}_p\underline{I}_s^*\right)}{\omega_m} = \frac{3\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{j}\,\omega_s\underline{\Psi}_{sf}\underline{I}_s^*\right)}{\omega_m} = -3\,\mathrm{Im}\left(\underline{\Psi}_{sf}\underline{I}_s^*\right) \tag{7.44}$$

Voer bovenstaande afleiding zelf uit.

We hebben nu een uitdrukking gevonden die via flux en stroom direct gekoppeld is met het veld in de machine. Wellicht past dit beter bij ons fysische beeld van krachten dan het rekenen met vermogens.

Om uitdrukking (7.44) verder te interpreteren, werken we hem verder uit met de uitdrukkingen voor de daarin voorkomende fasoren ((7.33) en (7.34)):

$$\begin{aligned} T_e &= -3\,\mathrm{Im}\left(|\underline{\Psi}_{sf}|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\theta_0}|\underline{I}_s|\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta}\right) = -3|\underline{\Psi}_{sf}||\underline{I}_s|\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\theta_0-\beta)}\right) \\ &= 3|\underline{\Psi}_{sf}||\underline{I}_s|\sin(\beta-\theta_0) \end{aligned} \tag{7.45}$$

De betekenis van de hoek $\beta-\theta_0$ wordt duidelijk als we naar figuur 7.17 kijken. De hoek $\beta-\theta_0$ geeft aan hoeveel het statordraaiveld voorloopt op het rotorveld. Als deze hoek tussen 0 en π ligt, is het koppel positief en is er sprake van motorbedrijf. In dat geval trekt het statordraaiveld als het ware de rotor vooruit. Als de hoek $\beta-\theta_0$ tussen $-\pi$ en 0 ligt, loopt de rotor voor op het statordraaiveld. Het koppel is dan negatief en de machine is in generatorbedrijf: de rotor trekt als het ware het statordraaiveld. Het koppel is dus steeds zodanig gericht dat het probeert om de magnetische as van de rotor in de richting van de magnetische as van de statorveld te trekken.

Vergelijk koppeluitdrukking (7.45) *met de eerder afgeleide betrekking voor het elektromagnetische koppel bij een eenfasige synchrone machine* (7.21) *en de daarop volgende uitleg.*
Stelt de in figuur 7.17 weergegeven toestand generator- of motorbedrijf voor?

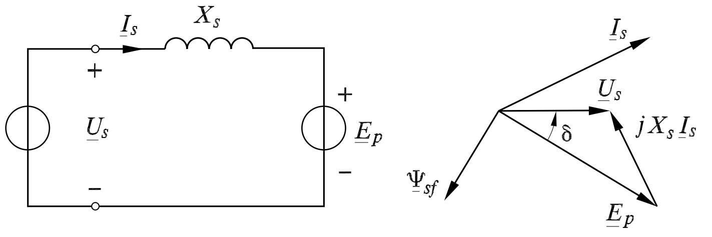
7.6 De synchrone machine in het elektriciteitsnet

Tot nu toe hebben we de synchrone machine nog alleen gebruikt als generator met weerstandsbelasting. Zoals we in paragraaf 2.8 hebben gezien, zijn de generatoren voor de elektriciteitsvoorziening via het elektriciteitsnet met elkaar verbonden. Dit betekent dat een individuele generator aan zijn klemmen het elektriciteitsnet ziet. In deze paragraaf besteden we aandacht aan enkele aspecten van de aan het net gekoppelde machine. Daarbij beschouwen we het elektriciteitsnet als een ideale spanningsbron (met constante amplitude en frequentie). Zo'n net wordt ook wel een oneindig sterk net genoemd.

Om inzicht te verwerven in het gedrag van de machine aan het elektriciteitsnet beschouwen we hier twee bedrijfstoestanden. Bij de eerste houden we de bekrachtigingsstroom constant. Daarbij variëren we het koppel aan de as van de machine. Bij de tweede houden we het askoppel gelijk aan nul en variëren we de bekrachtigingsstroom. We kijken daarbij naar de blindvermogenshuishouding. Voordat we deze bedrijfstoestanden onderzoeken, stellen we eerst de vergelijkingen op voor de synchrone machine gekoppeld aan het elektriciteitsnet.

De vergelijkingen van de synchrone machine in het elektriciteitsnet

Voor de behandeling in deze paragraaf maken we gebruik van figuur 7.19. In het linker deel is figuur 7.18 overgenomen. In het fasordiagram in het rechter deel is de hoek δ gedefinieerd als het faseverschil tussen de netspanning en de poolradspanning.



Figuur 7.19 De synchrone machine in het elektriciteitsnet

We hebben nu een toestand gekregen die overeenkomt met de toestand die beschreven wordt aan het einde van paragraaf 2.6 (bij figuur 2.16).

Voor de stroom geldt nu:

$$\underline{I}_s = \frac{\underline{U}_s - \underline{E}_p}{\mathrm{j}\,X_s}$$

zodat voor het door het elektriciteitsnet afgegeven complexe vermogen geldt ($||\underline{U}_s|$ ligt langs de reële as):

$$\underline{S}_s = 3\,\underline{U}_s\underline{I}_s^* = 3\frac{\underline{U}_s\underline{U}_s^*}{-\mathrm{j}X_s} - 3\frac{\underline{U}_s\underline{E}_p^*}{-\,\mathrm{j}X_s} = 3\,\mathrm{j}\,\frac{|\underline{U}_s|^2}{X_s} - 3\,\mathrm{j}\,\frac{|\underline{U}_s||\underline{E}_p|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\delta}}{X_s}$$

Waar komt de factor 3 vandaan?

Hiermee volgt voor het werkzame vermogen en voor het blindvermogen:

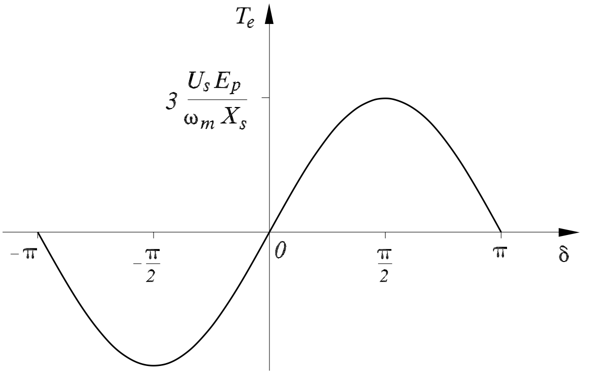
$$\begin{aligned} P_s &= \mathrm{Re}(\underline{S}_s) = 3\frac{|\underline{U}_s||\underline{E}_p|}{X_s}\sin\delta \\ Q_s &= \mathrm{Im}(\underline{S}_s) = 3\frac{|\underline{U}_s|^2}{X_s} - 3\frac{|\underline{U}_s||\underline{E}_p|}{X_s}\cos\delta \end{aligned} \tag{7.46}$$

Uit de uitdrukking voor het werkzame vermogen volgt voor het koppel:

$$T_e = 3\frac{|\underline{U}_s||\underline{E}_p|}{\omega_m X_s}\sin\delta = 3\frac{U_s E_p}{\omega_m X_s}\sin\delta$$

Constante bekrachtigingsstroom

Als de bekrachtigingsstroom constant is, is ook de poolradspanning constant. In dat geval is het omgezette werkzame vermogen, en ook het elektromagnetische koppel evenredig met de sinus van het faseverschil tussen de netspanning en de poolradspanning δ (zie figuur 7.20). De hoek δ wordt daarom wel de lasthoek genoemd.



Figuur 7.20 Het koppel bij een constante bekrachtigingsstroom

Voor de beschouwing beginnen we met δ=0. In dat geval is het vermogen gelijk aan nul en spreken we van nullast.

Als we vervolgens proberen om de machine af te remmen, zal de poolradspanning achter gaan lopen op de netspanning: de hoek δ wordt positief. Het gevolg is dat er elektrisch vermogen wordt omgezet in mechanisch vermogen, met andere woorden er ontstaat een positief koppel, zodat de machine in motorbedrijf is en probeert om de hoek δ weer te verkleinen.

Als we weer bij $\delta = 0$ beginnen, maar nu de machine aandrijven, zal de poolradspanning voor gaan lopen op de netspanning. In dat geval wordt de hoek δ negatief, waardoor een negatief koppel ontstaat. Dit betekent dat de machine probeert om de rotor weer af te remmen en dat de machine in generatorbedrijf is.

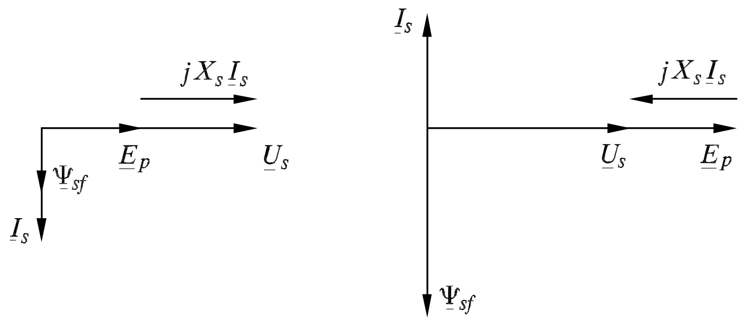
We moeten hierbij wel opmerken dat, behalve in overgangssituaties, de rotorhoeksnelheid steeds constant is en gelijk aan de cirkelfrequentie van de netspanning. Dit geldt zolang het koppel kleiner is dan het zogenaamde kipkoppel, het maximum van het verloop van het koppel als functie van de hoek δ (zie figuur 7.20).

Nullast

De andere bedrijfstoestand die we in deze paragraaf bekijken is de toestand waarbij de machine in nullast is: $\delta = 0$. Hierbij wordt weliswaar geen vermogen omgezet, maar de machine kan nog wel blindvermogen opnemen of leveren.

Zoals we in (7.46) kunnen zien neemt de machine blindvermogen op als $|\underline{E}_p| < |\underline{U}_s|$. We spreken in dit geval van een onderbekrachtigde machine. Als $|\underline{E}_p| > |\underline{U}_s|$ is Q_s negatief, wat betekent dat de machine blindvermogen levert. In dit geval is de machine overbekrachtigd. In figuur 7.21 zijn twee voorbeelden van fasordiagrammen geschetst (nullast: $\delta = 0$).

Zoals we in figuur 7.21 direct kunnen zien gedraagt een onderbekrachtigde machine zich als een spoel en een overbekrachtigde machine zich als een condensator. Bovendien kunnen we zien dat bij een onderbekrachtigde



Figuur 7.21 Een onder- en een overbekrachtigde synchrone machine in nullast

synchrone machine de statorstroom in dezelfde richting werkt als de statorflux ten gevolge van de bekrachtigingsstroom Ψ_{sf}: de statorstroom ”helpt” de rotorstroom. Bij een overbekrachtigde synchrone machine is het omgekeerde het geval.

Samenvatting

Samengevat kunnen we stellen dat de vermogensomzetting bij een aan het net gekoppelde synchrone machine gestuurd wordt via het askoppel en dat de bekrachtigingsstroom gebruikt kan worden om de blindvermogenshuishouding te beïnvloeden.

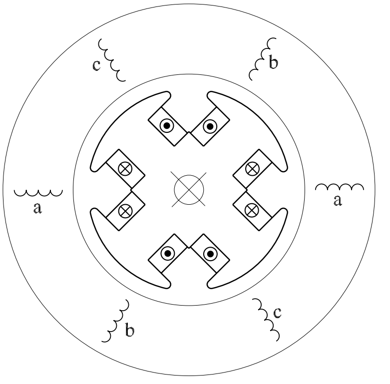
7.7 Uitvoeringsvormen

In de voorgaande paragrafen hebben we steeds slechts één soort synchrone machine beschouwd: de tweepolige machine met cilindrische rotor. Er zijn echter veel meer mogelijke uitvoeringen van synchrone machines. In deze paragraaf besteden we aandacht aan een tweetal onderscheidingspunten voor de uitvoeringsvorm. Er zijn er echter veel meer onderscheidingspunten.

Een mogelijk onderscheidingspunt waaraan we in paragraaf 7.1 al aandacht besteed hebben is het aantal polen of het aantal poolparen: het poolpaartal p. Als illustratie is in figuur 7.22 een vierpolige machine weergegeven. In uitdrukking (7.1) hebben we reeds gezien dat voor de cirkelfrequentie van de statorspanning geldt:

$$\omega_s = p\omega_m$$

De fysische betekenis van deze uitdrukking wordt met figuur 7.22 direct duidelijk: bij één omwenteling van de rotor ziet de statorspoel twee keer een noordpool langskomen, zodat de frequentie van de statorspanning twee, of in het algemeen p, keer zo hoog is als het toerental van de rotor.



Figuur 7.22 Een vierpolige synchrone machine met uitspringende polen

De meeste generatoren in elektriciteitscentrales worden aangedreven door stoomturbines, die bij voorkeur met een hoog toerental werken. Deze generatoren, ook wel turbogeneratoren genoemd, hebben als poolpaartal $p = 1$. Generatoren die gebruikt worden bij decentrale opwekking worden vaak aangedreven door een verbrandingsmotor, die bij een lager toerental werkt. Deze generatoren hebben meestal een poolpaartal van 2 of 3. Waterkrachtcentrales hebben zelfs generatoren met tientallen polen.

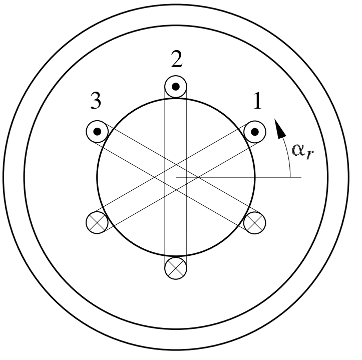
Een ander onderscheidingspunt voor de uitvoeringsvorm is de vorm van de rotor. In paragraaf 7.3 hebben we al gezien dat we de vorm van de opgewekte spanning op twee manieren kunnen beïnvloeden: door de verdeling van de statorwikkeling en door de verdeling van het veld in de luchtspleet. Tot nu toe zijn we steeds uitgegaan van een ideale sinusvormige verdeling van de statorwikkeling. In de praktijk is deze vorm slechts bij benadering sinusvormig, en het is dan ook wenselijk om ook de vorm van de verdeling van het veld in de luchtspleet bij benadering sinusvormig te maken. Dit is op eenvoudige wijze mogelijk door het toepassen van uitspringende polen (ook wel lichamelijke polen genoemd), zoals in figuur 7.22 is geschetst. De meeste synchrone machines hebben dan ook uitspringende polen. Alleen bijzondere machines die bij een relatief hoog toerental werken, zoals turbogeneratoren, worden om constructieve redenen uitgevoerd met een (massieve) cilindrische rotor. Hierbij kan de rotorspoel echter ook met een min of meer sinusvormige verdeling van de wikkelingen worden uitgevoerd, zodat ook hier het veld in de luchtspleet bij benadering sinusvormig wordt.

7.8 Vraagstukken

De uitwerkingen van onderstaande vraagstukken staan op de internetsite http://www.vssd.nl/hlf/e004.htm.

Opgave 7.1

De bekrachtigingswikkeling van een 2-polige cilinderrotor van een synchrone machine bestaat uit 3 windingen die 60° ten opzichte van elkaar zijn verdraaid (zie nevenstaande tekening). Door de windingen loopt de bekrachtigingsstroom I_f in de aangegeven richting.

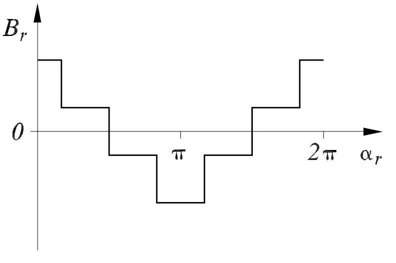


7.1a Schets de vorm van de fluxdichtheid in de luchtspleet die wordt veroorzaakt door winding nummer 2.

7.1b Schets de vorm van de fluxdichtheid in de luchtspleet die wordt veroorzaakt door de totale bekrachtigingswikkeling.

Opgave 7.2

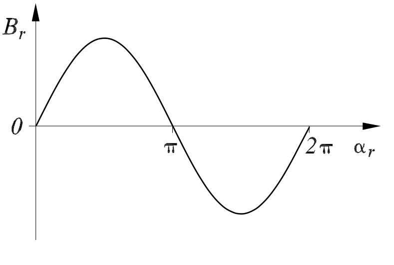
Een 2-polige cilinderrotor (nummer 1) voor een synchrone machine is zodanig gewikkeld dat bij een bekrachtigingsstroom I_f de fluxdichtheid in de luchtspleet de nevenstaande vorm heeft.



7.2a De rotor wordt geplaatst in een 1-fasige 2-polige stator met gecon- centreerde diameterwikkeling.
Schets een periode van de spanning die in deze wikkeling wordt geïnduceerd als de rotor met constant toerental draait. Deze periode mag op een willekeurig tijdstip beginnen.

7.2b Vervolgens wordt de rotor geplaatst in een 1-fasige 2-polige stator met een sinusvormig verdeelde wikkeling. Schets een periode van de spanning die in deze wikkeling wordt geïnduceerd als de rotor met constant toerental draait. Deze periode mag op een willekeurig tijdstip beginnen.

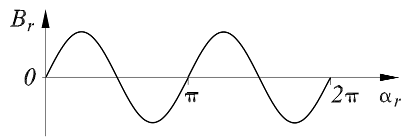
7.2c Een andere 2-polige cilinderrotor (nummer 2) is zodanig gewikkeld dat bij een bekrachtigingsstroom I_f de fluxdichtheid in de luchtspleet sinusvormig is volgens nevenstaande figuur. De rotor wordt geplaatst in een 1-fasige 2-polige stator met geconcentreerde diameter-



wikkeling.
Schets een periode van de spanning die in deze wikkeling wordt geïnduceerd als de rotor met constant toerental draait. Deze periode mag op een willekeurig tijdstip beginnen.

7.2d Vervolgens wordt de rotor geplaatst in een 1-fasige 2-polige stator met een sinusvormig verdeelde wikkeling.
Schets een periode van de spanning die in deze wikkeling wordt geïnduceerd als de rotor met constant toerental draait. Deze periode mag op een willekeurig tijdstip beginnen.

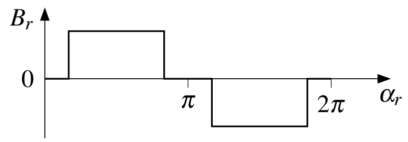
7.2e Weer een andere cilinderrotor (nummer 3) is 4-polig. Deze rotor is ook zodanig gewikkeld dat bij een bekrachtigingsstroom I_f de fluxdichtheid in de luchtspleet sinusvormig is volgens nevenstaande figuur.



Deze rotor nummer 3 wordt geplaatst in een 1-fasige 2-polige stator met geconcentreerde diameterwikkeling. Schets een periode van de spanning die in deze wikkeling wordt geïnduceerd als de rotor met constant toerental draait. Deze periode mag op een willekeurig tijdstip beginnen.

Opgave 7.3

Een synchrone machine met cilindrische rotor wordt bekrachtigd met een stroom I_f. De statorwikkelingen zijn stroomloos.



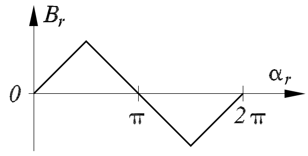
Het ijzer van de machine heeft een oneindig grote permeabiliteit ($\mu_r = \infty$). De fluxdichtheidverdeling ten gevolge van de bekrachtigingsstroom is zoals in de figuur.

7.3a Schets de windingverdeling van de rotorwikkeling als functie van de rotoromtrekscoördinaat α_r.

7.3b Stel dat de stator een geconcentreerde diameterwikkeling heeft.
Schets een periode van de spanning die in deze wikkeling wordt geïnduceerd als de rotor met constant toerental draait. Deze periode mag op een willekeurig tijdstip beginnen.

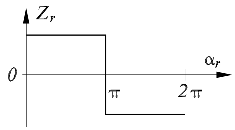
7.3c Stel dat de stator een sinusvormig verdeelde wikkeling heeft.
Schets een periode van de spanning die in deze wikkeling wordt geïnduceerd als de rotor met constant toerental draait. Deze periode mag op een willekeurig tijdstip beginnen.

Opgave 7.4

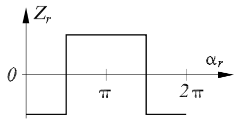


Een synchrone machine met cilindrische rotor wordt bekrachtigd met een stroom I_f. De statorwikkeling is stroomloos. Het ijzer van de machine heeft een oneindig grote permeabiliteit ($\mu_r = \infty$). Er zijn geen ijzerverliezen.
De fluxdichtheidverdeling in de luchtspleet als functie van de rotoromtrekscoördinaat α_r ten gevolge van de bekrachtigingsstroom is zoals in de figuur.

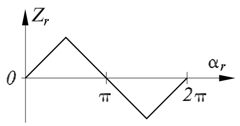
7.4a Welke van de volgende vier windingsverdelingen is correct?



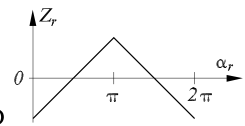
A



B



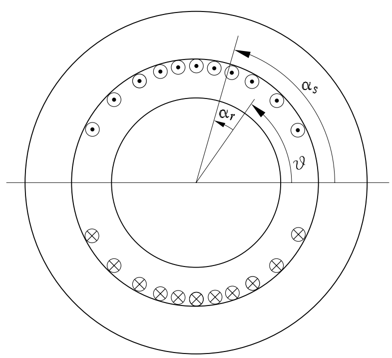
C



D

7.4b Stel het totale aantal windingen van de rotor N_f. De grootte van de luchtspleet is δ. Deze is veel kleiner dan de straal van de rotor r ($\delta \ll r$).
Wat is de topwaarde van de fluxdichtheid B_r in de luchtspleet?

7.4c De statorwikkeling van de machine die we in deze opgave aan het beschouwen zijn heeft een sinusvormige verdeling zoals in nevenstaande figuur is weergegeven. In deze figuur is het verband tussen de rotoromtrekscoördinaat α_r, de statoromtrekscoördinaat α_s en de rotorpositiehoek θ gegeven (Let op: de magnetische as van de rotor valt in het beschouwde geval niet samen met $\alpha_r = 0$).



Hieronder staan vier mogelijke uitdrukkingen voor de coëfficiënt van wederzijdse inductie, waarin $\hat{M}_{sf}$ een positieve waarde heeft. Welke uitdrukking is correct?
A: $M_{sf} = \hat{M}_{sf} \cos\theta$; B: $M_{sf} = -\hat{M}_{sf} \sin\theta$; C: $M_{sf} = \hat{M}_{sf} \sin\theta$;
D: $M_{sf} = -\hat{M}_{sf} \cos\theta$

Opgave 7.5

Een 1-fasige 2-polige synchrone machine met sinusvormig verdeelde statorwikkeling heeft de volgende kenmerken:
$L_{sa} = 35$ mH ; $R_s = 0$; $\hat{M}_{sf}$ = 280 mH.
De synchrone machine wordt aangedreven met een toerental van 3000 omw/min en is niet met een net verbonden. De machine is in nullast.

7.5a Teken het vervangingsschema van deze synchrone machine.

7.5b Hoe groot moet de bekrachtigingsstroom I_f zijn opdat de klemspanning in nullast een effectieve waarde van 220 V heeft?

7.5c De synchrone machine wordt vervolgens belast met een weerstand van 22 Ω. I_f wordt zo ingesteld dat de klemspanning weer een effectieve waarde heeft van 220 V.
Teken het fasordiagram dat bij deze situatie hoort.

7.5d Hoe groot moet I_f nu zijn?

7.5e Hoe groot is de nullastspanning bij deze bekrachtigingsstroom?

Opgave 7.6

Een fietsdynamo is een 1-fasige synchrone machine met permanente magneten in de rotor. We beschouwen hier zo'n dynamo waarbij het poolpaartal gelijk is aan 1. De coëfficiënt van zelfinductie van de statorwikkeling is 50 mH. De weerstand van de statorwikkeling is 4 Ω. De door de permanente magneten opgewekte en met de statorwikkeling gekoppelde flux varieert bij draaiende rotor sinusvormig. We schrijven hiervoor:
$\psi_{sf} = \hat{\psi}_{sf} \cos\theta$ met $\theta = \omega_m t - \frac{\pi}{2}$.
Hierin is ω_m de rotorhoeksnelheid. Voor de topwaarde van ψ_{sf} geldt $\hat{\psi}_{sf} = 40$ mWb. Permanente magneten hebben overigens hetzelfde effect als een bekrachtigingswikkeling met constante bekrachtigingsstroom, zodat $\hat{\psi}_{sf}$ overeenkomt met $\hat{M}_{sf} I_f$. De dynamo draait wrijvingsloos en heeft geen ijzerverliezen. Er treedt geen verzadiging op.

7.6a Teken het vervangingsschema van deze dynamo.

In de volgende twee onderdelen is de dynamo niet belast en draait de rotor met 100 omw/s.

7.6b Wat is de (effectieve) waarde en wat is de frequentie van de spanning aan de klemmen van de dynamo?

7.6c Wat is de gemiddelde waarde van het koppel?

De dynamo wordt belast met een weerstand van 12 Ω (het voor- en het achterlicht van de fiets parallel geschakeld). De rotorhoeksnelheid is 600 rad/s (de fiets rijdt dan ongeveer 20 km/uur).

7.6d Wat is de (effectieve) waarde van de stroom door de dynamo I_s en wat is het gemiddeld aan de belasting (het voor- en het achterlicht) afgegeven vermogen P_o?

7.6e Wat is de gemiddelde waarde van het elektromagnetische koppel en wat is de amplitude van de rimpel op dat koppel?

7.6f Bereken de complexe effectieve waarde (fasor) van de statorstroom. Houd daarbij rekening met de referentierichting in het vervangingsschema (onderdeel a).

7.6g Teken een fasordiagram in ongeveer de juiste verhoudingen voor het hier beschouwde geval. In dit diagram moeten ten minste de fasoren voor de door de permanente magneten opgewekte spanning, voor de spanning over de statorinductiviteit en voor de statorstroom zijn weergegeven. Houd daarbij rekening met de referentierichting in het vervangingsschema (onderdeel a).

In de volgende twee onderdelen kijken we hoe de statorstroom en het afgegeven vermogen afhangen van de rotorhoeksnelheid.

7.6h Bereken voor de rotorhoeksnelheden 150 rad/s (± 5 km/uur), 300 rad/s (± 10 km/uur) en 1800 rad/s (± 60 km/uur) de effectieve waarde van de statorstroom, de complexe effectieve waarde (fasor) van de statorstroom en aan de belasting (het voor- en het achterlicht) afgegeven gemiddelde vermogen.

7.6i Teken de complexe effectieve waarde van de statorstroom (de eindpunten van de fasor) in het complexe vlak voor de rotorhoeksnelheden 150 rad/s, 300 rad/s, 600 rad/s en 1800 rad/s.

Opgave 7.7

Een 3-fasige 4-polige synchrone machine met uitspringende polen heeft om elke pool een bekrachtigingswikkeling met N_f windingen. De bekrachtigingsstroom is I_f. De luchtspleet onder de poolschoenen is constant en heeft de grootte δ. Er loopt geen stroom in de statorwikkelingen en het ijzer van de machine heeft een oneindig grote permeabiliteit.
Hoe groot is de magnetische inductie onder de poolschoenen?

Opgave 7.8

Een driefasige synchrone machine is niet met een net verbonden. Hij wordt aangedreven met zo'n toerental dat de frequentie van de in de statorwikkelingen opgewekte spanningen 50 Hz is. Verder geldt: $R_s = 0$ en $L_s = 35$ mH.

7.8a De machine wordt belast met drie in ster geschakelde weerstanden van 22 Ω. De poolradspanning E_p wordt zo ingesteld dat de (effectieve) waarde van de fasespanning 220 V bedraagt.
Teken het fasordiagram voor deze toestand.

7.8b Hoe groot is de (effectieve) waarde van E_p?

7.8c Vervolgens worden de weerstanden verwijderd en wordt de machine belast met drie in ster geschakelde spoelen van 70 mH. De poolradspanning E_p wordt zo ingesteld dat de (effectieve) waarde van de fasespanning 220 V bedraagt.

Teken het fasordiagram voor deze toestand.

7.8d Hoe groot is de (effectieve) waarde van E_p?

7.8e Vervolgens worden de spoelen verwijderd en wordt de machine belast met drie in ster geschakelde condensatoren van 145 μF. De poolradspanning E_p wordt zo ingesteld dat de (effectieve) waarde van de fasespanning 220 V bedraagt.
Teken het fasordiagram voor deze toestand.

7.8f Hoe groot is de (effectieve) waarde van E_p?

Opgave 7.9

Een 3-fasige 6-polige synchrone machine met cilindrische rotor is verbonden met het 380V/50Hz-net. Het maximale koppel dat de synchrone machine kan ontwikkelen bij een zekere bekrachtigingsstroom $I_f = I_{f,1}$ bedraagt T_{kip}.

7.9a Schets de koppel-toerenkarakteristiek (het koppel als functie van het toerental) voor deze machine voor $I_f = I_{f,1}$. Zet hierbij het toerental uit in omw/min.

7.9b De synchrone machine werkt als generator en is in een stationaire toestand. Het opgenomen koppel is T_{gen}. Nu wordt de bekrachtigingsstroom 1,5 keer zo groot gemaakt. Wat gebeurt er met T_{gen}?

Opgave 7.10

Een 3-fasige synchrone machine is met het elektriciteitsnet verbonden. De statorweerstand van de synchrone machine wordt 0 gesteld.

7.10a Teken het eenfasige vervangingsschema voor deze synchrone machine.

7.10b Teken het fasordiagram voor het geval dat de synchrone machine in nullast draait (dus: geen wattvermogen levert of vraagt) en overbekrachtigd is.

7.10c De synchrone machine gaat vervolgens als generator werken.
Teken het fasordiagram. Geef hierin de lasthoek aan.

7.10d Stel dat er vlakbij de machine een driefasige kortsluiting in het net optreedt (d.w.z.: alle fasen en de nulleider maken contact met elkaar).
Teken het fasordiagram voor deze situatie.

Opgave 7.11

Een synchrone machine heeft de volgende kenmerken. Hij is 3-fasig, het poolpaartal is 1 en de rotor is cilindrisch met een geconcentreerde diameterwikkeling. De straal van de rotor is r; de lengte van de rotor is l. Voor de grootte van de luchtspleet δ geldt: $\delta \ll r$. Het totale aantal windingen van de rotor bedraagt N_f. De statorwikkelingen zijn sinusvormig verdeeld en hebben geen weerstand. Het ijzer van de machine heeft een oneindig grote permeabiliteit ($\mu_r = \infty$). Er treden geen ijzerverliezen op en de machine draait zonder wrijving.
Noem de synchrone reactantie X_s en de maximale waarde van de coëf/-ficiënt van wederzijdse inductie tussen stator en rotor $\hat{M}_{sf}$. Het toerental van de machine blijft constant.

De statorwikkelingen zijn stroomloos. In de bekrachtigingswikkeling loopt een stroom I_f.

7.11a Teken het equivalente schema voor het magnetische circuit van de rotorwikkeling.

7.11b Wat is de coëfficiënt van zelfinductie van de rotorwikkeling?

7.11c Teken het eenfasige vervangingsschema van de synchrone machine. Geef hierin referentierichtingen voor de spanningen en de stroom aan.

De frequentie die in de statorwikkelingen wordt opgewekt is 50 Hz.
Stel: $X_s = 8\ \Omega$; $\hat{M}_{sf}$ = 3 H.

7.11d Hoeveel omwentelingen per minuut draait de machine?

De machine wordt belast met drie in ster geschakelde weerstanden van 16 Ω. De bekrachtigingsstroom wordt ingesteld op 0.3 A.

7.11e Schets een fasordiagram van deze belastingstoestand en geef de effectieve waarden van de fasoren aan. Gebruik de referentierichtingen voor de spanningen en de stroom van het bij opgave c getekende schema.

7.11f Hoe groot is de lasthoek en hoe groot is het elektromagnetische koppel?

7.11g Vervolgens wordt de bekrachtigingsstroom ingesteld op 0.6 A.
Hoe groot is de spanning over de weerstanden?

Opgave 7.12

Deze opgave gaat over de generator in een windturbine die een vermogen kan opwekken van 750 kW. De straal van de rotor van de windturbine (dus de lengte van de wieken) is 25 m. In normaal bedrijf is het toerental 30 omwentelingen per minuut.
De generator is een 3-fasige synchrone machine met 1 poolpaar en een cylindrische rotor met een geconcentreerde diameterwikkeling. De statorwikkelingen zijn sinusvormig verdeeld en de weerstand van de statorwikkelingen wordt verwaarloosd.
Tussen de rotor van de windturbine (de wieken) en de rotor van de generator zit een tandwielkast om ervoor te zorgen dat de generator een spannning opwekt met een frequentie van 50 Hz, zodat deze aan het elektriciteitsnet gekoppeld kan worden.
Het spanningsniveau waarop een generator van dit vermogen aan het elektriciteitsnet gekoppeld wordt, is gewoonlijk hoger dan 230 V. In deze opgave gaan we ervan uit dat de fasespanning van het elektriciteitsnet 400 V is.
Voor het ijzer van het magnetische circuit van de generator geldt: $\mu_r = \infty$.
De volgende afmetingen van de generator zijn gegeven:
- de straal van de statorboring $r = 0.2$ m,
- de lengte van de machine $l = 0.5$ m, en
- de grootte van de luchtspleet $\delta = 3$ mm.

Omdat $\delta \ll r$ kunnen we ervan uitgaan dat de magnetische fluxdichtheid in de luchtspleet loodrecht oversteekt en geen functie is van de radiale positie.
Gegeven: $\mu_0 = 4\pi\ 10^{-7}$ H/m

7.12a Bereken de overzetverhouding van de tandwielkast.

De maximale waarde van de magnetische fluxdichtheid in de luchtspleet wordt beperkt tot ongeveer 1 T. Bij grotere waarden van de magnetische fluxdichtheid raakt het magnetische circuit van de machine in verzadiging.
Bij de vragen b tot en met d is de stator stroomloos.
Voor de beantwoording van de vragen b tot en met e kan gebruik gemaakt worden van de theorie uit de paragrafen 7.2 en 7.3.

7.12b Bereken het aantal rotorwindingen N_f dat nodig is om in de luchtspleet een fluxdichtheid van 1 T te realiseren als voor de bekrachtigingsstroom geldt: $I_f = 25$ A.

7.12c Bereken de maximale waarde van de spanning die geïnduceerd wordt in een diameterwinding van de stator als de maximale waarde van de fluxdichtheid in de luchtspleet 1 T is.

7.12d Bereken het aantal statorwindingen N_s van de sinusvormig verdeelde statorwikkeling dat nodig is om een statorfasespanning van 400 V te verkrijgen als de maximale waarde van de fluxdichtheid in de luchtspleet 1 T is.

7.12e Bereken de maximale waarde van de coëfficiënt van wederzijdse inductie voor de koppeling van een statorspoel en de rotorspoel $\hat{M}_{sf}$.

De generator wordt erop ontworpen om zijn maximale vermogen (750 kW) te kunnen leveren bij een fasespanning van 400 V en $\cos\varphi = 0.8$ (φ is de hoek tussen een fasespanning en de bijbehorende fasestroom).

7.12f Wat is dan de effectieve waarde van de statorfasestromen? (drie fasen!) Deze waarde van de stromen is de maximale waarde van de statorstromen, dus de waarde waarvoor de statorwikkelingen geschikt gemaakt moeten worden.

7.12g Bereken de maximale waarde van de magnetische fluxdichtheid in de luchtspleet opgewekt door de drie statorstromen gezamenlijk als die stromen hun maximale effectieve waarde hebben.

De generator wordt zo aangedreven dat de spanning een frequentie heeft van 50 Hz. De bekrachtigingsstroom wordt zo ingesteld dat de poolradspanning 400 V is. De generator wordt aan het elektriciteitsnet geschakeld en is in nullast. Voor de synchrone reactantie geldt: $X_s = 1.25\ \Omega$.

7.12h Teken het eenfasige vervangingsschema van de synchrone machine. Geef hierin referentierichtingen voor de spanningen en de stroom aan.

7.12i Schets een fasordiagram van deze belastingstoestand. Gebruik de referentierichtingen voor de spanningen en de stroom van het bij opgave h getekende schema.

7.12j Wat is de maximale waarde van het askoppel van de generator? Dit is het koppel waarbij de machine niet uit de pas valt (kipkoppel) bij de ingestelde bekrachtigingsstroom.

7.12k Wat is de maximale waarde van het vermogen dat de machine kan leveren bij deze bekrachtigingsstroom?

7.12l Vervolgens wordt de bekrachtigingsstroom verdubbeld. De machine is nog steeds in nullast.
Schets een fasordiagram van deze belastingstoestand. Gebruik de referentierichtingen voor de spanningen en de stroom van het bij opgave h getekende schema.

Vervolgens neemt de wind toe, waardoor het askoppel T_s van de generator groter wordt. De installatie komt weer in stationair bedrijf, zodat $T_e = -T_s$. Voor het askoppel geldt: $T_s = 1222.3$ Nm. (De bekrachtigingsstroom heeft nog steeds zijn verdubbelde waarde).

7.12m Bereken de lasthoek δ en de statorstroom I_s.

7.12n Bereken de waarde van het door de synchrone machine opgenomen werkzame vermogen en het door de machine opgenomen blindvermogen (3 fasen!).

Vervolgens vindt er een kortsluiting plaats aan de klemmen van de generator waardoor de fasespanningen gelijk worden aan nul, terwijl het askoppel gelijk blijft.

7.12o Welke van de onderstaande mogelijkheden is correct?
A: het toerental wordt hoger;
B: het toerental wordt lager;

C: het toerental blijft gelijk.

De tandwielkast van een windtubine blijkt een kwetsbaar onderdeel te zijn. Daarom zijn er windturbinefabrikanten die over gaan op zogenaamde direct-drive-generatoren. Dat zijn generatoren waarvan de rotor direct aan de rotor van de turbine (de wieken) gekoppeld is. De generator heeft hierdoor hetzelfde toerental als de windturbine.

7.12p Als dezelfde generator gebruikt zou worden als in het eerste deel van de opgave, hoe groot zou dan de poolradspanning zijn bij een bekrachtigingsstroom van 25 A?

7.12q Om een vermogen van 750 kW te halen, moet een direct-drive-generator groter zijn. Meestal krijgt zo'n generator dan een straal van enkele meters en een rotor met veel uitspringende polen.
Wat zou het poolpaartal van de generator zijn als deze direct aan het 50 Hz-elektriciteitsnet gekoppeld moest worden?

Opgave 7.13

Het rendement van een dieselmotor is maximaal ongeveer 35 %. De overige 65 % worden omgezet in warmte, die meestal verloren gaat. De grootte van het rendement wordt overigens principieel begrensd door het rendement van een Carnot-cyclus.

Als op een bepaalde plaats zowel warmte als elektriciteit nodig is, wordt vaak een zogenaamde warmte/kracht-eenheid toegepast. Dit is een vorm van decentrale opwekking waarbij bijvoorbeeld een dieselmotor een generator aandrijft die aan het (landelijke) elektriciteitsnet gekoppeld is. Hierbij wordt de opgewekte elektriciteit zelf gebruikt of verkocht aan het elektriciteitsbedrijf. De ”verlies”-warmte van de dieselmotor wordt bij deze decentrale opwekker voor een belangrijk deel lokaal nuttig gebruikt. Hierdoor kan het totale rendement van de installatie (nuttig te gebruiken warmte + elektriciteit) groter zijn dan 80 %. In verband met brandstofbesparing en gevolgen voor het milieu worden steeds vaker warmte/kracht-eenheden toegepast.

In deze opgave kijken we naar het gedrag van een synchrone generator in een warmte/kracht-eenheid.

De generator is een 3-fasige synchrone machine met 1 poolpaar. Voor de synchrone reactantie geldt: $X_s = 5\,\Omega$; voor de maximale waarde van de coëfficiënt van wederzijdse inductie tussen stator en rotor geldt: $\hat{M}_{sf} = 1$ H. De weerstand van de statorwikkelingen wordt verwaarloosd.

7.13a Teken het eenfasige vervangingsschema van de synchrone machine. Geef hierin referentierichtingen voor de spanningen en de stroom aan.

Voordat de generator (stroomloos) parallel aan het elektriciteitsnet (fasespanning: 230 V; frequentie: 50 Hz) geschakeld kan worden, moet hij gesynchroniseerd worden. Dit betekent onder andere dat de grootte en de frequentie van de fasespanning van de generator gelijk moeten zijn aan die van het elektriciteitsnet. Vanuit de generator gezien gedraagt het elektriciteitsnet zich als een oneindig sterk net, zodat we het net kunnen voorstellen als een ideale spanningsbron.

7.13b Hoeveel omwentelingen per minuut moet de dieselmotor draaien?

7.13c Hoe groot moet de poolradspanning zijn?

7.13d Hoe groot moet de bekrachtigingsstroom zijn?

Vervolgens wordt de generator parallel aan het elektriciteitsnet geschakeld. De machine werkt nu in nullast.

7.13e Schets een fasordiagram van deze belastingstoestand. Gebruik de referentierichtingen voor de spanningen en de stroom van het bij opgave a getekende schema.

Vervolgens wordt meer dieselolie aan de dieselmotor toegevoerd, waardoor het askoppel T_s groter wordt. De installatie komt weer in stationair bedrijf, zodat $T_e = -T_s$. Voor het askoppel geldt: T_s = 50.516 Nm.

7.13f Schets een fasordiagram van deze belastingstoestand. Gebruik de referentierichtingen voor de spanningen en de stroom van het bij opgave a getekende schema. De waarden van de fasoren behoeven niet berekend te worden.

7.13g Bereken de lasthoek δ en de statorstroom I_s.

7.13h Bereken de waarde van het door de synchrone machine opgenomen werkzame vermogen en het door de machine opgenomen blindvermogen.

7.13i Wat is de maximaal toegestane waarde van het askoppel? Dit is het koppel waarbij de machine niet uit de pas valt (kipkoppel) bij de ingestelde bekrachtigingsstroom.

Voor het askoppel geldt nog steeds: $T_s = 50.516$ Nm. We stellen de bekrachtigingsstroom nu zodanig in dat de statorstroom minimaal is.

7.13j Schets een fasordiagram van deze belastingstoestand. Gebruik de referentierichtingen voor de spanningen en de stroom van het bij opgave a getekende schema.
Geef de effectieve waarden van de fasoren aan.

7.13k Bereken de waarde van het door de synchrone machine opgenomen werkzame vermogen en het door de machine opgenomen blindvermogen (3 fasen!).

7.13l Vervolgens vindt er een kortsluiting plaats aan de klemmen van de generator waardoor de fasespanningen gelijk worden aan nul. Welke van de onderstaande mogelijkheden is correct?
A: het toerental wordt hoger;
B: het toerental wordt lager;
C: het toerental blijft gelijk.

We gaan weer terug naar de situatie dat de synchrone machine parallel geschakeld is aan het net en de statorstroom gelijk aan nul is (nullast). De bekrachtingsstroom wordt vanuit deze situatie verdubbeld. De toevoer van dieselolie blijft hierbij constant.

7.13m Schets een fasordiagram van deze belastingstoestand. Gebruik de referentierichtingen voor de spanningen en de stroom van het bij opgave a getekende schema.
Geef de effectieve waarden van de fasoren aan.

7.13n Bereken de waarde van het door de synchrone machine opgenomen werkzame vermogen en het door de machine opgenomen blindvermogen.

Vervolgens wordt de toevoer van dieselolie gestopt. Door de wrijving in de dieselmotor moet aan de dieselmotor een koppel toegevoerd worden om hem te laten draaien. Hij werkt nu als rem, waardoor de synchrone machine als motor moet werken. De bekrachtingsstroom is nog hetzelfde als in de vorige twee onderdelen van deze opgave.

7.13o Schets een fasordiagram van deze belastingstoestand. Gebruik de referentierichtingen voor de spanningen en de stroom van het bij opgave a getekende schema. De waarden van de fasoren behoeven niet berekend te worden.

8 De inductiemachine

8.1 Inleiding

In het vorige hoofdstuk hebben we kennisgemaakt met de synchrone machine. Deze machine heeft als belangrijk kenmerk dat de rotor synchroon draait met het draaiveld. Dit betekent dat er een direct verband bestaat tussen de frequentie van de driefasige spanningsbron waarop de machine is aangesloten en de mechanische hoeksnelheid.

Als de machine is aangesloten op het elektriciteitsnet, kan de rotor ervan dus maar met één toerental draaien. Dit betekent bijvoorbeeld dat een synchrone machine bij stilstaande rotor geen elektromagnetisch koppel opwekt en dus niet kan aanlopen. Hij is dan ook niet erg geschikt om als motor te gebruiken. Als hij echter als generator gebruikt wordt, is er een aandrijvende machine (bijvoorbeeld een stoom- of gasturbine of een dieselmotor) waarmee het toerental ingesteld kan worden.

Om een synchrone machine zonder bijzondere kunstgrepen (waarop we hier niet verder ingaan) als motor te gebruiken zijn we eigenlijk altijd aangewezen op vermogenselektronische omzetters waarmee een driefasige bron met variabele frequentie gemaakt kan worden.

De zogenaamde inductiemachine, ook wel asynchrone machine genoemd, is een wisselstroommachine die wel van nature geschikt is om bij voeding vanuit het elektriciteitsnet als motor te gebruiken.

De inductiemachine heeft net als de driefasige synchrone machine een driefasige wikkeling op de stator; op de rotor liggen kortgesloten wikkelingen. Als de statorwikkeling aangesloten wordt op een driefasige bron, ontstaat er in de machine een draaiveld. Als de rotor van de machine niet met dezelfde snelheid draait als het draaiveld, zeggen we dat de rotor asynchroon draait. In dat geval ondervinden de kortgesloten rotorwikkelingen een wisselend magnetisch veld en worden er in deze wikkelingen spanningen, en stromen, geïnduceerd. Dankzij deze rotorstromen ontstaat er een elektromagnetisch koppel, dat probeert de rotor te versnellen in de richting van het draaiveld.

Verklaar de namen asynchrone machine en inductiemachine.

In de praktijk worden de kortgesloten wikkelingen op de rotor meestal uitgevoerd als een zogenaamde kooiwikkeling, waardoor een zeer robuuste constructie ontstaat.

In de volgende paragraaf zullen we verder ingaan op het basisprincipe van de inductiemachine. De uitgangspunten zijn daarbij nog niet realistisch: er wordt bijvoorbeeld geen rekening gehouden met de invloed van de rotorstromen op het veld in de machine. Deze invloed zullen we bekijken in paragraaf 8.3.

Vervolgens zullen we de hierbij afgeleide vergelijkingen omzetten in een praktisch bruikbaar stelsel en een bijbehorend vervangingsschema. We hebben zo een model van de inductiemachine verkregen (paragraaf 8.4).

In de daarop volgende paragraaf leiden we een tweetal praktische vervangingsschema's af, waarvan we het tweede in paragraaf 8.6 gebruiken om het praktische geval van spanningsbronvoeding verder te onderzoeken.

Ten slotte gaan we in paragraaf 8.7 nog in op een praktische methode om het elektromagnetische koppel te beïnvloeden.

8.2 Het basisprincipe van de inductiemachine

Voor de uitleg van het basisprincipe van een inductiemachine gaan we uit van de in het linker deel van figuur 8.1 getekende doorsnede. Op de rotor ligt een geconcentreerde diameterwikkeling (index *rd*; Engels: direct axis) en op de stator liggen drie sinusvormig verdeelde wikkelingen, die we hier schematisch weergeven als netwerkelementen.

Om de positie in de luchtspleet vast te leggen wordt gebruik gemaakt van twee coördinaatsystemen: het statorcoördinaatsysteem met de coördinaat(hoek) α_s en het rotorcoördinaatsysteem met de coördinaat α_r. De as van statorspoel *a* is de referentie voor het statorcoördinaatsysteem en de as van rotorspoel *rd* is de referentieas voor het rotorcoördinaatsysteem. De rotorpositie wordt in het statorcoördinaatsysteem vastgelegd met de hoek θ, zodat $\alpha_s = \alpha_r + \theta$ geldt.

Ga na dat het linker deel van deze figuur overeenstemt met figuur 7.16.

Het statordraaiveld

In paragraaf 7.3 hebben we al gezien dat een statorstroom een sinusvormige verdeling van de fluxdichtheid in de luchtspleet veroorzaakt. Vervolgens hebben we in paragraaf 7.5 gezien dat we een draaiveld in de luchtspleet krijgen als de statorstromen een symmetrisch, driefasig stelsel van sinusvormige stromen vormen. We gaan er hier van uit dat dat het geval is en dat voor de stromen door de statorspoelen geldt:

$$\begin{aligned} i_{sa} &= \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta_s) \\ i_{sb} &= \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta_s - \tfrac{2}{3}\pi) \\ i_{sc} &= \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta_s - \tfrac{4}{3}\pi) \end{aligned} \tag{8.1}$$

Als we dit stelsel vergelijken met het in paragraaf 7.5 gebruikte stelsel ((7.23)), zien we dat we de in paragraaf 7.5 behaalde resultaten hier direct kunnen gebruiken als we de hoek β in paragraaf 7.5 gelijk aan β_s kiezen. Met de uitdrukking voor het statordraaiveld (7.25) volgt nu voor de fluxdichtheidsverdeling:

$$B_s^s(\alpha_s) = \hat{B}_{s1} \cos\left[(\omega_s t + \beta_s) - \alpha_s\right] \tag{8.2}$$

$$\text{met } \hat{B}_{s1} = \frac{\mu_0 N_s}{2\delta}\frac{3}{2}\hat{i}_s \tag{8.3}$$

Het superscript s geeft hierbij aan dat de verdeling in het statorcoördinaatsysteem wordt weergegeven.

Het rechter deel van figuur 8.1 kunnen we zien als de schematische weergave van het draaiveld voor het tijdstip $\omega_s t + \beta_s = 0$. Het draaiveld draait met de hoeksnelheid ω_s linksom als ω_s positief is.

Controleer dit door te kijken bij welke waarde van α_s het maximum van de cos-functie ligt.
Leg uit dat een negatieve waarde van ω_s in dit geval een zinnige betekenis kan hebben.

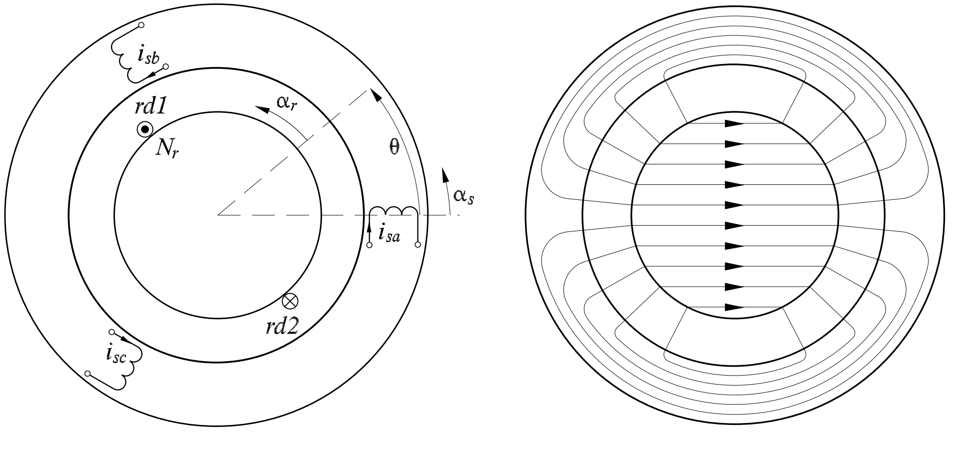
Omdat we in het vervolg het gedrag van de machine veelal vanuit de rotor bekijken, geven we de fluxdichtheidsverdeling volgens (8.2) ook in het rotorcoördinaatsysteem. In figuur 8.1 kunnen we zien dat we dan de hoek α_s moeten vervangen door de hoek α_r volgens $\alpha_s = \alpha_r + \theta$:

$$B_s^r(\alpha_r) = \hat{B}_{s1}\cos\left[(\omega_s t + \beta_s) - \theta - \alpha_r\right] \tag{8.4}$$

Het superscript r geeft hierbij aan dat de verdeling in het rotorcoördinaatsysteem wordt weergegeven.

Eén rotorwikkeling

Om de rotorstroom te bereken, bepalen we eerst de met de rotorspoel gekoppelde flux ten gevolge van het statorveld. Daartoe kiezen we een oppervlak S in de vorm van een halve cilinder in de luchtspleet met de geleiders van de spoel als randkromme (zie eventueel ook figuur 7.6). Voor de flux door één winding van de spoel geldt dan (met (8.4)):



Figuur 8.1 De doorsnede van de beschouwde primitieve inductiemachine met één rotorwikkeling en de verdeling van de magnetische fluxdichtheid voor het tijdstip t=0

$$
\begin{aligned}
\Phi_{rd,s} &= \iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B_s^r(\alpha_r)lr\,\mathrm{d}\,\alpha_r \\
&= \hat{B}_{s1}lr\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\left[(\omega_s t+\beta_s)-\theta-\alpha_r\right]\mathrm{d}\,\alpha_r = 2\hat{B}_{s1}lr\cos\left[(\omega_s t+\beta_s)-\theta\right]
\end{aligned}
\tag{8.5}
$$

Hierin is l de lengte van de machine en r de straal van de rotor.

Controleer of deze uitdrukking overeenstemt met figuur 8.1 door naar het maximum van de cos-functie te kijken.

Voor de gekoppelde flux vinden we nu:

$$\psi_{rd,s} = N_r\Phi_{rd,s} = \hat{\psi}_{rd,s}\cos\left[(\omega_s t+\beta_s)-\theta\right] \tag{8.6}$$

$$\text{met}\quad \hat{\psi}_{rd,s} = N_r\,2\,l\,r\,\hat{B}_{s1} \tag{8.7}$$

Hierin is N_r het aantal rotorwindingen en $\hat{\psi}_{rd,s}$ de maximale waarde van de met een rotorwikkeling gekoppelde flux ten gevolge van de statorstromen.

We gaan er vooralsnog van uit dat de rotor stilstaat, zodat θ geen functie van de tijd is. De kortgesloten rotorwikkeling heeft een zeer grote weerstand R_{rd}. Deze weerstand is zo groot dat de stroom die door de rotorwikkeling gaat lopen zodanig klein is dat de bijdrage van deze stroom tot het veld in de machine te verwaarlozen is. Dit is weliswaar in het algemeen niet realistisch, maar maakt het wel mogelijk om een aantal zaken op eenvoudige wijze uit te leggen. In de volgende paragraaf zullen we de afleiding zonder deze voorwaarde uitvoeren.

Het voorgaande heeft tot gevolg dat we met (8.6) voor de met de rotorwikkeling gekoppelde flux kunnen schrijven:

$$\psi_{rd} \;=\; \psi_{rd,s} = \;\hat{\psi}_{rd,s}\cos\left[(\omega_s t+\beta_s)-\theta\right]$$

Verder volgt dan voor de spanningsvergelijking:

$$0 = R_{rd}i_{rd} + \frac{\mathrm{d}\psi_{rd}}{\mathrm{d}t} = R_{rd}i_{rd} - \hat{\psi}_{rd,s}\omega_s\sin\left[(\omega_s t+\beta_s)-\theta\right] \quad ; \quad \theta \text{ is constant}$$

met als oplossing:

$$i_{rd} = \frac{\hat{\psi}_{rd,s}\omega_s}{R_{rd}}\sin\left[(\omega_s t+\beta_s)-\theta\right] \quad ; \quad \theta \text{ is constant} \tag{8.8}$$

Voor de berekening van het elektromagnetische koppel maken we nu gebruik van het feit dat de rotorwikkeling in de luchtspleet ligt en we de krachten op de geleiders kunnen uitrekenen met $F = B\,i\,l$. Deze methode werkt echter niet in het normale geval dat de windingen in gleuven liggen. Deze problematiek ligt echter buiten het kader van dit boek. De afleiding op grond van de vermogensbeschouwing in paragraaf 8.4 is echter algemeen geldig.

Voor het koppel dat ontstaat uit de som van het krachtsmoment op rotorspoelzijde $rd1$ en het krachtsmoment op rotorspoelzijde $rd2$ kunnen we nu schrijven:

$$T_{e,rd} = M_{rd1} + M_{rd2} = N_r r l i_{rd} B_s^r(\tfrac{\pi}{2}) - N_r r l i_{rd} B_s^r(-\tfrac{\pi}{2})$$

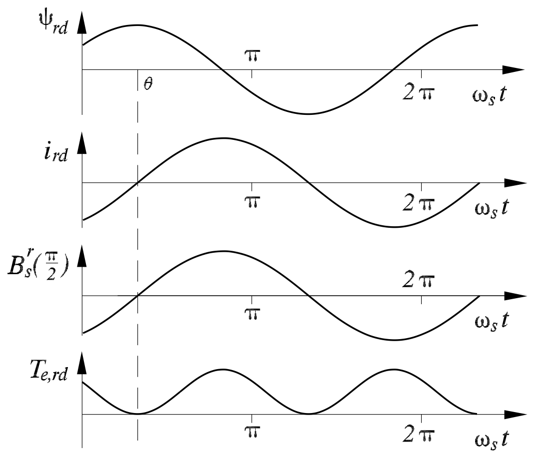
Vanwege de verschuivingssymmetrie $B_s^r(-\frac{\pi}{2}) = -B_s^r(\frac{\pi}{2})$ (zie ook (8.4)) kunnen we dit ook schrijven als:

$$T_{e,rd} = 2N_r r l i_{rd} B_s^r(\tfrac{\pi}{2}) \tag{8.9}$$

Vervolgens substitueren we hierin de uitdrukking voor $B_s^r(\alpha_r)$ ((8.4)) en de uitdrukking voor i_{rd} ((8.8)) (met gebruikmaking van de uitdrukking voor $\hat{\psi}_{rd,s}$, (8.6)):

$$\begin{aligned} T_{e,rd} &= 2N_r r l \frac{\hat{\psi}_{rd,s}\omega_s}{R_{rd}} \sin\left[(\omega_s t + \beta_s) - \theta\right] \;\; \hat{B}_{s1} \cos\left[(\omega_s t + \beta_s) - \theta - \tfrac{\pi}{2}\right] \\ &= \frac{\hat{\psi}^2_{rd,s}\omega_s}{R_{rd}} \left\{\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos\left[2\left(\omega_s t + \beta_s\right) - 2\theta\right]\right\} \qquad \theta \text{ is constant} \end{aligned} \tag{8.10}$$

Als toelichting zijn in figuur 8.2 de in de voorgaande afleiding gebruikte grootheden als functie van de tijd weergegeven voor het geval $\beta_s = 0$.



Figuur 8.2 Enkele grootheden als functie van de tijd voor de primitieve inductiemachine met één rotorwikkeling voor het geval $\beta_s = 0$

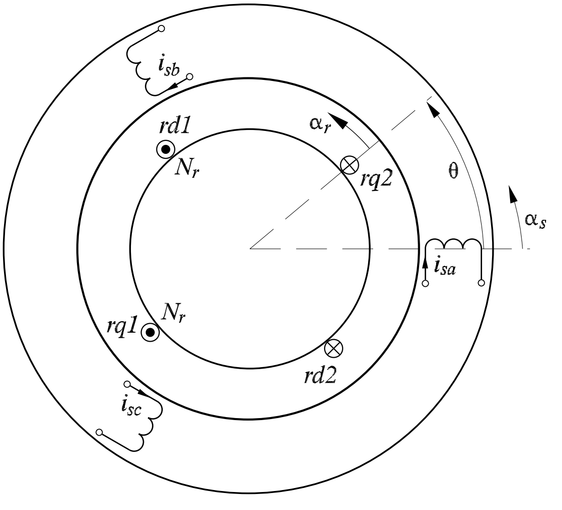
We zien dat er op de rotor een koppel werkt met een positieve gemiddelde waarde: het koppel probeert de rotor te versnellen in de richting van het draaiveld. Het koppel heeft echter ook een wisselcomponent met cirkelfrequentie $2\omega_s$.

Ga na waar het maximum van het draaiveld zich bevindt als het koppel maximaal is. Controleer dat op het overeenkomstige tijdstip de rotorstroom maximaal is.

De wisselcomponent lijkt op de wisselcomponent die we zien in het vermogen en het koppel (zie (7.22)) bij een eenfasige synchrone machine. Hij is dan ook te vermijden door de rotorwikkeling driefasig uit te voeren. Het is echter ook mogelijk om de rotorwikkeling uit te voeren met veel meer fasen, zoals bij een kooirotor het geval is, of met maar twee fasewikkelingen. Met het laatste geval zullen we hier verder gaan om het principe van de inductiemachine uit te leggen.

Twee rotorwikkelingen

Een tweede wikkeling zal een soortgelijke bijdrage leveren aan het koppel als de eerste. We willen nu echter dat het rimpelkoppel in tegenfase is. Dit betekent dat het argument van de cos-functie in (8.10) $2(\omega_s t+\beta_s)-2\theta-\pi$ moet zijn in plaats van $2(\omega_s t+\beta_s)-2\theta$. Dit kunnen we bereiken door een wikkeling op de rotor te leggen waarvan de magnetische as dwars (index *rq*; Engels: quadrature) op de magnetische as van de eerste wikkeling (index *rd*) ligt. De magnetische as van de tweede wikkeling ligt dus bij $\alpha_r=\frac{\pi}{2}$. De beide wikkelingen zijn in de doorsnede in figuur 8.3 aangegeven.



Figuur 8.3 De doorsnede van de primitieve inductiemachine

Als we de bijdrage van de tweede wikkeling tot het elektromagnetische koppel $T_{e,rq}$ noemen, vinden we nu met (8.10) voor het totale koppel:

$$T_e = T_{e,rd} + T_{e,rq} = \frac{\hat{\psi}_{rs}^2 \omega_s}{R_{rd}} \qquad \theta \text{ is constant} \tag{8.11}$$

Dit is een constant koppel, met een positieve waarde: het koppel probeert de rotor te versnellen.

Draaiende rotor

Tot nu toe gingen we er echter van uit dat de rotor stil bleef staan (θ is constant). Nu zullen we kijken wat er gebeurt als de rotor met een constante hoeksnelheid ω_m draait. We veronderstellen dat voor de positiehoek θ geldt:

$$\theta = \omega_m t + \theta_0 \tag{8.12}$$

Voor het statordraaiveld in het rotorcoördinaatsysteem $B_s^r(\alpha_r)$ kunnen we nu met (8.4) schrijven:

$$B_s^r(\alpha_r) = \hat{B}_{s1} \cos\left[(\omega_s t + \beta_s) - (\omega_m t + \theta_0) - \alpha_r\right] \tag{8.13}$$

We zien dat het statorveld met de hoeksnelheid $\omega_s - \omega_m$ ten opzichte van de rotor draait.

Probeer hiervan een voorstelling te maken.

Het "achterblijven" van de rotor op het draaiveld noemen we slippen; de hoeksnelheid $\omega_s - \omega_m$ noemen we de sliphoeksnelheid

$$\omega_{slip} = \omega_s - \omega_m \tag{8.14}$$

Het statorveld zal nu dan ook stromen in de rotor induceren met cirkelfrequentie $\omega_{slip} = \omega_s - \omega_m$.

De uitdrukking voor de gekoppelde flux voor de spoel *rd* ((8.6)) blijft nog steeds bruikbaar. Met $\theta = \omega_m t + \theta_0$ ((8.12)) en $\omega_{slip} = \omega_s - \omega_m$ gaat deze uitdrukking over in:

$$\begin{aligned} \psi_{rd,s} &= \hat{\psi}_{rd,s} \cos\left[(\omega_s t + \beta_s) - \theta\right] = \hat{\psi}_{rd,s} \cos\left[(\omega_s t + \beta_s) - (\omega_m t + \theta_0)\right] \\ &= \hat{\psi}_{rd,s} \cos(\omega_{slip} t + \beta_s - \theta_0) \end{aligned} \tag{8.15}$$

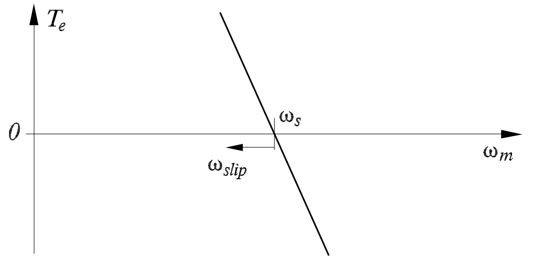
Als we deze uitdrukking vergelijken met (8.6) zien we dat we de afleiding voor het geval van een stilstaande rotor hier ook mogen gebruiken mits we bedenken dat de rotor nu een draaiveld met hoeksnelheid ω_{slip} ondervindt in plaats van een draaiveld met hoeksnelheid ω_s. Verder moeten we $\omega_s t + \beta_s - \theta$ vervangen door $\omega_{slip} t + \beta_s - \theta_0$.

Voor het elektromagnetische koppel geldt nu overeenkomstig (8.11) (met $\omega_{slip} = \omega_s - \omega_m$ volgens (8.14)):

$$T_e = T_{e,rd} + T_{e,rq} = \frac{\hat{\psi}_{rd,s}^2}{R_{rd}} \omega_{slip} = \frac{\hat{\psi}_{rd,s}^2}{R_{rd}} (\omega_s - \omega_m) \tag{8.16}$$

Ga na dat (8.11) *een bijzonder geval is van deze uitdrukking.*

Het verband (8.16) is in figuur 8.4 grafisch weergegeven. We zien dat als $\omega_m < \omega_s$ ($\omega_{slip} > 0$) geldt, het koppel positief is: het koppel probeert de rotor te versnellen in de richting van het draaiveld. Als $\omega_m > \omega_s$ ($\omega_{slip} < 0$) geldt, draait de rotor sneller dan het draaiveld en is het koppel negatief: het koppel probeert de rotor af te remmen. Als $\omega_m = \omega_s$ ($\omega_{slip} = 0$) geldt, is er geen koppel. We zeggen dan dat de rotor op de synchrone snelheid draait.



Figuur 8.4 De koppelhoeksnelheidskarakteristiek van de beschouwde primitieve inductiemachine

Bij het bovenstaande moeten we bedenken dat het gebruikte model alleen zinnig is als we de invloed van de rotorstromen op het veld in de machine kunnen verwaarlozen. Aan het einde van subparagraaf 8.6.1 zullen we zien wanneer dat het geval is.

8.3 De rotorstromen en het luchtspleetveld

Het in de vorige paragraaf beschreven model zullen we in stappen gaan verbeteren. In deze en de volgende paragraaf concentreren we ons daarbij op de verbetering van het model voor het elektrische gedrag van de inductiemachine. Daarbij brengen we het veld ten gevolge van de rotorstromen in rekening.

Omdat alleen de stator elektrisch toegankelijk is (de rotor heeft kortgesloten wikkelingen), zoeken we voor het elektrische gedrag een verband tussen statorstromen en statorspanningen, waarvoor we weer de met de statorspoelen gekoppelde fluxen moeten weten. In deze paragraaf beperken we ons tot het verband tussen de statorstromen en het luchtspleetveld, dat een belangrijke bijdrage levert aan de statorfluxen. In de volgende paragraaf zullen we de hier afgeleide vergelijkingen omzetten in een praktisch bruikbaar stelsel en een bijbehorend vervangingsschema.

Voor de afleiding in deze paragraaf nemen we, net als in de vorige paragraaf, een driefasige, symmetrische stroombronvoeding. Deze levert stromen die bijdragen aan het luchtspleetveld, het stator(draai)veld. Vervolgens stellen we de vergelijkingen voor rotorspoel *rd* op. Uit deze vergelijkingen kunnen we de stroom in deze spoel bepalen. Deze stroom levert ook een bijdrage aan het luchtspleetveld. Daarna kijken we naar de bijdrage van de stroom in rotorspoel *rq*. Met behulp van het zo gevonden totale luchtspleetveld bepalen we in de volgende paragraaf de met de statorspoelen gekoppelde fluxen.

De vergelijkingen voor rotorspoel rd

We kijken eerst naar de kortgesloten wikkeling *rd* (zie figuur 8.3). De met deze wikkeling gekoppelde flux bestaat uit een bijdrage ten gevolge van de stroom in deze spoel (i_{rd}) en een bijdrage ten gevolge van de statorstromen. De stroom i_{rq} levert geen bijdrage.

Schets om dit te begrijpen de veldverdeling in de machine voor het geval er alleen een stroom in de spoel rq loopt. Hoe groot is dan de met spoel rd gekoppelde flux?

We maken hier gebruik van hetzelfde driefasige, symmetrische stroomstelsel als in de vorige paragraaf ((8.1)), zodat we voor de bijdrage van de statorstromen (8.15) kunnen blijven gebruiken. Hiervoor schrijven we met de uitdrukking voor $\hat{\psi}_{rd,s}$, (8.7) en de uitdrukking voor $\hat{B}_{s1}$, (8.3):

$$\begin{aligned}\psi_{rd,s} &= N_r 2lr\hat{B}_{s1}\cos\left(\omega_{slip}t+\beta_s-\theta_0\right)\\ &= N_r 2lr\frac{\mu_0 N_s}{2\delta}\tfrac{3}{2}\hat{i}_s\cos\left(\omega_{slip}t+\beta_s-\theta_0\right)\end{aligned}$$

Als we nu de inductiecoëfficiënt M volgens

$$M = N_r 2lr\frac{\mu_0 N_s}{2\delta} \tag{8.17}$$

gebruiken, kunnen we deze uitdrukking schrijven als:

$$\psi_{rd,s} = M\tfrac{3}{2}\hat{i}_s\cos(\omega_{slip}t+\beta_s-\theta_0) \tag{8.18}$$

De inductiecoëfficiënt M komt overeen met die we in (7.11) gevonden hebben.

Voor de bijdrage van de met spoel rd gekoppelde flux ten gevolge van de stroom (i_{rd}) door deze spoel (zelfinductie), maken we gebruik van de coëfficiënt van zelfinductie L_{rd}, die we verder niet bepalen. Zoals we al eerder opgemerkt hebben, levert de stroom door de spoel rq geen bijdrage aan de met spoel rd gekoppelde flux (zie de opmerking aan het begin van deze subparagraaf). We vinden nu met (8.18) voor de met spoel rd gekoppelde flux:

$$\psi_{rd} = L_{rd}i_{rd} + M\tfrac{3}{2}\hat{i}_s\cos(\omega_{slip}t+\beta_s-\theta_0) \tag{8.19}$$

Voor de spanningsvergelijking voor de kortgesloten rotorwikkeling rd, die als weerstand R_{rd} heeft, vinden we dan:

$$0 = R_{rd}i_{rd} + \frac{\mathrm{d}\psi_{rd}}{\mathrm{d}t} = R_{rd}i_{rd} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L_{rd}i_{rd} + M\tfrac{3}{2}\hat{i}_s\cos(\omega_{slip}t+\beta_s-\theta_0)\right) \tag{8.20}$$

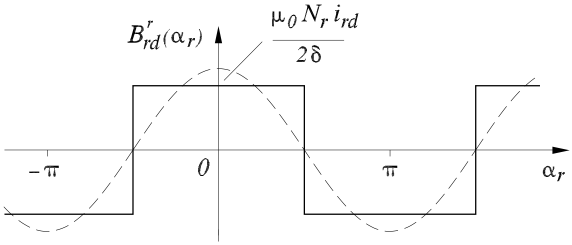
We herkennen hierin een eerste-orde-differentiaalvergelijking. De particuliere oplossing van deze differentiaalvergelijking is een uitdrukking voor de stroom in de beschouwde kortgesloten wikkeling. Deze kan in de volgende vorm geschreven worden:

$$i_{rd} = \hat{i}_{rd}\cos(\omega_{slip}t-\theta_0+\beta_r) \tag{8.21}$$

We zouden nu $\hat{i}_{rd}$ en β_r kunnen bepalen, maar dat leidt tot onoverzichtelijke uitdrukkingen. We zullen in de volgende paragraaf ingaan op een praktische manier om de vergelijkingen voor de inductiemachine op te lossen. We gaan nu met (8.21) verder.

De bijdrage van de rotorstromen tot de grondharmonische van het luchtspleetveld

Voor de bijdrage van de rotorstroom i_{rd} tot het luchtspleetveld, maken we gebruik van de in paragraaf 7.2 opgebouwde kennis. In die paragraaf hebben we al gezien dat een stroom in een geconcentreerde diameterwikkeling een blokvormige verdeling van de fluxdichtheid in de luchtspleet veroorzaakt (zie figuur 7.5). Zo vinden we dat de stroom i_{rd} de fluxdichtheid volgens figuur 8.5 tot gevolg heeft (zie ook figuur 8.3).



Figuur 8.5 De fluxdichtheidsverdeling ten gevolge van de stroom i_{rd} en zijn grondharmonische

Voor we hiermee verder gaan, doen we eerst een belangrijke constatering. In paragraaf 7.3 hebben we al gezien dat alleen de grondharmonische van de fluxdichtheidsverdeling van belang is om de met de (sinusvormig verdeelde) statorspoelen gekoppelde fluxen te vinden. Daarom besteden we hier bijzondere aandacht aan de grondharmonische in figuur 8.5.

Zoals we in deze figuur kunnen zien ligt het maximum van de grondharmonische bij $\alpha_r = 0$ ($\alpha_s = \theta$). Voor de grondharmonische vinden we nu overeenkomstig (7.10):

$$B^r_{rd1}(\alpha_r) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\mu_0 N_r i_{rd}}{2\delta}\,\cos\alpha_r \tag{8.22}$$

Als we de uitdrukking voor de stroom i_{rd}, (8.21), hierin substitueren, vinden we voor de bijdrage van i_{rd} aan deze grondharmonische:

$$B^r_{rd1}(\alpha_r) = \hat{B}_{r1}\cos\left(\omega_{slip}t - \theta_0 + \beta_r\right)\,\cos(\alpha_r) \;\text{ met }\; \hat{B}_{r1} = \frac{4}{\pi}\frac{\mu_0 N_r}{2\delta}\hat{\imath}_{rd} \tag{8.23}$$

Ga na dat de verdeling een staande golf voorstelt.

Voor het vinden van het luchtspleetveld schrijven we deze uitdrukking om tot

$$B^r_{rd1}(\alpha_r) = \hat{B}_{r1}\tfrac{1}{2}\left[\cos(\omega_{slip}t - \theta_0 + \beta_r + \alpha_r) + \cos(\omega_{slip}t - \theta_0 + \beta_r - \alpha_r)\right] \tag{8.24}$$

We zien dat we ons de grondharmonische van de fluxdichtheidsverdeling ten gevolge van de rotorstroom kunnen voorstellen als twee lopende golven: bij de term $\cos(\omega_{slip}t - \theta_0 + \beta_r + \alpha_r)$ behoort een golf die met hoeksnelheid $-\omega_{slip}$ ten opzichte van de rotor draait en bij de term $\cos(\omega_{slip}t-\theta_0+\beta_r-\alpha_r)$ een golf die met hoeksnelheid ω_{slip} ten opzichte van de rotor draait.

Constateer dat dit betoog analoog is aan dat aan het einde van paragraaf 7.3.

Op soortgelijke wijze kunnen we een uitdrukking voor de fluxdichtheidsverdeling ten gevolge van de stroom in de andere kortgesloten wikkeling, i_{rq}, vinden. We gaan er van uit dat de twee rotorspoelen gelijk zijn. De as van spoel rq ligt echter bij $\alpha_r = \frac{\pi}{2}$ en de stroom erdoor loopt $\frac{\pi}{2}$ achter op i_{rd}. We vinden nu (te vergelijken met (8.23) en (8.24)):

$$\begin{aligned} B^r_{rq1}(\alpha_r) &= \hat{B}_{r1}\cos\left(\omega_{slip}t - \frac{\pi}{2} - \theta_0 + \beta_r\right)\,\cos\left(\alpha_r - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \hat{B}_{r1}\tfrac{1}{2}\left[\cos(\omega_{slip}t - \theta_0 + \beta_r + \alpha_r - \pi) + \cos(\omega_{slip}t - \theta_0 + \beta_r - \alpha_r)\right] \end{aligned} \tag{8.25}$$

Als we de bijdragen volgens (8.24) en (8.25) bij optellen, vinden we:

$$B^r_{r1}(\alpha_r) = B^r_{rd1}(\alpha_r) + B^r_{rq1}(\alpha_r) = \hat{B}_{r1}\cos(\omega_{slip}t - \theta_0 + \beta_r - \alpha_r) \tag{8.26}$$

We zien dat alleen de golf die met hoeksnelheid ω_{slip} ten opzichte van de rotor draait, overblijft.

Om de met de statorspoelen gekoppelde fluxen te vinden, moeten we de gevonden fluxdichtheidsverdeling weergeven in het statorcoördinatensysteem. Met $\alpha_r = \alpha_s - (\omega_m t + \theta_0)$ (figuur 8.3 en (8.12)) en $\omega_{slip} = \omega_s - \omega_m$ ((8.14)) kunnen we dan voor (8.26) schrijven:

$$B^s_{r1}(\alpha_s) = \hat{B}_{r1}\cos(\omega_{slip}t + \beta_r + \omega_m t - \alpha_s) = \hat{B}_{r1}\cos(\omega_s t + \beta_r - \alpha_s) \tag{8.27}$$

Hierbij kunnen we opmerken dat de positie van de rotor op het tijdstip $t=0$, θ_0, niet meer van belang is.

We concluderen hier dat het statordraaiveld stromen in de rotor induceert, die op hun beurt weer een rotordraaiveld veroorzaken dat met dezelfde snelheid draait als het statordraaiveld.

8.4 Het model

Uitgaande van de in de vorige paragraaf afgeleide vergelijkingen zullen we in deze paragraaf een model van de inductiemachine beschrijven.

Aan de vergelijkingen uit de vorige paragraaf voegen we eerst de statorspanningsvergelijking toe. In feite hebben we dan een compleet stelsel vergelijkingen voor het elektrische gedrag gevonden. Omdat we met tijdsafhankelijke grootheden werken die sinusvormig verlopen, is het handig om gebruik te maken van de complexe schrijfwijze. Nadat we hiertoe overgegaan zijn, leiden we een praktisch vervangingsschema af, waaruit de verwantschap met de transformator direct blijkt.

Ten slotte besteden we in deze paragraaf aandacht aan het elektromagnetische koppel, dat we berekenen vanuit een vermogensbeschouwing.

De statorspanningsvergelijking

Om de met de statorspoelen gekoppelde fluxen te vinden zullen we hier op dezelfde wijze te werk gaan als in paragraaf 7.3. We hadden daarbij geconstateerd dat alleen de grondharmonische van de fluxdichtheidsverdeling $B^s(\alpha_s)$, $B_1^s(\alpha_s)$, van belang is. Voor de bijdrage van de statorstromen aan deze grondharmonische kunnen we (8.2) weer gebruiken; voor de bijdragen van de rotorstromen gebruiken we (8.27):

$$B_1^s = B_s^s + B_{r1}^s = \hat{B}_{s1}\cos\left[(\omega_s t + \beta_s) - \alpha_s\right] + \hat{B}_{r1}\cos\left[(\omega_s t + \beta_r) - \alpha_s\right] \quad (8.28)$$

Om de met statorspoel a gekoppelde flux te vinden, kunnen we (7.9) gebruiken. De hoek φ_1 in deze uitdrukking komt overeen met de hoek α_s waarbij het maximum van de B-verdeling ligt. We moeten ons nu bedenken dat het maximum van het statordraaiveld bij $\alpha_s = \omega_s t + \beta_s$ ligt, en het maximum van het rotordraaiveld bij $\alpha_s = \omega_s t + \beta_r$. Voor de gekoppelde flux vinden we dan:

$$\psi_{sma} = \frac{\pi}{2} N_s l r \left[\hat{B}_{s1}\cos(\omega_s t + \beta_s) + \hat{B}_{r1}\cos(\omega_s t + \beta_r)\right] \quad (8.29)$$

Hierbij duidt de index m op het hoofdveld (Engels: main field). We hebben die hier gebruikt om duidelijk te maken dat dit niet de volledige met de statorspoel gekoppelde flux is: verderop voeren we nog de statorspreidingsflux in.

Omdat het draaiveld met hoeksnelheid ω_s draait, vormen de met de drie statorspoelen gekoppelde fluxen een symmetrisch, driefasig systeem: ψ_{smb} ligt $\frac{2}{3}\pi$ in fase achter op ψ_{smb} en ψ_{smc} ligt weer $\frac{2}{3}\pi$ achter op ψ_{smb} (zie ook figuur 8.3). Het is dan ook voldoende om slechts één fase te beschouwen: we gaan verder met fase a.

Met de uitdrukking voor $\hat{B}_{s1}$, (8.3), en de uitdrukking voor $\hat{B}_{r1}$, (8.23), gaat (8.29) over in:

$$\psi_{sma} = \frac{\pi}{2} N_s l r \left[\frac{3}{2}\frac{\mu_0 N_s}{2\delta}\hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta_s) + \frac{4}{\pi}\frac{\mu_0 N_r}{2\delta}\hat{i}_{rd}\cos(\omega_s t + \beta_r)\right]$$

Als we de inductiecoëfficiënt L_{sm} volgens (7.29) en de inductiecoëfficiënt M volgens (8.17) gebruiken, gaat deze uitdrukking over in:

$$\psi_{sma} = L_{sm}\hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta_s) + M\hat{i}_{rd}\cos(\omega_s t + \beta_r) \quad (8.30)$$

Met de differentiaalvergelijking voor de rotorstroom (8.20) en uitdrukking (8.30) hebben we het verband tussen statorstromen en statorhoofdfluxen gevonden.

De met de statorspoelen gekoppelde fluxen bestaan niet alleen uit de bijdrage van het luchtspleetveld, maar ook uit een bijdrage van het spreidingsveld ten gevolge van de statorstromen. Deze bijdrage kunnen we in rekening brengen door een inductiviteit toe te voegen ($L_{s\sigma}$):

$$\psi_{sa} = L_{s\sigma} i_{sa} + \psi_{sma} \quad (8.31)$$

De spanningsvergelijking voor statorspoel a is:

$$u_{sa} = R_s i_{sa} + \frac{\mathrm{d}\psi_{sa}}{\mathrm{d}t} \tag{8.32}$$

In feite hebben we nu alle vergelijkingen gevonden om het elektrische gedrag te beschrijven.

De machinevergelijkingen in complexe vorm

We combineren nu de vergelijkingen tot een praktisch stelsel. Omdat we met tijdsafhankelijke grootheden werken die sinusvormig verlopen, kunnen we daarbij handig gebruik maken van de complexe schrijfwijze. We moeten echter voorzichtig zijn omdat in de rotor de grootheden met een andere cirkelfrequentie (ω_{slip}) variëren dan in de stator (ω_s).

Voor de stroom in statorfase a kunnen we schrijven (zie (8.1)):

$$\begin{aligned} &i_{sa} = \hat{i}_s \cos(\omega_s t + \beta_s) = \hat{i}_s \,\mathrm{Re}\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_s t + \beta_s)} = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{I}_s \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t}\right) \\ &\text{met} \quad \underline{I}_s = \frac{\hat{i}_s}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_s} \end{aligned} \tag{8.33}$$

We moeten hierbij bedenken dat de statorstroomfasor $\underline{I}_s$ in feite het symmetrische driefasige stelsel van statorstromen volgens (8.1) representeert. Daarom hebben we de index a weggelaten.

Op overeenkomstige wijze schrijven we voor de rotorstroom i_{rd} (zie (8.21)):

$$\begin{aligned} i_{rd} &= \hat{i}_{rd} \cos(\omega_{slip} t - \theta_0 + \beta_r) = \hat{i}_{rd} \,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega_{slip} t - \theta_0 + \beta_r\right)}\right) \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\underline{I}_{rd} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega_{slip} t - \theta_0)}\right) \quad \text{met} \quad \underline{I}_{rd} = \frac{\hat{i}_{rd}}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_r} \end{aligned} \tag{8.34}$$

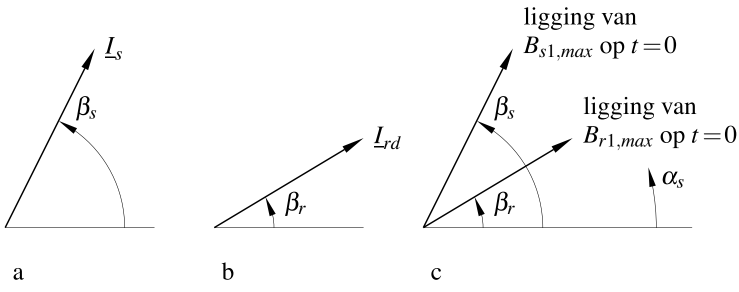
In figuur 8.6 zijn de twee ingevoerde stroomfasoren getekend. Als we deze figuur afbeelden op de doorsnede van de machine (figuur 8.3), zien we dat de fasoren wijzen in de richting van de bijbehorende draaivelden voor het tijdstip $t = 0$ (zie de uitdrukking voor het draaiveld (8.28): het maximum van het statordraaiveld ligt bij $\alpha_s = \omega_s t + \beta_s$; het maximum van het rotordraaiveld bij $\alpha_s = \omega_s t + \beta_r$).

Met de fasoren volgens (8.33) en (8.34), kunnen we (8.30) in complexe vorm schrijven (voor de andere grootheden voeren we op overeenkomstige wijze fasoren in). We voegen daar voor de overzichtelijkheid de uitdrukking voor de flux (8.31) en de statorspanningsvergelijking (8.32) aan toe:

$$\begin{aligned} \underline{\Psi}_{sm} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t} &= (L_{sm} \underline{I}_s + M \underline{I}_{rd})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t} \\ \underline{\Psi}_s \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t} &= L_{s\sigma} \underline{I}_s \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t} + \underline{\Psi}_{sm} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t} \\ \underline{U}_s \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t} &= R_s \underline{I}_s \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t} + \mathrm{j}\,\omega_s \underline{\Psi}_s \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_s t} \end{aligned} \tag{8.35}$$

Met de eerste twee vergelijkingen kunnen we inzien dat we voor de fasor van de statorhoofdflux kunnen schrijven:

$$\underline{\Psi}_{sm} = L_{sm} \underline{I}_s + M \underline{I}_{rd} = \underline{\Psi}_s - L_{s\sigma} \underline{I}_s \tag{8.36}$$



Figuur 8.6 De fasoren $\underline{I}_s$ (a) en $\underline{I}_{rd}$ (b) en de positie van de maxima van de velden B_{s1} en B_{r1} op het tijdstip $t=0$ (c)

Met dezelfde fasoren kunnen we ook de rotorvergelijkingen (8.19) en (8.20) in complexe vorm schrijven:

$$\begin{aligned}\underline{\Psi}_{rd}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega_{slip}t-\theta_0\right)} &= \left(L_{rd}\underline{I}_{rd}+\tfrac{3}{2}M\underline{I}_s\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega_{slip}t-\theta_0\right)}\\ 0 = R_{rd}\underline{I}_{rd}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega_{slip}t-\theta_0\right)} &+ \mathrm{j}\,\omega_{slip}\underline{\Psi}_{rd}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega_{slip}t-\theta_0\right)}\end{aligned} \tag{8.37}$$

Met de stelsels vergelijkingen (8.35) en (8.37) kunnen we het elektrische gedrag van het model van de inductiemachine beschrijven. In deze vergelijkingen hadden we de e-machten laten staan om de stator- en de rotorcirkelfrequentie duidelijk te herkennen. Dit is natuurlijk niet nodig. Als we de e-machten ”weglaten” en de statorfluxvergelijkingen combineren, vinden we een overzichtelijk stelsel vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\underline{U}_s &= R_s\underline{I}_s+\mathrm{j}\,\omega_s\underline{\Psi}_s \quad &;\quad \underline{\Psi}_s &= L_{s\sigma}\underline{I}_s+L_{sm}\underline{I}_s+M\underline{I}_{rd}\\ 0 &= R_{rd}\underline{I}_{rd}+\mathrm{j}\,\omega_{slip}\underline{\Psi}_{rd} \quad &;\quad \underline{\Psi}_{rd} &= \tfrac{3}{2}M\underline{I}_s+L_{rd}\underline{I}_{rd}\end{aligned} \tag{8.38}$$

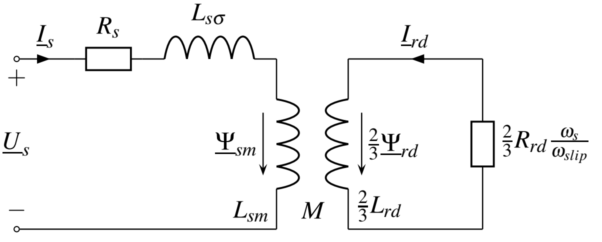
De grootheden $\hat{i}_{rd}$ en β_r in (8.21), die we nog uit de rotorvergelijkingen (8.20) moesten oplossen, volgen impliciet uit dit stelsel vergelijkingen. Uit dit stelsel kunnen we namelijk de rotorstroomfasor oplossen, waarmee we via (8.34) ook $\hat{i}_{rd}$ en β_r weten.

De inductiemachine als transformator

Een inductiemachine is net als een transformator een toestel met magnetisch gekoppelde ketens. Dit is in de hiervoor opgesomde vergelijkingen duidelijk te zien. Het blijkt ook mogelijk te zijn om voor de inductiemachine een vervangingsschema op te stellen met een transformator als basis. Het probleem dat in de rotor de grootheden met een andere cirkelfrequentie (ω_{slip}) variëren dan in de stator (ω_s) kunnen we oplossen door de rotorspanningsvergelijking in (8.38) te vermenigvuldigen met ω_s/ω_{slip}. Daarnaast vermenigvuldigen we de rotorvergelijkingen nog met $\frac{2}{3}$ om de factor $\frac{3}{2}$ bij M ”weg te werken”. Deze factor hangt samen met het feit dat we twee fasen op de rotor en drie fasen op de stator hebben. Het stelsel vergelijkingen (8.38) kunnen we nu schrijven als:

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= R_s\underline{I}_s + \mathrm{j}\,\omega_s\underline{\Psi}_s \quad &;\quad \underline{\Psi}_s &= L_{s\sigma}\underline{I}_s + L_{sm}\underline{I}_s + M\underline{I}_{rd} \\ 0 &= \frac{\omega_s}{\omega_{slip}}\tfrac{2}{3}R_{rd}\underline{I}_{rd} + \mathrm{j}\,\omega_s\tfrac{2}{3}\underline{\Psi}_{rd} \quad &;\quad \tfrac{2}{3}\underline{\Psi}_{rd} &= M\underline{I}_s + \tfrac{2}{3}L_{rd}\underline{I}_{rd} \end{aligned} \tag{8.39}$$

Met de vergelijkingen (8.39) kunnen we het schema volgens figuur 8.7 samenstellen. Voor de statorhoofdflux $\underline{\Psi}_{sm}$ is (8.36) gebruikt.



Figuur 8.7 Een vervangingsschema

Het elektromagnetische koppel

Vervolgens gaan we verder met de mechanische kant van de machine. We berekenen het elektromagnetische koppel aan de hand van een vermogensbalans van de machine. We gaan daarbij, zoals steeds, uit van een stationaire toestand.

We bepalen de vermogensbalans van de in figuur 8.7 getekende schakeling. Omdat alle grootheden periodiek zijn, zal gemiddeld over een periode de magnetische veldenergie niet veranderen. Verder nemen we aan dat de rotor met een constante hoeksnelheid draait, zodat de kinetische energie constant is.

De enige plaatsen in figuur 8.7 waar vermogensomzetting plaatsvindt, is in de weerstanden.

Het vermogen omgezet in de weerstand R_s komt overeen met het in de statorwikkelingen gedissipeerde vermogen (drie fasen):

$$P_{s,diss} = 3R_s|\underline{I}_s|^2$$

Bij de beschouwing van de rotorweerstand moeten we ons realiseren dat deze weerstand geen gewone weerstand is. Hij is in feite door een kunstgreep ontstaan. Voor de dissipatie in de twee rotorweerstanden (R_{rd}) geldt

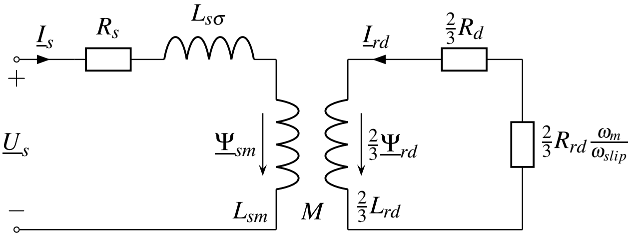
$$P_{diss} = 2R_{rd}|\underline{I}_{rd}|^2 = 3\left(\tfrac{2}{3}R_{rd}\right)|\underline{I}_{rd}|^2 \tag{8.40}$$

De dissipatie in de twee rotorwikkelingen is dus gelijk aan drie keer de dissipatie in de weerstanden $\frac{2}{3}R_{rd}$ van elk van de fasen (zie het vervangingsschema in figuur 8.7). De factor 3 komt voort uit het feit dat dit een eenfasig vervangingsschema is van een driefasige machine.

We splitsen de weerstand in figuur 8.7 nu in twee delen volgens (met $\omega_{slip} = \omega_s - \omega_m$ volgens (8.14))

$$\begin{aligned} \frac{\omega_s}{\omega_{slip}}\left(\tfrac{2}{3}R_{rd}\right) &= \frac{\omega_{slip}}{\omega_{slip}}\left(\tfrac{2}{3}R_{rd}\right) + \frac{\omega_s - \omega_{slip}}{\omega_{slip}}\left(\tfrac{2}{3}R_{rd}\right) \\ &= \left(\tfrac{2}{3}R_{rd}\right) \quad + \quad \frac{\omega_m}{\omega_{slip}}\left(\tfrac{2}{3}R_{rd}\right) \end{aligned} \tag{8.41}$$

We krijgen dan de schakeling volgens figuur 8.8.



Figuur 8.8 Een vervangingsschema voor de vermogensbeschouwing

Zoals we gezien hebben representeert de weerstand $\frac{2}{3}R_{rd}$ de dissipatie. De andere weerstand representeert dan dus het elektromechanisch afgegeven vermogen P_{em}, zodat we voor het elektromagnetische koppel kunnen schrijven:

$$T_e = \frac{P_{em}}{\omega_m} = \frac{3\frac{\omega_m}{\omega_{slip}}\left(\frac{2}{3}R_{rd}\right)|\underline{I}_{rd}|^2}{\omega_m} = 3\frac{\left(\frac{2}{3}R_{rd}\right)}{\omega_{slip}}|\underline{I}_{rd}|^2 \tag{8.42}$$

Uit deze vergelijking kunnen we een vergelijking afleiden die heel gemakkelijk te onthouden is. Daartoe vermenigvuldigen we hem met ω_s en constateren met figuur 8.7 dat de zo ontstane uitdrukking overeenkomt met het door de rechter weerstand in deze figuur opgenomen vermogen. Dit is het vermogen dat door de stator via de luchtspleet afgegeven wordt. Dit vermogen noemen we het luchtspleetvermogen (symbool: P_{sm}):

$$\omega_s T_e = 3\frac{\omega_s}{\omega_{slip}}\left(\tfrac{2}{3}R_{rd}\right)|\underline{I}_{rd}|^2 = P_{sm} \tag{8.43}$$

We kunnen deze uitdrukking zien als een vermogensbalans voor de statorluchtspleetzijde, die we als volgt zouden kunnen interpreteren. Via de statorklemmen wordt het elektrische vermogen P_s toegevoerd. Een deel van dit vermogen wordt in de stator weerstanden gedissipeerd ($3R_s|\underline{I}_s|^2$). Het resterende deel ($P_{sm} = P_s - 3R_s|\underline{I}_s|^2$) wordt volledig overgedragen aan de luchtspleet. Dit gebeurt doordat de stator via het veld in de luchtspleet een koppel T_e uitoefent. Het veld zelf draait met een hoeksnelheid ω_s, zodat de stator het vermogen $\omega_s T_e$ afgeeft.

Merk op dat de bovenstaande uitleg analoog is aan die bij de synchrone machine (bij vergelijking (7.43)*).*

Voor het verdere onderzoek van het gedrag van de inductiemachine werken we de vermogensbalans voor de luchtspleetzijde van de stator

((8.43)) met behulp van figuur 8.7 verder uit (de spanning over de rechter weerstand in deze figuur is $\mathrm{j}\omega_s\frac{2}{3}\underline{\Psi}_{rd}$).

$$\omega_s T_e = P_{sm} = -3\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{j}\,\omega_s\tfrac{2}{3}\underline{\Psi}_{rd}\underline{I}_{rd}^*\right) = 3\omega_s\,\mathrm{Im}\left(\tfrac{2}{3}\underline{\Psi}_{rd}\underline{I}_{rd}^*\right)$$

Met de uitdrukking voor $\frac{2}{3}\underline{\Psi}_{rd}$ in (8.39) wordt dit (we delen door ω_s en gebruiken dat het produkt $\underline{I}_{rd}\underline{I}_{rd}^*$ reëel is):

$$T_e = 3\,\mathrm{Im}\left[\left(M\underline{I}_s + \tfrac{2}{3}L_{rd}\underline{I}_{rd}\right)\underline{I}_{rd}^*\right] = 3M\,\mathrm{Im}\left(\underline{I}_s\underline{I}_{rd}^*\right)$$

Voer bovenstaande afleiding zelf uit.

We hebben nu een uitdrukking gevonden die via de stromen direct gekoppeld is met het veld in de machine. Wellicht past dit beter bij ons fysische beeld van krachten dan het rekenen met vermogens.

Om deze uitdrukking verder te interpreteren, werken we hem verder uit met de uitdrukkingen voor de daarin voorkomende fasoren ((8.33) en (8.34)):

$$\begin{aligned} T_e &= 3M|\underline{I}_s||\underline{I}_{rd}|\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\beta_s}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\beta_r}\right) = 3M|\underline{I}_s||\underline{I}_{rd}|\,\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\beta_s-\beta_r)}\right) \\ &= 3M|\underline{I}_s||\underline{I}_{rd}|\sin\left(\beta_s-\beta_r\right) \end{aligned}$$

De betekenis van de hoek $\beta_s-\beta_r$ wordt duidelijk als we naar figuur 8.6 kijken. De hoek $\beta_s-\beta_r$ geeft dus aan hoeveel het statordraaiveld voorloopt op het rotorveld. Als deze hoek positief is het koppel positief (het statorveld trekt als het ware de rotor) en is er sprake van motorbedrijf.

Vergelijk dit met de discussie bij uitdrukking (7.45).

8.5 Vervangingsschema's

Het T-vervangingsschema

Omdat de rotor elektrisch niet toegankelijk is, zijn we meestal niet geïnteresseerd in de echte waarde van de rotorhoofdflux en de rotorstroom. Als we deze grootheden, net als bij de behandeling van de transformator, met geschikte (reductie)factoren vermenigvuldigen (zie (4.15) en (4.16)), kunnen we tot een eenvoudiger schema komen. We vervangen daarbij de rotorhoofdfluxfasor $\underline{\Psi}_{rd}$ door de fasor $\underline{\Psi}_r$ en rotorstroomfasor $\underline{I}_{rd}$ door de fasor $\underline{I}_r$ volgens

$$\tfrac{2}{3}\underline{\Psi}_{rd} = \frac{1}{a}\underline{\Psi}_r \quad ; \quad \underline{I}_{rd} = a\underline{I}_r$$

Hiermee gaan de vergelijkingen (8.39) over in (we vermenigvuldigen de rotorvergelijkingen nog met a)

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= R_s\underline{I}_s + \mathrm{j}\,\omega_s\underline{\Psi}_s & ; \quad \underline{\Psi}_s &= L_{s\sigma}\underline{I}_s + L_{sm}\underline{I}_s + Ma\underline{I}_r \\ 0 &= \frac{\omega_s}{\omega_{slip}}\tfrac{2}{3}R_{rd}a^2\underline{I}_r + \mathrm{j}\,\omega_s\underline{\Psi}_r & ; \quad \underline{\Psi}_r &= Ma\underline{I}_s + \tfrac{2}{3}L_{rd}a^2\underline{I}_r \end{aligned}$$

Met de keuze

$$a = \frac{L_{sm}}{M} \tag{8.44}$$

gaan de vergelijkingen over in:

$$\begin{aligned}
&\underline{U}_s = R_s\underline{I}_s + \mathrm{j}\,\omega_s\underline{\Psi}_s &&; \quad \underline{\Psi}_s = L_{s\sigma}\underline{I}_s + L_{sm}\left(\underline{I}_s + \underline{I}_r\right)\\
&0 = \frac{\omega_s}{\omega_{slip}}\tfrac{2}{3}R_{rd}\left(\frac{L_{sm}}{M}\right)^2\underline{I}_r + \mathrm{j}\,\omega_s\underline{\Psi}_r &&; \quad \underline{\Psi}_r = L_{sm}\underline{I}_s + \tfrac{2}{3}L_{rd}\left(\frac{L_{sm}}{M}\right)^2\underline{I}_r
\end{aligned}$$

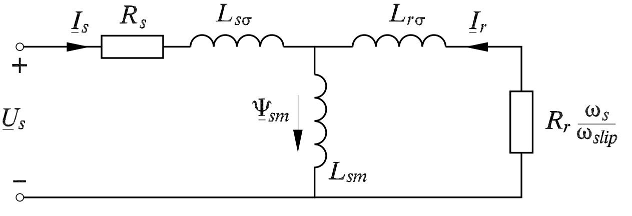
Na invoering van de parameters

$$R_r = \left(\frac{L_{sm}}{M}\right)^2 \tfrac{2}{3}R_{rd} \quad ; \quad L_r = \tfrac{2}{3}L_{rd}\left(\frac{L_{sm}}{M}\right)^2 \quad ; \quad L_{r\sigma} = L_r - L_{sm} \tag{8.45}$$

gaat de set vergelijkingen over in:

$$\begin{aligned}
&\underline{U}_s = R_s\underline{I}_s + \mathrm{j}\,\omega_s\underline{\Psi}_s &&; \quad \underline{\Psi}_s = L_{s\sigma}\underline{I}_s + L_{sm}\left(\underline{I}_s + \underline{I}_r\right)\\
&0 = \frac{\omega_s}{\omega_{slip}}R_r\underline{I}_r + \mathrm{j}\,\omega_s\underline{\Psi}_r &&; \quad \underline{\Psi}_r = L_{sm}\underline{I}_s + L_r\underline{I}_r = L_{r\sigma}\underline{I}_r + L_{sm}\left(\underline{I}_s + \underline{I}_r\right)
\end{aligned} \tag{8.46}$$

Met deze vergelijkingen kunnen we het schema volgens figuur 8.9 samenstellen, waarmee we het elektrische gedrag van de inductiemachine hebben vastgelegd. Dit schema is het gebruikelijke (eenfasige) vervangingsschema van de (driefasige) inductiemachine, dat ook wel T-schema genoemd wordt. Voor de statorhoofdflux is (8.36) gebruikt.



Figuur 8.9 Het gebruikelijke T-vervangingsschema

Om de vergelijkingen voor deze figuur ((8.46)) verder te vereenvoudigen, voeren we nog de volgende inductiecoëfficiënt voor de stator in:

$$L_s = L_{s\sigma} + L_{sm} \tag{8.47}$$

Controleer dat deze uitdrukking identiek is aan (7.38).

Hiermee kunnen we voor de spanningsvergelijkingen voor het schema in figuur 8.9 schrijven:

$$\begin{aligned}
&\underline{U}_s = R_s\underline{I}_s + \mathrm{j}\,\omega_s L_s\underline{I}_s + \mathrm{j}\,\omega_s L_{sm}\underline{I}_r\\
&0 = \frac{\omega_s}{\omega_{slip}}R_r\underline{I}_r + \mathrm{j}\,\omega_s L_r\underline{I}_r + \mathrm{j}\,\omega_s L_{sm}\underline{I}_s
\end{aligned} \tag{8.48}$$

Het Γ-vervangingsschema

We kunnen het vervangingsschema volgens figuur 8.9 nog verder vereenvoudigen. Daartoe vervangen we de rotorstroomfasor $\underline{I}_r$ door de fasor $\underline{I}'_R$ volgens:

$$\underline{I}_r = \frac{L_s}{L_{sm}} \underline{I}'_R \tag{8.49}$$

We substitueren deze uitdrukking in (8.48) en vermenigvuldigen de rotorvergelijking met L_s/L_{sm}:

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= R_s \underline{I}_s + \mathrm{j}\,\omega_s L_s \left(\underline{I}_s + \underline{I}_{R'}\right) \\ 0 &= \frac{\omega_s}{\omega_{slip}} R_r \frac{L_s^2}{L_{sm}^2} \underline{I}'_R + \mathrm{j}\,\omega_s \left(\frac{L_r L_s}{L_{sm}^2} - 1\right) L_s \underline{I}'_R + \mathrm{j}\,\omega_s L_s \left(\underline{I}_s + \underline{I}'_R\right) \end{aligned} \tag{8.50}$$

Voer bovenstaande afleiding zelf uit.

We voeren nu de volgende parameters in:

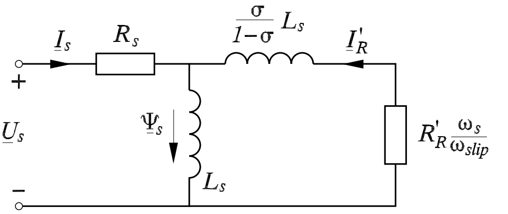
$$R'_R = R_r \frac{L_s^2}{L_{sm}^2} \quad ; \quad \sigma = 1 - \frac{L_{sm}^2}{L_r L_s} \tag{8.51}$$

Hiermee gaat (8.50) over in:

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= R_s \underline{I}_s + \mathrm{j}\,\omega_s L_s \left(\underline{I}_s + \underline{I}'_R\right) \\ 0 &= \frac{\omega_s}{\omega_{slip}} R'_R \underline{I}'_R + \mathrm{j}\,\omega_s \tfrac{\sigma}{1-\sigma} L_s \underline{I}'_R + \mathrm{j}\,\omega_s L_s \left(\underline{I}_s + \underline{I}'_R\right) \end{aligned}$$

Voer bovenstaande afleiding zelf uit.

Met deze vergelijkingen kan het schema volgens figuur 8.10 worden samengesteld. Dit schema wordt ook wel Γ-schema genoemd (Γ is de Griekse hoofdletter "Gamma").

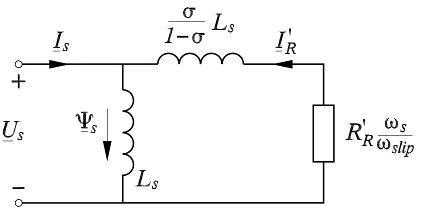


Figuur 8.10 Het Γ-vervangingsschema

8.6 Voeding uit spanningsbron bij verwaarlozing statorweerstand

Met het gevonden vervangingsschema volgens figuur 8.10 (het Γ-schema) gaan we nu kijken naar de elektrische poort (de statorstroomfasor als functie van de sliphoeksnelheid ω_{slip}) en de mechanische poort (het elektromagnetische koppel als functie van de sliphoeksnelheid ω_{slip}) van de inductiemachine voor het praktische geval van spanningsbronvoeding.

Dit zullen we doen voor het bijzondere geval dat de statorweerstand nul is ($R_s = 0$). Deze benadering is bij niet al te kleine, normale inductiemachines (groter dan ongeveer 10 kW) en voeding uit het elektriciteitsnet (met een frequentie van 50 Hz) toegestaan omdat dan de reactanties in het vervangingsschema veel groter zijn dan de statorweerstand. Het vervangingsschema volgens figuur 8.10, en het daaruit voortvloeiende rekenwerk, wordt dan aanzienlijk vereenvoudigd; het schema gaat dan over in het schema van figuur 8.11.



Figuur 8.11 Een praktisch vervangingsschema

8.6.1 Het fasordiagram en het cirkeldiagram

Voor de verdere uitleg gaan we er vanuit dat de machine gevoed wordt uit een (symmetrische, driefasige) spanningsbron. Dit is in de praktijk ook meestal het geval. Het betekent dat de fasor $\underline{U}_s$, en daarmee ook de statorfluxfasor, gegeven is (zie figuur 8.11).

In figuur 8.11 zien we dat de statorstroom bestaat uit twee componenten volgens

$$\underline{I}_s = \underline{I}_{s0} - \underline{I}'_R \quad ; \quad \underline{I}_{s0} = \frac{\underline{\Psi}_s}{L_s} \tag{8.52}$$

Hierbij hebben we de nullaststroomfasor $\underline{I}_{s0}$ ingevoerd, die in dit geval constant is.

De stroomfasor $\underline{I}'_R$ is echter niet constant, maar hangt af van ω_{slip} en daarmee van de rotorhoeksnelheid ω_m.

De definitie van de positieve richting van $\underline{I}'_R$ is zodanig dat een positieve stroom een positieve bijdrage levert aan de statorflux. Als we naar het schema in figuur 8.11 kijken zou het waarschijnlijk handiger zijn geweest om de referentierichting andersom te definiëren. We zullen daarom hier werken met $(-\underline{I}'_R)$.

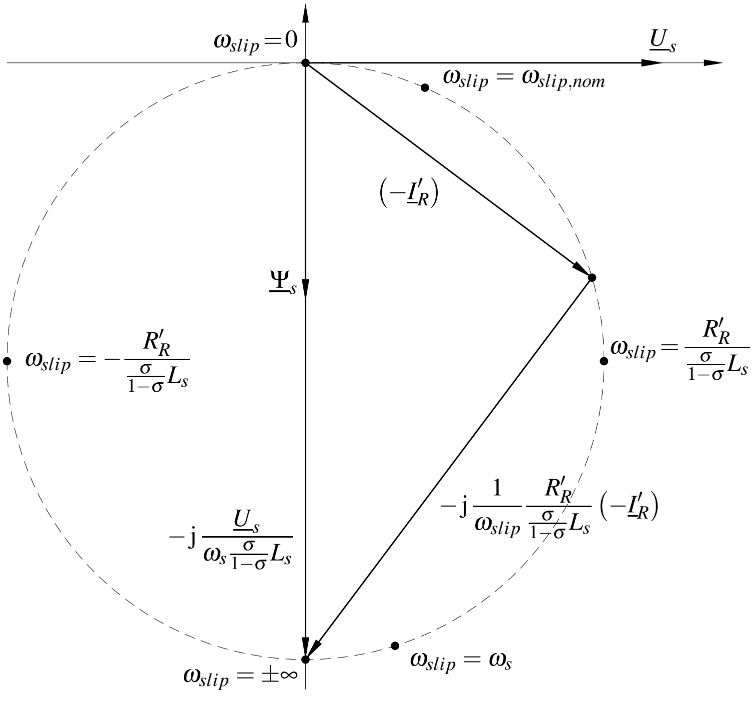
We zullen nu verder gaan met de rotorspanningsvergelijking die rechtstreeks uit figuur 8.11 volgt:

$$\underline{U}_s = \mathrm{j}\,\omega_s \tfrac{\sigma}{1-\sigma} L_s \left(-\underline{I}'_R\right) + \frac{\omega_s}{\omega_{slip}} R'_R \left(-\underline{I}'_R\right)$$

Vervolgens delen we deze vergelijking door $\mathrm{j}\,\omega_s \tfrac{\sigma}{1-\sigma} L_s$:

$$-\mathrm{j}\,\frac{\underline{U}_s}{\omega_s \tfrac{\sigma}{1-\sigma} L_s} = \left(-\underline{I}'_R\right) - \mathrm{j}\,\frac{1}{\omega_{slip}} \frac{R'_R}{\tfrac{\sigma}{1-\sigma} L_s} \left(-\underline{I}'_R\right) \tag{8.53}$$

Met behulp van deze vergelijking kunnen we het fasordiagram in figuur 8.12 tekenen.



Figuur 8.12 Een fasordiagram voor de rotorstroom $(-\underline{I}'_R)$ met markeringspunten voor $(-\underline{I}'_R)$ voor 6 karakteristieke waarden van ω_{slip}

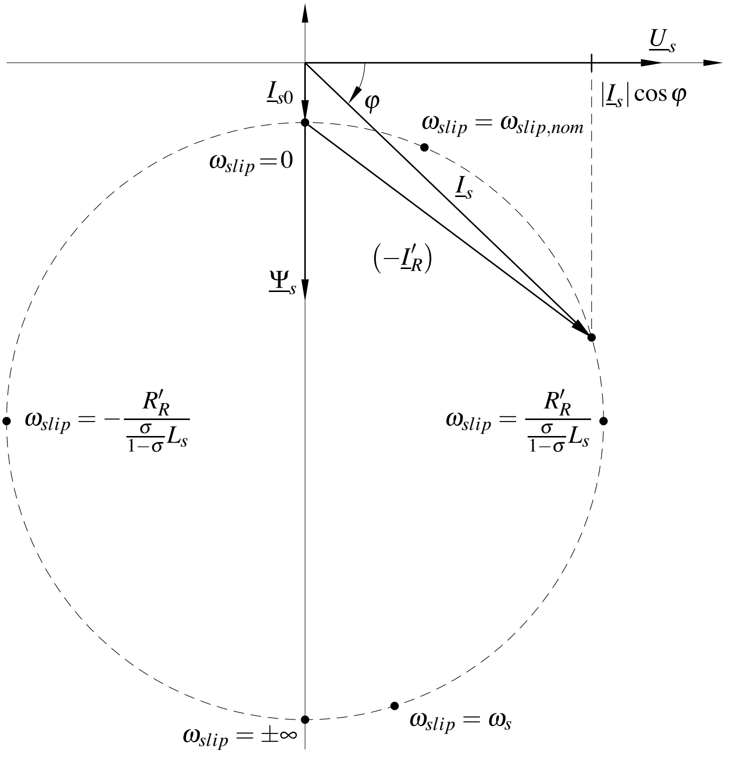
Een bijzonderheid bij dit fasordiagram is dat het einde van de rotorstroomfasor een cirkel doorloopt als ω_{slip} varieert van $-\infty$ tot ∞. Dit kunnen we als volgt inzien. De twee termen (fasoren) in het rechter lid van (8.53) staan loodrecht op elkaar. Bij variatie van ω_{slip} variëren de grootten van deze twee fasoren, maar hun som blijft constant (het linker lid van (8.53)). Het is een meetkundig principe dat het hoekpunt van de twee fasoren dan op een cirkel ligt. De plaats van het hoekpunt (de fasor $(-\underline{I}'_R)$) wordt bepaald door de waarde van ω_{slip}.

In figuur 8.12 staan markeringspunten voor $(-\underline{I}'_R)$ voor 6 karakteristieke waarden van ω_{slip}. De ligging van de punten $\omega_{slip}=0$, $\omega_{slip} = \pm\infty$, $\omega_{slip} = \frac{R'_R}{\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}$ en $\omega_{slip} = -\frac{R'_R}{\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}$ volgt rechtstreeks uit (8.53).

Controleer zelf de ligging van deze punten.

Het punt $\omega_{slip} = \omega_s$ komt overeen met het geval dat de rotor stilstaat. De ligging van dit punt volgt niet rechtstreeks uit (8.53), maar blijkt in de praktijk te liggen zoals in figuur 8.12 is aangegeven. Hetzelfde geldt voor het punt $\omega_{slip} = \omega_{slip,nom}$. Dit is het zogenaamde nominale punt, het punt dat overeenkomt met de gegevens op de kenplaat van de machine. Vaak komen de gegevens op de kenplaat overeen met een bedrijfstoestand van de machine die continu volgehouden kan worden.

Nu we de rotorstroomfasor hebben gevonden, kunnen we met (8.52) de statorstroomfasor weergeven. Dit resulteert in figuur 8.13. In feite wordt de cirkel van figuur 8.12 over een afstand $|\underline{I}_{s0}|$ naar beneden verschoven. De statorstroomfasor doorloopt dus ook een cirkel als functie van ω_{slip}. De cirkel voor de statorstroomfasor wordt overigens voor het geval dat de statorweerstand verwaardloosd wordt ook wel de Heylandcirkel genoemd.



Figuur 8.13 Het cirkeldiagram voor de statorstroom

Als we de statorstroomfasor weten, kunnen we overigens vrij gemakkelijk het koppel bepalen. Daarbij maken we gebruik van de veronderstelling dat er geen verliezen zijn in de stator, zodat het luchtspleetvermogen P_{sm} gelijk is aan het aan de stator toegevoerde elektrische vermogen P_s. Hiermee kunnen we de vermogensbalans voor de statorluchtspleetzijde ((8.43)) schrijven als:

$$\omega_s T_e = P_{sm} = P_s$$

We kunnen hierbij opmerken dat bij een constante cirkelfrequentie van de voeding ω_s het koppel evenredig is met het elektrische vermogen P_s. Met de bekende uitdrukking voor het driefasige elektrische vermogen ($P_s = 3|\underline{U}_s||\underline{I}_s|\cos\varphi$), gaat deze vergelijking over in:

$$T_e = \frac{P_s}{\omega_s} = 3\frac{|\underline{U}_s|}{\omega_s}|\underline{I}_s|\cos\varphi = 3\frac{U_s}{\omega_s}I_s\cos\varphi \tag{8.54}$$

Bij spanningsbronvoeding ($|\underline{U}_s|$ en ω_s zijn gegeven) is het koppel dus evenredig met $|\underline{I}_s|\cos\varphi$. Dit is de projectie van de statorstroomfasor op de reële as in figuur 8.13.

We zullen nu het gedrag van de machine verder bespreken aan de hand van de halve cirkelbogen die de stroomfasoren $(-\underline{I}'_R)$ en $\underline{I}_s$ doorlopen als ω_{slip} toeneemt van 0 naar ∞ (zie de figuren 8.12 en 8.13).

We beginnen bij $\omega_{slip} = 0$. In dit geval draait de rotor met dezelfde snelheid als het luchtspleetveld en wordt er geen stroom in de rotor geïnduceerd. In dit geval is de statorstroom de nullaststroom $\underline{I}_{s0}$ en is $\varphi = \pi/2$, zodat $\cos\varphi = 0$ geldt.

Ga na wat het een en ander in figuur 8.11 betekent.

Vervolgens nemen we aan dat de rotor iets langzamer draait dan het luchtspleetveld, zodat ω_{slip} relatief klein is. Met (8.53) kunnen we dan voor de rotorstroom schrijven:

$$(-\underline{I}'_R) = \frac{\omega_{slip}}{\omega_s}\frac{\underline{U}_s}{R'_R} \quad ; \quad \omega_{slip} \ll \frac{R'_R}{\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}$$

De rotorstroom is dan dus evenredig met de slipcirkelfrequentie ω_{slip} en ligt vrijwel evenwijdig aan de reële as. Als we naar het gezamenlijke eindpunt van de stroomfasoren $(-\underline{I}'_R)$ en $\underline{I}_s$ in figuur 8.13 kijken, zien we dit punt ook in positieve horizontale richting verschuiven met toenemende ω_{slip} en zien we dat ook $|\underline{I}_s|\cos\varphi$ evenredig is met ω_{slip}. Daarbij neemt φ af en neemt dus $\cos\varphi$ toe. Als $|\underline{I}_s|\cos\varphi$ evenredig is met ω_{slip}, is het elektromagnetisch koppel ook evenredig met ω_{slip} volgens (8.54). Dit geval komt overeen met wat we in paragraaf 8.2 besproken hebben (zie figuur 8.4).

Ga na wat het een en ander in figuur 8.11 betekent.

Bij groter wordende ω_{slip} kunnen we $\omega_{slip}\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s$ niet meer verwaarlozen ten op zichte van R'_R. We zien dat de rotorstroomfasor dan duidelijk niet meer evenwijdig is aan de reële as. Zowel de rotor- als de statorstroom nemen toe. Omdat ook $|\underline{I}_s|\cos\varphi$ toeneemt, wordt ook het koppel groter. Dit gaat zo door tot het moment dat $\omega_{slip} = \frac{R'_R}{\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}$

Ga na wat het een en ander in figuur 8.11 betekent.
Constateer in figuur 8.13 dat $\omega_{slip} = \omega_{slip,nom}$ in dit gebied ligt
Constateer in figuur 8.13 dat φ in dit gebied een minimum heeft en dat dus $\cos\varphi$ *in dit gebied een maximum heeft.*

Bij $\omega_{slip} = \frac{R'_R}{\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}$ bereikt $|\underline{I}_s|\cos\varphi$ en daarmee het koppel zijn maximum (zie (8.54)). Deze waarde van de sliphoeksnelheid, waarbij het koppel maximaal is, noemen we de kipsliphoeksnelheid:

$$\omega_{slip,k} = \frac{R'_R}{\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s} \tag{8.55}$$

Bij verder toenemende ω_{slip} worden de stromen nog groter (en daarmee de dissipatie in de machine), terwijl het koppel steeds kleiner wordt. Aan de kant van de elektrische voeding zien we dat door de relatief grote waarde van φ. Dit betekent dat het door de machine opgenomen blindvermogen $3|\underline{U}_s||\underline{I}_s|\sin\varphi$ relatief groot wordt. Dit is een zeer ongunstig werkgebied. Bij normale machines ligt het stilstandswerkpunt ($\omega_{slip} = \omega_s$) overigens in dit gebied.

Ga na wat het een en ander in figuur 8.11 betekent.

In het uiterste geval geldt $\omega_{slip} = \infty$ en is het koppel gelijk aan nul. De stromen zijn dan het grootst. Voor de rotorhoeksnelheid geldt in dit geval: $\omega_m = -\infty$.

Ga na wat het een en ander in figuur 8.11 betekent.

Als de rotor sneller draait dan het draaiveld, is ω_{slip} negatief en is de machine in generatorbedrijf.

Werk het bovenstaande betoog zelf uit voor generatorbedrijf.

8.6.2 De koppelhoeksnelheidskarakteristiek

We gaan nu verder met de uitwerking van de uitdrukking voor het koppel uit de vermogensbalans voor de stator (8.54). Daarbij bedenken we dat alleen in de weerstand van figuur 8.11 vermogen omgezet wordt. Omdat we drie fasen hebben, kunnen we voor het statorvermogen schrijven (de stroomfasor volgt uit figuur 8.11):

$$P_s = 3\frac{\omega_s}{\omega_{slip}}R'_R|\underline{I}'_R|^2 = 3\frac{\omega_s}{\omega_{slip}}R'_R\left|\frac{\underline{U}_s}{\frac{\omega_s}{\omega_{slip}}R'_R + \mathrm{j}\,\omega_s\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}\right|^2$$

$$= 3\frac{\omega_s}{\omega_{slip}}R'_R\frac{|\underline{U}_s|^2}{\left(\frac{\omega_s}{\omega_{slip}}R'_R\right)^2 + \left(\omega_s\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s\right)^2} = \frac{3\frac{|\underline{U}_s|^2}{\omega_s\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}}{\frac{\frac{\omega_s}{\omega_{slip}}R'_R}{\omega_s\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s} + \frac{\omega_s\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}{\frac{\omega_s}{\omega_{slip}}R'_R}}$$

Met de definitie van de kipsliphoeksnelheid volgens (8.55), gaat deze uitdrukking over in:

$$P_s = \frac{3\frac{|\underline{U}_s|^2}{\omega_s\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}}{\frac{\omega_{slip,k}}{\omega_{slip}} + \frac{\omega_{slip}}{\omega_{slip,k}}}$$

Met de vermogensbalans voor de stator (8.54) vinden we vervolgens voor het koppel:

$$T_e = \frac{P_s}{\omega_s} = \frac{\frac{3}{\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}\left(\frac{|\underline{U}_s|}{\omega_s}\right)^2}{\frac{\omega_{slip,k}}{\omega_{slip}} + \frac{\omega_{slip}}{\omega_{slip,k}}}$$

Leid deze uitdrukking zelf rechtstreeks volledig af uit de vermogensbalans voor figuur 8.11.

We voeren nu het kipkoppel T_{ek} in volgens

$$T_{ek} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s}\left(\frac{|\underline{U}_s|}{\omega_s}\right)^2 = \frac{3}{2}\frac{|\underline{\Psi}_s|^2}{\frac{\sigma}{1-\sigma}L_s} \tag{8.56}$$

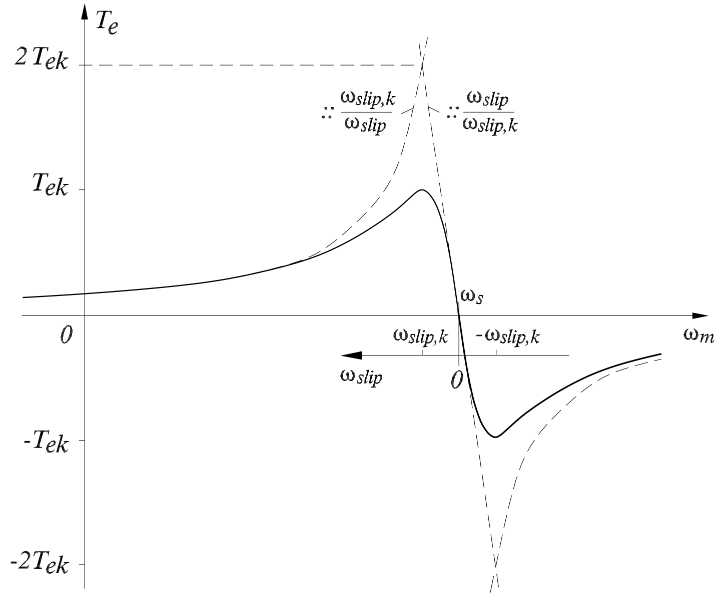
waarbij we figuur 8.11 hebben gebruikt voor de statorfluxfasor. Met deze definitie gaat de uitdrukking voor het koppel over in:

$$T_e = \frac{2T_{ek}}{\frac{\omega_{slip,k}}{\omega_{slip}} + \frac{\omega_{slip}}{\omega_{slip,k}}} \tag{8.57}$$

Met behulp van $\omega_{slip} = \omega_s - \omega_m$ volgens (8.14), kunnen we hiermee de karakteristiek volgens figuur 8.14 samenstellen.

Ga zelf na hoe deze grafiek geconstrueerd kan worden. Gebruik hierbij $\omega_{slip,k} \ll \omega_{slip}$ en $\omega_{slip} \ll \omega_{slip,k}$.

Lees voor een nadere interpretatie van deze karakteristiek nog eens het einde van subparagraaf 8.6.1.



Figuur 8.14 Het elektromagnetische koppel als functie van de rotorhoeksnelheid

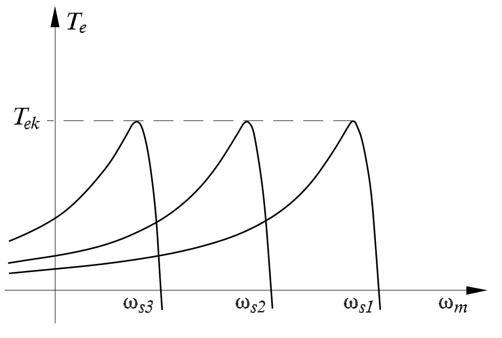
8.7 De inductiemachine bij variabele voedingsfrequentie

De praktische mogelijkheden om bij een inductiemachine het koppel, en daarmee het toerental, in te stellen zijn beperkt. Dat kunnen we zien als we kijken naar de koppelvergelijking (8.57) gecombineerd met (8.56). Om de koppelhoeksnelheidskarakterisitiek te beïnvloeden, kunnen we de frequentie van de voedende bron instellen. Dat kan bijvoorbeeld op praktische wijze met behulp van een spanningsinvertor. Om daarbij het kipkoppel constant te houden, moeten we de grootte van de met de statorspoelen gekoppelde fluxen ($|\underline{\Psi}_s|$) constant houden. Dit betekent dat de statorspanning evenredig moet zijn met de statorfrequentie.

Ga dit zelf na met (8.56).

In figuur 8.15 zijn voor dit geval als voorbeeld enkele koppelhoeksnelheidskarakteristieken gegeven. Deze karakteristieken gelden alleen voor $R_s = 0$. Bij voeding met een lage frequentie moeten we er aan denken dat we $R_s = 0$ alleen mogen gebruiken als de statorweerstand veel kleiner is dan de reactanties in het vervangingsschema.

Waarom zou dit een probleem kunnen zijn?



Figuur 8.15 Koppelhoeksnelheidskarakteristieken bij $R_s = 0$ voor een vaste waarde van de statorflux bij verschillende waarden van de statorfrequentie

8.8 Vraagstukken

De uitwerkingen van onderstaande vraagstukken staan op de internetsite http://www.vssd.nl/hlf/e004.htm.

Opgave 8.1

In de paragrafen 8.2 tot en met 8.5 wordt een groot aantal uitdrukkingen afgeleid. Deze opgave geeft de mogelijkheid om ter illustratie voor een aantal van deze uitdrukkingen numerieke waarden te berekenen.

We beschouwen een inductiemachine met een rotor met twee rotorwikkelingen waarvan de assen dwars op elkaar staan. Voor de weerstand van de rotorwikkelingen geldt $R_{rd} = 100\ \Omega$. We nemen aan dat bij deze grote waarde van de rotorweerstand het effect van de rotorstromen op het veld verwaarloosbaar is.

De machine wordt gevoed uit een symmetrische driefasige stroombron met een frequentie van 50 Hz ($\omega_s = 2\pi 50$ rad/s). Voor de effectieve waarde de statorstromen geldt I_s = 7 A.

De rotor van de machine staat stil.

Van de machine zijn de volgende afmetingen en parameters gegeven:
$\mu_0 = 4\pi\, 10^{-7}$ H/m ; $N_s = 42$; $N_r = 1$; $\delta = 0.5$mm ; $l = 200$ mm ; $r = 97$mm.

8.1a Bereken de amplitude van het statordraaiveld $\hat{B}_{s1}$.

8.1b Bereken de amplitude van de met een rotorwikkeling gekoppelde flux $\hat{\psi}_{rd,s}$.

8.1c Bereken de amplitude van de in een rotorwikkeling geïnduceerde stroom $\hat{i}_{rd}$.

8.1d Bereken het koppel op de rotor T_e .

8.1e Bereken de inductiecoëfficiënt M .

8.1f Bereken de amplitude van de grondharmonische van het rotordraaiveld $\hat{B}_{r1}$. Is de aanname dat het effect van de rotorstromen op het veld verwaarloosbaar is gerechtvaardigd?

8.1g Bereken de waarde van de inductiecoëfficiënt L_{sm}.

8.1h Bereken de waarde van rotorweerstand R_r .

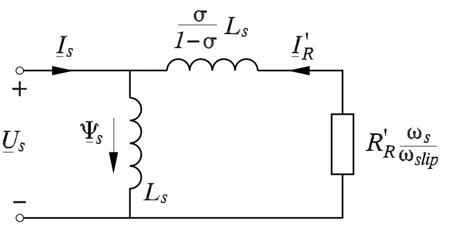
Een meer realistische set parameters voor een machine van deze afmetingen is $R_s = R_r = 0.3\ \Omega$; $L_{s\sigma} = L_{r\sigma} = 3$ mH ; de waarde van de inductiecoëfficiënt L_{sm} is berekend in opgave g. Bij deze waarden is het effect van de rotorstromen op het veld niet verwaarloosbaar. Deze set parameters wordt gegeven omdat die gebruikt kan worden om verschillende uitdrukkingen uit de rest van hoofdstuk 8 door te rekenen.

Opgave 8.2

Op de kenplaat van een inductiemachine staan meestal de nominale waarden van de spanning, de stroom, het vermogen, de frequentie en het toerental. Deze nominale waarden zijn de waarden waarvoor de machine gebouwd is; als de spanning, de stroom, het vermogen of de frequentie een waarde krijgen groter dan de nominale waarde, wordt de machine meestal te warm, waardoor de machine na enige tijd defect raakt. Meestal kan een inductiemachine wel voor korte tijd (enkele minuten) sterk overbelast worden.

In deze opgave wordt de machine gevoed uit een symmetrische driefasige spanningsbron met een frequentie van 50 Hz ($\omega_s = 2\pi 50$ rad/s).

Evenals bij een transformator worden de parameters van een inductiemachine vaak met behulp van metingen bepaald. In deze opgave zullen we uit



deze metingen de waarden van de parameters van het bovenstaande Γ-vervangingsschema bij benadering bepalen. De statorweerstand wordt hierbij verwaarloosd.

8.2a Bij de nullastproef draait de rotor van de machine synchroon ($\omega_m = \omega_s$) bij de nominale waarde van de spanning, U_s = 230 V, en wordt de stroom gemeten. Het resultaat is I_s = 50 A.
Bepaal de waarde van L_s .

8.2b Bij de kortsluitproef wordt de rotor geblokkeerd ($\omega_m = 0$); bij een verlaagde spanning worden de spanning, de stroom en het vermogen gemeten. De resultaten zijn U_s = 40 V, I_s = 200 A en P = 1500 W .
N.B. het vermogen is het totaal via drie fasen toegevoerde vermogen.
Bepaal de waarden van de parameters σ en R'_R . Hierbij mag verondersteld worden dat de stroom door L_s nul is ($\underline{I}_{R'} = -\underline{I}_s$) omdat de impedantie j $\omega_s L_s$ groot is vergeleken met de impedantie j $\omega_s \frac{\sigma}{1-\sigma} L_s + R'_R$.

8.2c Bereken de hoeksnelheid waarbij de machine zijn maximale koppel levert $\omega_{m,k}$.

8.2d Het toerental waarbij de machine zijn nominale koppel levert, het nominale toerental, is 2970 omwentelingen per minuut.
Bereken de nominale waarde van de hoeksnelheid $\omega_{m,nom}$, dat wil zeggen de waarde van de hoeksnelheid die bij het nominale toerental hoort.

8.2e De machine wordt gevoed uit een spanningsbron die gerepresenteerd wordt door de fasor $\underline{U}_s$ = 230 V. Bereken de statorstroomfasor, het koppel en de arbeidsfactor (de cos φ) voor de volgende gevallen.
$\omega_m = 0$ (het aanlooppunt, de machine is ingeschakeld, maar de rotor staat stil)
$\omega_m = \omega_{m,k}$ (de machine levert zijn kipkoppel)
$\omega_m = \omega_{m,nom}$ (de machine werkt in zijn nominale punt)
$\omega_m = \omega_s$ (de rotor draait synchroon)
In welke van de bovengenoemde vier bedrijfstoestanden kan de machine langdurig werken?

8.2f Schets bovengenoemde statorstroomfasoren in het complexe vlak.

8.2g Bereken het aanloopkoppel (het koppel bij $\omega_m = 0$) voor het geval dat geldt R'_R = 25 mΩ .

Bijlage A Fourierreeksen

Omdat in de elektrische energietechniek zeer veel met periodieke grootheden gewerkt wordt, worden in dit vakgebied vaak fourierreeksen gebruikt. In deze bijlage worden de fourierreeksen op beknopte wijze behandeld; voor een formele behandeling wordt naar andere onderdelen van het curriculum verwezen. We beschouwen hier grootheden die periodiek in de tijd zijn. Bij elektrische machines komen echter ook vaak periodieke functies voor van positiehoeken (zie bijvoorbeeld paragraaf 7.3).

Alle periodieke grootheden in een fysisch systeem kunnen worden weergegeven als een fourierreeks in de vorm:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 + A_1 \cos\omega t + A_2 \cos 2\omega t + A_3 \cos 3\omega t + \ldots.. \\ &\qquad + B_1 \sin\omega t + B_2 \sin 2\omega t + B_3 \sin 3\omega t + \ldots.. \\ &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t \right) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Hierin is $\omega = 2\pi/T$ de hoekfrequentie van de grondharmonische, waarbij T de periodetijd is.

In het algemeen bestaat de reeks uit een oneindig groot aantal sinus- en cosinusgolven met (hoek)frequenties die een geheel veelvoud zijn van die van de grondharmonische (n=1). Zuiver wiskundig gezien kan niet elke periodieke functie als een fourierreeks geschreven worden, maar bij functies die fysische grootheden voorstellen, treden geen problemen op.

De coëfficiënten van de termen in de fourierreeks volgen uit:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, \mathrm{d}t \tag{A.2}$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, \cos n\omega t\, \mathrm{d}t \tag{A.3}$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, \sin n\omega t\, \mathrm{d}t \tag{A.4}$$

Vergelijking (A.2) geeft de gemiddelde waarde of ”gelijk”-component van de functie $f(t)$.

Deze uitdrukkingen worden ook vaak in een vorm geschreven waarbij ωt als integratievariabele optreedt:

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t)\, \mathrm{d}\omega t \tag{A.5}$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t)\ \cos n\omega t\ \mathrm{d}\omega t \tag{A.6}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\omega t)\ \sin n\omega t\ \mathrm{d}\omega t \tag{A.7}$$

Meestal zijn de laatste uitdrukkingen handiger.

De uitdrukkingen voor de coëfficiënten kunnen afgeleid worden uit vergelijking (A.1) door deze vergelijking aan beide zijden met een geschikte functie te vermenigvuldigen en vervolgens de zo ontstane vergelijking te integreren over één periode. Als we bijvoorbeeld de beide zijden van vergelijking (A.1) met 1 vermenigvuldigen en vervolgens over één periode integreren, krijgen we de uitdrukking voor A_0 ((A.5)):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\omega t)\ \mathrm{d}\omega t &= \int_0^{2\pi} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t + B_n \sin n\omega t) \right)\ \mathrm{d}\omega t \\ &= \int_0^{2\pi} A_0\ \mathrm{d}\omega t\ =\ 2\pi A_0 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Bij het integreren is een belangrijke eigenschap van de termen in de reeks gebruikt: de integraal over een periode van $f(\omega t)$ is gelijk aan nul voor elke sinusvormige functie waarvan de frequentie een geheel veelvoud is van de frequentie van de grondharmonische. Deze en de volgende eigenschappen zijn van belang voor de afleiding van de uitdrukkingen (A.5), (A.6) en (A.7):

$$\int_0^{2\pi} \cos n\omega t\ \mathrm{d}\omega t\ =\ 0 \quad ; \quad \int_0^{2\pi} \sin n\omega t\ \mathrm{d}\omega t\ =\ 0 \tag{A.9}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos n\omega t\ \sin n\omega t\ \mathrm{d}\omega t = 0 \tag{A.10}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 n\omega t\ \mathrm{d}\omega t\ =\ \pi \quad ; \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 n\omega t\ \mathrm{d}\omega t\ =\ \pi \tag{A.11}$$

Hierbij is n een positief geheel getal. Bij de volgende vergelijkingen zijn n en m positieve gehele getallen die niet gelijk zijn aan elkaar:

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \cos n\omega t\ \sin m\omega t\ \mathrm{d}\omega t\ = 0 \quad ; \quad \int_0^{2\pi} \cos n\omega t\ \cos m\omega t\ \mathrm{d}\omega t\ = 0 \\ &\int_0^{2\pi} \sin n\omega t\ \sin m\omega t\ \mathrm{d}\omega t\ = 0 \qquad\qquad m \neq n \end{aligned} \tag{A.12}$$

Bij de bepaling van de coëfficiënten van een fourierreeks kunnen we vaak handig gebruik maken van symmetrie-eigenschappen van de functie $f(\omega t)$. De volgende drie soorten symmetrie komen vaak voor:

- $f(\omega t) = -f(-\omega t)$: oneven functie; de reeks bestaat alleen uit sinus-termen;
- $f(\omega t) = f(-\omega t)$: even functie; de reeks bestaat alleen uit cosinus-termen;
- $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$: de reeks bestaat alleen uit oneven harmonischen.

Voorbeeld 1

Als voorbeeld zullen we vergelijking (A.6) afleiden. Daartoe vermenigvuldigen we beide zijden van (A.1) $\cos m\omega t$ en integreren vervolgens de zo ontstane vergelijking over één periode:

$$\int_0^{2\pi} f(\omega t)\cos m\omega t \,\mathrm{d}\,\omega t$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega t \;+\; B_n \sin n\omega t) \right) \cos m\omega t \,\mathrm{d}\,\omega t$$

$$= \int_0^{2\pi} A_0 \cos m\omega t \,\mathrm{d}\,\omega t + \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t \right) \cos m\omega t \,\mathrm{d}\,\omega t$$

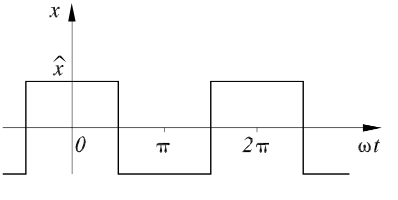
$$+ \int_0^{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\omega t \right) \cos m\omega t \,\mathrm{d}\,\omega t$$

$$= \int_0^{2\pi} A_m \cos^2 m\omega t \,\mathrm{d}\,\omega t \;=\; A_m \pi$$

Hierbij hebben we de vergelijkingen (A.9), (A.10), (A.11) en (A.12) gebruikt om het rechterlid te vereenvoudigen. Als we in deze vergelijking de letter m door de letter n vervangen, vinden we (A.6).

Voorbeeld 2

In dit voorbeeld bepalen we de fourierreeks van nevenstaande functie. Voor deze functie gelden de symmetrie- eigenschappen $f(\omega t) = f(-\omega t)$ en $f(\omega t) = -f(\omega t + \pi)$.



De fourierreeks bestaat dus alleen uit cosinus-termen voor de oneven harmonischen. Uit (A.6) volgt:

$$
\begin{aligned}
A_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \hat{x}\cos n\omega t\,\mathrm{d}\,\omega t + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (-\hat{x})\cos n\omega t\,\mathrm{d}\,\omega t + \frac{1}{\pi}\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \hat{x}\cos n\omega t\,\mathrm{d}\,\omega t \\
&= \frac{\hat{x}}{\pi n}\left(\sin n\omega t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin n\omega t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + \sin n\omega t\Big|_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}\right) \\
&= \frac{\hat{x}}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} - \sin\frac{3\pi n}{2} + \sin\frac{\pi n}{2} - \sin\frac{3\pi n}{2}\right) \\
&= \frac{2\hat{x}}{\pi n}\left(\sin\frac{\pi n}{2} - \sin\frac{3\pi n}{2}\right) = \frac{4\hat{x}}{\pi n}\cos\frac{4\pi n}{4}\,\sin\frac{-2\pi n}{4}
\end{aligned}
\tag{A.13}
$$

Uit deze uitdrukking blijkt direct dat A_n gelijk is aan nul als n even is. We kunnen de functie $x(\omega t)$ dus weergeven als:

$$
\begin{aligned}
x(\omega t) = \frac{4\hat{x}}{\pi}\Bigg(&\cos\omega t - \frac{1}{3}\cos 3\omega t + \frac{1}{5}\cos 5\omega t \\
&- \frac{1}{7}\cos 7\omega t + \frac{1}{9}\cos 9\omega t - \ldots\ldots\Bigg)
\end{aligned}
$$

We hadden de integratie om uitdrukking (A.13) te verkrijgen nog kunnen vereenvoudigen door gebruik te maken van de symmetrie van de golfvorm. In dit geval hadden we kunnen volstaan met de integratie over slechts een kwart periode. Het zo ontstane resultaat hadden we vervolgens met vier moeten vermenigvuldigen

Literatuur

CAR 90 Carlson, A.B.; D.G. Gisser:
Electrical Engineering: concepts and applications.
Addison−Wesley Publishing Company, 1990 (2nd edition)

CHA 63 Chang, S.S.L.: Energy conversion. Prentice Hall inc., 1963

CHA 91 Chapman, Stephen J.: Electrical Machinery Fundamentals.
McGraw−Hill Book Company,1991

ELG 77 Elgerd, Olle I.: Basic electric power engineering.
Addison−Wesley Publishing Company, 1977

ELH 86 El−Hawary, M.E.: Principles of electric machines with power electronics. Englewood Cliffs: Prentice−Hall, 1991

HAR 80 Harrison, J.A.: An introduction to electric power systems.
London: Longman, 1980

HOF 86 Hoft, Richard G.: Semiconductor power electronics.
New York: Van Nostrand Reinhold, 1986

LAI 80 Laithwaite, E.R.; L.L. Freris: Electric Energy: its generation, transmission and use. London: McGraw−Hill, 1980

MCL 84 McLaren, P.G.: Elementary electric power and machines.
New York: Wiley, 1984

MOH 89 Mohan, Ned; Tore M. Undeland; William P. Robbins:
New York: Wiley, 1989

NAS 83 Nasar, S.A.; L.E. Unnewehr: Electromechanics and Electric Machines. Chichester: Wiley 1983

RAM 90 Ramshaw; van Heeswijk: Energy conversion; electric motors and generators.
Philadelphia: Saunders College Publishing, 1990

SEN 89 Sen, P.C.: Principles of electric machines and power electronics. New York: Wiley, 1989

SHU 88 Shultz, Richard D.; Richard A. Smith: Introduction to electric power engineering. New York: Wiley, 1988

STE 79 Stein, Robert; William T. Hunt:
Electric power system components: transformers and rotating machines. New York: Van Nostrand Reinhold, 1979

WHI 59 White, David C.; Herbert H. Woodson: Electromechanical energy conversion. New York: Wiley, 1959

WIL 91 Wildi, Theodore: Electrical machines, drives, and power systems. Englewood Cliffs: Prentice−Hall, 1991

ZAC 79 Zach, Franz: Leistungselektronik. Wien: Springer, 1979

Symbolen

Symbolen

Symbool	Grootheid	Eenheid
A	oppervlakte/doorsnede (Area)	m^2
B	magnetische fluxdichtheid	T of Vs/m^2
C	capaciteit	F
d	relatieve inschakelduur (duty ratio)	-
D	elektrische verplaatsing	C/m^2
E	elektrische veldsterkte	V/m
f	frequentie	Hz
F	kracht (Force)	N
F_m	magnetomotorische kracht	A
g	valversnelling: 9.81 m/s^2	
H	magnetische veldsterkte	A/m
i	stroom	A
J	stroomdichtheid	A/m^2
J	massatraagheidsmoment	kgm^2
K	machineconstante bij gelijkstroommachines	-
K_s	veerconstante (spring)	N/m
l	lengte	m
L	coëfficiënt van (zelf)inductie	H
L_{sa}	coëfficiënt van zelfinductie van een statorfase	H
L_s	synchrone inductiviteit	H
m	massa	kg
M	coëfficiënt van wederzijdse inductie (Mutual)	H
n	rotatiefrequentie	omw/s
N	aantal windingen (Number)	-
p	vermogen	W
p	poolpaartal	-
Q	blindvermogen	var
r	straal	m
R	weerstand	Ω
R_m	reluctantie	A/Wb
S	schijnbaar vermogen	VA
T	periodetijd	s
T	koppel (Torque)	Nm
T_e	elektromagnetisch koppel	Nm
T_s	askoppel (shaft)	Nm

u	spanning	V
v	snelheid (velocity)	m/s
V	volume	m^3
w	energiedichtheid	J/m^3
W	energie (Work)	J
x	positie	m
X	reactantie	Ω
α	coëfficiënt voor visceuse wrijving	Nms/rad
α	ontsteekhoek	rad
δ	lasthoek	rad
δ	grootte van de luchtspleet	m
Δ	plaatdikte	m
ε	permittiviteit	F/m
η	rendement	-
θ	positiehoek van rotor	rad
μ	commutatiehoek	rad
μ	(magnetische) permeabiliteit	H/m
μ_r	relatieve (magnetische) permeabiliteit	-
μ_0	magnetische permeabliteit van vacuüm: $4\pi 10^{-7}$ H/m	
ρ	soortelijke weerstand	Ωm
ρ	elektrische ladingsdichtheid	C/m^3
σ	soortelijke geleiding	S/m of A/V/m
τ	tijdconstante	s
φ	fasehoek	rad
Φ	circuitflux	Wb of Vs
ψ	gekoppelde flux	Wb of Vs
ω	cirkelfrequentie	rad/s
ω	hoeksnelheid	rad/s
ω_m	mechanische hoeksnelheid	rad/s

Complexe grootheden

$\underline{x}$	complexe grootheid ($\underline{x} = \mathrm{Re}\,\underline{x} + \mathrm{j}\,\mathrm{Im}\,\underline{x}$)
$\mathrm{Re}\,\underline{x}$	reële deel van $\underline{x}$
$\mathrm{Im}\,\underline{x}$	imaginaire deel van $\underline{x}$
$\lvert\underline{x}\rvert$	modulus van $\underline{x}$
$\arg\underline{x}$	argument van $\underline{x}$
$\underline{x}^*$	complex toegevoegde (geconjugeerde) van $\underline{x}$

Periodieke grootheden

x	momentele waarde
X	effectieve waarde:

$$\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,\mathrm{d}t} = X_{eff}$$

of gemiddelde waarde:

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t = X_{av}$$

Sinusvormige grootheden

x	momentele waarde: $x = \hat{x}\cos(\omega t + \alpha) = X\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha)$
$\hat{x}$	amplitude
$\underline{\hat{x}}$	de complexe amplitude: $\hat{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}$
$\underline{X}$	de complexe effectieve (RMS) waarde (fasor): $X\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha} \quad (\lvert\underline{X}\rvert = X)$
$\underline{x}$	de complexe momentele waarde: $\hat{x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\alpha)}$

Een sinusvormige grootheid volgt uit de complexe grootheden met:

$$x = \mathrm{Re}(\underline{\hat{x}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}(\underline{X}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \mathrm{Re}(\underline{x})$$

Indices rechtsonder

a	fase *a*
av	gemiddeld (<u>av</u>erage)
b	fase *b*
c	fase *c*
dc	gelijkstroom of -spanning (<u>d</u>irect <u>c</u>urrent)
eff	effectief
f	bekrachtiging (<u>f</u>ield)
g	luchtspleet (<u>g</u>ap)
m	hoofdveld (<u>m</u>ain field)
m	mechanisch
p	poolrad
r	rotor
s	stator
σ	spreiding

Index